C-dor Dr. Ing. ION LINTEŞ

Teoria Indicatorilor

Contribuţiuni elementare la „TEORIA NUMERELOR"

TIPOGRAFIA „UNIVERSUL" S. A., STR. BREZOIANU 23—25
1943

INTRODUCERE

Asupra *„Indicatorilor“* s'au publicat puține lucrări, iar capitolele respective din „Teoria Numerilor“ întrebuințează adesea matematici superioare, fapt ce nu-i fac accesibili oricărui amator, sau sunt mai greu de înțeles de începători.

Pentru a înlesni deci celor ce doresc să studieze „Teoria, proprietățile și frumusețea *Indicatorilor*“ am întocmit această modestă lucrare. In acest scop m'am servit de următoarele tratate:

Théorie des nombres par **E. Lucas**, volumul I.

Exercices d'Arithmétique par **J. Fitz Patrick** și **G. Chevrel**

și de numeroasele: articole, note și problemi publicate în *Gazeta Matematică.*

Toate capitolele sunt tratate cu ajutorul matematicelor elementare.

* * *

Lucrarea de față fiind întocmită de un modest cunoscător al științelor matematice, va avea desigur și unele inerente lipsuri sau chiar greșeli, pentru care bucuros aș cere dintru început scuze, dar asemenea formule de politețe ne obișnuindu-se în matematici, rog pe cetitori să arate orice neajuns, care ar micșora sau chiar ar schimba adevărul științific. Mărturisesc cu toată sinceritatea că, urmăresc, de-mi va fi cu putință, să fac și eu un pas cât de mic înainte pentru progresul matematicelor, iar nicidecum, acățându-mă de câteva teorii, să-mi făuresc o glorie personală, pentru care nu sunt cu nimic îndreptățit

Dacă voi reuși, cel puțin în parte, să-mi ating scopul, atunci nimeni nu va fi mai mulțumit ca mine, iar dacă nu voiu reuși, mă voiu resemna la gândul că, pe ruinele încercărei mele se vor găsi destui matematicieni români, cari vor ști să clădească și în acest domeniu o operă de afirmare a geniului românesc.

* * *

In dorința de a desăvârși această lucrare, cel puțin din punct de vedere al tiparului, am rugat pe bunul meu prieten D-l Profesor **Virgil Claudian** să-mi dea o mână de ajutor la revizuirea corecturilor. D-sa mi-a îndeplinit ruga mai mult decât ar fi făcut-o un prieten. Ii mulțumesc deci din tot sufletul.

* * *

Aș dori să mai adog ceva, nu drept o scuză a mea, căci nu mi-aș îngădui aceasta, ci pentru a nu micșora cu nimic stima și dragostea mea ce o am pentru matematici.

Normal ar fi fost să dau cât mai multe aplicațiuni și exemple numerice, în legătură cu părțile teoretice, dar scumpetea hârtiei și a tiparului, precum și moderatele mele posibilități, mă obligă la o cât mai mare economie.

I. LINTEȘ

TEORIA INDICATORILOR

CAPITOLUL I

Numărul numerilor prime cu un număr dat și mai mici decât el. Indicatorul

1. Definiție. *Prin* **indicator** *se înțelege numărul numerilor prime cu un număr dat și mai mici de cât el.*

D-l **I. Ionescu** [1]) dă următoarea definiție:

„Indicatorul unui număr N este numărul numerilor inferioare lui N și coprime cu el".

Denumirea „*indicator*" a fost dată de **Cauchy**, iar notațiunea obișnuită este $\varphi(N)$.

Pentru primele numere avem:

$\varphi(1)=1$; $\varphi(2)=1$; $\varphi(3)=2$; $\varphi(4)=2$; $\varphi(5)=4$; . . .

Și în general, pentru un număr prim p avem:

$$1) \qquad \varphi(p)=p-1$$

Faptul că s'a admis drept indicator al lui *1* pe *1*, s'a născut între unii autori o controversă, care analizată fiind în detaliu de către d-l **I. Ionescu** [1]), ajunge la concluzia că trebuește admis $\varphi(1)=1$, iar nicidecum $\varphi(1)=0$, cum au propus unii autori.

2. Stabilirea formulei. Formula indicatorului se stabilește din „aproape, în aproape" plecând dela cazurile cele mai simple.

1. *Gazeta Matematică, XLII-77.*

Să presupunem mai întâi un număr de forma $N = a^{\alpha}$, unde a este prim. Numărul numerilor *neprime* cu N, adică numerile cari au cel puțin un divizor comun cu N și mai mici decât el súnt:

$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots \left(\frac{N}{a}\right) . a$$

adică sunt în total $\left(\frac{N}{a}\right)$ numere neprime cu N și mai mici decât el.

Atunci numărul numerilor primul cu N și mai mici decât el va fi:

$$\varphi(N) = N - \frac{N}{a} = N . \left(1 - \frac{1}{a}\right) .$$

adică va fi diferența dintre numărul total de numere mai mici decât N și numărul de numere neprime.

Să presupunem acum un număr de forma $N = a^{\alpha} . b^{\beta}$, unde a și b sunt două numere prime.

In acest caz numerile neprime cu N și mai mici decât el sunt:

$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots \left(\frac{N}{a}\right) . a;\ \text{adică} \left(\frac{N}{a}\right) \text{numere;}$$

$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots \left(\frac{N}{b}\right) . b;\ \text{adică} \left(\frac{N}{b}\right) \text{numere.}$$

Dar în ambele șiruri de numere avem numere identice cu:

$$ab,\ 2ab,\ 3ab, \ldots \left(\frac{N}{ab}\right) . ab;\ \text{adică} \left(\frac{N}{ab}\right) \text{numere.}$$

Deci, aceste numere găsindu-se în acelaș timp în cele două șiruri de mai sus, va trebui să eliminăm o serie, adică să le scădem odată din cele două șiruri date.

Cu aceasta, numărul numerilor prime cu N și mai mici decât el va fi:

$$\varphi(N) = N - \left[\frac{N}{a} + \frac{N}{b} - \frac{N}{ab}\right] = N . \left(1 - \frac{1}{a}\right) . \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

Să presupunem acum un număr de forma $N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma}$, unde a, b, c sunt numere prime. In acest caz numerile neprime cu N și mai mici decât el sunt:

$$a, 2a, 3a, \ldots \left(\frac{N}{a}\right) \cdot a; \text{ adică } \left(\frac{N}{a}\right) \text{ numere};$$

$$b, 2b, 3b, \ldots \left(\frac{N}{b}\right) \cdot b; \text{ adică } \left(\frac{N}{b}\right) \text{ numere};$$

$$c, 3c, 3c, \ldots \left(\frac{N}{c}\right) \cdot c; \text{ adică } \left(\frac{N}{c}\right) \text{ numere}.$$

Dar luând aceste trei șiruri de numere două câte două, vom găsi că ele conțin numere identice cu:

$$ab, 2ab, 3ab, \ldots \left(\frac{N}{ab}\right) \cdot ab; \text{ adică } \left(\frac{N}{ab}\right) \text{ numere};$$

$$ac, 2ac, 3ac, \ldots \left(\frac{N}{ac}\right) \cdot ac; \text{ adică } \left(\frac{N}{ac}\right) \text{ numere};$$

$$bc, 2bc, 3bc, \ldots \left(\frac{N}{bc}\right) \cdot bc; \text{ adică } \left(\frac{N}{bc}\right) \text{ numere}.$$

In consecință, aceste numere găsindu-se de două ori, trebue să eliminăm o serie, adică să le scădem odată din cele de mai sus.

Dar atât în primele trei șiruri de numere, cât și în aceste trei ultime șiruri, se găsesc și numerile:

$$abc, 2abc, 3abc, \ldots \left(\frac{N}{abc}\right) \cdot abc; \text{ adică } \left(\frac{N}{abc}\right) \text{ numere};$$

prin urmare, scăzând ultimele trei șiruri din primele trei șiruri, vom elimina complect acest șir din urmă, ceace nu se poate, deci vom adăoga atunci aceste numere, după scăderile de mai sus. Cu alte cuvinte numerile totale neprime vor fi:

$$\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}-\frac{N}{ab}-\frac{N}{ac}-\frac{N}{bc}+\frac{N}{abc}$$

Și atunci numărul numerilor prime cu N și mai mici decât el, va fi:

$$\varphi\,(N)=N-\left[\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}-\frac{N}{ab}-\frac{N}{ac}-\frac{N}{bc}+\frac{N}{abc}\right]$$

$$=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

Raționând în mod analog și din aproape în aproape, găsim pentru un număr de forma: $\mathbf{N}=a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\,...\,l^{\lambda}$ expresia:

$$2)\qquad \varphi\,(N)=N-\Sigma\,\frac{N}{a}+\Sigma\,\frac{N}{ab}-\Sigma\,\frac{N}{abc}+...$$

$$=N.\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{c}\right)...\left(1-\frac{1}{l}\right)$$

$$=N.\,\frac{(a-1).(b-1).(c-1)...\,(l-1)}{a.\ b.\ c....\ l}$$

$$=a^{\alpha-1}.\ b^{\beta-1}.\ c^{\gamma-1}...\ l^{\lambda-1}.\ (a-1).(b-1)\,(c-1)...\,(l-1)$$

$$=N.\ \frac{\Pi\,(a-1)}{\Pi\ a}$$

unde simbolul Σ reprezintă o însumare a tuturor termenilor rezultați din numărul factorilor primi ai lui N, iar simbolul Π reprezintă produsul tuturor factorilor respectivi.

Euler [1]) a fost primul care a găsit o expresie generală a lui $\varphi(N)$.

Observație. Expresia lui $\varphi(N)$ fiind dedusă prin inducție, este cazul să arătăm că, în adevăr ea este generală. In consecință, dacă presupunem că q este un număr prim cu N, atunci numărul numerilor prime cu N și mai mici decât N, este $q\,\varphi\,(N)$, deoarece împărțind toate aceste numere prin N, se vor reproduce de q ori acest șir de numere. Imulțind deci ambii membri ai formulei generale din 2) prima expresiune, atunci găsim:

$$3) \quad q.\,\varphi(N) = q.\,N - \Sigma\,\frac{q.N}{a} + \Sigma\,\frac{q.N}{ab} - \Sigma\,\frac{q.N}{abc} + \ldots$$

Dar membrul al doilea nu este altceva decât numărul numerilor prime cu N din șirul cu numere consecutive până la $q.N$, adică tocmai ceace ne propusesem.

3. Tabloul indicatorilor [2]). Având nevoe, în numeroasele calcule ce urmează, de valorile numerice ale multor indicatori, vom da tabloul de mai jos:

---

1). **L. Euler,** Novi Comm. Acad. Petrop. 8 (1760-1?) ed. 1763, p. 24 (1759); Commentat. Arith. 1 St. Pétersburg 1849, p. 274.

2). *Thèorie des Nombres* par **E. Lucas,** pag. 305.

Tabloul numerilor care corespund unui indicator dat, până la 100.

$\varphi(N)$	N	Nr. Numerilor
1	1, 2	2
2	3, 4, 6	3
4	5, 8, 10, 12	4
6	7, 9, 14, 18	4
8	15, 16, 20, 24, 30	5
10	11, 22	2
12	13, 21, 26, 28, 36, 42	6
16	17, 32, 34, 40, 48, 60	6
18	19, 27, 38, 54	4
20	25, 33, 44, 50, 66	5
22	33, 46	2
24	35, 39, 45, 52, 56, 70, 72, 78, 84, 90	10
28	29, 58	2
30	31, 62	2
32	51, 64, 68, 80, 96, 102, 120	7
36	37, 57, 63, 74, 76, 103, 114, 126	8
40	41, 55, 75, 82, 88, 100, 110, 132, 150	9
42	43, 49, 86, 98	4
44	69, 92, 138	3
46	47, 94	2
48	65, 104, 105, 112, 130, 140, 144, 156, 163, 180, 210	11
52	53, 106	2
54	81, 162	2
56	87, 116, 174	3
58	59, 118	2
60	61, 77, 93, 99, 122, 124, 154, 186, 198	9
64	85, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240	8
66	67, 134	2
70	71, 142	2
72	73, 91, 95, 111, 117, 135, 146, 148, 152, 182, 190, 216, 222, 228, 234, 252, 270	17
78	79, 158	2
80	123, 164, 165, 176, 200, 220, 246, 264, 300, 330	10
82	83, 166	2
84	129, 147, 172, 196, 258, 294	6
88	89, 115, 178, 184, 230, 276	6
92	141, 188, 282	3
96	97, 119, 153, 194, 195, 208, 224, 238, 260, 280, 288, 306, 312, 336, 360, 390, 420	17
100	101, 125, 202, 250	4

Rezultă din tabloul de mai sus, că numerile: *14, 26, 34, 38, 50, 62, 68, 74, 76, 86, 90, 94* și *98* nu pot reprezenta indicatori.

Proprietăţi şi consecinţe

4. *Indicatorul unui număr mai mare decât* 2 *este totdeauna un număr par.*

Am văzut mai sus că expresia generală a indicatorului poate fi pusă sub forma:

$\varphi(N) = a^{\alpha-1} . b^{\beta-1} . c^{\gamma-1} . . . (a-1)(b-1)(c-1). .$

Or, pentru $N > 2$ produsul parantezelor este totdeauna par, deoarece numerile $a, b, c, . . .$ sunt prime deci, în afară de cazul când s'ar putea întâmpla să avem $a = 2$, toate celelalte sunt impare.

5. *Pot exista o infinitate de numere pare, cari să nu reprezinte indicatori.*

Să presupunem că avem un număr de forma:

$$N = 2^{\varepsilon} . (2^{a} . A + 1)^{\alpha} . (2^{b} . B + 1)^{\beta} . . .$$

unde parantezele reprezintă numere prime absolut. Atunci indicatorul lui este:

$$\varphi(N) = 2^{\varepsilon-1+a+b+} . . . A . B . . . (2^{a} . A + 1)^{\alpha-1} . (2^{b} . B + 1)^{\beta-1} . . .$$

Or, dacă am avea un număr de forme:

$$M = 2^{\eta} . (2^{a} . A + 1)^{y} . (2^{b} . C + 1)^{z} . . . .$$

unde avem $P = A . B . . . .$ și unde, dacă $(M + 1)$ nu este prim absolut și:

— dacă $\varepsilon > 1$, avem: $\eta < \varepsilon - 1 + a + b + . . .$

— dacă $\varepsilon = 0$, avem: $\eta < a + b + . . .$

atunci M nu poate reprezenta indicator.

Se mai poate întâmpla ca să avem: $\eta \leq \varepsilon - 1 + a + b + . . .$ în primul caz, sau $\eta \leq a + b + . . .$ în al doilea caz, totuși, numărul M să nu poată reprezenta indicatori, dacă în produsul P ar lipsi unul sau mai mulți dintre factorii: $A, B, \ldots$ sau ar fi înlocuiți cu alți factori diferiți. De exemplu numărul $76 = 2^2 . (2 . 9 + 1) = 2^2 . 19$ nu poate reprezenta indicator deoarece îi lipsește factorul $A = 9$.

Astfel de numere pot fi găsite oricâte.

6. *Un indicator corespunde la cel puțin două numere.*

Am văzut (4) că pentru $N > 2$, indicatorul lui este totdeauna un număr par, indicator care va corespunde și unui număr par și unui număr impar. In cazul că N este impar, atunci se vede lesne că avem: $\varphi(2N) = \varphi(N)$, deci lui N (impar) și lui $(2N)$ îi va corespunde acelaș indicator.

O demonstrație riguroasă a acestei consecințe nu se poate da, cu toate că este de multă vreme cunoscută sub forma:

„*Pentru un număr dat* n, *ecuația* $\varphi(x) = n$ *sau nu are soluție, sau are cel puțin două*".

Aceasta a fost verificată, până la numere de 38 de cifre de către **Carmichael**.

7. *Să se arate că pentru* $N > 1$ *avem întotdeauna* $\varphi(N) \leqq N - 1$.

Fie: $a < b < c < \ldots < l$ factorii primi ai numărului N, atunci avem:

$$\frac{a}{a-1} > \frac{b}{b-1} > \frac{c}{c-1} > \ldots > \frac{l}{l-1}$$

Dacă admitem că $N = \varepsilon . \varphi(N)$, atunci vom avea întotdeauna:

$$\varepsilon \geqq \frac{l}{l-1} > \frac{\Pi a}{\Pi(a-1)}$$

Inlocuind însă pe $\varphi(N)$ prin $\frac{N}{\varepsilon}$, vedem că trebue să avem:

$$\varepsilon \geqq \frac{N}{N-1}$$

Cum însă minimum lui ε este $\frac{\Pi a}{\Pi(a-1)}$, urmează că va trebui să avem:

$$\frac{N}{N-1} \leq \frac{\Pi a}{\Pi(a-1)}$$

ceace este normal din moment ce avem: $N \geq \Pi a$.

Egalitatea nu poate avea loc decât dacă N are un singur factcr prim ridicat la puterea întâia, adică $N = p$, unde p este un număr prim.

Nota I: Consecința de mai sus mai poate fi restrânsă la condiția:

$$4) \qquad \varphi(N) \leq N - \nu(N) + 1$$

unde $\nu(N)$ este numărul divizorilor lui N. Această condiție se demonstrează lesne ținând seamă că, în șirul de numere consecutive dela *1* la N sunt cuprinse toate numerile prime cu N și mai mici decât el și toți divizorii lui N, însă mai sunt cuprinse și numerile *neprime*.

Cum numărul numerilor neprime este nul în cazul unui număr prim, înseamnă că egalitate nu putem avea decât pentru $N = p$, p fiind prim.

Nota II. Dacă N este un număr par, atunci avem: $\varphi(N) < \frac{N}{2}$. Fie $N = 2^k . M$, unde M este un număr impar, atunci:

$$\varphi(N) = 2^{k-1} . \varphi(M).$$

Maximum lu $\varphi(M)$ este atunci când M este un număr prim și are valoarea $(M-1)$, ori constatăm că, dacă $M > 2$, atunci:

$$\Big[\varphi(N)\Big]_{max.} = 2^{k-1} . (M-1) < 2^{k-1} . M = \frac{N}{2}$$

Adică maximum lui N este mai mic decât $\left(\frac{N}{2}\right)$.

Nota III. Dacă scrim:

$$\varphi(N) = N. \frac{a_1-1}{a_1} . \frac{a_2-1}{a_2} ... \frac{a_n-1}{a_n}$$

și dacă ținem seamă că:

$$\frac{a_1-1}{a_1} \geqq \frac{2-1}{2} \quad \text{pentru } a_1 \geqq 2$$

$$\frac{a_2-1}{a_2} \geqq \frac{3-1}{3}$$

. . . .

$$\frac{a_n-1}{a_n} \geqq \frac{n+1-1}{n+1}$$

Observăm că, prin îmulțire, avem:

$$\varphi(N) > \frac{n+1}{N}$$

n fiind numărul factorilor primi ai lui *N*.

Putem dar afirma că:

$$5) \quad \frac{N}{n+1} < \varphi(N) \leqq N - \nu(N) + 1$$

8. *Să se arate că dacă* (N—1) *se împarte exact cu* φ(N), *atunci* N *este prim*.

Fie $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma ...$, atunci ar trebui să avem:

$$(a^\alpha . b^\beta . c^\gamma ... - 1) = \mathcal{M}[a^{\alpha-1}. b^{\beta-1}. c^{\gamma-1}.... (a-1).(b-1).(c-1)...]$$

Dar *a*, *b*, *c*, ... fiind numere prime nu vor împărți exact diferența din primul membru.

In consecință va trebui neapărat să avem:

$\alpha = \beta = \gamma = ... = 1$, și cu aceasta ne rămâne:

$$(a.b.c. ... - 1) = \mathcal{M}[(a-1).(b-1).(c-1)...]$$

Făcând: $N = a$ constatăm imediat că egalitatea subzistă.

Făcând: $N = a. b$, dăm peste o egalitate de formă:

$$(a. b - 1) = k. (a - 1) . (b - 1)$$

De aci se deduce că trebue să avem:

$$b = 1 + \frac{a - 1}{k.(a-1) - a} = 1 + \frac{1}{k - \frac{a-1}{a}}$$

Or, aceasta nu este posibil decât dacă $a = 2$ și $k = 2$, ceace ne dă $b = 2$, ceace nu se poate.

Fie $N = a. b. c.$, dăm peste o egalitate de forma:

$$(a. b. c. - 1) = k. (a - 1) . (b - 1) . (c - 1)$$

care se mai poate scrie:

$$b\ c = \frac{b + c - 1 - \frac{1}{k(a-1}}{1 - \frac{a}{k(a-1}}$$

Dar, a, b, c fiind întregi pozitivi, egalitatea nu poate avea loc.

Fie $N = a.\ b.\ c.\ d$, atunci avem:

$$(a.\ b.\ c.\ d - 1) = k.\ (a - 1).(b - 1).(c -).(d - 1)$$

care ne aduce la egalitatea:

$$b\,c\,d = \frac{bc + bd + cd - b - c - d - 1 - \frac{1}{k(a-1)}}{1 - \frac{a}{k.(a-1)}}$$

care nu este posibilă.

Raționând în mod analog și mai departe, constatăm că, în adevăr $(N - 1)$ nu se poate împărți exact cu $\varphi(N)$ decât dacă N este un număr prim.

9. *Să se arate că indicatorii a două numere sunt proporționale cu numerele respective, dacă sunt compuse din aceiași factori primi* [1])

$$\text{Fie } A = a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} ... a_m^{\alpha_m} \text{ și } B = b_1^{\beta_1} . b_2^{\beta_2} ... b_n^{\beta_n}$$

---

1) a *Exercices d'Arithmétique* par **Fitz-Patrick** et **G. Chevrel** pag. 392 și *Gazeta Matematică* XXXV pag. 190 (problema D-lui **I. Ionescu**).

două numere date, atunci:

$$\varphi(A) = A \cdot \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} \text{ și } \varphi(B) = B \cdot \frac{\Pi(b-1)}{\Pi b}$$

Deci, pentru ca să avem:

$$\frac{\varphi(A)}{A} = \frac{\varphi(B)}{B},$$

va trebui să avem:

$$\frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} = \frac{\Pi(b-1)}{\Pi b}$$

sau:

$$(a_1-1).(a_2-1)\dots(a_m-1).b_1.b_2\dots b_n = (b_1-1)(b_2-1)\dots(b_n-1)\,a_1.a_2\dots a_m$$

Să presupunem că avem: $a_1 < a_2 < \dots < a_m$; $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ și $b_n > a_m$, atunci toți factorii din membrul al doilea ai egalității sunt mai mici ca b_n și cum acesta este prim, egalitatea nu este posibilă. Trebue deci neapărat să avem $a_m = b_n$. Dar în acest caz, simplificându-se a_m cu b_n din egalitate, ne rămân drept cei mai mari factori b_{n-1} și a_{m-1}, unde deasemenea putem lua: $b_{n-1} > a_{m-1}$. Ajungem deci la concluzia că $a_{m-1} = b_{n-1}$.

Procedând mai departe la fel, conchidem că A și B trebue să aibă aceiași factori primi.

10. Exerciții

I. *Cari sunt numerile cari au drept indicator pe* 100 ?

Fie $\varphi(N) = 100 = 2^2 . 5^2$, atunci numerile N vor fi de forma:

$$N = 2^{\varepsilon} . (2^a . A + 1)^{\alpha} . (2^b . B + 1)^{\beta} \dots$$

unde numerile $A, B, \dots$ sunt impare, iar parantezele numere prime.

Prin urmare:

$$\varphi(N) = 2^{\varepsilon - 1 + a + b + \dots} . A . B \dots (2^a A + 1)^{\alpha - 1} . (2^b . B + 1)^{\beta - 1} \dots$$

Va trebui deci să avem:

$$2^{\varepsilon - 1 + a + b + \dots} = 2^2 \text{ și } A . B \dots (2^a . A + 1)^{\alpha - 1} . (2^b . B + 1)^{\beta - 1} \dots = 5^2$$

Rezultă dar că nu putem avea decât un singur factor prim diferit de *2* și atunci:

$$N = 2^\varepsilon . (2^a . A + 1)^\alpha$$

Dacă $\varepsilon \geq 1$, atunci:

$$N = 2 . 5^3 \text{ și } 2 . (2^2 . 5^2 + 1)$$

Dacă $\varepsilon = 0$, atunci:

$$N = 5^3 \text{ și } (2^2 . 5^2 + 1)$$

Prin urmare numerile: 101, 125, 202 și 250 vor avea pe *100* drept indicator.

II. *Două numere consecutive pot avea acelaș indicator?*

Fie N și $(N + 1)$ două numere consecutive cari au acelaș ndicator. Aceste două numere sunt prime între ele, deci nu au nici un divizor comun, iar unul dintre ele este neapărat par.

Fie: $a_1, a_2, \dots$ factori primi ai lui N și $b_1, b_2, \dots$ factori primi ai lui $(N + 1)$, atunci, având acelaș indicator, urmează că:

$$N . \frac{\Pi a}{\Pi(a - 1)} = (N + 1) . \frac{\Pi b}{\Pi(b - 1)}$$

Prin urmare soluțiile nu vor fi decât de forma:

$$N = \Pi b . \Pi(a - 1) \quad \text{și} \quad N + 1 = \Pi a . \Pi(b - 1)$$

In asemenea condițiuni putem scrie expresiunile:

N	$\Pi(2^{\alpha_i} + 1)$	$P . 2^{\alpha + 1}$
$N + 1$	$2^{1 + \Sigma\alpha_i} . \Pi(2^{\alpha_k} + 1)$	$Q . (2^\alpha . A + 1)$
Având condițiile	$\Sigma_{\alpha_i} = \Sigma_{\alpha_j} + \Sigma_{\alpha_k}$	$\varphi(P) = A . \varphi(Q)$

$P . \Pi(2^{\alpha_i} . A_i + 1)$	$2^\varepsilon . \Pi(2^{\alpha_i} . A_i + 1)$
$Q . 2^{1 + \Sigma\alpha_i} . \Pi(2^{\alpha_k} . B_k + 1)$	$Q . \Pi(2^{\beta_i} . B_j + 1)$
$\Sigma_{\alpha_i} = \Sigma_{\alpha_j} + \Sigma_{\alpha_k}$ $\Pi A_i \, \varphi(P) = \Pi B_k \, \varphi(Q)$	$\varepsilon - 1 + \Sigma_{\alpha_i} = \Sigma_{\beta_j}$ $\Pi A_i = \Pi B_j . \varphi(P)$

unde parantezele înseamnă numere prime, iar A, B, P, Q numere impare, iar P și Q prime cu ceilalți factori.

