ELEMENTE

DE

MECANICĂ

PENTRU

CLASA VII REALĂ

ALCĂTUITE

CONFORM PROGRAMEI ANALITICE IN VIGOARE

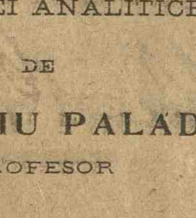
DE

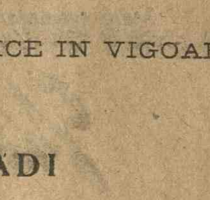
GH. BEIU PALADI

PROFESOR

Aprobată de Onor. Minister al Instrucțiunei.

EDITURA:
CARTEA ROMÂN 50
SEDIUL U
BUCUR O.





Toate exemplarele vor purtà semnătura autorului.

MECANICĂ ELEMENTARĂ

CAP. I.

DEFINIŢII. PRINCIPII. FORŢE.

§ 1. **Definiţia şi obiectul Mecanicei.** Mecanica este ştiinţa care se ocupă cu mişcarea în raport cu cauzele care o produc. Pe aceste cauze le vom numì *forţe*.

Ea face legătura între ştiinţele *fizice* şi ştiinţele *matematice*. Ca şi cele dintâiu, ea îşi împrumută principiile fundamentale şi legile generale din natură. Odată luate însă aceste principii, toată Mecanica se deduce prin aplicarea riguroasă a metodelor geometrice. Spre deosebire însă de celelalte ştiinţe matematice, diferitele rezultate la care se ajunge în Mecanică, îşi găsesc o aplicare imediată în practică. Totalitatea acestor rezultate practice face obiectul unei anumite părţi: *Mecanica aplicată*, în deosebi de cea dintâiu care poartă numele de *Mecanică raţională*.

§ 2. **Impărţirea Mecanicei.** Cu mişcarea figurilor sau a corpurilor în plan sau în spaţiu se ocupă şi *Geometria*. Aşâ d. ex.: suprapunerile, translaţiele, rotaţiele, etc. Mişcările în Mecanică se deosebesc de cele geometrice prin introducerea în cele dintâiu a unei mărimi nouă, a *timpului* pe lângă cea a *spaţiului*. Partea Mecanicei care se ocupă cu mişcările corpului în raport cu timpul şi cu spaţiul, fără a ţine seamă de cauzele acestei mişcări sau de natura corpului, se numeşte *Cinematică*.

Se poate întâmplà ca, un corp fiind în repaus, să rămână în repaus și sub acțiunea mai multor forțe. Se zice atunci că forțele își fac *equilibru*. Partea din mecanică care se ocupă cu condițiunile de equilibru a mai multor forțe în jurul unui corp se numește *Statică*.

In fine, partea din Mecanică, care se ocupă cu studiul mișcărei corpurilor sub acțiunea forțelor, luând în considerație și spațiul și timpul, se numește *Dinamică*. In realitatê Dinamica este adevărata Mecanică rațională. Celelalte două părți, Cinematica și Statica sunt niște științi ajutătoare; ele ar puteà fi incorporate în științele matematice, și în special, ar puteà face fiecare câte o parte a Geometriei.

§ 3. **Sisteme de puncte. Solide geometrice.** Orice figură geometrică poate fi considerată ca formată din un *sistem de puncte*. Un sistem este *invariabil* când distanța dintre aceste puncte rămâne neschimbată. Astfel este un triunghiu cu laturile de lungime hotărîtă, un tetraedru, etc.

Dacă din contra, punctele sistemului sunt mobile unele în raport cu altele, sistemul este *deformabil*. De ex., un patrulater cu laturile constante și cu unghiurile variabile. Sistemele invariabile se numesc și *solide geometrice*.

Punctele materiale și *solidele invariabile* sunt numai niște *concepții matematice*, de oarece nu există în natură nici puncte fără dimensiuni, nici solide care să nu fie mai mult sau mai puțin deformabile.

§ 4. **Mișcare. Repaos.** Se zice că un punct este în *repaos* în raport cu un solid, când distanțele lui la diferitele puncte ale solidului rămân constante. In caz contrar, când aceste distanțe variază cu timpul, acel punct se zice că e în *mișcare* față cu corpul solid considerat.

Acelaș lucru pentru un corp: el va fi în *repaus* față de un solid (o carte așezată pe o masă) când toate punctele celui dintâiu sunt în repaos față de al doilea; din contră, el va fi în *mișcare* când toate punctele sale sunt în mișcare față de solidul considerat. (O trăsură ce merge pe șosea).

Un corp în repaus, față de unele corpuri, poate fi în mișcare față de altele. Astfel un călător este în repaus față cu trenul în care merge, dar e în mişcare faţă cu câmpul, arborii, etc., ce-i întâlneşte în drum. O casă e în repaus faţă de pământ, dar e în mişcare faţă de soare, etc.

Sistemul invariabil de puncte faţă de care se defineşte mişcarea şi repausul corpurilor se numeşte *sistem de reper* sau *puncte de reper*.

Dacă punctele de reper sunt fixe, mişcarea şi repausul faţă de ele sunt *absolute*. Dacă punctele de reper sunt ele însăşi în mişcare, repausul şi mişcare faţă de dânsele vor fi *relative*. Neputându-se găsì puncte de reper fixe, mişcările sau repausul constatate de noi sunt *relative*.

§ 5. **Principiul Inerţiei**. Un punct material nu poate trece din o stare de repaus în alta de mişcare, fără intervenirea unei cauze exterioare; de asemenea, un punct material, odată aflat în mişcare, nu-şi poate modificà mişcarea nici ca direcţie nici ca iuţeală, fără intervenirea unei cauze externe. Această mişcare este rectilinie şi uniformă.

In adevăr, un solid este inert, adică incapabil de a se pune singur el în mişcare. D. ex.: o piatră aşezată pe pământ nu se va mişcà de acolo fără intervenirea unei *cauze exterioare*. Pe de altă parte, aruncând o bilă pe un plan orizontal, ea va merge din ce în ce mai încet, din cauza rezistenţei aerului şi a frecării. Micşorând această rezistenţă prin vid şi frecarea prin lustruirea bilei şi a planului, mişcarea durează mai mult. Se poate conchide de aici că dacă s'ar suprimà complect aceste rezistenţe exterioare, mişcarea s'ar face necontenit.

Deşi exactitatea acestui principiu nu se poate stabilì complect prin experienţă, totuşi el rămâne demonstrat prin faptul că toate consecinţele deduse din el în mod logic sunt conforme cu realitatea.

Vom puteà dar enunţà *principiul inerţiei* cum urmează:

1. Când un corp este în repaus, el rămâne în repaus dacă nici o acţiune exterioară nu se exercită asupra lui.

2. Când un corp este în mişcare, această mişcare este rectilinie şi uniformă dacă nici o acţiune exterioară nu se exercită asupra lui.

§ 6. **Forţa. Elementele ei**. Se numeşte *Forţa* orce cauză ce poate produce mișcarea sau poate să o modifice. Cunoaștem din experiență existența unor forțe La unele le cunoaștem natura și origina, cum e d. ex., forța vàntului. Altele rămân necunoscute in natura lor; astfel nu cunoaștem adevărata cauză care face să cadă o piatră, sau pe aceea care atrage fierul către magnet.

Orcare ar fi natura lor, noi le vom considerà numai din punct de vedere mecanic. Le vom comparà, după efectul ce-l produc asupra corpurilor.

Principalele forțe ale naturii sunt:

Forțele musculare, datorite contracțiunii muschilor;

Greutatea care atrage corpurile către centrul pământului, și care e un caz particular al *atracției universale*, în virtutea căreia planetele se învârtesc în jurul soarelui;

Forțele *electrice* și *magnetice* ;

Forțele *elastice*, în virtutea cărora vaporii exercită presiuni pe vasele ce le conțin ;

Forțele calorifice care dilată corpurile, dând naștere la deplasarea lor (origina vânturilor) ;

Forțele moleculare cari produc mișcări vibratorii în corpurile elastice, deformate și pe urmă lăsate în voe;

Forțele *capilare*, de *coesiune*, de *afinitate*, cari sunt atracțiuni între moleculele unui corp ;

Frecarea ce rezultă din contactul a două suprafețe și care se opune la mișcare.

Rezistența mediului.

Unele din aceste forțe lucrează în un sens determinat, cum e *greutatea*; altele nu-și arată existența decât când se deplasează corpurile, cum e *frecarea*, *rezistența mediului*.

La o forță se deosebesc patru elemente esențiale:

1. *punctul de aplicațiune*, adică punctul asupra căruia lucrează;

2. *direcțiunea sau linia de acțiune*;

3. *sensul său* ;

4. *intensitatea sa*, adică mărimea efectului produs. Aceasta se măsoară prin compararea efectului unei forțe față cu al alteia.

O forță se reprezintă geometricește prin un segment de linie dreaptă AF, astfel că punctul de aplicațiune să fie în originea A, direcțiunea să fie dreapta, după care forța mișcă punctul, sensul forței să fie sensul AF al segmentului, iar intensitatea să fie reprezentată, după o scară anumită, prin însăși lungimea AF a segmentului. (Fig. 1).

§ 7. **Equilibru. Forțe egale.** Se zice că mai multe forțe cari lucrează asupra unui corp, *își fac equilibru* când acel corp nu-și schimbă starea de repaus sau de mișcare în care erà, făcând să lucreze sau suprimând acele forțe.

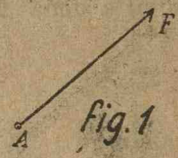


fig. 1

Două forțe, F și F', se zic că sunt *egale* când, aplicate pe rând la un acelaș corp în aceleași condițiuni, produc aceleași efecte. De aci rezultă că două forțe, aplicate simultaneu la un acelaș corp, însă în sens contrar, își vor face equilibru.

§ 8. **Teoremă. Două forțe A și B, care pot fi equilibrate pe rând de o a treia forță C, sunt egale.** Să ne închipuim, în adevăr, că forța A lucrează asupra unui corp. Făcând acum să lucreze și sistemul de forțe B, C asupra acelui corp, efectul nu se va schimbà, de oarece forțele B și C își fac equilibru, astfel că forța A și sistemul (A B C) produc un acelaș efect. Suprimând acum forțele A și C efectul nu se va schimbà, de oarece și aceste forțe se equilibrează, încât forța A și forța B producând un acelaș efect, urmează că ele sunt egale.

De aici urmează că, putem constatà egalitatea a două forțe A, B, aplicându-le pe rând la un acelaș punct material în aceeaș direcție și sens. Dacă putem equilibrà pe fiecare cu o aceeaș forță C, forțele A și B sunt egale.

§ 9. **Suma mai multor forțe.** O forță F este *suma* mai multor forțe A, B, C,... îndreptate în acelaș sens, când forța F produce asupra unui corp acelaș efect pe care l-ar produce la un loc forțele A, B, C,... aplicate în acelaș punct, direcție și sens ca și cum a fost aplicată F. Sau forța F este egală cu A + B + C... când, atât una, cât și suma celorlalte, pot fi equilibrate separat prin o aceeaș forță.

O forță A este *multiplul* unei forțe B, când A este suma mai multor forțe egale cu B'; forța B este atunci *submultiplul* forței A.

Raportul unei forțe A față de alta B este numărul care exprimă câte părți aliquote de ale lui B, se cuprind în A, în caz când ambele forțe au o comună măsură. Noțiunea raportului a două forțe se poate întinde și la cazul când forțele sunt incomensurabile, exact ca pentru celelalte mărimi.

fig. 2

§ 10. **Măsura forțelor. Dinamometre.** Măsura unei forțe este rezultatul comparării ei cu o altă forță luată ca unitate. Deși sunt diferite feluri de forțe, ele se compară toate cu *greutatea* și se ià ca unitate kilogramul.

Instrumentul destinat la măsura forțelor este *dinamometrul* Acest aparat se compune din un resort sau o lamă de oțel, care se deformează în raport cu intensitatea forței care lucrează asupra lui și care-și reià forma primitivă din momentul ce forța încetează de a lucrà. Cântarele cu resort (fig. 2) sau cu lamă sunt construite pe acelaș principiu.

Pentru a gradà un dinamometru se suspendă o greutate de un kg. în H (fig. 3), iar flexiunea corespunzătoare se notează pe lama F D, pe urmă se suspendă 2 kg., 3 kg., etc. și se notează flexiunile ce corespund. Instrumentul este astfel gradat.

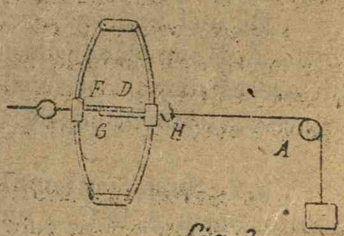


fig. 3

Făcând acum să lucreze o forță, alta decât greutatea, se așează axa aparatului H G în linia de acțiune a acelei forțe și se obține imediat intensitatea sa.

Astfel, un cal fiind înhămat la o căruță, se așează dinamometrul între ham și căruță, și în momentul de a se pune în mișcare, se citește pe riglă gradată d. ex. 80 kg. Aceasta este intensitatea forței de tracțiune.

PARTEA I.

STATICA

CAP. II.

FORȚE CONCURENTE.

§ 11. **Principiul lui Galileu. Independența efectelor forțelor simultane.** Să lămurim acest principiu prin exemple: In un vagon ce se mișcă uniform, un ceasornic merge cu aceeaș regularitate ca și pe pământ. De asemenea, pentru a deplasà un obiect situat în un vagon în mișcare, trebue aceeaș sforțare ca și când vagonul ar stà pe loc. Vom puteà enunțà dar principiul: *Când mai multe forțe lucrează simultan asupra unui punct material, fiecare din ele produce acelaș efect ca și când ar fi singură.*

§ 12. **Principiile Staticei.** Se admit de asemenea ca evidente, de oarece rezultă din experiență, următoarele principii speciale Staticei:

a) Două forțe egale și direct opuse, care lucrează asupra unui punct material sau asupra unei bare rigide și inextensibile, își fac echilibru. $\xleftrightarrow{AB}$ (fiecare forța provocand deplasare și desen contrar în acel timp

b) Starea de echilibru a unui corp nu se schimbă dacă se fixează unul sau mai multe din punctele lui, sau dacă se introduce legături nouă, ce nu modifică întru nimic pe cele ce existau. Astfel, dacă am presupune că un poligon se află în echilibru sub acțiunea unor forțe, această stare se menține, fie că am fixà unul sau mai multe vârfuri, fie că le-am legà între ele, prin niște bare, după direcția diagonalelor.

c) Se poate, fără a modificà starea de echilibru sau de mișcare a unui corp, introduce sau suprimà ori câte forțe voim, cu condiție ca acele forțe să-și facă echilibru.

d) Principiul egalității acțiunei și a reacțiunei. Când un cal trage o trăsură, simte din partea acesteia o rezistență egală cu sforțarea pe care o pune pentru a mișcà trăsura. Dacă aflându-ne pe un vas plutitor, tragem prin ajutorul unei frânghii, un obiect fixat pe mal, vasul se apropie de obiect, ca și cum acel obiect ar exercità asupra vasului o forță de tracțiune egală cu aceea întrebuințată de noi, asupra obiectului. Un magnet atrage fierul cu aceeaș forță cu care fierul trage pe magnet. In general dar: *Când un punct* A, *exercită asupra unui punct* B, *o forță ce lucrează în direcția* AB, *puctul* B *exercită asupra lui* A *o forță egală și de sens contrar cu precedenta.*

§ 13. **Teoremă.** *Efectul unei forțe asupra unui corp nu se schimbă, dacă se mută punctul de aplicație în un punct oarecare de pe direcția acelei forțe.* Fie de ex. forța F care lucrează asupra corpului C în punctul A (fig. 4). Zic că acelaș efect va aveà, dacă o mutăm în punctul B, cu alte cuvinte forța AF este echivalentă cu BF′, de oarece conform teoremei dela § 8, ele pot fi echilibrate pe rând prin aceeaș forță BF″ egală și direct opusă cu fiecare din cele două.

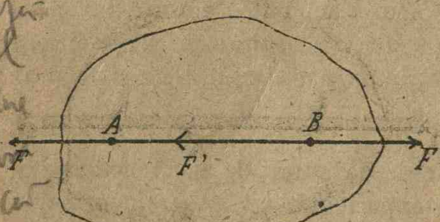


fig. 4

De altfel, conform principiului *c* dela § 12, efectul forței F nu se schimbă introducând sistemul de forțe (F′, F″) ce-și fac echilibru. Pe de altă parte, forțele F și F″ făcându-și echilibru, le putem suprimà, conform aceluiaș principiu. Astfel că, în definitiv, corpul rămâne numai sub acțiunea forței BF′, care e dar echivalentă cu AF.

§ 14. **Compunerea și descompunerea forțelor.** Două

1) Dacă un corp se poate mișca liber în jurul unui punct sau axe, atunci, în cazul când asupra lui lucrează o forță, el nu rămâne în echilibru decât dacă forța întâlnește punctul fix sau dacă, prin definiție, corpul se poate sub acțiunea unei forțe să se miște corpul în jurul punctului sau axei.

sisteme de forţe se zic că sunt *echivalente*, dacă nu se schimbă starea de repaus sau mişcare a corpului, înlocuind un sistem prin celălalt.

Dacă un sistem de forţe este echivalent cu o forţă unică, aceasta se numeşte *rezultanta* sistemului; iar forţele sistemului se numeste *componentele* forţei unice.

Se înţelege prin *compunerea forţelor*, operaţia care constă în înlocuirea mai multor forţe prin rezultanta lor; *descompunerea* este operaţia inversă.

§ 15. **Teoremă**. *Dacă mai multe forţe care lucrează asupra unui acelaş punct, îşi fac echilibru, fiecare din ele este egală şi direct opusă cu rezultanta celorlalte.*

Fie în adevăr F, F′, F″, F‴... (fig. 5), un sistem de forţe ce-şi fac echilibru în jurul punctului O; zic că una din ele, de ex. F, este egală şi direct opusă cu rezultanta R a celorlalte. In adevăr, R fiind rezultanta lui F′ F″..., le poate înlocui şi deci ea va echilibra pe F, adică va fi egală şi de sens contrar cu dânsa.

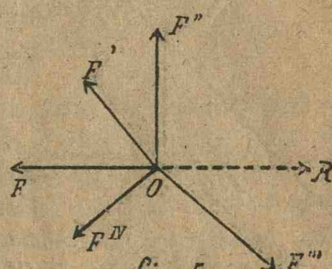


fig. 5

§ 16. **Compunerea forţelor ce lucrează pe aceeaş linie dreaptă.**

a) Dacă forţele sunt îndreptate *in acelaş sens*, prin definiţie resultanta lor va fi egală cu suma acestor forţe aplicată în un punct oarecare de pe linia de acţiune şi în acelaş sens cu forţele date.

Reciproc, se poate descompune o forţă în mai multe altele de acelaş sens, a căror sumă să fie egală cu forţa dată.

b) In caz când avem *două forţe de sens contrar* F şi F′, unde F′ > F (fig. 6), se poate descompune forţa F′ în două alte forţe, care să aibă ca valoare F şi F′—F; cele două forţe egale cu F şi de sens contrar, se distrug şi ne rămâne forţa F′ – F îndreptată în sensul celei mai mari.

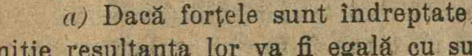


fig. 6

§ 15 bis. Teorema

Dacă un corp e în echilibru sub acţiunea a două forţe, cele două forţe sunt egale şi de sens contrar

A B

~~demonst~~

Fie . punct altul decât intersecţia celor 2 forţe, se fixează fără a strica starea de repaus. Va rămâne atunci în acţiune numai o forţă, care va mişca

corpul, contrariu ipotezei. Dacă punctul de aplicaţie este comun celor două forţe, în cazul acesta deplasăm una din forţe conform §13 *c)* In fine, când avem în general mai multe forțe îndreptate în cele două sensuri diferite, de ex.: F_1 F_2 F_3,..... în un sens și P_1, P_2, P_3,..... în sens contrar, vom găsi mai întâi rezultanta forțelor ce lucrează într'un sens, pe urmă a forțelor ce lucrează în sens contrar. Vom avea astfel numai două forțe F și P, care lucrează în sens contrar și pe care le vom compune ca în cazul precedent.

§ 17. Putem *reprezentà în mod algebric* această compunere a forțelor. Să fixăm pe linia de acțiune a forțelor sensul Ox ca sens pozitiv (fig. 7) și cel contrar ca negativ și fie OF_1, OF_2, OF_3... mai multe forțe ce lucrează în ambele sensuri și OR rezultanta lor. Să însemnăm prin F_1, F_2,...., R valorile absolute ale acestor forțe, precedate de semnul + sau —, după cum sunt îndreptate în sensul Ox sau în sens contrar. Zic că rezultanta va fi dată în mărime și sens de formula:

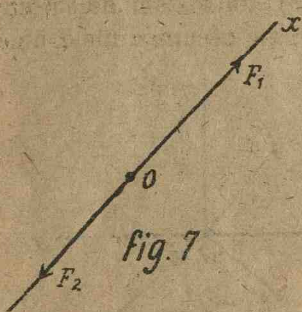


fig. 7

$$R = F_1 + F_2 + ... = \Sigma F_1$$

In adevăr, valoarea absolută a sumei ΣF_1 este diferența între suma termenilor pozitivi și suma terminilor negativi, sau, după convenția noastră, diferența între suma forțelor ce lucrează în sensul Ox și a celor cari lucrează în sens contrar; deci valoarea absolută a lui ΣF este tocmai valoarea absolută a lui R. Dacă această sumă ΣF este pozitivă, din algebră știm că suma terminilor pozitivi este mai mare ca suma celor negativi. Dar atunci, după convenția făcută suma forțelor îndreptată în sensul Ox e mai mare decât a celor îndreptate în sens contrar. Rezultanta va fi atunci pozitivă ca și ΣF. Acelaș lucru când ΣF e negativă, R este negativ. Prin urmare, formula $R = \Sigma F$ ne dă rezultanta în mărime și sens. In caz când $\Sigma F = 0$, rezultanta fiind nulă forțele își fac equilibru.

Compunerea forțelor concurente.

§ 18. **Lema I.** *Forțele egale aplicate după cele patru laturi ale unui romb solid și invariabil și plecând din două vârfuri opuse, își fac equilibru.*

Fie forţele AB, AD; CB, CD patru forţe egale ce pleacă respectiv din punctele A şi C şi sunt îndreptate după cele patru laturi ale rombului ABCD. Fie R rezultanta celor două dintâiu, R′ rezultanta celorlalte.

Să învârtim figura DAB în jurul lui AC, de 180°, AD va ocupà locul lui AB, iar AB al lui AD; prin această rotaţie se va reproduce exact acelaş sistem de forţe, deci rezultanta noului sistem va reproduce pe a celui vechiu. Pe de altă parte această rezultantă R, trebue să ia parte la rotaţia de 180 a forţelor AD şi AB. De aci urmează că rezultanta R după o rotaţie de 180° în jurul lui AC, coincide cu ea însăşi, ceeace nu se poate fără ca R să nu fie îndreptată în direcţia AC. Tot astfel se poate arătà că R′ este îndreptată în direcţia AC.

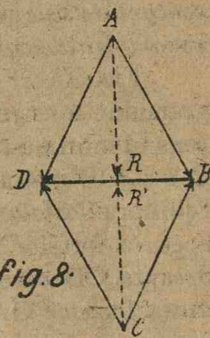


fig. 8.

Invârtind acum figura BAD în jurul lui BD de 180° ea se suprapune peste figura BCD, iar R se suprapune peste R. Deci R=R′ şi direct opuse, iar rombul îşi face equilibru.

§ 19. **Lema II.** *Forţele aplicate în două vârfuri opuse ale unui paralelogram ABCD in direcţiile laturilor şi egale cu ele îşi fac equilibru.* Fie AB, AD; CB, CD (fig. 9) acele patru forţe. Presupunem că AB şi AD au o comună măsură ce se cuprinde d. ex., de 2 ori în AD şi de 3 ori în AB. Prin punctele de diviziune ducem paralelele EF, GK, LN, şi descompunem astfel paralelogramul în şase romburi. Descompunem de asemene forţele în 2 şi 3 forţe egale cu măsura comună şi aplicate în punctele de diviziune şi în direcţia laturilor. Aplicăm de asemenea dealungul laturilor *romburilor*, unde nu-s forţe de ale *paralelogramului*, câte două forţe contrare şi egale cu aceste laturi. Forţele AE, AG, HF, HG, cari lucrează asupra unui romb îşi fac equilibru conform lemei precedente.

fig. 9

De asemenea fiecare din cele 6 romburi este în equilibru. Deci paralelogramul întreg este în equilibru.

Lema se poate dovedi și în cazul când laturile paralelogramului nu ar aveà o comună măsură.

§ 20. **Teorema fundementală.** *Rezultanta a două forțe concurente este reprezentată în direcție, sens și mărime prin diagonala paralelogramului construit pe aceste două forțe.*

Fie OA și OB acele două forțe, OD diagonala paralelogramului construit pe dânsele. Zic că OD reprezintă în direcție, sens și mărime rezultanta forțelor OA și OB. In adevăr forțele DA și DB presupuse aplicate unui paralelogram solid ar face equilibru forțelor OA și OB. Rezultanta forțelor OA și OB și aceea a forțelor DA și DB au dar aceeaș direcție comună, anume dreapta OD care unește punctele lor de aplicație. Deci rezultanta forțelor OA și OB are ca *direcție* diagonala OD (fig. 10).

