

Inv. 2. 458.

Inv. 88 636

Inv. 2449.

TRAITÉ

DES OMBRES

THÉORIE DES TEINTES, DES POINTS BRILLANTS
ET DE LA PERSPECTIVE CAVALIÈRE

515 (02)

PAR

J. ADHÉMAR

QUATRIÈME ÉDITION

REVUE ET CORRIGÉE



PARIS

ARMAND COLIN ET C^{IE}, ÉDITEURS

16, RUE DE CONDÉ, 16

1875

3929.

953

1961

L

CONTROL 1961

BIBLIOTECA CERCETARII SI TR. TEOR. SI APIC. MATEMATICI
COTA 2449

RC239/03

B.C.U. Bucuresti

C3929

1961

AVIS.

Les nombres placés en tête, et du côté opposé au numéro de chaque page, indiquent la planche; les numéros des figures sont indiqués dans le texte; enfin, les nombres placés seuls et entre parenthèses sont des renvois aux articles précédents.

Le numéro de chaque article est au commencement de l'alinéa.

PRÉFACE.



Cette édition de mon *Traité des ombres* diffère beaucoup de la première :

1° Par la démonstration de plusieurs principes qui ne m'avaient pas paru assez développés ;

2° Par l'addition d'un assez grand nombre de planches destinées à fortifier les élèves sur les exercices graphiques.

J'ai pensé qu'il serait utile de placer ici les études d'ombres que j'ai récemment publiées dans le recueil d'épures et de questions de concours.

Ces problèmes formeront le complément naturel de ce traité.

J'ai donné quelques nouvelles planches concernant la surface annulaire qui contient les éléments de toutes les surfaces de révolution.

Enfin, j'ai ajouté un chapitre sur la construction des cadrans solaires.

Le lecteur ne doit pas se laisser effrayer par la vue de plusieurs grandes planches qui font partie de l'atlas.

Une question très-composée est bientôt résolue, lorsqu'elle est bien comprise, et l'exécution d'une grande épure est souvent moins longue que l'étude d'un principe exprimé par deux ou trois lignes.

D'ailleurs, ces grandes épures ne sont jamais nécessaires dans les applications, et c'est précisément pour ne pas être obligé d'en faire beaucoup par la suite, qu'il faut en faire quelques-unes actuellement : si l'on emploie le compas maintenant, c'est pour se mettre en état de s'en passer plus tard.

Il est vrai que beaucoup d'artistes aiment mieux s'en passer toujours ; ils prétendent qu'ils savent *tracer les ombres de sentiment*. Il est fâcheux que cela ne signifie absolument rien.

C'est là une de ces phrases d'atelier que l'on répète par habitude parce qu'on les a entendu dire, et qui n'ont aucun sens.

En effet, *tracer les ombres de sentiment*, cela ne veut pas dire, pour certains artistes, qu'ils savent opérer sans le secours du compas ; cela veut dire pour eux, qu'ils sont en état de tracer les ombres *sans en avoir étudié les principes*. Or on pourra bien, en éclairant fortement un modèle ou un plâtre, copier les ombres que

l'on a sous les yeux, mais lorsque l'on ira reporter ces croquis sur la toile, il n'y aura plus aucun accord entre les ombres obtenues dans l'atelier et la lumière qui est censée éclairer ce tableau.

D'ailleurs, on n'a pas toujours un modèle convenable ; la lumière n'est pas toujours du même côté, ni à la même hauteur. Il faut donc, par le raisonnement, et par de nombreuses études, s'exercer à prévoir les modifications qui résultent de la forme des objets, et de leur position par rapport à la lumière.

Ces études, qui effrayent tant les artistes, ont moins pour but de leur apprendre à dessiner, ce qu'ils font souvent très-bien, que de leur apprendre à bien voir, et à ne pas confondre les *effets* avec les *illusions* d'optique si dangereuses dans la pratique des beaux-arts.

J'ai adopté, pour les planches ajoutées à cette nouvelle édition, la notation que j'ai proposée au commencement de l'ouvrage que je publie sur les exercices de géométrie descriptive.

Ainsi, je désignerai par $A'Z'$ la trace du plan vertical de projection sur lequel tous les points sont accentués par des ' ; par $A''Z''$, la trace du plan de projection sur lequel tous les points sont accentués '' , etc. Cette notation diffère un peu de celle qui avait été employée et qui a dû être conservée sur les planches de la première édition, où les accents indiquaient l'ordre suivant le-

quel on devait construire les projections de chaque point, tandis que, dans la notation actuelle, les accents indiquent l'ordre suivant lequel les différents plans de projection sont venus successivement concourir à la solution du problème.

J'ai fait disparaître de ce traité l'expression de *ligne de terre*, que j'avais employée dans la première édition.

J'ai dit, dans les exercices et dans le Traité de géométrie descriptive, pourquoi il ne me semble pas convenable de nommer ainsi l'intersection des plans de projection.

Mais, à toutes les raisons que j'ai données, je crois devoir en ajouter une qui me paraît décisive : c'est que la droite que certaines personnes désignent par le nom de *ligne de terre* n'indique jamais dans les épures, la surface du terrain, mais la trace du plan vertical de projection.

En effet, les ingénieurs et les architectes, toutes les personnes enfin qui sont familiarisées avec les *applications* de la géométrie descriptive, savent très-bien que dans les études d'un projet il peut y avoir un grand nombre de profils, coupes ou élévations, et, par conséquent, autant de plans verticaux de projection ; mais il n'y aura jamais qu'un *seul plan horizontal de projection*, quelle que soit la hauteur du sol par rapport au projet, ou du projet par rapport au sol.

Toutes les coupes horizontales d'un monument ou

d'une maison pourront différer entre elles suivant l'étage dont elles expriment la distribution intérieure ; mais elles ne dépendront pas de la hauteur *du plan horizontal* sur lequel on les aura projetées.

Il est bien certain que, dans les épures d'un canal ou dans le profil d'une galerie souterraine, la ligne AZ ne représente pas la surface de la terre, qui n'est presque jamais de niveau, ni dans le projet ni dans le terrain naturel.

Le mot de ligne de terre conviendrait tout au plus pour désigner la hauteur du sol, sur un dessin isolé, qui ne contiendrait que la projection verticale ou *élévation* d'un monument ou d'une machine : mais, dès que l'on réunit sur une même feuille les deux projections d'un objet, c'est le plan horizontal qui est la projection essentielle, et la ligne AZ est, par conséquent, *la trace du plan vertical de projection*.

Je conçois que, dans les écoles préparatoires, où l'on fait très-peu d'épures, les jeunes gens s'habituent à regarder le tableau devant lequel ils sont toute la journée, comme *le plan principal de projection* ; et, dans ce cas, il est naturel qu'ils cherchent à exprimer sur ce premier plan quelle est la hauteur du second : mais s'ils connaissaient le but de la géométrie descriptive, ils sauraient que, dans une question composée, de construction ou d'architecture, tout se rapporte à la projection horizontale ou *plan d'ensemble*, et que les nombreux profils, coupes ou détails nécessaires

pour l'exécution du projet, ne sont que des projections secondaires, rabattues en tournant autour de lignes horizontales, qui sont souvent *situées à toutes les hauteurs*, et qui, par conséquent, n'ont rien de commun avec la terre.

OMBRES.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITION, PRINCIPE GÉNÉRAL.

1. *L'ombre est l'absence de la lumière ; il y a ombre là où les rayons de la lumière ne peuvent pas arriver.*

2. Cette définition étant admise, concevons (*fig. 1, pl. 1*), un corps quelconque éclairé par les rayons lumineux qui partent d'un point *s*. Ces rayons sont de trois espèces :

1° *Les rayons qui rencontrent la masse du corps ;*

2° *Ceux qui touchent le corps ;*

3° *Ceux qui ne le rencontrent pas.* Or, les rayons qui, partant du point *s*, s'appuient sur le corps, forment une surface de cône, tangente, et dont l'intersection avec le plan *p* ou toute autre surface déterminera le contour de l'ombre portée par le corps sur cette surface.

La courbe *amb*, suivant laquelle la surface du corps est touchée par le cône qui l'enveloppe, sépare, sur cette surface, la partie éclairée de celle qui est obscure.

La question qui va nous occuper peut donc s'énoncer ainsi, d'une manière générale :

3. *La forme et la grandeur d'un corps étant déterminées, ainsi que la direction des rayons de lumière, on demande de construire :*

1° *La ligne qui, sur la surface du corps, sépare la partie éclairée de celle qui est obscure ;*

2° *La ligne formant le contour de l'ombre portée par le corps sur les surfaces extérieures.*

4. Il est facile de reconnaître que si la première de ces deux lignes était déterminée, elle deviendrait la directrice du cône dont l'intersection avec les surfaces extérieures serait le contour de l'ombre portée.

5. Lorsque le corps éclairé est un polyèdre (*fig. 2*), la *ligne de séparation* se compose de toutes les arêtes qui séparent les faces éclairées des faces obscures. Tous les plans qui contiennent ces arêtes et le point lumineux forment une pyramide dont l'intersection avec le plan p donne un polygone pour l'ombre portée par le polyèdre.

Lumière du soleil.

6. Dans le dessin de l'ingénieur, on suppose toujours que la lumière provient du soleil, et dans ce cas on admet que les rayons sont parallèles entre eux.

Il résulte de cette hypothèse que le cône ou la pyramide formée par les rayons lumineux qui enveloppent le corps deviennent un cylindre ou un prisme, ce qui ne change rien à la définition générale que nous venons d'énoncer ; ainsi, nous supposerons, dans toutes les épures qui vont

suivre, que les rayons de lumière sont parallèles et qu'ils sont envoyés par le soleil.

Principes.

7. Il y a, pour déterminer le contour des ombres, deux principes généraux que l'on peut désigner ainsi :

1° *Principe des plans coupants ;*

2° *Principe des plans tangents.*

Principe des plans coupants.

8. *Première opération.* On coupera le corps par un plan parallèle à la direction des rayons lumineux ; ce plan contiendra nécessairement une infinité de rayons.

Deuxième opération. On construira (*fig. 3*), par les moyens indiqués dans la géométrie descriptive, la courbe $mm'nn'u$ résultant de la section de la surface du corps par le plan.

Troisième opération. On tracera tous les rayons tangents qu'il sera possible de mener à cette courbe. Chaque rayon contiendra deux points essentiels, savoir un point de tangence tel que m , et un point d'intersection m' .

On déterminera avec la plus grande exactitude possible tous les points de tangence et tous les points d'intersection.

En coupant de nouveau le corps par d'autres plans parallèles aux rayons de lumière, on obtiendra autant de points que l'on voudra.

9. La courbe qui passe par tous les points de tangence forme, sur la surface du corps, la séparation entre la partie qui est éclairée et celle qui est obscure, et la courbe qui contient les points d'intersection est le contour de l'ombre portée. Ainsi la courbe mu est une ligne de *séparation*, tan-

dis que $m'u'$ est une courbe d'ombre portée; nv est une ligne de séparation, $n'v'z$ est une courbe d'ombre portée.

On reconnaît de plus que la courbe $m'u'$ est l'ombre de mu et que $n'v'z$ est l'ombre portée par la courbe nv .

10. Enfin, mu est la directrice d'un cylindre dont l'intersection avec la surface du corps est $m'u'$, et la courbe nv est la directrice d'un second cylindre qui coupe le plan p suivant $n'v'z$.

11. Le principe général que nous venons d'énoncer étant bien compris, il ne restera plus, dans chaque cas particulier; qu'à choisir le système de plans coupants le plus simple, pour avoir des intersections faciles à construire, et le plus promptement possible.

Principe des plans tangents.

12. *Première opération.* On construira (*Géom. descrip.*) un plan tangent parallèle à la direction des rayons lumineux. Ce plan touchera le corps en un point m (*fig. 4*), que l'on déterminera le plus exactement qu'il sera possible, et qui fera partie de la ligne de séparation. En effet, le plan p' étant parallèle au rayon lumineux, contient nécessairement celui qui touche le corps au point m .

La même construction, étant répétée, fera connaître autant de points que l'on voudra de la ligne de séparation.

Deuxième opération. La ligne de séparation étant déterminée, on la prendra pour la directrice d'un cylindre dont l'intersection avec le plan p , ou toute autre surface, sera l'ombre portée par le corps sur cette surface.

Direction de la lumière.

13. La direction de la lumière est ordinairement déter-

minée par ses deux projections ab , $a'b'$ (fig. 5), mais il arrive souvent, lorsque la question est composée, que l'on juge à propos d'employer un ou plusieurs plans auxiliaires de projection. Dans ce cas, il faudra déterminer la projection du rayon de lumière sur chacun de ces nouveaux plans.

14. Ainsi, par exemple, $a''b''$ sera la projection du rayon ab , $a'b'$ sur le plan vertical pq , que l'on suppose rabattu sur l'épure en tournant autour de sa trace verticale.

15. *Ombre à 45°.* Dans les études, on fera bien de donner aux rayons de lumière toutes sortes de directions. Cela contribue à varier les difficultés et familiarise avec tous les effets d'ombre qui peuvent avoir lieu. Mais dans les dessins de l'ingénieur, on s'assujettit presque toujours à cette condition que les rayons lumineux soient parallèles à la diagonale d'un cube qui aurait ses faces parallèles aux plans de projections.

Il résulte de la figure 6 que les deux projections ab , $a'b'$ du rayon de lumière font, avec la ligne AZ , des angles de 45°.

Par suite de la convention précédente l'étendue des ombres portées sur les faces parallèles aux plans de projections permettra d'apprécier la saillie des corps qui portent ces ombres ; ce qui, dans certains cas, rendra complète, avec une seule projection, la description de l'objet que l'on dessine.

16. Si l'on était conduit par la nature de la question à faire usage d'un troisième plan de projection perpendiculaire aux deux premiers, la projection $a''b''$ du rayon lumineux sur ce troisième plan ferait encore, avec la ligne AZ , un angle de 45°.

17. *Rayon lumineux faisant un angle de 45° avec sa projection.* Lorsque l'on ne trace les ombres que sur l'un des

deux plans de projection, on peut adopter une direction de la lumière qui fasse un angle de 45° avec sa projection. La direction de cette projection est, du reste, indéterminée et peut toujours être choisie de manière à produire le meilleur effet possible sous le rapport du dessin.

Il résulte de cette convention que *l'ombre portée par un point sur le plan de projection ou sur tout autre plan qui lui serait parallèle sera éloignée de la projection du point d'une quantité égale à la distance qui existe entre ce point et le plan sur lequel son ombre est portée.*

Ce qui permettra d'apprécier les saillies aussi facilement que par la méthode précédente.

CHAPITRE II.

POLYÈDRES.

18. Les faces d'un polyèdre étant nécessairement planes, chacune d'elles sera toujours entièrement éclairée ou entièrement obscure, à moins qu'elles ne reçoivent l'ombre portée par quelque corps étranger.

Ainsi les arêtes d'un polyèdre peuvent être classées de la manière suivante :

1° Les arêtes éclairées qui proviennent de l'intersection de deux faces éclairées ;

2° Les arêtes obscures qui résultent de l'intersection de deux faces obscures ;

3° Les arêtes qui résultent de l'intersection d'une face éclairée avec une face obscure.

19. L'ensemble de ces dernières lignes compose, sur la surface du polyèdre, la *ligne de séparation* entre la partie éclairée et celle qui est obscure. Tous les rayons qui s'appuient sur ces arêtes forment un prisme qui enveloppe le corps, et dont l'intersection avec les surfaces extérieures détermine le contour de l'ombre portée par le polyèdre.

Ainsi, dans tous les cas, le principe général consiste à concevoir le corps enveloppé par une surface parallèle aux rayons lumineux et qui aurait pour directrice la ligne ou l'ensemble des lignes qui, sur la surface du corps, séparent la partie qui est éclairée de celle qui est obscure.

20. La surface enveloppante dont nous venons de parler sera celle d'un cylindre ou d'un prisme, suivant que *la ligne*

de séparation sera composée de courbes et de lignes droites.

La détermination de l'ombre portée ne consiste plus qu'à construire l'intersection du cylindre ou du prisme enveloppant avec les surfaces extérieures.

Or, toutes ces questions ayant été résolues dans la *Géométrie descriptive* que je suppose connue du lecteur, nous pouvons, dès à présent, regarder la théorie des ombres comme complète. Il ne nous reste plus qu'à choisir, comme sujets d'exercices, les exemples les plus convenables pour nous familiariser avec les difficultés de l'application.

21. *Premier exemple.* Supposons que l'on veuille construire (*fig. 7, pl. 2*) l'ombre d'une droite, ayant pour projection verticale le point 1.2, et pour projection horizontale la droite 1-2 perpendiculaire à la ligne AZ.

22. Il est bien entendu que l'on doit admettre que cette ligne représente ici une tringle de bois ou de métal très-mince ; car, il est évident qu'une ligne géométrique n'intercepterait aucun rayon lumineux, et ne pourrait par conséquent produire aucune ombre.

Tous les rayons lumineux qui s'appuient sur la droite donnée formeront un plan perpendiculaire au plan vertical de projection. La droite 1.2 2' parallèle à la projection verticale du rayon de lumière sera l'ombre de la ligne donnée.

23. En général, *lorsqu'une droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, son ombre sur ce plan est parallèle à la projection du rayon de lumière.* L'ombre du point 2 résulte de l'intersection du rayon qui passe par ce point avec le plan vertical de projection.

24. *Deuxième exemple.* Soient (*fig. 10*) les deux projections d'un triangle horizontal dont les sommets sont projetés

par les trois points 1, 2, 3 ; on concevra par chaque sommet un rayon de lumière dont on déterminera l'intersection avec le plan horizontal. Ces points étant joints entre eux par des lignes droites, on aura le contour de l'ombre portée par le triangle sur le plan horizontal.

On remarquera ici que l'ombre portée par le triangle est égale à cette figure elle-même. Cela provient de ce que les plans contenant les rayons lumineux qui s'appuient sur les trois côtés du triangle donné forment un prisme triangulaire. Or, le triangle et son ombre étant deux sections horizontales, et par conséquent parallèles dans un même prisme, doivent être égales.

25. En général, *l'ombre portée par une figure plane sur un plan qui lui est parallèle est toujours égale à cette figure.*

26. *Troisième exemple. Ombre d'un prisme vertical (fig. 8).*
Si par les arêtes verticales 1.2, 4.5 on conçoit deux plans parallèles au rayon de lumière, il sera facile de reconnaître que les faces 1.2-6, 4.5-6 sont éclairées, tandis que les faces 1.2-3, 4.5-3 sont obscures ; et comme la base supérieure est éclairée, il en résulte que la ligne qui sépare la partie éclairée de celle qui est obscure passe par les sommets 1, 2, 3, 4, 5. En construisant l'ombre de chacun de ces points (23), le contour de l'ombre portée sera déterminé.

27. *Quatrième exemple.* Dans la figure 9, le prisme est hexagonal, et il sera facile de reconnaître, comme dans l'exemple précédent, que la ligne de séparation passe par les sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Les sommets 1, 2, 3, 4 porteront leur ombre sur le plan vertical ; mais on remarquera que l'ombre de l'arête 4 et 5 fait un pli, et qu'une partie de cette ombre a lieu sur le plan vertical de projection, tandis que le reste de l'ombre de la même droite se porte sur le plan horizontal.

On détermine d'abord $5'$ qui est l'ombre du point 5 sur le plan vertical, comme si le plan horizontal n'existait pas, et l'on tracera la droite $4'-5'$ dont on ne conservera que la partie $4'-m$. On construira ensuite le point $5''$ qui est l'ombre du point 5 sur le plan horizontal, et la droite $m5''$ complétera l'ombre de l'arête 4-5.

En continuant à tourner dans le même sens on déterminera, sur le plan horizontal, les points $6'$, $7'$, $8'$ et $1''$, de sorte que $8'-1''$ sera l'ombre de l'arête 8-1; on ne conservera que $8'-n$ et l'on joindra le point n avec $1'$ par lequel nous avons supposé que l'on avait commencé.

Ligne de séparation sur les polyèdres.

28. Dans les deux exemples précédents, la ligne de séparation était facile à reconnaître, mais lorsqu'il y aura quelque incertitude on pourra raisonner de la manière suivante : soient ab , bc (fig. 11) les sections de deux faces adjacentes, par un plan parallèle aux rayons de lumière; soit de plus mn l'un de ces rayons venant dans la direction indiquée par la flèche F; il est facile de reconnaître que la face ab sera éclairée, tandis que la face bc sera dans l'ombre, puisqu'un rayon lumineux ne pourrait parvenir à cette face qu'en traversant la masse qui est indiquée par des hachures.

Dans la fig. 12 les deux faces ab , bc sont éclairées, tandis que si la lumière venait dans le sens contraire de celui indiqué par la flèche, les deux faces seraient obscures.

29. De ce qui précède on peut conclure cette règle générale :

1° On coupera le polyèdre par un plan parallèle à la direction de la lumière, ce qui donnera un polygone A (fig. 16

2° On construira, par chacun des sommets de ce polygone, un rayon lumineux.

Ceux de ces rayons qui n'entrent pas dans le polygone déterminent les arêtes formant la ligne de séparation.

Les rayons qui entrent dans le polygone déterminent les arêtes éclairées, tandis que les rayons qui ne peuvent sortir du polygone qu'après l'avoir traversé déterminent les arêtes obscures.

Ainsi les arêtes des points 2 et 5 appartiennent à la ligne de séparation.

L'arête qui contient le point 1 est éclairée.

Enfin, les arêtes des points 3 et 4 sont obscures.

Il est bien entendu que la section A doit être choisie de manière à ce qu'elle coupe les arêtes pour lesquelles on éprouve de l'incertitude; il pourra même arriver que l'on soit obligé de faire plusieurs sections, parce qu'une seule ne couperait pas toutes les arêtes du polyèdre.

30. *Cinquième exemple. (Fig. 13, 15.)* Si nous appliquons les principes précédents à l'arête 11-12 qui a la même projection verticale que 1 et 2, nous supposerons le polyèdre coupé par un plan vertical pq parallèle au rayon de lumière, et nous construirons la projection verticale *vsu* de la section, et celle du rayon mn qui passe par le point s ; et comme ce rayon entre dans le polyèdre, il en résulte évidemment que l'arête 11-12 est éclairée.

J'ai dit, en géométrie descriptive, comment on construisait les projections du dodécaèdre régulier dont on propose ici de construire les ombres.

En raisonnant comme nous venons de le dire, on reconnaîtra que la ligne de séparation passe par les sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Si nous supposons que l'on commence par le point 1, on cherchera d'abord l'ombre des sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sur le plan vertical de projection; on joindra ces points par

des droites jusqu'à ce qu'on soit parvenu au point v , suivant lequel l'ombre de l'arête 6-7 rencontre la ligne AZ.

On cherchera ensuite les ombres des sommets 7, 8, 9, 10, 1 sur le plan horizontal, ce qui déterminera la ligne brisée $v-7''-8'-9'-10'-1''$.

Enfin on joindra le point u avec $1'$, ce qui complétera le contour de l'ombre portée par le polyèdre sur les plans de projection.

31. On fera bien, pour s'exercer, de construire la projection auxiliaire (*fig. 14*), ce qui donnera en même temps un moyen simple de vérification pour chaque point. La direction de la lumière sur la figure 14 se déterminera comme nous l'avons dit au n° 14.

CHAPITRE III.

OMBRES BRISÉES.

32. La forme souvent très-composée des surfaces sur lesquelles se projettent les ombres peut donner lieu à des plis ou des interruptions qui présentent quelques difficultés avec lesquelles le lecteur ne pourra se familiariser que par un grand nombre d'exemples.

33. *Premier exemple.* Soient (*fig. 17 et 18, pl. 3*) les projections verticale et horizontale de deux marches parallèles aux plans de projection, la partie hachée en points représentant la coupe d'un mur vertical. Les lignes AX et BY sont les traces des plans horizontaux que forment les faces supérieures des deux marches, et les droites A'X', B'Y' sont les traces des plans qui forment les faces verticales.

Supposons, actuellement, que l'on veuille construire l'ombre projetée sur ces marches, par une droite inclinée 1-2, la direction du rayon de lumière étant donnée par ses deux projections *sl*, *s'l'*.

Tous les rayons lumineux qui s'appuient sur la droite donnée 1-2 forment un plan dont il ne reste plus qu'à chercher l'intersection avec la surface de l'escalier.

Voici l'ordre des opérations :

1° On pourra commencer par construire les points 1', 2' qui sont les ombres des points 1 et 2 sur la surface verticale du mur, puis on tracera la droite 1'-2' dont on ne conservera que la partie 1'-*a*.

2° La verticale *a-a'* déterminera le point *a'* que l'on joindra avec 2'', qui est l'ombre du point 2 sur la face horizontale de la marche supérieure; de sorte que l'ombre portée

sur cette marche par la ligne donnée sera $a'-2''$, dont on ne conservera que la partie $a'-e'$.

3° La verticale $e'-e$ déterminera le point e que l'on joindra avec $2'''$, qui est l'ombre du point 2 sur la face verticale de la deuxième marche; l'ombre sur cette face sera donc $e-u$.

On tracera la verticale $u-u'$ et l'on aura u' , que l'on joindra avec 2^{iv} , qui est l'ombre du point 2 sur la face supérieure de la première marche. On ne conservera que $u'-n'$.

4° La verticale $n'-n$ donnera le point n que l'on joindra avec 2^v , qui est l'ombre du point 2 sur la face verticale de la première marche. L'ombre de cette face sera $n-2^v$ dont on ne conservera que $n-o$.

5° Enfin la verticale $o-o'$ déterminera le point o' que l'on joindra avec 2^{vi} qui est l'ombre du point 2 sur le plan horizontal qui représente la terre. La petite droite $o'-2^{vi}$ complètera l'ombre de la ligne donnée.

34. Les droites $1'-a$, $e-u$, $n-o$, doivent être parallèles entre elles comme résultant de l'intersection de trois plans parallèles par le plan des rayons lumineux, qui s'appuient sur la droite donnée.

Il en est de même des droites $a'-e'$, $u'-n'$, $o'-2^{vi}$.

35. *Deuxième exemple.* Supposons que l'on veuille construire l'ombre portée sur les mêmes marches par un parallépipède rectangle dont on a les deux projections (*fig.* 19 et 20). On reconnaîtra d'abord facilement que la ligne de séparation passe par les sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1.

Voici l'ordre des opérations :

1° On déterminera d'abord $1'-2'$ qui est l'ombre de l'arête 1-2 sur le plan horizontal qui représente la terre.

2° La petite droite $2'-a'$ parallèle à 2-3 (25) sera l'ombre portée sur la terre par une partie de cette arête.

3° La verticale $a'-a$ donnera le point a que l'on joindra

avec le point o suivant lequel l'arête 2-3 perce le plan qui forme la face verticale de la première marche ; de sorte que la droite $a-o$ sera l'intersection de cette face par le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête 2-3, et par conséquent la petite droite $a-e$ sera l'ombre portée par une partie de cette arête.

4° La verticale $e-e'$ déterminera le point e' par lequel on tracera $e'-r'$ parallèle à l'arête 2-3, et qui sera l'ombre portée par une partie de cette ligne sur la surface supérieure de la première marche.

5° La verticale $r'-r$ déterminera le point r que l'on joindra avec le point n suivant laquelle l'arête 2-3 perce le prolongement de la face verticale de la deuxième marche ; par conséquent $r-u$ sera l'ombre portée par cette face.

6° La droite $u'-m'$, parallèle à la ligne 2-3 sera l'ombre portée par cette arête sur la face horizontale de la deuxième marche.

7° La verticale $m'-m$ donnera le point m que l'on joindra avec $3'$ qui est l'ombre du point 3 sur la face du mur. Cette dernière opération complétera l'ombre de l'arête 2-3.

8° Les droites $3'-4'$, $4'-5'$ seront les ombres des arêtes 3-4, 4-5 sur le mur.

9° La droite $5'-x$, ombre portée sur le mur par une portion de l'arête 5-6, sera déterminée par la condition qu'elle doit être parallèle à $3'-m$, ou bien en joignant $5'$ avec le point v suivant lequel l'arête 5-6 prolongée perce la face verticale du mur.

10° La verticale $x-x'$ donnera le point x' , et la droite $x'-z'$, parallèle à l'arête 5-6, sera l'ombre d'une partie de cette ligne sur la face supérieure de la deuxième marche.

11° La verticale $z'-z$ déterminera le point z par lequel on tracera $z-p$ parallèle à $3'-m$ et formant l'ombre portée par une partie de l'arête 5-6 sur la face verticale de la deuxième marche.

12° En continuant à raisonner comme nous venons de le faire, on construira successivement :

$p'q'$ parallèle à l'arête 5-6 ;

qy parallèle à 3'- m ;

enfin $y'6'''$ parallèle à 5-6,

ce qui complète l'ombre de cette arête.

36. On remarquera que la droite $z-p$ prolongée doit passer par le point i suivant lequel l'arête 5-6 perce la face verticale de la deuxième marche.

Par la même raison la droite $q-y$ doit aboutir au point c ; et les droites $x'-z'$, $p'-q'$ prolongées doivent passer par les points $6'$, $6''$ suivant lesquels les faces supérieures des marches sont percées par le rayon de lumière du point 6.

37. Il ne faut négliger aucun de ces moyens de vérification qui forment, par la même occasion, autant de sujets d'exercices.

D'ailleurs la direction d'une ligne droite étant toujours déterminée par deux points, il faut, par de nombreux exemples, s'exercer à choisir sans hésitation, dans chaque cas, les deux points les plus avantageusement situés.

38. En général, après avoir reconnu quelle doit être, sur la surface d'un polyèdre donné, la ligne de séparation entre la partie éclairée et celle qui est obscure, on cherchera l'ombre d'un premier côté en prolongeant, s'il le faut, la face qui reçoit cette ombre, et, après avoir effacé tout ce qui est en dehors des limites de cette face, on construira la suite de l'ombre sur la face adjacente à la première, en ne conservant que ce qui est dans les limites de cette deuxième face, et l'on continuera de cette manière à chercher la suite de l'ombre sur les troisième, quatrième et cinquième faces des corps extérieurs jusqu'à ce qu'on soit revenu à l'ombre du point par lequel on a commencé.

Toutes ces opérations sont la conséquence des principes exposés dans la *Géométrie descriptive* sur la pénétration des polyèdres, et l'exemple qui vient de nous occuper revient à l'intersection des surfaces des deux prismes, dont l'une est formée par l'ensemble des rayons lumineux qui s'appuient sur le polyèdre, tandis que l'autre se compose des faces verticales et horizontales de l'escalier.

39. *Troisième exemple.* Soient (*fig. 21 et 22*) les deux projections d'un escalier représenté en coupe sur la projection auxiliaire (*fig. 23*), la direction de la lumière étant déterminée par ses projections $s-l$, $s'-l'$, $s''-l''$.

Les lignes de séparation, dans cet exemple, sont :

1° Les arêtes brisées à droite de chacun des murs de rampe ;

2° Les arêtes verticales des points, 11 et 12 (*fig. 22*) ;

3° L'arête horizontale 11-13 (*fig. 21*).

1° On construira d'abord sur le plan horizontal, et parallèlement à $s'-l'$, la droite $1.2-a'$, qui sera l'ombre portée par une partie de l'arête verticale 1-2.

2° Le reste de cette ombre se relève verticalement depuis a jusqu'à $2'$ qui est l'ombre du point 2 sur la marche verticale de la première marche.

3° L'ombre portée sur cette même face par une partie de l'arête horizontale 2-3 doit être parallèle à la projection verticale $s-l$ du rayon de lumière (23), et par conséquent doit être dirigée vers le point 3, suivant lequel le plan qui forme la face verticale de la première marche est percé par la droite 2-3.

4° La petite droite $c'-3'$, parallèle à l'arête 2-3, sera l'ombre portée par une partie de cette ligne sur la face horizontale de la première marche.

5° On tracera ensuite la droite $3'-e'$ dirigée vers le point $4'$ suivant lequel le rayon du point 4 percerait le prolongement

gement de la face supérieure de la première marche, de sorte que $3'-e'$ est l'ombre portée sur cette face par une partie de l'arête 2-3.

6° La continuation de cette ombre devient successivement $e-n$ dirigée vers le point v sur la face verticale de la seconde marche ; ensuite $n'-m'$ dirigée vers $4''$ sur la face horizontale de la même marche, $m-u$ dirigée vers les points 4 ou $3''$ sur la face verticale de la troisième marche.

Enfin $u'-4'''$ sur la face horizontale de cette dernière marche.

Quant à l'arête horizontale 4-5, son ombre lui sera parallèle et par conséquent perpendiculaire au plan vertical de projection.

L'ombre de la rampe à droite ne rencontrant pas les marches sera plus facile à construire, et se composera de la manière suivante :

1° La droite 6.7-7' parallèle à $s'-l'$ et formant l'ombre portée sur le plan horizontal par l'arête verticale 6-7.

2° La droite 7'-8' provenant de l'arête horizontale 7-8 à laquelle elle doit être parallèle.

3° La droite 8'- z' qui est l'ombre portée sur le plan horizontal par une partie de l'arête inclinée 8-9.

4° L'ombre portée par le reste de la même droite sur la face verticale du mur devient $z-9''$.

5° Enfin l'arête 9-10 étant perpendiculaire au plan vertical de projection, son ombre $9''-9.10$ doit être parallèle à la projection $s-l$ du rayon lumineux (23).

Les ombres portées par les arêtes verticales des points 11 et 12 doivent être parallèles à $s'-l'$.

L'ombre portée par l'arête horizontale 11-13 ne peut pas être vue.

40. On pourra, comme vérification ou comme exercice, se servir de la projection auxiliaire (*fig. 23*), qui représente

une coupe de l'escalier, par un plan parallèle au mur de rampe.

La projection $s''-l''$ du rayon de lumière se construira comme nous l'avons dit au n° 14.

41. *Quatrième exemple.* Soient (*fig. 24 et 25, pl. 4*) les projections verticale et horizontale d'un pan de bois, composé :

- 1° De deux poteaux verticaux ;
- 2° De deux traverses horizontales ;
- 3° D'une pièce de décharge inclinée ou guette, assemblée dans les deux traverses.

On veut avoir l'ombre portée par ces différentes pièces :

- 1° Sur la face verticale d'un mur ;
- 2° Sur les faces horizontale et inclinée d'une banquette dont la coupe est indiquée par des hachures sur la *fig. 26* ;
- 3° Enfin sur le plan horizontal de projection qui, dans cet exemple, représente la terre.

Les ombres des deux pièces horizontales ne présenteront aucune difficulté à construire ; celle de la traverse inférieure se portera sur le plan horizontal, et celle de la pièce supérieure aura lieu sur la face verticale du mur.

Pour les deux poteaux verticaux, il est évident que la séparation des faces éclairées et des faces obscures sera formée par les arêtes verticales désignées sur le plan par les points 1 et 2.

Commençons par le poteau à droite et supposons que l'on veuille d'abord déterminer l'ombre portée par l'arête verticale du point 1.

Le plan vertical formé par les rayons qui s'appuient sur cette arête coupera la surface de la terre, le talus, la face supérieure de la banquette et la face verticale du mur, suivant une ligne projetée sur le plan horizontal par la droite $1-a'-c'-e'$ et sur le plan vertical par la ligne brisée $1-a-c-e-1'$.

Les verticales $a'-a$, $c'-c$, $e'-e$ détermineront les trois points a , c , e .

On construira de la même manière l'ombre du poteau à gauche.

42. Pour reconnaître quelles sont les arêtes de la pièce inclinée qui forment la ligne de séparation, on pourra employer le principe du n° 29.

Ainsi, en coupant cette pièce par un plan vertical pq , parallèle à la direction $s'-l'$ du rayon lumineux, on obtiendra pour section (*fig.* 24) le parallélogramme $3'-3''-4'-4''$; et les deux rayons $b-d$, $h-k$ ne traversant pas ce parallélogramme, nous en concluons que la ligne de séparation pour cette pièce passe par les points $3'$, $4''$ et se compose, par conséquent, des arêtes 5-6, 7-8 situées dans les deux faces opposées du pan de bois, comme on peut le reconnaître par l'inspection des figures 25, 26.

Ordre des opérations. 1° Supposons que l'on ait d'abord déterminé le point $5'$ qui est l'ombre du point 5 sur la face verticale du mur. On tracera $5'-0$ parallèle à l'arête 5-6, ce qui donnera l'ombre portée sur le mur par une partie de cette arête.

2° La verticale $o-o'$ donnera o' , que l'on joindra avec le point u' suivant lequel l'arête 5-6 perce le plan horizontal qui forme la face supérieure de la banquette, de sorte que $o'-z'$ sera l'ombre portée sur cette face par une partie de l'arête 5-6.

3° La verticale $z'-z$ déterminera z , que l'on joindra avec m suivant lequel l'arête 5-6 prolongée perce le plan incliné qui forme le talus ; et la droite $z-x$, $z'-x'$ sera l'ombre portée sur ce plan par une partie de l'arête 5-6.

4° Enfin, la verticale $x-x'$ déterminera le point x' , que l'on joindra avec v' suivant lequel l'arête 5-6 prolongée rencontre la terre, ce qui complétera l'ombre de l'arête 5-6.

Ainsi, cette ombre est une ligne brisée projetée sur le plan vertical par $5'-o-z-x-6'$ et sur le plan horizontal par $5'''-o'-z'-x'-6''$.

43. La projection auxiliaire (*fig.* 26) sera très-commode pour déterminer le point m , ou bien encore les points $5''$, $6'''$, qui sont les ombres des points 5 et 6 sur le plan incliné qui forme le talus.

Si cependant on n'avait pas assez de place sur l'épure pour construire la projection auxiliaire 26, on appliquerait le principe admis en géométrie descriptive. Ainsi (*fig.* 30), pour déterminer l'ombre du point m sur un plan parallèle à la ligne AZ et dont les deux traces seraient CB, C'B'.

On construira :

1° Le plan vertical $m'pq$ contenant le rayon de lumière du point m ;

2° La droite ab , $a'p'$ qui résulte de l'intersection du plan donné par le plan $m'pq$;

3° Enfin le point m'' , m''' suivant lequel la droite ab est rencontrée par le rayon de lumière du point m .

De sorte que les deux points m'' et m''' seront les deux projections de l'ombre du point m sur le plan donné CB, C'B'.

L'ombre de l'arête 7-8 (*fig.* 24 et 25) se déterminera en opérant comme pour l'arête 5-6.

44. Cet exemple suffit pour faire comprendre ce qu'il y aurait à faire pour construire les ombres portées par un système de charpente, quelque nombreuses que soient les pièces qui entreraient dans sa composition.

On voit qu'il suffit de chercher séparément l'ombre de chaque pièce, et la solution complète de la question résultera de la réunion de toutes ces opérations particulières.

45. *Cinquième exemple.* Soit encore proposé comme sujet

d'exercice, de construire l'ombre portée par une croix sur un plan incliné dont les traces sont xy, yz .

Les dimensions de la croix sont déterminées par ses deux projections (*fig.* 27 et 28), et la direction de la lumière par $s-l, s'-l'$.

On cherchera successivement les ombres :

1° Du prisme vertical formant le montant de la croix ;

2° Du prisme horizontal qui en forme les branches ;

3° Du parallépipède rectangle formant le soubassement.

Les lignes de séparation sur ces trois prismes étant faciles à reconnaître, il ne reste plus qu'à chercher l'ombre portée par chacune d'elles.

Pour obtenir l'ombre du point 1, on construira :

1° Le plan vertical $m'pq$, parallèle à $s'-l'$, et contenant par conséquent le rayon de lumière du point 1 ;

2° On tracera la droite $m-q$, projection verticale de l'intersection du plan donné par le plan $m'pq$;

3° Le point $1', 1''$, qui est l'ombre portée par le point 1 sur le plan donné, sera déterminé par l'intersection de la droite mq avec le rayon $1-1'$.

La même opération recommencée donnera autant de points que l'on voudra.

On remarquera, comme vérification, que le côté $3'-4', 3''-4''$ étant situé dans le plan xyz , son prolongement doit percer le plan vertical de projection en un point n, n' , situé sur la trace verticale du plan donné.

Par la même raison, le côté $3'-5', 3''-5''$ prolongé perce le plan horizontal au point v, v' .

46. Si l'on avait à déterminer l'ombre de beaucoup de points sur le plan incliné xyz , on simplifierait les opérations en construisant (*fig.* 29) une projection auxiliaire sur un plan vertical YAZ' perpendiculaire à la trace horizontale zy . Par ce moyen, le plan donné xyz étant perpendiculaire

au nouveau plan de projection YAZ' , la figure d'ombre portée se projetterait sur la figure 29 par une ligne droite xz' , qui serait en même temps la troisième trace du plan donné, et que l'on obtiendrait en faisant $oz' = oz$.

La projection $s''-l''$ du rayon de lumière sur la figure 29 se déduira des projections primitives $s-l$, $s'-l'$, en opérant comme nous l'avons dit au n° 14.

J'engage le lecteur à faire cette troisième projection comme étude ou comme vérification; mais dans la pratique il faut, en admettant que l'on ait la place nécessaire, que les points à déterminer sur le plan oblique soient assez nombreux pour qu'il devienne utile de construire une projection auxiliaire du corps dont on cherche l'ombre.

FIN DU PREMIER LIVRE.

LIVRE II.

CHAPITRE PREMIER.

CYLINDRES.

Cylindres obliques.

47. Les données sont (*pl. 5*) :

1° Les deux projections B, B' d'un parallépipède rectangle, oblique par rapport au plan vertical de projection ;

2° Les deux projections $a-a$, $a'-a'$ de l'axe d'un cylindre C, C' posé horizontalement sur le parallépipède B, B' ;

3° La projection horizontale $c'-n'$ de l'axe d'un second cylindre circulaire D, D' oblique aux deux plans de projection et perpendiculaire au premier cylindre sur lequel il est posé ;

4° Le rayon $k-m$ du deuxième cylindre de l'angle V que son axe fait avec le plan horizontal de projection ;

5° Les deux projections $s-l$, $s'-l'$ d'un rayon de lumière.

On demande de construire les projections de ces cylindres ainsi que les limites d'ombre, et les ombres portées par ces corps sur eux-mêmes et sur les plans de projection.

Les opérations qui vont suivre étant assez composées, j'engage le lecteur à doubler toutes les dimensions de l'épure.

Projections du cylindre horizontal. Le rayon ao du cylindre horizontal sera déterminé (*fig. 32*) par la hauteur de l'axe $a-a$ au-dessus de la face supérieure du parallépipède.

pède B, B'; et sur la figure 35, la droite $v'-v'$, double de ao , sera la projection horizontale de l'une des bases du même cylindre.

Cette même base aura pour projection verticale (*fig. 32*) l'ellipse $ovov$, qui a pour grand axe la verticale $o-o$, double de ao , et pour petit axe l'horizontale $v-v$, déduite de la projection horizontale $v'-v'$.

L'autre base, si l'on voulait la projeter, se construirait de la même manière.

Projection horizontale du cylindre oblique. Le moyen le plus simple sera de faire une projection auxiliaire sur un plan vertical X'AY, parallèle à la direction du cylindre incliné D, D'. Cette disposition d'épure sera d'autant plus convenable dans le cas qui nous occupe, que les directions des deux cylindres étant perpendiculaires l'une à l'autre, le nouveau plan vertical de projection X'AY, parallèle au cylindre incliné, sera en même temps perpendiculaire au cylindre horizontal; ce qui est, comme nous l'avons vu en géométrie descriptive, la position la plus simple que puissent occuper deux cylindres par rapport aux plans de projection.

L'axe du cylindre horizontal se projettera sur le plan X'AY par un seul point a'' , dont la hauteur $a''o'$ au-dessus de la droite AX' doit être égale à la hauteur du point a au-dessus de AX (*fig. 32*); le cercle décrit du point a' comme centre avec un rayon $a''o'$ égal à ao (*fig. 32*) sera la trace et en même temps la projection du cylindre horizontal CC' sur le plan X'AY.

Du point a'' , comme centre, avec une ouverture de compas $a''k$ égale à la somme des rayons des deux cylindres, on décrira l'arc de cercle MN, puis on tracera la tangente $c''-n''$, faisant avec AX' un angle V donné par la question.

La droite $c''-n''$ sera la projection de l'axe cn , $c'n'$ du cylindre incliné D, D'.

Par suite de ces opérations, le point n'' sera déterminé et le point c'' n'étant pas donné, pourra être pris à volonté. Le rectangle $axuu$ sera la projection du cylindre incliné DD' sur le plan auxiliaire $X'AY$, et les points $cc'-nn'$ pourront être facilement construits sur les figures 35 et 32.

Les projections horizontales des deux bases du cylindre DD' seront deux ellipses, ayant pour leurs grands axes les droites $e-e$, $e'-e'$, égales chacune à deux fois le rayon $n''u$, et pour petits axes les droites $x'-x'$, $u'-u'$, projections horizontales des deux diamètres $x-x$, $u-u$.

Projection verticale du cylindre D. Si nous faisons (fig. 31) nn'' égal à $z-n'$, et $c-c''$ égal à qc' , le rectangle D'''' égal à D'' pourra être considéré comme la section du cylindre DD' par le plan qui contiendrait son axe et qui serait perpendiculaire au plan vertical de projection.

Cette section, que l'on suppose rabattue sur l'épure en tournant autour de sa trace verticale $n-c$, pourra être effacée dès qu'elle aura servi à déterminer les axes des deux ellipses qui représentent sur la figure 32 les projections des deux bases du cylindre incliné D .

Ombres.

48. *Ligne de séparation sur le cylindre D, D'.* Cette ligne (fig. 35) se compose de deux arcs $1-u'-e'-2$, $3-x'-e-4$, et des deux droites $2-3$, $4-1$, suivant lesquelles le cylindre est touché par deux plans parallèles aux rayons de lumière (12).

La détermination des droites $2-3$, $1-4$ dépend du principe général donné en géométrie descriptive pour construire des plans tangents à un cylindre parallèlement à une ligne donnée. Mais, d'abord, on n'a pas toujours les traces du cylindre, ensuite, sa forme circulaire permettra, dans le cas actuel, d'employer des moyens qui seront convenablement placés ici comme sujets d'exercices.

49. *Première solution.* En l'absence de la trace horizontale du cylindre, on pourra opérer de la manière suivante :

1° Par le point y, y' (*fig. 34 et 35*), pris à volonté sur l'axe du cylindre, concevons la droite $yd, y'd'$ parallèle à la direction $s''-l'', s'-l'$ du rayon lumineux. L'axe $c''-n'', c'-n'$ du cylindre, et la droite $y-d, y'-d'$ déterminent un plan parallèle au cylindre et au rayon lumineux.

2° La droite $d-d'$, perpendiculaire à $X'A$, déterminera le point d' , suivant lequel la droite $y-d, y'-d'$ perce le plan qui contient la base du cylindre, de sorte que $d'-n'$ sera l'intersection de ce plan par celui qui contiendrait l'axe du cylindre et qui serait parallèle à la direction de la lumière.

Or, si l'on fait mouvoir ce dernier plan parallèlement à lui-même, il sera tangent au cylindre lorsque la droite $w' n' d'$ sera venue prendre la position $w''-d''$ parallèle à $w'-d'$ et tangente à l'ellipse $1-u'-2-u'$, qui est la projection horizontale de l'une des bases du cylindre.

Le point de tangence 2 déterminera la droite 2-3, suivant laquelle le cylindre est touché par un plan parallèle à la distance de la lumière.

Nous aurons souvent, par la suite, l'occasion de construire des tangentes à une ellipse, parallèlement à une droite donnée. Je crois, pour cette raison, qu'il sera utile de rappeler la construction connue.

Soit (*fig. 33*) une ellipse à laquelle on veut mener deux tangentes parallèles à la droite $s-l$.

On commencera par construire une corde quelconque ac , parallèle à la direction de $s-l$, et l'on joindra le milieu de cette corde avec le centre o , par un diamètre dont les extrémités m et n seront les points de tangence demandés.

C'est ainsi que l'on a déterminé les points de tangence 2 et 1 (*fig. 35*), en faisant passer le diamètre 2-1 par le milieu d' d'une corde parallèle à $d' w'$.

Pour éviter la confusion des lignes, cette corde n'a pas été conservée.

50. *Deuxième solution.* Les deux côtés $x-u$, $x-u$ (fig. 34) étant prolongés, perceront le point horizontal suivant les deux points $u''u'''$, $u''u'''$. L'ellipse $u''-e''-u'''-e''$ sera la trace horizontale du cylindre incliné D, D'.

De là résultent les constructions suivantes :

1° Par le point $n''n'$ ou par tout autre point de l'axe, on construira la droite $n''-g$, $n'-g'$, parallèle à la direction de la lumière ;

2° On déterminera le point g' , suivant lequel cette droite perce le plan horizontal, et l'on joindra g' avec n''' par la droite $g'-n'''$, qui sera la trace du plan mené par l'axe du cylindre parallèlement à la direction du point lumineux ;

3° Il ne restera plus qu'à faire mouvoir ce plan parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que sa trace $g'n'''$ soit venue se placer en $v''-2'$.

Cette dernière droite, parallèle à $g'n'''$, sera la trace du plan formé par les rayons de lumière qui touchent le cylindre suivant la ligne 2-3.

Le point de tangence 2' et le point correspondant 1', appartenant à la droite 1-4, se détermineront comme dans la solution précédente.

Toutes les constructions que nous avons faites ici dans le plan horizontal de projection auraient pu être faites également dans la face supérieure du parallélépipède B''B', ou dans tout autre plan horizontal.

51. *Troisième solution.* Les deux solutions précédentes exigent la construction des tangentes à l'ellipse, de sorte que l'exactitude du résultat dépend de la précision avec laquelle cette courbe aura été tracée. Or, une ellipse ne pouvant être construite que par points, les opérations qui en dépendent ne sont jamais aussi exactes que celles qui ré-

sultent de la seule combinaison de la ligne droite et du cercle.

Pour atteindre ce but, on opérera de la manière suivante :

1° On construira comme précédemment la droite $y-d$, $y'-d'$, et l'on déterminera le point d' ;

2° On fera tourner le plan duw'' autour de sa trace horizontale w'' . Par ce mouvement, le cercle $u-u$ viendra se placer dans le plan horizontal, et la droite $w'd'$ deviendra $v'd'''$;

3° Enfin, le rayon $n''-2''$, perpendiculaire sur $w'd'''$, déterminera le point de tangence $2''$, et par suite la droite 2-3.

La ligne $v''2''$ représente dans le rabattement l'intersection du plan de la base du cylindre par le plan tangent suivant la droite 2-3, et qui est parallèle à la direction de la lumière.

52. *Quatrième solution.* 1° Si du point n''' comme centre, on décrit la circonférence $u^{iv}-e''-u^{iv}-e''$, on pourra considérer cette courbe comme la projection horizontale de la section du cylindre par un plan u^v-u^v perpendiculaire au plan de la projection auxiliaire $X'AY$. Les points u^v , u^v seront déterminés par la rencontre des deux lignes $x-u$, $x-u$ prolongées, avec les droites $u^{iv}-u^v$, $u^{iv}-u^v$, perpendiculaires à $X'A$;

2° La droite $g-n''$, $g'-n'$, prolongée jusqu'au plan u^v-u^v (fig. 34), déterminera le point h , h' , et par suite la droite $h'-n'''$ qui résulte de l'intersection du plan u^v-u^v par le plan qui contient l'axe du cylindre et qui est parallèle aux rayons de lumière ;

3° Le rayon $n'''-2'''$, perpendiculaire sur $n'''-h'$, déterminera le point de tangence $2'''$ et par conséquent la droite 2-3.

La petite tangente $i-2'''$, perpendiculaire sur le rayon $n'''-2'''$, est l'intersection du plan u^v-u^v par le plan qui touche le cylindre suivant la droite 2-3.

Les projections des deux droites 2-3, 1-4, sur la figure 32, seront déterminées par les intersections de l'ellipse

1- e''' -2- e''' avec les verticales élevées par les points 1 et 2 de la figure 35.

On remarquera aussi que les hauteurs des points 1 et 2, au-dessus de la droite AX, sur la figure 32, doivent être égales à celles des mêmes points au-dessus de AX' (fig. 34).

J'ai indiqué toutes ces solutions comme sujets d'exercices. Il est bien entendu que, dans la pratique, le lecteur choisira dans chaque cas celle qui conviendra le mieux à la disposition particulière des données.

53. Les deux dernières solutions ne sont applicables qu'aux cylindres circulaires. Il eût été plus général de ne pas introduire cette condition ; mais les principes pour construire un plan tangent à un cylindre quelconque, ayant été exposés dans la *Géométrie descriptive*, j'ai pensé que dans un *Traité d'application* il valait mieux s'exercer sur des exemples qui se présentent fréquemment, surtout dans les dessins des machines.

D'ailleurs les deux premières solutions conviendraient à tous les cylindres, pourvu que l'on ait leur trace ou leur section par un plan quelconque, de sorte que la seule différence consisterait dans les moyens employés pour obtenir ces courbes, qui alors se construiraient par points.

La construction des tangentes et la détermination des points de tangence dépendrait aussi de la nature des courbes (*Géométrie descriptive*).

54. *Ombre portée par le cylindre DD'*. La ligne de séparation étant déterminée et passant par les points 1- u' - e' -2-3- x' - e -4-1 (fig. 35), il ne reste plus qu'à construire l'ombre portée par chacune des parties de cette ligne.

Première opération. Les rayons de lumière qui s'appuient sur 1- u' - e' -2 forment une portion de surface cylindrique dont l'intersection avec la face supérieure du parallépipède B, B' sera la courbe 1''- u' -2'' (fig. 35).

La construction de cette courbe sera rendue facile par la projection auxiliaire (*fig. 34*). Ainsi, par exemple, le rayon de lumière du point 2 percera le plan horizontal $u-o'$ en un point 2^v , dont la projection horizontale 2^v sera l'ombre du point 2.

On déterminera de cette manière autant de points que l'on voudra, en choisissant de préférence ceux qui sont situés sur les tangentes à la courbe, parce qu'on sait (*Géométrie descriptive*) que la tangente se confondant avec la courbe se trouve toujours mieux déterminée lorsque l'on connaît la tangence et le point de tangence (*fig. 36*) qu'elle ne le serait par un point d'intersection (*fig. 38*).

Ainsi, on déterminera (*fig. 35*) les points 2^v , $1''$ suivant lesquels la courbe $1''-u'-2^v$ est touchée par les droites $2^v-t'$, $1''-r'$, résultant de l'intersection de la face supérieure du parallélépipède B, B' par les deux plans que forment les rayons lumineux qui s'appuient sur le cylindre.

Le grand nombre d'ellipses que l'on a l'occasion de tracer dans les diverses applications de la géométrie descriptive familiarise promptement avec la forme de cette courbe. De là il résulte qu'il est souvent plus facile de tracer la courbe tout entière, sauf à effacer après coup les parties que l'on n'a pas besoin de conserver.

Ainsi, on fera bien de construire le point u^{vii} suivant lequel l'ellipse $1''-u'-2^v-u^{vii}$ est touchée par la droite $u^{vi}-u^{vii}$ perpendiculaire à AX'.

On remarquera également que les deux ellipses $1''-u'-2^v-u^{vii}$, $1-u'-e'-2$ doivent se toucher en un point u' situé dans la face supérieure du parallélépipède B', B'', et que de plus elles sont touchées toutes les deux au même point par la droite $u-u'$, perpendiculaire à AX'.

Deuxième opération. La droite $2^v-t'$ est l'ombre de la ligne 2-3 et provient de l'intersection de la face supérieure

du parallépipède par le plan tangent formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur 2-3.

Le point 2^v étant déterminé par l'opération précédente, il suffira de construire l'ombre d'un second point de la droite 2-3. Ainsi, par exemple, le rayon de lumière qui passe par le point 9 (*fig. 34*) étant prolongé jusqu'au plan $u-o'$, déterminera sur le plan horizontal le point $9'$ que l'on joindra avec 2^v .

On pourrait aussi déterminer le point suivant lequel la droite 2-3, prolongée, rencontrerait le plan horizontal $o'-u$, prolongé aussi.

Enfin on pourrait se contenter de placer 2^v-9 parallèle à $2'-u''$, parce que ces deux droites sont les intersections de deux plans parallèles par le plan tangent formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la droite 2-3.

La verticale $t'-t$ déterminera le point t , que l'on joindra avec $3'$ qui est l'ombre du point 3 sur la face verticale du mur. On peut remarquer, comme vérification, que la droite $t-3'$ prolongée doit aboutir au point $10'$ suivant lequel la droite 2-3 prolongée aussi perce la face du mur. La hauteur du point $10'$ au-dessus de AX (*fig. 32*) doit être égale à la hauteur du point 10 au-dessus de AX' (*fig. 34*).

On opérera de la même manière pour construire les deux droites $1''-r'$ (*fig. 35*) et $r-4'$ (*fig. 32*), qui forment l'ombre portée par la droite 1-4 sur le parallépipède et sur le mur.

Troisième opération. La courbe $4'-x'''-3'$ (*fig. 32*), qui est l'ombre portée par l'arc $4-x'-3$, ne présentera pas de difficulté. Les hauteurs des points pourront être vérifiées par la projection (*fig. 34*). Ainsi la hauteur du point x''' au-dessus de AX (*fig. 32*) doit être égale à Ax'' (*fig. 34*).

Quatrième opération. Les deux plans tangents formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur les droites 2-3, 1-4, couperont le cylindre horizontal C, C' suivant deux ellipses inclinées qui sont les ombres portées par une partie de chacune des deux droites 2-3, 1-4.

La courbe $v'''-o''-6'''$ (*fig.* 35) provient de l'intersection du cylindre C, C' par les rayons lumineux qui s'appuient sur la portion de droite 5-6 (*fig.* 34 et 35). Les deux points 5 et 6 seront déterminés sur la figure 34 en construisant les deux tangentes 5-5' et 6-6', parallèles à la projection $5''-l'''$ du rayon de lumière. Le diamètre 5'-6', perpendiculaire à la direction de $s''-l'''$, déterminera avec exactitude les deux points de tangence 5' et 6' dont les projections horizontales 5'' et 6'' seront sur les droites 5-5'', 6-6'' tangentes à l'ellipse $v''-o''-6''$.

On déterminera ensuite, de préférence, les points v''' , v''' suivant lesquels la courbe est touchée par les deux droites $v''-v'''$ situées dans le plan horizontal qui contient l'axe du cylindre C, C'.

Les deux points o'' , o'' , situés dans le plan vertical qui contient le même axe, appartiennent à la tangente 2^v-9' et à une autre tangente parallèle à la première et qui passerait par le deuxième point o'' .

On déterminera de cette manière un assez grand nombre de points pour que la courbe puisse être tracée avec exactitude.

On remarquera aussi combien la projection auxiliaire (*fig.* 34) facilite les constructions. Cela vient d'abord de ce que cette projection est parallèle au cylindre D', D' et ensuite de ce qu'elle est perpendiculaire à toutes les surfaces sur lesquelles les ombres sont portées.

55. En général, dans toutes les questions où il s'agira de construire la courbe de pénétration de deux surfaces, le travail sera toujours considérablement simplifié si l'on place l'une d'elles perpendiculairement à l'un des plans de projection ; ce que l'on pourra toujours faire lorsque cette surface sera un plan, un prisme ou un cylindre ; elle devient alors l'une des deux surfaces projetantes de la courbe cher-

chée, dont il ne reste plus qu'à construire la seconde projection.

La courbe $v^{IV}-o'''-v^{IV}-o'''$, projection verticale de la courbe $v'''-o''-v'''-o''$, s'obtiendra en prenant les hauteurs de tous les points sur la figure 34.

Ainsi les deux points v^{IV} , v^{IV} sont à la hauteur de l'axe $a-a$, l'un des points o''' est dans la face supérieure du parallépipède, et le second point o''' est sur la génératrice la plus élevée du cylindre C , C' .

On pourrait recommencer toutes les opérations précédentes pour construire l'ombre portée par la droite 7-8 (*fig.* 34 et 35) ; mais il sera plus simple de prendre la distance $o''-o^{IV}$ (*fig.* 35) et de la porter sur un certain nombre des génératrices du cylindre C' à partir des points où ces génératrices sont coupées par l'ellipse $o''-v'''-o''-v'''$.

On pourra employer le même moyen pour construire la projection verticale de la même courbe, dont les points devront d'ailleurs se trouver sur les verticales élevées par les points correspondants de la projection horizontale.

Cette dernière opération complétera l'ombre portée par le cylindre incliné sur le cylindre horizontal.

56. *Ligne de séparation sur le cylindre horizontal.* Cette ligne se compose (*fig.* 32 et 35) :

- 1° Des deux droites horizontales 11-12, 13-14 ;
- 2° De l'arc de cercle dont les projections sont 12- v -14 et 12- v' -14 ;
- 3° Enfin d'un autre arc de cercle appartenant à la seconde base du cylindre, qui ne peut pas être vue, et qui d'ailleurs est cachée par le plan de la projection auxiliaire (*fig.* 34).

Les droites 11-12, 13-14, étant perpendiculaires au plan de la figure 34, ont pour projections sur ce plan les deux points 5' et 6'. Les deux droites 5-5', 6-6', tangentes au

cercle C et parallèles à $s''-l''$, sont les intersections du plan de la figure 34 par les deux plans formés par les rayons lumineux qui sont tangents au cylindre C' , C'' , suivant les droites 11-12, 13-14.

Enfin, *les ombres portées* par le cylindre horizontal sur le mur et sur la face supérieure du parallépipède ne présentent pas assez de difficultés pour embarrasser le lecteur.

DEUXIÈME ÉTUDE D'OMBRES SUR LES CYLINDRES. (PL. 6.)

57. Deux tronçons de colonnes sont appuyés sur des blocs de pierre provenant des ruines d'un monument. Il s'agit de construire leurs projections et de tracer toutes les ombres, la direction de la lumière étant donnée.

Ce problème, proposé en 1850 pour le concours d'admission à l'École des beaux-arts, revient à construire les projections de deux cylindres circulaires dont on connaît les rayons et les axes ; puis à déterminer toutes les lignes de séparations et d'ombres portées sur ces cylindres et sur les prismes rectangulaires qui leur servent d'appui.

La forme du cadre adoptée pour mes épreuves m'a permis d'éloigner les projections auxiliaires et d'éviter par là une confusion de lignes qui pourrait, en fatiguant l'attention du lecteur, nuire à la clarté des explications.

Il est d'ailleurs évident que ces dispositions particulières ne changent rien à la solution du problème, et qu'en employant des encres de couleur pour distinguer les diverses opérations, il sera facile d'exécuter l'épure dans les limites d'un cadre beaucoup moins étendu.

Les données du problème sont :

1° Les projections horizontales bs et dm des axes des deux cylindres circulaires de rayons égaux B et D ;

2° Les points b et d , suivant lesquels les droites bs et dm

percent le plan horizontal de projection qui représente ici la surface du sol ;

3° Les points s et m sont les centres des sections droites formant les bases les plus élevées des deux cylindres donnés ;

4° L'angle V exprime l'inclinaison du cylindre B sur le plan horizontal de projection, et la direction du second cylindre doit être perpendiculaire à celle du premier ;

5° La base inférieure du cylindre B est appuyée sur la terre, et la base inférieure du cylindre D repose sur la face supérieure d'un parallépipède rectangle T dont on connaît la hauteur ;

6° Les deux cylindres sont en outre appuyés sur les deux prismes K et R , dont les projections horizontales seules sont données par la question.

58. NOTATION. Le grand nombre de projections auxiliaires et de rabattements employés dans cette épure exige quelques explications.

En effet, en ne désignant que les points les plus essentiels, et chaque point étant exprimé par une seule lettre, quel que soit le nombre de ses projections, il a cependant fallu employer deux alphabets complets et 50 nombres, ce qui fait plus d'une centaine de points différents.

On comprendra, par cet exemple, combien il serait difficile d'appliquer ici des notations qui exigeraient plusieurs lettres pour désigner chacune des projections d'un même point ; car, indépendamment des cinq projections verticales employées dans cette épure, il y a encore quatre projections sur des plans auxiliaires perpendiculaires aux plans verticaux.

Or comment, dans ce cas, distinguera-t-on les différentes projections verticales ou inclinées de toutes les manières dans l'espace ?

Je pense donc, comme je l'ai dit dans l'ouvrage que je publie sur les *Exercices de géométrie descriptive*, qu'il sera beaucoup plus simple de désigner les divers plans de projection successivement introduits par $A'Z'$, $A''Z''$, $A'''Z'''$, et ainsi de suite, de sorte que les différents accents indiqueront l'ordre suivant lequel chaque nouvelle projection sera venue concourir à la solution du problème.

Je ferai même remarquer ici que, pour obtenir encore plus de symétrie dans les notations, je ne me suis pas servi de l'expression AZ , que j'emploie habituellement pour désigner l'intersection du plan horizontal avec le plan vertical de projection.

J'ai pensé que, dans l'épure actuelle, il vaudrait mieux désigner par $A'Z'$ la trace du plan de projection sur lequel tous les points seront désignés par l'accent ' ; par $A''Z''$ la trace du plan de projection sur lequel tous les points seront désignés par l'accent '' ; par $A'''Z'''$ la trace du plan sur lequel toutes les projections seront désignées par ''', etc.

Ensuite, les diverses projections étant suffisamment écartées les unes des autres, on ne craindra pas de confondre les points correspondants ; c'est pourquoi je n'ai pas cru devoir mettre des accents aux points qui sont désignés par des chiffres, les projections auxquelles se rapportent ces chiffres étant suffisamment distinguées par les accents qui désignent les droites sur lesquelles ils sont situés.

Peut-être pensera-t-on que j'aurais pu me dispenser d'indiquer un aussi grand nombre de détails, et qu'il suffisait de rappeler au lecteur les principes généraux desquels dépend la solution du problème.

S'il en était ainsi, le traité actuel deviendrait parfaitement inutile, et l'on pourrait se contenter de ce que j'ai dit dans les quatre premières pages : car, il ne faut pas l'oublier, c'est en variant les méthodes que l'on devient habile. L'art du praticien ne consiste pas à employer toujours les

moyens uniformes qui résultent d'un principe général, mais à changer, au contraire, les opérations dans chaque cas, en profitant de toutes les circonstances particulières qui peuvent simplifier le travail.

C'est pour familiariser le lecteur avec les moyens d'abrèger ou de vérifier chaque point que j'ai cherché à réunir dans un même exemple les différentes manières d'obtenir le résultat.

Les considérations précédentes étant admises, voici l'ordre dans lequel on devra exécuter toutes les opérations.

PROJECTION DES CYLINDRES.

59. *Première opération.* On projettera l'axe du cylindre B sur un plan vertical $A''Z''$ parallèle à sa direction, et rabattu à droite dans la partie inférieure de l'épure.

Le point b étant situé dans le plan horizontal de projection se projettera sur $A''Z''$ par le point b' . L'angle $d''b''s''$ ou V étant donné par la question, déterminera la projection $b''s''$ de l'axe du cylindre B, et le point s'' sera déduit de sa projection horizontale s par une perpendiculaire à la droite $A''Z''$.

Le point d , suivant lequel le plan horizontal de projection est percé par l'axe du cylindre D, sera projeté sur $A''Z''$ par le point d'' , et la droite bs , $b''s''$ étant parallèle au plan $A''Z''$, la perpendicularité des deux cylindres sera exprimée sur cette projection en faisant $d''m''$ perpendiculaire sur $b''s''$.

Le point m'' sera déduit de sa projection horizontale m par une perpendiculaire à la ligne $A''Z''$.

Deuxième opération. Le plan $A'''Z'''$ perpendiculaire sur l'axe $b''s''$ contiendra la base supérieure ou section droite du cylindre B.

Si l'on fait tourner le plan $A'''Z'''$ autour d'une droite quelconque $X''X''$ perpendiculaire au plan de projection $A''Z''$, le point ss'' viendra se rabattre en s''' sur le plan horizontal

$a'''z'''$, l'axe dm , $d''m''$ du cylindre D sera projeté par $d'''m'''$, et la droite $s'''h'''$ perpendiculaire sur $d'''m'''$ sera la plus courte distance des axes des deux cylindres.

La droite $s'''o'''$, moitié de $s'''h'''$, sera égale au rayon de chacun des deux cylindres qui, d'après la question, doivent être égaux, et le point o''' sera la projection sur le plan $A'''Z'''$ du point suivant lequel se touchent les deux cylindres.

Troisième opération. Le rayon $s'''o'''$ étant porté à droite et à gauche de s'' sur la droite $A'''Z'''$, le rectangle B'' sera la projection du cylindre B sur le plan $A''Z''$.

La rencontre de la droite $v''u''$ avec $A''Z''$ déterminera le point u suivant lequel le cylindre B touche la terre; la droite $u''r''$, perpendiculaire sur $b''s''$, sera la section droite ou base inférieure du cylindre B, et le centre $y''y$ de cette base sera par conséquent déterminé.

Quatrième opération. La projection B'' du cylindre B sur le plan vertical $A''Z''$ permettra de construire sur le plan horizontal la trace E et les projections de deux bases du même cylindre.

Cinquième opération. On projettera le cylindre D sur un plan vertical $A^{iv}Z^{iv}$ parallèle à sa direction, et cette projection auxiliaire D^{iv} déterminera la trace F et la projection horizontale de la base supérieure de ce même cylindre.

Quant à la base inférieure, elle dépend de la hauteur du prisme T sur lequel elle repose.

En effet, les axes des deux cylindres étant complètement déterminés :

- 1° Par leurs projections horizontales;
- 2° Par leurs traces horizontales;
- 3° Par l'inclinaison de l'un d'eux sur le plan horizontal;
- 4° Par la condition que le second cylindre est perpendiculaire sur le premier, auquel il doit être tangent;

Les bases inférieures ne peuvent plus être prises à volonté, puisque l'une d'elles doit toucher le plan horizontal

de projection, tandis que le cylindre D doit être appuyé sur la face supérieure du prisme T. Nous avons vu précédemment comment on peut déterminer la base inférieure du cylindre B; on agira d'une manière analogue pour déterminer celle du cylindre D.

Ainsi, la hauteur du prisme T étant donnée par la question, on la portera de c en x sur une perpendiculaire à la droite $A^{IV}Z^{IV}$, puis par le point x on construira le plan horizontal P; ce plan contiendra la face supérieure du prisme T; le point suivant lequel cette face sera percée par la génératrice du point 8^{IV} fera partie de la base inférieure du cylindre D^{IV} , et cette base devant être perpendiculaire sur l'axe $d^{IV}m^{IV}$, elle se projettera par une ligne droite sur le plan $A^{IV}Z^{IV}$: la projection horizontale de cette base ne présentera plus alors de difficultés.

On n'a pas conservé sur l'épure cette partie de l'opération, parce qu'elle se serait confondue avec les projections qui ont lieu sur le plan vertical $A'Z'$.

Sixième opération. Les projections des cylindres sur le plan vertical $A'Z'$ pourront facilement être déduites de leurs projections horizontales et des projections sur les deux plans verticaux $A''Z''$ et $A^{IV}Z^{IV}$; mais le but que je me propose en publiant cette épure étant de fournir aux élèves une occasion de s'exercer sur les rabattements des projections auxiliaires, je les engage à recommencer, pour déterminer les projections sur le plan $A'Z'$, toutes les opérations que nous venons de faire sur le plan horizontal.

Il en résultera que les projections horizontale et verticale de chaque point étant obtenues par des opérations entièrement indépendantes, on aura une vérification infaillible toutes les fois que ces deux projections seront situées sur une perpendiculaire à la ligne $A'Z'$.

Ainsi, les hauteurs des points s' et m' étant déduites des projections s'' et m'' sur le plan vertical $A''Z''$, on construira

les projections verticales $b's'$ et $d'm'$ des axes des deux cylindres demandés.

Cela étant fait, on concevra un nouveau plan auxiliaire de projection $A^{\text{VI}}Z^{\text{VI}}$ parallèle au cylindre B et perpendiculaire au plan vertical de projection.

Les distances des points s^{VI} , y^{VI} , m^{VI} , p^{VI} à la droite $A^{\text{VI}}Z^{\text{VI}}$ seront égales aux distances des projections horizontales s , y , m , p , à la ligne $A'Z'$.

L'axe du cylindre B étant parallèle au nouveau plan de projection $A^{\text{VI}}Z^{\text{VI}}$, les projections s^{VI} , y^{VI} , m^{VI} , p^{VI} des deux axes sur ce plan devront être perpendiculaires l'une à l'autre.

La projection B^{VI} du cylindre B permettra de construire facilement la trace G et les projections verticales des deux bases de ce cylindre.

La hauteur du prisme K pourra être déterminée en projetant ce prisme K'' sur le plan auxiliaire $A''Z''$, ou bien en construisant sur le plan $A'Z'$ la projection de la génératrice vu , qui contient le point suivant lequel le cylindre B touche l'arête horizontale du prisme.

Septième opération. Le rectangle D^{VIII} sera la projection du cylindre D sur un plan $A^{\text{VIII}}Z^{\text{VIII}}$ parallèle à la direction de ce cylindre, et perpendiculaire au plan vertical de projection.

Cette nouvelle projection auxiliaire étant prolongée jusqu'à la droite $A^{\text{VIII}}Z^{\text{VIII}}$, il sera facile de construire la trace H et les projections verticales des deux bases du cylindre D.

La hauteur du prisme R pourra être déterminée en projetant ce prisme sur le plan vertical $A^{\text{IV}}Z^{\text{IV}}$, ou bien en élevant une perpendiculaire par le point 14 de la projection horizontale, jusqu'à ce que cette perpendiculaire rencontre la projection sur $A'Z'$ de la génératrice qui contient le point 14 de la trace horizontale F.

La projection verticale de la base inférieure du cylindre D se déduira de la projection D^{VIII} , sur laquelle on détermi-

nera d'abord le point p^{viii} et la droite 45-46 perpendiculaire sur $p^{viii}m^{viii}$.

LIGNES DE SÉPARATION.

60. *Première opération.* La direction de la lumière étant parallèle à une droite donnée par ses projections $sl, s'l'$, on tracera le rayon lumineux passant par un point quelconque ss' , pris à volonté sur l'axe du cylindre B.

Le point l étant la trace horizontale du rayon $sl, s'l'$, on projettera ce point sur $A''Z''$, ce qui donnera l'' .

La perpendiculaire abaissée du point l'' sur le plan $A'''Z'''$ déterminera un point qui, ramené sur $a'''z'''$, se projettera en l''' et déterminera la droite $s'''l'''$ pour la projection du rayon $sl, s'l'$ sur le plan $A'''Z'''$ rabattu.

On tracera le diamètre 1-2 perpendiculaire sur la droite $s'''l'''$ (51), et les points 1 et 2 détermineront les génératrices 1-1 et 2-2, suivant lesquelles le cylindre B est touché par deux plans parallèles aux rayons lumineux.

Ces deux génératrices formeront, par conséquent, les lignes de séparation sur le cylindre B; et comme il résulte évidemment de la projection $s'''l'''$ du rayon lumineux sur le plan vertical $A''Z''$ que la face supérieure du cylindre B est obscure, on en conclura que la ligne de séparation sur la surface de ce cylindre sera composée des génératrices 1-1, 2-2, de la demi-circonférence 1-5-2 de la base supérieure s , et de la demi-circonférence 2- u -1 de la base inférieure y .

Deuxième opération. Le rayon lumineux $pg, p'g'$ perce le plan horizontal de projection au point g , qui, projeté sur A^vZ^v , donne g^{iv} .

Ce dernier point projeté sur le plan A^vZ^v et rabattu en a^vz^v détermine la droite g^vm^v pour projection du rayon $pg, p'g'$ sur le plan A^vZ^v , qui contient la base supérieure du cylindre D.

On tracera le diamètre 3-4 perpendiculaire sur la droite

$g^v m^v$, et les points 3 et 4 détermineront les génératrices 3-3 et 4-4, suivant lesquelles le cylindre D est touché par les deux plans parallèles aux rayons lumineux ; et comme il est évident que la face supérieure du cylindre D est éclairée, il s'ensuit que la surface de ce cylindre, la ligne de séparation sera composée des deux génératrices 3-3, 4-4, de la demi-circonférence 3-8-4 de la base supérieure, et de la demi-circonférence 3-15-4 de la base inférieure.

Troisième opération. Les lignes de séparation sur les prismes ne présenteront aucunes difficultés.

Quatrième opération. Les génératrices qui forment les lignes de séparation sur les surfaces des deux cylindres rencontrent les traces ou les circonférences des bases de ces mêmes cylindres, suivant des points dont il serait facile d'obtenir les projections verticales par des perpendiculaires à la ligne $A'Z'$; les hauteurs de ces points pourront d'ailleurs être vérifiées par leurs projections sur les plans verticaux $A''Z''$ et $A^{iv}Z^{iv}$.

Mais jé rappellerai que, pour s'habituer aux dispositions diverses des projections auxiliaires, j'ai conseillé au lecteur d'exécuter sur la projection verticale toutes les opérations analogues à celles qui viennent d'être faites sur le plan horizontal, en réservant les perpendiculaires à la ligne $A'Z'$ comme moyen de vérification.

Ainsi, prenons sur le rayon st , $s't'$ un point quelconque tt' . La projection t^{vi} de ce point sur le plan $A^{vi}Z^{vi}$ sera déterminée en faisant et^{vi} égal à la distance du point t à la ligne $A'Z'$, et la droite $t^{vi}s^{vi}$ sera la projection du rayon st , $s't'$ sur le plan $A^{vi}Z^{vi}$, parallèle au cylindre B et perpendiculaire au plan vertical de projection.

La perpendiculaire abaissée du point t^{vi} sur le plan $A^{vii}Z^{vii}$ percera ce plan en un point qui, rabattu sur $a^{vii}z^{vii}$, donnera t^{vii} pour la projection du point tt' sur le plan $A^{vii}Z^{vii}$, qui contient la base supérieure ou section droite B^{vii} du cylindre B.

La droite $t^{vii} s^{vii}$ sera donc l'intersection du plan $A^{vii} Z^{vii}$ par le plan qui contient l'axe du cylindre B et qui serait parallèle aux rayons lumineux.

On tracera sur B^{vii} le diamètre 1-2, et les points 1 et 2 détermineront les deux génératrices suivant lesquelles le cylindre B est touché par les plans des rayons lumineux ; ces deux génératrices, qui forment les lignes de séparation, coupent la trace verticale G du cylindre B et les ellipses des bases, suivant des points qui doivent être situés sur les perpendiculaires élevées par leurs projections horizontales correspondantes.

Cinquième opération. Si, pour déterminer la ligne de séparation sur le cylindre D, nous choisissons le rayon lumineux $mn, m'n'$, la projection n^{viii} du point nn' sur le plan $A^{viii} Z^{viii}$ s'obtiendra en faisant in^{viii} égal à la distance du point n à la ligne $A'Z'$.

La perpendiculaire abaissée de n^{viii} sur le point $A^{ix} Z^{ix}$ percera ce plan en un point qui, rabattu sur $a^{ix} z^{ix}$, donnera n^{ix} pour la projection du point nn' sur le plan $A^{ix} Z^{ix}$ de la section droite ou base supérieure D^{ix} du cylindre D.

La droite $m^{ix} n^{ix}$ sera donc l'intersection du plan $A^{ix} Z^{ix}$ par le plan qui contient l'axe du cylindre D et qui est parallèle à la direction de la lumière.

On tracera sur D^{ix} le diamètre 3-4, et les points 3 et 4 détermineront les deux génératrices suivant lesquelles le cylindre D est touché par les plans des rayons lumineux.

Les points suivant lesquels ces génératrices rencontrent la trace H et les bases du cylindre D seront vérifiés par les perpendiculaires élevées de leurs projections horizontales.

OMBRES PORTÉES.

61. Toutes les lignes de séparation étant déterminées sur les cylindres et sur les prismes, il ne reste plus qu'à construire les ombres portées.

Mais, pour soulager l'attention, je commencerai par faire reconnaître toutes les lignes qui nous restent à construire, et nous verrons ensuite quels sont les moyens les plus convenables pour obtenir chacune d'elles.

Le cylindre D étant placé au-dessus de tous les autres corps, il n'y a pas d'autres lignes à déterminer sur la surface de ce cylindre que celles qui forment les lignes de séparation dont nous avons parlé plus haut. Il n'en est pas de même du cylindre B. En effet :

Ombres portées sur le cylindre B.

Si l'on jette un coup d'œil sur la projection horizontale, on trouvera pour limite des ombres :

1° La droite 16-17, projection horizontale de l'arc d'ellipse suivant laquelle le cylindre B est coupé par le plan vertical formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête 17 du prisme R ;

2° La courbe 17-18, qui appartient à l'ellipse suivant laquelle le même cylindre est coupé par le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête horizontale 17-47 du prisme R ;

3° L'arc d'ellipse 18-19 provenant de la section du cylindre B par le plan des rayons lumineux qui touchent le cylindre D suivant la génératrice 4-4 ;

4° La droite 19-1, qui forme une partie de la ligne de séparation 1-1 sur la surface du cylindre B ;

5° La droite 1-13, qui appartient à la même ligne de séparation 1-1 ;

6° L'arc d'ellipse 13-3 provenant de la section du cylindre B par le plan des rayons lumineux qui touchent le cylindre D suivant la génératrice 3-3 ;

7° La courbe 3-12-20, dont on appréciera mieux la forme

et la position si l'on jette un coup d'œil sur la projection verticale.

Cette ligne fait partie de la courbe à double courbure suivant laquelle le cylindre BB' est pénétré par la surface cylindrique formée par les rayons lumineux qui s'appuient sur la section droite ou base supérieure du cylindre DD' ;

8° L'arc d'ellipse 20-21, provenant de la section du cylindre BB' par le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête 47-31 du prisme R ;

9° Enfin, la droite 21-2, formant une partie de la ligne de séparation 2-2 sur la surface du cylindre BB'.

Ombres portées sur le plan horizontal de projection.