Prima coloană ne poate furniza perechile de numere: *(1, 2), (3, 4), (15, 16), (255, 252), . . .*

A doua coloană, pentru $P = 13$, $Q = 21$, $A = 1$ și $\alpha = 2$ ne dă perechea $(104, 105)$.

Ultima coloană, pentru $\varepsilon = 1$, $\alpha_1 = 5$, $A_1 = 3$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = 2$, $B_1 = B_2 = 1$, $B_3 = 3$ și $Q = 1$ ne dă perechea $(194, 195)$.

Prin urmare pot exista o infinitate de perechi de numere consecutive cari corespund aceluiaș indicator.

III. *Trei numere consecutive pot avea acelaș indicator?*

Fie N, $(N+1)$ și $(N+2)$ cele trei numere consecutive și $(a_1, a_2, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots)$ și $(c_1, c_2, \ldots)$ factorii lor primi, atunci va trebui să avem:

$$\varphi(N) = \varphi(N+1) = \varphi(N+2)$$

adică:

$$N \cdot \frac{\Pi a}{\Pi(a-1)} = (N+1) \cdot \frac{\Pi b}{\Pi(b-1)} = (N+2) \cdot \frac{\Pi c}{\Pi(c-1)}$$

Soluțiunile posibile vor fi deci de formele:

$$N = \Pi b \,.\, \Pi(a-1) = \Pi c \,.\, \Pi(a-1)$$
$$N+1 = \Pi a \,.\, \Pi(b-1) = \Pi c \,.\, \Pi(b-1)$$
$$N+2 = \Pi a \,.\, \Pi(c-1) = \Pi b \,.\, \Pi(c-1)$$

In consecință putem avea expresiuni generatoare de soluțiuni de genul:

$$N = P \,.\, 2^{1+\Sigma\alpha_i} \,.\, \Pi(2^{\beta_j} \,.\, B_j + 1)$$
$$N+1 = Q \,.\, \Pi(2^{\gamma_k} \,.\, C_k + 1)$$
$$N+2 = R \,.\, 2^{1+\Sigma\delta_l} \,.\, \Pi(2^{\eta_m} \,.\, E_m + 1)$$

cu condițiunile ca toate parantezele să reprezinte numere prime, numerile P, Q, R, B_j, C_k, E_m sunt impare, iar primele trei prime cu ceilalți factori și având:

$$\Sigma\alpha_i + \Sigma\beta_j \,. = \Sigma\gamma_k = \Sigma\delta_l + \Sigma\eta_m$$
$$\Pi B_j \,.\, \varphi(P) = \Pi C_k \,.\, \varphi(Q) = \Pi E_m \,.\, \varphi(R)$$

Deasemenea, mai putem avea expresiuni de genul:

$$N = P \,.\, \Pi(2^{\alpha_i} \,.\, A_i \,. + 1)$$
$$N+1 = Q \,.\, 2^{1+\Sigma\beta_j} \,.\, \Pi(2^{\gamma_k} \,.\, C_k + 1)$$
$$N+2 = R \,.\, \Pi(2^{\delta_l} \,.\, D_l + 1)$$

cu aceleași condițiuni de mai sus și:

$$\Sigma\alpha_i = \Sigma\beta_j + \Sigma\gamma_k = \Sigma\delta_l$$
$$\Pi A_i \,.\, \varphi(P) = C_k \,.\, \varphi(Q) = \Pi D_l \,.\, \varphi(R)$$

IV. *Există perechi de numere consecutive pare sau impare, cari să corespundă aceluiaş indicator?*

Această problemă se reduce în a lua soluţiunile extreme date mai sus (Exerciţiul III), pentru numerile N şi $N + 2$. Se pot găsi astfel perechile: *(4, 6), (7, 9), (8, 10), (10, 12), (26, 28), 32, 34), (70, 72), (74, 76), (122, 124), (146, 148), . . .* Se constată chiar că putem avea şi trei numere: *(8, 10, 12)*, cari au acelaş indicator.

V. *Cărui indicator de două cifre îi corespund 17 numere?*

a) Indicatorul fiind de două cifre, se va găsi între numerile dela *10* la *99*.

b) Indicatorul numerilor mai mari ca *2* fiind totdeauna pare (*4*), numerile impare vor fi eliminate.

c) Conform proprietăţei (*5*) indicatorul nu poate avea forma:

$$2^{x} . P . (2^{\alpha} . A + 1)^{y} . (2^{\beta} . B + 1)^{z} \ . \ . \ .$$

dacă $x < \varepsilon - 1 + \alpha + \beta + . .$ în cazul că numărul are factor pe 2^{ε} sau, dacă: $x < \alpha + \beta + . . .$ în cazul $\varepsilon = 0$, iar P este produsul numerilor $A . B . . .$

Vom elimina prin urmare numerile:

$$2 . (2 . 3 + 1) = 14 \qquad 2 . (2^4 + 1) = 34$$
$$2 . (2 . 9 + 1) = 38$$
$$2 . (2 . 15 + 1) = 62 \qquad 2 . (2^2 + 1)^2 = 50$$
$$2 . (2 . 21 + 1) = 86 \qquad 2 . (2 . 3 + 1)^2 = 58$$
$$2 . (2 . 23 + 1) = 94$$

$$2 . (2^2 . 3 + 1) = 26 \qquad 2 . (2 + 1)^2 . (2^2 + 1) = 90$$
$$2 . (2^2 . 9 + 1) = 54$$
$$2 . (2^2 . 11 + 1) = 90 \qquad 2^2 . (2 . 9 + 1) = 76$$

d) In baza celor arătate mai sus, indicatorul căutat se va găsi numai printre numerile.

12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 80, 84, 88, 92 şi 96.

e) Unui indicator de forma $2^{\alpha} . n$ unde n este impar, îi corespund numerile:

$$2^{\alpha} + 1 \qquad \text{pentru } n = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} (2^{\alpha} + 1)^{\beta} \\ 2(2^{\alpha} + 1)^{\beta} \end{array} \right\} \text{ pentru } (2^{\alpha} + 1) \text{ prim şi } n = (2^{\alpha} + 1)^{\beta - 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{\alpha-1}\,.\,(2n+1) \\ 2^{\alpha-1}\,.\,3\,.\,(2n+1) \end{array}\right\} \quad \text{pentru } (2n+1) \text{ prim}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2^{\alpha}\,.\,n+1) \\ 2(2^{\alpha}\,.\,n+1) \end{array}\right\} \quad \text{pentru } (2^{\alpha}\,.\,n+1) \text{ prim}$$

$$2^{\alpha-1}\,.\,3^{\beta}+1 \qquad \text{pentru } n=3^{\beta}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2^{x}\,.\,a+1)\,(2^{y}\,.\,b+1) \\ 2(2^{x}\,.\,a+1)\,(2^{y}\,.\,b+1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{pentru paranteze prime,} \\ x+y=\alpha \text{ și } a\,.\,b=n. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2^{x}\,.\,a+1)\,(2^{y}\,.\,b+1)\,(2^{z}\,.\,c+1) \\ 2(2^{x}\,.\,a+1)\,(2^{y}\,.\,b+1)\,(2^{z}\,.\,c+1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{pentru paranteze} \\ \text{prime, } x+y+z=\alpha \\ \text{și } a\,.\,b\,.\,c=n. \end{array}$$

Şi astfel se poate continua oricât, însă, în cazul nostru, avem $\alpha \leqq 6$, deci vom examina numai aceste cazuri.

Pentru $\alpha = 2$ corespund cel mult zece numere;

Pentru $\alpha = 3$ corespund cel mult nouă numere;

Pentru $\alpha = 4$ corespund cel mult patrusprezece numere;

Pentru $\alpha = 5$ și $\alpha = 6$ corespund cel mult câte patru numere.

f) Eliminând deci toate numerile de această formă, ne mai rămân numai: 72 și 96.

g) Procedând acum, cu aceste două numere ca la *Exercițiul I (10)*, constatăm că numai lor le corespund câte 17 numere, așa cum se vede în tabloul indicatorilor *(3)*.

VI. *In ce caz putem avea:* $\varphi(N+1) < \varphi(N)$?

Fie a_i factorii lui N și b_i factorii lui $(N+1)$. Numerile N și $(N+1)$ fiind prime între ele, au factorii primi diferiți.

Ținând seamă că:

$$\varphi(N) = N\,.\,\frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} \quad \text{și} \quad \varphi(N+1) = (N+1)\,\frac{\Pi(b-1)}{\Pi b}$$

neegalitatea devine:

$$N\,.\left[\frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} - \frac{\Pi(b-1)}{\Pi b}\right] > \frac{\Pi(b-2)}{\Pi b}$$

De unde rezulta că trebue să avem neapărat:

$$\frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} > \frac{\Pi(b-1)}{\Pi b}$$

Dar pentru a găsi diferite clase de soluțiuni, vom proceda prin încercări.

a) Fie $N = a^{\alpha}$ și $N + 1 = b^{\beta}$, atunci neegalitatea are loc pentru $a > b$. Dar nu vom avea două numere prime absolut consecutive decât: (*1*, *2*) și (*2*, *3*), cari nu dau soluții.

b) Fie $N = a^{\alpha}$ și $N + 1 = b_1^{\beta_1} . b_1^{\beta_2}$ atunci trebue să avem:

$$a . (b_1 + b_2 = 1) > b_1 . b_2$$

Dar se observă lesne că trebue să avem: $a > b_1$ și $a > b_2$, deci:

$$b_1 + b_2 - 1 > b_1 \text{ sau } b_2$$

In acest caz vom avea soluțiile: $N = p$ și $N + 1 = p + 1$ unde p este un număr prim mai mare ca 2.

Verificarea este ușoară, căci avem:

$$\varphi(N) = p - 1 \quad \text{și} \quad \varphi(N + 1) \leqq \frac{p + 1}{2}$$

așa cum se arată în 7 (nota II).

c) Prin analogie cu soluțiile de mai sus, vom lua: $N = p . q$ și $N + 1 = p . q + 1$ unde p și q sunt numere prime. In acest caz vom avea:

$$(p - 1) . (q - 1) > \varphi(p . q + 1)$$

Am văzut însă (7, nota II) că:

$$\varphi(p . q + 1) \leqq \frac{p . q + 1}{2}$$

Deci, în cel mai defavorabil caz, va trebui să avem:

$$(p - 1) . (q - 1) > \frac{p . q + 1}{2}$$

Neegalitatea se reduce însă la:

$$p . q + 1 > 2 . (p + q)$$

Pentru a dovedi existența acestei neegalități când $q > p > 3$, vom face înlocuirile:

$$p = 3 + x \quad \text{și} \quad q = 3 + x + y$$

unde x și y sunt mai mari ca 1.

După înlocuire, obținem:

$$2x + y + x . (x + y) > 2$$

Or, pentru $x = y = 1$, adică cel mai defavorabil caz, negalitatea este satisfăcută.

In felul acesta se pot găsi oricâte clase de soluțiuni.

Indicatorul unei sume.

11. *Cazul când termenii sumei sunt numere prime.*

Fie: A, B, C ... mai multe numere prime între ele, având drept factori primi: $(a_1, a_2, a_3 ...)$, $(b_1, b_2, b_3 ...)$,

$(c_1, c_2, c, ...)$, etc... și fie: $(s_1, s_2, s_3, ...)$ factorii primi ai sumei acestor numere, atunci avem:

$$\varphi(A+B+C+...)=(A+B+C+...) \cdot \frac{\Pi(s-1)}{\Pi\ s}$$

apoi:

$$\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)+...=A \cdot \frac{\Pi(a-1)}{\Pi\ a}+B\frac{\Pi(b-1)}{\Pi\ s}$$

$$+C\frac{\Pi(c=1)}{\Pi c}+....$$

Dacă numerile date sunt prime, atunci:

$\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)+...=(A+B+C+...)-n$ unde n este numărul lor. Prin urmare vom avea:

$$6) \qquad \varphi(\Sigma A)=\left[\Sigma \varphi(A)+n\right] \cdot \frac{\Pi(s-1)}{\Pi\ s}$$

Exemplu: Fie; $A=3$, $B=5$, $C=7$ și $D=11$ atunci avem:

$\varphi(3+5+7+11)=12$;

$\varphi(3)+\varphi(5)+\varphi(7)+\varphi(11)+4=26$

$3+5+7+11=26=2.13$

$$\frac{\Pi(s-1)}{\Pi\ s}=\frac{(2-1)(13-1)}{2 \cdot 13}=\frac{2 \cdot 3}{13}$$

Prin urmare: $\quad 12=26 \cdot \frac{2 \cdot 3}{13}$

12. *Cazul când termenii sumei au aceiași factori, având exponenți cel puțin egali cu unu.*

Dacă numerele $A, B, C, ...$ au aceiași factori, cu exponenți cel puțin egali cu unu, atunci:

$$A+B+C+...=M \cdot N$$

unde M are aceiași factori ca numerile $A, B, C, ...$ cu exponenți cel puțin egali cu unu, iar N are factori primi diferiți. Fie $a, b, c, ...$ factori primi ai lui M, atunci:

$$\varphi(A+B+C+...)=\varphi(M) \cdot \varphi(N)=M \cdot \frac{\Pi(a-1)}{\Pi\ a}\varphi(N)$$

$$=\Sigma A \cdot \frac{\varphi(N)}{N} \cdot \frac{\Pi(a-1)}{\Pi\ a}$$

Apoi:

$$\varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) \ldots = \Sigma A . \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a}$$

Prin urmare avem:

$$7)\ \varphi(A+B+C+\ldots) = [\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)+\ldots] . \frac{\varphi(N)}{N}$$

Dacă facem $A = B = C = \ldots = L$, numărul termenilor fiind l, atunci avem:

$$\varphi(l.L) = \begin{cases} \varphi(L) . \varphi(l) \rightarrow \text{când } l \text{ este prim cu ceilalți factori.} \\ l . \varphi(L) \rightarrow \text{când } l \text{ are aceiași factori.} \end{cases}$$

Dar asupra acestor formule vom mai reveni.

Exemplu: Dacă $A = 6$; $B = 12$; $C = 24$ și $D = 36$ avem:
$\varphi(6 + 12 + 24 + 36) = 4\ (2 . 3 . 13) = 24$ și

$$\varphi(6) + \varphi(12) + \varphi(24) + \varphi(36) = 26; \quad \frac{\varphi(N)}{N} = \frac{12}{13}$$

Observație:

Indicatorul unei diferențe de doi termeni se poate stabili ca pentru o sumă, unde semnul este minus.

Indicatorul unui produs

13. *Cazul când factorii produsului sunt primi între ei.*

Factorii sunt numere prime absolut

Am văzut că:

$$8)\ \varphi(a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots) = a^{\alpha-1} . b^{\beta-1} . c^{\gamma-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1) \ldots$$
$$= [a^{\alpha-1}(a-1)] . [b^{\beta-1}(b-1)] . [c^{\gamma-1}(c-1)] \ldots$$
$$= \varphi(a^\alpha) . \varphi(b^\beta) . \varphi(c^\gamma) \ldots$$

Prin urmare indicatorul unui produs de factori primi este egal cu produsul indicatorilor factorilor.

Factorii sunt primi între ei

Fie A și B două numere prime între ele, având drept factori pe a_i și b_i, atunci observăm că avem:

$$\varphi(A . B) = \varphi(a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} \ldots b_1^{\beta_1} . b_2^{\beta_2} \ldots)$$

Cum numerele *A* și *B* sunt prime între ele, înseamnă că factorii lor primi sunt diferiți, prin urmare:

$$\varphi(A \,.\, B) = \varphi(a_1^{\alpha_1}) \,.\, \varphi(a_2^{\alpha_2}) \,.\,.\,.\, \varphi(b_1^{\beta_1}) \,.\, \varphi(b_2^{\beta_2}) \,.\,.$$

sau:

$$9) \quad \varphi A \,.\, B) = \varphi(a_1^{\alpha_1} \,.\, a_2^{\alpha_2} \,.\,.\,.\,) \,.\, \varphi) b_1^{\beta_1} \,.\, b_2^{\beta_2} \,.\,.\,.\,)$$
$$= \varphi(A) \,.\, \varphi(B)$$

In mod analog se raționează și pentru un produs de numere prime între ele, cu un număr mai mare de factori.

Deci, și în acest caz, indicatorul produsului mai multor numere prime între ele. este egal cu produsul indicatorilor fiecărui număr.

14. *Cazul când factorii produsului conțin aceiași factori primi.*

Presupunem două numere *A* și *B* cari au aceiași factori primi: *a*, *b*, *c*, . . . atunci știm că:

$$\varphi(A) = A \,.\, \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} \quad \text{și} \quad \varphi(B) = B \,.\, \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a}$$

Prin urmare:

$$\varphi(A \,.\, B) = \varphi(A) \,.\, \varphi(B) \,.\, \frac{\Pi a}{\Pi(a-1)}$$

Fie acum numerile: *A*, *B*, *C*, . . . și fie Δ_1 produsul primelor puteri ale tuturor divizorilor primi comuni la două numere, și numai la două, din numerile date; Δ_2 produsul primelor puteri a tuturor divizorilor primi comuni la trei numere oarecare, și numai la trei, din numerile date; și așa mai departe, atunci avem [1]):

$$10) \qquad \varphi(A \,.\, B \,.\, C \,.\,.\,.\,) = \varphi(A) \,.\, \varphi(B) \,.\, \varphi(C) \,.\,.\,.$$
$$\times \left[\frac{\Delta_2}{\varphi(\Delta_1)}\right] \,.\, \left[\frac{\Delta_2}{\varphi(\Delta_2)}\right]^2 \,.\, \left[\frac{\Delta_3}{\varphi(\Delta_3)}\right]^3 \,.\,.\,.$$

Exemplu. Fie: $A = 210 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7; B = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 11 = 330$ și $C = 2 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 11 = 462$, atunci avem:

$$\Delta_1 = 5 \,.\, 7 \,.\, 11 = 385 \quad \text{și} \quad \Delta_2 = 2 \,.\, 3 = 6$$

---

1) *Théorie des Nombres* par **E. Lucas** — 399.

Prin urmare:

$$\varphi(A \,.\, B \,.\, C) = 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$$

$$\varphi(A) \,.\, \varphi(B) \,.\, \varphi(C) = (2 \,.\, 4 \,.\, 6) \,.\, (2 \,.\, 4 \,.\, 10) \,.\, (2 \,.\, 6 \,.\, 10)$$

$$\frac{\Delta_1}{\varphi(\Delta_1)} = \frac{5.7.11}{4.6.10} \text{ și } \left[\frac{\Delta_2}{\varphi(\Delta_2)}\right]^2 = 3^2$$

Inlocuind și simplificând, găsim egalitate.

15. *Indicatorul puterei unui număr.*

Dacă în formula 10 admitem:

$$N = A = B = C = \ldots \ldots (m \text{ termeni}),$$

atunci avem:

$$11) \quad \varphi(N^m) = [\varphi(N)]^m \,.\, \left[\frac{\Pi a}{\Pi(a-1)}\right]^{m-1},$$

$$= N^{m-1} \,.\, \left[\frac{\Pi(a-1)}{\Pi a}\right]^{m-1} \,.\, \varphi(N) \,.\, \left[\frac{\Pi a}{\Pi(a-1)}\right]^{m-1}$$

$$= N^{m-1} \,.\, \varphi(N)$$

Pe o cale directă, avem:

$N = a^{\alpha} \,.\, b^{\beta} \,.\, c^{\gamma} \ldots$ deci $N^m = a^{m\alpha} \,.\, b^{m\beta} \,.\, c^{m\gamma} \ldots$

Prin urmare:

$$\varphi(N^m) = a^{m\alpha-1} \,.\, b^{m\beta-1} \,.\, c^{m\gamma-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1) \ldots$$

$$= \frac{N^m}{a \,.\, b \,.\, c \ldots} \,.\, (a-1)(b-1)(c-1) \ldots$$

$$= N^{m-1} \,.\, N \,.\, \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} = N^{m-1} \,.\, \varphi(N)$$

O consecință. Știm că $\varphi(N) < N$, prin urmare $[\varphi(N)]^{m-1} < N^{m-1}$ sau:

$$[\varphi(N)]^m < N^{m-1} \,.\, \varphi(N) = \varphi(N^m).$$

16. *Indicatorul unui număr poate să fie puterea altui număr?*

Mai general vom examina cazul când indicatorul puterei unui număr poate fi puterea altui număr, adică:

$$\varphi(A^m) = A^{m-1} \,.\, \varphi(A) = B^n$$

Va trebui deci să avem:

$$A^{m-1} = B_1^n \quad \text{și} \quad \varphi(A) = B_1^n$$

Vom admite deodată:

$$m - 1 = n \cdot q$$

și

$$A = 2^{\alpha_1} \cdot (2^{\alpha_2} \cdot P^n + 1) \cdot (2^{\alpha_3} \cdot Q^n + 1) \ldots$$

unde parantezele sunt numere prime și unde trebue să avem:

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = n$$

Cea mai simplă soluție este când $A = 2^{nq+1}$.

17. *Dacă numerile* A, B *și* $\left(\frac{A}{B}\right)$ *sunt întregi și au absolut aceiași factori primi (exponentul lor fiind cel puțin unu), atunci avem:*

$$13) \quad \begin{cases} \varphi(A \cdot B) = B \cdot \varphi(A) = A \cdot \varphi(B) \\ B \cdot \varphi\left(\frac{A}{B}\right) = \varphi(A) \end{cases}$$

Știm că dacă a_i sunt factori primi ai acelor două numere, atunci:

$$\varphi(B) = A \cdot \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} \text{ și } \varphi(B) = B \cdot \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a}$$

Apoi mai știm (12) că:

$$\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B) \cdot \frac{\Pi a}{\Pi(a-1)}$$

Prin urmare:

$$B \cdot \varphi(A) = A \cdot \varphi(A) = A \cdot B \cdot \frac{\Pi a}{\Pi(a-1)}$$

$$= \varphi(A) \cdot \varphi(B) \cdot \frac{\Pi a}{\Pi(a-1)} = \varphi(A \cdot B)$$

Deasemenea avem:

$$B \cdot \varphi\left(\frac{A}{B}\right) = B \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a}$$

$$= A \cdot \frac{\Pi(a-1)}{\Pi a} = \varphi(A)$$

Exemplu. Fie : $A = 3, 5 = 15$ şi $B = 3^2 . 5^2 = 225$, atunci avem :

$$\varphi(A . B) = \varphi(3^3 . 5^3) = 225 . \varphi(15) = 15\, \varphi(225)$$

şi

$$15 . \varphi\left(\frac{225}{15}\right) = 15 . \varphi(15) = \varphi(15^2) = \varphi(225)$$

Indicatori şi divizori

18. *In afară de câteva excepţii, indicatorul unui număr este mai mare decât numărul divizorilor lui.*

Fie în adevăr : $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} \ldots$ un număr dat, atunci indicatorul şi numărul divizorilor lui, au expresiunile:

$\varphi(N) = a^{\alpha-1} . b^{\beta-1} . c^{\gamma-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1) \ldots$

$\nu(N) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots$

Aceste expresiuni le vom compara.

Fie deocamdată $N = a^{\alpha}$, atunci ar trebui să avem:

$$a^{\alpha-1} . (a - 1) > \alpha + 1$$

Dar, pentru $a > 2$ şi pentru $\alpha = 1$ avem $a - 1 \geqq 2$, iar pentru $\alpha = 2$ avem $a(a - 1) > 3$.

In consecinţă, dacă pentru $\alpha = \alpha'$ neegalitatea subzistă, atunci ea va subzista şi pentru $\alpha = \alpha' + 1$ deoarece membrul întâi devine:

$$a^{\alpha'-1} . (a - 1) \times a = a^{\alpha'} . (a - 1)$$

adică este înmulţit cu *a*, pe când membrul al doilea devine:

$$(\alpha' + 1) + 1 = \alpha' + 2$$

adică este sporit cu *1*.

Fie $N = a^{\alpha} . b^{\beta}$, atunci va trebui să avem :

$$a^{\alpha-1} . b^{\beta-1} . (a - 1)(b - 1) > (\alpha + 1)(\beta + 1)$$

Insă am văzut mai sus că pentru $a > 2$ avem : $a^{\alpha-1} . (a - 1) > \alpha + 1$, or, cum $b > a$, vom avea şi $b^{\beta-1} . (b-1) > \beta + 1$. Inmulţind ambele neegalităţi, găsim condiţia pusă.

In acelaş fel se procedează şi pentru *N* cu un număr de factori oricât de mare.

Excepţie, dela regula de mai sus, fac numerile mai mici și în special acelea cari au pe *2* factor prim, adică:

— numerile: *1, 3, 8, 10, 18, 24, 30*, au indicatorul egal cu numărul divizorilor;

— numerile: *2, 4, 6, 12*, au indicatorul mai mic decât numărul divizorilor.

19. *Suma indicatorilor tuturor divizorilor unui număr este egală cu numărul dat.*

Admitem $N = a^{\alpha}$, atunci divizorii acestui număr sunt:

$$1,\ a,\ a^2,\ .\ .\ .\ a^{\alpha}$$

și prin urmare suma indicatorilor lor este:

$$1 + (a-1) + a(a-1) + \ .\ .\ .\ + a^{\alpha-1}(a-1)$$
$$= 1 + (a-1).(1 + a + \ .\ .\ .\ + a^{\alpha-1})$$
$$= 1 + (a-1).\frac{a^{\alpha}-1}{a-1}$$
$$= a^{\alpha} = N$$

Admitem $N = a^{\alpha}.b^{\beta}$, atunci divizorii acestui număr sunt:

$$\begin{array}{l} 1,\ a,\ a^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ a^{\alpha} \\ b,\ b^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ b^{\beta} \\ ab,\ ab^2,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ a^{\alpha}.b \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ ab^{\beta},\ a^2.b^{\beta},\ .\ .\ .\ .\ a^{\alpha}.b^{\beta} \end{array}$$

Suma indicatorilor lor va fi:

— suma indicatorilor primei linii: a^{α}

— suma indicatorilor liniei a doua: $b^{\beta}-1$

— suma indicatorilor liniei a treia: $(a^{\alpha}-1).(b-1)$

. . . .