Altă demonstrație: Fie OC o forță egală și de sens opus rezult. forțelor OA și OB

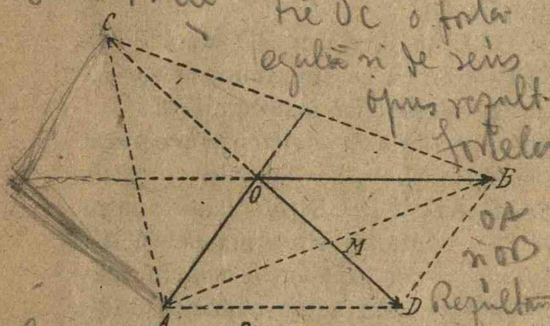


fig. 10

Să luăm acum o forță OC egală și direct opusă cu rezultanta forțelor OA și OB. Forțele OA, OB, OC își vor face dar equilibru. Forța OC, având ca direcție OD, trece prin M, mijlocul diagonalei AB a paralelogramului OABD. De aci urmează că: *dacă o forță OC face equilibru altor două forțe OB, OA ea trece prin mijlocul dreptei AB care unește extremitățile lor.* De asemene OA, făcând equilibru forțelor OB, OC va trece prin mijlocul lui BC. Punctul O va fi punctul de întâlnire a medianelor în triunghiul ABC. De aci urmează că OC e îndreptată în sens invers cu OM sau OD și este egală cu 2 OM sau cu OD. Astfel forța OC este egală și direct opusă lui OD. Dar tot OC este egală și direct opusă cu rezultanta forțelor OA și OB, de unde urmează că această rezultantă este bine reprezentată în mărime, direcție și sens prin diagonala OD a a paralelogramului forțelor date. Urmează de aci că pentru a

forțelor OA și OC este egală și de sens opus forței OB și trece prin vârful E al paral. construit pe OA și OC. Avem OC ∥= AE ∥= OD; deci OC = OD construi rezultanta a două forțe concurente, OA, OB, este deajuns a duce din extremitatea A a uneia din forțe dreapta AD egală și paralelă cu cealaltă forță OB; unind O cu extremitatea D a acestei paralele vom aveà dreapta OD, care reprezintă rezultanța celor două forțe în direcție, intensitate și sens

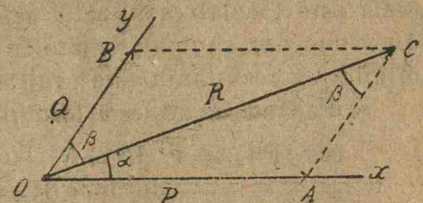


fig. 11

§ 21. **Relațiuni numerice între două forțe și rezultanta lor.** Fie $P = OA$, $Q = OB$ două forțe și $R = OC$ rezultanta lor (fig. 11). In triunghiul OAC avem:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,OA.AC\cos OAC$$

$$\frac{OC}{\sin OAC} = \frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin AOC}$$

sau, observând că $AC = OB = Q$, $OAC + AOB = \pi$, și că $OCA = BOC$, avem:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(PQ) \tag{1}$$

$$\frac{P}{\sin(Q,R)} = \frac{Q}{\sin(PR)} = \frac{R}{\sin(P,Q)} \tag{2}$$

relațiuni care se exprimă în modul următor:

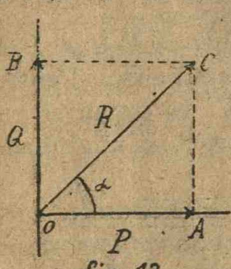


fig. 12

1. Patratul rezultantei a două forțe este egal cu suma patratelor componentelor plus de două ori productul lor prin cosinul unghiului cuprins între direcțiile lor.

2. Raportul unei forțe la sinusul unghiului format de celelalte două este constant.

Cazuri particulare, a) când direcțiunile Ox, Oy în care lucrează forțele P și Q sunt dreptunghiulare (fig. 12) avem:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90^0, \quad \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 90}$$

adică:

$$R^2 = P^2 + Q^2 \tag{3}$$

$$P = R\cos\alpha,\ Q = R\sin\alpha \tag{4}$$

b) Dacă în formula (2) facem $(P, Q) = 180^0$ avem:

$\cos(PQ) = -1$, $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ = (P-Q)^2$ adică $R = P - Q$ acesta este tocmai cazul când cele două forțe au aceeaș linie de acțiune dar sunt îndreptate în sens contrar, și în acest caz am aflat că rezultanta este egală cu diferența componentelor.

c) Făcând în aceleași formule unghiul $PQ = 0$ avem:

$$\cos(PQ) = 1 \quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ = (P+Q)^2$$
$$\text{de unde } R = P + Q$$

în ac caz, forțele fiind de acelaș sens, rezultanta este egală cu su componentelor.

§ 22. **Descompunerea unei forțe în alte două.** Se pot prezentà următoarele cazuri:

a) Să se descompună o forță OC (fig. 13) în două alte forțe care să lucreze după două direcții date Ox, Oy. Se va construì triunghiul OAC ducând prin C paralela la Oy. Componentele după Ox și Oy sunt $OA = X$, $OB = Y$ care e egală, paralelă și de acelaș sens cu AC.

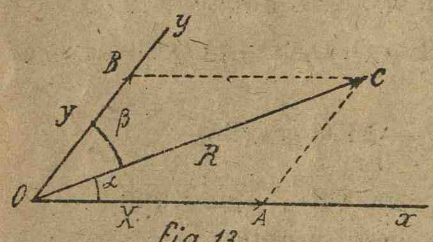


fig 13

Pentruca problema să fie posibilă, ajunge ca OA și CA să se întâlnească, adică ca OC să fie în planul yOx. Pentru a calculà intensitățile componentelor X și Y, va trebuì să rezolvim triunghiul OAC unde se cunosc AC și unghiurile AOC și $ACO = COB$.

b) Să se descompună o forță OC în două altele, dintre care una OA este dată. Triunghiul OAC se va obține atunci unind A cu C. Forța necunoscută va fi OB, egală, paralelă și de acelaș sens cu AC. Pentru calcularea intensității vom rezolvì triunghiul AOC, unde se cunoaște două laturi OA, OC și unghiul cuprins AOC.

c) Să se descompună o forță R în două forțe date P și Q. Va trebui să găsim unghiurile α și β. Pentru aceasta vom construì triunghiul OAC, în care se cunoaște toate laturile, și

vom determinà astfel unghiurile căutate. Pentru aflarea valorilor lor vom rezolvì acest triunghiu.

Oricari ar fi ordinea de compunere pentru cele trei forțe F_1, F_2, F_3, resultanta este aceeași fiincă dacă plecam și în ordinea (F_3, F_2, F_1) paralela la F_1 și egala cu F_1 este BR, căci $F_2B = || AR$ și deci $ARBF_2$ este un paralelogram.

§ 23. **Compunerea mai multor forțe concurente.** Fie forțele F_1, F_2, F_3,.. aplicate toate în punctul O (fig. 14). Putem înlocuì forțele F_1 și F_2 prin rezultanta lor OR_1, obținută ducând F_1R_1, egală și paralelă cu F_2 și de acelaș sens; de asemenea vom puteà înlocuì forțele OR_1 și OF_3 prin rezultanta lor OR_2, care s'a obținut ducând R_1R_2 egală, paralela și de acelaș sens cu OF_3. Continuând astfel, vom ajunge să reducem toate forțele la 2: OR_4 și OF_5, pe care le vom compune în acelaș mod și vom obține rezultanta OR a tuturor forțelor. Această rezultantă închide poligonul $OF_1R_1R_2R_3R$, care are laturile sale paralele egale și de acelaș sens cu forțele $F_1F_2F_3$..... De aci urmează că: *Rezultanta mai multor forțe ce lucrează asupra unui acelaș punct O este reprezentată in mărime, direcție și sens prin dreapta care inchide un poligon, al cărui întâiu vârf este O și ale cărui laturi sunt egale, paralele și de acelaș sens cu forțele date.*

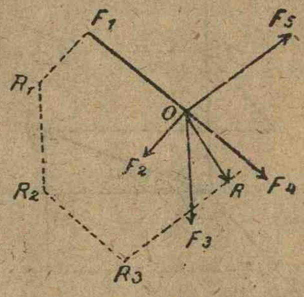


Fig. 14.

Poligonul $OF_1R_1R_2R_3R$, ce servește la găsirea rezultantei, se numește *poligonul forțelor*. Acest poligon este *plan* când toate forțele lucrează în acelaș plan; în caz contrar poligonul este *strâmb*. Rezultanta fiind dreapta care închide *poligonul forțelor* urmează că: *Proecțiunea rezultantei pe orice axă este egală cu suma proecțiunilor forțelor pe acea axă.*

§ 24. **Condițiunea de echilibru a mai multor forțe concurente** este ca $OR = O$, adică ca poligonul $OF_1R_1R_2R_3R$ să se închidă dela sine. Deci *pentru ca mai multe forțe concurente să-și facă echilibru, trebue, și ajunge, ca ele să fie egale (sau proporționale) și paralele cu laturile unui poligon închis și de acelaș sens cu aceste laturi parcurse în o anumită direcție.*

$(F_1 F_2 F_3 F_4) = (F_1 (F_2 F_3), F_4) = (F_4, (F_2, F_3), F_1)$

§ 25. **Teoremă.** *Rezultanta a trei forțe concurente* OF_1,

$= (F_4, F_3, F_2, F_1)$ etc. Teorema e adevărată în cazul a n forțe, când e adevărată pentru n-1 forțe și deci fiind adevărată ... va fi adevărată

OF_2, OF_3, *care nu lucrează în acelaş plan este reprezentată în mărime, direcţie şi sens prin diagonala paralelipipedului construit pe aceste forţe.*

Fie forţele F_1, F_2, F_3, concurente şi nesituate în acelaş plan (fig. 15). Compunând forţele OF_1 şi OF_2 găsim rezultanta SO, care împreună cu OF_3 ne dă rezultanta OR. Dacă acum construim paralelipipedul pe F_1, F_2, F_3, se vede că OR este diagonala lui.

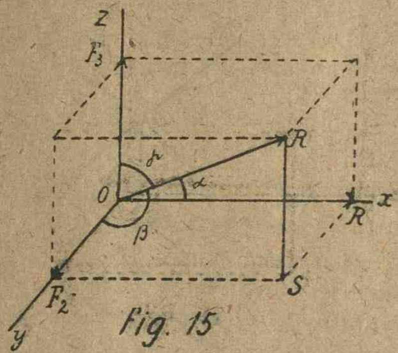


Fig. 15

Poligonul forţelor este în acest caz $OF_1\,SR$.

§. 26. Descompunerea unei forţe OR în alte trei după trei axe ce formează un triedru. Vom duce din R planuri paralele cu cele trei feţe ale triedrului $Oxyz$. Cele trei muchi OF_1, OF_2, OF_3, ale paralelipipedului astfel format, vor fi, după cele ce preced, tocmai componentele forţei OR.

§ 27. Dacă forţele F_1, F_2, F_3, sunt dreptunghiulare, vom aveà relaţia:

$$\overline{OR}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{RS}^2$$

sau, cum $\overline{OS}^2 = \overline{OF_1}^2 + \overline{F_1 S}^2$ şi $F_1 S = OF_2$, $RS = OF_3$, vom aveà:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$$

Deci: *Patratul rezultantei a trei forţe dreptunghiulare este egal cu suma patratelor componentelor.*

Însemnând cu α, β, γ unghiurile pe care le face OR cu Ox, Oy, Oz, vom aveà (axele fiind dreptunghiulare)

$$F_1 = R \cos \alpha, \quad F_2 = R \cos \beta, \quad F_3 = R \cos \gamma.$$

Deci, când forţele sunt dreptunghiulare, fiecare componentă este egală cu proecţia rezultantei pe direcţia acestei componente.

§ 28. **Compunerea mai multor forţe concurente cu ajutorul a două sau trei axe dreptunghiulare.** 1) Dacă forţele lucrează toate în acelaş plan, vom luà în plan două axe dreptunghiulare $O\,x$, $O\,y$; vom descompune fiecare din forţele F_1, F_2,.... în câte două forţe X_1, Y_1; X_2, Y_2;...... Forţele îndreptate spre $O\,x$ se vor compune în una singură X, cele ce lucrează după $O\,y$ în o singură forţă Y. Rezultanta forţelor X şi Y va fi rezultanta căutată. Pentruca forţele să-şi facă echilibru va trebui ca rezultanta să fie nulă, adică:

$$X = \Sigma X_1 = O\,;\ Y = \Sigma Y_1 = O$$

2. Când forţele nu sunt în acelaş plan, vom descompune fiecare forţă F_1 în trei forţe X_1, Y_1, Z_1, după trei axe dreptunghiulare $O\,x$, $O\,y$, $O\,z$, şi vom obţine trei rezultante X, Y, Z care vor lucrà după aceste axe. Pentru ca forţele să-şi facă echilibru, trebue ca cele trei rezultante să fie nule, adică

$$X = \Sigma X_1 = O,\quad Y = \Sigma Y_1 = O,\quad Z = \Sigma Z_1 = O\ .$$

Acestea sunt equaţiile de echilibru a unui punct liber. Forţele X, Y, Z fiind în acelaş timp componentele lui R după cele trei axe şi suma proecţiunilor forţelor pe aceste axe, urmează că: *Proecţiunea pe o axă a rezultantei mai multor forţe este egală cu suma proecţiunilor componentelor pe această axă.*

CAP. III.

FORȚE PARALELE.

§ 29. **Teoremă.** *Rezultanta a două forțe paralele este paralelă cu aceste forțe, egală cu suma algebrică a lor. Punctul ei de aplicație imparte linia ce unește punctele de aplicație ale forțelor în părți invers proporționale cu intensitățile lor.*

Să luăm mai întâiu două forțe paralele și de acelaș sens A_1P_1 și A_2P_2 (fig. 16). Să aplicăm în A_1 și A_2 două forțe A_1F_1, A_2F_2 egale și de sens contrar, a căror direcție comună să fie A_1A_2. Nimic nu se va schimbà din starea precedentă. Pe de altă parte, forțele P_1 și F_1 vor dà o rezultantă Q_1 iar F_2 și Q_2 o rezultantă Q_2. Direcțiunile acestor rezultante se vor tăià în un punct O. Nimic nu se va schimbà dacă mutăm în punctul O punctele de aplicație a forțelor Q_1 și Q_2. Descompunându-le acum din nou în forțele P_1 F_1, P_2 F_2, vom vedeà că forțele F_1 și F_2 fiind egale și de sens contrar, se vor anulà, pe când forțele P_1 și P_2 lucrând în acelaș punct O și pe aceeaș linie de acțiune O C, se vor compune în o rezultantă egală cu suma lor $P_1 + P_2$.

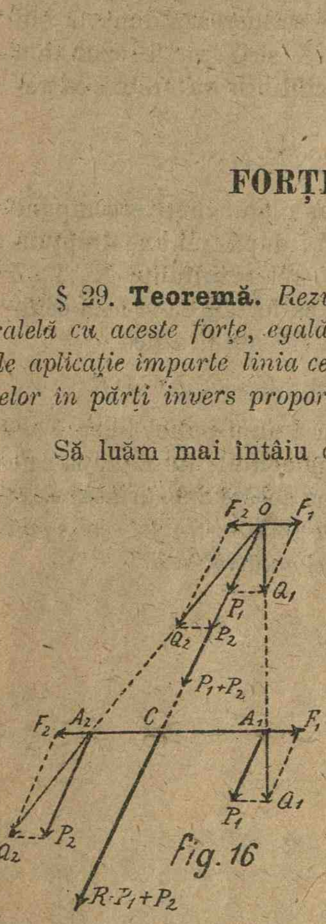


Fig. 16

Punctul C, unde direcția rezultantei R întâlneşte linia $A_1 A_2$ poate fi luat ca punct de aplicație al acestei rezultante; el se determină precum urmează:

Din asemănarea triunghiurilor $O C A_1$ cu $A_1 P_1 Q_1$ şi $O C A_2$ cu $A_2 P_2 Q_2$ rezultă:

$$\frac{A_1 P_1}{O C} = \frac{P_1 Q_1}{C A_1} \quad \text{şi} \quad \frac{A_2 P_2}{O C} = \frac{P_2 Q_2}{A_2 C}$$

sau

$$(1) \qquad A_1 P_1 \times C A_1 = A_2 P_2 \times A_2 C.$$

din cauză că $P_1 Q_1 = P_2 Q_2 = A_1 F_1 = A_2 F_2$.

Relația precedentă (1) se mai poate scrie:

$$\frac{P_1}{C A_2} = \frac{P_2}{C A_1} = \frac{P_1 + P_2}{C A_1 + C A_2} = \frac{R}{A_1 A_2}$$

De aci urmează că: Fiecare forță e proporțională cu segment neadiacent. Din relația precedentă putem scoate

$$A_2 C = \frac{P_1}{R} A_1 A_2.$$

Acest punct C nu se schimbă dacă planul forțelor paralele s'ar învârtì în jurul lui $A_1 A_2$ sau dacă direcția forțelor ar fi oricare alta. Chiar intensitățile lor pot varià cu condiție ca raportul lor să rămână acelaş. Din această cauză se ià de obiceiu acest punct C ca punct de aplicație al rezultantei R. El se numeşte *centrul forțelor paralele*.

§ 30. In caz când *forțele sunt de sens contrar*, demonstrația se face în acelaş fel, cu deosebire că punctul O, rezultanta R, şi punctul C, sunt exterioare regiunei cuprinsă între cele două forțe (fig. 17). Ele sunt de partea forței celei mai mari, iar rezultanta R este egală cu diferența $P_1 - P_2$ a forțelor şi e îndreptată în sensul celei mai mari.

Din considerațiunea asemănării triunghiurilor analoage scoatem relațiunile:

$$\frac{P_1}{C A_2} = \frac{P_2}{C A_1} = \frac{P_1 - P_2}{C A_2 - C A_1} = \frac{R}{A_1 A_2}$$

Putem arătà acelaş lucru şi în modul următor: descompunem forța P_1 în două, una P'_2 egală și direct opusă cu P_2, alta $R = P_1 - P_2$ și aplicată în punctul C, astfel că

$$\frac{A_1 A_2}{A_1 C} = \frac{P_1 - P_2}{P_2} \tag{1}$$

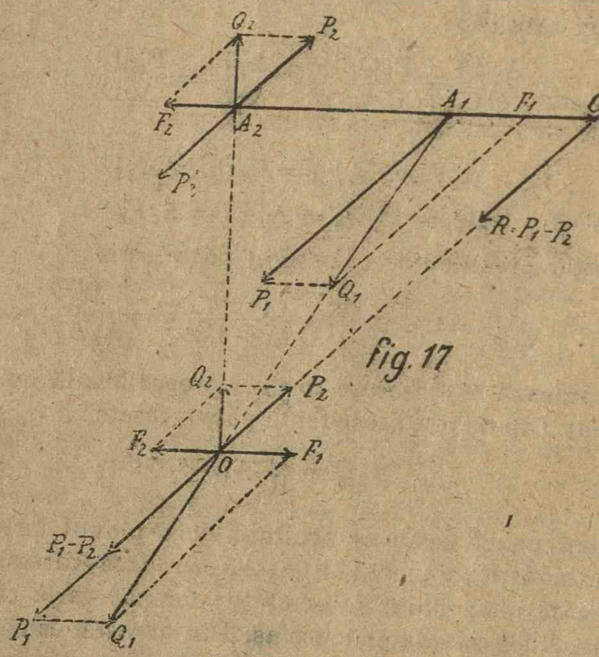


fig. 17

Vom aveà astfel forțele P_2, P'_2 și $P_1 - P_2$, al căror efect este egal cu al forțelor date. Cum însă forțele P_2 și P'_2 sunt egale și direct opuse se distrug și ne rămâne numai forța $P_1 - P_2$ care este dar rezultanta forțelor date. — Pe de altă parte, din relația (1) avem, adunând la numărător, numitorii respectivi:

$$\frac{A_1 A_2 + A_2 C}{A_1 C} = \frac{P_1}{P_2} \text{ sau } \frac{P_1}{C A_2} = \frac{P_2}{C A_1} = \frac{P_1 - P_2}{A_1 A_2} = \frac{R}{A_1 A_2}$$

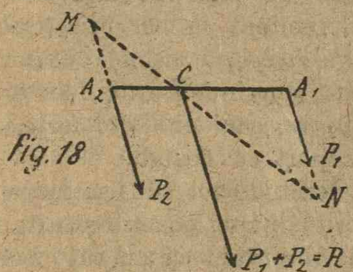
Teorema e dar generală, oricare ar fi sensul forțelor paralele.

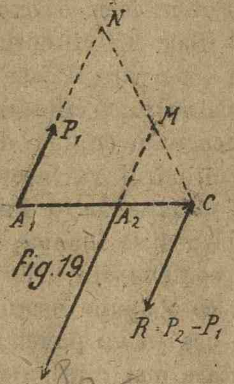
Din relația precedentă scoatem:

$$A_1 C = \frac{P_2}{R} A_1 A_2$$

§. 31. Pentru determinarea punctului de aplicație C al rezultantei, se poate întrebuință următorul procedeu geometric, ce se aplică, ori care ar fi semnul forțelor componente.

Luăm din A_2 (fig. 18 și 19) în sens contrar cu P_2 o lun-

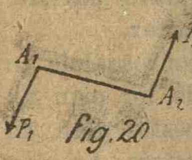




gime $A_2M = P_1$, iar din A_1 în acelaș sens cu P_1 o lungime $A_1N = P_2$, unim MN. Punctul de intersecție C a lui MN cu A_1A_2 este cel căutat, căci din asemănarea triunghiurilor A_2MC și CA_1N scoatem

$$\frac{A_2M}{A_1N} = \frac{A_2C}{A_1C} \text{ sau } \frac{P_1}{P_2} = \frac{CA_2}{CA_1}$$

§. 32. Când forțele sunt paralele de sens contrar și *egale* fără însă de a lucră pe o aceeaș linie de acțiune, metoda de mai sus nu se poate aplică, căci forțele Q_1 și Q_2 fiind paralele punctul O este la infinit. Sistemul forțelor nu are nici o rezultantă. Ele nu pot mișcă sistemul în o direcție oarecare. Pe de altă parte ele nu-și fac equilibru căci nu-s egale și *direct* opuse. Acest sistem de două forțe egale, paralelele și de sens contrar se numește *cuplu* (fig. 20). Mișcarea pe care o imprimă corpului, asupra căruia lucrează, este o mișcare de *rotație*.



Ca exemple de cupluri putem cită următoarele: Faptul că o roată descrie o rotație când trăsura merge se datorește unui *cuplu* format din forța de *tracțiune* a calului care lucrează în centrul roții și forța de *rezistență* a șoselei care lucrează în sens contrar, dar în punctul de contact al roții cu șoseaua. Dacă atât roata cât și șoseaua ar fi perfect lustruite, forța de rezistență ar fi nulă și am aveà în loc de cuplu o singură forță, cea de tracțiune. In acest caz roata nu s'ar mai învârtì ci ar *lunecà*. Acelaș lucru s'ar întâmplà când forța de tracțiune ar fi mult mai mare ca cea de rezistență.

Putem face o experiență analoagă în felul următor. Să lăsăm liber un cilindru greu pe un plan înclinat. Cât timp unghiul pe care îl face planul înclinat cu cel orizontal este deajuns de mic, cilindrul se va *rostogolì*. el este atunci sub acțiunea unui cuplu; dacă acest unghiu crește, dela un moment cilindrul va începe să *lunece*, căci una din forțe, rezistența, rămâne foarte mică în raport cu cealaltă.

O ușă se închide sau se deschide tot sub acțiunea unui cuplu, compus din o forță datorită mânei noastre și alta rezistenței ce o opune ușorul. Aici observăm că cu cât vom împinge ușa în un punct mai depărtat de ușor cu atâta vom face o sforțare mai mică. Deci efectul unui cuplu atârnă nu numa dela intensitatea celor două forțe ci și dela distanța dintre ele.

Un exemplu analog avem cu sfredelul (burghiul).

§ 33. **Compunerea unui număr de forțe paralele.** Vom aplicà acelaș procedeu ca și la forțele concurente, compunând două din ele, rezultanta lor cu a treia etc. De altfel aceste operații le facem numai în vederea găsirei punctului de aplicațiune al rezultantei, intensitatea ei fiind egală cu suma algebrică a intensităților forțelor date.

Dacă avem mai multe forțe ce lucrează unele în un sens, altele în sens contrar, e mai simplu să compunem de o parte forțele ce lucrează în un sens și pe urmă cele ce lucrează în celălalt. Pe urmă vom compune cele două rezultante parțiale ca în cazul a două forțe paralele și de sens contrar.

In caz când punctele de aplicație ale forțelor paralele nu sunt în acelaș plan, putem tăià toate direcțiunile lor prin un plan oarecare, și vom considerà intersecțiile acestui plan cu direcțiile forțelor, ca puncte de aplicație ale acestora. Le vom compune pe urmă ca în cazul precedent.

In general se pot ivì următoarele cazuri. *a*) Cele două rezultante parțiale sunt neegale. Sistemul va aveà o rezultantă unică. *b*) Aceste rezultante sunt egale dar nu direct opuse. Sistemul se reduce la un *cuplu*. *c*) Dacă rezultantele sunt egale şi direct opuse, rezultanta e nulă şi forţele îşi fac equilibru.

§ 34. **Descompunerea forţelor paralele.** Vom considerà următoarele cazuri:

a) *Să se descompună o forţă în două alte forţe paralele care să lucreze după două direcţiuni date.* Dacă direcţiunile date x, şi y (fig. 21) sunt deoparte şi de alta a rezultantei, componentele vor fi de acelaş sens cu forţa dată. Prin punctul de aplicaţie C al forţei date R, ducem o transversală oarecare, care tae direcţiunile x şi y în A şi B, pe care le vom considerà ca puncte de aplicare a componentelor F şi F'. Relaţiunile.

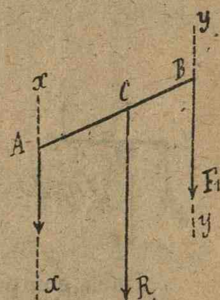


fig. 21

$$R = F + F', \frac{F}{BC} = \frac{F'}{AC} = \frac{F + F'}{AC + BC} = \frac{R}{AB}$$

ne dau:

$$F = R\,\frac{BC}{AB} \qquad F = R\,\frac{AC}{AB}.$$

şi totul se reduce la aflarea unei a patra proporţională.