La limite de ces ombres, en partant de la ligne AZ, sera :

1° La trace horizontale 22-23 du plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête 23-24 du prisme T ;

2° L'arc d'ellipse 23-3, qui appartient à la trace horizontale de la surface cylindrique formée par les rayons lumineux qui s'appuient sur la circonférence de la base inférieure du cylindre D ;

3° La droite 3-25, trace horizontale du plan des rayons lumineux qui touchent le cylindre D suivant la génératrice 3-3 ;

4° La droite 25-26 fait partie de la trace horizontale du plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête horizontale 25-26 du prisme K ;

5° La droite 26-27 est la trace du plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête 26-27 du prisme K ;

6° La droite 27-1 est la trace horizontale du plan des rayons lumineux qui touchent le cylindre B suivant la génératrice 1-1 ;

7° L'arc d'ellipse 1-28-2 appartient à la trace du cylindre formée par les rayons lumineux qui s'appuient sur la circonférence de la base supérieure du cylindre B ;

8° La droite 2-29 est la trace horizontale du plan des rayons lumineux qui touchent le cylindre B suivant la génératrice 2-2 ;

9° La droite 29-30, prolongement de 26-27, est l'ombre portée par l'arête horizontale 26-30 du prisme K ;

10° Les droites 30-30, 31-31 et 17-16 sont les traces des plans verticaux formés par les rayons qui s'appuient sur les arêtes verticales 30, 31 et 17 des prismes K et R ;

11° La droite 32-33, prolongement de 1-27, est la trace du plan lumineux qui touche le cylindre B suivant la génératrice 1-1 ;

12° Enfin, la droite 32-34 est la trace du plan qui touche le cylindre D suivant la génératrice 4-4 ;

13° On peut construire encore, comme moyen de vérification et quoiqu'elles soient cachées, les deux ellipses 38-39 et 40-41, suivant lesquelles le plan horizontal de projection est rencontré par les cylindres des rayons lumineux qui s'appuient sur la base supérieure du cylindre D et sur la base inférieure du cylindre B.

Enfin, aux ombres portées sur le cylindre B et sur le plan horizontal de projection, il faut ajouter :

1° Les droites 27-13 et 25-13, suivant lesquelles la face supérieure du prisme K est coupée par les plans des rayons lumineux qui touchent les deux cylindres suivant les génératrices 1-1 et 3-3 ;

2° L'arc d'ellipse 35-23, provenant de l'intersection de la face supérieure du prisme T et du cylindre formé par les rayons qui s'appuient sur la circonférence de la base inférieure du prisme D ;

3° L'arc d'ellipse 36-37, suivant lequel la face supérieure du prisme R coupe la surface cylindrique formée par les rayons qui s'appuient sur la circonférence de la base supérieure du cylindre D.

CONSTRUCTION DES LIGNES D'OMBRES PORTÉES.

62. *Première opération.* On fera bien de commencer par construire le contour des ombres portées sur le plan horizontal de projection, parce que ces lignes, faciles à obtenir, peuvent être utiles pour déterminer ou pour vérifier quelques points des autres courbes.

Ainsi, les rayons lumineux qui s'appuient sur les bases du cylindre B étant projetés sur l'un des plans verticaux $A'Z'$ ou $A''Z''$, il sera facile d'obtenir leurs traces horizontales, ce qui donnera les deux ellipses 1-2 et 40-41.

Pour construire les ellipses 3-23 et 38-39 suivant lesquelles le plan horizontal est percé par les rayons qui s'appuient sur les bases du cylindre D, on projettera ces rayons sur l'un des plans verticaux $A'Z'$ ou $A''Z''$.

Les traces horizontales 3-25, 34-32, 1-33 et 2-29 des plans tangents aux deux cylindres pourront être déterminées de la même manière, et vérifiées par cette condition qu'elles doivent être tangentes aux ellipses dont nous venons de parler et aux traces des deux cylindres donnés.

Les intersections des mêmes rayons lumineux avec les faces supérieures des prismes T, R et K détermineront les arcs d'ellipse 35-23, 36-37, et les droites 25-13 et 13-27 parallèles aux traces horizontales des plans des rayons lumineux tangents aux cylindres donnés.

Les droites 22-23, 25-26 et 26-30 sont parallèles aux arêtes correspondantes des prismes T et K, et les droites 30-30, 31-31 et 17-16 doivent être parallèles à la projection horizontale SL du rayon de lumière.

Les points 25 sont situés sur le rayon lumineux suivant lequel le plan des rayons qui s'appuient sur la génératrice 3-3 du cylindre D coupe le plan des rayons qui s'appuient sur

l'arête horizontale 25-26 du prisme K, tandis que le point 27 appartient au rayon suivant lequel le plan lumineux qui s'appuie sur l'arête horizontale 27-30 du prisme K est coupé par le plan des rayons qui touchent le cylindre B suivant la génératrice 1-1.

Le point 13 appartient au rayon lumineux provenant de l'intersection des plans qui touchent les deux cylindres donnés suivant les génératrices 3-3 et 1-1. Ce rayon, après avoir touché le cylindre D au point 13 de la droite 3-3, puis le cylindre B en un second point 13 de la droite 1-1, vient percer au troisième point 13 la face supérieure du prisme K ; et si ce rayon pouvait traverser le prisme, il percerait le plan horizontal de projection en un quatrième point 13.

Deuxième opération. Toutes les ombres portées étant obtenues sur le plan horizontal de projection et sur les faces supérieures des trois prismes, il ne reste plus qu'à déterminer celles qui ont eu lieu sur le cylindre B.

Nous commencerons par la courbe à double courbure suivant laquelle ce cylindre est pénétré par l'ensemble des rayons lumineux qui s'appuient sur le contour de la base supérieure du cylindre D.

Pour simplifier l'explication, nous désignerons cette base par la lettre M. Ainsi, la circonférence M sera celle dont le centre est désigné sur les projections successives par les lettres $m, m', m'', m''',$ etc. ; et lorsque nous dirons circonférence m''' ou m^{iv} , cela signifiera la projection de la circonférence M sur le plan $A'''Z'''$ ou $A^{iv}Z^{iv}$.

Nous avons déjà remarqué que la demi-circonférence 3-8-4 est la seule partie de cette courbe qui appartient à la ligne de séparation ; mais, dans ces sortes de recherches, on a presque toujours aussitôt fait de construire la courbe tout entière et, dans ce cas, on comprend bien mieux la forme et la position du résultat obtenu.

Or la ligne cherchée étant l'intersection de deux cylindres,

il est évident qu'elle pourra être obtenue par le principe général exposé en géométrie descriptive.

Ainsi un plan P_1 qui contiendra le rayon lumineux sl et l'axe sb du cylindre B sera évidemment parallèle aux deux cylindres dont il faut trouver l'intersection, de sorte qu'en coupant ces deux cylindres par une suite de plans parallèles au plan P_1 , on obtiendra autant de points que l'on voudra de la courbe cherchée. On fera bien de commencer par les points les plus essentiels.

Si, par exemple, on veut déterminer le point 3 suivant lequel la courbe à double courbure touche l'ellipse 13-6-3, on tracera le rayon lumineux qui contient le point 3, suivant lequel la circonférence m est rencontrée par la génératrice 3-3; le plan P_2 qui contient le rayon lumineux du point 3, coupera le cylindre B suivant une génératrice dont le pied 5 sera sur la trace horizontale E de ce même cylindre, et l'intersection de cette génératrice par le rayon 3 déterminera le point demandé.

On pourra déterminer de la même manière le point 4, suivant lequel la courbe à double courbure touche l'ellipse 19-4.

Enfin, il est évident que l'on pourra obtenir ainsi autant de points que l'on voudra de l'ombre portée sur le cylindre B par la base supérieure du cylindre D.

On peut opérer de la même manière pour construire l'ellipse 13-6-3 suivant laquelle le cylindre B est coupé par le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur la génératrice 3-3 du cylindre D.

Ainsi, par exemple, pour déterminer exactement le point 6 qui est situé sur la génératrice 7 du cylindre B, on tracera le plan P_3 qui contient le point 7 de l'ellipse E. Ce plan coupera la trace du plan tangent 3-25 en un point 6 par lequel on construira un rayon lumineux, et l'intersection de ce rayon avec la génératrice 7 du cylindre B donnera le point 6 de l'ombre portée sur ce cylindre par le point 6 de la droite 3-3.

Troisième opération. Ce qui précède résulte évidemment des principes qui ont été démontrés dans le *Cours de géométrie descriptive*.

Mais on doit se rappeler aussi (55) que, lorsqu'il s'agit d'obtenir l'intersection de deux surfaces, les opérations peuvent souvent être simplifiées lorsque l'une des deux surfaces est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

C'est pour cette raison que dans l'épure précédente on a employé le plan auxiliaire de projection perpendiculaire au cylindre horizontal C.

Or on peut obtenir un résultat analogue en projetant le cylindre D sur le plan $A''Z''$ perpendiculaire au cylindre B.

La base supérieure du cylindre D'' est projetée ici par la droite 10-11, ce qui provient de ce que, dans le cas actuel, les deux cylindres sont perpendiculaires l'un à l'autre; mais on conçoit que, s'il en était autrement, cela ne saurait offrir plus de difficultés.

Seulement, alors, la base supérieure du cylindre D'' serait projetée par une ellipse que l'on obtiendrait en opérant pour chacun de ces points comme on l'a fait pour déterminer le point m'' (59).

Ainsi, pour obtenir sur la projection D'' les deux génératrices suivant lesquelles le cylindre D est touché par les plans des rayons lumineux, on ramènera d'abord les points 3 et 4 de la projection D^v sur la projection D^v , ce qui déterminera la hauteur de chacun d'eux au-dessus de la ligne A^vZ^v et, par conséquent, au-dessus du plan horizontal de projection.

Ces hauteurs, portées au-dessus de la ligne $A''Z''$ sur les perpendiculaires abaissées des points 3 et 4 de la projection horizontale m , détermineront les projections 3 et 4 des mêmes points sur le plan vertical $A''Z''$.

Les perpendiculaires abaissées des points 3 et 4 de la circonférence m'' sur le plan $A''Z''$ perceront ce plan en deux

points qui, rabattus en $a'''z'''$, détermineront les deux génératrices de séparation sur la projection D''' .

L'épure étant disposée comme nous venons de le dire, si l'on veut obtenir l'ombre du point 3, on tracera sur la projection $B'''E'''$ le rayon lumineux 3-3, et l'intersection de ce rayon avec la circonférence s''' déterminera le point cherché dont la projection horizontale sera située sur la projection horizontale 3-3 du même rayon.

Si l'on a bien opéré, le résultat doit coïncider avec celui que l'on avait obtenu précédemment.

On pourra déterminer ou vérifier de la même manière autant de points que l'on voudra.

Ainsi, pour obtenir l'ombre du point 8 de la circonférence m , on le projettera successivement sur les circonférences m^v , m^{iv} , m'' et m''' ; puis le rayon 8-8 de cette dernière projection percera le cylindre B''' en un point que l'on ramènera sur le rayon 8 de la projection horizontale.

La projection $B'''D'''$ est utile surtout lorsque l'on veut obtenir un point situé sur une génératrice déterminée du cylindre B.

Supposons, par exemple, que l'on veut obtenir les points suivant lesquels la courbe à double courbure touche la génératrice 12, qui forme l'une des limites de la projection horizontale du cylindre B.

On remarque que cette ligne se projette par le point 12 sur la circonférence B''' .

Or le rayon lumineux passant par ce point déterminera sur la circonférence m''' un point 12 qui sera la projection commune à deux points que l'on ramènera successivement sur les courbes m'' et m , et l'on pourra vérifier ces dernières projections en déterminant les mêmes points sur les circonférences m^v et m^{iv} .

Les deux points 12 de la circonférence m étant déterminés et vérifiés, on tracera les rayons correspondants et

les intersections de ces rayons avec la génératrice 12 du cylindre B feront connaître les deux points suivant lesquels cette droite est touchée par la projection horizontale de la courbe à double courbure demandée.

Si, comme j'ai engagé à le faire, on veut construire tout entière la courbe de pénétration des deux cylindres, on fera bien de déterminer les points suivant lesquels cette courbe coupe la génératrice 7 du cylindre BB'.

Pour cela, on tracera le rayon 9-9 sur la projection B'''D'''. Le point 9 de la circonférence m''' sera la projection commune à deux points dont on vérifiera les projections horizontales en les amenant successivement sur les projections m'' , m , m^v et m^{iv} .

Les projections horizontales des rayons lumineux passant par ces deux points rencontreront la génératrice 7 du cylindre B suivant les deux points 9 demandés.

Le rayon du point 10 de la projection m''' percera le cylindre B''' suivant un point 10, et la projection horizontale de la génératrice passant par ce point sera tangente à la projection de la courbe cherchée.

Si l'on veut déterminer le point de tangence, on projettera le point 10 successivement sur m'' , m , m^v et m^{iv} , puis la projection horizontale du rayon 10-10 déterminera le point demandé sur la perpendiculaire abaissée par le point 10 de la circonférence B'''.

En opérant de la même manière, on déterminerait le point suivant lequel la courbe est touchée par la génératrice 11 du cylindre B''' : cette ligne, trop près de la génératrice 12, ne peut pas être tracée en projection horizontale.

Quatrième opération. La projection auxiliaire B'''D''' sera encore très-commode pour construire les ellipses suivant lesquelles le cylindre B est coupé par les plans des rayons lumineux tangents au cylindre D.

En effet, en opérant comme nous l'avons fait pour les

points de la courbe à double courbure, il est évident que l'on pourra obtenir autant de points que l'on voudra des ellipses demandées.

Ainsi, pour déterminer ou vérifier le point 13 sur la projection horizontale du cylindre B, on tracera sur la projection $B''D''$ le rayon tangent à la courbe L'' . Ce rayon rencontrera la ligne de séparation 3-3 au point 13, dont la projection horizontale, située sur la ligne de séparation 3-3, déterminera le rayon 13-13, et, par suite, le point 13 sur la ligne de séparation 1-1 du cylindre B.

Pour obtenir le point 6 de l'ellipse 13-6-3, on construira le rayon 6-6 sur la projection $B''D''$; on obtiendra sur la ligne 3-3 le point 6, dont la projection horizontale détermine le rayon 6-6 et, par suite, le point 6 sur la génératrice 7 du cylindre D.

On agira de la même manière pour tous les autres points de la même ellipse ou de l'ellipse 19-18-4.

Pour construire ces courbes tout entières, on supposera les rayons prolongés jusqu'à leur rencontre avec la partie opposée du cylindre B'' .

Les mêmes moyens seront encore employés pour construire les ellipses 17-18, 20-21 provenant de la section du cylindre B par les plans des rayons lumineux qui s'appuient sur les deux arêtes horizontales 17-47 et 47-31 du prisme R.

Pour cela, il faudra commencer par projeter ces deux arêtes sur le plan vertical $A''Z''$, et de là sur le plan $A'''Z'''$ rabattu en $a'''z'''$.

Cela étant fait, si l'on veut obtenir l'ombre du point 17, on tracera le rayon correspondant sur la projection $B''D''$, et l'intersection de ce rayon avec le cylindre B'' déterminera le point cherché sur le plan horizontal de projection.

On déterminera de la même manière l'ombre portée par le sommet 47 du prisme R, et l'on remarquera que ce point doit être situé à la rencontre des deux arcs d'ellipse qui

forment les ombres portées sur le cylindre BB' par les arêtes horizontales 17-47 et 47-31 du prisme R.

L'ellipse 17-42, étant située dans un plan vertical, doit être projetée par une droite sur le plan horizontal de projection.

Cette droite contient évidemment le point 17.

Pour vérifier le point 18, suivant lequel se rencontrent les deux arcs d'ellipse 17-18 et 18-19, on pourra opérer de la manière suivante :

1° On déterminera sur la projection $A'Z'$ le point 49, suivant lequel la face supérieure et horizontale du prisme R est percée par la ligne de séparation 4-4 du cylindre D' ;

2° On projettera le point 49 sur le plan horizontal de projection, et l'on tracera la droite 49-18 parallèle à la trace horizontale 34-32 du plan qui touche le cylindre D suivant la génératrice 4-4 ;

3° Le rayon de lumière 18-18 sera l'intersection du plan tangent, dont nous venons de parler, par le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête 17-47 du prisme R, et les ellipses 17-18 et 18-19, suivant lesquelles ces plans coupent le cylindre D, doivent se rencontrer suivant deux points situés sur le rayon 18-18.

PROJECTION VERTICALE DES OMBRES.

63. Nous n'avons encore rien dit de la projection des ombres sur le plan vertical $A'Z'$, parce que les projections auxiliaires précédentes ont suffi pour déterminer toutes les projections horizontales.

Or, il est évident que, pour obtenir les projections verticales, il ne reste plus que l'embarras du choix.

En effet, on pourra déterminer chaque point en élevant par sa projection horizontale une perpendiculaire à la ligne $A'Z'$, jusqu'à la rencontre de la génératrice ou du

rayon de lumière qui contient le point demandé ; ou bien on peut déterminer ce point par l'intersection de la génératrice avec le rayon de lumière et réserver la perpendiculaire à la ligne $A'Z'$ comme vérification.

Enfin, si l'on veut s'exercer sur les rabattements, on fera usage des projections auxiliaires $A''Z''$ et $A^{IV}Z^{IV}$, qui, on doit se le rappeler, sont perpendiculaires au plan vertical de projection.

Ainsi, par exemple, pour déterminer la projection verticale du point 3 suivant lequel la courbe à double courbure touche l'ellipse 13-6-3, on se rappellera que ce point est l'intersection du cylindre BB' par le rayon lumineux qui s'appuie sur le point 3 de la circonférence m .

Or le point 3 de la circonférence m^V étant ramené sur les projections m et m^{IV} , sa hauteur au-dessus du plan horizontal de projection sera connue.

Cette hauteur portée au-dessus de la ligne $A'Z'$ détermine le point 3 de la circonférence m' ; et l'on sait d'ailleurs que ce même point peut être déterminé ou vérifié en construisant sa projection sur les plans auxiliaires m^{IX} et m^{VIII} .

Cela étant fait, on établira le point 3 sur la circonférence m^{VI} , en faisant la distance 43-3 de la projection $A^{VI}Z^{VI}$ égale à la distance 48-3 de la projection horizontale.

Le point 3 de la projection m^{VI} étant amené sur la circonférence m^{VII} , on tracera le rayon lumineux correspondant, et l'intersection de ce rayon avec le cylindre B^{VII} déterminera le point demandé que l'on ramènera sur le rayon 3-3 de la projection $A'Z'$ par une perpendiculaire à la charnière de rabattement $V'V^{VII}$.

Le rayon lumineux passant par le point 50 déterminera sur B^{VII} le pied de la génératrice de B' , qui est tangente à la projection verticale de la courbe à double courbure.



POINT SUIVANT LEQUEL SE TOUCHENT LES DEUX CYLINDRES.

64. Ce que nous venons de dire suffit pour faire comprendre comment on pourra déterminer ou vérifier les projections verticales de tous les points obtenus précédemment sur le plan horizontal de projection ; mais, pour résumer en quelque sorte toute l'épure, j'énoncerai successivement chacune des opérations nécessaires pour obtenir et vérifier les deux projections principales o et o' du point suivant lequel les deux cylindres se touchent.

Première opération. La première détermination du point dont il s'agit aura lieu sur la projection $B''D'''$, et sera située au milieu de la droite $s'''h'''$ qui exprime la plus courte distance des axes des deux cylindres.

Deuxième opération. On remarquera que le point o''' est situé en même temps sur la génératrice 44 du cylindre BB' et sur la génératrice 11 du cylindre DD' ; d'où il résulte qu'il se projettera partout sur les projections de ces génératrices. Or, par suite de la perpendicularité des deux cylindres, la génératrice 11 du cylindre DD' se confond sur la projection verticale $B''D''$ avec la projection verticale $d''m''$ de l'axe du cylindre D'' ; de sorte que le point o''' de la projection $B''D'''$ étant projeté sur $a'''z'''$, on pourra le ramener en $A'''Z'''$, d'où l'on déduira facilement sa projection o'' sur $d''m''$.

Troisième opération. La perpendiculaire abaissée sur XX'' par le point o''' de la projection $B''D'''$ rencontrera la perpendiculaire abaissée sur $A''Z''$ par le point o'' de la projection $B''D''$ en un point o qui sera la projection horizontale du point demandé.

Quatrième opération. On peut obtenir directement la projection verticale du même point en élevant par sa projection horizontale une perpendiculaire à la ligne $A'Z'$ jusqu'à ce

qu'elle rencontre l'une des génératrices 11 ou 14 au point o , suivant lequel ces deux génératrices se rencontrent. On peut aussi prendre la hauteur du point o'' sur la projection $A''Z''$.

Mais on fera bien, comme étude, de vérifier la position de ce même point en la déduisant de la projection $B^{VII}D^{VII}$.

Pour y parvenir, on projettera le point o^{VII} sur $\alpha^{VII}z^{VII}$, que l'on ramènera en $A^{VII}Z^{VII}$, ce qui donnera le point o^{VI} sur la projection D^{VI} du cylindre D.

Puis les perpendiculaires abaissées sur $V'V^{VII}$ et sur $A^{VI}Z^{VI}$ par les projections correspondantes du point demandé devront aboutir à la projection verticale o' de ce point.

Enfin, toutes les opérations précédentes seront vérifiées si les deux projections principales o et o' sont situées sur une même droite perpendiculaire à la ligne $A'Z'$.

65. *Résumé.* Je ne prolongerai pas plus loin l'explication des détails nécessaires pour compléter cette épure ; je pense que ce qui précède suffit pour faire comprendre ce qui reste à faire.

Ainsi, en résumant, le lecteur pourra reconnaître *dix plans de projection*, que je désignerai par leurs traces successives, savoir :

- 1° Le plan horizontal de projection ;
- 2° Le plan vertical $A'Z'$;
- 3° Le plan vertical $A''Z''$ parallèle au cylindre B ;
- 4° Le plan $A'''Z'''$ perpendiculaire au cylindre B' est rabattu dans la position $\alpha'''z'''$ parallèle au plan horizontal ;
- 5° Le plan vertical $A^{IV}Z^{IV}$ parallèle au cylindre D ;
- 6° Le plan $A^{V}Z^{V}$ perpendiculaire au cylindre D' est rabattu en $\alpha^{V}z^{V}$ et parallèle alors au plan horizontal ;
- 7° Le plan $A^{VI}Z^{VI}$ est parallèle au cylindre B' et perpendiculaire au plan vertical de projection $A'Z'$;
- 8° Le plan $A^{VII}Z^{VII}$ perpendiculaire au cylindre B'' est rabattu en $\alpha^{VII}z^{VII}$ autour de la droite $V'V^{VII}$ perpendiculaire au

plan $A^{\text{VI}}Z^{\text{VI}}$ et parallèle, par conséquent, au plan vertical de projection $A'Z'$;

9° Le plan $A^{\text{VIII}}Z^{\text{VIII}}$ est parallèle au cylindre D' et perpendiculaire au plan de projection $A'Z'$;

10° Enfin, le plan $A^{\text{IX}}Z^{\text{IX}}$ perpendiculaire au cylindre D^{VIII} est rabattu en $a^{\text{IX}}z^{\text{IX}}$ autour de la droite $U'U^{\text{IX}}$ et, par suite de ce rabattement, devient parallèle au plan vertical $A'Z'$.

J'aurais certainement pu éviter quelques-uns de ces plans de projection, mais alors j'aurais diminué les occasions d'exercices ou de vérifications, ce qui aurait été contraire au but que je me suis proposé en donnant cette épure, que l'on doit principalement considérer comme une étude sur les rabattements.

Cylindre vertical.

66. Lorsqu'il y a dans les données quelques relations de symétrie et de régularité, il en résulte presque toujours simplification dans le résultat.

Ainsi, par exemple (*fig. 37, pl. 7*), s'il s'agissait de construire l'ombre portée sur le plan de projection par un cylindre circulaire placé verticalement, on construirait le carré circonscrit au cercle formant la base supérieure du cylindre, et l'on chercherait de préférence les ombres des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8, dont quatre sont situées sur les côtés du carré et les quatre autres sur les diagonales ; et si nous supposons, de plus, que la projection horizontale du rayon de lumière fasse un angle de 45° avec la ligne AZ , le plan vertical qui contient les points 8 et 4 déterminera les ombres de ces points, ainsi que les angles du carré et le centre de l'ellipse qui forme l'ombre du cercle.

Des parallèles à la ligne AZ détermineront tous les autres points.

Les limites d'ombres sur la surface du cylindre seront déterminées par les deux plans verticaux tangents aux points 2 et 6.

MOULURES.

Cavet.

67. Les moulures qui forment la plus grande partie des profils d'architecture sont presque toutes des surfaces cylindriques ; je prendrai pour premier exemple celle à laquelle on donne le nom de *cavet* (fig. 40, pl. 8).

Cette moulure est formée par deux quarts de cylindres circulaires et concaves, dont l'un est perpendiculaire et l'autre parallèle au plan vertical de projection.

La ligne de séparation se compose :

1° De l'arête 1-2, provenant de l'intersection des deux faces verticales du monument ;

2° De l'arc 2-5 appartenant au quart d'ellipse 2-5-6, qui résulte de l'intersection des deux surfaces cylindriques de la moulure.

Le point 5 est déterminé par le rayon 0-5 perpendiculaire à la projection verticale *s-l* de la lumière.

La courbe 5-3 est l'ombre portée par l'arc 5-3, dans le cylindre perpendiculaire au plan vertical de projection, et la petite courbe 3'-2' provient de l'ombre portée par l'arc 3-2.

La courbe 5-3' est une courbe à double courbure, résultant de l'intersection du cylindre perpendiculaire au plan vertical, par le cylindre oblique que forment les rayons lumineux qui s'appuient sur le quart d'ellipse 2-5-6.

Les mêmes rayons prolongés jusqu'au plan horizontal dé-

terminent l'arc d'ellipse 2'-5'-7 dont fait partie la petite courbe 2'-3".

La droite 2'-1' est l'ombre portée par l'arête verticale 1-2.

Enfin, les droites 6-6', 6'-3" sont les ombres portées par les arêtes verticale et horizontale qui aboutissent au point 6.

Cymaise.

68. Cette moulure (*fig. 42*) est formée par deux surfaces cylindriques, ayant pour directrice la courbe à deux centres 6-7-8-9-10, qui forme le profil dans la projection verticale.

L'ombre dans le cavet se déterminera comme dans l'exemple précédent.

L'ombre de la petite arête 5-6 aura pour projection horizontale une ligne droite, parce qu'elle résulte de l'intersection du cylindre de la moulure par un plan vertical.

L'ombre de l'arête horizontale du point 5 sera aussi une ligne droite, parce qu'elle résulte de l'intersection de la moulure par un plan qui lui est parallèle.

La courbe 2'-4'-5' est à double courbure, parce qu'elle provient de l'intersection de la surface cylindrique de la cymaise par le cylindre oblique que forment les rayons lumineux qui s'appuient sur l'arc 2-4-5.

La ligne 2'-1' est courbe, mais elle se projette en ligne droite parce qu'elle est située dans le plan vertical qui contient l'arête 1-2.

L'intersection de ce même plan avec le plan horizontal produit la ligne droite 1'-1".

La ligne de séparation sur la cymaise se compose :

1° De la droite horizontale 7-7", suivant laquelle le cylindre perpendiculaire au plan vertical de projection est touché par un plan parallèle aux rayons de lumière ;

2° De la courbe 7-8-9, faisant partie de l'intersection des deux cylindres de la moulure.

Le point de tangence 7 et, par conséquent, la ligne de tangence 7-7" seront déterminés par la droite 0-7 perpendiculaire à la direction de $s-l$.

Le point 9 sera déterminé par la droite 0'-9, parallèle à 0-7 et perpendiculaire à $s-l$.

Base du pilastre de l'ordre toscan avec le talon du piédestal.

69. Les ombres du cavet et de la plinthe se détermineront comme dans l'exemple précédent.

La ligne de séparation sur le quart de rond se compose :

1° De la droite 1-2, suivant laquelle le cylindre perpendiculaire au plan vertical de projection est touché par un plan parallèle aux rayons lumineux ;

2° De la courbe 2-3-4, faisant partie de la demi-ellipse qui résulte de l'intersection des deux cylindres circulaires dont se compose la moulure ;

3° De la droite horizontale 4-6, suivant laquelle le cylindre parallèle au plan vertical est touché par le plan des rayons lumineux.

Le point de tangence 2 et la ligne de tangence 1-2 sont déterminés par le rayon 0-2, perpendiculaire à la projection $s-l$ du rayon lumineux.

Quant à la ligne de tangence 4-6, on pourra l'obtenir de deux manières différentes.

PREMIÈRE SOLUTION. *Principe des plans coupants* (8).

Première opération. On construira la courbe $a-c-e$, $a'-c'-e'$, résultant de la section du quart de rond par un plan vertical dont la trace $s''-l''$ serait parallèle à la direction de $s'l'$.

Deuxième opération. On construira la tangente $s^{iv}-l^{iv}$ pa-

rallèle à $s-l$, et l'on déterminera le point de tangence 5 le plus exactement qu'il sera possible : ce point déterminera l'horizontale 4-6.

DEUXIÈME SOLUTION. Si l'on conçoit un plan auxiliaire de projection P dont la trace serait $l''-s^v$ et qu'on le fasse tourner autour de la verticale du point l'' , la courbe suivant laquelle ce plan coupe le cylindre parallèle au plan vertical viendra se confondre avec celle qui forme le profil de la moulure.

Si nous concevons de plus un rayon quelconque tel que $s'''-l'''$, $s''-l''$, le point s''' , s'' se projettera en s^v sur le nouveau plan de projection, et ce dernier point s^v étant rabattu en s^{vi} , on en déduira s^{vii} , de sorte que la droite $s^{vii}-l'''$ sera la projection du rayon de lumière sur le plan auxiliaire s^v-l'' rabattu en $s^{vi}-l''$.

L'opération se réduira donc à construire la tangente $s^{viii}-l^{iv}$ parallèle à la direction $s^{vii}-l'''$ de la lumière.

Le point de tangence 4 et, par conséquent, la ligne de tangence 4-6 seront déterminés par le rayon 0-4 perpendiculaire à $s^{viii}-l'''$.

Les mêmes moyens serviront pour déterminer la ligne de séparation et l'ombre portée sur le talon.

Ainsi : 1° après avoir construit la courbe provenant de la section par le plan vertical $s''-l'''$, on tracera les rayons de lumière qui passent par les points 7 et 10, ainsi que le rayon tangent au point 8, que l'on déterminera le plus exactement qu'il sera possible ;

2° Le rayon qui touche la section au point 7 percera la courbe en un point qui déterminera l'ombre portée sur le talon par l'arête inférieure de la plinthe ;

3° Le rayon tangent au point 8 déterminera le point 9 et la droite 9-12, suivant laquelle la surface concave du talon est rencontrée par le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'horizontale 8-11.

On peut aussi considérer le profil à droite du talon comme la projection sur le plan s^v-l'' rabattu en $s^{vi}-l''$, les tangentes parallèles à $s^{vii}-l'''$ déterminent tous les points de tangence et d'ombre portée sur les moulures parallèles au plan vertical.

Cylindre creux.

70. La figure 41 se compose des deux projections d'un berceau circulaire parallèle au plan vertical de projection. Le plan de coupe, parallèle aussi au plan vertical de projection, contient l'axe du berceau.

Si l'on applique le principe des plans coupants, il faudra construire le quart d'ellipse $2-4'-a$, provenant de la section du berceau par le plan vertical $o-2-a'$, parallèle à $s'-l'$.

La tangente $s'''-l'''$, parallèle à $s-l$, déterminera le point de tangence $4'$, et par suite le point 4.

Le rayon de lumière du point 2 déterminera le point $2'$ et la droite $2'-2'''$.

Pour obtenir le point $3'$, il faudrait construire l'arc d'ellipse provenant de la section du berceau par le plan vertical qui contient le rayon de lumière du point 3. Cet arc n'a pas été conservé sur l'épure.

71. Lorsque les projections du rayon de lumière font des angles de 45° avec la ligne AZ, les sections par les plans verticaux qui contiennent ces rayons se projettent par des arcs de cercle. Mais, dans tous les cas, il est plus simple d'employer (45) la projection auxiliaire rabattue à droite de la figure 41.

Cette projection est perpendiculaire au cylindre formant l'intrados du berceau, qui alors sera projeté par sa trace $2'a''$.

La droite $o'-4'''$, perpendiculaire sur $s''-l''$, déterminera le point $4'''$, et par suite le point 4.

Les rayons de lumière $2'-2'''$, $3''-3^{iv}$ perceront le cylindre en des points dont les projections $2'''$, 3^{iv} détermineront les points $2'$ et $3'$.

ENGRENAGES.

72. Pour dernière application des surfaces cylindriques, nous construirons (*pl.* 8) l'ombre portée par les diverses parties d'une roue d'engrenage, sur elle-même, et sur quelques surfaces extérieures.

Mon but n'étant pas de présenter ici les principes de la construction des machines, je ne parlerai pas des conditions auxquelles doit satisfaire la courbe qui sert de directrice à la surface cylindrique de chaque dent ; et admettant cette courbe comme rigoureusement déterminée, le lecteur se contentera d'en copier sur l'épure la projection horizontale, en la considérant comme faisant partie des données de la question qui nous occupe.

La projection horizontale étant tracée, il sera facile d'en déduire la projection verticale.

La partie de l'arbre qui est projetée sur l'épure se compose de trois cylindres circulaires A, C, E, de différents rayons, et cet arbre est pénétré à angle droit par un quatrième cylindre D horizontal, et d'un plus petit diamètre.

Pour construire les courbes de pénétration de ces deux cylindres, il suffit (*Géométrie descriptive*) d'élever des perpendiculaires par les points suivant lesquels les projections des génératrices du cylindre horizontal rencontrent la trace du cylindre vertical.

Ombres. La direction de la lumière est donnée par les deux projections du rayon $s-l$, $s'-l'$.

Cylindres verticaux de l'arbre. Ces trois cylindres ayant le même axe, la ligne de séparation sur chacun d'eux sera

déterminée (*fig. 44*) par le diamètre $3'-3'$, perpendiculaire à la projection horizontale $s'-l'$ de la lumière.

Le point $1'$ déterminera, sur le plus petit cylindre, la ligne de séparation $1-1$, le point $3'$ déterminera la ligne $3-3$ sur le plus grand cylindre. Enfin, le point $2'$ donnera la droite $2-2$ sur le cylindre qui forme l'arbre de la roue.

La courbe $g-2$ (*fig. 43*) est à double courbure et provient de l'intersection du cylindre vertical E par le cylindre oblique que forment les rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête inférieure du cylindre C.

Les deux petites courbes 2^v-2^{vi} appartiennent à une même ellipse et résultent de l'intersection du cylindre horizontal D par le plan vertical contenant les rayons lumineux qui touchent le cylindre E suivant la droite $2-2$, de sorte que ces courbes 2^v-2^{vi} appartiennent à l'ombre portée par le cylindre E sur le cylindre D.

Les droites $1'-1''$, $2'-2''$, $3''-3'''$ (*fig. 44*) sont les intersections de la face supérieure du cylindre C et de celle de la roue, par les plans lumineux tangents aux cylindres A, C, E.

Les arcs $3''-2''$, $3'''-z$ appartiennent à deux circonférences décrites des points o' et o'' comme centres avec des rayons égaux à $o3'$; ces deux circonférences sont les ombres portées sur la surface de la roue, par les deux bases du cylindre C. Les centres o' et o'' s'obtiennent en construisant (*fig. 43*) les rayons de lumière $o'''-o^{iv}$, o^v-o^{vi} .

Enfin, la petite droite $2'''-3^{iv}$, située dans le prolongement de $2'-2''$, est la trace horizontale du plan lumineux tangent au cylindre E, et fait par conséquent partie de l'ombre portée par ce cylindre sur le plan horizontal de projection.

Cylindre horizontal. La ligne de séparation sur ce cylindre peut se déterminer de plusieurs manières.

73. *Première méthode.* On construira (*fig. 43*) l'ellipse

$d-d'-d''$ résultant de la section du cylindre D par un plan hk (fig. 44), vertical et parallèle à la direction du rayon de lumière $s'-l'$ (8).

On déterminera ensuite avec exactitude (fig. 43) les deux points 4, 5 suivant lesquels cette ellipse est touchée par les deux rayons $s''-l''$, $s''-l''$ (53).

Le point 4 détermine la droite $4'''-4$, et le point 5, projeté horizontalement en $5'$, appartient à la droite $5^{iv}-5'$, de sorte que les lignes de séparation sur le cylindre horizontal seront déterminées.

74. *Deuxième méthode.* On fera tourner le cylindre D autour de la verticale du point o jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au plan vertical de projection. Dans cette nouvelle position, il aura pour projection verticale à la circonférence D' .

Si l'on choisit ensuite un rayon quelconque $9-x$, $9'-x'$, et qu'on le fasse tourner de la même quantité, le point $9-9'$ décrira un axe horizontal $9'-9''$, égal à l'arc $t-t'$ qui mesure l'angle parcouru par l'axe du cylindre D, et le point $9'$ viendra se placer en $9''$, d'où l'on déduira $9'''$ pour la nouvelle projection verticale du point 9.

Le point $x-x'$ décrira un arc horizontal $x'-x''$ égal à $t-t'$, et viendra se placer en x'' , d'où l'on déduira x''' pour la nouvelle projection verticale du point x .

Ainsi, $9'''-x'''$ sera la projection du rayon de lumière sur le plan vertical perpendiculaire à la direction du cylindre D.

Il résulte de là que le diamètre $4''-5''$, perpendiculaire à $9'''-x'''$, détermine les points de tangence $4''-5''$; et les droites $s^{iv}-l^{iv}$, s^v-l^v , perpendiculaires à $4''-5''$, seront les traces des deux plans tangents parallèles à la direction du rayon de lumière $9'''-x'''$; faisant revenir le tout à sa place, les deux lignes de tangence, projetées par les points $4''-5''$, deviennent $5''-5''$, $5'''-4''$.

La petite courbe $4''-6''$ est un arc d'ellipse et résulte de l'intersection du cylindre vertical par le plan des rayons lumineux qui touchent le cylindre D suivant la droite $4'''-4''$.

On construira quelques-uns des rayons qui s'appuient sur cette droite. Ainsi, la projection horizontale du rayon qui contient le point 6 rencontre la circonférence $2'-2'$, qui est la trace du cylindre C, en un point $6'$, d'où l'on déduit la projection verticale $6''$, qui appartient à la courbe demandée.

Ombre de la roue. La surface de cette roue se compose d'une suite de surfaces cylindriques alternativement convexes et concaves, séparées les unes des autres par de petites faces verticales telles, par exemple, que ac , $a'c'$ pour les dents M, M' (*fig. 44*).

La petite face verticale projetée par ac se nomme *le flanc*, et doit être tangente d'un côté à la surface convexe que l'on nomme *la dent*, et de l'autre côté au cylindre concave que l'on nomme *le creux*. Mais toutes ces surfaces étant perpendiculaires au plan horizontal, leur ensemble peut être considéré comme ne formant qu'une même surface cylindrique.

Pour obtenir *la ligne de séparation* sur la roue, on tracera parallèlement à $s'-l'$ toutes les tangentes qu'il sera possible de construire au contour de la projection horizontale, et l'on déterminera tous les points de tangence le plus exactement qu'il sera possible ; toutes les parties de la ligne de séparation seront alors déterminées.

Ainsi, par exemple, si nous commençons par la dent B, en allant vers la droite, cette ligne se compose :

1° De la verticale $7-7$ (*fig. 43*), suivant laquelle la dent B est touchée à droite par le plan $p-7'$, parallèle à $s'-l'$ (*fig. 44*) ;

2° De la petite courbe $7-8$, $7'-8'$ située dans le plan horizontal formant le dessus de la roue ; le point $8'$ est déterminé par le plan $p'-8'$, tangent au creux ;

3° La couche 8'-9', située dans la face inférieure de la dent B' ;

4° L'arête verticale 9-9 (*fig. 43*), suivant laquelle l'angle de la dent est touché par le plan $p''-9'$, parallèle à la lumière ;

5° La courbe 9-10, 9'-10', situé dans la face supérieure de la roue ; et ainsi de suite.

La ligne de séparation étant bien reconnue dans tout le contour de la roue, il ne reste plus qu'à construire l'ombre.

Supposons d'abord que l'on veuille obtenir l'ombre portée sur la surface de la dent, par le point le plus élevé de la verticale 11-11 (*fig. 43*). On construira le rayon lumineux passant par ce point ; le plan vertical qui contient ce rayon coupera la surface verticale de la dent B'', suivant une verticale 11''-11'', dont l'intersection avec 11-11'' donne 11'' pour l'ombre du point 11.

On déterminera de la même manière autant de points que l'on voudra. La courbe 12-11'' est à double courbure, et résulte de l'intersection du cylindre vertical formant la surface de la dent B'' par le cylindre oblique provenant de l'ensemble des rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe horizontale 11-12 de la dent B'.

Les points 8, 10, 12, et tous les points analogues, sont déterminés par les tangents aux cylindres concaves qui forment les creux des dents.

Les ombres portées sur le cylindre vertical et sur le plan vertical de projection ne présenteront aucune difficulté.

L'ombre portée sur le plan horizontal provient des rayons qui s'appuient sur l'arête inférieure des dents H et H'.

75. On peut construire cette courbe d'une manière fort simple ; on supposera d'abord le rayon passant par le centre de la face inférieure de la roue. Le point o^x , suivant lequel ce rayon perce le plan horizontal, sera le cercle de deux cercles concentriques entre lesquels on dessinera une figure

absolument égale et parallèle à celle qui forme le contour de la projection horizontale de la roue.

L'ombre de l'arête inférieure des dents sera déterminée (25). Il ne restera plus qu'à y ajouter les petites droites $13'-13''$, $14'-14''$, tangentes aux courbes obtenues ainsi qu'aux dents H et H', et formant l'ombre portée par les verticales des points 13 et 14, suivant lesquelles ces dents sont touchées par deux plans parallèles aux rayons lumineux.

Si l'ombre des dents qui sont dans la partie opposée de la roue avait lieu sur le plan horizontal, il faudrait construire de la même manière l'ombre portée par la face supérieure de la roue.

76. Les ombres portées par les arêtes inférieures des dents sur le cylindre horizontal D peuvent être déterminées de plusieurs manières.

Première méthode. Supposons que l'on veuille obtenir l'ombre portée par l'extrémité inférieure de l'arête 9-9. On construira (fig. 43) l'ellipse $d'''-d''$, résultant de l'intersection du cylindre D par le plan vertical $p''-x'$, qui contient le rayon de lumière du point 9 ; l'intersection de cette ellipse par la projection verticale 9- x du rayon déterminera le point 9'', ombre du point 9.

77. *Deuxième méthode.* On supposera, comme nous l'avons dit plus haut, le cylindre D ramené dans une position perpendiculaire au plan vertical de projection, et ayant par conséquent, pour sa nouvelle projection, la circonférence D'.

L'intersection de cette circonférence par la droite $9'''-x'''$, qui est la nouvelle projection du rayon de lumière sur le plan perpendiculaire au cylindre D, déterminera le point d'ombre 9'', que l'on ramènera sur le rayon 9- x , en lui faisant parcourir l'arc horizontal qui a pour projections $9'''-9''$, $9''-9''$.

Les courbes 7"-7'", 9"-d'" sont des arcs d'ellipses, et résultent de l'intersection du cylindre D par les plans qui touchent les dents suivant les verticales des points 7, 9, etc.

La courbe 7'''-9" et les courbes analogues sont à double courbure, et proviennent de l'intersection du cylindre D par les portions de cylindres obliques formés par les rayons qui s'appuient sur les arêtes inférieures des dents.

Les deux grandes courbes 15-16, 16-17 sont à double courbure, et proviennent des intersections des deux cylindres A et D par le cylindre parallèle à la direction de la lumière, et qui aurait pour directrice la circonférence horizontale passant par les extrémités inférieures des dents.

CHAPITRE II

SURFACES CONIQUES.

Cône oblique.

78. Les raisons qui m'ont engagé (article 53) à choisir comme sujet d'exercice, un cylindre circulaire, me déterminent encore ici à prendre pour exemple un cône de révolution. Mon but, dans cet ouvrage, étant surtout de familiariser le lecteur avec les difficultés de l'application, je crois devoir choisir de préférence les questions qui se présentent le plus souvent dans la pratique.

Les données (*fig. 46 et 48, pl. 9*) sont: 1° Les deux projections $s-o$, $s'-o'$ de l'axe d'un cône droit à base circulaire ;

2° Le rayon du cercle provenant de la section de ce cône par un plan perpendiculaire à son axe et passant par le point o ;

3° Les deux projections $s-l$, $s'-l'$ d'un rayon de lumière.

79. *Projections.* On construira d'abord (*fig. 49*) la projection du cône sur un plan vertical parallèle à son axe ; cette première projection donnera les axes de l'ellipse qui est la projection horizontale de la base du cône sur la figure 48.

Les distances $p-o$, $q-s'$ étant portées de o en o'' et de s en s''' , on construira la figure 45, que l'on pourra considérer comme une section du cône par un plan qui contiendrait son axe, et qui serait perpendiculaire au plan vertical de projection. Cette deuxième opération fera connaître les axes

de l'ellipse suivant laquelle la base du cône se projette sur le plan vertical (*fig. 46*).

80. *Trace du cône.* Les génératrices $s''-a$, $s''-a$ (*fig. 49*) percent le plan horizontal en deux points a' , a' , qui sont les extrémités du grand axe de l'ellipse cherchée ; le point c' , milieu de $a'-a'$, sera le centre de cette ellipse, et le petit axe $b'-b'$, projeté sur la figure 49, par un seul point c , doit être égal au double de la ligne cb .

En effet, l'axe $b'-b'$, perpendiculaire au plan de la *fig. 49*, est une corde commune à l'ellipse cherchée $a'-b'-a'-b'$, et au cercle provenant de la section du cône par le plan $a''-a''$, perpendiculaire à son axe. Si donc on rabat cette dernière section sur le plan de la figure 49, l'une des extrémités de la corde horizontale $b'-b'$ viendra se placer en b sur la circonférence décrite du point o''' comme centre avec le rayon $o'''-a''$, ce qui déterminera la longueur de cb , moitié de $b'-b'$, second axe de l'ellipse $a'-b'-a'-b'$.

Si du point c' comme centre on décrit l'arc de cercle $a'-u$, et que l'on construise (*Géom.*) le point u suivant lequel cet arc serait touché par la tangente $s'-u$, l'ordonnée $u-u''$ déterminera les points u' , u' , et, par conséquent, les deux tangentes $s'-u'$, $s'-u'$, qui complètent la projection horizontale du cône.

Enfin, le diamètre $v'-v'$, passant par le milieu d'une corde quelconque $a'-d$, perpendiculaire au plan de la figure 46, détermine les points de tangence v' , v' , et, par suite, les tangentes $s-v$, $s-v$, ce qui complète et vérifie en même temps la projection verticale du cône.

Ombres.

81. *Ligne de séparation sur le cône.* Cette ligne se compose de l'arc de cercle 1-2-3 et des droites $s-1$, $s-3$, suivant

lesquelles le cône est touché par deux plans parallèles à la direction de la lumière, de sorte que cette ligne passe par les points $s-1-2-3-s$.

Il est évident qu'aussitôt que les droites $s-1$, $s-3$ seront déterminées, l'arc $1-2-3$ le sera aussi. Cette question peut être résolue de plusieurs manières, je me bornerai, pour le moment, à en indiquer deux.

82. *Première méthode.* Le rayon de lumière $s-l$, $s'-l'$ passant par le sommet du cône, perce le point horizontal en un point l'' par lequel on construira les deux droites $l''-h$, $l''-k$ tangentes à l'ellipse $a'-b'-a'-b'$; ces lignes seront (*Géométrie descriptive*) les traces de deux plans tangents formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur le cône.

Les points de tangence $1'-3'$ appartiennent aux droites $s-1$, $s-3$, qui seront alors déterminées.

Pour la construction des points de tangence, je rappellerai le principe connu (*courbes du 2^e degré*). Soit (*fig. 47*) l'ellipse $a-b-a-b$, à laquelle on veut mener des tangentes par le point extérieur l ; on décrira d'abord, de ce point comme centre, un arc de cercle mm' , passant par l'un des foyers F ; ensuite, de l'autre foyer F' comme centre, avec un rayon égal au grand axe $a-a$ de l'ellipse, on décrira un second arc de cercle $n-n'$; on joindra les points de rencontre v , u , de ces deux arcs de cercle avec le foyer F' , par deux droites vF' , uF' , dont les intersections avec la courbe seront les points de tangence demandés.

83. La solution employée précédemment (82) pour déterminer les droites $s-1$, $s-3$ est générale comme principe, en cela qu'elle peut s'appliquer à toutes les surfaces coniques; mais, la plupart des cônes employés dans l'industrie étant circulaires, il sera utile d'indiquer la méthode suivante, d'autant

plus qu'il est très-rare que l'on ait sur la feuille de dessin les traces du cône dont on cherche l'ombre.

84. *Deuxième méthode.* Si d'un point o^{iv} pris à volonté sur l'axe, on décrit une circonférence $z-z$, tangente aux deux droites $s'-u'$ qui forment la limite de la projection horizontale du cône, on pourra considérer cette circonférence comme la projection commune aux deux ellipses suivant lesquelles le cône serait coupé par les deux plans $z'-z$, $z''z''$, perpendiculaires au plan de projection 49.

Les points z' , z'' sont déterminés par les droites $zz''z'$, $zz'z''$, tangentes à la circonférence zz .

Le plan $z'z'$ est percé par le rayon de lumière qui contient le sommet du cône, en un point t d'où l'on déduira t' (*fig. 48*); et les deux droites $t'-1''$, $t'-3''$, tangentes à la circonférence $z-z$, seront les intersections du plan $z'-z'$, par les deux plans tangents formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur le cône; de sorte que les points de tangence $1''$ et $3''$, construits avec exactitude (*Géométrie*), déterminent les deux droites $s-1$, $s-3$.

J'ai employé le plan $z'-z'$ de préférence au plan $z''-z''$, parce que ce dernier aurait été rencontré trop loin par le rayon de lumière du sommet. En faisant la section $z'-z'$ à une plus grande distance du sommet, la circonférence $z-z$ sera plus grande et les constructions plus exactes.

Les ombres portées ne présenteront pas de difficultés.

Cône droit.

85. Le rayon $s-l$, $s'-l$, passant par le sommet du cône (*fig. 50*), perce le plan horizontal en un point l' .

Les tangentes $l'-1$, $l'-2$ sont les traces des deux plans

formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur le cône. Les lignes $s-1$, $s-2$ forment les lignes de séparation.

Si l'on veut construire l'ombre portée sur le cône par un point extérieur mm' , on construira les deux rayons $s-l$, $s'-l'$, $m-m''$, $m'-m'''$, qui détermineront un plan passant par le sommet du cône et par le point donné. Ce plan, dont la trace horizontale est $v'-u'$, coupe le cône suivant la génératrice $s'-v'$, dont l'intersection par le rayon mm'' détermine m'' pour l'ombre portée par le point m sur le cône (8).

La droite ms , $m's'$ étant située dans le plan svu , $s'v'u'$, perce le plan horizontal en un point u' , situé sur la trace de ce plan, ce qui peut servir de vérification.

Cône creux.

86. Pour construire l'ombre portée dans un cône creux par une partie de la circonférence du cercle qui lui sert de base, il suffit d'appliquer le principe précédent à chacun des points de cette courbe.

Pour déterminer d'abord la partie qui forme la ligne de séparation, on construira (*fig. 52*):

- 1° Le rayon de lumière $s-l$, $s'-l'$;
- 2° Les deux tangentes $l'-1$, $l'-3$.

87. Si au lieu d'être, comme nous le supposons ici, creusé dans un massif de terre ou de maçonnerie, le cône était formé d'une matière assez mince pour que l'on pût faire abstraction de l'épaisseur de sa paroi, l'arc 1-2-3 porterait son ombre dans l'intérieur du cône, tandis que l'arc 3-4-1 porterait son ombre en dehors, et la ligne totale de séparation se composerait de la circonférence entière 1-2-3-4 et des deux droites $s-1$, $s-2$, suivant lesquelles le cône serait touché par deux plans parallèles à la direction de la lumière.

Mais, n'ayant à considérer ici que l'ombre portée dans l'intérieur du cône, la ligne de séparation se réduit à l'arc 1-2-3.

Pour avoir l'ombre d'un point mm' , nous construisons :

1° La droite $l'-m'-n'$, provenant de la section du plan de la circonférence par le plan qui contient le sommet du cône et le rayon de lumière du point mm' ;

2° La droite $n-s, n'-s'$, suivant laquelle le cône est coupé par le plan $s'l'n'$;

3° Enfin, le point m'' , ombre du point m , résultera de l'intersection de $n'-s'$, avec $m'-m''$.

Le rayon de lumière $c-o'$ perce le plan horizontal $v-u$ en un point o'' ; l'arc cb , décrit de ce point comme centre avec un rayon égal à oa , sera l'ombre portée sur le plan vu par une partie de l'arc 1-2-3.

88. L'ombre portée dans le cône par ce dernier arc appartient à une ellipse. En effet,

Soit $a-a'$ (fig. 51) la circonférence qui forme la base du cône. Cette courbe devient la directrice d'un cylindre AA formé par les rayons lumineux ; or si l'on coupe le cylindre et le cône par un plan $b-b'$, perpendiculaire au plan des deux droites Ao, so , le cône et le cylindre seront coupés suivant deux ellipses qui auront :

1° Un axe commun $b-b'$;

2° Un point commun m .

Donc ces deux courbes coïncideront et, par conséquent, n'en feront qu'une. Ainsi, la portion d'ellipse $b'-m$ étant située en même temps sur le cône et sur le cylindre, peut être considérée comme l'intersection de ces deux surfaces et sera par conséquent l'ombre portée dans le cône par l'arc de cercle am , qui est la directrice du cylindre formé par les rayons lumineux.

89. Si le point s s'éloignait jusqu'à l'infini, le cône de-

viendrait un cylindre, ce qui ne changerait rien à ce que nous venons de dire.

Ainsi, dans l'exemple du n° 70 (*fig. 41*), la courbe 4-3'-2' appartient à une ellipse située dans un plan perpendiculaire à celui qui contiendrait les axes du berceau et celui du cylindre formé par les rayons qui s'appuient sur l'arc 2-4.

Engrenages coniques.

Les principes exposés précédemment trouveront leur application dans le dessin des machines.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de tracer les ombres sur des roues d'engrenages coniques (*pl. 10*).

90. La courbe directrice de la surface convexe de chaque dent doit satisfaire à des conditions dont l'exposé n'est pas de nature à trouver place ici. Les opérations graphiques qu'elles exigent ne pourraient pas d'ailleurs être faites avec assez d'exactitude sur une échelle aussi petite. J'engagerai donc le lecteur, comme je l'ai fait pour les engrenages cylindriques, à considérer comme données les deux figures 55 et 59 qui sont les projections des deux roues sur des plans perpendiculaires à leurs axes.

Pour mieux faire comprendre les diverses parties de chaque roue, j'ai dessiné (*fig. 53*) une partie de la coupe de l'une d'elles par un plan qui contiendrait son axe.

La surface se compose :

1° De l'ensemble de tous les cônes alternativement convexes et concaves qui forment la surface des dents et des creux ;

2° De deux cônes ayant pour génératrices les droites $t-a'$, $\alpha-v'$ et pour sommet les deux points $t-\alpha$, situés sur l'axe de la roue ;

3° De deux plans yr , pw , parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe de la roue.

Projections.

91. On construira d'abord (*fig. 59*) les cercles passant par les points a, c, e, o ; l'intervalle compris entre les cercles a et c correspond à la saillie de la dent; l'intervalle des cercles e, o détermine le creux, et l'espace compris entre les cercles c, e est occupé par la petite face verticale que l'on nomme *le flanc*, et qui est tangente aux deux surfaces coniques convexes et concaves de la dent et du creux.

Il sera facile alors de tracer en projection horizontale le contour inférieur de toutes les dents de la grande roue.

Les points a, c, e, o se projetteront sur la figure 56 par les points a', c', e', o' , que l'on joindra avec le point S, sommet de tous les cônes qui composent la surface des dents.

Cette seconde opération donnera (*fig. 56, 53*) les points v', u', z', x' , d'où l'on déduira (*fig. 59*) les cercles passant par les points v, u, z, x , ce qui déterminera sur la projection horizontale les dimensions de la dent, du flanc et du creux, pour l'arête supérieure de la grande roue.

La figure 59 étant complète il sera facile d'en déduire la projection verticale.

Les cercles a, c, e, o, v, u, z, x se projetteront sur la figure 56 par des droites parallèles à la ligne AZ et sur lesquelles on obtiendra, par des perpendiculaires, les points correspondants de la projection 59.

Ainsi, par exemple, chaque point du cercle a se projettera sur l'horizontale du point a' , chaque point du cercle c sur l'horizontale c' , etc.

92. Pour projeter la roue inclinée, on commencera par la

figure 55. Il faut, dans la construction de cette projection, satisfaire aux conditions suivantes :

1° Que la surface conique qui aurait pour directrice le cercle c' de la grande roue touche suivant la ligne sm' la surface conique correspondante de la petite roue ;

2° Que la droite MN qui détermine les deux flancs des deux dents A, B (*fig. 55*) soit perpendiculaire à l'axe Sh , afin que les dents B et C (*fig. 59*) soient tangentes dans le plan qui contient les axes des deux roues ;

3° Que les arcs déterminés par la somme des largeurs de la dent et du creux sur la circonférence de la petite roue (*fig. 55*) soient égaux aux arcs correspondants sur la circonférence de la grande roue (*fig. 59*).

La projection verticale de la roue inclinée étant obtenue, on s'occupera de sa projection horizontale qui présentera un peu plus de difficulté.

On commencera par construire (*fig. 58*) les projections elliptiques de tous les cercles qui, sur les figures 55 et 54, déterminent les dimensions des dents, des flancs et des creux.

Les centres et les petits axes de ces ellipses se déduisent de leurs projections sur la figure 54 ; les grands axes sont les rayons des cercles tracés sur la figure 55.

Les projections elliptiques de tous ces cercles étant construites, on déterminera chaque point, soit en abaissant une perpendiculaire de sa projection (*fig. 54*), soit en prenant sur la figure 55 la distance du point que l'on veut obtenir à la droite MN qui est l'intersection de la projection 55 par le plan vertical qui contient les axes des deux roues.

Le lecteur devra rétablir un grand nombre de lignes qui ont été effacées pour ne pas embarrasser l'épure.

Ainsi, il devra construire, sur les figures 54 et 56, les projections des parties des deux roues qui sont au delà du plan vertical $M'N'$. Les projections de ces parties ne se confondent pas avec celles qui ont été conservées en lignes pleines, parce

que le plan vertical qui contient les deux axes n'est pas et ne peut pas être un plan de symétrie par rapport aux roues. Cela provient de ce que les deux dents B, C se touchent dans ce plan; et d'ailleurs, si l'on amenait le milieu de la dent C dans le plan de symétrie, on aurait, il est vrai, cet avantage que la grande roue serait projetée symétriquement sur la figure 56, mais il n'en serait pas de même de la figure inclinée. En effet, une dent s'appuyant toujours contre l'un des flancs de l'autre roue, on conçoit que le plan qui partagerait cette dent en deux parties symétriques ne pourrait pas partager symétriquement le creux dans lequel elle se trouve momentanément engagée.

Ombres.

93. *Ombre de la grande roue.*

Première opération. En concevant toutes les génératrices de la surface conique de la grande roue prolongées jusqu'à leur rencontre avec le plan horizontal KX, on obtiendra la figure tracée en points sur la projection 59; les circonférences qui déterminent tous les points de cette courbe s'obtiendront en prolongeant les droites S-a', S-c'... jusqu'au plan horizontal KX.

Deuxième opération. On déterminera le point L' suivant lequel le plan KK est percé par le rayon de lumière du sommet, et l'on construira par ce point toutes les tangentes qu'il sera possible de mener à la courbe 1-2-3-4-5-6 que l'on peut considérer comme la trace horizontale du cône. Toutes les parties de la *ligne de séparation* seront alors déterminées.

Ainsi, par exemple, si nous commençons par la dent D (fig. 59), le plan 1-3 qui touche cette dent suivant la génératrice 1'-1'', coupe le creux à droite suivant 3'-3''.

La courbe 2'-3' est l'ombre de la petite courbe 1'-2' qui fait

partie de la ligne de séparation, parce qu'elle provient de l'intersection de la surface $1'-1''-2'-2''$ qui est obscure, avec la partie éclairée du cône, formant la surface inférieure de la roue.

Le point $3'$ est l'ombre du point $1'$ et provient de l'intersection de la génératrice $3-3''$ par le rayon du point $1'$.

Le point $2'$ est déterminé par la tangente $2-L'$ qui est la trace du plan tangent suivant la droite $2'-2''$.

Les mêmes opérations détermineront l'ombre de la dent D' .

Ainsi le plan $4-6$ touche cette dent suivant la génératrice $4'-4''$ et coupe le creux à droite suivant $6'-6''$.

La courbe $5''-6''$ est l'ombre de l'arête $4''-5''$ qui sépare la partie éclairée du cône supérieur de la roue de la partie obscure à droite de la dent D' . Le point $5''$ est déterminé par la génératrice $5'-5''$ suivant laquelle le creux est touché par le plan $5-L'$ parallèle aux rayons de lumière (85). On peut déterminer autant de points que l'on voudra sur les courbes $2'-3'$, $5''-6''$, etc.

Ainsi, pour avoir l'ombre d'un point $7'$ appartenant à la dent D'' , on construira :

- 1° La génératrice $7'-7$ du cône ;
- 2° La droite $7-8-L'$ qui est la trace du plan contenant le sommet S du cône et le rayon de lumière du point 7 ;
- 3° La droite $8-8'$ intersection du creux par le plan $7-8-L'$;
- 4° Enfin, le point $8'$ ombre du point 7 , et provenant de la rencontre de la génératrice $8-8'$ par le rayon $7'-8'$.

Les résultats obtenus seront facilement reportés, figure 56, sur les génératrices des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

On fera bien de vérifier, autant que possible, les résultats.

La *ligne de séparation* sur le cône, formant la surface inférieure de la roue, s'obtiendra en appliquant le principe du n° 85.

Ainsi le rayon de lumière passant par le point t , sommet de ce cône, perce le plan horizontal $a'-l'$ (fig. 56) en un point l' dont la projection horizontale sera l'' .

On construira par ce point la droite $l'n$ tangente au cercle an que l'on peut considérer comme la base du cône.

On déterminera exactement le point de tangence n , dont la projection verticale n' donnera la droite tn' pour ligne de séparation sur le cône inférieur.

Ombres de la roue inclinée. Les génératrices (*fig. 54*) étant prolongées jusqu'au plan horizontal KX , on construira (*fig. 58*) la courbe 9-10-11-12-13, que l'on peut considérer comme la trace E de la surface conique des dents et des creux.

La droite 9-13- L' , tangente à la courbe E , est la trace du plan qui toucherait la dent correspondante suivant $9'-9''-9'''$ (*fig. 53*); ce même plan couperait le creux à droite suivant la génératrice $13'-13''-13'''$ dont l'intersection par le rayon lumineux $9''-13''$ donne $13''$ pour nombre du point $9''$.

On déterminera de la même manière le point $12''$, ombre du point $10''$.

On aurait pu faire ces opérations sur la projection 58, mais la partie d'ombre que nous venons de déterminer étant au-dessous de la dent aurait été cachée, et par conséquent moins facile à comprendre.

Au surplus on commencera par déterminer les ombres sur la projection où les intersections se font le mieux, et il sera toujours facile, après cela, de les obtenir sur la seconde projection.

94. Le moyen que nous venons d'indiquer n'est presque jamais applicable; l'inclinaison de la roue rejeterait en dehors de la feuille de dessin les points les plus éloignés de la trace du cône oblique formant la surface de la roue. Il faut donc que nous en cherchions d'autres.

95. La première idée qui se présente sera de remplacer la section horizontale du cône par une section perpendiculaire à l'axe. Cette figure, que l'on pourrait construire autour de

la projection 55, serait analogue à celle dont nous avons parlé au n° 93 ; elle aurait cet avantage qu'elle pourrait être construite avec beaucoup d'exactitude et de facilité par suite de la position de tous les points sur des circonférences concentriques.

Mais nous sommes encore obligés de renoncer à ce moyen à cause de l'éloignement du point où le plan de cette figure serait percé par le rayon de lumière du sommet.

96. Je proposerai donc ici d'employer le principe exposé au n° 8, d'autant plus qu'il n'exige ni le sommet du cône ni le point de rencontre du plan de la section par le rayon de lumière du sommet.

97. Supposons (*fig. 60*) que l'on ait les deux projections d'un cône, on le coupera par un plan $vu'u'$ perpendiculaire au plan vertical de projection et parallèle à la direction $s-l$ de la lumière.

On construira la projection horizontale $m'-n'$ de la section ; les tangentes $t'-u'$, parallèles à la projection $s'-l'$ du rayon lumineux, détermineront les points t', t' , appartenant aux lignes de séparation, et les points u', u' , qui font partie de l'ombre portée.

98. Le même principe a été appliqué (*fig. 57*) pour construire les ombres portées par un cône incliné sur un cône droit. Ainsi, après avoir coupé les deux cônes par un plan $vu'u'$ parallèle à la direction $s-l$ du rayon lumineux, on a construit les projections horizontales des deux sections $m'n', n'x'$.

Les rayons lumineux tangents à la première de ces deux courbes ont déterminé les lignes de séparation sur le cône incliné ainsi que les ombres portées sur le cône droit ; et les rayons tangents à l'ellipse $n'x'$, provenant de la section du cône droit, ont déterminé les lignes de séparation sur ce cône et les ombres portées sur le plan horizontal.

C'est ainsi que l'on a opéré pour déterminer les ombres sur la roue inclinée (*fig. 54 et 58*).

99. Après avoir prolongé les génératrices de la surface conique de cette roue, on les a coupées par le plan VU perpendiculaire au plan vertical de projection et parallèle à la direction S-L du rayon lumineux. Cette première opération a donné la courbe 9^{iv} , 10^{iv} , 11^{iv} , 12^{iv} , 13^{iv} , tracée en points sur la projection horizontale (*fig. 58*).

Toutes les tangentes qu'il a été possible de mener à cette courbe parallèlement à la projection horizontale S'-L' du rayon lumineux ont déterminé les diverses parties de la ligne de séparation.

Ainsi la tangente 9^{iv} - 13^{iv} a donné le point 9^{iv} d'où l'on a conclu (*fig. 54*) le point 9^v et la droite 9^v - $9'''$ suivant laquelle la dent est touchée par le plan des rayons lumineux.

La tangente au point 11^{iv} a déterminé le point 11^v d'où l'on a déduit $11''$ en dirigeant 11^v - $11''$ vers le sommet du cône.

100. Le même principe a pu servir pour déterminer les ombres portées. Ainsi le rayon S-L du sommet et le rayon $10''$ - $12''$ déterminent un plan dont l'intersection par le plan V-U sera une droite 10^{iv} - 12^{iv} (*fig. 58*) parallèle à S'-L'. Cette première opération donnera le point 12^{iv} , qui relevé sur VU donne 12^v pour projection verticale, et détermine la droite 12^v - $12''$, suivant laquelle la surface du creux est coupée par le plan des rayons S-L, $10''$ - $12''$: le point $12''$, résultant de l'intersection de 12^v - $12''$ avec $10''$ - $12''$, sera l'ombre du point $10''$.

Les mêmes moyens peuvent être employés pour construire l'ombre portée par la roue inclinée sur la roue horizontale. Dans ce cas, on ne construira que les sections des dents qui portent ombre ou sur lesquelles l'ombre est portée, ce qui sera facile à reconnaître en procédant avec ordre.

Les ombres portées dans le cône creux formant une partie

de la surface supérieure de la roue horizontale ont été obtenues par le principe du n° 86.

101. Les rayons lumineux qui s'appuient sur le cercle incliné $g'g''$ (fig. 54) forment un cylindre oblique dont l'intersection avec l'arbre de la roue inclinée donne une courbe à double courbure, que l'on obtiendra par les principes donnés en Géométrie descriptive pour l'intersection de deux cylindres.

Ainsi un rayon de lumière hb , construit par un point quelconque hh' de l'axe, percera le plan du cercle $g'g''$ en un point b' que l'on joindra avec d' par une ligne droite $b'd'$; les tangentes menées par les points $14'$, $15'$, parallèlement à la droite $d'b'$ sont les intersections du plan du cercle $g'g''$ par des plans tangents aux cylindres et parallèles à la direction de la lumière.

Les points de tangence 14 et 15 déterminés avec exactitude feront connaître les droites 14-14', 15-15'.

Pour obtenir un point 17' sur la courbe 15'-17', on concevra un plan quelconque 16-17-17' parallèle au rayon de lumière et à l'axe ab . L'intersection de ce plan avec celui du cercle sera une droite 16-17 parallèle à $b'd'$.

Ce même plan coupera l'arbre de la roue suivant une génératrice 17-17', dont l'intersection par le rayon de lumière 16-17' donne 17' pour l'ombre du point 16. Il n'y aura plus qu'à recommencer cette opération.

Les ombres portées sur les plans de projection s'obtiendront par les moyens ordinaires.

Les droites 18-19 sont les traces horizontales des plans lumineux tangents aux cônes convexes formant la surface des dents. Toutes ces droites doivent concourir au point où le rayon S-L prolongé irait percer le plan horizontal de projection. Ce point n'a pas pu trouver place sur l'épure.

Les droites 20-21 sont les traces verticales des plans tangents aux dents; toutes ces lignes doivent aboutir au point L où le rayon S-L perce le plan vertical de projection.

CHAPITRE III.

SPHÈRE.

102. L'ensemble des rayons de lumière qui s'appuient sur la sphère forme un cylindre circulaire.

La ligne de séparation est un grand cercle situé dans un plan perpendiculaire à la direction de la lumière.

Les projections de ce grand cercle sont deux ellipses, $1'-2'-1'-2'$ (*fig. 65, pl. 11*), et $3'-4'-3'-4'$ (*fig. 67*).

Voici l'ordre des opérations :

1° On déterminera (*fig. 65*) le point o'' suivant lequel le rayon $o-o''$, passant par le centre de la sphère, percerait le plan vertical de projection ;

2° On fera $o-1$ égal à $p-o'$ et l'on tracera $1-o''$ qui sera le rayon du centre rabattu sur le plan de la figure 66 ;

3° Du point 1 comme centre avec un rayon $1-2$ égal à $o-1'$, on décrira une circonférence que l'on pourra considérer comme la section de la sphère par le plan projetant du rayon $o-o''$;

4° La ligne de séparation étant située dans un plan perpendiculaire au rayon $1-o''$, elle se projettera sur la figure 66 par le diamètre $2-2$, dont les extrémités ramenées sur $o'-o''$ détermineront le petit axe $2'-2'$ de l'ellipse $1'-2'-1'-2'$. Le grand axe $1'-1'$ de cette ellipse sera égal au diamètre de la sphère donnée ;

5° Enfin les rayons $2-2''$, $2-2''$ détermineront le grand axe $2''-2''$ de l'ellipse suivant laquelle le cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la sphère est coupé par

le plan vertical de projection. Le petit axe $1''-1''$ est égal au diamètre de la sphère.

L'ellipse $1''-2''-1''-2''$ sera l'ombre portée par la sphère sur le plan vertical de projection. On ne conservera que la partie de cette ombre qui est au-dessus de la ligne AZ, et l'on opérera de la même manière pour obtenir l'ombre sur le plan horizontal.

Ainsi, la figure 68 est la section de la sphère par le plan vertical qui contiendrait le rayon du centre. Cette figure se construira en faisant $o'-3$ égal à $p-o$ (*fig.* 65); $3-o''$ sera le rayon du centre rabattu sur le plan horizontal de projection.

Le diamètre $4-4$ sera, sur la figure 68, la projection de la ligne de séparation, et les deux rayons $4-4''$, $4-4''$ détermineront le grand axe $4''-4''$ de l'ellipse qui est l'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal.

On remarquera, comme vérification, que les deux ellipses $2''-2''$, $4''-4''$ doivent se couper sur la ligne AZ.

Ombre portée sur la sphère.

103. La construction de l'ombre portée par un point sur la sphère revient, dans tous les cas, à construire l'intersection de la sphère pour le rayon de lumière qui contient le point dont on cherche l'ombre.

Ainsi, pour avoir l'ombre du point $5-5'$ (*fig.* 65 et 67), on construira :

1° Les deux projections $5-5^v$, $5'-5'^v$ du rayon de lumière du point $5-5'$;

2° On fera $q'-5''$ égal à $q-5$, et le point $5''$ sera la projection du point $5-5'$ sur la figure 68 ;

3° Du point 3 comme centre avec un rayon $3-z'$ égal à $z-x$, on décrira l'arc $z'-x'$ qui est la section de la sphère par le plan vertical qui contient le rayon du point $5-5'$.

L'intersection de l'arc $z'-x'$ par le rayon $5''-5'''$ donnera $5'''$, d'où l'on déduira 5^{v} (*fig.* 67), et par suite 5^{v} (*fig.* 65).

En recommençant cette construction on aura autant de points que l'on voudra. Ainsi, les deux courbes $5^{\text{v}}-6^{\text{v}}$, $5^{\text{v}}-6^{\text{v}}$ sont les deux projections de l'ombre portée sur la sphère par la courbe $5-6$, $5'-6'$.

Il est évident que cela revient à chercher l'intersection de la sphère par un cylindre qui serait engendré par le mouvement d'un rayon lumineux, et qui aurait pour directrice la courbe donnée.

Sphère éclairée par un point lumineux.

104. Les rayons lumineux qui s'appuient sur la sphère forment un cône qui a pour sommet le point $s-s'$ (*fig.* 69 et 70).

La projection auxiliaire (*fig.* 71) détermine le petit axe $1'-1'$ et le grand axe $2'-2'$ égal au diamètre $1-1$ du cercle qui forme la ligne de séparation.

On détermine de la même manière la projection horizontale de cette même courbe.

La trace du cône, que l'on construira comme nous l'avons dit au n° 80, sera l'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal de projection.

Creux sphérique.

105. Nous supposons ici que l'on veut avoir l'ombre portée dans une demi-sphère creuse par une portion de la circonférence du grand cercle qui en forme la limite.

On construira (*fig.* 63) une projection auxiliaire parallèle à la direction de la lumière; la projection du rayon $s''-l''$ s'obtiendra en faisant $p'-3'$ égal à $p-3^{\text{v}}$ (*fig.* 61) et en joignant $3'$

avec l'' projection du point l' suivant lequel le rayon $s-l$, $s'-l'$ perce le plan horizontal.

Le plan vertical qui contient le rayon du point 3 coupera la sphère suivant un grand cercle projeté sur la figure 63 par l'arc $3'-v-3''$, et l'intersection de ce grand cercle par le rayon $3'-l''$ déterminera le point $3''$, d'où on déduira $3'''$ pour la projection horizontale de l'ombre portée par le point 3 dans la sphère.

106. On a opéré de la même manière pour obtenir le point $2''$ qui est l'ombre portée par le point 2, mais on n'a pas décrit sur la figure 63 le cercle passant par les points $2'-2''$, et voici pour quelle raison.

Si l'on suppose que ce cercle ait été décrit, et si l'on compare les deux triangles $1'-3'-3''$, $1'-2'-2''$, on reconnaît : 1° qu'ils sont tous deux isocèles, puisque l'on a $1-3' = 1-3'''$ comme rayon d'un même cercle, et que $1'-2' = 1'-2''$ par la même raison ; 2° l'angle $1'-2'-2''$ est égal à l'angle $1'-3'-3''$ à cause du parallélisme des rayons $2'-2''$, $3'-3''$, d'où il résulte que les angles $2'-1'-2''$, $3'-1'-3''$ sont égaux, et que, par conséquent, les points $1'$, $2''$, $3'''$ sont en ligne droite.

Donc, la courbe $1'-3'''-1$ (*fig. 62*), qui est l'ombre portée dans la sphère par l'arc $1-3-1$, est une courbe plane, puisqu'elle se projette par une ligne droite, $1-3''$ sur le plan de la figure 63.

107. Cette remarque réduit aux opérations suivantes la construction du point $2'''$.

On tracera :

1° $2-2'''$ projection horizontale du rayon de lumière passant par le point 2 (*fig. 62*) ;

2° La droite $2-2'$ donnera $2'$ pour la projection du point 2 sur la figure 63 ;

3° L'intersection du rayon $2'-2''$ avec $1-3''$ donne $2''$, d'où l'on déduira $2'''$ (*fig. 62*).

La courbe d'ombre portée étant plane et située sur la surface d'une sphère est nécessairement une circonférence de cercle ; et comme il est facile de reconnaître par la figure 63 que son plan passe par le centre, on peut en conclure qu'elle est un grand cercle de la sphère, de sorte que le point 3''' étant obtenu, on peut se contenter de construire la demi-ellipse 1-3'''-1 sur les deux axes $o-1$, $o-3'''$.

Cette deuxième solution dispense de construire le point 2''.

108. On peut démontrer autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus que la courbe d'ombre portée dans le creux sphérique est plane.

Soient (*fig. 64*) la sphère B et le cylindre A formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le grand cercle $c-c'$, nous supposons ici que la sphère et le cylindre sont projetés sur un plan perpendiculaire à celui du grand cercle $c-c'$ et parallèle à l'axe du cylindre A. Il est évident qu'il existe de l'autre côté de l'axe du cylindre, un second cercle $u-u'$ symétriquement placé avec le premier, de sorte que ces deux cercles étant tous deux situés sur la sphère et sur le cylindre, peuvent être considérés comme formant ensemble la ligne de pénétration de ces deux surfaces ; d'où il résulte que si l'on prend l'un de ces cercles pour servir de courbe directrice au cylindre formé par les rayons lumineux, l'autre cercle sera la courbe d'ombre portée.

Niche sphérique.

109. Les principes précédents nous fourniront les moyens de construire l'ombre portée dans une niche sphérique (*fig. 74, pl. 12*).

La ligne de séparation se compose :

1° De l'arc de cercle 1-2-6 ;

2° De la verticale 6-p.

L'ensemble de ces deux lignes sépare la surface du mur de la partie de la niche qui est dans l'ombre.

Le point 1 est l'extrémité du diamètre 7-1 perpendiculaire à la projection verticale $s-l$ du rayon lumineux.

La projection auxiliaire 75, parallèle au rayon de lumière $s-l$, déterminera le petit axe $s-4'''$ de la demi-ellipse 1-4'''-7 provenant de l'ombre portée dans la sphère par la demi-circonférence 1-4-7 (107).

On peut aussi, en opérant comme ci-dessus, déterminer sur cette ellipse autant de points que l'on voudra. Ainsi, pour le point 2, on trace :

2-2', ce qui donne 2' ;

2'-2'', parallèle à $s''-l''$;

2''-2''', dont l'intersection avec le rayon 2-2''' déterminera le point 2'''. La surface de la sphère ne s'étendant pas au-dessous du plan horizontal qui passe par le centre, on ne conservera de l'ellipse 1-4'''-7 que la partie 1-3''', qui est l'ombre de l'arc de cercle 1-3, et l'on cherchera ensuite l'ombre portée par l'arc de cercle 3-6 dans le cylindre vertical qui forme une partie de la surface de la niche.

Pour y parvenir, on se servira de la projection horizontale (*fig.* 76). Ainsi, par exemple,

Si l'on veut avoir l'ombre du point 5, on le projettera en 5' sur la droite $o'-6'$, qui est la trace du plan vertical contenant l'arc de cercle $o-2-6$.

On tracera ensuite le rayon de lumière 5'-5'' et la verticale 5''-5''' dont l'intersection avec le rayon du point 5 déterminera l'ombre de ce point.

On opérera de la même manière pour obtenir le point 6''' suivant lequel la courbe 3'''-5'''-6''' est touchée par la verticale 6'''-q, qui est l'ombre de l'arête verticale du point 6.

Ainsi l'ombre portée dans la niche se compose de trois parties bien distinctes, savoir :

1^o L'arc 1-3''', provenant de l'intersection de la sphère

par le cylindre oblique formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur l'arc 1-3;

2° La courbe 3'''-6''', suivant laquelle les rayons lumineux qui s'appuient sur l'arc 3-6 rencontrent le cylindre vertical qui a pour trace la demi-circonférence $o'-6''-6'$ (fig. 76);

3° Enfin la ligne droite 6'''- q ombre de l'arête verticale du point 6.

L'arc 1-3''' est une courbe plane appartenant à l'ellipse 1 4'''-7 (107); mais la courbe 3'''-5'''-6''', etc., est à double courbure, puisqu'elle provient de la rencontre de deux cylindres.

Ces deux courbes se touchent au point 3''', et la seconde est touchée au point 6''' par la verticale 6'''- q .

Coupe de la niche sphérique.

110. Il arrive souvent, dans les dessins d'architecture, que pour mieux faire concevoir l'intérieur d'un édifice, on le suppose coupé par un plan vertical, et que l'on supprime tout ce qui se trouve en deçà de ce plan.

Or si le plan coupant passe par le centre d'une niche sphérique, il ne restera plus que la partie comprise dans l'angle droit $o'-s'-6''$ (fig. 76).

Dans ce cas, l'ombre portée dans l'intérieur de la niche proviendrait des rayons qui s'appuieraient sur les arcs 2-1, 2-8 (fig. 74).

Nous avons obtenu par l'opération précédente l'ombre de l'arc 2-1, nous allons chercher l'ombre de l'arc 2-8.

Si nous supposons que le plan vertical qui contient cet arc fasse un quart de révolution autour de la verticale du centre, l'arc perpendiculaire au plan vertical viendra se placer en 2-8'-6.

Si nous faisons pareillement décrire un quart de révolution au rayon de lumière $s-l$, il viendra se placer en $s-l^v$.

Et construisant (*fig. 73*) une projection auxiliaire parallèle à $s-l^v$, on opérera comme ci-dessus, et l'on obtiendra la courbe $8'-2^v$ que l'on fera ensuite revenir à sa place par un quart de révolution.

Si l'on a bien opéré, les deux points 2^v et $2'''$ doivent être à la même hauteur.

111. Si la projection horizontale $s'-l'$ du rayon de lumière partage en deux parties égales l'angle $o'-s'-6''$ (*fig. 76*), il y aura une abréviation remarquable.

En effet, dans cette hypothèse, introduite ici pour éviter la construction d'une nouvelle épure, le plan vertical qui contient le rayon $s'-l$ devient un plan de symétrie non-seulement par rapport aux deux arcs $s'-1''$, $s'-8''$, mais encore par rapport aux courbes $1''-2^v$, $8''-2^v$; de sorte que si deux points 9 et 10 sont pris à la même hauteur sur les deux arcs 2-1, 2-8 (*fig. 76*), les ombres 9' et 10' de ces deux points seront aussi à la même hauteur. De là résulte la construction suivante.