— suma indicatorilor ultimei linii: $(a^{\alpha}-1)b^{\beta-1}(b-1)$

Adunând aceste sume, avem:

$$a^{\alpha} + b^{\beta} - 1 + (a^{\alpha}-1).(b-1)$$
$$+ (a^{\alpha}-1)b(b-1)$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+ (a^{\alpha}-1)b^{\beta-1}(b-1)$$
$$= a^{\alpha} + b^{\beta} - 1 + (a^{\alpha}-1).(b^{\beta}-1)$$
$$= a^{\alpha}.b^{\beta} = N$$

In mod analog se poate proceda pentru N cu un număr de factori mai mare și vom obține acelaș rezultat. Deci, dacă $d_1, d_2, \ldots d_\nu$ sunt divizorii lui N, atunci avem:

$$14) \qquad \Sigma\varphi(d) = \varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \varphi(d_\nu) = N$$

unde avem: $d_1 = 1$ și $d_\nu = N$.

Dar formula (14) se mai poate stabili pe o cale directă. In adevăr, fie:

$$S = \Sigma\, \varphi(d) = N$$

și

$$S' = \Sigma\, \varphi(d') = N'$$

unde $N' = N \,.\, l^\lambda$, l fiind un factor prim diferit de factorii lui N. In acest caz observăm că divizorii lui N' vor fi compuși din toți divizorii lui N și din produsul tuturor acestor divizori prin puterile: $l, l^2, l^3, \ldots l^\lambda$.

Prin urmare:

$$S' = \Sigma\varphi(d) + \Sigma\varphi(l\,.\,d) + \ldots + \Sigma\varphi(l^\lambda\,.\,d)$$

Dar cum l este prim cu d, avem:

$$S' = S\,.\,[1 + \varphi(l) + \ldots + \varphi(l^\lambda)] = S\,.\,l^\lambda = N\,.\,l^\lambda$$

Așa dar, cunoscând suma pentru $N = a^\alpha$, vom deduce lesne formulele și pentru $N = a^\alpha\,.\,b^\beta$ și astfel pentru oricâți factori:

Nota I-a. Avem:

$$15) \quad \begin{cases} \Sigma\varphi(d^m) = \Sigma\, d^{m-1}\, \varphi(d) \\ \qquad\qquad = \Pi\left[1 + a^{m-1}\,.\,\dfrac{(a-1)\,.\,(a^{m\alpha}-1)}{m^n - 1}\right] \\ \Sigma\varphi(d^m) = \Sigma\, d^k\,.\,\varphi(d^{m-k}) \end{cases}$$

unde Π se referă la numărul total al factorilor.

In adevăr, fie $N = a^\alpha$, atunci se vede lesne că:

$$\Sigma\,\varphi(d^m) = \left[1 + a^{m-1}\,.\,\frac{(a-1)\,.\,(a^{\alpha m}-1)}{a^m - 1}\right]$$

Fie apoi S suma cerută și $S' = \Sigma\varphi(d')$ unde d' reprezintă divizorii numărului $N' = N\,.\,l^\lambda$, l fiind un factor prim diferit de factorii lui N. Dar divizorii lui N' vor fi compuși din toți divizorii lui N, plus produsul acestor divizori prin fiecare din factorii: $l, l^2, l^3, \ldots l^\lambda$. Prin urmare:

$$S' = \Sigma \varphi(d^m) + \Sigma \varphi[(l \cdot d)^m] + \ldots + \Sigma \varphi[(l^\lambda \cdot d)^m]$$

Cum l este prim cu d, urmează că vom avea:

$$S' = S \cdot [1 + \varphi(l^m) + \varphi(l^{2m}) + \ldots + \varphi(l^{\lambda m})]$$

$$= S \cdot \left[1 + l^{m-1} \cdot \frac{(l-1) \cdot (l^{m\lambda} - 1)}{l^m - 1}\right]$$

Prin urmare, pentru $N = a^\alpha \cdot b^\beta$ vom avea:

$$\Sigma \varphi(d^m) = \left[1 + a^{m-1} \cdot \frac{(a-1) \cdot (a^{\alpha m} - 1)}{a^m - 1}\right]$$

$$\times \left[1 + b^{m-1} \cdot \frac{(b-1)(\cdot b^{\beta m} - 1)}{b^m - 1}\right]$$

Si în general pentru N oarecare se obține formula 15).

Exemplu. Fie $N = 2 \cdot 5 = 10$ și $m = 2$, atunci avem:

$$\varphi(1^2) + \varphi(2^2) + \varphi(5^2) + \varphi(10^2) = 63$$

$$\left[1 + 2^{2-1} \cdot \frac{(2-1)(2^2-1)}{2^2-1}\right] \cdot \left[1 + 5^{2-1} \cdot \frac{(5-1)(5^2-1)}{5^2-1}\right] = 3.21 = 63$$

Nota II. Avem:

$$\text{16)} \qquad \Sigma [\varphi(d)]^m = \Pi \left[1 + \frac{(a-1)^m \cdot (a^{\alpha m} - 1)}{a^m - 1}\right]$$

In adevăr, mergând pe o cale similară celei de sus, avem pentru $N = a^\alpha$:

$$\Sigma [\varphi(d)]^m = 1 + \frac{(a-1)^m \cdot (a^{\alpha m} - 1)}{a^m - 1}$$

Apoi, succesiv obținem:

$$S' = \Sigma [\varphi(d)]^m + \Sigma [\varphi(l \cdot d)] + \ldots + \Sigma [\varphi(l^\lambda \cdot d)]^m$$

$$= S \cdot \left[1 + [\varphi(l)] + [\varphi(l^2)^m + \ldots + [\varphi(l^\lambda)]^m\right]$$

$$= S \cdot \left[1 + \frac{(l-1)^m \cdot (l^{\lambda m} - 1)}{l^m - 1}\right]$$

Se ajunge deci ușor la formula 9) pentru N oricare.

Exemplu: Pentru $N=2.5=10$ și $m=2$ avem:

$$[\varphi(1)]^2+[\varphi(2)]^2+[\varphi(5)]^2+[\varphi(10)^2=34$$

$$\left[1+\frac{(2-1)^2.(2^2-1)}{2^2-1}\right].\left[1=\frac{(5-1)^2.(5^2-1)}{5^2-1}\right]=2.17=34$$

20. *Să se arate că avem relațiile:*

$$17)\begin{cases}\Sigma\, d\,\varphi\,(d)=\Pi\left(1+a\,.\,\dfrac{a^{2\alpha}-1}{a+1}\right)\\[2ex]\Sigma\,\dfrac{N}{d}\,\varphi\,(d)=N.\,\Pi\left(1+\alpha\,\dfrac{a-1}{a}\right)^{1)}\end{cases}$$

unde $N=a^\alpha.\,b^\beta\ldots$ *iar* d *reprezintă divizoriu lui* N. *inclusiv* 1 *și* N.

Pentru $N=a^\alpha$, avem în primul caz:

$$\begin{aligned}\Sigma\, d\,\varphi\,(d)&=1+a\,.\,\varphi\,(a)+a^2\,.\,\varphi\,(a^2)+\ldots+a^\alpha\,.\,\varphi\,(a^\alpha)\\&=1+a(a-1)=a^3(a-1)+\ldots+a^{2\alpha}-1\,(a-1)\\&=1+a\,(a-1)\,[1+a^2+\ldots+a^{2(\alpha-1)}]\\&=1+a\,(a-1\,.\,\frac{a^{2\alpha}-1}{a^2-1}\end{aligned}$$

Pentru $N=a^\alpha.\,b^\beta$ avem:

$$\begin{aligned}\Sigma\, d'.\,\varphi\,(d')&=\Sigma\, d.\,\varphi\,(d)+\Sigma\, b.\,d.\,\varphi\,(b.\,d)+\ldots\\&\qquad\ldots+\Sigma\, b^\beta.\,d.\,\varphi\,(b^\beta.\,d)\\&=\Sigma\, d.\,\varphi\,(d)\,[1+\Sigma\, b.\,\varphi\,(b)+\ldots\\&\qquad\ldots+\Sigma\, b^\beta\,\varphi\,(b^\beta)]\end{aligned}$$

Deci:

$$\Sigma\, d'\,\varphi(d')=\left[1+a(a-1).\,\frac{a^{2\alpha}-1}{a^2-1}\right]\left[1+b.\,(b-1).\,\frac{b^{2\beta}-1}{b^2-1}\right]$$

Și în general se constată că se obține ușor formula dată.

Exemplu: Fie $N=2.5=10$, atunci:

$$1\,\varphi\,(1)+2.\,\varphi\,(2)+5.\,\varphi\,(5)+10.\,\varphi\,(10)=63$$

$$\left[1+2.\,\frac{2^2-1}{2+1}\right].\left[1+5.\,\frac{5^2-1}{5+1}\right]=3.\,21=63$$

---

1) Această formulă a fost dată de D-l **I. Ionescu** ca soluție a problemei 1099, propusă de D-l **M. Filip** în *Gazeta Matematică* XVII.

Fie în cazul al doilea $N = a^{\alpha}$, atunci:

$$\Sigma \frac{N}{d} \varphi(d) = a^{\alpha}.\left[1 + \alpha\frac{a-1}{a}\right] = N.\left[1+\alpha.\frac{a-1}{a}\right]$$

Fie apoi $N = a^{\alpha} b^{\beta}$, atunci:

$$\Sigma \frac{N}{d'}\varphi(d') = \Sigma\frac{N}{d}\varphi(d) + \Sigma\frac{N}{b.d}\varphi(b.d) + \ldots + \Sigma\frac{N}{b^{\beta}.d}\varphi(b^{\beta}.d)$$

$$= \Sigma \frac{N}{d}\varphi(d).\left[1+\Sigma\frac{\varphi(b)}{b} + \ldots + \Sigma\frac{\varphi(b^{\beta})}{b^{\beta}}\right]$$

$$= N.\left[1 = \alpha.\frac{a-1}{a}\right].\left[1 + \beta.\frac{b-1}{b}\right]$$

Iar în general, se deduce lesne formula dată.

Exemplu: Fie $N = 2.5 = 10$, atunci:

$$\frac{10}{1}\varphi(\ ) + \frac{10}{2}.\varphi(2) + \frac{10}{5}.\varphi(50) + \frac{10}{10}.\varphi(1C) = 27$$

$$10.\left[1+1.\frac{2-1}{1}\right].\left[1+1.\frac{5-1}{5}\right] = 10.\frac{2}{3}.\frac{9}{5} = 27$$

Nota I. In mod analog se pot stabili următoarele formule:

$$18)\ \begin{cases} \Sigma d^m.\varphi(d^m) = \Pi\left[1 + a^{2m-1}.\dfrac{(a-1).a^{2\alpha m}-1)}{a^{2m}-1}\right] \\ \Sigma[d.\varphi(d)]^m = \Pi\left[1 + a^m.\dfrac{(a-1)^m.(a^{2\alpha m}-1)}{a^{2m}-1}\right] \end{cases}$$

$$19)\ \begin{cases} \Sigma\dfrac{\varphi(d)}{d} = \Pi\left[1 + \alpha.\dfrac{a-1}{a}\right] \\ \Sigma\varphi\left(\dfrac{N}{\alpha}\right) = \Pi.a^{\alpha} = N \end{cases}$$

$$20)\ \begin{cases} \Sigma\dfrac{N}{d^m}.\varphi(d^m) = N.\Pi\left[1+\alpha.\dfrac{a-1}{a}\right] \\ \Sigma N.\left[\dfrac{\varphi(d)}{d}\right]^m = N.\Pi\left[1+\alpha\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^m\right] \end{cases}$$

Și în felul acesta pot fi stabilite și altele, prin convenabile conbinații.

Exemple: Fie $N = 2 . 5 = 10$ și $m = 2$, atunci avem:

$$\Sigma\, d^m . \varphi(d^m) = 1^2\, \varphi\,(1^2) + 2^2 . \varphi\,(2^2) + 5^2 . \varphi(5^2) + 10^2\, \varphi\,(10^2) = 4509$$

$$\Pi\left[1 + a^{2m-1} . \frac{(a-1).(a^{2\alpha m} - 1)}{a^{2m} - 1}\right] = 9 . 501 = 4509$$

$$\Sigma\,[d\varphi(d)]^m = [1.\varphi(1)]^2 + [2.\varphi(2)]^2 + [5.\varphi(5)]^2 + [10.\varphi(10)]^2 = 2005$$

$$\Pi\left[1 + a^m . \frac{(a-1)^m . (a^{2\alpha m} - 1)}{a^{2m} - 1}\right] = 5 . 401 = 2005$$

$$\Sigma\,\frac{\varphi\,(d)}{d} = \frac{\varphi\,(1)}{1} + \frac{\varphi\,(2)}{2} + \frac{\varphi\,(5)}{5} + \frac{\varphi(10)}{10} = \frac{27}{10}$$

$$\Pi\left[1 + \alpha\frac{a-1}{a}\right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{5} = \frac{27}{10}$$

$$\Sigma\,\varphi\left(\frac{N}{d}\right) = \varphi\left(\frac{10}{1}\right) + \varphi\left(\frac{10}{2}\right) + \varphi\left(\frac{10}{5}\right) + \varphi\left(\frac{10}{10}\right) = 10$$

$$\varphi\,\frac{N}{d^m}\,\varphi\,(d^m) = \frac{10}{1^2}\,\varphi\,(1^2) + \frac{10}{2^2} . \varphi(2^2) + \frac{10}{5^2} . \varphi\,(5^2) + \frac{10}{10^2} . \varphi\,(10^2)$$
$$= 27$$

$$10.\left[1 + 1.\frac{2-1}{2}\right] \cdot \left[1 + 1.\frac{5-1}{5}\right] = 3 . 9 = 27$$

$$\Sigma\, N . \left[\frac{\varphi\,(d)}{d}\right]^m = 10.\left[\frac{\varphi\,(1)}{1}\right]^2 + 10.\left[\frac{\varphi\,(2)}{2}\right]^2 + 10\left[\frac{\varphi\,(5)}{5}\right]^2 + 10.$$
$$+ \left[\frac{\varphi\,(10)}{10}\right]^2 = \frac{41}{2}$$

$$10.\left[1 + 1 . \left(\frac{2-1}{2}\right)^2\right] \cdot \left[1 + 1\left(\frac{5-1}{5}\right)^2\right] = \frac{41}{2}$$

Extinderi asupra indicatorilor

Indicatorul unui număr față de un șir de numere consecutive

21. *Indicatorul lui* N *față de șirul de numere consecutive dela* 1 *la* M. *(Numărul numerilor prime cu* N *din șirul numerilor consecutive dela* 1 *la* M)[1].

Fie $N = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma$ . . . un număr dat și $E(i)$ simbolul care reprezintă întregii lui i (notațiunea lui **Legendre**). Dacă notăm prin $I_M(N)$ numărul nu-

1) *Exercices d'Arithmétique* par **Fritz-Patrick** et **Chevrel**, pag. 400.

merilor prime cu N din șirul de numere consecutive dela 1 la M, atunci avem:

$$21)\quad I_M(N) = M - \Sigma E\left(\frac{M}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{M}{ab}\right) - \Sigma E\left(\frac{M}{abc}\right) + \dots$$

In adevăr, este lesne de observat că în șirul numerilor consecutive până la M avem:

$E\left(\frac{M}{a}\right)$ multiplii ai factorului a;

$E\left(\frac{M}{b}\right)$ „ „ „ b;

$E\left(\frac{M}{c}\right)$ „ „ „ c;

. . . .

Dar între acești multipli se găsesc în acelaș timp și multiplii ai produselor ab, ac, bc, . . . , de cari trebue să ținem seamă, căci ei intră de două ori. Deasemenea vem multipli ai produselor: abc, abd, bcd, . . . cari intrând în șirurile multiplilor de mai sus, trebue să ținem seamă și de ei, întocmai ca la regula de formare a lui $\varphi(N)$ văzută la 2. Și urmând deci o cale analoagă stabilirei lui $\varphi(N)$, găsim formula 21).

Exemplu. Fie $M = 30$ și $N = 3 . 7 = 21$, atunci avem:

$$I_{30}(21) = 30 - E\left(\frac{30}{3}\right) - E\left(\frac{30}{7}\right) + E\left(\frac{30}{3.7}\right)$$
$$= 30 - 10 - 4 + 1 = 17$$

Iar numerile prime cu 21 din șirul numerilor consecutive până la 30 sunt:

1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26 și 29.

Adică tocmai 17 numere.

22. *Indicatorul lui* N *subordonat lui* M *din șirul numerilor consecutive dela* 1 *la* M. *(Numărul numerilor prime cu* N *și* M *din șirul numerilor consecutive până la* M).

Fie: a', b', c', . . factori primi ai produsului $M \,.\, N$, printre cari se găsesc și factorii primi ai lui N, atunci pe o cale analoagă celei dela *(21)* găsim:

$$22)\qquad I_M(N, M) = M - \Sigma\, E\left(\frac{M}{a'}\right) + \Sigma\, E\left(\frac{M}{a'b'}\right) - \Sigma\, E\left(\frac{M}{a'\,b'\,c'}\right) + \ldots$$

Exemplu.

$$I_{30}(21,30) = 30 - E\left(\frac{30}{2}\right) - E\left(\frac{30}{3}\right) - E\left(\frac{30}{5}\right) - E\left(\frac{30}{7}\right) + E\left(\frac{80}{2.3}\right) + E\left(\frac{30}{2.5}\right) + E\left(\frac{30}{2.7}\right) + E\left(\frac{30}{3.5}\right) + E\left(\frac{30}{3.7}\right) - E\left(\frac{30}{2.3.5}\right) = 7$$

Iar numerile cari răspund sunt : *1, 11, 13, 17, 19, 23 și 29,* adică șapte numere.

23. *Indicatorul lui* N *față de șirul de numere consecutive cuprins între* A *și* B. *(Numărul numerilor prime cu* N *din șirul de numere consecutive dela* A *la* B).

Indicatorul lui N față pe șirul numerilor consecutive dela *1* la M este dat de formula 17). Dacă în această formulă facem $M = A$, apoi $M = B$, și scădem, avem:

$$23)\qquad I_{A \to B}(N) = I_B(N) - I_A(N)$$

In acelaș sens se poate arăta deasemenea că avem:

$$24)\qquad \begin{cases} \varphi(N) = I_{1 \to A}(N) + I_{A \to B}(N) + \ldots + I_{L \to N}(N) \\ I_M(N) = I_{1 \to A}(N) + I_{A \to B}(N) + \ldots + I_{L \to M}(N) \end{cases}$$

A, B, C, . . . L fiind numere cuprinse în șirurile de numere dela *1* la N sau dela *1* la M, astfel încât:

$$1 < A < B < C < \ldots < L < N \text{ (sau M)}$$

Exemplu. Fie $N = 3 \,.\, 7 = 21$ și $A = 10$; $B = 30$, atunci:

$$I_{30}(21) = 17 \text{ și } I_{10}(21) = 6 \text{ deci } I_{10 \to 30}(21) = 11$$

Deasemenea:

$$\varphi(21) = I_{1\to 10}(21) + I_{10\to 21}(21) = 5 + 7 = 12$$

$$I_{36}(21) = I_{1\to 10}(21) + I_{10\to 20}(21) + I_{20\to 30}(21) = 5 + 6 + 6 = 17$$

24. *Indicatorul lui* N *subordonat numerilor* A *și* B, *din șirul de numere consecutive dela* A *la* B. *(Numărul numerilor prime cu* N, *cu* A *și cu* B *din șirul numerilor consecutive dela* A *la* B).

Utilizând formulele 22) și 23), găsim:

25) $$I_{A\to B}(A, B, N) = I_B(A, B, N) - I_A(A, B, N)$$

Exemplu. $A = 11$, $B = 30$ și $N = 21$, avem:

$$I_{30}(11, 30, 21) = 6;\quad I_{11}(11, 30, 21) = 1$$

Vom avea deci:

$$I_{11\to 30}(11, 30, 21) = 5$$

adică tocmai numerile: 13, 17, 19, 23 și 29.

25. *Să se arate că avem:*

26) $$I_{A+B}(N) = I_A(N) + I_B(N) - \varepsilon$$

unde $\varepsilon = 0$ *când numerile* A *sau* B, *sau când suma lor se împarte exact cu produsul factorilor primi ai lui* N. *In celelalte cazuri* ε *poate să fie egal cu* 0 *sau cu* 1, *după cum suma resturilor diviziunei numerilor* A *și* B *prin produsul unuia sau mai multor factori primi ai lui* N *este inferioară acelui divizor sau este egală cu acel divizor.*

Fie: $a, b, c, \ldots$ factori primi ai lui N, atunci conform formulei 21) avem:

$$I_{A+B}(N) = (A + B) - \Sigma E\left(\frac{A+B}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{A+B}{b}\right)$$

$$-\Sigma E\left(\frac{A+B}{a.b.c}\right) + \ldots$$

Dar față de un divizor oarecare Δ avem:

$$E\left(\frac{A+B}{\Delta}\right) = E\left(\frac{A}{\Delta}\right) + E\left(\frac{B}{\Delta}\right) + E\left(\frac{r_A + r_B}{\Delta}\right)$$

unde r_A și r_B sunt resturile diviziunei lui A și B pri Δ, iar:

$$0 \leq \frac{r_A + r_B}{\Delta} < 2$$

Cu aceasta vom scrie că:

$$I_{A+B}(N) = A - \Sigma E\left(\frac{A}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{A}{ab}\right) - \dots$$
$$+ B - \Sigma E\left(\frac{B}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{B}{ab}\right) - \dots$$
$$- \Sigma \varepsilon_1 + \Sigma \varepsilon_2 - \dots$$

unde $\Sigma \varepsilon_1$ reprezintă valorile sumei expresiunilor: $E\left(\frac{A+B}{\Delta}\right)$ când Δ ia succesiv valorile: $a, b, c, \dots,$ $\Sigma \varepsilon_2$ când Δ ia valorile: $ab.\ ac,\ bc, \dots$ și așa mai departe.

Dar observăm că valorile maxime ale acelor însumări sunt:

$$\Sigma \varepsilon_1 = C_n^1 ;\ \Sigma \varepsilon_2 = C_n^2 ; \dots$$

Apoi cum știm că:

$$- C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n . C_n^n = -1$$

Urmează că:

$$I_{A+B}(N) = I_A(N) + I_B(N) - \varepsilon$$

unde $\varepsilon = 0$ sau 1 în cazurile semnalate mai sus.

Exemplu. Avem:

$I_{10}(21) = 6;\ I_{30}(21) = 17;\ I_{49}(21) = 23$

$I_{11}(21) = 7;\ I_{29}(21) = 17;\ I_{40}(21) = 23 = 24 - 1$

Notă. Dacă facem $B = 1$ în 25) avem:

27) $$I_{A+1}(N) - I_A(N) = 1 - \varepsilon$$

unde am presupus $I_1(N) = 1$.

Această relație se poate stabili și direct deoarece dacă $(A+1)$este prim cu N, avem un număr în plus.

Dacă facem $A=N$ și $B=(A-1)N$, și $A=(A-1).B$ avem:

$$28)\begin{cases} I_{A\,.\,N}(N) - I_{(A-1)\,.\,N}(N) = I_N(N) = \varphi(N) \\ I_{A\,.\,B}(N) - I_{(A-1)\,.\,B}(N) = I_B(N) - \varepsilon \end{cases}$$

26. *Să se arate că avem:*

$$29)\ I_{A.B}(N) = A\,.\,I_B(N) \mp t_A$$
$$= B\,.\,I_A(N) \mp t_B$$

unde t_A *și* t_B *vor fi determinați mai jos.*

Prima cale

Fie $a, b, c, \ldots$ factorii primi ai lui N, atunci conform formulei 21) avem:

$$I_{A.B}(N) = A\,.\,B - \Sigma\,E\left(\frac{A\,.\,B}{a}\right) + \Sigma\,E\left(\frac{A\,.\,B}{a\,.\,b}\right) - \ldots$$

Dar, dacă $\triangle$ este un divizor oarecare, atunci avem:

$$E\left(\frac{A.B}{\triangle}\right) = A\,.\,E\left(\frac{B}{\triangle}\right) + r_A.\,E\left(\frac{A}{\triangle}\right) + E\left(\frac{r_A.\,r_B}{\triangle}\right)$$
$$= B\,.\,E\left(\frac{A}{\triangle}\right) + r_B\,.\,E\left(\frac{B}{\triangle}\right) + E\left(\frac{r_A\,.\,r_B}{\triangle}\right)$$

Prin urmare:

$$I_{A.A}(N) = A\,.\,B - A\,.\,\Sigma\,E\left(\frac{B}{a}\right) + A\,.\,\Sigma\,E\left(\frac{B}{a.b}\right) - \ldots$$
$$- \Sigma\left[r_{A_1} E\left(\frac{A}{a}\right) + E\left(\frac{r_{A_1}\,.\,r_{B_1}}{a}\right)\right]$$
$$+ \Sigma\left[r_{A_2} E\left(\frac{A}{a\,b}\right) + E\left(\frac{r_{A_2}\,.\,r_{B_2}}{a\,b}\right)\right]$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde r_{Ai} și r_{Bi} reprezintă resturile diviziunei lui A și B printr'un produs de i factori diferiți ai lui N.