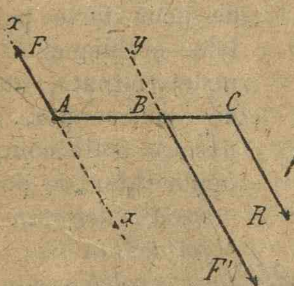


fig. 22

Dacă cele două direcţiuni x şi y sunt de acelaş parte a forţei date R (fig. 22) cele două forţe componente vor fi în direcţii opuse, cea mai mare fiind de partea forţei R. Procedând ca în cazul precedent vom scoate din relaţiele:

$$R = F' - F, \qquad \frac{F}{BC} = \frac{F'}{AC} = \frac{F' - F}{AC - BC} = \frac{R}{AB}$$

următoarele

$$F = R\,\frac{BC}{AB} \qquad F' = R.\frac{AC}{AB}$$

astfel intensitățile componentelor se găsesc tot prin a patra proporțională.

b) *Să se descompună o forță în două paralele, din care una e dată în direcție și intensitate.* Dacă componenta F este de acelaș sens cu R și $R > F$, atunci rezultanta va fi egală cu suma componentelor cari vor fi de acelaș sens și situate deoparte și de alta a lui R. Componenta cealaltă F_1 este egală cu $R - F$ și e aplicată în un punct B (fig. 21) astfel că

$$\frac{BC}{BA} = \frac{F}{R}$$

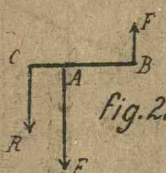


fig. 23

Dacă F e de acelaș sens cu R și $R < F$, rezultanta este egală cu diferența componentelor, cari sunt dar de sens contrar, componenta F' va fi dar mai mică decât F și egală cu $F - R$ (fig. 23).

Dacă componenta F e de sens contrar cu rezultanta R, componentele fiind de sens contrar, rezultă că componenta a doua F' este mai mare de cât F și deci F' va fi mai apropiată de R (fig. 24).

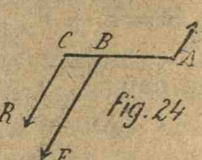


fig. 24

In toate aceste cazuri distanțele se găsesc ca mai sus prin o a patra proporțională.

Dacă ni s'ar cere să descompunem o forță în mai mult de două forțe paralele, problema ar fi nedeterminată, afară de cazul când se cunosc și toate componentele afară de două.

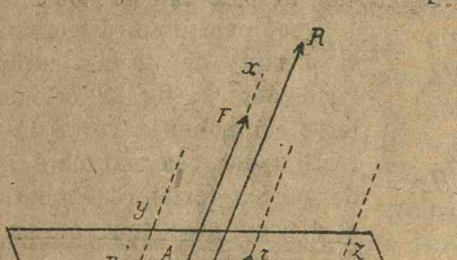


fig. 25

c) *Să se descompună o forță R în trei alte forțe paralele nesituate în acelaș plan care să lucreze după nișle drepte date* **x, y, z** (fig. 25). Vom tăia forța R și cele trei drepte x, y, z prin un plan care va determina punctele de intersecție O, A, B, C, pe care le vom considerà ca puncte de aplicație ale rezultantei R, și a componentelor căutate F, F', F''.

Vom descompune R, în două forțe de acelaș sens cu R, una F, care să lucreze în A și alta r în H (punctul de intersecție al lui AO cu BC) aceste două forțe vor aveà ca valori:

$$F = R.\frac{OH}{AH} \qquad r = R\frac{AO}{AH}$$

Să descompunem acum forța r în două altele paralele, F aplicată în B, F'' în C. Intensitățile lor vor fi date de relațiele:

$$F' = r.\frac{HC}{BC} \qquad F'' = r\frac{BH}{BC}$$

sau înlocuind r prin valoarea sa, vom aveà:

$$F = R\frac{OH}{AH}, \quad F' = R.\frac{AO}{AH}.\frac{HC}{BC}, \quad F'' = R\frac{AO}{AH}.\frac{BH}{BC}$$

Din însăș calculele și construcțiele precedente, rezultă că problema are o singură soluție.

In cazul considerat, punctul O de aplicație al lui R, se află în interiorul triunghiului ABC. Dacă punctul O ar fi în afară (d. ex. în O'). forța F aplicată în A ar fi de sens contrar cu R, (sau r' ar fi contrară cu R). Forța r se va descompune în două forțe F', F'' aplicate în B și C de acelaș sens (cum e cazul figurei). Relațiunele de mărime sunt aceleași ca și în cazul precedent.

De aci urmează că, în cazul când punctul O cade în interiorul triunghiului A B C, componentele sunt de acelaș sens cu rezultanta; când acest punct este exterior triunghiului, una din componente este de sens contrar cu celelalte.

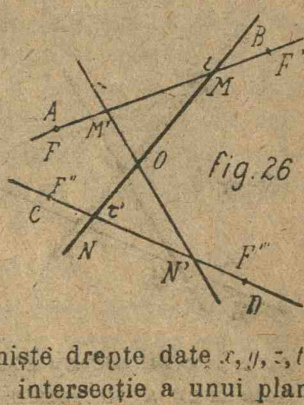


fig. 26

Descompunerea unei forțe în mai mult de 3 forțe paralele nesituate în acelaș plan, nu-i determinată decât în cazul când toate forțele, afară de trei, sunt date în mărime și direcție Fie, d. ex., a se descompune o forță R, în patru forțe care să lucreze după niște drepte date x, y, z, t. Fie A, B, C, D, O (fig. 26) punctele de intersecție a unui plan oarecare cu dreptele date și cu rezultanta R. Unim A cu B și C cu D și ducem prin O dreapta M N, care tae în M și N dreptele AB și CD. Vom descompune forța R în două forțe r și r' aplicate în M și N, iar pe aceste în câte două F și F' aplicate în A și B, F'' și F''' aplicate în C și D. Problema e astfel rezolvită. Trebue să observăm însă că dreapta MN e aleasă după voe și că luând o altă dreaptă M'N', se va obține un al doilea grup de patru forțe, diferit de cel precedent. Problema e dar nedeterminată.

CAP. IV.

MOMENTELE FORȚELOR

---

§ 35. **Defінții**. Se numește *momentul unei forțe* F în raport cu un *punct* O, productul intensității forței F prin perpendiculara scoborîtă din punctul O pe direcția acestei forțe (fig. 27). Astfel:

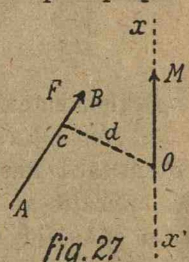


fig. 27

$$\text{Mom. } F = AB \times OC = F \times d.$$

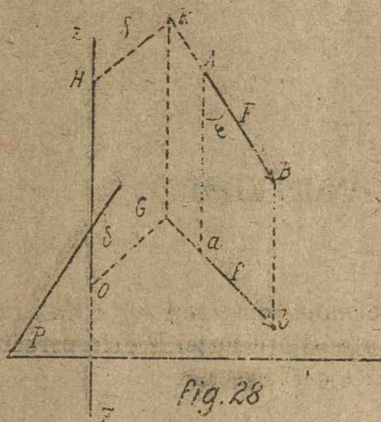
Lungimea OC se numește *brațul forței* F. De aci urmează că momentul unei forțe poate fi considerat ca dublul ariei triunghiului care are ca bază intensitatea forței și ca vârf punctul O.

Să considerăm planul care conține forța F și punctul O. Să ridicăm perpendiculara din acest punct pe plan. Vom figurà pe această perpendiculară $x'x$, momentele în modul următor. Să presupunem un observator deasupra pe plan cu picioarele în O. Dacă forța tinde a întoarce planul în sensul acelor unui ceasornic, momentul va fi pozitiv și luat dela x' către x, deasupra planului. In caz contrar, momentele vor fi negative și luate dela x către x' dedesubtul planului. Segmentului OM care reprezintă momentul forței F față de O, i se dă o mărime anumită:

$$\overline{OM}.1 = F.d.$$

De aci urmează că momentul unei forțe, față cu un punct e nul: 1) când forța e nulă, 2) când forța trece prin punctul O.

Momentul unei forțe F în raport cu o axă z z' (fig. 28) este momentul proecțiunii f a acelei forțe pe un plan P perpendicular pe axă în raport cu punctul O de intersecție al axei cu planul, adică: $\text{Mom}_{zz'}\,F = \text{mom.}_O f = f.\delta = f\,\overline{HK} = F_P . \overline{HK}$.



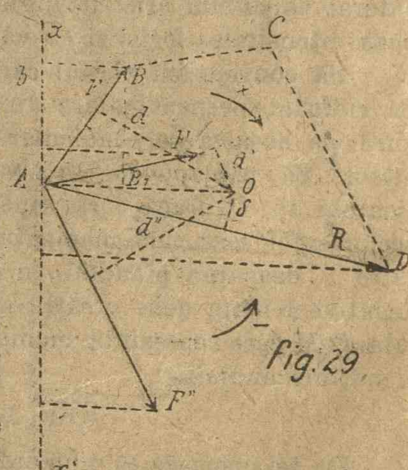
sau: momentul în raport cu o axă a unei forțe este egal cu productul proecției forței pe un plan perpendicular pe axă prin cea mai scurtă distanță între direcția forței și a axei.

Insemnând cu φ unghiul forței cu axa, vom aveà:

$$\text{Mom.}_{zz'}\,F = F\delta \sin\varphi.$$

De aci urmează că momentul unei forțe față cu o axă este nul: 1) când forța $F = o$; 2) când $\sin\varphi = o$, adică când forța e paralelă cu axa; 3) când $\delta = o$, adică când forța întâlnește axa.

Momentul unei forțe F, față cu un plan P, este productul intensității acelei forțe prin distanța la plan a punctului A de aplicație al forței. Semnul acestui moment depinde de poziția punctului de aplicație față de plan și de direcția forței. De obiceiu se întrebuințează aceste momente numai când e vorba de forțe paralele.



§ 36. **Teorema lui Varignon.** *Momentul rezultantei unui sistem de forțe concurente situate în un acelaș plan, în raport cu un punct din plan, este egal cu suma algebrică a momentelor componentelor.*

Fie F, F', F''.... mai multe forțe concurente în A și situate în acelaș plan, R = A D rezultanta lor (fig. 29). Fie O punctul din planul forțelor în raport cu care se ià momentul forțelor. Ducem în acest plan $x' x$ perpendiculară pe A O pe care fixăm un sens: pe urmă scoborîm din O perpendicularele d, d', d'', δ pe direcția forțelor F, F', F'', R.

Momentul forței F în raport cu O este $F d$, adică dublul suprafeței triunghiului O A B, în care F e baza și d înălțimea. Dacă însă luăm în acest triunghiu ca bază O A, și dacă ducem B b perpendiculară pe $x x'$, suprafața lui va fi egală cu jumătatea productului $OA.\ Ab$. Prin urmare putem luà ca moment al lui F față de O prod. $OA.\ Ab$.

Cum însă A O și B b sunt perpendiculare pe xx', segmentul A b este tocmai proecția forței F pe xx', deci:

$$\text{Mom}_0 \text{ F} = \text{O A} . \text{F}_x$$

vom aveà de asemenea

$$\text{Mom}_0 \text{ F}' = \text{O A} . \text{F}'_x$$

$$\text{Mom}_0 \text{ F}'' = \text{O A} . \text{F}''_x$$

$$\text{Mom}_0 \text{ R} = \text{O A} . \text{R}_x$$

Fiecare moment fiind luat cu semnul său.

Pentru a demonstrà dar că:

$$\text{Mom R} = \Sigma \text{ mom F}$$

ne ajunge să demonstrăm că:

$$\text{O A} . \text{R}_x = \text{O A} . \text{F}_x + \text{O A} . \text{F}'_x + \text{O A} . \text{F}''_x$$

sau că:

$$\text{R}_x = \text{F}_x + \text{F}'_x + \text{F}''_x$$

dar această relație este adevărată, de oarece știm (§ 28) că proecțiunea rezultantei pe o axă oarecare este egală cu suma proecțielor componentelor pe aceeaș axă, ceeace erà de demonstrat.

Teorema lui Varignon se aplică de asemenea și la momentele forțelor în raport cu o axă. Fie în adevăr F, F', F''..... mai multe forțe aplicate în punctul A, fie R rezultanta lor. Prin un punct oarecare al axei Z Z', ducem un plan P perpendicular pe această axă; fie $f, f' f''$..... și r proecțiunile forțelor și a rezultantei pe planul P. Se știe că proecțiunea rezultantei pe un plan este în acelaș timp rezultanta proecțiunilor componentelor pe acel plan. Aplicând teorema lui

Varignon forțelor f, f', f''...... și rezultantei r față de punctul O de intersecție a axei cu planul, vom aveà:

$$\text{Mom}_o r = \text{Mom}_o f + \text{Mom}_o f' + \text{Mom}_o f'' + \ldots$$

Prin definiție, însă, aceste momente ale proecțiunilor în raport cu punctul O sunt tocmai momentul forțelor F, F', F'' și a rezultantei față cu axa, deci:

$$\text{Mom}_{zz} R = \text{Mom}_{zz} F + \text{Mom}_{zz} F' + \ldots\ldots$$

De asemenea teorema lui Varignon este adevărată și pentru momentul forțelor paralele față cu un plan.

Fie în adevăr F și F' două forțe paralele: R, rezultanta și P planul momentelor (fig. 30) Fie O punctul de întâlnire cu

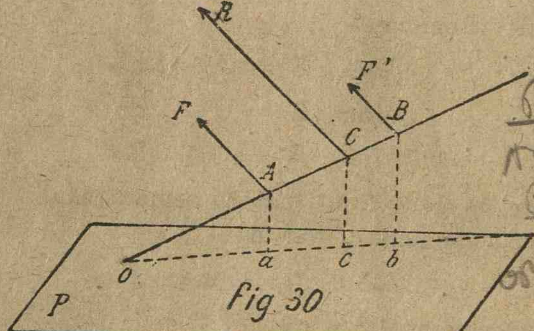


fig. 30

P a dreptei ce unește punctele de aplicație ale forțelor avem:

$$(1)\quad \frac{OA}{Aa} = \frac{OC}{Cc} = \frac{OB}{Bb}$$

Pe de altă parte luând momentul forțelor în raport cu punctul O avem:

$$(2)\quad R \,.\, OC = F \,.\, OA + F' \,.\, OB$$

Inlocuind în această relație OA, OB, OC prin cantitatea proporțională Aa, Bb, Cc, avem:

$$R.\ Cc. = F.\ Aa + F'.\ Bb$$

adică

$$\text{Mom}_P R = \text{Mom}_P F + M_P F'$$

In caz când forțele sunt de sens contrar, prin un rațio-

$\frac{R}{OC} = \frac{F}{OA} = \frac{F'}{OB}$ Deci: $F.OA + F.OC = F'OB$ sau (3) $R.OC = F.OA + F'.OB$

Se presupune că relația (2) se aplică nu numai forțelor concurente, dar și celor paralele la limită, când punctul lor de concurență nament analog, vom găsi aceeaş relaţie cu deosebire de semn, vom avea atunci

$$\text{Mom}_P R = \text{Mom}_P F - \text{Mom}_P F'$$

§ 37. In cazul particular când sistemul se reduce la două forţe, următoarele trei dispoziţii sunt posibile.

a) Centrul momentelor e în interiorul paralelogramului forţelor (fig. 31). Cele două forţe tind a produce mişcări de rotaţie de sens contrar. Vom avea dar:

$$R\delta = Fd - F'd'$$

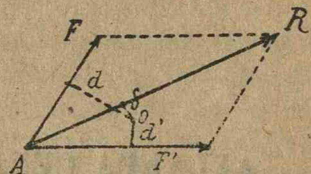


fig. 31

b) Centrul momentelor este în afară paralelogramului (fig. 32.) Mişcările de rotaţie sunt de acelaş sens şi vom avea:

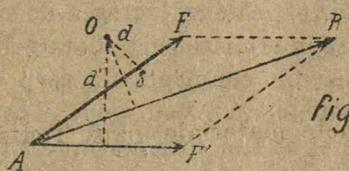


fig. 32

$$R\delta = Fd + F'd'$$

c) Centrul se găseşte pe direcţia rezultantei. In acest caz, momentul rezultantei este nul, cele două forţe au mişcări în sens contrar şi vom avea:

$$0 = Fd - F'd' \quad \text{sau} \quad Fd = F'd'$$

Momentele forţelor sunt egale şi de semn contrar şi efectele forţelor se distrug.

CAP V

AFLAREA CENTRULUI DE GREUTATE

§. 38. **Definiţii.** Observând un corp solid, vedem că este *greu*, adică supus acţiunei unei forţe verticale ce lucrează de sus în jos. Dacă descompunem acest corp în ori câte părţi, fiecare din aceste părţi va fi grea Vom puteà dar considerà un corp ca fiind format din o infinitate de puncte materiale *grele*. Toate corpurile pe care le avem în vedere, având dimensiuni foarte mici în raport cu pământul, forţele de gravitate ce lucrează asupra diferitelor puncte materiale ce compun un solid, pot fi considerate ca *forţe paralele*, ele vor aveà dar o rezultantă unică egală cu suma lor şi aplicată în centrul forţelor paralele (§ 29, 30) pe care îl vom numì în cazul acesta *centru de greutate*.

Centrul de greutate al unui solid este dar centrul forţelor paralele, datorite greutăţii, aplicate în fiecare din punctele materiale ce compun acel solid.

Acest centru este independent de direcţia comună a forţelor paralele sau de orientarea corpului în spaţiu.

Se zice că un corp este *homogen* când greutăţile diferitelor părţi ale lui sunt proporţionale cu volumul. Pentru astfel de corpuri, poziţia centrului de greutate este independentă de natura sau densitatea corpului şi căutarea lui este o problemă de geometrie.

In caz contrar, corpul se numeşte *heterogen*.

Centrul de greutate al unui volum este, prin definiţie, centrul de greutate al unui corp omogen ce ar umpleà acest volum.

Centrul de greutate al unei suprafeţe es tael unei pături infinit de subțire din un corp homogen, răspândită pe întreaga pătură.

Centrul de greutate al unei linii drepte sau curbe, este al unui corp omogen, ce are forma unui tub de secțiune constantă și infinit de mică, ce are ca axă linia dată.

§. 39. **Metode generale.** Din cele precedente rezultă că pentru a găsì centrul de greutate al unui volum, suprafețe sau linii, ne vom închipuì că în fiecare element al figurei este aplicată o greutate proporțională cu volumul său, suprafața sa sau lungimea sa. Punctul de aplicație al tuturor acestor greutăți este centrul de greutate cerut. Il vom găsi prin metodă căutărei centrului forțelor paralele, cu deosebire că aici avem de compus un număr nelimitat de forțe paralele, de oarece greutatea își exercită acțiunea sa asupra tuturor moleculelor din care sunt compuse volumele, suprafețele sau liniile:

Pentru simplificare, se caută, de câte ori este posibil, să se înlocuiască acest număr infinit de forțe prin un număr finit de forțe equivalente și în urmă se compune aceste forțe prin metoda ordinară.

Acest procedeu poate fi aplicat de câte ori figura dată poate fi descompusă în un număr determinat de figuri simple, pentru care se poate găsì ușor centrul de greutate. Vom presupune, în acest caz, că în fiecare din centrele de greutate ale acestor figuri parțiale lucrează câte o forță proporțională cu greutatea acelei figuri.

§. 40. **Teoremă.** *Dacă o figură oarecare: volum, suprafață, linie sau un sistem de puncte, are un centru, o axă sau un plan de simetrie, centrul său de greutate se află în acest centru, pe această axă sau în acest plan.*

Se știe că o figură este simetrică în raport cu un centru, axă, sau plan, când punctele ei sunt două câte două simetrice în raport cu acest punct, axă sau plan.

In adevăr, se poate descompune figura dată în elemente două câte două simetrice și egale; în acest caz greutățile a două elemente simetrice sunt egale iar punctul de aplicație al rezultantei este în mijlocul dreptei care unește aceste elemente, adică în centru, pe axa sau în planul de simetrie. Prin urmare punctul de aplicaţie al rezultantei totale, adică centrul de greutate va satisface la aceleaşi condiţii.

Dacă un corp conţine două planuri de simetrie, centrul de greutate este pe dreapta de intersecţie. Dacă o figură are două axe de simestrie, centrul de greutate este în punctul de intersecţie al acestor două axe.

§ 41. **Teoremă.** *Când o suprafaţă plană omogenă este mărginită cu o curbă care admite un diametru, centrul de greutate al ariei acelei suprafeţe se găseşte pe acest diametru.*

Se zice că o figură plană admite un *diametru* D E, când toate coardele paralele cu o direcţie dată au mijlocurile pe linia dreaptă D E. Această dreaptă se numeşte atunci *diametru conjugat* direcţiei coardelor considerate (fig. 33).

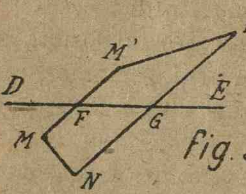


fig. 33

In acest caz, suprafaţa plană poate fi descompusă în câte două elemente corespunzătoare M cu M', N cu N' etc., şi de aceeaş greutate, punctele de aplicaţie a rezultantelor diferitelor părechi de forţe ce lucrează în punctele corespunzătoare, vor fi toate pe diametru. Punctul de aplicaţie a rezultantei totale va fi deci tot pe acest diametru.

§ 42. **Teoremă.** *Când un solid omogen este mărginit cu o suprafaţă care admite un plan diametral, centrul de greutate al volumului său se află în acest plan.*

Se zice că un corp admite un *plan diametral* când toate corzile paralele cu o direcţie determinate şi mărginite la suprafaţă au mijlocurile lor pe acest plan. Planul se zice că este *conjugat* cu direcţia dată.

Demonstraţia e analoagă cu a teoremei precedente.

Observaţia I. Centrul de greutate al unei *linii plane* care are un diametru, nu e totdeauna pe acest diametru, de oarece elementele corespunzătoare ale acestei linii nu au în general aceeaş lungime. Astfel d. ex., să luăm segmentele corespunzătoare M N, M' N' (fig. 33). Corzile paralele M M' şi N N' sunt tăete în mijlocul lor de diametrul D E, cum însă sunt oblice pe D E, segmentele M N, M′ N′ sunt neegale, greutățile lor sunt neegale și deci punctul de aplicație al rezultantei lor nu va fi pe D E.

De asemenea se poate întâmplà ca un solid să aibă un plan diametral, iar centrul de greutate al *suprafeței corpului* să nu fie situat în acest plan.

Observația II. Dacă diametrul e perpendicular pe direcția conjugată, atunci el este o axă de simetrie. In acest caz, centrul de greutate atât al suprafeței cât și al perimetrului se află pe această axă. Aceeaș observație în cazul când planul diametral al unui solid este perpendicular pe direcția conjugată; planul va fi de simetrie, și centrul de greutate, atât al volumului, cât și al suprafeței va fi în acest plan.

§ 43. **Aplicațiuni imediate.** Din cele trei teoreme precedente putem deduce imediat următoarele:

a) Centrul de greutate al unui segment de dreaptă este în mijlocul acestui segment.

b) Centrul de greutate, atât al conturului cât și al suprafeței unui paralelogram, este în punctul de intersecție al diagonalelor.

c) Centrul de greutate, atât al perimetrului cât și al suprafeței unui cerc, elipse, poligon regulat, este în centrul figurei.

d) Centrul de greutate al suprafeței sau volumului unui paralelipiped este în centrul acestui solid.

e) Centrul de greutate al suprafeței sau volumului unei sfere sau unui poliedru regulat este în centrul figurei.

f) Centrul de greutate al unui cilindru drept sau oblic sau al unui con drept este pe axa figurei.

§ 44. **Teoremă.** *Centrul de greutate al perimetrului unui triunghiu este punctul de întâlnire al bisectoarelor triunghiului care are ca vârfuri mijlocurile laturilor triunghiului dat.*

In adevăr, centrele de greutate ale laturilor A B, B C, C A (fig. 34), sunt în mijlocurile lor E, F, D. iar intensitățile acestor greutăți sunt proporționale cu lungimele acestor laturi. Să compunem acum forțele aplicate în D și E, punctul H de aplicație al rezultantei e dat de relația:

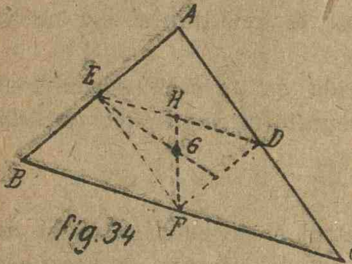


fig. 34

$$\frac{HD}{HE}=\frac{AB}{AC}=\frac{2\,DF}{2\,EF}=\frac{DF}{EF}$$

De aci urmează că F H este bisectoarea unghiului E F D. Ne rămâne să compunem acum forțele din H și F, rezultanta va fi cea totală, iar punctul de aplicație va fi tocmai centrul de greutate căutat. Acest centru se află deci pe bisectoarea F H. In acelaș fel se poate arătà că el se găsește și pe celelalte bisectoare, deci el va fi în punctul de intersecție al acestor bisectoare.

Din cele de mai sus rezultă că bisectoarele unui triunghiu sunt concurente, căci centrul de greutate este un punct unic.

§ 45. **Teoremă.** *Centrul de greutate al suprafeței unui triunghiu este în punctul de întâlnire al medianelor.*

Fie triunghiul A B C (fig. 35). Mediana A D împărțind în părți egale coardele paralele cu B C, este un diametru al triunghiului. Centrul de greutate se va află dar pe această mediană. Se poate dovedì că el trebue să se afle și pe celelalte două mediane, deci la intersecția lor.

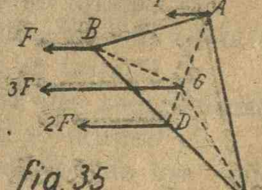


fig. 35

Observație. Medianele se întâlnesc în un punct, căci un sistem de forțe paralele au o singură rezultantă.

§ 46. **Teoremă.** *Centrul de greutate al suprafeței unui triunghiu este centrul a trei forțe paralele și egale, aplicate în cele trei vârfuri.*

Fie în adevăr trei forțe paralele și egale F. aplicate în vârfurile A, B, C ale triunghiului A B C (fig. 35). Compunând forțele din B și C, vom aveà o rezultantă 2F aplicată în mijlocul D al dreptei BC; compunând acum forța 2F din D cu F din A, vom căpătà rezultanta totală 3F aplicată în un punct G, astfel că

$$\frac{2F}{AG}=\frac{F}{GD}=\frac{3F}{AD}$$

de unde

$$AG=\frac{2}{3}AD,\ GD=\frac{1}{3}AD$$

Punctul G se găsește dar pe mediană la o treime de bază, adică tocmai în punctul de întâlnire al medianelor.

