[illegible] der Sammlung [illegible]
[illegible] am Schluß dieses Bandes

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Künstlerischer Wandschmuck

für Haus und Schule. Farbige Künstlersteinzeichnungen

Größere Blätter: Bildgröße 100×70 cm und 75×55 cm M. 5.— und M. 6.—

Erschienen sind ca. 75 Blätter, darunter:

Bantzer, Abend.
Bergmann, Seerosen.
Biese, Hünengrab—Im Stahlwerk b. Krupp.
Conz, Schwarzwaldtanne.
Dettmann, Vulkanwerft bei Stettin.
Du Bois-Reymond, Att. Landsch. (Akropolis).
Eichrodt, Droben stehet die Kapelle.
Fikentscher, Krähen im Schnee.
Genzmer, Volkslied.
Georgi, Ernte — Pflügender Bauer.
Hecker, Am Meeresstrand.
Hein, Im Wasgenwald — Am Webstuhl.
Hoch, Fischerboote — Gletscher — Kiefern.
Kampmann, Mondaufgang.
Kampmann, Abendrot — Herbstabend.
Kanoldt, Eichen.
Leiber, Sonntagsstille.
Liner, Abendfrieden.
Matthaei, Nordseeidyll.
Munscheid, Winternacht.
Orlik, Rübezahl — Hänsel und Gretel.
Otto, Christus u. Nikodem. Maria u. Martha.
Paczka, Reigen.
Roman, Paestum — Röm. Campagna.
Schacht, Einsame Weide.
Schinnerer, Waldwiese — Winterabend.
Schramm-Zittau, Schwäne.
Strich-Chapell, Lieb Heimatland ade — Herbst im Land — Dorf in Dünen — Frühlingsgäste — Mondnacht.
Süß, Sankt Georg.
Voigt, Kirchgang.
v. Volkmann, Wogendes Kornfeld.
Wieland, Matterhorn — Letztes Leuchten.

Kleinere Blätter:

Bildgröße 41×30 cm. Erschienen sind ca. 30 Blätter, je M. 2.50, darunter:

Beckert, Sächsische Dorfstraße.
Bendrat, Aus alter Zeit — St. Marien in Danzig — Jakobskirche in Thorn — Ordensburg Marienwerder — Die Marienburg — Ruine Rheden.
Biese, Christmarkt — Einsamer Hof.
Daur, Beschneite Höhen — Kapelle.
Fikentscher, Maimorgen.
Hein, Das Tal.
Hildenbrand, Was der Mond erzählt.
Kampmann, Herbststürme — Feierabend.
Luntz, Altes Städtchen.
Ortlieb, Herbstluft.
Petzet, Am Stadttor.
Strich-Chapell, Blühende Kastanien.
Strich-Chapell, Heuernte.
v. Volkmann, Frühling auf der Weide.
Zeising, Dresden. [Herbst in der Eifel.
Leinwandmappe m. 10 Bl. n. Wahl M. 28.—
Kartonmappe m. 5 Blätt. n. Wahl M. 12.—

Bunte Blätter:

Kleinste Künstlersteinzeichnungen.

Blattgröße 33×23 cm.

Erschienen sind ca. 20 Blätter, je M. 1.—, darunter:

Biese, Verschneit.
Daur, Am Meer.
Fikentscher, Am Waldesrand.
Glück, Morgensonne im Hochgebirge.
Hildenbrand, Stilles Gäßchen.
Kampmann, Baumblüte — Bergdorf.
Knapp, Unter dem Apfelbaum.
Matthaei, In den Marschen.
Schroedter, Bergschlößchen.
In Furnierrahmen . . . . . M. 1.80
In massivem Rahmen . . . . . M. 3.—
Leinwandmappe mit 10 Blättern nach Wahl . . . . M. 12.—
Kartonmappe mit 5 Blättern nach Wahl . . . . M. 5.—

Wand-Friese:

Bildgröße 105×44 cm je M. 4.—

Rehm-Vietor, Wer will unter die Soldaten — Wir wollen die goldene Brücke bauen — Schlaraffenland — Schlaraffenleben — Englein z. Wacht — Englein z. Hut.
Lang, Um die Wurst — Heiteres Spiel.
Herrmann, Im Moor — Aschenbrödel — Rotkäppchen.
Rahmen v. M. 2.— bis M. 17.— laut Katalog.

Porträts: Größe 60×50 cm M. 3.—

Bauer, Goethe — Schiller — Luther.
Kampf, Kaiser Wilhelm II.
Bauer, Kleines Schillerbild. Größe 19×29 cm. Preis 1 M., in Furnierrahmen 2 M., in massivem Rahmen 3 M.

Rahmen: Zu d. größ. Blättern M. 3.80 bis M. 17.— zu d. kleineren M. 2.— bis 4.—

Die „Melancholie“ von Dürer.

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

170. Bändchen

Mathematische Spiele

Von

W. Ahrens

Dr. W. Ahrens

in Magdeburg

Mit einem Titelbild und 69 Figuren im Text

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig 1907

B. G. Teubner

Das, sollte ich meynen, ließe sich wohl aus der Erfahrung darthun, daß auch bey Vielen, die nie den Namen Mathematik gehört haben, eine große Menge von Vergnügungen mathematisch ist. Alle Spiele, die ungleich voll von Nachdenken, in langer Ordnung vom Schach bis tief unter das Pochen hinunter gehen, vergnügen, weil man bey ihnen rechnet, und Fontenelle hat sie längst für eine natürliche Algebra erklärt.

A. G. Kästner.
„Über den Werth der Mathematik, wenn man sie als einen Zeitvertreib betrachtet," Ges. schönwissensch. Werke, III, Berlin 1841, p. 83.

Vorwort.

Das vorliegende Büchelchen gibt eine Auswahl von mathematischen Spielen und zwar solche, die mir einerseits besonderes Interesse zu verdienen schienen, andererseits sich für diejenige Darstellung eigneten, welche ich mir für dieses Buch vorgesetzt hatte. Um nämlich niemanden, auch den der Mathematik völlig Unkundigen, von der Lektüre auszuschließen, habe ich nirgends irgend welche mathematische Kenntnisse beim Leser vorausgesetzt. Die durch diese Rücksicht bedingte Darstellung gestaltete sich zwar an einzelnen Stellen etwas breiter, während an anderen wenigen Stellen auf strenge Beweisführung verzichtet werden mußte Ich hoffe jedoch, daß man diese Mängel nicht als erhebliche empfinden, sie vielmehr als durch den gewonnenen Vorteil entschuldigt ansehen wird. Wem trotz dieser im weitesten Sinne populären Darstellung mangels ausreichender allgemeiner logischer Schulung die Lektüre Schwierigkeiten verursacht, dem kann nur der Rat gegeben werden, welchen ein berühmter französischer Mathematiker einem Anfänger gegeben haben soll: „Gehen Sie nur weiter, junger Mann, die Überzeugung wird schon nachkommen.“ Selbstverständlich hat D'Alembert, dem dies Wort zugeschrieben wird, damit nicht einem Umherspringen von einer Frage zur anderen, von einem Kapitel zum anderen das Wort reden wollen, sondern der Leser wird gut tun, neben dem obigen Wort folgenden damit durchaus verträglichen Ausspruch eines deutschen Gelehrten zu beherzigen: „Man muß nie denken, dieser Satz ist mir zu schwer, der gehört für große Gelehrte, ich will mich mit den andern hier beschäftigen; das ist eine Schwachheit, die leicht in eine völlige Unthätigkeit ausarten kann. Man muß sich für nichts zu gering halten."

Um das Mitarbeiten des Lesers mehr zu beleben, habe ich einige fortlaufend durch das Buch numerierte Fragen beigegeben, die durchweg so einfach sind, daß der Leser, der mit Verständnis gefolgt ist, sie selbständig wird beantworten können. Die am Schlusse gegebenen Antworten sollen daher mehr der Beruhigung des Lesers als einem Bedürfnis dienen. Literaturnachweise erschienen bei dieser Behandlung des Stoffes nicht angebracht; wer sie sucht, wer zugleich eine gründlichere und umfassendere Behandlung dieses ganzen Gebietes einschließlich seiner Beziehungen zu rein mathematischen Fragen und eine strengere mathematische Darstellung wünscht, sei auf meine im gleichen Verlage erschienenen „Mathematischen Unterhaltungen und Spiele" verwiesen.

Magdeburg, den 12. Mai 1907.

Ahrens.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Mit „Spiel“ pflegen wir eine Beschäftigung zu bezeichnen, die wir nicht eines bestimmten nützlichen Zweckes wegen, sondern lediglich zu unserer Unterhaltung, unserem Vergnügen, unserer Zerstreuung, unserer Erbauung entweder selbst vornehmen oder von anderen vornehmen lassen. Wir sprechen so von dem „Spiel“ der Kinder, dem „Spiel“ des Musikers, dem „Spiel“ auf dem Theater usw.

Daß das Spiel oft auch einen bildenden Wert, selbst einen bedeutenden bildenden Wert hat, widerspricht unserer Definition durchaus nicht; man darf vielmehr, wie dies geschehen ist, in gewissem Sinne die Wissenschaft selbst als ein „Spiel“ bezeichnen. — Das vorliegende Büchelchen enthält nur Spiele und erwartet vom Leser, daß er mitspielt. Ein Teil der darin behandelten Spiele erfordert, obwohl dies keineswegs ein Erfordernis des Spiels an sich ist, bei praktischer Ausführung die Beteiligung von mindestens einer zweiten Person und kommt dann zumeist auf einen Wettstreit zwischen den beiden Spielenden hinaus.

Während dem Spielenden an sich ein bestimmtes Ziel nicht vorzuschweben braucht, ist dies bei vielen Spielen und bei den im vorliegenden Buche behandelten ausschließlich der Fall. Die Erreichung dieses Ziels kann, wie bei den reinen Glücksspielen, lediglich vom Zufall abhängen, sie kann aber auch bedingt sein durch manuelle Fertigkeiten oder durch eine geistige Leistung, sowie auch durch Zusammenwirken dieser verschiedenen Faktoren. Die „mathematischen“ Spiele bilden im ganzen wohl den schroffsten Gegensatz zu den reinen Glücksspielen, obwohl auch bei ihnen die Einwirkung der Mächte des Zufalls nicht vollständig ausgeschlossen zu sein braucht.[1]) Wir werden als

---

1) Bei dem Nim-Spiel (Kap. VII) z. B. werden die Spieler die Bestimmung der Anfangsstellung dem Zufall überlassen. Falls beide Spieler die mathematische Spieltheorie fehlerfrei handhaben, hängt der Ausgang des Spiels lediglich von der Anfangsstellung ab und das Spiel ist dann sogar ein reines Glücksspiel.

„mathematisch“ nämlich ein Spiel bezeichnen, das zu seinem Betrieb eine geistige Tätigkeit erfordert, bei der Methoden und Schlußweisen nach Art der in der Mathematik üblichen zur Anwendung gelangen oder doch bei verständigem Spielbetrieb gelangen müssen. Der mathematische Charakter des Spiels wird um so vollkommner sein, je mehr solche mathematischen Elemente das ganze Spiel für sich allein beherrschen. Die mathematische Behandlung eines Spiels ist natürlich — ebenso wie auch die Mathematik selbst — nicht unbedingt an eine bestimmte technische Sprache, dargestellt durch Zeichen, Formeln, eine bestimmte Terminologie usw., gebunden. Diese Dinge sind vielmehr stets nur aus Rücksichten geistiger Ökonomie geschaffen und daher allerdings bei den schwierigeren Fragen der mathematischen Wissenschaften dem menschlichen Geiste, der die verborgenen Wahrheiten nicht unmittelbar zu erkennen vermag, sondern zu ihnen nur an der Hand geistiger Krücken vorzudringen in der Lage ist, absolut unentbehrlich, ja bisweilen können zweckmäßige Festsetzungen in diesen Äußerlichkeiten ausschlaggebend für die ganze weitere Entwickelung des betreffenden Wissenschaftsgebietes sein. Für die hier behandelten Materien, welche ausschließlich von der allerelementarsten Art sind, fällt dies Moment jedoch fort, so daß wir hier, ohne uns einen erheblichen Zwang anzutun, von einer technisch-mathematischen Darstellungsweise absehen können.

Es sei gestattet, das Wesen eines mathematischen Spiels an einem Beispiel zu erläutern, wofür wir das bereits soeben (in Anm.) zitierte Nim-Spiel wählen wollen: Eine relativ einfache Theorie, die, wenn auch ohne die Kunstsprache des Mathematikers darstellbar, von ausgeprägt mathematischem Charakter ist, lehrt, daß es ein unbedingt zum Siege führendes Verfahren gibt, durch das in der großen Mehrzahl der Fälle der anziehende Spieler sich sogar bereits mit dem ersten Zuge den Sieg sichern kann. Die Kenntnis dieser Theorie verschafft daher dem Spielenden gegenüber einem der Theorie unkundigen Gegner, mag dieser an sich in dergleichen Spielen nicht ungeübt und selbst scharfsinnig sein, zunächst eine Überlegenheit, welche der einer mit den modernsten Feuerwaffen ausgerüsteten Truppe gegenüber einem Haufen mit Pfeil und Bogen bewaffneter Wilden gleichkommt.

Dabei sind es durchaus nicht gerade die kompliziertesten Spiele, die vom mathematischen Standpunkte das größte Interesse verdienen; denn eine abschließende, alle überhaupt möglichen Fälle umfassende Theorie ist für solche Spiele, unter denen das Schach als das wohl komplizierteste und jedenfalls bilderreichste obenan steht, kaum denkbar und wird insbesondere für das Schach auch schwerlich jemals gewonnen werden, wir meinen eine Theorie, welche genau für jede nur denkbare Position den absolut besten Zug angeben würde und welche etwa als Resultat ergeben würde, daß der Anziehende stets siegen muß oder, was wohl wahrscheinlicher ist, die Partie — auch bei absolut korrektem Spiel des Gegners — stets unentschieden machen kann. Zwar hat man verschiedentlich versucht, auch die Mathematik der Schachtheorie dienstbar zu machen, jedoch wird man diese Versuche als mißlungen ansehen dürfen, soweit es sich um die „Theorie" in dem oben erläuterten Sinne handelt. Denn was soll man überhaupt unter einer „mathematischen" Behandlung der Schachtheorie verstehen? Eine solche müßte sich von der Schachtheorie im gewöhnlichen Sinne dadurch unterscheiden, daß sie alle bei einer gegebenen Stellung überhaupt nur möglichen Züge in den Bereich ihrer Erwägungen zöge; dies übersteigt aber menschliches Können überhaupt. Ist doch, um nur ein Beispiel anzuführen, die Zahl aller verschiedenen nach 2 Zügen (2 von jeder Seite) möglichen Positionen bereits größer als 70 000, wenn auch die meisten dieser Kombinationen mehr oder minder fehlerhafte Züge enthalten werden. Vorläufig erscheint es jedenfalls ganz aussichtslos, durch Benutzung spezifisch mathematischer Hilfsmittel oder Denkprozesse eine Abkürzung dieses Verfahrens zu erreichen. Vielmehr würde, wenn man etwa an die Stelle der einfachen und übersichtlichen Gangarten der Figuren, des Mat usw. komplizierte Formeln setzen und mit diesen gewisse Rechnungs-Algorithmen ausbilden wollte, wie teilweise versucht ist, Arthur Schopenhauer nur Recht bekommen mit seinem bekannten Ausspruch, daß der Mathematiker einem Menschen gliche, der sich seine gesunden Beine abschneide, um sich statt deren hölzerne ansetzen zu lassen — so unberechtigt dies Wort des mathematikerfeindlichen und wenig mathematikverständigen Philosophen auch sonst ist. Eine vollständig erschöpfende Berücksichtigung aller nur möglichen Kombinationen würde dem praktischen Schachspieler auch einen unverhältnismäßigen Aufwand an Zeit und Kraft bedeuten, vielmehr scheidet sein taktischer Blick eine große Zahl offenbar fehlerhafter oder wertloser Züge von vornherein aus und läßt ihn seine ganze Kraft denjenigen zuwenden, die im Bereich des Möglichen liegen und deren Konsequenzen daher so weit wie möglich zu verfolgen sind: er gleicht einem Wanderer, der auf seiner Wanderschaft eine große Stadt passiert und sich ein Bild von dieser verschafft, indem er der Flucht der Hauptstraßen folgt, Lage und Aussehen der hervorragendsten und merkwürdigsten Gebäude sich genau einprägt und dann seine Wanderschaft fortsetzt, während ein anderer sich vornimmt, die Stadt nicht früher zu verlassen, als bis er jede, auch die offenbar unbedeutendste Straße passiert und jedes einzelne Haus betrachtet hat, hierbei allerdings vielleicht einmal eine Merkwürdigkeit entdeckt, welche dem ersteren entgangen, andererseits aber von Zeit zu Zeit sich in Sackgassen festrennt und einen unverhältnismäßig viel längeren Aufenthalt nehmen muß oder überhaupt ganz hängen bleibt. Daß mit einer erschöpfend mathematischen Theorie das Interesse an dem Schachspiel in der Hauptsache aufhören oder doch wenigstens einen anderen Charakter annehmen würde, da der Reiz gegenwärtig gerade darin besteht, daß durch die unermeßlich große Zahl von Kombinationen einer abschließenden Behandlung vorgebeugt ist, sei hier nur beiläufig bemerkt.

Ein Beispiel eines Spiels, das gleichfalls — wenigstens in Deutschland — auf den 64 Feldern des Schachbretts gespielt wird und für das eine abschließende Theorie existiert, ist das unter dem Namen „Schaf und Wolf“ bekannte. Für dieses unvergleichlich viel einfachere und nicht im entferntesten so abwechselungsvolle Spiel läßt sich unter Berücksichtigung aller überhaupt möglichen Fälle zeigen, daß und wie der Führer der als „Schafe“ bezeichneten Steine stets gewinnen muß, ein Beweis, den man führt, indem man eine erschöpfende Liste aller nur möglichen Fälle in zweckmäßig systematischer Anordnung aufstellt und für jeden Fall den resp. die richtigen Züge angibt. Vom Standpunkt des Mathematikers bietet dies Verfahren jedoch kein besonderes Interesse, da keinerlei der Mathematik besonders eigentümliche Schlußweisen dabei zur Anwendung kommen, das Verfahren vielmehr einer Art von Statistik fast mehr ähnelt als einem mathematischen.

Kapitel I.

Wettspringen.

Den Reigen wollen wir eröffnen mit einem ganz besonders einfachen Spiel, dem folgenden:

Eine Person A nennt eine beliebige Zahl, jedoch höchstens 10; eine zweite Person B nennt darauf eine größere Zahl, die mindestens um 1 und höchstens um 10 größer ist als die von A genannte. Dann nennt wieder A eine Zahl, die mindestens um 1 und höchstens um 10 größer ist als die zuvor von B genannte und so abwechselnd fort. Sieger ist derjenige, der gerade 100 erreicht. Läßt sich der Sieg erzwingen und gegebenenfalls: wie und für wen von beiden?

Man kann dem Spiel natürlich auch folgende anschaulichere Einkleidung etwa geben:

Zwei Knaben A und B, von denen jeder höchstens 10 Fuß weit zu springen vermag, wollen in abwechselndem Sprunge eine gegebene Bahn von 100 Fuß Länge zurücklegen und dabei folgende Regeln beobachten: Jeder muß jedesmal mindestens 1 Fuß weit springen. A beginnt und B springt alsdann von der Stelle aus, bis zu der A gekommen ist, dieser wieder von der Stelle ab, bis zu der B kam usw. (Hierbei wird jedoch, wenn die Sprungweite sich nach Bruchteilen von Fuß mißt, nur die nächst kleinere ganze Zahl gerechnet, z. B. statt $5^3/_4$ F. nur 5 F.) Sieger ist derjenige, der gerade das Ende der Bahn erreicht.

Nach wenigen Versuchen bemerken die Spieler, daß der Zielpunkt 100 mit Sicherheit für denjenigen erreichbar ist, der

Fig. 1.

zuvor auf 89 gelangt ist (s. Fig. 1). Denn wenn der eine, sagen wir A, gerade bis 89 gekommen ist, so trennt den Gegner B vom Ziel noch eine Distanz, welche seine maximale Leistungsfähigkeit noch um 1 Fuß übersteigt. B selbst kann also mit dem nächsten Sprunge das Ziel nicht erreichen; andererseits ist er aber nach der Spielregel verpflichtet, mindestens 1 Fuß weit zu springen. Mag er nun bis 90, 91, 92 . . . oder im äußersten Falle bis 99 springen, in jedem Falle kann A mit dem nächsten Sprunge das Ziel erreichen.

Ist nun das Ziel 100 von 89 aus mit Sicherheit zu erreichen, so ist 89 wieder von 78 aus sicher zu erreichen, und so geht dies offenbar fort durch Stufen von je 11, also durch 67, 56 . . . bis 12 und schließlich 1. Hieraus folgt, daß der Sieg erzwungen werden kann und zwar von demjenigen, der bei dem Spiel beginnt. Er muß nur zuerst 1 Fuß weit springen, beim nächsten Male auf 12 kommen, dann auf 23 usw. bis 78, 89 und schließlich 100.

Offenbar läßt sich das Spiel auch dann, wenn für die Länge der Sprungbahn, sowie für die maximale und minimale Sprungweite der beiden Spielenden andere Zahlenwerte festgesetzt werden, entsprechend durchführen. Die Distanz der Stufen, nach welchen man fortzuschreiten hat, um den Sieg zu erzwingen, — in unserem Falle 11 — ist, wie leicht zu sehen, stets ebenso groß wie die maximale und minimale Sprungweite des einzelnen zusammengenommen[1]) (in unserem Falle $10 + 1 = 11$). Ist daher die Länge der Sprungbahn zufällig ein Vielfaches dieser Stufendistanz, so kann also der Sieg von dem beginnenden Spieler (A) nicht mehr erzwungen werden, wohl aber alsdann von dem zweiten Spieler (B). Ist z. B. die Bahn 99 Fuß lang und im übrigen alles wie in dem obigen Falle, so mag A beginnen, wie er will: B kann mit seinem ersten Sprunge auf 11 gelangen, mit seinem zweiten auf 22, . . . mit seinem neunten auf 99 und damit also siegen.

Frage 1: Die Länge der Sprungbahn beträgt 200 Fuß, im übrigen alles wie im ersten Falle oben. A glaubt irrtümlicher=

[1]) Vgl. hierzu eventuell die bei Auflösung von Frage 4 (am Ende des Buches) gemachten Ausführungen.

weise, zunächst wieder (wie im ersten Falle) auf 1 springen zu müssen; wie muß B fortfahren, um den Sieg zu erzwingen?

Frage 2: Wer kann den Sieg erzwingen, wenn der maximale Sprung des einzelnen 8 Fuß beträgt, als Minimum wieder 1 Fuß festgesetzt ist und die Bahn 90 Fuß lang ist, und wie ist zu verfahren?

Frage 3: Wer kann den Sieg erzwingen, wenn der maximale Sprung 17 dm., der minimale 1 dm. und die Bahnlänge 150 dm. beträgt?

Frage 4: Wer kann den Sieg erzwingen, wenn der maximale Sprung 10 Fuß beträgt, das Minimum auf 3 Fuß festgesetzt wird und die Bahn 182 Fuß lang ist?

Frage 5: Der maximale Sprung sei 9 Fuß, der minimale 2 Fuß, die Bahnlänge 100 Fuß. Als Sieger gilt derjenige, der den Gegner zwingt, zuerst das Ziel zu erreichen oder auch zu überschreiten.[1]) Wer kann den Sieg erzwingen?

---

[1]) Bei dieser Frage allein soll also zwischen dem Erreichen und Überschreiten des Ziels kein Unterschied gemacht werden, während z. B. bei Frage 4 dieser Unterschied wesentlich ins Gewicht fällt.

Kapitel II.

Das Boß-Puzzle oder Fünfzehnerspiel.

§ 1. Geschichte und Beschreibung des Spiels.

Dieses Spiel soll nach einer Angabe die Erfindung eines taubstummen Amerikaners sein. Bald nach seiner Erfindung (1878) verbreitete es sich über die ganze zivilisierte Welt, in den Ländern englischer Zunge „Fifteenth Puzzle“, in Deutschland „Boss - Puzzle“ oder auch „Fünfzehner-Spiel“ und in Frankreich „jeu du taquin“ (Neckspiel) genannt, und wurde in der ersten Zeit überall mit solchem Eifer gespielt, wie wohl kaum ein anderes Geduldspiel je zuvor. So wird z. B. von Hamburg erzählt, daß man dort die kleinen Kästchen mit den 15 Holzklötzchen selbst in den Pferdebahnwagen erblicken und unruhige Hände darin schieben sehen konnte, daß die Prinzipale in den Handelskontoren über das Puzzlefieber ihrer Angestellten in Verzweiflung gerieten und durch Anschläge das Spielen während der Bureauzeit aufs strengste verbieten mußten, daß große Turniere veranstaltet wurden usw.

Die Einrichtung des Spiels ist folgende:

In einem quadratischen Kasten befinden sich 15 mit den Zahlen 1—15 numerierte Steine, während ein weiterer (16.) Platz frei gelassen ist, um ein Verschieben der Steine untereinander zu ermöglichen. Die 15 Steine sind in willkürlicher Ordnung hineingelegt, und die Aufgabe besteht darin, die in der nachstehenden Figur 1 angegebene Stellung durch Verschieben der Steine herbeizuführen.

In vielen Fällen ist es, wie wir sehen werden, unmöglich, die geforderte Stellung, die wir die „normale“ nennen wollen,

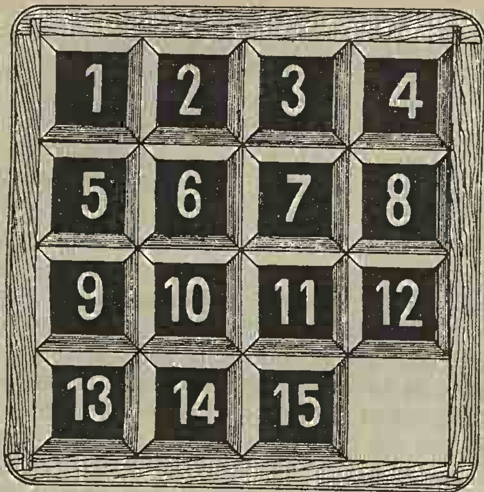

Fig. 1.

herbeizuführen; wir werden alsdann sagen, die Aufgabe sei „unlösbar". Ob die Aufgabe lösbar oder unlösbar ist, wird lediglich von der Anfangsstellung abhängen. Wie entscheiden wir nun, ob bei irgend einer uns gegebenen Anfangsstellung die Aufgabe lösbar oder unlösbar ist und wie erhalten wir im ersteren Falle die Lösung?

§ 2. Lösung der Aufgabe.

Bevor wir die am Ende von § 1 aufgeworfenen Fragen zu beantworten suchen, bemerken wir zunächst noch, daß wir die „Plätze" oder „Felder" des Brettes auch durch die Zahlen 1—16 entsprechend der Figur 1 unterscheiden wollen, so daß also z. B. mit „Platz 4" beständig der Platz bezeichnet wird, den in Fig. 1, also in der normalen Stellung, der Stein 4 einnimmt, und „Platz 16" der äußerste Platz unten rechts heißt, der in Fig. 1 gerade leer ist. Ferner wollen wir die wagerechten Reihen kurz „Zeilen", die lotrechten kurz „Kolonnen" nennen und erstere von oben nach unten als erste, zweite, dritte, vierte und letztere ebenso, von links nach rechts gerechnet, unterscheiden.

Wir denken uns nun eine beliebige Anfangsstellung und versuchen, ob wir aus ihr durch Verschieben der Steine die normale Stellung (Fig. 1) erhalten können. Zu dem Zweck wollen wir folgendermaßen verfahren: Zunächst bringe man den Stein 1 auf Platz 1, falls er nicht etwa schon zufällig dort steht, und sodann, ohne 1 wieder zu verschieben, den Stein 2 auf Platz 2. Dies beides ist, wie leicht erkannt wird, durch verhältnismäßig wenig Verschiebungen stets zu erreichen. — Sodann kann man, ohne an der ersten Zeile etwas zu verschieben, leicht die Steine 3 und 4 in das von der dritten und vierten Kolonne eingenommene achtfeldrige Gebiet bringen, falls sie sich nicht schon in diesem Gebiet befanden. Auf jeden Fall dürfen wir also hinfort annehmen, daß die Steine 3 und 4 sich nunmehr in diesem achtfeldrigen Gebiet und zwar auf irgend welchen Plätzen dort befinden und daß das leere Feld gleichfalls diesem Gebiete angehört. Wenn nun die Steine 3 und 4 nicht etwa bereits zufällig auf ihren normalen Plätzen schon stehen, so können wir sie leicht dahin bringen lediglich durch Verschiebungen innerhalb unseres achtfeldrigen Gebietes. Es wird nicht erforderlich sein, dies für alle möglichen Stellungen durchzuführen, sondern wir dürfen uns darauf beschränken, das Prinzip des zu beobachtenden Verfahrens an dem Beispiel eines besonders ungünstigen Falles darzulegen, nämlich desjenigen, bei dem der Stein 3 auf Platz 4 und Stein 4 auf Platz 3 steht. Unser achtfeldriges Gebiet soll also etwa so beschaffen sein, wie es Fig. 2 zeigt.

Wir werden alsdann bei allen Verschiebungen, die wir an Fig. 2 vornehmen, die Steine 6 und 14 unberührt stehen lassen, da wir ihrer nicht bedürfen, werden uns also freiwillig auf das Gebiet der oberen 6 Felder, das uns ausreichende Bewegungsfreiheit gewährt, beschränken. Wollten wir uns allerdings auf die obersten 4 Felder allein beschränken, so würde, worauf wir noch zurückkommen werden, es uns nicht gelingen, die Steine 3 und 4 an ihre normalen Plätze zu bringen. Aus Fig. 2 leiten wir nun leicht die Stellung Fig. 3 her, indem wir alle 5 Steine des sechsfeldrigen Gebietes zweimal, den Stein 5 sogar dreimal,

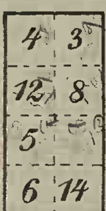

Fig. 2.

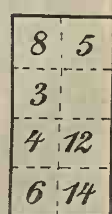

Fig. 3.

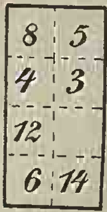

Fig. 4.

im umgekehrten Drehungssinne des Uhrzeigers verschieben. Durch Verschieben innerhalb der 4 mittleren Felder erhält man aus Fig. 3 leicht Fig. 4. Nun verschiebt man die 5 Steine des sechsfeldrigen Gebietes im Uhrzeigersinne

Fig. 5.

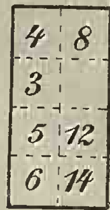

Fig. 6.

, so daß Stein 4 auf Platz 3 kommt; man erhält so Fig. 5 und bringt nun durch Verschiebungen innerhalb der mittleren 4 Felder den Stein 3 auf Platz 7 (Fig. 6). Die jetzige Stellung der Steine 3 und 4 (Fig. 6) ist nun eine typische; sie ist, wie aus unserem, sogar noch besonders ungünstig gewählten Falle erhellen dürfte, stets zu erreichen, und aus ihr kann man nun sofort den Stein 4 auf Platz 4 bringen und den Stein 3 nachziehen auf Platz 3. Damit ist dann auch die ganze erste Zeile des Spielkastens in Ordnung gebracht und an ihr wird hinfort nichts mehr geändert. — Wesentlich bei diesem Verfahren war, daß wir ein sechsfeldriges Rangiergebiet mit einem leeren Felde zur Verfügung hatten: so war es uns möglich, nicht nur die 5 Steine des sechsfeldrigen Gebietes der Reihe nach zu verschieben, sondern außerdem innerhalb dieses sechsfeldrigen Gebietes wieder in einem vierfeldrigen Gebiete mit 3 Steinen und einem leeren Felde Verschiebungen vorzunehmen. Erst durch die Verbindung dieser beiden Arten von Verschiebungen wird es möglich, wesentliche Veränderungen in die Stellung hineinzubringen. Müßte man sich lediglich auf ein vierfeldriges Gebiet beschränken, so würde bei allen Verschiebungen das Bild im wesentlichen stets dasselbe bleiben.

Genau ebenso, wie die erste Zeile, läßt sich nun auch die zweite in Ordnung bringen, wobei man sich mit allen Verschiebungen auf das Gebiet der untersten drei Zeilen beschränkt, also die Steine der ersten Zeile nicht mehr berührt, um die dort hergestellte normale Ordnung nicht wieder zu stören. Zunächst werden dabei natürlich die Steine 5 und 6 leicht auf ihre normalen Plätze gebracht und alsdann hat man in dem Gebiet der 6 Felder 7, 8, 11, 12, 15, 16 (s. Fig. 1) in entsprechender Weise zu operieren, wie wir dies oben an den Figuren 2—6 dargelegt haben. Wir dürfen nämlich die obigen

Ausführungen ohne weiteres auf unseren jetzigen Fall übertragen: zwar steht uns jetzt nur ein sechsfeldriger Rangierplatz zur Verfügung, jedoch führten wir ja oben mit freiwilliger Selbstbeschränkung gleichfalls alle Operationen auf einem sechsfeldrigen Gebiet aus und zeigten, daß dieses zu genügen vermag. So bringen wir also jetzt die Steine 7 und 8 auf ihre normalen Plätze und haben damit die beiden ersten Zeilen in Ordnung.

In den beiden letzten Zeilen bringt man nun zunächst Stein 13 auf Platz 9 und Stein 9 auf Platz 10 in ganz analoger Weise, wie wir oben für die Steine 3 und 4 die entsprechende typische Stellung der Fig. 6 herbeiführten; nur haben wir jetzt in den zwei letzten **Zeilen** zu operieren, während es oben die zwei letzten **Kolonnen** waren. Darauf zieht man die Steine 13 und 9 auf ihre normalen Plätze. Es bleibt uns dann noch das sechsfeldrige Rangiergebiet der Plätze 10, 11, 12, 14, 15, 16; wir bringen auf ihm die Steine 10 und 14 — wieder in der dargelegten Weise — auf ihre normalen Plätze und haben dann nur noch mit einem vierfeldrigen Gebiet zu tun, auf dem die Steine 11, 12, 15 stehen. Durch Verschieben dieser drei Steine kann man natürlich erreichen, daß 15 auf seinen normalen Platz gelangt und zugleich das leere Feld rechts unten sich befindet. Die Steine 11 und 12 werden dabei dann entweder auf ihre normalen Plätze kommen oder der Stein 12 kommt auf Platz 11 und Stein 11 auf Platz 12. Im ersteren Falle ist die Aufgabe gelöst; im letzteren Falle haben wir die Stellung der Fig. 7. Wir können unser Resultat so aussprechen.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	11
13	14	15	

Fig. 7.

Satz 1: Aus jeder beliebigen Anfangsstellung läßt sich jedenfalls entweder die normale Stellung (Fig. 1) oder die der Fig. 7 herleiten.

Auf die Frage, ob auch beides zugleich möglich ist, nämlich daß eine Anfangsstellung sich sowohl in die normale Stellung wie in die der Fig. 7 überführen läßt, wollen wir vorläufig noch keine abschließende Antwort geben, sondern uns jetzt damit begnügen, daß das eine von beiden in *jedem* Falle erreichbar ist.

§ 3. Die mathematische Theorie des Spiels.