Dacă admitem că: $r_i = \underbrace{a.\,b.\,c\ldots}_{i}$ ceace nu-i posibil, totuși pentru a determina un maximum maximorum, atunci:

$$-t_A = +\Sigma\left[r_{A_1} E\left(\frac{A}{a}\right) + E\left(\frac{r_{A_1} . r_{B_1}}{a}\right)\right]$$
$$-\Sigma\left[r_{A_2} . E\left(\frac{A}{a\,b}\right) + E\left(\frac{r_{A_2} . r_{B_2}}{a\,b}\right)\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$< \Sigma\,(A + a) - \Sigma\,(A + a\,b) + \ldots$$

Sau, ţinând seamă că:

$$C_n^1 - C_n^2 + \ldots - (-1)^n C^n = 1$$

avem:

$$0 \leqq |\, t_A \,| < |\, A + \Sigma\, a - \Sigma\, a\, b + \ldots \,|$$

şi deci t_A poate avea şi valori negative:

Deci:

$$I_{A.B}\,(N) = A \,.\, I_B\,(N) \mp t_A$$

Pe o cale analogă se stabileşte şi a doua relaţie, unde:

$$0 \leqq |\, t_B \,| < |\, B + \Sigma\, a - \Sigma\, a\, b + \ldots \,|$$

A doua cale

Dacă în relaţiunile 25) făcem să varieze A dela 2 la A, atunci obţinem relaţiunile:

$$I_{2B}\,(N) - I_B\,(N) = I_B\,(N) - \varepsilon_2$$
$$I_{3B}\,(N) - I_{2B}\,(N) = I_B\,(N) - \varepsilon_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_{AB}(N) - I_{(A-1)B}(N) = I_B\,(N) - \varepsilon_A$$

Adunând şi reducând termenii asemenea, ne rămâne:

$$I_{A.B}\,(N) = A \,.\, I_B\,(N) - \sum_{2}^{A} \varepsilon_i$$

Şi pe o cale analogă obţinem:

$$I_{A.B}\,(N) = B \,.\, I_A \,.\, (N) - \sum_{2}^{B} \varepsilon_i$$

Dar am văzut că ε_i are valoare *0* ori de câteori $A \,.\, B$ se împarte exact prin factorii primi ai lui N. Deci ori de câte ori A sau B ia una din valorile cuprinse în divizorii lui N, atunci ε_i devine nul. In celelalte cazuri el poate fi sau *nul* sau *unu*. Deci dacă n_A reprezintă numărul divizoriilor lui N, cari sunt mai mici sau egali cu A și n_B numărul celor mai mici sau egali cu B, atunci avem:

$$0 \leqq | t_A | \leqq | A - n_A - 1 |$$

și

$$0 \leqq | t_B | \leqq | B - n_B - 1 |$$

unde valorile negative le are pentru $n_A \geqq A$ sau $n_B \geqq B$.

Notă. Dacă în prima relație facem $B = N$ atunci obținem:

30) $I_{A.N}(N) = A \cdot \varphi(N)$

Exemple:

$I_{15}(8) = 8;\ I_3(8) = 2;\ I_5(8) = 3$

$I_{15}(8) = 5 \cdot I_3(8) - 2$

$= 3 \cdot I_5(8) - 1$

$I_{15}(10) = 5;\ I_2(10) = 1;\ I_6(10) = 2$

$I_{12}(10) = 6 \cdot I_2(10) - 1$

$= 2 \cdot I_6(10) + 1$

$I_{21}(15) = 11;\ I_3(15) = 2;\ I_7(17) = 4$

$I_{21}(15) = 7 \cdot I_3(15) - 3$

$= 3 \cdot I_7(15) - 1$

$I_{35}(13) = 33;\ I_5(13) = 5;\ I_7(13) = 7$

$I_{35}(13) = 7 \cdot I_5(13) - 2$

$= 5 \cdot I_7(13) - 2$

$I_{3 \cdot 11}(11) = 30;\ I_3(11) = 3;\ I_{11}(11) = \varphi(11) = 10$

$I_{33}(11) = 12 \cdot \varphi(11) = 30$

$= 11 \cdot I_3(11) = 30$

Notă.

Utilizând relația 30), observăm că mai putem avea:

31) $I_{AN}(N) + I_{BN}(N) = (A + B) \cdot \varphi(N)$

Relația putând fi atinsă la ori câți termeni.

Deasemenea avem:

32) $I_{B.N \rightarrow A.N}(N) = (B - A) \cdot \varphi(N)$

Relație ușor de stabilit ținând seamă de relațiile 26) și 30).

27. *Să se arate că:*

33) $I_{A \rightarrow B}(N) - I_{A \rightarrow (B-1)}(N) = 0$ sau 1

după cum B *nu este prim sau este prim cu* N.

Scriind ambele șiruri de numere, vedem că ele diferă numai cu *B*, deci stabilirea este evidentă.

Se mai poate stabili și drept o aplicație a relațiilor 20) și 23), căci se deduce lesne:

$$I_{A\to B}(N) - I_{A\to(B-1)} = I_B(N) - I_{B-1}(N)$$

Nota I. Deasemenea avem:

34) $$I_{A\to B}(N) = I_{(A-1)\to(B-1)}(N)$$

dacă *A* și *B* sunt simultan primi sau neprimi cu *N*.

Ca o aplicație a relației 23) avem:

$$I_{A\to B}(N) = I_B(N) - I_A(N)$$

și

$$I_{(A-1)\to(B-1)}(N) = I_{B-1}(N) - I_{A-1}(N)$$

Apoi cum în general, dacă *x* este prim cu *y*, avem:

$$E\left(\frac{x-1}{y}\right) = E\left(\frac{x}{y}\right)$$

deoarece pentru $x = k \cdot y + r$, totdeauna $1 \leq r < y$.

Or, în asemenea condițiuni se vede lesne că:

$$I_B(N) - I_A(N) = I_{B-1}(N) - I_{A-1}(N)$$

Egalitate care se mai poate demonstra și cu ajutorul relației 27).

Nota II. Imi propun să arăt că avem[1]:

35) $$\begin{cases} \sum\limits_{1}^{N} I_{i\to N}(N) = \sum\limits_{2}^{N} \varphi(i) \\ \sum\limits_{1}^{N} i \,.\, I_{i\to N}(N) = \sum\limits_{2}^{N} i \,.\, \varphi(i) \end{cases}$$

In adevăr, făcând în prima relație din 28) $N = A$ și dând lui *A* valori dela *1* la *(B—1)*, avem relațiile:

36) $$\sum_{A=1}^{A=B-1} [I_{A\to B}(A) - I_{A\to(B-1)}(A)] = \varphi(B)$$

deoarece de câte ori *A* este prim cu *B*, membrul al doilea este egal cu *1*.

1) *Théorie des Nombres* par **E. Lucas**, pag. 403, Exemplul V.

Făcând acum: $B = 2, 3, \ldots A$, avem prima relație din 35).

In mod analog se demonstrează și relația a doua din 35), unde înmulțind ambi membri ai primei relații 35) cu i, apoi procedând ca mai sus, se ajunge la rezultat.

Mai general însă putem scrie că:

$$36 \text{ bis)} \quad \sum_{A=1}^{A=B-1} [I_{A \to B}(N) - I_{A \to (B-1)}(N)] = I_B(N)$$

Indicatorul unui număr dat de termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice

28. *Intr'un șir de* N *termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, a cărei rație este un număr* r, *prim cu* N, *numărul termenilor primi cu* N *este egal cu indicatorul lui* N.[1])

Fie:

$$a, a + r, a + 2r, \ldots a + (N - 1) . r$$

cei N termeni ai unei progresii aritmetice de rație r, unde r este un număr prim cu N. Acești N termeni pot fi însă înlocuiți, într'o ordine oarecare, cu termenii:

$$\mathcal{M}N + 1, \mathcal{M}N + 2, \mathcal{M}N + 3, \ldots \mathcal{M}N + N$$

deoarece resturile diviziunei fiecărui termen prin N reproduc numerile:

$$1, 2, 3, \ldots N$$

In adevăr, dacă doi termeni oarecari ai progresiei: $(a + i . r)$ și $(a + j . r)$ divizați prin N ar da aceleași resturi, atunci diferența lor: $(j - i) . r$ ar trebui să se împartă exact cu N, fapt imposibil deoarece r este prim cu N, iar $0 < j - i < N$.

In asemenea condițiuni este lesne de observat că numărul numerilor prime cu N, din șirul dat, este

1) *Théorie des Nombres* par **E. Lucas**, p. 396.

egal cu numărul numerilor prime din șirul format numai din resturi, adică este egal cu $\varphi(N)$.

Aceasta se mai poate demonstra și astfel:

In baza relațiilor 20) și 34) avem:

$$37)\qquad \begin{aligned} I_{MN \to MN+N}(N) &= I_{MN+N}(N) - I_{MN}(N) \\ &= I_{MN}(N) + I_N(N) - I_{MN}(N) \\ &= I_N(N) = \varphi(N) \end{aligned}$$

Relația se mai poate stabili și în baza relației 32) unde facem $B - A = 1$.

29. *Intr'un șir de* N *termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, a cărei rație este* r, *numărul* r *fiind prim cu un număr dat* M, *numărul numerilor prime cu* M *este egal cu indicatorul lui* M *față de* N, *adică cu* $I_N(M)$.

Demonstrația este analoagă cazului de mai sus.

30. *Intr'o progresie aritmetică de* N *termeni consecutivi, având drept rație un număr* r *prim cu* N, *numărul termenilor cari au cu* $N = d\,.\,\delta$, *pe* δ *drept cel mai mare codivizor, este egal cu indicatorul lui* d.[1])

Inlocuind termenii progresiei, după cum am văzut la **28** cu resturile:

$$1, 2, 3, \ldots . N$$

atunci termenii cari au pe δ drept cel mai mare codivizor sunt:

$$\delta, 2.\delta, 3.\delta, \ldots . d.\delta$$

Dar pentru ca $i.\delta$ și $d.\delta = N$ să aibă pe δ drept cel mai mare codivizor, atunci i și d trebue să fie primi între ei, prin urmare numărul cerut va fi egal cu $\varphi(d)$.

---

1) *Théorie des Nombres* par **E. Lucas**, pa . 397.

Indicator redus

31. *Dacă* $\psi(N)$ *reprezintă cel mai mic comun multiplu al indicatorilor factorilor primi:*

$$a^{\alpha},\ b^{\beta},\ c^{\gamma}, \ldots\ l^{\lambda}$$

unde $N = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}$ *atunci avem:*

$$A^{\psi(N)} - 1 = \mathcal{M}N \tag{38}$$

unde A este un număr oarecare dat.

In acest caz $\psi(N)$ *ia numele de* „indicator redus“ [1] *al lui* N.

In adevăr, după teorema lui **Euler** avem:

$$A^{\varphi(a^{\alpha})} - 1 = \mathcal{M}a^{\alpha}$$

$$A^{\varphi(b^{\beta})} - 1 = \mathcal{M}b^{\beta}$$

$$A^{(\varphi c^{\gamma})} - 1 = \mathcal{M}c^{\gamma}$$

Dar dacă $\varphi(N)$ este cel mai mic comun multiplu al exponenților, atunci avem și:

$$A^{\psi(N)} - 1 = \mathcal{M}a^{\alpha}$$

$$A^{\psi(N)} - 1 = \mathcal{M}b^{\beta}$$

$$A^{\psi(N)} - 1 = \mathcal{M}c^{\gamma}$$

In consecință, factorii $a, b, c, \ldots\ldots$ fiind primi, urmează că:

$$A^{\psi(N)} - 1 = \mathcal{M}N \tag{39}$$

Se observă deci lesne că:

— pentru $N = 2, 4, p^m, (2\ p^m)$ unde p este un număr prim impar, avem $\psi(N) = \varphi(N)$;

— pentru N diferit de valorile de mai sus, $\psi(N)$ este o parte alicotă a lui $\varphi(N)$.

Indicatori de ordin superior.

32. *Definițiune.* Dacă notăm cu $\varphi_1(N)$ indicatorul lui N și dacă îl vom denumi «indicator de ordinul întâi», atunci vom nota cu $\varphi_2(N)$ indicatorul indicatorului lui N, adică $\varphi[\varphi(N)]$ și îl vom denumi „indicator de ordinul al doilea“. In condițiuni simi-

---

1) Numele este dat de d-l **E. Lucas**, vezi *Théorie des Nombres*, pag. 429.

lare, vom avea în general expresia „indicatorului de ordinul m“ al numărului N:

$$40)\quad \varphi_m(N) = \varphi[\varphi_{m-1}(N)]$$
$$= \varphi[\varphi[\varphi_{m-2}(N)]]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \underbrace{\varphi[\varphi[\varphi[\ldots\varphi(N)]\,]\ldots]}_{m \text{ paranteze}}$$

Exemplu I. Fie $N = 300 = 2^2 . 3 . 5^2$, atunci avem:
$\varphi_1(N) = 2^4 . 5 = 80$; $\varphi_2(N) = \varphi(80) = 2^5 = 32$
$\varphi_3(N) = \varphi(32) = 2^4 = 16$; $\varphi_4(N) = \varphi(16) = 2^3 = 8$
$\varphi_5(N) = \varphi(8) = 2^2 = 4$; $\varphi_6(N) = \varphi(4) = 2$
și $\varphi_6(N) = \varphi(2) = 1$

Exemplu II. Fie $N = 7^\alpha . 13^\beta$, atunci avem:
$\varphi_1(N) = 7^{\alpha-1} . 13^{\beta-1} . (7-1)(13-1) = 2^3 . 3^2 . 7^{\alpha-1} . 13^{\beta-1}$
$\varphi_2(N) = 2^5 . 3^3 . 7^{\alpha-2} . 13^{\beta-2}$
$\varphi_3(N) = 2^7 . 3^5 . 7^{\alpha-3} . 13^{\beta-3}$
. . . .
$\varphi_m(N) = 2^{2m+1} . 3^{2m-1} . 7^{\alpha-m} . 13^{\beta-m}$

33. *Exerciții.*

I. *Care este cea mai mare valoare a lui* N, *știind că avem* $\varphi_4(N) = 1$?

Vom lua dela început $\varphi_3(N) = 2$, căci $\varphi_3(N) = 1$ nu are sens, soluțiile încadrându-se în celelalte.

Numerile cari au pe *2* drept indicator sunt: *3, 4, 6.* Cum însă orice indicator este par, urmează că: $\varphi_2(N) = 4$ sau 6

Numerile cari au pe *4* drept indicator sunt: *5, 8, 10* și *12*, iar pe *6*, sunt: *7, 9, 14* și *18*. Eliminând numerile impuse, ne rămâne:

$$\varphi_1(N) = 8, 10, 12, 14, 18$$

Constatăm apoi că numărul N:

— nu poate avea factori mai mari ca *19;*

— nu poate avea pe *2* la o putere mai mare ca *4;*

— nu poate avea pe *3* la o putere mai mare ca *3;*

— nu poate avea pe *5* și *7* la puteri mai mare ca *2;*

— nu poate avea pe *11, 13* și *19* la puteri mai mari ca 1.

In consecință N va fi compus din factorii: *2, 3, 5, 7, 11, 13* și *19* la puterile arătate mai sus. Or, cu acești factori se pot forma numerile:

2^4, $2^3 . 3$, $2^2 . 3^2$, $2^2 . 5$, $2^2 . 7$, $2 . 3^3$, $2 . 11$, $2 . 13$, $2 . 19$, 3^3, $3 . 5$, $3 . 7$, 11, 13, 19, $2 . 3 . 5$, $2 . 3 . 7$.

Dintre acestea, cel mai mare este *54*, deci avem:

$\varphi_1 (54) = 18$; $\varphi_2 (54) = \varphi_1 (18) = 6$

$\varphi_3 (54) = \varphi_2 (18) = \varphi_1 (6) = 2$

$\varphi_4 (54) = \varphi_3 (18) = \varphi_2 (6) = \varphi_1 (2) = 1$

II. *Să se arate că dacă* $\varphi_\alpha . (17^\beta) = 2$, *atunci* $\alpha = 4\beta$.

Avem succesiv:

$\varphi_1 (17^\beta) = 17^{\beta-1} . (17-1) = 2^4 . 17^{\beta-1}$

$\varphi_2 (17^\beta) = 2^7 . 17^{\beta-2}$

. . . .

$\varphi_3 \, 17^\beta) = 2^{4+3(\beta-1)} . 17^{\beta-3} = 2^{3\beta+1}$

. . . .

$\varphi_{\beta+k} (17^\beta) = 2^{3\beta+1-k}$

Dar pentru ca să avem $3 . \beta + 1 - k = 1$, pentru a satisface condiției enunțului, urmează că trebue să avem $k = 3\beta$, și deci $\alpha = \beta + k = 4\beta$.

Mai general putem admite, în loc de *17*, numărul prim $A = 2^m + 1$ atunci se găsește lesne că $\alpha = m\beta$.

Şi mari general, dacă:

$$N = (2^{m_1} + 1).(2^{m_2} + 1)...$$

atunci avem $\varphi_\alpha (N^\beta) = 2^\gamma$, dacă:

$$\alpha = \beta . \sum_1^k m_i - k(\beta - 1) + \beta - \gamma$$

Ordinul indicator total.

34. *Numărul total al indicatorilor unui număr dat sau „ordinul indicator total".*

Dacă $\varphi_i (N)$ reprezintă indicatorul de ordinul i a lui N și dacă avem:

$$\varphi_n (N) = 1 \text{ iar } \varphi_{n-1} (N) = 2$$

atunci n reprezintă numărul total al indicatorilor lui N sau *„ordinul indicator total"*.

Limita inferioară a ordinului indicator total

Fie mai întâi $N = a^\alpha$, atunci avem succesiv:

$\varphi_1 (N) = a^{\alpha-1} . A_1$ unde $A_1 = a - 1$

$\varphi_2 (N) = a^{\alpha-2} . A_2$ unde $A_2 (a-1) . \varphi (A_1)$

. . . .

$\varphi_\alpha (N) = A_\alpha$ unde $A_\alpha = (a-1) . \varphi (A_{\alpha-1})$

Pentru $A_\alpha = 1$ avem $n = \alpha$;

" $A_\alpha > 1$ " $n > \alpha$.

In cazul când $N = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma ...$ unde presupunem: $a < b < c < ...$, vom admite cel mai defavorabil caz când: $a = b = c = ...$ și atunci:

$$N' = a^{\alpha+\beta+\gamma+...} < N$$

Prin urmare, ținând seamă de primul caz, avem:

41) $$n \geqq \alpha + \beta + \gamma + ...$$

Pe o altă cale se mai poate arăta că, având: $2 < a < b < c < ...$ și cum:

$$\varphi_1 (N) = a^{\alpha-1}. b^{\beta-1}. c^{\gamma-1}... (a-1)(b-1)(c-1)...$$

vom presupune:

$$(a-1).(b-1).(c-1)... = 2^p . A_1$$

unde p este mai mare sau cel puțin egal cu numărul factorilor primi ai lui N, iar A_1 este impar, având printre factorii lui primi poate și pe cei mai mici factori primi ai lui N.

Analog avem:

$$\varphi_2 (N) = 2^{2p+q_1-1}. a^{\alpha-2}. b^{\beta-2}. c^{\gamma-2}... A_2$$

unde q_1 este puterea lui 2 care rezultă din indicarea factorilor lui A_1 diferiți de $a, b, c,...$

Deasemenea, avem:

$$\varphi_3 (N) = 2^{3p+q_1+q_2-2}. a^{\alpha-3}. b^{\beta-3}. c^{\gamma-3}... A_3$$

Dar după un ordin oarecare de indicare ε_1, dispare de pildă factorul e^{ε_1} a lui N, apoi după alt ordin ε_2, dispare factorul f^{ε_2}, etc... deci, odată cu dispariția tuturor factorilor, vom avea:

$$\varphi_{\varepsilon_p} (N) = 2^{\varepsilon_1 p + \varepsilon_2 (p-1) + ... + \varepsilon_p - \Sigma \varepsilon_i} . A_{\varepsilon_p}$$

Dacă admitem $A_{\varepsilon_p} = 1$, ceace este desavantajos, atunci vom avea $\varphi_n (N) = 1$ când:

$$n = \varepsilon_p + \varepsilon_1 . p + \varepsilon_2 (p-1) + ... + \varepsilon_p + \Sigma \varepsilon_i$$
$$= (\varepsilon_1 - 1) p + (\varepsilon_2 - 1)(p-1) + ... + \varepsilon_p$$

unde am presupus $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < ... < \varepsilon_p$.

Dar într'o ordine oarecare exponenții ε_i reproduc exponenții: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ aranjați după mărime, deci cum avem $p > 1$, căci pentru $p = 1$, demonstrația este dată în primul capitol și cum:

$$(\varepsilon_1 - 1)p + (\varepsilon_2 - 1) + \ldots + \varepsilon_p \geqq \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

urmează că:

$$n \geqq \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

Limita superioară

Plecând dela ultima demonstrație de mai sus, vom admite $A\varepsilon_p = 2^\nu$, unde 2^ν este imediat superior lui l^λ adică ultimului factor (cel mai mare) a lui N, ceace este cu totul desavantajos, atunci observăm că:

$$n = (\varepsilon_1 - 1)p + (\varepsilon_2 - 1).(p - 1) + \ldots + \varepsilon_p + \nu$$

Prin urmare putem admite că:

$$42) \quad n < p.(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) + \nu$$

unde trebue să luăm:

$$\nu = E\left[\frac{\log.\ l^\lambda}{\log.\ 2}\right]$$

Exemplu. Fie $N = 3^3.\ 7^2.\ 11$,
atunci avem:

$\varphi_1(N) = 2^2.\ 3^3.\ 5.\ 7;$
$\varphi_2(N) = 2^5.\ 3^3$
$\varphi_3(N) = 2^5.\ 3^2$
$\varphi_4(N) = 2^5.\ 3$
$\varphi_5(N) = 2^5$
. . . .
$\varphi_{10}(N) = 1$

Apoi cum:

$$\nu = E\left[\frac{\log.\ 11}{\log.\ 2}\right] = 1$$

vom avea:

$$3(3 + 2 + 1) + 1 > 10 > 3 + 2 + 1$$

Indicatorul de ordin superior ai unei sume

35. *Cazul când termenii sumei sunt numere prime între ele (nu au aceiași factori primi).*

Fie A, B, C, . . . o serie de numere prime între ele, și, fie respectiv: a_i, b_i, c_i, . . . factorii lor primi, notând apoi cu:

$$(P_0)_A = \Pi(a_i - 1); \quad (Q_0)_A = \Pi a_i$$

$$(P_0)_B = \Pi(b_i - 1); \quad (Q_0)_B = \Pi b_i$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Apoi:

$$(P_1)_A = \Pi(a'_i - 1); \quad (Q_1)_A = \Pi a'_i$$

$$(P_1)_B = \Pi(b'_i - 1); \quad (Q_1)_B = \Pi b'_i$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

unde a'_i, b'_i, . . . sunt factori cari resultă din indicarea a doua a numerilor A, B, . . . ; a''_i, b''_i, . . . rezultă din a treia, și așa mai departe.

Cu aceste notațiuni avem:

$$\varphi_1(A) = A \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A$$

$$\varphi_2(A) = A \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_A$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_m(A) = A \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_A \cdots \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)_A$$

Apoi:

$$\varphi_1(B) = B \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B$$

$$\varphi_2(3) = B \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_B$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_m(B) = B \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_B \cdots \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)_B$$

Și așa mai departe pentru celelalte numere.

Atunci vom avea:

$$38) \quad \begin{cases} \Sigma\varphi_m(A) = A \cdot \Pi\left(\frac{P}{a}\right)_A + B\Pi\left(\frac{P}{a}\right)_B + \cdots \\ \varphi_m(\Sigma A) = \Sigma A \cdot \Pi\left(\frac{P}{a}\right)_{\Sigma A} \end{cases}$$

Cum în general $\left(\frac{P}{Q}\right)_{\Sigma A}$ este mai mic sau cel mult egal cu oricare din parantezele $\left(\frac{P}{Q}\right)_A$, $\left(\frac{P}{Q}\right)_B$, . . . urmează că vom avea:

$$43) \qquad \Sigma\varphi_m(A) \geqq \varphi_m(\Sigma A)$$

Exemplu: Fie $A = 3$, $B = 5$; $C = 7$ şi $m = 2$ atunci avem:

$\varphi_2(A) = 2$; $\varphi_2(B) = 1$; $\varphi_2(C) = 2$; $\varphi_2(A + B + C) = 4$

Rezultă deci că

$$\varphi_2(A) + \varphi_2(B) + \varphi_2(C) > \varphi_2(A + B + C)$$

36. *Cazul când termenii:* A, B, C, . . . *au aceiaşi factori primi, însă cu exponenţi astfel aleşi încât după a* m—a *indicare, să dispară aceiaşi factori la toţi termenii.*

Analog cazului dela **35**, vom deduce lesne că produsele P şi Q au aceleaşi valori la toţi termenii, respectiv fiecărui ordin de indicare, avem:

$$44) \qquad \begin{cases} \Sigma\varphi_m(A) = \Sigma A \cdot \Pi\left(\frac{P}{Q}\right)_A \\ \varphi_m(TA) = \Sigma A \cdot \Pi\left(\frac{P}{Q}\right)_{\Sigma A} \end{cases}$$

Cum în general avem: $\left(\frac{P}{Q}\right)_{\Sigma A}$ mai mic decât oricari din fracţiunile: $\left(\frac{P}{Q}\right)_A$ sau $\left(\frac{P}{Q}\right)_B$, etc. cari sunt aceleaşi, urmează că:

$$\Sigma\varphi_m(A) \geqq \varphi_m(\Sigma A)$$

adică ajungem iar la relaţia 43).