§ 47. **Centrul de greutate al unui trapez.** Fie trapezul ABCD (fig. 36). Dreapta EF care unește mijlocurile bazelor fiind

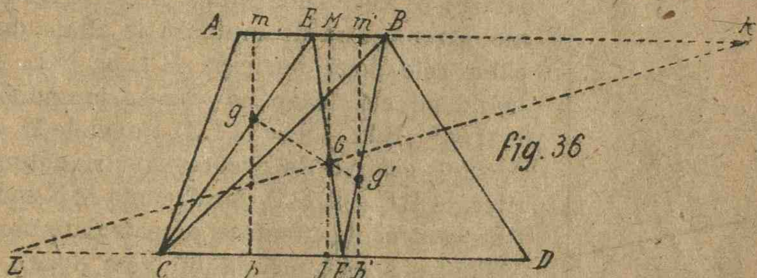


fig. 36

un diametru pentru coardele paralele cu aceste baze, centrul de greutate se va găsi pe EF. Să descompunem trapezul, prin diagonala BC, în două triunghiuri ABC, BCD, centrele lor de greutate se vor găsi în punctele g și g' pe medianele CE și BF și la o treime de AB și CD.

Centrul de greutate căutat, va fi centrul a două forțe paralele și de acelaș sens, proporționale cu suprafețele celor două triunghiuri și aplicate în g și g'. El va fi deci situat în punctul G de intersecție a dreptei gg' cu EF.

Se mai poate găsi centrul de greutate, aplicând teorema lui Varignon; în adevăr, luând momentele în raport cu un plan perpendicular pe planul trapezului ce trece prin baza mare, avem

$$(B+b)\,GI=b.\overline{gh}+B\,\overline{g'h'},$$

luând acum momentele față cu un plan ce trece prin baza mică A B. avem

$$(B+b)GM=b\overline{gm}+B\overline{g'm'}$$

sau

$$(B+b)GI=b.\frac{2H}{3}+B\frac{H}{3} \quad (B+b).GM=b.\frac{H}{3}+B.\frac{2H}{3}$$

însemnând cu H înălțimea trapezului, sau

$$\frac{GI}{GM}=\frac{2b+B}{2B+b}=\frac{b+\frac{B}{2}}{B+\frac{b}{2}}=\frac{GE}{GF}=\frac{FL}{EK}.$$

§ 48. **Centrul de greutate al unui patrulater oarecare.** Fie patrulaterul A B C D (fig. 37). Diagonala A C împarte patrulaterul în două triunghiuri A B C și A D C ale căror centre de greutate le aflăm ducând cele două mediane B L și D L și luând pe ele, începând din L, lungimile $LM=\frac{1}{3}BL$, $LN=\frac{1}{3}LD$. Punctele M și N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor. A B C și A D C, iar dreapta M N conține centrul de greutate al patrulaterului.

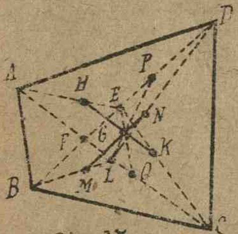


fig. 37

Pentru a găsi poziția lui, vom duce o a doua diagonală B D și vom descompune patrulaterul dat în alte două triunghiuri A B D și C B D, vom găsi în acelaș mod că centrele de greutate ale acestor triunghiuri sunt în H și K. Centrul de greutate al patrulaterului trebuind să se găsească în acelaș timp pe dreptele H K și M N se va găsi în punctul de întretăiere G.

Poziția centrului de greutate se mai găsește astfel: el se va află pe linia H K la distanța de aceste puncte, invers proporționale cu suprafețele triunghiurilor B A D, B C D, sau cu înălțimele lor, sau cu dreptele A F și F C adică

$$\frac{GH}{GK}=\frac{CF}{AF}=\frac{AQ}{CQ} \text{ (s'a luat } CQ=AF).$$

De oarece H K e paralel cu A C, punctele E, G, Q **vor fi** în linie dreaptă. Punctul G va fi la intersecția lui H K **cu E Q.**

Sau, pentru acelaş motiv, la intersecţia lui M N cu L P sau în fine la intersecţia lui L P cu E Q.

§ 49. **Centrul de greutate al unui poligon oarecare** se află descompunând poligonul în triunghiuri, şi aplicând în centrele de greutate ale acestor triunghiuri forţe paralele proporţionale cu suprafeţele lor. Vom compune pe urmă acele forţe prin mijloacele ordinare şi vom obţine centrul forţelor paralele care este şi centrul de greutate al poligonului dat.

§ 50. **Centrul de greutate al unei prisme.** Să considerăm mai întâiu o prismă triungiulară A B C D E F (fig. 38); ea are patru planuri diametrale: 1) planul secţiunei ce trece prin mijlocurile I, K, L ale muchilor laterale, căci împarte în părţi egale toate coardele paralele cu acesta muchi; 2) cele trei planuri cari trec prin una din muchi şi prin mediana corespunzătoare a unei baze, d. ex. planul A M P D, care împarte înpărţi egale coardele paralele cu B C sau E F. Aceste din urmă trei planuri se tae după dreapta gg' ce uneşte centrele de greutate ale bazelor.

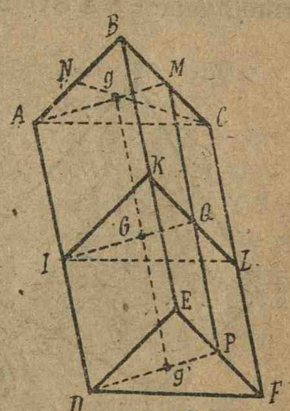


fig. 38

Intersecţia G a dreptei gg' cu secţiunea mijlocie I K L este centrul de greutate căutat, căci el se găseşte în acelaş timp pe cele patru planuri diametrale. De aci rezultă că:

Centrul de greutate al unei prisme triunghiulare este în mijlocul dreptei care uneşte centrele de greutate ale celor două baze. Acest punct este în acelaş timp, centrul de greutate al secţiunei făcute în prismă prin un plan paralel cu bazele, dus prin mijlocul înălţimei.

§ 51. **Centrul de greutate al unei prisme poligonale** se va obţine descompunând solidul în prisme triunghiulare prin planuri diagonale duse prin o muche laterală. Centrele de greutate ale acestor prisme coincid cu acele ale triunghiurilor formate, de aceste planuri, in secţiunea medie. In aceste centre sunt aplicate forțe paralele, proporționale cu volumele prismelor triunghiulare, sau cu secțiunile lor medii, înălțimea fiind aceeaş. De aci urmează că: Centrul de greutate al unei prisme poligonale este în centrul de greutate al secțiunei medii. El se află la mijlocul dreptei ce uneşte centrele de greutate ale bazelor.

§ 52. **Centrul de greutate al unui cilindru** se va găsì de asemenea la mijlocul dreptei ce unește centrele de greutate ale bazelor, de oarece cilindrul este limita unei prisme inscrise când numărul laturilor bazei creşte necontenit.

§ 53. **Centrul de greutate al unui tetraedru.** Fie piramida triunghiulară S A B C (fig. 39). Planul S A D dus prin una din muchia S A și prin mijlocul D al muchiei opuse B C este un plan diametral, căci împarte în părți egale coardele paralele cu B C. Pentru acelaș motiv, planul S C E, dus prin muchiea S C și mijlocul E al muchiei opuse A B, va fi diametral. Centrul de greutate se va găsì dar pe intersecția S g a acestor două planuri, adică pe dreapta care unește vârful S cu centrul de greutate g al bazei.

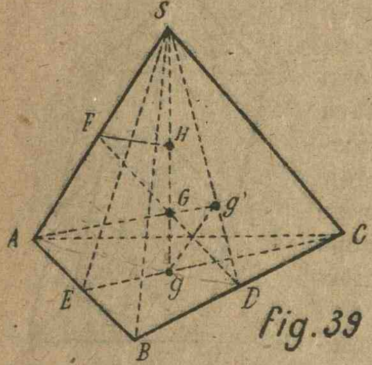


fig. 39

Luând acum ca vârf punctul A, vom vedeà că centrul de greutate va trebuì să se găsească pe dreapta A g' ce unește vârful A cu centrul de greutate g' al bazei corespunzătoare S B C. Centrul de greutate al solidului se va găsì dar în punctul de intersecție G al dreptelor S g și A g'. Dreapta $g\,g'$ împărțind laturile S D și A D ale triunghiului S A D în părți proporționale va fi paralelă cu baza S A. Triunghiurile A D S și g D g' fiind deci asemenea vom aveà:

$$\frac{g\,g'}{SA} = \frac{g\,D}{AD} = \frac{g'D}{SD} = \frac{1}{3}$$

Din asemănarea triunghiurilor S G A și g G g' scoatem

$$\frac{g\,G}{SG} = \frac{g\,g'}{SA}$$

de unde, comparând ambele relații, scoatem

$$\frac{gG}{SG}=\frac{1}{3} \text{ sau } \frac{gG}{Sg}=\frac{1}{4}.$$

Deci, *centrul de greutate al unui tetraedru se află pe dreapta care unește un vârf oarecare cu centrul de greutate al feței opuse la $\frac{3}{4}$ depărtare de vârf.*

§ 54. Din considerațiunea centrului de greutate al unui tetraedru următoarele propozițiuni din geometrie se găsesc verificate:

a) *Cele șease planuri diametrale ce trec prin o muche și prin mijlocul laturei opuse, se tae în un punct*, de oarece fiecare din ele conține centrul de greutate.

b) *Cele patru drepte ce unesc câte unul din vârfuri cu centrul de greutate al feței opuse se tae în acelaș punct.*

c) *Cele trei drepte, ca F D, ce unesc mijlocurile a două laturi opuse, se tae în un acelaș punct, care este mijlocul fiecăreia.* In adevăr, cele două planuri diametrale S A D și F B C se tae după dreapta F D. Deci centrul de greutate G este pe această dreaptă, care este mediana triunghiului S A D. Să ducem F H paralelă cu A g. Punctul H e mijlocul lui S g, iar F H este egală cu jumătatea lui A g sau cu g D. Triunghiurile F G H și G g D fiind dar egale vom aveà F G = G D.

d) *Centrul de greutate al unui tetraedru este centrul distanțelor medii a celor patru vârfuri* *). In adevăr, aplicând forțe egale în cele patru vârfuri, vom vedeà că centrul distanțelor medii al celor trei puncte A B C este in g, deci centrul căutat va fi pe S g, la $\frac{3}{4}$ de S.

e) Centrul de greutate al unei piramide de triunghiulare se confundă cu centrul de greutate al secțiunei triunghiulare făcute de un plan paralel cu baza dus la $\frac{3}{4}$ de vârf.

---

*) Se numește *Centrul distanțelor medii* al mai multor puncte, centrul forțelor paralele egale și de acelaș sens aplicate în acele puncte.

§ 55. **Centrul de greutate al unei piramide oarecare** se află descompunând solidul în piramide triunghiulare ce au ca vârf, vârful solidului și ca baze, diferite triunghiuri formate, ducând în poligonul de bază diagonale prin unul din vârfuri. -- Centrul fiecărei din piramidele parțiale va coincide cu acel al secțiunei plane făcute paralel cu baza la $\frac{3}{4}$ din înălțime, începând dela vârf. Toate aceste centre de greutate se vor găsi în planul ce tae piramida la $\frac{3}{4}$ din înălțime, de vârf. — Volumurile tuturor piramidelor parțiale vor fi proporțional cu suprafețele bazelor, sau, din cauza asemănărei, cu suprafețele secțiunilor făcute de planul de mai sus. Aplicând dar în centrele de greutate parțiale, forțe paralele proporționale cu triunghiurile de secțiune, și compunând aceste forțe, vom găsi centrul de greutate al întregei secțiuni care este și centrul de greutate al solidului, deci:

Centrul de greutate al unei piramide oarecare este situat pe dreapta care unește vârful cu centru de greutate al bazei la $\frac{3}{4}$ *din înălțime, depărtate de vârf*; el coincide cu centrul de greutate al secțiunei plane făcute paralel cu baza la $\frac{3}{4}$ din înălțimea, depărtare de vârf.

§ 56. Un raționament analog ca pentru cilindru ne va arătà că: *centrul de greutate al unui con se află pe dreapta ce unește vârful cu centrul de greutate al bazei la* $\frac{3}{4}$ *din această dreaptă, plecând dela vârf.*

CAP. VI.

FORȚE OARECARE. EQUILIBRUL UNUI SOLID

§ 57. **Teorema.** *Toate forțele care lucrează asupra unui solid pot fi reduse la trei forțe care să lucreze în trei puncte oarecare, legate însă invariabil cu solidul.*

Fie punctele A, B, C, alese arbitrar și O M una din forțele ce lucrează asupra solidului în un punct al lui (fig. 40). Să unim O A, O B, O C; aceste trei direcțiuni formează un triedru. Să descompunem, după cum am văzut, forța OM în alte trei. O P′ O Q′, O R′ care să lucreze după cele trei direcții. Pe urmă să mutăm punctele de aplicație respectiv în A, B, C. Cu modul acesta am înlocuit forța O M prin un sistem de trei forțe, A P, B Q, C R, care lucrează în punctele alese.

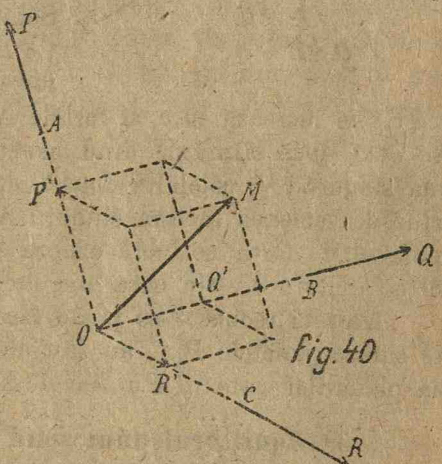


Fig. 40

Repetând această operație pentru fiecare din forțele O M ce lucrează asupra solidului, vom aveà câte un grup de forțe concurente ce lucrează în A, B, C. Fiecare din aceste trei sisteme poate fi înlocuit prin rezultanta sa astfel că, în definitiv, toate forțele ce lucrau asupra solidului s'au redus la trei forțe ce lucrează în punctele alese.

§ 58. **Teoremă.** *Toate forțele ce lucrează asupra unui solid se pot reduce numai la două forțe, din care una să lucreze în un punct arbitrar, legat însă în variabil cu solidul.*

Vom reduce mai întâiu, conform construcției precedente, toate forțele ce lucrează asupra solidului la trei, una A P, aplicată în A, și celelalte două B Q și C R aplicate în două puncte oarecare B și C (fig. 41). Să considerăm cele două planuri ce trec respectiv prin punctul A și prin dreptele B Q și C R. Și să alegem un punct arbitrar I pe intersecția lor. Să unim B I, B A, C I, C A. Vom puteà descompune forța B Q în două BQ''_1, BQ'_1 care să lucreze după direcțiile B I și B A și forța C R în CR'_1, CR''_1 care să lucreze după direcțiile C A și C I. Schimbând punctele de aplicație în A și I, vom aveà în locul forțelor B Q și C R forțele I Q″ și I R″ ce lucrează în I și forțele A Q′ și A R′ ce lucrează în A. Cele două dintâiu, fiind concurente, se vor compune în una singură I V, celelalte două dimpreună cu A P se vor compune deasemenea în una singură A U. Astfel că, în definitiv, sistemul de forțe ce lucrà asupra solidului s'a redus la două forțe A U și I V, din care una lucrează în un punct arbitrar A.

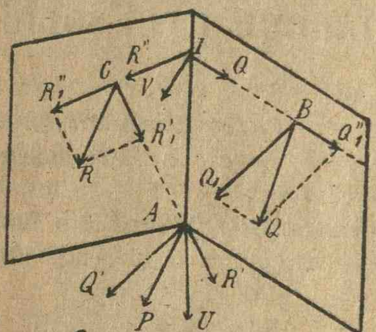


fig. 41

Această reducere se poate face în o infinitate de moduri de oarece punctele B, C au fost alese arbitrar, iar pe intersecția planurilor punctul I a fost de asemene arbitrar.

§. 59. **Equilibrul unui solid invariabil liber.** Din teorema precedentă s'a văzut că orice sistem de forțe ce lucrează asupra unui solid se poate reduce la două forțe. Dacă aceste două forțe sunt egale și direct opuse ele își vor face equilibru și deci întreg sistemul de forțe va fi în equilibru. Dacă forțele sunt numai egale și de sens contrar fără ca să lucreze pe aceeaş direcţie, ele formează un *cuplu* care va imprimà solidului o mişcare de rotaţie. Deci: *pentru ca un solid invariabil liber să rămână în equilibrul când e supus acţiunei unui sistem de forţe, trebue ca, reducând acest sistem la două forţe, aceste să fie egale şi direct opuse.*

§. 60. **Equilibrul unui solid mobil în jurul unui punct fix.** Vom reduce, conform teoremei dela § 58, sistemul de forţe ce lucrează asupra solidului la două forţe din care una să lucreze chiar în punctul fix. Efectul acesteia fiind distrus prin fixitatea punctului, solidul va rămâne numai sub acţiunea celeilalte. Pentru ca solidul să rămână în equilibru trebue ca această din urmă forţă să fie sau nulă sau să treacă şi ea prin punctul fix; şi în un caz, şi în altul sistemul de forţe se va reduce la o singură forţă ce trece prin punctul fix. Deci: *pentru ca un solid, mobil în jurul unui punct fix, să rămână în equilibru sub acţiunea unui sistem de forţe, trebue ca acest sistem să aibă o rezultantă ce trece prin punctul fix.*

§ 61. **Equilibrul unui solid mobil în jurul unei axe fixe.** In caz când solidul are două puncte fixe, toate punctele de pe dreapta ce uneşte aceste două puncte sunt fixe, şi solidul poate numai să se învârtească în jurul acestei drepte. Ca şi în cazurile precedente, vom puteà reduce sistemul de forţe ce lucrează asupra solidului la două forţe din care una să fie aplicată în un punct de pe axă. Efectul acestei forţe fiind distrus de fixitatea axei, corpul rămâne sub influenţa forţei a doua care îi va imprimà o mişcare de rotaţie; dacă însă şi direcţia acestei a doua forţe tae axa, efectul ei va fi distrus, iar solidul va rămâne în echilibru. Deci: *pentruca un solid mobil în jurul unei axe fixe, să rămână în echilibru, sub acţiunea unui sistem de forţe, trebue ca reducând sistemul la două forţe, din care una să fie aplicată în un punct de pe axă, cealaltă să fie situată în un plan cu această axă.*

§ 62. **Echilibrul unui solid ce se sprijină pe un plan fix.** In acest caz planul desvoltă în fiecare punct de sprijin al corpului câte o *reacţiune* normală lui. Toate aceste reacţiuni vor aveà o rezultantă de asemenea normală planului. Vom puteà dar înlocuì fixitatea planului introducând o forță nouă care e tocmai reacțiunea acestui plan. Pentruca sistemul dat de forțe să țină corpul în echilibru, trebue ca acest sistem să aibe o rezultantă egală și direct opusă acestei reacțiuni, adică trebue ca *rezultanta sistemului de forță să fiè normală planului, să apese corpul pe plan și punctul ei de aplicație să fie în interiorul poligonului de sprijin* format de diferitele puncte prin care se sprijină solidul pe plan.

In cazul particular când solidul are un singur punct de sprijin, rezultanta trebue să treacă prin acest punct.

Dacă solidul are două puncte de sprijin, rezultanta trebue să întâlnească dreapta ce unește aceste două puncte și punctul ei de aplicație să fie între punctele de sprijin.

Dacă solidul se sprijină prin trei puncte, rezultanta trebue să întâlnească planul în interiorul triunghiului format de aceste puncte.

In toate aceste cazuri, reacțiunea ce se desvoltă în fiecare punct de sprijin, este egală cu componenta rezultantei sistemului ce trece prin acest punct. Aceasta în virtutea principiului egalității acțiunei și a reacțiunei (§ 12, d.).

CAP. VII.

MAȘINI SIMPLE.

§ 63. **Definiţii.** Prin *maşină* se înțelege în general un sistem de corpuri solide, unele fixe, altele mobile destinate la transmiterea acţiunei forţelor. *Organele* mașinei sunt supuse la anumite *legături*, adică sunt împedicate în mișcarea lor de niște obstacole, astfel că toate părţile unei mașine reacționează unele contra altora.

Considerate din punct de vedere *static* mașinele servesc a învinge o *forța de rezistență* cu ajutorul alteia numită *forță motrice sau putere.* Dacă equilibru are loc, mașina rămâne în repaos, sau dacă a fost pusă în mișcare, această mișcare rămâne uniformă, neținând socoteală aici de diferitele frecări dintre părţile mașinei. Vom studià mașinele numai din acest punct de vedere, al equilibrului dintre putere și rezistență.

Maşinele simple sunt compuse din un singur corp împedicat de un singur obstacol.

Dacă obstacolul este un *punct fix,* avem *pârghiele,* dacă e o *axă fixă* avem vârtejul, balanța, etc., dacă e un plan fix avem *planul înclinat.*

Vom presupune că, în toate aceste cazuri, asupra mașinei nu lucrează decât două forțe: *puterea* și *rezistența.* Problema generală, ce vom urmărì, este: fiind date în mărime, direcție și sens rezistența ce lucrează asupra unui corp împedecat, să se determine mărimea puterei ce trebue introdusă pentru ca solidul să rămână în equilibru.

Maşini cu un punct fix.

§ 64. **Pârghiele.** O *pârghie* este un corp solid care are un punct fix O, împrejurul căruia poate să se învârte. El este solicitat de două forţe: *puterea* P şi *rezistenţa* Q, aplicate în două puncte A şi B. Punctul fix O se numeşte *punct de sprijin*, iar perpendicularele p şi q scoborîte din punctul O pe direcţiele forţelor se numesc *braţe* de pârghie.

Pentru ca o pârghie să rămână în equilibru, trebue ca cele două forţe să aibă o rezultantă mică ce trece prin punctul fix (§ 60). Această condiţie este îndeplinită dacă:

a) Cele două forţe P şi Q sunt în acelaş plan cu punctul de sprijin O.

b) Forţele tind să întoarcă corpul în sens contrar.

c) Suma momentelor în raport cu punctul fix este nulă (§ 37 *c*). De aci rezultă că, însemnând cu p şi q distanţele OH şi OK, (fig. 42) avem:

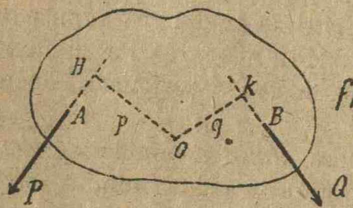


fig. 42

(1) $$Pp = Qq.$$

Această relaţie ne arată că *pentru ca o pârghie să fie în equilibru trebue ca puterea şi rezistenţa să fie în raport invers cu braţele lor.*

§ 65. **Presiunea pe punctul fix** este tocmai rezultanta celor două forţe, neglijind greutatea pârghiei. Ea este dată de formula:

(2) $$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q \cos (P, Q).$$

Această presiune variază dar cu unghiul celor două forţe; ea este *maximă* când unghiul e nul, adică când forţele sunt paralele, în care caz vom aveà:

$$R = P + Q.$$

Presiunea este *minimă* când unghiul este de 180°, în acest caz avem, forţele fiind paralelele şi de sens contrar,

$$R = P - Q.$$

§ 66. **Diferite feluri de pârghii.** Aceste mașini servesc în general la ridicarea greutăților. Li se dă forma unei bare rigide A B în care cele trei puncte A, O, B sunt în linie dreaptă. Sunt trei feluri de pârghii după cum punctele A. B, O vin în ordinea următoare *a)* A, O, B *b)* A, B, O *c)* B. A, O.

a) *Pârghii de genul I.* Punctul de sprijin O este cuprins între punctele de aplicație A și B ale putorei și rezistenței. Exemple: brațele unei balanțe, instrumentul pentru urnit greutățile (fig 43), farfecele sunt un sistem dublu de acest gen de pârghie.

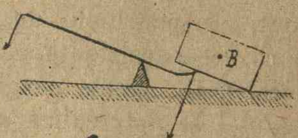


fig. 43

b) *Pârghii de genul II.* Rezistența este între punctul de sprijin și putere. Exemple: roaba (fig. 44), pârghiele dela pompe (fig. 44 bis), cleștele pentru spart nuci este un sistem dublu, brațele dela pompe.

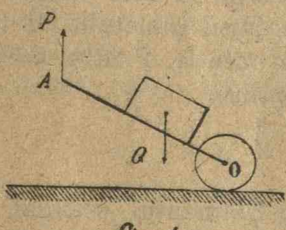


fig. 44

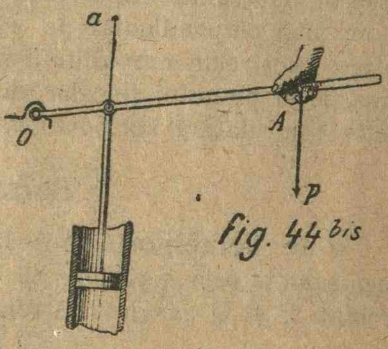


fig. 44 bis

c) *Pârghii de genul III.* Puterea este situată între punctul de sprijin și rezistență. Exemple: pedala dela tocilă sau dela mașina de cusut, unde puterea P este exercitată de picior, iar rezistența vine din lucrul mașinei (fig. 45), cleștele de luat zahăr este un sistem dublu.

fig. 45

§ 67. **Efectele pârghiilor.** Din condiția de equilibru a unei pârghii:

$$P.\overline{OA} = Q.\overline{OB} \text{ sau } P = \frac{OB}{OA} Q$$

rezultă că puterea P va aveà un efect util, adică vom învinge o rezistență mai mare Q cu o putere mai mică P, cu cât O A e mai mare și O B mai mic. De aci urmează că în pârghia de genul III, puterea este totdeauna mai mare decât rezistența, de oarece brațul O B a rezistenței este mai mare decât brațul O A al puterei. Acest fel de pârghie nu este dar avantajos, el face *să se piardă din efectul puterei.* Din contră în pârghiele de genul II, puterea este totdeauna mai mică decât rezistența, căci brațul O A este totdeauna mai mare decât O B. Aceste pârghii *câștigă din forțe.* Cu pârghiele de genul I se pot realizà ambele cazuri pentru că brațul puterei O A, poate fi mai mare, egal sau mai mic decât brațul O B al rezistenței.