Wir wollen uns nun eine bestimmte Anfangsstellung, z. B. die der Fig. 8, denken. Wir wollen die Zahlen dieser Figur vorlesen und zwar in der Reihenfolge, die wir beim Lesen üblicherweise stets beobachten, d. h. in jeder Zeile von links nach rechts gehend und die Zeilen von oben nach unten durchlaufend. Wir bemerken dann, daß Stein 1 bereits auf seinem normalen Platze steht; dagegen steht der nächste Stein, 4, wie wir sagen wollen, „vor“ zwei anderen Steinen, die bei normaler Stellung aller Steine vor ihm kommen würden, nämlich vor den Steinen 2 und 3. Wir haben also bei Stein 4, wie wir sagen wollen, zwei Verstöße gegen die Rangordnung. Entsprechend haben wir bei Stein 7, der vor den Steinen 3, 5, 2, 6 steht, 4 solche Verstöße; bei Stein 13 z. B., der vor 11, 10, 2, 12, 6 steht, 5 Verstöße usw. Wir erhalten so im ganzen $0 + 2 + 4 + 5 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 5 + 3 + 2 + 0 + 1 = 38$ Verstöße gegen die Rangordnung. Diese Gesamtzahl aller Verstöße sagt uns nun, ob wir die normale Schlußstellung der Fig. 1 erhalten können oder nicht: ist nämlich die so erhaltene Zahl, wie in unserem Falle, eine gerade Zahl (hier 38), so ist die normale Schlußstellung der Fig. 1 zu erhalten; die Aufgabe ist also lösbar. Ist die betreffende Zahl dagegen eine ungerade, so erhält man die normale Schlußstellung nicht und die Aufgabe ist unlösbar. Voraussetzung ist dabei stets, daß das leere Feld sich anfänglich rechts unten, also auf Platz 16, befand. Anstatt der unbequemen Bezeichnung „Verstöße gegen die Rangordnung“ wollen wir, wie in der Mathematik gebräuchlich, „Inversionen“ sagen. Wir sprechen alsdann das Kriterium, das wir für die Lösbarkeit der Aufgabe soeben und zwar vorläufig ohne Begründung angegeben haben, so aus:

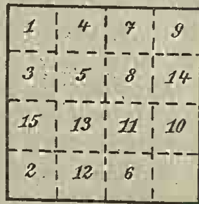

Fig. 8.

Kriterium: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine vorgelegte Stellung mit dem leeren Felde auf Platz 16 in die normale Schlußstellung (Fig. 1) übergeführt werden kann, ist die, daß die Anzahl aller Inversionen für die gegebene Anfangsstellung eine gerade Zahl ist.

Für die Richtigkeit dieses Kriteriums der Lösbarkeit wollen wir jetzt den Beweis erbringen und legen uns zu dem Zweck zunächst folgende Frage vor: „Wie ändert sich durch Schieben eines Steins die Anzahl der Inversionen?“ Die Antwort ist sehr leicht, wenn der Stein in horizontaler Richtung geschoben wird; denn alsdann ändert sich die Anzahl der Inversionen für die betreffende Stellung offenbar gar nicht. — Wie ist es dagegen, wenn der Stein in vertikaler Richtung geschoben wird? Diese Verschiebung bedeutet, daß der Stein in der Rangordnung um 3 Plätze vorrückt oder zurücktritt, je nachdem er vertikal nach oben oder nach unten geschoben wird. Die 3 Steine, welche er so überspringt, sei es vor-, sei es rückwärts, mögen die Nummern a, b, c tragen, während der Stein, der geschoben wird, die Nummer x haben soll. (a, b, c, x sind also Zahlen im Gebiet von 1 bis 15). Es sind alsdann folgende Fälle zu unterscheiden:

1) x ist größer als jede der Zahlen a, b, c;
2) x ist kleiner als jede der Zahlen a, b, c;
3) x ist größer als zwei von den Zahlen a, b, c und kleiner als die dritte;
4) x ist größer als eine von den Zahlen a, b, c und kleiner als die beiden anderen.

Im ersten der 4 Fälle entstehen, wenn der Stein x vor die Steine a, b, c rückt, 3 neue Inversionen, weil die Zahlen a, b, c alle kleiner als x sind; springt x hinter a, b, c, so verschwinden dagegen 3 Inversionen von den vorher vorhandenen. Jedenfalls ändert sich also die Anzahl aller Inversionen durch die Verschiebung von x um 3: entweder sie wird um 3 größer oder um 3 kleiner.

Im zweiten der 4 Fälle ist es ganz entsprechend; auch hier ändert sich die Anzahl aller Inversionen um 3, wird um 3 kleiner oder um 3 größer.

Im dritten Falle entstehen, wenn x vor die kleineren Zahlen — es seien etwa a und b — rückt, zwar zwei neue Inversionen, jedoch verschwindet gleichzeitig von den früheren Inversionen eine, weil x ja auch vor die größere Zahl c rückt. Der Gesamteffekt ist also der, daß die Anzahl aller Inversionen um 1 größer wird. Rückt x hinter die Zahlen a, b, c, so wird die Anzahl aller Inversionen um 1 kleiner. In jedem der beiden Unterfälle ändert sich also die Anzahl aller Inversionen um 1.

Im vierten Falle ändert sich, wie im dritten, gleichfalls die Anzahl aller Inversionen jedenfalls um 1.

Wir sehen so, daß durch das Schieben eines Steins die Anzahl aller Inversionen sich nur um 3 oder um 1 ändern kann, sei es daß sie um soviel größer oder um soviel kleiner wird. Dies Resultat sprechen wir so aus:

Hilfssatz: Durch das horizontale Verschieben eines Steins ändert sich die Anzahl aller Inversionen gar nicht, durch das vertikale Verschieben dagegen stets um eine ungerade Zahl (1 oder 3).

Wir denken uns nun den leeren Platz auch mit einem Stein besetzt, nämlich mit einem fingierten Stein 16. Wir können alsdann sagen, daß ein einzelner Zug, nämlich das Schieben eines Steins auf den leeren Nachbarplatz, immer in einer Vertauschung des Steins 16 mit einem benachbarten Stein besteht. Stand nun, wie wir dies zunächst annehmen wollen, unser Stein 16 zu Anfang auch auf Feld 16, so muß, damit dies zu Ende wieder der Fall ist, die Anzahl solcher Vertauschungen offenbar eine gerade sein; denn jeder Zug, sei es in horizontaler, sei es in vertikaler Richtung, muß durch einen anderen, genau entgegengesetzt gerichteten wieder gleichsam annulliert werden, soll Stein 16 wieder an den alten Platz zurückkehren. Die Anzahl der Züge, welche eine Stellung in eine andere mit demselben leeren Felde überführen, ist also stets gerade, und zwar ist offenbar sowohl die Anzahl aller horizontalen Züge, für sich genommen, gerade wie auch die Anzahl aller vertikalen Züge.

Wir resümieren: Von einer Anfangsstellung zu einer Schlußstellung führt, wenn beide das leere Feld auf Platz 16 haben, eine gerade Zahl horizontaler und eine gerade Zahl vertikaler Züge. Die ersteren verändern die Anzahl der Inversionen gar nicht, die letzteren dagegen jedesmal um eine ungerade Zahl (s. Hilfssatz), insgesamt also, da diese Züge selbst in gerader Zahl vorkommen, um eine gerade Zahl. Eine Anfangsstellung kann daher in irgend eine andere Stellung — immer unter der Voraussetzung, daß bei beiden das leere Feld auf Platz 16 ist — höchstens dann übergeführt werden, wenn die Anzahl ihrer Inversionen sich um eine gerade Zahl unterscheidet, und sicher dann nicht, wenn diese Differenz ungerade ist. Nun ist die Anzahl der Inversionen für die normale Schlußstellung (Fig. 1) = 0, für die Schlußstellung der Fig. 7 dagegen = 1 (Stein 12 steht vor 11). Hieraus folgt, beiläufig gesagt, daß sich die Stellung der Fig. 7 nie in die normale Stellung überführen läßt und daß ebensowenig das umgekehrte möglich ist. Vor allem sehen wir aber jetzt, daß eine gegebene Stellung in die normale Schlußstellung höchstens dann übergeführt werden kann, wenn für die gegebene Stellung die Anzahl der Inversionen gerade ist. Diese Bedingung ist also notwendig für die Überführung in die normale Stellung; sie ist aber auch hinreichend. Denn zugleich folgt aus dem Vorstehenden, daß eine Anfangsstellung mit gerader Inversionenzahl in die Stellung Fig. 7 (mit ungerader Inversionenzahl) **nicht** übergeführt werden kann. Da nun aber jede Stellung entweder in die normale Schlußstellung oder in die der Fig. 7 sich überführen läßt, wie oben gezeigt war (Satz 1), so folgt, daß bei gerader Inversionenzahl eine gegebene Stellung **stets** in die normale Schlußstellung übergeführt werden kann. — Umgekehrt lassen sich alle Stellungen mit ungerader Inversionenzahl stets in die Stellung Fig. 7 überführen; denn in die normale Stellung können sie nicht gebracht werden, eine der beiden Schlußstellungen (Fig. 1 oder Fig. 7) ist aber sicher stets möglich. In diesen Fällen — den „unlösbaren" — ist also die Schlußstellung der Fig. 7 stets zu erreichen und auch nur in diesen. — Damit ist das oben (S. 13) angegebene Kriterium in vollstem Umfange bewiesen und zugleich die am Ende von § 2 offen gelassene Frage dahin beantwortet, daß niemals ein und dieselbe Stellung sowohl in die normale Schlußstellung wie in die der Fig. 7 übergeführt werden kann, sondern stets nur das eine von beiden möglich ist.

Frage 6: Ist die Aufgabe Fig. 9 lösbar oder unlösbar?

5	6	7	8
1	2	3	4
9	10	13	14
15	12	11	

Fig. 9.

Als Beispiel werde noch betrachtet diejenige Anfangsstellung, welche sich aus der normalen Stellung ergibt, wenn man die Zahlen der einzelnen Zeilen, statt von links nach rechts, von rechts nach links schreibt und das leere Feld wieder unten rechts annimmt (s. Fig. 10). Die Anzahl der Inversionen ist ungerade (in jeder der drei oberen Zeilen = 6, in der untersten = 3), also läßt sich die Stellung Fig. 10 in die normale Stellung nicht überführen, wohl aber in die Schlußstellung Fig. 7.

Voraussetzung bei allen vorstehenden Erörterungen war stets, daß das leere Feld auch bei der Anfangsstellung sich auf

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
15	14	13	

Fig. 10.

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Fig. 11.

Platz 16 befand. Liegt uns eine andere Anfangsstellung vor, so werden wir durch einfache Verschiebungen zunächst bewirken, daß Platz 16 das leere Feld wird. So werden wir z. B. bei der Stellung der Fig. 11 die Steine 1, 2, 3, 7, 11, 15 der Reihe nach verschieben, um Platz 16 leer zu bekommen. Für diese neue Stellung zählen wir alsdann 9 Inversionen; die Anfangsstellung Fig. 11 ist also nicht in die normale, sondern in die Schlußstellung Fig. 7 überführbar.

Es läßt sich nun leicht erkennen, daß, wenn eine Stellung sich in eine zweite überführen läßt, auch umgekehrt die letztere in die erstere übergeführt werden kann. Denn wodurch wird die erstere Überführung bewirkt? Durch eine Reihe von „Zügen", d. h. durch eine Reihe von Vertauschungen des hypothetischen Steins 16 mit jeweils benachbarten Steinen. Es möge die erste Stellung in die zweite z. B. dadurch übergeführt werden, daß der Stein 16 der Reihe nach mit den Steinen a, b, c . . . . m, n, r, s vertauscht wird. Der Stein 16 war also der Reihe nach den Steinen a, b, c . . . und zuletzt den Steinen m, n, r, s benachbart. Offenbar können wir daher, von der zweiten Stellung ausgehend, den umgekehrten

Weg gehen und den Stein 16 zuerst mit s, dann mit r und so fort vertauschen und führen so die zweite Stellung in die erste über. Daraus folgt dann z. B., daß die Stellung Fig. 7 sich sowohl in die Stellung Fig. 10 wie in die von Fig. 11, welche beide ihrerseits in die erstere übergeführt werden konnten, überführen läßt. Da nun alle Stellungen mit ungerader Inversionenanzahl sich in die Stellung Fig. 7 überführen lassen und diese letztere wieder sowohl in die von Fig. 10 wie die von Fig. 11, so läßt sich also jede Stellung mit ungerader Inversionenanzahl sowohl in die Stellung Fig. 10 wie in die von Fig. 11 überführen. — Ferner folgt aus diesem Prinzip der Umkehrung der Überführungen, daß jede beliebige Stellung mit gerader Inversionenanzahl sich in jede beliebige andere Stellung von gleichfalls gerader Inversionenanzahl überführen läßt und daß die Stellungen mit ungerader Inversionenanzahl untereinander sich ebenso verhalten. Wir fassen diese Resultate folgendermaßen zusammen:

Satz 2: Alle Stellungen, welche — bei einem leeren Felde auf Platz 16 — eine gerade Anzahl von Inversionen aufweisen, bilden für sich eine Gruppe, so daß von irgend zwei dieser Stellungen die eine in die andere übergeführt werden kann; sie sind alle insbesondere in die normale Stellung überführbar. Ebenso bilden alle Stellungen, welche — bei einem leeren Felde auf Platz 16 — eine ungerade Anzahl von Inversionen aufweisen, eine zweite Gruppe ineinander überführbarer Stellungen; alle Stellungen dieser Gruppe lassen sich insbesondere auch in die Stellung der Fig. 10 und ebenso in die der Fig. 11 überführen. Eine Stellung der einen Gruppe kann niemals in eine der anderen übergeführt werden; die Stellungen der zweiten Gruppe sind daher insbesondere niemals in die normale Stellung überzuführen.

§ 4. Das Puzzle mit Schranken.

Künstlich erschwert man sich das Spiel, wenn man zwischen einzelnen Feldern Schranken aufführt. Die Schranken können natürlich so errichtet werden, daß keine Aufgabe mehr lösbar ist. Sie können andererseits aber auch so errichtet werden, daß alle Aufgaben, die zuvor lösbar waren, es auch jetzt trotz der Schranken noch sind. Ein solches Puzzle-Brett ist z. B. das in Fig. 12 dargestellte, wo die ausgezogenen Linien die Schranken darstellen sollen. Eine Anfangsstellung, die auf dem Brett ohne Schranken sich in die normale Stellung überführen ließ, gestattet dies also auch jetzt noch, und dasselbe gilt bezüglich der Schlußstellung Fig. 7. Man bemerke nämlich zunächst, daß

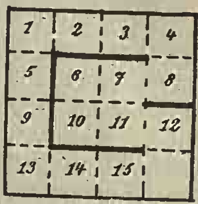

Fig. 12.

man alle Steine um je einen Platz verschieben kann, wenn man die Verschiebungen in folgender Reihenfolge vornimmt (s. Fig. 12): 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 10, 11, 12. Aber auch innerhalb dieser Reihe läßt sich die Veränderung vornehmen, daß ein Stein in dieser Reihe um 2 Plätze vorwärts oder rückwärts springt. Soll z. B. 4 in dieser Reihe hinter 8 und 7 zurücktreten, so wird man die ganze Reihe so lange verschieben, bis auf dem quadratischen Rangierplatz im Innern, wo jetzt 6, 7, 10 und 11 sich befinden, die Steine 7, 8 und 4 stehen, während man durch einfaches Verschieben der Steine von den Plätzen 11 und 12 den vierten Platz leer macht. Bringt man dann 4 von Platz 7 nach Platz 11 und schiebt nun die Steine von Platz 8, 4, 3 .... nach, bis der leere Platz wieder zwischen den Steinen 15 und 12 sich befindet, so ist das Ziel erreicht, daß nämlich an die Stelle der obigen Reihe jetzt: 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 8, 7, 4, 6, 10, 11, 12 getreten ist. — Ebenso läßt sich ein Stein in dieser Reihe leicht zwei Plätze nach vorwärts bringen.

Durch solche Platzänderungen um je 2 Plätze nach vorn oder nach hinten läßt sich nun schließlich dasselbe erreichen wie durch die Verschiebungen auf dem schrankenfreien Brett; dies mag an einem Beispiel gezeigt werden: Die entsprechende Reihe für die Anfangsstellung der Fig. 8 (S. 13) z. B. wäre, wenn wir, was offenbar gestattet ist, 6 einen Platz nach rechts schieben:

12, 2, 15, 3, 1, 4, 7, 9, 14, 8, 5, 13, 11, 10, 6.

Läßt man 15 zwei Plätze vorrücken, darauf 14 sechs, dann 13 acht, dann 9 vier, so erhält man:

15, 12, 14, 13, 2, 9, 3, 1, 4, 7, 8, 5, 11, 10, 6.

Rückt dann 12 zwölf Plätze zurück, darauf 5 vier vor und 2 vier zurück, so hat man:

15, 14, 13, 9, 3, 5, 1, 2, 4, 7, 8, 11, 10, 12, 6.

Nun rückt 3 vier Plätze zurück, dann 4 vier Plätze zurück, dann 7 zwei zurück und dann 11 vier zurück — und man erhält die Ordnung: 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 8, 7, 4, 10, 12, 11, 6. Rückt dann noch 6 zwei Plätze vor, darauf 10 zwei zurück, 12 gleichfalls zwei zurück und 4 zwei vor, so bekommt man die gewünschte Ordnung: 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 10, 11, 12. Allerdings ist dies Verfahren äußerst umständlich in der praktischen Ausführung; denn jedes Vorrücken oder Zurückgehen um je zwei Plätze erfordert ein Verschieben aller Steine der Reihe, damit eben die betreffenden Steine, deren relative Rangordnung geändert werden soll, zunächst überhaupt nur auf den Rangierplatz gelangen.

Kapitel III.

Solitär- oder Einsiedlerspiel.

§ 1. Spielregel. Notation.

Über den Ursprung des Spiels ist Sicheres nicht bekannt. Jedenfalls besitzt es bereits ein beträchtliches Alter, wofür z. B. ein Brief Leibniz' aus dem Jahre 1716 als Zeugnis beigebracht werden kann, ein Umstand, durch den das Reichspatentamt jedoch nicht abgehalten wurde, dem Spiel im Jahre 1887 ein deutsches Reichspatent zu erteilen.[1]) — Unter den verschiedenen Formen, in denen das Spiel auftritt, überwiegt in Deutschland die eines Kastens, dessen Deckel 33 Löcher aufweist, durch welche Holzpflöcke hindurchgesteckt werden können, wobei mindestens ein Loch stets leer gelassen wird. Die Löcher sind symmetrisch und zwar so, wie Fig. 1 dies zeigt, angeordnet.

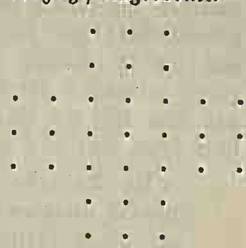

Fig. 1.

Die verschiedenen Löcher werden wir durch eine ähnliche Notation, wie sie für die Felder des Schachbretts üblich ist, unterscheiden und dementsprechend auch jedes Loch fortan quadratisch darstellen, so daß wir auch beliebig von „Löchern" und „Feldern" sprechen werden. Wir tragen in jedes Loch gleich seine Notation ein (s. Fig. 2), wobei die erste Ziffer immer die Vertikalreihe oder „Kolonne" und zwar von links nach rechts gerechnet, die zweite die Horizontalreihe oder „Zeile", von unten nach oben gerechnet, angibt.

Die einzige Spielregel besteht darin, daß, wenn von 3 in horizontaler oder vertikaler Reihe gelegenen

---

1) Klasse 77, Nr. 42919.

Löchern 2 benachbarte mit einem Pflock versehen sind, während das dritte leer ist, alsdann der Pflock aus dem entfernteren der beiden besetzten Löcher in das leere gesteckt werden darf, wobei aus dem anderen (mittleren) besetzten Loch, das hierbei übersprungen wird, der Pflock herausgezogen und beiseite gelegt werden muß.

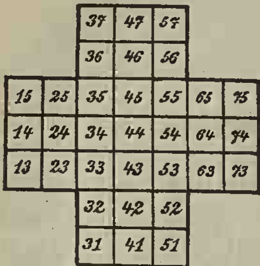

Fig. 2.

Diese Operation, welche stets das Verschwinden eines Pflockes und für einen anderen eine Platzänderung zur Folge hat, nennen wir kurz einen „Zug", so daß also, wenn zu Anfang z. B. nur das Loch 44 leer ist, nur einer der 4 „Züge" $\frac{24}{44}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{42}{44}$ möglich ist, wo in dieser auch weiterhin stets gebrauchten Bezeichnung der Züge in Form von Brüchen der Zähler das Loch angibt, aus dem ein Pflock fortgenommen, und der Nenner dasjenige, in das er gesteckt wird. Zähler und Nenner eines solchen Bruches stimmen natürlich immer entweder in den ersten oder in den letzten Ziffern überein, während die beiden nicht übereinstimmenden Ziffern sich um 2 unterscheiden; die zwischen den beiden letzteren liegende Zahl und die im Zähler und Nenner gleicherweise vorkommende geben zusammen dann das Loch, über das hinweggesetzt wird, aus dem also ein Pflock verschwindet, in unserem obigen Beispiel bezw. 34; 45; 54; 43.

Die Aufgabe des Spiels besteht gewöhnlich darin, aus 32 besetzten Löchern der Reihe nach alle Pflöcke bis auf einen fortzuschaffen, wobei das zu Anfang leere Loch vielfach das mittlere (44) ist, jedoch auch ein anderes sein kann, und wobei das dem letzten Pflock verbleibende Loch zumeist auch vorgeschrieben ist.

Selbstverständlich brauchen aber zu Anfang nicht alle 32 Löcher besetzt zu sein, sondern etwa nur ein Teil des Bretts, z. B. so, daß die Pflöcke eine bestimmte Figur, ein Quadrat, ein Kreuz oder dgl. bilden, wobei die Aufgabe im übrigen sonst dieselbe ist, also in Entfernung aller Pflöcke bis auf einen besteht.

§ 2. Aufgaben bei teilweise besetztem Brett.

Um in das Wesen des Spiels zunächst etwas einzuführen, besprechen wir eine Anzahl von Aufgaben, in denen nur ein Teil des Brettes besetzt ist und verlangt wird, die Pflöcke bis auf einen zu entfernen. Die in den verschiedenen Figuren mit ihrer Notation angegebenen Felder sind zu Anfang besetzt, der übrige, leere Teil der Bretter kann nach Fig. 2 leicht hinzugedacht werden.

I. Das Kreuz aus 9 Pflöcken.

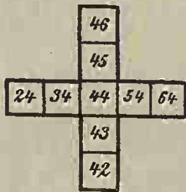

Fig. 3.

Lösung: $\frac{43}{41}$; $\frac{45}{43}$; $\frac{24}{44}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{43}{45}$; $\frac{46}{44}$.

II. Das Dreieck.

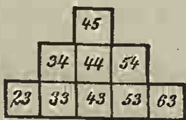

Fig. 4.

Lösung: $\frac{53}{55}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{42}{44}$.

III. Das Kreuz.

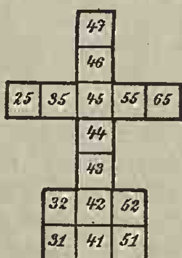

Fig. 5.

Lösung: $\frac{31}{33}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{63}{43}$, von hier die Figur der Aufgabe I.

IV. Die Pyramide.

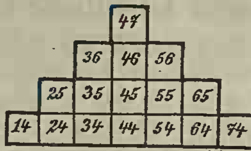

Fig. 6.

Lösung: $\frac{55}{53}$; $\frac{74}{54}$; $\frac{53}{55}$; $\frac{55}{57}$; $\frac{57}{37}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{33}{35}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{56}{36}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{35}{55}$; $\frac{65}{45}$.

Selbstverständlich sind aber keineswegs alle Aufgaben dieser Art lösbar; wir beschränken uns in dieser Hinsicht darauf, nur auf den einfachen Fall hinzuweisen, daß anfänglich nur 3 Felder von der in Fig. 7 angegebenen gegenseitigen Lage besetzt sind, gleichgültig wo auf dem Brett diese Figur liegt. Der Leser erkennt bei einem Versuch sofort, daß man nur einen Pflock fortbringen kann, also zwei übrig bleiben müssen.

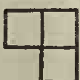

Fig. 7.

§ 3. Vollbesetztes Brett.

Gewöhnlich besteht die Aufgabe bei unserem Spiel jedoch, wie schon oben gesagt, darin, daß zu Anfang alle 32 Pflöcke in den Löchern stecken, während ein beliebig vorgeschriebenes Loch, von uns weiterhin als das „Anfangsloch" bezeichnet, leer ist, und nun der Reihe nach alle Pflöcke bis auf einen entfernt werden sollen, welch' letzterer dann in einem gleichfalls vorgeschriebenen Loch, weiterhin kurz „Schlußloch" genannt, stecken bleiben soll.

Es sollen für diese Aufgabe — wir wollen sie die „Hauptaufgabe des Spiels" nennen — hier jetzt eine Reihe von speziellen Fällen, unterschieden durch „Anfangs-" und „Schlußloch", besprochen werden. Diese Aufgaben mag der Leser hier vorläufig nur als willkürlich aus einer großen Zahl herausgegriffene Beispiele ansehen; der nächste Abschnitt wird uns jedoch zeigen, daß unsere Auswahl keine willkürliche, sondern vielmehr so getroffen war, daß mit den jetzt folgenden 16 Fällen im grunde genommen die Gesamtheit aller überhaupt lösbaren Fälle der „Hauptaufgabe des Spiels" erschöpft ist.

I. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 44.

$\frac{64}{44}$; $\frac{56}{54}$; $\frac{44}{64}$; $\frac{52}{54}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{75}{73}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{54}{52}$; $\frac{35}{55}$; $\frac{65}{45}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{45}{25}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{57}{37}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{51}{31}$; $\frac{52}{32}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{32}{34}$; $\frac{34}{54}$; $\frac{64}{44}$.

II. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 74.

Wie I, nur statt des letzten Zuges: $\frac{54}{74}$.

III. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 74.

Der erste Zug von II ist durch $\frac{54}{74}$ zu ersetzen.

IV. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 47.

$\frac{54}{74}$; $\frac{52}{54}$; $\frac{44}{64}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{74}{54}$; $\frac{54}{52}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{31}{51}$; $\frac{32}{52}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{15}{13}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{32}{34}$; $\frac{56}{54}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{54}{56}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{37}{57}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{45}{65}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{65}{45}$; $\frac{24}{44}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{45}{47}$.

V. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 14.

Zunächst die ersten 24 Züge von IV, dann $\frac{34}{36}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{36}{34}$; $\frac{34}{14}$.

VI. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 54.

$\frac{56}{54}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{54}{56}$; $\frac{74}{54}$; $\frac{53}{55}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{53}{33}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{15}{13}$; $\frac{25}{23}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{32}{34}$; $\frac{45}{25}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{57}{37}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{56}{36}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{56}{54}$.

VII. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 57.

Der letzte Zug von VI ist durch $\frac{55}{57}$ zu ersetzen.

VIII. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 57.

Der erste Zug von VII ist durch $\frac{55}{57}$ zu ersetzen.

IX. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 24.

Die ersten 27 Züge von VI, alsdann $\frac{56}{54}$; $\frac{54}{34}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{44}{24}$.

X. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 24.

Der erste Zug von IX ist zu ersetzen durch $\frac{55}{57}$.

XI. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 51.

Zunächst die ersten 6 Züge von X; die 24 folgenden leiten sich aus den entsprechenden von VI durch Spiegelung an der horizontalen Mittellinie her; der letzte Zug ist $\frac{53}{51}$.

XII. Anfangsloch: 24; Schlußloch: 24.

$\frac{44}{24}$; $\frac{36}{34}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{57}{37}$; $\frac{56}{36}$; $\frac{45}{25}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{32}{34}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{51}{31}$; $\frac{52}{32}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{54}{56}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{73}{75}$; $\frac{45}{65}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{56}{54}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{42}{44}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{44}{24}$.

XIII. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 55.

$\frac{53}{55}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{75}{73}$; $\frac{65}{63}$; $\frac{52}{54}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{54}{52}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{31}{51}$; $\frac{32}{52}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{45}{65}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{65}{45}$; $\frac{35}{55}$; $\frac{47}{45}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{45}{25}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{13}{15}$; $\frac{23}{25}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{36}{34}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{34}{54}$; $\frac{53}{55}$.

XIV. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 52.

Der letzte Zug von XIII ist zu ersetzen durch $\frac{54}{52}$.

XV. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 52.

Der erste Zug von XIV ist zu ersetzen durch $\frac{54}{52}$.

XVI. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 25.

Die 28 ersten Züge von XV, dann $\frac{43}{23}$; $\frac{44}{24}$; $\frac{23}{25}$.

Selbstverständlich kann es für jede der vorstehenden Aufgaben noch andere und zumeist sogar recht viele andere Lösungen geben. Die von uns angegebenen erheben keinen Anspruch darauf, einen Vorzug vor anderen zu besitzen. Ihre Auswahl war nur durch systematische Gesichtspunkte bestimmt, und unter den sonst existierenden Lösungen werden sich gewiß viel elegantere vorfinden. Sehr viel besser gegliedert und daher übersichtlicher ist z. B. folgende Lösung für Aufgabe I:

$$\frac{42}{44}, \frac{63}{43}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{23}{43}, \frac{44}{42}, \frac{31}{33}, \frac{41}{43}, \frac{43}{23} \,\Big\|\, \frac{13}{33}, \frac{34}{32}, \frac{15}{13}, \frac{25}{23}, \frac{13}{33}, \frac{32}{34} \,\Big\|$$

$$\frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{75}{73}, \frac{65}{63}, \frac{73}{53}, \frac{52}{54} \,\Big\|\, \frac{45}{65}, \frac{57}{55}, \frac{37}{57}, \frac{54}{56}, \frac{57}{55}, \frac{65}{45}, \frac{46}{44}, \frac{44}{24}, \frac{36}{34}, \frac{24}{44},$$

wobei die durch 2 vertikale Striche markierten Stellen sich nach den jeweiligen Konfigurationen als natürliche Einschnitte in dem Gange der Lösung darstellen.

§ 4. Theorie des Spiels.

Auf die Theorie des Spiels soll hier nicht weiter eingegangen werden, als daß wir ihre wichtigsten Resultate — ohne mathematische Begründung — angeben. Zu dem Zwecke definieren wir zunächst als „kongruente" Felder zwei Felder von der Art, daß von dem einen zu dem andern ein Übergang möglich ist durch ein- oder mehrmaliges überspringen von je zwei in horizontaler oder vertikaler Richtung liegenden Feldern. Kongruent sind so z. B. die Felder 15 und 45, da man von 15 zu 45 durch Überspringen von zwei zwischengelegenen Feldern (25 und 35) gelangt; ebenso ist 42 zu 45 kongruent und desgleichen 42 zu 15 (45 ist Zwischenstufe für diesen letzteren Übergang). Ferner soll jedes Feld auch als mit sich selbst kongruent angesehen werden. — Die mathematische Untersuchung lehrt nun, daß auf unserem Brett der 33 Felder eine Lösung für die im vorigen Paragraphen erörterte „Hauptaufgabe" des Spiels höchstens dann möglich ist, wenn Anfangs- und Schlußloch so vorgeschrieben wurden, daß sie „kongruent" in dem angegebenen Sinne sind.

Die soeben angegebene Vorbedingung für die Lösbarkeit der Hauptaufgabe, nämlich die Kongruenz von Anfangs- und Schlußfeld, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend; d. h. immer, wenn sie erfüllt ist, ist auch die Hauptaufgabe lösbar, und das System der 16 in § 3 gegebenen Beispiele birgt bereits für alle möglichen Fälle, in denen die Hauptaufgabe überhaupt lösbar ist, wenigstens je eine Lösung in sich. Dies erkennt man folgendermaßen: Man beachte zunächst, daß die Figur des Bretts bei Drehung um einen oder mehrere rechte Winkel mit sich selbst zur Deckung kommt, und ferner, daß sie in bezug auf die horizontale und die vertikale Mittellinie symmetrisch ist, so daß also bei Spiegelung an einer dieser die eine Hälfte des Brettes mit der anderen sich decken würde. Man sieht so, daß die bei diesen Spiegelungen und Drehungen zusammenfallenden Felder offenbar für unsere Aufgabe äquivalent sind, wonach sich folgende Gruppen von untereinander äquivalenten Feldern ergeben:

1) 13; 15; 37; 57; 75; 73; 51; 31.
2) 14; 47; 74; 41.
3) 25; 36; 56; 65; 63; 52; 32; 23.
4) 24; 46; 64; 42.
5) 35; 55; 53; 33.
6) 34; 45; 54; 43.
7) 44.

Gibt also z. B. Nr. II in § 3 eine Lösung für 44 als Anfangs- und 74 als Schlußloch, so läßt sich danach sofort eine Lösung für die Aufgabe: „44 Anfangsloch, 14 Schlußloch“ angeben, da die Änderung nur einer Spiegelung an der vertikalen Mittellinie entspricht. Ebenso ergibt sich z. B. aus Nr. VII (54 Anfangsloch, 57 Schlußloch) sofort eine Lösung für „45 Anfangs- und 75 Schlußloch“, da die Änderung einer Vierteldrehung in der umgekehrten Drehungsrichtung des Uhrzeigers ↶, verbunden mit nachfolgender Spiegelung an der vertikalen Mittellinie, entspricht.

Sodann erhält man aus der Lösung für Anfangsloch a und Schlußloch b sofort eine Lösung für Anfangsloch b und Schlußloch a, indem man das Lösungsschema der ersteren Aufgabe umkehrt, d. h. die Brüche in umgekehrter Reihenfolge (vom hinteren zum vorderen Ende) liest. Daß in der Tat diese Beziehung stattfindet, soll hier unter Verzicht auf einen allgemeinen Beweis nur an dem Beispiel eines besonders einfachen Spielbrettes plausibel

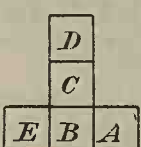

Fig. 8.

gemacht werden, nämlich an dem der Fig. 8, das wir, um eben einen möglichst einfachen Fall zu haben, einmal für einen Moment unserem gewöhnlichen Spielbrett substituieren wollen. Es sei A als Anfangs-, E als Schlußloch vorgeschrieben; die Lösung der Hauptaufgabe ist alsdann: $\frac{E}{A}$; $\frac{D}{B}$; $\frac{A}{E}$. Kehren wir nun die Reihenfolge der 3 Brüche um, schreiben also: $\frac{A}{E}$; $\frac{D}{B}$; $\frac{E}{A}$, so ist dies die Lösung der Hauptaufgabe für den Fall: E Anfangs- und A Schlußloch. Zwei Aufgaben, welche in dieser Beziehung der reziproken Vertauschung von Anfangs- und Schlußloch zueinander stehen, wollen wir „reziproke" nennen.

Man sieht nun zunächst, daß unter den 16 Lösungen des § 3 sieben enthalten sind, in denen das Anfangsloch zugleich Schlußloch ist, und zwar sind diese 7 so gewählt, daß jede der obigen 7 Gruppen von Feldern (S. 28) einen Repräsentanten hierfür gestellt hat, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Nr. der Gruppe von Feldern	Das aus der Gruppe ausgewählte Feld	Nr. der betr. Aufgabe in § 3
1	57	VIII
2	74	III
3	52	XV
4	24	XII
5	55	XIII
6	54	VI
7	44	I

Die Hauptaufgabe bei gleichem Anfangs- und Schlußloch ist somit durch die Lösungen des § 3 für alle 33 Felder erschöpfend gelöst. So bleiben also nur die Fälle, in denen Anfangs- und Schlußloch verschieden sind, wobei wir zunächst wiederholen, daß Anfangs- und Schlußloch stets, damit überhaupt Lösungen existieren, „kongruent" in dem angegebenen Sinne sein müssen. Nun sieht man, daß alle zu Feld 44 (Gruppe 7) kongruenten Felder gerade in Gruppe 2 stehen, und diese Felder von Gruppe 2 sind auch unter sich kongruent und besitzen kongruente Felder in den anderen 5 Gruppen nicht. Die Gruppen 2 und 7 bilden also eine gewisse Gemeinschaft in der Art, daß wenn das Anfangsloch dieser Gemeinschaft entnommen wird, auch das Schlußloch ihr entnommen werden muß, wofern die Hauptaufgabe überhaupt lösbar sein soll. Offenbar ergeben sich innerhalb dieser Gemeinschaft nur folgende wesentlich verschiedene Fälle von Aufgaben (bei ungleichem Anfangs- und Schlußloch):

Anfangsloch	Schlußloch
44	74
74	47
74	14

Diese Aufgaben sind aber in § 3 unter II, IV, V behandelt. Rechnet man dazu noch die Nummern I und III für die Fälle eines gleichen Anfangs- und Schlußloches, so umfassen also die Nummern I—V alle wesentlich verschiedenen Fälle, welche innerhalb der von den Feldergruppen 2 und 7 gebildeten Gemeinschaft vorkommen können. Für jeden anderen Fall läßt sich aus einem dieser 5 die Lösung sofort deduzieren durch die Beziehungen der Symmetrie (Drehungen und Spiegelungen) und der Reziprozität (Vertauschung von Anfangs- und Schlußloch). — Entsprechend bilden die Gruppen 1, 4 und 6 eine Gemeinschaft: zwar ist nicht jedes Feld dieser Gemeinschaft jedem anderen kongruent, aber jedes zu einem Felde dieser Gemeinschaft kongruente Feld gehört wieder der Gemeinschaft an. Die verschiedenen Fälle, die sich innerhalb dieses Gebietes ergeben, sind in § 3 durch die Nummern VI—XII erledigt. Schließlich bilden die Gruppen 3 und 5 eine dritte Gemeinschaft, der in § 3 die Lösungen XIII—XVI zugehören.