Dacă facem: $A = B = C = . . . = L$, numărul termenului fiind l, atunci avem:

$$45) \qquad l \cdot \varphi_m(L) \geqq \varphi_m(l \cdot L)$$

Exemple:

1) Fie $A=2^3.3^2$; $B=2^4,3^2$; $C=2^3.3^3$ și $m=2$, atunci avem:

$$\varphi_2(A) = 2^3.3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\varphi_2(B) = 2^4.3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\varphi_2(C) = 2^3.3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\varphi_2(A + B + C) = 2^4.3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

Prin urmare:

$$\varphi(A + B + C) = \varphi_2(A) + \varphi_2(B) + \varphi_2(C)$$

2) Fie $A = B = C = L = 2^3 . 3^2$ și $l = 3$ atunci trebue să avem:

$$\varphi_3(2^3 . 3^2) \geqq \varphi_3(2^3 . 3^3)$$

Or, știm că: $\varphi_3(2^2 . 3^2) = 2^2$ și $\varphi_3(2^3.3^3) = 2^3$ deci cum avem $12 > 8$, relația este verificată,

Indicatorul de ordin superior al unui produs.

37. *Cazul când factorii produsului sunt primi între ei.*

Intrebuințând aceleași notațiuni ca la sume (35) avem:

$$46)\quad \Pi\, \varphi_m\, (A) = \Pi\, A \,.\left[\Pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A \Pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B \cdots\right]$$

$$47)\quad \varphi_m\, (\Pi\, A) = \Pi\, A.\, \Pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_{\Pi\, A}$$

Urmând formația produselor P și Q, se vede bine că:

$$\left[\Pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A \Pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B \cdots\right] \leqq \Pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_{\Pi\, A}$$

Prin urmare vom avea:

$$48)\quad \varphi_m\, (\Pi\, A) \geqq \Pi\, \varphi_m\, (A)$$

Această ultimă relație se mai poate demonstra scriind că vom avea întotdeauna:

49) $\varphi_m (a^\alpha . b^\beta ...) \geqq \varphi_m (a^\alpha) . \varphi_m (b^\beta) ...$

In adevăr, știm că:

$\varphi_1 (a^\alpha) = a^{\alpha-1} . (a - 1)$

Vom nota apoi:

$$a-1 = 2^x . 3^y ... p^t \quad \text{unde } p < a.$$

Deci:

$$\varphi_2 (a^\alpha) = a^{\alpha-2} . (a-1) . 2^{x-1} . 3^{y-1} ... p^{t-1} . \varphi (2 . 3 ... p)$$

. . . .

$$\varphi_m (a^\alpha) = a^{\alpha-m} . 2^{mx-(m-1)+x'} . 3^{my-(m-1)+y'} . ... p^{mt-(m-1)} ...$$

Pe de altă parte:

$$\varphi_1 (a^\alpha . b^\beta) = a^{\alpha-1} . b^{\beta-1} . (a-1) . (b-1)$$

Dacă și aci vom face notațiunea:
$(a-1) . (b-1) = 2^{x+x_1} . 3^{y+y_1} . . . . q^{s+s_1}$ unde $q < b$, atunci analog avem:

$$\varphi_m(a^\alpha . b^\beta) = a^{\alpha+(m-1)s-m} . b^{\beta-m} . 2^{m(x+x_1)-(m-1)+x'+x'_1} . 3^{m(y+y_1)-(m-1)+y'+y'_1} . . . . .$$

unde $x', x'_1, y', y'_1, . .$ sunt exponenți cari rezultă din indicările succesive ale ansamblului de factori ai produsului $(a-1) . (b-1)$. Prin urmare, atât exponenții sunt mai mari, cât și factorii, căci este foarte posibil să avem $q > p$, în orice caz însă, până la factorul p îi avem.

In consecință, în cazul mai multor factori, mărimea exponenților și chiar a factorilor se accentuiază, deci proprietatea este demonstrată.

Pe o altă cale se vede lesne că avem:

$$\varphi_m(a^\alpha) = a^{\alpha-m} . A_m \text{ unde } A_m = (a-1)\varphi(A_{m-1})$$
$$\varphi_m(b^\beta) = b^{\beta-m} . B_m \text{ unde } B_m = (b-1)\varphi(B_{m-1})$$

. . . .

unde în cazul când unul din exponenții $\alpha, \beta, . . .$ este egalat de m, dispare complect factorul a și factorul $(a-1)$ de pildă în A_m.

Deasemenea avem:

$$\varphi_m(a^\alpha . b^\beta \; . \; . \; . \;) = a^{\alpha-m+\varepsilon_a} . b^{\beta-m+\varepsilon_b} \; . \; . \; . \; (a-1)\,(b-1) \; . \; . \; . \; . \; M_m$$

unde $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \ldots$ sunt exponenți cari rezultă din termenii: $(b-1) \cdot (c-1) \ldots$, iar $M_m = \varphi(M_{m-1})$ și rezultă din indicarea succesivă a produsului: $(a-1) . (b-1) . (c-1) \ldots$

Dar se observă lesne că avem exponenții lui: $a, b, c, \ldots k$ (fără ultimul factor l), superiori lui: $(\alpha - m), (\beta-m), (\gamma-m), \ldots$ din cauza adăogirei valorilor: $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \ldots$ și mai avem:

$$M_m \geqq A_m . B_m \; . \; . \; .$$

deoarece indicarea parțială a termenilor: $(a-1)$, $(b-1), \ldots$ tinde mai repede la 1, decât la indicarea produsului lor.

Exemplu. $a = 2$, $b = 7$, $c = 13$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ și $m = 3$, atunci avem:

$$\varphi_3(2^3) = 1; \; \varphi_3(7^2) = 2^2; \; \varphi_3(13) = 2$$

Apoi:

$$\varphi_3.(2^3 . 7^2 . 13) = 2^6 . 3$$

Prin urmare vedem că:

$$\varphi_3(2^3) \, . \, \varphi_3(7^2) \, . \, \varphi_3(13) = 2^3$$

deci: $2^6 . 3 > 2^3$.

38. *Cazul când factorii produsului au aceiași factori primi, însă cu exponenți astfel aleși încât după a m—a indicare, să dispară aceiași factori primi la toți factorii produsului.*

Analog celor văzute la **36** și **37**, produsele P și Q sunt egale la toți factorii produsului, pentru fiecare ordin de indicare, deci:

$$50) \quad \begin{cases} \Pi\varphi_m(A) = \Pi A \, . \left[\Pi \left(\dfrac{P_0}{Q_0} \right)_A \right]^l \\ \varphi_m(\Pi A) = \Pi A \, . \, \Pi \left(\dfrac{P_0}{Q_0} \right)_{\Pi A} \end{cases}$$

unde l este numărul factorilor produsului.

Dar cum avem :

$$\Pi\left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_{\Pi A} = \Pi\left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A$$

urmează că :

51) $$\Pi\varphi_m(A) = \varphi_m(\Pi A) \cdot \left[\Pi \frac{P_0}{Q_0}\right)_A\Bigg]^{l-1}$$

Dacă facem : $A = B = C = \ldots = L$, numărul factorilor fiind l, atunci avem :

52) $$\varphi_m(L^l) = [\varphi_m(L)]^l \cdot \left[\frac{\Pi a}{(\Pi a-1)}\right]^{m(l-1)}$$

Exemple :

1) Luând aceleași valori ca la 36 exemplul 1, avem:

$$\Pi\varphi_2(A) = 2^{10} \cdot 3; \quad \varphi_2(\Pi A = 2^{10} \cdot 3^5$$

2) Fie: $A = B = C = 2^3 \cdot 3^2$, atunci:

$$[\varphi_2(2^3 \cdot 3^2)] = 2^9; \quad \varphi_2[(2^3 \cdot 3^2)^3] = 9^9 \cdot 3^4 \text{ și } \left[\frac{\Pi a}{\Pi(a-1)}\right]^{2(3-1)} = 3^4$$

Alte proprietăți și consecințe ale indicatorilor de ordin superior

39. *Dacă $p < q$ atunci avem :*

53) $$\frac{\varphi_p(N)}{\varphi_q(N)} \geqq 2^{q-p}$$

In adevăr, știm că orice indicator mai mare ca *1* este par, deci vom avea:

54) $$\begin{cases} \varphi_2(N) \leqq \frac{1}{2} \cdot \varphi_1(N) \\ \varphi_3(N) \leqq \frac{1}{2} \cdot \varphi_2(N) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(N) \leqq \frac{1}{2} \cdot \varphi_{m-1}(N) \end{cases}$$

Or, adunând și înmulțind relațiile între ele, obținem:

$$55)\quad \begin{cases} \varphi_1(N) \leq \sum_{1}^{m}\varphi_i\,(N) \leq 2\,\varphi_1(N) - \varphi_m(N) \\ 2\,\varphi_{m+1}(N) < \varphi_m\,(N) \leq \dfrac{1}{2^{m-1}}\cdot\varphi_1(N) \end{cases}$$

Inmulțindu-le însă numai dela ordinul p la ordinul q, avem relația din enunț, unde pentru $p = 1$ și $q = m$, dăm peste relația 50).

Dacă în relația 50) facem $m = n$, adică îl facem egal cu „ordinul total de indicare", cum avem $\varphi_n(N) = 1$, urmează că:

$$56)\qquad \varphi_1(N) \geqq 2^{m-1}$$

Făcând apoi pe $m = 1, 2, 3, \ldots n$ și adunând sau înmulțind, obținem:

$$57)\quad \begin{cases} \varphi_1(N) + \varphi_2(N) + \ldots \varphi_n\,(N) \leq \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}\cdot\varphi_1(N) \\ \varphi_1(N) + \varphi_2(N) + \ldots \varphi_n\,(N(\leq \dfrac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}\,[\varphi_1(N)]^n \end{cases}$$

40. *Dacă* a *este un număr prim, atunci avem:*

$$58)\qquad [\varphi_\alpha\,(a^\alpha)]^m \geqq \varphi^{m\alpha}(a^{m\alpha})$$

In adevăr, am văzut la 35 că:

$$\varphi_\alpha\ (a^\alpha) = 2^{\alpha.x-(\alpha-1)+x'}\,.\,3^{\alpha.y-(\alpha-1)+y'}\,.\,.\,p^{\alpha t-(\alpha-1)}\ldots$$

$$\varphi^{m\alpha}(a^{m\alpha}) = 2^{m\alpha.x-(m\alpha-1)+x'}\,.\,3^{m\alpha y-(m\alpha-1)+y'}\ldots$$

$$\ldots p^{m\alpha t-(n\alpha-1)}\ldots$$

Or, ridicând prima egalitate la puterea m — a, obținem exponenți superiori celor din a doua egalitate, deoarece o simplă comparație ne arată că avem:

$$m\,[\alpha.x - (\alpha - 1) + x'] > m\alpha x - (m\alpha - 1) + x'$$

pentru $m > 1$.

Dacă admitem $\alpha = 1$ și în locul lui a luăm un număr oarecare N, atunci se poate stabili că avem:

59) $$[\varphi_1(N)]^m \geqq \varphi_m(N^m)$$

Această relație [1]) se mai poate stabili direct știind că avem:

60) $$\begin{cases} \varphi_1(N) = N \cdot \dfrac{P_0}{Q_0} = N \cdot \dfrac{P_0}{Q_0} \\ \varphi_2(N) = \varphi_1(N) \cdot \dfrac{P_1}{Q_1} = N \cdot \dfrac{P_0}{Q_0} \cdot \dfrac{P_1}{Q_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_i(N) = \varphi_{i-1}(N) \cdot \dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} = (N) \cdot \dfrac{P_0}{Q_0} \cdot \dfrac{P_1}{Q_1} \cdot \cdot \dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} \end{cases}$$

unde:

$$P_0 = \Pi(a_0 - 1)\ ;\ Q_0 = \Pi a_0$$
$$P_1 = \Pi(a_1 - 1)\ ;\ Q_1 = \Pi a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_i = \Pi(a_i - 1)\ ;\ Q_i = \Pi a_i$$

$a_0, b_0, c_0, \ldots$ fiind factorii primi ai lui N; a_1, b_1, c_1 factorii primi ai lui $\varphi_1(N), \ldots a_i, b_i, c_i$ factorii primi ai lui φ_i.

Deasemenea avem:

61) $$\begin{cases} \varphi_1(N^m) = N^m \cdot \left(\dfrac{P_0}{Q^0}\right)_0 = N^m \cdot \left(\dfrac{P_0}{Q_0}\right) \\ \varphi_2(N^m) = \varphi_1(N^m) \left(\dfrac{P_1}{Q_1}\right)_1 = N^m \cdot \left(\dfrac{P_0}{Q_0}\right) \cdot \left(\dfrac{P_1}{Q_1}\right)_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_i(N^m) = \varphi_{i-1}(N^m) \cdot \left(\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}\right)_{i-1} = N^m \cdot \dfrac{P_0}{Q_0} \cdot \left(\dfrac{P_2}{Q_1}\right)_1 \ldots \\ \qquad \cdot \cdot \left(\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}\right)_{i-} \end{cases}$$

---

1) A fost stabilită și de d-l **I. B. Florescu** în *Gazeta Matematică*, XXXVI—166.

unde : $\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)_i$ reprezintă fracțiuni provenite din factori mai mari decât în cazul când $m = 1$, deoarece dispariția factorilor $a, b, c, \ldots$ a lui N, prin indicare se face mai încet, după valoarea exponentului puterei. Prin urmare avem :

$$\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)_i < \left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$$

Inlocuind în 49) valori scoase din 93) și 55) găsim;

$$\left(\frac{P_0}{Q_0}\right)^{m-1} \geqq \left(\frac{P_1}{Q_2}\right)_1 \cdot \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)_2 \cdot \cdot \cdot \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)_{m-1}$$

$$\frac{P_0}{Q_0} \geqq \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_1 ; \quad \frac{P_0}{P_0} \geqq \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)_2 \cdot \cdot \cdot \frac{P_0}{Q_0} \geqq \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{-m1}}\right)_{m-1}$$

Urmează că relația 53) este stabilită.

Dacă ținem seamă de 47) și de 54), obținem :

$$\left(\frac{P_0}{Q_0}\right)^{m-1} \geqq \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} \cdot \cdot \cdot \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$$

Deci și în acest caz vom avea:

$$\frac{P_0}{Q_0} \geqq \frac{P_1}{Q_1}; \quad \frac{P_0}{Q_0} \geqq \frac{P_2}{Q_2} \cdot \cdot \cdot \frac{P_0}{Q_0} \geqq \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$$

In mod analog se stabilește că :

62) $$\frac{\varphi_{q+r}(N^m)}{\varphi_q(N^m)} \leqq \frac{\varphi_{p+r}(N)}{\varphi_p(N)}$$

unde $q > p$.

41. *Dacă a este un număr prim, atunci avem :*

63) $$\begin{cases} \varphi_\alpha(a^\alpha) \cdot \varphi_\beta(a^\beta) \geqq \varphi_{\alpha+\beta}(a^{\alpha+\beta}) \\ \Pi\varphi_i(a^i) \geqq \varphi_{\Sigma i}(a^{\Sigma i}) \end{cases}$$

Servindu-ne de relațiile 51) avem:

$$\varphi_\alpha(a^\alpha) = a^\alpha \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right) \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_1 \cdot \cdot \left(\frac{P_{\alpha-1}}{Q_{\alpha-1}}\right)_{\alpha-1}$$

$$\varphi_\beta(a^\beta) = a^\beta \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right) \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_1 \cdot \cdot \left(\frac{P_{\alpha-1}}{Q_{\alpha-1}}\right)_{\alpha-1} \cdot \left(\frac{P_{\beta-1}}{Q_{\beta-1}}\right)_{\beta-1}$$

unde am presupus $\beta > \alpha$ și:

$$\varphi_{\alpha+\beta}(a^{\alpha+\beta}) = a^{\alpha+\beta} \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right) \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_1 \cdots \left(\frac{P_{\alpha-1}}{Q_{\alpha-1}}\right)_{\alpha-1} \cdots$$

$$\cdots \left(\frac{P_{\beta-1}}{Q_{\beta-1}}\right)_{\beta-1} \cdots \left(\frac{P_{\alpha+\beta-1}}{Q_{\alpha+\beta-1}}\right)_{\alpha+\beta-1}$$

Inlocuind în relație, ne rămâne:

$$\prod_0^{\beta-1} \left(\frac{P_i}{Q_i}\right)_i \geqq \prod_{\alpha}^{\alpha+\beta-1} \left(\frac{P_i}{Q_i}\right)_i$$

care este evidentă, după cele arătate la **40**.

Relația generală se stabilește analog.

Deasemenea, dacă avem:

$$\varphi_m(a^{\alpha}) = 1; \quad \varphi_n(a^{\beta}) = 1 \text{ și } \varphi_p(a^{\alpha+\beta}) = 1$$

atunci avem:

$$60) \quad \begin{cases} m + n > p \\ \Sigma i > p \quad (\text{în general}). \end{cases}$$

Este de observat că trebue să avem:

$$m = \alpha + q; \quad n = \beta + q \text{ și } p = \alpha + \beta + q$$

unde $q > 0$.

40. *Exerciții.*

I. *Să se rezolve ecuația:*

$$\varphi_4 \cdot (7^x \cdot 11^y) = 2^z$$

Admitem $x \leqq y$, atunci vom da lui x valori dela *1* la *3*, căci pentru valori mai mari z perzistă, și astfel indicând avem, de pildă pentru $x = 1$:

$$\varphi_1(7 \cdot 11^y) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^{y-1}$$

$$\varphi_2(7 \cdot 11^y) = 2^5 \cdot 5 \cdot 11^{y-2}$$

$$\varphi_3(7 \cdot 11^y) = 2^7 \cdot 5 \cdot 11^{y-3}$$

Pentru $y \leqq 3$, ne dă $z = 2, 4, 8$.

Așa dar tabloul de soluțiuni va fi:

x	1	2	3
y	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3
z	2, 4, 8	4, 7, 10	7, 9, 12

II. *Să se rezolve ecuația:*

$$\varphi_x[\varphi_y(2^{\alpha}) \cdot \varphi_z(3^{\beta})] = 1$$

Avem $\varphi_y(2^\alpha) = 2^{\alpha-y}$; $\varphi_z(3^\beta) = 2 \cdot 3^{\beta-z}$, ecuaţia devine deci:

$$\varphi_x[2^{\alpha-y+1} \cdot 3^{\beta-z}] = 1$$

Fie: $\alpha > y$ şi $\beta < z$ atunci:

— dacă: $x = \beta - z - \varepsilon$ atunci:

$$\varphi_x[\quad] = 2^{\alpha-y+1} \cdot 3^\varepsilon$$

deci nu avem soluţie.

— dacă $x = \beta - z$, atunci:

$$\varphi_x[\quad] = 2^{\alpha-y+1}$$

deci avem relaţiile $x + z = \beta$ şi $y = \alpha + 1$.

— dacă: $x = \beta - z + \varepsilon$, atunci:

$$\varphi_x[\quad] = 2^{\alpha-y+1-\varepsilon}$$

deci avem soluţiile: $x + z = \beta + \varepsilon$ şi $y = \alpha - \varepsilon + 1$.

Fie: $\alpha \leq y$ şi $\beta > z$, atunci avem: $x + z > \beta$ şi $y \geq \alpha$.

Fie: $\alpha \leq y$ şi $\beta \leq z$, atunci $x = 1$.

42. *Indicatori de ordin superior pentru divizori.*

Imi propun să arăt că:

64) $$\Sigma\varphi_m(d^p) = \Sigma d^q \cdot \varphi_m(d^{p-q})$$

unde $q < p$.

In adevăr, pentru $d = a^\alpha$ avem:

$$\varphi_m(d^p) = a^{p\alpha-m} \cdot (a-1) \cdot A_m$$
$$\varphi_m(d^{d-q}) = a^{(p-q)\alpha-m} \cdot (a-1) \cdot A_m$$

Pentru $d = a^\alpha \cdot b^\beta$ avem:

$$\varphi_m(d^p) = \varphi_m(a^{\alpha \cdot p}) \cdot \varphi_m(b^{\beta \cdot p}) \cdot a^{\varepsilon \cdot p} \cdot A_m \cdot B_m$$
$$\varphi_m(d^{p-q}) = \varphi_m[a^{\alpha(p-q)}] \cdot \varphi_m[b^{\beta(p-q)}] \cdot a^{\varepsilon \cdot p} \cdot A_m \cdot B_m$$

a căror egalitate este evidentă.

In mod analog se poate stabili o egalitate pentru un d cu oricâţi factori.

CAPITOLUL II

Suma numerilor prime cu un număr dat şi mai mici decât el

1. Stabilirea formulei.

Dacă notăm cu σ(N) *suma numerilor prime cu* N *şi mai mici decât el, atunci avem:*

1) $$\sigma(N) = \frac{1}{2} . N . \varphi(N)$$

Calea I-a. Fie: $p_1, p_2, \ldots p_n$ numerile prime cu N şi mai mici decât el, (avem totdeauna $p_1 = 1$ şi $p_n = N - 1$). Se observă atunci lesne că:

2) $$\begin{cases} p_1 + p_n = N \\ p_2 + p_{n-1} = N \\ \ldots\ldots\ldots \\ P_i + p_{n-i+1} = N \end{cases}$$

numerile p_i şi p_{n-i+1} denumindu-se „numere prime *complimentare*“.

In adevăr, numerile p_i fiind prime cu N şi inferioare lui, au formele $p_i = N - r_i$ unde r_i este un număr tot prim cu N şi, implicit, inferior lui. Făcând să varieze i dela 1 la n atunci numerile: $r_1, r_2, \ldots r_n$ reproduc într'o ordine inversă numerile $p_n, p_{n-1}, \ldots p_1$.

Făcând acum să varieze, în relaţiunile 2), i dela 1 la n şi adunându-le, găsim:

3) $$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \frac{1}{2} . n . N$$

Dar $n = \varphi(N)$, prin urmare formula este stabilită.

Calea II-a. Fie $N = a^{\alpha}$, atunci știm că numerile neprime cu N sunt:

$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots \frac{N}{a} \cdot a$$

Suma lor este: $\frac{1}{2} N \cdot \left(1 + \frac{N}{a}\right)$ pe care scăzând-o din suma tuturor numerilor dela 1 la N, ne rămâne:

$$\sigma(a^{\alpha}) = \sigma(N) = \frac{1}{2} N \cdot N \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2} N \cdot \varphi(N)$$

Fie $N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$, formând la fel șirul numerilor neprime și sumele respective, găsim:

$$\frac{1}{2} N \cdot \left(1 + \frac{N}{a}\right) \quad \text{și} \quad \frac{1}{2} N \cdot \left(1 + \frac{N}{b}\right)$$

Dar avem o serie de numere neprime socotite de două ori, deoarece intră și într'o parte și în alta, și atunci trebue dedusă, adică trebue să scădem odată suma:

$$ab + 2ab + \ldots + \frac{N}{ab} \cdot ab = \frac{1}{2} N \left(1 + \frac{N}{ab}\right)$$

Cu aceasta, vedem că:

$$\begin{aligned}
\sigma(a^{\alpha} \cdot b^{\beta}) = \sigma(N) &= \frac{1}{2} N (N + 1) - \frac{1}{2} N \left(1 + \frac{N}{a}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} N \left(1 + \frac{N}{b}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} N \left[1 + \frac{N}{ab}\right] \\
&= \frac{1}{2} \left[N - \frac{N}{a} - \frac{N}{b} + \frac{N}{ab}\right] \\
&= \frac{1}{2} N \cdot N \cdot \left[1 - \frac{1}{a}\right] \left[1 - \frac{1}{b}\right] \\
&= \frac{1}{2} N \cdot \varphi(N)
\end{aligned}$$

Şi pentru cazul general, vom avea deci:

$$4)\quad \sigma(N) = \frac{1}{2} N . \left[N - \Sigma \frac{N}{a} + \Sigma \frac{N}{ab} - \Sigma \frac{N}{abc} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} N . \varphi(N) = \frac{1}{2} \varphi(N^2)$$

unde *a*, *b*, *c*, . . . sunt factori primi ai lui *N*.

Exemple.

I. Fie $N = 30$ atunci:

$$\sigma(30) = 17 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 120$$
$$\varphi(30) = 8$$
$$1 + 29 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17 = 30$$

II. Fie $N = 210$, atunci:

$$\sigma(N) = \frac{1}{2} . 210 . \left[210 - \left(\frac{210}{2} + \frac{210}{2} + \frac{210}{5} + \frac{210}{7} \right) + \left(\frac{210}{2.3} + \frac{210}{2.5} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{210}{2.7} + \frac{210}{3.5} + \frac{210}{3.7} + \frac{210}{5.7} \right) - \left(\frac{210}{2.3.5} + \frac{210}{2.3.7} + \right.$$
$$\left. + \frac{210}{2.5.7} + \frac{210}{3.5.7} \right) + \left(\frac{210}{2.3.5.7} \right)$$
$$= 105 . [210 - (105 + 70 + 42 + 30) - (35 + 21 + 15 + 14$$
$$+ 10 + 6) - (7 + 5 + 3 + 2) + (1) = 5040$$

Proprietăţi şi consecinţe

2. *Din examinarea formulelor 4) deducem că pentru* $N > 2$ *avem :*

$$5)\quad \varphi(N^2) \leq 2\sigma(N) < N^2$$

de fapt $2(N) < N(N-1)$.

Dacă $s(N)$ reprezintă suma divizorilor lui *N*, atunci avem :

$$6)\quad \sigma(N) \leq \frac{1}{2} N(N + 1) - s(N) + 1$$

3. *Două numere* A *şi* B *sunt proporţionale cu suma numerilor lor prime şi mai mici decât ele, numai dacă au indicatorii egali.*

Adică, avem :

$$\frac{\sigma(A)}{A} = \frac{\sigma(B)}{E}$$

unde înlocuim sumele în funcție de indicatori, numai dacă $\varphi(A) = \varphi(B)$..