Après avoir obtenu (*fig. 74*) la courbe 1-2''' qui est l'ombre de l'arc 1-2, et par conséquent le point 9', ombre du point 9, étant déterminé, on tracera :

1° L'horizontale 9-10 qui donnera sur l'arc 2-8 le point 10 symétrique du point 9 ;

2° L'horizontale 9'-10' déterminera le point 10' symétrique de 9'. On recommencera l'opération pour avoir d'autres points.

Il est évident que cette construction évitera la projection auxiliaire 73.

La symétrie est évidente sur la projection horizontale 76, qui, au surplus, n'est pas nécessaire pour construire la courbe 8-2''' (*fig. 74*).

LIVRE III.

CHAPITRE PREMIER.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

112. On a vu dans la *Géométrie descriptive* qu'une surface de révolution est engendrée par le mouvement d'une courbe tournant autour d'une droite immobile que l'on nomme son *axe*.

113. La nature de la surface dépend de la courbe que l'on a choisie pour génératrice et qui est presque toujours une section méridienne.

Tore.

114. Le tore, ou surface annulaire, contenant en quelque sorte les éléments de toutes les surfaces de révolution, le lecteur fera bien d'étudier cet exemple avec le plus grand soin.

La figure 77, *pl. 13*, est la projection verticale de la surface donnée; la section génératrice se compose de deux cercles *aceg*, qui ont pour centres les points *oo'*.

L'axe de la surface étant vertical se projette sur le plan horizontal (*fig. 78*) par le point *l'*, et les circonférences dé-

crites de ce point avec les rayons $l'-5$, $l'-6$, représentent la plus grande et la plus petite section horizontale du tore. Cette dernière section se nomme le *cercle de gorge*.

La ligne de séparation se compose de deux courbes entièrement indépendantes l'une de l'autre.

La première est située sur la portion de surface engendrée par la demi-circonférence acg .

La deuxième appartient à la portion de surface engendrée par la demi-circonférence aeg .

Tous les points de ces deux courbes ont été obtenus par la méthode des plans tangents qui a été exposée dans la Géométrie descriptive.

Voici l'ordre des opérations :

La perpendiculaire $s'-s''$ abaissée (*fig. 78*) sur la trace du méridien D percera ce plan en un point, dont la projection horizontale s'' , ramenée à s''' sur la trace du méridien B, déterminera s^{iv} (*fig. 77*), de sorte que $s^{iv}-l$ sera la projection du rayon de lumière sur le plan du méridien D.

Cela étant fait, les deux diamètres 1-2, 4-3 perpendiculaires à $s^{iv}-l$ détermineront les points 1, 2, 3, 4 suivant lesquels la surface du tore serait touchée par quatre plans parallèles aux rayons de lumière $s^{iv}-l$ et perpendiculaires au plan méridien D.

Les points 1, 2, 3, 4, projetés (*fig. 78*) en $1'$, $2'$, $4'$ et $3'$, sur la trace du méridien B, seront ramenés de là en $1''$, $2''$, $4''$ et $3''$, sur la trace du méridien D, d'où on déduira leurs projections verticales $1'''$, $2'''$, $4'''$, $3'''$ (*fig. 77*).

En opérant de la même manière, on obtiendra quatre points dans chaque méridien.

On fera bien de multiplier les opérations dans le voisinage des points 5, 6, 7, 8, parce que c'est dans cette partie des lignes de contact que les variations de courbure sont les plus sensibles.

Les projections verticales des deux courbes se coupent

(fig. 77) dans le plan du méridien C en deux points 23 et 24 que l'on devra déterminer avec exactitude.

Quelques points pourront être obtenus plus facilement par suite de la position particulière des méridiens qui les contiennent. Ainsi, par exemple :

Les deux diamètres 9-10, 11-12 perpendiculaires à la projection verticale $s-l$ du rayon lumineux, déterminent sur la section méridienne principale les quatre points suivant lesquels la surface serait touchée par quatre plans perpendiculaires au plan vertical de projection et parallèles à la direction de la lumière.

Ces quatre points auront leurs projections horizontales sur la trace du méridien B.

La trace du méridien FF (fig. 78), perpendiculaire à la projection horizontale $s'-l'$ du rayon lumineux, déterminera les quatre points 5, 6, 7, 8, suivant lesquels la surface serait touchée par quatre plans verticaux et parallèles aux rayons de lumière.

Ces quatre points appartenant au plus grand parallèle et au cercle de gorge, leurs projections verticales 5', 6', 8', 7' seront situées sur la ligne horizontale $c-c$.

Si nous faisons tourner le méridien A jusqu'à ce qu'il soit venu coïncider avec le méridien B, le point s' viendra se placer en s^v , d'où on déduira s^{vi} , de sorte que $s^{vi}-l$ sera le rayon de lumière lui-même ramené dans le plan du méridien principal.

Les deux diamètres 13-14, 15-16, perpendiculaires à $s^{vi}-l$, détermineront alors les quatre points suivant lesquels la surface serait touchée par quatre plans parallèles aux rayons lumineux et perpendiculaires au plan méridien A.

Ces quatre points projetés horizontalement sur la trace du méridien B, et ramenés de là à leur place dans le plan du méridien A, donneront 13', 14', 15', 16', d'où l'on déduira leurs projections verticales 13'', 14'', 15'', 16'' (fig. 77).

Ce sont les points les plus élevés et les plus bas des deux courbes de contact.

On peut aussi abrégé beaucoup le travail en ayant égard à la symétrie.

Ainsi, les points obtenus dans le méridien D pourront être reportés à la même distance du centre, sur la trace du méridien D' et de là projetés à la même hauteur sur la figure 77.

Les points situés dans le méridien E' se déduiront de la même manière de ceux qui appartiennent au méridien E.

Enfin les points des méridiens B, C donneront ceux des méridiens B', C'.

Ainsi l'une des deux lignes de contact aura pour projection horizontale la courbe 5-1''-15'-11'-7-3''-13'-9'-5 et pour projection verticale 5'-1'''-15''-11-7-3'''-13''-9-5'.

La seconde ligne a pour projection horizontale la courbe 6-2''-16'-12'-8-4''-14'-10'-6 et pour projection verticale 6'-2'''-16''-12-8-4'''-14''-10-6'.

La première de ces deux courbes touche la section méridienne principale aux points 9 et 11, et la seconde la touche aux points 10 et 12.

Ombres portées.

115. La courbe extérieure servira de directrice au cylindre oblique formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la surface.

L'intersection de ce cylindre avec les plans de projection ne présentera pas de difficultés.

116. L'ombre portée par la courbe intérieure exigera plus d'attention.

Pour bien concevoir la nature de cette ligne, supposons qu'un rayon lumineux glisse parallèlement à lui-même en s'appuyant sur la courbe 8-14'-6-16'-8 (*fig. 78*), la surface

cylindrique engendrée par le mouvement de ce rayon se composera de quatre parties bien distinctes, savoir :

1° Une première partie ayant pour directrice la portion de courbe $v'-14'-u'$ et pour trace horizontale $v''-14''-u''$;

2° La seconde partie aura pour directrice la courbe $u'-6-m'$, et pour trace $u''-6''-m''$;

3° La troisième partie a pour directrice la courbe $m'-16'-n'$, et pour trace $m''-16''-n''$;

4° Enfin la quatrième partie a pour directrice $n'-8'-v'$ et pour trace $n''-8''-v''$.

Ces quatre parties sont séparées les unes des autres par les rayons lumineux $u'-u''$, $m'-m''$, $n'-n''$, $v'-v''$. Ces rayons forment sur la surface quatre arêtes de rebroussement et déterminent par leur intersection avec le plan horizontal les quatre points u'' , m'' , n'' , v'' , qui sont eux-mêmes des points de rebroussement pour la courbe $u''-v''-n''-m''$.

On remarquera que la courbure change de sens toutes les fois que le rayon lumineux devient tangent à la courbe de contact $14'-6-16'-8$.

Ce qui a lieu aux quatre points u', m', n', v' .

A tous les autres points, le rayon de lumière fait avec cette courbe des angles plus ou moins grands.

Les deux parties qui ont pour traces les courbes $u''-14''-v''$, $m''-16''-n$ se coupent suivant les deux rayons lumineux $x'-x'''$, $z'-z'''$ placés symétriquement par rapport au méridien A.

Ces deux rayons, après avoir touché la surface du corps en dessous, aux points x', z' , touchent une seconde fois cette même surface en dessous aux points x'', z'' , et vont ensuite percer le plan horizontal aux deux points x''', z''' .

117. Les rayons lumineux qui s'appuient sur la portion de courbe $x'-u'$ ne peuvent pas arriver jusqu'au plan horizontal. Ils sont arrêtés dans leur cours par la masse du corps et produisent, par leur intersection avec la surface, une courbe

$u'-10'''-x''$ qui est par conséquent l'ombre portée dans la gorge de l'anneau par la partie $x'-u'$ de la courbe de contact.

Pour obtenir un point quelconque de la courbe $u'-x''$, on peut employer le principe des plans coupants (8). Ainsi, par exemple, si l'on veut avoir l'ombre portée par le point 10, 10', on opérera de la manière suivante :

1° On concevra le plan vertical $P-p$ contenant le rayon de lumière du point 10 ;

2° En élevant des perpendiculaires par les points où ce plan coupe les cercles horizontaux de la surface, on aura la courbe $q-10''-y$ (*fig. 77*);

3° L'intersection de cette courbe par le rayon lumineux du point 10 détermine 10'', et par suite 10''' pour les deux projections de l'ombre du point 10, 10'.

Le point 20 où la courbe $u'-10'''-x''$ (*fig. 78*) touche le cercle de gorge se déduira du point où la projection verticale $u-20-10''-x''$ (*fig. 77*) rencontre l'horizontale $e-e$ qui est la projection verticale du cercle de gorge.

On opérera de la même manière pour construire la courbe $v'-z''$ qui est l'ombre portée par la courbe $z'-v'$.

118. Les différents points des courbes $u'-10'''-x''$ et $v'-z''$ (*fig. 78*) peuvent encore être obtenus d'une autre manière.

Supposons, par exemple, que l'on veuille déterminer ou vérifier le point 17 suivant lequel la courbe $v'-z''$ touche le cercle de gorge.

On concevra tous les rayons lumineux qui s'appuient sur ce cercle horizontal ee , $e'e'$, et sur la portion de courbe zv , $z'v'$ dont on cherche l'ombre.

L'ensemble de tous ces rayons formera évidemment deux surfaces cylindriques parallèles à la direction de la lumière et par conséquent, parallèles entre elles.

L'intersection de ces deux surfaces cylindriques sera le rayon qui s'appuie sur les deux courbes directrices et qui

détermine par conséquent l'ombre portée sur l'une de ces courbes par un point de la seconde.

Ainsi, pour obtenir sur le cercle de gorge le point qui appartient à l'ombre portée par la courbe $z'v'$ (fig. 78), on tracera le rayon de lumière qui contient le centre 18 du cercle ee (fig. 77).

Ce rayon percera le plan horizontal de projection suivant un point $18''$ qui sera le centre de la circonférence $e''e''$ égale à la projection $e'e'$ du cercle de gorge.

La circonférence $e''e''$ sera la trace horizontale du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le cercle de gorge $ee, e'e'$.

Or la courbe $u''-14''-v''$ (fig. 78) est la trace du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la ligne de séparation $u'-14'-v'$. Il s'ensuit que le point $17''$ suivant lequel ces deux traces se rencontrent appartient au rayon 17, commun aux deux surfaces cylindriques, et les projections du rayon de lumière 17 détermineront les deux projections 17 et $17'$ du point suivant lequel la projection horizontale du cercle de gorge est touchée par la courbe $v'-17-z''$ (fig. 78).

On opérera de la même manière pour déterminer le point 19 sur le parallèle dont la projection verticale est rt .

119. Il est évident que l'opération précédente est un cas particulier du problème général qui aurait pour but de déterminer le point d'ombre porté sur une courbe quelconque aa' (fig. 4, pl. 14) par un point d'une autre courbe quelconque bb' .

Or, en raisonnant comme nous venons de le faire, on sera conduit aux opérations suivantes :

1° Les rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe aa' formeront dans l'espace une surface cylindrique dont on construira la trace horizontale a'' ;

2° Les rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe bb'

formeront une seconde surface cylindrique dont on construira la trace horizontale b'' ;

3° Le point n suivant lequel les deux traces horizontales a'' et b'' se coupent déterminera le rayon mn , $m'n'$ commun aux deux cylindres, et le point uu' suivant lequel ce rayon rencontre la courbe aa' sera l'ombre portée sur cette courbe, par le point mm' de la courbe bb' .

120. Si les deux lignes données aa' et bb' étaient droites (*fig. 1*) les cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur ces lignes seraient remplacés par deux plans, la droite mn , $m'n'$ intersection de ces deux plans, serait le rayon lumineux qui s'appuie sur les deux droites données, et le point uu' suivant lequel ce rayon rencontre la droite aa' serait l'ombre portée sur cette ligne par le point mm' de la droite bb' . Il est évident que l'on pourrait opérer de la même manière s'il s'agissait d'obtenir le point d'ombre porté par une droite sur une courbe, ou par une courbe sur une droite.

121. On conçoit également que la même opération peut donner plusieurs points ; ainsi la construction que nous avons indiquée au numéro 118 déterminera évidemment deux points sur le cercle ee (*fig. 77*) et deux points sur le cercle rt .

En général, la trace du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la ligne de séparation rencontrera la trace du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe donnée, suivant des points qui détermineront tous les rayons lumineux passant par les points d'ombre cherchés, et tous les points d'ombre portés par une courbe sur l'autre pourront ainsi être déterminés par une seule opération.

La méthode précédente est surtout très-commode, parce qu'elle permet de choisir à volonté la ligne sur laquelle on veut obtenir des points d'ombre portés par la ligne de séparation.

Considérations générales.

122. Le tracé des ombres sur les dessins des ingénieurs n'exige pas une exactitude aussi absolue que celle qui est nécessaire dans quelques autres applications de la géométrie descriptive.

On sait que ce n'est pas sur des dessins ombrés que s'exécutent la plupart des travaux qui demandent une grande exactitude. Les charpentiers, les tailleurs de pierres, les conducteurs de machines, n'ombrent pas les épures qui servent à déterminer les dimensions de l'objet qu'ils exécutent, et s'ils tracent des ombres sur quelques-uns de leurs dessins, c'est plutôt pour mieux comprendre la forme des objets représentés que pour en faciliter l'exécution.

Il n'est donc pas toujours nécessaire que les ombres soient tracées avec une précision mathématique, et pourvu que l'on fasse comprendre parfaitement la forme de l'objet, on aura rempli le but que l'on s'était proposé.

Ainsi un dessinateur habile ne prendra pas le compas à chaque instant pour tracer les ombres sur une machine ou sur un monument ; l'analogie plus ou moins grande qui existe entre la surface du corps qu'il veut ombrer et quelques-uns des exemples qu'il a étudiés *géométriquement* lui permettra toujours de construire les courbes de séparation et d'ombres portées, avec une exactitude suffisante pour donner à son dessin l'air de vérité qu'il doit avoir.

Le peintre qui aura fait quelques études géométriques des ombres reconnaîtra évidemment dans les courbes de séparation qui ont lieu sur les draperies, sur les membres du corps humain et sur les muscles principaux, quelques-uns des effets produits par la lumière sur les cylindres, les cônes ou la sphère. Les contours de la tête, du nez, du menton, repro-

duiront plus ou moins les courbes que l'on rencontre sur les principaux corps géométriques. Les ombres portées dans la cavité occupée par l'œil lui rappelleront l'ombre portée dans une niche sphérique ou elliptique par l'axe qui en forme le contour.

Ce n'est donc pas, comme paraissent le croire quelques artistes, pour tracer les ombres avec le compas, que les études actuelles sont nécessaires ; l'essentiel, avant tout, est de comprendre pour quelle raison une ligne d'ombre est plus ou moins courbe, pourquoi elle est courbe dans un sens plutôt que dans l'autre ; enfin, de s'habituer à reconnaître et à *prévoir* par le raisonnement comment ces courbes peuvent être modifiées par les changements divers qui peuvent avoir lieu dans la direction de la lumière ou dans son intensité.

Enfin, pour les artistes, les études géométriques n'ont pas pour but de leur apprendre à dessiner, mais de leur apprendre à regarder.

En effet beaucoup d'entre eux, se laissant égarer par leur imagination, ne dessinent pas les objets comme ils les voient, mais comme ils croient les voir.

Ils ignorent qu'un objet, quoique parfaitement dessiné, paraîtra trop petit si les ombres sont trop grandes, et trop grand s'il est trop exposé à la lumière.

Un homme, dans les proportions les plus exactes, paraîtra trop grand ou trop petit s'il est placé à côté d'une colonne trop petite ou trop grande, trop obscure ou trop éclairée ; beaucoup d'entre eux ne confondraient pas le trop court avec le raccourci s'ils avaient étudié la perspective, ou du moins les projections obliques du corps. Ce qui leur permettrait de comprendre l'admirable ouvrage de Jean Cousin, qui avait si bien deviné la géométrie descriptive.

Les artistes habiles sentent parfaitement toutes ces choses, mais un grand nombre, ignorant les causes des nombreuses illusions d'optique produites par la combinaison des ombres de

la lumière et de la perspective, font des efforts inutiles pour s'en affranchir et ne parviennent souvent à faire disparaître un défaut apparent qu'en produisant à côté un défaut réel.

123. Les réflexions qui précèdent expliquent pourquoi je me suis particulièrement attaché, dans cet ouvrage, à l'étude des objets que l'on rencontre le plus souvent dans la pratique.

Or, après les polyèdres et les trois corps ronds élémentaires, savoir : le cylindre, le cône et la sphère, les objets que l'on a le plus souvent occasion de dessiner ont plus ou moins d'analogie avec ce que l'on appelle en géométrie, solides de révolution.

La forme presque toujours gracieuse de ces sortes de corps et le bon marché qui résulte de la facilité de leur exécution sur le tour en ont fait multiplier à l'infini toutes les variétés.

Mais si l'on considère avec attention la section méridienne d'une surface de révolution quelconque, on pourra toujours considérer cette ligne comme composée d'un certain nombre d'arcs de cercles qui se raccorderaient.

Ainsi, par exemple, la méridienne *acvu* (fig. 7) étant une courbe à trois centres composée des arcs *ac*, *cv* et *vu*, la zone *acac* sera une portion de la surface annulaire engendrée par le cercle qui a son centre au point 1.

La zone *cvcv* appartient à une seconde surface annulaire engendrée par le cercle décrit du point 2 comme centre.

Enfin, la zone *vuvu* fait partie d'une troisième surface annulaire qui a pour centre le point 3.

La première zone se raccorde avec la deuxième, parce qu'elles sont touchées toutes les deux par une même surface cylindrique, suivant la circonférence du cercle horizontal *cc*.

La seconde zone se raccorde avec la troisième, parce qu'elles sont touchées toutes les deux suivant le cercle *vv* par un cône circulaire qui a son sommet au point *s*.

La section méridienne de la surface de révolution repré-

sentée sur la figure 9 est également une courbe à trois centres composée de trois arcs de cercles mn , no , ox qui se raccordent aux points n et o ; de sorte que la surface tout entière peut être considérée comme composée de trois zones ou parties de surfaces annulaires qui se raccordent suivant les cercles nn et oo .

124. Toute surface de révolution peut donc être considérée comme composée d'une suite de zones qui se raccordent et dont chacune provient d'une surface annulaire ou tore. C'est pourquoi on ne saurait étudier avec trop de soin tout ce qui se rapporte à cette espèce de surface.

Or, si l'on ne veut pas être obligé de prendre à chaque instant le compas pour tracer les ombres sur un dessin, il ne suffit pas d'exécuter une épure d'ombre pour une direction déterminée des rayons lumineux. Cela serait tout au plus suffisant pour les dessins de l'ingénieur, mais si l'on veut acquérir le sentiment exact des effets de la lumière, il faut se familiariser avec toutes les transformations que subissent les courbes de séparation et d'ombres portées, lorsque l'on déplace la lumière ou l'objet éclairé.

125. D'après cela, concevons (*fig. 8*) la surface annulaire ou tore engendré par le cercle A , et supposons, pour plus de simplicité, que la lumière soit parallèle au plan vertical de projection.

Si l'on veut prendre au rayon lumineux les inclinaisons successives indiquées sur la projection verticale, par les droites $s-1$, $s-2$, $s-3$, etc., et si l'on construit les projections verticales et horizontales de toutes les lignes de séparation correspondantes, on obtiendra successivement les courbes tracées sur les deux projections de la figure, depuis le cas où le rayon de lumière $s-1$ est vertical jusqu'au moment où il devient horizontal comme cela est indiqué par sa projection verticale $s-6$.

Toutes ces courbes ont été obtenues par la méthode indi-

quée au numéro 114, et chacune d'elles est déterminée par douze points situés dans les plans méridiens $P_1 P_2$, $P_3 P_4 P_5$.

La partie vue de chaque courbe est tracée en ligne pleine, tandis que la partie cachée est tracée en points.

Lorsque le rayon lumineux est vertical, il est évident que les deux lignes de séparation se confondent avec le plus grand et le plus petit parallèle; mais, à mesure que le rayon de lumière s'incline davantage, les deux courbes se transforment en s'approchant toujours des circonstances décrites par le point le plus bas et par le point le plus élevé du cercle générateur A, et l'on voit les courbes de séparation coïncider avec ces deux cercles, lorsque le rayon de lumière devient tout à fait horizontal.

126. Il ne faut pourtant pas croire dans ce dernier cas que chacune des lignes de séparation se compose tout entière de l'un des cercles dont nous venons de parler.

Les choses ne se passent pas ainsi; et si l'on veut comprendre ce qui a lieu dans cette circonstance, il faut comparer la figure 11 avec la courbe que l'on obtient figure 10 lorsque le rayon de lumière est presque horizontal.

Pour éviter la confusion, j'ai désigné par les mêmes chiffres les points qui ont une projection verticale commune: ainsi, sur les deux figures, la ligne de séparation intérieure passe par les points 1-2-3-4-5, tandis que la ligne de séparation extérieure contiendra les points 6-7-8-9-10, et l'on voit par conséquent que, sur la figure 11, la première de ces deux courbes comprendra:

- 1° Le demi-cercle horizontal 2-1-2 au-dessus de la surface;
- 2° Le demi-cercle vertical 2-3-4 dont la convexité est tournée vers l'axe de la surface;
- 3° Le demi-cercle horizontal 4-5-4 au-dessous de la surface;
- 4° Le demi-cercle vertical 4-3-2.

Tandis que la ligne de séparation extérieure se composera ainsi :

- 1° Le demi-cercle horizontal 7-6-7 au-dessous de la surface;
- 2° Le demi-cercle vertical 7-8-9 ;
- 3° Le demi-cercle horizontal 9-10-9 au-dessus de la surface;
- 4° Le demi-cercle vertical 9-8-7.

De sorte que le rayon lumineux partant du point 8 engendrera une suite de surfaces alternativement planes et cylindriques, dont la directrice passera par les points 7-6-7-8-9-10-9-8 et 7, tandis que la courbe intérieure serait 2-1-2-3-4-5-4-3 et 2.

Pour mieux distinguer les effets qui résultent de cette direction de la lumière, j'ai indiqué par une teinte de lignes pleines la partie du corps qui est limitée par la ligne de séparation, tandis que les teintes ponctuées indiquent l'ombre portée dans la partie de la surface qui est tournée du côté de l'axe, par la partie du corps qui lui est opposée et qui arrête par conséquent les rayons lumineux.

Sur la figure 8 on n'a indiqué par des teintes que les parties ombrées que l'on obtient lorsque le rayon de lumière est parallèle à la droite $s-2$; et pour que l'on puisse mieux comprendre les transformations diverses de la courbe de séparation, on n'a pas indiqué sur cette projection les ombres qui seraient portées dans chaque cas sur la partie creuse du tore.

127. Les figures 2, 3, 5, 6, 12 et 13 sont les traces horizontales des cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuieraient sur les courbes de séparation intérieures de la fig. 8.

On conçoit parfaitement que si le rayon lumineux était vertical, la ligne de séparation serait le cercle de gorge, dont la projection horizontale se confondrait évidemment avec la trace du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuieraient sur ce même cercle.

Mais à mesure que le rayon lumineux s'inclinera davantage, les traces des différentes surfaces cylindriques formées par les rayons qui s'appuient sur la partie intérieure de la surface deviendront successivement semblables aux figures 2, 3, 5, 6, etc.

Chacune de ces courbes contiendra toujours les quatre points de rebroussement dont nous avons parlé au n° 116.

La partie éclairée produite par l'ouverture du cercle de gorge diminuera graduellement, jusqu'au moment où le rayon lumineux touchera en même temps les deux cercles A qui forment la section méridienne de la figure 8.

C'est alors que le cylindre formé par les rayons lumineux aura pour trace horizontale l'ensemble des courbes dessinées sur la figure 5, en prolongeant par la pensée chaque rayon jusqu'au plan horizontal de projection ; car il est évident que lorsque le rayon lumineux sera plus incliné que la tangente commune aux deux cercles A de la figure 8, aucun des rayons lumineux qui s'appuient sur la partie intérieure de la surface ne pourra plus passer, et chacun d'eux étant arrêté par la masse du corps, l'ombre de la ligne de séparation aura lieu tout entière sur le corps lui-même.

Malgré cela j'engage le lecteur à construire les traces correspondantes aux inclinaisons diverses des rayons lumineux.

On pourra également chercher comme exercices les points suivant lesquels les rayons qui sont arrêtés par la surface du corps perceraient la paroi opposée de cette surface si ce corps était transparent ; il suffira, dans ce cas, d'opérer comme nous l'avons dit aux n°s 117 et 118.

128. La discussion qui précède est fort utile en ce qu'elle familiarise avec les diverses transformations qui ont lieu dans la forme des ombres par suite des changements opérés dans la direction des rayons lumineux.

C'est par des études de ce genre appliquées à un grand

nombre d'objets différents qu'un artiste peut acquérir la science du coloris, qui ne consiste pas à mettre au hasard du blanc à côté du noir pour produire des éclats de lumière souvent impossibles, mais à distribuer exactement le jour et les ombres sur toutes les parties du tableau.

129. **Deuxième étude sur la surface annulaire.** Les fig. 14 et 15, de la pl. 15, sont les deux projections de la moitié d'une surface annulaire coupée par le plan du méridien parallèle au plan vertical de projection.

Les lignes de séparation extérieure et intérieure ont été déterminées en opérant comme nous l'avons dit au n° 114.

L'inclinaison de la lumière est telle, qu'aucun rayon lumineux ne peut passer dans le vide qui a lieu vers le centre de la surface, ce qui produit la courbe d'ombre portée 1-10-9-2'-9-10 et 3.

Cette ligne, intersection de la surface annulaire par les rayons lumineux qui s'appuient sur la partie 1-2-3 de la courbe de séparation intérieure, peut être construite par la méthode indiquée aux nos 118 et 119.

Ainsi, pour obtenir les points situés sur le cercle horizontal $aa, a'a'$, fig. 14 et 15, on concevra les deux surfaces cylindriques formées par les rayons lumineux qui s'appuient sur le cercle a, a' et sur la ligne de séparation intérieure 1-2-3-5-6-7.

On coupera ces deux cylindres par un plan horizontal P, fig. 14 ; on obtiendra par ce moyen, sur la fig. 15, la courbe M et la circonférence a'' égale et parallèle au cercle horizontal aa' des fig. 14 et 15.

Les points 10', suivant lesquels la courbe M est coupée par la circonférence a'' , détermineront les rayons lumineux communs aux deux cylindres.

On projettera les deux points 10' sur la trace verticale du plan P, fig. 14, et les projections verticales des rayons lumineux correspondants détermineront les points 10 sur la projection verticale a' du cercle aa' ; les perpendiculaires abaissées sur ces deux points détermineront leurs projections horizontales sur les projections des rayons correspondants, et sur la projection horizontale a du cercle aa' .

L'opération précédente étant recommencée, on obtiendra autant de points que l'on voudra de la courbe d'ombre portée.

On fera bien de construire les points 9,9 de cette courbe, qui sont situés sur le cercle de gorge.

Si l'on veut déterminer le point 11 suivant lequel la courbe d'ombre portée touche le cercle méridien C' de la fig. 14, on concevra le cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuierait sur la circonférence de ce cercle.

On coupera ce cylindre, et celui qui a pour directrice la ligne de séparation 2-6 par le plan P, parallèle au plan vertical de projection, fig. 15.

On obtiendra ainsi, fig. 14, la courbe N et la circonférence C'' égale et parallèle au cercle méridien C' .

Le point 11', suivant lequel ces deux courbes se rencontrent déterminera le rayon qui s'appuie en même temps sur la ligne de séparation intérieure 2-6 et sur le cercle méridien C' , et le point 11 de ce cercle sera par conséquent l'ombre portée sur une circonférence, par le point correspondant de la ligne de séparation.

Le point 2', le plus bas de la courbe d'ombre portée, sera déterminé par le plan coupant, vertical P_2 .

Le plan qui contient le rayon LS coupe la surface annulaire suivant un cercle méridien, dont on évitera facilement la projection elliptique par un rabattement autour de l'axe.

La courbe 1-2-3 étant la seule partie de la ligne de séparation qui soit touchée par les rayons lumineux, il est évident que l'on peut se dispenser de construire toute la partie 8-7-

6-5-4 et 3 qui est plongée dans l'ombre, mais l'épure actuelle étant une étude de principe, j'ai dû conserver entièrement la courbe suivant laquelle la surface serait touchée par le cylindre parallèle au rayon lumineux, en supposant que le rayon lumineux générateur de ce cylindre peut traverser librement toutes les autres parties de la surface du corps.

130. Tangentes et points de tangence. Nous aurons principalement pour but dans l'étude actuelle :

1° ~~-----~~ *De construire une tangente en un point quelconque de la ligne de séparation ;*

2° ~~-----~~ *De déterminer les points suivant lesquels la ligne de séparation intérieure est touchée par le rayon lumineux.*

Nous avons dit au n° 116, que ces points sont au nombre de quatre.

En effet, il est évident qu'au point 2 de la fig. 15, la tangente à la courbe 1-2-3 est horizontale, tandis que le rayon lumineux coupe la courbe et sa tangente suivant un angle droit.

Mais, si l'on fait glisser le point 2 sur la courbe 2-6, en supposant que ce point entraîne avec lui la tangente et le rayon lumineux correspondant, l'angle formé par ces lignes cessera d'être droit, puisque la tangente change de direction à chaque instant, tandis que le rayon lumineux reste toujours parallèle à lui-même : et lorsque l'angle que ces deux lignes font entre eux sera réduit à zéro, ce rayon lumineux, se confondant avec la tangente, sera évidemment tangent à la courbe ; ce qui aura lieu aux quatre points 1-3-5 et 7.

Pour ne pas distraire le lecteur, je n'ai pas cru devoir indiquer sur la pl. 13 les opérations nécessaires pour déterminer rigoureusement les quatre points de tangence u , v , m et n .

D'ailleurs, il n'est pas absolument utile, dans la pratique, que ces points soient déterminés avec une précision absolue.

Le dessinateur qui aura étudié sur la figure 8, de la pl. 14, les diverses variations de courbure produites dans la ligne de séparation par les inclinaisons plus ou moins grandes du rayon lumineux, saura toujours placer ces points avec une exactitude suffisante.

Ensuite, si la courbe est construite avec beaucoup de soin, on pourra tracer sur les deux projections, des tangentes parallèles aux rayons lumineux ; puis, après avoir déterminé les points de tangence, par l'un des moyens que j'ai donnés dans le premier chapitre du deuxième livre de ma Géométrie descriptive, on pourra considérer le résultat obtenu comme suffisamment exact, si les deux projections de chaque point de tangence sont situées sur une même droite perpendiculaire à la ligne AZ (fig. 77 et 78, pl. 13).

Le traité actuel étant particulièrement destiné aux dessinateurs, on peut donc se contenter de la solution qui précède.

Cependant, pour ne rien laisser à désirer, au point de vue de la théorie, je vais indiquer les moyens d'obtenir rigoureusement les tangentes et les points de tangence à la ligne de séparation.

Mais avant de résoudre ce problème, il faut nécessairement rappeler quelques principes dont la démonstration ne peut trouver place que dans les traités d'analyse.

131. Courbure des lignes, cercle osculateur, centres et rayons de courbure. Si par un point A d'une courbe BAD (fig. 1, pl. 15) on conçoit une tangente AT, la droite AN perpendiculaire sur AT sera une *normale*.

Tout point C pris à volonté sur la normale pourra servir de centre à un cercle de rayon CA qui touchera la courbe BAD au point A.

132. Il résulte de là, que par un point A d'une courbe

donnée, on peut faire passer une infinité de cercles tangents.

Les uns sont situés entièrement du côté de la partie concave de la courbe ; mais d'autres passent entre la courbe BAD et sa tangente.

Or, il est évident que parmi tous les cercles que l'on peut ainsi concevoir, il doit toujours en exister un qui est plus près de la courbe que tous les autres ; c'est ce qu'on appelle *le cercle osculateur* de la courbe au point A.

Sur la fig. 1, le cercle osculateur est tracé en ligne pleine, et sa surface est teintée en points, tandis que les circonférences des cercles simplement tangents sont indiquées en lignes ponctuées.

Je dis simplement tangents, car il est évident que le cercle osculateur est plus que tangent.

En effet, concevons, fig. 4, que la courbe BAD soit rencontrée par un cercle de rayon AO. Ces deux courbes se couperont suivant deux points A et A', que l'on nomme points de *section*.

Si l'on fait tourner le cercle AO autour du point A, de manière à faire arriver le centre O jusqu'au point O', le second point de section se rapprochera du premier, et lorsque ces deux points seront réunis en un seul, le cercle sera tangent à la courbe, et le point qui résultera du rapprochement des deux points de section sera un point de *tangence*, ou point de contact du premier ordre.

Il est évident que cela ne suffira pas pour produire *l'osculation* entre la courbe et le cercle, qui coïncident l'un avec l'autre au point de tangence, mais qui s'éloignent aussitôt d'une manière sensible en deçà et au delà de ce point.

Or, si nous supposons (fig. 3) qu'une circonférence de cercle passe par trois points A', A, A'' pris très-près les uns des autres sur une courbe donnée BAD, la courbure de la courbe différera très-peu de celle du cercle, et si l'on suppose que les deux points A' et A'' se rapprochent du point A, cela ne chan-

gera presque pas la courbe du cercle, qui ne différera plus de celle de la courbe lorsque les trois points seront réunis en un seul.

Dans ce cas, le cercle sera *osculateur* et le point qui résulte du rapprochement des trois points A' , A , A'' sera un point d'osculution ou point de contact du deuxième ordre.

133. Ainsi, le point de section A (*fig. 2*) ne contient qu'un seul point de la courbe CAB .

Le point de tangence A (*fig. 4*) provient du rapprochement des deux points de section A et A' .

Et le point d'osculution A (*fig. 1*) contient trois points de la courbe BAD , puisqu'il résulte de la réunion du point de tangence A avec les deux points de section A' et A'' .

Le point de section (*fig. 2*) ne détermine pas la direction de la sécante qui peut devenir successivement As , As' , As'' .

Tandis que le point de tangence A (*fig. 4*) détermine la direction de la tangente AT parce que, par deux points, on ne peut faire passer qu'une ligne droite, même lorsque ces deux points sont infiniment rapprochés.

Quant au point d'osculution de deux courbes, il détermine, non-seulement leur tangente commune, mais encore le plan qui contient les deux courbes si elles sont planes toutes les deux; ou, si elles sont à double courbure, l'arc de cercle *infiniment* petit déterminé par les trois points *infiniment* rapprochés qui forment le point d'osculution.

Le plan de cet arc de cercle se nomme le *plan d'osculution*.

134. Deux courbes (*fig. 12, 13, 19*) seront évidemment osculatrices en un point donné A , lorsque en ce point elles auront le même point osculateur; de même que deux courbes sont tangentes en un point, lorsque en ce point elles ont une tangente commune.

135. Quoique les trois points qui déterminent l'osculatation d'une courbe et d'un cercle soient infiniment rapprochés, ils conservent cependant la propriété de déterminer le centre et le rayon du cercle sur la circonférence duquel ils sont situés, de sorte que le rayon du cercle osculateur est en même temps le *rayon de courbure* de la courbe donnée au point d'osculatation.

136. Lorsque les propriétés géométriques de la courbe peuvent être exprimées par l'algèbre, on obtient exactement le centre et le rayon de courbure, pour tel point que l'on voudra de la courbure donnée. Mais, dans beaucoup d'applications, on pourra se contenter de construire avec le compas le centre et le rayon du cercle qui passerait par trois points tels que A' , A et A'' (*fig. 3*).

137. On doit remarquer cependant que, si l'on prend les trois points trop près les uns des autres, les perpendiculaires au milieu des cordes AA' et AA'' se couperont trop obliquement, tandis qu'en prenant ces mêmes points trop loin le cercle que l'on obtiendra différera beaucoup du cercle osculateur. C'est ce qui arrivera surtout lorsque la courbure sera très-variable dans le voisinage du point d'osculatation.

Dans ce cas (*fig. 6*), l'un des deux arcs AA' du cercle osculateur sera en dehors, tandis que l'autre arc AA'' sera en dedans de la courbe donnée BAD ; et l'on conçoit que cette relation doit encore se conserver lorsque les trois points sont infiniment rapprochés.

138. En général, on peut dire que le cercle osculateur coupe toujours la courbe; ainsi, par exemple, il est évident que les trois points A' , A et A'' de la figure 6 seront toujours trois points de section, même lorsqu'ils seraient infiniment rapprochés, tandis que le point d'osculatation du cercle AO et de la courbe BAD (*fig. 1*) provient de la réunion du point de tan-

gence A avec les deux points de section A' et A'' et l'on conçoit que, dans ce dernier cas, les deux parties A'A et AA'' de la courbe seront en dedans du cercle osculateur, même lorsque les trois points A', A et A'' seront infiniment rapprochés.

Ainsi, lorsque la courbure sera symétriquement en deçà et au delà du point d'osculatation, on pourra considérer ce dernier point (*fig. 1*) comme provenant de la réunion du point de tangence A avec les deux points de section A' et A'' ; tandis que, si la courbure en deçà du point d'osculatation diffère de la courbure au delà (*fig. 6*), le point d'osculatation sera produit par le rapprochement des trois points de section A', A et A''.

139. Toutes les courbes qui, en un point donné A (*fig. 12*, 13, 19), ont le même cercle osculateur, seront osculatrices les unes des autres ; car il est évident qu'au point d'osculatation elles auront toutes la même courbure, qui sera exprimée par le rayon du cercle osculateur commun.

Il existera donc une infinité de courbes osculatrices en un point d'une courbe donnée, et l'on pourra toujours choisir dans l'application celle de ces courbes qui satisfait aux conditions les plus simples. Or, le cercle étant la plus simple de toutes les courbes, c'est ordinairement celle que l'on emploie de préférence.

140. Cependant, le cercle osculateur n'est pas toujours la courbe qui s'approche le plus d'une autre courbe donnée ; en effet, si la courbure de l'arc AA' (*fig. 12*) diffère sensiblement de la courbure de AA'', on conçoit qu'une ellipse dont la courbure varierait suivant la même loi dans le voisinage du point A serait plus près de la courbe que le cercle osculateur. On concevra encore facilement que dans certains cas (*fig. 13*) où la courbure diminuerait très-rapidement à partir du point A, un arc de parabole α ou d'hyper-

bole c satisferait encore mieux à la condition de coïncidence.

Mais d'abord, la construction de l'une quelconque de ces courbes serait moins simple que celle du cercle ; ensuite, si l'on voulait obtenir le rayon de courbure, il faudrait toujours recourir au cercle osculateur de la courbe par laquelle on aurait remplacé la courbe donnée : et comme le cercle osculateur est le même pour toutes les courbes osculatrices au point A , il est évident que l'emploi de ces courbes deviendrait sans objet.

Si pourtant (*fig. 13*) la courbe donnée était symétrique dans le voisinage du point d'osculatation, par rapport à la normale qui contient ce point, il pourrait être utile d'employer comme courbe osculatrice l'une des nombreuses ellipses, paraboles ou hyperboles, qui auraient au point A le même rayon de courbure (139).

141. Courbure des lignes du second degré. — Paramètre. Nous avons dit que le centre, et le rayon de courbure en un point d'une courbe donnée, dépendent des propriétés géométriques de cette courbe, et, lorsque ces propriétés sont connues, on peut obtenir par le calcul le centre et le rayon du cercle osculateur, mais la nature de l'ouvrage actuel et le but auquel il est destiné ne permettent pas que nous donnions à cette question tous les développements dont elle est susceptible.

Il suffit presque toujours, en effet, dans la plupart des applications graphiques, de considérer comme cercle osculateur (*fig. 3*) celui qui passe par trois points peu éloignés, et si l'on croyait utile d'obtenir une plus grande exactitude, on trouverait dans les traites d'algèbre appliquée l'expression des rayons de courbure des lignes définies géométriquement.

Mais les courbes du second degré offrent dans les applications un intérêt tellement exceptionnel que je crois être utile à quelques lecteurs, en énonçant les formules qui permettent

de construire, dans tous les cas, le centre et le rayon de courbure pour un point pris à volonté sur une de ces lignes.

142. **Paramètre.** Dans toute courbe du second degré, le *paramètre* est la corde qui passe par le foyer et qui est perpendiculaire à l'axe principal $2a$.

Ainsi, la droite désignée par GH, sur les fig. 16, 17 et 18, est le paramètre de l'ellipse, parabole ou hyperbole correspondante.

L'expression algébrique de cette corde est toujours

$$\frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$$

Ainsi, en exprimant le paramètre par p , on aura

$$GH = p = \frac{2b^2}{a}$$

143. On démontre par l'algèbre que dans une courbe du second degré le rayon de courbure AI au sommet A est toujours égal au *demi-paramètre* ; donc en exprimant ce rayon de courbure par r , on aura toujours $r = GF = \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$, d'où résulte la proportion $a : b :: b : r$.

L'expression qui précède convient évidemment pour l'ellipse et pour l'hyperbole, mais dans la parabole les valeurs de a et de b étant infinies, l'expression $\frac{b^2}{a}$, quoiqu'elle soit exacte, ne donnerait plus une idée suffisamment nette de la valeur du rayon de courbure au sommet.

Or on sait que dans toute parabole (fig. 17) le paramètre GH vaut quatre fois la distance AF du sommet au foyer, donc le

double de cette distance sera le demi-paramètre ou le rayon de courbure au sommet A de la parabole.

$$\text{Ainsi on aura : } r = AI = 2AF = GF = \frac{p}{2}.$$

144. Normale. La normale, considérée comme exprimant une direction, est une droite infinie, menée par le point de tangence, et perpendiculairement à la tangente : mais, lorsque la *normale* exprime une longueur, elle n'est plus infinie et se compte depuis le point de tangence jusqu'à sa rencontre avec $2a$ lorsqu'il s'agit d'une courbe du second degré.

Par conséquent, sur les figures 16, 17 et 10, la normale correspondante au point M sera MK.

145. Rayon de courbure. On démontre en algèbre que *le rayon de courbure en un point quelconque d'une ligne du second degré est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre.*

Ainsi, en exprimant la normale par n , le demi-paramètre par $\frac{p}{2}$ et le rayon de courbure par R, on aura :

$$R = \frac{n^3}{\left(\frac{1}{2}p\right)^2}.$$

Or, nous avons dit plus haut (143) que le *demi-paramètre* est le rayon de courbure au sommet, et puisque nous avons exprimé ce rayon par r , on aura :

$$R = \frac{n^3}{r^2}$$

pour l'expression générale du rayon de courbure, en un point quelconque d'une ligne du second degré.

La valeur de r étant une quantité constante, il s'ensuit que dans une ligne du second degré le rayon de courbure est toujours proportionnel au cube de la normale, et l'on

reconnaîtra facilement, que dans la parabole et dans l'hyperbole ce rayon augmentera depuis r jusqu'à l'infini, à mesure que le point d'osculation s'éloignera du sommet A de la courbe.

146. Mais il n'en sera pas de même dans l'ellipse (*fig. 16*), où le rayon de courbure atteindra sa valeur maximum, lorsque le point d'osculation sera parvenu à l'extrémité B du petit axe $2b$.

Or, dans ce cas, la normale BO sera égale à b , et le rayon de courbure que nous nommerons r' deviendra :

$$r' = \frac{b^3}{r^2}.$$

Mais nous avons vu (143) que

$$r = \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}.$$

On aura donc :

$$r^2 = \frac{b^4}{a^2},$$

d'où

$$r' = \frac{n^3}{r^2} = \frac{b^3}{r^2} = \frac{b^3 a^2}{b^4} = \frac{a^2}{b}.$$

147. Ainsi, on aura pour l'ellipse (*fig. 16*) :

$$r = \frac{b^2}{a}; R = \frac{n^3}{r^2}; r' = \frac{a^2}{b},$$

$r = IA$ étant le plus petit rayon de courbure, $R = CM$ le rayon de courbure en un point quelconque M, et $r' = SB$ étant le plus grand rayon de courbure.

Ainsi, dans l'ellipse, le rayon de courbure à l'extrémité de a est égal à $\frac{b^2}{a}$, et le rayon à l'extrémité de b est égal à $\frac{a^2}{b}$.

148. Pour la parabole et pour l'hyperbole on aura :

$$r = \frac{b^2}{a}; R = \frac{n^3}{r^2}; r' = \infty.$$

149. Construction du rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe du second degré. L'expression algébrique de ce rayon en un point quelconque

étant $\frac{n^3}{r^2}$,

on aura
$$R = \frac{n^3}{r^2} = \frac{n^2}{r} \times \frac{n}{r}.$$

Or, si nous exprimons pour un moment $\frac{n^2}{r}$ par x , nous aurons :

$$R = x \times \frac{n}{r} = \frac{nx}{r},$$

ce qui revient à la construction des deux formules suivantes :

$$x = \frac{n^2}{r}; \quad R = \frac{nx}{r}.$$

D'après cela (*Géométrie élémentaire*, 4^e livre), on fera, fig. 16 :

- 1° ~~On tracera~~ MD égal au demi-paramètre GF ;
- 2° ~~On tracera~~ MN égal à la normale MK ;
- 3° ~~On tracera~~ On tracera DN ;
- 4° ~~On construira~~ On construira NT perpendiculaire sur DN ;
- 5° ~~La droite~~ La droite TC, perpendiculaire sur NT, coupera la normale NC en un point C qui sera le centre du cercle osculateur au point M.

En effet, les deux triangles DMN, NMT, étant semblables, on aura la proportion :

$$DM : MN :: MN : MT,$$

d'où (143) $r : n :: n : MT,$

et par conséquent $MT = \frac{n^2}{r^2} = x.$

Mais, la similitude des triangles DMN, TMC, donnera

$$DM : MN :: MT : MC,$$

d'où $r : n :: x : MC,$

et, par suite, $MC = \frac{nx}{r} = \frac{n}{r} \times \frac{n^2}{r} = \frac{n^3}{r^2} = R$ (145).

Ainsi le centre C et le rayon de courbure CM seront déterminés.

150. La construction qui précède convient, sans aucune modification, à toutes les courbes du second degré ; c'est pourquoi les mêmes lettres ont été employées sur les fig. 16, 17 et 18.

151. Si l'on voulait faire cette opération au sommet A de la courbe, il faudrait se rappeler que pour ce point la normale AI est égale au demi-paramètre GH, et, dans ce cas, on aurait $DM = MN$; le triangle rectangle DMN deviendrait alors isocèle, et la construction serait inutile, puisque l'on sait qu'au sommet le rayon de courbure r est égal au demi-paramètre.

Il suffit donc, pour ce point, de faire $AI = GF$.

152. L'opération du n° 149 étant appliquée au point B de l'ellipse, fig. 16, déterminerait le plus grand rayon de courbe SB ; mais on peut obtenir cette ligne d'une manière plus simple, en traçant :

1° — La droite BF qui joint le point B avec le foyer ;

2° — La droite FS perpendiculaire sur BF.

On obtiendra, par ce moyen, le centre S et le rayon $r' = SB$ du cercle osculateur au point B.

En effet, le triangle BFS étant rectangle en F, on aura la proportion :

$$BO : BF :: BF : BS,$$

ou $b : a :: a : BS ;$

d'où $BS = \frac{a^2}{b} = r' \text{ (147).}$

153. Dans les opérations qui précèdent, nous avons pris, pour *demi-paramètre*, la moitié de la corde GH perpendiculaire à l'axe $2a$ et passant par le foyer.

Cela fait dépendre le demi-paramètre de l'exactitude avec laquelle la courbe aurait été tracée, mais on peut obtenir facilement le demi-paramètre sans tracer la courbe ; en effet, si nous construisons la droite OU perpendiculaire sur BF, le triangle BOF étant rectangle en O, on aura la proportion :

$$BF : BO :: BO : BU,$$

d'où $a : b :: b : BU,$

et par conséquent $BU = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2} = r \text{ (143).}$

154. Pour la parabole, on sait que le demi-paramètre est égal à deux fois AF (143).

155. Et dans l'hyperbole, fig. 19, on tracera BI perpendiculaire à l'asymptote, ce qui donnera la proportion :

$$OA : AB :: AB : AI,$$

d'où $a : b :: b : AI,$

et par conséquent $AI = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2} = r$ (143).

156. On peut, par une opération extrêmement simple, obtenir en même temps le plus petit et le plus grand rayon de courbure d'une ellipse ; pour cela, fig. 20, on tracera :

1° — Les droites AE et BE perpendiculaires aux extrémités des axes principaux ;

2° — La corde AB ;

3° — La droite ES, perpendiculaire sur AB, coupera les deux axes de l'ellipse aux points I et S qui seront les centres du plus petit et du plus grand cercle osculateur.

En effet, les triangles BEA, EAI seront semblables et donneront la proportion :

$$BE : EA :: EA : AI,$$

d'où $a : b :: b : AI,$

et par conséquent $AI = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2} = r$ (143).

Mais les deux triangles semblables BEA, EBS donneront

$$EA : EB :: EB : BS,$$

d'où $b : a :: a : BS,$

et par conséquent $BS = \frac{a^2}{b} = r'$ (147).

157. **Développée de l'ellipse.** L'opération du n° 149 étant répétée pour un certain nombre de points pris à volonté sur le quart d'ellipse BMM'A (*fig.* 22), on obtiendra les centres et les rayons de courbures correspondants, ce qui déterminera la courbe IC'CS pour la développée de AM'MB, et si l'on opère de la même manière pour les trois autres quarts de l'ellipse, on obtiendra la courbe SIS'I' qui forme la développée complète de l'ellipse.

Pour mieux faire sentir la forme de cette courbe, j'ai indiqué par une teinte de points tout l'espace dont elle forme le contour.

158. On remarquera que cette courbe contient quatre points de rebroussements, qui sont les centres de courbures principaux de l'ellipse.

Tout point pris à volonté sur l'une des quatre courbes SI, IS', S'I', I'S sera le centre de courbure correspondant à un point de l'ellipse, de sorte qu'en prenant pour centres un certain nombre de ces points, on pourra tracer avec le compas une courbe qui différera aussi peu que l'on voudra de l'ellipse demandée.

159. La courbe SIS'I' peut encore servir pour construire des normales à l'ellipse, par un point pris où l'on voudra dans son plan.

Ainsi, par le point V situé dans l'intérieur de l'espace limité par la courbe SIS'I', on pourra construire quatre normales, savoir :

UN	tangente à la courbe	S'I'
U'N'	—	— SI
U''N''	—	— S'I'
U'''N'''	—	— SI'

Deux de ces normales sont tangentes à l'arc SI', situé comme

le point V dans l'angle droit BOA', formé par les deux diamètres principaux de l'ellipse, tandis qu'aucune des quatre normales n'est tangente à l'arc IS', situé dans l'angle droit opposé AOB'.

Si le point V coïncidait avec le centre O de l'ellipse, les quatre normales se confondraient avec les axes AA' et B'B ; et si le point V était situé sur l'un de ces axes, deux seulement des normales se confondraient avec cet axe, et les deux autres normales seraient placées symétriquement par rapport aux premières.

Si le point V appartient à l'un des arcs de la développée SIS'I', les deux normales tangentes à cet arc se réduiraient à une seule, et l'on n'obtiendrait dans ce cas que trois normales à l'ellipse.

Enfin, par l'un des quatre points de rebroussements, ou par tout autre point pris où l'on voudra en dehors de la courbe SIS'I', on ne pourra construire que deux normales.

160. Courbe osculatrice du second degré. Lorsque l'on connaît le rayon de courbure en un point A d'une courbe quelconque BAD (*fig. 13*), il est facile de trouver une ellipse, parabole ou hyperbole osculatrice.

En effet, connaissant le rayon AI du cercle osculateur, on sait que l'on doit avoir

$$AI = r = \frac{b^2}{a} = \text{demi-paramètre.}$$

Or l'équation $\frac{b^2}{a} = r$ étant indéterminée, il est évident que

l'on peut choisir à volonté l'une des valeurs a ou b ; d'où il résulte qu'il y a une infinité d'ellipses ou d'hyperboles osculatrices au point A de la courbe BAD.

Si l'on se donne la valeur de b , on aura $ar = b^2$; d'où $a = \frac{b^2}{r}$, ce qui revient à construire le quatrième terme de la proportion $r : b :: b : a$.

Si, au contraire, on prend à volonté la valeur de a , on aura $b^2 = ar$, d'où $b = \sqrt{ar}$, et, dans ce cas, b sera une moyenne proportionnelle entre le rayon de courbure r qui est connu et la valeur que l'on a choisie pour a .

161. Ellipse osculatrice. Supposons, par exemple, qu'au point A de la figure 13 on veut construire l'ellipse osculatrice dont le centre serait situé en O sur la normale du point A : on fera $AI' = AI = r$; on décrira la demi-circonférence $IB'O$, et la droite AB' , moyenne proportionnelle entre $AI' = r$ et $AO = a$, sera la valeur de b , que l'on portera sur OB.

Il ne restera donc plus qu'à décrire l'ellipse demandée.

162. Hyperbole osculatrice. Supposons actuellement qu'au point A de la courbe BAD (fig. 19) on veut construire une hyperbole osculatrice.

Le rayon de courbure AI étant supposé connu, on pourra choisir à volonté le centre O de l'hyperbole; puis on décrira sur OI, comme diamètre, une demi-circonférence OBI, et la droite AB, moyenne proportionnelle entre $IA = r$ et $AO = a$, sera l'axe imaginaire de l'hyperbole demandée, qui aura par conséquent pour asymptotes les deux droites OK et OH. Et puisque l'on connaît le sommet A de cette courbe, il sera facile de la construire.

163. Parabole osculatrice. Si dans la formule $\frac{b^2}{a} = r$, on suppose que l'une de ces deux lignes soit infinie, la se-

conde le sera également, et la courbe osculatrice sera une parabole, ce qui ne doit pas changer le rapport $\frac{b^2}{a} = r = \frac{p}{2}$. Sans quoi la parabole ne serait pas osculatrice du cercle de rayon AI, ni par conséquent de la courbe donnée (148).

Mais, dans ce cas, on n'a pas besoin de connaître les valeurs de b et de a , puisque dans toute parabole (*fig. 17*) la distance AF vaut le quart du paramètre, et par conséquent la moitié de AI.

La distance AF du sommet au foyer étant connue, il sera facile de tracer la directrice et de construire la parabole osculatrice, qui, par conséquent, sera déterminée lorsque l'on connaîtra le rayon de courbure AI au point A de la courbe donnée.

164. Ainsi toutes les ellipses, paraboles ou hyperboles, dont le paramètre sera $2AI = 2r$, seront osculatrices les unes des autres au point A de la courbe donnée.

On peut considérer toutes ces courbes comme les transformations successives du cercle osculateur, qui devient d'abord une ellipse dont le grand axe s'allonge à mesure que le centre s'éloigne du point A (*fig. 13*).

Lorsque le centre arrive à l'infini, la courbe devient une parabole a , puis le centre passant brusquement à l'infini négatif, la courbe devient une hyperbole c , dont les asymptotes s'écartent l'une de l'autre à mesure que le centre se rapproche du point A. Pendant ces transformations diverses, le paramètre $2AI$, égal au diamètre du cercle osculateur, passe toujours par le foyer qui se meut sur la droite AI en s'approchant du point A.

La courbe osculatrice devient une parabole au moment où le foyer F arrive au milieu de la droite AI.

Cette parabole, qui est la plus allongée de toutes les ellipses, dont le paramètre est égal à $2AI$, se transforme immédiatement en hyperbole dont le centre est à l'infini négatif

et dont les asymptotes font entre elles un angle égal à zéro.

Ces asymptotes, d'abord parallèles entre elles et infiniment éloignées l'une de l'autre, ne touchent la parabole qu'à l'infini ; mais aussitôt que le centre O et le foyer F (*fig. 19*) se rapprochent du point A , l'angle des asymptotes devient plus ouvert, et cet angle serait égal à 180° si la distance OA était réduite à zéro.

Dans ce cas, l'hyperbole osculatrice et les asymptotes se confondraient avec la droite AT , qui touche au point A la courbe BAD .

165. Si au lieu de la formule $\frac{b^2}{a} = r$ on prenait $\frac{a^2}{b} = r'$ (147),

et que l'on choisit à volonté la valeur de a ou celle de b , on aurait une suite d'ellipses dont l'axe $2b$ coïnciderait avec la normale du point A (*fig. 13*). Ces ellipses, osculatrices du cercle de rayon AI , et par conséquent osculatrices au point A de la courbe donnée, diminueraient de grandeur à mesure que l'on prendrait pour a ou b des valeurs plus petites, et deviendraient infiniment petites si les valeurs de a et de b étaient réduites à zéro, ce qui n'empêcherait pas l'osculation d'exister, puisque cette condition dépend du rapport des quantités a et b et non de leurs grandeurs.

Ainsi, en un point quelconque d'une courbe donnée on peut construire une infinité d'ellipses et d'hyperboles osculatrices ; mais on ne peut construire qu'une seule parabole, cette dernière courbe étant toujours déterminée lorsque l'on connaît son paramètre.

On doit encore remarquer que, pour résoudre le problème précédent, il faut connaître le rayon AI du cercle osculateur au point A de la courbe donnée ; mais il arrive très-souvent que ce rayon est connu.

166. **Courbure des surfaces.** Si par un point M d'une

surface courbe S (*fig. 5*), on conçoit un plan tangent, on sait que la droite MN perpendiculaire à ce plan tangent sera *une normale*.

Tous les plans, tels que PP_1 ou P_2 , qui contiendront la normale seront des *plans normaux*, et les diverses sections de la surface par ces plans seront des *sections normales*; ces courbes sont les *lignes de courbure* de la surface.

Or, à l'exception de quelques surfaces particulières, et pour quelques points singuliers de ces surfaces, les lignes de courbure passant par un point donné ne sont pas égales entre elles.

La courbure de chacune de ces lignes dépend de la direction du plan normal qui la contient, et si l'on considère les plans PP_1 et P_2 comme les différentes positions d'un plan mobile que l'on ferait tourner autour de la normale MN , les rayons de courbure des sections diverses que l'on obtiendra changeront de grandeur, sans toutefois sortir de certaines limites que l'on peut déterminer par le calcul lorsque l'on connaît les propriétés géométriques de la surface donnée.

167. Les rayons de courbure des sections de la surface S par les plans normaux n'étant pas égaux entre eux, on conçoit qu'il doit y avoir un de ces rayons *plus grand* et un *plus petit* que tous les autres.

Le premier est le rayon *maximum*, et correspond à la plus petite courbure; tandis que le rayon *minimum* appartient à la section qui a la plus grande courbure.

168. On démontre en algèbre, que, *dans toute espèce de surfaces, le plan normal qui contient la section de plus petite courbure est toujours perpendiculaire au plan de la section de plus grande courbure.*

169. Tous les rayons de courbure coïncident avec la normale ou avec son prolongement.

Or, si les rayons de courbure sont tous situés d'un même côté par rapport au plan tangent, comme cela aurait lieu pour l'exemple représenté figure 5, on dit que la surface est convexe ; mais il y a des surfaces pour lesquelles les rayons de courbure n'ont pas tous la même direction.

Ainsi, par exemple, si l'on coupe la surface projetée fig. 8 par un certain nombre de plans contenant la normale KN, on obtiendra des sections dont le centre de courbe sera sur la partie BN de la normale, tandis que pour d'autres directions du plan coupant, les centres de courbure seront situés sur BK.

Il en serait de même pour les lignes de courbure que l'on obtiendrait en coupant, par des plans normaux, la partie de surface annulaire engendrée par le demi-cercle CC' (fig. 23).

Dans ce cas, les rayons de courbure de la surface n'ont plus pour limites un rayon maximum et un rayon minimum ; mais, tous ces rayons forment deux séries comprises, la première entre un *minimum positif* et *l'infini positif*, et la seconde entre *l'infini négatif* et un *minimum négatif*.

170. Pour mieux faire comprendre ce que nous venons de dire, étudions d'abord ce qui a lieu dans les lignes courbes, et prenons pour exemple l'ellipse qui est représentée sur la figure 21.

Il est évident que tous les rayons de courbure tangents à la développée IS' seront compris entre le *rayon minimum* IA et le *rayon maximum* S'B, et lorsque après avoir dépassé le point B de l'arc AB la courbure devient plus sensible, la développée correspondante devient S'I' ; le point de rebroussement S' est le centre de courbure correspondant au point B et les rayons de courbure diminuent de nouveau jusqu'au point I' au delà duquel ils recommenceront à augmenter, et ainsi de suite.

171. Ainsi, toutes les fois que le rayon de courbure deviendra un *minimum* IA, I'A', ou un *maximum* S'B, SB', la développée aura un point de rebroussement.

Sur les figures 21 et 22 les centres de courbure sont toujours situés du même côté de la courbe, c'est-à-dire que si l'on parcourait cette ligne en suivant la direction indiquée par la flèche, la concavité de la courbe, et par conséquent les centres de courbure, seraient toujours situés à gauche du chemin parcouru.

On dit alors que la courbe dont il s'agit est *convexe*.

172. Lorsque la courbe n'est pas convexe, ou en d'autres termes lorsqu'elle a un point d'inflexion, comme on le voit par l'exemple représenté (*fig.* 25), les choses se passent d'une manière entièrement différente.

En effet, si nous parcourons la courbe en suivant la direction indiquée par la flèche, et si nous considérons comme positifs les rayons de courbure correspondants aux différents points de l'arc NCA, il est évident qu'à partir du *minimum positif* CI, les rayons de courbure augmentent toujours jusqu'à l'infini positif, que nous compterons dans la direction de AX; puis le rayon de courbure se renverse brusquement et passe sans intermédiaire de l'infini positif à l'infini négatif AX', pour diminuer ensuite jusqu'au *minimum négatif* CI'.

173. Ainsi dans une courbe convexe (*fig.* 22) le rayon de courbure peut passer par tous les états de grandeur, en augmentant même jusqu'à l'infini, auquel il peut atteindre autant de fois que la courbure cessera d'exister, sans cesser d'être positif, ou ce qui est la même chose, sans passer d'un côté à l'autre de la courbe, tandis que dans une courbe non convexe (*fig.* 25) le rayon de courbure passe sans transition

de l'infini positif à l'infini négatif, toutes les fois que le point correspondant de la courbe est un point d'inflexion A.

174. Ce que nous venons de dire pour les différents points d'une courbe doit s'entendre également pour un point qui appartiendrait à plusieurs courbes différentes.

Ainsi, lorsqu'on coupe une surface par une suite de plans P, P_1, P_2 contenant une normale commune, tous les rayons de courbure coïncident avec cette normale (*fig. 5*).

Mais il est évident que, si toutes les lignes de section ont leur concavité tournée du même côté de la normale, tous les rayons seront de même signe et la surface sera convexe. Et si toutes les sections n'ont pas leur concavité tournée du même côté de la normale, il y aura des rayons de courbure positifs, tandis que d'autres seront négatifs, et la surface ne sera pas convexe ; c'est ce qui arrive pour un grand nombre de surfaces.

Ainsi, par exemple, si l'on coupe la surface représentée sur la figure 8, par le plan méridien qui contient le point B, la ligne de section IBF aura sa concavité tournée en dehors de la surface principale, et le rayon de courbure correspondant sera BN ; tandis que si la même surface était coupée au même point B, par un plan P perpendiculaire au méridien AIF, on obtiendrait évidemment une section dont la concavité serait tournée du côté de l'axe, et l'on sait dans ce cas que le rayon du cercle osculateur serait égal à la partie BK de la normale.

Or, il est évident que si l'on fait tourner le plan P autour de la normale NK, la courbe de section dont la concavité est actuellement tournée du côté de l'axe perdra peu à peu de sa courbure dans le voisinage du point B ; puis, il viendra un moment où la courbure dans le voisinage de ce point se manifestera en sens contraire, c'est-à-dire que la concavité se tournera vers l'extérieur de la surface, et la courbure dimi-

nuant graduellement, finira par se confondre avec celle du cercle QH, qui est osculateur de la courbe méridienne au point B.

175. Pour mieux faire comprendre ces variations de courbure, j'ai projeté (*fig. 23*) les différentes courbes qui résulteraient de la section de la surface annulaire, par les diverses positions d'un plan que l'on ferait tourner autour de la normale ON, perpendiculaire au plan vertical de projection. Si nous supposons que le plan coupant prend les positions indiquées successivement de 1 à 9, la première sera projetée sur le plan horizontal, par la droite NN, tandis que la neuvième se composera du plus grand et du plus petit parallèle de la surface.

Les parties vues des différentes courbes de sections sont tracées en lignes pleines, et les parties cachées de ces mêmes courbes sont désignées par des points ronds.

Pour éviter la confusion, j'ai placé une teinte de points sur chacune des sections par les plans 3 et 6.

176. La première de ces deux sections est très-remarquable, parce que, pour cette ligne, le rayon de courbure au point U est infini, de sorte que pour ce point le cercle osculateur est remplacé par la tangente TT, avec laquelle la courbe se confond dans le voisinage du point U.

Nous verrons plus tard comment on peut déterminer la position du plan N'-3.

177. Pour les sections par les plans compris entre N'-1 et N'-3, la concavité de la courbe au point U est tournée vers le point N, tandis que pour les sections par les plans compris entre N'-3 et N'-9 la courbure au point U tourne sa concavité du côté de l'axe, ainsi qu'on peut le voir par la figure 24, qui représente la section par le plan N'-4.

178. On pourra remarquer encore que la section par le plan N'-5 se compose de deux circonférences, qui ont pour diamètre la somme $UU + UN$ des diamètres du cercle de gorge et du cercle C, méridien de la surface.

Cette section est projetée sur la figure par deux ellipses qui se coupent dans le plan AA du méridien principal.

179. **Surfaces osculatrices.** Nous avons dit, aux n^{os} 139 et 140, qu'il existait toujours une infinité de courbes osculatrices en un point quelconque d'une courbe donnée, et nous avons reconnu que le cercle avait sur toutes ces courbes l'avantage d'exprimer la courbure dans le voisinage du point d'osculatation.

Or, il semblerait assez naturel de rechercher si la sphère ne pourrait pas remplir, à l'égard des surfaces courbes, la même fonction que le cercle à l'égard des lignes : mais on reconnaîtra de suite que la sphère ne peut pas satisfaire à la condition que nous venons d'énoncer, parce que sa courbure est uniforme autour de chacun de ses points, ce qui n'a pas lieu pour un point pris à volonté sur une surface courbe quelconque.

Il est vrai que si au point B de la figure 8, on conçoit un plan P, tangent à la surface, toute sphère D qui aura son centre sur la normale BN ou sur son prolongement BK et qui toucherait le plan tangent au point B, sera également tangente à la surface ABE. Mais, je le répète, il n'y aura pas là osculation, parce que la courbure de la surface autour du point B n'est pas la même dans toutes les directions.

180. Dans les surfaces de révolutions qui se terminent par une espèce de calotte, comme celle qui a lieu au point A de la même figure, il existe une sphère osculatrice G qui a son centre sur l'axe de la surface, et dont le rayon est égal

à celui du cercle osculateur de l'arc zr ; mais cela n'est qu'une exception qui n'a lieu qu'au point A, et qui provient de ce qu'en ce point la section méridienne fait un angle droit avec l'axe de la surface; et l'on conçoit que pour tout autre point, la sphère ne conviendra plus.

Cherchons donc, après la sphère, quelles sont les surfaces qui pourraient satisfaire aux conditions demandées.

181. On donne le nom de surfaces du second degré à celles dont la section par un plan est toujours une courbe du second degré.

On sait qu'il n'existe que *cinq* espèces de surfaces du second degré, savoir :

- 1° ——— L'ellipsoïde ;
- 2° ——— L'hyperboloïde à une nappe ;
- 3° ——— L'hyperboloïde à deux nappes ;
- 4° ——— Le parabolôïde elliptique ;
- 5° ——— Le parabolôïde hyperbolique.

182. Les deux premières de ces cinq surfaces conviennent parfaitement pour le but que nous nous proposons ici.

En effet, concevons (*fig. 5*) un ellipsoïde dont les trois axes ou diamètres principaux seraient $2OV = 2a$; $2OU = 2b$; $2OM = 2c$.

Ce dernier axe aboutissant au point M, par lequel on peut toujours concevoir deux droites tangentes, l'une à l'ellipse MV et l'autre à l'ellipse MU, situés dans les plans P et P₃ perpendiculaires l'un à l'autre.

183. Il résulte de ce que nous avons dit au numéro 146, que le rayon de courbure au point M de l'ellipse serait $\frac{a^2}{c}$, tandis que le rayon de courbure au même point de l'ellipse MU serait $\frac{b^2}{c}$; or, en exprimant par r le rayon de courbure de

la section que l'on obtient en coupant la surface courbe S par le plan P et par r' le rayon de courbure de la section par le plan P_3 , il faudra, si l'on veut que l'ellipsoïde et la surface S aient les mêmes *rayons de courbure principaux*, que l'on ait les deux équations

$$\frac{a^2}{c} = r \text{ et } \frac{b^2}{c} = r'.$$

Mais on sait que *lorsqu'un ellipsoïde et une surface courbe quelconque ont pour un point commun M les mêmes rayons de courbure principaux, toutes les lignes de courbure de la première surface sont osculatrices des lignes correspondantes de l'autre*. Il s'ensuit, qu'en un point quelconque M d'une surface courbe, on peut toujours obtenir un ellipsoïde osculateur.

De plus, les deux équations énoncées plus haut contenant trois inconnues a, b, c , la question reste indéterminée; de sorte qu'il existe une infinité d'ellipsoïdes qui satisfont aux conditions du problème.

Or, puisque l'on peut disposer à volonté de l'une des trois inconnues a, b, c , on pourra faire $c = a$, et, dans ce cas, au lieu d'un ellipsoïde à trois axes, on aura (*fig. 7*) un ellipsoïde de révolution dont l'axe a , rayon du plus grand parallèle, sera le rayon de courbure de la section de la surface par le plan P (*fig. 5*), tandis que l'axe $b = \sqrt{ar'}$ sera une moyenne proportionnelle entre le premier rayon $r = a$ et le rayon r' de la section par le plan P_3 perpendiculaire au premier.

Il ne faut pas oublier que les plans P et P_3 sont perpendiculaires entre eux et doivent contenir les sections principales, c'est-à-dire les sections de plus grande et de plus petite courbure au point M (168).

184. Si l'on veut appliquer les principes précédents à une surface de révolution, il faut admettre ce qui est démontré en

algèbre, que dans toute surface de cette espèce les rayons de courbure principaux en un point quelconque sont :

1° *Le rayon qui exprime la courbure du méridien à l'endroit où est situé le point donné ;*

2° *La partie de normale comprise entre ce même point et l'axe de la surface.*

185. Ainsi, pour l'ellipsoïde de révolution osculateur au point mm' de la figure 8, la section par le méridien $Am'B$ sera le cercle osculateur indiqué sur la projection verticale par une teinte de points, et l'axe b de l'ellipsoïde s'obtiendra en construisant ou , moyenne proportionnelle entre le premier rayon de courbure $oe = c'e' = om' = r = a$ et le second rayon de courbure $ox''' = m''x'' = m''x' = m'x = r'$ qui est égal, comme nous l'avons dit plus haut, à la partie xm' de la normale du point m' (184).

186. Si la surface donnée n'était point convexe ou, en d'autres termes, si les rayons de courbure correspondant au point donné étaient de signes différents, on ne pourrait plus obtenir un ellipsoïde pour surface osculatrice. Mais on pourrait employer avec avantage un hyperboloïde réglé à trois axes ou plus simplement encore en faisant $c = a$, comme précédemment, un hyperboloïde de révolution. Dans

ce cas, le premier rayon de courbure $r = \frac{a^2}{c}$ serait $r = a$ et

le deuxième rayon $r' = -\frac{b^2}{c}$ deviendrait successivement

$-r' = \frac{b^2}{a}$ puis $b^2 = -ar'$ et $b = \sqrt{-ar'}$, ce qui donne $\sqrt{ar'}$

pour la valeur absolue du demi-axe imaginaire on non transverse de l'hyperboloïde demandé.

Ainsi, pour l'hyperboloïde de révolution osculateur, au point nn' de la figure 8, la section par le plan méridien $An''n'$

sera le cercle de gorge ou collier de rayon $c'n'$ indiqué sur la figure par une teinte de points, et l'axe imaginaire ou non transverse cu s'obtiendra en construisant $n''v$, moyenne proportionnelle entre le premier rayon de courbure $cn'' = c'n'' = c'n' = r = a$ et le second rayon de courbure $n''s' = n''s' = n's$ égal à la partie $n's$ de la normale du point n' (184).

187. **Théorème.** On sait que *la courbe suivant laquelle un cylindre enveloppe une surface du second degré est toujours plane.*

D'après cela, supposons (*fig. 11*) que l'ellipsoïde E soit enveloppé par une surface cylindrique, dont deux génératrices AB, CD , seraient parallèles au diamètre MN de la section par le plan $ABCD$ qui contient les deux points de tangence K et I , le diamètre KI sera le conjugué MN .

Or, si l'on fait mouvoir le plan $ABCD$ parallèlement à lui-même, on obtiendra une suite de sections elliptiques semblables et parallèles à l'ellipse $MKNI$; le diamètre MN parallèle au cylindre enveloppant sera toujours le conjugué du diamètre KI qui s'appuie sur l'ellipse $O'KSI$, et lorsque le plan mobile $ABCD$ sera devenu tangent au point O' , la droite KI sera remplacée par $K'I'$ tangente à la courbe $O'KSI$, le diamètre MN deviendra $M'N'$, et sera l'une des génératrices du cylindre enveloppant.

188. Ce que nous venons de dire pour un ellipsoïde est également vrai pour une surface quelconque du deuxième degré. Ainsi, par exemple, si nous concevons l'hyperboloïde à une nappe H de la figure 29 enveloppé par une surface cylindrique dont $M'N'$ serait une génératrice, et si par le point O' de la courbe de contact ZR , on conçoit une tangente $K'I'$, ces deux lignes seront toujours parallèles à deux diamètres conjugués MN et KI de la section hyperbolique que l'on obtien-

drait en coupant la surface par un plan KNIM parallèle au plan tangent qui contient les deux droites M'N' et K'I'.

189. En général, si par un point de la courbe plane suivant laquelle une surface quelconque du deuxième degré est touchée par une surface cylindrique, on conçoit la génératrice du cylindre enveloppant, et la tangente à la courbe de contact, ces deux lignes détermineront un plan tangent, et seront toujours parallèles à deux diamètres conjugués de la section que l'on obtiendrait, en coupant la surface par un plan parallèle au plan tangent.

190. **Tangentes aux lignes de séparation sur la surface du tore.** Le théorème qui précède va nous fournir le moyen de construire une tangente en un point quelconque de la ligne suivant laquelle une surface de révolution est touchée par une surface cylindrique dont la direction est connue.

Supposons, par exemple, que nous voulons obtenir au point mm' des figures 14 et 15 une tangente à la courbe suivant laquelle le tore est touché extérieurement par le cylindre des rayons lumineux, il est évident que le point de tangence étant connu, il ne reste plus qu'à déterminer la direction de la tangente.

Pour y parvenir, on pourra opérer de la manière suivante :

1° — On construira l'ellipsoïde de révolution osculateur du tore au point donné mm' (185).

2° — On fera dans cet ellipsoïde une section parallèle au plan qui touche les deux surfaces en leur plan d'osculation mm' .

3° — On construira celui des diamètres de la section obtenue, qui est parallèle au rayon lumineux, et le conjugué de ce diamètre sera parallèle à la tangente demandée (189).

4° — Il sera facile alors de construire la tangente, puisque l'on connaitra sa direction, et le point de tangence.

Il ne reste plus qu'à expliquer les opérations graphiques nécessaires pour obtenir le résultat.

191. **Épure.** La première chose à faire pour exécuter une épure composée est toujours de rapporter les données aux plans de projections les plus favorables.

C'est pourquoi, dans le cas actuel, nous ramènerons d'abord le point donné de mm' en $m'' m'''$ dans le plan du méridien principal.

Les deux projections du point mm' seront alors m'' et m''' , et la trace verticale du plan tangent P sera parallèle à la droite $S''L'$, qui est la projection du rayon lumineux SL, $S'L'$ sur le méridien Lm rabattu en Lm'' (115).

Or, le tore étant une surface de révolution, nous savons (184) qu'au point $m''m'''$ et par conséquent au point mm' les deux rayons de courbure principaux sont : 1° le rayon $o'm'''$ de la section méridienne; 2° la partie $m'''x$ de la normale, comprise entre l'axe de la surface et le point donné mm' rabattu en m''' , de sorte que l'ellipsoïde osculateur aurait pour projection horizontale une ellipse dont le demi-axe a serait égal au rayon de courbure $r = o'm'''$ et le demi-axe b serait une moyenne proportionnelle entre les deux rayons de courbure $o'm'''$ et $m'''x$.

Pour construire cette moyenne proportionnelle, on a fait tourner la droite $m'''x$ autour de l'horizontale projetante du point oo' jusqu'à ce qu'elle soit venue se placer dans la position verticale $m^{iv}x'$: puis, l'arc de cercle $x'x''$ étant décrit du point m^{iv} comme centre avec le rayon $m^{iv}x'$ égal à $m'''x$ on a obtenu sur la figure 15, $ox''' = m^{iv}x'' = m^{iv}$ égal au rayon de courbure $m'''x$. Puis la droite oe étant égale au rayon $o'm'''$ on a décrit la demi-circonférence $x''Ue$, de sorte que la droite oU moyenne proportionnelle entre les deux segments oe , ox''' du diamètre ex''' , est alors le demi-axe b de l'ellipsoïde osculateur au point $m''m'''$, et par conséquent au point mm' (185).

Pour éviter la confusion, on n'a pas construit la projection

horizontale de cet ellipsoïde, parce que cette projection n'est pas nécessaire.

Il suffit évidemment de construire la projection horizontale de l'ellipse que l'on obtient en coupant l'ellipsoïde osculateur par le plan P , parallèle au plan tangent P .

En effet, cette courbe de section étant obtenue, il ne reste plus qu'à construire celui de ses diamètres qui est parallèle au rayon lumineux, et le conjugué de ce diamètre sera parallèle à la tangente demandée (189).

Mais on doit se rappeler que le point d'osculution $m''m'''$ n'est pas à la place qu'il doit occuper dans l'espace, lorsque le problème sera complètement résolu.

Or, quand nous avons fait tourner le point donné mm' pour l'amener en $m''m'''$ dans le plan du méridien principal, le rayon lumineux SL , $S'L'$ est resté en place.

Il faut donc faire tourner l'ellipsoïde osculateur autour de l'axe de la surface donnée jusqu'à ce que le point $m''m'''$ soit venu reprendre sa place primitive mm' , ou bien faire tourner le rayon lumineux SL , $S'L'$ jusqu'à ce qu'il soit placé par rapport au méridien qui contient le point $m''m'''$, comme il était placé primitivement par rapport au méridien qui contient le point donné mm' .

Mais le chemin que le point mm' a parcouru pour venir se placer en $m''m'''$ dans le méridien principal est exprimé par l'arc de cercle mm'' , de sorte que si l'on porte cet arc de A en A'' sur la même circonférence, on aura évidemment la droite $A''L$ pour nouvelle projection horizontale du rayon lumineux.

Le diamètre BD étant alors mené par le centre de l'ellipse oU parallèlement à la nouvelle position $A''L$ du rayon de lumière, on construira la corde EF parallèle au diamètre BD et la corde FG supplémentaire EF et par conséquent parallèle au conjugué du diamètre BD sera parallèle à la direction que doit avoir la tangente demandée lorsque le point donné mm' est situé en $m''m'''$ (189).

Pour obtenir la position véritable de la tangente demandée on tracera par le point L une droite LK parallèle à la direction GF obtenue précédemment; puis en faisant l'arc KK'' égal à l'arc $m''m$, on aura fait revenir le point K d'une quantité égale à celle que doit parcourir le point osculateur $m''m'''$ pour reprendre la place qu'il doit occuper dans l'espace, de sorte que la droite LK'' sera parallèle à la projection horizontale de la tangente demandée que l'on obtiendra en traçant par le point m la droite TT' parallèle à $K''L$.

Pour construire la projection verticale $T'm'T'$ on remarquera que la droite LK parallèle à la tangente qui passerait par le point $m''m'''$ et par conséquent parallèle au plan tangent P (184) aura pour projection verticale $L'A'''$ parallèle à la trace verticale du plan tangent P qui est actuellement perpendiculaire au plan vertical de projection.

D'après cela on projettera le point K en K' , puis en faisant revenir ce point en $K''K'''$ on obtiendra $L'K'''$ pour la nouvelle projection verticale de la droite LK , $L'K'$.

Or, cette ligne ayant tourné d'une quantité égale au chemin parcouru par le point de la tangence mm' , elle sera nécessairement parallèle à la position que la tangente doit occuper dans l'espace lorsque le point $m''m'''$ sera revenu à sa place mm' et l'on obtiendra la projection verticale de la tangente qui passe par ce point, en traçant $T'T'$ parallèle à $L'K'''$.

192. Pour obtenir la tangente en un point quelconque nn' de la ligne de séparation intérieure, on remarquera qu'en ce point les deux rayons de courbure principaux $o'n'''$ et $n'''x$ (184) sont de signes contraires.