Frage 7: Gib eine Lösung an für den Fall: 14 Anfangsloch, 41 Schlußloch.

Frage 8: Gib eine Lösung an für den Fall: 52 Anfangsloch, 55 Schlußloch.

Frage 9: Gib eine Lösung an für den Fall: 46 Anfangsloch, 13 Schlußloch.

§ 5. **Das französische Spielbrett** (37 Felder).

Wir wollen noch einige Worte über das in Frankreich übliche Spiel mit 37 Löchern in der Anordnung der Fig. 9 sagen. Hier ist die Hauptaufgabe des Spiels bei vollbesetztem Brett und einem beliebigem Anfangsloche nicht mehr unbedingt lösbar, sondern nur dann, wenn

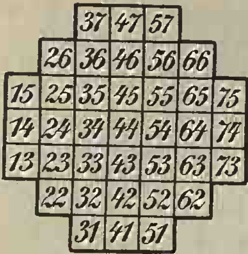

Fig. 9.

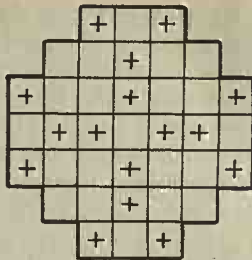

Fig. 10.

das Anfangsloch eines der in Fig. 10 mit einem Kreuz versehenen 16 Felder ist. Diese 16 Felder gehören 3 verschiedenen Gruppen an im Sinne unserer obigen Ausführungen auf S. 28. Als Repräsentanten dieser 3 Gruppen können wir betrachten die Felder 13, 42 und 45. Ist zunächst 13 Anfangsloch, so ergibt sich für die Hauptaufgabe etwa folgende Lösung:

$$\frac{33}{13};\ \frac{31}{33};\ \frac{43}{23};\ \frac{13}{33};\ \frac{63}{43};\ \frac{51}{53};\ \frac{43}{63};\ \frac{73}{53};\ \frac{45}{43};\ \frac{25}{45};\ \frac{37}{35};\ \frac{45}{25};\ \frac{15}{35};\ \frac{65}{45};\ \frac{57}{55};$$

$$\frac{45}{65};\ \frac{75}{55};\ \frac{43}{23};\ \frac{24}{44};\ \frac{22}{24};\ \frac{14}{34};\ \frac{41}{43};\ \frac{54}{56};\ \frac{74}{54};\ \frac{47}{45};\ \frac{66}{46};\ \frac{45}{47};\ \frac{34}{36};\ \frac{26}{46};\ \frac{43}{63};$$

$$\frac{62}{64};\ \frac{47}{45};\ \frac{45}{43};\ \frac{64}{44};\ \frac{43}{45}.$$

Schlußloch ist hier also 45. Hätten wir als letzten Zug — statt $\frac{43}{45}$ — gewählt: $\frac{44}{42}$, so wäre 42 Schlußloch geworden. Nehmen wir von diesen beiden Lösungen, von denen die eine 45, die andere 42 als Schlußloch aufweist, die reziproken, so erhalten wir zwei Lösungen, beide mit 13 als Schlußloch, und mit 45 bezw. 42 als Anfangsloch. 45 und 42 waren aber unsere Repräsentanten der beiden anderen Gruppen von Anfangsfeldern, so daß für diese hiermit zugleich die Existenz von Lösungen bewiesen ist. Es ist damit also gezeigt, daß die in Fig. 10 mit Kreuzen versehenen 16 Felder als Anfangslöcher möglich sind, d. h. daß, wenn eins dieser 16 Felder Anfangsloch ist, während das Schlußloch nicht vorgeschrieben sein soll, die Hauptaufgabe jedenfalls eine Lösung besitzt. — Auf einen Beweis dafür, daß die übrigen 21 (in Fig. 10 leeren) Felder als Anfangslöcher überhaupt nicht möglich sind, verzichten wir hier.

Es mag hier noch ein Paar anderer Aufgaben betrachtet werden und zwar im Gegensatz zu denen des § 2 einmal solche, bei denen eine bestimmte Figur nicht, wie dort, Ausgang, sondern Ziel des Spiels ist. Es sollen also zunächst als erste Aufgabe bei vollbesetztem Brett mit leerem Mittelfeld die Pflöcke der Spielregel gemäß so weit entfernt werden, daß die in Fig. 11 durch die Schraffierung angegebene Figur des Buchstaben E übrig bleibt. Als Lösung ergibt sich die folgende:

$$\frac{42}{44};\ \frac{62}{42};\ \frac{54}{52};\ \frac{73}{53};\ \frac{52}{54};\ \frac{41}{43};\ \frac{22}{42};\ \frac{43}{41};\ \frac{34}{32};\ \frac{54}{34};\ \frac{56}{54};\ \frac{75}{55};\ \frac{54}{56};\ \frac{74}{54};\ \frac{46}{44};$$
$$\frac{26}{46};\ \frac{34}{36};\ \frac{15}{35};\ \frac{14}{34};\ \frac{13}{33};\ \frac{47}{45};\ \frac{66}{46};\ \frac{45}{47}.$$

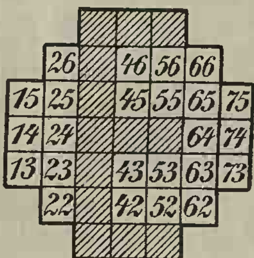

Fig. 11.

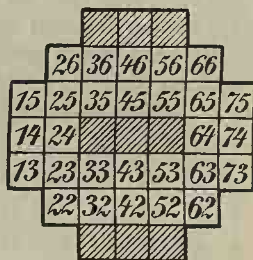

Fig. 12

Als zweites Beispiel soll behandelt werden die Aufgabe, bei vollbesetztem Brett und leerem Mittelfeld alle Löcher bis auf die in Fig. 12 schraffierten zu leeren. Lösung:

$$\frac{42}{44};\ \frac{22}{42};\ \frac{34}{32};\ \frac{13}{33};\ \frac{54}{34};\ \frac{56}{54};\ \frac{36}{56};\ \frac{34}{36};\ \frac{32}{34};\ \frac{41}{43};\ \frac{62}{42};\ \frac{43}{41};\ \frac{54}{52};\ \frac{73}{53};\ \frac{52}{54};$$
$$\frac{15}{35};\ \frac{26}{46};\ \frac{34}{36};\ \frac{14}{34};\ \frac{46}{44};\ \frac{75}{55};\ \frac{66}{46};\ \frac{54}{56};\ \frac{74}{54};\ \frac{37}{35};\ \frac{56}{36};\ \frac{35}{37}.$$

Kapitel IV.

Wanderungsspiele.

§ 1. Eulersche Wanderungen.

(Die Pregelbrücken bei Königsberg.)

Der Pregel bildet bei Königsberg durch Gabelung eine Insel, welche „Kneiphof“ heißt (A in Fig. 1). Über den Fluß führen an dieser Stelle im ganzen 7 (in der Fig. 1 mit ihren Namen bezeichnete) Brücken, davon 5 auf die Insel selbst, wozu als sechste und siebente die „Holzbrücke“ und die „Hohe Brücke“ (s. Fig. 1)

Fig. 1.

hinzutreten. In den dreißiger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts wurde nun die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, die 7 Brücken hintereinander, jede aber nur einmal, zu passieren, eine Frage, die auch den großen Mathematiker Leonhard Euler interessiert und zu weitergehenden Untersuchungen angeregt hat.

Die Königsberger Aufgabe ist nicht lösbar, wie man leicht folgendermaßen erkennt: Ersetzen wir die Gebiete A, B, C, D durch Punkte und die Brücken durch Linien, so erhalten wir das Diagramm der Fig. 2. Wir können unsere Aufgabe dann so aussprechen: Die 7 Linien der Fig. 2 sind hintereinander zu durchlaufen und zwar jede ein-, aber auch nur einmal; dabei dürfen die Punkte A, B, C, D beliebig oft passiert werden. Nun münden in A 5 Linien, in B deren 3 und ebenso in C und D je 3, also in jedem der 4 Punkte jedenfalls eine ungerade Anzahl von Linien. Man denke sich nun, daß man auf der Wanderung jede Linie, die man gerade durchlaufen hat, mit einem Zeichen, etwa einem Querstrich, versieht, um anzudeuten, daß die betr. Linie erledigt ist und hinfort gemieden werden muß. Wenn man so im Laufe der Wanderung einen Punkt, sagen wir A, passiert, so werden also bei diesem Durchgang durch A zwei der dort mündenden Linien einen Querstrich erhalten, nämlich erstens diejenige, längs deren man zu A gelangt ist, zweitens die, auf der man A wieder verläßt. Passiert man A ein zweites Mal, so scheiden wieder zwei solche Linien aus; zusammen bei zwei Durchgängen durch A also vier Linien, jedenfalls stets eine gerade Anzahl. Eine Ausnahme hiervon bilden nur Ausgangspunkt und Endpunkt der ganzen Wanderung; bei diesen beiden Punkten wird es möglich sein, eine ungerade Anzahl von Linien zum Ausscheiden zu bringen. Beginnt man z. B. die ganze Wanderung in B, so scheidet zunächst nur eine der 3 in B mündenden Linien aus, eben diejenige, auf der man die Wanderung von B aus antritt. Es bleiben also 2 der Linien von B übrig und diese würden ausscheiden, wenn man im Laufe der Wanderung den Punkt B nochmals erreichen und wieder verlassen

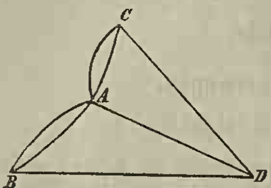

Fig. 2.

würde. — Ebenso würden z. B. die 3 in C mündenden Linien zum Verschwinden gebracht werden, wenn man auf der Wanderung zunächst C einmal passierte (2 Linien scheiden aus) und später die ganze Wanderung in C beschlösse (1 Linie scheidet aus). — Man sieht also, daß zwei Punkte mit ungeraden Anzahlen von Linien die Lösbarkeit der Aufgabe keineswegs beeinträchtigen würden: man hätte nur den einen der beiden Punkte als Ausgangspunkt der Wanderung zu nehmen und den andern als Endpunkt. Nun haben wir aber in unserem Königsberger Fall vier Punkte mit ungeraden Anzahlen von Linien und daher ist die gestellte Aufgabe unlösbar.

Besteht dagegen auch noch eine Verbindung zwischen B und C, wie eine solche jetzt tatsächlich durch eine in der Fig. 1 links (ohne Namen) verzeichnete Eisenbahnbrücke hergestellt ist, so lassen sich diese 8 Brücken in einem zusammenhängenden Zuge passieren. Es münden alsdann nämlich in den Punkten B und C (s. das jetzige Diagramm in Fig. 3) je 4 Linien und in A und D 5 resp. 3 Linien; die beiden letzteren Punkte müssen daher zum Anfangs- und Endpunkt des Linienzuges genommen werden. Ein solcher Linienzug ist z. B. der durch die Fig. 3 angegebene, wo die beigesetzten Ziffern angeben, in welcher Reihenfolge die 8 Linien durchlaufen werden können.

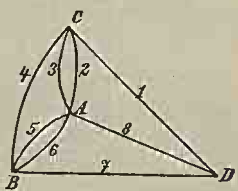

Fig. 3.

Um noch einige weitere Beispiele anzuführen, so erkennt man sofort, daß die Seiten und Diagonalen eines Quadrats sich auch nicht in einem, sondern erst in 2 Zügen durchlaufen lassen, weil wir (s. Fig. 4) hier 5 Punkte haben, von denen 4 je 3 Linien aussenden. Man müßte also, um alle Linien zu durchwandern, etwa eine erste Wanderung von A nach B, von dort nach C, dann nach E und darauf nach B unternehmen und sodann eine zweite von C nach D, dann nach E, darauf nach A und schließlich nach D. Erst durch diese zwei Wanderungen lassen sich alle Linien je einmal durchlaufen.

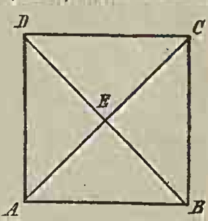

Fig. 4.

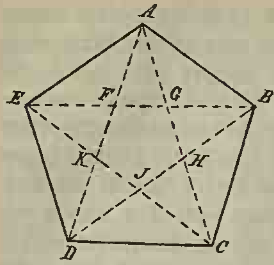

Fig. 5.

Dagegen läßt sich ein 5=Eck mit allen seinen Diagonalen in einem Zuge durchlaufen, weil in allen Punkten je 4 Linien münden (s. Fig. 5). Die Bahn der Durchwanderung kann hier sogar geschlossen werden, d. h. man kann die Wanderung in ihrem Ausgangspunkt beenden, weil hier keinerlei Punkte mit einer ungeraden Anzahl von Linien vorkommen. Eine solche geschlossene Bahn ist z. B.:

A B C D E F G B H J D K F A G H C J K E A.

Könnte eine Spinne in dem nachfolgenden (Fig. 6) Stück Mauerwerk sämtliche Fugen in einem Zuge, jede gerade einmal,


Fig. 6.

durchwandern? Die Antwort lautet offenbar „nein", weil in allen Kreuzungspunkten je 3 Linien münden. Dagegen läßt sich die geforderte Wanderung z. B. für das Liniensystem der Fig. 7 ausführen, weil nur zwei Punkte, A und O, mit un=

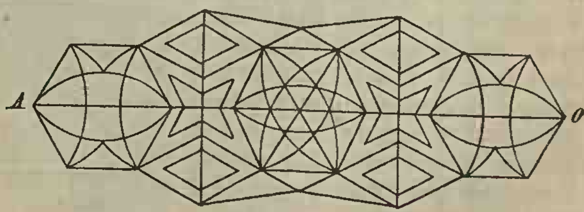

Fig. 7.

geraden Anzahlen von Linien vorkommen. Bei der praktischen Ausführung einer solchen Durchlaufung hat man nur darauf zu achten, daß, wenn man sich alle bereits durchlaufenen Linien fortgenommen denkt, die nächste Linie niemals so gewählt wird, daß durch ihre Fortnahme eine Zerfällung des Systems eintritt, vielmehr zuvor alle anderen von dem betreffenden Punkt ausgehenden Linien durchlaufen werden.

§ 2. Hamiltonsche Wanderungen.

(Eine Rundreise durch die deutschen Universitätsstädte.)

Während es im vorigen Paragraphen sich darum handelte, die Linien eines Liniensystems zu durchwandern und zwar jede ein- und auch nur einmal, wobei die Kreuzungspunkte beliebig oft passiert werden durften, soll jetzt eine Aufgabe gestellt werden, bei der alle **Punkte** des Systems ein- und nur einmal zu passieren sind, während die Linien beliebig oft, d. h. gar nicht oder einmal, durchwandert werden. Wir geben unserer Aufgabe folgende Form:

> Ein angehender Studiosus, der sich über die Wahl seiner alma mater nicht schlüssig werden kann, will seine Mulus-Ferien zu einer Orientierungsfahrt durch die Universitätsstädte des Deutschen Reiches verwenden und erst dann seine Wahl treffen. Für die Reise sollen nur die auf unserer Karte[1] (Fig. 8) angegebenen Land- resp. Wasserrouten benutzt werden und zwar soll jede Stadt ein-, aber auch nur einmal passiert werden. Die Reise soll eine „Rundreise" sein, d. h. zum Ausgangspunkt zurückführen.

Im folgenden wollen wir die 20 Orte abgekürzt durch ihre 2 ersten Buchstaben bezeichnen, also Berlin z. B. durch Be usw.

---

[1]) Die jüngste deutsche Universität, Münster, der übrigens zu einer vollständigen Universität immer noch die eigentlich medizinische Fakultät fehlt, ist hierbei aus einem Grunde, den der Leser nach Lektüre dieses ganzen Paragraphen (s. besonders den Schluß S. 45/46) leicht erkennen wird, außer Betracht gelassen und soll auch bei allen ferneren Aufgaben dieses Abschnitts außer Betracht bleiben.

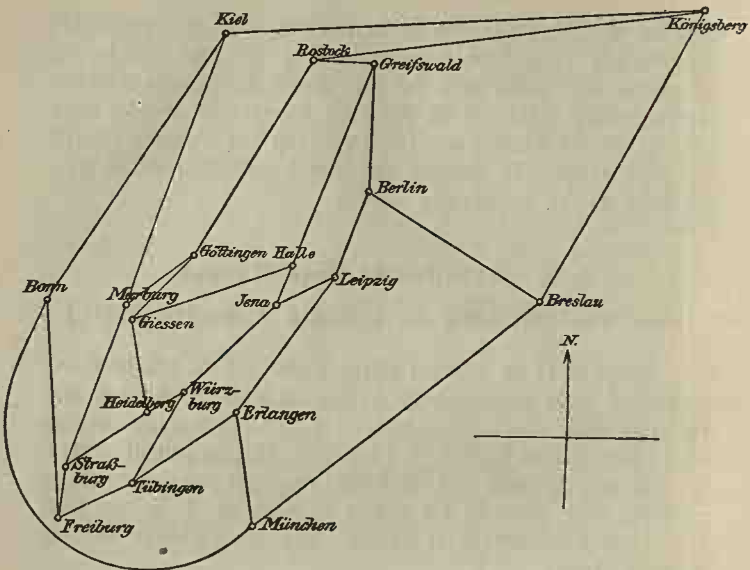

Fig. 8.

Unsere Karte (Fig. 8) ist nun so eingerichtet, daß in jedem der 20 Orte 3 Wege münden, z. B. in Berlin einer von Breslau, ein zweiter von Leipzig und der dritte von Greifswald. Erforderlich für eine vollständige Rundreise durch alle 20 Städte sind immer nur je 2 dieser 3 Wege, nämlich einer für die Ankunft und der andere für die Abfahrt, so daß also von den 3 Kommunikationswegen jeder Station immer gerade einer unbenutzt bleiben wird. Man wird somit von allen 30 Straßen unseres Plans 10 auszumerzen haben und zwar so, daß jede der 20 Stationen gerade einen Anschluß verliert; der Rest des Plans gibt dann eine vollständige Rundreise, die an beliebigem Punkte begonnen werden kann und ebendort auch beschlossen wird. Entfernt man z. B. die Routen:

Be—Gr
Ro—Kö
Ki—Ma
Br—Mü
Er—Le

Gi—Gö
Bo—Fr
Ha—Je
St—He
Tü—Wü,

wodurch jede der 20 Stationen je eine Verbindung verliert, so bleibt, wenn man etwa bei Be beginnt, folgende Rundreise übrig: Be —Br—Kö—Ki—Bo—Mü—Er—Tü—Fr—St—Ma—Gö—Ro—Gr—Ha—Gi—He—Wü—Je—Le—Be resp. die in umgekehrter Richtung erfolgende. — Natürlich besitzt unsere Aufgabe an sich zahlreiche weitere Lösungen, wovon späterhin die Rede sein wird.

Da es für unsere Betrachtungen offenbar nur auf die Verbindungen zwischen den 20 Orten, nicht aber auf deren geographische Lage ankommt, so wird ein Diagramm, das nur auf diese Verbindungen Rücksicht nimmt, eine bessere Übersicht gewähren als die Karte der Fig. 8. Zu einem solchen gelangen wir leicht, wenn wir folgendes beachten: Etwa in der Mitte unserer Fig. 8 sehen wir ein Fünfeck Gi—Ha—Je—Wü—He—Gi.

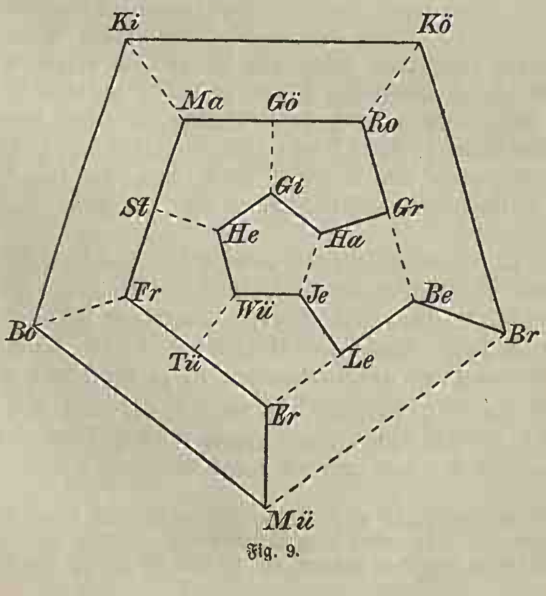

Fig. 9.

An jede der 5 Seiten dieses Fünfecks legt sich wieder ein Fünfeck an, z. B. an die Seite Ha—Je das Fünfeck Ha—Je—Le—Be—Gr—Ha, und ebenso legt sich an die anderen 4 Seiten je ein Fünfeck. Stellen wir dies alles rein schematisch dar, so kommen wir schließlich zu dem Diagramm der Fig. 9, wobei der Leser sich leicht überzeugt, daß die Art der Verbindungen zwischen den 20 Stationen in Fig. 9 genau dieselbe ist wie in Fig. 8. — Ein Leser, der etwa an der Fig. 9 ein geographisches Ärgernis nehmen möchte, sei auf das Diagramm der Fig. 10 hingewiesen, wo die 20 Punkte durch die ersten 20 Buchstaben des Alphabets bezeichnet sind, ohne daß ihnen eine bestimmte geographische Bedeutung beigelegt ist. — Noch durch einen anderen unwesentlichen Umstand unterscheiden sich die beiden im übrigen ganz gleich beschaffenen Diagramme der Figuren 9 und 10: Wir haben nämlich in Fig. 9 die 10 Routen, welche wir bei unserem obigen Beispiel einer Rundreise ausgelassen hatten, gestrichelt gezeichnet[1]). Der Leser hat bereits bemerkt, daß natürlich nie zwei dieser gestrichelten Linien in einem Punkte zusammenstoßen (vgl. S. 38/39); die ausgezogenen Linien geben, wenn man, bei Be—Br beginnend, ihnen folgt, natürlich unsere oben angegebene Rundreise.

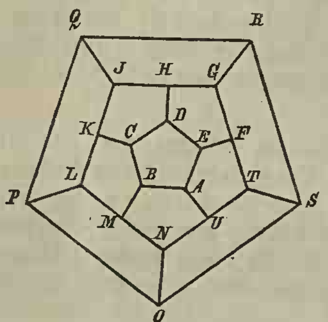

Fig. 10.

Wenn unser Reisender evangelische Theologie studieren will und daher die Universitäten München, Freiburg und Würzburg nicht beziehen kann, wie wäre alsdann eine Reise durch die übrigen 17 Städte (unter Vermeidung der ausgenommenen 3) zu bewirken? —

Da Fr und Wü fortfallen, so hat Tü nur noch eine Verbindung, nämlich nach Er, und ebenso Bo wegen des Fortfalls von Fr und Mü nur noch die eine Verbindung nach Ki. Die

[1]) Weiterhin, also abgesehen von diesem Beispiel, sollen die ausgezogenen und gestrichelten Linien der Fig. 9 natürlich als durchaus gleichberechtigt angesehen werden, ebenso wie die Linien der Fig. 10.

Reise ist also nur dann in der vorgeschriebenen Weise ausführbar, wenn sie zufällig in Tü oder Bo begonnen wird. Ist Tü der Ausgangspunkt, so ist die Reise so einzurichten, daß Bo der Endpunkt wird und umgekehrt. Keinenfalls kehrt man also zum Ausgangspunkt zurück.

Frage 10: Gib ein wirkliches Beispiel einer solchen Reise durch die 17 Orte an!

Frage 11: Will der Reisende sich dem Studium der katholischen Theologie widmen, so kommen außer den schon genannten Universitäten München, Freiburg und Würzburg nur noch Breslau, Bonn, Tübingen und Straßburg, welche je zwei theologische Fakultäten besitzen, in Betracht. Ist eine Reise durch diese 7 Orte (unter Fortlassung aller übrigen 13) möglich und wie? Wie ist es, wenn man die jüngste kath.-theologische Fakultät, Straßburg, fortläßt?

Frage 12: Gib alle Routen für eine Reise durch die zehn mittel- und süddeutschen nichtpreußischen Universitäten an (unter Ausschluß der übrigen 10 natürlich)!

Frage 13: Dasselbe, wie in Frage 12, für die 9 preußischen Universitäten und Rostock! — Ist eine Reise durch die 9 preußischen Universitäten allein möglich resp. durch wie viele höchstens?

Nach diesen speziellen Fragen, deren Beantwortung wir dem Leser überlassen durften, wollen wir uns wieder der allgemeinen Betrachtung unseres Liniensystems zuwenden. Die Betrachtung der Diagramme lehrt uns, daß die Struktur unseres Liniensystems eine überall homogene ist: Längs jeder der 30 Linien stoßen zwei Fünfecke zusammen [1]); in jedem der 20 Punkte treffen drei Linien zusammen. Alle Punkte des Netzes sind daher völlig gleichberechtigt, die äußeren wie die inneren. Eine

[1]) Auch für die äußeren Linien gilt dies, wenn wir das große Fünfeck OPQRS (s. Fig. 10) mitrechnen und uns dies gewissermaßen als Rückseite des Papierblatts denken. Dieses grenzt dann z. B. längs der Linie QR an das Fünfeck QJHGR (man stoße sich nicht daran, daß JHG als gerade Linie, also das Fünfeck QJHGR als Viereck gezeichnet ist; wir hätten die Linie JHG ebensogut gebrochen zeichnen können, jedoch kommt es darauf hier gar nicht an, sondern nur auf die topologischen Verhältnisse).

Wanderung (s. Fig. 10), die, bei A beginnend, mich der Reihe nach durch alle Punkte führt, würde mich daher auch, wenn ich sie z. B. bei G oder bei S begönne und nach denselben Grundsätzen wie die erstere durchführte, wieder durch alle Punkte hindurchführen. Dies ist eine unmittelbare Folge der vollkommenen Gleichmäßigkeit in der Struktur des Systems. Ein allgemeines Rezept für die Durchwanderung aller 20 Punkte läßt sich nun leicht geben: Beginnen wir (s. Fig. 9) z. B. bei Br und gehen zunächst nach Kö, so stehen uns für die weitere Fortsetzung zwei Wege, einer rechts nach Ki und der andere links nach Ro, zur Verfügung. Drücken wir das Einschlagen des Weges rechts durch ein r, das des linken durch ein l aus, so führt uns die Befolgung der Regel

r r r l l l r l r l r r r l l l r l r l

stets durch alle Punkte des Netzes. Wir würden also für unser Beispiel in Kö den Weg rechts nach Ki, dort wieder rechts nach Bo, dort abermals rechts nach Mü, dann links nach Er, wiederum links nach Tü, abermals links nach Fr, dann wieder rechts nach St, links nach Ma usw. zu wählen haben. Man erhält dann in unserem Falle gerade die S. 39 angegebene Rundreise, nur mit anderem Ausgangspunkt, indem die dortige zweite Station jetzt die erste ist, was aber offenbar unerheblich ist, da beide Reisen ja Rundreisen, also in sich geschlossen sind. Die nicht durchlaufenen 10 Strecken sind natürlich gerade die in Fig. 9 gestrichelten.

Wir erhalten so eine geschlossene, alle 20 Punkte umfassende Bahn. Da wir nun diese Bahn ebensogut auch in umgekehrter Richtung, sowie auch von irgend einem anderen ihrer 20 Punkte aus durchlaufen können, so sieht man, daß unsere obige Vorschrift ein Zyklus sein muß, den wir daher auch in der Form der Fig. 11 schreiben wollen, und ferner, daß wir eine richtige Lösung bei beliebigem Ausgangspunkt stets erhalten, wenn wir unserem Zyklus Fig. 11 an beliebiger Stelle einen Einschnitt geben und dann den von ihm angegebenen Weg beschreiben. Wir könnten daher z. B. unser Rezept auch so schreiben:

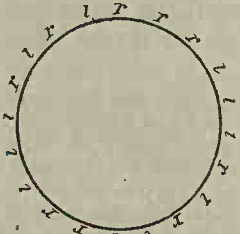

Fig. 11.

l r l r l r r r l l l r l r l r r r l l

Würden wir, wieder mit dem Anfang Br—Kö, hiernach verfahren, so erhielten wir eine andere Rundreise, nämlich Br—Kö—Ro—Gö—Gi—He—Wü—Tü—Fr—St—Ma—Ki—Bo—Mü—Er—Le—Je—Ha—Gr—Be—Br. — Man erkennt so, daß, wenn die ersten beiden Stationen vorgeschrieben sind, stets noch eine Anzahl verschiedener Rundreisen infolge der verschiedenen Vorschriften, die in dem Zyklus Fig. 11 stecken, möglich sind. Wenn man nun alle diese verschiedenen Formen des Zyklus Fig. 11 erschöpft, wobei zu beachten ist, daß der Zyklus in zweierlei Richtungen gelesen werden, also jede Vorschrift umgekehrt werden darf, so erhält man, wie leicht zu sehen, bei zwei vorgeschriebenen Anfangsstationen 20 Rundreisen.

Sind die 3 ersten Stationen vorgeschrieben, z. B. Be—Br—Mü, so wird man nicht mehr jede in der Fig. 11 steckende Vorschrift verwenden können, in unserem Falle z. B. nicht alle diejenigen, die mit l beginnen. Es gibt dann nur halb so viele Rundreisen wie zuvor, da eben alle mit l beginnenden Vorschriften ausscheiden und nur alle mit r beginnenden verbleiben. (Die mit l beginnenden Vorschriften sind bei der völligen Symmetrie des ganzen Systems ebenso zahlreich wie die mit r anfangenden). Die Zahl der Rundreisen ist also jetzt 10. Wir könnten diese Betrachtungen leicht fortsetzen und jetzt den Fall der vorgeschriebenen 4 ersten Stationen ins Auge fassen, wollen uns jedoch begnügen, die Resultate in tabellarischer Zusammenstellung anzugeben:

Zahl der vorgeschriebenen ersten Stationen.	Zahl der Rundreisen.
1.	30.[1]
2.	20.
3.	10.
4.	6 oder 4.
5.	4 oder 2.
6.	3, 2, 1 oder 0.
7.	2, 1 oder 0.
8 oder mehr.	1 oder 0.

[1]) Hierbei sind zwei Rundreisen, die sich nur durch die Durchlaufungsrichtung unterscheiden, für eine gezählt; anderenfalls wäre in der ersten Zeile, für die allein dies in Betracht kommt, 60 statt 30 zu setzen.

Dabei geben diese Zahlen nicht nur die Zahl der aus den Vorschriften der Fig. 11 resultierenden Rundreisen an, sondern diese Zahlen sind auch identisch mit den Zahlen aller überhaupt existierenden Rundreisen der betreffenden Art; denn der Zyklus der Fig. 11 umfaßt alle überhaupt möglichen. Ob die Zahlen der obigen Tabelle richtig sind, mag der Leser prüfen an der Hand der Beispiele von

Frage 14: Gib an, auf wie viele und welche Arten sich die folgenden Reise-Anfänge zu vollständigen Rundreisen ergänzen lassen:

a) Mü—Er—Le—Je;
b) Be—Br—Mü—Er;
c) Ha—Gi—Gö—Ma—Ki;
d) St—Fr—Bo—Mü—Er;
e) Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma;
f) Ha—Gi—Gö—Ma—St—Fr.

Es könnte natürlich neben dem Anfang auch eine Endstation vorgeschrieben werden, wobei denn von der Forderung einer Rundreise, d. h. einer zum Ausgangspunkt zurückführenden Route, zumeist wird abgesehen werden müssen. Jedoch wird man schon, wenn nur die drei ersten Stationen vorgeschrieben sind, nicht eine beliebige Endstation vorschreiben dürfen. Bei dem Anfange Be—Le—Je kann beispielsweise Ha nicht Endstation sein, da dann wenigstens eine Station stets unberührt bliebe, z. B. Br bei folgender Route: Be—Le—Je—Wü—He—Gi—Gö—Ma—St—Fr—Tü—Er—Mü—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Ha.

Ist dagegen z. B. He—Gi—Ha als Anfang und Ki als Endstation vorgeschrieben, so gibt es 4 Lösungen, wie man leicht so erkennt: Auf He—Gi—Ha folgt als Fortsetzung entweder Je oder Gr. Im ersteren Falle muß auf Je notwendig Wü folgen, da dieses, bei bereits aufgehobener Verbindung nach He, sonst übrig bleiben würde. Von Wü geht es nach Tü. Man hat also, wenn Je 4. Station sein soll, den Anfang He—Gi—Ha—Je—Wü—Tü. Man tut gut, diejenigen Strecken zu markieren, die außer den bereits passierten für die Fortsetzung ausgeschieden sind, nämlich bisher: He—St; Gi—Gö; Ha—Gr; Je—Le; Wü—He. Man erkennt so, daß, wenn man von Tü nach Er fortschreitet, man von hier weiter nach Le gehen muß, weil anderenfalls wegen des Fortfalls der Strecke Le—Je sonst Le ganz unberührt bliebe. Aus ähnlichen Gründen müßte man, wenn man von Tü nach Fr fortschritte, fortfahren St—Ma—Gö—Ro—Gr; hierbei würde jedoch, da Ki Endpunkt ist, entweder Bo oder Kö ganz übrig bleiben. Die Fortsetzung Tü—Fr ist also unbrauchbar und es bleibt nur die andere: Tü—Er—Le. In dieser Weise ist die Betrachtung fortzusetzen und man erhält schließlich die Lösung:

He—Gi—Ha—Je—Wü—Tü—Er—Le—Be—Gr—Ro—Gö—
Ma—St—Fr—Bo—Mü—Br—Kö—Ki.

Entsprechend erhält man für den Fall, daß nicht Je, sondern Gr an vierter Stelle steht, 3 und zwar folgende Lösungen:

He—Gi—Ha—Gr—Be—Le—Je—Wü—Tü—Er—Mü—Br—
Kö—Ro—Gö—Ma—St—Fr—Bo—Ki.

He—Gi—Ha—Gr—Be—Br—Kö—Ro—Gö—Ma—St—Fr—
Tü—Wü—Je—Le—Mü—Bo—Ki.

He—Gi—Ha—Gr—Ro—Gö—Ma—St—Fr—Bo—Mü—Er—
Tü—Wü—Je—Le—Be—Br—Kö—Ki.

Zusammen gibt es also 4 Lösungen für den Anfang He—Gi—Ha mit Ki als Endpunkt.

Frage 15: Bei manchen beliebig begonnenen Routen sitzt man wohl schon nach einigen Stationen ganz fest und muß daher die Reise ganz abbrechen; bei der wievielten Station kann dies frühestens eintreten?

In historischer Hinsicht sei noch bemerkt, daß unser Spiel von dem berühmten englischen Mathematiker Hamilton erfunden ist, der seinem Spiel allerdings eine andere Einkleidung als die unserige gab. Hamilton ließ den Reisenden eine Reise ausführen über alle Ecken eines Körpers, der in der Mathematik unter dem Namen des Dodekaeders bekannt ist. Es ist dies ein Körper, der 20 Ecken und 30 Kanten besitzt und von 12 fünfeckigen Flächen begrenzt wird. Eine anschauliche Vorstellung

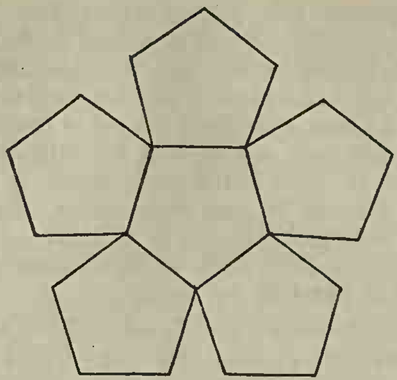

Fig. 12.

dieses Körpers vermag die Fig. 12 zu geben. Wird diese Figur etwa aus Pappe ausgeschnitten, so ist der Leser oder die Leserin sofort imstande, daraus eine Art Korb zu verfertigen, dessen Bodenfläche das innere Fünfeck ist, während die 5 übrigen Fünfecke umzubiegen und etwa aneinanderzunähen wären, um dann dem Korb als Seitenflächen zu dienen. Denkt man sich dann auf diesen Korb einen zweiten ebensolchen umgekehrt aufgestülpt, also mit dem einen oberen Korbrand auf den anderen oberen Korbrand, so entsteht ein Dodekaeder. Als morphologisches Diagramm dieses Körpers mit seinen 20 Ecken, 30 Kanten und 12 fünfeckigen Begrenzungsflächen können dann unsere Figuren 10 und 9 dienen, woraus der Leser die Identität unserer Aufgabe mit der Hamiltonschen erkennt.