Exemplu. Fie $A = 14$ și $B = 18$ indicatorii lor fiind egali, au valoarea *6*, iar numerile lor prime și mai mici decât ele sunt:

(1, 3, 5, 9, 11, 13) și (1, 5, 7, 11, 13, 17)

Suma numerilor va fi deci: 42 și 54, deci avem :

$$\frac{42}{14} = \frac{54}{18} = 3.$$

4. *Două numere diferite nu pot avea niciodată aceiași sumă a numerilor prime cu ele și mai mici decât acele numere.*

In adevăr, pentru ca să avem : $\sigma(A) = \sigma(B)$ ar trebui să avem: $A \, . \, \varphi(A) = B \, . \, \varphi(B)$ sau $\varphi(A^2) = \varphi(B^2)$. Adică ar trebui ca indicatorii patratelor lor să fie egali. Dar această înseamnă că ar trebui să avem:

$$A^2 \, . \, \frac{\Pi(a_i - 1)}{\Pi a_i} = B^2 \, . \, \frac{\Pi(b_i - 1)}{\Pi b_i}$$

sau:

$$A^2 \, . \, \Pi b_i \, . \, \Pi(a_i - 1) = B^2 \, . \, \Pi a_i \, . \, \Pi(b_i - 1)$$

unde a_i și b_i reprezintă factorii primi ai lui A și B.

In această ultimă egalitate vedem că dacă b_m este cel mai mare factor al lui B, care nu se găsește printre factorii $(a_i - 1)$, atunci în membrul întâi îl găsim la puterea unu, pe când în membrul al doilea îl găsim cel puțin la puterea a 2-a, în B^2, deci nu este posibil.

Dacă admitem însă că numerile au aceiași factori primi la puteri diferite, atunci nu mai avem $A^2 = B^2$, deci nici în acest caz nu se poate.

Așa dar: *unei sume de numere prime cu un număr dat și inferioare lui, îi corespunde numai un singur număr.*

5. *Fiind date două numere* A *și* B, *astfel încât* A > B, *în ce caz putem avea:* $\sigma(A) < \sigma(B)$?

Această problemă trebuește examinată într'o primă instanță sub forma :

In ce caz avem simultan neegalitățile:

$$A > B \quad \text{și} \quad \varphi(A) < \varphi(B)$$

Dar ambele condiții pot fi scrise sub forma:

$$B \cdot \varphi(A) < A \cdot \varphi(A)$$

sau :

$$\frac{\varphi(A)}{A} < \frac{\varphi(B)}{B}$$

Sau în sfârșit, dacă a_i și b_i sunt factorii primi ai numerilor *A* și *B*, atunci ar trebui să avem:

$$\frac{\Pi(a_i - 1)}{\Pi a_i} < \frac{\Pi(b_i - 1)}{\Pi b_i}$$

Această condiție ne poate genera numeroase soluții:

Fie $A = a_1^{\alpha_1}$ și $B = b_1^{\beta_1}$ atunci trebue să avem: $a_1 < b_1$, deci rezultă $\alpha_1 > \beta_1$.

Avem de pildă soluțiile: $A = 3^3$ și $B = 5^2$, $A = 5^3$ și $B = 11^2$ și în general putem lua:

$$a_1 = a \quad \text{și} \quad b_1 = (2a \pm 1)$$

Fie $A = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2}$ și $B = b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2}$, atunci se constată lesne că:

— Dacă $a_1 \leq b_1$ trebue să avem $a_2 < b_2$

— „ $a_1 > b_1$ „ „ „ $a_2 < b_2$

Deci în orice caz $a_2 < b_2$.

Avem de pildă: $B = 2^3 \cdot 3^2$ și $A = 2^2 \cdot 17$.

In general trebue ca factorii primi ai lui *A* să fie mai mici și mai numeroși, iar ai lui *B* mai mari și mai puțin numeroși.

De pildă: $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ *și* $B = 11 \cdot 17 = 187$, atunci vedem că: $\varphi(A) = 48$ *și* $\varphi(B) = 160$.

Suma numerilor prime și mai mici ca o sumă sau un produs de numere dat

6. *Suma și produsul.* Suma numerilor prime și mai mici ca o sumă sau produs de numere date se studiază analog celor văzute la indicatori (vezi I, 11, 12, 13 și 14).

Se poate totuși observa lesne că:

Dacă avem un produs de l *factori primi între ei:* A, B, C, . . . *atunci:*

$$7) \qquad \sigma(A.B.C\ .\ .\ .) = 2^{l-1}.\sigma(A).\sigma(B).\sigma(C)\ .\ .\ .$$

7. *Suma numerilor prime cu puterea unui număr dat și inferioare ei, este:*

$$8) \qquad \sigma(N^m) = N^{2(m-1)}.\sigma(N)$$

Și se poate stabili lesne observând că:

$$\sigma(N^m) = \frac{1}{2} N^m \varphi(N^m) = \frac{1}{2} N^{2(m-1)}.\sigma(N)$$
$$= N^{2(m-1)}.\sigma(N)$$

Comparație între suma numerilor prime cu un număr dat și inferioare lui și suma divizorilor acelui număr

8. *In afară de câteva excepții, suma numerilor prime cu un număr dat și inferioare lui este mai mare decât suma divizorilor acelui număr.*

Fie $N = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma$ . . . un număr dat și

$$\sigma(N) = \frac{1}{2} a^{2\alpha-1} . b^{2\beta-1}\ .\ .\ .\ (a-1).(b-1)\ .\ .\ .$$

suma numerilor prime și mai mici ca N, iar:

$$S(N) = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} . \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\ .\ .\ .$$

suma divizorilor lui N.

Trebue să arătăm că

$$\sigma(N) > S(N)$$

Pentru aceasta vom arăta pe grupe de factori că avem:

$$a^{2\alpha-1}(a-1)^2 > 2(a^{\alpha+1}-1)$$

Dar, deşi în desavantaj, vom admite relaţia:

$$a^{2\alpha-1}(a-1)^2 > 2 \, . \, a^{\alpha+1}$$

care se reduce la:

$$a^{\alpha-2} \, . \, (a-1)^2 > 1$$

Această ultimă relaţie este satisfăcută pentru:

α	1	2 şi 3	4
a	≥ 4	≥ 3	≥ 2

In mod analog raţionând pentru toate grupele, stabilim condiţia generală.

9. *Numere imperfecte şi numere inamice.*

Se ştie că un „număr perfect" este acela a cărei sumă a divizorilor, excepţie făcând numărul însăşi, este egală cu numărul dat.

Prin analogie vom numi „număr imperfect" acelea care satisfac relaţia:

$$N = \sigma(N) - N$$

şi care se reduce la $\varphi(N) = 4$, deci $N = 5, 8. 10, 12$.

Deasemenea se zice că două numere sunt „amice" când unul este egal cu suma divizorilor celuilalt.

Prin analogie, vom zice că două numere sunt „inamice" când suma numerilor prime cu unul şi mai mici ca el este egală cu celălalt număr, mai puţin numărul, adică avem:

$$A = \sigma(B) - B$$
$$B = \sigma(A) - A$$

Dar se observă bine că trebue să avem6

$$2(A + B) = A \, . \, \varphi(A) = B \, . \, \varphi(B)$$

Dacă ne referim la II, 4, vedem că nu există soluţii.

Dacă admitem:

$$A = \sigma(B) - A \text{ şi } B = \sigma(A) - B$$

de unde deducem: $\varphi(A) \, . \, \varphi(B) = 16$, atunci:

A	1, 2	3, 4, 6
B	17, 32, 34, 40, 48, 60	15, 16, 20, 24, 30

10. *Insumări în legătură cu divizorii unui număr.*

Dacă d reprezintă un divizor a lui N atunci avem:[1])

$$9)\quad \begin{cases} \Sigma[\sigma(d)]^m = \dfrac{1}{2}\cdot\left[\Pi\left(1+a^m\,.\,(a-1)^m\,.\,\dfrac{a^{2\alpha m}-1}{a^{2m}-1}\right)\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left.+2^m-1\right] \\ \text{iar în cazul } m=1: \\ \Sigma\sigma(d) = \dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{a^{2\alpha+1}+1}{a+1}\cdot\dfrac{b^{2\beta+1}+1}{b+1}\;.\;.\;.+1\right] \end{cases}$$

Pentru numerile mai mari ca 2, avem:

$$[\sigma(d)]^m = \frac{1}{2^m}\,.\,d^m\,.\,[\varphi(d)]^m$$

Dar pentru $d=1$ avem $\sigma(1)=0$ pe când $d\varphi(d)=1$, deci vom lua:

$$[\sigma(d)]^m = \frac{1}{2^m}\left[d^m[\varphi(d)]^m + 2^m - 1\right]$$

Prin urmare:

$$\Sigma[\sigma(d)]^m = \frac{1}{2^m}\,\Sigma\left[d^m[\sigma(d)]^m + 2^m - \right]$$

$$= \frac{1}{2^m}\left[\Sigma d^m[\sigma(d)]^m + \Sigma(2^m-1\right]$$

Dar valoarea lui $\Sigma d^m\,[\Sigma(d)]^m$ o cunoaștem dela I, **20**, Nota I, formula a doua din 18). Deci formula se poate lesne stabili.

Pentru cazul $m=1$, formula are o asemănare cu formula sumei divizorilor unui număr dat.

---

1) *Gazeta Matematică*, XXVII-69, problema: 2253, propusă de D-l **O. Mayer** și rezolvată de D-l **Al. Pantazi.**

Suma numerilor prime cu un număr dat și mai mici ca el, ridicate la puteri egale

11. *Prima cale*[1]) (calea directă).

Fie $p_1, p_2, \ldots p_n$ numerile prime cu N și inferioare lui și $a, b, c, \ldots$ factorii lui primi. Fie:

$$S_m = 1^m + 2^m + \ldots + N^m$$

și

$$\sum_1^n p_i^m = p_1^m + p_2^m + \ldots p_n^m$$

Atunci Σp_i^m se obține scăzând din S_m, suma tuturor numerilor neprime cu N și ridicat la puterea m-a, adică:

$$10) \quad S_m^1 = a^m \sum_1^{\frac{N}{a}} m + b^m \sum_1^{\frac{N}{b}} i^m + \ldots$$

$$- a^m b^m \sum_1^{\frac{N}{ab}} i^m - \ldots$$

$$+ a^m b^m c^m \sum_1^{\frac{N}{abc}} i^m + \ldots$$

Prin urmare:

$$11) \quad \sum_1^n p_i^m = S_m - S'_m$$

In acest mod se găsește că:

Suma patratelor este[1]):

$$12) \quad \sum_1^n p_i^2 = \frac{1}{0} . N . [2N . \varphi(N) + (-1)^\nu . \varphi(a.b.c \ldots)]$$

unde ν reprezintă numărul factorilor primi ai lui N.

Suma cuburilor este:

$$13) \quad \sum_1^n p_i^3 = \frac{1}{4} . N^2 . [N\varphi(N) + (-1)^\nu . \varphi(a.b.c \ldots)]$$

---

1) *Gazeta Matematică*, XLVII 465, soluția problemei: 3733 a D-lui **I. B. Florescu**.

Suma bipatratelor este[1]:

$$14)\quad \sum_1^n p_i^4 = \frac{1}{30} . N . [6N^3 . \varphi(N)$$
$$+ (-1)^\nu . \varphi(a.b.c..) . \left(N_2 - \frac{a^3-1}{a-1} . \frac{b^3-1}{b-1} ....\right)]$$

12. *A doua cale* (calea indirectă).

Ridicând relațiile:

$$p_1 + p_n = p_2 + p_{n-1} = . . . = p_n + p_1 = N$$

la puterea *m*-a și adunându-le, obținem:

$$15)\quad \sum_1^n p_i^m + \sum_1^n C_m^1 p_1 p_n (p_1^{m-2} + p_n^{m-2})$$
$$+ \sum_1^n C_m^2 p_1 p^n (p^{m-4} + p^{m-4})$$
$$+ . . . .$$
$$= \frac{1}{2} n . N^m = \frac{1}{2} N^m \varphi(N)$$

Se poate însă ușor observa că:

$$p_1^\alpha + p_n^\alpha = f(N, p_1 p_n)$$

Rămâne deci ca sumele $S(p_1 p_n)^\beta$ să fie determinate pe altă cale, unde:

$$S(p_1 p_n)^\beta = (p_1 p_n)^\beta + (p_2 p_{n-1})^\beta + . . .$$

Astfel pentru $m = 2$, avem:

$$16)\quad \sum_1^n p_i^2 = \frac{1}{2} . N^2 . \varphi(N) - 2 . S(p_1 p_n)$$

unde avem:

$$17)\quad S(p_1 p_n) = \frac{1}{12} N . [N . \varphi(N) - (-1(^\nu . \varphi(a,b c....)]$$

Pentru $n = 3$ avem:

$$18)\quad \sum_1^n p_i^3 = \frac{1}{2} N^3 . \varphi(N) - 3N . S(p_1 p_n)$$

---

1) Dată de D-l **I. B. Florescu** în *Gazeta Matematică*, **XLVII - 467.**

Pentru $n = 4$ avem:

$$19) \quad \sum_1^n p_i^4 = \frac{1}{2} N^4 \cdot \varphi(N) - 4N^2 \cdot S(p_1 p_n) + 2S(p_1 p_n)^2$$

Și tot așa mai departe.

Notă. Dacă relațiunile 2) dela II, (1) le scriem sub forma:

$$p_{n-i+1} = N - p_i$$

apoi le ridicăm la puterea $(2m + 1)$-a și le adunăm, obținem:

$$20) \quad \sum_1^n p_i^{2m+1} = p_1^{2m+1} + p_2^{2m+1} \ldots + p_n^{2m+1} = \mathcal{M}N$$

Extinderi asupra numerilor prime cu un număr dat și mai mici ca el

Suma numerilor, dintr'un șir dat de numere consecutive, prime cu un număr dat

13. *In șirul natural al primelor* M *numere, suma numerilor prime cu* N *este:*

$$20) \quad S_M(N) = \frac{1}{2} M(M+1) - \Sigma \frac{a}{2} E\left(\frac{M}{a}\right) \cdot \left[1 + E\left(\frac{M}{a}\right)\right]$$
$$+ \Sigma \frac{ab}{2} \cdot E\left(\frac{M}{ab}\right) \cdot \left[1 + E\left(\frac{M}{ab}\right)\right]$$
$$- \ldots \ldots \ldots \ldots$$

unde $N = a^\alpha, b^\beta, c^\gamma \ldots$

In adevăr, dacă din suma primelor M numere deducem suma numerilor neprime cu M, obținem suma de mai sus. Insă observăm că avem în acest șir:

$E\left(\frac{M}{a}\right)$ multiplii ai factorului a;

$E\left(\frac{M}{b}\right)$ „ „ „ b;

. . . .

Dar între aceştia se găsesc multipli în acelaş timp şi ai produselor: ab, ac, . . . apoi ai produselor: abc , abd, . . . şi aşa mai departe, de care trebue să se ţie seamă, ca la I (21), unde s'a stabilit expresia lui $I_M(N)$.

Insumând apoi aceste numere neprime cu N şi scăzându-le din suma primelor M numere, deducem formula 20).

Exemplu. Fie $M = 20$ şi $N = 14$, atunci:

$$S_{20}(14) = \frac{1}{2} . 20 . 21 - \left[\frac{2}{2} . 10 . 11 + \frac{7}{2} . 2 . 3\right] + \frac{14}{2} . 2 = 93$$

$$1 + 3 + 5 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 93$$

14. *In şirul natural al primelor* M *numere, suma numerilor prime cu* N *şi cu* M *(subordonate lui* M*) este:*

$$21) \qquad S_M(N,M) = \frac{1}{2} M (M + 1) - \Sigma \frac{a'}{2} . E\left(\frac{M}{a'}\right) . \left[1 + E\left(\frac{M}{a'}\right)\right] + E \frac{a'b'}{2} . E\left(\frac{M}{a'b'}\right) . \left[1 + E\left(\frac{M}{a'b'}\right)\right]$$

unde a′, b′, c′, . . . *sunt factorii primi ai produsului* M . N.

Formula se stabileşte analog celei de mai sus şi ţinând seamă de cele văzute la I (22).

Exemplu.

$$S_{20}(14, 26) = \frac{1}{2} . 20 . 21 - \left[\frac{2}{2} . 10 . 11 + \frac{5}{2} . 4 . 5 + \frac{7}{2} . 2 . 3\right] + \left[\frac{10}{2} . 2 . 3 + \frac{14}{2} . 1 . 2 + 0\right] - 0 = 73$$

$$1 + 3 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19 = 73$$

15. *Suma numerilor prime cu* N *din şirul de numere consecutive dela* A *la* B *este dată de formula:*

$$22) \qquad S_{A \to B}(N) = S_B(N) - S_A(N)$$

In adevăr, avem:

$$S_{A\to B}(N) = \frac{1}{2}[B.(B+1) - A.(A+1)]$$

$$-\Sigma\frac{a}{2}\cdot\left[E\left(\frac{B}{a}\right)\left[1+E\left(\frac{B}{a}\right)\right] - E\left(\frac{A}{a}\right)\left[1+E\frac{A}{a}\right]\right]$$

$$+\Sigma\frac{ab}{2}\cdot\left[E\left(\frac{B}{ab}\right)\left[1+E\left(\frac{B}{ab}\right)\right] - E\left(\frac{A}{ab}\right)\left[1+E\left(\frac{A}{ab}\right)\right]\right]$$

In mod analog se poate arăta că:

$$23)\quad \begin{cases} \sigma(N) = S_{1\to A}(N) + S_{A\to B}(N) + \ldots + S_{L\to N}(N) \\ S_M(N) = S_{1\to A}(N) + S_{A\to B}(N) + \ldots + S_{L\to M}(N) \end{cases}$$

A, B, . . . L, fiind numere cuprinse în șirul dela *1* la *N* sau *M*, astfel încât să avem:

$$1 < A < B < \ldots < L < N \text{ (sau M)}$$

Exemplu. Fie $A = 10$, $B = 20$ și $N = 18$ atunci avem:

$$S_{10\to 20}(18) = S_{20}(18) - S_{10}(18) = 73 - 13 = 60$$

Deasemenea:

$$\sigma(18) = S_{1\to 10}(18) + S_{10\to 18}(18) = 13 + 41 = 54$$

$$S_{20}(18) = S_{1\to 10}(18) + S_{10\to 20}(18) = 14 + 60 = 73$$

16. *Suma numerilor prime cu* N *subordonate numerilor* A *și* B, *din șirul numerilor consecutive dela* A *la* B *este dată de formula*:

$$24)\quad S_{A\to B}(A,B,N) = S_B(A,B,N) - S_A(A,B,N)$$

Cu ajutorul formulelor: 21) și 22) se poate stabili lesne formula de mai sus.

Exemplu. In cazul exemplului dela 15 avem:

$$S_{10\to 20}(10, 20, 18) = S_{20}(10, 20, 18) - S_{10}(10, 20, 18) = 49 - 8 = 41$$

17. *Să se arate că avem:*

25) $$S_{A+B}(N) = S_A(N) + S_B(N) + I_{AB}(N) + R$$

unde avem: $0 \leq |R| < A + B - I_A(N) - I_B(N)$.

Avem:

$$S_{A+B}(N) = \frac{1}{2}(A+B).(A+B+1)$$

$$-\Sigma\frac{a}{2}.E\left(\frac{A+B}{a}\right).\left[1+E\left(\frac{A+B}{a}\right)\right]$$

$$+\Sigma\frac{ab}{2}.E\left(\frac{A+B}{ab}\right).\left[1+E\left(\frac{A+B}{ab}\right)\right]$$

$$-\Sigma\frac{abc}{2}.E\left(\frac{A+B}{abc}\right).\left[1+E\left(\frac{A+B}{abc}\right)\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dar observăm că:

$$\frac{1}{2}(A+B)(A+B+1) = \frac{1}{2}A(A+1) + \frac{1}{2}B(B+1) + AB$$

și dacă Δ este un divizor a lui N, care însă ia numai valorile:

a, b, c, ...
ab, ac, ad, ...
abc, abd, abe, ...
. . . .

atunci:

$$\frac{1}{2}E\left(\frac{A+B}{\Delta}\right).\left[1+E\left(\frac{A+B}{\Delta}\right)\right] = \frac{1}{2}E\left(\frac{A}{\Delta}\right).\left[1+E\left(\frac{A}{\Delta}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}E\left(\frac{B}{\Delta}\right).\left[1+E\left(\frac{B}{\Delta}\right)\right]$$

$$+ Q_\Delta$$

unde avem:

$$Q_\Delta = E\left(\frac{A}{\Delta}\right).E\left(\frac{B}{\Delta}\right) + E\left(\frac{A}{\Delta}\right).E\left(\frac{r_A+r_B}{\Delta}\right)$$

$$+ E\left(\frac{B}{A}\right).E\left(\frac{r_A+r_B}{\Delta}\right)$$

unde r_A și r_B reprezintă restul diviziunei lui A și B prin Δ.

Cum avem: $E\left(\frac{r_A+r_B}{\Delta}\right) = 0$ sau 1 atunci urmează că:

a) Dacă A și B sunt divizibili cu Δ sau dau resturi astfel încât $r_A + r_B < \Delta$, atunci:

$$Q_\Delta = E\left(\frac{A}{\Delta}\right) . E\left(\frac{B}{\Delta}\right)$$

b) Dacă A și B divizați cu Δ dau resturi astfel încât $\Delta \leq r_A + r_B < 2\Delta$, atunci:

$$Q_\Delta = \left[1+E\left(\frac{A}{\Delta}\right)\right] . \left[1+E\left(\frac{B}{\Delta}\right)\right] - 1$$

Pe de altă parte observăm că:

$$E\left(\frac{A}{\Delta}\right) . E\left(\frac{B}{\Delta}\right) = E\left(\frac{A . B}{\Delta^2}\right) - r_A . E\left(\frac{B}{\Delta}\right) - r_B E\left(\frac{A}{\Delta}\right) - E\left(\frac{r_A . r_B}{\Delta^2}\right)$$

și

$$\left[1+E\left(\frac{A}{\Delta}\right)\right] . \left[1+E\left(\frac{B}{\Delta}\right)\right] - 1 = (1-r_A) . E\left(\frac{B}{\Delta}\right) + (1-r_B) . E\left(\frac{A}{\Delta}\right) - E\left(\frac{r_A . r_B}{\Delta^2}\right) + E\left(\frac{A.B}{\Delta^2}\right)$$

Prin urmare:

$$S_{A+B}(N) = S_A(N) + S_B(N) + AB - \Sigma E\left(\frac{A . B}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{A . B}{ab}\right) - \ldots + \Sigma \Delta . Q'_\Delta$$

unde am notat: $R = \Sigma\Delta . Q'_\Delta$ și unde

$$\Delta . Q'_\Delta = \begin{cases} -r_A E\left(\frac{B}{\Delta}\right) - r_B . E\left(\frac{A}{\Delta}\right) - E\left(\frac{r_A . r_B}{\Delta^2}\right) & \text{în primul caz (cazul } a) \\ (1-r_A) . E\left(\frac{B}{\Delta}\right) + (1-r_B) . E\left(\frac{A}{\Delta}\right) - E\left(\frac{r_A . r_B}{\Delta^2}\right) & \text{în al doilea caz (cazul } b). \end{cases}$$

Observăm acum că:

$$I_{AB}(N) = AB - \Sigma E\left(\frac{AB}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{AB}{ab}\right) - \ldots$$

Apoi:

a) In primul caz văzut mai sus:

$$R_1 = -r_{A1}E\left(\frac{B}{a}\right) - r_{B1}E\left(\frac{A}{a}\right) - E\left(\frac{r_{A1}\cdot r_{B1}}{a^2}\right)$$
$$-r_{A2}E\left(\frac{B}{ab}\right) + r_{B2}E\left(\frac{A}{ab}\right) - E\left(\frac{r_{A2}\cdot r_{B2}}{a^2b^2}\right)$$
$$-r_{A3}E\left(\frac{B}{abc}\right) - r_{B3}E\left(\frac{A}{abc}\right) - E\left(\frac{r_{A3}\cdot r_{B3}}{a^2b^2c^2}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) In al doilea caz:

$$R_2 = R_1 + E\left(\frac{A}{a}\right) + E\left(\frac{B}{a}\right)$$
$$-E\left(\frac{A}{ab}\right) - E\left(\frac{B}{ab}\right)$$
$$+E\left(\frac{A}{abc}\right) + E\left(\frac{B}{abc}\right)$$

unde r_{Ai} sau r_{Bi} reprezintă restul diviziunei lui A sau B prin un produs de i factori primi ai lui N.

Mai observăm apoi că:

$$R_2 = R_1 + [A - I_A(N)] + [B - I_B(N)]$$

Dacă acum, prin absurd, admitem:

$$r_{Ai} = r_{Bi} = \Delta$$

Atunci se observă lesne că:

$$0 \geqq R_1 > -[A + B - I_A(N) - I_B(N)]$$

și

$$0 \leqq R_2 < +[A + B - I_A(N) - I_B(N)]$$

Sau, luând valorile absolute:

$$0 \leqq |R| < A + B - I_A(N) - I_B(N)$$

Exemple. Avem:

$$\begin{cases} S_{10}(8) = S_4(8) + S_6(8) + I_{24}(8) + R \\ 25 = 4 + 9 + 12 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{10}(6) = S_4(6) + S_6(6) + I_{24}(6) + R \\ 13 = 1 + 6 + 8 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{10}(15) = S_4(15) + S_6(15) + I_{24}(15) + R \\ 22 = 7 + 7 + 8 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{20}(30) = S_8(30) + S_{12}(30) + I_{96}(30) + R \\ 68 = 8 + 9 + 26 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{13}(8) = S_5(8) + S_8(8) + I_{49}(8) + R \\ 46 = 9 + 16 + 20 + 4 \end{cases}$$

Notă. Dacă facem $B = 1$, avem:

26) $S_{A+1}(N) = S_A(N) + 0$ sau $(A+1)$

după cum $(A+1)$ este divizibil cu *N* sau prim cu *N*.