In realitate corpurile solide, cari constitue pârghiele sunt mobile în jurul unei axe fixe, nu în jurul unui punct fix. Aceasta nu prezintă importanță de oarece forțele sunt totdeauna în un plan perpendicular pe axa de rotație și deci lucrul se petrece ca și cum corpul ar fi mobil în jurul punctului de intersecție al planului forțelor cu axa de rotație. Pentru acelaș motiv vom alăturà aci *balanțele* și *scripetele.*

Balanțe.

§ 68. **Principiul unei balanțe.** Elementul esențial al unei balanțe este *o pârghie* ce servește la compararea a două greutăți P și Q cu ajutorul relației : $Pp = Qq$ sau

$$(1) \qquad Q = \frac{p}{q} P.$$

$\frac{p}{q}$ este cunoscut prin construcția balanții, P este o măsură de greutate ce servă la equilibrarea greutății căutate Q, Q este dat de formula (1). Sunt mai multe feluri de balanțe care servesc fiecare în anumite împrejurări.

§ 69. **Balanța ordinară** este o pârghie de genul I cu brațe egale A O B (fig. 46). In punctul O este un cutit prismatic cu tăișul în jos *c*, care se sprijină pe un mic plan de agat situat în capătul de sus al unei coloane verticale C. La extremități sunt alte două cuțite prizmatice cu tăișul în sus b, b care suportă cele două talere p, p ale balanței. Muchile ascuțite ale celor trei cuțite b, c, b. sunt paralele și situate în acelaș plan. Cu modul acesta sunt evitate diferite frecări, iar balanța rămâne orizontală când în talgere sunt greutăți egale. In acest caz balanța se zice că este *justă*. Dacă punând încă o mică greutate în unul din talere, acesta se lasă mai jos, balanța se zice că este *sensibilă*.

§. 70. **Condițiune de justeța.** Fie π greutatea brațului aplicată în centrul de greutate G al balanței, P greutatea egală, dar oarecare, care lucrează în A și B. Pentruca balanța să fie justă, trebue ca brațul AB să rămână orizontal ori care ar fi P (fig. 46). Să însemnăm cu l, l' și x brațele de pârghie ale celor două greutăți P și a greutății π, adică

$$l = OA \qquad l' = OB \qquad x = OG.$$

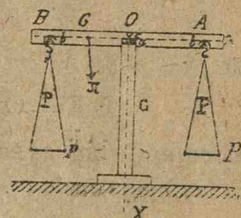


fig. 46

Luând momentul celor trei forțe față cu punctul fix O, și observând că momentul rezultantei trebue să fie nul vom aveà:

$$Pl' + \pi x - Pl = 0$$

sau

$$P(l' - l) + \pi x = 0$$

această relație trebuind să aibă loc oricare ar fi P, trebue ca:

$$l = l' \text{ și deci ca } x = 0$$

Deci *pentru ca o balanță să fie justă, trebue și ajunge ca cele două brațe ale ei să fie egale și ca centrul de greutate al pârghiei să fie pe verticala punctului de sprijir*. Aceste condiții sunt suficient îndeplinite în balanțele ordinare întrebuințate în comerț. Când este vorba însă de balanța de precizie, se întrebuințează *cântărirea dublă*, care este independentă de îndeplinirea exactă a condițiilor de mai sus. Această cântărire constă în punerea în acelaș taler atât a corpului de măsurat Q, cât și a măsurei de greutate P, în al doilea taler punându-se greutăți oarecare care să equilibreze pe rând pe P și Q.

§. 71. **Condițiuni de sensibilitate.** Sensibilitatea unei balanțe se măsoară prin unghiul α cu care se înclină pârghia, când în un taler se adaugă încă o mică greutate. Fie A B pârghia, O punctul fix, G centrul de greutate al pârghiei, l lungimea brațelor, π greutatea balanței, d, distanța GO. După adăugirea în talerul A al unei greutăți p, pârghia ià poziția A′B′, formând un unghiu α cu poziția primitivă.

Suma momentelor, în raport cu punctul fix, trebuind să fie nulă, vom aveà:

$$\pi . OE - p . OD = O$$

sau

$$\pi . OE = p . OD.$$

dar

$$OE = OG' \sin\alpha = d \sin\alpha., \; OD = l \cos\alpha.$$

înlocuind, vom aveà

$$\pi d \sin\alpha = p l \cos\alpha.$$

sau

$$tg\alpha = \frac{pl}{\pi d}.$$

Unghiul α, fiind $< 90^0$, crește cu tangenta sa și deci va fi cu atât mai mare, cu cât l va fi mai mare și cu cât π și d vor fi mai mici. Deci, o balanță este cu atât mai sensibilă, cu cât brațele sunt mai lungi și mai ușoare și cu cât centrul de greutate este mai aproape de punctul de sprijin (fig. 47).

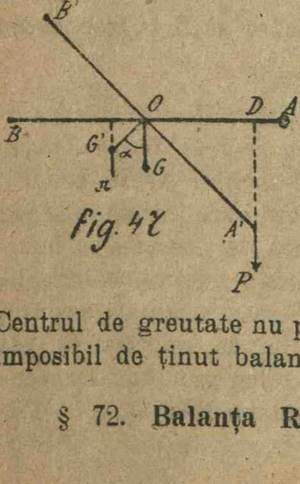


fig. 47

Dacă centrul de greutate G ar fi chiar în O, balanța ar fi în equilibru în orice poziție, când greutățile din A și B sunt egale, iar cea mai mică diferență de greutate ar răsturnà-o. Centrul de greutate nu poate fi nici deasupra, căci ar fi aproape imposibil de ținut balanța în equilibru.

§ 72. **Balanța Romană** se compune din o pârghie de genul I. cu brațe neegale. Punctul fix este în O, unde e un cuțit prismatic cu tăișul în jos, de care e atârnat prin ajutorul unui cârlig. In A și A′ sunt alte două cuțite cu tăișul în sus, de care sunt atârnate câte un cârlig, unde se pun greutățile pentru a fi cântărite. Dealungul brațului OM se mișcă un inel M ce poartă o greutate fixă P, care e destinată a equilibrà și a arătà greutatea corpului Q (fig. 48).

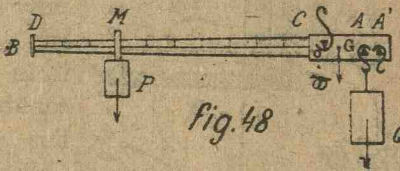


fig. 48

Insemnând cu π greutatea balanței aplicată în G, și aplicând *teorema lui Varignon*, avem

$$P.OM = Q.OA + \pi.OG.$$

Dacă C este poziția de equilibru când $Q = O$, vom aveà

$$P.OC = \pi.OG.$$

scăzând una din alta, avem

$$P.CM = Q.OA$$

de unde

$$Q = P.\frac{CM}{OA} \qquad (1)$$

de unde se vede că greutatea Q este proporțională cu lungimea brațului CM. Cu ajutorul acestei formule putem calculà Q, de oarece P și OA sunt cunoscute prin construcție, iar CM se citește chiar pe instrument. Cu ajutorul formulei (1) se poate face gradația brațului OB deadreptul în *greutăți*. Se face $Q = 0$ și pe urmă $Q = 10$ kg. se înseamnă în C și D pozițiele inelului M, care fac equilibru în aceste două cazuri. Se împarte pe urmă porțiunea CD în 10 părți egale, fiecare diviziune reprezentând 1 kg. Se fac, în fine, subdiviziuni câte trebue.

Dacă se atârnă greutatea în A′, vom puteà face altă gradație pe partea opusă a brațului OB. Punctul A′ fiind mai depărtat de O, el va servì pentru corpuri mai ușoare. Această balanță este puțin sensibilă. Ea se întrebuințează însă în comerț din cauza ușurinții de a fi transportată.

§ 73. **Balanța lui Quintenz sau Bascula** (fig. 49) se compune 1) din un suport în formă de unghiu drept H V. 2) din un sistem articulat P A O B G O′ compus din o pârghie de specia I-a A O B orizontală, sprijinită pe suportul V prin ajutorul unui cuțit orizontal O. In A este atârnat talerul cu măsuri P, în B este o bară verticală B G, de capătul căreia atârnă un triunghiu de fier *g o o′* proectat vertical în G O Cele două capete *o*, *o′* sunt sprijinite pe suport prin ajutorul a două cuțite. 3) Un alt sistem articulat C D F se compune din o bară verticală C D legată în C cu pârghia A O B. La capătul inferior D, susține o′ platformă D F, care se sprijină prin ajutorul a două cuțite *f f* proectate vertical în F, pe brațul G O′. Obiectul Q ce trebue cântărit se așează pe platforma D F și se echilibrează cu măsuri P până când pârghia A O B devine orizontală. Dimensiunile aparatului sunt astfel calculate încât platforma D F să rămână orizontală când se scoboară puțin din cauza greutății Q. Pentru aceasta trebue să avem relația

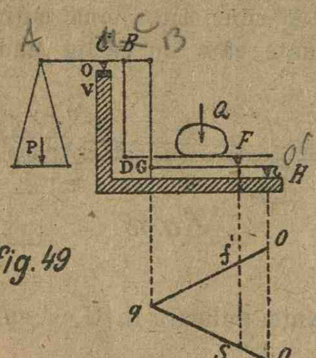


fig. 49

$$\frac{O'F}{O'G} = \frac{O\,C}{O\,B}$$

In adevăr, trebue să scrim că distanțele cu care se scoboară punctele D și F sunt egale. Observăm că punctele G și B se scoboară cu aceeaș cantitate, deasemene punctele D și C. Aceste cantități sunt aproape egale cu arcele descrise de punctele F, G, B, C și deci proporționale cu razele lor. Vom aveà astfel:

$$\frac{FF'}{GG'} = \frac{O'F}{O'G};\quad \frac{CC'}{BB'} = \frac{O\,C}{O\,B} \quad \text{sau} \quad \frac{FF'}{BB'} = \frac{O'F}{O'G};\quad \frac{DD'}{BB'} = \frac{O\,C}{O\,B}$$

însemnând cu F F′, G G′, B B′, C C′ arcele foarte mici descrise de punctele F, G, B, C.

Dar F F′ și D D′ trebuind să fie egale, vom aveà:

$$(1) \qquad \frac{O'F}{O'G} = \frac{OC}{OB}$$

Să căutăm acum condițiile de equilibru sub acțiunea forțelor P și Q. Descompunem forța Q în două: una q ce lucrează în D sau în C și alta q' ce lucrează în F. Pe forța q' o descompunem în două, una aplicată în O' al cărei efect e distrus prin fixitatea acestui punct, alta aplicată în G sau B a cărei intensitate e $q' \frac{O'F}{O'G}$. Condițiunea de equilibru va fi:

$$P. OA = q. OC + q' \frac{O'F}{O'G}. OB$$

sau în virtutea relației (1)

$$P. OA = (q + q') OC$$

sau, fiindcă $q + q' = Q$, vom avea:

$$Q = P. \frac{OA}{OC}$$

Dacă prin construcție vom avea: $\frac{OA}{OC} = 10$, sau $\frac{OA}{OC} = 100$ atunci $Q = 10 P$. sau $Q = 100 P$. Deci greutatea căutată Q va fi de zece sau de o sută de ori mai mare decât măsura P care-i face equilibru.

Scripete.

§ 74. **Scripetele fix** este un disc cilindric a cărui suprafață laterală este adâncită, formând *gâtul* scripetelui. In jurul gâtului trece o funie sau un lanț la extremitățile căruia lucrează puterea P și rezistența Q. El se întoarce în jurul unei axe de rotație care coincide cu axa discului. Discul este încadrat pe jumătate în o piesă $t\,c\,c'\,t$ în formă de П care are la partea superioară un cârlig pentru a suspendă scripetele de un punct fix (fig. 50).

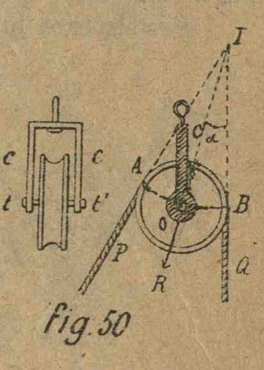


fig. 50

Din cauza rotației se produce o frecare a căpătâielor $t\,t'$ și o alta a funiei pe gâtul scripetelui. Cum însă căpătâiele sunt lustruite iar funia aspră, frecarea acesteia din urmă e mai mare, așà că în loc să alunece funia, caută să întoarcă discul.

Pentru equilibru discul trebue să fie imobil, în acest caz îl putem asemănà cu o pârghie, astfel că vom aveà aceleaş condiţii, adică suma momentelor în raport cu punctul O să fie nulă sau ca:

$$P r = Q r \text{ şi deci } P = Q.$$

Deci, în un scripete fix puterea este egală cu rezistenţa, astfel că nu se câştigă nimic, ci numai se schimbă direcţia forţei.

Presiunea pe axă fiind rezultanta forţelor P şi Q, e dată de formula

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos 2\alpha$$

şi fiincă $P = Q$ rămâne

$$R^2 = 4 P^2 \cos^2 \alpha$$

sau

$$R = 2 P \cos \alpha.$$

Valoarea acestei presiuni scade când α creşte. Ea e maximă şi egală cu $2P$ când $\alpha = o$, adică când puterea şi rezistenţa sunt paralele.

§ 75. **Scripetele mobil.** Deosebirea între acesta şi precedentul, este că scripetele mobil are cadrul îndreptat în jos, greutatea fiind atârnată de cârligul lui. Un capăt al funiei este fix în C. La capătul celălalt al funiei este aplicată puterea P, sau direct, sau, mai deseori, prin intermediul unui scripete fix O' (fig. 51).

Forţele care lucrează asupra scripetelui, neglijând greutatea lui, sunt: puterea P, rezistenţa Q şi reacţiunea punctului fix C, care se poate înlocui prin o tensiune T a funiei. Forţele P şi T sunt tangente la disc în A şi B, rezistenţa Q trece prin O.

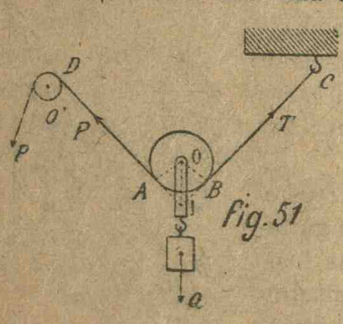


Fig. 51

Pentruca să fie equilibru, trebue ca aceste trei forţe să fie în un plan, să fie concurente şi ca rezultanta forţelor P şi T să fie egală şi direct opusă cu Q. De aci rezultă că forţele P şi T să se întâlnească în acelaş punct I, pe verticala punctului O (care e direcţia forţei Q), iar rezultanta să fie îndreptată în direcţia bisectoarei IO a unghiului lor, adică ca aceste două fòrţe P şi T să fie egale. Tot de acì mai rezultă că

$$Q = 2P \cos \alpha$$

sau :

$$P = \frac{Q}{2 \cos \alpha}$$

Dacă capetele funiei sunt paralele avem $\alpha = 0$ şi

$$P = \frac{Q}{2}$$

în acest caz forţa este minimă. De acì se vede că avantajul unui scripete mobil e că se poate equilibrà (adică ridicà) o greutate cu o forţă inferioară care se poate reduce până la jumătate.

§. 76. **Mufle şi Palanuri.** *Mufla* este un sistem de mai multe scripete montate în un acelaş cadru, axele lor sunt sau confundate sau aşezate în un acelaş plan vertical (fig. 52 M sau M').

fig. 52

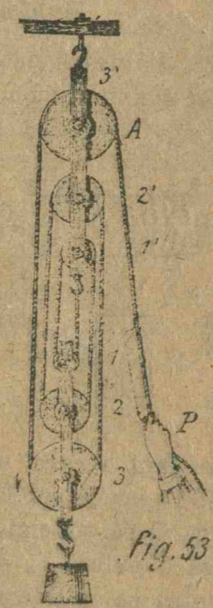


fig. 53

Palanul se compune din două mufle (fig. 52 şi 53), una fixă şi alta mobilă. Cea inferioră e mobilă și poartă greutatea de suit Q, Cea superioară e fixă. Funia e fixată de unul din scripetele superioare și încunjură succesiv scripetele 1, 1', 2, 2', 3, 3' și iese în A unde se aplică puterea P.

Să presupunem că toate porțiunele de funie ar fi verticale, atunci partea de jos este în equilibru sub acțiunea forței Q și a 6 tensiuni egale cu P, vom aveà

$$Q = 6P \text{ sau } P = \frac{Q}{6}$$

Sau în general, când sunt n scripete, în fiecare muflă vom avea:

$$P = \frac{Q}{n}$$

Deci cu ajutorul palanului se învinge o rezistență dată cu o putere mult mai mică, și pe care putem să o micșoram de câte ori voim.

Mașini cu o axă fixă.

§. 77. **Vârtejul** este un aparat care servește la ridicarea greutăților mai mari cu o forță mai mică (fig. 54). El este un corp mobil în jurul unei axe fixe și se compune din un cilindru circular A B, făcut în general din lemn, terminat prin două cilindre mai mici de aceeaș axă care se pot învârtì în interiorul unor găuri făcute în niște stâlpi c, c. La unul din capetele c este fixată o manivelă m. Pe arborele A B este învălătucită o funie sau lanț a cărei una din extremități e fixată chiar pe arbore în D, iar de celălalt capăt e atârnată greutatea de ridicat.

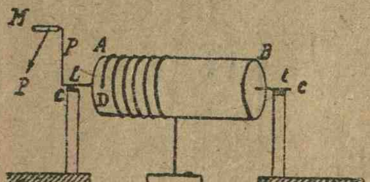


Fig. 54

Pentru ca Q să se ridice se învârtește manivela m în sensul funiei, cu o putere P, care-i în general a unui om.

Pentru ca să avem equilibru, trebue ca rezultanta puterei și a rezistenței să treacă prin axă. Luând momentele fată cu această axă a forței și rezistenței, va trebuì dar ca suma lor să fie nulă. Brațele de pârghie ale acestor forțe sunt distanțele la dânsele dela axă. Cum însă aceste forțe sunt îndreptate tangențial la circonferințele descrise de punctele lor de aplicație, brațele de pârghii vor fi chiar razele acestor cercuri adică pentru rezistența Q raza q a arborelui, iar pentru puterea P, raza p a manivelei. Condiția de equilibru va fi deci:

$$Pp = Qq$$

sau

$$P = Q\frac{q}{p}$$

de unde se vede că puterea este numai o fracțiune din rezistența exprimată prin raportul razelor cilindrului și manivelei.

§ 78. **Diferitele feluri de vârtejuri.** 1. Vârtejul descris mai sus se întrebuințează de ordinar la scoaterea apei din fântâni.

2. *Vârtejul pentru cariere.* In locul manivelei p avem o roată foarte mare, având pe margini, deoparte și de alta, niște scări perpendiculare pe planul cercului, pe dânsele se pot suì deodată 2 lucrători. Greutatea lor constitue puterea, cu ajutorul căreia se poate ridicà corpuri foarte grele, din cauză că raza roței este foarte mare în raport cu raza arborelui. La acest aparat puterea nu mai este trangențială în tot timpul mișcărei (fig. 55).

Fie A poziția omului pe roată, α unghiul A O D, R raza roței, r raza arborelui, Q greutatea sarcinei și P a lucrătorilor (fig. 56). Aplicând teorema momentului vom aveà:

$$P R \cos\alpha = Q r$$

de unde

$$P = Q \frac{r}{R \cos \alpha},$$

care dă și pe α până unde roata se învârtește pentru greutățile P și Q.

3 *Cabestanul* este un vârtej a cărui axă este verticală. Prin extremitatea căpătâiului superior trece în număr pereche, niște bare, pe care câte doi oameni împing perpendicular pe dânsele

pentru a se învârtì roata. Un alt om trage de capătul C al funiei pentru a-l desvălătuci, pe măsură ce din partea opusă se învălătucește (fig. 57).

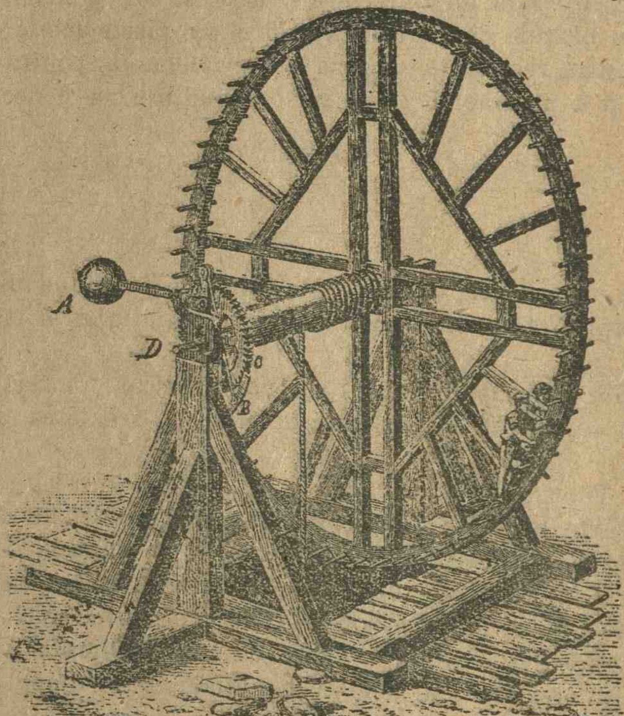


fig. 55

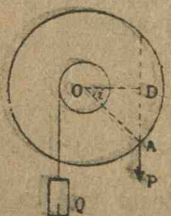


fig. 56

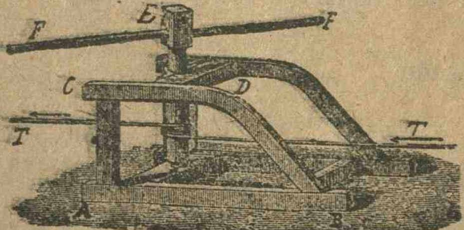


fig. 57

Cabestanul servește la transportul orizontal al greutăților. — El se întrebuințează mai cu seamă în porturi și la corăbii.

§ 79. **Roata cu angrenaje.** Pentru a învinge o rezistență mare cu o putere și mai mică, fără a dà roții dimensiuni prea mari, se întrebuințează roata cu angrenaje.

Se compune din un sistem de două roți cu dinți neegale. Cea mai mare e fixată pe arborele vârtejului, cea mică angrenează cu cea mare și este pusă în mișcare de către un om, cu ajutorul manivelei $BC = R'$ (fig. 58).

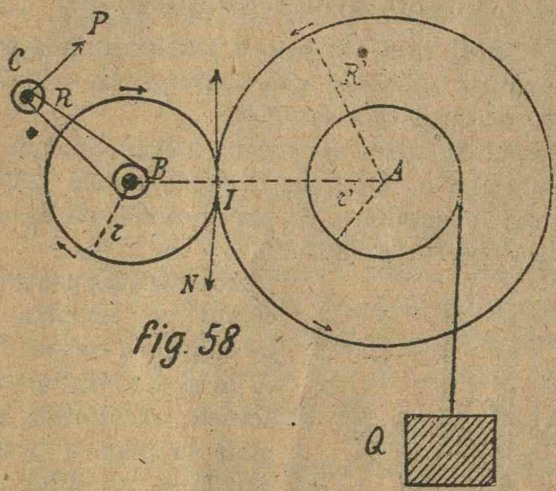


Fig. 58

Sistemul fiind presupus în equilibru sub acțiunea celor două forțe P și Q, în punctul I se desvoltă două presiuni, una N, care lucrează asupra roții R', din cauza apăsărei celei mici, una N', care lucrează asupra *roții mici* din cauza celei mari.

Roata cea mare fiind în equilibru sub acțiunea forțelor Q și N vom aveà:

$$NR' = Qr'.$$

De asemenea, roata cea mică este în equilibru sub acțiunea forței P şi a presiunii N', și dar

$$PR = N'r$$

Inmulțind aceste două relații și observând că în virtutea principiului acțiunii și a reacțiunii $N = N'$, vom aveà:

$$PRR' = Qrr'.$$

sau

$$P = Q \frac{r r'}{R R'}.$$

Factorii r, r' dela numărător, pot fi făcuţi deajuns de mici în raport cu R şi R' şi deci puterea poate fi făcută cu mult mai mică decât rezistenţa.

Maşini având un plan fix.

§ 80. **Planul inclinat** este o maşină simplă ce se întrebuinţează pentru ridicarea unor sarcini cu o putere P mai mică decât greutatea Q a sarcinei.

Fie corpul M aşezat pe planul A B înclinat pe planul orizontal de unghiul α. Dacă ar fi supus numai greutăţei sale, n'ar puteà stà în equilibru. Să presupunem că asupra lui mai lucrează încă o forţă P (fig. 59).

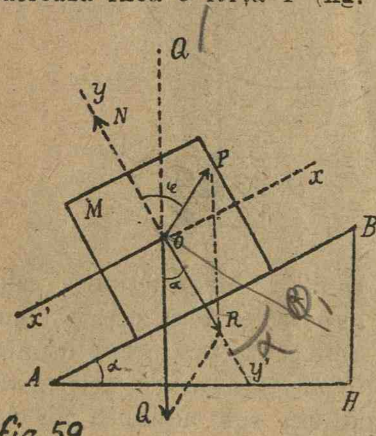


fig. 59

Am văzut că pentru ca un corp, ce stă pe un plan fix, să fie în equilibru trebue: 1) ca forţele să aibă o rezultantă unică, 2) această rezultantă să fie normală la plan şi 3) să apese pe dânsul şi să aibă punctul de aplicaţie în-interiorul poligonului de susţinere.

De aci urmează că forţele P şi Q trebue să fie în un acelaş plan, să se întâlnească în un punct O iar planul lor să fie normal planului înclinat. In fine trebue ca rezultanta R să fie normală la plan şi să apese pe dânsul.

Din paralelogramul forţelor O P R Q scoatem:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}, \quad \frac{R}{Q} = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \alpha}$$

sau:

$$(1) \qquad P = Q \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \qquad R = Q \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} \qquad (2)$$

Pentru $\varphi = \alpha$, adică când forța P, este în prelungirea rezistenței Q, vom aveà $P = Q$ și $R = O$.