Kapitel V.

Dyadische Spiele.

§ 1. Die Reihe der Potenzen der Zahl 2.

Von der Erfindung des Schachsspiels und dessen angeblichem Erfinder Sissa Ibn Dahir erzählt ein alter orientalischer Schriftsteller folgende Legende: Der indische König Shihram wurde über das Spiel, das zu seiner Unterhaltung von Sissa erfunden war, von lebhafter Bewunderung und Freude erfüllt; er befahl, Schachbretter in den Tempeln aufzustellen, und betrachtete das Spiel als die beste Sache, welche man lernen könne, da es eine Anleitung zur Kriegskunst, eine Ehre für die Religion und die Welt und das Fundament aller Gerechtigkeit sei. Um dem Erfinder seine Dankbarkeit zu bezeigen, sagte er zu ihm: „Bitte mich um alles, was Du begehrest." „Dann wünsche ich," antwortete Sissa, „daß ein Weizenkorn auf das erste Feld des Schachbretts, zwei auf das zweite gelegt und die Zahl der Körner fortwährend verdoppelt werde, bis das letzte Feld erreicht sei: welches dies Quantum auch sein möge, ich wünsche es zu bekommen." Hierbei stellte sich nun heraus, daß das Getreide aller königlichen Speicher und selbst des ganzen Landes nicht ausreichen würde, dieses Verlangen, das dem Könige ursprünglich außerordentlich bescheiden vorgekommen war, zu befriedigen. Als dem Könige Shihram dies gemeldet wurde, sprach er zu Sissa: „Dein Scharfsinn, einen solchen Wunsch auszudenken, ist noch bewundernswerter als Dein Talent im Erfinden des Schachspiels."

In der Tat würde sich, da das Schachbrett 64 Felder (8×8) hat, eine ungeheuer große Zahl von Weizenkörnern ergeben, nämlich für alle 64 Felder zusammen die 20stellige Zahl

18 446 744 073 709 551 615,

eine Körnermenge, die ausreichen würde, um das ganze feste Land der Erde bis zu einer Höhe von fast 1 cm. zu bedecken. Die Zahlen wachsen, durch die Verdoppelung von Feld zu Feld, natürlich sehr schnell und nehmen schließlich ungeheuer große Werte an. — Diese Tatsache des ungeheuren Wachstums bei fortgesetzter Verdoppelung benutzte einmal eine in München erscheinende Zeitung der vormärzlichen Zeit, „Die Deutsche Tribüne", zu einem seinerzeit vielbelachten Witze:[1]) Das Blatt wußte sich gegenüber den beständigen Zensurplackereien nicht anders zu helfen, als daß es die vom Zensor gestrichenen Artikel trotzdem abdruckte. Natürlich wurde es nun mit Geldstrafe belegt und zwar wurde, da die Zeitung dies Verfahren fortsetzte, die Geldbuße von Fall zu Fall verdoppelt. Da brachte die „Tribüne" eines schönen Tages einen Artikel, in dem genauer dargelegt wurde, daß das Ministerium ein Mittel erfunden habe, um die bayerischen Staatsschulden in Jahr und Tag zu decken. Es brauche nur mit der angeordneten jedesmaligen Verdoppelung der Geldstrafen in der begonnenen Weise fortzufahren. Die Heiterkeit war allgemein, und die bayerische Regierung sah sich veranlaßt, zu anderen Mitteln zu greifen, verzichtete sogar auf den Versuch, die Geldstrafen, die bereits eine unerschwingliche Höhe erreicht hatten, einzutreiben — und der bayerische Staat hat so seine Staatsschulden bis zum heutigen Tage behalten.

Kehren wir zu dem Fall der Weizenkörner auf dem Schachbrett zurück und schreiben wir für die einzelnen Felder die Zahlen der Körner hin, so erhalten wir eine Reihe von Zahlen, die so beginnt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, womit wir nur erst für ein Viertel aller Felder des Schachbretts die betreffenden Zahlen angegeben haben Die Zahlen dieser Reihe, von denen jede sich aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit 2 ergibt. ($2 \times 8 = 16$), nennt man die Potenzen der Zahl 2, und zwar

---

[1]) Ludwig Salomon, „Geschichte des Deutschen Zeitungswesens", Bd. III, p. 450.

bezeichnet man die Zahl 2 selbst als die erste Potenz von 2, die Zahl $4 = 2 \times 2$ als die zweite, die Zahl $8 = 2 \times 2 \times 2$ als die dritte Potenz der 2 usw. Man schreibt dies auch folgendermaßen:

$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 4$$
$$2^3 = 8$$
$$2^4 = 16$$
$$2^5 = 32 \text{ usw.}$$

Aus Gründen der Analogie wird man alsdann die erste Zahl der obigen Reihe, nämlich 1, die nullte Potenz der 2 nennen und entsprechend auch: $2^0 = 1$ schreiben müssen.

Zu welch' großen Zahlen die Potenzen von 2 bei weiterer Fortsetzung der obigen Reihe sehr bald werden, mag auch noch folgendes Beispiel veranschaulichen: angenommen, es passiere um Mitternacht ein Verbrechen, etwa ein Mord; ein Augenzeuge teile dies in der ersten Viertelstunde 2 anderen Menschen mit und jeder dieser in der nächsten Viertelstunde wieder 2 anderen, noch nicht benachrichtigten usf., so wäre bereits bis $7\,^1/_2$ Uhr die ganze Menschheit davon unterrichtet. Die wirkliche numerische Rechnung soll hier nicht durchgeführt werden, doch würde der Leser, wenn er diese leicht ausführbare Rechnung unternimmt, finden, daß um $7\,^1/_2$ Uhr bereits ca. 2000 Millionen Menschen von dem Geschehnis benachrichtigt sein könnten, also mehr als die gesamte Menschheit ausmacht. Um $7\,^1/_4$ Uhr dürfte jedoch der Nachrichtendienst noch nicht eingestellt werden; denn alsdann wären erst ca. 1000 Millionen Menschen benachrichtigt. In der nun folgenden Viertelstunde würden dann, falls es bis zu 2000 Millionen Menschen gäbe, rund 1000 Millionen benachrichtigt werden, also ebenso viele wie in den vorhergehenden $7\,^1/_4$ Stunden zusammen.

Die zuletzt angegebene Tatsache beruht auf einer besonderen Eigenschaft, welche die Reihe der Potenzen von 2 aufweist. Um diese Eigenschaft besser zu erkennen, wollen wir links vor unsere Reihe noch eine 1 schreiben, so daß die Reihe also beginnt: 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32. In dieser Reihe ist nun jede Zahl ebenso groß wie alle in der Reihe vorhergehenden zusammengenommen, z. B. $1 + 1 + 2 = 4$, sodann $1 + 1 + 2 + 4 = 8$.

Gilt dies aber für den Anfang, also z. B. bis 8, so gilt es auch stets weiterhin, wie der Leser sofort aus der Schreibweise

$$\underbrace{1,\ 1,\ 2,\ 4,}_{8}\ 8,\ 16$$

sieht, wenn er bedenkt, daß nach dem Bildungsgesetz resp. der Definition der Reihe auf 8 die Zahl $2 \times 8 = 16$, auf 16 wieder $2 \times 16 = 32$ usw. folgt. Lassen wir nun die zur Aushilfe hinzugenommene erste Eins wieder fort, so ist die Summe der Zahlen bis zur 8 (mit Ausschluß dieser) nicht mehr $= 8$, sondern nur $= 7$, also um 1 kleiner als die in der Reihe folgende Potenz 8, und wir haben daher das Resultat:

Satz 1: In der Reihe der Potenzen der Zahl 2 ist jede Zahl um 1 größer als alle vorhergehenden zusammengenommen.

Damit haben wir den Grund dafür erkannt, daß in dem oben betrachteten Beispiel in der letzten Viertelstunde ebensoviele Menschen von dem betreffenden Ereignis benachrichtigt werden konnten wie in allen vorhergehenden 29 Viertelstunden zusammengenommen, wenn wir von der Differenz 1 einmal absehen, da sie bei den großen Zahlen nicht ins Gewicht fällt. Aus demselben Grunde gehören, wenn wir noch einmal auf unser früheres Beispiel zurückgreifen dürfen, auf das 64. Feld des Schachbretts ebensoviel Weizenkörner resp. genau gesprochen: noch ein Korn mehr als auf die ersten 63 Felder zusammengenommen. Auf Grund unseres Satzes würde man daher, wenn die Gesamtzahl der Weizenkörner aller 64 Felder auszurechnen wäre, diese Addition aller 64 Zahlen nicht einzeln ausführen, sondern natürlich nur die Zahl der Körner des letzten Feldes berechnen. Diese Zahl, vermindert um 1, ist dann zugleich die Summe der Körner von den übrigen 63 Feldern.

Die Reihe der Potenzen der Zahl 2 spielt eine gewisse Rolle in der Ahnentafel des einzelnen Menschen: der Stammbaum des einzelnen Menschen weist auf 2 Eltern, 4 Großeltern, im allgemeinen 8 Urgroßeltern usw. Denkt man sich diese Reihe von Generation zu Generation fortgeführt und rechnet man auf das Jahrhundert nur 3 Generationen, so erhält man für den Beginn der christlichen Zeitrechnung eine Ahnenzahl des jetztlebenden Menschen, welche ungeheuer groß ist, zwar der

Zahl der Weizenkörner auf dem Schachbrett noch nicht gleichkommt, jedoch über diese Zahl sogar noch erheblich hinausgeht, wenn man die Berechnung der Ahnenzahl etwa bis zum Beginn der römischen Zeitära ausdehnt. So groß wäre also bereits die Zahl der Ahnen jedes einzelnen Menschen, die aller jetzt lebenden Menschen zusammengenommen also vermutlich noch beträchtlich größer. Bedeckten nun die Weizenkörner des Schachbretts bereits die ganze feste Erde bis zu der Höhe von fast 1 cm., so werden also die weniger genügsamen, aber nicht minder zahlreichen Ahnen eines jetztlebenden Menschen zur Zeit der Erbauung Roms keinenfalls überhaupt Platz auf der festen Erde gefunden haben. Wenn wir also nicht annehmen wollen, daß unsere Vorfahren zum großen Teil Wasser- oder Luftbewohner waren, so stehen wir hier vor einem Rätsel, das um so seltsamer erscheinen muß, als von so beispielloser Übervölkerung kein Chronist, keine Überlieferung uns berichtet. — Der Leser hat natürlich sofort erkannt, daß wir hier das Opfer eines Trugschlusses geworden sind. Der Schlüssel, der uns den scheinbaren Widerspruch erschließt, ist leicht gefunden: wenn auch jeder Mensch 2 Eltern haben muß und weiter — wenigstens in den Kulturstaaten, in denen Verbindungen zwischen Geschwistern gesetzlich verboten sind — 4 Großeltern haben wird, so sind doch die weiteren Zahlen, nämlich 8 für die Anzahl der Urgroßeltern usw., nur Maximalzahlen, die nicht erreicht zu werden brauchen und in den ferneren Generationen bei weitem nicht erreicht werden. Ein extrem gewähltes Beispiel mag dies veranschaulichen: Es seien A, a und B, b zwei Ehepaare, wobei durch die großen Buchstaben — auch weiterhin — die Männer, durch die kleinen die Frauen bezeichnet sein mögen. Aus der ersten Ehe mögen zwei männliche Nachkommen C, D hervorgehen, aus der zweiten zwei weibliche c, d, was wir so andeuten wollen:

$$\begin{array}{ccc} A\smile a & \qquad & B\smile b \\ | & & | \\ C,\ D & & c,\ d \end{array}$$

Nun mögen C und c einerseits und D und d andererseits eine Ehe eingehen. Die Nachkommenschaft sei angegeben durch

$$\begin{array}{ccc} C\smile c & \qquad & D\smile d \\ | & & | \\ E,\ F & & e,\ f. \end{array}$$

E möge nun mit seiner Base e eine Ehe eingehen, wie in den meisten Staaten zulässig, und F ebenso mit seiner Base f. Gehen aus der ersten Ehe G, H hervor, aus der zweiten g, h und schließen diese wieder Ehen mit einander (G mit g; H mit h), so haben die Kinder dieser Ehen 4 Großeltern (E, e, F, f), jedoch auch nur 4 Urgroßeltern (C, c, D, d) und auch nur 4 Ururgroßeltern (A, a, B, b). Natürlich hätten wir dies Verfahren noch beliebig weiter fortsetzen können und wir sehen also, daß den oben angegebenen hohen Maximalzahlen die Zahl 4 als Minimalzahl für die Anzahl der Ahnen der entfernteren Generationen gegenübersteht. Die wirkliche Zahl wird im allgemeinen in den Grenzen zwischen diesem Minimal- und dem Maximalwert schwanken, ohne daß die theoretisch erreichbaren Grenzwerte praktisch auch nur im entferntesten je erreicht werden.

Nachdem wir uns soeben durch das schnelle Wachstum der Potenzen einer Zahl zu einem Trugschluß hatten verleiten lassen, mag jetzt noch ein Verfahren aus dem Geschäftsleben erwähnt werden, bei dem das schnelle Wachstum der Potenzen einer Zahl eine wichtige Rolle spielt und das im Grunde genommen nur auf einer einseitigen Verkennung dieses schnellen Wachstums beruht. Das Verfahren, das wir meinen, ist bekannt unter dem Namen des Hydra- oder Schneeball- oder Lawinensystems und machte auch in Deutschland vor einigen Jahren viel von sich reden, bis Urteile des Reichsgerichts solche Veranstaltungen, die eine Kombination von Ausspiel- und Kaufgeschäft darstellen, bei Fehlen obrigkeitlicher Erlaubnis für unstatthaft erklärten. Wir wollen die Beschreibung des Verfahrens hier ganz unseren vorstehenden Ausführungen anpassen und es, von allem für unsere Zwecke unwesentlichem Beiwerk losgelöst, so angeben: Ein Kaufmann, sagen wir ein Fahrradhändler, kündigt an, daß bei ihm jedermann ein Fahrrad im Werte von 150 Mk. für 50 Mk. erwerben könne. Der Reflektant A, der sich an den Kaufmann wendet, erhält von diesem gegen Zahlung von 50 Mk. 2 Coupons oder Anteilscheine[1]), die mit einer bestimmten Nummer

---

[1]) In Wirklichkeit pflegt die Zahl der zusammengehörigen Anteilscheine eine größere, wohl mindestens 4, zu sein, wodurch das Geschäft bei oberflächlicher Prüfung für den Käufer der Ware natürlich einen noch vorteilhafteren Anschein erhält.

versehen sind und die A an zwei andere Personen abzugeben versuchen soll mit der Verpflichtung, daß diese Personen, nennen wir sie B und C, auch je 50 Mk. an den Kaufmann einzahlen. Wenn diese Einzahlungen erfolgt sind, so erhält A das versprochene Fahrrad, B und C dagegen jeder gleichfalls zwei Anteilscheine, die sie nun in derselben Weise weitervertreiben sollen wie A die seinigen. Wir wollen, wie wir den Fall überhaupt ganz schematisch unseren Zwecken entsprechend zugestutzt haben, annehmen, daß A der einzige primäre Couponentnehmer ist, also der einzige, der unmittelbar seine Coupons von dem Kaufmann bezieht, und wollen weiter annehmen, daß er sie im Laufe einer Woche absetzt. B und C, die durch Vermittelung von A Coupons erhalten haben, mögen diese im Laufe der zweiten Woche absetzen, ihre 4 Hintermänner die ihrigen wieder im Laufe der dritten Woche und so mag dies immer weiter gehen. Das Reichsgericht, das bei Erörterung dieser Dinge an einigen Stellen — nicht immer glücklich — mathematisch wird, meint, „die Verbreitung der Coupons würde, theoretisch betrachtet, ins Unermeßliche fortschreiten."[1] Der Leser wird dem hohen Gericht entgegenhalten, daß, so lange alle Coupons von einer Zentrale aus versandt werden, von einer „Unermeßlichkeit" gewiß keine Rede sein kann, zumal jeder Coupon eine bestimmte Nummer tragen muß, die im Umlauf befindliche Anzahl also zu jeder Zeit haarscharf „ermeßlich" ist. Vermutlich soll allerdings mit diesem Ausdruck, der freilich gegen die beim Gebrauch der Begriffe des Unendlichen resp. Unermeßlichen zu beobachtende Vorsicht entschieden verstößt, nur gesagt werden, daß die sich ergebenden Zahlen sehr groß werden, und in der Hinsicht ist der Leser, wenn er sich des obigen Beispiels von der Verbreitung einer Nachricht erinnert, in der Lage, sofort anzugeben, daß in dem von uns angenommenen Falle am Ende der 30. Woche die gesamte Menschheit mit Coupons versehen wäre. Nehmen wir an, daß Berlin z. B. der Ausgangspunkt des Unternehmens ist und alle Coupons solange in Berlin selbst abgesetzt werden, bis jedermann dort versehen ist, so würde nach etwa 20 Wochen dieser Zustand eingetreten sein. Von da ab würde sich die Couponverbreitung lawinenartig fort-

---

[1]) Urteil v. 14 Febr. 1901; s. Entscheidungen des Reichsg. in Strafsachen, Bd. 34, p. 141.

pflanzen und bereits nach weiteren 5 Wochen ungefähr das deutsche Reich, schließlich nach weiterem Verlauf von etwa 5 Wochen die ganze Erde überschwemmt sein können. Zu Fahrrädern würde dabei allerdings nur die eine Hälfte der Menschheit gelangen, wenn wir einmal die Gesamtzahl der Menschen so groß annehmen, daß auch die Coupons der 30. Woche gerade alle noch untergebracht werden können. In dieser letzten Woche würden alsdann — von der Differenz 1 abgesehen — ebensoviele Anteilscheine abgesetzt werden wie in allen 29 Wochen vorher zusammen. Die Inhaber dieser Anteilscheine der 30. Woche, also die zweite Hälfte der Menschheit, würden natürlich für die gezahlten 50 Mk. nichts erhalten, sondern sich mit dem beglückenden Bewußtsein begnügen müssen, zu den Fahrradkäufen der anderen je 50 Mk. beigesteuert zu haben. Tatsächlich würde der Kaufmann also für jedes Fahrrad 100 Mk. erhalten haben,[1]) während z. B., wenn bereits B und C ihre Anteilscheine nicht absetzen würden, das Fahrrad des A mit 150 Mk. bezahlt wäre.

§ 2. Eine praktische Anwendung der Reihe der Potenzen von 2.

Die Gewichtssätze unserer gleicharmigen Wagen bestehen gewöhnlich aus folgenden Stücken:

1 g., 2 g., 2 g., 5 g., 10 g., 20 g., 20 g., 50 g.

und setzen sich nach diesem Prinzip eventuell nach beiden Seiten hin fort. Der Gewichtssatz, den wir hier betrachten wollen, mag auf die angegebenen 8 Gewichte beschränkt sein und ermöglicht alsdann jedenfalls alle Wägungen von 1 g. bis einschließlich 110 g. und zwar von g. zu g.

Wir wollen nun die Frage erheben, ob sich dieselben Wägungen, wie mit diesen 8 Gewichten, noch mit einer

---

[1]) In praxi gestaltet sich das Geschäft natürlich schon im Anfange wesentlich anders: zunächst würden sehr viele Personen, die sich überhaupt beteiligen wollen, direkt von dem Kaufmann Coupons entnehmen, nicht, wie wir annahmen, nur einer; sie oder ihre Hintermänner ersten oder weiteren Gliedes würden alsdann mit ihren Coupons ganz oder teilweise hängen bleiben und entweder ihren Einsatz von 50 Mark verlieren oder, wenn sie diesen nicht verloren geben wollen, selbst die Abnehmer ihrer noch nicht untergebrachten Coupons werden müssen.

geringeren Anzahl von Gewichten ausführen ließen, resp. wie viele Gewichte mindestens und welche hierzu erforderlich sind.

Dabei wollen wir voraussetzen, daß die Gewichte stets alle auf dieselbe Schale der Wage gelegt, also nicht etwa z. T. als Gegengewichte auf der zweiten Schale verwandt werden sollen. Dann muß zunächst, will man ein Gewicht von 1 g. abwägen können, in dem Gewichtssatz jedenfalls das Gewicht 1 g. vertreten sein.[1]) Will man auch 2 g. abwägen, so muß entweder zu dem Gewicht von 1 g. noch ein gleiches hinzutreten oder aber ein Gewicht von 2 g. vertreten sein. Die letztere Annahme führt uns jedoch weiter als die erstere, indem sie nämlich außer den Abwägungen von 1 g. und 2 g. auch zugleich eine solche von 3 g. = 1 g. + 2 g. uns ermöglicht. Wir werden daher die beiden ersten Stücke unseres gesuchten Gewichtssatzes so wählen: 1 g., 2 g. Um nun auch 4 g. abwägen zu können, brauchen wir entweder ein weiteres Gewicht von 1 g. oder noch eins von 2 g. oder eins von 3 g. oder schließlich eins von 4 g. Der Leser ist keinen Moment darüber im Zweifel, wofür wir uns zu entscheiden haben werden: denn während z. B. ein Gewichtssatz von 1 g., 2 g., 2 g. uns nur alle Wägungen von 1 g. bis 5 g. ermöglicht, können wir mit 1 g., 2 g., 4 g. alle Wägungen von 1 g. bis 7 g. einschließlich ausführen ($5 = 4 + 1$; $6 = 4 + 2$; $7 = 4 + 2 + 1$). Um nun hierüber hinaus zu kommen, werden wir offenbar ein Gewicht von 8 g. hinzunehmen und können alsdann mit den 4 Gewichten 1 g., 2 g., 4 g., 8 g. bereits alle Wägungen von 1 g. bis 15 g. inkl. ausführen, indem

$$\begin{aligned} 9 &= 8 + 1 \\ 10 &= 8 + 2 \\ 11 &= 8 + 2 + 1 \\ 12 &= 8 + 4 \\ 13 &= 8 + 4 + 1 \\ 14 &= 8 + 4 + 2 \\ 15 &= 8 + 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

---

[1]) Würden die Gewichte auf beide Schalen verteilt, so ließe sich 1 g. ja auch ohne das Eingrammsgewicht abwägen, etwa als Differenz von 3 g. und 2 g. Läßt man diese Art Wägungen (durch Kontregewichte) zu, so kommt man tatsächlich mit noch weniger Gewichten aus, als sich für unsere Fragestellung ergeben werden, doch soll dieser Fall, wie gesagt, hier nicht in Betracht gezogen werden.

ist. Man sieht sofort, daß man jetzt ein Gewicht von 16 g. wird hinzunehmen müssen, und wir erkennen in der Reihe von Zahlen, auf die wir hier kommen: 1, 2, 4, 8, 16 die aus dem vorigen Paragraphen uns wohlbekannte Reihe der Potenzen der Zahl 2 wieder. In der Tat würden wir bei weiterer Fortsetzung unseres Verfahrens stets nach den Zahlen dieser Reihe fortschreiten müssen, so daß also jetzt 32, 64, 128 usw. kommen würden. Man erkennt diese Notwendigkeit leicht folgendermaßen: Die Gewichte 1 g., 2 g., 4 g., 8 g. ermöglichen alle Wägungen von 1 g. bis 15 g. einschließlich, wie wir gezeigt haben. Ich denke mir diese 15 Wägungen nun der Reihe nach ausgeführt und lege jedesmal das neu hinzugetretene Gewicht 16 g. dazu: alsdann erhalte ich statt der Wägungen von 1 g. bis 16 g. alle Wägungen von 17 g. bis 31 g. inkl. Zu dieser letzten Abwägung von 31 g. brauche ich alsdann alle 5 Gewichte (1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g.) und zwar ist es kein Zufall, daß wir mit diesen 5 Gewichten gerade bis zu der Zahl (31) reichen, die um 1 kleiner ist als diejenige Zahl, welche in der Reihe der Potenzen der 2 auf unsere 16 folgt, nämlich 32. Vielmehr ist es, wie im vorigen § bewiesen wurde (s. Satz 1), eine allgemeine Eigenschaft dieser Reihe, daß jede Zahl der Reihe um 1 größer ist als die Summe aller vorhergehenden, wonach also die Summe von 1, 2, 4, 8, 16 gerade um 1 kleiner als 32 sein muß. Wir werden daher auch mit den Gewichten 1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g., 32 g. nur bis einschl. 63 g. abwägen können, bis hierhin aber auch lückenlos von g. zu g. Das weiter hinzutretende Gewicht muß dann 64 g. sein, und dieser Gewichtssatz von jetzt 7 Gewichten: 1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g., 32. g., 64 g. ermöglicht uns alle Wägungen bis einschließlich 127 g.; er leistet somit, obwohl nur aus 7 Gewichten bestehend, mehr als die im Verkehrsleben üblichen mit ihren ersten 8 Gewichten, die nur Wägungen bis 110 g. gestatten, wie schon oben gesagt.

Bei Gelegenheit dieser praktischen Aufgabe gewannen wir zugleich ein wichtiges allgemeines Resultat, von dem wir noch weiterhin Gebrauch machen werden und das wir daher für sich gesondert aussprechen wollen:

Satz 2: Jede beliebige Zahl läßt sich darstellen als Summe von Zahlen aus der Reihe der Potenzen der 2 und zwar so, daß jede dieser Zahlen der Reihe höchstens einmal in der Summe vorkommt.

Frage 16: Leistet nicht ein Gewichtssatz, bestehend aus den Gewichten 1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g., 33 g., 65 g. noch mehr als der oben angegebene, indem er auch noch Abwägungen von 128 g. und 129 g. ermöglicht?

Frage 17: Durch wieviel Gewichte kann ein Gewichtssatz, bestehend aus Gewichten von 1 g., 2 g., 2 g., 5 g., 10 g., 20 g., 20 g., 50 g., 100 g., 200 g., 200 g. ersetzt werden?

§ 3. Erraten gedachter Zahlen und Gegenstände.

Die in dem Satze des vorigen Abschnitts ausgesprochene Möglichkeit der Darstellung jeder Zahl als Summe von lauter verschiedenen Potenzen von 2 findet bei zahlreichen Spielen und Aufgaben Anwendung, wovon wir hier jetzt zwei Proben geben wollen. Wir wollen dabei die Zahlen der gedachten Reihe, also 1, 2, 4, 8 . . ., der einfacheren Unterscheidung halber als unsere „Grundzahlen“ bezeichnen.

I. Das Erraten einer gedachten Zahl.

In einer Gesellschaft denkt man sich eine Zahl, welche der vorher hinausgesandte A sich anheischig macht zu erraten, falls der mit ihm unter einer Decke spielende B ihn durch einige aneinandergelegte Münzen auf die richtige Fährte führen darf,

wobei es, wie A und B etwa geheimnisvoll behaupten, auf die Winkel ankomme, unter denen die Münzen aneinandergelegt sind. Die Verabredung zwischen A und B geht einfach dahin, daß die Kehrseite (Wappenseite, Revers) einer Münze immer eine Null, die Kopfseite (Avers) dagegen die verschiedenen Potenzen von 2 („Grundzahlen“) und zwar von links anfangend sukzessive 1, 2, 4, 8, . . . bedeuten soll. B stellt die gedachte Zahl dann einfach als Summe unserer Grundzahlen 1, 2, 4, 8, . . . dar. Wenn B also z. B. aus Münzen die Fig. 1 formt, so bedeutet dies: Da die erste Münze links die Wappenseite zeigt, so ist die erste Grundzahl, also 1, fortzulassen; dagegen hat A wegen der Kopf-

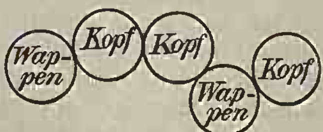

Fig. 1.

seite der zweiten und dritten Münze die zweite und dritte Grundzahl, also 2 und 4, zu nehmen; die vierte Grundzahl (8) ist wieder auszulassen, die fünfte (16) dagegen zu nehmen. Die gedachte Zahl ist somit $2 + 4 + 16 = 22$, welche A sodann der staunenden Menge verkünden darf.

II. Das Erraten eines gedachten Bildes.

Auf einer Karte sind 32 verschiedene Bilder dargestellt, etwa in 4 Reihen zu je 8. Irgend jemand, sagen wir Z, wird von A aufgefordert, sich eins dieser Bilder zu denken; A wird dann erraten, welches Bild Z sich gedacht hat.

Außer der großen Karte mit allen 32 Bildern besitzt A noch 5 weitere Karten („Teilkarten"), auf deren jeder 16 der 32 Bilder (etwa in 2 Reihen zu 8) abgebildet sind. A hält nun dem Z jede dieser 5 Karten der Reihe nach vor und läßt sich jedesmal von ihm angeben, ob das gedachte Bild auf der betreffenden Karte vorkommt oder nicht. Nach den Antworten, die Z hierauf gibt, kann A das gedachte Bild eindeutig bestimmen.

Es ändert offenbar an dem Spiel nichts, wenn wir uns statt der 32 Bilder die Zahlen 1—32 denken: das erste Bild der großen Karte werde eben durch die Zahl 1 ersetzt, das zweite durch 2, das letzte durch 32, wobei wir bei dieser Numerierung in jeder Reihe der Bilder von links nach rechts gehen und die 4 Reihen von oben nach unten durchlaufen. Jede der Zahlen 1—32 läßt sich nun als Summe der Grundzahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32 darstellen. Wir denken uns diese Darstellung für alle 32 Zahlen durchgeführt, also in der Form $23 = 1 + 2 + 4 + 16$. Wie oft, meint der Leser wohl, wird bei diesen 32 Darstellungen rechts die Grundzahl 1 vorkommen? Offenbar tritt sie nur auf bei allen ungeraden Zahlen, also bei 1, 3, 5 . . . 31. Es sind deren im ganzen 16. Diese 16 Zahlen resp. die ihnen entsprechenden Bilder sind auf der einen der 5 Teilkarten abgebildet. Aber nicht nur die 1 tritt bei diesen Darstellungen gerade 16 mal auf, sondern, wie eine einfache Überlegung zeigen würde, ebenso auch die übrigen Grundzahlen, also die 2, die 4, die 8, die 16, die letzte Zahl z. B. für die Darstellung der Zahlen 16—31. Man hat daher die 16 Zahlen, bei denen die Grundzahl 2 auftritt, resp. die ihnen zugeordneten 16 Bilder auf die zweite Teilkarte gebracht und entsprechend den Grundzahlen 4, 8 und 16 die drei weiteren Teilkarten angefertigt. Die Zahl 32 resp. das 32. Bild kommt offenbar auf keiner der Teilkarten vor. Die 5 Teilkarten sehen also, wenn wir auf jeder die Zahlen der Größe nach ordnen, so aus, wie die Tabelle

I.	II	III	IV	V
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

zeigt, wobei wir uns nur statt der Zahlen die betreffenden Bilder gesetzt denken müssen. Gibt nun Z beispielsweise an, daß das von ihm gedachte Bild auf den Teilkarten II, III, V vertreten ist, auf den Teilkarten I und IV aber fehlt, so sagt dies dem A folgendes: Die Teilkarten I, II, III, IV, V entsprechen den Grundzahlen 1, 2, 4, 8, 16 (in unserer Tabelle steht auf jeder Teilkarte die betreffende Grundzahl und zwar obenan); von diesen Grundzahlen sind im vorliegenden Falle die zweite, dritte und fünfte zu nehmen, also 2, 4, 16, die erste und vierte dagegen (1 und 8) fortzulassen. Das gedachte Bild hat also auf der großen Karte den Platz $2 + 4 + 16 = 22$ und ist damit eindeutig bestimmt.

Kommt das gedachte Bild auf keiner der 5 Teilkarten vor, so ist es das 32., das letzte der großen Karte.

§ 4. Der Lucassche Turm.

Dieses von dem französischen Mathematiker E. Lucas erfundene Spiel besteht aus einem Brett mit 3 Pflöcken; auf einem der Pflöcke befindet sich eine Anzahl (bei uns 8) in der Mitte durchbohrter Scheiben pyramidenartig übereinander und nach der Größe geordnet.

> Das Spiel besteht darin, die Scheiben alle auf einen der beiden anderen Pflöcke zu bringen, wenn man zur Zeit immer nur eine Scheibe umsetzen und stets bei allen Umsetzungen nur eine kleinere Scheibe auf eine größere, niemals umgekehrt setzen darf.

Natürlich soll das Ziel durch möglichst wenig Operationen erreicht, unnötige Umsetzungen also vermieden werden.

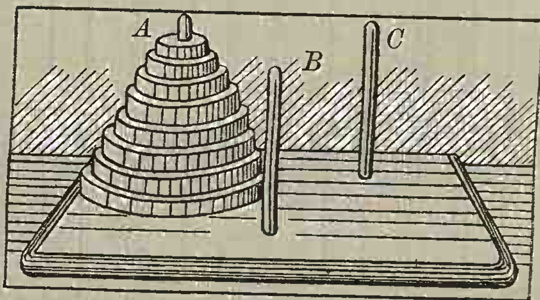

Fig. 2.

Es sei C der Pflock, auf den die Scheiben gebracht werden sollen, A der, auf dem sie ursprünglich sitzen, wie in Fig. 2 angegeben. Man beginne das Spiel zunächst mit nur 2 Scheiben, denke sich also die übrigen 6 unserer Figur fort. Man sieht, daß man alsdann die oberste Scheibe auf B zu stecken hat, dann die untere (größere) auf C und nun die von B auf C. Bei 2 Scheiben sind also 3 Umsetzungen erforderlich zur Erreichung des Ziels. — Nimmt man jetzt 3 Scheiben — wir wollen sie von oben nach unten 1, 2, 3 nennen —, so wird man, bevor die Scheibe 3 von A heruntergenommen werden kann, erst 1 und 2 auf einen anderen Pflock bringen müssen und zwar wird man dies so einzurichten haben, daß 3 alsdann sofort auf C kommt. C muß also dann leer sein; d. h. man hat zunächst 1 und 2 auf B zu bringen. Dies ist, mit Vertauschung von B und C, unser obiges Verfahren, erfordert also

3 Umſetzungen (Scheibe 1 von A auf C, 2 von A auf B, 1 von C auf B). Alsdann kommt nun 3 auf C, und darauf müſſen 1 und 2 von B auf C gebracht werden, was wieder 3 Umſetzungen erfordert (1 von B auf A, 2 von B auf C, 1 von A auf C). Bei 3 Scheiben ſind alſo 7 Umſetzungen erforderlich. — Man ſieht ſofort, daß dies ganz analog ſo weiter geht: Um 4 Scheiben von A auf C zu bringen, wird man zunächſt die 3 Scheiben 1, 2, 3 von A auf B bringen (7 Umſetzungen), darauf Scheibe 4 von A auf C, dann die Scheiben 1, 2, 3 von B auf C (7 Umſetzungen); zuſammen 15 Umſetzungen. Wir hatten alſo zunächſt die Umſetzungen des vorigen Falles mit 3 Scheiben zu wiederholen, jedoch mit Vertauſchung der Pflöcke B und C. Begannen wir im vorigen Falle mit: „1 von A auf C“, ſo werden wir daher jetzt zu beginnen haben: „1 von A auf B“. Zurückblickend ſehen wir alſo, daß die erſte Umſetzung lautete

bei 2	Scheiben:	„1 von A auf B“
„ 3	„	„1 von A auf C“
„ 4	„	„1 von A auf B“

Da nun jedesmal, wenn wir zu einer um 1 größeren Scheibenzahl fortſchreiten, wieder eine ſolche Vertauſchung von B und C ſtattfinden wird, ſo wird der Anfang offenbar abwechſelnd lauten: „1 von A auf B“ und „1 von A auf C“ und zwar das erſtere bei gerader Scheibenzahl, das letztere bei ungerader. Nennen wir C den Endpflock und B den Übergangspflock, ſo können wir alſo ſagen:

Bei ungerader Scheibenzahl hat man damit zu beginnen, die kleinſte Scheibe auf den Endpflock zu bringen, bei gerader Scheibenzahl dagegen auf den Übergangspflock.