Se vede dar că în acest caz avem:

$$I_{A.(A+1)}(N) + R = 0 \text{ sau } (A+1)$$

Dacă facem $A = N$ și $B = (A-1).N$, atunci:

27) $S_{AN}(N) = S_N(N) + S_{(A-1)N}(N) + I_{(A-1).N^2}(N)$

Dacă facem în 27) pe rând $A = 1, 2, 3 \ldots A$ și adunăm, atunci avem:

28) $S_{A.N}(N) = A.\sigma(N) + \sum_{1}^{A-1} I_{i.N^2}(N)$

Dar în baza relațiilor 29) dela I, **26**, avem:

$$I_{i.N^2}(N) = i.I_{N^2}(N) = i.N\varphi(N)$$

Deci vom avea:

29) $S_{A.N}(N) = A.\sigma(N) + \frac{1}{2}A(A-1)I_{N^2}(N)$
$= A^2.\sigma(N)$

Exemplu. Avem:

$$S_{3.6}(6) = 3^2.\sigma(6) = 54$$
$$S_{2.7}(7) = 2^2.\sigma(7) = 84$$

Ținând seamă de formula 30) dela I, **26**, observăm că avem:

30) $S_{A.N}(N) = \frac{1}{2}A.N.I_{A.N}(N)$

Formulă care generalizează relația obicinuită a lui $\sigma(N)$.

De aci vedem că avem:

32) $S_{A.N}(N) + S_{B.N}(N) = (A^2 + B^2).\sigma(N)$

Relația putând fi extinsă la oricâți termeni vom voi.

Deasemenea :

33) $S_{B.N}(N) - S_{A.N}(N) = (B^2 - A^2) \cdot \sigma(N)$

Și în fine :

34) $S_{A.N \to B.N}(N) = (B^2 - A^2) \cdot \sigma(N)$

18. *Să se arate că :*

35) $S_{A \to B}(N) - S_{A \to (B-1)}(N) = 0$ sau B

după cum B *este neprim sau prim cu* N *și :*

36) $S_{A \to B}(N) - S_{(A-1) \to (B-1)}(N) = 0$ sau $(B-A)$

după cum A *și* B *sunt neprimi sau primi cu* N.

In primul caz relația este evidentă, dacă scrim șirul de numere dela A la B sau la $(B-1)$ unde vedem că diferă numai cu B.

In al doilea caz, șirurile diferă cu numerile A și B, $(A-1)$ și $(B-1)$; deci dacă A este neprim cu N, atunci $(A-1)$ va fi prim, fapt similar cu B și $(B-1)$. Așa dar vom avea diferența $(A-B)$ în orice caz.

Relațiile pot fi stabilite și drept o aplicațiune a relației generale din 12) (II, 15).

Notă. Ținând seamă de 35) (II) avem :

37) $\sum_{A=1}^{A=B-1} [S_{A \to B}(N) - S_{A \to (B-1)}(N)] = B \cdot I_B(N)$

Sau dacă $N = A$:

38) $\sum_{A=1}^{A=B-1} [S_{A \to B}(A) - S_{A \to (B-1)}(A)] = B \cdot \varphi(B)$

CAPITOLUL III

Produsul numerilor prime cu un număr dat și mai mici decât el

1. *Stabilirea formulei.*

Fie $N = a^{\alpha}$, atunci numerile neprime cu N și mai mici decât el sunt:

$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots \frac{N}{a} \cdot a$$

Dacă din produsul tuturor numerilor până la N, deducem, prin împărțire, produsul tuturor numerilor neprime, atunci ne rămâne produsul numerilor prime cu N și mai mici ca el, adică:

$$\Pi(N) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{a}\right)!\ a^{\frac{N}{a}}}$$

Știm apoi dela **I** că:

$$\varphi(N) = N - \frac{N}{a} = \frac{N}{1} - \frac{N}{a}$$

deci mai putem scrie:

$$\Pi(N) = \frac{\left(\frac{N}{1}\right)!\ .\ 1^{\frac{N}{1}}}{\left(\frac{N}{a}\right)!\ a^{\frac{N}{a}}}$$

Vom admite totdeauna $\Pi(1) = 1$.

Fie $N = a^{\alpha} . b^{\beta}$, atunci numerile neprime cu N și mai mici decât el sunt:

$$a, 2a, 3a, \ldots \frac{N}{a} . a$$

$$b, 2b, 3b, \ldots \frac{N}{b} . b$$

Dar în aceste două șiruri există numere egale, multiple în acelaș timp și de a și de b, deci de ab și sunt în număr de $\left(\frac{N}{ab}\right)$. Dar ele fiind în ambele șiruri, trebuesc deduse din produs odată. Aceasta ne face să scrim că:

$$\Pi(N) = \frac{N!\left(\frac{N}{ab}\right)!(ab)^{\frac{N}{ab}}}{\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{b}\right)!\, a^{\frac{N}{a}} . b^{\frac{N}{b}}}$$

Observând însă că:

$$\varphi(N) = \frac{N}{1} - \frac{N}{a} - \frac{N}{b} + \frac{N}{ab}$$

Mai putem scrie:

$$\Pi(N) = \frac{\left(\frac{N}{1}\right)!\left(\frac{N}{ab}\right)!\, 1^{\frac{N}{1}} . (ab)^{\frac{N}{ab}}}{\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{b}\right)!\, a^{\frac{N}{a}} . b^{\frac{N}{a}}}$$

$$= \frac{N!\left(\frac{N}{ab}\right)!}{\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{b}\right)!\, a^{\frac{N}{a}\left(1-\frac{1}{b}\right)} . b^{\frac{N}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)}}$$

$$= \frac{N!\left(\frac{N}{ab}\right)!}{\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{b}\right)!\, a^{\frac{\varphi(N)}{a-1}} . b^{\frac{\varphi(N)}{b-1}}}$$

Fie $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma}$, atunci numerile neprime cu N sunt:

$$a, 2a, 3a, \ldots \frac{N}{a} . a$$

$$b, 2b, 3b, \ldots \frac{N}{b} . b$$

$$c, 2c, 3c, \ldots \frac{N}{c} . c$$

Iar numerile cari vor fi comune la două șiruri, sunt:

$$ab, 2ab, 3ab, \ldots \frac{N}{ab} . ab$$

$$ac, 2ac, 3ac, \ldots \frac{N}{ac} . ac$$

$$bc, 2bc, 3bc, \ldots \frac{N}{bc} . bc$$

Vom elimina deci câte un rând din aceste numere.

Insă vor mai exista și un șir de numere comun la toate trei șiruri din prima categorie și anume:

$$abc, 2abc, 3abc, \ldots \frac{N}{abc} . abc$$

Vom adăoga un rând din aceste numere și astfel vom avea produsul numerilor neprime cu N. Deducând apoi acest produs din $N!$, avem:

$$\Pi(N) = \frac{N!\left(\frac{N}{ab}\right)!\left(\frac{N}{ac}\right)!\left(\frac{N}{bc}\right)!\,(ab)^{\frac{N}{ab}} . (ac)^{\frac{N}{ac}} . (bc)^{\frac{N}{bc}}}{\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{c}\right)!\left(\frac{N}{abc}\right)!\,a^{\frac{N}{a}} . b^{\frac{N}{b}} . c^{\frac{N}{c}} . (abc)^{\frac{N}{abc}}}$$

$$= \frac{N!\left(\frac{N}{ab}\right)!\left(\frac{N}{ac}\right)!\left(\frac{N}{bc}\right)!}{\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{c}\right)!\left(\frac{N}{abc}\right)!\,a^{\frac{\varphi(N)}{a-1}} . b^{\frac{\varphi(N)}{a-1}} . c^{\frac{\varphi(N)}{c-1}}}$$

Astfel procedând în mod analog și ținând seamă de formula 2) I, prima relație, atunci observăm că semnul $(+)$ dela formula 2(I) corespunde semnului $(\times)$, iar semnul $(-)$ corespunde semnului împărțirei, avem:

$$1)\quad \Pi(N) = \frac{N!\,\Pi\left(\frac{N}{ab}\right)! \ldots \Pi(ab)^{\frac{N}{ab}} \ldots \Pi(abcd)^{\frac{N}{abcd}} \ldots}{\Pi\left(\frac{N}{a}\right)!\,\Pi\left(\frac{N}{abc}\right)! \ldots \Pi(a)^{\frac{N}{a}} \ldots \Pi(abc)^{\frac{N}{abc}} \ldots}$$

$$= \frac{N!\,\Pi\left(\frac{N}{ab}\right)!\,\Pi\left(\frac{N}{abcd}\right)! \ldots}{\Pi\left(\frac{N}{a}\right)!\,\Pi\left(\frac{N}{abc}\right)! \ldots \Pi a^{\frac{\varphi(N)}{a-1}} \ldots}$$

unde $\Pi(i)! = (i_1)!\,(i_2)! \ldots$

Exemple:

I. $N = 2^3.3.5 = 60$, atunci:

$$\Pi(N) = \frac{60!\,10!\,6!\,4}{30!\,20!\,12!\,2!\,2^{16}.3^8.5^4} = 1.7.11.13.17.19.23.29.31.37.41.47.49.53.59$$

II. Fie $N = a.b.c$, atunci:

$$\Pi(N) = \frac{(abc)!\,a!\,b!\,c}{(ab)!\,(ac)!\,(bc)!\,a^{(b-1)(c-1)}.\,b^{(b-1)(c-1)}.\,c^{(a-1)(b-1)}}$$

Proprietăți și consecințe

2. *Dacă* p(N) *reprezintă produsul divizorilor lui* N *atunci avem:*

$$2)\qquad p(N) \leq \Pi(N) \leq \frac{N!}{p(N)}$$

Dacă $\Pi(N)$ reprezintă produsul numerilor prime cu N și mai mici ca el, și dacă $p(N)$ reprezintă produsul divizorilor lui N, atunci este evident că vom avea:

$$N! = \Pi(N)\,.\,p(N)\,.\,\mathcal{P}$$

unde $\mathcal{P}$ reprezintă produsul numerilor neprime cu N. Or, cum $\mathcal{P} \geq 1$, înseamnă că vom avea:

$$\Pi(N) \leq \frac{N!}{p(N)}$$

Române acum să arătăm și prima parte a neegalității.

Insă se vede că, în afară de cazul când $N = 2, 3, 4, 6$ *și* 12 când $p(N) > \Pi(N)$ avem totdeauna $\Pi(N) > p(N)$. In adevăr:

Să considerăm șirurile:

$$2 \leq a_1 < a_2 < \ldots \ldots < a_\alpha$$
$$2 \leq b_1 < b_2 < \ldots \ldots < b_\beta \text{ unde } \alpha < \beta$$

atunci vom zice că dacă avem $\sum\limits_1^\alpha a_i > \sum\limits_1^\beta b_i$ vom avea și $\prod\limits_1^\alpha a_i > \prod\limits_1^\beta b_i$.

Neegalitatea este evidentă, dacă în general fiecare factor b_i este mai mic decât a_i.

Dacă admitem apoi că $\alpha = \beta$ și $\Sigma a_i - \Sigma b_i = 1$, urmează că factorii a_i vor fi egali cu b_i afară de unul singur a_k, de pildă, care va fi egal cu $(b_k + 1)$. Atunci înseamnă că vom avea:

$$A = \Pi a_i = a_k \cdot \frac{A}{a_k} = (b_k + 1) \cdot \frac{A}{a_k}$$

și

$$B = \Pi b_i = b_k \cdot \frac{B}{b_k}$$

Dar ceilalți factori fiind egali, înseamnă că $\frac{A}{a_k} = \frac{B}{b_k} = C$, prin urmare:

$$\Pi a_i = (b_k + 1) \cdot C \text{ și } \Pi b_i = b_k \cdot C$$

Deci neegalitatea este satisfăcută și în acest caz.

Prin urmare și partea întâia a neegalității este demonstrată.

3. *Să se arate că dacă* $A > B$ *nu putem avea niciodată* $\Pi(A) < \Pi(B)$.

Este lesne de observat că ar trebui să avem:

$$B\Pi(A) < A\Pi(B)$$

Fie: a_i factori primi ai lui A și b_i factori primi ai lui B, atunci aplicând formula 1 (III), ar trebui să avem:

$$\frac{(A-1)!\,\Pi\left(\frac{A}{a_1\,a_2}\right)!\,\Pi\left(\frac{A}{a_1a_2a_3a_4}\right)!\,\ldots\ldots}{\Pi\left(\frac{A}{a_1}\right)!\,\Pi\left(\frac{A}{a_1a_2a_3}\right)!\,\ldots\ldots\,\Pi a_1^{\frac{\varphi(A)}{a1-1}}}$$

$$<\frac{(B-1)!\,\Pi\left(\frac{B}{b_1\,b_2}\right)!\,\Pi\left(\frac{B}{b_1b_2b_3b_4}\right)!\,\ldots\ldots}{\Pi\left(\frac{B}{b_1}\right)!\,\Pi\left(\frac{A}{b_1b_2b_3}\right)!\,\ldots\ldots\,\Pi b_1^{\frac{\varphi(B)}{b1-2}}}$$

Dar observăm că, dacă $A > B$, avem

$$(A-1)! > (B-1)!$$

Iar dacă scrim acum neegalitatea sub forma:

$$\frac{(A-1)!}{(B-1)!}\cdot\frac{\Pi\left(\frac{A}{a_1\,a_2}\right)!}{\Pi\left(\frac{B}{b_1\,b_2}\right)!}\cdot\frac{\Pi\left(\frac{A}{a_1a\,a_3a_4}\right)!}{\Pi\left(\frac{B}{b_1b_2b_3b_4}\right)!}\ldots\ldots Q_1$$

$$<\frac{\Pi\left(\frac{A}{a_1}\right)!}{\Pi\left(\frac{B}{b_1}\right)!}\cdot\frac{\Pi\left(\frac{A}{a_1a_2a_3}\right)!}{\Pi\left(\frac{B}{b_1b_2b_3}\right)!}\cdot\,.\,Q_2\,.\,\frac{\Pi a_1^{\frac{\varphi(A)}{a1-1}}}{\Pi b_1^{\frac{\varphi(B)}{b1-1}}}\ldots\,Q_3$$

unde $Q_{1,\,2,\,3}$ reprezintă întregii sau fracțiunile cari rezultă din faptul că unul din numerile A sau B are mai mulți factori primi.

Presupunem că A și B au acelaș număr n de factori primi, atunci ar trebui să avem:

$$\frac{\left(\frac{A}{a_1a_2\ldots\ldots a_{2k}}\right)}{\left(\frac{B}{b_1b_2\ldots\ldots b_{2k}}\right)}<\frac{\left(\frac{A}{a_1a_2\ldots\ldots a_{2k-1}}\right)}{\left(\frac{B}{b_1b_2\ldots\ldots b_{2k-1}}\right)}$$

unde $2k < n$. De aci rezultă că trebue să avem: $b_{2k} < a_{2k}$.

Dacă n este par, atunci vom putea avea $n = 2k$:

Dacă n este impar, cazul este cu totul defavorabil, căci ne rămâne în membrul al doilea la numitor expresia:

$$\left(\frac{B}{b_1 b_2 \ldots, b_n}\right)!$$

care nu-și are corespondent la numărător.

Dar să admitem cazul cel mai favorabil, când n este par și dacă mai admitem că în adevăr avem $b < a$, atunci toate fracțiunile din membrul întâi sunt mai mici ca respectivele lor din membrul al doilea.

Insă le vom presupune egale, caz și mai defavorabil, atunci, ținând seamă că $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$, ne rămâne:

$$\frac{(A-1)!}{(B-1)!} < \frac{\Pi a_i^{\frac{\varphi(A)}{a^{i-1}}}}{\Pi b_i^{\frac{\varphi(B)}{b^{i-1}}}}$$

Pentru cazul când $i = 1$ avem:

$$(A-1)!\, b_1^{b_1^{\beta_1 - 1}} < (B.-1)!\, a_1^{b_1^{\alpha_1 - 1}}$$

Ori cum $A > B$ și $b_1 < a_1$, urmează că ar trebui să avem α_1 foarte mic față de β_1, dar aceasta nu este posibil, căci n'am mai avea $A > B$.

Deasemenea, pentru $i = 1, 2$, rezultă că exponenții α_1 și α_2 trebue să fie mici față de β_1 și β_2, ceeace iar nu se poate.

Și astfel, din aproape în aproape, analizând valorile, ajungem la imposibilitatea dată.

4. *Produsul produselor tuturor numerilor prime cu divizorii unui număr și mai mici ca ei, este:*

$$3) \qquad \prod_1^n \Pi(d_i) = \frac{N!}{\dfrac{N}{\Pi a^{a^\alpha}} \cdot \dfrac{a^\alpha - 1}{a-1}}$$

n *fiind numărul divizorilor numărului dat.*

Fie $N = a^\alpha$, atunci divizorii lui sunt:

$$1, a, a^2, \ldots \ldots a^\alpha$$

Or, produsul numerilor prime cu a^i și mai mici decât el este, după cum am văzut la **1** (III):

$$\Pi(a^i) = \frac{a^i\,!}{a^{i-1}\,!\; a^{a^i-1}}$$

Prin urmare:

$$\prod_1^{\alpha} \Pi(a_i) = 1 \cdot \frac{a\,!}{a} \cdot \frac{a^2!}{a\,!\,a^a} \cdot\,\cdot \quad \frac{a^\alpha\,!}{a^{\alpha-1}\,!\; a^{a^{\alpha-1}-}}$$

$$= \frac{a^\alpha\,!}{a^{\frac{a^\alpha-1}{a-1}}} = \frac{N\,!}{a^{\frac{a^\alpha-1}{a-1}}}$$

Fie $N = a^\alpha \cdot b^\beta$, atunci divizorii vor fi:

$$\begin{array}{l} 1,\ a,\ a^2 \ldots \ldots \ldots a^\alpha \\ b;\ q^2 \ldots \ldots \ldots b^\beta \\ \hline ab,\ a^2b\ , \ldots \ldots ab \\ a.b^2,\ a^2.b^2, \ldots a^\alpha.b^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a.b^\beta,\ a^2.b^\beta \ldots a^\alpha.b^\beta \\ \hline \end{array}$$

Produsul primelor două șiruri este:

$$\frac{a^\alpha\,!}{a^{\frac{a^{\alpha}-1}{a-1}}} \cdot \frac{b^\beta\,!}{a^{\frac{b^{\beta}-1}{b-1}}}$$

Apoi știm că:

$$\Pi(a^\alpha \cdot b^\beta) =$$

$$= \frac{(a^\alpha \cdot b^\beta)\,!\;(a^{\alpha-1} \cdot b^\beta)\,!}{(a^{\alpha-1} \cdot b^\beta)\,!\,(a^\alpha \cdot b^{\beta-1})\,!\,a^{a^{\alpha-1} \cdot b^{\beta-1}(b-1)} \cdot b^{a^{\alpha-1} \cdot b^{\beta-1}(a-1)}}$$

Făcând: $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ și înmulțind apoi relațiile între ele, obținem:

$$\frac{(b^{\beta-1})\,! \cdot (a^\alpha . b^\beta)\,!}{(b^\beta)\,!\,(a^\alpha \cdot b^{\beta-1})\,!\; a^{b^{\beta-1}(b-1)\frac{b^{\alpha-1}}{a-1}} \cdot b^{b^{\beta-1} \cdot (b-1)\,(a^{\alpha-1}}}$$

Făcând apoi : $\beta = 1, 2, 3, \dots \beta$ și înmulțind relațiile între ele, obținem :

$$\frac{(a^{\alpha}.b^{\beta})!}{(b^{\beta})!\,(a^{\alpha})!\; a^{\frac{a^{\alpha}-1}{a-1}(b^{\beta}-1)} \,.\, b^{\frac{b^{\beta}-1}{b-1}(a^{\alpha}-1)}}$$

Inmulțind apoi și cu primele două produse, avem:

$$\prod_{1}^{n} \Pi(d_i) = \frac{(a^{\alpha}.b^{\beta})!}{a^{a\beta\frac{a^{\alpha}-1}{a-1}} \,.\, b^{b\alpha\frac{b^{\beta}-1}{b-1}}} = \frac{N!}{a^{b\beta\frac{a^{\alpha}-1}{a-1}} \,.\, b^{a\beta\frac{b^{\beta}-1}{b-1}}}$$

Sau în general avem formula din 3).

Exemplu. Fie $N = 2^2.3.5$, atunci divizorii lui sunt :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Prin urmare:

$\Pi(1) = 1$; $\Pi(2) = 1$; $\Pi(3) = 2$; $\Pi(4) = 3$

$\Pi(5) = 2^3.3$; $\Pi(6) = 5$; $\Pi(10) = 3^3.7$

$\Pi(12) = 5.7.11$; $\Pi(15) = 2^7.7.11.13$

$\Pi(20) = 3^3.7.11.13.17.19$

$\Pi(30) = 7.11.13.17.19.23.29$

$\Pi(60) = 7.11.13.17.19.23.29.31.37.41.43.47.49.53.59$

$$\prod_{1}^{12} . \Pi(d_i) = \frac{(2^2.3.5)!}{2^{3.5.3} . 3^{2^2.5} . 5^{2^2.3}} = \frac{60!}{2^{45}.3^{20}.5^{18}}$$

Iar pe de altă parte:

$$\prod_{1}^{12} . \Pi(d_i) = 2^{11}.3^{8}.5^{2}.7^{8}.11^{5}.13^{4}.17^{3}.19^{3}.23^{2}.29^{2}.31.37.41.43.47.49.53.59$$

Comparând rezultatele, vedem că:

— exponentul cel mai mare al lui *2* care împarte pe *60!* este:

$$E\left(\frac{60}{2}\right) + E\left(\frac{60}{2^2}\right) + E\left(\frac{60}{2^3}\right) + E\left(\frac{60}{2^4}\right) + E\left(\frac{60}{2^5}\right)$$

$$30 + 15 + 7 + 3 + 1 = 56 = 11 + 45$$

— exponentul cel mai mare al lui *3* este:

$$E\left(\frac{60}{2}\right) + E\left(\frac{60}{3^2}\right) + E\left(\frac{60}{3^3}\right) = 20 + 6 + 2 = 28 = 8 + 20$$

— exponentul cel mai mare al lui 5 este :

$$E\left(\frac{60}{5}\right) + E\left(\frac{60}{25}\right) = 12 + 2$$

și tot așa mai departe.

Divizibilități în legătură cu produsul numerilor prime cu un număr dat și mai mici ca el

5. *Divizibilități ale produselor parțiale.*

Dacă scriem relațiunile 2) dela II (1) sub forma:

$$4)\quad \begin{cases} p_n = N - p_1 \\ p_{n-1} = N - p_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_{n-i+1} = N - p_i \end{cases}$$

unde $p_1, p_2, \dots p_n$ reprezintă numerile prime cu N și mai mici ca el, apoi dacă înmulțim între ele aceste egalități, obținem:

$$5)\quad p_{n-i+1} \cdot p_{n-i+2} \cdot \cdot p_n = \mathcal{M} N + (-1)_i \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cdot p_i$$

Făcând $i = \frac{n}{2}$ avem:

$$6)\quad \begin{cases} p_{\frac{n}{2}+1} \cdot p_{\frac{n}{2}+2} \cdot \cdot p_n = \mathcal{M} N + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cdot p_{\frac{n}{2}} \\ p_1 \cdot p_2 \cdot \cdot \cdot p_n = \mathcal{M} N = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot [p_1 \cdot p_2 \cdot \cdot \cdot p_{\frac{n}{2}}] \end{cases}$$

Dacă facem notațiunile:

$P_1 = p_1 p_2 \dots p_n$ și $P_n = p_{\frac{n}{2}+1} p_{\frac{n}{2}+2} \dots p_n$

atunci avem:

$$7)\quad \begin{cases} P_n - (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot P_1 = \mathcal{M} N \\ P_1 \cdot P_n - (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot P_1^2 = \mathcal{M} N \\ P_n^2 - (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot P_1 \cdot P_n = \mathcal{M} N \end{cases}$$

Ridicând prima relație la patrat, avem:

$$8)\quad P^2_n + P^2_1 - 2 \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot P_1 \cdot P_n = \mathcal{M} N$$

Inmulțind ultima cu $(-1)^{\frac{n}{2}}$, avem:

9) $$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot P^2_n - P_1 \cdot P_n = \mathscr{M} N$$

Adunând cu a doua din 7), obținem:

10) $$P^2_n - P^2_1 = \mathscr{M} N$$

Ridicând prima relație din 7) la puterea m-a, avem:

11) $$P_n{}^m - (-1)^{\frac{n}{2} \cdot m} \cdot P_1{}^m = \mathscr{M} N$$

Inmulțind relația 10) cu $P_1{}^2$ apoi cu $P_n{}^2$, obținem:

12) $$\begin{cases} [\Pi(N)]^2 - P_1{}^4 - \mathscr{M} N \\ P_n{}^4 - [\overline{\Pi}(N)]^2 = \mathscr{M} N \end{cases}$$

unde $\Pi(N) = P_1 . P_n$.

Dar după o cunoscută teoremă [1]), pe care o vom demonstra mai jos, știm că:

13) $$[\Pi(N)]^2 - 1 = \mathscr{M} N$$

Prin urmare avem:

14) $$\begin{cases} P_1{}^4 - 1 = \mathscr{M} N \\ P_n{}^4 - 1 = \mathscr{M} N \\ P_1{}^4 + P_n{}^4 - 2 = \mathscr{M} N \end{cases}$$

Dacă relația:

$$\Sigma p_i = p_1 + p_2 + \ldots p_n = \sigma(N)$$

o ridicăm la puterea m-a, atunci avem:

15) $$\sum_1^n p^m{}_i + \Sigma \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\alpha!} \cdot p_1{}^\alpha \cdot p_2{}^\beta \ldots p_n{}^\alpha = \mathscr{M} N_m$$

unde $\alpha + \beta + \ldots \alpha = m$.

---

1) *Exercice d'Aritmetique* par **Fritz-Patrik** et **Chevrel**, 418.