C'est pourquoi il faudra employer pour surface osculatrice un hyperboloïde de révolution à une nappe (186); mais, à cette différence près, les opérations seront absolument les mêmes. Ainsi :

- 1° ~~On construira~~ On construira l'hyperboloïde de révolution osculateur de la surface au point donné nn' (186).
- 2° ~~On fera~~ On fera dans cet hyperboloïde une section parallèle au plan qui touche les deux surfaces en leur point d'osculatation.
- 3° ~~On construira~~ On construira celui des diamètres de la section obtenue, qui sera parallèle au rayon lumineux, et le conjugué de ce diamètre sera parallèle à la tangente demandée (189).

193. **Épure.** Le point d'osculatation nn' étant amené comme précédemment en $n''n'''$ dans le plan du méridien principal, on concevra l'hyperboloïde de révolution dont le cercle de gorge serait égal au cercle générateur C' de la surface annulaire donnée.

L'axe imaginaire ou non transverse de cet hyperbole doit être la moyenne proportionnelle entre les deux parties $o'n''$ et $n'''x$ de la normale (184).

Pour construire cette moyenne proportionnelle, on a successivement amené la partie $n'''x$ de la normale dans les positions $n^{iv}x' = n^{iv}x^{iv} = ox^v$ de sorte que la demi-circonférence x^vVe décrite sur le diamètre x^ve a déterminé la droite oV moyenne proportionnelle entre ox^v et oe , ou ce qui est la même chose, entre $n'''x$ et $n'''o'$ qui sont les deux rayons de courbure principaux au point $n''n'''$ et par conséquent au point nn' de la surface donnée. La droite oV sera donc l'axe non transverse ou imaginaire de l'hyperboloïde osculateur au point $n''n'''$ et l'on pourrait facilement construire les asymptotes de la projection horizontale de cette surface en ramenant la droite oV sur les deux droites ee' et gg' .

Mais cette partie de l'opération sera encore inutile, parce qu'il suffira, comme précédemment, de construire la section de l'hyperboloïde osculateur par le plan P_1 parallèle au plan P_2 qui touche la surface en $n''n'''$ (189).

Or, l'axe imaginaire de cette section inclinée étant le même que l'axe correspondant de la section horizontale, on ramènera la quantité oV trouvée précédemment sur les droites Gv' , Ev'' et cette construction déterminera les asymptotes ov' ov'' de la section demandée.

On construira le diamètre BD parallèle au rayon lumineux SL devenu $A'L$ et la corde HI parallèle au conjugué de BD , déterminera la direction de la tangente demandée (189).

194. On remarquera que pour construire la corde HI on n'a pas besoin de l'hyperbole que je n'ai tracée ici que pour mieux faire comprendre l'explication du principe.

En effet, la corde HI de l'hyperbole sera parallèle au conjugué de BD , si le point D est le milieu de HI .

Or, on sait que dans toute hyperbole, les parties Hh et il , comprises entre la courbe et ses asymptotes, doivent être égales; d'où il résulte qu'il suffira de faire en sorte que le point D soit le milieu hi , ce qui revient à un problème connu de géométrie élémentaire. Ainsi, on tracera DQ parallèle à l'asymptote ov'' , on fera Qi égal à oQ , et la droite hi parallèle au conjugué de BD sera déterminée.

La droite LR parallèle à hi sera par conséquent parallèle à la position qu'aurait prise la tangente demandée si cette droite avait été entraînée par le point nn' lorsqu'on a fait tourner ce point autour de l'axe pour l'amener en $n''n'''$ dans le méridien principal Ln'' .

Pour avoir la véritable position de la tangente au point nn' , on devra opérer comme nous l'avons fait pour la tangente au point mm' . Ainsi : la droite LR étant parallèle à la droite hi , on fera l'arc RR'' égal à rr'' , ce qui déterminera la quantité angulaire $RLR'' = rLr'' = n''Ln$, dont le méridien Ln'' doit tourner pour revenir à sa position primitive Ln ; la droite LR parallèle à la tangente du point n'' deviendra LR'' , ce qui

permettra de tracer la droite YY tangente au point n de la courbe de la séparation intérieure.

Pour obtenir la projection verticale de cette ligne, on projettera le point R'' en R''' sur l'arc de cercle horizontal décrit par le point R, R' , et l'on obtiendra la projection verticale $R'''L'$ de la droite menée par le point LL' , parallèlement à la tangente demandée.

De sorte que la droite $Y'Y'$ parallèle à $R'''L'$ sera la projection verticale de la tangente, au point nn' de la courbe de séparation intérieure.

195. Rayons de lumière tangents à la ligne de séparation intérieure. Nous avons dit que ces rayons, au nombre de *quatre*, déterminent les quatre points de rebroussement de l'ombre portée sur le plan horizontal de projection (*fig. 78, pl. 13*).

Ce sont encore les mêmes rayons qui déterminent les points de rebroussement des courbes N et M (*fig. 14 et 15 de la planche actuelle*).

Pour faire comprendre en quoi le problème qui va nous occuper diffère de celui que nous venons de résoudre, nous rappellerons qu'alors on connaissait le point de tangence, et qu'il s'agissait de trouver la direction de la tangente ; tandis que maintenant on connaît la direction de la tangente, qui doit être parallèle au rayon lumineux (116), de sorte qu'il ne reste plus qu'à déterminer le point de tangence.

Pour y parvenir, on remarquera que la condition à laquelle il faut satisfaire, consistant surtout dans la coïncidence qui doit exister entre la tangente et le rayon lumineux, on peut chercher *quelle est la tangente qui coïncide avec le rayon lumineux*, ou bien :

Quel est le rayon lumineux qui coïncide avec la tangente.

C'est dans ces derniers termes que nous poserons la question.

196. Si en un point quelconque d'une surface courbe, on conçoit une seconde surface osculatrice de la première, il est évident que ces deux surfaces, ayant la même courbure dans le voisinage du point d'osculacion, les deux lignes de séparation seront, en ce point, osculatrices l'une de l'autre, et la question, étant résolue pour l'une de ces deux surfaces, sera également résolue pour l'autre.

Or, si la surface osculatrice est un ellipsoïde (*fig. 11*) ou un hyperboloïde (*fig. 29*), nous savons que le rayon lumineux $M'N'$ et la tangente $K'I'$ en un point quelconque de la ligne de séparation sont toujours parallèles aux deux diamètres conjugués MN et KI de la section faite dans la surface osculatrice par un plan parallèle à celui qui touche les deux surfaces en leur point d'osculacion. Il s'ensuit que l'angle formé par ces deux diamètres MN et KI sera égal à l'angle que le rayon lumineux $M'N'$ fait avec la tangente $K'I'$ à la ligne de séparation.

Mais, pour que ces deux lignes se confondent, il faut nécessairement que l'angle qu'elles font entre elles soit réduit à zéro.

197. Or, on remarquera que cela ne peut jamais avoir lieu pour un point de la ligne de séparation extérieur, parce que la surface osculatrice en un quelconque de ces points, devant être un ellipsoïde, les diamètres conjugués MN , KI de la section de cette surface par un plan parallèle au plan tangent ne peuvent jamais faire entre eux un angle nul (*fig. 11* et *26*), tandis que pour les points de la ligne de séparation intérieure, la surface osculatrice étant un hyperboloïde, et la section parallèle au plan tangent étant une hyperbole (*fig. 27* et *29*), on sait que les deux diamètres conjugués MN , KI se confondront entre eux lorsqu'ils coïncideront avec l'une des deux asymptotes.

En effet, l'angle des deux diamètres MN et KI (*fig. 27*) est toujours égal à l'angle VNS que le diamètre MN fait avec la

tangente au point N; or, on sait que l'angle VNS diminue lorsque le point N s'éloigne du sommet de la courbe; il est donc évident qu'au moment où le point N sera éloigné jusqu'à l'infini, le diamètre MN et la tangente VU devront coïncider avec l'asymptote OH, de sorte que l'angle VNS étant réduit à zéro, le second diamètre KI parallèle à la tangente VU se confondra avec MN et, par conséquent, avec l'asymptote OH de la courbe.

Ainsi, pour que le rayon lumineux soit tangent à la ligne de séparation ou, ce qui revient au même, pour que le rayon M'N' (*fig. 29*) coïncide avec la tangente K'I', il faut que les angles K'O'N' et KON soient nuls; et par conséquent, il faut que les deux diamètres conjugués MN et KI coïncident avec l'une des asymptotes de la section hyperbolique, que l'on obtient en coupant l'hyperboloïde osculateur par un plan parallèle à celui qui touche la surface donnée au point O'.

198. Il est évident que cette condition ne suffit pas pour résoudre le problème, car le point de tangence O' n'étant pas connu on ne peut pas construire immédiatement l'hyperboloïde osculateur.

Dans ce cas, on pourra procéder en sens inverse et par voie d'élimination; ainsi, on construira les hyperboloïdes osculateurs pour un certain nombre de points de la courbe de séparation ZR (*fig. 29*); puis on choisira parmi ces points celui pour lequel le rayon lumineux M'N' et la tangente K'I' se confondront, ou, ce qui est la même chose, seront parallèles à l'une des asymptotes de la section hyperbolique parallèle au plan tangent mené par le point osculateur.

La question proposée pourra donc se décomposer de la manière suivante (*fig. 14 et 15*):

- 1° — On supposera que tous les points de la ligne de séparation intérieure, tournant autour de l'axe, sont venus successivement se placer sur la circonférence du

cercle méridien C' qui est la courbe génératrice de la surface de révolution donnée.

- 2° ~~On~~ On concevra un hyperboloïde osculateur pour chacun de ces points.
- 3° ~~On~~ On coupera chacun de ces hyperboloïdes osculateurs par un plan parallèle au plan tangent mené par le point d'osculation correspondant.
- 4° ~~Les~~ Les asymptotes de ces diverses hyperboles détermineront, pour *chaque point d'osculation*, quelle doit être la direction de la lumière pour *qu'en ce point* le rayon lumineux coïncide avec la tangente à la courbe de séparation.
- 5° ~~Il~~ Il ne restera plus qu'à choisir parmi ces divers rayons lumineux, celui qui sera parallèle à la direction de la lumière donnée.

199. **Épure.** *Première opération.* Il n'est pas nécessaire et il serait évidemment impossible de construire les hyperboloïdes osculateurs pour chacun des points de la courbe de séparation. Il suffira de faire l'opération pour trois ou quatre de ces points que nous supposons ramenés sur la circonférence du cercle méridien C' ; le point 2 étant le plus élevé de la ligne de séparation, le point demandé ne doit pas être cherché au-dessus.

Les deux parties $c'-2''$ et $2''-q'$ de la normale $c'q'$ seront les rayons principaux de courbure de la surface donnée, et de l'hyperboloïde osculateur au point 2 ramené en $2''$.

La normale $c'q'$ étant rabattue en $c'q''$ et projetée sur le plan horizontal en cq''' , les deux droites $c-2'''$ et $2'''-q'''$ seront égales aux rayons de courbure principaux $c'-2''$ et $2''-q'$ de la surface et de son hyperboloïde osculateur au point $2''$.

La demi-circonférence $c-14-q'''$ étant décrite sur cq''' comme diamètre, la droite $2'''-14$, moyenne proportionnelle entre les deux lignes $c-2'''$ et $2'''-q'''$, sera l'axe imaginaire de l'hyper-

boloïde osculateur du point $2''$, on ne construira pas la projection horizontale de cet hyperboloïde.

La droite $2'''-14$, ramenée en $z-14'$ sur la perpendiculaire abaissée du point z' de la projection verticale, sera l'axe imaginaire de la section hyperbolique que l'on obtiendrait en coupant l'hyperboloïde osculateur du point $2''$ par le plan P_3 parallèle au plan tangent du point $2''$.

La droite $c-14'$, asymptote de cette hyperbole, sera par conséquent la direction que devrait prendre le rayon lumineux pour qu'au point $2''$ de la surface il soit tangent à la ligne de séparation intérieure correspondante.

En opérant de la même manière, on obtiendra l'asymptote $c-15'$ pour la direction du point lumineux qui au point 12 de la surface serait tangent à la ligne de séparation correspondante.

L'asymptote $c-16'$ sera également la direction du rayon lumineux qui au point 13 serait tangent à la ligne de séparation correspondante, ainsi de suite.

Les asymptotes $c-14'$, $c-15'$, $c-16'$ et toutes celles que l'on pourrait obtenir par la même méthode, formeront une surface conique qui aura pour sommet le point cc' .

Chacune des génératrices de ce cône exprime la direction d'un rayon lumineux qui, pour un point de la circonférence C' , serait tangent à la ligne de séparation correspondante.

Il ne reste donc plus qu'à choisir parmi ces rayons celui qui serait parallèle à la lumière donnée.

Or, cette dernière condition, dépendant des deux projections du rayon lumineux, pourra elle-même être décomposée de la manière suivante :

1° ~~-----~~ Nous chercherons parmi les rayons obtenus précédemment, celui dont l'inclinaison, par rapport au plan horizontal, sera égale à celle du rayon donné $SL S'L'$.

2° ~~-----~~ Puis, nous ferons tourner ce rayon jusqu'à ce qu'il soit parallèle au méridien SL .

Pour résoudre la première de ces deux questions, nous

construirons le rayon $cb, c'b'$ parallèle au rayon donné $SL, S'L'$, puis faisant tourner la droite $cb, c'b'$ autour de la verticale du point cc' , nous obtiendrons un cône circulaire dont la génératrice $cb, c'b'$ sera inclinée sur le plan horizontal comme le rayon de lumière donné $SL, S'L'$.

Or, ce dernier cône et celui qui contient les asymptotes $c-14', c-15', c-16', etc.$, ayant le même sommet cc' se couperont suivant une droite $c-17, c'-17'$ qui sera inclinée sur le plan horizontal comme le rayon de lumière donné, et qui de plus sera parallèle au rayon lumineux qui toucherait la ligne de séparation correspondante en un point rabattu sur la circonférence du cercle méridien C' .

200. Pour déterminer la droite $c-17, c'-17'$ on pourrait chercher le point suivant lequel les traces des deux cônes se rencontreraient, mais on peut aussi opérer de la manière suivante :

On coupera les deux cônes par le cylindre vertical qui a pour trace l'arc de cercle bb'' .

Les points suivant lesquels la surface de ce cylindre auxiliaire sera percée par les asymptotes $c-14', c-15', et c-16'$, donneront la courbe $14'''-15'''-16'''$ dont l'intersection $17'''$ avec le cercle horizontal $b'-b''$ déterminera la droite $c-17, c'-17'$ suivant laquelle les deux cônes se coupent.

La tangente $18-18, 18'-18'$ parallèle à la droite $c-17, c'-17'$ sera le rayon lumineux qui jouira de la double condition d'être incliné sur le plan horizontal comme le rayon de lumière donné $SL, S'L'$ et d'être tangent suivant le point $3', 3'$ à la ligne de séparation correspondante. Le point $3'$ est déterminé (*fig. 14*) par le rayon $c'-3'$ perpendiculaire sur $c'-17'$.

Il ne reste donc plus pour satisfaire complètement aux conditions du problème, qu'à faire tourner le rayon $18-18, 18'-18'$ que nous venons d'obtenir, jusqu'à ce qu'il soit parallèle au méridien qui contient le rayon donné $SL, S'L'$.

Pour résoudre cette dernière partie de la question, on tra-

cera la droite Lo' perpendiculaire sur $18-18$ et l'on décrira l'arc de cercle $o'o$, puis la tangente $18''-18''$ parallèle à SL sera la projection horizontale du rayon demandé.

Le point de tangence o' viendra se placer en o à l'extrémité du rayon Lo perpendiculaire à la tangente $18''-18''$, et faisant $o-3$ égal à $o'-3'$ on obtiendra le point 3 pour la projection horizontale du point suivant lequel le rayon de lumière donné devient tangent à la ligne de séparation intérieure.

La projection verticale du point 3 sera déterminée par l'intersection de la perpendiculaire $3-3$ avec la droite $3'-3$ qui est la projection verticale de l'arc de cercle décrit par le point $3'$ lorsqu'on le ramène à sa place. Dans ce mouvement, le rayon $18'-18'$ devient parallèle à $S'L'$.

En opérant de la même manière, on obtiendrait les trois autres points de tangence, mais la symétrie qui a lieu dans la disposition de ces points permettra évidemment de les construire tous les quatre lorsqu'un seul d'entre eux sera déterminé.


201. Le résultat précédent peut être facilement vérifié par le principe du n° 114 ; en effet, si par le point S de la fig. 15, on abaisse une perpendiculaire sur le méridien $L-3$, on obtiendra le point s'' qui, rabattu en s''' et projeté (*fig.* 14) sur la droite horizontale $S'S''$, donnera $s^{iv}L'$ pour la projection du rayon lumineux SL , $S'L'$ sur le plan méridien qui contient le point 3 et le point 7 obtenus précédemment ; et si l'on a bien opéré, la droite $s^{iv}L'$ sera parallèle aux plans tangents $18'-18'$ et $19'-19'$.


La symétrie dispensera de vérifier les points 1 et 5, ce qui au surplus pourrait se faire de la même manière.

202. Nous avons dit au n° 176, que parmi les sections que l'on obtient (*fig.* 23) en coupant la surface du tore par les plans $N'-1$, $N'-2$, $N'-3$, etc., qui contiennent la normale du

point NN' , la section par le plan $N'-3$ jouissait de cette propriété singulière que son rayon de courbure au point U était infini.

Or, on peut déterminer exactement l'inclinaison du plan $N'-3$ qui satisfait à cette condition. Pour y parvenir, on se rappellera d'abord qu'au point U de la surface annulaire les deux rayons de courbure principaux sont :

1°  Le rayon DU du cercle méridien CC' ;

2°  La partie OU de la normale comprise entre le point U et l'axe de la surface (184).

Par conséquent, si l'on décrit une demi-circonférence sur OD comme diamètre, la droite Uv moyenne proportionnelle entre les deux rayons de courbure principaux UO et UD sera l'axe imaginaire ou non transverse de l'hyperboloïde de révolution osculateur au point U de la surface donnée : les droites DH seront les asymptotes de la section méridienne hh de cette surface, et les asymptotes $N'H'$ de la projection verticale coïncideront avec les traces verticales des deux plans par lesquels il faut couper la surface annulaire donnée si l'on veut qu'au point U le rayon de courbure soit infini.

En effet, si un hyperboloïde de révolution (*fig.* 28 et 30) est coupé par les deux plans projetants des asymptotes de la section méridienne, les sections seront deux droites ac et vu , génératrice de la surface donnée.

Par conséquent, les plans $N'H'$ perpendiculaires au plan vertical de projection (*fig.* 23) couperont l'hyperboloïde osculateur au point U de la surface donnée, suivant les deux génératrices droites ac , vu de cette surface et la courbure de la surface annulaire donnée étant la même au point U que celle de son hyperboloïde osculateur, il s'ensuit que les sections de la surface par les plans $N'-3$ se confondront avec leur tangente TT et tt qui ne sont autre chose que les deux génératrices ac et vu , suivant lesquelles les plans $N'H'$ coupent l'hyperboloïde osculateur au point U de la surface donnée.

Cavet.

203. Cette moulure (*pl. 16*), engendrée par l'arc *ab*, n'est évidemment que le quart de la surface annulaire qui proviendrait de la révolution de la circonférence entière.

La ligne de contact 1-4-6 est la moitié de la ligne de séparation obtenue dans tous les exemples qui précèdent sur la partie de la surface annulaire qui est tournée du côté de l'axe. Nous n'aurons donc rien à dire de nouveau sur la construction de cette ligne, si ce n'est qu'après avoir déterminé cette courbure tout entière, afin de mieux comprendre les variations de sa courbure, il faudra supprimer la partie 3-4-5, parce que les rayons lumineux, arrêtés par la masse du solide, ne peuvent atteindre jusqu'à cette courbe.

Ainsi, les deux seules lignes qui, sur la surface du corps, séparent les parties éclairées de celles qui sont obscures, sont les deux petites courbes 1-2-3, 5-6.

Les points 5 et 3 sont déterminés par les rayons lumineux, tangents à la courbe 1-4-6 (195).

204. Si la direction de la lumière était horizontale, la courbe de contact serait plane, et se confondrait avec la section de la surface par le méridien *l'-c* (126).

Ombre portée.

205. Les rayons lumineux qui s'appuient sur les courbes 1-3, 6-5, forment deux parties de surfaces cylindriques, qui rencontrent la surface donnée suivant les deux courbes 3-1', 5-6' (*fig. 80*).

Ces deux dernières lignes sont les ombres portées sur la surface par les deux lignes de séparation 1-2-3 et 5-6.

Ainsi $3-1'$ est l'ombre portée par $3-2-1$ et $5-6$ est l'ombre portée par $5-6$.

Les deux lignes $3-1'$, $3-2-1$, étant touchées au point 3 par la même tangente, se touchent elles-mêmes à ce point, et ne forment, en quelque sorte, qu'une même courbe $1-2-3-2'-1'$, dont une partie $1-2-3$ est une ligne de séparation, tandis que le reste $3-1'$ est la courbe d'ombre portée par la première partie.

On peut dire la même chose des deux courbes $6-5$, $5-6'$, qui se raccordent au point 5 pour former la courbe unique $6-5-6'$, dont une partie $5-6'$ est l'ombre portée par l'autre partie $5-6$.

Pour construire la courbe $3'-2'-1'$, on cherchera l'ombre portée sur la surface par chacun des points de la courbe $3-2-1$.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'obtenir l'ombre du point 2. On concevra d'abord (*fig. 79*) le plan $v-x$ perpendiculaire au plan vertical et contenant le rayon de lumière du point 2.

L'intersection de la surface sur le plan $v-x$ sera projetée (*fig. 80*) par la courbe $m'-n'-v'-n''-u'-z'-x'$, que l'on obtiendra en abaissant des perpendiculaires par tous les points où le plan vx coupe un certain nombre de cercles horizontaux établis d'avance sur la surface.

L'intersection de la courbe $m'... n''... x'...$ par la projection horizontale du rayon de lumière $2-2'$ déterminera $2'$, $2'$ pour les deux projections de l'ombre portée par le point 2.

On n'a pas besoin de construire la courbe $m'-n''-x'$ tout entière. On peut se contenter de déterminer la partie $u'-z'-x'$ de cette courbe qui est dans le voisinage du point 2.

Il est bien entendu pareillement qu'au lieu du plan vx perpendiculaire au plan vertical, on aurait pu employer un plan perpendiculaire au plan horizontal, ou tout autre plan contenant le rayon du point 2.



On se rappelle en effet que, pour avoir l'ombre portée par un point sur une surface, il faut couper cette surface par un plan quelconque qui contienne le rayon de lumière passant par le point dont on cherche l'ombre, et que toute l'habileté consiste à choisir, parmi tous les plans qui satisfont à cette condition, celui qui coupe la surface demandée suivant la courbe la plus facile à construire, ou dont l'intersection avec le rayon lumineux se fait avec le plus d'exactitude.

206. On peut obtenir ou vérifier autant de points que l'on voudra de la courbe $3'-2'-1'$ (*fig. 80*) en opérant comme nous l'avons dit aux numéros 118 et 119.

Ainsi, par exemple, pour obtenir ou vérifier le point $2'$, $2''$, on pourra opérer de la manière suivante :

1° On tracera un certain nombre de rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe $1-3-4-5$ et 6 (*fig. 79* et 80), puis on déterminera (*fig. 80*) la trace horizontale $1''-3''-4''$ de la surface cylindrique qui contient ces rayons.

2° Le rayon passant par le centre e du cercle horizontal rt (*fig. 79*) déterminera (*fig. 80*) le point e'' qui sera le centre du cercle horizontal $r''t''$ égal au cercle rt de la figure 79.

3° Le cercle $r''t''$ sera la trace horizontale du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le cercle rt , $r't'$ (*fig. 79* et 80).

4° Le point $2''$ suivant lequel la courbe $3''-1''$ est rencontrée par l'arc de cercle $r''t''$ déterminera le rayon $2-2''$ commun aux deux cylindres, et la rencontre $2'$ de ce rayon avec la circonférence rt , $r't'$ sera l'ombre portée sur cette ligne par le point 2 de la courbe $1-2-3$.

207. L'ombre de la circonférence engendrée par le point b s'obtient en déterminant o''' , ombre du point o , et décrivant une circonférence avec le rayon $o'''q$ égal à ob .

La droite cq est la trace du plan formé par les rayons lumineux qui touchent le grand cylindre suivant la verticale $c'c''$, cette ligne est déterminée par le diamètre $l'c$ perpendiculaire à la projection horizontale $s'-l$ du rayon lumineux.

Scotie.

208. La section méridienne ou profil de cette moulure est une courbe à trois centres o, z, x (fig. 82, pl. 17).

Le point o est le centre du quart de cercle cv .

Le point z est le centre de l'arc de cercle vu .

Enfin, le point x est le centre du troisième arc us .

Ces trois arcs, en tournant autour de l'axe, engendrent trois parties ou zones de surface annulaire, dont l'ensemble compose la surface de la *scotie*.

La première zone se raccorde avec la deuxième, parce qu'elles sont touchées toutes deux suivant la circonférence vv' , par le cylindre vertical qui aurait pour génératrice la tangente au point v .

La seconde zone et la troisième se raccordent suivant la circonférence uu' , parce qu'elles sont touchées, dans toute l'étendue de cette circonférence, par un même cône dont la génératrice serait tangente au point u' .

La première zone touche le plan horizontal cc' , suivant la circonférence que décrit le point c ; et la troisième zone touche le plan horizontal ss' , suivant la circonférence décrite par le point s .

Le point v de la section méridienne, étant le plus rapproché de l'axe, décrit le cercle de gorge dont la projection horizontale est v'', v''' .

209. Si nous supposons que la surface précédente soit coupée par un système de plans parallèles à son axe et aux rayons lumineux, tous ces plans seront parallèles entre eux.

Pour mieux faire comprendre la forme particulière affectée par chaque section, supposons qu'on les ait projetées toutes (*fig. 82*) sur le plan méridien parallèle aux plans coupants, les sections que l'on obtiendra seront de trois espèces :

1° Si la distance de l'axe au plan coupant est plus grande que le rayon du cercle de gorge, la section se composera (*fig. 88*) de deux courbes indépendantes l'une de l'autre, et placées l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'horizontale oo' . Les points n, n appartiennent au méridien qui est perpendiculaire au plan coupant.

2° Si la distance de l'axe au plan coupant est égale au rayon du cercle de gorge, les points n, n se réunissent en un seul 4, 5 (*fig. 81*), suivant lequel le cercle de gorge et le méridien perpendiculaire au plan coupant sont touchés par ce plan. La section se compose alors de deux courbes qui se coupent au point 4, 5, situé sur le cercle de gorge.

3° Enfin lorsque la distance de l'axe au plan coupant sera moindre que le rayon du cercle de gorge, la section se composera de deux courbes séparées, placées symétriquement l'une à droite, l'autre à gauche de la verticale aa' (*fig. 83*) ; les points n'', n'' appartiennent au cercle de gorge de la surface.

Or si l'on construit toutes les tangentes qu'il sera possible de mener à ces courbes, parallèlement à la direction de la lumière, on déterminera, sur chacune d'elles et suivant sa forme, un certain nombre de points essentiels.

Ainsi, par exemple (*fig. 87*), sur les deux courbes 1-4- γ , b-5-7, provenant de la section par un même plan, on obtiendra sept points, savoir :

Le point 1, appartenant au cercle horizontal 1- γ ;

Le point 3, ombre portée par le point 1 ;

Le point 2, appartenant à la ligne suivant laquelle la surface est touchée par un cylindre parallèle à la direction de la lumière ;

Le point 4, appartenant à la partie de cette ligne qui forme séparation ;

Le point 5, qui est de même nature que le point 4 ;

Le point 7, ombre du point 5 ;

Enfin le point 6, appartenant à la ligne de contact.

Lorsque le plan coupant touche le cercle de gorge, les points 4, 5 se réunissent en un seul (*fig. 81*), et la courbe ne contient plus que les six points 1, 2, 3 (4, 5), 6, 7.

Lorsque la distance de l'axe au plan coupant est moindre que le rayon du cercle de gorge, on peut regarder la section (*fig. 83*) comme une modification de la section (*fig. 88*) : en effet, lorsque le plan coupant se rapproche de l'axe, les deux points n, n se réunissent d'abord, puis se séparent de nouveau en s'écartant sur l'horizontale oo' , pour devenir n'', n'' (*fig. 83*) ; alors les points de tangence 4 et 5 ont disparu ainsi que le point 7, ombre portée par le point 5, et il ne reste plus que les quatre points 1, 2, 3, 6.

Lorsque le plan coupant s'éloigne de l'axe (*fig. 86*), les points n, n s'écartent, et la courbe supérieure n'est plus rencontrée par le rayon du point 1, qui, passant entre les deux courbes, vient déterminer le point 3 sur la courbe inférieure ou sur quelque surface étrangère à la scotie.

Enfin, par suite des variations de courbure des sections, il vient un moment (*fig. 84*) où les trois points 5, 6 et 7 se réunissent en un seul, parce que le rayon de lumière se trouve précisément tangent au point d'inflexion de la courbe (*fig. 89*). C'est à ce point que la courbe de séparation 5-6-6 est touchée par la courbe d'ombre portée 5-7-7.

Pour les sections plus éloignées du centre, il ne peut plus y avoir de points de tangence (*fig. 88*).

Ainsi, en résumant (*fig. 87*), le point 1 appartient au cercle horizontal 1- y .

Les points de tangence 2, 4, 5, 6, à la courbe de contact.

Les points 4 et 5, à la partie de cette courbe formant ligne de séparation.

Le point 3, à la courbe d'ombre portée par le cercle 1- y .

Le point 7, à la courbe d'ombre portée par la ligne de séparation.

Toutes les opérations doivent être faites avec beaucoup de soin, parce que les courbes de section n'étant pas susceptibles d'une définition géométrique rigoureuse, on ne peut déterminer qu'approximativement les points où elles sont touchées par les rayons lumineux.

210. Au surplus, pour les surfaces de révolution, on pourra toujours construire la ligne de contact par la méthode du n° 114.

Dans ce cas, la détermination de chaque point dépend de la construction d'une tangente à la section méridienne, dont la courbure souvent élégante, et presque toujours définie, permet de déterminer le point de tangence avec exactitude.

En effet, dans l'exemple précédent, la section méridienne étant une courbe à plusieurs centres (*fig. 85*), toute tangente en un point de l'arc cv sera perpendiculaire au rayon om de cet arc; une tangente ik sera perpendiculaire sur zi ; enfin, la tangente gd doit être perpendiculaire sur xg .

Si la courbure de la section méridienne n'était pas définie, on construirait (*fig. 90*) un certain nombre de cordes parallèles à la tangente, et la courbe, passant par le milieu de ces cordes, se dirigerait vers le point de tangence, et le déterminerait avec une exactitude suffisante.

211. **Tangentes à la ligne de séparation.** On peut se proposer, comme étude, de construire une tangente en un point déterminé de la ligne de séparation sur la scotie.

Supposons, par exemple (*fig. 1 et 2, pl. 18*), qu'après avoir obtenu le point uu' par l'une des méthodes indiquées dans la *Géométrie descriptive*, on veut, avant de tracer la courbe, construire la tangente en ce point, on appliquera le principe du n° 192.

Ainsi, on construira :

- 1° — L'hyperboloïde de révolution osculateur (186) ;
- 2° — Le plan tangent au point uu' ;
- 3° — La section de l'hyperboloïde par un plan parallèle au plan tangent ;
- 4° — Le diamètre parallèle au rayon lumineux ;
- 5° — Le conjugué du diamètre précédent déterminera la direction de la tangente demandée qu'il sera facile de construire par le point uu' , puisque l'on connaîtra sa direction.

On fera bien, comme au n° 193, de faire tourner le point uu' jusqu'à ce qu'il soit parvenu dans le méridien principal ; puis de le faire revenir à sa place lorsque la direction de la tangente sera déterminée.

Je n'ai pas exécuté les opérations qui précèdent, parce que cela n'aurait été que la répétition de ce qui a été fait sur les figures 14 et 15 de la planche 15 ; je ferai seulement remarquer que, dans l'exemple actuel, la section méridienne de la surface donnée est une ligne dont la courbure varie pour chacun de ses points, de sorte que le rayon de courbure du méridien au point u sera la normale passant par ce point rabattu en u'' sur le méridien principal, et se comptera sur cette normale, depuis u'' jusqu'au point où elle touche la développée $6'-1'$ de la section méridienne $bu''d$.

212. Il sera plus facile de construire la tangente au point oo' suivant lequel la ligne de séparation coupe le cercle de gorge $3-o''$ de la surface donnée ; en effet :

Pour ce point oo' , le rayon de courbure $o''c$ sera égal à la normale $3-3'$ comprise entre le point 3 du méridien $bu''d$ et le point 3' suivant lequel la normale correspondante touche la développée $6'1'$.

On sait de plus (184) qu'au point o'' , et par conséquent en o' , le second rayon de courbure sera égal au rayon $o'o''$ du cercle de gorge; de sorte qu'en décrivant sur $o''c$ comme diamètre, la circonférence $o'vcv$, la droite $o''v$ moyenne proportionnelle entre $o'o''$ et $o''c$, sera l'axe non transverse ou imaginaire de l'hyperbole qui aurait pour cercle osculateur, la circonférence décrite du point c comme centre, avec le rayon co'' (162), de sorte que l'hyperbole $Ho''H$ et la méridienne $b'o''d'$, ayant au point o'' le même cercle osculateur, auront en ce point les mêmes rayons de courbure principaux, et les deux surfaces de révolution que l'on obtient en faisant tourner ces deux courbes autour de l'axe commun seront osculatrices l'une de l'autre pour tous les points du cercle de gorge $3-o''$.

Or, le plan tangent qui, au point o' , contient le rayon lumineux et la tangente demandée, étant parallèle au plan vertical de projection, l'hyperbole que nous venons d'obtenir sera la section de l'hyperboloïde osculateur par le plan vertical sl parallèle au plan tangent en oo' ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à construire :

- 1° — Le diamètre $o'h$ parallèle au rayon lumineux $s'l'$;
- 2° — La corde ky partagée au point h en deux parties égales, sera parallèle au diamètre $k'y'$ conjugué de $o'h$ et parallèle par conséquent à la tangente demandée (189).

Or, le centre de l'hyperboloïde osculateur, et le point de tangence oo' , ayant une projection verticale commune, il s'ensuit que le diamètre $k'y'$ que nous venons de construire et la tangente au point oo' de la ligne de séparation auront la même projection verticale.

213. **Rayons lumineux tangents à la ligne de séparation.** Pour déterminer les quatre points 11, 11, 12 et 12 suivant lesquels le rayon lumineux devient tangent à la ligne de séparation, on pourra opérer comme nous l'avons dit au n° 195.

Cependant, si l'on suppose que les différents points de la courbe 1-0'-7 ont été ramenés sur la section méridienne $bu''d$, on devra remarquer que les divers hyperboloïdes osculateurs aux points 1, 2, 3, 4, 5 et 6 n'ont plus comme au n° 199 le même cercle de gorge ; de sorte que les sections faites dans ces hyperboloïdes, parallèlement aux plans tangents, passeront par les centres de courbure 1'2'3'4'5'6' des cercles osculateurs correspondants, au lieu de passer, comme on le voit sur la figure 14 de la planche 15, par le centre du cercle générateur de la surface annulaire.

A cela près, les opérations seront absolument les mêmes, ainsi :

- 1° — Les deux rayons principaux de courbure au point 6 de la section méridienne $bu''d$, étant 6-6' et 6-8 (184), on ramènera le point 6 en 9' et le point 8 en 10', par les deux arcs de cercle 6-9' et 8-10'' décrits du point 6' comme centre.
- 2° — Les droites 9'-9 et 10'-10 perpendiculaires à la ligne AZ détermineront sur la figure 2, la droite 6'-9 égale à 6'-6 de la figure 1^{re}, et 9-10 égale à 6-8.
- 3° — On décrira la demi-circonférence 10- m -6', et la droite 9- m , moyenne proportionnelle entre 6'-9 et 9-10 de la figure 2, et par conséquent entre 6'-6 et 6-8 de la figure 1, sera l'axe non transverse ou imaginaire de l'hyperboloïde osculateur au point 6 de la surface donnée.
- 4° — Le diamètre $m'm'$, perpendiculaire sur le rayon 6'-6, sera la projection verticale de la section hyperbolique parallèle au plan qui toucherait la surface, et son hyperboloïde osculateur au point 6.

- 5° — On ramènera $9-m$ en $9''-m''$ sur la perpendiculaire $m'm''$, et la droite $6'-m''$ (*fig. 2*) sera l'une des asymptotes de la section hyperbolique $m'm'$ provenant de la section de l'hyperboloïde osculateur par le plan $m'm'$, parallèle au plan tangent du point 6.
- 6° — Cette droite $6'-m''$ sera donc la direction que devrait prendre le rayon lumineux, pour qu'au point 6 de la surface il soit tangent à la ligne de séparation correspondante (197).
- 7° — La même opération étant répétée pour les points 5, 4, 3, 2 et 1 de la courbe $bu''d$, on déterminera pour chacun de ces points la *direction* du rayon lumineux qui serait tangent à la ligne de séparation correspondante.
- 8° — Les asymptotes obtenues par les opérations précédentes, ne passant pas par un même point, forment une surface réglée ; mais si, par un point quelconque ss' pris où l'on voudra dans l'espace, on construit une parallèle à chacune des asymptotes obtenues, on obtiendra comme au n° 199 une surface conique qui contiendra toutes les *directions* des rayons lumineux qui, en chacun des points de la méridienne $bu''d$, serait tangent à la ligne de séparation correspondante.
- Il ne reste donc plus qu'à choisir parmi toutes ces directions, celle qui sera parallèle à la lumière donnée.
- 9° — Pour y parvenir, on construira le rayon lumineux $sl, s'l'$.
- 10° — On fera tourner cette droite autour de la verticale du point ss' , et l'on obtiendra par ce moyen un cône circulaire dont on construira la trace horizontale lq .
- 11° — On construira également la trace horizontale $1'''-3'''-6'''$ du cône qui contient les droites menées par le point ss' parallèlement aux asymptotes obtenues précédemment.

- 12° — Le point 3''' de la courbe 1'''-3'''-6''' s'obtiendra en construisant la trace 3^v de la droite $s'-3^{iv}$ parallèle à l'asymptote $o'l'$ qui, ramenée dans le plan méridien $o'-3'''$, serait une asymptote de la section produite dans l'hyperboloïde osculateur, par le plan du méridien $o'-3'''$ parallèle au plan qui touche la surface donnée au point 3.
- 13° — Les points NN', RR' suivant lesquels la trace lq du premier cône rencontre la trace 1'''-3'''-6''' du second, détermineront les deux droites $sN, s'N'$; $sR, s'R'$ suivant lesquelles se coupent les deux cônes.
- 14° — Les droites $sN, s'N'$; $sR, s'R'$, intersections des deux cônes, seront les directions de deux rayons lumineux $n'n', r'r'$ qui seraient inclinés sur le plan horizontal comme le rayon de lumière donné, et qui aux points 11' et 12' de la section méridienne $bu''3$, seraient tangents chacun à la ligne de séparation correspondante.
- 15° — Les projections horizontales $n'n'$ et $r'r'$ de ces deux rayons seront parallèles aux projections sN, sR , des deux droites suivant lesquelles se coupent les deux cônes.
- 16° — Il ne restera plus qu'à faire tourner les deux droites $n'n'$ et $r'r'$ autour de l'axe jusqu'à ce qu'elles soient venues se placer en nn et rr parallèlement à la projection horizontale du rayon lumineux sl .
- 17° — Par suite de ce mouvement, le point e' vient se placer en e , et l'on obtient le point de tangence 12 en faisant $e-12$ égale à $e'-12'$, le point x' étant ramené en x , on obtiendra le point de tangence 11 en faisant $x-11$ égale à $x'-11'$.
- 18° — Les quatre points 11, 11, 12, 12 étant déterminés en projection horizontale, il sera facile de construire leurs projections verticales, et par suite les tangentes 14 et 15 parallèles à la projection verticale $s'l'$ du rayon lumineux.

214. Ainsi, parmi toutes les tangentes que l'on peut déterminer avant de tracer la projection verticale 1- o' -7 de la ligne de séparation, on remarquera :

- 1° — La tangente 13, parallèle au rayon lumineux et qui touche la section méridienne au point le plus élevé de la ligne de séparation.
- 2° — La tangente 14, parallèle au rayon lumineux et qui touche la ligne de séparation au point 11.
- 3° — La droite $k'y'$, tangente à la ligne de séparation au point oo' .
- 4° — La droite 15, tangente au point 12 de la ligne de séparation, et parallèle au rayon lumineux.
- 5° — Enfin la droite 16, parallèle au rayon lumineux, touche la section méridienne au point 7 qui est le plus bas de la ligne de séparation.

Sur la projection horizontale, on remarquera six tangentes parallèles à la projection horizontale des rayons lumineux.

Quatre de ces droites touchent la ligne de séparation aux points 11, 11, 12 et 12, et les deux autres 17-17 sont tangentes aux points o situés sur le cercle de gorge.

215. **Point lumineux.** Pour ne plus avoir à revenir sur ce genre de questions, qui, malgré l'intérêt qu'elles présentent sous le rapport de la théorie, nous éloigneraient trop du but pratique que je me suis proposé dans cet ouvrage, je vais indiquer le moyen de construire des tangentes à la ligne de séparation, lorsque la lumière provient d'un point lumineux, au lieu d'être produite par le soleil, comme nous l'avons supposé dans tous les exemples qui précèdent.

216. Soit d'abord (*fig. 3*) un ellipsoïde éclairé par un point lumineux S, on sait que la ligne de séparation sera une ellipse C.

Mais, si nous supposons que le point lumineux S soit reculé jusqu'à l'infini dans la direction de la droite SV , le cône formé par les rayons lumineux qui enveloppent la surface se transforme en un cylindre, et la ligne de séparation est encore une ellipse B .

Or ces deux ellipses ont évidemment un point commun m , suivant lequel la surface donnée est touchée par la génératrice VU qui appartient en même temps au cône et au cylindre.

De plus, ces deux courbes ne peuvent pas se couper, car si elles avaient un second point commun n , les plans qui, en chacun des points m et n , toucheraient la surface donnée, seraient tangents *tous les deux* au cône et au cylindre enveloppant; ce qui est impossible, puisque ces deux dernières surfaces n'ayant qu'une génératrice commune ne peuvent avoir qu'un seul plan tangent: d'où il résulte que les courbes B et C sont nécessairement tangentes l'une à l'autre.

Puisque les deux ellipses se touchent au point m , il est évident qu'elles ont, en ce point, une tangente commune mT , de sorte que pour construire la tangente en un point quelconque de la ligne de séparation C suivant laquelle l'ellipsoïde donné est touché par le cône des rayons lumineux issus du point S , il suffira de toucher la tangente à la ligne de séparation que l'on obtiendrait si la lumière provenait d'un point situé à l'infini dans la direction de la droite mS , et la question est alors ramenée au théorème du n° 189.

217. Ainsi (*fig. 4*) pour construire une tangente en un point de la ligne de séparation suivant laquelle l'ellipsoïde est touché par le cône des rayons lumineux issus du point S , on construira :

- 1° — Le plan P tangent au point m de l'ellipsoïde ;
- 2° — La section elliptique $zcxu$ par un plan parallèle au plan tangent P ;
- 3° — Le diamètre zx parallèle au rayon lumineux sm ;

4° — Le conjugué cu de zx sera parallèle à la tangente demandée mT , qu'il sera facile alors de construire par le point donné m , puisque l'on connaîtra sa direction cu .

218. Tout ce que nous venons de dire pour l'ellipsoïde s'applique à l'hyperboloïde, et l'on emploiera celle de ces surfaces qui conviendra le mieux dans chaque cas.

219. **Tangente à la ligne de séparation.** Si par exemple (*fig. 5*) on voulait construire une tangente au point uu' de la courbe suivant laquelle la scotie est touchée par le cône des rayons lumineux issus du point ss' ,

Le point uu' étant déterminé par l'une des méthodes indiquées dans la *Géométrie descriptive*, on construira (190) :

1° — Le plan tangent au point uu' de la surface donnée;

2° — L'hyperboloïde osculateur au même point (186);

3° — La section hyperbolique parallèle au plan tangent (189);

4° — Le diamètre parallèle au rayon lumineux qui contient le point donné;

5° — Le conjugué du diamètre précédent sera parallèle à la tangente demandée qu'il sera facile de construire, puisque l'on connaît le point de tangence et la direction de la tangente.

Je n'ai pas indiqué ces détails d'épure, qui seraient la répétition de ce que nous avons dit au n° 191.

220. L'opération sera plus simple si l'on veut déterminer la tangente au point oo' suivant lequel la ligne de séparation coupe le cercle de gorge. En effet, pour ce point, comme nous

l'avons fait au numéro 212, on pourra prendre pour hyperboloïde osculateur la surface de révolution engendrée autour de l'axe par l'hyperbole qui aurait pour axe réel le rayon Oo'' du cercle de gorge $3-o''$, et pour axe non transverse ou imaginaire la moyenne proportionnelle $o''v$ entre Oo'' et $o''c$ qui est le rayon de courbure au point o' du méridien.

On n'a pas besoin de construire cette hyperbole $Ho''H$ qui n'est ici que pour rappeler le principe ; les asymptotes OB , OB suffiront.

- 1° — Ces deux lignes étant obtenues, on considérera l'hyperbole $Ho''H$ et ses asymptotes comme la section de l'hyperboloïde osculateur par le plan méridien sP ;
- 2° — On fera tourner le plan tangent P_1 autour de l'axe, jusqu'à ce qu'il soit venu se placer dans la position P_2 parallèle au plan coupant P ;
- 3° — La droite $s'''O$ sera la nouvelle projection verticale du rayon de lumière qui contient le point oo' ;
- 4° — Le plan tangent P_1 étant rabattu en P_2 , la droite Os''' sera la projection de l'un des diamètres de l'hyperbole $Ho''H$, qui est la section de l'hyperboloïde osculateur par le plan P parallèle au plan tangent P_2 ;
- 5° — La corde ky , partagée au point h en deux parties égales, sera parallèle au conjugué $k''y''$ du diamètre Os''' et le diamètre $k''y''$ sera projeté sur la figure 6 et $k'''y'''$;
- 6° — Cette dernière ligne, ramenée en ky , sera la projection horizontale de la tangente demandée $k'y'$, qu'il sera facile de construire en faisant tourner le point k''' de la trace horizontale du plan P_2 jusqu'à ce qu'il soit venu se placer sur la trace du plan tangent P_1 .

221. Rayons de lumière tangents à la courbe de séparation. Il existe ici comme dans le cas où la lumière

est située à l'infini, quatre points suivant lesquels le rayon lumineux est tangent à la courbe de séparation.

Pour déterminer ces points on pourra opérer de la manière suivante :

- 1° — On choisira sur la courbe *o-3-7* un certain nombre de points suffisamment rapprochés ;
- 2° — Par chacun de ces points, on construira la normale et on déterminera le centre de courbure avec le plus d'exactitude possible.

Si la méridienne est une courbe à plusieurs centres, ces points seront évidemment connus puisqu'ils auront servi à construire la courbe ;

- 3° — Pour chaque point de la courbe *o-3-7*, on déterminera l'hyperboloïde osculateur (186) et l'une des asymptotes de la section hyperbolique produite dans cette surface par un plan parallèle au plan tangent correspondant (197).

Pour éviter la confusion, on n'a pas conservé toute cette partie de l'épure qui n'est que la répétition de ce que l'on a fait sur les figures 1 et 2 ;

- 4° — Par chaque point de la courbe *o-3-7* on construira une droite parallèle à l'asymptote de la section faite dans l'hyperboloïde osculateur correspondant par le plan perpendiculaire au rayon de courbure ; les projections verticales 1'', 2'', 3'', etc., de ces droites, seront tangentes à la courbe *o-3-7* ;
- 5° — Les droites que nous venons d'obtenir seront parallèles aux rayons lumineux qui, pour chaque point de la courbe *o-3-7*, seraient tangents à la ligne de séparation correspondante (197) ;
- 6° — Les droites 1'', 2'', 3'', forment dans l'espace une surface réglée dont toutes les génératrices sont tangentes à la scotie en un point de la section méridienne *o-3-7* ; le rayon demandé sera donc l'une des généra-

trices de cette surface, de sorte qu'il ne restera plus qu'à choisir parmi toutes ces droites celle qui passerait par le point lumineux donné ;

7° — Pour résoudre cette partie de la question, supposons que le rayon de lumière cherché tourne autour de l'axe de la surface donnée, il engendrera un hyperboloïde de révolution dont toutes génératrices seront également tangentes en un point de la courbe $o-3-7$;

8° — On coupera les deux surfaces par un plan horizontal P_3 contenant le point lumineux donné ss' , et l'on obtiendra pour section la courbe $1'''-3'''-6'''$ située dans la première surface, et la circonférence $sNRs''$ située sur l'hyperboloïde engendrée par le mouvement du rayon cherché autour de l'axe ;

9° — Les points N et R suivant lesquels se coupent les deux courbes $1'''-3'''-6'''$ et $sNRs''$ étant projetés sur le plan vertical en N' et R' , on construira les deux droites $N'-11'$ et $R'-12'$ tangentes à la section méridienne.

Ces lignes, intersections des deux surfaces réglées, jouiront de la propriété commune à toutes les droites situées dans la première surface d'être parallèles aux rayons lumineux qui en un point de la courbe $o-3-7$ seraient tangents à la ligne de séparation correspondante.

Il ne reste donc plus qu'à faire tourner les droites que nous venons d'obtenir jusqu'à ce qu'elles contiennent le point de lumière donné ss' .

Pour y parvenir :

10° — On projettera les points de tangence $11'$ et $12'$ sur la trace du méridien principal.

On obtiendra ainsi les projections horizontales des deux lignes $N-11'$ et $R-12'$;

11° — On fera tourner ces droites autour de l'axe, jusqu'à ce qu'elles contiennent la projection horizontale s du

point lumineux, ce qui donnera pour chacune deux positions différentes $s-11$ et $s-12$;

12° ——— On déterminera bien exactement les nouvelles projections horizontales des points 11, 11, 12 et 12, puis des perpendiculaires à la ligne AZ détermineront les projections verticales de ces points sur les horizontales tracées par leurs projections 11' et 12' ;

13° ——— Les droites $s'-11$ et $s'-12$ seront alors tangentes à la projection verticale de la ligne de séparation.

222. Ainsi, parmi les tangentes que l'on peut mener à cette courbe, on devra distinguer, sur la projection horizontale, six tangentes passant par le point s , savoir :

1° ——— Les deux droites so , so tangentes aux points o , o du cercle de gorge ;

2° ——— Les quatre droites $s-11$, $s-11$, $s-12$ et $s-12$ tangentes aux points 11 et 12 à la projection horizontale $nozo$ de la courbe de séparation.

Et sur la projection verticale on aura :

1° ——— La droite $s'n'$ tangente à la méridienne ;

2° ——— $s'-11$ tangente au point 11 ;

3° ——— $s'-12$ tangente au point 12 ;

4° ——— $s'z'$ tangente au point z' du méridien ;

5° ——— La droite $k'y'$ tangente au point o' de la courbe $n'o'z'$.

Les quatre premières lignes sont des rayons lumineux, la dernière n'est pas un rayon de lumière.

La trace du cône formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe de séparation aurait quatre points de rebroussement.

Ces points analogues à ceux que l'on obtient lorsque les rayons de lumière sont parallèles seraient déterminés par la rencontre des quatre rayons tangents $s-11$, $s-11$, $s-12$, $s-12$ avec le plan de projection.

Piédouche.

223. Les différentes parties qui composent cette surface ont en commençant par en bas (*fig. 91, pl. 19*) :

1° Le dé ou parallépipède rectangle ;

2° Le tore ;

3° Le filet ;

4° La scotie ;

5° Le quart de rond ;

6° Un second filet.

Toutes ces moulures, excepté le dé, sont des surfaces de révolution engendrées par l'ensemble des lignes qui forment le profil ou section méridienne.

Tore.

224. Cette moulure est évidemment la partie convexe d'une surface annulaire qui ne diffère que par ses dimensions de celle que nous avons étudiée sur la planche 13.

La courbe formant *la séparation* entre la partie obscure et celle qui est éclairée se construira comme nous l'avons dit alors. On pourra aussi, comme exercice, employer les principes des plans coupants.

Dans ce cas, après avoir établi sur les deux projections un certain nombre de sections horizontales de la surface, on concevra (*fig. 92*) des plans tels que pq , $p'q'$ verticaux et parallèles à la direction de la lumière, on construira (*fig. 91*) les courbes pq , $p''q''$, suivant lesquelles ces plans coupent la surface du tore, et les points m , m , suivant lesquels ces courbes seront touchées par les rayons lumineux, appartiendront à la ligne de séparation demandée.

225. *Ombre portée sur le tore.* Le plan vertical $p'q'$

(fig. 92), coupant la surface du tore suivant la courbe $p''q''$ (fig. 91), la partie 1-2' de cette courbe sera l'ombre portée sur le tore par la petite verticale 1-2, suivant laquelle la surface cylindrique du filet est touchée par le plan $p'q'$; la courbe 1-2 étant plane et verticale, sa projection horizontale sera une ligne droite 1-2'.

Une seconde courbe 1''-2'', égale et symétrique par rapport à 1'-2', proviendra de l'ombre portée sur le tore par la droite suivant laquelle le filet serait touché par le plan vertical $p'''q'''$ (fig. 92).

La courbe 2'-3'-4'-5' est à double courbure et provient de l'intersection de la surface du tore par les rayons lumineux qui s'appuient sur une partie 3-5 du cercle horizontal formant l'arête supérieure du filet.

On pourra construire cette courbe par le moyen des plans coupants.

Ainsi, l'intersection de la courbe $p''q''$ (fig. 91), par le rayon de lumière 2-2', déterminera 2' pour l'ombre du point 2; on obtiendra de cette manière autant de points que l'on voudra de la courbe 2'-3'.

Si on veut avoir beaucoup d'exactitude, il faudra mener les plans coupants très-rapprochés les uns des autres.

En avançant vers le point 3', il y aura un moment où les rayons de lumière ne rencontreront plus les sections correspondantes et passeront au-dessus du tore sans le toucher.

226. Le point extrême 3' sera connu lorsque le rayon lumineux deviendra tangent à la section correspondante; on pourra déterminer ce point en construisant un lieu géométrique, passant par les milieux des parties de rayon de lumières comprises dans les courbes de section.

Pour étudier complètement tous ces détails, le lecteur fera bien d'exécuter l'épure sur une plus grande échelle.

La partie de courbe 3'-4'-5' contient les points suivant les-

quels la surface du tore serait percée une seconde fois par les rayons lumineux, en les supposant plongés à travers la masse du solide. Il est évident que dans la pratique on peut se dispenser de construire cette partie de courbe, qui n'a été tracée ici que pour mieux faire comprendre le résultat.

La courbe 2'-3'-4'-5' ne pourra avoir aucun de ses points au delà du plan $p'q'$ tangent au filet, c'est pourquoi elle touche la section du tore par ce plan (*fig. 91*).

Si cela est nécessaire pour déterminer quelques points avec plus d'exactitude, on fera des sections perpendiculaires au plan vertical de projection.

227. Enfin, on pourra employer le principe du n° 119. Ainsi :

La courbe cherchée, devant résulter de la pénétration du tore par le cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le cercle horizontal bd , on coupera ces deux surfaces par une suite de plans horizontaux. Les sections produites par le tore seront des cercles dont les centres situés sur l'axe de la surface se projetteront en un seul point s' . Les sections du cylindre seront aussi des cercles égaux et parallèles au cercle horizontal bd , et dont les centres situés sur la droite $o-o'$ auront leurs projections horizontales sur $s'-o''$.

Les intersections deux à deux de ces différents cercles donneront tous les points de la courbe cherchée (*Géométrie descriptive*).

Ainsi, par exemple, pour déterminer le point 5', on abaissera la perpendiculaire $o'o''$, et du point o'' comme centre avec un rayon $o''b''$, égal à ob (*fig. 91*), on décrira l'arc $b''5'$, dont l'intersection avec le cercle $b'-1-x$ déterminera 5'.

En effet (*fig. 91*), le plan horizontal gy , employé ici comme plan coupant auxiliaire, touche le tore en dessous, suivant le cercle $b'-1-x$, et coupe le cylindre formé par les rayons

lumineux qui s'appuient sur le cercle horizontal bd , suivant un second cercle $b''5'$ égal et parallèle au premier. Les points $5', 5''$, résultant de l'intersection de ces deux cercles, appartiennent donc aux deux surfaces qui les contiennent.

228. On peut par ce moyen obtenir un point de la courbe à la hauteur que l'on voudra. Ainsi, par exemple, le point qui serait situé sur la plus grande section du tore, ou sur tout autre cercle horizontal.

Il est évident que la construction précédente pourra être employée (*fig. 93*) toutes les fois qu'il s'agira d'obtenir l'ombre portée sur une surface de révolution par un cercle dont le plan serait perpendiculaire à l'axe de cette surface, quelle que soit du reste la position occupée par le centre de ce même cercle.

Ainsi, le rayon oo' percera le plan horizontal de projection en un point o' , qui sera le centre d'un cercle de rayon $o'v'$, égal et parallèle au cercle de rayon ov . Le premier de ces deux cercles sera l'ombre portée par le second, sur le plan horizontal de projection, et les deux points 1, 1, suivant lesquels les deux cercles $o'v'$ et zx se rencontrent seront les ombres portées sur le cercle zx par deux points du cercle horizontal ov .

Le point o'' sera le centre d'un second cercle dont les intersections avec la circonférence mn détermineront les points 2, 2 pour les ombres portées sur le cercle mn , par deux points du cercle horizontal ov (119).

La courbe $1''-4''-5''$ (*fig. 92*) se déduira de $1'-4'-5'$, en abaissant des perpendiculaires sur le plan de symétrie $l'-s'$.

Ainsi, en résumant, les courbes à déterminer sur le tore sont (*fig. 92*) :

- 1° La grande courbe $n'm'n''m''$, formant la ligne de séparation ;
- 2° Les deux petites courbes $1'-2'$, $1''-2''$, provenant de

l'intersection du tore par les deux plans tangents au filet ;
 3° Les deux courbes $2'-4'-5'$, $2''-4''-5''$, intersections du tore par les rayons lumineux qui s'appuient sur le cercle horizontal du filet.

Filet.

229. Les *lignes de séparation* sont (fig. 91) :

1° Les deux petites verticales 1-2, suivant lesquelles la surface cylindrique du filet est touchée par les deux plans verticaux $p'q'$, $p'''q'''$ (fig. 92) ;

2° L'arc horizontal 1-3- $x-z$ - 3^{iv} -1'', sur lequel il faut distinguer trois parties 1-3, 1''- 3^{iv} , 3- $x-z$ - 3^{iv} .

Les rayons lumineux qui s'appuient sur les deux premiers arcs rencontrent le tore et déterminent les deux courbes $2'-3'$, $2''-3''$, tandis que les rayons qui s'appuient sur l'arc 3- $x-z$ ^{iv} passent au-dessus du tore sans le rencontrer, et vont former par leur intersection avec les surfaces extérieures une partie du contour de l'ombre portée par le piédouche.

Tout ce que nous venons de dire pour le tore et le filet s'applique au second filet et au quart de rond, qui n'est autre chose que la moitié supérieure d'un tore.

Scotie.

230. *Ligne de séparation.* La courbe, suivant laquelle cette surface serait touchée par le cylindre parallèle à la direction de la lumière, se construira comme nous l'avons dit aux nos 114, 209.

Les deux petites courbes 8-9, 8'-9' (fig. 91), situées symétriquement, par rapport au plan méridien $s'-l'$, sont les seules parties qu'il soit nécessaire de conserver comme ligne de séparation.

231. Les ombres portées sur la surface par les courbes 8-9, 8'-9' seront les deux courbes 9-10, 9'-10', que l'on obtiendra en opérant comme nous l'avons dit aux n^{os} 118, 119 ou 205.

Enfin, la courbe 8-6-8' est l'ombre portée par une partie du cercle horizontal $v-u$ qui forme l'arête inférieure du quart du rond.

Les points de cette courbe peuvent être déterminés par le principe des plans coupants.

Ainsi, la droite 7'-7''' (*fig.* 92) étant la trace du plan vertical qui contient le rayon du point 7, on construira (*fig.* 91) la courbe 7-7''-12, provenant de la section de la surface par ce plan.

L'intersection de la courbe 7-7''-12, par le rayon de lumière 7-7'' déterminera 7'' et par suite 7''' (*fig.* 92).

La section de la surface par le plan méridien $v'-s'$ déterminera le point le plus élevé de la courbe.

Si on veut avoir un point à une hauteur déterminée, par exemple sur le cercle de gorge, on emploiera le principe n^o 119.

Ainsi on construira :

- 1^o Le rayon uu' ;
- 2^o La perpendiculaire $u'u''$, ce qui déterminera u'' (*fig.* 92) ;

3^o Du point u'' , comme centre avec un rayon $u''v' = uv$, on décrira l'arc $v'-v''$, dont l'intersection avec la projection horizontale du cercle de gorge déterminera 7''', et par conséquent 7'' qui appartient à la courbe demandée.

La projection horizontale de cette courbe n'a pas été construite sur la *fig.* 92 :

- 1^o Parce qu'elle ne peut pas être vue ;
- 2^o Parce que cette courbe n'est pas nécessaire pour les opérations suivantes.

La partie de courbe 8-11-8', tracée en points sur la fi-

gure 91, provient de l'intersection de la surface par les prolongements des rayons qui déterminent la partie 8-6-8'.

Indépendamment de cette courbe, la surface est encore rencontrée par quelques-uns des rayons qui s'appuient sur l'arc horizontal *vu*, ce qui donne lieu aux deux petites courbes *x, x* (fig. 92).

Il pourrait même arriver que quelques-uns de ces rayons rencontrassent le tore dans la partie éclairée située entre les courbes 2'-3' et n'-3'; mais, dans l'exemple qui nous occupe, les rayons lumineux qui s'appuient sur l'arc *vu* passent au-dessus du tore, après avoir traversé une partie de la surface cylindrique du filet.

Ainsi, en résumant, les courbes à déterminer sur la scotie sont :

1° La courbe 8-6-8', qui est l'ombre portée par l'arc horizontal *uv* ;

2° Les deux petites courbes 8-9, 8'-9' formant séparation et faisant partie de la ligne suivant laquelle la surface est touchée par un cylindre parallèle à la direction de la lumière ;

3° Les deux courbes 9-10, 9'-10' qui sont les ombres portées sur la surface par les deux lignes de séparation 8-9, 8'-9'.

Toutes ces lignes sont à double courbure.

Ombre d'un vase.

232. Les figures 94 et 95 (pl. 20) fourniront au lecteur l'occasion d'appliquer les principes précédents.

Les courbes projetées horizontalement sur la figure 95 sont, en allant de *l'* à *s'* :

1° Le cercle de gorge de la scotie qui est au-dessous du vase ;

2° La courbe d'ombre portée sur cette scotie par le cercle inférieur du filet qui est au-dessus ;

3° La courbe suivant laquelle cette même scotie serait touchée par un cylindre parallèle à la direction de la lumière ;

4° Le cercle de gorge de la scotie qui est au-dessus du vase ;

5° Un cercle tracé en ligne pleine et représentant l'orifice du vase ;

6° Une courbure en points longs provenant de l'ombre portée sur la scotie supérieure par l'arête du quart de rond ;

7° Un cercle en point formant la projection horizontale commune aux deux cercles du filet, qui est au-dessus de la scotie inférieure ;

8° La courbe suivant laquelle la scotie supérieure serait touchée par un cylindre parallèle à la direction de la lumière ;

9° La courbe *acu* suivant laquelle le vase est touché par l'ensemble des rayons lumineux qui s'appuient sur la surface de ce corps ;

10° Un cercle en ligne pleine, formant la projection horizontale commune aux deux cercles du filet qui est au-dessus du quart de rond ;

11° Un cercle en points formant la projection commune aux deux cercles du filet qui est au-dessus du tore ;

12° Une courbe en points longs, suivant laquelle le tore est touché par l'ensemble des rayons lumineux qui s'appuient sur cette moulure ;

13° Un cercle en ligne pleine formant la projection horizontale de l'arête inférieure du quart de rond ;

14° Un cercle en points représentant la plus grande section horizontale du tore ;

15° Un cercle en points provenant de la section horizontale *zy* (*fig. 94*) ;

16° Enfin, un grand cercle en ligne pleine, formant la projection de l'arête supérieure *mn*.

233. Indépendamment de ces courbes, il faudra déterminer :

1° Les ombres portées sur le quart de rond et sur le tôle par les filets qui sont au-dessus de ces moulures ;

2° L'ombre portée par la courbe *acu* sur le filet qui est au-dessus de la scotie inférieure.

234. Les courbes *vogqpd* sont les traces verticales des deux cylindres obliques formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur les surfaces des deux scoties.

Les courbes de contact servant de directrices à ces deux cylindres étant enveloppées entièrement (*fig. 94 et 95*) par les ombres des cercles horizontaux *hk, er*, on pouvait prévoir qu'aucun point de ces courbes n'appartiendrait au contour de l'ombre portée sur le plan vertical de projection, et ces lignes n'ont été tracées ici que comme études.

Balustres.

235. Ce que nous venons de dire peut s'appliquer (*fig. 96 et 97*) au tracé des ombres sur les balustres que l'on peut considérer comme des vases dont le col serait le plus allongé.







Chapiteau.

236. Le tracé des ombres du chapiteau (*fig. 98 et 99, pl. 21*) sera, pour le lecteur, une seconde occasion d'appliquer les principes relatifs aux ombres des surfaces annulaires.

En effet, à l'exception de la partie carrée qui forme le dessus du chapiteau, et que l'on nomme le tailloir, toutes les autres moulures sont des parties de surfaces annulaires, et les lignes de séparation sur ces moulures se construiront comme nous l'avons dit plus haut.

Mais, avant d'entreprendre cette épure, le lecteur fera bien d'étudier sur la *fig.* 8 quelles sont les lignes que l'on doit déterminer.

Ainsi les lignes de séparation :

- 1°  Sur le tailloir, *fig.* 98, seront les arêtes 1-2, 2-3, 22-*a* et *a*-20 ;
- 2°  Sur le quart de rond, la grande courbe 5-4-9-17 et 26 prolongée jusqu'au point 25, afin de mieux faire sentir sa courbure ;
- 3°  Le cercle horizontal 10-27, qui forme l'arête inférieure du filet qui est situé au-dessous du quart de rond ;
- 4°  La courbe 12-13 sur la demi-surface annulaire qui forme l'astragale du chapiteau ;
- 5°  Le cercle horizontal 14-28, qui forme l'arête inférieure du filet qui est au-dessous de l'astragale ;
- 6°  Enfin la droite *uy*-16 suivant laquelle le fût de la colonne est touché par le plan des rayons lumineux.

Quelques parties de ces lignes de séparation ne produisent pas d'ombres portées, parce qu'elles sont elles-mêmes plongées dans les ombres produites par les moulures supérieures.

Ainsi les parties 4-9 et 17-26 de la grande courbe 5-25 du quart de rond ne porteront pas d'ombre, parce qu'elles sont entièrement couvertes par les ombres du tailloir.

Les parties 6-8 et *v*-27 du filet qui est au-dessous du quart de rond ne peuvent pas former séparations, parce qu'elles sont elles-mêmes plongées dans l'ombre.

Il en sera de même de la petite courbe 21-13 de l'astragale et de l'arc horizontal *z*-28, qui appartient à l'arête inférieure du filet qui est au dehors de l'astragale.

Si l'on veut se familiariser avec tous les accidents de la lumière, il faut étudier avec le plus grand soin, et se rendre compte de toutes les parties de l'ombre portée par une

ligne, quelque composé que soit l'ensemble des surfaces sur lesquelles cette ombre est projetée.

Ainsi, l'arête 1-2 du petit bandeau qui forme la partie supérieure du tailloir donne lieu à une ligne d'ombre composée de trois parties, savoir :

- 1° — La droite 1-29 sur la face verticale A du tailloir ;
- 2° — Un petit arc d'ellipse 29-30, suivant lequel le plan des rayons qui s'appuient sur l'arête 1-2 coupe le cavet horizontal qui raccorde la face verticale B du tailloir avec le petit bandeau qui est au-dessus ;
- 3° — Enfin une petite droite 30-2 qui est l'intersection de la surface verticale B, par le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête 1-2 du tailloir.

Les ombres portées par les arêtes horizontales 22-*a* et *a*-20 se décomposent de la manière suivante :

- 1° — Le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête 22-*a* coupe la surface du quart de rond suivant la courbe *x*-4, qui est par conséquent l'ombre portée par la partie *x*-4 de l'arête *a*-22 ; la partie 22-*x* porterait son ombre sur le plan vertical de projection et sur quelques parties de la colonne, qui ne peuvent pas être vues ici ;
- 2° — Les rayons qui s'appuient sur la partie 4-6 de l'arête horizontale *a*-22 coupent le petit cylindre qui forme le filet au-dessous du quart de rond, suivant une petite courbe 4-6, qui par conséquent est un arc d'ellipse ;
- 3° — Quelques-uns des rayons lumineux qui s'appuient sur la partie 6-*a* de l'arête *a*-22 percent la partie de surface annulaire qui forme le cavet qui est au-dessous du cercle horizontal 10-27, suivant une très-petite courbe 6-31 ;
- 4° — Enfin, les rayons compris entre le point *a* de

l'arête $a-22$ et le rayon du point 31 déterminent un arc $31-a$, qui appartient à l'ellipse aq , suivant laquelle le fût de la colonne est coupé par le plan des rayons qui s'appuient sur l'arête horizontale $a-22$;

5° — Les rayons qui s'appuient sur la partie $a-8$ de l'arête horizontale $a-20$ déterminent sur la colonne la courbe $a-8$, qui appartient à l'ellipse ah , suivant laquelle le fût est coupé par le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur l'arête horizontale $a-20$;

6° — Le même plan coupe le cavet qui est au-dessous du tailloir suivant une très-petite courbe $8-37$, et la surface cylindrique qui forme le filet au-dessous du quart de rond, suivant une ellipse $32-33$ à laquelle appartient la petite courbe $37-9$, qui est l'ombre portée sur le filet par la partie correspondante de la droite horizontale $a-20$;

7° — Le plan formé par les rayons qui s'appuient sur la partie $9-17$ de la droite $a-20$ coupe la surface annulaire du quart de rond, suivant la courbe plane $9-m-17$;

8° — Enfin, la surface plane formée par les rayons qui s'appuient sur la partie $17-20$ de l'arête horizontale $a-20$ coupe le plan vertical de projection, suivant la droite $17-20$ qui forme une partie du contour de l'ombre portée par le chapiteau.

L'ombre portée par la grande courbe $5-25$, qui forme la ligne de séparation sur la surface annulaire du quart de rond, se compose des lignes suivantes :

9° — La courbe $10-4$ est à double courbure et provient de l'intersection du cylindre vertical qui forme le filet au-dessous du quart de rond, par le cylindre oblique formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la partie $5-4$ de la grande courbe $5-25$;

10° — La partie $4-9$ de cette même courbe est, comme

nous l'avons dit précédemment, plongée dans l'ombre portée par le tailloir ;

- 11° — Les rayons lumineux qui s'appuient sur la partie 9-17 de la grande courbe 5-25 du quart de rond forment une surface cylindrique d'où résultent quatre parties différentes d'ombres portées, savoir :
- 12° — La petite courbe 9-*v*, qui est l'ombre portée sur la surface cylindrique du filet par la partie correspondante de la grande courbe 5-25 ;
- 13° — L'arc *vu* déterminé sur le fût de la colonne, par les rayons lumineux qui s'appuient sur l'arc *vu* du quart de rond ;
- 14° — La courbe *u*-21 qui est l'ombre portée sur l'astragale par la partie correspondante *u*-21 de la courbe 5-25 ;
- 15° — Enfin, la courbe 21-17, qui appartient au contour de l'ombre portée par le chapiteau sur le plan vertical de projection.

Cet arc 21-17 fait partie de la courbe 24-21-25, qui est la trace verticale du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe 5-25 du quart de rond.

- 16° — La partie 17-26 de cette dernière courbe est plongée dans l'ombre du tailloir, et la partie 26-25 n'est tracée ici que pour donner plus de précision à la trace 24-21-25 du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le quart de rond.
- 17° — On remarquera que les ellipses 4-6 et *aq* coupent les ellipses *ah*, et 33-32 suivant le rayon de lumière *ac*, qui est l'intersection des deux plans formés par les rayons qui s'appuient sur les arêtes horizontales *a*-22 et *a*-20 du tailloir.
- 18° — Les rayons lumineux qui s'appuient sur le cercle horizontal 10-27 qui forme l'arête inférieure du filet situé

au-dessus du quart de rond percent la surface annulaire du cavet, suivant la courbe 17-31-37-*v*.

19° — La ligne de séparation 14-25-13 de l'astragale détermine la courbe d'ombre portée 14-36-*z* sur le filet inférieur et la courbe *zy*, sur le fût de la colonne.

20° — Enfin, la courbe à double courbure 15-*z* est l'ombre portée dans le cavet qui est au-dessous de l'astragale par une partie du cercle horizontal 14-28, qui forme l'arête inférieure du filet.

237. Si, pour tracer les ombres, on emploie le principe des plans coupants, les courbes de section varieront de forme suivant la position de ces plans.

Quelques-unes des sections pourront contenir jusqu'à douze points, savoir (*fig.* 101) :

Le point 1, suivant lequel un rayon de lumière touche le filet au-dessus du tailloir.

Le point 2, ombre du point 1, appartient à l'ombre portée sur la face verticale du tailloir par l'arête inférieure du filet.

Le point 3, sur l'arête inférieure du tailloir.

Le point 4, ombre du point 3, appartient à la courbe suivant laquelle le quart de rond est coupé par le plan oblique des rayons qui s'appuient sur l'arête inférieure du tailloir.

Le point 5 fait partie de la ligne de séparation sur le quart de rond.

Le point 6 est l'ombre portée par le point précédent sur le filet qui est au-dessous du quart de rond.

Le point 7, sur l'arête inférieure du filet.

Le point 8, ombre du point 7, appartient à la courbe d'ombre portée sur le fût de la colonne par l'arête inférieure du filet.

Le point 9 (*fig.* 101) appartient à la ligne de séparation sur l'astragale.

Le point 10 est l'ombre du point 9 sur la surface cylindrique du filet qui est au-dessous de l'astragale.

Le point 11 appartient à l'arête inférieure du filet.

Enfin, le point 12, ombre du point 11, fait partie de la courbe d'ombre portée sur le fût par l'arête inférieure du filet.

238. Pour quelques plans coupants, la courbe de section pourra ne contenir que six points (*fig.* 100).



239. Enfin, il sera possible que les rayons qui s'appuient sur l'arête inférieure du tailloir ne rencontrent pas le chapiteau, ce que l'on reconnaîtra, parce que ces rayons passeraient au-dessus ou au-dessous des courbes provenant de la section des surfaces rondes par les plans coupants.

Ces rayons, prolongés jusqu'à leur rencontre avec les surfaces des corps extérieurs, détermineront sur ces corps l'ombre portée par le chapiteau.

Je n'ai indiqué sur la figure 99 que cinq plans coupants, savoir :

- 1° — Le plan P_1 qui détermine le point 1 de l'ombre portée par l'arête 1-2 du tailloir ;
- 2° — Le plan P_2 qui contient l'axe de la colonne et qui détermine sur le plan vertical de projection l'ombre portée par le point 24 de l'arête α -22 du tailloir ;
- 3° — Le plan P_3 contient l'ombre portée par le point α , sur le fût de la colonne et sur le plan vertical de projection.

Ce plan contient encore le rayon ac , qui contient les points communs aux deux ellipses suivant lesquelles le fût de la colonne et les surfaces cylindriques des filets sont coupés par les plans des rayons lumineux qui s'appuient sur les arêtes α -22 et α -20 du tailloir ;

- 4°  Le plan P_4 détermine l'ombre du point 2 sur la face B du tailloir ;
- 5°  Enfin, le plan P_3 détermine les ombres portées par les points e , z , et u situés sur les arêtes 2-3 et a -20 du tailloir, et sur la grande courbe 5-25 du quart de rond.

Il y a peu de choses à dire relativement à l'ombre portée sur le plan vertical de projection, parce que cette partie de l'épure ne présente aucune difficulté. Je ferai cependant remarquer que les parties des lignes de séparation qui sont forcées sur la figure 98 sont les directrices des différentes portions de surfaces cylindriques qui rencontrent les surfaces du chapiteau ou qui étant prolongées jusqu'au plan vertical de projection détermineraient le contour de l'ombre portée sur ce plan.

Si l'ombre portée sur le plan vertical devait se détacher de la projection du chapiteau, il faudrait prolonger jusque derrière la colonne les parties de lignes de séparations nécessaires pour déterminer le contour correspondant de l'ombre portée.

Je rappellerai encore au lecteur qu'il ne saurait faire un trop grand nombre de vérifications, c'est le meilleur moyen d'acquérir assez d'habitude pour ne pas hésiter dans la pratique. Il fera bien aussi d'exécuter cette épure sur une très-grande échelle, afin de ne laisser échapper aucun détail.

240. Dans la figure 102, les projections du rayon de lumière font des angles de 45° avec la ligne AZ.

Projections obliques.

241. Il arrive souvent, surtout dans les dessins de machines, que l'on soit conduit à projeter des corps placés dans des positions inclinées par rapport aux plans de projections.

Dans ce cas, le contour de la projection est la trace du cylindre qui serait engendré par une droite perpendiculaire au plan de projection, et qui dans son mouvement resterait toujours tangente à la surface du corps posé.

242. Le lecteur a probablement reconnu l'analogie qui existe entre cette question et la détermination des ombres lorsque la lumière provient du soleil.

243. On conçoit effectivement que dans l'un comme dans l'autre cas, il s'agit de déterminer la courbe suivant laquelle la surface du corps est touchée par une suite de plans parallèles à une droite donnée.

La seule différence, c'est que dans le problème des ombres, cette droite exprime la direction de la lumière, tandis que dans la recherche du contour de la projection d'un corps sur un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

La surface cylindrique engendrée par le mouvement de cette droite se nomme *cylindre projetant*, et sa trace forme le contour de la projection demandée.

244. Nous avons vu (114) que la surface annulaire du tore renfermait les éléments de toutes les surfaces de révolution. Le lecteur pourra donc appliquer à tous les cas particuliers de ce genre de surface les opérations indiquées *pl. 22, fig. 103, 104, 107*, pour construire la projection oblique et les ombres d'une surface annulaire.

La section méridienne étant donnée (*fig.* 103), on fera (*fig.* 104) une projection auxiliaire sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface.

L'épure étant disposée comme nous venons de le dire, voici quel sera l'ordre des opérations.

Projection.

245. La verticale *sa*, *fig.* 103, se projettera, *fig.* 107, par un point *s''*, et sur la *fig.* 104, par la droite *s'-a'* parallèle au plan de la projection 103.

En opérant comme nous avons fait au n° 114, on construira les deux courbes 1-2-3-4, 5-6-7-8, suivant lesquelles la surface proposée serait touchée par une suite de plans parallèles à la droite *s-a*, *s'-a'*, et par conséquent perpendiculaires au plan horizontal de projection.

Ces courbes seront les directrices des deux cylindres projetants verticaux qui touchent la surface extérieurement et dans le vide intérieur.

Les traces de ces cylindres formeront par conséquent le contour de la projection horizontale de la surface.

246. Pour construire ces traces, on abaissera des perpendiculaires de tous les points obtenus sur la projection 103, et l'on prendra (*fig.* 104) la distance de chacun de ces points au plan méridien *mn*, qui, étant parallèle à la projection 103, aura pour trace horizontale *m'n'* (*fig.* 107).

Ainsi pour obtenir *x''*, on abaissera *xx''*, et l'on fera *x''u''* (*fig.* 107) égal à *x'u* (*fig.* 104).

On opérera de même pour tous les autres points.

247. On remarquera sur la figure 107 quatre points de rebroussement *z*, *r*, *t*, *v* analogues à ceux que nous avons obtenus dans l'ombre portée par le tore sur la *fig.* 78 de la pl. 13.

Ces points ont lieu lorsque la verticale génératrice du cylindre projetant devient tangente à la courbe de contact (130-195).

248. Si on voulait obtenir la projection, sur tout autre plan, vertical ou incliné comme on voudrait dans l'espace, il est évident qu'il suffirait de recommencer l'opération précédente, et de construire sur les figures 103 et 104 les courbes suivant lesquelles la surface serait touchée par une suite de plans perpendiculaires au plan donné.

Ces courbes seraient, comme précédemment, les directrices des cylindres projetants, dont les intersections avec le plan proposé détermineraient le contour de la projection de la surface sur ce plan.

249. Le principe précédent est évidemment applicable à toutes les surfaces de révolutions ; mais, dans le cas particulier d'une surface annulaire, on peut obtenir très-promptement la projection oblique en opérant de la manière suivante.

On construira (*fig.* 106) l'ellipse résultant de la projection de la circonférence parcourue par le centre du cercle générateur de la surface, puis en prenant sur cette ellipse un certain nombre de points assez rapprochés, on décrira de chacun de ces points comme centre, un cercle égal au cercle générateur ; la courbe tangente à toutes ces circonférences sera le contour de la projection demandée.

En effet, tous ces cercles pourront être considérés comme les projections d'une suite de sphères dont l'enveloppe sera la surface proposée.

250. La figure 105 est la projection oblique d'un cavet, et la figure 108 fait voir l'application que l'on peut faire des principes précédents au dessin des machines.

251. **Ombres portées.** Supposons que les droites $s-l$, $s''-l''$ (*fig.* 103 et 107) soient les deux projections d'un rayon de lumière : on construira la droite $l-l'$ perpendiculaire sur mn et faisant $l'-o'$ (*fig.* 104) égal à $l''-o''$ (*fig.* 107), on aura $s'-l'$ pour la projection du rayon de lumière sur la figure 104.

Cela étant fait, on construira (114) (*fig.* 103 et 104) les deux courbes 9-10-11-12, 13-14-15-16, suivant lesquelles la surface annulaire serait touchée par une suite de plans parallèles au rayon $s-l$, $s'-l'$; ces deux courbes, formant les lignes de séparation de la surface, seront transportées sur la projection 107, en faisant pour chaque point l'ordonnée $u''x''$ de la *fig.* 107, égale à l'ordonnée correspondante $u'x'$ de la *fig.* 104.