Pentru $\varphi = 90^0$, $P = Q \sin \alpha$, $R = Q \cos \alpha$.

forța P este paralelă cu planul înclinat și are valoarea cea mai mică. Apăsarea pe plan este $Q \cos \alpha$. In practică se caută a se realizà acest caz.

In orice caz, pentruca în adevăr forța P să fie mai mică decât rezistența Q, trebue ca

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} < 1$$

adică ca

$$\alpha < \varphi < \pi - \alpha.$$

NOQ_1

adică forța P să fie cuprinsă în unghiul ~~Q'OR~~.

Principiul acestui instrument îl găsim foarte des aplicat în practică. De ex. la încărcarea și descărcarea vagoanelor, la scoborîrea vaselor în pivniță și la scoaterea lor, la scoborîrea trunchiurilor de arbori din deal în vale pe niște jghiaburi, la trenurile ce urcă pe o pantă mare, etc.

§. 81. **Pana de despicat** lemne este o prismă triunghiulară a cărei secțiune dreaptă e de obiceiu un triunghiu isoscel ABC sau uneori și un triunghiu dreptunghic (fig. 60).

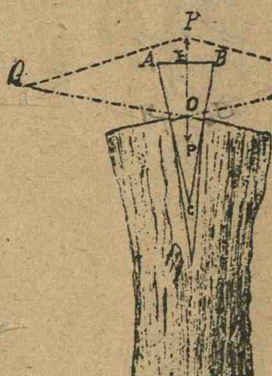


Fig. 60

Să presupunem introduse pana ABC în corpul M, până în puncte K și L grație unei forțe P ce lucrează asupra penei în punctul I, mijlocul bazei A B și să căutăm condițiile de equilibru.

Din cauză că M să opune la despicare va trebui să presupunem că lucrează din partea lui, asupra penei, în punctele ei de atingere K și L, două forțe de presiune Q. Q' egale. Din cauză că este equilibru, rezultanta acestor două forțe va trebui să fie egală și direct opusă lui P. Triunghiurile PQO și ABC vor fi asemenea, fiindcă au laturile respectiv perpendiculare și vom aveà

$$\frac{PO}{AB}=\frac{PQ}{BC}=\frac{OQ}{AC}$$

de unde scoatem

$$\frac{P}{Q}=\frac{AB}{BC}$$

de unde urmează că vom întrebuință o putere P cu atât mai mică, cu cât baza triunghiului isoscel A B va fi mai mică în raport cu celelalte laturi.

PARTEA II.

CINEMATICA

CAP. VIII.

DEFINIŢII.

§ 82. **Definiţia Cinematicei.** S'a văzut la § 2 că partea din Mecanică care se ocupă cu studiul mişcării corpurilor numai în raport cu timpul, se numeşte *cinematică*. In geometrie, pentru dovedirea unor proprietăţi a figurilor, s'a întrebuinţat şi *deplasările* lor, translaţii sau rotaţii, cari dau naştere la suprafeţe sau volume. Din aceşt punct de vedere, deosebirea dintre geometrie şi cinematică este că aceasta din urmă studiază deplasările în raport cu spaţiul şi timpul, pe când cea dintâiu numai în raport cu spaţiul.

§ 83. **Unitatea de lungime şi de timp.** Pentru măsurarea diferitelor mărimi ce se întâlnesc în cinematică, ajunge să ne fixăm unităţile de *lungime* şi de *timp*.

Unitatea de lungime adoptată de aproape toate popoarele, este *metru* definit, ca fiind a 40 milioana parte din un meridian pământesc. Cum însă la măsurarea meridianului pământesc s'au comis erori, inevitabile de altfel, metrul actual nu mai este decât o unitate convenţională, a cărui lungime-tip sau *etalon* este făcut în platină şi reprezintă la temperatura de 0^0 adevărata lungime.

Pentru lungimele mai mici se întrebuinţează ca unitate *centimetrul*.

Ideia de timp o căpătăm din durata fenomenelor observate. Unele fenomene pot fi simultane, altele succesive. Durata unui fenomen poate fi egală cu a unui altuia sau mai mare. De aci se vede că această durată sau *intervalul de timp* strecurat dela începutul şi până la sfârşitul unui fenomen este o cantitate ce se poate reprezentà prin un număr, din moment ce se alege durata constantă a unui alt fenomen ca unitate de măsură.

După cum unitatea de lungime e pusă în legătură cu dimensiunile pământului tot aşà şi unitatea de timp e pusă în legătură cu mişcarea pământului în jurul soarelui. Astfel intervalul de timp strecurat între două treceri consecutive, a soarelui mediu [1]) la meridian s'a numit *zi solară medie*, care se împarte în *24 ore medii*, ora medie in *60 minute* şi minuta în *60 secunde*. Pentru intervalele mici de timp, se ià ca unitate de măsură *secunda* care este $\frac{1}{86400}$ din ziua solară medie.

In calcule se socotesc intervalele de timp dela un moment anumit numit *momentul iniţial*. Pentru fixarea unui alt moment e deajuns a aveà numărul unităţilor de timp strecurate între cele două momente. Acest număr va fi pozitiv sau negativ după cum momentul dat este posterior sau anterior momentului iniţial. El defineşte complect *data* momentului considerat.

§ 84. **Traectorie. Legea mişcării.** S'a definit la începutul acestei cărţi *mişcarea* şi *repausul* unui corp sau unui punct. S'a văzut că ele trebuesc considerate, în raport cu nişte *solide* sau *puncte* de reper, adică în raport cu un *sistem de comparaţie*.

Când un punct este în mişcare, locul poziţiilor succesive

1) Se numeşte *zi solară adevărată*, intervalul între două treceri consecutive ale soarelui *adevărat* la meridianul locului. Din cauză însă că această zi nu rămâne constantă în cursul unui an, astronomii au imaginat un alt soare, *soarele mediu*, care nu se depărtează prea mult de cel adevărat şi ale cărui zile sunt constante.

pe care el le ocupă în spaţiu se numeşte *traectoria* punctului, iar punctul în mişcare se mai numeşte şi *mobil*.

Traectoria unui mobil poate fi o *linie dreaptă*, de ex. drumul descris de un punct greu lăsat să cadă liber la suprafaţa pământului. Această traectorie poate fi o *linie curbă*, cum e cazul centrului de greutate al unei bombe de tun, sau al unui punct de pe pendula unui ceasornic, etc.

Pentru a cunoaşte mai bine mişcarea unui mobil, nu-i deajuns să ştim traectoria lui. Mai trebue să cunoaştem şi la ce dată trece mobilul prin anume puncte de pe traectoria lui.

Fie S′ S traectoria descrisă de un mobil M faţă de un sistem oarecare de comparaţie. Să luăm pe această curbă un punct fix O (fig. 61), ca origine a arcelor şi un sens pozitiv dela S′ către S. Poziţia M a mobilului pe această curbă în fiecare moment t va fi dată de segmentul de curbă O M = s. Acest segment s va varià odată cu timpul t; el va fi dar o funcţie oarecare de timpul t:

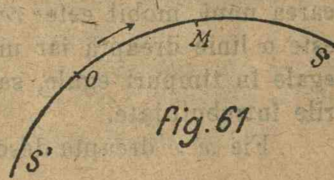


Fig. 61

$$(1) \qquad s = f(t)$$

Această relaţie (1) între spaţiul parcurs de un mobil şi timpul întrebuinţat se numeşte *legea mişcării* sau *equaţia mişcării*.

Cunoscând relaţia (1) putem aflà poziţia M a mobilului la o anumită dată t şi invers putem cunoaşte data la care a trecut sau va trece mobilul M prin anumite puncte de pe curbă. Astfel se poate definì poziţia unui tren pe calea ferată, cunoscând orariul trenului care dă distanţa la fiecare punct faţă de gara de unde a plecat.

CAP. IX.

MIŞCARE RECTILINIE.

§ 85. **Mişcare rectilinie şi uniformă.** Se zice că mişcarea unui mobil este *rectilinie şi uniformă*, când traectoria este o linie dreaptă iar mobilul descrie pe traectorie segmente egale în timpuri egale, sau segmente proporţionale cu timpurile întrebuinţate.

Fie $x'x$ dreapta descrisă de mobilul M, O origina segmentelor, Ox sensul pozitiv.

Fig. 62

Să presupunem ca la momentul iniţial, adică la data 0 (zero), mobilul este în M_0 la distanţa $OM_0 = x_0$ de origina spaţielor iar la data t este în M astfel că $OM = x$. Drumul descris de mobil în timpul t va fi $M_0M = x - x_0$, cum însă drumul descris e proporţional cu timpul, raportul $\frac{x-x_0}{t}$ e constant; să-l însemnăm cu v; vom aveà atunci:

$$\frac{x-x_0}{t} = v \quad \text{sau} \quad x = x_0 + vt$$

unde v reprezintă drumul descris în unitatea de timp. Aceasta este *equaţia unei mişcări rectilinii şi uniforme.*

§ 86. **Viteza în mişcarea uniformă** se numeşte spaţiul parcurs în unitatea de timp. Având equaţia mişcării putem să-i găsim viteza. Astfel să dăm lui t din formula:

$$x = x_0 + vt$$

o creştere Δt, va corespunde pentru x o creştere Δx şi vom aveà:

$$x + \Delta x = x_0 + v\,(t + \Delta t)$$

de unde:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{x - x_0}{t}$$

aceasta este viteza în mişcarea rectiliniei uniformă dată de equaţia precedentă. De aci mai urmează că în o mişcare rectilinie şi uniformă, viteza este exprimată prin raportul dintre spaţiul percurs şi timpul întrebuinţat pentru parcurgerea lui. Viteza e dar constantă în tot timpul mişcării.

Viteza poate fi reprezentată prin un segment, de oarece ea are o valoare algebrică şi un sens (sensul mişcării). E de ajuns pentru aceasta să luăm în un punct M, o lungime:

$$MV = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

Dacă în equaţia:

$$x = x_0 + v\,t$$

$x_0 = 0$ vom aveà:

$$x = v\,t$$

adică în momentul iniţial mobilul erà în punctul O.

De asemenea va trebuì să specificăm unităţile întrebuinţate în equaţia mişcării, de oarece valoarea lui v depinde de alegerea acestor unităţi. De obiceiu se alege *secunda* ca unitate de timp şi *centimetrul* ca unitate de lungime. In asemenea condiţii unitatea de viteză va fi viteza unui mobil care ar parcurge în mod uniform un *centimetru pe secundă*.

§ 87. **Mişcare rectilinie variată.** Orice mişcare, care nu-i uniformă, se numeşte variată. In aceste mişcări variate, spaţiurile percurse nu mai sunt proporţionale cu timpurile, viteza v nu mai este constantă ci variază cu timpul.

Se numeşte *viteză mijlocie* a unei mişcări variate, în un interval de timp, viteza unei mişcări uniforme în care un mobil ar parcurge un spaţiu egal în acelaş interval de timp. In practică se consideră numai această viteză mijlocie. Astfel se zice că un regiment a făcut în o săptămână câte 40 km. pe zi în alta câte 30 km. etc., cu toate că viteza a variat în tot cursul mersului chiar în timpul unei zile.

Fie Ox traectoria mobilului, M poziţia mobilului la sfârşitul timpului t, M' poziţia lui după timpul $t+\Delta t$. De oarece mişcarea nu-i uniformă raportul:

fig. 53

$$\frac{MM'}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

nu-i constant, ci depinde de epoca t şi de creşterea Δt. Cu toate aceste ne putem închipui că mobilul a parcurs spaţiul din M în M' în acelaş interval de timp Δt însă cu o mişcare uniformă. Viteza constantă a acestei mişcări închipuite va fi:

$$V_m=\frac{MM'}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Acest raport V_m se numeşte *viteza mijlocie* în mişcare rectilinie variată în intervalul de timp Δt care urmează timpului t.

Dacă facem acum să tindă Δt spre zero, Δx va tinde şi el spre zero iar raportul $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ va tinde către o limită bine determinată, ea va reprezentà *viteza mobilului la epoca t*. Această viteză este dar reprezintată prin limita raportului dintre creşterea spaţiului la creşterea timpului când aceasta din urmă tinde spre zero, adică prin *derivata spaţiului în privinţa timpului*. Astfel se poate zice despre un tren ca la o anumită oră din zi aveà viteza de 30 km. pe oră, şi că pe urmă această viteză a crescut până la 40 km. pe oră.

Astfel, dacă legea mişcării e dată de equaţia:

$$x=f(t)$$

viteza va fi dată de derivata

$$v=x'_t=f'(t). \tag{1}$$

§ 88. **Acceleraţie în mişcare rectilinie.** Plecând dela momentul t să dăm timpului o creştere Δt pozitivă. Viteza, fiind funcţie de timp, va luà o creştere Δv pozitivă sau negativă. Raportul $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ se numeşte *acceleraţia medie* a mişcării în intervalul de timp Δt. Ea are acelaş semn cu Δv şi depinde în acelaş timp de Δt şi t. Acceleraţia medie se însemnă cu

$$\gamma_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Dacă Δt tinde spre zero, Δv va tinde spre zero, iar raportul $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ tinde către o limită determinată care se numeşte *acceleraţiunea la epoca t* a mişcării variate. Deci:

Acceleraţiunea în un moment t este limita către care tinde raportul dintre creşterea vitezei şi creşterea timpului, când creşterea timpului tinde spre zero. Algebriceşte ea e reprezentată dar prin derivata vitezei în raport cu timpul sau prin derivata a doua a spaţiului în privinţa timpului. Astfel avem:

$$x = f(t),\ v = f'(t),\ \gamma = v'(t) = f''(t).$$

Ca şi viteza, acceleraţiunea poate fi reprezentată prin un segment dealungul lui OX începând din M, în sensul lui Δv.

Exemple. 1) Fie legea unei mişcări dată de equaţia:

$$x = x_0 + Kt$$

viteza acestei mişcări este

$$v = x'_t = K. = \text{constantă}$$

mişcarea e uniformă şi acceleraţia nulă.

2. Să luăm mişcarea rectilinie dată de equaţia

$$x = at^2 + bt + c.$$

Viteza şi acceleraţia sunt date de relaţiile:

$$v = 2at + b. \qquad \gamma = 2a.$$

De aci se vede că dacă $a > o, v$ creşte, e negativă pentru $t < \frac{-b}{2a}$, e nulă pentru $t = \frac{-b}{2a}$ şi pozitivă pentru $t > \frac{-b}{2a}$.

Contrarul are loc dacă $a < o$.

§ 89. **Mişcarea rectilinie uniform variată.** Fie $x'x$.

traectoria rectilinie a unui mobil, M poziția lui la sfârșitul timpului t, astfel că $OM = x$, fie v viteza mobilului în acest moment (fig. 64). Să dăm lui t o creștere Δt, va corespunde pentru x o creștere Δx și pentru v o creștere Δv, astfel că la sfârșitul timpului $t + \Delta t$, spațiul descris va fi $x + \Delta x$, iar viteza $v + \Delta v$.

fig. 64

Dacă creșterea Δv este proporțională cu Δt, se zice că mișcarea rectiliniei e *uniform variată. Prin urmare, în o mișcare uniform variată, variațiile vitezei sunt proporționale cu creșterile timpului*, sau sunt egale în timpuri egale.

In acest caz raportul $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ fiind constant, va rămâne constant și la limită când Δv și Δt tind spre zero. Dar această limită este tocmai accelerația mișcării la epoca t. De aci urmează că *în o mișcare uniform variată accelerația este constantă.*

Astfel să considerăm mișcarea definită de equația:

$$x = at^2 + bt + c$$

viteza va fi dată de

$$v = 2at + b$$

iar accelerația va fi

$$\gamma = 2a.$$

Dacă a este pozitiv, *mișcarea* este *uniform accelerată.* dacă a este negativ, mișcarea se zice *uniform întârziată.*

Formula vitezei. Fie v_0 *viteza inițială* a mobilului, adică viteza ce o aveà mobilul la origina timpului (când $t = o$) și a cantitatea constantă cu care crește (sau scade) această viteză în unitate de timp. Insemnând cu v viteza mobilului la sfârșitul timpului t, ea va fi dată de formula

$$v = v_0 + at.$$

Dacă corpul a plecat din repauz în momentul inițial $a_0 = o$ și deci

$$v = at.$$

Formula spațiului. Ne propunem să găsim spațiul parcurs de mobil în o mişcare variată într'un timp t, viteza iniţială fiind v_0 şi acceleraţiunea a. Să împărţim timpul t în n intervale t'. La începutul fiecărui interval, vitezele vor fi date de relaţiile:

$$v_1 = v_0\ ,\ v_2 = v_0 + a t'\ ,\ v_3 = v_0 + 2 a t' \ldots\ldots v_n = v_0 + (n-1) a t'$$

Dacă presupunem acum că viteza mişcării este constantă în micul interval de timp t', spaţiile parcurse vor fi date de formulele:

$$\begin{aligned} s_1 &= v_1 t' = v_0 t' \\ s_2 &= v_2 t' = v_0 t' + a t'^2 \\ s_3 &= v_3 t' = v_0 t' + 2 a t'^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= v_n t' = v_0 t' + (n-1) a t'^2 \end{aligned}$$

adunând acum aceste egalităţi membru cu membru, vom aveà:

$$s_1 + s_2 + \ldots\ldots + s_n = n v_0 t' + [1 + 2 + \ldots\ldots + (n-1)] a t'^2$$

şi înlocuind pe t' prin $\frac{t}{n}$:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + \ldots\ldots + s_n &= v_0 t + \frac{1 + 2 + \ldots\ldots + (n-1)}{n^2} a t^2 \\ &= v_0 t + \frac{(n-1) n}{2 n^2} a t^2. \end{aligned}$$

Cu cât intervalul t' va fi mai mic, adică cu càt n va fi mai mare, presupunerea făcută asupra vitezei se va apropià mai mult de adevăr. Făcând să tindă n spre infinit, vom aveà în adevăr formula spaţiului. In membrul II a relaţiei precedente numai raportul $\frac{(n-1) n}{2 n^2}$ depinde de n, şi cum limita acestui raport este $\frac{1}{2}$, vom aveà în definitiv, punând $s = lim$ $(s_1 + s_2 + \ldots\ldots + s_n)$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

dacă în momentul iniţial, mobilul parcursese un spaţiu s_0, vom aveà:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Dacă însă luăm ca origină a timpului, momentul în care iuţeala este nulă şi ca origină a spaţiului, poziţia corespunzătoare a mobilului, adică dacă presupunem că pentru $t=o$ avem: $v_0=o$ şi $s_0=o$, formulele devin:

$$v=at \quad , \quad s=\frac{1}{2}at^2$$

de unde deducem:

$$v^2=2as$$

adică: *Spaţiile sunt proporţionale cu patratele timpurilor, şi vitezele sunt proporţionale cu timpurile întrebuinţate pentru a le câştigà.*

§ 90. **Legile căderii corpurilor.** Ca un exemplu de mişcarea corpurilor uniform variată, avem *căderea corpurilor în vid.* In adevăr această cădere se face după următoarele legi:

1. *In vid, toate corpurile cad cu aceeaş viteză;*
2. *Spaţiile parcurse sunt proporţionale cu patratele timpurilor întrebuinţate;*
3. *Viteza este proporţională cu timpul căderii.*

După cum se ştie din Fizică, aceste legi se pot verificà cu ajutorul unor anumite aparate. Astfel *tubul lui Newton* verifică legea întâiu; *planul înclinat al lui Galileu, maşina lui Atwood* verifică pe celelalte două.

Insemnând cu I spaţiul parcurs de un corp în căderea lui, cu g acceleraţiunea şi presupunând $I_0=v_0=o$, avem:

$$I=\frac{gt^2}{2}, \quad v=gt, \quad v^2=2gI, \quad v=\sqrt{2gI}$$

Valoarea lui g, constantă pentru acelaş loc, variază cu latitudinea şi cu înălţimea locului. Astfel, aproape de polul nord $g=9^m, 8289$, la Paris $g=9^m, 8088$ iar la equator $g=9^m\ 7806$.

Presupunem că, în momentul începerii căderii, corpul aveà o viteză iniţială v_0, formulele de mai sus devin:

$$v=v_0+gt, \quad I=v_0t+\frac{gt^2}{2}, \quad v^2=v_0^2+2gI$$

Dacă corpul este aruncat de jos în sus cu o viteză iniţială a_0, mişcarea este uniform întârziată şi vom aveà formulele:

$$I=v_0t-\frac{gt}{2}, \quad v=v_0-gt, \quad v^2=v_0^2-2gI.$$

CAP. X

MIȘCARE CURBILINIE.

§ 91. Când mobilul descrie o traectorie curbă, avem o *mișcare curbilinie*, care poate fi la rândul ei *uniformă* și *variată*. Vom studià ca și pentru cea rectilinie, *viteza* și *accelerația* mișcării curbiliniei *variată*, de unde vom deduce cu ușurință viteza și accelerația mișcării uniforme.

Viteza. Să presupunem că un mobil M, parcurge traectoria SS' cu o mișcare variată și că la data t el se află în M, iar la data $t+\Delta t$ în M_1. Expresiunea $\frac{\text{coarda } MM_1}{\Delta t}$ socotită pe coardă, exprimă *viteza medie* a mobilului în intervalul de timp Δt. Ea va fi dar viteza unui mobil fictiv, care ar parcurge coarda MM_1 cu o mișcare *uniformă* în acelaș timp Δt, în care mobilul adevărat parcurge arcul MM_1.

Dacă creșterea Δt tinde către zero, coarda MM_1 tinde de asemenea spre zero, iar expresia $\frac{\text{coarda } MM_1}{\Delta t}$ tinde către o limita care se numește viteza mobilului la sfârșitul timpului t. Cum însă

$$\frac{\text{coarda } MM_1}{\Delta t} = \frac{\text{coarda } MM_1}{\text{arc } MM_1} \times \frac{\text{arc } MM_1}{\Delta t}$$

si

$$\lim. \frac{\text{coarda } MM_1}{\text{arc } MM_1} =$$

vom aveà:

$$\lim. \frac{\text{coarda } MM_1}{\Delta t} = \lim. \frac{\text{arc } MM_1}{\Delta t}.$$

Deci în o mişcare curbilinie, viteza este exprimată prin limita raportului dintre creşterea arcului şi creşterea timpului, când creşterea timpului tinde spre zero (fig. 65).

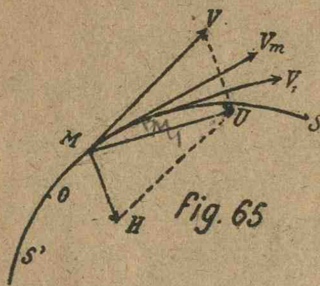


Fig. 65

Insemnând cu s arcul OM, cu Δs, arcul MM_1, dacă legea mişcării curbiliniei este dată de equaţia

$$s = f(t)$$

vom aveà:

$$V = \lim. \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'_t = f'(t).$$

Acceleraţie. Fie MV segmentul care reprezintă viteza mobilului la sfârşitul timpului t şi M_1V_1 viteza la finele timpului $t + \Delta t$. Să ducem MU paralelă şi egală cu M_1V_1 şi MH egală şi paralelă cu VU. Un segment dus din M pe MH şi egal cu $\frac{MH}{\Delta t}$, exprimă *acceleraţia medie* a mobilului în timpul Δt.

Ducând din un punct oarecare O, un segment Om egal şi paralel cu MV, când mobilul M descrie traectoria S'S, punctul m va descrie traectoria mm_1, care se numeşte *hodograf*. După intervalul de timp Δt, M vine în M_1 şi m în m_1, raportul $\frac{mm_1}{\Delta t}$ se numeşte *acceleraţia medie* a mişcării, în intervalul de timp Δt ce urmează timpului t. După cum vedem, această acceleraţie este tocmai viteza medie a mobilului fictiv m în acelaş interval de timp (fig. 66).

Acceleraţia la un moment dat t va fi limita raportului $\frac{mm_1}{\Delta t}$ când Δt tinde spre zero.

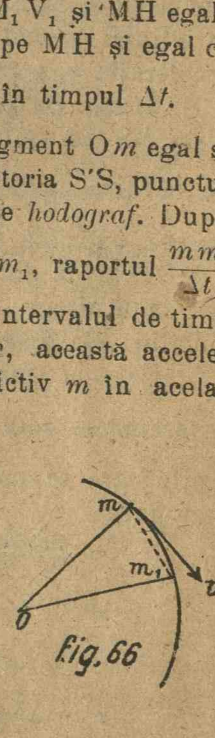


Fig. 66

Se numeşte *acceleraţie tangenţială* a mobilului în M, proecţiunea acceleraţiunii totale pe tangenta în M la traectorie. De asemenea, *acceleraţie normală* se numeşte proecţia acceleraţiunii totale pe normala traectoriei în punctul M.

Mişcarea curbilinie uniformă este atunci când mobilul se deplasează pe traectorie totdeauna în acelaş sens şi astfel ca arcurile parcurse să fie proporţionale cu timpurile întrebuinţate pentru a le parcurge.

Fie O originea arcelor pe traectorie, M_o poziţia mobilului în momentul iniţial (fig. 67). Punând $OM_o = s_o$ se găseşte, ca şi la mişcarea rectilinie uniformă, că poziţia M a mobilului la sfârşitul timpului t este dată de formula:

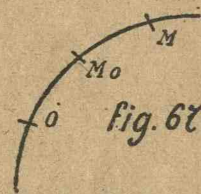


fig. 67

$$s = s_o + Kt$$

viteza constantă fiind

$$v = \lim. \frac{\Delta s}{\Delta t} = K.$$

Deosebirea este că viteza v, rămânând tangentă la traectorie, îşi schimbă necontenit direcţia.

§ 92. **Mişcarea de rotaţie uniformă** este cel mai uzitat caz de mişcare curbilinie uniformă. Punctele celor mai multe maşini, a roţilor de moară, a roţilor hidraulice, etc., sunt animate de o astfel de mişcare.

Viteza unui punct se reduce, în acest caz, la arcul de cerc descris de mobil în unitatea de timp.