Dar, conform relației 20) dela II (12), prima parte a sumei este MN, atunci pentru m impar vom avea și:

16) $$\Sigma\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\cdot p_1^{\alpha}\cdot p_2^{\beta}\ \ldots\ p_n^{\lambda}=\mathcal{M}N$$

6. *Să se arate că:*

$$[\Pi(N)]^{2m}-1=\mathcal{M}N$$

m *fiind un întreg și pozitiv oarecare.*

In adevăr, dacă plecăm dela relațiile 4) dela III (4) și le înmulțim câte $(2k+1)$ între ele, apoi le adunăm, obținem:

17) $$2\Sigma\, p_1\cdot p_2\ \ldots\ p_{2k+1}=\mathcal{M}N$$

Cum n este totdeauna par, urmează că vom avea:

18) $$2\Sigma\, p_1\cdot p_2\ \ldots\ p_{n-1}=\mathcal{M}N$$

Dar, de aci, rezultă că fiecare termen al sumei este prim cu N, deci vom avea:

$$p_1\cdot p_2\ \ldots\ p_{i-1}\cdot p_{i+1}\ \ldots\ p_n=\mathcal{M}N+r_i$$

Dar resturile r_i reproduc într'o ordine oarecare numerile p_i și deci vom avea:

19) $$(p_1\cdot p_2\ \ldots\ p_n)=\mathcal{M}N+p_i\cdot r_i\,.$$

Făcând apoi $i=1, 2, 3, \ldots n$ și înmulțind între ele toate relațiile, vedem că:

20) $$(p_1\cdot p_2\ldots p_n)^n=\mathcal{M}N+(p_1\cdot p_2\ldots p_n)(r_1\cdot r_2\ldots r_n)$$

Dar am văzut că:

$$p_1\cdot p_2\ \ldots\ p_n=r_1\cdot r_2\ \ldots\ r_n$$

Prin urmare:

23) $$\begin{cases}(p_1\cdot p_2\ \ldots\ p_n)^{n-2}-1=\mathcal{M}N\\ \text{sau:}\\ [\Pi(N)]^{2m}-1=\mathcal{M}N\end{cases}$$

deoarece n este par.

Dar în 20), ţinând seamă că $n = \varphi(N)$, avem după teorema lui **Euler**:

$$[\Pi(N)]^{\varphi(N)} = \mathcal{M}N + 1$$

Deci ne rămâne:

$$[\Pi(N)]^2 - 1\ \mathcal{M}N.$$

Relaţiunea 18) ne mai permite să scrim:

$$24) \qquad \sum_2^n \frac{1}{p_i} \cdot \sum_2^n p_i = \mathcal{M}N$$

7. *Să se arate că pentru* $N = k \cdot p$ *unde* k *este un număr oarecare superior lui 2, iar* p *un număr prim absolut, mai mare ca oricare din factorii primi ai lui* k, *avem*:

$$25) \qquad (p_2 - 1) \cdot (p_3 - 1) \cdot \; \cdot (p_n - 1) = \mathcal{M}N$$

$p_2, p_3, \ldots p_n$ *fiind numerile prime cu* N *şi mai mici ca el* $(p_1 = 1)$.

In adevăr, pentru $k = 1$ avem:

$$p_2 = 2;\ p_3 = 3, \ldots p_n = p - 1$$

Deci printre factorii $(p_i - 1)$ nu vom găsi pe factorul p.

Pentru $N = 2$ avem:

$$p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots p_i = p - 2;\ p_{i+1} = p + 2 \ldots p_n = 2p - 1$$

Dar nici printre aceştia nu vom găsi factorul p.

Pentru $k > 2$, vom găsi neapărat factorul $p_i = (k - i)\,p + 1$, deci $(p_i - 1) = \mathcal{M}p$. Deasemenea vom găsi şi ceilalţi factori ai lui k, deoarece ei sunt inferiori lui p.

Notă. Pentru $k = 1$ avem:

$$(p - 1)! + 1 = \mathcal{M}p$$

adică tocmai teorema lui **Wilson**.

Iar pentru $k = 2$ avem:

$$\prod_2^n (p_i - 1) = 2^{p-1} \cdot \frac{(p-1)!}{p-1} = 2^{p-1} \cdot (p - 2)!$$

Dar știm că[1]:

$$(p-2)! = \mathcal{M}p + 1$$

Prin urmare:

$$\prod_{2}^{n}(p_i - 1) = \mathcal{M}p + 2^{p-1}$$

Și dacă $p > 2$, atunci:

26) $$\prod_{2}^{n}(p_i - 1) = \mathcal{M}p + 1$$

Extinderi asupra produsului numerilor prime cu un număr dat și mai mici decât el

Produsul numerilor, dintr'un șir dat de numere consecutive, prime cu un număr dat

8. *In șirul natural al primelor* M *numere, produsul numerilor prime cu* N *este:*

27) $P_M(N) =$

$$= \frac{M!\ \Pi E\left(\frac{M}{ab}\right)!\ \ldots\ \Pi(ab)^{E\left(\frac{M}{ab}\right)}\ \ldots}{\Pi E\left(\frac{M}{ab}\right)!\ \Pi E\left(\frac{M}{abc}\right)! \ldots \Pi(a)^{E\left(\frac{M}{a}\right)} . \Pi(abc)^{E\left(\frac{M}{abc}\right)} \ldots}$$

unde a, b, c, . . . *sunt factori primi ai lui* N.

Plecând dela formula 21) I **(21)** și formula 1) dela III **(1)**, avem:

Pentru $N = a^\alpha$, numerile neprime cu N din șirul numerilor până la M sunt:

$$a, 2a, \ldots a . E\left|\frac{M}{a}\right|$$

Deci produsul căutat va fi:

$$P_M(N) = \frac{M!}{E\left(\frac{M}{a}\right)!\ a^{E\left(\frac{M}{a}\right)}}$$

---

1) *Exercices d'Aritmétique* par **Fritz-Patrich et Chevrel**, pag. 427.

Pentru $N = a^{\alpha} b^{\beta}$ numerile r.eprime cu N din șirul natural al numerilor până la M sunt:

$$a, 2a, \ldots \ldots a \,.\, E\left(\frac{M}{a}\right)$$

$$b, 2b, \ldots \ldots b \,.\, E\left(\frac{M}{b}\right)$$

Dar vom avea în ambele șiruri numerile:

$$ab, 2ab, \ldots ab \,.\, E\left(\frac{M}{ab}\right)$$

Deci, produsul căutat va fi:

$$P_M(N) = \frac{M!\,E\left(\frac{M}{ab}\right)!\,(ab)^{E\left(\frac{M}{ab}\right)}}{E\left(\frac{M}{a}\right)!\,E\left(\frac{M}{b}\right)!\,a^{E\left(\frac{M}{a}\right)}\,.\,b^{E\left(\frac{M}{b}\right)}}$$

Și tot așa procedând, ajungem la formula 25).

Exemplu.

$$P_{10}(15) = \frac{10!}{3!\,2!\,3^3\,.\,5^2} = 2^6.7 = 1.2.4.7.8$$

9. *In șirul natural al primelor* M *numere, produsul numerilor prime cu* N *și* M *(subordonate* M*) este:*

23) $P_M(N, M) =$

$$\frac{M!\,\Pi E\left(\frac{M}{a'b'}\right)!\,\ldots\ldots\Pi(a'b')^{E\left(\frac{M}{a'b'}\right)}\ldots\ldots}{\Pi E\left(\frac{M}{a'b'}\right)!\,\Pi E\left(\frac{M}{a'b'c'}\right)!\ldots\Pi(a')^{E\left(\frac{M}{a'}\right)}\,.\,\Pi(a'b'c')^{E\left(\frac{M}{a'b'c'}\right)}}$$

$a', b', c', \ldots\ldots$ *fiind factori primi ai produsului* $M\,.\,N$.

Formula se stabilește cu ușurință urmând aceiași cale ca pentru formula 25) III.

Exemplu.

$$P_{10}(15, 10) = \frac{10!\left(\frac{10}{0}\right)!6.10}{5!3!202^5.3^3.5^2} = 1.7$$

10. *In șirul numerilor consecutive dela* A *la* B, *produsul numerilor prime cu* N *este:*

$$29)\qquad P_{A\to B}(N) = \frac{B!}{A!}\cdot\frac{\Pi E\left(\frac{A}{a}\right)!}{\Pi E\left(\frac{B}{a}\right)!}\cdot\frac{\Pi E\left(\frac{B}{ab}\right)!}{\Pi E\left(\frac{A}{ab}\right)!}\cdots$$

$$\cdots\frac{\Pi\,(ab)^{E\left(\frac{B}{ab}\right)-E\left(\frac{A}{ab}\right)}}{\Pi\,(a)^{E\left(\frac{B}{a}\right)-E\left(\frac{A}{a}\right)}}\cdots$$

unde a, b, c, . . . *sunt factori primi ai lui* N.

In adevăr, formula se stabilește cu ușurință, ținând seamă că avem:

$$P_{A\to B}(N) = \frac{P_B(N)}{P_A(N)}$$

Această expresiune nu este întotdeauna întreagă. Inlocuind expresiunile lui $P_A(N)$ și $P_B(N)$ și ordonând convenabil termenii, obținem formula de mai sus.

Exemplu.

$$P_{10\to 20}(12) = \frac{20!}{10!}\cdot\frac{5!}{10!}\cdot\frac{3!}{6!}\cdot\frac{3!}{1!}\cdot\frac{6^{3-1}}{2^{10-5}.3^{6-3}} = 11.13.17.19$$

Notă.

Pe o cale analoagă se constată că avem:

$$30)\qquad \begin{cases} \Pi(N) = P_{1-A}(N)\,.\,P_{A\to B}(N)\,.\,.\,.\,P_{L\to N}(N) \\ P_M(N) = P_{1\to A}(N)\,.\,P_{A\to B}(N)\,.\,.\,P_{L\to M}(N) \end{cases}$$

A, B, . . . L fiind numere cuprinse în șirul de numere naturale până la *M*.

11. *Să se exprime* $P_{A+B}(N)$, *în funcție de* $P_A(N)$ *și* $P_B(N)$.

Formula 27 (III) ne permite să scrim că:

$$31)\qquad P_{A+B}(N) =$$

$$\frac{(A+B)\,!\;\Pi E\left(\frac{A+B}{ab}\right)!\;.\;.\;.\;\Pi\,(ab)^{E\left(\frac{A+B}{ab}\right)}\;.\;.\;.}{\Pi E\left(\frac{A+B}{a}\right)!\;\Pi E\left(\frac{A+B}{abc}\right)!\;\ldots\Pi\,(a)^{E\left(\frac{A+B}{a}\right)}.\Pi\,(abc)^{E\left(\frac{A+B}{abc}\right)}\ldots}$$

Cum însă avem:

$$C_{A+B}^{A} = C_{A+B}^{B} = \frac{(A+B)!}{A!\,B!}$$

urmează că vom putea scrie:

$$(A+B)! = Q_0 \,.\, A!\, B!$$

$$E\left(\frac{A+B}{\Delta}\right)! = Q_\Delta \,.\, E\left(\frac{A}{\Delta}\right)!\; E\left(\frac{B}{\Delta}\right)!$$

unde Δ poate lua valorile $(a, b, \ldots)$; $(ab, ac, \ldots)$, $(abc, acd, \ldots)$ etc. . .

$$Q_0 = C_{A+B}^{A} = C_{A+B}^{B}$$

$$Q_\Delta = C_{E\left(\frac{A+B}{\Delta}\right)}^{E\left(\frac{A}{\Delta}\right)} = C_{E\left(\frac{A+B}{\Delta}\right)}^{E\left(\frac{B}{\Delta}\right) + E\left(\frac{r_A + r_B}{\Delta}\right)}$$

unde r_A și r_B reprezintă resturile diviziunei lui A și B prin Δ.

Dacă apoi Q_0 corespunde lui $\Delta = 1$; Q_1 lui $\Delta = a, b, c, \ldots$; Q_2 lui $\Delta = ab, ac, bc, \ldots$; Q_3 lui $\Delta = abc, acd, ace, \ldots$ atunci avem:

$$32)\qquad P_{A+B}(N) = P_A(N) \,.\, P_B(N) \,.\, \frac{Q_0 \,.\, \Pi Q_2 \ldots}{\Pi Q_1 \,.\, \Pi Q_3 \ldots} \times \frac{1}{\Pi a^{(A+B)-I_{A+B}(N)}}$$

unde:

$$\Pi Q_1 = \Pi\, C_{E\left(\frac{A+B}{a}\right)}^{E\left(\frac{A}{a}\right)}$$

$$\Pi Q_2 = \Pi\, C_{E\left(\frac{A+B}{ab}\right)}^{E\left(\frac{A}{ab}\right)}$$

$$\Pi Q_3 = \Pi \frac{C^{E\left(\frac{A}{ab}\right)}}{C_{E\left(\frac{A}{abc}\right)}}$$

. . . .

Dar cum în conformitate cu formula 29 III, avem:

33) $$\begin{aligned} P_{A+B}(N) &= P_A(N) \,.\, P_{A\to(A+B)}(N) \\ &= P_B(N) \,.\, P_{B\to(A+B)}(N) \end{aligned}$$

Urmează dar că rapoartele:

$$\begin{aligned} R &= \frac{P_{A\to(A+B(}(N)}{P_B(N)} = \frac{P_{B\to(A+B)}(N)}{P_A(N)} \\ &= \frac{Q_0 \,.\, \Pi Q_2 \,.\,.\,.}{\Pi Q_1 \,.\, \Pi Q_3 \,.\,.\,.} \times \frac{1}{\Pi a^{(A+B)-I_{A+B}(N)}} \end{aligned}$$

vor putea avea valori întregi numai dacă numerile prime cu N din șirul până la B se vor găsi în șirul numerilor prime cu N din șirul dela A la $(A+B)$, sau acele prime cu N din șirul până la A, se vor găsi în șirul dela B la $(A+B)$. Aceasta se întâmplă însă foarte rar și în special când N este un număr prim, deoarece în acest caz avem:

$$(N-1)! = (N-x)!\,(x-1)!\; C_{N-1}^{N-x} = C_{N-1}^{x-1}$$

unde simbolul combinărilor reprezintă numere întregi.

Deasemenea pot lua valori întregi când N sau divizorii lui sunt primi cu $(A+B)$.

In orice caz însă R va cuprinde numerile prime cu N din șirul dela Bl a $(A+B)$, dacă ele sunt prime și cu restul numerilor până la B.

Exemple:

I). $$\begin{aligned} P_{29}(10) &= 1.3.7.9.11.13.17.19 \\ &= P_8(18) \,.\, P_{12}(10) \,.\, R \\ &= (1.3.7) \,.\, (1\,3.7.9.11) \,.\, \left(\frac{13.17.19}{1.3.7}\right) \end{aligned}$$

Apoi:

$$R = \frac{13.17.19}{1.3.7} = \frac{9.11.13.17.19}{1.3.7.9.11} = \frac{P_{8\to 20}(10)}{P_{12}(10)}$$

$$= \frac{13.17.19}{1.3.7} = \frac{P_{12\to 20}(10)}{P_8(10)}$$

II). $P_{10}(11) = 10! = 4!\,6!\,(2.3.5.7) = P_4(11)\,.\,P_6(11)\,.\,R$

și

$$R = \frac{P_{6\to 10}(11)}{P_4(11)} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{P_{4\to 10}(11)}{P_6(11)} = \frac{10!}{6!\,4!} = 2.5.7$$

III). $P_{12}(35) = 1.2.3.4.5.6.8.9.11 = P_5(35)\,.\,P_7(35)\,.\,R$

$= (1.2.3.4)\,.\,(1.2.3.4.6)\,.\,(3.11)$

și

$$R = \frac{P_{7\to 12}(35)}{P_5(35)} = \frac{8.9.11}{1.2.3.4} = 3.11$$

$$= \frac{P_{5\to 12}(35)}{P_7(35)} = \frac{6.8.9.11}{1.2.3.4.6} = 3.11$$

Notă. Observăm că, dacă $A = A'\,.\,\Delta$ și $B = B'\,.\,\Delta$ atunci:

$$Q_0 = \frac{(A+B)!}{A!\;B!} \text{ și } Q_1 = Q_2 = \ldots = \frac{(A'+B')!}{A'!\,B'!}$$

Dacă admitem apoi $A' = B' = 1$, atunci este lesne de văzut că:

$$1 < R < \frac{(A+B)!}{A!\,B!}$$

12. *Să se arate că avem:*

34) $$\frac{P_{B\to B}(N)}{P_{A\to (B-1)}(N)} = \frac{P_B(N)}{P_{(B-1)}(N)} = 0 \text{ sau } B.$$

35) $$P_{(A-1)\to (B-1)}(N) = \frac{P_{B-1}(N)}{P_{A-1}(N)} = \frac{P_B(N)}{P_A(N)}\cdot\frac{A}{B}$$

și

36) $$\frac{P_{A\to B}(N)}{P_{(A-1)\to (B-1)}(N)} = 1 \text{ sau } \frac{B}{A-1}$$

Scriind toate șirurile de numere și examinând cazurile când: $(A-1)$, A, $(B-1)$ și B sunt sau nu prime cu N, atunci obținem lesne relațiile de mai sus.

ANEXĂ

Asupra distribuţiei de numere prime

1. *Numărul numerilor prime cuprins între* A *şi* B *este dat de funcţiunea :*

$$I_{A \to B}[2.3.5.7.11\ .\ .\ .\ (\sqrt{B})]$$

unde paranteza reprezintă produsul tuturor numerilor prime până la cel mai mare număr prim, care este imediat inferior întregului din $\sqrt{B}$ *şi pe care îl notăm cu* $(\sqrt{B})$, *iar funcţia* $I_{A \to B}(N)$ *reprezintă numărul numerilor prime cu* N *din intervalul de numere dela* A *la* B.

Este uşor de constatat că numerile cuprinse în intervalul de numere dela A la B şi cari sunt prime cu produsul numerilor prime până la $(\sqrt{B})$ inclusiv, vor fi ele însăşi numere prime.

In adevăr, dacă P reprezintă un număr compus, cuprins în intervalul dela A la B, el va avea factori primi mai mici decât $(\sqrt{B})$, deci nu va fi prim cu paranteza. Dacă însă P va fi prim cu paranteza, rămânând inferior lui B (cuprins fiind între A şi B) va fi desigur un număr prim, număr care se va găsi de fapt în intervalul dela $(\sqrt{B})$ la B, dacă $(\sqrt{B} > A$.

2. *Intre numerile* $n(n+1)$ *şi* $(n+1)^2$ *va exista totdeauna cel puţin un număr prim.*

Pentru a stabili aceasta, vom căuta să determinăm numerile *A* și *B* din relația:

$$I_{A\to B}[2.3.5.7.11\ .\ .\ .\ (\sqrt{B})] = 1$$

ceeace corespunde cazului când în intervalul dela *A* la *B* ar exista un singur număr prim.

Vom pune $B = A + x$ și cum știm că:

$$I_{A\to B}(N) = I_B(N) - I_A(N)$$

și

$$I_B(N) = I_{A+x}(N) = I_A(N) + I_x(N) - \varepsilon$$

Ținând seamă că $\varepsilon = 0$ sau *1*, vom lua:

$$I_B(N) \leqq I_A(N) + I_x(N)$$

Prin urmare:

$$I_{A\to B}(N) \leqq I_x(N)$$

Sau în cazul nostru:

$$I_{A\to B}[2.3.5.7.11\ .\ .\ .\ (\sqrt{B})] \leqq I_x[2.3.5.7.1.1\ .\ .\ (\sqrt{B})]$$

Dar nu trebue să se neglijeze faptul că $I_x[\quad]$ reprezintă numerile prime cu paranteză, însă numai între $(\sqrt{B})$ și x, sau între x și $(\sqrt{B})$.

Dar, pentru ca în intervalul dela *A* la *B* să avem un singur număr prim, trebue ca $x \leqq (\sqrt{B})$. Cum însă nu putem determina cu precizie pe x, în raport de $(\sqrt{B})$, vom admite $x = (\sqrt{B})$, în acest caz vom fi obligați să spunem că *între* A *și* B *trebue să avem cel puțin un număr prim.*

Cum însă avem $B = A + x$, vom avea atunci $A = B - (\sqrt{B})$ și deci dacă notăm cu: $n \doteq (\sqrt{B}) - 1$, obținem:

$$A = n\,.\,(n + 1) \quad \text{și} \quad B = (n + 1)^2$$

De aci rezultă următoarea consecință:

„Intre patratele a două numere consecutive este totdeauna cel puțin un număr prim“.

Observații:

I) După teorema lui **Bertrand** de monstrată de **Tchebycheff** știm că:

„Pentru $2x > 7$, *între* x *și* $2(x-1)$ *este cel puțin un număr prim".*

Dar intervalul $[x \rightarrow 2(x-1)]$ este mai mare ca $[n(n+1) \rightarrow (n+1)]^2$, fapt ușor de constatat deoarece, dacă $x = n \cdot (n+1)$, observăm că:

$$2(x-1) > (n+1)^2$$

pentru $n > 3$.

II) Dacă admitem că $B = x \cdot A$, atunci:

$$I_B(N = I_{x.A}(N) = x \cdot I_A(N) - j$$

unde $0 \leq j < x$. Deci:

$$I_{A \rightarrow B}(N) = (x-1) \cdot I_A(N) - j$$

Pentru cazul când $A = (\sqrt{B})$ avem $I_A(N) = 1$, iar pentru cazul când $(\sqrt{B}) \leq A < B$, atunci: $I_A(N) > 1$.

Vom lua însă cazul cel mai defavorabil când A este foarte apropiat de B și $j = 0$ și deci înlocuind $I_A(N)$ prin $I_B(N)$ și apoi $I_B(N)$ prin x, avem:

$$I_{A \rightarrow B}(N) = (x-1) \cdot x = 1$$

Adică $x = 1,618 \ldots$, deci:

„Intre n *și* 1,618 . n *este cel puțin un număr prim".*

Această proprietate este mai interesantă decât prima, stabilită mai sus, deoarece limitele intervalului nu sunt numere compuse.

3. *Intre* A *și* B *este un număr mai mic de numere prime decât între* k . A *și* k . B *pentru* $k > 1$.

Fie:

$$n_1 = I_{A \rightarrow B}[2.3.5.7.11 \ldots (\sqrt{B})]$$

și

$$n_k = I_{kA \rightarrow kB}[2.3.5.7.11 \ldots (\sqrt{k.B})]$$

Trebue să arătăm că $n_1 < n_k$.

Vom pune $B = A + x$, atunci vom avea:

$$I_{A \rightarrow B}[2.3.5.7.11 \ldots (\sqrt{B})] = I_x[2.3.5.7.11 \ldots (\sqrt{B})] - \varepsilon$$

$$I_{kA \rightarrow kB}[2.3.5.7.11 \ldots (\sqrt{k.B})] = I_{k.x}[2.3.5.7.11 \ldots (\sqrt{k.B})] - \varepsilon$$

Cum însă: $I_x[\quad] < I_{kx}[\quad]$ deoarece pentru $x = (\sqrt{B})$ avem $kx > (\sqrt{k.B})$, urmează că $n_1 < n_k$, adică intervalul de numere $[(\sqrt{B}) \rightarrow x]$ este mai mic decât intervalul de numere $[(\sqrt{k.B}) \rightarrow k.x]$.

Observații :

Pentru $A = 1$, $B = n$ și $k = n$ constatăm că:

Intre 1 *și* n *este un număr mai mic de numere prime decât între* n *și* n^2.

II) Pentru $k = A$ avem:

Intre A *și* B *este un număr mai mic de numere prime decât între* A^2 *și* A . B.

III) Pentru $k = B$, avem:

Intre A *și* B *este un număr mai mic de numere prime decât între* AB *și* B^2.

IV) Proprietatea 2 se poate deasemenea stabili dacă punem $B = x \, . \, A$, în care caz avem:

$$I_{xA} [\quad] - I_A [\quad] < I_{x\,.\,kA} [\quad] = I_{kA} [\quad]$$

ceeace se reduce la:

$$I_A [\quad] < I_{kA} [\quad]$$

Unde se vede că între *1* și *A* sunt mai puține numere prime decât între *1* și $k \, . \, A$.

4. *Intre* (k—1) . N *și* k . N *sunt mai puține numere prime decât între* 1 *și* (k—1) . N, *pentru* $k > 1$.

Trebue deci să arătăm că:

$$I_{(k-1)N} [2.3.5.7.11 \ldots\ldots (\sqrt{(k-1).N})]$$
$$< I_{(k-1)N \rightarrow k.N} [2.3.5.7.11 \ldots\ldots (\sqrt{k.N})]$$

Inlocuind însă în primul membru $(\sqrt{(k-1).N})$ prin $(\sqrt{k.N})$ deoarece nu se schimbă nimic, rămâne să arătăm că:

$$2 \, I_{(k-1)\,.\,N} [\quad] > I_{k.N} [\quad]$$

Dar cum știm că:

$$I_{(k-1)\,.\,N} [\quad] = (k-1) \, . \, I_N [\quad] - j_1$$

unde $0 \leq j_1 < k - 1$ și:

$$I_{k.N} [\quad] = k \, . \, I_N [\quad] - j_2$$

unde $0 \leq j_2 < k$, urmează că:

$$(k-2) \, . \, I_N [\quad] > 2 \, j_1 - j_2$$

Dar chiar dacă, prin imposibil, admitem $j_1 = k - 1$ și $j_2 = 0$, atunci deoarece avem $I_N [\quad] > 2$, neegalitatea va subzista.

Insă mai putem scrie succesiv :

$$I_{k.N}[\ \ ] > I_{k.N}[\ \ ] - I_{k.N-N}[-]$$

$$2\,I_{k.N-N}[\ \ ] > I_{k.N}[\ \ ]$$

$$2\,I_{k.N-N}[\ \ ] = I_{k.N-N}[\ \ ] + I_N[\ \ ] - \varepsilon$$

$$I_{k.N-N}[\ \ ] > I_N[\ \ ] - \varepsilon$$

Ceeace este evident, deoarece pentru $k > 2$ sunt mai multe numere prime între *1* și $(k-1).N$ decât între *1* și N.

Observații :

I) Pentru $k = 2$ vedem că:

Intre 1 *și* N *sunt mai multe numere prime decât între* N *și* 2N.

Această proprietate este de mult cunoscută.

II) Pentru $k = N$ avem :

Intre (N—1)N *și* N^2 *sunt mai multe numere prime decât între* 1 *și* (N—1)N.

III) *Intre* 1 *și* N^2 *sunt mai multe numere prime decât între* N^2 *și* N . (N+1).

TABLA DE MATERII

CAPITOLUL III

Produsul numerilor prime cu un număr dat și mai mici ca el