Die Regel iſt leicht zu behalten: man braucht nur an den allereinfachſten Fall, eine Scheibe, zu denken, wo die Regel trivial wird.

Für die Zahl der erforderlichen Umſetzungen hatten wir gefunden

bei 1	Scheibe	1	Umſetzung
„ 2	Scheiben	3	Umſetzungen
„ 3	„	7	„
„ 4	„	15	„ .

Wenn auch der Leser bereits hiernach das Gesetz dieser Zahlen errät, so werden wir doch noch eine bessere Einsicht in die Art, wie die Zahlen 1, 3, 7, 15 usw. zustandekommen, gewinnen, wenn wir die Frage aufwerfen: wie viele der 15 Umsetzungen, die bei 4 Scheiben erforderlich sind, werden vorgenommen mit Scheibe 1, wie viele mit Scheibe 2 usw.? — Nun, von den 3 Umsetzungen, die bei 2 Scheiben erforderlich sind, erfolgen zwei mit Scheibe 1 und eine mit Scheibe 2. Wir schreiben dies kurz so:

	2 Scheiben
Scheibe 1	2 Ums.
„ 2	1 Ums.
	zus. 3 Ums.

Bei 3 Scheiben gliedert sich das Verfahren in folgende 3 Stufen: Umsetzen der Scheiben 1 und 2 von A auf B, Umsetzen der Scheibe 3 von A auf C, Umsetzen der Scheiben 1 und 2 von B auf C. Hieraus sieht man, daß, da das Verfahren der 2 Scheiben zweimal auszuführen ist, die Umsetzungen für die Scheiben 1 und 2 sich verdoppeln gegenüber dem vorigen Fall, und wir erhalten also:

	3 Scheiben
Scheibe 1	4 Ums.
„ 2	2 Ums.
„ 3	1 Ums.
	zus. 7 Ums.

und hiernach entsprechend

	4 Scheiben
Scheibe 1	8 Ums.
„ 2	4 Ums.
„ 3	2 Ums.
„ 4	1 Ums.
	zus. 15 Ums.

Die Zahlen der Umsetzungen für die einzelnen Scheiben, von unten nach oben gelesen, (1, 2, 4, 8 im letzten Falle) sind die Potenzen von 2 und zwar nicht nur hier in diesen einfachsten Fällen, sondern, da sich bei Fortschreiten von Fall zu Fall die Zahlen verdoppeln und unten stets eine 1 hinzutritt, so gilt dies allgemein. Die Gesamtzahl der Umsetzungen für jeden Fall ist dann nach unserem Satz 1 (S. 50) um 1 kleiner als die nächstfolgende Potenz von 2; so würde sich also bei 5 Scheiben als Gesamtzahl aller Umsetzungen 31 (= 32 — 1) ergeben.

Frage 18: Wie viele Umsetzungen sind bei 7 Scheiben im ganzen erforderlich? Wie viele Umsetzungen hiervon werden mit Scheibe 1, wie viele mit Scheibe 5 vorgenommen? Welches ist die allererste Umsetzung hierbei?

Kapitel VI.

Der Baguenaudier.

Den Namen Baguenaudier, der auch einen Gartenzierstrauch, den gemeinen Blasenstrauch (Colutea arborescens L.) bezeichnet, auch Baguenodier geschrieben, abgeleitet von bague (Ring) und nœud (nodus, Knoten), hat man in Frankreich einem geistreichen Spielzeug beigelegt, das aus einer an einem Griff angebrachten Spange besteht, auf der eine Anzahl Ringe sitzen.

Jeder dieser Ringe ist durch einen an ihm befestigten Faden, welcher durch das Innere des nächsten Ringes und zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurchgeht, mit einer kleinen Stange a (s. Fig. 1) fest verbunden. Das Spiel besteht nun darin, die Spange von dem System der Ringe zu trennen.[1])

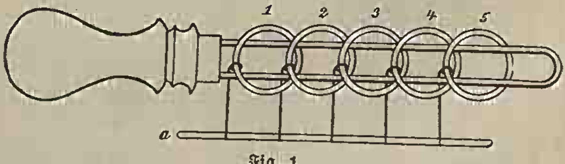

Fig. 1.

Der Anfänger versucht die Lösung gewöhnlich in der Weise, daß er, den Griff etwa in die linke Hand nehmend, die Ringe nach rechts bis über das Ende der Spange zieht und nun — irrtümlicherweise — die Ringe über einen der beiden Bügel

---

[1]) Für dieses Spiel ist die Anfertigung eines Modells, wenn auch nicht notwendig, so doch empfehlenswert.

der Spange wirft, muß dann aber erkennen, daß dies zur Lösung der Aufgabe nicht nur nichts beiträgt, vielmehr nur eine Verwirrung der Fäden herbeiführt. Man erkennt in der Tat sehr leicht, daß man die einzelnen Ringe zwar nach rechts (s. d. Fig. 1) von der Spange herunter zu ziehen haben wird, daß sie darauf jedoch nicht auf die eine Seite der Spange, sondern zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurch nach unten geworfen werden müssen, und es entsteht jetzt nur die Frage, in welcher Reihenfolge man diese Manipulationen mit den verschiedenen Ringen vorzunehmen hat, um auf die schnellste Art eine Trennung von Spange und Ringen zu erzielen. In der ursprünglichen Stellung (s. Fig. 1) können nur die Ringe 4 und 5 nach unten gelangen — ohne daß einer der betreffenden Fäden über einen Bügel der Spange greift, was natürlich zu vermeiden ist — und zwar 5 in der bereits angegebenen Weise und 4, indem man 4 und 5 gleichzeitig nach rechts über die Spange hinausführt und dann 4 von oben zwischen den Bügeln hindurch nach unten wirft, 5 dagegen wieder auf die Spange setzt oder gleichzeitig mit 4 nach unten wirft. Bezeichnen wir nun das Lostrennen eines Ringes von der Spange kurz als das „Senken“ eines Ringes und die umgekehrte Operation als das „Heben“ und rechnen wir die Ringe in der Reihenfolge der Nummern in der Figur 1, also z. B. 3 als den auf 2 „folgenden“, so erkennt man leicht folgendes:

Ein Ring kann nur dann gehoben resp. gesenkt werden, wenn der folgende Ring oben ist, alle weiteren folgenden Ringe jedoch unten; der letzte Ring (5) kann jederzeit gehoben resp. gesenkt werden.

Hätten wir z. B. die durch das Schema $\begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5\\ \circ&&\circ&&\\ \hline &\circ&&\circ&\circ\end{array}$ angedeutete Stellung — in der die Gerade die Spange und die kleinen Kreise oberhalb derselben die auf ihr sitzenden Ringe, die unteren Kreise die gesenkten Ringe bedeuten — auf irgend eine Weise herbeigeführt, so würde der Ring 2 jetzt gehoben werden können, weil der folgende Ring (3) oben ist, alle weiteren folgenden Ringe (4 und 5) dagegen unten. Dagegen würden die Ringe 1 und 3 nicht gesenkt und 4 nicht gehoben werden können; wohl aber könnte 5 gehoben werden und mit ihm zugleich allerdings auch 4.

Hiernach erkennt man, daß es bei unserer Aufgabe vor allem darauf ankommen wird, den Ring 1 zu senken und daß, nachdem dies geschehen, dieser Ring völlig aus der Betrachtung ausscheidet, und man dann nur noch mit einem Spiel von 4 Ringen zu tun hat. Damit aber 1 gesenkt werden kann, muß nach unserer obigen Vorschrift 2 oben und müssen 3, 4, 5 unten sein. Es ist also vorher 3 zu senken, und dies erfordert, daß 4 oben und 5 unten ist. Hiernach ergibt sich folgende Disposition: Es ist zunächst 5 zu senken, darauf kann dann auch 3 gesenkt werden, und wir erhalten also die Stellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ \circ&\circ&&\circ&\\ \hline &&\circ&&\circ\end{array}$. Um nun auch 4 senken zu können, müssen wir 5 wieder heben und können darauf 4 und 5 gleichzeitig senken, wie schon oben bemerkt war. Wir erhalten so die Stellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ \circ&\circ&&&\\ \hline &&\circ&\circ&\circ\end{array}$, welche eben die Vorbedingung für das Senken von 1 ist. Aus ihr resultiert daher $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&&&\\ \hline \circ&&\circ&\circ&\circ\end{array}$. Damit scheidet 1 ganz aus der Betrachtung aus, und damit nun 2 gesenkt werden kann, muß zuvor 3 gehoben sein. Dies bedingt aber, daß 4 gehoben wird, und dies wieder dasselbe für 5. Wir heben daher zunächst 4 und 5, was bei diesen beiden zugleich geschehen kann, erhalten also $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&&\circ&\circ\\ \hline \circ&&\circ&&\end{array}$. Soll 3 gehoben werden, so muß erst wieder 5 gesenkt werden, so daß wir sukzessive die Stellungen $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&&\circ&\\ \hline \circ&&\circ&&\circ\end{array}$ und $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&\circ&\circ&\\ \hline \circ&&&&\circ\end{array}$ erhalten. Damit nun 2 gesenkt werden kann, muß nicht nur 3 oben, sondern zugleich 4 und 5 unten sein, und um 4 senken zu können, müssen wir zuvor 5 heben, so daß wir zunächst die Stellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&\circ&\circ&\circ\\ \hline \circ&&&&\end{array}$ bekommen. Dies ist aber die Anfangsstellung für ein Spiel mit 4 Ringen und die weiteren Operationen sind genau dieselben, als ob wir von Anfang an nur 4 Ringe gehabt hätten. Durch die jetzt zunächst erreichbare Zwischenstellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&\circ&&\\ \hline \circ&&&\circ&\circ\end{array}$ gelangen wir zu $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &&\circ&&\\ \hline \circ&\circ&&\circ&\circ\end{array}$, womit auch der Ring 2 aus der Betrachtung ausscheidet. Damit nun 3 gesenkt werden kann, muß zuvor 4 gehoben werden, und dies bedingt wieder, daß 5 zuvor resp. gleichzeitig gehoben wird, so daß folgende sukzessive Stellungen notwendig werden: $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &&\circ&\circ&\circ\\ \hline \circ&\circ&&&\end{array}$ (Anfangsstellung für ein Spiel mit 3 Ringen), $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &&\circ&\circ&\\ \hline \circ&\circ&&&\circ\end{array}$, $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &&&\circ&\\ \hline \circ&\circ&\circ&&\circ\end{array}$. Heben wir nun noch 5 und senken dann

4 und 5 gleichzeitig, so sind die Ringe von der Spange getrennt, wie verlangt war.

Umgekehrt bringt man die Ringe wieder auf die Spange zurück, indem man genau die umgekehrten Operationen wie zuvor und zwar in umgekehrter Reihenfolge ausführt, also:

1) Heben von 4 und 5
2) Senken von 5
3) Heben von 3
4) Heben von 5
5) Senken von 4 und 5
6) Heben von 2
7) Heben von 4 und 5
8) Senken von 5
9) Senken von 3
10) Heben von 5
11) Senken von 4 und 5
12) Heben von 1
13) Heben von 4 und 5
14) Senken von 5
15) Heben von 3
16) Heben von 5.

Auf die mathematische Theorie des Spiels, für die — beiläufig bemerkt — die im vorigen Kapitel besprochene Reihe der Potenzen der Zahl 2 eine grundlegende Bedeutung besitzt, dürfen wir nach unseren obigen Ausführungen verzichten. Die Theorie würde uns im grunde genommen nur eine Bestätigung unserer Darstellung liefern und insbesondere den Beweis dafür geben, daß das von uns oben dargelegte Verfahren auch wirklich das kürzeste ist, um die gestellte Aufgabe zu lösen. Bei diesem unserem Verfahren waren für den von uns hier stillschweigend zugrunde gelegten Spezialfall von 5 Ringen 16 Operationen erforderlich, wenn wir ein gleichzeitiges Heben und Senken der beiden letzten Ringe (4 und 5) für eine Operation zählen. Wir wollen nun wenigstens bei der mathematischen Theorie unseres Spiels die Anleihe machen, daß wir noch die Anzahl der erforderlichen einzelnen Umstellungen für verschiedene Anzahlen von Ringen in einer Tabelle wie folgt, zusammenstellen:

Anzahl d. Ringe	Anzahl d. Umstell.
2	1
3	4
4	7
5	16
6	31
7	64
8	127
9	256
10	511
11	1024
12	2047
20	524287

Bei 65 Ringen würde die Minimalzahl der erforderlichen Umstellungen bereits eine 20-stellige Zahl und gerade um 1 größer sein als die Anzahl aller Weizenkörner in dem oben (S. 47 f.) besprochenen Fall.

Frage 19: Welche anfängliche Stellung wäre bei 5 Ringen die ungünstigste, d. h. diejenige, von der aus am meisten Operationen erforderlich sind, um das System der 5 Ringe von der Spange zu trennen? Wieviele Operationen erfordert dieser ungünstigste Fall?

Kapitel VII.

Nim.

§ 1. Beschreibung des Spiels und Skizzierung seiner Theorie.

Der Ursprung dieses Spiels ist unbekannt. Auf einigen amerikanischen Schulen, bisweilen auch auf Jahrmärkten, wird es gespielt; es soll aber auch in Deutschland schon seit Jahrzehnten bekannt sein. Genannt wird es zumeist „Fan-Tan". Da man jedoch mit demselben Namen auch ein ganz anderes, bei Chinesen beliebtes Spiel bezeichnet, das ein reines Glücksspiel ist, so haben wir hier den obigen, von einem amerikanischen Mathematiker vorgeschlagenen Namen akzeptiert.

Man benutzt zu dem von zwei Personen gespielten Spiel eine Anzahl von irgend welchen Objekten, etwa Zündhölzern oder kleinen Steinen. Es wird damit begonnen, daß 3 „Haufen" von „Steinen" gebildet werden, und zwar so, daß jeder Haufen, wie wir vorläufig der Einfachheit halber annehmen wollen, höchstens 7 und wenigstens 1 Stein[1]) enthalten mag. Das Spiel besteht nun darin, daß zunächst einer der Spielenden eine beliebige Anzahl von Steinen von einem Haufen fortnimmt, d. h. also wenigstens einen Stein und eventuell auch den ganzen Haufen. Innerhalb und mit Einschluß

[1]) Wir sprechen also aus Zweckmäßigkeitsgründen auch von einem „Haufen" von einem Stein und überlassen den Philosophen die Erörterung der berühmten Streitfrage, bei welcher Mindestzahl von Objekten der vulgäre Begriff des Haufens beginnt.

dieser Grenzen darf der Spielende also beliebig wählen, ebenso wie ihm auch die Wahl des Haufens überlassen bleibt; nur dürfen nicht gleichzeitig Steine verschiedener Haufen fortgenommen werden. Hierauf kommt der andere Spieler an die Reihe, um nun seinerseits nach denselben Bestimmungen, wie der erstere, zu verfahren, und zwar darf er denselben Haufen wie sein Gegner oder auch einen anderen wählen. So geht dies immer abwechselnd, so lange Steine vorhanden sind. Wer den letzten Stein bekommt, ist Sieger.

Wir wollen der Einfachheit halber die einzelnen Operationen der Spieler als ersten, zweiten usw. „Zug" unterscheiden. — Die mathematische Theorie lehrt, daß einer der beiden Spieler stets den Sieg erzwingen kann; welcher von beiden sich in dieser günstigen Lage befindet, ob derjenige, der den ersten, oder der den zweiten Zug tut, hängt lediglich von der Anfangsstellung ab.

Eine bestimmte Phase des Spiels ist offenbar durch die Anzahlen der Steine in den Haufen charakterisiert. Wir werden sie daher etwa durch 1, 4, 6 bezeichnen, wenn der eine Haufen 1, ein anderer 4 und der dritte 6 Steine enthält. Dabei wollen wir aus später zu erkennenden Gründen die Positionen

1, 2, 3	2, 4, 6	3, 4, 7	
1, 4, 5	2, 5, 7	3, 5, 6	(System I)
1, 6, 7			

„richtige" und die übrigen mit gleichfalls 3 Haufen, also z. B. 1, 4, 6 oder 3, 4, 4, „unrichtige" nennen. Der Leser erkennt unschwer, daß die Zahl der „unrichtigen" Positionen sehr viel größer ist als die der „richtigen". Befinden sich z. B. in dem einen Haufen 2 Steine und in einem zweiten 4, so ergibt sich eine „richtige" Position nur dann, wenn in dem dritten Haufen 6 Steine liegen. In allen anderen Fällen, d. h. also, wenn in dem dritten Haufen 1, 2, 3, 4, 5 oder 7 Steine liegen, würde sich stets eine „unrichtige" Position ergeben; denn nur 2, 4, 6 findet sich in unserem System I, nicht aber 2, 4, 1 oder 2, 4, 2 oder 2, 4, 3 usw. — Ist ein Haufen ganz verschwunden, so mögen „richtig" diejenigen Stellungen heißen, bei denen die beiden übrig bleibenden Haufen gleich viele Steine enthalten; alle übrigen Positionen mit nur zwei und zwar ungleichen Haufen, sollen mithin „unrichtig“ heißen. Positionen mit nur einem Haufen werden stets „unrichtig“ genannt. Zu den oben angegebenen „richtigen“ Positionen kommen also noch hinzu:

0, 1, 1
0, 2, 2
0, 3, 3
0, 4, 4 (**System II**)
0, 5, 5
0, 6, 6
0, 7, 7

und schließlich noch 0, 0, 0, also diejenige Position, die dem Spieler, der sie erreicht, die Siegespalme verleiht. Einschließlich dieser letzten Position haben wir also im ganzen 15 „richtige“ Positionen, während eine einfache Rechnung lehren würde, daß die Zahl der „unrichtigen“ Positionen 105 beträgt. Die „richtigen“ Positionen sind nun so ausgewählt, daß folgendes gilt:

Satz 1: Eine „richtige“ Position kann durch den nächsten Zug nie wieder in eine „richtige“, sondern immer nur in eine „unrichtige“ Position übergeführt werden,

Satz 2: Eine „unrichtige“ Position läßt sich durch den nächsten Zug zwar stets in zahlreiche „unrichtige“, jedoch auch stets in mindestens eine „richtige“ Position überführen.

Die Bezeichnungen „richtig“ und „unrichtig“ sind zwar zunächst nur reine Unterscheidungsmerkmale, die willkürlich gewählt erscheinen; wir werden jedoch im nächsten Paragraphen sehen, daß die Wahl dieser Bezeichnungen eine durchaus zutreffende ist, da die „richtigen“ Positionen diejenigen sind, welche den Spieler zum Siege führen. Hiernach und nach den soeben angegebenen Sätzen ist das Prinzip des praktischen Spiels bereits jetzt leicht zu erkennen: der Spieler muß danach trachten, durch seinen Zug eine „richtige“ Position herzustellen. Ist dies z. B. dem Spieler A gelungen, so wird B, da er ziehen muß und eine „richtige“ Position nur in eine „unrichtige“ übergeht (Satz I), die „richtige“ Position wieder zerstören, also eine „unrichtige“ herstellen müssen. A kann diese jedoch wieder in eine „richtige“

umwandeln (Satz II) und kann so von einer „richtigen" Position zur anderen und schließlich zum Siege fortschreiten.

§ 2. Begründung der Theorie des Spiels.

Die Überzeugung von der Richtigkeit der im vorhergehenden § 1 ohne Beweis ausgesprochenen Sätze gewinnt der Leser leicht an der Hand bestimmter Beispiele. Zunächst **Satz 1**: Greifen wir zuerst von den „richtigen" Positionen des **Systems II** eine, etwa 0, 5, 5, heraus, so sehen wir, daß durch den nächsten Zug notwendig eine „unrichtige" Position daraus werden muß; denn entweder der eine der beiden Haufen verschwindet beim nächsten Zuge ganz oder er verringert sich und wird dem anderen ungleich. Das Resultat ist also entweder 0, 0, 5 oder etwa 0, 2, 5; beides sind aber nach unseren Definitionen „unrichtige" Positionen. Die „richtigen" Positionen des Systems II lassen sich somit durch einen Zug sicher alle nur in „unrichtige" überführen, wie Satz 1 es will. — Aber auch für die Positionen des **Systems I** gilt der Satz; wir betrachten zu dem Zweck ein Beispiel, etwa 2, 5, 7. Lassen wir durch den nächsten Zug einen Haufen ganz verschwinden, so wird die Position, da die beiden übrig bleibenden Haufen ungleich sind, unbedingt „unrichtig". Wir haben also nur noch die Fälle zu betrachten, in denen einer der Haufen verringert wird, ohne zu verschwinden. Nehmen wir nun von dem ersten Haufen einen Stein fort, so daß 1, 5, 7 bleibt, so haben wir eine „unrichtige" Position; denn in denjenigen „richtigen" Positionen, in denen die 1 vorkommt, kommen niemals zugleich 5 und 7 vor (s. System I, erste Kolonne). Verringern wir den zweiten Haufen, so bleiben jedenfalls in dem ersten Haufen 2 und in dem dritten 7 Steine. Nun finden wir aber in dem ganzen System I nur eine Position, welche zugleich 2 und 7 enthält; dies ist unsere anfängliche Position 2, 5, 7. Wird also der Haufen 5 verringert, so ergibt sich zweifellos eine „unrichtige" Position. Bei Verringerung des dritten Haufens ist es ganz entsprechend.

Der Leser hat unschwer erkannt, daß wesentlich hierbei folgender Umstand ist: das System I der „richtigen" Positionen ist so eingerichtet, daß irgend zwei Zahlen, z. B. 3 und 7, nur einmal zusammen in einer Position vorkommen, nämlich in

3, 4, 7. Andererseits kommt aber jedes Paar von zwei Zahlen auch einmal zusammen in einer Position des Systems vor. Wir werden zwar hierauf zurückkommen und diese Angabe, die wir hier nur provisorisch machten, noch näher begründen müssen, wollen jedoch zur besseren Veranschaulichung dieser Einrichtung des Systems I jetzt noch folgendes hinzufügen: Wir denken uns, die Zahlen 1, 2 . . . 7 bezeichneten die Mitglieder eines Skatklubs; nennen wir sie der Reihe nach etwa: Müller, Schulze, Meyer, Schmidt, Lehmann, Krause, Fischer. Die Kombinationen zu je 3 in unserem System I bezeichnen dann immer gerade eine Skatpartie. Das System I enthält nun 7 Positionen; diese mögen den 7 Tagen der Woche entsprechen, d. h. es mag in dem Skatklub an jedem Abend der Woche sich ein Trio zu einer Spielpartie einfinden. Nehmen wir alsdann die Positionen des Systems I in jeder Zeile von links nach rechts, so liefert uns unser System I folgenden Wochenspielplan für den Klub:

Sonntag: Müller, Schulze, Meyer.
Montag: Schulze, Schmidt, Krause.
Dienstag: Meyer, Schmidt, Fischer.
Mittwoch: Müller, Schmidt, Lehmann.
Donnerstag: Schulze, Lehmann, Fischer.
Freitag: Meyer, Lehmann, Krause.
Sonnabend: Müller, Krause, Fischer.

Wir bemerken alsdann folgendes: Jedes Klubmitglied kommt gleich oft zum Spiel, nämlich dreimal in der Woche.[1]) Dabei trifft jedes Mitglied gerade einmal in der Woche mit jedem anderen zusammen, an dem ersten Abend mit zwei Mitgliedern, an dem zweiten Abend nicht wieder mit einem des ersten Abends, sondern mit zwei anderen Mitgliedern und an dem dritten Spielabend mit den noch übrigen zwei. So ist Meyer z. B. am Sonntag, Dienstag und Freitag am Spiel beteiligt und trifft am Sonntag Müller und Schulze, am Dienstag Schmidt und Fischer, am Freitag Lehmann und Krause, also jeden gerade einmal in der Woche. — Dies mag zur Veranschaulichung der Art, wie die Zahlen des Systems I miteinander kombiniert sind, vorläufig genügen.

---

[1]) Darauf, ob eventuell alle 3 Spielabende des einzelnen Mitglieds unmittelbar aufeinander folgen resp. wie sie sich sonst auf die Woche verteilen, ist hier keine Rücksicht genommen.

Wir versuchen nun, uns den **Satz II** plausibel zu machen: Der erste Teil, daß eine „unrichtige“ Position sich auf mannigfache Weise durch einen Zug in andere „unrichtige“ überführen läßt, z. B. 1, 2, 5 in 1, 2, 4 oder in 1, 2, 2 oder in 1, 2, 1 oder in 1, 2, 0 oder in 0, 2, 5 usw., bedarf keiner weiteren Begründung. Es läßt sich aber, wie der Satz 2 weiter will, jede „unrichtige“ Position durch einen Zug auch in mindestens eine „richtige“ überführen. Am leichtesten erkennt man dies bei nur zwei Haufen: hat man z. B. die „unrichtige“ Position 0, 4, 7, so erhält man daraus eine „richtige“, wenn die beiden Haufen gleich gemacht werden, was nur durch Verringerung des größeren möglich ist, so daß man also 0, 4, 4 erhalten würde. Wäre in der „unrichtigen“ Position nur noch ein Haufen vertreten, hätten wir also z. B. 0, 0, 4, so müßte, wie selbstverständlich, dieser Haufen ganz zum Verschwinden gebracht werden, um die „richtige“ Position 0, 0, 0, die zugleich das Spiel mit dem Siege des Ziehenden beendet, zu erhalten.[1]) — Hat man eine „unrichtige“ Position mit drei Haufen, z. B. 3, 6, 7, so darf man keinenfalls, will man eine „richtige“ erhalten, einen Haufen ganz verschwinden lassen. Man darf also einen Haufen nur verringern. Will man den ersten Haufen verringern, so bleiben also jedenfalls die Zahlen 6 und 7 des zweiten und dritten Haufens unverändert. Die einzige „richtige“ Position, in der 6 und 7 zusammen vorkommen, ist nun 1, 6, 7 (s. System I); es muß also der erste Haufen von 3 auf 1 verringert werden. Entsprechend findet man, daß man den zweiten Haufen von 6 auf 4 oder den dritten von 7 auf 5 zu verringern hätte, um die „richtigen“ Positionen 3, 4, 7 resp. 3, 6, 5 zu erhalten. In dem Falle dieses Beispiels läßt sich die „unrichtige“ Position also durch den nächsten Zug auf 3 Arten in eine „richtige“ überführen. Im allgemeinen wird es drei Möglichkeiten für diese Überführung zwar nicht geben und es genügt uns auch vollkommen, wenn es nur **eine** gibt. Es entsteht aber die Frage, ob **eine** solche Möglichkeit auch stets statt hat. Wollten wir an dieser Frage vorübergehen, so würden wir in unserer Beweisführung eine erhebliche Lücke lassen; andererseits zwingt uns diese Erörterung, ein wenig in

[1]) Der Leser sieht also schon hier, daß es nicht willkürlich war, wenn wir die Position 0, 0, 0 zu den „richtigen“ rechneten, sondern daß vielmehr innere Gründe hierzu zwingen.

die mathematische Theorie des Spiels einzudringen. Der Leser, der hierauf verzichten will, möge daher den Rest dieses Paragraphen überschlagen und alsdann gleich bei § 3 fortfahren.

Es hätten schon oben die Fragen aufgeworfen werden können, durch welche wesentlichen Eigenschaften sich die „richtigen" Positionen von den „unrichtigen" unterscheiden und auf welche Weise die „richtigen" Positionen, insbesondere die des Systems I, erhalten wurden. Zur Beantwortung dieser Fragen erinnern wir den Leser zunächst an die schon S. 48/49 betrachtete Reihe der Potenzen der Zahl 2, also an jene mit 1 beginnende Zahlenreihe, in der jede Zahl das Doppelte der vorhergehenden ist: 1, 2, 4, 8, 16 ..... Wir brauchen augenblicklich von dieser Reihe nur den Anfang: 1, 2, 4. Wir erinnern uns weiter daran, daß jede beliebige Zahl sich als Summe von Zahlen dieser Reihe darstellen läßt (Satz 2, S. 56), nämlich für die uns hier allein interessierenden Zahlen bis 7 einschließlich folgendermaßen:

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{ccccc} 4 & & 2 & & 1 \end{array} \\ \cline{2-2} 1 = & \begin{array}{ccccc} & & & & 1 \end{array} \\ 2 = & \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \end{array} \\ 3 = & \begin{array}{ccccc} & & 2 & + & 1 \end{array} \\ 4 = & \begin{array}{ccccc} 4 & & & & \end{array} \\ 5 = & \begin{array}{ccccc} 4 & & & + & 1 \end{array} \\ 6 = & \begin{array}{ccccc} 4 & + & 2 & & \end{array} \\ 7 = & \begin{array}{ccccc} 4 & + & 2 & + & 1. \end{array} \end{array}$$

Wir wollen daher 4, 2, 1 der Kürze halber jetzt wieder, wie schon auf S. 57, unsere „Grundzahlen" nennen. Greifen wir nun irgend eine Position aus dem System I, etwa 3, 4, 7, heraus und schreiben die drei vorkommenden Zahlen in der soeben angegebenen Weise untereinander, also

$$\begin{array}{rccccc} 3 = & & & 2 & + & 1 \\ 4 = & 4 & & & & \\ 7 = & 4 & + & 2 & + & 1, \end{array}$$

so sehen wir, daß auf der rechten Seite an Grundzahlen untereinander stehen zwei 1, zwei 2 und zwei 4. Würden wir diese Darstellung bei den Zahlen aller Positionen des Systems I ausführen, so würden wir finden, daß von den Grundzahlen 1, 2 und 4 stets jede **entweder zweimal oder gar nicht** vorkommt, wie dies letztere z. B. bei der Position 2, 4, 6:

$$\begin{aligned} 2 &= \quad\quad 2 \\ 4 &= 4 \\ 6 &= 4 + 2 \end{aligned}$$

bezüglich der Grundzahl 1 der Fall ist. **Niemals** aber kommt eine der Grundzahlen bei dieser Darstellung in den Positionen des Systems I **ein- oder dreimal** vor; vielmehr würde alsdann die Position zu den „unrichtigen" gehören. Daß auch die Positionen von System II dieselbe Eigenschaft zeigen, bedarf kaum der Erwähnung, da diese Positionen, abgesehen von der 0, immer nur zwei gleiche Zahlen aufweisen, wobei unsere Bedingung bezüglich der Grundzahlen selbstverständlich erfüllt ist. Doch nicht nur besitzen alle Positionen von System I und II, also alle „richtigen" Positionen, die betreffende Eigenschaft, sondern sie sind auch die einzigen Positionen, denen diese Eigenschaft zukommt. Wenn wir nämlich irgend welche Positionen, die außerhalb der Systeme I und II stehen, also „unrichtig" sind, hieraufhin prüfen würden, so würden wir stets finden, daß ihnen diese Eigenschaft abgeht. Wir greifen als Beispiele etwa die Positionen 1, 2, 4 und 3, 6, 7 heraus, die nicht zu den „richtigen" des Systems I gehören und für die wir folgende Darstellungen in den Grundzahlen erhalten:

$$\begin{aligned} 1 &= \quad\quad 1 \\ 2 &= \quad 2 \\ 4 &= 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3 &= \quad\quad 2 + 1 \\ 6 &= 4 + 2 \\ 7 &= 4 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Bei der ersteren kommen die Grundzahlen 4, 2 und 1 nur je einmal vor, bei der letzteren die Grundzahlen 4 und 1 allerdings je zweimal, dagegen die Grundzahl 2 dreimal; die verlangte Bedingung erfüllt also keins der beiden Beispiele. — Der Vollständigkeit halber sei nur noch bemerkt, daß die Position 0, 0, 0 natürlich der gestellten Bedingung genügt, also mit Recht den „richtigen" Positionen zugerechnet wird (vgl. die Anm. S. 74).

Damit haben wir eine bestimmte Definition für die „richtigen" Positionen gewonnen, nämlich die, daß bei Darstellung ihrer 3 Zahlen durch die Grundzahlen jede Grundzahl gar nicht oder zweimal vorkommt, und haben an speziellen Beispielen die Überzeugung gewonnen, daß alle „richtigen" Positionen die angegebene charakteristische Eigenschaft besitzen, alle „unrichtigen" Positionen dagegen nicht. Wir wollen jedoch dieser Definition jetzt eine genetische Form geben, indem wir in Beantwortung einer oben (S. 75) bereits aufgeworfenen Frage ein Verfahren angeben, um die Gesamtheit aller „richtigen" Positionen zu bilden. Hierfür wollen wir zunächst eine von uns bereits oben (S. 72/73) ohne Begründung antizipierte Eigenschaft des Systems I hervorheben, nämlich die, daß es in ihm für je zwei Zahlen stets eine, aber auch nur eine Position gibt, in der diese Zahlen zusammen vorkommen.[1]) Suchen wir nämlich z. B. eine nach der jetzigen Definition „richtige" Position, in der die Zahlen 3 und 5 vorkommen, so würde man so sagen müssen:

$$\begin{aligned} 3 &= \quad\;\; 2 + 1 \\ 5 &= 4 \quad\;\; + 1. \end{aligned}$$

Da nun die Grundzahlen 4 und 2 nur je einmal, 1 jedoch zweimal vorkommt, so muß die dritte Zahl die Grundzahl 4 einmal, die Grundzahl 2 einmal, die Grundzahl 1 gar nicht enthalten, also $= 4 + 2 = 6$ sein; alsdann besitzt unsere Position die verlangte Eigenschaft, ist also unserer Definition gemäß „richtig". Danach muß also 3, 5, 6 eine „richtige" Position sein und in der Tat finden wir sie im System I. In dieser Weise findet man zu zwei gegebenen Zahlen stets eine und nur eine dritte Zahl, welche mit den beiden ersten eine „richtige" Position bildet, oder mit anderen Worten: 3, 5, 6 ist die einzige „richtige" Position, in der die Zahlen 3 und 5 zusammen vorkommen. Damit dürfen wir die auf S. 73 in der Beweisführung gebliebene Lücke als ausgefüllt ansehen. — Wir können uns nun denken, daß man, wie in unserem Beispiel 3, 5, so alle Kombinationen der Zahlen 1, 2 . . 7 zu je zweien vornimmt und jedesmal die zugehörige „richtige" Position bildet. So muß man jedenfalls zu allen Positionen des Systems I und damit, da System II sofort hingeschrieben werden kann, zu allen „richtigen" Positionen überhaupt kommen. Man braucht nicht einmal alle Kombinationen der Zahlen 1, 2 . . 7 zu je zweien zu wählen, sondern kann das Verfahren entsprechend abkürzen; wir wollen dies jedoch nur andeuten, indem wir darauf

---

[1]) Ebenso wie entsprechend in dem oben betrachteten Analogon des Skatklubs die Spielordnung eine solche war, daß irgend zwei Mitglieder jedenfalls an einem Abend der Woche, aber auch nicht öfter, zusammen am Spieltisch sitzen.

hinweisen, daß, wenn wir, wie oben von 3, 5, jetzt von 3, 6 ausgehen würden, wir als dritte Zahl natürlich 5 finden, also zu derselben „richtigen" Position 3, 6, 5, die wir bereits gebildet hatten, kommen würden, so daß wir also, ohne eine Einbuße zu erleiden, die Kombination 3, 6 ganz ignorieren dürfen. Jedenfalls erschöpfen wir aber leicht durch ein solches Verfahren die Gesamtheit aller Positionen des Systems I und erkennen so, daß es außerhalb der Positionen von System I und II einschl. 0, 0, 0 keine weitere Position geben kann, die die verlangte Eigenschaft der „richtigen" Positionen besitzt.