Les courbes que l'on obtiendra seront les directrices de deux cylindres dont les traces formeront le contour de l'ombre portée sur le plan horizontal par la surface proposée.

ÉTUDE D'OMBRES SUR LES CHÂÎNES.

252. Dans les dessins de machines, on rencontre souvent l'occasion de projeter des surfaces annulaires dans toutes sortes de positions. Ainsi, par exemple, supposons que l'on veut tracer les ombres sur les différents anneaux d'une chaîne projetée sur la *fig.* 4 de la planche 23.

253. **Ligne de séparation.** On remarquera d'abord que ces anneaux ne sont autre chose que des surfaces annulaires dont les axes, horizontaux, sont alternativement parallèles et perpendiculaires au plan vertical de projection. Il sera donc facile, par une disposition d'épure convenable, de ramener la question actuelle au principe que nous avons exposé au n° 114 ; ainsi, il est évident que pour obtenir les lignes de séparation sur l'un des anneaux qui sont désignés par les lettres

A, A', A'', il suffira d'exécuter sur les projections A et A' toutes les opérations qui, sur la planche 13, se rapportent aux *fig. 77* et *78*, en supposant seulement que l'épure aurait été renversée : c'est-à-dire que la projection A, *fig. 7*, de la planche actuelle, remplacera la projection verticale *fig. 77* de la planche 13, tandis que la projection horizontale *fig. 78* de cette même planche serait remplacée par l'une des deux projections A' ou A'' de la planche actuelle.

Cela étant admis, et les projections SO, S'O' de la lumière étant données, on obtiendra sur l'anneau AA' les lignes de séparation extérieure et intérieure, par la méthode exposée au n° 114, ou par l'une des autres méthodes indiquées dans le *Traité de géométrie descriptive*.

Ces deux lignes sont partout désignées sur l'épure par les n°s 1 et 2.

254. Pour déterminer les lignes de séparation sur les anneaux désignés sur la *fig. 4* par B' et B'', on fera usage de leurs projections B et B''', *fig. 7* et 6.

On peut supposer que cette dernière figure est la projection de l'anneau BB' sur un plan perpendiculaire à la ligne AZ, et que l'on a ensuite rabattu ce plan autour de l'horizontale projetante de l'un de ces points, jusqu'à ce qu'il soit venu prendre la position indiquée *fig. 6*.

En faisant $u'''S'''$ de la *fig. 6* égal à $u'S'$ de la *fig. 4* on aura $S'''C'''$ pour la projection du rayon lumineux qui passerait par le centre C' de l'anneau B', *fig. 4*.

Cela étant fait, il sera facile de construire sur les *fig. 6* et *7* les lignes de séparation de l'anneau BB''.

Ces deux lignes sont désignées sur l'épure par les n°s 3 et 4.

255. **Ombres portées.** Les lignes de séparation obtenues sur les surfaces AA'A'' et BB'B'', seront les directrices des cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur les différents anneaux de la chaîne ; et les traces de ces surfaces.

cylindriques détermineront toutes les ombres portées sur les plans de projection.

Les quatre points de rebroussement qui existent sur les courbes d'ombres portées par les lignes de séparation intérieures sont trop peu sensibles, dans l'exemple actuel, pour qu'il soit nécessaire de s'en occuper (*pl. 14, fig. 2*).

Quand on aura déterminé les traces des cylindres formés par les rayons lumineux qui enveloppent les anneaux, on indiquera par des lignes pleines les parties de ces courbes qui forment le contour réel des ombres portées, et l'on conservera le reste en lignes ponctuées.

256. Il semble, au premier abord, que l'on pourrait négliger tout ce qui n'appartient pas au contour réel des ombres.

Mais, pour agir ainsi, il faudrait déterminer sur les lignes de séparation quelles sont les parties qui portent ombre sur les plans de projection, et quels sont les rayons lumineux qui sont arrêtés par les différentes surfaces des anneaux.

Ensuite, la construction entière des traces des cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur les lignes de séparation est souvent très-utile pour construire les ombres portées sur l'objet dont on s'occupe, parce que les points suivant lesquels se rencontrent les traces des cylindres formés par les rayons qui s'appuient sur deux lignes de séparation indiquent les points de l'une de ces lignes qui portent ombre sur l'autre, et facilitent en outre la recherche des points d'ombres portés sur toute autre ligne de la surface (119).

Ainsi, les rayons lumineux qui s'appuient sur la ligne de séparation 3 de la surface B'', *fig. 4*, forment une surface cylindrique qui a pour trace verticale la courbe 3 de l'ombre portée. Le cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la ligne de séparation 1 de la surface A'' a pour trace la courbe 1 de l'ombre portée.

Le point 5, suivant lequel les deux courbes 1 et 3 se ren-

contrent, détermine le rayon 5-5 commun aux deux surfaces cylindriques, et ce rayon, s'appuyant sur les deux courbes, détermine par conséquent le point 5, qui est l'ombre portée sur la courbe 1 de l'anneau A'' par le point 5 de la courbe 3 de l'anneau B'' (119).

On obtiendra de la même manière sur l'anneau A'' le point 6, qui est l'ombre portée sur la courbe 2 par le point 6 de la courbe 3 de l'anneau B'' ; le point 7 déterminé sur la courbe 1 de l'anneau A'' par le rayon lumineux qui contient le point 7 de la courbe 4 de l'anneau B'', et le point 8, qui est l'ombre portée sur la courbe 2 de l'anneau A'' par le point 8 de la courbe 4 de l'anneau B''.

Indépendamment des quatre points que nous venons d'obtenir, il sera facile de déterminer autant de points que l'on voudra.

Ainsi, le plus grand et le plus petit parallèle de la surface A'', *fig. 4*, ayant le même centre OO'.

On décrira de ce point, comme centre, les deux circonférences concentriques 9 et 10 égales au plus grand et au plus petit parallèle de la surface A''.

On concevra le rayon lumineux qui passerait par ce point, et l'on construira la trace verticale O'' de ce rayon.

Ces deux cercles seront les traces des cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuieraient sur le cercle de gorge et sur le plus grand parallèle de la surface A'', si cette surface était transparente ; les points suivant lesquels les courbes 3 et 4 rencontrent les deux cercles concentriques 9 et 10 détermineront quatre rayons lumineux, qui s'appuient en même temps sur les lignes de séparation de la surface annulaire B'' et sur les deux parallèles 9 et 10 de la surface A'' ; de sorte que les points 11, 12, 13 et 14, suivant lesquels les rayons qui contiennent ces points rencontrent les deux cercles 9 et 10 de la surface A'', détermineront les points d'ombre portée sur les deux cercles par les points correspondants des lignes de séparation de la surface B''.

Les points 13 et 14 sont trop près des points 7 et 8 pour que la courbe qui contient ces quatre points soit bien déterminée. Il sera donc utile de chercher quelques points intermédiaires.

Ainsi, par exemple, si par le point n de la *fig. 7* nous traçons la projection horizontale d'un rayon lumineux, nous déterminerons en n'' l'ombre portée par le centre nm' du parallèle 17-17 de la surface A'' , *fig. 4*.

Le cercle 17-17, décrit du point n'' comme centre, sera la trace du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le cercle 17 de la surface, et les points 15 et 16, suivant lesquels le cercle 17 est rencontré par les courbes 3 et 4 de l'ombre portée, détermineront sur la circonférence 17 de l'anneau A'' , les ombres portées par les deux points correspondants des courbes 3 et 4 de l'anneau B'' (119).

Il est évident que l'on pourra obtenir ainsi deux points sur chacun des parallèles de la surface A'' .

On déterminera de la même manière l'ombre portée sur la partie inférieure de l'anneau A'' par la partie supérieure de l'anneau B' .

Ainsi, les courbes 1, 2 et les cercles 9, 10 et 17 de l'ombre portée sur le plan vertical de projection par l'anneau A'' seront rencontrés par des courbes 3 et 4 de l'ombre portée par l'anneau B' , suivant 10 points qui appartiendront aux courbes d'ombre portées par les lignes de séparation 3 et 4 de l'anneau B' sur la surface annulaire de l'anneau A'' .

257. Les points désignés sur l'épure par la lettre m'' sont les traces des rayons qui passeraient par les points suivant lesquels les surfaces se touchent. En effet, le point mm' , suivant lequel l'anneau A' s'appuie sur B' , est évidemment situé sur le cercle de gorge de la surface A' , et sur le cercle correspondant de la surface B' . Le rayon qui passe



par le point m sera donc l'intersection du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le premier de ces deux cercles avec le cylindre des rayons qui s'appuient sur le second.

D'où il résulte que la trace verticale du rayon commun à ces deux cylindres doit être située en même temps sur le cercle 10 qui est la trace verticale du premier, et sur l'ellipse 18 qui est la trace verticale du second.

Ces points ne sont indiqués ici que comme exercices, car il est évident qu'ils ne peuvent pas porter ombre.

258. Les *fig. 2, 3 et 5* sont les projections d'une chaîne dont les anneaux, *fig. 2 et 5*, ont la forme d'un S, et se composent évidemment de deux parties de surfaces annulaires qui se raccordent suivant le cercle méridien projeté sur la *fig. 2* par la petite droite ac .

Les *fig. 2 et 3* serviront à déterminer les lignes de séparation sur le chaînon AA' , et les *fig. 3 et 5* détermineront les lignes correspondantes sur le chaînon BB' .

On pourra considérer chaque chaînon comme terminé par deux hémisphères désignées sur la *fig. 5* par m et n .

Les lignes de séparation sur ces demi sphères pourront être déterminées facilement par les principes indiqués au n° 102, et quand toutes les lignes de séparation seront obtenues, on tracera les ombres portées sur les plans de projection et sur les anneaux, en opérant comme nous l'avons dit plus haut (256).

La partie supérieure de la chaîne contient deux anneaux allongés comme celui qui est projeté sur les *fig. 8 et 9*.

Chacun de ces anneaux se compose de deux moitiés A et B d'une surface annulaire et des deux petits cylindres h et k .

La recherche des lignes de séparation s'obtiendra en disposant l'épure comme nous l'avons fait pour les chaînons en S projetés sur les *fig. 2, 3 et 5*.

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire de donner ici de plus grands détails sur cet exemple que j'indique aux élèves comme sujet d'une épure qu'ils feront bien d'exécuter sur une plus grande échelle.

DEUXIÈME ÉTUDE D'OMBRES SUR DES CHÂÎNES.

259. La planche 24 fera facilement comprendre comment il faudrait disposer l'épure pour construire la projection et les ombres de la chaîne projetée sur les *fig. 3* et *7*.

Cet exemple diffère de ceux que nous avons étudiés sur la planche qui précède, en ce que les axes horizontaux des surfaces annulaires rencontrent le plan vertical de projection suivant des angles de 45° .

260. **Épure.** Les *fig. 3, 5, 6, 7, 8* et *9* contiennent toutes les opérations nécessaires pour construire les projections et les ombres de la partie de la chaîne qui est projetée sur la *fig. 3*.

Les détails de cette épure n'étant que la répétition de ce que nous avons déjà dit plusieurs fois, il suffira d'indiquer l'ordre des opérations à effectuer pour obtenir le résultat.

261. **Projection de la chaîne.** Les différentes courbes qui forment le contour de la projection de la chaîne sur le plan vertical *fig. 3* sont les traces des cylindres horizontaux tangents et perpendiculaires au plan vertical de projection *A'Z'*.

Ces cylindres auront évidemment pour directrices les courbes suivant lesquelles les surfaces de la chaîne seraient touchées par une suite de plans perpendiculaires au plan vertical *A'Z'*, et parallèles par conséquent à une horizontale projetante *VO*, *fig. 7*.

Pour obtenir ces courbes, on pourra opérer de la manière suivante.

1° Les projections horizontales des anneaux M et N étant construites, *fig. 7*, on concevra un plan auxiliaire de projection A''Z'' vertical et perpendiculaire aux axes des surfaces annulaires qui forment les deux anneaux du chaînon M.

Cette projection auxiliaire est rabattue *fig. 9*, autour de sa trace horizontale A''Z''.

Les anneaux du chaînon M se projettent sur le plan auxiliaire de projection A''Z'', par des cercles concentriques qui se raccordent sur la perpendiculaire abaissée de O sur A''Z''.

Les demi-sphères qui terminent chaque chaînon se raccordent avec les surfaces annulaires correspondantes par deux cercles qui se projettent en ligne droite sur le plan auxiliaire A''Z''.

2° La droite VO, perpendiculaire au plan vertical de projection A'Z', se projette sur ce plan par le point O' et sur le plan auxiliaire de projection par la droite V''O'' parallèle à A''Z''.

Les dispositions précédentes étant adoptées, on exécutera sur les *fig. 7* et *9* toutes les opérations nécessaires pour déterminer les deux courbes suivant lesquelles les surfaces des deux anneaux du chaînon M sont touchées par les cylindres projetants parallèles à la droite horizontale VO, V''O''.

Pour mieux apprécier la courbure des lignes cherchées, on fera bien d'opérer comme si les deux surfaces annulaires étaient entières, sauf à ne conserver que les parties de ces lignes qui appartiennent à la surface réelle du chaînon.

Les courbes que l'on obtiendra ainsi seront au nombre de deux pour chacune des deux surfaces annulaires, savoir : les courbes, suivant lesquelles les deux anneaux sont touchés par les cylindres projetants qui les enveloppent extérieurement, et les deux courbes suivant lesquelles les mêmes anneaux sont touchés par les cylindres projetants intérieurs.

Les cylindres projetants parallèles à la droite VO, V''O'' touchent les deux sphères qui terminent les chaînons, suivant deux grands cercles qui se projettent sur la figure 7 par des

droites parallèles à $A'Z'$ et dont les projections sur la figure 3 seront par conséquent deux cercles.

Lorsque l'on aura déterminé sur les *fig. 7* et *9* les projections des deux courbes suivant lesquelles les surfaces des anneaux sont touchées par les cylindres projetants parallèles à la droite horizontale VO , $V''O''$, il sera facile de projeter ces courbes sur le plan vertical $A'Z'$.

Il suffira pour cela de tracer une perpendiculaire à $A'Z'$ par chacun des points obtenus sur la projection *fig. 7*, et de porter sur cette perpendiculaire la hauteur du point correspondant au-dessus de $A''Z''$, ou de toute droite horizontale de la même figure.

262. Lorsqu'on aura construit sur le plan vertical $A'Z'$, les projections des courbes, suivant lesquelles les anneaux du chaînon M sont touchés par les cylindres projetants parallèles à la droite horizontale VO , $V''O''$, on construira les courbes suivant lesquelles les surfaces annulaires du chaînon N sont touchées par les cylindres projetants perpendiculaires au plan vertical $A'Z'$.

Ces courbes pourront être déterminées de la même manière au moyen de la figure 6, qui est une projection, sur le plan vertical $A'''Z'''$, perpendiculaire aux axes des anneaux qui forment le chaînon N ; cette seconde opération ne serait nécessaire que si les axes des anneaux n'étaient pas également inclinés par rapport au plan vertical de projection $A'Z'$, comme on le voit sur la projection horizontale de la chaîne qui est dessinée figure 2; mais dans l'épure actuelle, il résulte de la position symétrique des deux anneaux, par rapport au plan $A'Z'$, que les courbes qui forment le contour de la projection du chaînon N sont exactement égales à celles qui forment le contour de la projection du chaînon M ; de sorte que les hauteurs des différents points de ces dernières courbes au-dessus des droites horizontales qui pas-

sent par les centres des anneaux du chaînon M, donneront sur les mêmes perpendiculaires les hauteurs des points correspondants des courbes qui forment le contour de la projection du chaînon N.

263. Les courbes dont nous venons de parler n'ont pas été tracées sur les figures 9 et 6, et je n'en parle ici que pour indiquer au lecteur une occasion de s'exercer à l'application du principe général énoncé au n° 243.

Il sera beaucoup plus simple, dans le cas actuel, de construire directement sur la figure 3 les courbes qui forment le contour de la projection des anneaux.

Pour cela il suffit, comme nous l'avons dit au n° 249, de considérer la surface de chaque chaînon comme l'enveloppe des différentes positions d'une sphère mobile, dont le centre occuperait successivement tous les points des circonférences des cercles verticaux projetés sur le plan horizontal par les droites aa , cc .

Après avoir construit sur le plan vertical $A'Z'$ les ellipses $c'c'$ et $a'a'$ suivant lesquelles se projettent les cercles verticaux aa , cc de la figure 7, on prendra sur chacune de ces ellipses (*fig. 4*) un certain nombre de points assez rapprochés. Puis, de chacun de ces points comme centre, on décrira une circonférence égale à la section méridienne de l'une des surfaces annulaires des chaînes.

Ces différents cercles seront les projections successives de la sphère génératrice G, et les courbes tangentes $b'b'$ et $h'h'$ formeront le contour de la projection verticale des anneaux.

Il est évident qu'il n'est pas nécessaire de construire entièrement les cercles dont nous venons de parler, et qu'il suffira de tracer pour chaque sphère les deux arcs zz et xx qui doivent contenir les points de tangence correspondants.

Il résulte de ce qui précède que les courbes qui forment le contour des projections des anneaux sur le plan verti-

cal $A'Z'$ seront partout à égale distance des ellipses, suivant lesquelles se projettent les circonférences aa et cc de la figure 7, de sorte que l'on pourra encore opérer de la manière suivante :

- 1° ~~On commencera~~ On commencera *fig. 4* par déterminer les foyers F et F' de l'ellipse $a'a'$.
- 2° ~~On tracera~~ On tracera pour chaque point m' de cette courbe, les deux rayons vecteurs correspondants Fm' , $F'm'$.
- 3° ~~La bissectrice~~ La bissectrice de l'angle $Fm'F'$ sera la normale au point m' .
- 4° ~~On portera~~ On portera sur cette normale les distances $m'n'$, $m'u'$, égales chacune au rayon de la sphère génératrice de l'anneau.

Les points n' et u' appartiendront aux courbes qui forment le contour de la projection verticale de la surface annulaire correspondante.

Cette méthode est un peu plus longue que celle qui précède; mais elle a l'avantage de déterminer exactement chacun des points des courbes demandées.

Elle permettra de plus de construire les projections de ces courbes sur le plan horizontal de projection.

En effet, on remarquera que les différents points n' et u' des courbes $b'b'$ et $h'h'$ (*fig. 4*) sont situés dans des plans tangents perpendiculaires au plan vertical de projection.

Or, chacun de ces plans ne peut toucher la sphère mobile correspondante qu'en un point du grand cercle, qui est parallèle au plan vertical $A'Z'$.

Mais ce grand cercle étant projeté sur le plan horizontal par une droite nu parallèle à $A'Z'$, il s'ensuit que lorsque les projections verticales n' et u' des deux points de tangence seront obtenus, les perpendiculaires $n'n$ et $u'u$ détermineront les projections horizontales correspondantes n et u .

C'est en opérant de cette manière que l'on a construit sur la figure 7 les projections horizontales bb , hh , dd , kk

des courbes qui forment le contour de la projection verticale des anneaux sur la figure 3.

Ces dernières courbes pouvant être obtenues sur la projection verticale $A'Z'$ sans le secours de leurs projections horizontales, on aurait pu éviter cette dernière partie de l'opération.

Mais on verra bientôt que les courbes b , h , d , k de la figure 7 nous seront fort utiles pour vérifier certains points essentiels des lignes de séparation et des ombres portées.

264. Nous n'avons pas parlé de quatre points de rebroussement qui ont lieu sur chacune des courbes qui déterminent le contour intérieur des projections sur le plan vertical $A'Z'$, parce que ces points, qui seraient très-rapprochés, peuvent être négligés ici sans aucun inconvénient (pl. 14, fig. 2).

Ombres.

265. **Lignes de séparation.** Lorsque les projections sur le plan vertical $A'Z'$ seront terminées, et que l'on aura bien reconnu les lignes qui sont vues et celles qui sont cachées, on construira toutes les lignes de séparations et d'ombres portées.

Les rayons lumineux étant parallèles à la droite donnée SO , $S'O'$ (fig. 7 et 3), on portera $s'S'$ de s'' en S'' sur la droite SS'' perpendiculaire à $A''Z''$, et la droite $S''O''$ sera la projection d'un rayon lumineux sur le plan auxiliaire de projection $A''Z''$.

Cela étant fait, on déterminera (114) sur les figures 7 et 9 les courbes extérieures et intérieures, suivant lesquelles les surfaces annulaires du chaînon M sont touchées par les surfaces cylindriques formées par les rayons lumineux tangents, puis on reportera les mêmes courbes sur la projection verticale $A'Z'$, en prenant la hauteur de chaque point sur la projection auxiliaire $A''Z''$.

Les lignes projetées sur la figure 9 par les ellipses 12-13-14

et 27-28-29, sont les projections des grands cercles, suivant lesquels les deux sphères E et F sont coupées par des plans perpendiculaires à la direction SO, S'O'' des rayons lumineux.

On peut facilement obtenir ces courbes en opérant comme nous l'avons dit au n° 102.

On remarquera que ces deux ellipses, qui forment les lignes de séparation sur les sphères E et F, et les lignes de séparation sur les surfaces annulaires du chaînon M, doivent se rencontrer sur les droites O''H et O''K de la figure 9, et sur les ellipses correspondantes de la projection A'Z', ces dernières lignes, qui n'ont pas été conservées sur l'épure, étant les projections des deux grands cercles, suivant lesquels les surfaces des anneaux se raccordent avec les deux sphères qui les terminent.

Ainsi, en partant du point 1, qui est projeté figure 9, sur le bord, à droite et au bas de l'épure, la ligne de séparation sur le chaînon M'' se compose d'abord de l'arc 1-2-3, qui appartient à la ligne de séparation extérieure de l'anneau B''.

Cette courbe se raccorde au point 3 avec la ligne de séparation intérieure de l'anneau A''.

De là elle se dirige par les points 4-5-6 et 7, suivant lesquels elle vient couper le cercle de gorge; elle passe ensuite par les points 8-9-10-11 et 12, où elle est remplacée par la demi-ellipse 12-13 et 14, qui forme la ligne de séparation sur la sphère E.

Du point 14, la ligne de séparation se reporte sur la partie convexe de l'anneau A'', et passe par les points 15-16 et 17, suivant lesquels elle coupe le plus grand parallèle de l'anneau A'', après quoi elle continue sur la partie convexe de l'anneau A'', en passant par les points 18-19-20.

Arrivée là, elle se raccorde avec la ligne de séparation intérieure de l'anneau B'', dont elle contourne la partie creuse en passant par 21-22-23 et 24, puis après être sortie du cadre elle passe par 25 et 26, et arrive au point 27, où elle est rem-

placée par la demi-ellipse 27-28 et 29 qui forme la ligne de séparation sur la sphère F.

Du point 29, la ligne de séparation 29-30 est formée par la courbe de contact extérieure de l'anneau B'', dont elle parcourt la surface convexe, puis après être sortie deux fois du cadre de l'épure, elle revient au point 1, par lequel nous avons commencé.

Les mêmes numéros permettront de suivre cette courbe dans toutes les sinuosités sur la projection verticale A'Z' et sur toutes les ombres portées.

Mais, pour éviter la confusion sur la projection horizontale (*fig. 7*), je n'ai indiqué par des chiffres que les points les plus remarquables.

266. En procédant de la même manière, il sera facile de construire les lignes de séparation sur les deux surfaces annulaires du chaînon N (*fig. 6*).

Ainsi, la distance $s'S'$ de la figure 3 étant reportée de s'' en S''' sur la projection auxiliaire A'''Z''', on obtiendra $S'''O'''$ pour la projection du rayon lumineux SO, S'O'; puis, par les méthodes exposées au n° 114, on déterminera les lignes de séparation extérieure et intérieure sur les deux anneaux du chaînon N.

Ces courbes étant obtenues sur les figures 6 et 7, on les reportera sur la projection verticale (*fig. 3*), en opérant comme pour les courbes des anneaux A et B du chaînon N.

Les lignes de séparation sur les sphères T et U pourront encore être déterminées sur les projections 6 et 3 par la méthode exposée au n° 102, et l'on remarquera que les ellipses suivant lesquelles ces courbes se projettent, et les lignes de séparation sur les anneaux du chaînon N, se rencontrent, *fig. 6*, sur les droites $o'''G$ et $o'''L$, et *figure 3* sur les projections des cercles suivant lesquels les deux sphères se raccordent avec les anneaux correspondants. Ces ellipses n'ont pas été conservées.

Ainsi, en commençant par le point 31, sur le bord inférieur du cadre (*fig. 6*), la ligne de séparation 31-32, située sur la partie convexe de l'anneau D'', vient se raccorder au point 32 avec la ligne de séparation intérieure de l'anneau C''; de là elle passe par le point 33, puis après avoir coupé le cercle de gorge en un point 34, elle contourne le vide intérieur de l'anneau C'', passe ensuite par les points 35 et 36, après lequel elle coupe une seconde fois le cercle de gorge au point 37, elle arrive alors au point 38, où elle est remplacée par la demi-ellipse 38-39 et 40, qui forme la ligne de séparation sur la sphère T.

Du point 40, la ligne de séparation parcourt la surface convexe de l'anneau C'' en suivant les points 42-43 et 44, où elle coupe le plus grand parallèle, puis elle passe par les points 45 et 46, où elle se raccorde avec la ligne de séparation intérieure de l'anneau D'', et coupant le cercle de gorge aux points 47 et 48, elle arrive au point 49, et parcourt la demi-ellipse 49-50 et 51, qui est ensuite remplacée par la courbe extérieure de l'anneau D'' jusqu'au point 31, par lequel nous avons commencé.

On pourra facilement retrouver les parties de cette courbe sur la projection verticale *fig. 3* et sur les ombres portées.

267. Ombres portées sur les plans de projection. Les courbes de séparations déterminées sur tous les anneaux seront les directrices des surfaces cylindriques formées par les rayons lumineux qui s'appuient sur les différentes parties de la chaîne, et les traces de ces différents cylindres formeront le contour des ombres portées sur les plans de projection.

Si le point 1 de la figure 9 était projeté sur le plan vertical A'Z', cette projection serait située un peu au-dessus du bord supérieur du cadre, et le point 1 que l'on voit sur le contour de l'ombre portée serait alors déterminé par le point 1 de la ligne de séparation.

Or, en commençant par ce point, la trace du cylindre formé

par les rayons lumineux qui enveloppent le chaînon M' passe par le point 2 et arrive au point 3, qui est l'ombre portée par le point de raccordement des deux courbes 1-2-3 et 3-4-5 de la figure 9.

Du point 3, la ligne d'ombre portée parcourt les points 4-5-6-7-8-9-10-11 et 12, où elle se raccorde avec la demi-ellipse 12-13 et 14, qui est l'ombre portée par la sphère E' .

Du point 14, l'ombre devient 15-16-17-18-19-20-21-22-23-24-25-26 et 27.

Elle se raccorde à ce dernier point avec la demi-ellipse 27-28 et 29, qui est l'ombre portée par la sphère F' qui termine l'anneau supérieur du chaînon M' .

On remarquera que l'ellipse 11-12-13 est absolument égale et parallèle à l'ellipse 27-28-29.

Du point 29 la trace du cylindre remonte vers le point 30 et parcourt un arc qui vient se terminer au point 1 par lequel nous avons commencé.

Par conséquent, si aucun des rayons lumineux n'était arrêté par les surfaces de la chaîne, le contour de l'ombre portée serait une courbe continue qui, commençant et finissant par le point 1, passerait sans interruption par tous les numéros de 1 à 30.

268. Cette courbe contient quatre points de rebroussement, 6, 8, 22 et 24.

Les deux premiers sont les ombres des points suivant lesquels la courbe de séparation intérieure de l'anneau AA'' est touchée par les rayons de lumière correspondants.

Les points 22 et 24 appartiennent à la courbe de séparation intérieure de l'anneau BB'' du chaînon M .

Ces points ne sont pas sur la projection verticale des anneaux.

Les quatre points 6, 8, 22 et 24 sont déterminés par leurs projections sur les *fig.* 7 et 9.

Ces projections pourraient être obtenues rigoureusement par les principes que nous avons exposés au n° 195 ; mais, dans la pratique, on peut se contenter de ce que nous avons dit au n° 130.

Ainsi, après avoir déterminé les points 6 et 8 sur les projections 9, 7 et 3, on s'assurera :

- 1° — Que les deux projections correspondantes de chaque point sont situées sur une perpendiculaire à la ligne $A''Z''$ ou $A'-Z'$;
- 2° — Que partout la projection du rayon de lumière qui passe par l'un des points dont il s'agit est tangente à la projection correspondante de la courbe ;
- 3° — Enfin, que les projections de ces points sur la *fig. 3* sont bien exactement à la même hauteur que les projections des mêmes points sur la *fig. 9* ; ces hauteurs étant comptées à partir des horizontales qui passent par les points O' et O'' de ces deux figures.

Le point 123 de l'anneau A'' et le point correspondant de l'anneau B'' n'existent pas, puisqu'ils seraient situés sur les parties supprimées des lignes de séparation correspondantes.

Le point 11 de l'anneau $A'A''$ et le point 26 de l'anneau $B'B''$ existent, mais ils sont si près des points 12 et 27 suivant lesquels les lignes de séparation des anneaux se raccordent avec les cercles de séparation sur les sphères qui les terminent, qu'il serait impossible, même en exécutant l'épure sur une très-grande dimension, de rendre sensible la distance de ces points sur la courbe d'ombre portée ; ce qui provient surtout de ce qu'aux points 12 et 27 les rayons lumineux devenant tangents à la courbe de séparation, une petite partie de cette ligne se confond avec la direction de la lumière et les rayons lumineux des points 11 et 12 étant extrêmement près l'un de l'autre, la distance de leurs traces verticales est par conséquent insensible.

269. La trace du cylindre formé par les rayons lumineux

qui s'appuient sur le chaînon N diffère beaucoup, *fig. 1*, de la trace précédente ; ce qui provient de ce que les anneaux de ces deux chaînons ne sont pas exposés de la même manière à l'action des rayons lumineux.

Ainsi, en commençant, *fig. 7*, par l'ombre portée sur le plan horizontal de projection par le point 31 du chaînon N, on obtiendra d'abord l'arc 31-32, puis la courbe se brise au point où elle rencontre la ligne A'Z', et parcourt sur le plan vertical de projection un petit arc qui contient les points 115, 112 et 33.

Immédiatement après, le contour de l'ombre rencontre une seconde fois la ligne A'Z', où elle se brise encore pour se porter sur le plan horizontal de projection, en passant par les points 35-36 et 38.

Ici la courbe se raccorde avec la demi-ellipse 38-30 et 40 qui provient de l'ombre portée sur le plan horizontal par la sphère T du chaînon N, *fig. 6*.

Du point 40 la courbe d'ombre portée sur le plan horizontal passe par les points 41-42-43 et rencontre une troisième fois la ligne A'Z', où elle se brise pour se relever sur le plan vertical de projection en passant par les points 44-45-80-81-46-47-89-94 et 49. Elle se raccorde ici avec la demi-ellipse 49-50 et 51 qui provient de l'ombre portée par la sphère U du chaînon N, *fig. 6*.

Du point 51 la courbe remonte vers le point 124 et redescend ensuite en passant par les points 93 et 88, puis elle va couper une quatrième fois la ligne A'Z', après quoi elle vient se terminer au point 31 par lequel nous avons commencé.

Ainsi, les cylindres formés par les rayons lumineux qui enveloppent l'anneau N forment une surface continue dont la trace peut être suivie sans interruption, en commençant et finissant par le point 31.

270. On peut voir sur la figure 1 et sur l'ombre portée par l'anneau qui serait au-dessus de M', quelle serait la forme de

la courbe précédente si les rayons lumineux n'étaient pas arrêtés par le plan horizontal de projection.

271. Les points de rebroussement de la courbe qui forme le contour de l'ombre portée par le chaînon N sont tout à fait insensibles, et peuvent être négligés sans inconvénient.

272. Lorsque les ombres déterminées par les rayons lumineux qui enveloppent la chaîne sont obtenues, on tracera en lignes pleines la partie réelle du contour et l'on conservera le reste en lignes ponctuées.

273. La courbe 18-103-107-105-113-112 et 15 est l'ombre portée sur le plan horizontal et sur une partie du plan vertical par la partie de l'anneau Q' qui est projetée sur la figure 3 de l'épure.

274. **Ombres portées sur les anneaux.** Cette partie de la question est celle qui offre ordinairement le plus de difficultés.

Il semblerait cependant, au premier abord, que l'opération doit consister pour chaque point à trouver l'intersection du rayon de lumière qui contient ce point avec la surface sur laquelle son ombre est portée, de sorte que tout se réduirait à l'application répétée du principe, au moyen duquel on trouve l'intersection d'une droite avec une surface.

Cela est parfaitement vrai, mais on s'abuserait beaucoup si l'on croyait pouvoir ainsi ramener toutes les opérations partielles à un principe général.

La grande variété des surfaces exposées à l'action de la lumière et de celles sur lesquelles les ombres sont portées, les accidents nombreux qui résultent de leurs diverses positions dans l'espace, combinées avec la direction de la lumière, exigent des dispositions d'épures sans lesquelles il serait souvent très-difficile de réussir.

Je l'ai dit bien des fois, ce n'est pas avec des principes généraux que l'on fait de la pratique. Celui qui voudrait em-

ployer partout la même méthode n'arriverait à rien ; c'est comme un ouvrier qui voudrait exécuter toutes les parties d'un travail composé avec un seul outil ; il parviendrait peut-être, avec beaucoup d'adresse et une grande patience, à obtenir un résultat remarquable, mais il y passerait dix fois autant de temps qu'un autre, et ne ferait pas mieux.

Je ne veux pas dire qu'il faille négliger l'étude de la théorie ; c'est toujours par là qu'il faut commencer, si l'on veut comprendre tous les détails de l'application. Mais si l'on ne s'exerce pas, par de nombreux exemples, à reconnaître dans chaque cas les circonstances particulières, ou les méthodes d'abréviation qui peuvent simplifier le travail, on ne deviendra jamais habile praticien.

Il est certainement très-utile de démontrer la généralité d'un principe, mais il ne faudrait pas cependant reculer devant le travail beaucoup plus long qui résulte de son application.

J'insiste sur ce qui précède, parce que beaucoup de personnes croient *savoir* dès qu'elles *comprennent*, ce qui n'est pas du tout la même chose. Reculant devant les exercices nécessaires pour acquérir l'habitude des applications, elles affectent de dédaigner les détails de la pratique comme ne présentant plus aucune difficulté, et renvoient cette étude au moment où elles auront l'occasion d'en faire usage ; puis, lorsque ce moment est arrivé, elles sont tout étonnées de ne point réussir, et en concluent quelquefois que la théorie ne sert à rien, ce qui provient seulement de ce qu'elles ne sont pas suffisamment exercées à en faire l'application.

275. Mais pour revenir à notre étude, dont je me suis peut-être un peu trop écarté, nous remarquerons que l'une des plus grandes difficultés n'est pas de trouver l'ombre d'un point, mais de savoir sur quelle partie de la surface cette ombre doit être cherchée.

C'est alors que les ombres portées sur les plans de projection seront pour nous d'un grand secours.

276. Ombre portée par l'anneau B sur la sphère E.

En effet, de ce que la courbe 1-2-3 qui forme le contour de l'ombre portée par une partie de la ligne de séparation du chaînon N' rencontre l'ellipse 12-13-14, on peut conclure que les surfaces cylindriques formées par les rayons lumineux qui s'appuient sur ces deux courbes se coupent suivant un rayon commun qui passe par le point 55, et qui détermine par conséquent sur l'ellipse 12-13 et 14 de la sphère E, l'ombre portée par le point 55 de la ligne de séparation 1-2-3 du chaînon M' (119).

Le point 56 de l'ombre portée est la trace verticale d'un second rayon commun aux deux cylindres, et ce rayon déterminera également sur l'ellipse 12-13 et 14, l'ombre portée par le point 56 de la ligne de séparation du chaînon M'.

Les deux points 55 et 56 de l'ellipse 12-13-14 doivent donc être liés entre eux par une courbe 55-57-56 qui est l'ombre portée sur la sphère E', par la ligne de séparation 1-2-3 du chaînon M'.

Cette courbe située derrière la sphère E' (*fig. 2*) ne peut pas être vue sur cette projection, mais il est facile de la retrouver sur la figure 9.

Or, le but que l'on se propose particulièrement dans l'étude actuelle étant de construire les ombres sur la projection (*fig. 3*), il est évident que l'on peut négliger la courbe dont nous venons de parler, et ne tracer sur les projections auxiliaires des figures 6 et 9 que ce qui est indispensable pour compléter la figure 3.

Mais, comme il s'agit ici de s'exercer à l'application des principes, nous chercherons un point de la courbe 55-57 et 56 comme si elle devait être vue sur la figure 3.

Plusieurs méthodes peuvent être employées dans ce but.

Ainsi un plan parallèle à la direction de la lumière coupera la sphère E suivant un cercle qui, projeté ou rabattu, contiendra le point demandé.

Mais il est évident que la difficulté consiste à éviter la confusion qui pourrait résulter de la position dans l'espace du plan coupant que l'on aurait choisi.

Or, on doit se rappeler (*Géométrie descriptive et Ombres*) que pour obtenir l'intersection d'une sphère avec une surface cylindrique, la disposition d'épure la plus favorable consiste à employer un plan de projection parallèle au cylindre, puis à couper la sphère et le cylindre donné par des plans parallèles à ce nouveau plan de projection.

Ces plans rencontreront la sphère suivant des cercles qui se projetteront alors par des cercles, et dont les intersections avec les génératrices du cylindre détermineront autant de points que l'on voudra de la courbe demandée.

Ainsi, dans le cas actuel, on fera (*fig. 8*) une projection M^{IV} du chaînon M sur un plan perpendiculaire à celui de la figure 9, et parallèle à la projection $O''S''$ du rayon lumineux.

On fera $u^{IV}S^{IV}$ de la figure 8, égal à us de la figure 7 ; et la droite $S^{IV}O^{IV}$ sera la projection d'un rayon lumineux sur le plan de la figure 8.

On construira sur la figure 8 la projection 2-3-58 de l'arc 2-58-3 de l'anneau B''.

Les différents points de la courbe 2-58 (*fig. 8*) se déduiront de leur projection (*fig. 9*), et l'on prendra sur la figure 7 la distance de chaque point au plus grand parallèle de l'anneau M.

Cela étant fait, si l'on veut obtenir sur la courbe 55-57-56 le point qui est situé dans le plan P qui contient le centre de la sphère E' et qui est perpendiculaire au plan de la figure 9, on projettera le point 57 de la courbe 2-3 sur la figure 8, et l'intersection du rayon correspondant avec la circonférence

59 déterminera le point demandé que l'on projettera ensuite sur la figure 9.

On pourra obtenir ainsi autant de points que l'on voudra, en coupant la sphère et la courbe 2-3 par des plans parallèles à la projection (*fig. 8*).

Il faudra seulement se rappeler que les sections dans la sphère seront des petits cercles dont les rayons seront donnés par la figure 9, et dont tous les centres se projetteront en un seul sur la figure 8.

C'est ainsi que le point 58 a été obtenu, en coupant la sphère et la courbe 2-3 par le plan P_1 , parallèle au plan de la figure 8.

277. On peut vérifier les opérations précédentes, en reportant sur les figures 7 et 3 les points ainsi obtenus sur la courbe 55-57 et 56, les traces verticales des rayons lumineux correspondants devront être situées sur la courbe 1-2-3 de l'ombre portée.

278. Le point 55 suivant lequel l'ellipse 12-13-14 est rencontrée par la courbe 56-57-58 peut être obtenu sur la figure 9, en employant la méthode suivante :

1° — Le plan P_2 perpendiculaire au rayon de lumière $S^{IV}O^{IV}$ (*fig. 8*) coupe la sphère E^{IV} suivant le grand cercle qui forme sur cette sphère la ligne de séparation, et qui, rabattu sur la figure, devient le cercle 71 ;

2° — Le même plan P_2 de la figure 8 coupe le cylindre des rayons qui s'appuient sur la ligne de séparation 2-3 suivant une courbe qui, étant rabattue, devient 72 (*fig. 9*) ;

3° — La courbe 72 coupera le cercle 71 suivant un point 55, qui ramené dans le plan P_2 (*fig. 8*) déterminera le point 55 sur l'ellipse 12-13 et 14 de la figure 9, d'où il sera facile de reporter le même point sur les figures 7

et 3, et de vérifier sa position sur l'ombre portée par les courbes 1-2-3 et par l'ellipse 12-13 et 14.

279. Ombres portées dans le creux des anneaux (117).

La courbe 55-57 et 56 s'arrête à ce dernier point, où elle est remplacée par la courbe 56-125-6 qui est l'ombre portée sur la partie creuse de l'anneau A'' par la ligne de séparation 3-4-5 et 6.

Le point d'ombre portée 56 est situé sur le grand cercle suivant lequel la demi-sphère E se raccorde avec la surface de l'anneau A''.

Ce grand cercle, perpendiculaire au plan de la figure 9, se confond sur cette projection avec la droite O''H.

La courbe d'ombre portée 56-125 et 6 se construira par l'un des moyens exposés aux n^{os} 117 et 118.

Ces opérations sont indiquées sur la figure 8, et sur la projection B'' de l'anneau supérieur du chaînon M.

280. Ainsi, la courbe 24-25 et 26 de l'anneau B'' étant projetée sur la figure 8, on concevra le plan P₃ perpendiculaire au plan de la figure 9.

La section de l'anneau B'' par le plan P₃ sera une courbe 73 que l'on obtiendra facilement (*fig. 8*) en établissant sur l'anneau B'' des cercles horizontaux qui n'ont pas été conservés.

Le point 60, suivant lequel le plan P₃ coupe la courbe 24-25, sera également projeté sur la figure 8, et le rayon correspondant déterminera sur la courbe 73 le point d'ombre portée par le point 60 de la ligne de séparation 24-25.

Le point 75, qui est le plus bas de la courbe, sera déterminé de la même manière, en coupant la surface par le plan méridien P₄ parallèle au rayon lumineux S''O'', et par conséquent à la projection auxiliaire (*fig. 8*).

La section de l'anneau B'' par le plan P₄ est un cercle 74

dont une partie forme le contour de la projection de l'anneau B'' sur la figure 8.

281. Si pour vérifier quelques-uns des points obtenus, ou pour en déterminer de nouveaux, on veut employer le principe exposé au n° 119, on pourra considérer la ligne de séparation 24-26 de l'anneau B'' et le parallèle 61, sur lequel je suppose que l'on veut obtenir le point d'ombre portée, comme les directrices des deux cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur ces courbes.

Les intersections de ces deux cylindres (*fig. 8*), par un plan P_6 parallèle au cercle 61 de l'anneau B'', détermineront sur la figure 10, un peu au-dessus de la projection de l'anneau B'', la courbe 24-62-26 et la circonférence 61 égale au parallèle 61 de l'anneau B''; le point 60, suivant lequel la courbe 24-62 est coupée par le cercle 61, déterminera le rayon commun aux deux cylindres, et l'intersection de ce rayon avec le parallèle 61 de l'anneau B'' donnera le point 60 pour l'ombre portée sur ce parallèle par le point 60 de la ligne de séparation 24-26.

La courbe 24-62-26 et la circonférence 61 de la figure 10 se coupent suivant un second point 64; et le rayon correspondant déterminerait un second point d'ombre portée sur le parallèle 61; mais il est évident que ce point n'existera pas sur l'anneau B'', puisque cet anneau est interrompu à l'endroit où le point dont nous parlons serait situé.

Il sera donc utile de rechercher le point suivant lequel le prolongement du rayon 64 perce la surface de l'anneau A'' et l'on y parviendra facilement en construisant sur la figure 8 la projection de la courbe suivant laquelle l'anneau A'' est coupé par le plan P_3 qui contient le rayon 64.

282. Ainsi, l'ombre portée dans le creux de l'anneau B'' par la ligne de séparation 24-25 et 26 s'arrête au point 63, et

et 3, et de vérifier sa position sur l'ombre portée par les courbes 1-2-3 et par l'ellipse 12-13 et 14.

279. Ombres portées dans le creux des anneaux (117).

La courbe 55-57 et 56 s'arrête à ce dernier point, où elle est remplacée par la courbe 56-125-6 qui est l'ombre portée sur la partie creuse de l'anneau A'' par la ligne de séparation 3-4-5 et 6.

Le point d'ombre portée 56 est situé sur le grand cercle suivant lequel la demi-sphère E se raccorde avec la surface de l'anneau A''.

Ce grand cercle, perpendiculaire au plan de la figure 9, se confond sur cette projection avec la droite O''H.

La courbe d'ombre portée 56-125 et 6 se construira par l'un des moyens exposés aux n^{os} 117 et 118.

Ces opérations sont indiquées sur la figure 8, et sur la projection B'' de l'anneau supérieur du chaînon M.

280. Ainsi, la courbe 24-25 et 26 de l'anneau B'' étant projetée sur la figure 8, on concevra le plan P_3 perpendiculaire au plan de la figure 9.

La section de l'anneau B'' par le plan P_3 sera une courbe 73 que l'on obtiendra facilement (*fig.* 8) en établissant sur l'anneau B'' des cercles horizontaux qui n'ont pas été conservés.

Le point 60, suivant lequel le plan P_3 coupe la courbe 24-25, sera également projeté sur la figure 8, et le rayon correspondant déterminera sur la courbe 73 le point d'ombre portée par le point 60 de la ligne de séparation 24-25.

Le point 75, qui est le plus bas de la courbe, sera déterminé de la même manière, en coupant la surface par le plan méridien P_4 parallèle au rayon lumineux S''O'', et par conséquent à la projection auxiliaire (*fig.* 8).

La section de l'anneau B'' par le plan P_4 est un cercle 74

dont une partie forme le contour de la projection de l'anneau B'' sur la figure 8.

281. Si pour vérifier quelques-uns des points obtenus, ou pour en déterminer de nouveaux, on veut employer le principe exposé au n° 119, on pourra considérer la ligne de séparation 24-26 de l'anneau B'' et le parallèle 61, sur lequel je suppose que l'on veut obtenir le point d'ombre portée, comme les directrices des deux cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur ces courbes.

Les intersections de ces deux cylindres (*fig.* 8), par un plan P_6 parallèle au cercle 61 de l'anneau B'', détermineront sur la figure 10, un peu au-dessus de la projection de l'anneau B'', la courbe 24-62-26 et la circonférence 61 égale au parallèle 61 de l'anneau B''; le point 60, suivant lequel la courbe 24-62 est coupée par le cercle 61, déterminera le rayon commun aux deux cylindres, et l'intersection de ce rayon avec le parallèle 61 de l'anneau B'' donnera le point 60 pour l'ombre portée sur ce parallèle par le point 60 de la ligne de séparation 24-26.

La courbe 24-62-26 et la circonférence 61 de la figure 10 se coupent suivant un second point 64; et le rayon correspondant déterminerait un second point d'ombre portée sur le parallèle 61; mais il est évident que ce point n'existera pas sur l'anneau B'', puisque cet anneau est interrompu à l'endroit où le point dont nous parlons serait situé.

Il sera donc utile de rechercher le point suivant lequel le prolongement du rayon 64 perce la surface de l'anneau A'' et l'on y parviendra facilement en construisant sur la figure 8 la projection de la courbe suivant laquelle l'anneau A'' est coupé par le plan P_3 qui contient le rayon 64.

282. Ainsi, l'ombre portée dans le creux de l'anneau B'' par la ligne de séparation 24-25 et 26 s'arrête au point 63, et

passant par le point 64, elle arrive au point 27 où elle est remplacée par la courbe 27-65-66 et 67, qui est l'ombre portée par la sphère F sur l'anneau A'' du chaînon.

283. Ombre portée par la sphère F sur l'anneau A.

Pour obtenir cette dernière courbe, on reprendra la projection auxiliaire (*fig. 8*), et l'on pourra faire usage des plans coupants.

Ainsi, le plan P_7 déterminera (*fig. 8*) la courbe 76 sur laquelle on obtiendra l'ombre portée par le point 65, qui est le plus élevé de l'ellipse qui forme la séparation sur la sphère F.

Le plan coupant P_3 déterminera l'ombre portée sur l'anneau A'' par le point 27 de la sphère F, et ainsi de suite.

Pour obtenir le point 66 suivant lequel la courbe 27-67 coupe le plus grand parallèle de l'anneau A'', on emploiera le principe du n° 119.

Ainsi, on construira l'ellipse 68 suivant laquelle le cylindre formé par les rayons qui s'appuient sur la sphère F est coupé par le plan P_6 de la figure 8 ; on construira également l'arc de cercle 69 suivant lequel le plan P_6 coupe le cylindre des rayons qui s'appuient sur le plus grand parallèle de l'anneau A'', et le point 66, commun à ces deux courbes, déterminera l'ombre portée sur le plus grand parallèle de l'anneau A'' par le point correspondant de l'ellipse qui forme la ligne de séparation sur la sphère F.

Pour obtenir le point 67 suivant lequel la courbe 27-67 vient couper la ligne de séparation 18-19-20 de l'anneau A'', on projettera cette dernière courbe sur la figure 8, on construira (*fig. 9*) la courbe 70 suivant laquelle le plan P_6 de la figure 8 coupe les rayons qui s'appuient sur la courbe 19 et 20.

L'intersection de l'ellipse 68 avec la courbe 70 déterminera le rayon commun 67, et par suite l'ombre portée sur la courbe de séparation 19-20 de l'anneau A'' par le point correspondant de l'ellipse qui forme la séparation sur la sphère F.

La courbe d'ombre portée dans le creux de l'anneau A'' pourrait être obtenue en recommençant les opérations par lesquelles on a déterminé l'ombre dans le creux de l'anneau B'', mais les deux courbes étant égales, il suffira de reporter les points homologues avec le compas en ne conservant de chacune de ces courbes que ce qui existe sur la surface réelle de l'anneau correspondant.

284. Pour ne rien oublier, nous remarquerons que la petite courbe 56-3 de l'ombre portée sur la partie creuse de l'anneau A'' (*fig.* 9) provient des rayons qui s'appuient sur la partie correspondante 56-3 de la courbe qui forme la séparation sur la partie convexe de l'anneau B'' tandis que la courbe 3-125-6 est l'ombre déterminée sur la surface de l'anneau A'', par les rayons qui s'appuient sur la courbe 3-4 et 6 du même anneau.

285. Ainsi, en faisant abstraction des courbes que nous ne connaissons pas encore, et qui proviendront des ombres portées par le chaînon N sur la surface du chaînon M, le contour de l'ombre sur la surface de ce chaînon sera, en commençant par le point 1 :

1° — La courbe de séparation 1-2-3-4-5 et 6 ;

2° — La courbe d'ombre portée 6-125 et 3 ;

3° — La petite courbe d'ombre portée 3-56 ;

4° — La courbe 56-57-55, formant l'ombre portée sur la sphère E par la ligne de séparation extérieure de l'anneau B'' ;

5° — L'arc d'ellipse 55-14, formant séparation sur la sphère E ;

6° — La courbe de séparation 14-16-17-18-19 et 67 ;

7° — La courbe 67-66-65 et 27, qui est l'ombre portée par la sphère F sur l'anneau A'' ;

8° — La courbe d'ombre portée 27-64 et 63, déterminée

par quelques-uns des rayons qui s'appuient sur la ligne de séparation intérieure de l'anneau B'' ;

- 9° — La courbe d'ombre portée 63-75-60 et 24, déterminée sur l'anneau B'' par les rayons qui s'appuient sur la ligne de séparation intérieure du même anneau ;
- 10° — La ligne de séparation 24-25 et 26, dont une partie produit l'ombre précédente ;
- 11° — La petite courbe 26-27, qui fait partie de la courbe 26-75-24, et qui est par conséquent l'ombre portée sur la partie intérieure de l'anneau B'' par quelques-uns des points qui précèdent le point 26, en venant du point 25 ;
- 12° — L'arc d'ellipse 27-28 et 29, qui forme séparation sur la sphère F ;
- 13° — Enfin la courbe 29-30 et 1, qui forme la séparation sur la partie convexe de l'anneau B''.

286. Quand toutes les courbes déterminées sur les figures 8 et 9 auront été reportées sur les projections 7 et 3, et lorsque tous les points essentiels seront bien vérifiés, on fera une étude analogue sur les figures 5 et 6.

Ainsi, la figure 5 étant une projection du chaînon N'' sur un plan parallèle au rayon lumineux S'''O''', on fera la droite n^vS^v de la figure 5, égale à la distance nS de la figure 7, et l'on obtiendra S^vO^v pour la projection du rayon de lumière sur la figure 5.

287. Nous avons déjà remarqué que, par suite de la direction de la lumière par rapport aux surfaces du chaînon N, les points suivant lesquels les rayons lumineux deviennent tangents aux courbes de séparation intérieures des anneaux sont si rapprochés qu'il serait impossible de les distinguer sur l'épure ; d'où il résulte qu'il sera également impossible d'indiquer la courbe extrêmement petite déterminée par quelques-

uns des rayons qui s'appuient sur la courbe de séparation intérieure dans le voisinage des points 34 et 37.

Nous n'aurons donc à chercher ici que la courbe 77-78 et 79, qui est l'ombre portée sur la sphère T par une partie de la ligne de séparation extérieure de l'anneau D''', et la courbe 80-50 et 81, qui est l'ombre portée sur la surface de l'anneau C''' par une partie de l'ellipse qui forme la ligne de séparation sur la sphère U.

288. Ombre portée sur la sphère T par l'anneau D.

Le point 78 de cette courbe a été obtenu sur la figure 6, par le plan coupant P_9 et les points 77 et 79 ont été déterminés par le principe du n° 119.

Ainsi, les rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe de séparation de l'anneau D''', et sur l'ellipse 38-39-40 de la sphère T, forment deux surfaces cylindriques parallèles.

Le plan P_{10} perpendiculaire au rayon lumineux S^*O^* de la figure 5 coupe ces deux cylindres suivant deux courbes qui, rabattues autour de l'horizontale du centre, donnent la circonférence 85, et la courbe 83-84; les intersections de ces deux courbes déterminent les points 77 et 79 sur l'ellipse qui forme séparation sur la sphère T.

289. Ombre portée par la sphère U sur l'anneau C.

Le point 50 de la courbe 80-50 et 81 a été obtenu par le plan coupant P_{11} et les deux points 80 et 81, en rabattant le plan P_{12} qui contient le cercle de séparation 82 et la courbe 86-87, suivant laquelle ce même plan P_{12} coupe la surface cylindrique formée par les rayons lumineux qui s'appuient sur l'anneau C'''.

290. Ainsi, en faisant abstraction des ombres portées par le chaînon M et des deux petites courbes insensibles dont

nous avons parlé au n° 287, le contour de l'ombre sur la surface du chaînon N sera formé par la ligne de séparation, à l'exception des deux endroits où cette ligne est remplacée par les courbes 77-78-79 et 80-50-81.

Lorsque ces deux courbes seront déterminées, on les reportera sur les figures 7 et 3.

291. Ombres portées par le chaînon M sur le chaînon N. Nous avons déterminé les lignes de séparation sur les deux chaînons M et N, et les ombres portées de ces corps sur eux-mêmes.

Mais il nous reste encore à obtenir les ombres portées par chacun des chaînons sur l'autre.

Pour cette dernière partie, les figures 5, 6, 8 et 9 ne peuvent plus nous servir, car il faudrait projeter le chaînon M sur les figures 5 et 6, et le chaînon N sur les figures 8 et 9.

Or, ce travail serait beaucoup plus long que celui que nous allons indiquer.

292. Supposons d'abord que l'on veut déterminer (*fig. 3 et 7*) la courbe d'ombre portée sur l'anneau D' du chaînon N' par la courbe de séparation 18-19-20 de chaînon M'.

On se rappellera que les courbes 67-92 et b'' -93 de l'ombre portée sur le plan vertical de projection sont les traces des deux cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur les lignes de séparation extérieures des anneaux A' et D'.

Le point 88, suivant lequel la courbe 67-92 rencontre la courbe b'' -93, sera la trace du rayon commun aux deux cylindres, et déterminera par conséquent (*fig. 3*) le point 88 qui sera l'ombre portée sur la ligne de séparation extérieure de l'anneau D', par un point de la ligne de séparation extérieure de l'anneau A'.

Le point 89 de l'ombre portée sur le plan vertical de projection sera la trace du rayon commun aux deux cylindres

formés par les rayons qui s'appuient sur la ligne de séparation extérieure de l'anneau A' et sur la ligne de séparation intérieure de l'anneau D', ce qui déterminera (*fig. 3*) le point 89 pour l'ombre portée sur la seconde de ces deux courbes, par le point correspondant de la première.

293. Si l'on veut obtenir sur la figure 3 les points 90 et 91, suivant lesquels la courbe cherchée touche le contour extérieur de la projection verticale de l'anneau D', on construira la trace $b''b''$ du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe bb' (*fig. 7 et 3*), et le point 90 de l'ombre portée sera la trace verticale du rayon lumineux qui touche la courbe bb' et la ligne de séparation extérieure de l'anneau A', de sorte que le point 90 de la *fig. 3* sera l'ombre portée sur la courbe $b'b'$ par le point correspondant de la ligne de séparation extérieure de l'anneau A'.

Pour déterminer exactement le point 90 de la figure 3, on commencera par le point 90 de l'ombre portée, on projettera ce point sur A'Z', et le rayon correspondant déterminera le point 90 sur la figure 7, et de là sur la figure 3.

En construisant la courbe $h''h''$ qui est une partie de l'ombre portée sur le plan vertical par la ligne de séparation intérieure de l'anneau D', on obtiendra le point 91, suivant lequel la projection verticale de cette ligne est touchée par la courbe d'ombre cherchée.

294. Pour obtenir d'autres points de la même courbe, on pourra employer le principe des plans coupants, ou bien encore le principe du n° 119.

Supposons, par exemple, que l'on veut obtenir le point d'ombre portée qui serait situé sur le parallèle 118-118 de l'anneau D (*fig. 7*), on pourra opérer de plusieurs manières.

295. *Première méthode.* On déterminera les projections

xx' du centre du parallèle dont il s'agit, puis on construira la trace verticale x'' du rayon qui passerait par le point xx' .

On construira également la trace du rayon qui passerait par le point 118 qui est l'extrémité du rayon horizontal, et faisant $x''z''$ égale à la véritable grandeur de ce rayon, les deux droites $x''-118$ et $x''z''$ seront les demi-diamètres conjugués d'une ellipse 97-97, qui sera la trace du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le parallèle 118 de l'anneau D (*fig. 7*).

Le point 92, suivant lequel l'ellipse 97 rencontre la courbe d'ombre portée par la ligne de séparation extérieure de l'anneau A', sera la trace du rayon commun aux deux cylindres formés par les rayons qui s'appuient sur cette courbe, et sur le parallèle 118 de l'anneau D, et le point 92 de l'ombre portée étant projeté sur la ligne A'Z', le rayon correspondant déterminera sur la figure 7 et sur la figure 3, le point 92 de la courbe 88-90-92-91 et 89, qui est l'ombre portée sur l'anneau D par la ligne de séparation extérieure de l'anneau A.

Comme exercices, et pour mieux comprendre la forme de la courbe précédente, on peut déterminer les points suivant lesquels les mêmes rayons prolongés perceraient une seconde fois la surface de l'anneau D'.

296. *Deuxième méthode.* Le rayon de lumière commun aux deux cylindres formés par les rayons qui s'appuient sur le parallèle 118 de l'anneau D, et sur la ligne de séparation extérieure de l'anneau A, peut encore être déterminé en coupant ces deux cylindres par un plan vertical P_{13} parallèle aux anneaux du chaînon N (*fig. 7*).

Le cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le parallèle 118 de l'anneau DC sera coupé par le plan P_{13} suivant un cercle égal et parallèle au cercle 118; la projection du cercle ainsi obtenu sera une ellipse 99, dont le cen-

centre x''' et les deux axes principaux $x'''-118$ et $x'''z'''$ seront faciles à obtenir.

La courbe 98, suivant laquelle le plan P_{13} coupe le cylindre formé par les rayons qui s'appuient sur la ligne de séparation 20-17 de l'anneau A', sera déterminée en élevant des perpendiculaires par les points suivant lesquels la trace horizontale du plan P_{13} coupe les projections horizontales des rayons lumineux et l'intersection de l'ellipse 99 avec la courbe 98 déterminera le rayon commun aux deux cylindres, et par conséquent le point d'ombre portée sur le parallèle 118 de l'anneau D' par la ligne de séparation 20-17 de l'anneau A'.

297. *Troisième méthode.* Si l'on veut éviter la projection elliptique du cercle suivant lequel le plan P_{13} coupe le cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur le parallèle 118 de l'anneau D (*fig. 7*), on rabattra le plan P_{13} .

Ainsi, par exemple, si l'on fait tourner ce plateau autour de la verticale du point R, l'ellipse 99 sera remplacée par le cercle 101, et la courbe 98 par la courbe 100. Le point 92, déterminé par la rencontre de ces deux courbes, sera projeté successivement sur la ligne A'Z', sur la trace horizontale du plan P_{13} puis de là sur la projection verticale à droite de la chaîne.

Le rayon lumineux passant par le point ainsi obtenu déterminera sur les figures 7 et 3 les deux projections du point 92 de l'ombre portée sur le parallèle 118 de l'anneau D, par la ligne de séparation extérieure de l'anneau A.

298. La courbe 100 étant déduite de la courbe 98, on ne saisira peut-être pas immédiatement l'avantage de cette troisième méthode qui consiste à éviter les projections elliptiques des cercles, suivant lesquelles le plan P_{13} coupe les cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur les parallèles de l'anneau D. Mais la courbe 100 ne devant être construite qu'une seule fois pour tous les points de l'ombre por-

tée, par la ligne de séparation extérieure de l'anneau A, il est évident qu'il y aura une grande abréviation, puisqu'il suffira de rabattre le cercle ou seulement l'arc de cercle nécessaire pour déterminer chacun des points cherchés.

En recommençant, on obtiendra la courbe 93-95-96 et 94 pour l'ombre portée sur l'anneau D' par la ligne de séparation 3-4-5 de l'anneau A'.

299. Pour mieux faire comprendre les opérations qui précèdent, je les ai reportées sur la figure 1^{re}, en écartant un peu la chaîne du plan vertical, afin que les projections sur ce plan ne se confondent pas avec les rabattements.

300. Si l'on examine avec attention les courbes d'ombres portées à droite de la chaîne, on voit que la courbe 16-17-18, qui est une partie de l'ombre portée par la ligne de séparation extérieure de l'anneau A', coupe aux points 102 et 103 la courbe 46-47 qui est l'ombre portée par une partie de la ligne de séparation intérieure de l'anneau D', d'où l'on peut conclure que les points 102 et 103 de l'ombre portée sont les traces de deux rayons lumineux communs aux cylindres formés par les rayons qui s'appuient sur les deux courbes de séparation; de sorte qu'en traçant ces deux rayons, on déterminera sur la courbe 46-47 de l'anneau D' les points 102 et 103 pour les ombres portées par les points correspondants de la courbe 17-18 de l'anneau A.

La petite surface cylindrique qui a pour trace verticale la courbe 102-17-103 de l'ombre portée ne pouvant pas traverser la masse opaque de l'anneau D', il s'ensuit que la partie correspondante de la ligne de séparation 16-17-18 de l'anneau A' aura pour ombre portée sur la partie creuse, et derrière l'anneau D', la petite courbe 102-104-103 dont nous connaissons déjà deux points.

Le point intermédiaire 104 a été obtenu sur l'épure actuelle

par le plan coupant P_{14} perpendiculaire au plan vertical de projection.

La section de l'anneau D' par ce plan a donné la courbe 117 (*fig. 7*), et l'intersection de cette courbe par le rayon qui contient le point 104 de la courbe 17-18 a déterminé sur la figure 7 le point 104 que l'on a projeté ensuite (*fig. 3*) sur le rayon lumineux correspondant.

La courbe 117 passe par les quatre points suivant lesquels le plan P_{14} coupe les lignes de séparation, et les courbes qui forment le contour de la projection verticale de l'anneau D' .

Si ces points ne suffisent pas, on pourra projeter quelques-uns des cercles parallèles de l'anneau.

301. Ombres portées par le chaînon N' sur le chaînon Q' . J'ai supposé dans l'épure actuelle que le chaînon Q' de la figure 3 était semblable à l'un des trois anneaux qui terminent la partie inférieure de la chaîne qui est projeté (*fig. 2*).

C'est-à-dire que chacun de ces anneaux (*fig. 11*) serait composé de deux demi-anneaux circulaires A et B séparés par les deux cylindres m et n .

Dans cette hypothèse il est évident que les courbes qui forment le contour de la projection et les lignes de séparation de l'anneau Q' ne diffèrent en rien de celles que l'on a obtenues pour les anneaux A' et B' du chaînon M' ; il n'y aura donc aucune opération nouvelle à faire, pour obtenir ces courbes dont les projections horizontales coïncident avec celles que l'on a déjà obtenues pour le chaînon M (*fig. 7*) et dont les projections verticales seront égales à celles des anneaux A' ou B' , en tenant compte seulement des différences de hauteur.

302. Quant aux courbes d'ombre portées sur la surface de l'anneau Q' , elles sont au nombre de trois, savoir :

1° — La courbe 105-107-109-106 qui est l'ombre por-

tée sur l'anneau C' par la ligne de séparation extérieure de l'anneau Q' ;

2° — La courbe 110-111 qui est l'ombre portée sur l'anneau C' par la ligne de séparation intérieure de l'anneau Q' ;

3° — Enfin la petite courbe d'ombre 112-115-113 qui est portée sur la partie de surface, derrière l'anneau Q' , par une partie de la ligne de séparation intérieure de l'anneau C' .

Les points 105-106 ont été déterminés d'abord sur le plan horizontal par la rencontre des traces des cylindres formés par les rayons qui s'appuient sur les courbes de séparation extérieures et intérieures des anneaux C et Q .

On a obtenu les points 107 et 108 en construisant les lignes 119 et 120 qui sont les traces horizontales des cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur les courbes b et h de l'anneau C .

Enfin le point 109 a été obtenu par la méthode du n° 119 et par la rencontre des courbes 121 et 122, suivant lesquelles le plan P_{13} coupe les deux cylindres formés par les rayons qui s'appuient sur la courbe de séparation 20-18 de l'anneau Q' sur le cercle 118-118 de l'anneau C (*fig. 7*).

303. Les mêmes opérations feront connaître autant de points que l'on voudra de la courbe 110-111.

304. Les points 112 et 113 situés derrière l'anneau Q' et sur la ligne de séparation extérieure de cet anneau (*fig. 3*) sont déterminés par les rayons qui contiennent les points 112 et 113 de l'ombre portée sur le plan vertical et sur le plan horizontal de projection.

Enfin le point 115 de la projection verticale Q' a été obtenu par le plan coupant P_{13} .

La section de l'anneau Q' par ce plan a donné la courbe 114

de la figure 7, et l'intersection de cette ligne par le rayon qui contient le point 115 situé sur la courbe de séparation intérieure de l'anneau C a déterminé la projection horizontale, et par suite la projection verticale du point d'ombre portée 115.

L'obliquité des rayons lumineux par rapport à la partie de surface sur laquelle a lieu la petite courbe d'ombre portée 112-115 et 113 doit engager à vérifier quelques-uns des points de cette courbe; ainsi, en coupant la surface par le plan P_{16} perpendiculaire au plan horizontal de projection, et contenant le point 115 de la figure 7, on obtiendra sur la figure 3 la courbe de section 116 qui doit passer par la projection verticale du point d'ombre portée 115.

ÉTUDE D'OMBRES SUR LES TUYAUX.

305. Chacune des parties courbes A, B, C de ces tuyaux (*pl. 25*) est formée par un quart de surface annulaire, et les parties droites D, E, F, G sont des cylindres.

Chaque tuyau est terminé par deux plaques circulaires que l'on nomme *brides*; ces plaques sont traversées par des boulons qui relient entre elles les diverses parties droites ou courbes dont se compose le tuyau principal.

La construction des ombres sur les surfaces cylindriques ou annulaires des tuyaux ne sera évidemment qu'une application nouvelle des principes exposés aux n^{os} 66 et 114.

C'est donc uniquement comme exercices sur la disposition des épures que l'étude suivante est proposée.

La figure 1 est une projection sur un plan perpendiculaire à celui de la figure 7.

Ainsi, la figure 7 étant perpendiculaire aux axes des surfaces annulaires qui forment les parties courbes des tuyaux, la figure 1 sera parallèle aux mêmes axes.

Les lignes de séparation pourraient être déterminées en

exécutant sur les figures 1 et 7 de la planche actuelle, toutes les opérations qui sont indiquées sur les figures 77 et 78 de la planche 13; mais pour ne pas embarrasser les figures 1 et 7, j'ai supposé que les lignes de séparation 1-2-3-4-5-6-7-8 et 9, déterminées d'abord sur les projections auxiliaires (*fig. 2 et 3*), ont été ensuite reportées sur les figures 1 et 7, de sorte qu'il ne reste plus à construire sur ces deux figures que les opérations nécessaires pour déterminer les ombres portées.

306. **Ombres portées.** On fera bien ici, comme dans l'exemple qui précède, de commencer par la construction des ombres portées sur les plans de projection.

Mais on remarquera que, pour varier les études, l'ombre portée est tracée sur deux plans différents, c'est-à-dire que la figure 4 contient l'ombre portée (*fig. 8*) sur un plan vertical P parallèle aux axes des surfaces annulaires qui forment les parties courbes du tuyau, tandis que la figure 8 contient l'ombre portée (*fig. 1*) sur le plan P_1 perpendiculaire aux axes des mêmes surfaces.

Ces ombres portées peuvent être facilement tracées sans le secours des projections horizontales (*fig. 5, 9 et 13*).

En effet, les lignes de séparation obtenues sur les figures 2 et 3 et reportées ensuite sur les figures 1 et 7 seront les directrices des surfaces cylindriques formées par les rayons lumineux qui s'appuient sur les tuyaux.

Or, la direction de la lumière étant donnée par les projections SO , $S'O'$, il sera facile de projeter sur les figures 1 et 7 les rayons qui s'appuient sur les lignes de séparation, de sorte que les intersections du plan P par les rayons lumineux projetés sur la figure 7 détermineront sur les rayons correspondants de la figure 4 les points qui forment le contour de l'ombre portée, et *reciproquement*, les intersections du plan P_1 par les rayons lumineux projetés sur la figure 1 détermineront le contour de l'ombre portée sur la figure 8.

307. Si les brides, ou plaques circulaires qui terminent les tuyaux n'existaient pas, le contour de l'ombre portée sur le plan P_1 se composerait (*fig. 8*) de courbe 36-37-8-6-39-40-41-8-6 et 42, et de la courbe 43-44-47-48-6-8-51-52-55 et 56; mais la première de ces deux courbes est interrompue :

- 1° — Par la courbe 37-38 qui est l'ombre portée par une partie de la circonférence qui forme l'arête 57 de la bride inférieure du tuyau D ;
- 2° — Par la courbe 38-39 qui est l'ombre portée par une partie de la circonférence qui forme l'arête 58 de la bride supérieure du tuyau B ;
- 3° — Par l'arc d'ellipse 41-64, la petite droite 64-65 et l'arc d'ellipse 65-30, qui sont les ombres portées par les arêtes circulaires et la ligne de séparation du petit cylindre vertical formé par la réunion des deux plaques cylindriques ou brides qui relie entre eux les tuyaux E et F ;
- 4° — Par l'arc d'ellipse 66-67, la droite 67-68 et l'arc d'ellipse 68-69, qui forment le contour de l'ombre portée par les brides des tuyaux C et G.

308. La courbe qui forme à droite de la figure 8 le contour de l'ombre portée par le tuyau est remplacée dans quelques-unes de ses parties :

- 1° — Par la courbe 44-45 qui est une partie de l'ombre portée par l'arête 57 de la bride inférieure du tuyau D ;
- 2° — Par la partie verticale 45-46 qui est l'ombre portée par la ligne de séparation du cylindre vertical formé par l'ensemble des deux brides qui servent à relier entre eux les tuyaux A et D ;
- 3° — Par la courbe 46-47 qui est l'ombre portée par une partie de la circonférence qui forme l'arête 60 de la bride supérieure du tuyau A ;
- 4° — Par la courbe 48-49, la petite droite horizontale

49-50, et l'arc d'ellipse 50-51 qui sont les ombres portées par les arêtes circulaires et la ligne de séparation du cylindre horizontal formé par la réunion des deux plaques cylindriques ou brides qui relie entre eux les tuyaux A et B ;

5° ~~Enfin~~ Enfin, par les courbes 52-53, 54-55 et par une petite droite verticale 53-54, tangente aux deux courbes précédentes ; ces trois lignes étant l'ombre portée par les arêtes circulaires et par la ligne de séparation du cylindre formé par l'assemblage des deux brides qui relie entre eux les tuyaux E et F.

309. Les deux courbes 38-37 et 44-45 appartiennent à une même ellipse qui serait l'ombre portée par l'arête 57 de la bride inférieure du tuyau D, et la courbe 46-47 fait partie de l'ellipse 46-20 qui est l'ombre portée par l'arête 60 de la bride supérieure du tuyau A.

Les courbes 39-38 et 50-51 font partie de l'ellipse 38-51 qui est l'ombre portée par l'arête 58 de la bride supérieure du tuyau B.

La courbe 48-49 appartient à l'ombre portée par l'arête 61 de la bride inférieure du tuyau A.

Les deux courbes 64-41 et 52-53 appartiennent à l'ombre portée par la circonférence 59 de la bride inférieure du tuyau E, et les courbes 54-55, 65-30 font partie de l'ellipse 54-30 qui est l'ombre portée par l'arête 62 de la bride supérieure du tuyau F.

310. L'ombre portée sur le plan P ne se trouvant pas confondue avec la projection du tuyau, il sera beaucoup plus facile d'en suivre le contour sur la figure 4, d'autant plus que sur cette figure les courbes sont indiquées par les mêmes chiffres que les lignes dont elles sont les ombres portées, ce qui ne pouvait pas avoir lieu sur la figure 8 ; d'abord à cause du grand nombre de points qu'il fallait désigner d'une

manière particulière ; ensuite parce que plusieurs des courbes de cette figure ne sont pas tracées entièrement.

311. **Ombres portées sur les tuyaux.** Il y a sur les surfaces A et B (*fig. 3*) quatre points 8 et 6, suivant lesquels le rayon lumineux est tangent aux lignes de séparation. Les intersections de ces rayons avec les plans P et P₁ déterminent sur les ombres portées (*fig. 4 et 8*) les points de rebroussement désignés partout par les n^{os} 8 et 6.

Il existera donc, sur la surface du tuyau C (*fig. 7*), une petite courbe 8-10-11, qui, après avoir touché au point 8 la ligne de séparation intérieure, coupe le cercle de gorge au point 10, et la ligne de séparation en un point 11 situé derrière le tuyau.

Cette courbe pourra être obtenue sur les figures 1 et 7, en opérant comme nous l'avons dit aux n^{os} 117 et 118 ; mais on peut aussi la déterminer d'abord sur les figures 2 et 3, et la reporter ensuite sur la projection du tuyau C (*fig. 7*).

312. Si les brides ou plaques circulaires n'existaient pas, ou si les ombres portées par ces plaques sur les tuyaux étaient moins allongées, il faudrait tracer sur les surfaces des tuyaux A et B des lignes analogues à la courbe d'ombre portée 8-10 et 11 de la surface C.

Mais, dans le cas actuel, ces courbes seraient plongées dans l'ombre portée par les brides 57-60 et 58-61, de sorte que l'on peut négliger cette partie de l'opération.

313. La petite courbe 8-10-11 du tuyau C étant la seule ligne d'ombre portée par la surface des tuyaux sur elle-même, il ne reste plus qu'à construire les ombres portées par les brides sur les tuyaux.

314. La courbe déterminée sur le tuyau G par les rayons lumineux qui s'appuient sur la circonférence du cercle vertical 63 sera l'intersection de deux surfaces cylindriques.

Mais la surface G étant perpendiculaire au plan de la fig. 1 la construction de la courbe d'ombre portée sur ce tuyau ne présentera aucune difficulté.

En effet, si l'on veut obtenir le point 13 de la courbe 12-13-14, on projettera le rayon 13 sur les figures 7 et 1, et l'intersection de ce rayon avec le tuyau G de la figure 1 déterminera le point correspondant sur la surface du tuyau G de la figure 7.

315. La courbe 16-15-17, qui est l'ombre portée sur le tuyau F par l'arête 62 de la bride supérieure, se déterminera de la même manière au moyen des figures 7 et 9.

Ainsi, le rayon 16 étant projeté sur ces deux figures, son intersection avec le tuyau F sera déterminée d'abord sur la figure 9, et de là sur les figures 7 et 1.

316. La courbe 23-24-25-26 est l'intersection de la surface annulaire du tuyau courbe B par la surface cylindrique formée par les rayons qui s'appuient sur l'arête circulaire 58 de la bride qui rattache le tuyau B avec le tuyau A.

Les différents points de cette courbe pourraient être obtenus par des plans coupants, mais il sera plus simple d'employer le principe du n° 119.

Ainsi, le point suivant lequel la courbe 23-26 coupe la ligne de séparation située sur la partie convexe du tuyau B sera déterminé par le rayon lumineux qui contient le point 39 de l'ombre portée, et le point suivant lequel la même courbe coupe la ligne de séparation à droite du tuyau vertical E sera déterminé par le rayon qui contient le point 51 de l'ombre portée.

Pour obtenir le point 25 situé sur la parallèle 28 de la surface annulaire du tuyau B, on concevra (119) les deux surfaces cylindriques formées par les rayons lumineux qui s'appuient sur ce parallèle et sur l'arête circulaire 58 dont on cherche l'ombre ; les intersections de ces deux cylindres par le plan

vertical P_1 (*fig. 1*) seront l'ellipse 38-51 de la figure 8 et l'arc de cercle 28 dont le centre 35 de la figure 8 est déterminé par le rayon 35 figure 1.

Le point 25 suivant lequel l'ellipse 38-51 est coupé par l'arc de cercle 28 déterminera le rayon commun aux deux cylindres, et l'intersection de ce rayon avec le parallèle 28 du tuyau B déterminera l'ombre portée sur ce tuyau par le point correspondant de l'arête circulaire 58 de la bride.

Le point 24 situé sur le parallèle 29 du tuyau B s'obtiendra de la même manière ; ainsi, le rayon 34 de la figure 1 percera le plan vertical P_1 suivant un point qui déterminera sur la figure 8 le centre 34 d'un arc de cercle 29 qui est l'ombre portée sur le plan P_1 par le parallèle 29 du tuyau B.

Le point 24 suivant lequel l'arc 29 de l'ombre portée coupe l'ellipse 38-51 déterminera le point 24 pour l'ombre portée sur le parallèle 29 du tuyau B par l'arête circulaire 58 de la bride.

317. On opérera de la même manière pour construire la courbe 18-19-29 et 21 qui est l'ombre portée sur le tuyau A, par l'arête 60 de la bride supérieure.

Ainsi, les points suivant lesquels la courbe demandée coupe les lignes de séparation du tuyau A seront déterminés par les rayons qui contiennent les points 47 et 31 de l'ombre portée (*fig. 8*) et les points 10 et 20 de la courbe 18-21 seront déterminés par les rayons qui contiennent les points suivant lesquels l'ellipse 46-31, qui est l'ombre portée par l'arête 60 de la bride, est rencontrée par les arcs 28 et 29 qui ont pour centres les points 33 et 32, déterminés par les rayons correspondants de la figure 1.

318. Les différents points des ombres portées sur les tuyaux de la figure 7 étant reportés sur les parallèles correspondants de la figure 1, on tracera (*fig. 1*) les courbes d'ombres portées par les tuyaux sur les brides.

Pour obtenir ces courbes, on déterminera les points suivant lesquels les plans verticaux P_2 et P_3 de la figure 7 sont percés par les rayons lumineux qui s'appuient sur les lignes de séparation des tuyaux.

Ainsi, le rayon lumineux qui contient le point 8 de la ligne de séparation intérieure du tuyau C (*fig.* 7) percera le plan P_2 en un point qui déterminera un peu au-dessous du bouton m (*fig.* 1) l'ombre portée par le point 8 de la ligne de séparation.

Tous les points des courbes analogues s'obtiennent de la même manière.

La petite courbe 70-71 (*fig.* 1) appartient à l'ombre portée par la bride 60 sur le plan vertical P_3 de la bride 61.

319. Je terminerai ces études sur les surfaces annulaires, en indiquant, comme exercices, la construction des ombres portées dans la concavité des surfaces projetées sur les figures 6, 12, 10 et 11.

320. Les figures 6 et 12 sont les coupes de deux anneaux par les plans P_4 et P_5 de leurs plus grands parallèles, et les figures 10 et 11 sont les coupes des tuyaux D, A, B, E, F par le plan vertical P_6 de la figure 13.

Toutes les courbes d'ombres portées pourront être facilement obtenues par les plans coupants ou par le principe du n° 119.

Ellipsoïde.

321. Pour nouvel exemple des surfaces de révolution, nous prendrons un ellipsoïde dont l'axe serait placé dans l'espace d'une manière quelconque.

Les données sont (*fig.* 109 et 110, *pl.* 26) :

1° Les deux projections ac , $a'c'$ de l'axe de la surface proposée ;

2° La droite oe (*fig. 109*) égale au rayon du plus grand parallèle ;

3° Les deux projections $s-l$, $s'-l'$ d'un rayon de lumière.

On demande les projections verticale et horizontale de la surface, et la ligne de séparation.

322. Les opérations qui vont suivre sont la conséquence de ce principe, dont on trouvera la démonstration dans les traités d'analyse; *lorsqu'une surface du second degré est enveloppée par un cylindre, la courbe de contact est une courbe plane.*

323. Dans le cas d'un ellipsoïde, cette courbe est une ellipse.

Ainsi, les courbes suivant lesquelles la surface proposée est touchée par les cylindres projetants sont des ellipses; les traces de ces cylindres, et par conséquent les projections de la surface sur tels plans que l'on voudra, seront des ellipses. La ligne de séparation et l'ombre portée par un plan quelconque seront des ellipses.

Ces propriétés, particulières à l'ellipsoïde, conduisent naturellement à faire usage des projections auxiliaires, perpendiculaires aux plans de toutes ces courbes, qui alors se projettent par des lignes droites (*Géom. descript.*).

Voici dans quel ordre il faudra opérer :

324. *Projection verticale.* On construira (*fig. 111*) le triangle rectangle $c''a''v'$, dans lequel $a''v'$ doit être égal et parallèle à ac , projection verticale de l'axe, et le côté $c''v'$ égal à $c'v$ (*fig. 110*) doit être la différence des distances des points a' et c' au plan vertical de projection.