Viteză unghiulară. Să considerăm un mobil M, care descrie circonferinţa cu centru în C şi cu raza $CO = R$. Fie O origina arcelor şi dela O către M sensul pozitiv. La data t mobilul este în M astfel că însemnând cu s arcul OM vom aveà: $s = f(t)$ în caz când mişcarea n'ar fi uniformă şi $s = Ct$ (C fiind constant) pentru o mişcare uniformă. Vom aveà pentru viteză:

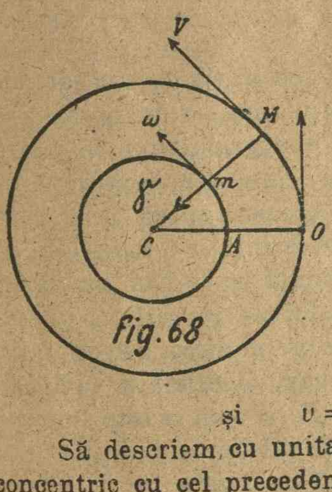


fig. 68

$$v = s'_t \text{ în cazul I.}$$

şi $\quad v = C$ în cazul II

Să descriem cu unitatea de lungime AC ca raza un cerc concentric cu cel precedent, fie A şi m puncte unde această circonferenţă tae razele CO şi CM. Viteza punctului m se numeşte *viteza unghiulară* a mobilului M. Ea este deasemenea constantă în o mişcare uniformă. Fie ω viteza constantă a punctului m vom aveà în acelaş timp:

$$(1)\ OM = vt \qquad AM = \omega t \quad (2)$$

Şi cum arcele OM şi A_m sunt proporţionale cu razele lor avem:

$$\frac{OM}{Am} = \frac{R}{1} \quad \text{sau} \quad \frac{vt}{\omega t} = \frac{R}{1}$$

de unde $$v = \omega R \qquad (3)$$

şi $$OM = s = \omega R t \qquad (4)$$

Se poate exprimà v şi ω în funcţie de durata T a unei rotaţii întregi. In adevăr, dacă M descrie o circonferinţă întreagă, formula (1) devine:

$$2\pi R = vT \quad \text{de unde} \quad v = \frac{2\pi R}{T} \qquad (5)$$

iar dacă $R = 1$, formula (4) ne dă pe ω, căci în acest caz $v = \omega$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (6)$$

Deasemenea făcând în formula (4) $R = 1$, $t = 1$ vom aveà

$$S = \omega$$

adică: viteza unghiulară este egală cu arcul descris de un punct situat la unitatea de distanţă în unitatea de timp.

Acceleraţie. Pentru a construì hodograful, din un punct oarecare C′ să ducem un segment $c'm'$ care să ne reprezinte în fiecare moment viteza mobilului M. Această viteză fiind constantă, punctul m' va descrie o circonferinţă cu raza ωR, şi cu o viteză unghiulară constantă şi egală cu ω. Noi am văzut însă că viteza punctului m' reprezintă în fiecare moment, în mărime şi direcţie acceleraţia M γ a mobilului M. Această acceleraţie va fi dar egală cu $\omega \cdot \omega R = \omega^2 R$, şi cum ea este îndreptată în direcţia tangentei la circonferinţa $C'm'$, ea va fi perpendiculară pe $C'm'$ adică pe viteza punctului M; deci acceleraţia (fig. 69) M γ a punctului M este îndreptată înspre centrul C al circonfe-

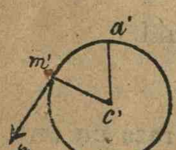


fig. 69

rinței descrisă de mobil. Insemnând cu γ această accelerație vom aveà:

$$\gamma = \omega^2 R \qquad (7)$$

sau, înlocuind ω prin $\frac{v}{R}$, avem:

$$\gamma = \frac{v^2}{R} \qquad (8)$$

sau încă făcând $\omega = \frac{2\pi}{T}$, vom aveà:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad (9)$$

§ 93. **Mişcarea de rotaţie a unui corp solid.** Se zice că un corp este animat de o mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe, când toate punctele acestei axe rămân fixe în tot timpul mişcării celorlalte puncte ale solidului.

Toate punctele solidului descriu, în acest caz, circonferințe, al căror plan trece prin punctul respectiv şi e perpendicular pe axă, ale căror raze sunt distanțele diferitelor puncte la axă şi al căror centre sunt intersecțiile planurilor cu axa.

Solidul va aveà o mişcare de rotaţie *uniformă*, când punctele lui sunt animate de o astfel de mişcare. Viteza fiecărui punct e proporțională cu distanța punctului la axă. Viteza unghiulară este însă aceeaş pentru toate punctele. Ea se defineşte ca la § precedent.

O rotaţie în jurul unei axe se reprezintă prin un segmet dus pe această axă, egal cu iuțeala de rotaţie. Fie $x'x$ axa de rotaţie; prin un punct oarecare O al ei vom duce un segment OK, în direcţia acestei axe, de o lungime egală cu viteza unghiulară ω a rotaţiei şi în un sens astfel că un observator, având picioarele în O şi capătul în K să vadă punctele mişcându-se în sensul acelor unui ceasornic (fig. 70).

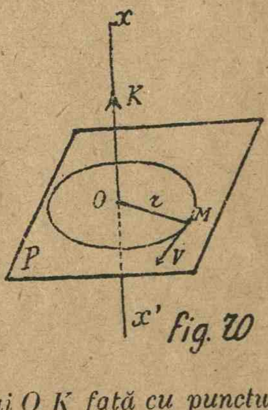


fig. 70

In acest caz: *viteza unui punct al solidului este tocmai momentul segmentului O K față cu punctul considerat.* In adevăr, momentul lui O K față de M este un segment M V, perpendicular pe planul M O K având o mărime

$$O K \, .\cancel{\omega} \, M O = r \, . \, \omega \qquad (r = O M).$$

Ori acest segment M V este tocmai viteza punctului M. Pe de altă parte se știe că momentul nu se schimbă dacă segmentul O K se mișcă dealungul axei.

CAP. XI.

MIŞCARE RELATIVĂ.

§ 94. Am văzut la începutul cinematicei că mişcarea unui corp este un fenomen relativ, care depinde de *punctele de reper* considerate. Astfel, în un moment dat, mişcarea unei trăsuri nu pare aceeaş pentru doi observatori cari sunt aşezaţi în poziţii diferite şi cu atât mai mult dacă unul din observatori se mişcă şi el în acelaş sens sau în sens contrar cu trăsura.

Un alt exemplu: o minge se rostogoleşte în un vagon, care se mişcă el singur pe linia ferată. Altfel va fi mişcarea mingei pentru un observator ce se află în vagon şi altfel pentru unul care e în afară.

Mingea are faţă de vagon o *mişcare relativă*, vagonul are faţa de pământ o *mişcare de antrenare*, iar mişcarea bilei în raport cu pământul va fi *rezultanta absolută a celor două mişcări*.

Să luăm încă un exemplu: Pentru un observator ce stă în trăsură, roţile au o mişcare de rotaţie — *mişcare relativă*. — Pentru un observator situat pe drum, trăsura are o *mişcare de antrenare* iar roţile au *o mişcare absolută, rezultantă* a celor două.

In realitate, un mobil nu poate să aibă decât o singură mişcare: acea *rezultantă*. Mişcarea relativă şi mişcarea de antrenare sunt fictive, cu toate acestea, cunoaşterea *mişcărilor componente* serveşte la determinarea mişcării *rezultante*. Astfel, cunoscând mişcarea mingei faţă de vagon şi a vagonului pe linie, putem în fiecare moment determină mişcarea rezultantă a mingei.

Problema generală se pune în modul următor: *Cunoscând* *mişcarea unui mobil M faţă de un sistem de reper A şi mişcarea sistemului A faţă de un alt sistem de reper B, să se studieze mişcarea mobilului M faţă de sistemul B.*

Vom aveà dar o *mişcare, viteză, acceleraţie relativă* a punctului M faţă cu sistemul A, o *mişcare, viteză, acceleraţie de antrenare* a unui punct din sistemul A faţă de sistemul B şi în fine o *mişcare, viteza, acceleraţie rezultantă* a mobilului M faţă cu sistemul B.

Se poate dovedì că *viteza rezultantă este diagonală paralelogramului construit pe viteza relativă şi cea de antrenare.*

Toate formulele găsite la compunerea forţelor se aplică şi la compunerea vitezelor.

§ 95. **Compunerea a două rotaţii cu axe concurente.**

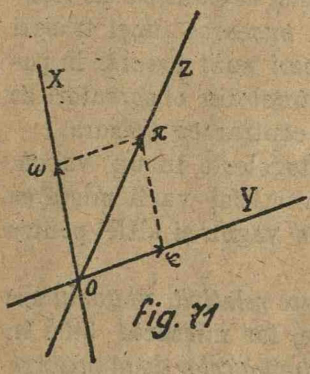


Fig. 71

Fie un solid animat de o mişcare de rotaţie în jurul axei oX cu o viteză unghiulară ω. Să ne închipuim că axa oX este ea însuş animată de o mişcare de rotaţie în jurul unei axe OY cu o viteză unghiulară φ. Ne propunem să studiem mişcarea solidului faţă cu sistemul din care face parte OY (fig. 71).

Fie MU viteza relativă a lui lui M, adică momentul segmentului $O\omega$ (care reprezintă viteza unghiulară în jurul lui ox) faţă cu punctul M (fig. 72). Fie de asemenea Mv, viteza de antrenare care este momentul în raport cu M a segmentului $O\varphi$ (viteza unghiulară în jurul lui OY). Diagonala MV' va fi rezultanta celor două viteze. Dacă considerăm şi rezultanta $O\pi$ a segmentelor $O\omega$ şi $O\varphi$, ştim că momentul ei faţă cu punctul M, este rezultanta momentelor faţă de M, a componentelor $O\omega$ şi $O\varphi$. Dar acest moment este viteza punctului M în o mişcare de rotaţie care s'ar efectuà în jurul unei axe OZ cu viteza unghiulară $O\pi$. Aceasta este dar mişcarea rezultantă.

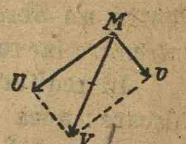
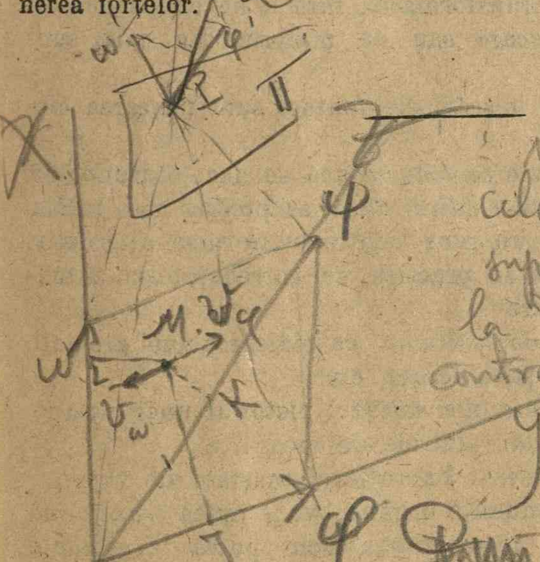


Fig. 72

De aici urmează că: Viteza rezultantă a lui M este aceeaş ca şi cum mobilul ar fi animat de o rotaţie în jurul lui OZ, cu o viteză unghiulară $O\pi$, care este rezultanta vitezelor unghiulare $O\omega$ şi $O\varphi$.

Dacă am aveà de compus mai multe rotaţii, am procedà în acelaş fel cum s'a procedat la compunerea mai multor forţe concurente.

§ 96. **Descompunerea mişcărilor.** Această problemă este inversă celei precedente; ea are de scop găsirea mişcării relative, cunoscànd mişcarea rezultantă şi cea de antrenare. Cum, relaţiile stabilite între cele trei viteze, la compunerea mişcărilor, subsistă, oricare ar fi mişcarea necunoscută, pentru găsirea mişcării cerute vom aplicà aceleaşi regule ca la descompunerea forţelor.



Să considerăm un punct M în planul celor 2 axe. El va fi supus în acelaşi timp la două mişcări de sens contrariu şi direct opuse de viteze $V_\varphi = \varphi . MJ$ şi $V_\omega = \omega . ML$. Punctul M putând fi foarte apropiat de axa OX de rotaţie, evident că $V_\varphi > V_\omega$ şi M se va mişca în domeniul planului cu diferenţa de viteză $V_d = \varphi \overline{MJ} - \omega \overline{ML}$. Când această dif. V_d [illegible] atunci $\frac{M'J'}{M'L'} = \frac{\omega}{\varphi}$ = const. şi locul punctelor M' [illegible] o dreaptă [illegible] OZ [illegible]

...mea geometrică a momentelor segmentelor w și ℓ
raport cu punctul M este egală cu momentul
segmentului ψ în raport cu acelaș punct M, ceia
ce nu-i posibil decât dacă ψ reprezintă în
mărime și direcțiune diagonala paralelogra-
mului construit pe w și ℓ. De aci regula de
construi viteza unghiulară rezultantă.
Pentru a stabili viteza rezultantă a unui punct

CAP. XII

TRANSFORMAREA MIȘCĂRILOR

§ 97. **Definiții.** Până acum am studiat, în parte, diferitele mișcări. Ne rămâne să vedem cum se *transformă* aceste mișcări una în alta și cum se *transmit*. Pentru aceasta avem nevoe de *organele de transmisiune*. Vom descrie în parte principalele organe de transformație, fără a ne ocupà de forțele care le pun în mișcare sau de materia din care sunt compuse.

Cele mai obișnuite mișcări elementare sunt mișcarea *circulară* și *rectilinie*.

Aceste mișcări se zic *continue* dacă se fac totdeauna în acelaș sens; ele se zic *alternative* dacă se produc mai întâiu în un sens, pe urmă în un sens contrariu în mod alternativ.

De aci urmează că, în practică, se întrebuințează următoarele mișcări elementare:

a) *Mișcarea rectilinie continuă:* ca ridicarea unei greutăți, mergerea unui tren pe calea ferată, etc.;

b) *Mișcarea rectilinie alternativă:* pistonul unei pompe

c) *Circulară continuă:* pietrele de moară, etc.

d) *Circulară alternativă:* balanțierul mașinei de vapor.

Cu ajutorul unor anumite organe, vom puteà *transformà* una din aceste mișcări în alta, sau vom puteà *transmite* o mișcare fără a-i modificà natura ei.

Transmiterea sau transformarea se poate face în trei feluri:

a) Prin contactul imediat al pieselor în mișcare: cilindre și conuri de fricțiune, angrenaje, șuruburi.

b) Prin intermediarul legăturilor solide: biele și manivele, paralelogramul lui Watt.

c) Prin intermediarul legăturilor flexibile: scripete, curele, sulul în roată.

în P o axă P... plan π perpendicular în P la

proecţiei lui P pe pl. Π în raport cu un punct
rotească P ad axului şi că momentul în raport
cu punctul P e liniar, reprezentat prin segm
Pω' ⊥ la planul (P, Oω); are proecţia sa pe ax

Vom descrie câteva tipuri din fiecare fel.

§ 98. **Scripete cu curele.** Curelele servesc la transformarea unei mişcări circulare continue în o mişcare circulară continuă, însă în jurul unei alte axe paralele cu cea dintâiu.

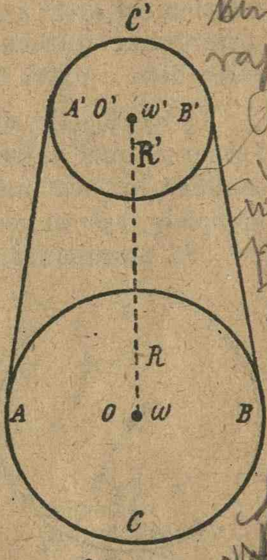


fig. 73

Fie O proecţia axei arborelui motor ce se învâtteşte cu o viteză unghiulară ω (fig. 73). Trebue să transformăm această mişcare în una circulară continuă în jurul unui arbore proectat în O', care să se învârtească cu o viteză unghiulară ω' dată.

Pe amândouă axele se construesc câte un scripete de raze R şi R', astfel ca

$$\frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Pe aceste roţi se face să treacă o *curea de transmisiune*, adică o bandă potrivit de lată, făcută din piele şi ale cărei extremităţi sunt foarte bine legate între ele. Această curea are contact comun cu roţile cât ţine arcele ACB şi A'C'B', restul urmează direcţai tangentelor comune exterioare. Aceste curele trebue să fie flexibile, inextensibile şi nu trebue să lunece dealungul roţilor. Dacă toate aceste condiţii sunt realizate, *raportul vitezelor unghiulare ale celor două roţi este invers cu raportul dintre razele roţilor*, căci nefiind lunecare, viteza curelei este aceeaş în toate punctele ei şi deci şi viteză oricărui punct de pe cele două roţi. Vom avea deci

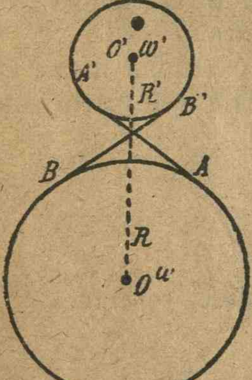


fig. 74

$$R\omega = R'\omega' \text{ de unde } \frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Dacă vitezele unghiulare ω şi ω' sunt de *sens contrar* se duce cureaua după tangentele interioare comune celor două cercuri (fig. 74).

Pentru ca transmisiunea mişcării să se poată face, trebue ca tensiunea curelei să fie de ajuns de mare. Când această tensiune nu-i suficientă, atunci ea se înlocueşte prin lanţuri metalice cu inele în care intră dinţii roţilor. Astfel este de ex. mecanismul întrebuinţat la biciclete pentru a transmite mişcarea dela o roată la cealaltă.

§ 99. **Roţile de fricţiune** servesc, ca şi curelele, la transformarea unei mişcări de rotaţie continuă, în o altă rotaţie continuă în jurul unei axe paralele, însă axele sunt mult mai apropiate, aşà că curelele sunt inutile.

Să presupunem că rotaţiile ω şi ω' sunt de sens contrar şi fie O şi O′ proecţiile axelor pe planul figurei (fig. 75). Vom luà pe O′O un punct A astfel că:

$$\frac{OA}{O'A} = \frac{\omega'}{\omega}$$

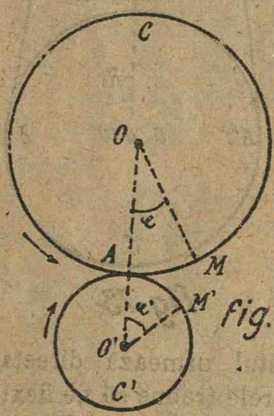


fig. 75

Vom descrie circonferinţele C, C′ cu centrele în O, O′ şi cu razele $OA = R$ şi $OA' = R'$. Să ne închipuim acum că avem două roţi materiale, cilindrice, fixate pe axele O, O′ şi astfel ca secţiunile lor drepte să coincidă cu circonferinţele C, C′. Aceste roţi vor apăsà una pe alta, astfel că învârtindu-se una să o învârtească şi pe cealaltă în sens contrar.

In un moment dat, un punct de pe O şi unul de pe O′ sunt în contact în A. După un timp oarecare, cel întâiu este în M, al doilea în M′, astfel că

$$arc\ AM = arc\ AM'$$

sau, puuând $\varphi = AOM$, $\varphi' = AO'M'$,

$$R\varphi = R'\varphi'$$

de unde, dacă ω şi ω' sunt vitezele unghiulare, vom aveà

$$R\omega = R'\omega'$$

adică

$$\frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}$$

Putem dà o altă formă acestei relații. Fie n și n' numărul învârtiturilor complecte efectuate de cele două roți în unitatea de timp. Vom aveà

$$2\pi R n = 2\pi R' n'$$

sau

$$\frac{R}{R'} = \frac{n'}{n}$$

Dacă cele două rotații trebue să fie de acelaș sens, se caută punctul A în afara lui O O' (cum se vede în fig. 76) și astfel că:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{\omega'}{\omega}$$

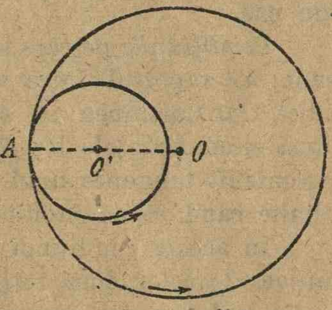


Fig. 76

Pentru a împedicà lunecarea acestor roți de fricțiune, se învălesc în câte o bandă de piele sau de cauciuc.

Acest gen de transmisiune fiind foarte liniștit și fără smunciture se întrebuințează foarte des.

§ 100. **Angrenaje.** Când rezistența ce trebue învinsă pentru a transmite mișcarea, e prea mare, se înlocuește cilindrii de fricțiuni prin *roți dințate*. Fiecare roată este prevăzută la periferie cu *dinți* sau *plinuri* cari sunt despărțiți prin *goluri*. Cele două roți sunt astfel așezate, încât dintele uneia să străbată în golul celeilalte.

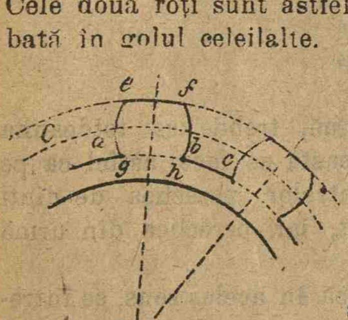


Fig. 77

Se numește *angrenaj* un sistem de două roți dințate în transmisiune. Una este roata *conducătoare*, cealaltă *condusă*.

Elementele unei roți dințate. Dinții sau *plinurile* sunt regulat distribuiți pe circonferința primitivă C (și sunt separați prin *goluri*. Se numește *profilul* unui dinte $g\,a\,e\,f\,b\,h$ secțiunea lui prin un plan perpendicular pe axă.

Porţiunea din profil $aefb$, care e exterioară circonferinţei primitive C, se numeşte *faţa* dintelui; porţiunea $aghb$ interioară circonferinţei C se numeşte *flancul* dintelui. Arcul ab, din circonferinţa C, cuprins de dinte se numeşte grosimea dintelui; arcul bc care cuprinde golul se numeşte interval. Arcul $ac = ab + bc$ = grosimea + intervalul se numeşte *pasul* angrenajului. In teorie, grosimea dintelui este egală cu intervalul; în practică intervalul e mai mare cu $\frac{1}{10}$ aproape din pas.

Condiţiunile pe care trebue să le îndeplinească un angrenaj sunt: *a)* raportul între vitezele unghiulare să fie constant, adică transmisiunea să se facă ca şi cum roţile s'ar atinge după circonferinţele lor primitive; *b)* profilurile dinţilor să fie necontenit tangente unul cu altul. Aceste condiţii sunt îndeplinite când se dă profilului dinţilor o anumită formă.

In aceste condiţiuni, arcele descrise de circonferinţele primitive ale celor două roţi sunt egale, de unde rezultă că pasurile ambelor roţi sunt egale şi că numerele dinţilor sunt proporţionale cu razele circonferinţelor primitive şi invers proporţionale cu vitezele unghiulare.

In adevăr, însemnând cu n şi n' numărul dinţilor celor două roţi şi cu p pasul comun avem

$$np = 2\pi R \qquad n'p = 2\pi R'$$

de unde

$$\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Pentruca mişcarea să fie continuă, trebue ca totdeauna 2 dinţi să fie în contact. Pentru aceasta se face astfel ca pe când doi dinţi se ating pe linia centrelor, perechea de dinţi dinainte încetează de a fi în contact, iar perechea din urmă începe atunci contactul.

Dacă roţile trebue să se întoarcă în acelaş sens, se întrebuinţează *angrenaje interioare*, a căror construcţie se bazează pe aceleaşi principii.

§ 101. **Cremaiera** se întrebuințează pentru transformarea unei mișcări circulară continuă în o mișcare rectilinie continuă. Ea este un caz particular al angrenajelor când raza uneia din roți ar devenì infinită, iar roata s'ar reduce la o bară dințată.

Fie A B o bară aranjată astfel ca să se poată mișcà în sensul lungimei sale și A O o roată mobilă în jurul axei sale O, care e perpendiculară pe A B (fig. 78). Dacă ele sunt suficient de alăturate, roata învârtindu-se, face ca bara să se deplaseze în direcția A B.

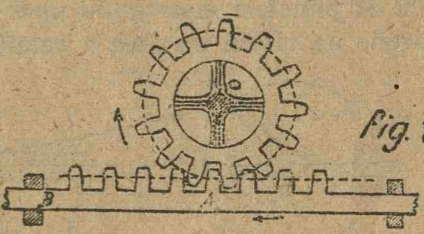


fig. 78

Insemnând cu ω viteza unghiulară a roții și cu v viteza barei vom aveà

$$v = R\,\omega.$$

Pentru a se împedecà alunecarea, se înarmează atât bara cât și roata cu dinți, construită la fel cu acei dela angrenaje.

§ 102. **Biela și Manivela** servesc la transformarea unei mișcări rectilinii alternative în o mișcare circulară continuă. Să presupunem că coada unui piston este animată de o mișcare rectilinie alternativă. Extremitatea sa B se articulează cu o bară A B, care la rândul eĭ se articulează cu o altă bară A O fixă în O și care, din cauza mișcării pistonului, este forțată să se miște circular în jurul lui O. Bara A B se numește *bielă*, iar A O se numește *manivelă*.

Fie $l = AB$ și $r = OA$ și să presupunem $l > r$. Când punctul A este în A_1, punctul B este în B_1, când A descrie semi-circonferința $A_1 A A_2$, punctul B vine în B_2. Punctul A parcurgând cealaltă semi-circonferință, punctul B revine din B_2 în B_1.

Punctul B face dar o cursă de $B_1 B_2 = A_1 A_2 = 2\,r$. Dacă această cursă ar fi mai mică decât $2\,r$, punctul A nu ar puteà descrie circonferința întreagă.

Este de observat că în pozițiile A_1 și A_2 biela se găsește în linie dreaptă cu manivela și deci nu-i poate transmite nici o mişcare. Din această cauză ele se numesc *puncte moarte*. Manivela nu trece peste aceste puncte moarte decât în virtutea viţezei câştigate.