Aus dem Vorhergehenden erhellt nun weiter leicht, wie wir eine „unrichtige" Position in eine „richtige" überzuführen haben. Da die anfängliche Position als „unrichtig" vorausgesetzt wird, so wird mindestens eine der Grundzahlen 4, 2, 1 ein- oder dreimal vorkommen; denn anderenfalls wäre die Position ja bereits „richtig". Wir sehen uns nun hierauf jedesmal die Grundzahlen 4, 2, 1 von links nach rechts an. In unserem oben (S. 76) zuletzt betrachteten Beispiel

$$\begin{aligned} 3 &= \phantom{4 + {}} 2 + 1 \\ 6 &= 4 + 2 \\ 7 &= 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

kommt zunächst die Grundzahl 4 zweimal vor. Daran darf also nichts geändert werden. Sodann kommt jedoch die Grundzahl 2 dreimal vor, die Grundzahl 1 dagegen wieder zweimal; es ist also nur eine 2 zu beseitigen. Man verringert somit entweder den ersten Haufen von 3 auf 1 oder den zweiten von 6 auf 4 oder den dritten von 7 auf 5. In jedem Falle fällt eine 2 fort. Genau dieselben drei Möglichkeiten hatten wir schon oben (S. 74) für diesen Fall und zwar lediglich auf grund der Betrachtung des Systems I angegeben. — Wir nehmen auch das erste der obigen (S. 76) Beispiele vor:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 2 \\ 4 &= 4 \quad . \end{aligned}$$

Die erste Grundzahl, bei der die Bedingung für die „richtige" Position nicht erfüllt ist, ist die nur einmal vorkommende 4; man wird also diese, da auch die Grundzahlen 2 und 1 nur je einmal vorkommen, ersetzen müssen durch 2 + 1. Alsdann kommt die 4 gar nicht mehr und 2 und 1 je zweimal vor. Praktisch bedeutet dies: der Haufen 4 wird auf 3 verringert, und man gelangt so zu der „richtigen" Position 1, 2, 3. In diesem Falle gibt es nur diese eine Möglichkeit, von 1, 2, 4 zu einer „richtigen" Position zu gelangen; denn es darf nur verringert, nicht hinzugefügt und es darf gleichzeitig auch nur ein Haufen, nicht etwa mehrere zugleich, verringert werden. Deshalb mußte die größte nur einmal vorkommende Grundzahl, nämlich 4, ganz beseitigt und zu den anderen nur einmal vorkommenden, nämlich 2 und 1, je eine gleiche hinzugefügt werden. Man erkennt leicht, daß eine solche Möglichkeit stets vorhanden sein muß, womit die im Beweise des Satzes 2 oben (S. 74 unten) gebliebene Lücke ausgefüllt ist.

§ 3. Das praktische Spiel.

Aus den vorstehenden Erörterungen ergeben sich für das praktische Spiel nun folgende im wesentlichen schon am Ende von § 1 antizipierte Konsequenzen: Da die „unrichtigen" Positionen sehr viel zahlreicher sind als die „richtigen", so wird die willkürlich[1]) gewählte Anfangsstellung zumeist eine „unrichtige" sein. Der beginnende Spieler A wird diese dann durch seinen Zug in eine „richtige" umwandeln; der zweite Spieler B kann aus dieser „richtigen" Position jedoch nur wieder eine „unrichtige" machen, die alsdann wieder von A in eine „richtige" übergeführt wird. A schreitet so von einer „richtigen" Position zu einer anderen fort und gewinnt schließlich. Ist also die willkürlich gewählte Anfangsstellung „unrichtig", wie es zumeist der Fall sein wird, so gewinnt bei richtigem Spiel der Anziehende; ist die Anfangsstellung eine „richtige", so gewinnt bei richtigem Spiel der Nachziehende.

Die Art, wie sich hiernach das Spiel gestaltet, mag auch noch durch ein Beispiel veranschaulicht werden, wobei wir die Züge numerieren und bei jedem Spieler diejenige Position angeben, die er durch den betreffenden Zug herstellt:

Anfangsstellung: 4, 5, 6.

---

[1]) Die Bestimmung der Anfangsstellung werden die Spieler, etwa vermittelst des Loses oder nach irgend einem anderen Verfahren, dem Zufall — oder auch einer am Spiel unbeteiligten und der Spieltheorie unkundigen dritten Person überlassen.

	A		B
1)	3, 5, 6	—	etwa 3, 5, 4
2)	1, 5, 4	—	„ 1, 4, 4.

A muß jetzt den letzten Stein des ersten Haufens nehmen und schafft so eine „richtige" Stellung mit nur zwei und zwar gleichen Haufen (System II), also:

3) 0, 4, 4 — etwa 0, 2, 4.

A nimmt jetzt stets ebenso viele Steine von dem anderen (größeren) Haufen, damit die Gleichheit der beiden Haufen bestehen bleibt, also:

4)	0, 2, 2	—	etwa 0, 1, 2
5)	0, 1, 1	—	„ 0, 1, 0
6)	0, 0, 0.		

Selbstverständlich ist man keineswegs an die Maximalzahl 7 für die Objekte des einzelnen Haufens gebunden, vielmehr hatten wir diese nur aus Bequemlichkeitsgründen vorläufig angenommen. Der Leser wird auch, wenn er darüber hinausgehen will, das System der „richtigen" Positionen nach den Ausführungen des § 2 leicht selbst erweitern können. Enthält z. B. ein Haufen 7, der zweite 9 Steine, so werden wir diese Position zu einer „richtigen" ergänzen, indem wir 7 und 9 in den Grundzahlen darstellen, wobei zu 1, 2 und 4 jetzt als nächste Grundzahl 8 hinzutritt. Wir erhalten so:

$$7 = \quad 4 + 2 + 1$$
$$9 = 8 \qquad\quad + 1.$$

Die dritte Zahl muß also sein $8 + 4 + 2 = 14$ und die „richtige" Position ist mithin 7, 9, 14. Will man so beim Spiel beispielsweise bis zu 15 Steinen einschließlich gehen, so erhält man als Erweiterung des früheren Systems I das folgende:

1, 2, 3	2, 4, 6	3, 4, 7	4, 8, 12
1, 4, 5	2, 5, 7	3, 5, 6	4, 9, 13
1, 6, 7	2, 8, 10	3, 8, 11	4, 10, 14
1, 8, 9	2, 9, 11	3, 9, 10	4, 11, 15
1, 10, 11	2, 12, 14	3, 12, 15	
1, 12, 13	2, 13, 15	3, 13, 14	
1, 14, 15			

5, 8, 13	6, 8, 14	7, 8, 15
5, 9, 12	6, 9, 15	7, 9, 14
5, 10, 15	6, 10, 12	7, 10, 13
5, 11, 14	6, 11, 13	7, 11, 12.

Hierzu kommt dann natürlich wieder noch das System aller der Positionen mit nur noch zwei Haufen, die einander gleich sind.

Das Spiel kann auch mit mehr als 3, ja beliebig vielen Haufen gespielt werden, doch soll darauf hier nicht eingegangen werden, obwohl die Theorie des Spiels alsdann sich nur unwesentlich ändert. — Man kann auch festsetzen, daß derjenige, der den letzten Stein nehmen muß, als Verlierer gilt. Auch für diese Spielregel bleibt die obige Theorie in der Hauptsache bestehen; immerhin tritt eine kleine Erschwerung ein, so daß wir deshalb auf diese Variante unseres Spiels nicht näher eingehen, obwohl sie die verbreitetere sein soll.

Frage 20: Ein Haufen enthält 7, ein zweiter 25 Steine; wie viele muß der dritte enthalten, wenn die Position „richtig" sein soll?

Frage 21: Wer gewinnt bei der Anfangsstellung 3, 17, 18 bei richtigem Spiel?

§ 4. Eine andere Einkleidung des Spiels.

Kürzlich wurde unser Spiel, in eine andere Form gekleidet, den Lesern der Unterhaltungsbeilage zur „Danziger Zeitung" als Aufgabe vorgelegt. Wir beschränken uns hier darauf, in dieser Einkleidung nur den einfachen Fall zu betrachten, der unserem Nimspiel im Gebiete von höchstens 7 Objekten entspricht, und wollen in der neuen Einkleidung gleich eine spezielle Aufgabe dieses Gebietes herausgreifen:

> Auf einer Reihe des Schachbretts, also einem achtfeldrigen Gebiet, stehen 3 Steine, nämlich auf den Feldern d, f, h (s. Fig. 1)[1]. Zwei Spieler, A und B, sollen in abwechselnden Zügen die 3 Steine auf das Schlußfeld a nach folgenden Regeln bringen: Jeder Spieler hat bei jeder Tour einen und auch nur einen

[1]) In der Figur sind die Felder entgegen dem Schachbrett alle einfarbig gezeichnet.

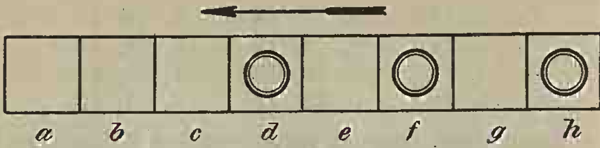

Fig. 1.

Stein, den er jedesmal beliebig wählen darf, zu ziehen und zwar soweit er will, allerdings nur in der Richtung des Pfeils, also von rechts nach links. Der Stein darf also auch auf ein von einem anderen Stein besetztes Feld gezogen werden oder einen anderen Stein überspringen. Wer den letzten Stein in das Schlußfeld a bringt, ist Sieger.

Der Leser erkennt sofort die vollständige Identität dieses Spiels mit dem „Nim“: Bezeichnen wir nämlich den Abstand des Feldes b vom Schlußfeld a mit 1, so hat d von a den Abstand 3, f und h die Abstände 5 resp. 7. Die Anfangsstellung der Figur ist somit völlig charakterisiert durch 3, 5, 7. Die 3 Steine entsprechen also den 3 Haufen beim „Nim“. Das Vorrücken der Steine nach dem Schlußfelde zu entspricht der Verminderung der 3 Haufen beim „Nim“. Da nun vor allem auch die Spielregeln, wie der Leser bereits erkannt haben wird, sich vollständig entsprechen, so dürfen wir unsere oben gewonnenen Resultate hier sofort nutzbar machen: Die Anfangsstellung 3, 5, 7 schreibt sich bei Darstellung der 3 Zahlen durch die Grundzahlen so:

$$\begin{aligned} 3 &= \phantom{4 + {}} 2 + 1 \\ 5 &= 4 \phantom{{} + 2} + 1 \\ 7 &= 4 + 2 + 1; \end{aligned}$$

sie ist also „unrichtig“ (wegen der dreimaligen Grundzahl 1), geht aber in eine „richtige“ über, wenn einer der 3 Haufen um 1 verringert wird. Dem Spieler A stehen also für den Anfang folgende 3 gleichwertige Züge zur Verfügung: d — c oder f — e oder h — g. Wir wollen nur einen dieser Fälle, etwa den letzten, weiter verfolgen: B findet in diesem Falle die Stellung d, f, g vor. 1) Zieht B nun so, daß ein Doppelstein auf einem Felde entsteht, z. B. g — f oder g — d oder f — d, so läßt A die beiden zusammenliegenden Steine unberührt und zieht den dritten ins Schlußfeld. B findet dann für den nächsten Zug etwa die Stellung d, d vor und zieht nun z. B. einen der Steine von d nach c; A rückt dann mit dem zweiten Steine nach c nach und muß bei dieser Taktik, die der beim „Nim“ oben befolgten völlig analog ist, gewinnen. 2) Vermeidet B beim ersten Zuge die Herstellung eines Doppelsteins und zieht z. B. f — e, so findet A für seinen zweiten Zug die Stellung d, e, g oder 3, 4, 6 vor. A hat alsdann nur einen „richtigen“ Zug: d — c, wodurch die „richtige“ Position c, e, g resp. 2, 4, 6 entsteht. Unter den verschiedenen möglichen Fortsetzungen sei nur folgende herausgegriffen:

A	B
	g — f (c, e, f resp. 2, 4, 5)
notwendig: c — b (b, e, f resp. 1, 4, 5)	etwa e — d (b, d, f resp. 1, 3, 5)
notwendig: f — c (b, d, c resp. 1, 3, 2)	etwa c — a (b, d resp. 1, 3)
notwendig: d — b (b, b resp. 1, 1)	b — a (b resp. 1).
b — a und gewinnt.	

Will man das Spiel über ein größeres Gebiet erstrecken, so braucht man nur das ganze Schachbrett oder ein anderes Spielbrett zu nehmen und festzusetzen, in welcher Reihenfolge die Felder aufeinander folgen sollen.

Frage 22: Wer gewinnt bei der Anfangsstellung c, f, h bei richtigem Spiel?

Kapitel VIII.

Der Rösselsprung.

§ 1. Definition. Geschichte. Vorbemerkungen.

Das gewöhnliche Schachbrett weist bekanntlich 64 Felder auf und erfordert zum Spiel 32 Figuren. Die Zahl der Figuren würde also gerade ausreichen, um alle Felder der einen Bretthälfte zu besetzen. Verschiedene Schachautoren des Mittelalters machen von diesem Umstande Gebrauch, um folgende Aufgabe zu stellen: Man denke sich die eine Hälfte des Brettes mit den Figuren in beliebiger Ordnung vollbesetzt und schlage nun mit einem der Springer in beliebiger, aber ununterbrochener Reihenfolge alle Figuren fort. Bekanntlich „schlägt" man im Schach eine Figur mit einer zweiten, wenn man die letztere auf das Feld der ersteren bringt. Der betreffende Springer, welcher alle Figuren sukzessive schlagen soll und selbst auf einem der 32 Felder steht, hat also die Aufgabe, von seinem Felde aus hintereinander auf alle 31 anderen Felder und zwar auf jedes nur einmal zu springen und dabei Felder der anderen Bretthälfte nicht zu betreten.

Hieraus hat sich nun die weitere Aufgabe entwickelt, nicht nur das halbe, sondern das ganze Schachbrett in beliebiger, aber ununterbrochener Folge der 64 Felder mit dem Springer zu durchlaufen, eine Aufgabe, die heute unter dem Namen „Rösselsprung" allgemein bekannt ist und in dem Rätsel-Repertoire zahlreicher Familien-Journale einen ständigen Platz einnimmt, die aber um die Mitte des 18. Jahrhunderts noch wenig bekannt gewesen sein muß, da sie dem großen Mathematiker Euler, dem ersten wissenschaftlichen Schriftsteller über diese Frage, als ein bis dahin ihm unbekanntes Problem in einer Gesellschaft entgegengetreten war. Allerdings muß bald darauf und vielleicht zum Teil infolge von Eulers diesbezüglicher Abhandlung die Aufgabe weite Verbreitung gefunden haben, so daß beispielsweise ein jüngerer Zeitgenosse Eulers, von Kempelen (1734 bis 1804), durch seinen berühmten Schachautomaten bereits Rösselsprünge ausführen ließ.

Ein „Springerzug" besteht bekanntlich darin, daß die Figur von ihrem Felde nach einer der beiden Seiten um zwei Felder in horizontaler und dann von hier um eins in vertikaler Richtung resp. zuerst um zwei in vertikaler und dann um eins in horizontaler Richtung fortschreitet.

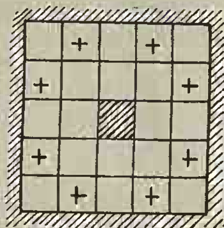

Fig. 1.

Von zwei Feldern, zwischen denen ein Übergang vermittels eines solchen Springerzuges möglich ist, sagt man, „sie rösseln sich". Die Maximalzahl der mit einem gegebenen Felde sich rösselnden Felder ist offenbar 8, wie Fig. 1 darstellt, wenn wir unter dem schraffierten Feld das Feld des Springers verstehen, und die 8 Felder, welche sich mit dem schraffierten Felde „rösseln", durch Kreuze bezeichnen. Die Figur stellt natürlich nur einen Teil des Schachbretts dar und zwar eine Partie aus dem Innern. Würden wir den Springer mehr nach dem Rande des Brettes zu aufstellen, so würde sein Feld sich eventuell nur mit 6, 4 oder 3 und, wenn wir ihn auf einem Eckfeld aufstellten, gar nur mit 2 anderen Feldern rösseln. — Wir haben in unserer Figur den auf dem Schachbrett üblichen Unterschied zwischen schwarzen und weißen Feldern nicht gemacht und werden auch in den weiteren Figuren hiervon absehen; der Leser erkennt jedoch auch so, daß, wenn unser in Fig. 1 schraffiertes Feld auf dem Schachbrett etwa schwarz ist, alle 8 Felder, welche sich damit rösseln, weiß sind und umgekehrt. Der Springer wechselt also mit jedem Zuge die Farbe des Feldes: steht er jetzt auf einem weißen Felde, so gelangt er durch den nächsten Zug, den er tut, sicher auf ein schwarzes, von dort wieder auf ein weißes usw.

Das erste Feld eines Rösselsprungs nennen wir „Anfangs-" oder „Ausgangsfeld", das letzte „Schlußfeld", beide gemeinsam die „Endfelder". Rösseln sich Ausgangs- und Schlußfeld, so daß man also von dem Schlußfeld durch einen Springerzug wieder zu dem Ausgangsfeld zurückkehren kann, so nennt man den Rösselsprung „geschlossen", anderenfalls „ungeschlossen" oder „offen".

§ 2. Beispiele von Rösselsprüngen.

Die Anzahl aller überhaupt möglichen verschiedenen Rösselsprünge ist bisher nicht ermittelt; jedenfalls ist sie aber ganz außerordentlich groß. Wir können hier natürlich nur einzelne wenige Beispiele herausgreifen, und zwar wollen wir mit dem ersten Beispiel, das wir geben, der im vorigen Paragraphen angegebenen historischen Entwickelung unseres Problems insofern Rechnung tragen, als wir fordern, daß bei unserem Rösselsprung zunächst die eine Bretthälfte für sich allein ganz abgelaufen werde und dann erst die andere an die Reihe komme. Ein solcher „zweiteiliger" Rösselsprung, wie man sagt, ist der von Euler herrührende der Fig. 2. Die Felder werden dabei in der Reihenfolge vom Springer durchlaufen, wie die hineingeschriebenen Zahlen dies angeben, also zunächst die ganze untere Bretthälfte und dann erst die obere.

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Fig. 2.

Unser Rösselsprung ist übrigens auch „geschlossen", d. h. ermöglicht einen Übergang von dem Schlußfeld zum Ausgangsfeld zurück, da die Felder 64 und 1 sich rösseln. Mit der Existenz eines geschlossenen Rösselsprungs ist zugleich der Nachweis erbracht, daß auch bei beliebigem Ausgangsfeld stets ein Rösselsprung und zwar ein geschlossener existiert. Um z. B. einen solchen mit 19 als Anfangsfeld zu erhalten, braucht man ja in Fig. 2 nur die Felder 19—64 in alter Weise zu durchlaufen, von 64 zu 1 zu gehen und dann die Felder 1—19 wieder in alter Weise zu durchlaufen. Es ist damit sogar gezeigt, daß es bei beliebigem Ausgangsfeld sogar mindestens 2 Rösselsprünge gibt, da jeder geschlossene Rösselsprung natürlich eine Durchlaufung der Felder in zwiefacher Reihenfolge gestattet, z. B. unser ursprünglicher (Fig. 2) neben der Durchlaufung im angegebenen Sinne (1, 2, 3 . . . 64, 1) auch die in umgekehrtem Sinne (1, 64, 63 . . . 2, 1).

Die Diagramme der weitaus meisten Rösselsprünge bieten natürlich ein durchaus unregelmäßiges Aussehen, und eine vollständige Symmetrie ist aus Gründen, welche in der Natur der Aufgabe liegen, überhaupt nicht zu erreichen. Die Rösselsprungkomponisten haben jedoch vielfach auch den ästhetischen Rück-

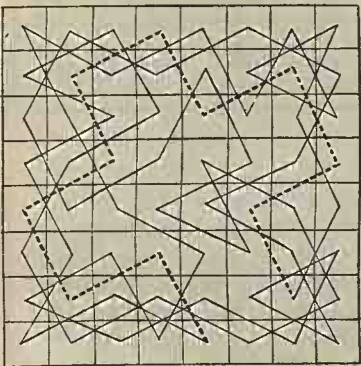

Fig. 3.

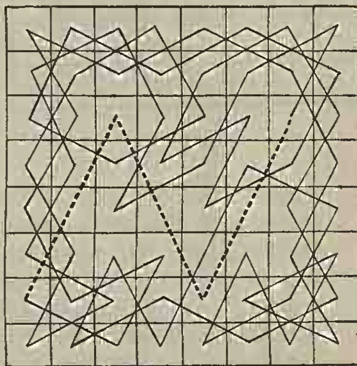

Fig. 4.

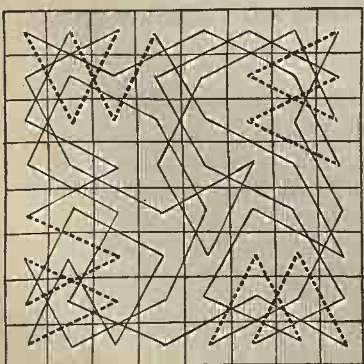

Fig. 5.

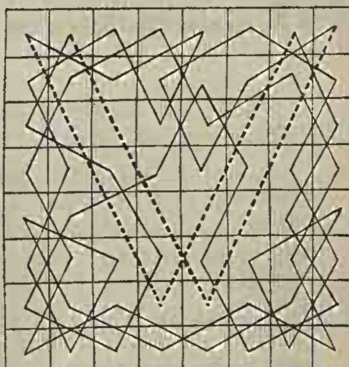

Fig. 6.

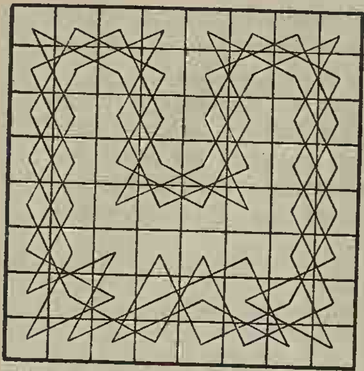

Fig. 7.

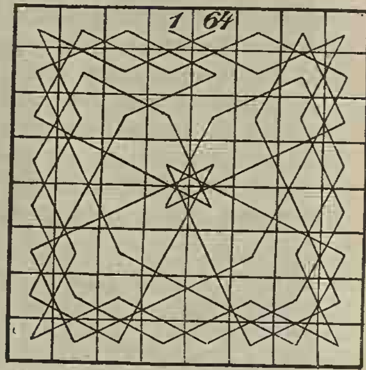

Fig. 8.

sichten soweit wie möglich Rechnung getragen und sind hierbei zu hübschen Resultaten gelangt. Einige der bemerkenswertesten Beispiele dieser Art geben die Figuren 3—8 wieder, von denen Fig. 3 ein Kreuz, Fig. 4 ein N (Napoleon), Fig. 5 ein vierfaches W (Wij Willen Wilhelmus Wederom), Fig. 6 ein doppeltes V (Vivat Victoria) im Wappen führt, während Fig. 7 als Ganzes eine Art Vase darstellt und Fig. 8 im Innern eine Art Blume und auch sonst schöne Symmetrie zeigt. Alle diese Rösselsprünge sind auch „geschlossen", nur der letzte ist „offen".

§ 3. Einige Methoden zur Bildung von Rösselsprüngen.

I.

Eine für praktische Zwecke sehr geeignete Vorschrift zur Bildung von Rösselsprüngen ist die folgende:

„Bei jedem Springerzuge wähle man unter den verschiedenen Feldern, welche durch diesen Zug überhaupt zu erreichen sind, dasjenige, von dem am wenigsten Springerzüge nach unbesetzten Feldern hin noch möglich sind, da hier die Gefahr, das betreffende Feld nicht wieder zu erreichen und es somit ganz auszulassen, verhältnismäßig am größten ist, während natürlich diejenigen Felder, welche noch mit einer größeren Zahl von freien Feldern sich rösseln, eher von einem dieser aus später noch erreicht werden können. Stehen hiernach mehrere Felder (mit einer gleichen Mindestzahl von freien Ausgängen) zur Wahl, so wähle man unter ihnen beliebig".

Die praktische Brauchbarkeit dieser Regel ist so groß, daß sie selbst bei ganz willkürlich angefangenen und schon ziemlich weit ohne Beachtung der Regel fortgesetzten Rösselsprüngen noch zum Ziele führt. Es möge z. B. der Rösselsprung über 40 Felder bereits willkürlich, wie Fig. 9 angibt, geführt sein; die Beachtung unserer Regel liefert uns alsdann den vollständigen Rösselsprung, wie ihn Fig. 10 darstellt.

Die Art wie der Rösselsprung der Fig. 10 bei Anwendung unserer Regel entstanden ist, mag noch durch folgende Ausführungen erläutert werden, wobei wir die Felder des Schachbretts der Einfachheit wegen mit den Zahlen der Fig. 10 bezeichnen wollen: Von Feld 40, dem Endpunkt unserer anfänglichen planlosen Wanderung (Fig. 9), sind außer dem Feld 41 noch folgende bisher leer gebliebene Felder erreichbar: 43, 45, 59 und 49. Von diesen besitzt das Feld 43 noch drei offene Ausgänge, nämlich nach 42, 44 und 60; Feld 45 hat gleichfalls drei solcher Ausgänge, nämlich nach 44, 58 und 46 und ebensoviel Ausgänge besitzt auch jedes der Felder 59 und 49. Dagegen hat Feld 41 nur noch zwei offene Ausgänge, nämlich

	21	34	9		19	32	7
35	10		20	33	8		18
22						6	31
11	36					17	
	23			40		30	5
37	12	25		27			16
24		2	39	14		4	29
1	38	13	26	3	28	15	

Fig. 9.

54	21	34	9	58	19	32	7
35	10	55	20	33	8	57	18
22	53	64	59	56	45	6	31
11	36	49	46	63	60	17	44
50	23	52	61	40	47	30	5
37	12	25	48	27	62	43	16
24	51	2	39	14	41	4	29
1	38	13	26	3	28	15	42

Fig. 10.

nach 42 und 48. Wir erhalten also in unzweideutiger Weise 41 als dasjenige aller in Betracht kommenden Felder, welches am wenigsten freie Ausgänge besitzt, und müssen daher nach unserer Regel von 40 auf 41 springen. — Für den nächsten Zug kommen in Frage die Felder 42 und 48. Von diesen hat das zweite jetzt noch vier freie Ausgänge, nämlich nach 47, 63, 49 und 51; dagegen hat 42 deren nur einen, nämlich nach 43. Wir müssen also unbedingt 42 wählen. Würden wir dies nicht tun, sondern von 41 zu 48 gehen, so könnten wir späterhin zu 42 nur noch von 43 aus gelangen, aber 42 nicht mehr verlassen. Feld 42 würde also entweder ganz ausfallen oder es könnte höchstens noch Schlußfeld des Rösselsprungs, dieser selbst also wenigstens kein „geschlossener" mehr werden. — Von 43 aus kann man zu 44 und 60 gelangen und zwar haben diese beiden Felder je drei freie Ausgänge; man kann also der Regel gemäß zwischen beiden beliebig wählen. Entscheidet man sich, wie wir tun wollen, für 44, so führt die weitere Wanderung notwendig zu Feld 45, da dieses nur zwei freie Ausgänge hat, während die daneben zur Wahl stehenden Felder 47 und 57 deren je drei besitzen. In dieser Weise setzt sich das Verfahren fort.

Frage 23: Wähle die ersten 37 Felder so wie in dem Rösselsprung der Fig. 8 und setze die Wanderung von da ab nach der eben besprochenen Regel fort!

II.

Während die soeben angegebene Methode, so wertvoll sie für Vervollständigung bereits angefangener Rösselsprünge ist, der strengen theoretischen Begründung entbehrt und daher auch nicht notwendig zum Ziele zu führen braucht, wenn dies im allgemeinen auch der Fall sein wird, mögen jetzt noch zwei andere Methoden besprochen werden, welche sich zwar nicht einem beliebigen Anfang anpassen, dafür aber die Bildung eines Rösselsprungs von Anfang an in leicht übersichtlicher Weise lehren. Bei der einen Methode denkt man sich das Schachbrett in ein inneres Quadrat von 16 Feldern und ein Randgebiet von 48 Feldern geteilt (s. Fig. 11) und weiter die Felder jedes

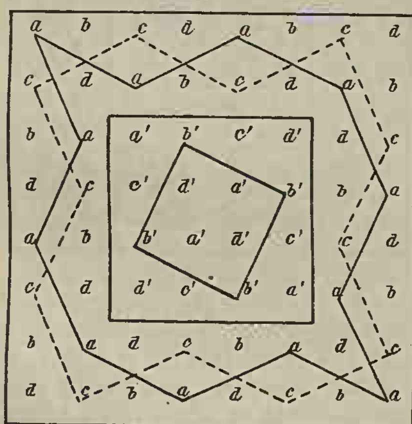

Fig. 11.

dieser 2 Teile in 4 Klassen und zwar so, daß sich die Felder derselben Klasse stets hintereinander mit dem Springer durchlaufen lassen. In Fig. 11 ist diese Einteilung so veranschaulicht, daß die Felder derselben Klasse dieselbe Bezeichnung tragen und für einige Klassen die betreffenden Ketten von Springerzügen gezeichnet sind. Wir haben im ganzen 8 Ketten von Springerzügen, 4 innere von je 4 Feldern (wir nennen sie kurz: a′, b′, c′, d′) und 4 äußere (a, b, c, d) von je 12 Feldern.

Die Methode besteht nun darin, die 8 Ketten aneinanderzureihen in der Weise, daß immer eine innere

Kette mit einer äußeren abwechselt, wobei alle Folgen zulässig sind außer denen von gleichen Buchstaben, also außer aa′, bb′, cc′, dd′, zwischen welchen eben ein Übergang nicht möglich ist. So erhält man einen brauchbaren Rösselsprung beispielsweise aus dem Schema ab′cd′ba′dc′, nämlich den in Fig. 12 angegebenen.

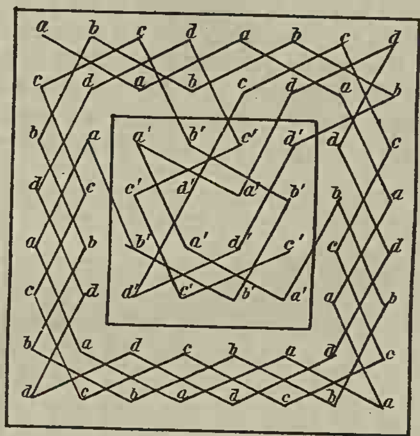

Fig. 12.

Bei der eben besprochenen Methode faßten wir die 16 Felder des inneren Quadrats zu Gruppen von je 4 oder „Quadrupeln", wie wir sagen wollen, zusammen. Zwei dieser Quadrupel bildeten die Figur eines Quadrats (b′ und c′), die beiden anderen (a′ und d′) die eines Rhombus. Diese selbe Einteilung wollen wir nun für das ganze Schachbrett durchführen, indem wir dieses zunächst in 4 gleiche Teile (Quadranten), jeden aus 16 Feldern bestehend, teilen und darauf in jedem dieser Quadranten die Felder zu Quadrupeln zusammenfassen. Die 4 Felder, die zu demselben Quadrupel gehören, sollen dieselbe Bezeichnung erhalten, z. B. alle vier ein a oder ein C oder ein E′ usw. (s. Fig. 13). Die entsprechend gelegenen Quadrupel in den 4 Quadranten mögen durch dieselbe Buchstabenart bezeichnet, jedoch untereinander durch kleine und große Buchstaben und Strichelung derselben unterschieden werden, also z. B. als a, A, a′, A′. Dabei mögen die Quadrupel, welche die Figur eines Rhombus aufweisen,

A	*B*	*C*	*E*	*a*	*b*	*c*	*e*
C	*E*	*A*	*B*	*c*	*e*	*a*	*b*
B	*A*	*E*	*C*	*b*	*a*	*e*	*c*
E	*C*	*B*	*A*	*e*	*c*	*b*	*a*
a'	*b'*	*c'*	*e'*	*A'*	*B'*	*C'*	*E'*
c'	*e'*	*a'*	*b'*	*C'*	*E'*	*A'*	*B'*
b'	*a'*	*e'*	*c'*	*B'*	*A'*	*E'*	*C'*
e'	*c'*	*b'*	*a'*	*E'*	*C'*	*B'*	*A'*

Fig. 13.

durch Vokale (A und E), die mit der Figur eines Quadrats durch Konsonanten (B und C) bezeichnet werden.

Man kann nun die Quadrupel desselben Buchstabens aneinanderreihen. Zeichnen wir z. B. die 4 Rhomben A, a, A′, a′, so sehen wir, daß wir diese zu einem zusammenhängenden Zug verbinden können, indem wir in allen 4 Rhomben je eine Seite fortnehmen und durch einen Verbindungs-Springerzug ersetzen, wobei die 4 fortgenommenen Seiten einander parallel sind. Für

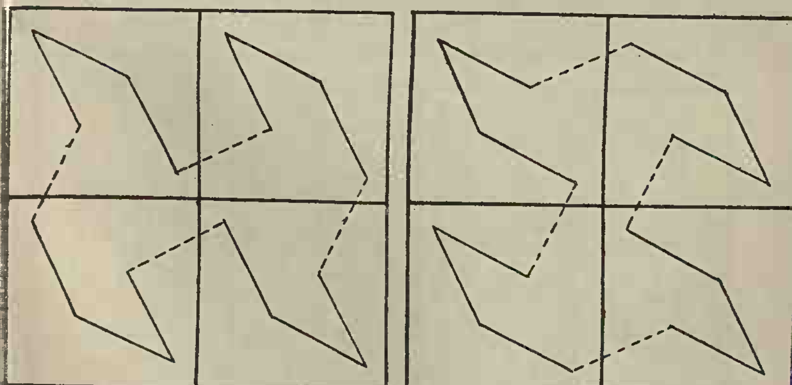

Fig. 14.

die fortzunehmende Seite können offenbar in jedem Rhombus nur 2 in Betracht kommen, nämlich die nach den anliegenden Quadranten zu liegenden, und man erhält so die 4 Quadrupel A, a, A′, a′ auf 2 Arten zu einem „Zuge“ vereinigt, wie Fig. 14 dies angibt.

Wir bekommen also zwei Züge A, wie wir kurz sagen wollen, zwei Züge B, zwei C und zwei E. Die Züge A und E — wir wollen sie „Vokalzüge“ nennen — setzen sich aus Rhomben zusammen, die Züge B und C, die „Konsonantenzüge“, aus Quadraten. Es handelt sich jetzt, um einen vollständigen Rösselsprung zusammenzusetzen, nur noch darum, 4 Züge, nämlich je einen von A, von B, von C und von E, aneinanderzureihen. Dabei ist nur zu beachten, daß man von einem Vokalzug zu einem anderen Vokalzug, also von A zu E, nicht übergehen kann und ebensowenig von einem Konsonantenzug zu einem

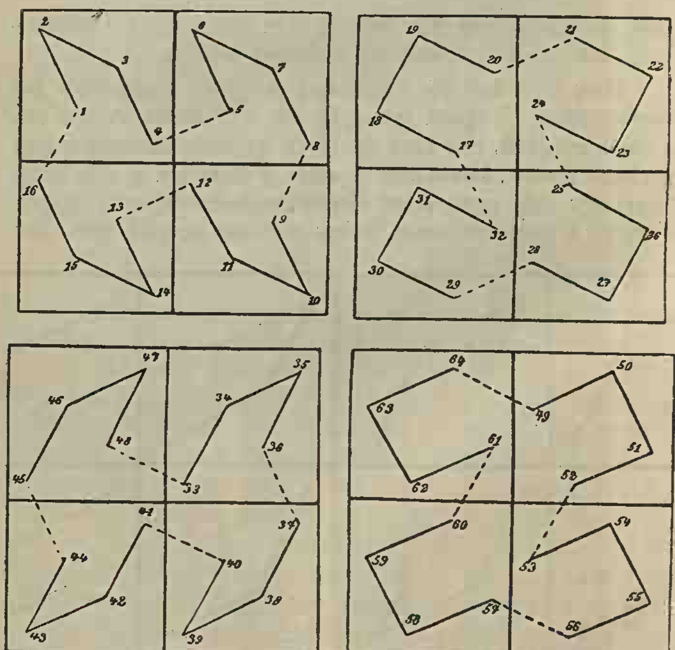

Fig. 15.

anderen solchen; denn, wie der Leser aus Fig. 13 sofort ersieht, rösselt kein Feld A, a, A′, a′ sich mit einem Felde E, e, E′, e′ und das Entsprechende gilt für die durch Konsonanten bezeichneten Felder. Dagegen kann man von einem Vokalzug zu einem Konsonantenzug überspringen, also die 4 Züge von je 16 Feldern etwa in der Reihenfolge A B E C aneinanderreihen, wodurch man einen vollständigen Rösselsprung erhält, wie Fig. 15 für diesen Fall durch die hinzugesetzten Zahlen angibt.