L'hypoténuse $c''a''$ (*fig. 111*) sera l'axe de la surface rabattu dans sa véritable longueur sur le plan vertical de projection; de sorte qu'en faisant $o''e'' = oe$, l'ellipse $ze''a''$ sera une section méridienne de la surface proposée.

Le diamètre zx passant par le milieu de la corde $a''h$ sera la projection de l'ellipse suivant laquelle la surface serait touchée par le cylindre projetant perpendiculaire au plan vertical de projection, et les droites $z'z$, xx' perpendiculaires sur ac détermineront les deux points z' , x' pour les extrémités du grand axe de l'ellipse qui forme la projection verticale de la surface. Le petit axe oe fait partie des données de la question.

325. *Projection horizontale.* On fera comme ci-dessus une projection auxiliaire (*fig. 112*) sur un plan vertical parallèle à $a'c'$.

Le grand axe $a'''c'''$ sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté $c'''r'$ doit être égal à $a'c'$ (*fig. 110*), et l'autre côté $a'''r'$ égal à ar (*fig. 109*) doit être la différence des distances des points a , c au plan horizontal de projection.

Le petit axe $o'''c'''$ est égal à oe (*fig. 109*).

Le diamètre ky , passant par le milieu de la corde $c'''b$, sera, sur la figure 112, la projection de l'ellipse suivant laquelle la surface serait touchée par le cylindre projetant perpendiculaire au plan horizontal.

Les points k , y , projetés en k' , y' , détermineront $k'y'$ pour le grand axe de l'ellipse formant la projection horizontale de la surface. Le petit axe de cette ellipse sera oe' égal à oe (*fig. 109*).

326. *Ligne de séparation.* On construira d'abord (*fig. 113*) avec un rayon $o^{ve}e^{iv}$, une circonférence qui sera la projection de la surface sur un plan perpendiculaire à son axe.

Pour obtenir sur la figure 113 la direction des rayons lumineux, nous construirons les deux projections d'un de ces rayons sur les figures 109 et 110, et nous choisirons de préférence celui dont la direction passerait par le centre de la surface.

Le point s , s' étant pris à volonté sur ce rayon, nous prendrons (*fig.* 109) la distance sp , qui est la hauteur du point s au-dessus du plan horizontal qui contient le centre de la surface, et cette hauteur sp étant portée de p' en s''' sur la droite $s'p'$, on aura $s'''-o'''$ pour la projection du rayon lumineux sur la figure 112.

Enfin, le point s''' étant projeté en s'' sur le plan $m'''s''$ et rabattu en s^{iv} , on aura la droite $s^{iv}-o^{iv}$ pour la projection de la lumière sur la figure 113.

Or si l'on suppose le plan méridien $s^{iv}o^{iv}$ rabattu (*fig.* 114), la projection de la courbe de séparation sur ce plan sera une ligne droite dq .

Cela provient de ce que le méridien $s^{iv}o^{iv}$, étant un plan de symétrie par rapport à l'ellipsoïde et au cylindre enveloppant formé par les rayons lumineux, sera par conséquent perpendiculaire au plan qui contient tous les points de la ligne de contact.

L'ellipse a^vc^v , étant une section méridienne, est égale aux ellipses que nous avons déjà construites (*fig.* 111 et 112), le rayon s^vo^v s'obtiendra en portant sur la figure 114, s^vq' égal à $s'''q$, qui, sur la figure 112, représente la distance du point s au plan du plus grand parallèle de la surface.

Le diamètre dq , projection de la ligne de séparation, doit passer par le milieu de la corde a^vi parallèle à s^vo^v . La ligne de séparation étant obtenue sur la figure 114, il reste à la construire successivement sur chacune des projections précédentes.

327. Si nous supposons que la surface soit coupée par un plan mt , perpendiculaire à l'axe a^vc^v , la section sera un cercle projeté (*fig.* 114) par la droite mt et (*fig.* 113) par la circonférence $m't'm'$. L'intersection de cette circonférence avec la ligne de séparation déterminera deux points proje-

tés sur la figure 114 par le point unique m , et sur la figure 113 par les deux points m' .

L'un de ces points m' , projeté en m'' et ramené de là en m''' , sera le pied d'une droite $m'''m^{iv}$, perpendiculaire au plan $m''s''$, et sur laquelle on fera $n'm^{iv}$ égal à mn , qui, sur la figure 114, représente la distance du point m au plan du plus grand parallèle de la surface.

L'intersection de la droite $m^{iv}m^v$ perpendiculaire sur $a'e'$ avec la droite $m'm^v$, perpendiculaire sur $o'e'$, déterminera le point m^v , projection du point m sur la figure 110.

Enfin, pour avoir la projection du même point sur la figure 109, on fera $u'm^{iv}$ égal à um^{iv} , qui, sur la figure 112, exprime la distance du point m au plan horizontal qui contient le centre de la surface.

Les mêmes opérations répétées feront connaître autant de points que l'on voudra.

328. J'ai donné cet exemple pour faire comprendre comment, par un choix plus ou moins heureux de plans auxiliaires, on peut réduire en quelque sorte à leur plus simple expression les projections des lignes qui concourent à la solution d'un problème.

On pourrait représenter par une seule ellipse les trois projections auxiliaires, 111, 112 et 114, rabattues les unes sur les autres en tournant autour de l'axe, mais dans ce cas la difficulté de suivre par la pensée le chemin parcouru par chaque point dans ces divers rabattements n'aurait pas été compensée par l'avantage de construire deux ellipses de moins.

Cette manière de disposer l'épure aurait eu, il est vrai, pour résultat d'habituer le lecteur à vaincre les obstacles qui résultent souvent du peu d'étendue de la feuille sur laquelle il dessine; mais j'ai cru devoir préférer ici la disposition qui met le plus clairement en évidence les propriétés qui appar-

tiennent particulièrement à la surface choisie pour sujet de cette étude.

329. Les figures 115 et 116 sont les deux projections d'un ellipsoïde perpendiculaire au plan horizontal.

Le plan méridien $s'o'$ tournant autour de l'axe est rabattu en $s''o'$. Par suite de ce mouvement, le rayon de lumière so devient $s''o$, et le diamètre vu , passant par le milieu de la corde ac parallèle à $s''o$, est la projection de la ligne de séparation sur le plan du méridien $s'o'$.

Le point v , projeté en v' et ramené en v'' , déterminera le petit axe $o'v''$ de l'ellipse formant la projection horizontale de la ligne de séparation.

La projection verticale de cette courbe s'obtiendra (*fig.* 115) en projetant chacun de ses points sur le cercle horizontal auquel il appartient.

330. Si l'on voulait obtenir (*fig.* 117) la ligne de séparation dans le cas où la lumière proviendrait d'un point lumineux, on ferait bien de projeter la surface sur le plan méridien qui contiendrait ce point.

DEUXIÈME ÉTUDE D'OMBRES SUR LES ELLIPSOÏDES.

331. L'épure de la planche 27 a pour but de construire :

- 1° — La courbe suivant laquelle deux ellipsoïdes de révolution se pénètrent ;
- 2° — La ligne de séparation sur chacune de ces deux surfaces ;
- 3° — Les courbes d'ombres portées sur les plans de projection ;
- 4° — Les courbes d'ombres portées par l'une des deux surfaces sur l'autre.

332. **Disposition de l'épure.** Les deux ellipsoïdes don-

nés étant désignés par E et par F, nous prendrons un premier plan de projection, que nous supposerons horizontal, et perpendiculaire à l'axe de la surface E; le second plan de projection A'Z' devra être pris parallèle aux deux axes, et par conséquent vertical.

Comme nous l'avons déjà fait pour les épures des planches 6 et 24, nous désignerons par A'Z' la trace du plan sur lequel les projections sont accentuées par des ' ; par A''Z'' le plan sur lequel les projections sont accentuées par '' , et ainsi de suite.

Ces dispositions étant admises, on construira successivement :

- 1° — La circonférence E dont le rayon est donné ;
- 2° — L'ellipse E' dont on connaît les axes ;
- 3° — L'ellipse F' dont les axes sont également connus ;
- 4° — L'ellipse F dont le petit axe est égal à celui de F' et dont le grand axe mn est la projection du diamètre $n'n'$ déterminé par les deux tangentes perpendiculaires à la droite A'Z'.

333. Courbes de pénétration. La géométrie descriptive fournit plusieurs moyens de construire la courbe suivant laquelle se pénètrent les deux surfaces données. Mais, la nature particulière de ces surfaces nous permettra d'employer une méthode extrêmement simple, qui résulte du théorème suivant :

334. Si l'on conçoit deux surfaces quelconques du second degré circonscrites à une sphère, les deux premières surfaces se pénétreront suivant deux courbes planes et par conséquent du second degré.

On peut ajouter que ces deux courbes, et les deux cercles suivant lesquels la sphère est touchée par les deux surfaces enveloppantes, passent par deux points situés aux extrémités d'une corde qui leur est commune.

Ainsi, par exemple, si une sphère d (*fig. 17*) est touchée et enveloppée par deux ellipsoïdes de révolution e et f , et si l'on suppose que le tout soit projeté sur un plan parallèle aux grands axes des deux ellipsoïdes, ces deux surfaces se pénétreront suivant les ellipses projetées sur la figure par les droites aa , cc .

Ces deux ellipses, et les deux cercles uu , vv , suivant lesquels les ellipsoïdes e et f touchent la sphère inscrite, se coupent aux extrémités d'une corde commune, projetée sur la figure par le point o ; et cette droite est par conséquent l'intersection des plans $P_1 P_2 P_3 P_4$ qui contiennent les quatre courbes aa , cc , vv , uu .

Cela aurait également lieu si la sphère était enveloppée :

Par un ellipsoïde et un hyperboloïde de révolution (*fig. 19*) ;

Par un hyperboloïde et un paraboloides (*fig. 10*) ;

Par deux hyperboloïdes ou deux paraboloides ;

Par deux cylindres (*fig. 1*) ;

Par un cylindre et un cône (*fig. 9*) ;

Par deux cônes (*fig. 20*) ;

Enfin, comme nous l'avons dit plus haut, par deux surfaces quelconques du *second degré*.

335. Voyons actuellement comment le théorème qui précède pourra nous servir à déterminer la courbe suivant laquelle se pénétreraient les deux ellipsoïdes donnés.

On sait (*Géométrie descriptive*) que pour obtenir les points communs à deux surfaces, il faut les couper par un certain nombre de *surfaces auxiliaires*.

Il ne reste donc plus qu'à choisir ces surfaces, de manière que les courbes, suivant lesquelles elles coupent les surfaces données, soient les plus simples possibles.

Or, on sait :

1° ~~-----~~ Que la section d'un ellipsoïde par un plan est toujours une ellipse ;

2° — Que les sections d'un ellipsoïde par des plans parallèles sont des ellipses semblables.

Par conséquent, s'il était possible de trouver un plan qui coupât les ellipsoïdes donnés suivant deux ellipses semblables, il en serait de même de toutes les sections par des plans parallèles au premier ; de sorte qu'en choisissant un plan de projection sur lequel une de ces ellipses se projetterait par un cercle, toutes les autres ellipses, semblables et parallèles à la première, se projetteraient également par des cercles, et la construction de l'épure serait alors très-simple.

La solution du problème se trouve donc réduite aux deux opérations suivantes :

- 1° — Déterminer la direction des plans qui coupent deux ellipsoïdes donnés, suivant des ellipses semblables et parallèles ;
- 2° — Trouver un plan de projection sur lequel toutes ces ellipses se projettent par des cercles.

336. *Première opération. Plans coupants.* Pour satisfaire à la première des deux conditions précédemment énoncées, on pourra opérer de la manière suivante :

- 1° — On prendra dans l'espace un point quelconque o (*fig. 17*) ;
- 2° — De ce point comme centre on décrira une circonférence quelconque d ;
- 3° — On fera :

$$VO' : O'H :: vo : oh$$

(*fig. 11*) (*fig. 17*)

Cette proportion déterminera oh et l'on construira une ellipse sur les deux axes vo et oh (*fig. 18*) ; cette courbe sera semblable et parallèle à l'ellipse F' de la figure 11 ;

- 4° — On fera ensuite :

$$IC' : C'G :: uo : ok$$

(*fig. 11*) (*fig. 17*)

ce qui déterminera ok , et l'ellipse construite sur les deux axes ou et ok sera semblable et parallèle à l'ellipse E' de la figure 11 ;

- 5° — Les deux ellipses e et f de la figure 17 pourront alors être considérées comme les projections de deux ellipsoïdes de révolution circonscrites à une même sphère d , et les droites aa , cc étant les projections des deux ellipses suivant lesquelles les ellipsoïdes e et f se pénètrent, il s'ensuit que les sections parallèles à l'un des plans P_1 ou P_2 seront semblables et parallèles à l'une des deux ellipses aa ou cc .

337. C'est pour mieux faire comprendre ce qui précède que j'ai construit la figure 17, mais il est évident que tout cela peut être facilement exécuté sur la figure 11.

Ainsi, on construira :

- 1° — La circonférence D qui sera la projection de la sphère inscrite dans l'ellipsoïde donné F' ;
 2° — On fera la proportion $C'I : C'G :: O'U : O'K$, ce qui déterminera $O'K$;
 3° — Sur les demi-axes $O'U$, $O'K$ on décrira l'ellipse UK qui sera semblable et parallèle à l'ellipse IG ;
 4° — Les deux ellipses UK et VH seront les projections des deux ellipsoïdes circonscrites à la sphère D , et les sections de ces deux ellipsoïdes par des plans parallèles au plan P seront des ellipses semblables et parallèles.

Mais l'ellipsoïde auxiliaire UK , étant semblable et parallèle à l'ellipsoïde E' , il s'ensuit que les sections des trois ellipsoïdes E' , F' et UK par des plans parallèles au plan P seront toutes semblables et parallèles entre elles.

On aura donc déterminé la direction des plans par lesquels il faut couper les deux surfaces données E' et F' , pour que toutes les courbes de section soient des ellipses semblables et parallèles.

338. *Deuxième opération. Plans de projection.* La section de l'ellipsoïde F' par le plan P sera une ellipse qui aura pour demi grand axe la droite $O'a$ et pour demi petit axe une droite égale à $O'V$ qui est le rayon de la sphère inscrite D .

Or, la demi-circonférence $O'ca$ décrite sur $O'a$ comme diamètre rencontrera la circonférence D en un point c , de sorte que la corde $O'c$ sera égale à $O'V$, et par conséquent au demi petit axe de l'ellipse aa et le triangle acO' étant rectangle en c la corde cO' sera la projection de l'hypoténuse $O'a$ d'où il résulte que sur le plan $A'Z'$ ou sur tout autre plan qui serait perpendiculaire à la corde ac l'ellipse aa se projettera par un cercle, puisque la droite $O'a$ qui est le demi grand axe de cette ellipse aura pour projection la droite $O'c$ qui est égale au rayon de la sphère inscrite dans l'ellipsoïde et par conséquent au petit axe de l'ellipse aa .

Puisque l'ellipse aa se projette par un cercle sur le plan $A'Z'$ perpendiculaire à la corde ac , il en sera de même de toutes les ellipses semblables et parallèles que l'on obtiendra en coupant les deux ellipsoïdes donnés E' et F' par des plans parallèles au plan P . Par conséquent,

339. Pour avoir un point de la courbe suivant laquelle les deux ellipsoïdes donnés se pénètrent, on pourra opérer de la manière suivante :

1° ~~On~~ On coupera les deux surfaces par un plan P_1 parallèle au plan P , ce qui donnera pour sections deux ellipses semblables, parallèles et projetées sur le plan vertical $A'Z'$ par les droites 1-1 et 2-2 égales aux grands axes de ces deux ellipses.

La première de ces deux courbes aura pour centre le point 3 milieu de son grand axe 1-1, et le point 4 milieu de la droite 2-2 sera le centre de la seconde ellipse;

2° ~~Les~~ Les points 3 et 1 étant projetés sur le plan $A'Z'$ et

rabattus sur le plan horizontal de projection (*fig.* 14), la circonférence décrite sur le diamètre 1-1 sera la projection de l'ellipse suivant laquelle le plan P_1 coupe l'ellipsoïde F' ;

3° — Les points 4 et 2 étant projetés sur le plan A^vZ^v , et rabattus sur la projection horizontale, la circonférence décrite sur le diamètre 2-2 sera la projection de l'ellipse suivant laquelle le plan P_1 coupe l'ellipsoïde E' ;

4° — Les points 5 et 6 suivant lesquels se coupent les deux circonférences 1-1 et 2-2 de la *fig.* 14 seront les projections des deux points qui appartiennent à la courbe de pénétration cherchée.

Ces points seront successivement projetés sur $A'Z'$, sur A^vZ^v , et de là sur la trace du plan P_1 (*fig.* 11), d'où il sera facile de déduire leurs projections horizontales (*fig.* 13) sur les droites menées parallèlement à la ligne $A'Z'$ par les points 5 et 6 de la projection rabattue (*fig.* 14).

En recommençant les opérations précédentes, on obtiendra tous les points de la courbe de pénétration.

340. Lignes de séparation. On sait que la ligne de séparation sur un ellipsoïde est toujours une ellipse.

Or, si l'on projette la surface E sur un plan vertical $A''Z''$, parallèle à la projection SO du rayon lumineux, la courbe de séparation aura pour projection le diamètre 7-8, dont la direction sera déterminée par le point C'' et par le milieu d'une corde quelconque 11-12 parallèle au rayon lumineux $S''O''$ ou $C''v''$.

Les points 7 et 8 de l'ellipsoïde E'' étant projetés sur le plan horizontal, il sera facile de construire l'ellipse 7-9-8 et 10 qui forme la séparation sur la surface E (*fig.* 13).

En opérant comme nous l'avons dit au n° 329 on aurait

pu facilement éviter la construction de l'ellipse E'' , mais cette projection auxiliaire nous servira bientôt pour résoudre une autre partie de la question.

La ligne de séparation étant déterminée sur les figures E et E'' , on obtiendra la même courbe sur la projection E' en élevant, par chaque point de la projection E , une perpendiculaire à la ligne $A'Z'$, et portant sur chacune de ces perpendiculaires la hauteur du point correspondant de la projection E'' .

341. Ligne de séparation sur la surface F :

- 1° — On projettera cette surface sur un plan $A'''Z'''$ perpendiculaire à son axe $O'H$, ce qui donnera le cercle F''' ;
- 2° — On fera la distance $e'''S'''$ de la figure 3 égale à eS de la projection horizontale (*fig.* 13), et la droite $S'''O'''$ sera la projection du rayon SO , $S'O'$ sur le plan $A'''Z'''$ perpendiculaire à l'axe de l'ellipsoïde incliné F' ;
- 3° — L'ellipse F^{IV} égale à l'ellipse F' sera la projection de la surface F' sur un plan $A^{IV}Z^{IV}$ parallèle à son axe et au rayon de lumière $S'''O'''$;
- 4° — Sur la figure 2, la ligne de séparation sera projetée par le diamètre 13-14 que l'on obtiendra en joignant le centre O^{IV} avec le milieu d'une corde quelconque 15-16 parallèle à la projection $S^{IV}O^{IV}$ du rayon lumineux.

Pour construire $F^{IV}O^{IV}$ on fera $r^{IV}S^{IV}$ de la figure 2 égale à $r'S'$ de la figure 11 ;

- 5° — Les points 13 et 14 de la figure 2 étant projetés sur la figure 3, il sera facile de construire l'ellipse 14-17-13 et 18 qui forme la ligne de séparation sur l'ellipsoïde F''' ;
- 6° — La ligne de séparation sur la surface F' se déduira de ses projections sur les figures F''' et F^{IV} , en abaissant par chacun des points de la courbe projetée sur F''' , une perpendiculaire à la ligne $A'''Z'''$, et portant

sur cette perpendiculaire la distance au plan P_2 qui contient le plus grand parallèle de l'ellipsoïde F'' .

Ces opérations n'ont été conservées que pour les points 19 et 20 ;

7° ~~Enfin~~ Enfin, la ligne de séparation sera déterminée sur la projection horizontale F , en abaissant par chacun de ses points sur la projection F' , une perpendiculaire à la ligne $A'Z'$, et prenant sur la figure F''' la distance au plan P_3 qui est parallèle au plan vertical $A'Z'$ et qui contient le centre O, O', O''' de l'ellipsoïde F .

342. Ombres portées. Les rayons lumineux qui s'appuient sur les deux ellipsoïdes donnés formeront dans l'espace des cylindres elliptiques qui auront pour directrices les deux lignes de séparation que nous venons d'obtenir.

Les traces verticales de ces cylindres seront deux ellipses dont les centres v' et u' seront déterminés par les rayons de lumière qui passeraient par les centres CC' et OO' des deux ellipsoïdes donnés.

Les rayons lumineux qui s'appuient sur les lignes de séparation détermineront tous les points des deux ellipses qui forment le contour de l'ombre portée sur le plan vertical $A'Z'$ et sur le plan horizontal de projection.

343. Ombre portée par l'un des ellipsoïdes sur l'autre. Les points 21 et 22 suivant lesquels se coupent les deux ellipses qui forment le contour de l'ombre portée sur le plan vertical $A'Z'$ détermineront les rayons de lumière communs aux deux surfaces cylindriques formées par les rayons qui s'appuient sur les deux lignes de séparation, et les points 21 et 22 de l'ellipsoïde EE' seront par conséquent les ombres portées sur l'une des lignes de séparation par les points correspondants de l'autre.

Pour obtenir d'autres points de la courbe demandée on pourra opérer de plusieurs manières.

344. *Première méthode.* Si l'on veut obtenir les points de l'ombre portée sur un parallèle déterminé de l'ellipsoïde E, on pourra employer le principe du numéro 119.

Ainsi, les rayons lumineux qui s'appuieraient sur le parallèle donné, et sur la ligne de séparation de l'ellipsoïde FF', formeront deux cylindres dont les traces horizontales seront un cercle et une ellipse, et les intersections de ces deux courbes appartiendront aux rayons communs à ces deux cylindres, ce qui déterminera les deux points d'ombres portées par la première des deux lignes sur la seconde.

Les limites de l'épure n'ont pas permis d'exécuter cette construction.

345. *Deuxième méthode.* Supposons que l'on veut obtenir l'ombre portée sur l'ellipsoïde E', par le plus bas des points qui sont désignés par le n° 20, sur la projection verticale F'.

On coupera la surface D' par le plan P₄ parallèle au rayon de lumière S'O' et perpendiculaire au plan vertical de projection A'Z', la section sera une ellipse dont il sera facile de construire la projection horizontale ; et l'intersection de cette courbe par le rayon qui contient le point 20 de l'ellipsoïde F' déterminera l'ombre portée par ce point sur la surface E.

Cette opération n'a pas été tracée sur l'épure.

346. *Troisième méthode.* Si l'on veut éviter la projection elliptique de la courbe suivant laquelle la surface E' est coupée par le plan P₄, on emploiera un plan de projection sur lequel cette courbe serait projetée par un cercle.

Pour obtenir ce plan on devra opérer comme nous l'avons fait au n° 338 ; ainsi la courbe dont il s'agit est une ellipse qui a pour grand axe la corde 24-24 de l'ellipse E', et pour demi petit axe l'ordonnée 26-27 de la demi-circonférence 25-27-25 qui appartient au parallèle 25-25 rabattu.

Or, si l'on construit le triangle rectangle 26-28-24, dont l'hypoténuse 26-24 est égale au demi grand axe de l'ellipse 24-24, et qui a pour côté d'angle droit la droite 26-28 égale au demi petit axe 26-27 de l'ellipse dont il s'agit, cette courbe se projettera par un cercle sur tout plan, tel que A^vZ^{vi} , qui serait perpendiculaire au côté 24-28 du triangle 26-28-24, puisque sur ce plan A^vZ^{vi} , ou sur tout autre plan qui lui serait parallèle, la projection 26-28 du demi grand axe 26-24 de l'ellipse dont il s'agit sera évidemment égale au demi petit axe 26-27 de la même ellipse.

Ce qui précède étant admis, si l'on rabat le nouveau plan de projection A^vZ^{vi} , en le faisant tourner autour de sa trace horizontale, le point 20 de la courbe de séparation de F' viendra se projeter (*fig.* 14) sur la droite 29, parallèle à la ligne $A'Z'$ et passant par le point 20 de l'ellipsoïde F : l'ellipse 24 de la projection E' se projettera sur le plan A^vZ^{vi} par l'arc de cercle 30 ; le rayon SO , $S'O'$ sera projeté sur le même plan par la droite $S^{vi}O^{vi}$, et la droite 20-20 menée parallèlement à $S^{vi}O^{vi}$ par le point 20 de la ligne 29 sera la projection sur le plan A^vZ^{vi} du rayon lumineux qui contient le point 20 de l'ellipsoïde F' .

L'intersection du rayon 20 rabattu, avec l'arc de cercle 30-30, déterminera sur cette ligne le point 20 de l'ombre portée que l'on ramènera successivement sur $A'Z'$, sur A^vZ^{vi} et de là sur la trace du plan coupant P^4 par une perpendiculaire au plan de projection A^vZ^{vi} .

Il ne faut pas oublier que les droites SO , $S^{vi}O^{vi}$, sont les projections du rayon lumineux sur deux plans différents, d'où il résulte que ces deux lignes ne sont pas parallèles, et si, dans le cas actuel, la différence de leur direction paraît insensible, cela ne doit être attribué qu'au peu d'inclinaison du plan de projection A^vZ^{vi} , par rapport au plan horizontal, qui contient la projection SO .

Les abréviations que l'on obtient par la méthode précédente proviennent surtout de ce qu'en coupant la surface E

par des plans parallèles au plan projetant P_4 , les ellipses de sections seront toutes semblables et parallèles, de sorte que chacune d'elles sera projetée par un cercle, sur le plan A^vZ^v rabattu.

347. *Quatrième méthode :*

1° ~~On~~ On projettera le point 20 de l'ellipsoïde F sur le plan vertical $A''Z''$, en prenant la hauteur de ce point sur la projection F' ;

2° ~~On~~ On coupera l'ellipsoïde EE'' par le plan P^5 , passant par le point 20, perpendiculaire au plan vertical $A''Z''$, et parallèle au rayon de lumière $S''O''$.

La courbe de section sera une ellipse 31-31, dont on évitera la projection elliptique, en employant comme ci-dessus un plan de projection $A^{vii}Z^{vii}$ sur lequel cette courbe se projetterait par un cercle.

Pour déterminer la direction du plan $A^{vii}Z^{vii}$, on décrira la demi-circonférence 33-34-31 dont le diamètre 33-31 est égal à la moitié de la corde 31-31, qui est le grand axe de l'ellipse.

Le centre 33 de cette courbe sera situé sur la projection 7-8 de la ligne de séparation de la surface E'' .

L'ordonnée 33-35 du parallèle 32 rabattu sera le petit axe de l'ellipse, et si l'on construit le triangle rectangle 33-36-31, dont l'hypoténuse 33-31 est égale au demi grand axe 33-31 de l'ellipse 31-31, et dont le côté 33-36 est égal au demi petit axe 33-35 de l'ellipse dont il s'agit. Cette courbe se projettera par un cercle sur tout plan, tel que $A^{vii}Z^{vii}$, qui serait perpendiculaire au côté 31-36 du triangle rectangle 33-36-31, puisque la droite 33-36, projection du demi grand axe 33-31, sera égale au demi petit axe 33-35 de l'ellipse.

La disposition précédente étant adoptée, on agira comme au n° 346.

Ainsi, le nouveau plan de projection $A^{vii}Z^{vii}$ étant rabattu

en $A^{VII}Z^{VIII}$ autour de l'horizontale projetante du point A^{VII} , l'ellipse 31-31 de la figure F'' sera projetée (*fig. 15*) par la circonférence 37, et le rayon lumineux qui contient le point 20 de la projection F déterminera sur la circonférence 37 le point 20 de l'ombre portée; on ramènera successivement ce point, sur $A^{VII}Z^{VIII}$, sur $A^{VII}Z^{VII}$ et de là sur la trace du plan P_3 par une perpendiculaire au plan de projection $A^{VII}Z^{VII}$.

Le point 20 étant obtenu sur la projection E'' , il sera facile de déterminer sa projection sur le plan horizontal (*fig. 13*).

L'intersection du cercle 37 par le rayon du point 20 détermine un second point 23, qui fait partie de la courbe suivant laquelle la surface de l'ellipsoïde E serait traversée par les prolongements des rayons lumineux qui s'appuient sur la surface F . On peut construire cette partie de courbe comme exercice.

La méthode que nous venons d'exposer est plus simple que la précédente, parce que le plan de projection $A''Z''$ est parallèle aux rayons lumineux, d'où il résulte que les projections de ces rayons sur le plan rabattu $A^{VII}Z^{VIII}$ se confondent avec leurs projections sur le plan horizontal.

On n'a projeté sur la figure 21 que la ligne de séparation F'' de la surface F ; on remarquera que cette courbe ne se projette pas en ligne droite comme sur les figures 2 et 22, ce qui provient de ce que cette projection parallèle à la lumière n'est pas en même temps parallèle à l'axe de l'ellipsoïde F , d'où il résulte que le plan qui coupe symétriquement cette surface et le cylindre formé par les rayons lumineux qui l'enveloppent n'est pas parallèle au plan de projection $A''Z''$, ce qui serait nécessaire pour que la ligne de séparation se projetât en ligne droite.

348. *Cinquième méthode.* Avant d'exposer cette dernière méthode, je ferai remarquer que le but auquel on s'est principalement proposé d'atteindre par les méthodes précédentes

était d'éviter les projections elliptiques des courbes suivant lesquelles la surface E est coupée par les plans projetants des rayons lumineux. Jusqu'ici nous y sommes parvenus en faisant usage d'un plan de projection dirigé de manière que sur ce plan la projection du grand axe de chaque ellipse est égale au petit axe.

Or, la projection d'une droite diminuant de longueur à mesure que l'on augmente l'angle que cette ligne fait avec le plan de projection, il est évident que l'on pourra toujours incliner ce plan par rapport à la ligne donnée d'une quantité suffisante pour que la projection de cette ligne (*fig. 5*) soit aussi courte que l'on voudra.

Mais on peut encore éviter les projections elliptiques des courbes de section en faisant usage d'un plan sur lequel la projection du petit axe de chaque ellipse sera égale à son grand axe.

Il est vrai qu'alors les lignes projetantes ou ordonnées de chaque point (*fig. 6*) ne seraient plus perpendiculaires au plan AZ de projection comme dans tous les exemples qui précèdent.

Mais en faisant usage d'ordonnées obliques, telles que $M'm'$, $N'n'$ (*fig. 6*), on pourra toujours donner à ces ordonnées une direction telle que la projection $m'n'$ de la droite $M'N'$ soit aussi longue que l'on voudra.

La projection d'une courbe, dans ce cas, serait une section oblique du cylindre projetant, au lieu d'en être une section droite, comme dans les projections ordinaires ou *orthogonales*.

349. Supposons donc (*fig. 1*) que l'ellipsoïde EE' soit coupé par un certain nombre de plans $p_1p_2p_3$ etc. parallèles entre eux, et à l'axe de la surface que nous supposerons ici vertical.

Adoptons, pour les horizontales projetantes aa'' , oo'' , cc'' telle direction que nous voudrons; puis, faisant $a''c''$ égale au grand axe *vu* de l'ellipse ac il est évident que la projection *oblique* de cette ellipse sur le plan vertical $A''Z''$ sera un cercle

dont le rayon $a''o''$ sera égal à ov puisque sur le plan $A''Z''$, la projection $a''c''$ du petit axe de l'ellipse ac sera égale au grand axe vu de la même ellipse. Toutes les ellipses suivant lesquelles la surface E est coupée par les plans pp_1p_2 etc. étant semblables et parallèles, leurs projections *obliques* sur le plan vertical $A''Z''$ seront des cercles dont tous les centres seront à la même hauteur.

Si la direction des horizontales projetantes aa''' , oo''' , etc., est perpendiculaire aux plans coupants pp_1p_2 etc., et si l'on fait comme précédemment $a'''c'''$ égale au grand axe vu de l'ellipse ac , les projections obliques de toutes les courbes de section sur le plan vertical $A'''Z'''$ seront des cercles concentriques, ce qui sera encore plus simple.

C'est principalement dans cette disposition d'épure que consiste la méthode que nous allons exposer.

Ainsi, par exemple, si pour avoir les ombres portées par la surface F sur l'ellipsoïde E nous coupons cette dernière surface par des plans verticaux parallèles à la direction de la lumière, nous obtiendrons pour sections une suite d'ellipses semblables et parallèles au méridien E'' (*fig. 22*) ou E' (*fig. 11*).

Or, si du point C comme centre, avec une ouverture de compas égale à $C'G$ de la projection verticale (*fig. 11*), nous décrivons un arc de cercle, nous déterminerons le point M^{ix} , et la droite $M^{ix}N^{ix}$ sera égale au grand axe du méridien MM , de sorte que si nous prenons l'horizontale MM^{ix} pour direction des obliques projetantes, toutes les sections de l'ellipsoïde E par les plans projetants verticaux des rayons lumineux se projetteront par des cercles concentriques sur le plan vertical $A^{ix}Z^{ix}$, ou sur tout autre plan A^xZ^x qui lui serait parallèle.

Supposons donc que, pour vérifier les opérations qui précèdent, nous voulons déterminer par cette méthode l'ombre portée sur l'ellipsoïde E , par le point 20 de la surface F .

Nous couperons la surface E par le plan vertical P_6 qui contient le rayon lumineux passant par le point 20 de la surface F.

L'ellipse 39 provenant de la section de la surface E par le plan vertical P_6 se projettera *obliquement* sur le plan A^1xZ^1x par un cercle qui, ramené dans le plan A^xZ^x et rabattu sur l'épure, donne pour résultat la circonférence 39.

L'horizontale projetante du point 20 de la surface F (*fig.* 13) perce le plan de projection oblique A^1xZ^1x en un point, qui, ramené et rabattu dans le plan A^xZ^x , donne le point 20 sur la courbe F^x qui est la projection sur le plan A^xZ^x de la ligne de séparation de la surface F.

Enfin, le rayon lumineux SO, SO' étant projeté par S^xO^x sur le plan A^xZ^x , on tracera le rayon du point 20 de la courbe F^x , et l'intersection de ce rayon avec la circonférence 39 déterminera les points d'ombre portée 20 et 23 que l'on ramènera d'abord sur A^1xZ^1x , puis sur la trace du plan vertical P_6 par des horizontales projetantes perpendiculaires à ce plan, et de là sur la projection verticale E', par des perpendiculaires à la droite A'Z'.

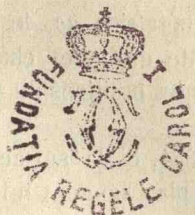
Les mêmes opérations répétées feront connaître autant de points que l'on voudra pour l'ombre portée sur la surface E par l'ellipsoïde F.

Pour ne pas embarrasser l'épure, j'ai seulement indiqué les opérations nécessaires pour déterminer les points 20 et 38 de l'ombre portée, et les points 23 et 41 suivant lesquels les rayons 20 et 38 prolongés perceraient une seconde fois la surface de l'ellipsoïde E.

J'ai indiqué les diverses méthodes qui précèdent, afin que les élèves puissent s'exercer sur chacune d'elles, car on ne peut pas dire qu'en pratique l'une soit absolument préférable à toutes les autres, et lorsque l'emploi d'une méthode conduit à des intersections trop aiguës, il est évident qu'il faut par d'autres moyens vérifier la position du point que l'on a obtenu.

CHAPITRE II.

SURFACES RÉGLÉES.



350. La détermination des lignes qui forment les limites des projections et des ombres sur les surfaces réglées dépend de ce principe de géométrie descriptive.

351. *Tout plan qui contient une génératrice d'une surface réglée est tangent à cette surface, quelle que soit du reste sa direction.*

On sait en effet qu'un plan tangent est toujours déterminé par cette condition qu'il doit contenir deux tangentes.

Or la génératrice ac (fig. 117, pl. 28), par laquelle on fait passer un plan p quelconque, peut toujours être considérée comme une première tangente. De plus, ce plan contient la droite mn tangente à la courbe vu , suivant laquelle il coupe les autres génératrices de la surface. Il contiendra donc les deux tangentes ac, mn .

352. Ainsi, nous admettrons comme conséquence du principe qui vient d'être démontré que, *pour construire un plan tangent à une surface réglée, il suffit de le faire passer par une quelconque des génératrices de cette surface.*

On construira la courbe vu , et le point de tangence o sera déterminé par l'intersection de cette courbe avec la génératrice ac , par laquelle on a fait passer le plan tangent.

353. Si on faisait tourner le plan tangent autour de la

génératrice ac , le point de tangence glisserait le long de cette droite et changerait de place pour chacune des différentes positions du plan tangent.

354. Si la surface réglée avait un plan directeur, et que le plan tangent lui fût parallèle, le point de tangence serait à l'infini.

355. D'après cela, on conçoit comment il sera possible de déterminer la ligne de séparation sur une surface réglée :

1° On fera passer (fig. 122) par chaque génératrice un plan parallèle à la direction de la lumière ;

2° On déterminera le point où chacun de ces plans touche la surface (352).

La courbe passant par tous ces points sera la ligne cherchée.

356. Si on remplace le rayon lumineux par une droite perpendiculaire au plan de projection, la courbe que l'on obtiendra sera le contour de la projection de la surface.

357. On pourrait remplacer la construction de la courbe *vu* (fig. 118) par celle d'une ligne droite.

En effet, soient les trois courbes A, B, C (fig. 119) servant de directrices à une surface réglée, ac étant une génératrice de la surface.

Par les points a, s, c , suivant lesquels la droite ac s'appuie sur les trois directrices A, B, C, concevons les trois tangentes t, t', t'' .

Ces tangentes pourront être prises pour directrices d'un hyperboloïde à une nappe qui touchera la surface donnée suivant toute la longueur de la génératrice ac , d'où il résulte que tout plan tangent à l'hyperboloïde sera tangent à la surface primitive.

Or on sait que, par suite de la double génération de l'hyperboloïde, tout plan tangent à cette surface contient les deux génératrices droites qui passent par le point de tangence. De sorte que l'une de ces génératrices étant prise pour première tangente, la seconde génératrice remplace la courbe de section *vu* (*fig. 118*), qui dans le cas de l'hyperboloïde se confond avec sa tangente.

358. Supposons actuellement que par la génératrice *ac* on ait fait passer un plan tangent quelconque (351) et que l'on veuille déterminer le point où ce plan touche la surface :

1° On construira *les trois tangentes t, t', t'' directrices de l'hyperboloïde tangent* ;

2° *Les deux droites a'c, a''c'' qui s'appuient sur les trois tangentes* ;

3° *Les deux points m, n, suivant lesquels les droites a'c, a''c'' sont coupées par le plan tangent, et la ligne mn qui joint ces points, sera la deuxième tangente.*

En effet, cette droite s'appuyant sur les trois directrices *a'c, ac, a''c''* sera une génératrice de l'hyperboloïde et, par conséquent, sera tangente à la surface primitive.

L'intersection des deux tangentes ac, mn déterminera le point de tangence o.

359. Chacune des tangentes *t, t', t''* combinée avec la droite *ac* déterminera un plan tangent.

Dans chacun de ces plans on pourra mener une infinité de droites tangentes à la surface, et si on prend une quelconque de ces tangentes dans chacun de ces trois plans tangents, on pourra en faire les directrices d'un hyperboloïde tangent.

Or, puisque l'on peut prendre pour ces directrices les tangentes que l'on voudra, il en résulte qu'il y a une infinité d'hyperboloïdes tangents à la surface donnée suivant la droite *ac*, et que l'on pourra toujours choisir parmi ces hyperbo-

loïdes celui qui, par la disposition de ses directrices, serait le plus commode pour la construction de l'épure.

Si on choisit de préférence trois tangentes parallèles à un même plan, elles pourront être prises pour les directrices d'un parabolôïde hyperbolique, dont la construction est ordinairement plus simple que celle de l'hyperboloïde à une nappe.

Enfin, le plan directeur du parabolôïde pouvant être pris à volonté, on pourra choisir celui dont la direction serait la plus favorable.

360. Dans tous les cas, la construction du plan tangent à une surface réglée quelconque peut toujours être remplacée par la construction du plan tangent à un hyperboloïde ou à un parabolôïde qui toucherait la surface donnée, suivant la génératrice sur laquelle on veut obtenir le point de tangence, et l'avantage qu'il y aurait à cette solution serait de remplacer la courbe *vu* (*fig. 118*), par une ligne droite *mn* (*fig. 119*).

361. Lorsque l'on applique cette théorie à la recherche de la ligne de séparation, tous les plans tangents doivent être parallèles à la direction du rayon lumineux.

Or, si on prend un plan auxiliaire de projection, perpendiculaire à cette droite, la construction de la courbe *vu* (*fig. 118*) ou de la droite *mn* (*fig. 119*) sera plus facile, puisqu'elle dépendra de l'intersection des génératrices de la surface ou du parabolôïde tangent, par un plan perpendiculaire au plan de projection.

362. J'ai dû, avant d'aborder les applications, résumer en quelque sorte toute la théorie des plans tangents aux surfaces réglées, afin d'avoir un point de départ auquel le lecteur puisse rattacher les solutions particulières à chacun des exemples que nous allons choisir pour sujet d'exercice.

Malheureusement, le principe général, tel que nous venons

de l'exposer, n'est presque jamais applicable, pour deux raisons.

La première, c'est que dans la pratique on rencontre très-peu de surfaces réglées qui se contournent, se tordent en quelque sorte assez brusquement, pour que le plan qui contient la génératrice que l'on a choisie pour première tangente puisse couper les autres génératrices dans les limites de la feuille sur laquelle on dessine.

Ensuite, quand ces intersections ont lieu sur l'épure, elles se font presque toujours suivant des angles si aigus qu'il n'est pas possible de compter sur l'exactitude de la courbe ou de la droite qui en provient. D'ailleurs, cette courbe ou cette droite, en les supposant rigoureusement obtenues, coupent souvent la première tangente trop obliquement pour déterminer le point de tangence d'une manière convenable.

C'est pourquoi on préfère presque toujours employer une construction particulière dont le choix est déterminé :

- 1° Par la nature particulière de la surface ;
- 2° Par sa position dans l'espace ;
- 3° Par la direction des rayons lumineux.

Hyperboloïde de révolution.

363. Proposons-nous, par exemple, de construire les projections et les ombres d'un hyperboloïde de révolution à une nappe posée transversalement sur un cylindre circulaire horizontal A.

On sait (*Géométrie desc.*) que cette surface peut être classée à volonté parmi les surfaces réglées ou parmi les surfaces de révolutions.

Sous ce dernier point de vue, il est évident que l'on pourrait opérer comme nous l'avons fait pour le tore et les surfaces de révolution qui en dépendent.

Mais cette méthode ayant été suffisamment étudiée, nous considérerons l'exemple proposé comme surface réglée, et dans ce cas voici quel sera l'ordre des opérations.

364. Les données sont :

1° La projection hh' de l'axe sur le plan vertical (*fig. 123*);

2° La projection verticale zc d'une génératrice, et la projection $z'c'$ de cette même génératrice sur le plan de la figure 124, qui est perpendiculaire à l'axe, et sur laquelle, par conséquent, cet axe se projette par un point h'' ;

3° Les deux projections sl , $s''l''$ d'un rayon de lumière.

365. *Projections.* On commencera par construire la projection 124 perpendiculaire à l'axe hh' de la surface (*Géométrie descriptive*).

Pour plus de régularité dans l'épure, on pourra décrire la circonférence $z'm'u'$ avec un rayon tel que l'arc $z'c'$ ait une commune mesure avec la circonférence $z'm'u'$.

Cette commune mesure divisera donc l'arc $c'z'$ et la circonférence $z'm'u'$ en parties égales.

Quoique la surface proposée puisse être engendrée par une droite, de deux manières différentes, on n'a représenté ici qu'une des deux générations.

Projection verticale. Par les points z, c , ramenés (*fig. 123*) sur la génératrice zc , on construira les deux plans pq , $p'q'$ perpendiculaires à l'axe hh' . Les intersections de la surface par ces deux plans seront deux cercles parallèles projetés (*fig. 124*) par la circonférence $z'm'u'$.

Les points de division de cette circonférence étant projetés sur gy , on les ramènera dans les plans pq , $p'q'$, en les faisant tourner autour de l'horizontale projetante du point g .

Cette opération déterminera (*fig. 123*) les points par lesquels doivent passer les projections verticales des génératrices de la surface.

On fera bien, pour éviter les erreurs, de désigner par un

même chiffre les points qui, dans les plans pq , $p'q'$, appartiennent à la même génératrice.

366. *Projection horizontale.* Par tous les points projetés sur les traces des plans pq , $p'q'$ (fig. 123), on abaissera des verticales dont les intersections avec les droites menées parallèlement à la ligne AZ par les points correspondants de la figure 124 détermineront, sur la figure 125, les projections horizontales de ces mêmes points.

Cette opération donnera les deux ellipses $z''u''$, $c''n''$.

Enfin, on joindra les points obtenus par la première de ces deux ellipses avec les points correspondants de l'autre, ce qui donnera les projections horizontales des génératrices de la surface.

367. *Contour des projections.* Des courbes tangentes aux projections verticales et horizontales des génératrices que nous venons de tracer détermineront le contour des projections avec toute l'exactitude suffisante pour la pratique.

On conçoit d'ailleurs qu'en construisant un plus grand nombre de génératrices l'ensemble des parties très-petites comprises entre les points où chacune de ces droites est coupée par celle qui précède et par celle qui suit formerait la courbe sans qu'il soit nécessaire de la tracer.

On est d'autant plus autorisé à regarder ce résultat comme suffisamment exact que ces portions de droites sont plus petites précisément là où la courbure de la ligne cherchée est la plus grande.

Une autre raison pourrait encore engager à se contenter du contour formé par les intersections des génératrices, c'est qu'en général les projections des corps inclinés n'étant employées que pour décrire les objets, pour en faire mieux comprendre la forme, et pour indiquer les relations de position qui existent entre ces objets et d'autres qui seraient placés autrement dans l'espace, ces sortes de projections n'exigent pas

une exactitude aussi rigoureuse que celles qui ont pour but de déterminer le tracé des coupes nécessaires à la construction du corps représenté.

Or, les personnes qui ont l'habitude des ateliers savent que, lorsqu'on veut exécuter une pièce quelconque de machine ou de bâtiment, on fait une projection particulière de cette pièce sur le plan de projection le plus simple, quant à sa position, et l'on évite au contraire les projections obliques, qui ne donnent jamais les véritables dimensions de l'objet proposé.

Cependant, pour satisfaire les esprits avides d'une rigoureuse exactitude, pour exercer et fortifier l'imagination du lecteur, et pour le cas où l'on ne voudrait tracer sur l'épure qu'un très-petit nombre de génératrices, nous allons dire comment on pourrait déterminer sur chacune de ces lignes le point où elle doit être touchée par la courbe formant le contour de la projection de sa surface.

Supposons, par exemple, que l'on veut avoir le point où la génératrice zc est touchée par la courbe qui forme le contour de la projection horizontale; cela revient à déterminer le point suivant lequel la surface est touchée par le plan vertical $c''m''$ qui contient cette génératrice.

Or, par suite de la double génération de l'hyperboloïde, le plan tangent vertical qui a pour traces $m''c''$ (*fig. 125*) coupe la surface suivant deux génératrices, dont les projections horizontales $z''c''$, $m''n''$ se confondent avec la trace du plan vertical qui les contient toutes les deux.

La première de ces deux lignes, étant projetée sur le plan de la figure 124, devient $z'c'$, et la seconde devient $m'n'$.

Leur intersection o' est le point de tangence demandé qui, ramené en o'' (*fig. 125*) sur la trace du plan $m''c''$, appartient au contour de la projection horizontale.

Pour vérifier la construction, on projettera les deux génératrices zc , mn sur la figure 123, et leur intersection o devra se trouver sur la verticale $o''-o$.

On déterminera de la même manière autant de points que l'on voudra.

368. On fera bien de se rappeler le principe que nous avons énoncé au n° 187 ; car, dans le cas particulier qui nous occupe, il en résultera une simplification remarquable. En effet, le méridien parallèle au plan vertical sera un plan de symétrie par rapport à la surface et au cylindre projetant perpendiculaire au plan horizontal, d'où il résulte que la courbe de contact composée de deux branches d'une hyperbole se projettera sur le plan vertical par la droite *tr*.

Il suffira donc pour obtenir cette ligne, de faire deux fois l'opération précédente.

La droite *tr* coupera les projections verticales des génératrices suivant des points qui, projetés (*fig.* 125) sur les génératrices correspondantes, appartiendront au contour de la projection horizontale. Il sera d'ailleurs facile d'obtenir les asymptotes de cette hyperbole.

369. La projection verticale étant parallèle à l'axe, le contour sera une section méridienne projetée sur les figures 124 et 125 par la droite qui joindrait h'' avec h''' , de sorte qu'il suffira d'élever des perpendiculaires par les points où cette ligne coupe les projections horizontales des génératrices. On pourra aussi chercher les asymptotes.

370. Sur la figure 124, le point de tangence est au milieu de chacun des petits côtés formés par les intersections successives des génératrices, de sorte que le contour de la projection est formé par le cercle inscrit dans le polygone régulier qui a pour côtés ces petites portions de génératrices.

Ce cercle n'est autre chose que le cercle de gorge de la surface.

371. *Ligne de séparation.* Reprenons la génératrice *zc* et

cherchons à déterminer sur cette droite un point de la courbe de séparation.

1° Par un point l'' pris où l'on voudra sur la génératrice zc , $z'c'$, on construira le rayon lumineux $l-s$, $l''-s''$.

2° Ce rayon percera le plan pq en un point s qui, projeté sur $p'q'$ et rabattu sur gy , viendra se projeter en s' sur le plan de la figure 124; la droite $s'c'$ sera donc l'intersection du plan pq , par le plan tangent qui contient la génératrice zc et le rayon de lumière $s-l$, $s''l''$.

L'intersection de la droite $s'c'$ avec la circonférence $z'm'u'$ déterminera le point v' qui appartient à la seconde tangente; on construira la projection $v'u'$ de cette ligne en menant par le point v' une tangente au cercle de gorge, ou en faisant la corde $v'u'$ égale à $z'c'$.

L'intersection des deux tangentes $z'c'$, $v'u'$ sera le point demandé x ; on ramènera ce point en x' et en x'' sur les deux projections 123 et 125, en opérant comme nous l'avons dit plus haut, ou en construisant les projections verticales et horizontales de la seconde tangente, dont l'intersection avec la première donne le point cherché x' , x'' .

L'intersection de cette seconde tangente vu , $v''u''$ par le rayon de lumière zz''' , $z'z^{iv}$ déterminera le point $z'''z^{iv}$ pour l'ombre portée par le point z , z'' dans l'intérieur de la surface; cela résulte de ce que la droite vu , $v''u''$ provient de l'intersection de la surface par un plan qui contient le rayon du point z .

372. Ainsi, les plans *tangents* auxiliaires employés pour déterminer les points de la ligne de séparation serviront en même temps comme plans *coupants* pour déterminer l'ombre portée de l'intérieur dans la surface par les points de l'arc de cercle ai , $a'i'$.

373. On sait (*Géométrie analytique*) que tout cylindre qui

a pour directrice une section plane d'une surface du second degré coupe cette surface suivant une autre courbe du second degré.

Par conséquent, la courbe d'ombre portée $az'''i$, $a'z^{iv}i''$ provenant de l'intersection de la surface par le cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur l'arc de cercle ai , $a'i''$, est une courbe plane.

De plus, il résulte du principe énoncé au n° 187, que les deux parties de la ligne de séparation sont deux branches d'hyperboles, et par conséquent sont situées dans un même plan.

Toutes ces courbes se projetteraient donc en lignes droites, si l'on prenait un plan de projection perpendiculaire à la droite ai , $a'i''$ suivant laquelle le plan de la courbe d'ombre portée azi coupe le plan des deux courbes de séparation.

374. Cette relation est rendue sensible par la figure 120, sur laquelle az' est l'ombre portée par l'arc za , tandis que la droite ax est la projection verticale commune aux deux branches de la courbe de séparation.

Si on voulait faire une épure en grand de cette figure, il faudrait prendre pour points de division sur l'ellipse $z''c''$ (fig. 121) les points où cette courbe est rencontrée par les ordonnées des points qui divisent en parties égales la circonférence $z''uc''$; cette précaution donnerait plus de régularité à l'épure.

Surfaces hélicoïdes.

375. On donne en général ce nom aux surfaces qui ont pour directrices des *hélices*.

376. On sait (*Géométrie descriptive*) qu'une *hélice* est la

courbe engendrée par un point qui se meut sur un cylindre en s'élevant à chaque instant d'une quantité proportionnelle à l'espace parcouru par sa projection horizontale.

Il résulte de cette définition :

1° *Que l'hélice coupe toutes les génératrices suivant un angle constant ;*

2° *Que l'hélice et toutes ses tangentes font partout le même angle avec un plan perpendiculaire au cylindre ;*

3° *Que, dans le développement du cylindre qui contient l'hélice, cette courbe se transforme toujours en ligne droite.*

La distance entre deux intersections successives de la courbe avec la même génératrice se nomme le *pas de l'hélice*, et la portion de courbe correspondante se nomme une *spire*.

La section droite d'un cylindre est une hélice dont le pas égale zéro.

Les hélices se distinguent par la nature de la section droite du cylindre sur lequel elles sont tracées ; lorsque cette section est un cercle, on dit que l'hélice est à base circulaire.

377. *Construction de l'hélice.* Supposons (fig. 131, pl. 29) que la circonférence $ao3$ soit la base ou projection horizontale d'une hélice dont le pas serait hp , on partagera cette verticale et la circonférence en un même nombre de parties égales, en 24 par exemple ; on tracera ensuite une horizontale par chacun des points de division de la verticale hp .

Si l'on suppose actuellement que le point générateur, partant de zéro, tourne dans le sens de l'arc 0, 1, 2, 3, il est évident que, lorsqu'il sera parvenu sur la verticale du point 1, il se sera élevé d'une quantité égale à la 24^e partie du pas, et sa projection verticale devra par conséquent se trouver sur la première horizontale au-dessus de la ligne AZ. Lorsque le point générateur sera parvenu sur la verticale du point 2, sa projection verticale sera élevée de deux vingt-quatrièmes du pas et sera sur la deuxième horizontale, etc.

Si on veut construire plusieurs hélices à la même hauteur, on relèvera les points sur les mêmes horizontales ; mais, lorsqu'il y aura plusieurs hélices à des hauteurs différentes, on ne tracera pas de nouvelles horizontales pour chaque hélice, ce qui ferait confusion ; on se contentera de porter avec le compas la différence de hauteur sur la verticale de chaque point à partir de l'horizontale passant par le point correspondant de la première hélice.

Ainsi, pour construire l'hélice uvx , on élèvera des perpendiculaires par chacun des 24 points de division de la circonférence cm' , puis, sur chacune de ces perpendiculaires, et à partir de l'horizontale correspondante, on portera la distance zu , qui est la différence de hauteur des deux hélices.

Le point x sera déterminé sur la verticale cx en portant zu au-dessus de l'horizontale 18.

Lorsqu'une hélice a beaucoup de spires, on peut tracer avec beaucoup de soins sur une carte la courbe correspondante à l'une d'elles, et la rapporter ensuite à toutes les hauteurs en se servant de cette courbe pour diriger la pointe du crayon ou du tire-ligne.

378. *Tangente.* La tangente en un point quelconque d'une hélice est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont la hauteur est à la base comme le pas de l'hélice est au développement de la circonférence du cercle qui en forme la projection, ou, ce qui est la même chose, comme un certain nombre de parties égales du pas est à un pareil nombre de parties égales de la circonférence de la base.

Cela est une conséquence de ce principe que l'hélice et sa tangente sont également inclinées par rapport aux génératrices du cylindre. D'après cela :

Supposons que l'on veuille construire une tangente au point m, m' (fig. 130 et 131).

On construira d'abord la tangente $m'n'$ (fig. 131).

Cette droite sera la trace horizontale du plan tangent au cylindre qui contient l'hélice, de sorte que si on fait $m'n'$ égal à $6/24$ de la circonférence $m'c$, et que mm'' (fig. 130) soit égal à $6/24$ du pas de l'hélice, la verticale $n'n$ déterminera le point n , et l'hypoténuse mn sera la projection verticale de la tangente au point m .

Filets de vis.

379. On distingue :

1° *La vis à filet carré ;*

2° *La vis à filet triangulaire.*

La première (fig. 135) est celle dont le filet serait engendré par le mouvement d'un rectangle $acvu$ tournant autour d'un cylindre, de manière que tous ses points décrivent des hélices de même pas.

Dans la vis à filet triangulaire, le filet est engendré par le mouvement d'un triangle nzx .

Les deux surfaces réglées engendrées par les côtés horizontaux ac, vu du rectangle $acvu$ (fig. 135) sont du genre de celles que l'on nomme hélicoïdes conoïdes, parce qu'elles ont pour directrice une hélice engendrée par l'un des points a, c, v, u , pour seconde directrice l'axe de la vis, et que de plus elles ont un plan directeur perpendiculaire à cet axe.

Les surfaces réglées du filet triangulaire ont pour directrices l'axe de la vis et les hélices engendrées par les points n, z, x .

Nous allons nous occuper principalement des surfaces réglées du filet triangulaire, parce que, n'ayant pas de plan directeur, elles ont un caractère de généralité qui manque aux surfaces du filet carré. Il sera d'ailleurs facile d'appliquer à ces dernières surfaces ce que nous allons dire des premières.

380. Étudions d'abord en particulier la surface supérieure

du filet, celle par exemple qui serait engendrée par le côté nz (fig. 132), et que nous avons projetée (fig. 130) avec ses génératrices.

L'inclinaison de la génératrice et le pas des hélices directrices ont été augmentés afin de mieux faire sentir le contournement de la surface.

Les questions à résoudre sont :

1° Déterminer les courbes qui forment le contour de la projection verticale de la surface ;

2° Déterminer les lignes de séparation entre les parties éclairées et celles qui sont obscures ;

3° Construire les courbes d'ombres portées sur les surfaces du filet par les lignes de séparation ou par les arêtes des filets supérieurs.

Nous avons déjà reconnu que les deux premières questions consistent toutes deux à *construire des plans tangents à la surface parallèlement à une droite donnée*, qui, dans le premier cas, serait l'horizontale projetante perpendiculaire au plan vertical, et, dans le second cas, le rayon lumineux. Dans l'un comme dans l'autre cas le nombre des plans tangents, et par conséquent le nombre des points de tangence, est infini.

On peut se proposer d'obtenir chacun de ces points sur l'une des positions de la génératrice, ou sur une hélice engendrée par tel point que l'on voudra de cette génératrice.

Nous adopterons cette dernière condition.

381. Sur la figure 129, on a construit les hélices engendrées par les trois points 1, 2, 3 de la génératrice $s-1$. Pour éviter la confusion, on a effacé toutes les autres génératrices qui ne sont pas nécessaires à la solution par la raison qui a été donnée au n° 362.

La hauteur du pas a été partagée en seize parties égales, ainsi que la circonférence de la base.

Rappelons-nous qu'il s'agit de construire des plans tangents

à la surface donnée parallèlement à une ligne droite rl (*fig.* 129 et 130), et que l'on veut obtenir le point de tangence sur l'hélice, qui a pour projection verticale la courbe $o-1-1''$ et pour projection horizontale la circonférence $1, 1', 1'''$.

382. Construisons d'abord au point 1 un plan tangent à la surface.

Pour y parvenir, nous considérerons la droite $s-1$ comme première tangente.

En second lieu, la tangente à l'hélice $o-1-1''$ aura ses deux projections $1-m, 1-m'$ perpendiculaires à la ligne AZ .

Si nous faisons (*fig.* 129) le triangle rectangle $1-m-m'''$, tel que $1-m$ soit égal à $4/16$ du pas, et que mm''' soit égal à $4/16$ de la circonférence suivant laquelle se projette l'hélice, l'hypoténuse $1-m'''$ sera la tangente rabattue autour de la verticale projetante du point 1 .

Le point m''' ramené en m (*fig.* 134) sera la trace horizontale de la tangente à l'hélice.

De plus, la génératrice $s-1$, que nous avons prise pour première tangente, perce le plan horizontal en n , de sorte que la droite mn (*fig.* 134) est la trace horizontale d'un plan qui toucherait au point 1 la surface hélicoïde donnée.

383. Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que si à chaque point de l'hélice $o-1-1''$, on construisait un plan tangent à la surface donnée, tous ces plans feraient le même angle avec l'axe de cette surface.

En effet, les deux tangentes $1-n, 1-m$ et la verticale du point 1 pourront toujours être considérées comme les trois arêtes d'un angle trièdre. Or les angles que font entre elles ces droites combinées deux à deux étant toujours les mêmes, quelle que soit la position du point de tangence sur l'hélice $o-1-1''$, il en résulte que la verticale du point 1 , et par consé-

quent l'axe de la surface, feront toujours le même angle avec le plan des deux tangentes $1-m$, $1-n$.

Nous sommes parvenus, il est vrai, à construire au point 1 un plan tangent à la surface hélicoïde donnée. Mais ce plan n'est pas parallèle à la droite rl .

Or, on conçoit que si l'on faisait mouvoir le plan $1-m-n$, de manière qu'il soit toujours tangent à la surface en un point de l'hélice $o-1-1''$, il n'y aurait plus qu'à choisir parmi toutes les positions de ce plan mobile celle qui serait parallèle à la droite rl .

Mais à mesure que le plan monterait, en touchant toujours la surface hélicoïde, sa trace horizontale s'éloignerait du centre et changerait de direction ; de sorte qu'il serait difficile de reconnaître le moment où ce plan serait arrivé dans une position parallèle à la droite rl .

384. On simplifiera les opérations nécessaires à l'expression de ce double mouvement en le décomposant de la manière suivante :

1° On abaissera du point s (*fig.* 134) la droite sc perpendiculaire sur mn , et l'on décrira du point s , comme centre, la circonférence $cc'c''$, qui sera la trace d'un cône circulaire, ayant son sommet en s et tangent au plan $1-m-n$;

2° On fera tourner ce plan autour du cône, jusqu'à ce que sa trace parvenue en $m'n'$ contienne la trace horizontale a' de la droite sa , menée par le point s parallèlement à la droite donnée rl .

Par suite de ce premier mouvement, le point 1 viendra se placer en $1'$, en décrivant un cercle horizontal $1-1'$ projeté sur le plan vertical par la droite $1-1'$ parallèle à la ligne AZ .

Le plan $1-m-n$ ramené dans la position $1'-m'-n'$ (*fig.* 134) est, il est vrai, parallèle à rl , puisqu'il contient la droite sa ; mais il a cessé d'être tangent à la surface hélicoïde, puisqu'il ne contient plus la droite $s-1$, génératrice de cette surface.

Or, en venant se placer dans la position $1'-m'-n'$, le plan $1-m-n$ n'ayant pas cessé d'être tangent au cône droit qui a son sommet en s , et pour trace la circonférence $c'-c'-c''$, il a toujours fait le même angle avec l'axe de la surface hélicoïde, et, par conséquent, dans chacune de ses positions il a toujours été parallèle à l'un des plans qui touchent cette surface en un point de l'hélice $o-1-1''$.

Il ne restera donc plus qu'à faire monter le plan $1'-m'-n'$, parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il soit venu reprendre, par rapport à la surface, une position analogue à celle qu'il occupait lorsqu'il avait pour trace la droite $\bar{m}n$.

Dans ce deuxième mouvement, le point $1'$ viendra se placer de nouveau sur l'hélice $o-1-1''$. Sa projection horizontale $1'$ ne changera pas, et sa projection verticale viendra se placer en $1''$, en parcourant la verticale $1'-1''$.

De sorte que les points $1'$ (*fig.* 134) et $1''$ (*fig.* 123) seront les projections du point de tangence demandé.

Ligne de séparation.

Si le lecteur a bien compris le principe précédent, il sera facile d'en faire l'application à la solution des deux problèmes qui font le sujet de la question proposée.

En effet, si nous supposons que la droite rl représente la direction d'un rayon lumineux, le point $1'-1''$ fera partie de la ligne de séparation.

385. Pour obtenir plusieurs points de cette courbe, il suffira de recommencer l'opération précédente pour d'autres hélices. Ainsi le plan tangent au point 2 de l'hélice $2-2''$ aura pour trace horizontale la droite nv que l'on obtiendra en opérant comme au n° 382.

On fera tourner ce plan autour du cône qui aurait pour base la circonférence tangente à nv , jusqu'à ce que la trace $n'v'$ contienne le point a' .

Par ce premier mouvement, le point 2 viendra se placer en 2', d'où on le ramènera sur l'hélice, en lui faisant parcourir la verticale 2'-2''.

On construira de la même manière le point 3'' sur l'hélice 3-3^{VI}-3''.

La courbe 1''-2''-3'' suivant laquelle la surface proposée est touchée par une suite de plans parallèles au rayon rl sera donc la ligne de séparation de la surface.

386. En considérant l'axe de la surface comme une hélice dont la base serait égale à zéro, le plan tangent déterminé par les deux droites sn et so (fig. 129) sera parallèle au plan vertical de projection ; le point de tangence sera situé en s , et lorsque le plan tangent sm''' sera devenu sa' (fig. 134), il contiendra le rayon de lumière, et le point s sera parvenu en s'' , suivant lequel la ligne de séparation 1''-2''-3'' devient tangente à l'axe de la surface.

On obtiendra donc le point s'' en prenant pour s'' autant de seizièmes et parties de seizième du pas qu'il y a de seizièmes et de fractions de seizième dans l'espace angulaire dont le plan tangent vertical sm'' a dû tourner pour venir se placer en sa' .

387. Il existe sur la partie de cette surface qui est la plus voisine du plan vertical de projection une seconde ligne de séparation que l'on obtiendra de la même manière.

En effet, en faisant tourner le premier plan tangent $1mn$ autour du cône scc' , supposons qu'au lieu de l'arrêter dans la position $1'm'n'$, nous continuions à le faire mouvoir jusqu'à ce que sa trace horizontale soit venue se placer en $m''n''$, de manière à contenir le point a' .

Dans cette nouvelle position, le plan mobile sera une seconde fois parallèle à la direction de la lumière, puisqu'il contiendra le rayon sa .

Le point 1 sera venu se placer en 1''', après avoir parcouru

le grand arc horizontal $1-1'-1''$, projeté (*fig.* 129) par la droite $1-1'-1'''$. Il ne restera donc plus, comme précédemment, qu'à faire revenir le point $1'''$ sur l'hélice $1''-1^{IV}-1^V$ en lui faisant parcourir la verticale $1'''1^{IV}$.

On obtiendra de la même manière les points 2^{IV} , 3^{IV} sur les deux hélices $2''2^{IV}$, $3''3^{IV}$ engendrées par les points 2 et 3.

388. Les deux courbes $1''2''3'''$, $1^{IV}-2^{IV}3^{IV}$ ont de l'analogie avec les lignes de séparation sur un cône ; elles en différeront d'autant moins que le pas des hélices sera plus petit, et, dans le cas où ce pas se réduirait à zéro, la surface proposée deviendrait un cône droit à base circulaire, sur lequel les lignes de séparation se transformeraient en deux droites, passant par le sommet. Les hélices seraient alors des circonférences provenant de la section du cône par des plans horizontaux.

389. Si l'on suppose les génératrices prolongées au delà des points où chacune d'elles rencontre l'axe, tous ces prolongements formeront une seconde nappe, qui n'a pas été projetée sur la figure 129, mais dont le lecteur pourra facilement se faire une idée.

Les lignes de séparation, sur cette partie de la surface, seraient égales à celles que nous venons d'obtenir et se construiraient de la même manière. Elles seraient seulement dans une position renversée ; leurs projections horizontales seraient les courbes ks , st .

390. Si le point a' était situé dans l'intérieur de la circonférence $cc'c''$, il n'y aurait pas de point de tangence sur l'hélice décrite par le point 1. Si la même chose avait lieu pour toutes les hélices situées sur les surfaces des filets, les parties inférieures de ces surfaces seraient entièrement obscures et les parties supérieures ne seraient touchées par aucun rayon lumineux, de sorte que tout se réduirait à construire l'ombre portée par la grande hélice, formant l'arête saillante des filets.

391. Il peut encore arriver que la courbe de séparation ne rencontre que les hélices les plus rapprochées de l'axe, et qu'elle n'arrive pas jusqu'à la grande hélice, formant l'arête extérieure du filet.

Enfin, la courbe de séparation sur la surface supérieure des filets peut être plongée entièrement dans l'ombre portée par le filet supérieur.

C'est ce cas qui a été supposé (*fig.* 127 et 128).

Contour de la projection verticale.

392. Pour appliquer ce qui précède à la recherche du contour de la projection verticale de la surface, il faudra remplacer la ligne rl par une droite perpendiculaire au plan vertical de projection.

Dans ce cas, la trace mn du plan tangent doit être amenée dans une position $m'''n'''$, perpendiculaire à la ligne AZ . Le point 1, après avoir parcouru l'arc horizontal 1, 1^v , projeté sur le plan vertical par la droite $1-1^v$, viendra se placer en 1^v , d'où on le ramènera sur l'hélice $0-1-1''$, en lui faisant parcourir la petite verticale 1^v1^{vi} .

On déterminera de la même manière les points 2^{vi} , 3^{vi} , sur les hélices $2-2''$, $3-3''$. On obtiendra le point s^{iv} en faisant $s-s^{vi}$ égal à quatre seizièmes du pas, et si l'on fait $s-s^{vii}$ égal à douze seizièmes, on obtiendra le point s^{vii} .

393. Les deux courbes formant le contour de la projection (*fig.* 129) auront pour projections horizontales les courbes ys , sp .

Dans le cas où le pas serait nul, ces courbes se transformeraient en lignes droites.

Les courbes gs , sq forment la projection horizontale du contour de la projection verticale de la nappe qui serait formée par le prolongement des génératrices de la surface donnée.

Ombre portée.

394. Si on emploie le système des plans coupants, les courbes de section s'obtiendront en déterminant les points où ces plans coupent les génératrices ou les hélices de la surface. On choisira celui de ces deux modes qui donnera les meilleures intersections.

395. Dans le cas où l'on voudrait avoir un point de la courbe d'ombre portée sur une ligne donnée de la surface, on opérerait de la manière suivante (119) :

Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir sur l'hélice $33^{\text{v}}13''$ (*fig.* 129) un point de l'ombre portée par l'hélice $1-1''-1^{\text{iv}}$.

On prendra (*fig.* 126) un plan horizontal auxiliaire zx .

On construira (*fig.* 133) la courbe $1^{\text{vii}}1^{\text{vii}}$ suivant laquelle ce plan coupe le cylindre oblique formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur l'hélice $1-1''-1^{\text{iv}}$.

On construira ensuite la courbe $3^{\text{vii}}3^{\text{vii}}$, suivant laquelle ce même plan coupe le cylindre formé par les rayons qui s'appuient sur l'hélice $3-3''$.

Le point 4 intersection des deux courbes $1^{\text{vii}}1^{\text{vii}}$, $3^{\text{vii}}3^{\text{vii}}$ appartiendra aux deux cylindres, et, puisqu'ils sont parallèles, le rayon $44''$ sera leur intersection, d'où il résulte que ce rayon s'appuyant sur les deux hélices $1''-1^{\text{vi}}$, $3-3''$, le point $4''$, où il rencontre la seconde courbe, sera l'ombre portée par le point $4'$ de la première.

396. Pour déterminer le point $5''$ où la ligne de séparation est rencontrée par la courbe d'ombre portée $4''-5''$, on construira (*fig.* 133) la courbe $3^{\text{viii}}-3^{\text{viii}}$ suivant laquelle le plan zx (*fig.* 126) coupe le cylindre des rayons lumineux qui s'appuient sur la courbe $1''-2''-3''$.

Le rayon $5-5''$ touchera l'hélice au point $5'$ et rencontrera

la ligne de séparation 1''-2''-3'' au point 5'', de sorte que le second de ces deux points sera l'ombre du premier.

Vis à filet triangulaire.

397. Les principes que nous venons de développer ont été appliqués (*fig.* 136 et 137, *pl.* 30) pour construire les projections et les ombres d'une vis à filet triangulaire.

Projections. Les hélices étant construites par le moyen indiqué au numéro 192, il ne restera plus qu'à construire la courbe limite de la projection verticale.

Les vis que l'on dessine dans les applications ne sont presque jamais d'une dimension assez grande pour qu'il soit nécessaire d'avoir égard à la courbure de cette ligne; malgré cela j'en ai construit la projection horizontale *psy, qsg* (*fig.* 137).

Lignes de séparation.

398. Ces courbes ont été obtenues sur les surfaces supérieures et inférieures du filet, en opérant comme nous l'avons dit aux numéros 382 et 385, avec cette seule différence qu'au lieu de rapporter toutes les projections à un même plan horizontal on a construit dans le plan A la base du cône auxiliaire qui a son sommet en *s* et qui a servi à obtenir la ligne de séparation sur les surfaces inférieures du filet, tandis que le plan A' contient la base d'un second cône auxiliaire qui a son sommet en *s'*, et qui a servi pour construire les lignes de séparation sur les surfaces supérieures des filets.

Il résulte de cette disposition d'épure que la hauteur du point *s'* au-dessus du plan horizontal A' étant la même que la distance du point *s* au-dessous du plan A, les deux cônes auxiliaires ont la même projection horizontale.

Le point *a'* (*fig.* 137) est l'intersection du plan A par le

rayon qui passe par le sommet s du premier cône auxiliaire, et le point a'' est l'intersection du plan A' par le rayon qui passe par le sommet s' du second cône auxiliaire.

La même disposition a été adoptée pour obtenir les points de contact sur d'autres hélices.

Cette partie des opérations n'a pas été conservée, parce que nous en avons donné les détails dans l'épure précédente.

Ombre portée.

399. Si nous concevons (*fig. 137*) un plan BB' vertical et parallèle aux rayons lumineux, ce plan coupera les surfaces du filet suivant les deux courbes $b3r$, $k3'h$.

Le rayon qui touchera la première de ces deux courbes au point 3 (*fig. 136*) coupera l'autre en $3'$, de sorte que ce dernier point sera l'ombre portée par le premier.

On remarquera que le point de tangence 3 fait partie de la ligne de séparation $1''-2''$, ce qui est une conséquence de ce que nous avons dit au numéro 8, en parlant des plans coupants, aussi pourrait-on employer ce moyen pour obtenir tous les points de la courbe de séparation, mais cela serait moins exact que la méthode du numéro 384, qui ne dépend que du point de tangence sur une circonférence.

400. On peut aussi construire l'ombre portée, en opérant comme au numéro 119, surtout si l'on veut avoir un point d'ombre sur une ligne donnée.

Proposons-nous, par exemple, de déterminer le point 5' suivant lequel la ligne de séparation sur la surface M du filet est rencontrée par la courbe $2'4'5'$, provenant de l'ombre portée par la ligne de séparation de la surface N.

On prendra un plan horizontal auxiliaire zx (*fig. 136*), et l'on construira (*fig. 137*) les deux courbes $1'''-2'''$, $1^{iv}-2^{iv}$ suivant lesquelles ce plan coupe les cylindres formés par les

rayons lumineux qui s'appuient sur les lignes 1''-2'' des surfaces M et N. Le rayon passant par le point 5 sera l'intersection des deux cylindres, et s'appuiera par conséquent sur les deux courbes 1''-2'' qui leur servent de directrices, de sorte que le point 5', où il rencontre la seconde courbe, sera l'ombre portée par le point où il touche la première.

On déterminera de la même manière le point d'ombre portée sur la génératrice *vu* ou sur toute autre ligne de la surface.

On peut opérer de la même manière pour construire les ombres portées par la tête de la vis.

Vis à filet carré.

401. Comme application des vis à filet carré, nous prendrons (*fig.* 138 et 139, *pl.* 31) les deux projections d'une petite machine à timbrer.

Les différentes pièces dont se compose cet instrument sont:
A plate-forme ;

P support auquel est attaché solidement l'écrou E dont la coupe est projetée (*fig.* 140) ;

v vis dont la tête est un octogone régulier ;

B balancier terminé par deux masses sphériques ;

m, m plaques liées entre elles par les deux cylindres verticaux *u, u*.

La plaque inférieure porte le cachet *n*.

Les deux cylindres verticaux *u, u* ont pour but de maintenir le cachet dans une position parfaitement horizontale.

Par suite de la rotation du balancier, ils obéissent au mouvement vertical de la vis en glissant dans les deux cylindres creux qui sont à droite et à gauche de l'écrou.

La construction des hélices et la détermination des ombres se déduiront facilement des principes précédents.

La figure 142 offre un exemple d'hélices coniques.

CHAPITRE III

SURFACES ENVELOPPES.

402. Si l'on conçoit (*Géométrie descriptive*) qu'une surface donnée, constante de forme, ou variable suivant certaines conditions, soit en mouvement dans l'espace, le lieu qui contient les intersections de toutes les positions successives de cette surface mobile se nomme *surface enveloppe*.

La surface qui se meut dans l'espace se nomme l'*enveloppée* et l'intersection de deux enveloppées consécutives se nomme la *caractéristique* de la surface.

403. Le grand nombre de formes différentes qui peuvent être comprises dans la définition qui précède ne permet pas d'établir un principe général qui puisse toujours être appliqué avec avantage. Il sera plus simple d'employer dans chaque cas une méthode particulière déterminée par la nature de la caractéristique, ou par les propriétés de la surface mobile génératrice.

404. Prenons pour exemple (*pl. 32*) la surface qui serait engendrée par le mouvement d'une sphère dont le centre serait assujéti à se mouvoir suivant une hélice donnée.

Deux positions consécutives de la sphère mobile se coupent (*fig. 148*) suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'hélice parcourue par le centre; et par suite du mouve-

ment continu de la sphère, la distance des centres étant infiniment petite, l'intersection pourra toujours être considérée comme un grand cercle, qui sera la caractéristique de la surface proposée.

Aussi pourrait-on concevoir cette même surface, comme engendrée par le mouvement d'un cercle dont le centre parcourrait une hélice, et dont le plan serait toujours perpendiculaire à cette courbe.

Projection.

405. La projection horizontale (*fig. 150*) se composera des deux cercles concentriques engendrés par les extrémités du diamètre horizontal de la caractéristique.

On construira ensuite (*fig. 149*) la projection verticale de l'hélice *as*, les positions successives de la sphère mobile seront représentées par une suite de cercles d'un rayon égal à celui de cette sphère et dont les centres seront sur l'hélice *as* qui sert de directrice.

Enfin la courbe tangente à tous ces cercles sera le contour de la projection verticale de la surface.

406. On remarquera deux points de rebroussement analogues à ceux que nous avons trouvés aux numéros 116 et 247. Cette partie de la courbe est représentée (*fig. 151*) sur une plus grande échelle.

407. Si l'on veut obtenir les points de tangence sur le contour de la projection verticale, on pourra opérer de la manière suivante :

1° On construira (*fig. 143 et 144*) les deux projections $a'o'$ de la tangente à l'hélice $oo'o''$;

2° On tracera la droite $n^{iv}n^{iv}$ perpendiculaire à $o'a'$

(fig. 143), et l'on fera les deux distances $o'n^{\text{IV}}$ égales au rayon de la sphère mobile génératrice; les points n^{IV} appartiendront à la courbe cherchée.

On obtiendra de même les points n^{V} en faisant $n^{\text{V}}n^{\text{V}}$ perpendiculaire à la tangente $o'''a'''$.

On reconnaît, en effet (fig. 149), que la courbe formant le contour de la projection verticale de la surface est une ligne dont tous les points sont éloignés de la projection de l'hélice parcourue par le centre, d'une quantité égale au rayon de la sphère génératrice. Il suffira donc de construire (fig. 143) perpendiculairement à la projection de l'hélice $oo'o''$ une suite de normales égales au rayon de la sphère mobile.

408. *Construction d'une caractéristique.* La droite ao (fig. 146) étant la tangente à l'hélice parcourue par le centre de la sphère mobile, le rayon oc , perpendiculaire sur ao , sera la projection verticale de la caractéristique du point o .

La verticale cc' déterminera (fig. 147) le point c' extrémité du petit axe de l'ellipse projetée sur le plan horizontal.

Cette ellipse étant reportée au point o'' , on aura la projection verticale de la caractéristique correspondante en élevant la perpendiculaire $c''c'''$, et faisant $c'''u'$ égal à cu .

Enfin, le point v étant projeté en v' , les droites $o'''c'''$, $o'''v'$ seront les demi-diamètres conjugués de la courbe demandée.

409. *Construction d'une hélice.* Supposons qu'on veuille construire l'hélice qui passe par le point x (fig. 146); on projettera ce point en x' (fig. 147), et l'on décrira la circonférence $x'x''x'''$ sur laquelle on portera les parties $n'x''$, $n''x'''$ égales à nx' .

Enfin, on élèvera les perpendiculaires $x''x^{\text{IV}}$, $x'''x^{\text{V}}$, et l'on fera les hauteurs $x^{\text{IV}}m'$, $x^{\text{V}}m''$ égales à xm .

Ombres.

410. *Lignes de séparation.* Ces lignes sont au nombre de deux :

La première sur la partie extérieure de la surface ;

La deuxième sur la partie qui est du côté de l'axe.

Si nous supposons que pour construire la courbe $oo'o''$ qui est la projection verticale de l'hélice parcourue par le centre de la sphère mobile, on ait partagé le pas oo^{IV} de cette hélice et la circonférence de sa base en seize parties égales, on pourra toujours de préférence chercher les points de la ligne de séparation qui sont situés sur les sphères dont les centres correspondent aux points de division de ces deux courbes.

411. Supposons, par exemple, qu'il s'agit d'obtenir les points de la ligne de séparation qui appartiennent à la sphère dont le centre est situé en o' .

On fera descendre cette sphère jusqu'à ce que son centre soit arrivé au point o ; dans ce mouvement, il aura parcouru *cing seizièmes* de la portion de l'hélice qui correspond à une spire de la surface.

Or, si au point o on construit la tangente ao , la droite cc' , perpendiculaire à cette tangente, sera la projection verticale de la caractéristique correspondante.

On remarquera que cette caractéristique et celles qui auraient leurs centres aux points $o''o^{IV}$, etc., sont les seules qui se projettent sur le point vertical par des lignes droites, et c'est pour arriver à ce résultat que nous avons fait descendre jusqu'au point o le centre de la sphère sur laquelle nous voulons obtenir un point de la ligne de séparation.