Uneori, pentru a evită efectele punctelor moarte, se întrebuinţează mai multe manivele, de ex., două în unghiu drept, astfel că punctele moarte ale unei manivele să corespundă cu punctele de viteză maximă a celeilalte (fig. 79).

fig. 79

§ 103. **Paralelogramul lui Watt** serveşte la transformarea mişcării *rectiliniei alternative* în *circulară alternativă*. El se compune din două bare OA şi CB mobile în jurul punctelor fixe O şi C. Extremităţile A şi B descriu arce de cerc. Dacă unim aceste două extremităţi prin o *bielă* de o lungime invariabilă A B, se demonstrează că un punct M de pe această bielă descrie o curbă în formă de 8 lungăreţ. Punctul de intersecţie I se află pe dreapta O C care uneşte cele două puncte fixe. O bună porţiune din această curbă deoparte şi de alta a punctului I se confundă aproape cu o linie dreaptă (fig. 80).

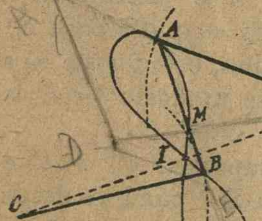


fig. 80

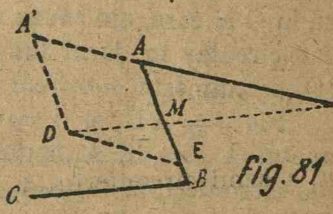


fig. 81

Pentru a utiliză această proprietate se prelungeşte braţul O A cu o lungime oarecare A A′ şi se duce prin A′ o paralelă la biela A B până ce întâlneşte în D dreapta O M. Se formează în fine paralelogramul articulat A A′ D E. Din asemănarea triunghiurilor O A M, O A′ D căpătăm $\frac{OM}{OD} = \frac{OA}{OA'} = \text{const.}$

de unde urmează că și punctul D descrie o curbă asemenea cu aceea descrisă de M. Punctul D va descrie aproape o linie dreaptă.

De obiceiu se ià A A′ = O A, atunci A′ D = A B (fig. 82). Punctul D descrie tot o curbă care pe o bună porțiune se poate confundà cu o linie dreaptă; amplitudinea va fi însă dublă.

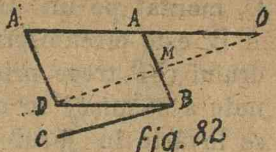


fig. 82

Dacă se limitează rotația brațului O A A′, astfel ca punctul M să descrie numai porțiunea de curba ce se poate asemănà cu o linie dreaptă, se va puteà articulà în D, tija unui piston dela mașina cu vapori, a cărui drum este drept — linear.

§ 101. **Excentricul** servește la transformarea unei mișcări circulare continuă în o mișcare rectilinie alternativă. Excentricele sunt de mai multe feluri.

Excentricul circular cu inel (fig. 83) se compune din un disc-

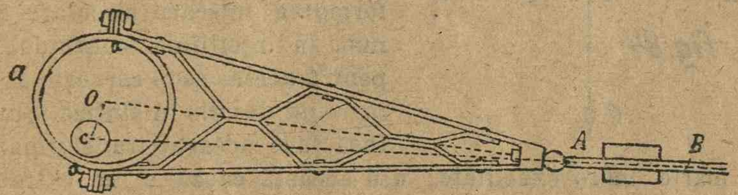


fig. 83

circular de metal, solidar cu un arbore motor C în un punct care e în afară de centrul său O, de aici și numele de *excentric*. Discul este înconjurat de un inel *a a a* care poartă două bare A *a* care servesc ca să lege discul cu extremitatea A a unei tije A B forțată a se mișcà cu o mișcare rectilinie alternativă după direcția B A ce trece prin axa de rotație C.

Lungimile O A și O C neschimbându-se în timpul mișcării, totul se petrece ca și cum punctul A ar fi legat de arborele C prin intermediarul unei biele O A și a unei manivele O C.

Excentricul se întrebuințează mai ales când nu avem nevoe decât de o forță slabă. El se poate aplicà în oricare punct al axei, pe când biela numai la un capăt al axei.

Excentricul circular cu cadru se compune din un disc C, montat pe un arbore O în mod excentric. Un cadru A B A' B' este circumscris acestui disc. In punctele I și I' ale cadrului (I I' trece prin O) sunt fixate două tije I G, I' G' destinate a se mișcà cu o mișcare rectilinie alternativă. Când discul se învârte în jurul lui O el înpinge laturea A B a cadrului până ce O C coincide cu O I, cadrul se mișcă cu totul înspre G până ce laturea A' B' ocupă poziția H H'. (fig. 84).

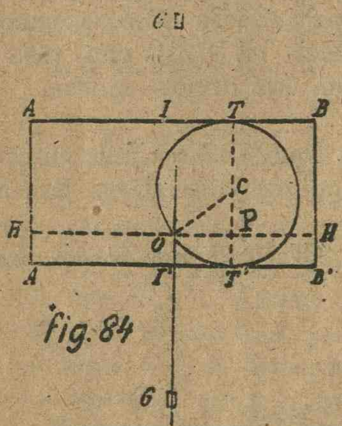


Fig. 84

Din acest moment discul începe a apăsà pe laturea A' B' a cadrului care începe a se mișcà în direcție contrară până ce latura A B ocupă poziția H H' iar O C coincide cu O I', de unde se vede că amplitudinea mișcărei rectilinii este 2 O C.

§ 105. **Șurubul** servește la transformarea mișcării circulare continue în rectilinie continuă. Tot pentru acelaș scop servește și *sulul în roată* descris în statica. Șurubul însă face această transformare cu o foarte mare exactitate; din această cauză el se întrebuințează în multe instrumente de preciziune.

Să considerăm un cilindru circular drept A B care va fi *miezul* șurubului. In planul unei secțiuni ce conține axa cilindrului se desemnează un triunghiu isoscel *a b c* sau un patrat a cărei bază e paralelă cu axa; această figură constitue *profilul* șurubului. Dacă planul său se mișcă în jurul axei cu o mișcare de rotație uniformă, și în acelaș timp axa se mișcă uniform cu o mișcare rectilinie uniformă, acest profil va dà naștere șurubului (fig. 85).

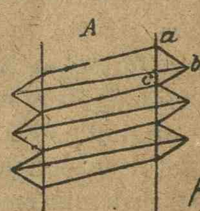


Fig. 85

Șurubul traversează o piesă numită *mutelcă* (piuliță), care prezintă în *gol* aceeaș figură ca și șurubul în *plin*, astfel că șurubul se adaptează exact în mutelcă.

Dacă mutelca e fixă, o rotație dată capătului șurubului comunică extremității sale o mișcare rectilinie. Această dispoziție o avem în *presa de copiat* (fig. 86).

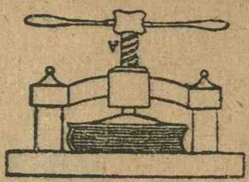


fig. 86

Dacă din contra, șurubul împedicat la capăt, nu poate luà decât numai o mișcare de rotație, atunci mutelca, mobilă și menținută prin vergele paralele cu axa, va aveà o mișcare rectilinie paralelă cu axa. Această dispoziție se găsește la frânele trăsurilor, la mașinele de geluit (dat la rândea).

In fine șurubul poate transformà o mișcare rectilinie în circulară.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

Compunerea şi descompunerea forţelor. Centre de greutate.

1. Să se găsească rezultanta a două forţe dreptunghiulare, ale căror intensităţi sunt de 3 kg. şi 4 kg.

2. Două forţe fac între ele un unghiu de 45° şi au intensităţile 2 kg. şi 3 kg. Să se găsească rezultanta lor.

3. Două forţe au ca intensităţi 3 kg. 758 şi 5 kg. 2795 şi fac între ele un unghiu de 60° 7′ 35″. Care e rezultanta lor?

4. Două forţe fac între ele un unghiu de 70° 35′ 40″ şi au ca intensitate 57 kg. 428 şi 48 kg. 327. Să se găsească forţa unică ce trebue aplicată pentru a le face equilibru, şi unghiurile pe care această nouă forţă le face cu cele date.

5. Să se descompună forţa care are ca intensitate 25 kg. în alte 2 forţe dreptunghiulare, din care una să fie de 7 kg.

6. Să se descompună o forţă de 10 kg. în alte două forţe dreptunghiulare egale.

7. Să se descompună o forţă de 13 kg. în două forţe, a căror sumă să fie minimum.

8. Să se descompună o forţă în alte două egale cu dânsa.

9. Să se descompună o forţă în două altele, cunoscând una din componente în direcţie şi cealaltă în intensitate.

10. Să se descompună o forţă în alte două egale şi făcând un unghiu de 30°.

11. Ce unghiu trebue să facă între ele două forţe de 5 kg. şi 7 kg., pentruca rezultanta să aibă 10 kg.

12. Ce relaţie trebue să existe între două forţe P şi Q

care fac între ele un unghiu de 135°, pentruca rezultanta să fie egală cu cea mai mică.

13. Trei forțe de 6, 8 și 10 kg. își fac equilibru, ce unghiuri fac între ele?

14. Să se găsească rezultanta a trei forțe al căror punct de aplicație este la întâlnirea înălțimelor unui triunghiu, și ale căror extremități sunt vârfurile acestui triunghiu.

15. Să se demonstreze că forțele cari au ca origină vârfurile unui triunghiu, ca direcții, înălțimele lui și intensități proporționale cu lungimele laturilor corespunzătoare, își fac equilibru.

16. Patru forțe au ca origină comună centrul unui pentagon și ca extremități patru din vârfurile acestui poligon. Se cere rezultanta.

17. Care e rezultanta forțelor ce au origina în un vârf al unui exagon regulat și ca extremități celelalte vârfuri

18. Punctele A, B, fiind fixe pe o circomferință și punctul C mobil, să se găsească locul extremității rezultantei forțelor AB și AC. Să se determine poziția punctului C, pentru ca rezultanta să fie maximă sau minimă.

19. Să se arate că rezultanta a trei forțe aplicate în un punct oarecare P din planul unui triunghiu care are ca extremități vârfurile acestuia, trece prin punctul G de întâlnire al medianelor și are ca intensitate 3 PG.

20. Să se descompună o forță în alte 3, cunoscând una din ele și direcțiile celorlalte două.

21. Să se descompună o forță în alte 3, cunoscând una din ele, direcția celei de a doua și intensitatea celei de a treia.

22. Trei forțe OA, OB, OC își fac equilibru. Să se calculeze OB și OC, știind că $OA = 1$, $AOB = 90°$, $COA = 120°$.

23. Trei forțe dreptunghiulare au intensitățile 3, 4, 5. Să se determine rezultanta lor și unghiurile ce le face cu fiecare componentă.

24. Să se descompună o forță a cărei intensitate este 12 în 3 forțe dreptunghiulare egale.

25. Să se descompună o forță de 18 kg. în trei forțe egale, care să formeze între ele unghiuri de câte 60°.

26. Trei forțe P, P', P" au intensitățile 3, 4, 5 și for-

mează între ele unghiurile: $(P\,P')=90^\circ$, $(P\,P'')=60^\circ)$, $(P'\,P'')=45^\circ$. Să se determine rezultanta lor prin proecţiunile ei pe trei axe dreptunghiulare dintre care două din ele sunt P şi P'.

27. Să se descompună o forţă de 6 kg. în trei forţe egale, îndreptate după bisectriţele unghiurilor xoy, yoz, zox.

28. Două forţe paralele şi de acelaş sens au ca intensitate 6 kg. şi 3 kg. şi sunt depărtate de 2 m. Să se găsească intensitatea şi punctul de aplicaţie al rezultantei.

29. Două forţe paralele şi de sens contrar, au intensităţile 5 kg. şi 8 kg., şi sunt depărtate de 3 m. Se cere punctul de aplicaţie al rezultantei.

30. Să se descompună o forţă de 8 kg. în două forţe paralele egale, de acelaş sens, punctele lor de aplicaţie fiind la depărtare de 3 m.

31. Să se descompună o forţă de 10 kg. în două altele paralele, care să fie în raport de 2 la 3, iar distanţa între punctele de aplicaţie de 4 m.

32. Să se descompună o forţă dată în trei altele paralele egale şi de acelaş sens.

33. Să se descompună o forţă dată în alte trei paralele, care să aibă trei puncte de aplicaţie date.

34. Pe o dreaptă sunt 3 puncte equidistante A, B, C, asupra cărora lucrează forţe de 3 kg, 4 kg. şi 5 kg. In ce punct trebue susţinută dreapta, ca să rămână în equilibru?

35. Orice forţă situată în un plan A B C poate fi descompusă în trei forţe, ale căror linii de acţiune sunt tocmai laturile triunghiului A B C. Această descompunere se poate face în un singur fel.

36. Se dă un tetraedru O A B C, în care unghiul O este tridreptunghiu. Să se găsească rezultanta forţelor O A, O B, O C, B C, C A, A B.

37. In cele trei vârfuri ale unui triunghiu sunt aplicate trei forţe paralele, de acelaş sens şi proporţionale cu laturile opuse. Sá se găsească centrul forţelor.

38. In vârfurile unui exagon regulat sunt aplicate şease forţe paralele, de acelaş sens, cari au intensităţăţile 1, 2, 3, 4, 5, 6. Să se găsească centrul lor.

39. Prin un punct luat în planul unui triunghiu, se duc

perpendiculare pe fiecare lature. Pe aceste direcții se iau forțe proporționale cu laturile pe cari sunt perpendiculare. Să se arate că aceste forțe își fac equilibru.

40. Fie E, F, G mijlocurile laturilor unui triunghiu A B C. Să se arate că sistemele de forțe O E, O F, O G și O A, O B, O C sunt equivalente.

41. Pe mijlocurile laturilor unui triunghiu, perpendicular pe ele și în planul lor sunt aplicate forțe proporționale cu laturile. Să se dovedească că ele își fac equilibru dacă sunt îndreptate toate în interiorul sau toate în exteriorul triunghiului.

42. Să se afle centrul de greutate al perimetrului unui paralelogram.

43. Să se afle cgr. al perimetrului unei jumătăți de exagon regulat.

44. Să se afle cgr. al perimetrului unui trapez obținut unind mijlocurile a doua laturi ale unui triunghiu equilateral.

45. Să se afle cgr. al suprafeței unei jumătăți de exagon regulat.

46. Să se afle cgr. al suprafeței poligonului format de un patrat și un triunghiu equilateral ce au o lature comună.

47. Fiind dat un patrat A B C D, să se găsească în interiorul lui un punct M astfel că scăzând partea A M D, punctul M să fie cgr. al părții rămase.

48. Să se arate că trei forțe aplicate în cgr. al unui triunghiu și reprezentate în mărime și direcție prin dreptele ce unesc acest punct că vârfurile triunghiului, își fac equilibru.

49. Să se arate că își fac equilibru cele patru forțe reprezentate în mărime și direcție prin dreptele ce unesc centrul de greutate al unui tetraedru cu vârfurile lui.

50. Să se găsească centrul a 4 forțe paralele de intensitățile 1, 2. 3, 4 aplicate în cele 4 vârfuri ale unui tetraedru.

51. Pe laturile unui triunghiu dreptunghiu se construesc patrate. Să se afle centrul de greutate al celor 12 linii ale figurei.

52. Să se afle centrul de greutate al suprafeței rămase când din un exagon regulat se scoate 1, 2. 3, 4, 5 triunghiuri.

53. Un triunghiu isoscel A B C se poate învârtì în jurul unei axe orizontale situată în planul său, paralelă cu baza și

trecànd prin punctul O situat pe înălțimea AH la $\frac{1}{3}$ de vàrf. Ce forță trebue aplicată în punctul A, pentruca triunghiul să rămână orizontal sub acțiunea acestei forțe și a greutății sale.

54. Se dă un paralelipiped $ABCD$, $A'B'C'D'$ se cere să se reducă sistemul de forțe, AA', BB', CC', DD' AB, BC, CD, DA, $A'D$, $D'C'$. $C'B'$, $B'A'$.

55. Un sistem de forțe poate totdeauna să se reducă la șease forțe ce lucrează dealungul laturilor unui tetraedru dat.

56. Să se reducă un sistem de forțe la două forțe, una aplicată în un punct dat și alta situată în un plan dat.

57. Se poate în o infinitate de moduri, descompune un sistem de forțe în două forțe egale.

58. O bară OA, a cărei lungime este l și greutate P. este mobilă în jurul punctului O; de extremitatea A este legat un fir ce se menține orizontal și care se întinde cu o forță F. Să se calculeze unghiul barei cu verticala când este equilibru și reacțiunea în punctul O.

59. Un triunghiu fără greutate este suspendat în unul din vârfurile sale A. In vârfurile B și C lucrează greutățile P și Q Să se calculeze unghiul dreptei BC cu orizontala.

60. Un unghiu drept BAC greu, este mobil în jurul lui A, astfel că $AB = a$, $AC = b$ el rămâne necontenit în planul vertical ABC. Să se calculeze unghiul cu orizontala a laturei AC în poziția de equilibru. Presupunând $a < b$ să se determine intensitatea forței ce trebue suspendată în B, pentruca în noua poziție de equilibru punctele B și C să aibă aceeaș înălțime. Să se calculeze în acest din urmă caz reacțiunea punctului A.

61. In mijlocul M al laturei AB a unui triunghiu equilateral vertical ABC este legat un fir de lungime $OM = l$ a cărui extremitate O este fiixată de un zid vertical z.

Tensiunea firului dă loc la o forță T aplicată în M, vàrful A se sprijină fără frecare pe zid. Se cere poziția de equilateral

Maşini simple.

62. In o bară dreaptă AOB fixă în O, avem $A\Theta = 2BO$ în punctul B lucrează o rezistență $Q = 30$ kgr., în A i se

aplică o putere P care face cu rezistența Q un unghiu de 60°
Se cere intensitatea lui P pentru a fi equilibru.

63. O scândură omogenă A B suportă în A o greutate de 30 kg. și în B una de 80 kg., ea stă în equilibru sprijinită în un singur punct C astfel ca A C = 2^m, B C = 1^m.4. Se cere greutatea scândurei.

64. O bară omogenă dreaptă A B, mobilă în jurul punctului A face cu orizontala un unghiu de 30°. Care este forța F perpendiculară pe bară aplicată în B care o ține în equilibru în această poziție știind că la 0^m.50 de A este suspendată o greutate de 20 kg. Bara cântărește 2 kg. și are o lungime de 1^m.10.

65. Punând un corp în talgerul unei balanțe, în celălalt trebue pus 1 kgr. pentru a-l equilibrà. Dacă punem corpul în talgerul celălalt, în primul va trebuì să punem 100 grame mai mult. Se cere raportul între brațele acelei balanțe și adevărata greutate a corpului.

66. Un fir flexibil, a cărei greutate e de 400 gr. la metru, are 12 metri de lungime și de capete atârnă greutăți de 7 kg. și 9 kg. Să se așeze acest fir în equilibru pe gâtul unui scripete și să se calculeze lungimea fiecărei părți.

67. Cu ce forță se poate susține o greutate de 100 kg. cu ajutorul unui scripete mobil, dacă cele două părți ale funiei fac un unghiu drept.

Cinematică.

68. Două mobile A și B se mișcă pe aceeaș dreaptă în acelaș sens, cu vitezele constante v și v'. La origina timpului distanța între ele erà d. Să se arăte la ce epocă se vor întâlni. Cazul când se mișcă în sens contrar. Discuția complectă.

69. Un mobil M descrie dreapta A B cu viteza v; un al doilea mobil M', pleacă din un punct C, situat în afară de A B, cu o viteză v'. In ce direcție trebue să se miște M' pentru a întâlni pe M.

70. Două mobile A și B se mișcă pe două axe dreptunghiulare, îndreptându-se către origina O cu vitezele v și v'. Dacă în momentul inițial O A $= a$, O B $= b$, la ce epocă aceste două mobile vor fi mai apropiate unul de altul.

71. Două mobile se mişcă respectiv pe două drepte concurante, cu vitezele v şi v'. Se cere locul mijlocului dreptei ce uneşte în fiecare moment aceste două mobile.

72. Două mobile A şi B pleacă în acelaş timp din un punct O şi se mişcă uniform pe axele dreptunghiulare Ox, Oy, cu vitezele v şi v'. Să se demonstreze că dreapta AB rămâne paralelă cu ea însăşi.

73. Să se determine pe dreapta OA un punct M, astfel că un mobil plecând din O şi parcurgând OA cu viteza v, să ajungă în M în acelaş timp cu un alt mobil care pleacă din P în momentul când întâiul pleacă din O şi care descrie dreapta PM cu viteza $\frac{v}{2}$. Cum trebue să se aleagă P, pentruca drumurile să fie perpendiculare.

74. Două mobile M şi M' se mişcă cu vitezele v şi v' pe OX, plecând amândouă în acelaş moment din O. Un punct P este dat pe OY, perpendiculara pe OX. După cât timp se va vedeà din P, distanţa MM' sub un unghiu maximum. In care caz, acest unghiu maximum este de 45^0.

75. Să se calculeze viteza şi acceleraţia în o mişcare rectilinie variată, ştiind că equaţia mişcării este $x = a \sin^2 t$.

76. O dreaptă AB de lungime constantă, se mişcă astfel că extremităţile sale alunecă pe două drepte dreptunghiulare Ox, Oy. Extremitatea A descrie pe Ox cu o mişcare uniformă. Care este equaţia mişcării lui B?

77. In cât timp un corp va ajunge la fundul unei fântâni de 400 metri adâncime? $g = 9$ m. 8.

78. Dela ce înălţime a căzut un corp care are o viteză de 50 m.?

79. Cu ce viteză trebue aruncat un corp vertical de sus în jos, pentruca în 3 secunde să parcurgă 100 metri.

80. Un cerc de 10 metri rază este parcurs cu o mişcare uniformă în 3 ore de către un mobil. Să se calculeze viteza şi acceleraţiunea mobilului.

81. Două mobile M şi P descriu respectiv două cercuri astfel ca centrul A al unuia să fie pe circonferinţa celuilalt cu centru în B. Cele două mobile M şi P rămân necontenit în linie dreaptă cu centrul A. Să se dovedească că dacă mişcarea unui mobil este uniformă şi cealaltă e uniformă.

82. O dreaptă O A trecând prin un punct fix O se învârteşte în jurul acestui punct în un plan fix, făcând 10 învârtituri pe secundă. Să se calculeze viteza unghiulară a dreptei.

83. Un mobil se mişcă uniform pe un cerc de 10 m. rază, făcând trei învârtituri pe minut. Să se calculeze viteza unghiulară şi acceleraţia, luând ca unităţi centimetru şi secunda.

84. Un înnotător, care face 40 metri pe minut, vreà să traverseze un râu care are o viteză de 50 metri pe minut. In ce direcţie trebue să apuce pentru ca plecând din un punct O să ajungă pe celălalt mal în un punct A.

85. Un vapor, care are o viteză de 6 km. pe oră, merge pe un râu care are o viteză de un metru pe secundă. Ce distanţă va parcurge pe oră dacă se sue şi ce distanţă dacă se coboară?

86. Două trenuri merg în sens contrar cu viteze de 18 km. şi 24 km. pe oră. Un voiajor din primul tren observă că trenul al doilea a trecut în 13 secunde; care erà lungimea trenului al doilea?

87. Un mobil M se mişcă uniform pe o dreaptă $x' x$ cu o viteză v; un alt mobil M' pleacă din un punct A exterior dreptei, se deplasează cu o mişcare rectilinie uniformă de viteză v'. In ce direcţie trebue să se mişte M' pentru a ajunge pe M.

FINE

TABLA DE MATERII

CAP. I.

Definiţii. Principii. Forţe.

Pagina

§ 1 — § 10. Definiţia şi împărţirea Mecanicei. — Sisteme de puncte. — Mişcare şi Repaus. — Principiul inerţiei. — Forţa şi elementele ei. — Equilibru. — Dinamometre . . . . 5—10

PARTEA I

STATICA

CAP. II.

Forţe concurente.

§ 11 — § 28. Principicle staticei. — Teoreme fundamentale. — Compunerea forţelor. — Paralelogramul forţelor. — Relaţiuni intre forţe şi rezultanta lor. — Descompunerea forţelor . . . . . . 11—21

CAP. III.

Forţe paralele.

§ 29 — § 34. Compunerea forţelor paralele. — Descompunerea lor . . . 22—30

Pagina

CAP. IV.

Momentele forţelor.

§ 35 — § 37. Definiţii. — Teorema lui Varignon faţă cu un punct, plan sau dreaptă . . . . 31—35

CAP. V.

Centrul de greutate.

§ 38 — § 56. Definiţii. — Metode generale. — Teoreme. — Aplicaţiuni imediate. — Perimetrul şi suprafaţa unui triunghiu. — Trapez. — Patrulater. — Prizma. — Piramida. . . . . 36—46

CAP. VI.

Forţe oarecare. Echilibrul unui solid.

§ 57 — § 62. Reducerea forţelor la trei sau la două. — Echilibrul unui solid liber, mobil în jurul unui punct fix, unei axe fixe, pe un plan fix . . . . 47—50

CAP. VII.

Maşini simple.

§ 63 — § 81. Definiţii. — Pârghii. — Balanţe. — Scripete. — Mufle şi palanuri. — Vârtejul. — Roate cu angrenaj. — Planul înclinat. — Pana de despicat lemne . . . . 51—68

PARTEA II

CINEMATICA

CAP. VIII.

Definiţii.

§ 82 — § 84. Unitatea de lungime şi de timp. — Traectorie, legea mişcării . . . . 69—71

CAP. IX.

Mişcare rectilinie.

§ 85 — § 90. Mişcare rectilină uniformă şi variată. — Viteză şi acceleraţie. — Mişcare uniform variată. — Legea căderei corpurilor. . . . . 72—78

Pagina

CAP. X.

Mişcare curbilinie.

§ 91 — § 93. Viteză şi accelerație. — Mişcare de rotație uniformă. — Rotația unui corp solid . . . . 79—84

CAP. XI.

Mişcare relativă.

§ 94 — § 96. Mişcare, viteză, accelerație relativă, de antrenare absolută. — Compunerea a două rotații. — Descompunere mişcărilor . . . . 85—87

CAP. XII.

Transformarea mişcărilor.

§ 97—§ 105. Transformare şi transmitere. — Scripete cu curele. —Roți de fricțiune. — Angrenaje. — Cremaieră. —Biela şi Manivela.— Paralelogramul lui Watt. — Excentric. — Şurubul. — Presa de copiat . . . . 88— 97
Exerciţii şi probleme . . . . 99—106