Natürlich lassen sich auch Rösselsprünge für andere quadratische oder rechteckige oder andersartig geformte Bretter angeben, wenn dies auch nicht unter allen Umständen möglich ist. Auf diese Fragen kann hier jedoch nicht näher eingegangen werden, und ebensowenig auch auf die Rösselsprünge in dreidimensionalen Gebieten (kubische Rösselsprünge).

§ 4. Magische Rösselsprünge.

Eine besonders kunstvolle Form der Rösselsprünge bilden diejenigen, bei denen die Ziffern, welche die Reihenfolge der Felder angeben, in jeder horizontalen und jeder vertikalen Reihe eine konstante Summe ergeben. Solche Rösselsprünge, welche danach also die Haupteigenschaft der im nächsten Kapitel (IX)

50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38	260
10	49	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Fig. 16.

zu besprechenden „magischen Quadrate“ aufweisen und daher „magische“ resp. „semi-magische“ genannt werden, sind von verschiedenen Liebhabern konstruiert. — Soll die Summe in allen horizontalen und vertikalen Reihen konstant sein, so ergibt sich für diese Summe nach einer leichten Rechnung der Wert 260.

Der obige (Fig. 16.), von dem russischen Schachtheoretiker Major von Jaenisch herrührende Rösselsprung ist besonders kunstvoll: er besitzt nicht nur die geforderte Eigenschaft, sondern ist auch geschlossen, zudem symmetrisch, da die erste Hälfte (1—32) durch Drehung des Bretts um 180° in die zweite (33—64) übergeht; außerdem läßt er sich in 2 geschlossene halbe Rösselsprünge von je 32 Feldern zerlegen, da 1 und 32 einerseits und 33 und 64 andererseits sich rösseln.

Kapitel IX.

Magische Quadrate.

§ 1. Einleitung.

Auf seinem bekannten Kupferstich „Melencolia", dem Titelbild unseres Bändchens, hat Albrecht Dürer, selbst hervorragender Mathematiker und Verfasser mehrerer mathematischer Schriften, die sitzende Figur der Geometria, umgeben von stereometrischen Körpern (Kugel, Polyeder) und allerlei Handwerkszeug zum Messen und Wägen, den Zirkel in der Hand, zur allegorischen Versinnbildlichung des Sinnens und Grübelns dargestellt. Zu Häupten der Figur befindet sich ein Zahlenquadrat, das wir der besseren Deutlichkeit halber hier nochmals (s. Fig. 1) wiedergeben. Es weist in seinen 16 Zellen die Zahlen von 1 bis 16 auf, und unten die Mittelfelder der letzten Reihe geben das Jahr 1514 an, dem der Kupferstich angehört. Die Zahlen sind so geordnet, daß, wenn wir die Zahlen irgend einer Horizontalreihe oder „Zeile" — z. B. der dritten: 9, 6, 7, 12 — zusammenzählen, wir stets die Summe 34 erhalten. Dieselbe Summe bekommen wir aber auch, wenn wir die Zahlen irgend einer Vertikalreihe oder „Kolonne" — z. B. die der ersten links: 16, 5, 9, 4 — addieren. Ja, selbst die beiden Diagonalreihen, nämlich 16, 10, 7, 1 und ebenso 13, 11, 6, 4, ergeben die nämliche Summe 34. — An der Villa Albani in Rom befindet sich, in Marmor hergestellt, ein Quadrat von gleichen Eigenschaften, nur nicht von 4 × 4, sondern von 9 × 9 Feldern, das in entsprechender Weise die Zahlen von 1 bis 81 aufweist. Man bezeichnet solche Zahlenquadrate, die eine konstante Summe in allen horizontalen, vertikalen und diagonalen

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Fig. 1.

Reihen ergeben, als „magische Quadrate“.[1]) Oft ergibt sich die betreffende konstante Summe nicht nur in den angegebenen Reihen, sondern auch noch auf mancherlei andere Weise; so können wir z. B. das Dürersche Quadrat in vier Viertelquadrate, jedes also von 4 Feldern, zerteilen, und jedes Viertel weist alsdann für sich die Zahlensumme 34 auf; ferner ergibt das Quadrat der 4 inneren Zahlen 34; ebenso die 4 Eckzahlen zusammen; ferner das Quadrat des Springer-Viererzugs[2]) 5, 2, 12, 15 resp. 3, 8, 14, 9 oder die entsprechenden Rhomben 16, 11, 1, 6 und 13, 10, 4, 7 usw. Man sieht, die Eigenschaften dieser Quadrate sind so merkwürdige, daß eine zur Mystik neigende Zeit sie wohl in Verbindung mit allerlei „magischen“ Künsten bringen und sie für mancherlei astrologische, selbst medizinische Zwecke verwerten zu sollen glauben konnte.

§ 2. Das neunzellige Quadrat.

Das 16 zellige Dürersche Quadrat stellt noch nicht den einfachsten Fall magischer Quadrate vor, vielmehr gibt es auch solche von $3 \times 3 = 9$ Zellen, während allerdings magische Quadrate von $2 \times 2 = 4$ Zellen ausgeschlossen sind, wie der Leser leicht erkennt. Wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, ein neunzelliges magisches Quadrat zu bilden, also die Aufgabe, die neun Zahlen 1, 2 . . 9 (s. Fig. 2) so in die Zellen einzuordnen, daß in den angegebenen Reihen stets eine und dieselbe konstante Summe sich ergibt. Welche Summe wird dies sein? — so lautet die Vorfrage, die wir uns zunächst vorlegen. Die Antwort erhalten wir am schnellsten, wenn wir die 9 Zahlen zweimal unter einander, jedoch in verschiedener Richtung, hinschreiben, also so:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fig. 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1.

Je zwei untereinanderstehende Zahlen ergeben stets die Summe 10, beide Reihen zusammen also 90, jede Reihe für sich daher 45. 45 ist also die Summe unserer 9 Zahlen; diese verteilen sich nun in unserem neunzelligen Quadrat (Fig. 2) auf 3 Zeilen

[1]) Vgl. a. den letzten Paragraphen des vorhergehenden Kapitels: „Magische Rösselsprünge“.

[2]) Vgl. Kap. VIII, § 3, II, insbesondere die Figuren 11, 14, 15.

respektive 3 Kolonnen, so daß auf jede Zeile resp. Kolonne als konstante Summe 15 entfallen würde.

Die in dem Mittelfeld stehende Zahl — in Fig. 2 ist es vorläufig 5 — gehört nicht nur jeder der beiden Diagonalreihen an, sondern auch den beiden Mittelachsen, worunter wir die mittlere Horizontalreihe und die mittlere Vertikalreihe verstehen. Unbeabsichtigter Weise ergeben bei der Anordnung der Fig. 2 diese 4 Reihen (Diagonalreihen und Mittelachsen), nämlich 1, 5, 9 und 3, 5, 7, ferner 4, 5, 6 und 2, 5, 8, bereits die geforderte konstante Summe 15, ohne daß jedoch das Quadrat der Fig. 2 bereits ein „magisches" wäre (der Leser braucht z. B. nur die erste Horizontalreihe anzusehen). In jeder der herausgegriffenen 4 Reihen kommt die Zahl des Mittelfeldes vor, im ganzen also in allen 4 zusammen viermal; dagegen kommt von allen anderen 8 Zahlen der Fig. 2 jede gerade nur in einer dieser 4 Reihen (Diagonalen und Mittelachsen) vor. Wir können also, wenn wir uns die Zahlen unserer 4 Reihen addiert denken, sagen, daß in dieser Gesamtsumme jede der 9 Zahlen gerade einmal vorkommt, die Zahl des Mittelfeldes aber außerdem noch dreimal. Die Summe der 9 Zahlen ist nun 45; die Summe unserer 4 Reihen wird also sein gleich 45, vermehrt noch um das Dreifache der mittleren Zahl. Andererseits muß aber, wenn das Quadrat magisch sein soll, jede der 4 Reihen die Summe 15 ergeben, alle vier zusammen also 60, woraus durch Vergleichung mit dem obigen Resultat folgt, daß das Dreifache der mittleren Zahl = 15, die mittlere Zahl selbst also = 5 sein muß. Wir sehen so, daß alle neunzelligen magischen Quadrate in der Mitte die 5 aufweisen müssen. Dann müssen aber 2 gegenüberliegende Eckfelder (1 und 9 oder 3 und 7 in Fig. 2) und ebenso 2 gegenüberliegende Mittelzellen (2 und 8 oder 4 und 6) entweder beide mit ungeraden oder beide mit geraden Zahlen besetzt werden, da mit der 5 in dem Mittelfeld sich sonst in den Diagonalreihen resp. den Mittelachsen nicht eine ungerade Summe (15) ergeben würde. Alle 4 Eckzellen können aber jedenfalls nicht mit den 4 ungeraden Zahlen besetzt werden, da dann z. B. die erste Zeile eine gerade Summe ergeben würde. Würden nur 2 gegenüberliegende Eckzellen mit ungeraden Zahlen besetzt, so müßten also die anderen beiden disponiblen ungeraden Zahlen in 2 gegenüberliegende Mittelzellen gesetzt werden; aber dann erhielte man offenbar wieder 2 Reihen mit je 2 ungeraden und einer geraden Zahl, also einer geraden Summe entgegen unserer Forderung. Die ungeraden Zahlen müssen daher in die Mittelzellen und die geraden in die Eckzellen gesetzt werden. Hiernach sieht man sofort, daß man 8 Lösungen erhält, deren eine die der Fig. 3 z. B. ist. Aus ihr gehen die übrigen 7 auf folgende Weise hervor: Dadurch, daß man sich das ganze Quadrat um 90⁰, 180⁰, 270⁰ gedreht denkt, erhält man zunächst drei weitere magische Quadrate, so daß man also jetzt über deren 4 im ganzen verfügt. Von diesen 4 Quadraten denken wir uns nun jedes an einer spiegelnden Fläche, die sich etwa am unteren Rande des Quadrats befinden mag, gespiegelt, und erhalten so 4 weitere magische Quadrate, so daß wir im ganzen die versprochenen 8 haben. Andererseits ist damit aber auch die Zahl aller erschöpft, wie eine einfache Überlegung auf Grund der obigen Ausführungen lehrt.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Fig. 3.

Frage 24: Wie groß ist die konstante Summenzahl bei dem in § 1 erwähnten magischen Quadrat der Villa Albani?

§ 3. Allgemeine Methode für ungeradzellige Quadrate.

Für größere als vierzellige Quadrate ist unsere Aufgabe stets lösbar und zwar ist die Lösung bei ungerader Zellenzahl sehr viel leichter als bei gerader. Wir wollen uns daher mit dem ersteren Fall näher beschäftigen und eine allgemein zur Bildung von ungeradzelligen magischen Quadraten anwendbare Methode besprechen, wobei wir uns an ein bestimmtes Beispiel, das eines Quadrats von 7×7 Zellen, halten wollen. Die 49 Zahlen, welche wir in die Zellen des Quadrats einzuordnen haben, wollen wir zunächst in folgender Anordnung schreiben:

$$
\begin{array}{llll}
1 = \phantom{1\times 7+{}}1 & 2 = \phantom{1\times 7+{}}2 & 3 = \phantom{1\times 7+{}}3 & 4 \\
8 = 1\times 7+1 & 9 = 1\times 7+2 & 10 = 1\times 7+3 & 11 = \\
15 = 2\times 7+1 & 16 = 2\times 7+2 & 17 = 2\times 7+3 & 18 = \\
22 = 3\times 7+1 & 23 = 3\times 7+2 & 24 = 3\times 7+3 & 25 = \\
29 = 4\times 7+1 & 30 = 4\times 7+2 & 31 = 4\times 7+3 & 32 = \\
36 = 5\times 7+1 & 37 = 5\times 7+2 & 38 = 5\times 7+3 & 39 = \\
43 = 6\times 7+1 & 44 = 6\times 7+2 & 45 = 6\times 7+3 & 46 =
\end{array}
$$

Unter einander stehen hierbei immer diejenigen Zahlen, welche bei Division durch 7 denselben Rest lassen: in der ersten Kolonne alle mit Rest 1, in der zweiten alle mit Rest 2 usw., schließlich in der letzten alle mit Rest 0, jedoch ist hier aus später erkennbaren Zweckmäßigkeitsgründen so geschrieben, daß 7 als Rest erscheint. In derselben Zeile stehen dagegen alle diejenigen Zahlen, welche ein gleiches Vielfaches von 7 aufweisen: in der ersten diejenigen ohne ein solches Vielfaches, in der zweiten diejenigen mit einmal 7, in der dritten diejenigen mit dem Doppelten von 7 usw., schließlich in der letzten diejenigen mit dem Sechsfachen von 7. Wir werden hiernach späterhin eine weitere Erläuterung zu geben nicht nötig haben, wenn wir kurz von den „Resten“ und „Vielfachen“ unseres „Schemas“ sprechen.

Als Vorstufe zur Bildung eines magischen Quadrats wollen wir uns zunächst einmal nur die folgende, sehr viel leichtere Aufgabe stellen: Die 49 Zahlen sind in die 49 Zellen so einzureihen, daß alle Horizontalreihen die gleiche Summe ergeben. Diese Summe muß, wie vorwegbemerkt sei, offenbar $\frac{50 \times 49}{2 \times 7} = 175$ sein. — Unsere Teilaufgabe ist sehr viel leichter als die Hauptaufgabe, weil die Summen der Vertikal- und Diagonalreihen jetzt beliebig sein dürfen und es sich also nur darum handelt, die 49 Zahlen so auf 7 Zeilen von je 7 Plätzen zu verteilen, daß sich die zwischen den Zahlen bestehenden Größenunterschiede für die einzelnen Zeilen gegenseitig das Gleichgewicht halten, also in jeder Zeile die Gesamtsumme dieselbe wird. Eine solche Verteilung erhält man nun, wenn man aus unserer obigen Anordnung des „Schema“ immer je 7 Zahlen so herausgreift, daß **niemals zwei derselben Zeile oder Kolonne des Schema** angehören. Man bekommt nämlich, wenn zunächst die

---

ma“

4	$5 =\quad 5$	$6 =\quad 6$	$7 =\quad 7$
$\times 7 + 4$	$12 = 1 \times 7 + 5$	$13 = 1 \times 7 + 6$	$14 = 1 \times 7 + 7$
$\times 7 + 4$	$19 = 2 \times 7 + 5$	$20 = 2 \times 7 + 6$	$21 = 2 \times 7 + 7$
$\times 7 + 4$	$26 = 3 \times 7 + 5$	$27 = 3 \times 7 + 6$	$28 = 3 \times 7 + 7$
$\times 7 + 4$	$33 = 4 \times 7 + 5$	$34 = 4 \times 7 + 6$	$35 = 4 \times 7 + 7$
$\times 7 + 4$	$40 = 5 \times 7 + 5$	$41 = 5 \times 7 + 6$	$42 = 5 \times 7 + 7$
$\times 7 + 4$	$47 = 6 \times 7 + 5$	$48 = 6 \times 7 + 6$	$49 = 6 \times 7 + 7$

7 gewählten Zahlen alle verschiedenen Kolonnen des Schema angehören, jeden der 7 „Reste“, nämlich 1, 2, 3 . . . 7, gerade einmal; die Zugehörigkeit zu den verschiedenen Zeilen würde andererseits zur Folge haben, daß jedes „Vielfache“ von 7: das Nullfache, Einfache, Doppelte, . . . Sechsfache, gerade einmal vorkommt. Als Beispiel braucht man nur die Zahlen der einen Diagonalreihe des „Schema“ zu nehmen, da diese alle zu verschiedenen Zeilen und Kolonnen des Schema gehören, also:

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
9 &= 1 \times 7 + 2\\
17 &= 2 \times 7 + 3\\
25 &= 3 \times 7 + 4\\
33 &= 4 \times 7 + 5\\
41 &= 5 \times 7 + 6\\
49 &= 6 \times 7 + 7.
\end{aligned}$$

Alle „Vielfachen“ von 7 und alle 7 „Reste“ sind in dieser Gruppe vertreten, und es lassen sich offenbar aus allen 49 Zahlen 7 solcher Gruppen bilden. In der Summe der Zahlen jeder Gruppe käme alsdann jedes „Vielfache“ und jeder „Rest“ gerade einmal vor; die 7 Zahlen jeder Gruppe ergäben also stets dieselbe Summe, nämlich die Summe aller „Vielfachen“ und aller „Reste“, also $(1 \times 7 + 2 \times 7 + 3 \times 7 + 4 \times 7 + 5 \times 7 + 6 \times 7) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$; das ist aber natürlich unser 175.

Eine zweite derartige Gruppe von 7 solchen Zahlen wäre z. B.

$$\begin{aligned}
2 &= 2\\
10 &= 1 \times 7 + 3\\
18 &= 2 \times 7 + 4\\
26 &= 3 \times 7 + 5\\
34 &= 4 \times 7 + 6\\
42 &= 5 \times 7 + 7\\
43 &= 6 \times 7 + 1.
\end{aligned}$$

Diese Zahlen enthalten jeden „Rest“ gerade einmal und ebenso jedes „Vielfache“, und ihre Summe ist daher wieder 175.

Eine dritte weniger übersichtlich ausgewählte Gruppe wäre z. B.

$$\begin{aligned}
3 &= 3\\
14 &= 1 \times 7 + 7\\
16 &= 2 \times 7 + 2\\
27 &= 3 \times 7 + 6\\
32 &= 4 \times 7 + 4\\
36 &= 5 \times 7 + 1\\
47 &= 6 \times 7 + 5.
\end{aligned}$$

Auch diese Gruppe weist alle „Vielfachen“ und alle „Reste“ auf oder, mit anderen Worten: von den 7 Zahlen der Gruppe gehören nie zwei derselben Zeile oder Kolonne des „Schema“ an. — Wir können leicht aus den noch übrigen 28 Zahlen 4 weitere solcher Gruppen bilden und erhalteu so, wenn wir die Zahlen einer Gruppe immer in eine Reihe schreiben, z. B. folgende Anordnung:

1	9	17	25	33	41	49
2	10	18	26	34	42	43
3	14	16	27	32	36	47
4	8	19	23	35	38	48
5	11	20	28	29	37	45
6	12	21	22	31	39	44
7	13	15	24	30	40	46.

Wir haben so ein Quadrat erhalten, das in bezug auf die Horizontalreihen (Zeilen) der Bedingung der magischen Quadrate genügt, stets die betreffende konstante Summe (für unser Beispiel 175) zu ergeben; daß die Bedingung in den Zeilen erfüllt ist, ergibt sich, wie wiederholt hervorgehoben werden mag, sofort aus der Tatsache, daß von den in einer Zeile zusammenstehenden Zahlen niemals zwei derselben Horizontalen oder Vertikalen des „Schema“ angehören. In den Vertikalreihen (Kolonnen) weist unser Quadrat die geforderte Summe natürlich nicht auf, und es wird sich auch durch Umstellen der Zahlen jeder Zeile untereinander dies nicht erreichen lassen, da wir bei Auswahl der Zahlen unserer 7 Gruppen ganz unsystematisch verfahren sind. Man könnte jedoch natürlich ebenso, wie wir hier ein Quadrat gebildet haben, das in allen Zeilen die konstante Summe aufweist, ein solches bilden, bei dem dies für alle Kolonnen gilt, und brauchten ja übrigens zu dem Zwecke das obige nur um 90^0 zu drehen. — Näher unserem schließlichen Ziel, dem magischen

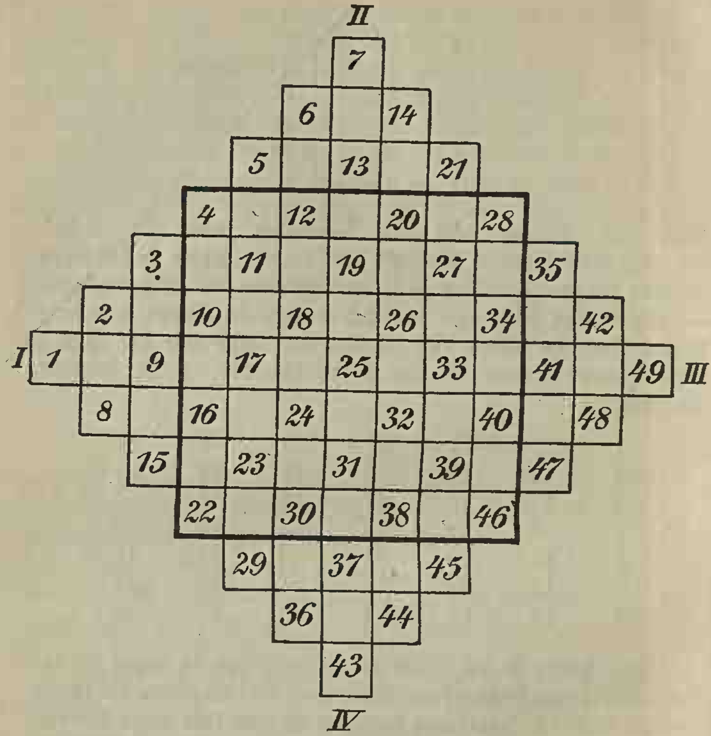

Fig. 4.

Quadrat, gelangen wir jedoch nur, wenn es uns gelingt, die 49 Zahlen so anzuordnen, daß nicht nur in jeder Zeile, sondern zugleich auch in jeder Kolonne alle „Reste" und alle „Vielfachen" vertreten sind. Zu dem Zwecke tragen wir die Zahlen des „Schema" in ein aus einem 49zelligen Quadrat mit 4 angesetzten „Terrassen" I—IV bestehendes Feldernetz so ein, wie Fig. 4 dies veranschaulicht: Die Zahlen der ersten Zeile des „Schema" (1, 2 . . . 7) stehen in Fig. 4 in der ersten von links nach oben rechts verlaufenden schrägen Felderreihe; dann kommen entsprechend in paralleler Felderreihe die Zahlen der zweiten Zeile des „Schema" (8, 9 . . . 14) usf. Das Verfahren besteht nun darin, daß die Terrassen so lange

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

Fig. 5.

in das Quadrat hinein verschoben werden, bis ihre Basis mit der gegenüberliegenden Quadratseite zusammenfällt. Hierdurch gelangen die in den Terrassen stehenden Zahlen in die noch leeren Felder des Quadrats und füllen dieses aus. Das entstehende Quadrat (s. Fig. 5) ist dann ein magisches.

Die Zeilen und Kolonnen des so gebildeten Quadrats genügen unserer Forderung deswegen, weil jede Zeile und jede Kolonne des Quadrats (Fig. 5) alle „Reste" und alle „Vielfachen" aufweist. Fassen wir z. B. in Fig. 4 die Zahlen 8, 9, 10 . . . 14 ins Auge, so gehören davon 10, 11, 12 den 3 ersten Zeilen des Quadrats der 49 Felder an, 9 und 8 kommen später bei der Terrassenverschiebung in die dann folgenden Zeilen, nämlich die vierte und fünfte, während die noch übrigen Zahlen 13 und 14 aus Terrasse II in die beiden letzten Zeilen, die siebente und sechste, gelangen. Die Zahlen 8, 9, 10 . . . 14, die das gemeinsame haben, daß sie alle und sie allein das „Einfache" von 7 enthalten in unserer Anordnung des „Schema", verteilen sich also auf 7 verschiedene Zeilen des fertigen Quadrats der Fig. 5. Jede Zeile des Quadrats erhält also das „Einfache" von 7 gerade einmal zuerteilt. — Ebenso sehen wir aus Fig. 4, daß die 7 Zahlen 8, 9, 10 . . . 14 sich auf 7 verschiedene Kolonnen des Quadrats (Fig. 5) verteilen (10, 11, 12 stehen in den 3 ersten, 13, 14 gelangen in die vierte und fünfte, 8 und 9 bei Verschiebung von Terrasse I in die beiden letzten). Umgekehrt erhält somit jede Kolonne das

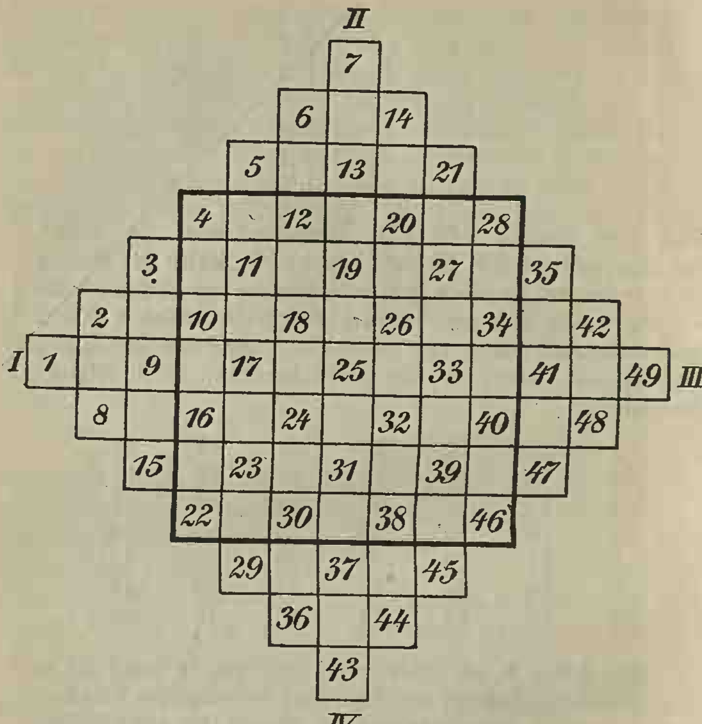

Fig. 4.

Quadrat, gelangen wir jedoch nur, wenn es uns gelingt, die 49 Zahlen so anzuordnen, daß nicht nur in jeder Zeile, sondern zugleich auch in jeder Kolonne alle „Reste" und alle „Vielfachen" vertreten sind. Zu dem Zwecke tragen wir die Zahlen des „Schema" in ein aus einem 49 zelligen Quadrat mit 4 angesetzten „Terrassen" I—IV bestehendes Feldernetz so ein, wie Fig. 4 dies veranschaulicht: Die Zahlen der ersten Zeile des „Schema" (1, 2 . . . 7) stehen in Fig. 4 in der ersten von links nach oben rechts verlaufenden schrägen Felderreihe; dann kommen entsprechend in paralleler Felderreihe die Zahlen der zweiten Zeile des „Schema" (8, 9 . . . 14) usf. Das Verfahren besteht nun darin, daß die Terrassen so lange

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

Fig. 5.

in das Quadrat hinein verschoben werden, bis ihre Basis mit der gegenüberliegenden Quadratseite zusammenfällt. Hierdurch gelangen die in den Terrassen stehenden Zahlen in die noch leeren Felder des Quadrats und füllen dieses aus. Das entstehende Quadrat (s. Fig. 5) ist dann ein magisches.

Die Zeilen und Kolonnen des so gebildeten Quadrats genügen unserer Forderung deswegen, weil jede Zeile und jede Kolonne des Quadrats (Fig. 5) alle „Reste“ und alle „Vielfachen“ aufweist. Fassen wir z. B. in Fig. 4 die Zahlen 8, 9, 10 . . . 14 ins Auge, so gehören davon 10, 11, 12 den 3 ersten Zeilen des Quadrats der 49 Felder an, 9 und 8 kommen später bei der Terrassenverschiebung in die dann folgenden Zeilen, nämlich die vierte und fünfte, während die noch übrigen Zahlen 13 und 14 aus Terrasse II in die beiden letzten Zeilen, die siebente und sechste, gelangen. Die Zahlen 8, 9, 10 . . . 14, die das gemeinsame haben, daß sie alle und sie allein das „Einfache“ von 7 enthalten in unserer Anordnung des „Schema“, verteilen sich also auf 7 verschiedene Zeilen des fertigen Quadrats der Fig. 5. Jede Zeile des Quadrats erhält also das „Einfache“ von 7 gerade einmal zuerteilt. — Ebenso sehen wir aus Fig. 4, daß die 7 Zahlen 8, 9, 10 . . . 14 sich auf 7 verschiedene Kolonnen des Quadrats (Fig. 5) verteilen (10, 11, 12 stehen in den 3 ersten, 13, 14 gelangen in die vierte und fünfte, 8 und 9 bei Verschiebung von Terrasse I in die beiden letzten). Umgekehrt erhält somit jede Kolonne das

„Einfache“ von 7 gerade einmal zuerteilt. — Natürlich hätten wir ebensogut auch eine andere Reihe der Zahlen in Fig. 4 herausgreifen können, z. B. 29, 30 . . . 35, also die Zahlen, welche alle und allein das „Vierfache“ von 7 enthalten; wir würden alsdann aus Fig. 4 erkannt haben, daß auch diese Zahlen sich über 7 verschiedene Zeilen und Kolonnen des Quadrats Fig. 5 verteilen, so daß jede Zeile und jede Kolonne des Quadrats das „Vierfache“ von 7 gerade einmal zuerteilt erhält. Allgemein erkennen wir so, daß in jeder Zeile und in jeder Kolonne unseres Quadrats jedes „Vielfache“ gerade einmal vorkommt. — Was aber von den „Vielfachen“ gilt, gilt auch von den „Resten“. Hätten wir z. B. in Fig. 4 die Reihe der Zahlen 3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, also die Zahlen, die alle und allein den „Rest“ 3 aufweisen, ins Auge gefaßt, so würden wir gesehen haben, daß sie sich gleichfalls auf die 7 verschiedenen Zeilen und die 7 verschiedenen Kolonnen des Quadrats Fig. 5 verteilen, so daß jede Zeile und jede Kolonne den „Rest“ 3 gerade einmal zuerteilt erhält. Dies gilt dann allgemein, nicht nur für den Rest 3, sondern für jeden. Jede Zeile und jede Kolonne des Quadrats Fig. 5 weist somit jeden „Rest“ und jedes „Vielfache“ gerade einmal auf; die Zeilen und Kolonnen ergeben daher alle die geforderte konstante Summe.

Es bleibt zu prüfen, ob auch die beiden Diagonalen die geforderte Summe aufweisen: Die eine enthält die Zahlen 4, 11, 18, 25, 32, 39, 46 (s. Fig. 4), und damit alle verschiedenen „Vielfachen“ je einmal. Dagegen enthält sie nicht alle „Reste“, sondern immer nur den Rest 4. Nun ergibt aber die Summe aller „Reste“, nämlich $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, genau dasselbe wie wenn die mittlere[1]) Zahl, 4, siebenmal genommen wird (vgl. S. 98 unten). Diese Diagonale muß somit gleichfalls die geforderte Zahlensumme aufweisen. Von der anderen Diagonale gilt mutatis mutandis dasselbe: sie enthält alle „Reste“, dagegen stets dasselbe „Vielfache“; dieses ist jedoch gerade das mittlere, so daß sich auch hier die geforderte Summe 175 ergibt. — Das Quadrat der Fig. 5 besitzt also alle Eigenschaften der magischen Quadrate.

[1]) Hierbei ist wesentlich, daß die 7 eine *ungerade* Zahl ist; unsere Methode ist aus diesem und anderen übrigens leicht erkennbaren Gründen nur bei ungeradzelligen Quadraten brauchbar.

Frage 25: Bilde nach dieser Methode ein magisches Quadrat von 25 Zellen!

§ 4. Geradzellige Quadrate.

Die Bildung geradzelliger magischer Quadrate ist nicht so einfach, wie die der ungeradzelligen. Wir wollen uns hier auf den Unterfall beschränken. daß die Zahl der Felder in jeder Reihe unseres Quadrats nicht nur gerade, sondern, wie man sagt, „gerad-gerade", d. h. durch 4 teilbar ist. Es soll sich also nur um Quadrate von 4, 8, 12, 16 . . . Feldern in jeder Reihe handeln. Wir greifen als Beispiel den Fall eines Quadrats von 8 × 8 Feldern heraus und schreiben zunächst die Zahlen 1—64 in natürlicher Ordnung, wie Fig. 6 zeigt, in die Felder hinein. Jedem Feld

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Fig. 6.

resp. jeder Zahl wollen wir uns alsdann ein zweites als „gegenüberliegendes" zugeordnet denken, und zwar soll, wenn z. B. das eine Feld der 3ten Zeile und 4ten Kolonne angehört — es ist 20 —, als „gegenüberliegendes" dasjenige bezeichnet werden, das der **drittletzten** Zeile und **viertletzten** Kolonne angehört, also 45. Die beiden Zahlen ergeben zusammen 65 und zwar ergibt sich diese Summe stets für jedes Paar von zwei „gegenüberliegenden" Zahlen, wie der Leser sich leicht durch Stichproben überzeugt. Dies darf uns auch nicht wundernehmen; denn zwei „gegenüberliegende" Felder stehen, wenn wir sie in der durch die Zahlen der Fig. 6 vorgeschriebenen Reihenfolge nehmen, gleich weit von beiden Enden der Reihe ab, 20 ebenso weit von 1 wie 45 von dem anderen Ende 64. Wenn wir aber alle Zahlen in natürlicher Ordnung in eine Reihe schreiben würden, also 1, 2, 3 .... 62, 63, 64, so würden zwei, die gleich weit von beiden Enden abstehen, stets zusammen 65 geben, wie wir bereits früher gesehen hatten, als wir die Zahlen zweimal und zwar untereinander, jedoch in verschiedener Richtung, hinschrieben:

1, 2, 3, ... 62, 63, 64
64, 63, 62, ... 3, 2, 1 (vgl. S. 98).

Der Zahl 1 liegt in Fig. 6 „gegenüber" 64, der Zahl 10 die Zahl 55 usw.; überhaupt liegt, wenn die eine Zahl in der Diagonalreihe liegt, die „gegenüberliegende" auch darin. Für die andere Diagonalreihe gilt ganz dasselbe: der Zahl 8 liegt „gegenüber" 57 usw. Darnach teilen sich die 8 Zahlen, die in derselben Diagonale stehen, in 4 Paare von je zwei „gegenüberliegenden". Jedes Paar gegenüberliegender Zahlen ergibt nun die Summe 65, wie wir sahen; die 8 Zahlen einer Diagonale ergeben also die Summe $4 \times 65 = 260$. Dies ist nun aber, wie der Leser leicht nachrechnet, gerade die Summe, die sich in dem späteren magischen Quadrat in jeder Zeile, Kolonne und Diagonale wird ergeben müssen. Die Diagonalen genügen also bereits bei der natürlichen Anordnung der Zahlen, wie sie Fig. 6 gibt, der Forderung des magischen Quadrats. Dies wird der Leser auch nicht anders erwartet haben[1]); denn wenn wir (s. Fig. 6) die kleinste Zahl (1) und die größte (64) zusammennehmen, dann wieder die zehntkleinste (10) und die zehntgrößte (55) usw., so müssen sich die Größenunterschiede so ausgleichen, daß wir im ganzen gerade auf den Durchschnitt kommen. Darauf beruht aber überhanpt die Anordnung der Zahlen in den magischen Quadraten.

Die **Zeilen** und **Kolonnen** der Fig. 6 genügen jedoch der Forderung des magischen Quadrats noch keineswegs: die Zahlen der ersten Zeile z. B. ergeben eine viel zu kleine, die der letzten eine viel zu große Summe. Wir können jedoch hier leicht ausgleichend wirken; denn ebensoviel, wie der ersten Zeile an der geforderten Summe $4 \times 65 = 260$ fehlt, ebensoviel hat die letzte Zeile zuviel (beide Zeilen zusammen geben nämlich jedenfalls

[1]) Vgl. auch § 2 für den Fall des neunzelligen Quadrats.