Si nous faisons tourner dans le même sens la projection

horizontale du rayon de lumière $s'-l'$ d'une quantité égale à cinq fois la seizième partie de quatre angles droits, la projection verticale de ce rayon deviendra $s-l'$, et la droite qui aurait pour ses deux projections $s'-l$, $s'-l'$ sera placée, quant à sa direction, par rapport à la sphère dont le centre est situé en o , comme le rayon $s-l$, $s'-l$ était placé par rapport à la sphère, qui avait pour centre le point o' .

Par cette disposition d'épure, la question est ramenée à construire le point cherché sur la sphère dont le centre est situé en o , puis à le faire revenir ensuite sur la sphère qui avait son centre en o' .

Mais il ne suffit pas, pour cela, de construire parallèlement au rayon $s'-l'$, $s-l''$ un plan tangent à la sphère qui a pour centre le point o ; il faut encore que ce plan soit tangent à la surface proposée, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que le point de tangence sera sur la caractéristique qui a pour projection verticale la droite cc' .

Or, il est évident que l'on aura satisfait à cette dernière condition en construisant parallèlement à $s'-l'$, $s-l''$, un plan tangent au cylindre circulaire qui touche la sphère suivant la caractéristique cc' , et qui, par conséquent, a pour axe la droite ao tangente au point o à l'hélice parcourue par le centre de la sphère mobile.

Voici quel sera l'ordre des opérations :

Par un point x , pris où l'on voudra sur la tangente ao , ou sur son prolongement, on construira la droite xz parallèle à la nouvelle position du rayon de lumière.

Cette droite percera dans un point z le plan de la caractéristique cc' , et la ligne oz sera l'intersection du plan de cette caractéristique par le plan qui contient la tangente ao , et qui est parallèle au rayon $s-l''$, $s'-l'$.

On fera tourner le plan cz autour de l'horizontale projetante du point o .

Par suite de ce mouvement, la caractéristique cc' , rabattue

sur le plan horizontal oz' , sera projetée (*fig. 144*) par la circonférence $cmcm$, et la droite oz deviendra oz'' .

Enfin, le diamètre mm , perpendiculaire à oz'' , déterminera sur la circonférence $cmcm$ les deux points demandés m, m .

En effet, en faisant tourner le plan oz autour de l'horizontale du point o , le cylindre circulaire tangent à la sphère mobile est venu se placer dans une position verticale, et la droite oz'' représente alors la trace horizontale du plan qui contient l'axe du cylindre et la parallèle au rayon $s-l''$, $s'-l$, de sorte que les points m, m appartiennent en même temps à la caractéristique cc' , au cylindre qui touche la sphère suivant cette caractéristique, et aux deux plans tangents à ce cylindre et parallèles aux rayons de lumière $s-l''$, $s'-l'$.

Pour ramener les deux points m, m à la place qu'ils doivent occuper dans l'espace, on fera d'abord revenir le plan horizontal oz' dans la position oz (*fig. 143*).

Les points m décriront deux arcs de cercles mm' , parallèles au plan vertical de projection ; ce qui donnera m', m' , d'où on déduira leurs projections horizontales $m''m''$.

On fera ensuite remonter ces deux points sur la sphère qui a son centre en o' .

Dans ce dernier mouvement, les projections horizontales décriront chacune un arc égal à *cing* fois la *seizième* partie de la circonférence à laquelle il appartient, ce qui donnera les deux points m''' , m''' .

Quant aux projections verticales, on les obtiendra en élevant les perpendiculaires m''' , m''' , et faisant (*fig. 143*) la distance des points m''' à l'horizontale $o'h$ égale à la distance des points m' à l'horizontale oz' .

L'un des points m''' appartient à la ligne de séparation extérieure.

Le second point fait partie de la ligne intérieure.

En recommençant les opérations précédentes, on obtiendra autant de points que l'on voudra.

Toutes les caractéristiques de la surface devant être amenées successivement dans le plan oz , on fera bien, pour éviter la confusion, d'effacer les lignes qui auront servi à déterminer les points situés sur une caractéristique avant de s'occuper des points qui sont situés sur la caractéristique suivante.

412. On peut appliquer le principe précédent à la recherche du contour de la projection verticale de la surface.

Il suffira, pour cela, de remplacer le rayon de lumière $s-l$, $s'-l$ par une droite s , $s'-v$ perpendiculaire au plan vertical de projection.

Ainsi, pour obtenir un point sur la sphère dont le centre est situé en o' , on fera remonter cette sphère jusqu'à ce que son centre soit parvenu en o'' .

La droite $o''a''$ tangente à l'hélice sera l'axe du cylindre circulaire qui envelopperait la sphère en la touchant suivant la caractéristique $c''c'''$. Le centre o' de la sphère mobile ayant parcouru *trois seizièmes* de révolution pour monter jusqu'en o'' , l'horizontale projetante $s'-v$ devra pareillement parcourir dans le même sens les *trois seizièmes* de quatre angles droits, ce qui amènera sa nouvelle projection horizontale en $s'-v'$, et la projection verticale en $s-v''$ sur la ligne AZ.

Si nous prenons alors le point a'' ou tout autre point sur la tangente $o''a''$, et que nous construisions l'horizontale $a''u$ parallèle à $s-v''$, $s'-v'$, la ligne $o''u$ sera l'intersection du plan de la caractéristique $c''c'''$ par le plan qui contient la tangente $o''a''$ et la parallèle à $s-v''$, $s'-v'$.

Rabattant le plan $o''u$ autour de l'horizontale projetante du point o'' , la droite $o''u$ devient $o''u''$ (*fig. 144*), et le diamètre nn , perpendiculaire à $o''u''$, déterminera les deux points demandés n, n .

Ces points seront d'abord ramenés dans le plan $o''u$ en n', n' , d'où on déduira leurs projections horizontales n'', n'' ; de là, on leur fera parcourir *trois seizièmes* de révolution pour les ra-

mener sur la sphère qui a son centre en o' , ce qui donnera $n'''n'''$.

Enfin, on obtiendra les projections verticales n^{iv}, n^{iv} en élevant les perpendiculaires par les points $n'''n'''$, et faisant la distance des points n^{iv} à l'horizontale $o'h$ égale à la distance des points n' à l'horizontale $o'u'$.

C'est principalement comme exercice sur l'application des plans tangents que j'ai indiqué ce moyen de déterminer le contour de la projection verticale, car les solutions indiquées aux numéros 405 et 407 sont plus simples et tout aussi exactes.

413. Si on voulait obtenir sur une hélice de la surface un point de la courbe de séparation ou du contour de la projection verticale, on pourrait opérer de la manière suivante :

1° Par le point où l'hélice donnée percerait le plan de l'une des caractéristiques cc' , $c''c'''$, on construirait la tangente à cette courbe et la tangente à l'hélice ; ces deux droites détermineraient un plan tangent à la surface ;

2° Le point où l'axe de la surface percerait ce plan tangent serait le sommet d'un cône autour duquel on le ferait tourner jusqu'à ce qu'il contienne le rayon de lumière, si on cherche un point de la ligne de séparation ; ou jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au plan vertical, si on demande le contour de la projection ;

3° Enfin on ferait remonter le plan tangent jusqu'à ce que le point de tangence soit venu se replacer sur l'hélice donnée.

Ombres portées.

414. Les courbes formant le contour des ombres portées pourront être construites par le principe des plans coupants.

Si on veut obtenir un point sur une hélice ou sur une ca-

ractéristique donnée, on pourra employer le principe du n° 119.

415. Les points r'' , t'' , e'' provenant de l'intersection des traces de cylindres formés par les rayons de lumière qui s'appuient sur les lignes de séparation détermineront les points r' , t' , e' suivant lesquels les différentes branches de ces courbes sont rencontrées par les ombres portées provenant des branches supérieures.

Ainsi le point r' est l'ombre portée sur la courbe extérieure $r'-e'$ par le point r de la courbe intérieure.

Les points t' e' sont les ombres portées par les points t , e

CHAPITRE IV.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

416. En résumant ce qui fait le sujet des chapitres qui précèdent, nous rappellerons au lecteur que, dans le cas où les rayons lumineux proviennent du soleil, ceux de ces rayons qui s'appuient sur le corps forment une surface cylindrique ou prismatique, dont l'intersection avec les surfaces extérieures détermine le contour de l'ombre portée ; ce qui réduit à trois le nombre des opérations principales à effectuer, savoir :

1° *Construire la ligne de séparation ;*

2° *Concevoir le cylindre ou le prisme qui aurait cette ligne pour directrice et qui serait parallèle aux rayons lumineux ;*

3° *Construire toutes les lignes suivant lesquelles ce prisme ou ce cylindre rencontre les surfaces extérieures.*

Ligne de séparation.

417. Nous avons en général reconnu deux moyens de déterminer la ligne de séparation, savoir :

1° Par des plans coupants ;

2° Par des plans tangents.

418. Il y a des cas où le premier de ces deux principes ne

donne pas toute l'exactitude désirable, c'est surtout lorsque la section n'est pas de nature à être exprimée par une définition géométrique rigoureuse, et que la courbure est très-faible dans le voisinage du point cherché, parce qu'alors la courbe différant peu de sa tangente, il est presque impossible de déterminer le point de tangence avec précision. Il faut, dans ce cas, chercher de plusieurs manières les points sur la position desquels il y a de l'incertitude, soit en employant des plans de section dirigés dans un autre sens, soit en employant le principe des plans tangents.

419. Cette dernière méthode, quoique moins souvent applicable que la première, permet d'obtenir le point de tangence sur une ligne déterminée de la surface, et par conséquent de choisir celles de ces lignes dont la définition est la plus simple.

Dans ce genre de solution, la surface proposée étant presque toujours remplacée par une autre qui la touche suivant la ligne que l'on a choisie, la nature de cette seconde surface est souvent l'origine d'une nouvelle espèce d'abréviation ou d'une plus grande exactitude dans la construction du point de tangence.

Ombres portées.

420. Les contours de ces ombres portées peuvent souvent être obtenus au moyen des plans coupants.

Lorsque la section est rencontrée par le rayon lumineux suivant un angle trop aigu, il faut vérifier la construction en construisant une seconde section dans un autre sens.

421. J'appellerai aussi toute l'attention du lecteur sur le principe exposé au n° 119.

Cette méthode a surtout l'avantage de déterminer les points

de l'ombre portée sur une ligne déterminée de la surface. Elle consiste :

A considérer cette ligne et celle dont on cherche l'ombre comme les directrices de deux cylindres parallèles à la direction de la lumière. L'intersection de ces cylindres se réduit par conséquent au rayon lumineux qui s'appuie sur les deux courbes, de sorte que le point où il rencontre l'une d'elles est l'ombre du point suivant lequel il touche l'autre.

422. On peut prendre à volonté le plan auxiliaire sur lequel on construit les traces des deux cylindres. Ainsi on peut se servir des plans de projection ou de tout autre plan qui leur serait perpendiculaire.

On peut même prendre un plan incliné comme on voudra dans l'espace.

423. Je n'ai pas cru devoir donner un exemple de tous les cas qui peuvent se rencontrer dans la pratique, je me suis borné à ceux qui m'ont paru nécessaires au développement des idées.

Le lecteur fera bien de choisir lui-même d'autres données, afin d'étudier les différences produites dans les effets obtenus lorsqu'on change la forme ou la grandeur de l'objet, sa position dans l'espace ou la direction de la lumière.

424. Je ne dois pas abandonner ce sujet sans réfuter une objection que beaucoup de dessinateurs sont trop souvent disposés à admettre. Ils pensent que les opérations nécessaires pour obtenir avec exactitude certains effets d'ombre sont trop longues pour que l'on puisse les appliquer avec avantage dans la pratique, ils préfèrent tracer les ombres à peu près, et, comme ils le disent, *de sentiment*. Mais on

n'a pas toujours sous les yeux l'original de l'objet que l'on dessine, et qui n'est souvent qu'en projet. D'ailleurs, quand même on admettrait l'existence de cet objet, il ne serait presque jamais éclairé d'une manière convenable à l'effet que l'on voudrait produire. Il est donc évident que l'on ne parviendra à construire à peu près exactement, à vue d'œil, les lignes de séparation et le contour des ombres portées qu'en remarquant les analogies de forme et de position qui existent entre les objets que l'on dessine et ceux dont on aurait fait précédemment des études rigoureuses.

Ainsi, le dessinateur qui aura étudié avec soin les principes qui précèdent n'aura souvent besoin que d'obtenir deux ou trois points avec exactitude, pour reconnaître de suite quels doivent être le contour et l'étendue des ombres sur toutes les parties de son dessin.

Ces observations ne s'appliquent pas seulement aux objets compris dans une définition rigoureuse.

Les élèves peintres eux-mêmes, s'ils consentaient à consacrer quelques mois aux études géométriques, acquerraient bien plus promptement l'exactitude du coup d'œil et le sentiment des contours; l'habitude de comparer la grandeur réelle des objets avec leur grandeur apparente les mettrait en garde contre les effets et les illusions d'optique qui égarent si souvent l'imagination, et lorsqu'ils viendraient se placer devant un modèle, après avoir étudié les causes des variations apparentes de grandeur et de forme des lignes principales, ils en saisiraient plus promptement, à la première vue, toutes les différentes courbures et les nombreuses sinuosités.

Ainsi, par exemple, ils n'auraient pas copié deux ou trois têtes sans avoir reconnu sur les joues, le nez, le menton, les courbes plus ou moins modifiées, qui forment les lignes de séparation sur l'ellipsoïde, le cône, la sphère; dans les plis d'une draperie, dans le contour des feuilles d'un ornement

d'architecture ou de ciselure, ils retrouveraient des parties ayant de l'analogie avec les surfaces cylindriques, coniques ou sphériques. Des anneaux, des glands, des cordons, pourraient être comparés avec le tore, l'ellipsoïde ou les hélices.

Enfin, il n'est pas jusqu'aux masses d'ombres produites par les rochers, les montagnes ou les arbres qui ne puissent acquérir un plus grand caractère de vérité par l'examen raisonné des causes qui les produisent.

Il est bien entendu que, dans tout ce travail du peintre, il ne s'agit pas d'employer un seul instant le compas, et que l'usage de cet instrument n'est conseillé ici que pour l'étude des principes sans lesquels on ne peut pas espérer de *voir* avec exactitude les objets que l'on se propose de *dessiner*.

FIN DU TROISIÈME LIVRE.

LIVRE IV.

GNOMONIQUE.

425. La gnomonique a pour but la construction des cadrans solaires.

426. Un cadran solaire est une surface, ordinairement plane et disposée de manière à recevoir l'ombre d'une barre ou tringle de métal que l'on nomme le style.

La direction de l'ombre portée par une droite dépendant de la position du soleil dans l'espace, il s'ensuit réciproquement que cette position, et par conséquent l'heure correspondante, peuvent être déterminées par la direction de l'ombre, et si l'on parvient à tracer cette direction pour chaque instant du jour, on aura construit un cadran solaire.

Cette question diffère essentiellement de celles qui précèdent, en cela que jusqu'ici nous avons toujours supposé que le soleil était immobile; tandis que, dans la construction d'un cadran solaire, il faut chercher l'ombre d'une droite ou d'un point pour chaque instant de la journée.

Pour résoudre ce problème, il faut rappeler quelques notions élémentaires d'astronomie.

427. On sait que les limites et les variations dans la lon-

gueur du jour dépendent du mouvement apparent du soleil au-dessus de notre horizon.

Or, le mouvement apparent est la conséquence du mouvement réel.

Mais la terre emploie vingt-quatre heures pour faire une révolution autour de son axe, de sorte que dans le même espace de temps le soleil paraît décrire un cercle entier autour de la terre.

Pour simplifier la question, nous raisonnerons dans l'hypothèse du mouvement apparent, et nous supposerons que le soleil décrit chaque jour un cercle *perpendiculaire* à l'axe de la terre, ce qui est regardé comme suffisamment exact pour le problème que nous avons à résoudre.

428. Cela étant admis, supposons que la figure 1 de la planche 33 soit une projection de la terre sur le plan de l'équateur, l'axe du globe sera projeté par le point C, et si nous partageons la demi-circonférence *ee* en douze parties égales, les droites qui passeront par le centre et par les différents points de la circonférence seront les traces de douze plans qui contiendront l'axe de la terre et qui feront entre eux des angles égaux.

Ces plans étant infinis, partageront la circonférence entière en vingt-quatre parties égales, et chacun des angles correspondants aura par conséquent pour mesure un arc de 15° .

Or, si nous supposons que la terre tourne autour de son axe, dans le sens qui est indiqué par la flèche *u*, cela produira évidemment le même effet que si le soleil tournait dans le sens indiqué par la flèche *v* ; de sorte que pour un observateur qui occuperait un point O, situé dans le plan méridien C-12, il sera *six heures* du matin lorsque le soleil sera parvenu dans le plan C-6.

Il sera *sept heures* au moment où le soleil atteindra le plan C-7 ; *huit heures* lorsqu'il traversera le plan C-8, et enfin *midi*

lorsqu'il atteindra le plan C-12 ; après quoi il paraîtra descendre de l'autre côté, en s'approchant du plan horizontal C-6.

429. Supposons actuellement qu'au lieu de faire passer les douze plans dont nous venons de parler, par l'axe C de la terre, nous prenons pour leur intersection commune (*fig. 9*) une droite O-P₁ parallèle à l'axe du globe, et projetée par le point O sur le plan de l'équateur (*fig. 3*). L'effet sera absolument le même ; c'est-à-dire que le soleil atteindra le plan O-6' en même temps que le plan C-6.

Il traversera en *même temps* les deux plans C-7 et O-7', il parviendra à la même heure aux plans C-8 ou O-8', etc.

430. Ce que je viens de dire a besoin de quelques explications :

En effet, on conçoit que si le soleil S était très-près de la terre CO, comme on le voit sur la figure 2, de manière, par exemple, que l'arc 6-6' valût à peu près le 30° de la circonférence entière, il y aurait alors une différence de 48 *minutes*, entre le moment où il atteindrait le plan C-6, et celui où il serait parvenu au plan O-6'.

Mais il ne faut pas oublier que la distance du soleil à la terre est de 34,000,000 de lieues, ou 24,000 fois le rayon de notre globe. Or, le cercle que paraît décrire le soleil est alors si grand, que l'on peut considérer comme nulle, et négliger entièrement la très-petite portion de circonférence comprise entre les deux plans correspondants C-6 et O-6', ou C-7 et O-7' (*fig. 5*).

En effet, dans le cas le plus défavorable, la distance CO de l'observateur à l'axe C du globe (*fig. 5*) serait tout au plus égale au rayon CE de l'équateur. On remarquera de plus, que cette distance CO peut être regardée comme égale à l'arc 6-6' parcouru par le soleil entre les deux plans C-6 et O-6'.

Or si l'on rétablit, par la pensée, les dimensions véritables

qui ne peuvent pas plus être représentées sur la figure 5 que sur la figure 2, la distance du soleil à la terre étant 24,000 fois le rayon terrestre sera souvent plus de 25,000 fois la distance CO ou l'arc 6-6' : mais, la circonférence entière étant plus de 6 fois le rayon, il s'ensuit que le cercle décrit par le soleil vaudra plus de $6 \times 25,000$ ou 150,000 fois l'arc 6-6'.

Ainsi, à la distance de 34,000,000 de lieues, l'arc compris entre les deux plans C-6 et O-6' sera moindre que la 150,000^e partie de la circonférence du cercle parcouru par le soleil pendant la révolution diurne ; et le temps nécessaire pour passer d'un de ces plans à l'autre sera par conséquent plus petit que la 150,000^e partie de *vingt-quatre heures*, ou à peu près une *demi-seconde*, ce qui est tout à fait insignifiant pour la construction d'un cadran solaire.

On pourra donc admettre que chacun des douze plans, menés par la droite OP' de la figure 9, sera traversé par le soleil en même temps que le plan correspondant qui contient l'axe CP du globe, et que pour un observateur placé en un point O de la surface terrestre (*fig. 3*), la position apparente du soleil sera absolument la même que s'il était placé au centre C.

431. Les angles que les douze plans font entre eux se nomment *angles horaires*, parce que leur mesure étant de 15° ou la vingt-quatrième partie de 360°, le soleil emploie exactement une heure de temps pour passer d'un de ces plans à l'autre.

Or, au moment où l'un de ces douze plans contient le soleil, son intersection avec une surface quelconque sera évidemment l'ombre portée sur cette surface par la droite, suivant laquelle ces douze plans se coupent, de sorte qu'il suffira pour rendre cette ombre visible à chaque instant de la journée, de placer au point O une tige en métal parallèle à l'axe du globe.

432. La construction d'un cadran solaire sera donc réduite à ces trois opérations principales :

- 1° ~~————~~ Construire une droite parallèle à l'axe de la terre ;
- 2° ~~————~~ Faire passer par cette droite douze plans faisant entre eux des angles égaux ;
- 3° ~~————~~ Tracer les intersections de ces plans avec la surface sur laquelle on veut obtenir le cadran.

433. PREMIÈRE OPÉRATION. *Construire une droite parallèle à l'axe de la terre.* La méthode extrêmement simple que nous allons exposer est suffisamment exacte pour la pratique, et n'exige l'emploi d'aucun instrument coûteux.

On sait que les étoiles sont tellement éloignées que leurs distances comparées aux plus grandes dimensions de notre globe peuvent être considérées comme infinies.

Il résulte de là que les différences qui existent entre ces distances étant pour nous insensibles, nous éprouvons absolument la même sensation que si tous les corps célestes étaient également éloignés de notre œil et attachés à la surface d'une immense sphère céleste dont la terre occuperait le centre.

Cette sphère céleste apparente est représentée sur la figure 6 par la circonférence ZH'Z/H.

Le gros point noir et circulaire placé au centre sera le globe terrestre dont la droite PP' est l'axe de rotation.

La droite HH' est un plan tangent à la terre, et représente par conséquent l'horizon pour un spectateur qui est placé en O (439 et 440).

Le diamètre EE est l'équateur céleste, et les deux cercles TT, T'T' sont les tropiques du cancer et du capricorne.

434. Lorsque le soleil décrit le tropique du cancer TT, le rayon lumineux engendre la surface du cône projeté sur la figure par le triangle isocèle TOT, tandis que, si le soleil décri-

vait le tropique du capricorne $T'T'$, le rayon lumineux engendrerait la surface du cône $T'OT'$.

Ces cônes appartiennent à une même surface conique dont ils sont les deux nappes opposées.

Or, quel que soit le jour de l'année, quel que soit le parallèle décrit par le soleil, le rayon lumineux qui contient le point O engendrera toujours une surface conique qui aura ce point pour sommet.

On remarquera seulement que l'angle formé au sommet par deux génératrices opposées de ces deux surfaces coniques sera d'autant plus ouvert que le cercle décrit par le soleil sera plus rapproché de l'équateur.

435. Ce qui précède étant bien compris, concevons (*fig. 4*) au point o un plan P tangent à la surface de la terre, et supposons que par ce même point o on ait élevé une tige verticale, un obélisque ou une colonne oO .

Si le soleil décrit l'un des deux cercles U ou U' parallèle à l'équateur E le rayon lumineux engendrera la surface conique dont les génératrices sont indiquées sur la figure 4 par des lignes de points ronds.

Or, il résulte évidemment de la disposition du plan tangent horizontal HH' que ce plan rencontrera les deux nappes de la surface conique engendrée par le rayon lumineux, et que la courbe de section (*fig. 4 et 8*) sera par conséquent une hyperbole dont l'ouverture dépendra de la distance des cercles U, U' à l'équateur E .

De sorte que, si les deux cercles étaient très-près de l'équateur, les deux branches de l'hyperbole seraient presque droites et très-rapprochées l'une de l'autre.

Enfin, ces deux courbes se confondraient en une seule ligne droite, si le soleil parcourait l'équateur.

436. Pour un observateur qui habiterait sur la circonférence

du cercle polaire, il y aurait un jour où la courbe de section du cône par le plan horizontal tangent à la surface du globe se changerait en une parabole.

Elle pourrait être une hyperbole, une parabole ou une ellipse pour celui qui habiterait dans l'intérieur du cercle polaire, et serait un cercle pour l'observateur qui pourrait exister au pôle.

437. Les considérations qui précèdent étant admises, revenons au problème proposé. On ne doit pas oublier qu'il s'agit toujours d'obtenir une droite parallèle à l'axe du globe terrestre.

Or, nous partagerons l'opération en deux parties :

1° ~~————~~ Déterminer la projection horizontale de la droite demandée ;

2° ~~————~~ Construire la projection verticale de la même droite.

438. Supposons (*fig. 8*) que la partie M qui est indiquée sur l'épure par une teinte de hachures soit le plan ou la coupe horizontale du mur sur lequel on veut tracer le cadran solaire demandé.

On disposera une surface horizontale HH', qui soit parfaitement nivelée dans tous les sens.

On pourra, pour cet usage, faire dresser une aire en plâtre, ou une partie du sol bien battue.

On pourra employer aussi une grande table ou planche à dessins dont on vérifiera l'horizontalité avec un niveau très-exact.

Sur la surface dont nous venons de parler, on décrira une circonférence, et l'on fixera au centre de cette ligne une tige verticale telle que *oO* (*fig. 4*).

439. On peut remplacer la tige dont nous venons de parler par deux équerres ajustées comme on le voit figure 7.

440. Enfin, on pourra encore (*fig.* 10) suspendre au-dessus du centre o un fil qui traverserait deux balles de plomb dont l'une o toucherait le centre de la circonférence, tandis que l'autre balle O , suspendue au même fil, serait nécessairement située sur la même verticale que la première.

Les choses étant disposées comme nous venons de le dire, revenons à la figure 8; supposons que l'opération ait lieu pendant un jour d'été ou de printemps, et que l'observateur soit tourné vers le mur, c'est-à-dire vers le nord, puisque la surface sur laquelle on doit tracer le cadran doit nécessairement être plus ou moins exposée au midi.

Lorsque le soleil commencera à paraître au-dessus de l'horizon, l'ombre de la verticale du point O sera infiniment longue et dirigée suivant $O-1$; mais, quelques instants après, la direction de l'ombre aura changé, et le soleil, s'étant élevé au-dessus du plan horizontal, l'ombre de la verticale se terminera au point 2, que l'on marquera avec un crayon.

Une heure ou deux après, le soleil ayant continué son mouvement ascensionnel, l'ombre de la verticale aura changé encore une fois de direction, et sera terminée au point 3, que l'on marquera comme le précédent. On continuera de marquer ainsi toute la journée les longueurs des différentes ombres portées par la verticale $o-O$ (*fig.* 4 ou 7) ou par la balle O de la figure 10.

Si l'on employait ce dernier moyen, il faudrait avoir soin d'opérer par un temps assez calme pour que l'agitation de l'air ne puisse pas changer la direction du fil vertical auquel sont suspendues les deux balles.

441. Lorsque le soleil aura disparu vers la gauche par suite de son mouvement au-dessous de l'horizon, on tracera une courbe par tous les points qui auront été marqués (*fig.* 8).

Cette courbe 1-5-8 sera l'une des branches de l'hyperbole suivant laquelle le plan horizontal HH' coupe les deux nappes

de la surface conique engendrée par le rayon lumineux qui contient le point O de la figure 4.

Si l'opération a lieu pendant un jour d'automne ou d'hiver, on obtiendra la courbe 1-5-8 (*fig. 4 et 8*) ; dans un jour de printemps ou d'été, on aura la courbe 9-10-11 ; mais si l'on opérerait à l'époque des équinoxes, les extrémités de l'ombre à toutes les heures de la journée seraient situées sur une droite 12-13, qui serait l'intersection du plan horizontal HH' par le plan équatorial E (*fig. 4*).

Lorsqu'on aura tracé l'arc d'hyperbole 1-5-8, et que l'on aura corrigé les petites irrégularités de sa courbure, on joindra le centre o du cercle avec le milieu m de l'arc amc (*fig. 8*), et l'on obtiendra par ce moyen l'axe transverse de l'hyperbole.

Cette droite sera la projection horizontale de la ligne demandée NS .

En effet, la droite $O-5$ sera évidemment la plus courte de toutes les ombres portées sur le plan horizontal HH' par la tige verticale du point O , et l'ombre la plus courte ayant nécessairement lieu au moment où le soleil atteint sa plus grande élévation au-dessus de l'horizon, il s'ensuit que l'axe transverse de l'hyperbole doit coïncider avec la trace du plan dans lequel se trouve le soleil au milieu de la journée.

Or, ce plan NS perpendiculaire au plan horizontal HH' (*fig. 8*) contient la droite menée par le point O parallèlement à l'axe de la terre ; donc il sera le plan vertical projetant de cette droite, et son intersection NS avec le plan HH' sera la projection horizontale de la droite demandée.

442. L'angle que la droite NS fait avec AZ , ou avec une droite quelconque parallèle à AZ , est ce qu'on appelle la *déclinaison* du mur sur lequel on se propose de tracer le cadran solaire.

443. GNOMON. Les anciens employaient souvent un moyen

analogue pour déterminer le moment où le soleil atteignait chaque jour le point le plus élevé au-dessus de l'horizon.

Ainsi, après avoir construit une colonne ou un obélisque, ils observaient l'instant où l'ombre de cet obélisque ou de cette colonne coïncidait avec la trace horizontale du plan méridien. Des points marqués sur cette ligne indiquaient quelle devait être à midi la longueur de l'ombre pour chaque époque de l'année.

Le monument destiné à cet usage se nommait un *gnomon*, ce qui a fait donner le nom de *gnomonique* à l'ensemble des opérations nécessaires pour construire les cadrans solaires.

444. Le plan C-12 (*fig. 3*), qui contient à midi le centre du soleil, se nomme *plan méridien* ; c'est pourquoi la droite NS (*fig. 8*) se nomme *méridienne*.

445. Quoique la méthode que nous venons d'indiquer pour trouver la méridienne soit suffisamment exacte, je donnerai une seconde méthode qui peut être facilement employée par les personnes qui possèdent un instrument propre à mesurer les angles :

1° On commencera par reconnaître à l'horizon un objet fixe et bien déterminé tel que serait, par exemple, un arbre, un clocher, un moulin M (*fig. 11*) ;

2° On mesurera l'angle visuel MOS' compris entre cet objet et le soleil, au moment où il paraît au-dessus de l'horizon ;

3° On mesurera l'angle visuel MOS'' compris entre le même objet et le soleil, au moment où il disparaît le soir ;

4° La droite NS bissectrice de l'angle $S'OS''$ sera la méridienne, et l'angle ZNS que cette droite fait avec la trace AZ du mur sera la *déclinaison* du cadran.

Cette opération ne peut évidemment réussir que dans un lieu où l'horizon ne serait pas borné par des montagnes ou des constructions élevées.

446. Enfin on peut encore obtenir une méridienne suffisamment exacte en traçant l'ombre d'une verticale au moment où midi serait indiqué par une montre réglée récemment sur un bon régulateur ou sur un autre cadran solaire dont l'exactitude serait reconnue.

447. Lorsque l'on aura déterminé la *méridienne*, ou, ce qui revient au même, la projection horizontale de la tige ou tringle qui doit former le style du cadran, il sera facile d'obtenir la projection verticale de cette droite.

En effet, supposons que la figure 9 soit une section de la terre par le plan méridien NS de la figure 8.

La droite OP' , parallèle à l'axe CP de la terre (*fig. 9*), sera perpendiculaire au rayon CE de l'équateur, et le plan horizontal HH' sera perpendiculaire au rayon terrestre CO. Dans la question actuelle, il est absolument inutile de tenir compte de l'aplatissement de la terre.

L'arc de méridien OE exprime la latitude du lieu occupé par l'observateur, et les côtés de l'angle $P'OH$ étant perpendiculaires, chacun à chacun, sur les côtés de l'angle ECO, il s'ensuit que ces deux angles sont égaux, et que, par conséquent, l'inclinaison de la droite $P'OH$ sur le plan horizontal HH' est égale à la latitude OE du point O.

448. Ainsi, pour obtenir en un point quelconque, une parallèle à l'axe de la terre, il suffit de construire dans le plan méridien une droite inclinée sur le plan horizontal, d'une quantité égale à la latitude du lieu que l'on occupe.

449. PREMIÈRE OPÉRATION. Supposons donc (*fig. 1 et 2, pl. 34*) que la droite NS soit la *méridienne*, et par conséquent la projection horizontale de la droite cherchée, il s'agit de construire la projection verticale de cette droite.

On pourra choisir à volonté le point N' , suivant lequel cette

ligne doit percer la surface du mur, que nous supposerons coïncider avec le plan vertical de projection. Après quoi, on devra opérer de la manière suivante (*fig. 1 et 2*) :

- 1° — On fera l'angle $NN'S''$ égal au complément de la latitude du lieu que l'on occupe; l'angle $N'S''N$ sera par conséquent égal à la latitude, et la droite $N'S''$ sera la ligne demandée, rabattue sur le plan vertical de projection ;
- 2° — Par un arc de cercle $S''S$ décrit du point N , comme centre, on ramènera le point S'' sur la projection horizontale NS , ce qui donnera le point S , suivant lequel la droite cherchée perce le plan horizontal de projection ;
- 3° — Le point S , situé dans le plan horizontal de projection, se projettera en S' sur la ligne AZ , et la droite $S'N'$ sera la projection verticale du style.

450. DEUXIÈME OPÉRATION. *La droite dont les deux projections sont SN et $S'N'$ (fig. 1 et 2), étant parallèle à l'axe de la terre, il s'agit maintenant de faire passer par cette droite douze plans faisant entre eux des plans égaux.*

Il suffira, pour résoudre ce problème, de rappeler ce que j'ai dit au n° 154 de mon *Traité de géométrie descriptive*.

Ainsi la droite donnée étant représentée sur la figure 5 par NS , on pourra opérer de la manière suivante :

- 1° — On construira où l'on voudra le plan EE' perpendiculaire sur la droite NS .

Ce plan sera parallèle à l'équateur, et sera, pour cette raison, nommé *équatorial* ;

- 2° — On décrira dans le plan EE' une demi-circonférence que l'on partagera en douze parties égales, et l'on joindra les points de division avec le centre par douze rayons qui feront entre eux des angles égaux ;
- 3° — On fera passer un plan par la droite NS et par chacun des douze rayons ainsi obtenus.

Il est évident (*Géom.*) que les angles dièdres formés par

ces plans auront pour mesure les angles que font entre eux les rayons qui divisent en douze parties égales la demi-circonférence décrite dans le plan EE' . Or, ces derniers angles étant égaux entre eux, les angles formés par les douze plans le seront aussi.

Il est essentiel que l'un des douze plans coïncide avec le plan méridien SNN' (*fig. 2*), ou, ce qui est la même chose, avec le plan vertical projetant de la ligne NS , $N'S'$ (*fig. 1^{re}*).

On pourrait se demander pourquoi il ne faut pas décrire, dans le plan équatorial EE' , une circonférence entière ; mais il est évident qu'il suffit, comme nous l'avons fait, de partager la demi-circonférence, parce que les douze plans, étant infinis, détermineront évidemment les vingt-quatre angles dièdres, ou *horaires*, qui correspondent aux vingt-quatre heures de la journée.

451. ÉPURE. On sait que les traces des douze plans demandés doivent passer par les traces N' et S de la droite donnée.

Il ne reste donc plus qu'à déterminer un point de l'une des traces de chacun de ces plans.

Pour y parvenir, on construira (*fig. 2*) :

- 1° — La trace verticale MM' du plan équatorial EE' (*fig. 5*). Cette trace, que l'on peut faire passer par où l'on voudra, contient ici le point N , et doit être perpendiculaire sur la projection $N'S'$ du style (*fig. 2*) ;
- 2° — La droite NE'' perpendiculaire sur $N'S''$ sera l'intersection du plan équatorial EE' par le plan méridien $N'NS$, et le point O'' sera par conséquent l'intersection du style par le plan équatorial NE'' ;
- 3° — On rabattra ce plan en EE' (*fig. 3*) en le faisant tourner autour de sa trace verticale MM' .

Par suite de ce mouvement, le point $O'O''$ viendra se rabattre en O''' , que l'on obtiendra sur le prolongement

de $N'C$ en décrivant l'arc de cercle $O''O'''$ du point N comme centre;

- 4° ——— On décrira la demi-circonférence 6-12-6 sur le diamètre 6-6, qui doit être perpendiculaire à la droite NO''' , suivant laquelle le plan méridien coupe le plan équatorial;
- 5° ——— On partagera la demi-circonférence 6-12-6 en douze parties égales, et l'on tracera les rayons correspondants en numérotant ces rayons, comme on le voit sur l'épure, de manière que le rayon $O'''-12$ coïncide avec la droite NO''' , et soit par conséquent situé dans le plan méridien $N'NS$;
- 6° ——— Chacun des rayons ainsi obtenus aura sa trace verticale v sur la droite MM' , qui est la trace verticale du plan équatorial rabattu en EE' , de sorte qu'en joignant le point N' avec les traces verticales v des douze rayons, on aura les traces verticales des douze plans demandés, et ces traces seront les lignes d'ombres portées par le style NS , $N'S'$ pour chacune des heures correspondantes (431).

452. Les rayons 7 et 8 de la figure 3 n'ayant pas leurs traces verticales sur l'épure, on pourra opérer de la manière suivante :

- 1° ——— On tracera par le point C une droite quelconque qui coupera le rayon $O'''-9$ en un point o' et le rayon $O'''-8$ en un point o'' ;
 - 2° ——— On tracera les droites $o'n'$, $o''n''$ perpendiculaires à MM' , et parallèles, par conséquent, à la droite $O'''N'$;
 - 3° ——— On joindra le point C avec n' par la droite Cn' , et l'intersection de cette ligne avec la droite $o''c''$ déterminera le point n'' ;
 - 4° ——— La droite $N'n''$ sera la trace du plan N' -VIII qui détermine l'ombre du style à 8 heures.
- En effet, les trois droites $O'''C'$, CC' et $N'C'$ aboutissant au

point C' , couperont les parallèles $o'n'$ et $O'''N'$ en parties proportionnelles, ce qui donnera la proportion

$$(1) \quad o'c' : c'n' :: O'''C : CN'.$$

Mais les droites Co'' , Cc'' , Cn'' , concourant au point C , on aura :

$$(2) \quad o'c' : c'n' :: o''c'' : c''n''.$$

On aura donc, par suite du rapport commun,

$$O'''C : CN' :: o''c'' : e''n'' ;$$

d'où l'on peut conclure que les trois droites $O'''o''$, Cc'' , $N'n''$, concourent en un même point, qui est la trace verticale du rayon $O'''-8$, et qui, par conséquent, détermine la ligne N' -VIII du cadran.

453. On opérera de la même manière pour déterminer la ligne N' -VII. Ainsi on tracera :

- 1° — Une droite quelconque Co^{iv} , ce qui déterminera les points o''' et o^{iv} , sur les rayons $O'''-6$ et $O'''-7$;
- 2° — On tracera les droites $o'''n'''$ et $O^{iv}n^{iv}$ perpendiculaires sur MM' ;
- 3° — La droite Cn''' déterminera le point n^i sur le prolongement de $o^{iv}c^{iv}$;
- 4° — Enfin on tracera la ligne N' -VII du cadran.

454. On peut encore obtenir le même résultat en opérant de la manière suivante :

- 1° — On tracera une droite quelconque $o^v n^v$ perpendiculaire sur MM' . Cette opération déterminera le point o^v sur le prolongement du rayon $7-O'''$;
- 2° — La droite o^v-o^{vi} parallèle à MM' donnera le point o^{vi} sur le rayon $O'''-6$;

- 3° — La droite $o^{VI}-n^{VI}$, perpendiculaire sur MM' , coupera la ligne $N'-VI$ du cadran suivant un point n^{VI} ;
- 4° — On tracera la droite $n^{VI}-n^V$ parallèle à MM' , ce qui donne le point n^V , que l'on joindra avec N' .

455. Les opérations qui précèdent donneront pour résultat un cadran vertical tel que celui qui est dessiné sur la figure 7.

456. Si l'on voulait avoir un cadran horizontal (*fig.* 6), il suffirait d'exécuter sur le plan horizontal de projection tout ce que nous venons de faire sur le plan vertical.

457. On pourrait encore obtenir un cadran horizontal au moyen de l'épure précédente.

Il suffirait, pour cela, de prolonger les lignes d'ombre du cadran de la figure 2 jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne AZ , et de joindre les points ainsi obtenus avec le point S .

On aurait ainsi les traces horizontales de tous les plans horaires, et l'ensemble de ces douze traces formerait un cadran horizontal que l'on pourrait transporter dans tous les lieux qui auraient la même latitude, pourvu que l'on ait bien soin de faire coïncider la droite NS du cadran avec la méridienne et de faire l'angle PSN égal à la latitude du lieu.

458. Il est également bien entendu que le cadran vertical que l'on a obtenu sur la figure 2 ne pourrait convenir qu'aux lieux qui auraient la même latitude, et ne pourrait être tracé que sur un mur qui ferait avec la *méridienne* un angle égal à SNN' .

459. Il sera nécessaire, en posant le style, de s'assurer qu'il est bien exactement parallèle à l'axe de la terre : on pourra, comme vérification, chercher l'angle $NN''S$ que cette droite doit faire avec le plan vertical de projection.

460. La figure 4 est un *cadran équatorial*. Tout se réduit dans ces sortes de cadrans à la construction exécutée dans le plan équatorial rabattu (*fig. 3*).

Cette figure, tracée sur une pierre mince ou sur une ardoise, est placée comme on le voit (*fig. 4*), de manière que le plan qui contient le cadran coïncide avec celui de l'équateur céleste, ou, ce qui est la même chose, que la droite NS soit parallèle à l'axe de la terre, et que la projection horizontale de cette droite coïncide bien exactement avec la trace du méridien.

On fait surtout usage de ces sortes de cadrans chez les peuples qui habitent entre les tropiques ; mais alors il faut que le cadran soit tracé sur les deux faces de la pierre, car sans cela il ne pourrait servir que pendant six mois.

461. On pourra encore dans ces pays employer des cadrans verticaux construits d'après les mêmes principes que pour la figure 2. Ces cadrans, tracés sur les deux faces, seraient placés verticalement par rapport à l'horizon, mais de manière à couper le méridien obliquement.

Les heures avant midi seraient marquées sur l'une des faces du cadran, et les heures de l'après-midi sur la face opposée.

462. Si l'on voulait obtenir un cadran sur une surface quelconque, il est évident qu'il faudrait construire les traces des douze plans déterminés sur la figure 2, et chercher ensuite les intersections de ces plans avec la surface donnée.

Nous pourrions plus tard revenir sur quelques-unes de ces questions qui sont plus curieuses que véritablement utiles.

LIVRE V.

PERSPECTIVE AÉRIENNE.

CHAPITRE PREMIER.

POINTS BRILLANTS.

463. Dans les livres qui précèdent, nous avons vu comment on détermine, sur la surface d'un corps, les parties qui sont éclairées et celles qui sont obscures. Nous allons maintenant rechercher les causes d'où résultent les différences d'intensité de la lumière et de l'ombre sur les surfaces.

464. Lorsqu'un rayon de lumière sm (*fig. 152, pl. 35*) rencontre une surface plane et parfaitement unie, il est renvoyé par cette surface dans une direction mv , telle que mn étant la normale à la surface, on doit toujours avoir l'angle smn égal à l'angle nmv , ou, ce qui est la même chose, l'angle smp égal à l'angle vmq .

465. L'angle smp est ce que l'on nomme *l'angle d'incidence*, et l'angle vmq est *l'angle de réflexion*.

466. Ces deux angles sont toujours situés dans un même plan perpendiculaire au plan $p'q'$ et contenant par conséquent la normale mn .

C'est dans les traités de physique qu'il faut chercher l'explication du principe précédent ; nous nous bornerons ici à en étudier les effets.

467. Supposons (*fig.* 153) une surface plane $p'q'$ parfaitement polie, comme, par exemple, une glace ou une planche de métal.

Supposons de plus qu'il y ait en s un point lumineux, et que notre œil soit au point v . Il est évident que les rayons sm' , sm'' renvoyés dans les directions $m'v'$, $m''v''$ ne rencontreront pas notre œil, et ne pourront, par conséquent, produire pour nous aucune sensation, tandis que le rayon mv provenant de la réflexion du rayon sm produira pour nous le même effet que si le point lumineux était situé en m ; d'où il résulte que, vué du point v , la surface du plan paraîtra obscure, à l'exception du point m que l'on nomme *le point brillant*.

468. Voyons actuellement comment on pourrait parvenir à construire les points brillants sur une surface quelconque.

Soit, par exemple (*fig.* 154), une surface AB sur laquelle on veut obtenir le point brillant m , en admettant que s soit le point lumineux et que l'œil soit situé en v .

Concevons une infinité d'ellipsoïdes de révolution qui aient tous pour foyers les points s et v ; il y aura nécessairement un de ces ellipsoïdes qui touchera la surface donnée, et le point de tangence m sera le point brillant demandé.

En effet, si l'on conçoit le plan tangent pq et la normale mn , on aura l'angle $smn = nmv$, et par conséquent l'angle d'incidence smp égale l'angle de réflexion vmq ; on peut donc résumer ainsi le principe général :

1° On construira un ellipsoïde de révolution qui aurait

pour foyers l'œil et le point lumineux et qui serait tangent à la surface donnée ;

2° Le point de tangence déterminé avec exactitude sera le point brillant demandé.

469. Il peut, dans certains cas, y avoir plusieurs solutions ; ainsi, sur une surface qui aurait des parties convexes et concaves, il pourrait y avoir dans la partie concave un autre point brillant m' , qui serait déterminé par un second ellipsoïde tangent, ayant les mêmes foyers que le premier.

En général, il y aura autant de points brillants que l'on pourra concevoir d'ellipsoïdes tangents à la surface.

470. Pareillement, tous les points suivant lesquels l'un de ces ellipsoïdes serait touché par une surface quelconque seraient des points brillants de cette surface, et l'on conçoit que si l'un de ces ellipsoïdes qui ont pour foyers l'œil et le point lumineux était solide, bien poli, et vu intérieurement du point v , tous ses points seraient brillants, puisque pour un quelconque m'' de ces points on aurait toujours l'angle $sm''n'' = n''m''v$, ou l'angle d'incidence $sm''p'' = vm''q''$, en admettant que $p''q''$ soit le plan tangent en m'' .

Cette propriété, ainsi que l'emploi de cette surface dans la solution du problème général, nous engageront à la nommer *ellipsoïde brillant auxiliaire*.

471. Si l'un des deux points, le point v , par exemple, reculait dans la direction mv (*fig. 155*), cela changerait les dimensions de l'ellipsoïde auxiliaire et la direction de son grand axe, qui deviendrait successivement sv' , sv'' ; mais le point brillant m serait toujours le même. Enfin, si le point reculait jusqu'à l'infini dans la direction mv'' , l'ellipsoïde se transformerait en un paraboloides de révolution umz , qui aurait pour axe la droite sv''' parallèle à mv'' .

C'est le cas où, la lumière mv provenant du soleil, l'œil serait à une distance finie sm de l'objet proposé.

472. Enfin, si nous reprenons (*fig. 156*) le parabolôïde de révolution auquel nous sommes parvenus (*fig. 155*), et si nous supposons que le point v , restant à l'infini dans la direction mv , le point s recule à son tour en suivant le rayon ms , le paramètre du parabolôïde augmentera, et par conséquent la courbure de la surface diminuera jusqu'à ce que le point s soit arrivé à l'infini; alors le parabolôïde se confondra avec le plan tangent pq , qui, pour ce cas, remplace l'ellipsoïde brillant auxiliaire du principe général.

Dans cette dernière hypothèse, tous les points du plan pq et de tout plan $p''q''$ parallèle à pq seront brillants; en effet, les points s et v étant reculés jusqu'à l'infini, tous les rayons incidents $sm, s'm', s''m''$ seront parallèles entre eux; tous les rayons visuels $mv, m'v', m''v''$ seront pareillement parallèles, et par conséquent toutes les bissectrices $mn, m'b', m''b''$ seront parallèles.

Quant à la surface proposée, il est évident que si on la suppose vue du point v , situé à l'infini dans la direction mv , elle n'aura de points brillants que ceux pour lesquels la direction de la normale mn sera parallèle à la direction des bissectrices $m'b', m''b''$, parce qu'alors le rayon réfléchi se confondra avec le rayon visuel, ce qui n'a pas lieu pour les autres points de la surface.

473. De ce que nous venons de dire, il résultera que, pour le cas où le point lumineux et l'œil seraient tous deux à l'infini, il faudra en général opérer de la manière suivante :

1° On choisira dans l'espace (*fig. 157*) un point quelconque m , par lequel on construira un rayon de lumière sm et un rayon visuel mv ;

2° On partagera en deux parties égales l'angle smv par la droite mb , qui sera la direction des bissectrices ;

3° On construira tous les plans tangents à la surface, perpendiculairement à la direction mb ;

4° Tous les points de tangence déterminés avec exactitude seront les points brillants de la surface proposée.

474. Nous donnerons le nom de *plan brillant auxiliaire* à tout plan pq , $p'q'$ perpendiculaire à la direction des bissectrices.

Quoique le principe qui vient d'être énoncé ne soit qu'un cas particulier de celui du numéro 244, il possède cependant un caractère de généralité suffisant pour les applications qui doivent faire le sujet de cet ouvrage, puisque dans les dessins de l'ingénieur on suppose toujours que la lumière vient du soleil, et que l'œil est à une distance infinie du plan de projection.

Nous allons appliquer les principes précédents à quelques exemples.

Construction de points brillants.

475. *Cylindre.* Dans l'hypothèse d'un point de vue et d'un point lumineux situés tous les deux à une distance infinie de l'objet, il n'y a presque jamais de points brillants sur un cylindre.

En effet, le plan brillant auxiliaire ne pourra être tangent au cylindre que dans le cas où la direction des bissectrices ferait elle-même un angle droit avec celle du cylindre.

Dans ce cas, tous les points de la génératrice suivant laquelle le cylindre serait touché par le plan brillant auxiliaire seraient eux-mêmes brillants, et formeraient ce que nous nommerons une *ligne brillante*.

Supposons donc que l'on ait (*fig.* 158 et 159, *pl.* 36) les deux projections d'un cylindre, et (*fig.* 160 et 161) les deux projections sm d'un rayon lumineux : il s'agit de reconnaître s'il existe une ligne brillante sur la projection verticale du cylindre : voici quel sera l'ordre des opérations :

Le point de vue pour la projection 158 étant à une distance infinie du plan vertical de projection, le rayon visuel sera projeté (*fig.* 161) par la droite mv et (*fig.* 160) par le point m .

Le plan qui contient les deux rayons sm, vm étant rabattu autour de mv , l'angle smv deviendra $s'mv$; on construira la bissectrice mb qui, étant ramenée à sa place, aura pour ses deux projections mb', ms .

Il n'y aura plus qu'à reconnaître si, parmi tous les plans tangents au cylindre, il y en a un perpendiculaire à cette droite.

Dans cette hypothèse, la trace horizontale pq doit être perpendiculaire à la projection horizontale mb' .

De plus, la droite $m'n'$ parallèle à la trace verticale du plan tangent pq doit faire un angle droit avec la projection verticale ms ou $m'b'$ de la bissectrice.

Si ces conditions ont lieu, la génératrice $m'm''$ sera la ligne brillante de la projection 158.

Lorsque l'angle $n'm'b'$ sera plus petit ou plus grand qu'un angle droit, il n'y aura pas de point ni de ligne brillante sur la projection verticale du cylindre.

476. *Cône.* Pour qu'il y ait une ligne brillante sur le cône, il ne suffit pas que l'une de ses génératrices soit perpendiculaire à la bissectrice, il faut encore que le plan tangent conduit suivant cette génératrice soit parallèle au plan brillant auxiliaire.

Or, ces deux conditions ne pourraient se trouver réunies que par le plus grand des hasards ; aussi peut-on dire en général qu'il n'y a pas de points brillants sur un cône.

Il ne faut pas oublier que nous parlons toujours dans l'hypothèse d'un point de vue et d'un point lumineux situés à l'infini.

Sur la figure 162, la génératrice $m'm''$ est une ligne brillante, parce que le plan tangent suivant cette ligne est perpendiculaire à la bissectrice.

En effet, sa trace horizontale pq est perpendiculaire à mb' (fig. 161), et la droite $m'n'$, parallèle à la trace verticale, fait un angle droit avec $m'b''$ parallèle à ms .

477. *Sphère*. Les deux cercles 166 et 167 étant les deux projections d'une sphère, et les droites os étant les projections d'un rayon de lumière, on veut construire le point brillant sur la projection verticale 166.

On rabattra (fig. 167) l'angle sov sur le plan horizontal qui contient le centre de la sphère, ce qui donnera $s'ov$; on construira la bissectrice ob , et le point m où cette ligne perce la sphère étant ramené en m' et de là en m'' sera le point cherché.

En effet, il est évident que le plan tangent en m'' sera perpendiculaire à la bissectrice, et que par conséquent le point m'' sera brillant.

478. *Surface de révolution*. Pour construire le point brillant sur la projection verticale de l'ellipsoïde (fig. 164), nous avons supposé la même direction de la lumière que dans l'exemple précédent.

La bissectrice ayant été transportée en os , ob' , il ne restait plus qu'à construire un plan tangent perpendiculaire à cette droite.

Pour y parvenir, on a fait tourner le méridien ob' jusqu'à ce qu'il soit arrivé en ob'' ; par suite de ce mouvement, la bissectrice est venue se placer en ob'' , et la tangente pq perpendiculaire à ob'' est la trace du plan brillant auxiliaire.

Le point de tangence m projeté en m' a été ramené en m'' , d'où on a déduit m''' pour le point brillant demandé.

479. Dans la figure 169, on s'est proposé de construire les points brillants sur la projection horizontale d'un tore.

Les droites so étant les deux projections d'un rayon de lumière, et le rayon visuel étant la verticale ov ,

On a fait tourner le plan méridien vos jusqu'en vos' , et l'on a construit la bissectrice ob .

Les deux rayons cm parallèles à cette bissectrice ont déterminé les points m suivant lesquels la surface du tore est touchée par les plans brillants auxiliaires; ces points projetés en m' et ramenés de là dans le méridien sm'' ont donné les deux points brillants m'' .

480. Les mêmes moyens ont été employés (*fig. 170, pl. 37*) pour construire tous les points brillants du piédouche.

L'angle sov étant rabattu (*fig. 172*) autour du rayon ov , on a construit la bissectrice ob qui, ramenée à sa place, a pour projection les deux droites os, ob' .

La bissectrice os, ob' ayant été transportée (*fig. 168 et 169*), on l'a rabattue sur le plan vertical de projection en la faisant tourner autour de la verticale projetante du point o , ce qui a donné ob'' .

Enfin toutes les tangentes pq menées (*fig. 170*) perpendiculairement à la bissectrice ob'' sont les traces de tous les plans brillants tangents au piédouche.

Ces plans sont au nombre de cinq et déterminent autant de points brillants m , savoir :

Un sur le quart de rond ;

Un sur la scotie ;

Un sur le tore ;

Deux sur les arêtes supérieures des filets, que l'on peut considérer comme des petites surfaces annulaires dont le cercle générateur aurait un rayon infiniment petit.

481. En effet, dans les applications, les intersections des surfaces ne sont jamais des lignes rigoureusement mathématiques.

Ainsi, par exemple, l'intersection de deux faces planes d'un corps est presque toujours un peu arrondie, et forme par conséquent une petite surface cylindrique tangente aux plans qui forment ces faces.

Par la même raison, les arêtes supérieures des filets du piédouche peuvent être considérées comme des portions de surfaces annulaires engendrées par des cercles d'un rayon très-petit.

En regardant les arêtes d'un corps poli, le lecteur sera convaincu de la nécessité de tenir compte de ces effets dans la pratique du dessin.

482. *Surfaces réglées.* Supposons que l'on ait (*fig.* 177 et 178) une portion de surface réglée, projetée sur un plan parallèle au rayon de lumière so , on veut obtenir le point brillant sur la projection horizontale 178.

Dans ce cas, le rayon visuel sera la verticale ov , et la bissectrice sera ob .

La génératrice pq , perpendiculaire sur la bissectrice ob , sera la trace verticale du plan brillant auxiliaire.

Ce plan étant perpendiculaire au plan vertical de projection, il sera facile de construire la courbe zx , suivant laquelle il coupe les autres génératrices de la surface.

Le point de tangence m' sera le point brillant demandé.

Si la surface n'était pas projetée sur un plan parallèle au rayon lumineux, on ferait une projection auxiliaire.

483. Par suite de l'obliquité suivant laquelle les génératrices percent le plan tangent, on peut être forcé de chercher d'autres moyens de déterminer le point de tangence.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'obtenir le point

brillant sur la surface supérieure du filet d'une vis triangulaire projetée (*fig. 175*).

La direction de la lumière étant donnée par ses deux projections *os* (*fig. 173* et *174*), on rabattra l'angle *sov* en *s'ov*, puis on construira la bissectrice *ob*, qui, ramenée à sa place, sera projetée par les deux droites *os* (*fig. 173*) et *ob'* (*fig. 174*).

Cela étant fait, on remarquera que le plan brillant auxiliaire doit satisfaire aux conditions suivantes :

- 1° Il doit être tangent à la surface réglée proposée ;
- 2° Il doit être perpendiculaire à la bissectrice, et par conséquent il doit faire avec le plan horizontal un angle *b''or*, supplément de *b''oh*, qui exprime l'inclinaison de la bissectrice.

Or, si par le point *c* de la figure 175 nous construisons la droite *cx* perpendiculaire sur la bissectrice *b''o*, l'angle *cxp* sera égal à *b''or*, et tout plan tangent au cône circulaire engendré par *cx*, fera avec le plan horizontal un angle *b''or*.

Ainsi, la droite *cp* étant une génératrice de la surface, si l'on construit la droite *pq* tangente à la circonférence *xn'n*, le plan *cpq* jouira de la double propriété d'être tangent à la surface, puisqu'il contient la génératrice *cp*, et d'être convenablement incliné sur le plan horizontal, puisqu'il est tangent au cône engendré par la droite *cx*.

Si nous faisons actuellement tourner le plan *cpq* jusqu'à ce que sa trace horizontale soit devenue *p'q'* perpendiculaire sur *ob'* (*fig. 174*), il deviendra brillant, car, dans cette nouvelle position, il sera perpendiculaire à la bissectrice, mais il aura cessé d'être tangent, puisque la droite *cp* aura quitté la surface pour venir prendre la position *cp'*.

Or, si on fait remonter le plan *cp'q'* parallèlement à lui-même, il sera de nouveau tangent à la surface lorsque la droite *c'c'* (*fig. 175*) sera venue se placer en *c''c''*.

484. Cette solution, analogue à celle que nous avons employée au n° 384, détermine, il est vrai, le plan tangent, mais elle ne fait pas reconnaître la position du point de tangence ; ce qui, cependant, est l'objet principal de nos recherches.

C'est ici le cas où le principe du n° 352 serait en défaut, par suite de l'obliquité suivant laquelle le plan tangent couperait toute espèce de ligne tracée sur la surface.

Nous allons tâcher d'obtenir le point de tangence par d'autres considérations.

Si l'on conçoit un plan tangent par chacun des points suivant lesquels la génératrice cp coupe les hélices de la surface, les angles que ces plans feront avec le plan horizontal augmenteront à mesure que le point de tangence sera plus près de l'axe. Ainsi l'inclinaison du plan tangent dépendant de la position du point de tangence, réciproquement la position de ce point dépendra de l'inclinaison du plan tangent, et, puisque cette inclinaison est connue, on doit pouvoir en déduire la position du point cherché.

Or, si par les différents points de la génératrice cp on construit des tangentes aux hélices correspondantes, les points où ces tangentes perceront le plan horizontal seront situés sur une parabole cup , qu'il sera facile de construire, et le point q , suivant lequel cette courbe est rencontrée par la trace du plan tangent cpq , sera l'intersection du plan horizontal par la tangente à l'hélice qui passe par le point cherché m , qui, par conséquent, sera déterminé.

Il ne restera plus qu'à faire revenir ce point dans le plan brillant, en lui faisant parcourir d'abord un arc horizontal mm' , puis ensuite la verticale $m'm''$, jusqu'à ce qu'il soit arrivé sur la droite $c''c''$ ou sur l'hélice kl , qui se déduira facilement de sa projection horizontale mm' .

Il semble qu'il y ait ici un point brillant sur la surface supérieure de chaque filet, mais le plus élevé est le seul qui existera, la place déterminée par les autres points étant

comprise dans l'ombre portée par les filets supérieurs.

La direction de la lumière a été choisie dans cet exemple de manière que le point brillant soit compris dans les limites de la surface réelle du filet.

Mais cela n'aura presque jamais lieu, parce que les plans tangents, dans cette partie de la surface, ayant presque tous la même inclinaison, il arrivera très-rarement que l'un de ces plans soit perpendiculaire à la bissectrice.

On peut, au surplus, reconnaître *à priori* quelle sera la position du point brillant.

Ainsi, par exemple, quand le point q sera sur l'arc pz , le point brillant appartiendra à la portion de surface prolongée au-dessous de l'hélice qui forme l'arête inférieure du filet.

Quand le point q est sur l'arc zu , le point brillant appartient à la surface réelle du filet.

Enfin, si le point q était sur l'arc uc , le point brillant appartiendrait au prolongement de la surface au-dessus de l'hélice qui forme l'arête rentrante provenant de l'intersection des surfaces des filets.

Il n'y aura pas de point brillant lorsque la génératrice cp fera avec le plan horizontal un angle plus grand que $b''or$, figure 173.



CHAPITRE II

TEINTES.

485. Si les surfaces étaient complètement polies, comme nous l'avons supposé dans le chapitre précédent, la théorie des ombres deviendrait inutile, et tout se réduirait à la construction des points ou des lignes brillantes.

Le lecteur a dû reconnaître, en effet, que toute surface, ou partie de surface, qui n'est pas perpendiculaire à la direction des bissectrices, est par cela même incapable de renvoyer dans l'œil aucun rayon lumineux, et que, par conséquent, ces parties, quoique éclairées, doivent paraître aussi obscures que celles qui sont dans l'ombre.

On peut se convaincre de cette vérité en regardant un objet d'acier bien poli ou une glace qui, à l'exception des points brillants, paraîtraient entièrement noirs s'ils ne reflétaient les images des objets éclairés qui les environnent.

Cette lumière, renvoyée par les parties éclairées des surfaces qui ne sont pas polies, est due à une cause que nous allons expliquer.

486. La surface des corps est en général composée d'une infinité de petites molécules placées à côté les unes des autres.

On peut admettre que la surface de ces molécules est formée d'une infinité de petites facettes inclinées dans toutes les directions (*fig.* 183, *pl.* 38).

Or, par suite de cette diversité d'inclinaison, il doit nécessairement y avoir sur chaque molécule quelques facettes perpendiculaires à la direction des bissectrices, de sorte que les

rayons lumineux reçus par ces facettes étant renvoyés dans l'œil, tous les points de la surface qui reçoivent la lumière paraîtront éclairés ; ce qui n'a pas lieu lorsque la surface est polie.

Dans l'hypothèse que nous venons d'examiner, chaque point de la surface ayant quelques facettes brillantes, quelle que soit la direction du rayon visuel, on peut dire que tous les points sont brillants, ou plutôt qu'ils sont éclairés, en réservant l'expression des points brillants pour les facettes qui sont disposées de manière à renvoyer dans l'œil un faisceau de rayons lumineux capable d'y produire une forte sensation.

487. C'est précisément ce qui a lieu lorsque la surface est en partie polie.

En effet, le polissage résultant du frottement qui détruit la partie la plus saillante des molécules produit sur chacune d'elles (*fig.* 184) une facette principale dirigée dans le sens général de la surface, et diminue, par conséquent, les intervalles concaves qui séparent les molécules les unes des autres. Or, ce sont précisément les petites facettes situées sur les côtes des molécules et dans les concavités comprises entre les facettes principales qui, par suite de leur inclinaison en tous sens, envoient des rayons dans toutes les directions, et font, par conséquent, paraître éclairés tous les points de la surface du corps.

Mais on conçoit en même temps que, par suite du peu d'étendue de ces facettes secondaires, le nombre des rayons renvoyés par chacune d'elles sera toujours très-petit en comparaison de ceux renvoyés par les facettes résultant du polissage, qui, lorsqu'elles sont perpendiculaires à la bissectrice, forment les parties brillantes de la surface.

488. Il résulte de ce que nous venons de dire que lorsqu'une surface n'a pas été polie, elle ne contient pas de

points brillants. Mais il y a toujours sur cette surface des parties qui paraissent plus éclairées que les autres, et la détermination exacte de la place et de l'étendue de ces parties est une de ces questions qui se rattachent le plus directement à la science du dessin.

489. Pour arriver à la solution de cette question, je rappellerai d'abord que la condition essentielle pour qu'un point paraisse brillant, c'est que l'œil soit dans la direction du rayon réfléchi; d'où il résulte que plus le rayon visuel s'approchera de cette direction, plus le point paraîtra éclairé, et les facettes de la surface seront d'autant plus près d'être brillantes que les rayons renvoyés par elles s'approcheront davantage du rayon visuel.

490. On a dit que les facettes qui approchent le plus d'être perpendiculaires à la direction des bissectrices devraient, après les parties brillantes ou à leur défaut, paraître les plus éclairées, et que l'obscurité d'un point devrait augmenter avec l'angle que la normale en ce point fait avec la direction des bissectrices.

Il n'en est pas ainsi. Pour le démontrer, soit (*fig. 179*) le plan pq tangent au point m , la normale étant mn , le rayon incident sm est le rayon réfléchi mr .

Supposons de plus que mv soit le rayon visuel, mb la bissectrice et $p'q'$ le plan brillant auxiliaire.

Enfin, admettons que le plan tangent pq et le plan brillant $p'q'$ se coupent suivant une ligne am perpendiculaire au plan des deux rayons sm , mv ; il en résultera que les cinq droites ms , mn , mb , mr , mv , c'est-à-dire le rayon incident, la normale, la bissectrice, le rayon réfléchi et le rayon visuel seront dans un même plan smv , et que de plus l'angle rmv , que le rayon visuel mv fait avec le rayon réfléchi mr , sera double de l'angle nmb , que la bissectrice fait avec la normale.

Ainsi, dans cette hypothèse, l'angle que le rayon réfléchi fait avec le rayon visuel sera proportionnel à l'angle que la normale fait avec la bissectrice.

Mais cela n'aura pas toujours lieu. En effet, supposons (*fig.* 182) le cas où les deux plans *smr* et *smv* ne coïncideraient pas ; ils se couperont toujours suivant le rayon incident *sm*. Mais il peut arriver, surtout dans le cas où les deux angles *smn* et *smb* différeraient peu d'un angle droit, que les angles *smr* et *smv* soient presque égaux à deux angles droits, et alors il est évident que l'angle *rmv*, que le rayon réfléchi fait avec le rayon visuel, serait plus petit que l'angle *nmb* formé par la normale et la bissectrice.

Ces deux exemples suffisent pour faire comprendre que la quantité de lumière renvoyée dans l'œil ne dépend pas de l'angle formé par la normale avec la bissectrice.

On conçoit, en effet, que, pour certaines inclinaisons, le rayon réfléchi pourrait être plus rapproché du rayon visuel, quoique cependant l'angle de la normale avec la bissectrice aurait augmenté.

491. Ainsi, quoique les parties les plus claires des surfaces soient en général dans le voisinage des points brillants, il n'en faut pas conclure que la lumière doit être distribuée autour de ces points d'une manière symétrique, et l'on conçoit que si, entre plusieurs parties *également éclairées* d'une surface, on veut connaître celles qui sont le plus favorablement placées pour envoyer de la lumière dans l'œil, il faudra chercher quels sont les points pour lesquels l'angle formé par le rayon visuel et le rayon réfléchi est le plus petit possible.

492. Nous allons voir d'abord comment on pourrait obtenir l'angle que le rayon visuel fait avec le rayon réfléchi pour un point quelconque d'une surface donnée.

Soient (*fig.* 180 et 181) le rayon de lumière *sm*, la normale *mn*

et le rayon visuel mv , perpendiculaire au plan vertical de projection, et par conséquent projeté sur ce plan par le point m .

On fera tourner le plan smn autour de sa trace horizontale zx ; par suite de ce mouvement, l'angle smn , que le rayon lumineux fait avec la normale, viendra se placer en $s'm'n'$.

On fera l'angle $n'm'r' = n'm's'$, et la droite $r'm'x$ sera le rayon réfléchi rabattu sur le plan horizontal. En ramenant le plan $zm'x$ à sa place, le rayon $m'r'$ deviendra mr .

Si actuellement on fait tourner le plan des deux droites mv , mr autour de l'horizontale mv , le point x décrira l'arc xx' parallèle au point vertical de projection, et l'angle cherché vmr rabattu sur le plan horizontal $x'm$ deviendra vmr'' .

493. Dans quelques cas particuliers, on peut simplifier les opérations précédentes.

Supposons, par exemple (*fig.* 185 et 186), que l'arc bc soit la directrice d'une portion de cylindre vertical et que le rayon lumineux soit la droite sm , $s'm'$.

La normale mn sera horizontale, et dans ce cas les angles égaux que le rayon de lumière et le rayon réfléchi font avec la normale se projettent sur le plan horizontal par des angles égaux, de sorte qu'en faisant $n'm'r' = n'm's'$, la droite $m'r'$ sera la projection horizontale du rayon réfléchi.

Pour obtenir la projection verticale du même rayon, on construira :

- 1° La droite $s'r'$ perpendiculaire sur la projection $m'n'$ de la normale ;
- 2° Les deux verticales $s's$, $u'u$, ce qui déterminera la droite su ;
- 3° La verticale $r'r$ donnera le point r , et par conséquent mr sera la projection verticale du rayon réfléchi.

Si on fait ensuite tourner l'angle $vm'r'$ autour du rayon visuel $m'v$, on obtiendra $vm'r''$ pour l'angle formé au point m par le rayon visuel et le rayon réfléchi.

494. Sur les figures 187 et 188, l'opération précédente a été faite pour les six points marqués n' .

Mais pour plus de symétrie dans l'épure, tous ces points ont été transportés sur l'axe, ce qui ne change rien au résultat, puisque la valeur des angles obtenus ne dépend que de la direction du rayon lumineux, de la normale, du rayon visuel et du rayon réfléchi, et nullement du point où ces lignes se rencontrent.

Les lettres sont les mêmes que dans la figure précédente ; ainsi sm , $s'm'$ est la direction commune à tous les rayons lumineux ;

mn , $m'n'$ sont les directions des normales aux points nn' ;

sr , $s'r'$ les perpendiculaires sur les normales ;

mr , $m'r'$ les rayons réfléchis ;

Enfin $v'm'r''$ sont les angles formés par les rayons réfléchis et le rayon visuel $m'v$.

Cet angle est un minimum pour chacun des points de la génératrice a qui correspond au milieu de l'angle $s'm'v'$ formé par les projections horizontales du rayon lumineux $s'm'$ et du rayon visuel $m'v$.

495. On peut obtenir de suite cette génératrice en partageant l'arc bc (*fig.* 191) en deux parties égales.

496. Nous venons de voir comment on déterminerait sur un cylindre les parties de la surface qui approchent le plus des conditions nécessaires pour être brillantes, et qui, par conséquent, sont les mieux placées pour renvoyer dans l'œil des rayons lumineux.

Mais dans la recherche précédente, nous avons fait abstraction de deux éléments dont il est essentiel de tenir compte :

1° Nous avons supposé que toutes les parties de la surface cylindrique étaient également éclairées ;

2° Nous avons négligé d'avoir égard aux ombres portées

par les aspérités de la surface dans les parties concaves qui les séparent les unes des autres.

497. Or, en admettant, ce qui est permis, que les rayons lumineux qui proviennent du soleil sont à égale distance les uns des autres, on peut en conclure que la quantité de lumière reçue par une face plane est d'autant plus grande que la direction de la lumière approche davantage de la normale à cette face.

En effet, supposons que ab (*fig.* 190) soit le côté d'un carré éclairé par les rayons lumineux parallèles à sb . Si on fait tourner ce carré autour du côté projeté en a , le nombre des rayons reçus augmentera jusqu'à ce que le carré soit arrivé en ab'' .

De plus, le nombre des rayons reçus dans le sens parallèle au côté a étant toujours le même, l'intensité de la lumière dépendra de l'inclinaison des côtés ab , ab' , ab'' .

Ainsi le nombre des rayons reçus dans la position ab'' étant exprimé par 12, ab' en recevra 11, et ab en recevra 8.

On aura donc cette proportion :

La lumière reçue par ab est à la lumière reçue par ab'' comme $ac : ab'' :: ac : ab :: \sin abc : R$.

D'où, en représentant par 1 la lumière reçue par une surface perpendiculaire au rayon lumineux, par x celle reçue par une autre surface équivalente, et par α l'angle que cette surface fait avec la direction de la lumière, on a :

$$x : 1 :: \sin \alpha : R,$$

d'où

$$x = \frac{\sin \alpha}{R} = \sin \alpha.$$

498. Ainsi, la quantité de lumière reçue par une face plane est proportionnelle au sinus de l'angle que cette face fait avec le rayon lumineux.

499. Il s'en faut de beaucoup que toute la lumière reçue

par une molécule contribue à augmenter sa clarté apparente. En effet, l'œil ne reçoit que les rayons renvoyés par les facettes perpendiculaires à la direction des bissectrices.

Ainsi, la lumière reçue est à la lumière renvoyée comme la surface éclairée de la molécule est à la somme des surfaces des facettes de cette molécule qui sont perpendiculaires à la bissectrice.

500. De ce que nous avons dit précédemment, il résulte que la partie du cylindre qui paraîtra la plus claire doit être entre les deux génératrices des points m et a (*fig.* 189); car il est évident que la portion de surface capable de produire pour l'œil le maximum d'effet lumineux doit être comprise entre l'élément m , qui reçoit le plus grand nombre de rayons (497), et l'élément a qui est placé dans les conditions les plus favorables pour renvoyer ces rayons dans l'œil (495).

501. Un effet qui me semble avoir plus d'importance qu'on ne lui en a donné jusqu'à présent, c'est la diminution de lumière produite par les ombres que les aspérités de la surface projettent dans les parties creuses qui les séparent les unes des autres.

Ainsi, l'obscurité produite par les ombres des molécules, augmentant graduellement et avec symétrie de chaque côté de la génératrice a , contribuera encore à rapprocher de cette droite la partie du cylindre qui paraîtra la plus claire.

La lumière et les ombres se distribueront sur la surface du cylindre, comme sur le tronçon de colonne cannelée projetée (*fig.* 189). On concevra facilement, en effet, que les rapports de grandeur entre les parties éclairées et obscures ne seront pas changés si on remplace par la pensée les dix-huit cannelures par cent qui seraient plus petites, et chacune de ces dernières par mille autres, jusqu'à ce que l'on arrive par la pensée à des dimensions aussi petites que les entre-deux des

molécules qui composent la surface du corps ; et l'on peut se faire une idée de l'effet produit dans cette dernière hypothèse en regardant la figure 189 d'une distance assez grande pour que les parties noires et blanches paraissent mêlées de manière à ne faire qu'une teinte continue et adoucie en allant du point *a* au point *m*.

On remarquera de plus que les ombres portées dans les cannelures à droite du point *a* seront vues, tandis que les parties ombrées à gauche de *a* seront cachées par les filets saillants formant les entre-deux des cannelures.

502. On peut encore rendre sensible la diminution de lumière produite par les ombres des molécules, en inclinant une feuille de papier bien tendue jusqu'à ce qu'elle soit presque parallèle à la direction de la lumière ; alors on voit la surface s'obscurcir graduellement.

La même cause, abstraction faite de la composition chimique des molécules, contribue à diminuer la blancheur d'un papier dont le grain est très-fort et augmente au contraire celle dont le grain est fin. Dans ce dernier cas, les aspérités étant plus faibles, les ombres portées par chacune d'elles sont moins étendues, tandis qu'au contraire la finesse des grains augmente leur nombre, et par conséquent aussi le nombre des petites facettes dirigées de manière à renvoyer dans l'œil un rayon lumineux. Mais si on frotte le papier avec un instrument dur et uni, de manière à écraser ou aplatir toutes les aspérités, on détruit en même temps toutes les parties saillantes et creuses de la surface, qui alors devient plane et polie. Cette dernière opération fait disparaître, il est vrai, les ombres des molécules, mais en même temps elle détruit toutes les petites facettes qui renvoyaient de la lumière dans l'œil, ce qui affaibit par conséquent la couleur éclatante du papier. C'est pour cette raison que les instruments destinés à produire cet effet ont reçu le nom de *brunissoirs*.

Cependant on conçoit que si, après l'opération qui vient d'être décrite, on place la portion de surface qui a été frottée dans une direction perpendiculaire à la bissectrice, cette partie de la surface deviendra brillante et renverra dans l'œil plus de lumière que les autres parties qui, n'ayant pas été *bruniées*, n'envoient de la lumière que par les facettes latérales des molécules.

Ce que nous venons de dire peut s'appliquer à tous les corps susceptibles de recevoir le poli, et l'on conçoit que si, au lieu de laisser la surface dans l'état représenté (*fig.* 184), on continue à user les aspérités jusqu'à *mnv*, la surface deviendra obscure, puisqu'on aura fait disparaître toutes les petites facettes qui, par suite de leur position perpendiculaire à la direction des bissectrices, remplissaient les conditions nécessaires pour renvoyer dans l'œil des rayons lumineux.

Il ne restera plus de brillant que les points ou les lignes suivant lesquelles la surface serait touchée par des plans perpendiculaires à la bissectrice.

Quoique nous ayons raisonné dans l'hypothèse d'un point de vue et d'un point lumineux situé à l'infini, les considérations générales que nous venons de développer s'appliqueront également au cas où ces deux points seraient à des distances finies, ce qui ne changerait que la direction de la bissectrice.

503. Je n'ai pas cru devoir chercher à déterminer d'une manière rigoureuse les parties les plus claires de la surface des corps. On conçoit, par ce qui précède, combien les résultats peuvent varier suivant les circonstances particulières de la question ; et, en admettant comme générales des solutions qui ne peuvent résulter que de quelques hypothèses particulières, on se priverait de la plus grande partie des ressources qui composent l'art du dessin.

Si l'on veut obtenir un résultat satisfaisant, il faut rester le maître de faire varier entre les limites les plus larges la di-

rection et l'intensité de la lumière ; il faut pouvoir, lorsqu'on le juge à propos, remplacer la lumière directe provenant du soleil par la lumière diffuse envoyée dans toutes les directions par les molécules de l'atmosphère. Il doit être permis de supposer dans le voisinage des objets que l'on dessine, d'autres corps dont la surface renvoie la lumière sur les parties ombrées qui, sans cela, paraîtraient trop obscures et ne se détacheraient pas assez des parties environnantes.

Il suffit que par l'étude raisonnée des causes qui produisent toutes ces variations des teintes, on s'habitue à ne jamais admettre que des suppositions possibles, afin que les points brillants et les parties éclairées ou obscures soient toujours déterminés d'une manière satisfaisante.

On conçoit, d'ailleurs, qu'aucun principe absolu ne peut être adopté sur cette matière ; que les différentes intensités de lumière et d'ombres ne dépendront pas seulement de l'intensité ou de la direction de la lumière, de l'état plus ou moins poli de la surface représentée, mais encore de la nature physique des molécules qui composent cette surface.

Il est certain que la lumière ne produira pas les mêmes effets sur le marbre, la pierre, le bois et les métaux, sur la soie, le velours ou les autres étoffes de toute espèce.

C'est donc par la comparaison raisonnée des effets de la lumière sur les corps eux-mêmes que l'on pourra devenir habile à représenter ces effets avec exactitude.

Celui qui aura fait les études précédentes concevra bien plus vite les modifications de la lumière sur les parties convexes et concaves du modèle qu'il aura sous les yeux ; et, connaissant d'avance toutes les combinaisons possibles de la lumière et de l'ombre, il pourra choisir celles qui conviennent le mieux au sujet qu'il se propose de traiter.

LIVRE VI.

PERSPECTIVE CAVALIÈRE.

504. Pour compléter autant que possible l'exposé des principes nécessaires aux dessinateurs, je terminerai cet ouvrage par quelques notions sur la *perspective cavalière*.

On donne ce nom à un genre de dessin de convention qui, sans avoir l'exactitude des épures de géométrie descriptive, a cependant sur ces dernières l'avantage de mieux faire concevoir la forme de l'objet que l'on dessine.

505. La manière d'opérer est extrêmement simple.

Supposons, par exemple, que l'on veuille construire (*fig. 195, pl. 39*) la perspective d'une pièce de bois terminée à sa partie inférieure par un tenon rectangulaire dont on a les deux projections (*fig. 192 et 193*).

On construira (*fig. 195*) la projection verticale $b'a'u's'm'd'$ égale à *bausmd* (*fig. 192*).

On adoptera ensuite une direction quelconque pour la perspective des lignes, telle que az perpendiculaire au plan vertical pg , que nous nommerons le plan du tableau.

Ensuite, sur le dessin en perspective, chacune de ces lignes

perpendiculaires au tableau devra être représentée par la moitié de sa projection horizontale (*fig.* 193).

Ainsi, par exemple, $a'z'$ (*fig.* 195) sera la moitié de az (*fig.* 193) ;

$u'v'$ sera la moitié de uv ;

$u'n'$ la moitié de un , et ainsi de suite.

Quelquefois, au lieu de la moitié on préfère prendre le tiers, surtout lorsque les lignes perpendiculaires au tableau sont très-longues.

506. Les lignes az , uv , un prennent en perspective le nom de lignes fuyantes; ainsi $a'z'$, $u'v'$, $u'n'$ sont des lignes fuyantes.

La direction de ces lignes est arbitraire et dépend pour chaque figure des parties que l'on veut mettre en évidence.

Ainsi, quand on voudra faire voir le dessous du corps, on dirigera les lignes fuyantes par en bas, comme on l'a fait pour la perspective du tenon (*fig.* 195).

Pour faire voir le dessus, on dirigera les lignes fuyantes par en haut (*fig.* 196).

Enfin on les dirigerait à gauche si l'on voulait faire voir la face qui est de ce côté.

507. Quelquefois on préfère placer l'objet obliquement par rapport au tableau. Ainsi la figure 198 étant la projection horizontale du tenon, pq sera le tableau.

On construira, comme ci-dessus, la projection verticale $b'a'u's'm'd'$ (*fig.* 200) égale à $bausmd$ (*fig.* 197) ; puis, après avoir choisi pour les lignes fuyantes la direction qui paraîtra la plus favorable à l'effet que l'on voudra produire, on fera :

$$(\text{fig. 200}) a'z' = \frac{az}{2} (\text{fig. 198}) ;$$

$$u'v' = \frac{uv}{2}, \text{ etc.}$$

508. Les mêmes conventions s'appliquent à la perspective des lignes courbes.

Ainsi on fera (*fig.* 210, 209) :

$$o'c' = \frac{oc}{2} ; v'u' = \frac{vu}{2}, \text{ etc.}$$

509. Les figures précédentes représentent en perspective quelques détails de construction, et la planche 40 contient des détails de machines.

510. Pour tirer tout le parti possible de ce genre de dessin, il faut, par de nombreux exemples, s'exercer à construire promptement, à vue d'œil, et sans le secours du compas, la perspective des objets que l'on a sous les yeux ; et les principes que nous venons d'exposer ont seulement pour but d'indiquer l'ordre dans lequel les différentes lignes doivent être tracées.

511. Quelques personnes contestent l'utilité de la perspective cavalière ; elles donnent pour raison que les objets pouvant être déterminés complètement et dans tous leurs détails par le moyen des projections, il n'est pas nécessaire d'employer un genre de dessin qui altère les dimensions du corps représenté sans avoir l'avantage, comme la perspective ordinaire, d'en reproduire l'apparence avec une exactitude rigoureuse.

Je serais le premier à me ranger à cet avis, si tout le monde savait la géométrie descriptive, ou si les ingénieurs ne devaient jamais avoir de communications d'idées avec des personnes étrangères à l'étude de cette science.

Mais il arrive à chaque instant, dans l'exécution des travaux industriels, que l'on veut faire comprendre à un ouvrier, à un chef d'atelier, les formes d'une pièce qui n'existe encore que dans l'imagination, et qui ne pourra être projetée que lorsque

l'auteur aura fixé ses idées sur les dimensions les plus convenables à donner à cet objet.

L'ingénieur lui-même, dans le travail du cabinet, ne peut commencer ses épures qu'après avoir comparé et discuté les formes qui conviennent le mieux aux différents détails de son projet ; et cette discussion sera souvent rendue plus facile par la représentation en perspective des objets dont la combinaison doit concourir à la perfection de l'ensemble.

Dans un livre, dans un cours public, lorsqu'on voudra faire comprendre la forme d'une machine, d'un instrument de physique ou d'un appareil de chimie, on y parviendra plus facilement avec le concours de la perspective que par les projections qui, au contraire, sont préférables lorsqu'il s'agira d'exécuter la machine ou l'instrument dont il s'agit.

Pour faire adopter un projet, pour obtenir les fonds nécessaires à son exécution, il faut que l'auteur en soumette les détails à des capitalistes, à des commissions dont les membres, souvent très-capables d'apprécier l'utilité ou la dépense, sont cependant trop étrangers au langage mathématique pour comprendre par le secours seul des projections tout ce que le travail de l'auteur peut offrir d'avantageux.

Si, par exemple, il s'agissait d'un monument, et si l'adoption du projet devait être le résultat d'un concours soumis au jugement du public, ce n'est pas par des projections que l'on parviendrait à lui en faire sentir toutes les convenances locales.

Il est évident que l'on réussirait bien mieux avec deux ou trois dessins en perspective représentant le monument proposé, vu des points principaux de la ville à laquelle il est destiné ; mais, dans ce dernier cas, les principes que nous venons d'exposer seraient insuffisants.

L'habitude que nous avons de voir plus petits les objets éloignés ferait paraître ces mêmes objets trop grands si l'on

conservait le parallélisme des lignes fuyantes, et cela détruirait complètement l'illusion.

Il serait alors indispensable de recourir à la perspective ordinaire, sans laquelle, lorsqu'il s'agit de dessins d'ensemble ou d'objets de grande dimension, il est impossible d'obtenir un résultat satisfaisant.

Ce n'est pas ici le lieu de développer les principes de cette science, qui rentre plutôt dans le domaine des artistes que dans celui des ingénieurs.

FIN DU SIXIÈME LIVRE.

LIVRE VII.

EXERCICES, ÉPURES DE CONCOURS.

CONCOURS DE 1851

POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE DES BEAUX-ARTS.

512. Cette seconde édition de mon *Traité des ombres* était complètement imprimée à l'époque du dernier concours de géométrie descriptive pour l'admission des élèves à l'École des beaux-arts.

Le sujet proposé pouvant être une bonne occasion d'exercices graphiques, je me suis décidé à lui consacrer un chapitre supplémentaire. Mais pour indiquer le moment où cette question peut être étudiée avec le plus de fruit, j'ai placé l'épure au rang qui lui convient le mieux dans l'atlas (voir *pl. 12 bis*).

513. **Question à résoudre.** *Trois points* uu', vv', oo' sont donnés par leurs projections horizontales v, u, o (fig. 4), et par leurs projections verticales v', u', o' (fig. 1).

Les deux points vv' et uu' situés sur une droite horizontale vu , $v'u'$, sont, par conséquent, à la même hauteur, et le point oo' est à égale distance des points vv' et uu' . Ce que l'on exprimera sur l'épure, en faisant $ov = ou$. Il faut construire deux cônes circulaires égaux, qui auront pour sommets les points vv' et uu' ; ces deux cônes doivent se toucher au point oo' , situé en même temps sur les circonférences des deux bases.

Enfin l'un des cônes doit être tangent au plan horizontal qui contient la droite vu , $v'u'$.

Pour donner à la solution de ce problème tous les développements nécessaires, j'ai consacré à l'épure une étendue quatre fois aussi grande que celle des autres planches de l'atlas, cela m'a permis d'ajouter au programme énoncé ci-dessus, une sphère, un cylindre, et un cône tronqué; de sorte que cette planche contiendra un résumé à peu près complet de tout ce qui a été dit dans le deuxième livre du traité actuel. Mais, pour ne pas trop fatiguer l'attention, je décomposerai la question principale en autant de problèmes particuliers qu'il y a de corps à projeter, en adoptant pour ces problèmes l'ordre suivant lequel chacun d'eux doit être résolu.

514. Premier problème. *Les trois points déterminés par leurs projections vv' , uu' , oo' , sont les sommets d'un triangle isocèle dont la base vu , $v'u'$ est horizontale. Il faut construire un cône circulaire tangent au plan horizontal qui contient la droite vu , $v'u'$, et au plan incliné des trois points donnés.*

Le sommet du cône étant situé au point vv' , et le point oo' appartenant à la circonférence de la base,

- 1° ~~Par le point u , ou par tout autre point de la droite vu , on concevra un plan vertical $A''Z''$, perpendiculaire à la droite horizontale vu , et par conséquent au plan des trois points donnés v , o , u ;~~

- 2° — On rabattra le plan vertical $A''Z''$ autour de l'horizontale qui contient le point uu' ; et faisant $y''o''$ de la figure 2 égal à $y'o'$ de la figure 1, le point oo' sera projeté en o'' ;
- 3° — La droite uP sera l'intersection du plan qui contient les trois points donnés, par le plan auxiliaire de projection $A''Z''$, et la droite $o''N$ perpendiculaire sur uP sera la projection de la normale au plan oo'' du plan vuo . La projection horizontale de cette normale sera la droite mn perpendiculaire sur vu ;
- 4° — La droite uP_1 sera l'intersection du plan vertical $A''Z''$ par le plan bissecteur de l'angle dièdre PuZ'' , que le plan des trois points donnés fait avec le plan horizontal qui contient la droite $vu, v'u'$;
- 5° — Le plan bissecteur uP_1 sera percé par la normale No'' , suivant un point mm'' , qui sera le centre d'une sphère tangente au plan des trois plans donnés, et au plan horizontal qui contient la droite vu ;
- 6° — Le cône V , qui aura son sommet en v , et qui enveloppera la sphère que l'on vient d'obtenir, satisfera aux conditions demandées ;
- 7° — On projettera ce cône (*fig. 6*) sur un plan vertical $A'''Z'''$ parallèle à son axe vm ; la projection du point m sur ce nouveau plan sera m''' , que l'on obtiendra en faisant $x'''m'''$ de la figure 6, égale à $x''m''$ de la figure 2 ;
- 8° — On décrira la projection de la sphère inscrite, et l'on déterminera bien exactement les deux points de tangence x''' , x'''' ;
- 9° — La projection horizontale de l'un de ces deux points doit se confondre avec celle du point m , et lorsque l'on aura déterminé les projections horizontales des points x''' et c''' , on aura le centre et les deux axes de l'ellipse suivant laquelle se projette la base du cône V .

515. **Deuxième problème.** *Le cône V étant déterminé*

par ses projections sur les figures 4 et 6, il faut projeter un second cône circulaire U , égal au premier cône, dont le sommet soit situé en uu' , et qui touche le plan du triangle isocèle vu , suivant la droite uo .

- 1° — Sur la normale $o''N$ (fig. 2), on portera $o''n''$ égal à $o''m''$, et la circonférence décrite du point n'' comme centre, avec le rayon $o''n''$, sera la projection d'une sphère inscrite dans le cône demandé ;
- 2° — On projettera cette sphère sur le plan horizontal (fig. 4), et les tangentes menées par le point u seront les limites de la projection horizontale du cône ;
- 3° — On projettera (fig. 10) le point u et la sphère qui a le point n pour centre, sur le plan vertical $A^{IV}Z^{IV}$ parallèle à l'axe du cône, en faisant $t^{IV}n^{IV}$ de la figure 10, égale à $t''n''$ de la figure 2 ;
- 4° — Les deux points de tangence r^{IV} et le point z^{IV} étant projetés sur le plan horizontal, on connaîtra le centre et les deux axes de l'ellipse, suivant laquelle se projette la base circulaire du cône demandé.

516. **Troisième problème.** Construire les projections d'une sphère d'un rayon donné, et qui soit tangente en même temps au plan horizontal de projection et au cône U .

- 1° — Si l'on fait pq (fig. 10) égale au rayon de la sphère demandée, le plan horizontal P_2 contiendra le centre de cette sphère.

Mais la position de ce centre dans le plan P_2 sera encore indéterminée, car il est évident que l'on pourrait faire rouler la sphère sur le plan horizontal de projection sans qu'elle cessât d'être tangente au cône U . On ne peut donc déterminer la position de la sphère demandée, qu'en introduisant quelque nouvelle condition ;

- 2° — Si, par exemple, on veut que le point de tangence des deux corps soit situé sur la circonférence du

cercle $h^{iv}g^{iv}$, on tracera $b^{iv}g^{iv}$ perpendiculaire sur $u^{iv}g^{iv}$, et l'on fera $g^{iv}d^{iv}$ égale au rayon de la sphère demandée; la circonférence décrite du point d^{iv} comme centre, avec le rayon $d^{iv}g^{iv}$, sera la projection de la sphère, que l'on aurait fait tourner autour de l'axe du cône jusqu'à ce que le centre soit parvenu dans le plan vertical qui contient cet axe ;

- 3° — Si, actuellement, on fait revenir la sphère à la place qu'elle doit occuper dans l'espace, le centre d^{iv} viendra se placer en e^{iv} dans le plan P, en décrivant l'arc de cercle $d^{iv}e^{iv}$ perpendiculaire à l'axe du cône ; la normale $b^{iv}d^{iv}$ deviendra $b^{iv}e^{iv}$, et le point de tangence s^{iv} sera déterminé par l'intersection de la normale $b^{iv}e^{iv}$ avec le plan du cercle $g^{iv}h^{iv}$;
- 4° — Si la droite $e^{iv}b^{iv}$ rencontre trop obliquement le plan du cercle $g^{iv}h^{iv}$, on projettera le tout sur le plan A^vZ^v , ou sur tout autre plan parallèle à la base du cône U ;
- 5° — Ce plan, rabattu autour de l'horizontale projetante du point A^v , viendra se placer dans la position a^vz^v parallèle au plan horizontal de projection ;
- 6° — Cette opération donnera (*fig. 5*) une nouvelle projection U^v du cône U sur un plan perpendiculaire à son axe ;
- 7° — On construira sur cette projection les circonférences d^ve^v et g^vs^v , ainsi que les points e^v et s^v , d'où il sera facile de déduire (*fig. 1*) les projections horizontales e et s sur les perpendiculaires abaissées par les points correspondants de la figure 10.

517. **Remarque.** Nous supposerons dans l'épure actuelle que le cône V est posé horizontalement sur le parallépipède rectangle R, sur le cylindre horizontal T, et qu'il est retenu à droite par un tronçon de colonne ou cylindre vertical C.

Le cône U est soutenu par le cône V qu'il touche au

point oo' de la circonférence de sa base, par le tronc de cône droit M, et par la sphère E qui lui est tangente au point s .

Les projections de ces prisme, cylindre et tronc de cône ne présentent pas assez de difficultés pour qu'il soit nécessaire de nous y arrêter.

Ombres.

518. Lignes de séparation sur le cône V. Première méthode :

- 1° — Le rayon de lumière qui passe par le sommet v du cône V est l'intersection des deux plans tangents formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur la surface du cône ;
- 2° — Ce rayon perce le plan $A^{vi}Z^{vi}$ qui contient la base du cône, suivant un point B''' dont la projection horizontale est B ;
- 3° — Les tangentes menées par B à l'ellipse suivant laquelle se projette la base du cône V détermineront les points 1 et 2 des lignes de séparation.

Ces tangentes n'ont pas été conservées sur l'épure.

519. Deuxième méthode :

- 1° — Au lieu de construire par B des tangentes à l'ellipse suivant laquelle se projette la base du cône V, on peut rabattre le plan $A^{vi}Z^{vi}$ de cette base jusqu'à ce qu'il soit venu prendre la position horizontale $a^{vi}z^{vi}$.

Par suite de ce mouvement, le cône V sera projeté par la circonférence V^{vi} , figure 3, et le point BB''' deviendra B^{vi} ;

- 2° — On tracera par B^{vi} les deux tangentes à la circonférence V^{vi} , ce qui déterminera les points 1 et 2 que l'on ramènera sur les deux projections de la circonférence de la base du cône (*fig. 4 et 6*).

520. *Troisième méthode :*

Les deux verticales I et K, tangentes à la projection de la sphère inscrite dans le cône V (*fig. 6*), couperont les droites $v''x''$ en quatre points 13, 14, 15 et 16, qui sont les sommets d'un trapèze.

Or, on sait (*Géométrie descriptive*) que les diagonales de ce trapèze sont les traces de deux plans P_3 et P_4 , perpendiculaires au plan de la figure 6, et qui jouissent de cette propriété, que les sections elliptiques du cône V par ces plans auront la même projection que la sphère inscrite. D'après cela :

- 1° — On tracera (*fig. 6*) les deux verticales I et K tangentes à la projection de la sphère inscrite ;
- 2° — La diagonale 13-16 sera la trace du plan P_3 , qui coupe le rayon de lumière $v''B''$ suivant un point D'' que l'on projettera en D sur la projection horizontale vB du rayon de lumière qui contient le sommet v du cône V ;
- 3° — Les droites menées par le point D tangentes à la projection horizontale de la sphère inscrite, ou, ce qui est la même chose, à la projection circulaire de l'ellipse 13-16 provenant de la section du cône par le plan P_3 , détermineront les points 4 et 5 situés sur les deux lignes de séparation du cône V ;
- 4° — Ainsi, en partant du sommet, les lignes de séparation sur le cône V seront :

La droite $v-2$, qui contient le point 5 déterminé par la seconde méthode ;

L'arc de cercle 2-3-1 ;

La droite 1- v , qui contient le point 4.

521. **Lignes de séparation sur le cône U.** *Première méthode :*

1° — Le rayon de lumière $u^{IV}H^{IV}$ passant par le sommet u du cône U (*fig. 10*) perce le plan A^VZ^V qui contient la base du cône, suivant un point F^{IV} dont la projection horizontale ne se trouve pas sur l'épure ;

2° — Si l'on avait cette projection, on pourrait construire par ce point deux tangentes à l'ellipse suivant laquelle se projette la base du cône U .

Cette opération déterminerait les points de tangence 8 et 9, et par suite les deux lignes de séparation $u-8$ et $u-9$. Mais la projection horizontale du point F étant trop éloignée, il faut trouver d'autres moyens de résoudre la question.

522. *Deuxième méthode :*

1° — On pourra couper le cône U et le rayon de lumière qui contient le sommet par un plan P_3 perpendiculaire à l'axe du cône ; on obtiendra par ce moyen une section circulaire qui, projetée sur le plan A^VZ^V et rabattue en a^Vz^V , se projettera sur la figure 5 par la circonférence 6-7 ;

2° — Le plan P_3 coupera le rayon de lumière qui contient le sommet u du cône U , suivant un point G^{IV} qui se projettera sur le plan horizontal, en G , et sur le plan A^VZ^V rabattu en a^Vz^V , suivant le point G^V ;

3° — Les deux tangentes menées par ce dernier point, à la circonférence 6-7 de la figure 5, détermineront les points 6 et 7 que l'on ramènera successivement sur a^Vz^V et sur A^VZ^V ; de là, sur la trace du plan P_3 par des perpendiculaires au plan de projection A^VZ^V ; enfin sur la projection horizontale (*fig. 4*), par des perpendiculaires à $A^{IV}Z^{IV}$, jusqu'à la rencontre des lignes menées parallèlement à cette même droite, par les points 6 et 7 de la figure 5 ;

Les points 6 et 7 étant joints avec le sommet u du

cône U, on aura obtenu les deux lignes de séparation sur ce cône.

523. **Remarque.** Cette deuxième méthode a l'inconvénient de déterminer le point G^{IV} par deux droites qui se coupent suivant un angle trop aigu. Il est vrai que ce point, projeté sur le plan A^VZ^V et rabattu en G^V , se trouve très-loin du cercle 6-7 de la figure 5, de sorte que l'éloignement du point G^V détruit en quelque sorte, par rapport à la direction des deux tangentes, l'erreur qui pourrait exister dans la position du point G^{IV} ; mais il n'est pas moins vrai que les points 6 et 7 des projections U et U^{IV} sont trop près du sommet du cône pour que les deux lignes de séparation soient parfaitement déterminées.

Cela confirme ce que j'ai dit bien souvent, qu'il n'existe pas de principe absolu lorsqu'il s'agit de la pratique, et que l'on s'abuserait beaucoup si l'on croyait pouvoir agir toujours d'une manière uniforme.

Il faut au contraire, suivant les circonstances, changer à chaque instant la manière d'opérer; et lorsqu'un principe ne conduit pas à des résultats satisfaisants, il faut en chercher un autre.

Le moyen que nous avons employé au numéro 520 ne présente pas les inconvénients que nous venons de signaler, et c'est la construction qui convient le mieux dans le cas actuel.

524. *Troisième méthode.*

- 1° — Les deux verticales Q et Y, tangentes à la projection de la sphère inscrite dans le cône U (*fig. 10*), couperont les droites $u^{IV}r^{IV}$ en quatre points, qui sont les sommets du trapèze 17-18-19-20;
- 2° — La diagonale 17-20 de ce trapèze sera la trace du plan P_6 qui coupe le cône U suivant une ellipse 17-20, dont la projection horizontale se confond avec la cir-

conférence qui limite la projection de la sphère inscrite ;

3° — Le plan P_6 coupe le rayon de la lumière qui contient le sommet u du cône U , suivant un point H^{iv} que l'on projettera en H , sur la projection horizontale uG du rayon de lumière du sommet ;

4° — Les droites menées par le point H , tangentes à la projection horizontale de la sphère inscrite, détermineront les points 11 et 12 situés sur les deux lignes de séparation du cône U ;

5° — Ainsi, en partant du sommet, les lignes de séparation sur le cône U seront :

1° La droite $u-9$, qui contient les points 7 et 12 déterminés par la seconde et par la troisième méthode ;

2° L'arc de cercle 9-10-8 ;

3° La droite $u-8$, qui contient le point 6 et le point 11.

L'arc de cercle 9-10-8 appartient à la ligne de séparation du cône U , ce qui résulte de ce que la base du cône est évidemment obscure, comme on peut facilement le voir sur la figure 10.

Si la base était éclairée, la ligne de séparation serait formée par l'arc 8-21-9.

525. Ligne de séparation sur la sphère E.

On sait (102) que la ligne de séparation sur la sphère est un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction de la lumière.

Si l'on veut obtenir les axes principaux de l'ellipse suivant laquelle se projette ce grand cercle, on construira la projection auxiliaire (fig. 8) sur le plan vertical $A^{vii}Z^{vii}$ parallèle aux rayons lumineux.

Le grand cercle qui forme la ligne de séparation sur la sphère sera projeté (fig. 8) par le diamètre 23-24, perpendiculaire à la projection $e^{vii}-22$ du rayon de lumière.

Les perpendiculaires abaissées des points 23, e^{vii} et 24, dé-

termineront le centre et le petit axe de l'ellipse qui forme la projection horizontale du cercle 23-24.

526. Ombres portées sur le plan horizontal. Les traces des plans et des cylindres formés par les rayons lumineux qui s'appuient sur les lignes de séparation obtenues précédemment détermineront le contour des ombres portées sur le plan horizontal ; car il résulte évidemment de la direction de la lumière, dans l'exemple qui nous occupe, qu'il n'y aura pas d'ombre portée sur le plan vertical de projection, qui n'existe ici que d'une manière abstraite et par conséquent incapable d'arrêter les rayons lumineux.

Les ombres portées sur le plan horizontal par le cône V, par le prisme R, par le cylindre vertical C, et par le cylindre horizontal T, seront déterminées par les figures 4 et 6.

Les ombres portées par le cône U, et par le tronc de cône M, pourront être obtenues par le moyen des deux projections figures 4 et 10.

Enfin, la projection auxiliaire $A^{VI}Z^{VI}$ (fig. 8) donnera les axes de la grande ellipse qui forme l'ombre portée par la sphère E sur le plan horizontal de projection.

En partant du point 25 situé sur la circonférence de la grande base du cône tronqué M, le contour de l'ombre portée sur le plan horizontal se compose des lignes suivantes :

- 1° — La droite 25-26, qui fait partie de la trace du plan tangent formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la surface du tronc de cône M ;
- 2° — L'arc de cercle 26-27 est l'ombre d'une partie de la base supérieure du tronc de cône ;
- 3° — La droite 27-28, trace du plan formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la ligne de séparation $u-9$ du cône U ;
- 4° — L'arc d'ellipse 28-29-30, qui fait partie de l'ombre portée par la sphère E ;

- 5° — La droite 30-31, prolongement de 27-28 qui forme l'ombre portée par le cône U;
- 6° — Les droites 31-32, 32-33, ombres portées par les arêtes du prisme R;
- 7° — La droite 33-9 appartient à l'ombre portée par le cône U;
- 8° — L'arc d'ellipse 9-10-34 est la trace du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la circonférence de la base du cône U;
- 9° — La droite 34-2 appartient à la trace du plan tangent formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la ligne de séparation $v-2$ du cône V;
- 10° — L'arc d'ellipse 2-35, formant une partie de l'ombre portée par la base du cône V;
- 11° — La droite 35-36, la demi-circonférence 36-37-38, et la droite 38-39, forment le contour de l'ombre portée par le cylindre vertical C;
- 12° — La droite 40-41 et l'arc d'ellipse 41-42 sont les ombres portées par le cylindre horizontal T;
- 13° — Une partie 42-43-44 de cette ombre se relève sur le cylindre C, comme on peut le voir par les figures 6 et 1;
- 14° — L'arc d'ellipse $x-1$ est l'ombre portée sur le plan horizontal par la base du cône V;
- 15° — La droite 1-45 est la trace du plan tangent formé par les rayons qui s'appuient sur la ligne de séparation $v-1$ du cône V;
- 16° — La droite 45-46 est la trace du plan tangent formé par les rayons qui s'appuient sur la ligne de séparation $u-8$ du cône U;
- 17° — L'arc d'ellipse 46-47-48 appartient au contour de l'ombre portée par la sphère E;
- 18° — La droite 48-49 est l'ombre portée par le cône U;

19° — L'arc de cercle 49-50 et la droite 50-51 proviennent de l'ombre portée par le tronc de cône M.

527. Ombres portées sur la sphère et sur le cône V.

Il est bien évident qu'il ne peut y avoir d'ombre portée sur le cône U, qui est placé au-dessus de la sphère et du cône V.

Il ne reste donc plus qu'à chercher les ombres portées sur ces deux dernières surfaces.

528. Ombre portée sur la sphère E. Cette ombre se compose des deux ellipses 30-53 et 76-76, projections des cercles suivant lesquels la sphère est coupée par les plans des rayons lumineux, qui s'appuient sur les lignes de séparation $u-9$ et $u-8$ du cône U.

Les axes principaux de l'ellipse 30-53 pourront être facilement déterminés, en projetant la sphère sur le plan $A^{VIII}Z^{VIII}$ perpendiculaire à la trace 27-9 du plan P_7 qui touche le cône U, suivant la droite $u-9$.

La projection du point 7 ou de tout autre point de la droite $u-9$ sur le plan $A^{VIII}Z^{VIII}$ déterminera la trace $A^{IV}P_7$ du plan tangent au cône U, et la droite 55-55 sera la projection du cercle, suivant lequel ce plan coupe la sphère E.

Le point 56, milieu de la corde 55-55, déterminera le centre de l'ellipse cherchée; le grand axe de cette ellipse sera égal au diamètre 55-55 du cercle dont elle est la projection, et l'un des points 55 projeté sur le plan horizontal sera l'une des deux extrémités du petit axe.

Enfin, la droite $e^{VIII}-53$, parallèle à $A^{VIII}Z^{VIII}$, déterminera sur la droite 55-55, la projection commune des deux points 53, suivant lesquels l'ellipse cherchée touche le grand cercle qui limite la projection horizontale de la sphère.

529. En opérant de la même manière, on déterminera les axes de l'ellipse 76-76, projection horizontale du cercle sui-

vant lequel la sphère est coupée par le plan des rayons lumineux qui s'appuient sur la ligne de séparation $u-8$ du cône U .

Ainsi (*fig. 11*), on projettera la sphère sur le plan A^xZ^x , perpendiculaire à la trace $49-A^{VIII}$ du plan P_{13} qui touche le cône suivant la droite $u-8$.

Le rayon lumineux qui contient le sommet u du cône U perce le plan vertical de projection A^xZ^x , suivant le point 75, qui détermine sur la figure 11 la trace verticale P_{13} du plan qui touche le cône U suivant la droite $u-8$.

La trace du plan P_{13} pourrait encore être obtenue ou vérifiée en projetant le point 11, ou tout autre point de la droite $u-8$.

Cela étant fait, la corde 76-76 sera la projection du cercle suivant lequel la sphère E^x est coupée par le plan P_{13} .

Le point 77, milieu de la corde 76-76, déterminera le centre de l'ellipse cherchée; le grand axe de cette ellipse sera égal au diamètre 76-76 du cercle dont elle est la projection, et l'un des points 76 projetés sur le plan horizontal sera l'une des extrémités du petit axe.

Enfin, la droite e^x-78 , parallèle à A^xZ^x , déterminera sur la droite 76-76 la projection 78, commune aux deux points suivant lesquels l'ellipse cherchée touche le grand cercle qui limite la projection horizontale de la sphère.

530. Comme exercice, et pour faire comprendre quelle est la partie de la sphère qui est comprise entre les deux plans tangents P_7 et P_{13} , j'ai projeté le cercle 56-56 sur la figure 11, et le cercle 77-77 sur la figure 9.

Ces projections sont faciles à obtenir, et dépendent de principes que nous allons rappeler.

531. On sait que l'on peut facilement construire une ellipse, lorsque l'on connaît un de ses axes principaux et un point de la circonférence.

En effet, supposons (*fig.* 14 et 19) que la droite AA soit l'un des axes d'une ellipse dont la circonférence doit contenir le point M :

- 1° — On prendra ce point pour centre d'un arc de cercle décrit avec un rayon MH, égal à la moitié AO de l'axe donné AA ;
- 2° — On tracera la droite HM ;
- 3° — On obtiendra KM pour la moitié du second axe de la courbe qu'il sera facile de construire.

532. D'après cela, pour construire sur la figure 9 les projections du cercle 76-76 de la figure 11, on déduira de la figure 4 le centre et les extrémités de l'axe horizontal 77-77.

On joindra le centre 77 de l'ellipse cherchée avec le centre e^{VIII} de la sphère, et la droite perpendiculaire sur e^{VIII} -77 sera le grand axe, dont la longueur est égale à la droite 76-76 de la figure 11.

Le grand axe de l'ellipse obtenu sur la figure 9 doit être parallèle à la droite 54-79, suivant laquelle le plan de projection $A^{VIII}Z^{VIII}$ est coupé par le plan qui contient le cercle 76-76.

Le point 54 s'obtiendra en prolongeant le rayon de lumière uG jusqu'au plan de projection $A^{VIII}Z^{VIII}$.

On opérera de la même manière pour construire sur la figure 11 la projection du cercle 55-55 de la figure 9. Ainsi, le grand axe de l'ellipse que l'on obtiendra sera perpendiculaire sur e^X -56, et parallèle à la trace 80-75 du plan tangent P_7 .

533. La question qui nous occupe ayant conduit à projeter des cercles inclinés dans l'espace, je rappellerai encore la construction suivante, que l'on a souvent l'occasion d'appliquer. Supposons (*fig.* 18) que l'on veut obtenir les projections d'un cercle d'un rayon connu, et situé dans un plan P déterminé par ses traces.

On remarquera que, lorsqu'un cercle est projeté obliquement, tous les diamètres se raccourcissent, excepté celui qui est parallèle au plan de projection.

D'après cela, le point oo' situé dans le plan P étant le centre du cercle demandé, on tracera :

1° ~~————~~ La droite $a'a'$ parallèle à la trace verticale, et cc parallèle à la trace horizontale du plan P.

$a'a'$ sera le grand axe de la projection verticale du cercle, et cc sera le grand axe de la projection horizontale ;

2° ~~————~~ Les droites aa et $c'c'$, parallèles à la ligne AZ, seront les secondes projections des diamètres précédents ;

3° ~~————~~ On projettera le point a' en a , et le point c en c' ;

4° ~~————~~ On connaîtra, par conséquent, un axe et un point de chaque ellipse, ce qui permettra de la tracer (531).

534. Les principes précédents peuvent servir pour construire la ligne de séparation sur une sphère (*fig. 12*).

En effet, le rayon de lumière étant déterminé par ses deux projections $SO, S'O'$, on tracera :

1° ~~————~~ La droite $a'a'$ perpendiculaire sur $S'O'$, et cc perpendiculaire sur SO .

Ces droites perpendiculaires sur les projections du rayon lumineux seront parallèles aux traces du plan qui contient le grand cercle formant la ligne de séparation sur la sphère ;

2° ~~————~~ Les droites $a'a'$ et cc seront les grands axes des deux ellipses demandées (533), et les secondes projections aa et $c'c'$ de ces deux droites étant parallèles à la ligne AZ, on connaîtra pour chaque ellipse un axe et un point, ce qui permettra de la construire (531).

535. On peut encore déterminer les petits axes de ces deux ellipses, en opérant de la manière suivante (*fig. 16*) :

- 1° — On concevra la sphère projetée sur le plan vertical $A'Z'$, et l'on rabattra ce plan autour de l'horizontale $vO, v'O'$, qui contient le centre de la sphère ;
- 2° — Le point S viendra se placer en S'' , que l'on obtiendra en faisant SS'' égal à $v'S'$;
- 3° — Le diamètre $m''n''$ perpendiculaire au rayon rabattu $S''O$ sera la ligne de séparation sur la sphère ;
- 4° — Le point m'' , ramené en m sur SO , sera l'extrémité du petit axe de l'ellipse suivant laquelle le grand cercle de séparation se projette sur le plan horizontal.

En rabattant le plan projetant $A''Z''$ autour de la droite $uO, u'O'$, le rayon de lumière du centre devient $S'''O'$, que l'on obtient en faisant $S'S'''$ égal à uS .

La ligne de séparation se projette sur le plan rabattu par le diamètre $n''n''$ perpendiculaire à $S'''O'$, et le point n'' , ramené en n sur $S'O'$, est l'extrémité du petit axe de l'ellipse suivant laquelle le grand cercle de séparation se projette sur le plan vertical.

536. **Ombres portées sur le cône V.** Si l'on néglige un instant les lignes de séparation, l'ombre portée sur la surface du cône V sera :

- 1° — La courbe à double courbure 57-34-8, provenant de l'intersection du cône V par la surface cylindrique, formée par les rayons lumineux qui s'appuient sur la circonférence de la base du cône U ;
- 2° — L'arc d'ellipse 8-67-45-59 provenant de la section du cône V, par le plan des rayons lumineux qui touchent le cône U, suivant la ligne de séparation $u-8$;
- 3° — Une petite droite 59-58 (*fig. 3*) appartenant à l'intersection du même plan, et de celui qui contient la base du cône V ;
- 4° — Enfin, une petite portion de l'ellipse 58-57 suivant laquelle ce dernier plan coupe le cylindre des

rayons lumineux, qui s'appuient sur la circonférence de la base du cône U.

Ces deux dernières lignes n'ont pas été tracées sur la projection horizontale (*fig. 4*).

537. Une partie des ombres que nous venons d'indiquer se confondant avec l'ombre propre du cône V, il s'ensuit qu'en ayant égard aux lignes de séparation de cette surface le contour de la partie ombrée sera, en commençant par le point 1 :

1° — L'arc de cercle 1-3-2 formant ligne de séparation ;

2° — La droite 2-3-4 formant également séparation ;

3° — La courbe d'ombre portée 34-57, qui partant du point 34 passe par les deux points 64, 60, et vient couper la circonférence de la base du cône V au point 57 ;

4° — Le petit arc d'ellipse 57-58, ombre portée sur la base du cône (*fig. 3*) ;

5° — La droite 58-59, ombre portée (*fig. 3*) ;

6° — L'arc d'ellipse 59-63-45, ombre portée (*fig. 4 et 1*) ;

7° — La droite 45-1, séparation.

538. La courbe à double courbure 57-64-34, suivant laquelle la surface du cône V est pénétrée par les rayons lumineux qui s'appuient sur l'arc 8-10-9 du cône U, peut être obtenue de plusieurs manières.

539. *Première méthode.* On sait que, pour déterminer les points communs à deux surfaces, il faut les couper par des surfaces auxiliaires dont le choix, dans chaque cas, dépend de la forme des corps dont on veut obtenir la pénétration.

Or, les deux surfaces dont il s'agit dans le cas actuel étant le cône V et le cylindre des rayons lumineux qui s'appuient sur la base du cône U, il est évident que les surfaces coupantes les plus simples seront des plans parallèles au cylindre et passant par le sommet du cône ; d'où résultent les opérations suivantes :

- 1° — On construira la trace horizontale L du cône V ; cette trace est une parabole dont le foyer et la directrice seront facilement déterminés par la figure 6 ;
- 2° — Par le point k , suivant lequel le plan horizontal de projection est percé par le rayon de lumière qui contient le sommet v du cône V, on fera passer une droite quelconque qui coupe la trace parabolique L du cône V, et l'ellipse 9-10-34, trace du cylindre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur la base du cône U. Cette droite peut être considérée comme la trace d'un plan P_8 qui contiendrait le rayon de lumière vk , et qui, par conséquent, passerait par le sommet du cône, et serait parallèle au cylindre ;
- 3° — Les points 60, suivant lesquels la trace du plan P_8 coupera la trace parabolique L du cône V seront les pieds de deux génératrices dont on construira les projections, et que l'on pourra vérifier en les projetant sur les figures 4 et 6 ;
- 4° — On tracera également les rayons lumineux par les deux points suivant lesquels la trace du plan P_8 coupe l'ellipse 9-34, qui forme la trace du cylindre ;
- 5° — Les quatre points 60, suivant lesquels ces deux rayons de lumière rencontreront les génératrices correspondantes du cône V, appartiendront à la ligne d'ombre portée sur cette dernière surface par la base du cône U. Le point 60, qui est le plus près du point o , est le seul parmi les quatre points que l'on vient d'obtenir qui appartient au contour de l'ombre portée, et qui, par conséquent, doit être conservé ; mais on fera bien cependant de construire la courbe tout entière, afin de mieux comprendre sa forme et ses relations avec les autres lignes.

En recommençant l'opération précédente, on déterminera quatre nouveaux points, et l'on continuera jusqu'à ce que la courbe de pénétration soit complètement obtenue.

Dans l'épure actuelle, cette courbe est déterminée par les points 57-60-64-34-60-8-62-60-34-64-60-0.

Les plans dont les traces horizontales seront comprises dans l'angle P_9-k-P_{10} seront évidemment les seuls qui contiennent les points de la courbe demandée ; cette courbe doit être tangente à la génératrice suivant laquelle le cône V est coupé par le plan P_9 .

Pour vérifier la position de cette génératrice, on fera bien de projeter sur la figure 6 le point 61 de l'ombre portée. Le rayon lumineux correspondant percera la base $x'''x'''$ du cône, en un point que l'on rabattra successivement sur $\alpha^{vi}z^{vi}$, et sur la figure 3, d'où on le ramènera sur la projection horizontale de la base du cône V ; la génératrice que l'on obtiendra sera tangente à la courbe à double courbure au point 62, déterminé par le rayon de lumière qui aboutit au point 62, suivant lequel l'ellipse 9-34 est touchée par la trace du plan P_9 .

540. *Deuxième méthode.* Quelques points pourront être déterminés directement, et sans le secours de plans coupants auxiliaires.

Ainsi, les deux ellipses 9-34 et 2-61 se coupent suivant deux points trop rapprochés pour qu'il ait été possible de les désigner par des chiffres.

L'un de ces points est l'ombre du point o suivant lequel se touchent les deux cônes U et V.

Le rayon de lumière passant par le second point déterminera celui qui est désigné par le n° 57, sur la circonférence de la base du cône V (*fig. 4 et 3*).

L'ombre kx de la génératrice vx située sur la partie supérieure du cône V coupera l'ellipse 9-34 en deux points qui détermineront les points 64 de la courbe cherchée (*fig. 4*).

Enfin les deux points 35 de l'ombre portée sur le plan horizontal détermineront les points correspondants sur la ligne de séparation $v-2$ du cône V.

541. Les méthodes précédentes pourront encore être employées pour construire l'ellipse 65-67-59, suivant laquelle le cône V est coupé par le plan des rayons lumineux qui touchent le cône U, suivant la ligne de séparation $v-8$.

En effet, le plan P_{11} coupera le cône V suivant les deux génératrices qui contiennent les points 69 de la parabole. Ces points détermineront sur le cône V deux génératrices que l'on peut encore vérifier en projetant sur les figures 4 et 6 les rayons lumineux passant par les points 70 de l'ellipse 2-61.

Le plan tangent 49-A^{VIII} sera coupé par le plan P_{11} suivant le rayon de lumière déterminé par le point 93, et les intersections de ce rayon par les génératrices 69 du cône V détermineront les deux points correspondants de l'ellipse demandée.

Ces points n'ont pas été conservés.

La même opération répétée fera connaître autant de points que l'on voudra ; mais on pourra déterminer immédiatement par le contour des ombres portées :

- 1° — Les deux points 59 et 65 suivant lesquels l'ellipse cherchée coupe la circonférence de la base du cône V ;
- 2° — Le point 66, situé sur la ligne de séparation $v-2$;
- 3° — Le point suivant lequel la courbe à double courbure 57-8 touche l'ellipse 8-67-68 etc., avec laquelle elle se raccorde au point 8 ;
- 4° — Le point 67 sur la génératrice $v-3$ sera déterminé par l'intersection de la droite $k-3$ de l'ombre portée avec la trace 49-A^{VIII} du plan tangent au cône U suivant $v-8$.
Le point 3 de la figure 4 sera déterminé sur la figure 6 par la droite $m'''3$ parallèle à $A'''-Z'''$;
- 5° — Les points 68, 45, 63, seront déterminés par les intersections de la trace 49-A^{VIII} du plan tangent avec les ombres des génératrices $v-x$, $v-1$, $v-92$, etc.

Le point 92 et le point 3 ont la même projection sur la figure 6.

542. On peut encore vérifier ou déterminer tous les points de l'ellipse que nous venons d'obtenir, en construisant (*fig. 7*) une projection auxiliaire sur le plan vertical A^ixZ^ix perpendiculaire à la trace $49-A^{viii}$ du plan qui touche le cône U suivant la droite $u-8$.

Dans ce cas, la courbe demandée se projetterait par la droite $68-73$, ce qui déterminerait immédiatement sur chacune des génératrices du cône le point correspondant de la courbe demandée.

Les génératrices du cône V seront projetées sur la figure 7 en prenant sur la figure 6 la hauteur du point où chacune d'elles rencontre la circonférence $x''x'''$ de la base.

Les plans des figures 7 et 11 étant perpendiculaires à la droite horizontale $49-A^{viii}$, on aurait pu réunir ces deux projections en une seule, mais j'ai préféré les séparer pour éviter la confusion.

543. Projections et ombres sur le plan vertical $A'Z'$.
Nous n'avons rien dit jusqu'à présent des projections sur le plan vertical $A'Z'$, parce que la projection horizontale (*fig. 4*) et les projections auxiliaires ont suffi pour déterminer toutes les lignes demandées par la question.

Si pourtant on veut obtenir les projections sur le plan vertical $A'Z'$, on pourra opérer de la manière suivante :

Par chacun des points obtenus sur la projection horizontale, on tracera une perpendiculaire à la ligne $A'Z'$, et l'on prendra la hauteur du point correspondant sur l'une des projections verticales auxiliaires.

Ainsi, les projections du cône V et de toutes les lignes qui en dépendent se déduiront des figures 4, 6 et 7.

Les lignes qui appartiennent à la projection du cône U se déduiront des figures 4 et 10, et les points des trois ellipses

qui forment la ligne de séparation et l'ombre portée sur la sphère E pourront être déterminés en prenant les hauteurs sur les figures 8, 9 et 11.

Toutes ces ellipses étant des projections de cercles, pourront être construites par les méthodes exposées aux nos 531 et 533.

544. Ainsi l'ellipse qui forme la ligne de séparation sur la sphère E peut être obtenue de la manière suivante :

- 1° — Le diamètre 81-81, perpendiculaire à la projection $s'e'$ du rayon lumineux (*fig. 1*), sera le grand axe de l'ellipse demandée ;
- 2° — Le petit axe devant être perpendiculaire au grand doit coïncider avec la projection $s'e'$ du rayon lumineux qui passe par le centre de la sphère ;
- 3° — Enfin, le rayon $e-52$ de la figure 4 étant horizontal, sa projection verticale $e'-52$ sera parallèle à la ligne $A'Z'$. Par conséquent, on connaîtra l'axe 81-81 et un point 52 de l'ellipse demandée, ce qui suffira pour la construire (531).

545. Enfin (535), on peut déterminer les axes de cette ellipse en projetant la sphère sur le plan $A^{x_1}Z^{x_1}$ parallèle à la direction de la lumière et perpendiculaire au plan vertical $A'Z'$.

Si l'on fait ensuite tourner ce plan autour de la droite qui contient le centre de la sphère, et qui est parallèle au plan vertical $A'Z'$, le rayon de lumière deviendra $s^{x_1}e'$, que l'on obtiendra en faisant $s's^{x_1}$ de la figure 1 égale à $s-72$ de la figure 4.

Le diamètre 82-82 perpendiculaire sur $s^{x_1}-e'$ sera la projection du cercle de séparation sur le plan $A^{x_1}Z^{x_1}$, et le point 82 ramené sur $s'e'$ sera l'extrémité du petit axe de l'ellipse demandée.

Les deux axes de cette ellipse étant connus, il sera facile de la construire.

Il est évident que la construction précédente revient à la méthode exposée au n° 525 ; la seule différence, c'est que le plan de projection $A^{xI}Z^{xI}$ contient le centre de la sphère, au lieu de passer en dehors comme le plan auxiliaire $A^{vII}Z^{vII}$.

546. Les deux ellipses suivant lesquelles la sphère est coupée par les plans tangents au cône U, suivant les droites $v-9$ et $v-8$, peuvent être déterminées par la méthode exposée aux n°s 534 et 535. Ainsi :

- 1° — Par le sommet u du cône U (*fig. 4*), on concevra un plan P_{14} parallèle au plan vertical de projection $A'Z'$;
- 2° — Le rayon de lumière du point 9 sera coupé par le plan P_{14} suivant un point 84 dont on construira la projection verticale figure 1 ;
- 3° — La droite $u'-84$ de la figure 1 sera parallèle à la trace verticale du plan tangent au cône suivant la ligne de séparation $u-9$;
- 4° — Le plan $A^{xII}Z^{xII}$ perpendiculaire sur $u'-84$ sera perpendiculaire au plan de la courbe cherchée, dont la projection 85-85 sera par conséquent une ligne droite que l'on pourra déterminer en projetant le point u et le point 86 du rayon $u-86$;
- 5° — En opérant comme au n° 532, on obtiendra le centre 56, et les axes de l'ellipse suivant laquelle se projette l'ombre portée sur la sphère par la ligne de séparation $u-9$ du cône U ; les points de tangence seront déterminés par le point 88.

547. Le plan P_{14} coupe le rayon de lumière du point 8 suivant un point 89 dont la projection verticale sera le point 89 de la figure 1.

La droite $u'-89$ de la figure 1 sera parallèle à la trace verticale du plan qui touche le cône U suivant la ligne de séparation $u-8$.

La projection sur le plan $A^{xIII}Z^{xIII}$ rabattu figure 15 sera

par conséquent perpendiculaire au plan du cercle suivant lequel la sphère est coupée par le plan tangent au cône U , suivant la ligne de séparation $u-8$.

La courbe cherchée sera projetée sur la figure 15 par la droite 90-90, d'où il sera facile de déduire le centre 77 et les axes de sa projection sur la figure 1.

548. Les ellipses suivant lesquelles les bases des cônes V et U se projettent sur le plan $A'Z'$ peuvent être obtenues par les méthodes exposées aux n^{os} 531, 535, ou bien en opérant de la manière suivante.

Le plan $A^{xiv}Z^{xiv}$ perpendiculaire au plan vertical $A'Z'$, et contenant l'axe $u'n'$ du cône U , peut être rabattu autour de la droite qui contient le point n et qui est parallèle au plan $A'Z'$.

Par suite de ce mouvement, le point uu' viendra se placer en u^{xiv} que l'on obtiendra en traçant la droite $u'u^{xiv}$ de la figure 1, perpendiculaire sur la projection $u'n'$ de l'axe du cône : et faisant $u'u^{xiv}$ égal à $u-35$, qui sur la figure 4 exprime la différence des distances des points n et u , au plan vertical de projection $A'Z'$.

La droite $n'u^{xiv}$ sera par conséquent l'axe du cône U .

La droite $u^{xiv}-71$, tangente à la projection de la sphère inscrite, sera l'une des limites de la projection du cône sur le plan $A^{xiv}Z^{xiv}$.

La perpendiculaire abaissée du point 71, sur l'axe $n'u^{xiv}$ du cône, déterminera le centre Z , que l'on ramènera en z' sur la projection verticale de l'axe. Enfin, le point 71, ramené sur $n'u'$, sera l'extrémité du petit axe de l'ellipse demandée dont on connaît déjà le centre z' et le demi grand axe $z'-93$ égal à la droite 71- Z .

Pour obtenir les axes de l'ellipse suivant laquelle se projette le cône U , on rabattra le plan $A^{xv}Z^{xv}$, et le point v deviendra v^{xv} , ensuite on tracera la droite $v^{xv}m'$ qui sera l'axe du cône. La tangente $v^{xv}-87$, à la projection de la sphère in-

scrite, déterminera le point 87, par lequel on tracera une perpendiculaire à l'axe $v^xv'm'$ du cône, ce qui donnera le point C.

Puis les points 87 et C étant ramenés sur $v'm'$, on connaîtra le centre c' , le demi petit axe $c'-87$, et le demi grand axe $c'-74$ égal à C-87 de l'ellipse demandée.

549. Les projections sur le plan $A'Z'$ des ombres portées par le cône U sur le cône V pourront être obtenues en élevant une perpendiculaire par chacun des points de la figure 4 jusqu'à la rencontre de la génératrice correspondante projetée sur la figure 1.

On pourra vérifier les points de l'ellipse 65-67-59 en les projetant sur la droite 68-73 (*fig. 7*), et prenant ensuite sur cette nouvelle projection la hauteur de chaque point au-dessus de $A^{ix}Z^{ix}$, on portera cette hauteur au-dessus de $A'Z'$ sur la perpendiculaire élevée par la projection horizontale du point correspondant.

550. **Remarque.** La question que nous venons de résoudre offre un nouvel exemple du parti que l'on peut tirer des projections auxiliaires. Ainsi on a employé :

1 plan horizontal ;

8 plans verticaux ;

7 plans inclinés ;

16 plans de projection.

Il ne faut pas s'effrayer de toutes ces projections auxiliaires, dont chacune se réduit souvent à quelques lignes, que l'on a dû conserver ici pour l'explication de l'épure, mais que, dans la pratique, on efface aussitôt que l'on a obtenu le résultat cherché.

551. **Problème.** (*Fig. 20.*) Un cône circulaire étant déterminé par sa projection sur un plan vertical $A'Z'$ parallèle

à son axe, il faut construire la projection horizontale du cône, et les deux projections d'un cylindre circulaire d'un rayon donné, qui soit tangent au cône et au plan horizontal qui contient le sommet du cône :

- 1° — Le sommet u' étant projeté en u , la droite uz parallèle à $A'Z'$ sera la projection horizontale de l'axe du cône ;
- 2° — La perpendiculaire $z'z$ donnera le centre de l'ellipse suivant laquelle se projette la base ;
- 3° — La perpendiculaire $r'r$ déterminera l'extrémité r du petit axe, et le demi grand axe sera égal à $z'r'$, moitié de $r'r'$;
- 4° — La droite $r'n'$, perpendiculaire sur $u'z'$, déterminera le centre n' de la sphère inscrite ;
- 5° — Enfin, l'horizontale $n'o'$ coupera la droite $r'r'$ en un point o' qui sera la projection commune aux deux points o, o , suivant lesquels l'ellipse touche les deux génératrices uo , limites de la projection horizontale du cône.

Les projections du cylindre demandé resteraient indéterminées, si l'on n'ajoutait pas quelque nouvelle condition à l'énoncé du problème.

En effet, on conçoit qu'un cylindre circulaire d'un rayon donné pourra toujours être placé comme on voudra sur le plan horizontal, qui contient le sommet du cône donné ; or, si l'on fait ensuite rouler le cylindre, il y aura toujours un moment où les deux corps seront tangents l'un à l'autre.

D'après cela, supposons que, pour déterminer la question, on veut que le point de tangence des deux corps soit situé sur la circonférence $g'h'$ du cercle suivant lequel le cône donné serait coupé par un plan P , parallèle à sa base.

On commencera, en opérant comme nous l'avons dit au n° 516, par chercher les deux projections d'une sphère, de même rayon que le cylindre demandé, et qui serait tan-

gente au cône donné suivant un point de la circonférence $g'h'$.

Puis, quand la sphère sera déterminée, il ne restera plus qu'à construire le cylindre horizontal circonscrit.

Pour éviter les répétitions, et pour que l'explication donnée au n° 516 puisse convenir au cas actuel, j'ai employé :

Sur la figure 20, les mêmes lettres que sur les figures 4, 10 et 5. J'ai seulement dû changer l'accentuation, puisque les projections de la figure 20 n'ont aucune relation d'ordre avec celles qui font le sujet de la grande épure. Ainsi les accents ^ et ^ des figures 10 et 5 seront remplacés par les accents $'$ et $''$ de la figure 20.

Lorsque la sphère qui a pour centre le point ee' sera déterminée, on construira le cylindre circulaire circonscrit.

Mais il est évident que la direction de ce cylindre n'est pas arbitraire, et si l'on veut qu'il soit tangent au cône, il faut que les deux surfaces soient touchées par un même plan.

La solution de cette dernière partie du problème se réduira donc aux opérations qui suivent :

- 1° ~~————~~ La génératrice qui contient le point ss' suivant lequel le cône donné est touché par la sphère percera la base $r'r'$ du cône en un point a' qui, rabattu sur le plan horizontal $r'K$, en tournant autour de l'horizontale projetante du point r' , deviendra a'' ;
- 2° ~~————~~ La droite $a''c''$ perpendiculaire à l'extrémité du rayon $z''a''$ sur une tangente, qui, ramenée à sa place, se projettera sur le plan vertical par $a'c'$;
- 3° ~~————~~ Cette tangente percera le plan horizontal de projection en un point c' , rabattu en c'' sur le plan horizontal $r'K$ et ramené de là en c , ce qui déterminera la droite ac , tangente au point a à l'ellipse suivant laquelle se projette la base du cône ;
- 4° ~~————~~ La droite uc sera la trace horizontale du plan tangent au point ss' et parallèle, par conséquent, au cylindre

horizontal demandé, dont il sera facile alors de construire les deux projections.

552. **Ombres.** Les résultats obtenus sur la figure 20 ont été transportés sur la figure 17, et renversés de droite à gauche, afin que les opérations soient plus convenablement placées dans l'espace disponible.

Cela étant fait, les ombres ont été tracées :

- 1° — Sur le cône ;
- 2° — Sur le cylindre ;
- 3° — Sur les plans de projection.

La ligne de séparation sur le cône a été déterminée par la méthode exposée au n° 520.

La ligne de séparation sur le cylindre, par la projection auxiliaire sur le plan $A''Z''$, perpendiculaire au cylindre.

Les ombres portées sur le plan horizontal ont été obtenues par la projection horizontale, par la projection verticale $A'Z'$, et vérifiées par la projection $A''Z''$.

Enfin, cette dernière projection a principalement servi pour déterminer les ombres portées sur le cône et sur le cylindre.

Ces ombres, en partant du point 3, sont composées de la manière suivante :

- 1° — La droite 3-4, formant l'une des lignes de séparation sur le cylindre ;
- 2° — L'arc d'ellipse 4-5-6, provenant de la section du cylindre par le plan qui touche le cône suivant la ligne de séparation $u-1$;
- 3° — La droite 6-7, qui appartient à la seconde ligne de séparation sur le cylindre ;
- 4° — L'arc de cercle 7-8-3, qui appartient à l'une des bases du cylindre et qui sépare cette base de la partie de surface cylindrique qui est plongée dans l'ombre ;
- 5° — La droite 9-10, prolongement de 3-4, appartient à l'une des lignes de séparation sur le cylindre ;

- 6° — La petite courbe 10-11 appartient à l'ellipse 17-11-10-18 provenant de l'intersection du cylindre, par le plan des rayons lumineux qui touchent le cône suivant la droite $u-2$;
- 7° — La courbe 11-12-13-14 est une partie de la ligne à double courbure 19-14-12-11-20-21-22-23, suivant laquelle la surface du cylindre est pénétrée par les rayons lumineux qui s'appuient sur la circonférence de la base du cône ;
- 8° — La droite 14-15, prolongement de 7-6, est une partie de ligne de séparation sur le cylindre ;
- 9° — Enfin, l'arc de cercle 15-16-9 sépare la base obscure du cylindre de la partie de surface qui est éclairée.

FIN.

EXTRAITS DU RECUEIL

DES

EXERCICES ET QUESTIONS DIVERSES.

PERSPECTIVE.

553. **Perspective cavalière.** J'ai donné à la page 336 le moyen d'obtenir la perspective cavalière d'un objet déterminé ; mais je crois utile de compléter ce que j'ai dit alors par quelques considérations supplémentaires qui ont été publiées depuis l'impression de l'édition actuelle.

Lorsqu'un professeur de construction voudra faire comprendre à ses élèves l'ordre suivant lequel les faces d'une pierre doivent être taillées, et par conséquent tracées, il dessinera sur le tableau toutes les formes successives du voussoir. Si, par exemple, nous supposons que l'on veut obtenir l'une des pierres provenant de la rencontre d'un berceau en descente qui pénètre obliquement dans une voûte cylindrique horizontale, on représentera sur la figure 1^{re} le parallépipède rectangle, dont il faut déduire la pierre demandée.

Le triangle *auc*, indiqué par des hachures, est la base du prisme triangulaire qu'il faut abattre pour que les

arêtes ah , ca (*fig. 1 et 2*), soient parallèles aux axes des deux berceaux. L'angle de ces arêtes est donné par l'épure.

Le triangle avh détermine un second prisme triangulaire qu'il faut détruire pour que le plan ahk (*fig. 1 et 2*) soit perpendiculaire à la direction ac du berceau principal A.

La face ahk (*fig. 2 et 3*) coïncidera donc avec le plan de section droite du berceau horizontal A, tandis que le plan bry , perpendiculaire à l'arête cb , sera la section droite du berceau en descente B.

Le quadrilatère $hero$ et le pentagone $zxysh$ (*fig. 2*) déterminent le solide qu'il faut retrancher pour obtenir (*fig. 3*) les deux plans $hexz$ et $ryxe$, qui forment les parements extérieurs des murs ou pieds-droits des deux voûtes.

Les figures A et B sont les sections droites des deux berceaux, et les hachures qui les entourent feront comprendre ce qu'il faut enlever pour former les surfaces de douelles, de joints et d'extrados.

Sur la figure 4, on suppose que l'on a taillé les douelles et les joints supérieurs de la pierre, et la figure 5 représente le voussoir complètement exécuté.

Ainsi, par une suite de perspectives qui, en moyenne, exigent chacune tout au plus deux ou trois minutes, on peut faire en quelque sorte assister l'élève à la transformation complète de la pierre la plus composée.

Mais je répéterai ici ce que j'ai dit au n° 510 ; pour que ce genre de dessin soit réellement utile, il ne faut pas qu'il soit fait avec le compas ; il faut qu'en deux ou trois coups de crayon le dessinateur, debout et sans préparation, puisse exprimer immédiatement sa pensée : s'il lui faut une table, des règles, des équerres, cela ne peut plus servir à rien.

554. Il est vrai que pour arriver là il faut faire un certain nombre d'études géométriques et rigoureuses du principe : et c'est alors *seulement*, que l'emploi du compas est nécessaire.

Supposons que l'on veut construire la perspective d'une croix déterminée sur les figures 7 ou 11 par les projections C et C'.

On choisira comme tableau un plan vertical TT, assez éloigné pour que la perspective de l'objet ne se confonde pas avec la projection verticale C' ; puis, après avoir construit cette projection, on tracera les *lignes fuyantes* suivant la direction qui paraîtra le plus convenable.

Ces lignes étant les perspectives des horizontales projetantes, on portera sur chacune d'elles une quantité égale à peu près au tiers ou à la moitié de sa grandeur véritable, suivant que l'on voudra obtenir une vue plus ou moins raccourcie. Lorsque l'objet sera très-allongé dans le sens perpendiculaire au tableau, il vaudra mieux prendre le tiers.

555. Or, on peut éviter la division au compas des horizontales projetantes en opérant ainsi : sur une droite *au*, parallèle à la direction adoptée pour les lignes fuyantes, on portera le tiers ou la moitié de l'horizontale correspondante *ac* ; on tracera la droite *cu*, et la verticale *ua''* déterminera le point *a''* pour la perspective du point correspondant *aa'*. Il ne restera plus qu'à construire pour chaque point un triangle semblable et parallèle au triangle *auc*.

Ainsi, les points *o''* et *s''* seront les perspectives des points correspondants *oo'* et *ss'*.

556. Dans l'application, on ne trace pas les projections de l'objet ; ainsi, pour obtenir l'une des croix dessinées en perspective sur les figures 7 ou 11, on commencera par faire

un angle très-ouvert YAX. Les côtés de cet angle seront les directions des arêtes horizontales de la croix, l'angle YAX doit avoir au moins 140 degrés ; une ouverture moindre (*fig. 18*) ferait paraître l'objet trop près, ce qui serait contraire aux sensations que l'on éprouve habituellement, et qui proviennent de ce que, pour regarder un corps, on se place toujours à une distance assez grande pour que le phénomène de la vision se produise d'une manière distincte.

Sur les côtés de l'angle YAX, on portera des longueurs à peu près proportionnelles aux parties correspondantes de l'objet, en évaluant par sentiment le plus ou moins de raccourcissement qui doit provenir de la direction des lignes AY et AX ; le reste ne dépendra plus que des hauteurs et du parallélisme des arêtes.

557. Si quelques-unes de ces arêtes sont circulaires comme celles du vase qui est dessiné en perspective (*fig. 17*) et en projections (*fig. 13 et 14*), on construira la perspective du carré circonscrit à chaque cercle, en opérant comme pour la face supérieure du socle rectangulaire S". La perspective de chaque carré sera le parallélogramme conjugué de l'ellipse correspondante, et lorsque ces ellipses seront tracées, on effacera toutes les lignes d'opérations. Avec un peu d'habitude, il sera facile de dessiner la perspective de chaque cercle sans tracer avec le compas la perspective du carré circonscrit.



558. **Perspective isométrique.** La *perspective cavalière* que nous venons d'étudier, ayant seulement pour but de faire comprendre la forme de certains détails d'assemblage,

n'exige pas une exactitude absolue, que d'ailleurs on ne peut obtenir que par la méthode des projections.

La *perspective* ordinaire, qui donne une image fidèle des objets d'une certaine étendue, en altère encore plus les dimensions.

Ce n'est donc pas avec des dessins en perspective que l'on pourra faire exécuter un corps dont les dimensions sont déterminées. La méthode des projections seule conserve la grandeur exacte de toutes les parties ; mais alors on ne reconnaît plus aussi bien la forme de l'objet représenté, et la description n'en peut être complète qu'avec deux projections.

Ces motifs ont engagé plusieurs fois à chercher s'il ne serait pas possible, avec une seule figure, d'exprimer exactement la forme et les dimensions de l'objet que l'on veut décrire.

Pour atteindre ce but, M. le professeur anglais Farish a proposé la méthode suivante, reproduite par M. Tom Richard dans la 2^e édition du Dictionnaire des Arts et Manufactures, et depuis par M. E. Dupré, conducteur des ponts et chaussées, dans le n^o 27 du journal *l'Ingénieur*, année 1854.

559. Soit (*fig.* 15 et 16) un cube qui a pour projection horizontale le carré indiqué par des points sur la figure 15 ; l'une des diagonales de ce carré étant parallèle au plan vertical de projection, qui a pour trace la ligne *kb*, la projection verticale du cube sera le rectangle *o'ku'h* (*fig.* 16).

Si l'on suppose que le solide tourne autour de l'horizontale projetante *oo'*, jusqu'à ce que sa diagonale *o'u'* soit venue se placer dans la position verticale *o'u''*, la nouvelle projection horizontale du cube sera l'hexagone régulier *Ausnce*.

Or, si l'on conçoit que les différents points de l'espace soient rapportés à trois axes rectangulaires qui aboutissent au point A, et qui coïncident avec les trois arêtes AX, AY et AZ du cube, les trois plans coordonnés correspondants ZX, ZY et XY seront les faces de l'angle trièdre qui a son sommet en A.

Mais la projection actuelle du cube étant un hexagone régulier, dont par conséquent le rayon oA est égal au côté Av ou Ae , il est évident qu'une longueur de *un mètre*, par exemple, parallèle à AZ, sera égale en projection à un mètre compté sur une parallèle à AX ou à AY.

D'où il suit que toutes les longueurs *parallèles aux axes* AZ, AY ou AX, qui seront égales dans l'espace, seront aussi égales en projection, et les rapports qui existeront dans l'espace entre deux dimensions parallèles aux axes seront encore égaux aux rapports des projections des mêmes lignes.

D'après cela, si nous concevons (*fig. 8*) que les angles YAZ et ZAX soient égaux chacun à 60 *degrés*, les droites AY, AZ et AX seront les projections horizontales de trois axes rectangulaires, parallèles aux arêtes du cube projeté sur les figures 15 et 16, et tous les points de l'espace pourront alors être déterminés par leurs distances aux plans coordonnés ZY, ZX et YX.

560. Supposons, par exemple, que l'on veut déterminer (*fig. 8*) la position d'un point M situé dans le plan des YX, on fera Am égal à la distance du point dont il s'agit au plan des ZY, et sur mM parallèle à l'axe AY, on fera mM égal à la distance du point M au plan des ZX.

561. Pour déterminer (*fig. 10*) la position d'un point M de l'espace, on fera :

Am égal à la distance du point M au plan des ZX ;

On fera ensuite mm' parallèle à AX , et de plus égal à la distance du point M au plan des ZY ;

Enfin, $m'M$ parallèle à AZ sera la distance du point M au plan des XY .

562. Pour représenter (*fig. 6*) une droite MN de l'espace, on déterminera les positions M et N de deux quelconques de ses points.

La droite $m'n'$ prolongée pourra servir à déterminer les traces v et u de la droite MN .

563. Enfin, la position d'un plan P (*fig. 12*) sera déterminée par deux quelconques de ses trois traces cu , un ou cn .

564. Voilà ce que M. le professeur Farish a nommé la *perspective isométrique*, c'est-à-dire qui conserve l'égalité des dimensions.

Cette méthode serait mieux désignée par le mot de *projection isométrique*, car il ne s'agit évidemment que d'une projection sur un plan perpendiculaire à la diagonale d'un cube, dont les faces remplaceraient les plans de projection que l'on emploie ordinairement dans la géométrie descriptive et dans l'analyse algébrique.

565. Pour donner à la méthode précédente un caractère de généralité, l'auteur a nommé *plans isométriques* les trois faces du cube auxquelles il rapporte les différents points de l'espace. Ainsi le plan des YZ a reçu le nom de plan vertical *isométrique de gauche* ; le plan des ZX se nomme plan vertical *isométrique de droite* ; et le plan des XY sera le plan *isométrique horizontal*, parce qu'il est toujours parallèle aux faces horizontales des objets que l'on veut projeter (*fig. 9*).

Les parallèles à la droite AX seront des lignes isométriques de droite; les parallèles à AY seront les isométriques de gauche, et les parallèles AZ seront des verticales isométriques.

566. Je crois que l'inventeur de la perspective isométrique, si toutefois on peut accorder à cette méthode le nom d'invention, s'est beaucoup abusé sur la portée de sa découverte, et je m'étonne que M. Dupré, conducteur des ponts et chaussées, et par conséquent essentiellement praticien, ait pu être séduit par une apparence de simplification qui n'existe certainement pas.

La méthode dont il s'agit ayant la prétention de remplacer d'un seul coup la perspective et la géométrie descriptive nous allons l'examiner successivement sous chacun de ces deux points de vue.

Nous écarterons d'abord du débat la perspective rigoureuse, avec laquelle le principe que nous discutons n'a rien de commun. Il ne s'agit donc ici que de géométrie descriptive et de perspective cavalière.

567. Mais d'abord, pour que la figure que l'on obtiendra puisse, comme on le prétend, remplacer les deux projections de l'objet, *il faut que le dessin soit exécuté avec le compas, à une échelle déterminée.* Or cette seule condition suffit évidemment pour lui faire perdre toute utilité pratique comme moyen de description expéditive.

568. Ensuite, c'est à tort que l'on prétend, par cette méthode, conserver les rapports des dimensions.

En effet, le triangle OVU (*fig. 14*) étant rectangle en U, on a :

$$\overline{OV}^2 = \overline{OU}^2 + \overline{VU}^2,$$

tandis que l'angle $V'U'O'$ (*fig.* 18) étant égal à 120 degrés, on aura :

$$\overline{O'V'}^2 = \overline{O'U'}^2 + \overline{V'U'}^2 + 2.O'U' \times V'U'. \cos. 120.$$

Or les droites $O'U'$ et $V'U'$ de la figure 18 sont égales aux droites OU et VU de la figure 14, et le cosinus de 120 étant égal à $\frac{1}{2}$, on a

$$\overline{O'V'}^2 - \overline{OV}^2 = 2.OU \times OV \times \frac{1}{2} = OU \times OV,$$

et par conséquent $O'V' > OV$.

On démontrerait de même que $O'm'$ de la figure 18 est plus petit que Om de la figure 14.

Et par conséquent il ne faut pas dire que la méthode conserve les rapports des dimensions, puisque les unes augmentent tandis que les autres sont diminuées, et qu'en outre la droite $m'M$ de la figure 18 reste égale à sa longueur $m'M$ (*fig.* 13).

On voit aussi, par ce qui précède, pourquoi le vase qui est en perspective sur la figure 9 paraît beaucoup plus gros que sa projection (*fig.* 13).

569. Ainsi, la perspective isométrique ne conserve les dimensions que pour les arêtes qui sont parallèles aux droites AX , AY ou AZ ; mais alors il faut que l'objet soit rectangulaire, et qu'en outre les arêtes de cet objet soient parallèles aux axes isométriques AX , AY , AZ .

Or, dans ce cas (*fig.* 15), on obtient une perspective dans laquelle la position trop symétrique des arêtes et des faces détruit complètement l'illusion, et ne permet pas de varier les effets, de faire voir le corps sous l'aspect le

plus avantageux, de faire valoir une face aux dépens d'une autre moins intéressante, et de mettre en évidence des détails qui souvent ne peuvent être bien vus que dans une direction très-différente de la diagonale du cube isométrique.

570. Si, pour éviter ce dernier inconvénient, on place l'objet obliquement dans l'angle formé par les deux plans verticaux isométriques (*fig. 14 et 18*), on altère alors, non-seulement toutes les dimensions rectilignes, mais encore les dimensions angulaires; ce qui ne dispense pas des projections (*fig. 14 et 13*), sans lesquelles on ne peut pas construire la perspective : d'où il résulte que l'objet n'est pas, comme le prétend l'auteur, déterminé par une seule figure, puisque l'on est obligé d'en construire trois.

Si l'objet est un solide de révolution (*fig. 9*), toutes les dimensions sont également altérées, et l'on perd de plus le profil ou section méridienne (*fig. 13*), sans laquelle on ne peut rien exécuter.

Ensuite, toute personne qui a l'habitude de la perspective sait très-bien que lorsqu'il s'agit d'un objet un peu composé, on ne peut obtenir un résultat satisfaisant qu'en supprimant les lignes cachées, parmi lesquelles il y en a souvent qui sont indispensables pour l'exécution de l'objet. Il est donc évident que la perspective isométrique ne peut pas remplacer les projections, sur lesquelles les plus petits détails *vus ou cachés* restent toujours parfaitement déterminés.

571. Si l'on considère la perspective isométrique comme une projection, il est évident que l'on n'aura rien gagné du côté de la simplicité et surtout de l'exactitude.

En effet, le rectangle et le cercle suivant lesquels se pro-

jette un cylindre circulaire, sur les plans parallèles et perpendiculaires à son axe, sont bien certainement plus simples que la *projection unique* du même cylindre sur le plan perpendiculaire à la diagonale du cube isométrique circonscrit, et l'on sait d'ailleurs que le rectangle suffit à l'ouvrier pour exécuter le cylindre.

572. Si, pour n'avoir qu'une seule projection, on inclinait un monument ou une machine, jusqu'à ce que les verticales projetantes fassent avec l'horizon un angle égal à $n'o'h'$ de la figure 16, la *projection unique* que l'on obtiendrait serait infiniment moins simple que les deux projections verticales et horizontales ordinaires.

Si l'on projetait toutes les charpentes d'un comble droit sur un plan incliné, cette *projection unique* pourrait-elle entrer en comparaison avec le plan et la projection verticale de la ferme de long pan, qui suffisent presque toujours pour déterminer les dimensions de toutes les pièces du comble ?

Enfin, si un ouvrier chargé de l'exécution d'un corps quelconque n'avait pour diriger son travail qu'un dessin exécuté en perspective isométrique, je ne crains pas d'affirmer, et tous les praticiens seront de mon avis, que la première chose qu'il aurait à faire serait de redresser l'objet dont il s'agit, et de le remettre en quelque sorte sur ses pieds, puis de dessiner avec soin le plan et l'élévation, sans lesquels il lui serait impossible d'exécuter le travail.

573. Si l'on objectait que l'on veut surtout obtenir une perspective de l'objet, je dirais qu'alors il faut renoncer à l'exactitude des dimensions.

En effet, c'est en altérant les dimensions, et non en les conservant, que l'on peut reproduire la forme apparente des corps. C'est principalement par le contraste qui existe

entre les lignes raccourcies et celles qui ne le sont pas, ou qui le sont moins, que l'on produit ou que l'on augmente l'illusion. Si deux lignes égales dans l'espace sont égales en projections, on sera privé des moyens d'apprécier leur position relative.

574. La perspective et les projections n'ont pas le même but. La perspective exprime la forme apparente, et les projections la forme réelle.

Le but n'étant pas le même, les moyens doivent différer entre eux; prétendre exprimer en même temps la forme réelle et la forme apparente, c'est demander deux choses contradictoires; et si l'on veut réunir sur un même dessin la perspective et les projections, on aura d'un seul coup (*fig. 9*) une mauvaise projection et une mauvaise perspective: cela sera comme ces meubles à tout faire, qui, selon l'inventeur, doivent remplacer à la fois le lit, la commode et le secrétaire, et qui en réalité ne remplacent rien du tout.

575. L'auteur croit simplifier le problème en remplaçant par des lignes inclinées, les horizontales, que l'on obtient si rapidement en faisant glisser un té sur le bord d'une planche à dessin. Pour conserver la grandeur, ou plutôt le rapport de grandeur des droites parallèles aux arêtes du cube isométrique, il sacrifie l'exactitude des faces et des arêtes parallèles aux plans ordinaires de projection. Enfin, parce qu'il ne conserve que le résultat, il croit n'employer qu'un seul plan de projection, tandis qu'il y en a réellement six, savoir: le plan de l'épure, qui est perpendiculaire à la diagonale du cube isométrique; ensuite les trois faces de ce cube, qui sont elles-mêmes des plans de projections; puis enfin les deux projections ordinaires, sans lesquelles on ne peut pas construire la perspective,

lorsque les faces de l'objet ne sont pas parallèles aux plans isométriques.

576. Et puis, comment construira-t-on les *rabattements* des faces planes et les *développements* des surfaces courbes, sans lesquelles on ne peut rien exécuter ?

577. J'espère avoir convaincu que la nouvelle méthode ne peut pas remplacer les projections, mais il est également certain qu'elle ne peut pas remplacer la perspective cavalière ; d'abord, et *surtout*, parce qu'elle doit être exécutée avec le compas (510) ; ensuite parce qu'elle donne une figure trop symétrique lorsque les faces principales sont parallèles aux plans isométriques (*fig.* 15) ; enfin, parce que dans la perspective des objets placés obliquement elle donne presque toujours un mauvais résultat, comme on peut s'en convaincre par l'examen des figures 9 et 18.

578. En effet, pour n'avoir rien à me reprocher, j'ai construit, par cette nouvelle méthode, la perspective du vase qui est projeté (*fig.* 13 et 14).

J'ai obtenu la figure 9, qui paraîtra évidemment vicieuse à quiconque aura le sentiment du dessin.

Ainsi, l'angle YAX n'est pas assez ouvert, les ellipses sont trop arrondies, et leur superposition fait paraître l'objet trop près de l'œil ; tandis que le parallélisme des arêtes du socle produit l'effet d'un objet éloigné, et l'impression désagréable qui résulte de ces deux sensations contradictoires suffit pour détruire ou au moins pour diminuer considérablement l'illusion.

579. La figure 9, vue de face, produit l'effet d'un vase penché en avant, au lieu d'un vase vertical ; et si l'on veut obtenir un peu d'illusion, il faut placer son œil au-dessus

du cadre, à la hauteur du mot perspective et environ à deux centimètres de distance de la feuille de dessin, comme si l'on voulait regarder une de ces images curieuses que l'on nomme *anamorphoses*, et qui déformées avec intention ne produisent d'effet qu'en inclinant le tableau par rapport au rayon visuel.

On obtiendra peut-être un résultat satisfaisant lorsqu'il s'agira d'un objet très-plat, qui serait posé sur une table et que l'on regarderait d'un point de vue très-élevé ; mais lorsque cet objet aura beaucoup de hauteur, il paraîtra toujours penché en avant.

Ainsi, la perspective isométrique ne pourra servir que dans quelques circonstances exceptionnelles ; et, dans tous les cas, les nombreux mouvements de compas nécessaires pour transporter les dimensions, des projections sur la perspective isométrique de l'objet, seront bien certainement moins simples que les opérations par lesquelles, *en faisant glisser une équerre sur une règle*, on peut construire la perspective cavalière (555).

Il est d'ailleurs évident que la méthode proposée *ne dispense pas des projections*, sans lesquelles on ne peut pas obtenir la perspective isométrique.

Enfin, cette méthode, ne pouvant pas être appliquée *sans le secours de la règle et du compas*, ne sera d'aucune utilité pour exprimer rapidement la pensée des professeurs, des ingénieurs et des chefs d'atelier.

580. Je n'aurais pas attaché à la question qui précède une aussi grande importance, si je n'avais cru y reconnaître une suite de cette tendance malheureusement trop répandue dans l'esprit de quelques théoriciens, qui croient préparer aux applications en cherchant à ramener tout à un seul principe. Il y a des professeurs qui hésitent à employer des plans auxiliaires de projection ; ils pensent

simplifier la géométrie descriptive en réduisant tout aux deux projections ordinaires, et voudraient, s'il était possible, n'en employer qu'une seule.

On parviendrait peut-être, en suivant cette voie, à créer une géométrie descriptive de fantaisie qui pourrait donner lieu à des questions amusantes d'école ou d'examen ; mais on aurait alors une science qui ne servirait à rien.

Je l'ai déjà dit bien des fois, c'est en modifiant les méthodes dans chaque cas, suivant les circonstances particulières, que l'on devient habile praticien ; et quelque étrange que cela puisse paraître, je crois devoir le répéter encore : lorsqu'on veut ramener toutes les opérations à une méthode générale et unique, on agit comme un ouvrier qui voudrait exécuter tout avec un seul outil. Peut-être, avec beaucoup de temps et de patience, parviendrait-il à faire un travail remarquable, mais il emploierait dix fois plus de temps et ne ferait pas mieux.

Celui qui veut remplacer les deux plans de projection de la géométrie descriptive par un seul, ressemble à un menuisier qui, ayant une scie et un rabot, trouverait que deux outils sont trop embarrassants, et jetterait la scie, prétendant qu'avec son rabot il pourra très-bien réduire sa planche à la largeur ou à la longueur qui lui conviendra.

581. Non-seulement les deux plans de projection sont plus utiles et infiniment plus commodes qu'un seul, mais celui qui voudrait se borner aux deux projections principales d'un corps un peu composé ne pourrait presque rien faire en applications.

La construction d'un grand monument exige les plans d'ensemble, les plans de tous les étages, des élévations, des profils, des coupes dans tous les sens ; les plans de projection particulièrement utiles aux tailleurs de pierres, aux

charpentiers, aux serruriers; les développements et rabattements de toute espèce qui sont autant de plans de projection différents; et tout cela est infiniment plus simple que *deux* et surtout *qu'une seule projection*.

582. La question la plus composée se réduit presque à rien lorsqu'on sait la décomposer, et c'est ce que l'on fait en géométrie descriptive en employant des projections particulières pour chaque partie de la question principale, de même que dans l'analyse algébrique on emploiera une formule particulière pour chaque cas particulier.

Dans la transformation des coordonnées, par exemple on n'emploie jamais les formules générales qui conduiraient à des calculs trop composés. On préfère décomposer la question. Ainsi, on commencera par transposer l'origine, et l'on changera ensuite la direction des axes; ou bien on commencera par changer la direction des axes, et puis on transposera l'origine; mais on ne fera jamais les deux choses en même temps. Eh bien! de même, dans les applications de la géométrie descriptive, c'est l'introduction continuelle de nouveaux plans de projection qui permet de réduire les questions les plus composées à un certain nombre de questions simples.

583. Enfin, lorsque l'on est embarrassé pour comprendre une épure sur laquelle il y a deux plans de projection, il faut en introduire de nouveaux pour dégager les parties du dessin où les lignes sont trop nombreuses ou trop rapprochées; et si l'on trouve que deux projections sont plus difficiles à comprendre qu'une seule, il faut renoncer à la géométrie descriptive, ou du moins à ses applications.

Mai 1850



TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE I^{er}.

		Pages.	Planches
CHAPITRE 1.	Définitions générales	1	1
	Lumière du soleil	2	1
	Principe des plans coupants.	3	1
	Principe des plans tangents	4	1
	Direction de la lumière	4	1
	Ombre à 45°.	5	1
CHAPITRE 2.	Polyèdre.	7	2
	Ligne de séparation sur les polyèdres.	10	2
CHAPITRE 3.	Ombres brisées.	13	
	<i>Idem</i>	19	4

LIVRE II.

CHAPITRE 1.	Cylindres.	24	5
	<i>Idem</i> (2 ^e étude).	35	6
	Moulures.	60	7
	Engrenages cylindriques.	65	
CHAPITRE 2.	Cônes.	72	9
	Engrenages coniques	78	1
CHAPITRE 3.	Sphère	87	11
	Niche sphérique	91	12
	Cylindres, cônes et sphères.	341	12 bis.

LIVRE III.

CHAPITRE 1.	Surface de révolution.	95	13
	Torre.	95	13
	<i>Idem</i>	101	14
	<i>Idem</i>	110	15
	Cavet.	155	16
	Scotie.	158	17
	<i>Idem</i>	161	18
	Piédouche	74	19
	Vase	180	20
	Chapiteau	182	21

	Pages.	Planches.
Projections obliques	190	22
Chaînes	193	23
<i>Idem</i>	199	24
Tuyaux	229	25
Ellipsoïdes	236	26
<i>Idem</i>	241	27
CHAPITRE 2. Surfaces réglées	257	28
Hyperboloïdes	261	28
Hélicoïdes	267	29
Vis	279	30
<i>Idem</i>	281	31
CHAPITRE 3. Surfaces enveloppes	282	32
CHAPITRE 4. Considérations générales.	291	32

LIVRE IV.

Gnomonique.	296	33
<i>Idem</i>	306	34

LIVRE V.

PERSPECTIVE AÉRIENNE.

CHAPITRE 1. Points brillants.	313	35
<i>Idem</i>	318	36
<i>Idem</i>	320	37
CHAPITRE 2. Teintes	325	38

LIVRE VI.

Perspective cavalière	336	39
<i>Idem</i>	338	40

LIVRE VII.

EXERCICES. — ÉPURES DE CONCOURS.

Concours de 1850 pour l'admission à l'École des beaux-arts	35	6
Concours de 1851	341	12 bis.
Études complémentaires.	371	41

FIN DE LA TABLE.

41092
ca