$8 \times 65 = 2 \times 260$, weil sie gerade aus 8 Paaren „gegenüberliegender" Zahlen bestehen). Nun beträgt der Unterschied zwischen einer Zahl der ersten Zeile und der gerade darunterstehenden der letzten konstant 56; den Unterschied der beiden ganzen Zeilen haben wir also ausgeglichen, wenn wir vier Zahlen der ersten Zeile mit den vier darunterstehenden der letzten vertauschen, also z. B. 1, 2, 3, 4 mit 57, 58, 59, 60 oder auch 1, 2, 7, 8 mit 57, 58, 63, 64 usw. Jede der beiden Zeilen weist dann hinterher die Summe 260 auf. In ganz ähnlicher Beziehung zueinander stehen nun die zweite und vorletzte Zeile; wir können hier auch in ganz entsprechender Weise eine solche Ausgleichung bewirken und erhalten dann in beiden Zeilen die geforderte konstante Summe von 260. Ebenso geht es bei den übrigen Zeilen, und wir bekommen also schließlich ein Quadrat, das in allen 8 Zeilen der Forderung einer konstanten Summe genügt, nicht aber in den Kolonnen und auch im allgemeinen nicht mehr in den Diagonalen, da diese, anfänglich zwar unserer Forderung genügend (s. oben), bei den vorgenommenen Vertauschungen sich im allgemeinen geändert haben werden.

Ungeändert geblieben bei diesen Vertauschungen ist dagegen jede Kolonne, als Ganzes betrachtet; denn jede Zahl blieb bei den Vertauschungen in ihrer Kolonne. Wir können nun für die Kolonnen ganz dieselbe Einrichtung treffen, wie oben für die Zeilen, also die erste und letzte Kolonne gegeneinander ausgleichen, und so gleichfalls die konstante Summe von 260 für beide herbeiführen usw. Bei diesen Vertauschungen würden sich die Zeilen, als Ganzes betrachtet, nicht mehr ändern, da jede Zahl in ihrer Zeile bliebe; unsere obige Einrichtung für die Zeilen würde also nicht etwa wieder aufgehoben werden — Infolge der obigen Vertauschungen, die im Interesse der Zeilen vorgenommen wurden, gelangt die Zahl 1 nun etwa an die Stelle 57 und infolge der Vertauschungen, die der Kolonnen wegen nötig werden, rückt sie etwa von Platz 57 weiter nach 64, ist also im ganzen von Feld 1 gerade auf das „gegenüberliegende" Feld 64 gewandert. Eine Verfolgung der einzelnen Zahlen bei diesen sukzessiven Umstellungen liegt jedoch nicht in unserer Absicht. Es genügte uns, an einem Beispiel zu sehen, daß bei diesen Vertauschungen eine Zahl auf das dem ursprünglichen gegenüberliegende Feld gelangen *kann*. Andererseits wissen wir. daß es bei diesen Vertauschungen auf Folgendes ankommt:

Die Hälfte der Zahlen der ersten Zeile muß in die unterste Zeile wandern und dafür aus dieser die gerade darunterstehenden in die leeren Plätze der ersten Zeile; dabei braucht nun nicht jede dieser ersteren Zahlen gerade in den Platz direkt unter ihr einzurücken, sondern nur auf einen der leer werdenden Plätze. Wir sahen ja auch, daß 1 ohnehin infolge weiterer Umstellung an die Stelle 64 gelangen konnte. Wir könnten also von vornherein bei Normierung der Zeilen so verfahren, daß wir zwar aus der ersten Zeile 1, 2, 7, 8 entfernen und mit 57, 58, 63, 64 vertauschen, nun aber nicht 1 gerade mit 57, 2 mit 58 usw., sondern 1 etwa mit 64, 2 mit 63, 7 mit 58, 8 mit 57, also jede Zahl mit der ihr gegenüberliegenden. Wir haben damit dann zugleich Vertauschungen vorgenommen, die für die Einrichtung der Kolonnen bedeutsam sind. Es fragt sich: Wie ergibt sich nun ein einfaches Verfahren so, daß die Hälfte der Zahlen der ersten Zeile mit der darunterstehenden Hälfte der letzten tauscht, zugleich eine Hälfte der Zahlen der zweiten Zeile mit der darunterstehenden Hälfte der zweitletzten Zeile usw., und ferner, daß gleichzeitig auch für die Kolonnen die entsprechenden Umstellungen vorgenommen werden?[1])

Diesen Effekt erzielen wir nun am einfachsten, wenn wir die folgende Vorschrift befolgen: **Man teile das ganze Quadrat in 16 Teile, wie Fig. 7 dies angibt, und kann nun entweder die Zahlen aller mit a bezeichneten Gebiete oder aber die aller Gebiete b mit den ihnen gegenüberliegenden vertauschen.**

a	b	b	a
b	a	a	b
b	a	a	b
a	b	b	a

Fig. 7.

Man sieht, daß so gleichzeitig jede Zeile und jede Kolonne die Hälfte ihrer Zahlen mit der zugehörigen austauscht. Ferner hat der Leser gewiß bereits als sehr bedeutsam den Umstand erkannt, daß bei diesen durch Fig. 7 bezeichneten Vertauschungen, bei denen immer nur gegenüberliegende Zahlen ihre Plätze wechseln, eine in einer Diagonalreihe stehende Zahl unter allen Umständen in derselben verbleibt. Die Diagonalen, die bereits in der provisorischen Anordnung der Fig. 6 die konstante Summe des magischen Quadrats auf-

[1]) Selbstverständlich würde hier nicht von untereinanderstehenden Zahlen, sondern von solchen in gleicher Höhe zu sprechen sein.

wiesen, bleiben also jede als Gesamtheit unverändert erhalten und genügen daher auch nach Vornahme der Zahlenumstellungen unserer Forderung. Diese ist somit in allen Zeilen, Kolonnen und Diagonalen erfüllt, das Quadrat also ein magisches. Es sieht, wenn wir die Vertauschungen in den Gebieten a (Fig. 7) vornehmen, so aus, wie Fig. 8 zeigt.

64	63	3	4	5	6	58	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	7	59	60	61	62	2	1

Fig. 8.

Ist die Zahl der Felder jeder Reihe nicht durch vier teilbar, so ist die gesamte Felderzahl auch nicht durch 16 teilbar, also die Einteilung des ganzen Quadrats in 16 Gebiete im Sinne der Fig. 7 nicht möglich; unsere Methode ist dann, also z. B. bei 10×10 Feldern, nicht mehr anwendbar. Wir wollen jedoch auf diesen Fall nicht näher eingehen, da die hier zu befolgenden Methoden weniger einfach sind.

Frage 26: Gib ein magisches Quadrat von $12 \times 12 = 144$ Feldern an!

Beantwortung der Fragen.

Kapitel I.

Frage 1: B (der zweite) springt auf 2 und schreitet sodann in Stufen von je 11 fort.

Frage 2: B kann den Sieg erzwingen, da er mit dem ersten Male auf 9 gelangen und nun in Stufen von je 9 bis zu 90 fortschreiten kann.

Frage 3: A, der zunächst auf 6, dann auf 24, 42, 60, 78, 96, 114, 132 und 150 springt.

Frage 4: B, indem er zunächst auf 13 gelangt und von hier in Stufen von je 13 zum Ziel. — Die letzte Etappe vor dem Siege für B ist 169 und zwar kommt nur dies allein hierfür in Betracht, nicht etwa, wie man vielleicht denken könnte, neben 169 auch wahlfrei 170 und 171. Denn, wenn B auf irgend eine Weise auf 170 oder 171 gekommen wäre, so würde zwar A das Ziel mit dem nächsten Sprunge nicht erreichen können; jedoch kann A alsdann bis 180 resp. 181 gelangen, und B muß nun — bei einer minimalen Sprungweite von 3 Fuß — über das Ziel hinausspringen. Es würde also — man achte auf die Formulierung unserer Aufgabe — keiner von beiden siegen.

Frage 5: Sieger ist offenbar derjenige, der zuerst auf 98 oder 99 gelangt, da der Gegner alsdann — bei einem Minimum von 2 Fuß — das Ziel mit dem nächsten Sprunge erreichen bezw. überschreiten muß. A würde also den Sieg erzwingen können, wenn er zunächst auf 10 springen und dann in Stufen von je 11 zu 98 fortschreiten könnte. Nun ist ihm aber — bei einem maximalen Sprunge von 9 Fuß — die Stufe 10 für das erste Mal unerreichbar. Ebensowenig kann A es erzwingen, die Stelle 99 in Stufen von je 11 zu erreichen. Wie A daher auch beginnt, B kann mit seinem ersten Sprunge jedenfalls auf 11 gelangen, worauf er in Stufen von je 11 fortschreitet bis 99, um so A zum Überschreiten des Ziels zu zwingen. Außer diesem Verfahren, das B stets anwenden kann, gibt es für ihn noch ein zweites eventuelles: Wenn B mit dem ersten Sprunge auf 10 kommen kann, was sich für ihn jedoch nicht erzwingen läßt, so kann er von hier ab durch Vorrücken in Stufen von je 11 bis zu 98 den Sieg erzwingen, da dann A das Ziel erreichen oder überschreiten muß. — Dies zweite Verfahren ist nur dann nicht ausführbar, wenn A mit einem Sprung von 9 Fuß beginnt, das erste Verfahren dagegen unter allen Umständen.

Kapitel II.

Frage 6: Die Anzahl der Inversionen ist 23, die Aufgabe also nicht lösbar.

Kapitel III.

Frage 7: Die Aufgabe ist symmetrisch zu Nr. IV in § 3 (S. 25), woraus sich das Lösungsschema leicht ergibt.

Frage 8: Die Aufgabe ist reziprok zu Nr. XIV in § 3.

Frage 9: Aus der Kombination 46; 13 wird durch eine Vierteldrehung im Umdrehungssinne des Uhrzeigers 64; 37, hieraus durch Spiegelung an der Mittelvertikalen 24; 57 und hieraus durch Vertauschung von Anfangs- und Schlußloch: 57; 24 (Nr. X). — Die gegebene Aufgabe ist also symmetrisch zu der reziproken von Nr. X in § 3.

Kapitel IV.

Frage 10: Tü—Er—Le—Je—Ha—Gr—Be—Br—Kö—Ro—Gö—Gi—He—St—Ma—Ki—Bo.

Frage 11: Eine Reise durch die 7 Orte ist keinenfalls möglich, weil Br, Wü und St nur noch je eine Verbindung haben. Läßt man dagegen St fort, so ist die Reise durch die übrigen 6 Orte in den Fällen ausführbar, daß die Reise in dem einen der Orte Br und Wü begonnen und in dem anderen beendet wird. Man erhält nur die Lösung Br—Mü—Bo—Fr—Tü—Wü bezw. die Umkehrung davon.

Frage 12: Mü und Gi haben nur je einen Anschluß, die übrigen je zwei oder drei; man findet, wie leicht zu sehen, als einzige Routen: Mü—Er—Le—Je—Wü—Tü—Fr—St—He—Gi und die Umkehrung davon.

Frage 13: Bei Einschluß von Ro haben nur Bo und Ha je einen Anschluß, alle übrigen mindestens zwei. Es ist also die Route Bo—Ki—Ma—Gö—Ro—Kö—Br—Be—Gr—Ha und die umgekehrte möglich, jedoch, wie man leicht erkennt, auch nur diese beiden. Bei Ausschluß von Ro tritt zu Bo und Ha als Station mit nur einer Verbindung auch noch Gö. Die Reise durch die 9 preußischen Universitäten allein ist also nicht möglich; man würde höchstens 8 Stationen erreichen, nämlich Gö—Ma—Ki—Kö—Br—Be—Gr—Ha.

Frage 14: a) 6 Lösungen, nämlich:

A) Mü—Er—Le—Je—Wü—Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gö—Ma—St—He—Gi—Ha—Gr—Be—Br—Mü.

B) Mü—Er—Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ro—Gr—Be—Br—Kö—Ki—Ma—St—He—Wü—Tü—Fr—Bo—Mü.

C) Mü—Er—Le—Je—Ha—Gr—Be—Br—Kö—Ro—Gö—Gi—He—Wü—Tü—Fr—St—Ma—Ki—Bo—Mü.

D) Mü—Er—Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma—St—He—Wü—Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Be—Br—Mü.

E) Mü—Er—Le—Je—Ha—Gi—He—Wü—Tü—Fr—St—Ma—Gö—Ro—Gr—Be—Br—Kö—Ki—Bo—Mü.

F) Mü—Er—Le—Je—Wü—Tü—Fr—St—He—Gi—Ha—Gr—Be—Br—Kö—Ro—Gö—Ma—Ki—Bo—Mü.

b) 4 Lösungen, nämlich:

A) Be—Br—Mü—Er—Le—Je—Wü—Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gö—Ma—St—He—Gi—Ha—Gr—Be.

B) Be—Br—Mü—Er—Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Ha—Gi—Gö—Ma—St—He—Wü—Je—Le—Be.

C) Be—Br—Mü—Er—Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma—St—He—Wü—Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Be.

D) Be—Br—Mü—Er—Tü—Wü—He—Gi—Gö—Ma—St—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Ha—Je—Le—Be.

c) 4 Lösungen, nämlich:

A) Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Bo—Mü—Br—Kö—Ro—Gr—Be—Le—Er—Tü—Fr—St—He—Wü—Je—Ha.

B) Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Kö—Ro—Gr—Be—Br—Mü—Bo—Fr—St—He—Wü—Tü—Er—Le—Je—Ha.

C) Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Bo—Mü—Er—Tü—Fr—St—He—Wü—Je—Le—Be—Br—Kö—Ro—Gr—Ha.

D) Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Bo—Fr—St—He—Wü—Tü—Er—Mü—Br—Kö—Ro—Gr—Be—Le—Je—Ha.

d) 2 Lösungen, nämlich:

A) St—Fr—Bo—Mü—Er—Tü—Wü—He—Gi—Gö—Ro—Gr—Ha—Je—Le—Be—Br—Kö—Ki—Ma—St.

B) St—Fr—Bo—Mü—Er—Tü—Wü—Je—Le—Be—Br—Kö—Ki—Ma—Gö—Ro—Gr—Ha—Gi—He—St.

e) 3 Lösungen, nämlich:

A) Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Kö—Ro—Gr—Be—Br—Mü—Bo—Fr—St—He—Wü—Tü—Er—Le.

B) Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Bo—Fr—St—He—Wü—Tü—Er—Mü—Br—Kö—Ro—Gr—Be—Le.

C) Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma—St—He—Wü—Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Be—Br—Mü—Er—Le.

f) Keine Lösung.

Frage 15: Bei der achten Station, z. B. Le—Je—Wü—Tü—Fr—Bo—Mü—Er.

Kapitel V.

Frage 16: Nein; denn bei diesem Gewichtssatz wird der scheinbare Vorteil nur auf Kosten von Lücken gewonnen, indem Wägungen von 32 g. und 97 g. (32 + 65) überhaupt nicht möglich sind.

Frage 17: Der angegebene Gewichtssatz ermöglicht alle Wägungen von 1 g. bis 610 g. inkl.; seine 11 Gewichte können ersetzt werden durch folgende 10 Gewichte: 1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g., 32 g., 64 g., 128 g., 256 g., 512 g., und diese ermöglichen Wägungen noch bis 1023 g. einschließlich.

Frage 18: 127 Umsetzungen im ganzen, davon 64 mit Scheibe 1 und 4 mit Scheibe 5. Die erste Umsetzung ist — bei ungerader Scheibenzahl —: „1 von A auf C.“

Kapitel VI.

Frage 19: Die Anfangsstellung, bei der alle Ringe oben sind, ist natürlich durchaus noch nicht die ungünstigste für die Trennung der Ringe von der Spange. Vielmehr ist dies bei 5 Ringen[1]) die Stellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ \circ&&&&\\ \hline &\circ&\circ&\circ&\circ\end{array}$, wo zunächst die 4 letzten Ringe zu heben sind, was ebensoviele Umstellungen erfordert, als wären die Ringe ursprünglich oben und erst zu senken, also 7 Umstellungen nach unserer Tabelle. Dazu kommen dann noch die für den Fall der normalen Anfangsstellung erforderlichen 16 Umstellungen; zusammen sind es also 23.

Kapitel VII.

Frage 20: Die „Grundzahlen“ sind jetzt 1, 2, 4, 8, 16.

$$\begin{array}{rcccccccc} 7 & = & & & & & 4 & + 2 & + 1 \\ 25 & = & 16 & + & 8 & & & & + 1; \end{array}$$

die dritte Zahl muß daher $16 + 8 + 4 + 2 = 30$ sein und die entstehende „richtige“ Position also: 7, 25, 30.

Frage 21: Der zweite Spieler gewinnt, weil die anfängliche Position „richtig“ ist:

$$\begin{array}{rcccc} 3 & = & & 2 & + 1 \\ 17 & = & 16 & & + 1 \\ 18 & = & 16 & + 2 & \end{array}$$

(bezüglich der Grundzahlen siehe die Antwort auf Frage 20).

Frage 22: B; denn die Anfangsstellung c, f, h resp. 2, 5, 7 ist „richtig“.

Kapitel VIII.

Frage 23: Die Fortsetzung ergibt sich zunächst von Feld 37 aus unter Anwendung der angegebenen Regel mit Notwendigkeit

---

[1]) Bezüglich der entsprechenden ungünstigsten Stellung für den Fall von 4 Ringen vgl. die Ausführungen auf S. 66, Zeile 14—29.

bis Feld 46 ſo, wie in Fig. 17 angegeben. Von Feld 46 hätte man der Regel zufolge, anſtatt nach 47, ebenſogut nach 49 ſpringen können. Wählt man, wie wir getan, 47, ſo ergibt ſich die weitere Fortſetzung unzweideutig bis 51; von hier aus ſtehen 52 und 54 mit gleichen Rechten zur Wahl. Entſcheidet man ſich für 52, ſo geht es unzweideutig weiter bis 59, worauf man die Wahl zwiſchen 60 und 64 hat. Hierauf ergibt ſich der Schluß eindeutig. — Der ſo entſtehende Röſſelſprung (ſ. Fig. 18) weiſt, obwohl er zu ungefähr drei Fünftel der Fig. 8 entlehnt war, nicht mehr die ſchöne Form dieſes Diagramms auf, wie überhaupt die nach der gedachten Regel gebildeten Röſſelſprünge meiſt unſchön ſind. Dafür hat unſere Regel uns allerdings dieſes Mal zu einem geſchloſſenen Röſſelſprung geführt (die Schlußkette iſt in der Figur geſtrichelt gezeichnet), während der von Fig. 8 offen war.

56	17	34	1	54	19	50	3
35	12	55	18	33	2	53	20
16	57	32	13	64	51	4	49
11	36	15	58	27	48	21	52
38	31	26	63	14	59	46	5
25	10	37	28	47	22	43	60
30	39	8	23	62	41	6	45
9	24	29	40	7	44	61	42

Fig. 17.

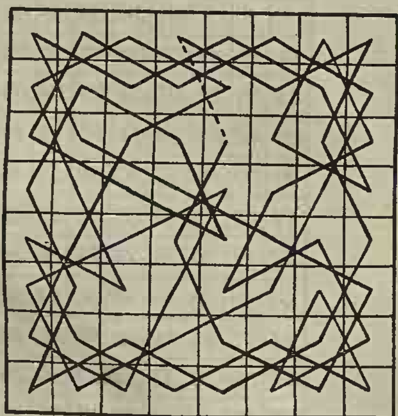

Fig. 18.

Kapitel IX.

Frage 24: Die Summe der 81 Zahlen, in zwei Reihen unter einander geschrieben, gibt 82×81, jede Reihe allein also $\frac{82 \times 81}{2}$; davon entfällt auf jede der 9 Reihen des magischen Quadrats die Summe $\frac{82 \times 81}{2 \times 9} = 369$.

Frage 25:

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Fig. 9.

Frage 26: Durch Vertauschung der Zahlen aller in Fig. 8 mit b bezeichneten Gebiete ergibt sich das folgende Quadrat:

1	2	3	141	140	139	138	137	136	10	11	12
13	14	15	129	128	127	126	125	124	22	23	24
25	26	27	117	116	115	114	113	112	34	35	36
108	107	106	40	41	42	43	44	45	99	98	97
96	95	94	52	53	54	55	56	57	87	86	85
84	83	82	64	65	66	67	68	69	75	74	73
72	71	70	76	77	78	79	80	81	63	62	61
60	59	58	88	89	90	91	92	93	51	50	49
48	47	46	100	101	102	103	104	105	39	38	37
109	110	111	33	32	31	30	29	28	118	119	120
121	122	123	21	20	19	18	17	16	130	131	132
133	134	135	9	8	7	6	5	4	142	143	144

Fig. 10.

Druck von Theodor Hofmann in Gera.

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Geheftet 1 Mark.	in Bändchen von 130–160 Seiten. Jedes Bändchen ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich.	Gebunden Mk. 1.25.

Die Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" sucht ihre Aufgabe nicht in der Vorführung einer Fülle von Lehrstoff und Lehrsätzen oder etwa gar unerwiesenen Hypothesen, sondern darin, dem Leser Verständnis dafür zu vermitteln, wie die moderne Wissenschaft es erreicht hat, über wichtige Fragen von allgemeinstem Interesse Licht zu verbreiten. Sie will dem Einzelnen ermöglichen, wenigstens an einem Punkte sich über den engen Kreis, in den ihn heute meist der Beruf einschließt, zu erheben, an einem Punkte die Freiheit und Selbständigkeit des geistigen Lebens zu gewinnen. In diesem Sinne bieten die einzelnen in sich abgeschlossenen Schriften gerade dem „Laien" auf dem betreffenden Gebiete in voller Anschaulichkeit und lebendiger Frische eine gedrängte, aber anregende Übersicht.

Aberglaube s. Heilwissenschaft.

Abstammungslehre. Abstammungslehre und Darwinismus. Von Professor Dr. R. Hesse. 2. Auflage. Mit 37 Figuren im Text. (Nr. 39.)
Die Darstellung der großen Errungenschaft der biologischen Forschung des vorigen Jahrhunderts, der Abstammungslehre, erörtert die zwei Fragen: „Was nötigt uns zur Annahme der Abstammungslehre?" und — die viel schwierigere — „wie geschah die Umwandlung der Tier- und Pflanzenarten, welche die Abstammungslehre fordert?" oder: „wie wird die Abstammung erklärt?"

Algebra s. Arithmetik.

Alkoholismus. Der Alkoholismus, seine Wirkungen und seine Bekämpfung. Herausgegeben vom Zentralverband zur Bekämpfung des Alkoholismus. 3 Bändchen. (Nr. 103. 104. 145.)
Die drei Bändchen sind ein kleines wissenschaftliches Kompendium der Alkoholfrage, verfaßt von den besten Kennern der mit ihr verbundenen sozial-hygienischen und sozial-ethischen Probleme. Sie enthalten eine Fülle von Material in übersichtlicher und schöner Darstellung und sind unentbehrlich für alle, denen die Bekämpfung des Alkoholismus als eine der wichtigsten und bedeutungsvollsten Aufgaben ernster, sittlicher und sozialer Kulturarbeit am Herzen liegt.
Band I. Der Alkohol und das Kind. Die Aufgaben der Schule im Kampf gegen den Alkoholismus. Der Alkoholismus und der Arbeiterstand. Alkoholismus und Armenpflege.
Band II. Alkoholismus und Nervosität. Alkohol und Geisteskrankheiten. Alkoholismus und Prostitution. Alkohol und Verkehrswesen.
Band III. Alkohol und Seelenleben. Alkohol und Strafgesetz. Einrichtungen im Kampf gegen den Alkohol. Einwirkungen des Alkohols auf die inneren Organe. Alkohol als Nahrungsmittel. Älteste deutsche Mäßigkeitsbewegung.

Ameisen. Die Ameisen. Von Dr. Friedrich Knauer. Mit 61 Figuren. (Nr. 94.)
Faßt die Ergebnisse der so interessanten Forschungen über das Tun und Treiben einheimischer und exotischer Ameisen, über die Vielgestaltigkeit der Formen im Ameisenstaate, über die Bautätigkeit, Brutpflege und ganze Ökonomie der Ameisen, über ihr Zusammenleben mit anderen Tieren und mit Pflanzen, über die Sinnestätigkeit der Ameisen und über andere interessante Details aus dem Ameisenleben zusammen.

Amerika (s. a. Schulwesen). Aus dem amerikanischen Wirtschaftsleben. Von Prof. J. Laurence Laughlin. Mit 9 graph. Darstellungen. (Nr. 127.)
Ein Amerikaner behandelt für deutsche Leser die Fragen, die augenblicklich im Vordergrunde des öffentlichen Lebens in Amerika stehen, den Wettbewerb zwischen den Vereinigten Staaten und Europa — Schutzzoll und Reziprozität in den Vereinigten Staaten — Die Arbeiterfrage in den Vereinigten Staaten — Die amerikanische Trustfrage — Die Eisenbahnfrage in den Vereinigten Staaten — Die Bankfrage in den Vereinigten Staaten — Die herrschenden volkswirtschaftlichen Ideen in den Vereinigten Staaten.

——— Geschichte der Vereinigten Staaten von Amerika. Von Dr. E. Daenell. (Nr. 147.)
Gibt in großen Zügen eine übersichtliche Darstellung der geschichtlichen, kulturgeschichtlichen und wirtschaftlichen Entwicklung der Vereinigten Staaten von den ersten Kolonisationsversuchen bis zur jüngsten Gegenwart mit besonderer Berücksichtigung der verschiedenen politischen, ethnographischen, sozialen und wirtschaftlichen Probleme, die zur Zeit die Amerikaner besonders bewegen.

Anthropologie s. Mensch.

Arbeiterschutz. Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung. Von weil. Professor Dr. O. v. Zwiedineck-Südenhorst. (Nr. 78.)
Das Buch bietet eine gedrängte Darstellung des gemeiniglich unter dem Titel „Arbeiterfrage" behandelten Stoffes; insbesondere treten die Fragen der Notwendigkeit, Zweckmäßigkeit und der ökonomischen Begrenzung der einzelnen Schutzmaßnahmen und Versicherungseinrichtungen in den Vordergrund.

Arithmetik und Algebra (s. a. Mathematische Spiele) zum Selbstunterricht. Von Professor Dr. P. Crantz. I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. Mit 9 Figuren im Text. (Nr. 120.)
Will in leicht faßlicher und für das Selbststudium geeigneter Darstellung über die Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra unterrichten und behandelt die sieben Rechnungsarten, die Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten und die Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten, wobei auch die Logarithmen so ausführlich behandelt sind, daß jemand an der Hand des Buches sich auch vollständig mit dem Gebrauche der Logarithmentafeln vertraut machen kann.

Astronomie (s. a. Kalender; Mond; Weltall). Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Professor Dr. S. Oppenheim. Mit 24 Abbildungen im Text. (Nr. 110.)
Schildert den Kampf der beiden hauptsächlichsten „Weltbilder", des die Erde und des die Sonne als Mittelpunkt betrachtenden, der einen bedeutungsvollen Abschnitt in der Kulturgeschichte der Menschheit bildet, wie er schon im Altertum bei den Griechen entstanden ist, anderthalb Jahrtausende später zu Beginn der Neuzeit durch Kopernikus von neuem aufgenommen wurde und da erst mit einem Siege des heliozentrischen Systems schloß.

Atome s. Moleküle.

Auge. Das Auge des Menschen und seine Gesundheitspflege. Von Privatdozent Dr. med. Georg Abelsdorff. Mit 15 Abb. im Text. (Nr. 149.)
Schildert die Anatomie des menschlichen Auges sowie die Leistungen des Gesichtsinnes, besonders soweit sie außer dem medizinischen ein allgemein wissenschaftliches oder ästhetisches Interesse beanspruchen können, und behandelt die Gesundheitspflege (Hygiene) des Auges, besonders Schädigungen, Erkrankungen und Verletzungen des Auges, Kurzsichtigkeit und erhebliche Augenkrankheiten, sowie die künstliche Beleuchtung.

Automobil. Das Automobil. Eine Einführung in Bau und Betrieb des modernen Kraftwagens. Von Ing. Karl Blau. Mit 83 Abb. (Nr. 166.)

Gibt in gedrängter Darstellung und leichtfaßlicher Form einen anschaulichen Überblick über das Gesamtgebiet des modernen Automobilismus, so daß sich auch der Nichttechniker mit den Grundprinzipien rasch vertraut machen kann, und behandelt das Benzinautomobil, das Elektromobil und das Dampfautomobil nach ihren Kraftquellen und sonstigen technischen Einrichtungen, wie Zündung, Kühlung, Bremsen, Stundung, Bereifung usw.

Baukunst (s. a. Städtebilder). Deutsche Baukunst im Mittelalter. Von Professor Dr. A. Matthaei. 2. Auflage. Mit Abbildungen im Text und auf 2 Doppeltafeln. (Nr. 8.)

Der Verfasser will mit der Darstellung der Entwicklung der deutschen Baukunst des Mittelalters zugleich über das Wesen der Baukunst als Kunst aufklären, indem er zeigt, wie sich im Verlauf der Entwicklung die Raumvorstellung klärt und vertieft, wie das technische Können wächst und die praktischen Aufgaben sich erweitern, wie die romanische Kunst geschaffen und zur Gotik weiter entwickelt wird.

Beethoven s. Musik.

Befruchtungsvorgang. Der Befruchtungsvorgang, sein Wesen und seine Bedeutung. Von Dr. Ernst Teichmann. Mit 7 Abbildungen im Text und 4 Doppeltafeln. (Nr. 70.)

Will die Ergebnisse der modernen Forschung, die sich mit dem Befruchtungsproblem befaßt, darstellen. Ei und Samen, ihre Genese, ihre Reifung und ihre Vereinigung werden behandelt, im Chromatin die materielle Grundlage der Vererbung aufgezeigt und als die Bedeutung des Befruchtungsvorgangs eine Mischung der Qualität zweier Individuen.

Beleuchtungsarten. Die Beleuchtungsarten der Gegenwart. Von Dr. phil. Wilhelm Brüsch. Mit 155 Abbildungen im Text. (Nr. 108.)

Gibt einen Überblick über ein gewaltiges Arbeitsfeld deutscher Technik und Wissenschaft, indem die technischen und wissenschaftlichen Bedingungen für die Herstellung einer wirtschaftlichen Lichtquelle und die Methoden für die Beurteilung ihres wirklichen Wertes für den Verbraucher, die einzelnen Beleuchtungsarten sowohl hinsichtlich ihrer physikalischen und chemischen Grundlagen als auch ihrer Technik und Herstellung behandelt werden.

Bevölkerungslehre. Von Professor Dr. M. Haushofer. (Nr. 50.)

Will in gedrängter Form das Wesentliche der Bevölkerungslehre geben über Ermittlung der Volkszahl, über Gliederung und Bewegung der Bevölkerung, Verhältnis der Bevölkerung zum bewohnten Boden und die Ziele der Bevölkerungspolitik.

Bibel (s. a. Jesus; Religion). Der Text des Neuen Testaments nach seiner geschichtlichen Entwicklung. Von Div.-Pfarrer A. Pott. Mit 8 Tafeln. (Nr. 134.)

Will in die das allgemeine Interesse an der Textkritik bekundende Frage: „Ist der ursprüngliche Text des Neuen Testamentes überhaupt noch herzustellen?“ durch die Erörterung der Verschiedenheiten des Luthertextes (des früheren, revidierten und durchgesehenen) und seines Verhältnisses zum heutigen (deutschen) „berichtigten“ Text, einführen, den „ältesten Spuren des Textes“ nachgehen, eine „Einführung in die Handschriften“ wie die „ältesten Übersetzungen“ geben und in „Theorie und Praxis“ zeigen, wie der Text berichtigt und rekonstruiert wird.

Bildungswesen (s. a. Schulwesen). Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwickelung. Von Prof. Dr. Friedrich Paulsen. (Nr. 100.)

Auf beschränktem Raum löst der Verfasser die schwierige Aufgabe, indem er das Bildungswesen stets im Rahmen der allgemeinen Kulturbewegung darstellt, so daß die gesamte Kulturentwicklung unseres Volkes in der Darstellung seines Bildungswesens wie in einem verkleinerten Spiegelbild zur Erscheinung kommt. So wird aus dem Büchlein nicht nur für die Erkenntnis der Vergangenheit, sondern auch für die Forderungen der Zukunft reiche Frucht erwachsen.

Biologie s. Abstammungslehre; Ameisen; Befruchtungsvorgang; Leben; Meeresforschung; Pflanzen; Plankton; Tierleben.

Botanik s. Obstbau; Pflanzen; Wald.

Buchwesen s. Illustrationskunst; Schriftwesen.

Buddha. Leben und Lehre des Buddha. Von Professor Dr. Richard Pischel. Mit 1 Tafel. (Nr. 109.)
Gibt nach einer Übersicht über die Zustände Indiens zur Zeit des Buddha eine Darstellung des Lebens des Buddha, seiner Stellung zu Staat und Kirche, seiner Lehrweise, sowie seiner Lehre, seiner Ethik und der weiteren Entwicklung des Buddhismus.

Chemie (s. a. Haushalt; Metalle). Luft, Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorträge aus dem Gebiete der Experimental-Chemie. Von Professor Dr. R. Blochmann. 2. Auflage. Mit zahlreichen Abb. im Text. (Nr. 5.)
Führt unter besonderer Berücksichtigung der alltäglichen Erscheinungen des praktischen Lebens in das Verständnis der chemischen Erscheinungen ein und zeigt die praktische Bedeutung desselben für unser Wohlergehen.

Christentum (s. a. Bibel; Jesus; Religion). Aus der Werdezeit des Christentums. Studien und Charakteristiken. Von Prof. Dr. J. Geffcken. (Nr. 54.)
Gibt durch eine Reihe von Bildern eine Vorstellung von der Stimmung im alten Christentum und von seiner inneren Kraft und verschafft so ein Verständnis für die ungeheure und vielseitige welthistorische kultur- und religionsgeschichtliche Bewegung.

Dampf und Dampfmaschine. Von Professor Dr. R. Vater. Mit 44 Abbildungen. (Nr. 63.)
Schildert die inneren Vorgänge im Dampfkessel und namentlich im Zylinder der Dampfmaschine, um so ein richtiges Verständnis des Wesens der Dampfmaschine und der in der Dampfmaschine sich abspielenden Vorgänge zu ermöglichen.

Darwinismus s. Abstammungslehre.

Deutschland s. Kolonien; Volksstämme; Wirtschaftsgeschichte.

Drama (s. a. Theater). Das deutsche Drama des neunzehnten Jahrhunderts. In seiner Entwicklung dargestellt von Professor Dr. G. Witkowski. 2. Auflage. Mit einem Bildnis Hebbels. (Nr. 51.)
Sucht in erster Linie auf historischem Wege das Verständnis des Dramas der Gegenwart anzubahnen und berücksichtigt die drei Faktoren, deren jeweilige Beschaffenheit die Gestaltung des Dramas bedingt: Kunstanschauung, Schauspielkunst und Publikum.

Dürer. Albrecht Dürer. Von Dr. Rudolf Wustmann. Mit 33 Abbildungen im Text. (Nr. 97.)
Eine schlichte und knappe Erzählung des gewaltigen menschlichen und künstlerischen Entwicklungsganges Albrecht Dürers und eine Darstellung seiner Kunst, in der nacheinander seine Selbst- und Angehörigenbildnisse, die Zeichnungen zur Apokalypse, die Darstellungen von Mann und Weib, das Marienleben, die Stiftungsgemälde, die Radierungen von Rittertum, Trauer und Heiligkeit sowie die wichtigsten Werke aus der Zeit der Reife behandelt werden.

Ehe und Eherecht. Von Professor Dr. Ludwig Wahrmund. (Nr. 115.)
Schildert in gedrängter Fassung die historische Entwicklung des Ehebegriffes von den orientalischen und klassischen Völkern an nach seiner natürlichen, sittlichen und rechtlichen Seite und untersucht das Verhältnis von Staat und Kirche auf dem Gebiete des Eherechtes, behandelt darüber hinaus aber auch alle jene Fragen über die rechtliche Stellung der Frau und besonders der Mutter, die immer lebhafter die öffentliche Meinung beschäftigen.

Eisenbahnen (s. a. Technik; Verkehrsentwicklung). Die Eisenbahnen, ihre Entstehung und gegenwärtige Verbreitung. Von Professor Dr. F. Hahn. Mit zahlreichen Abbildungen im Text und einer Doppeltafel. (Nr. 71.)

Nach einem Rückblick auf die frühesten Zeiten des Eisenbahnbaues führt der Verfasser die Eisenbahn im allgemeinen nach ihren Hauptmerkmalen vor. Der Bau des Bahnkörpers, der Tunnel, die großen Brückenbauten, sowie der Betrieb selbst werden besprochen, schließlich ein Überblick über die geographische Verbreitung der Eisenbahnen gegeben.

——— Die technische Entwicklung der Eisenbahnen der Gegenwart. Von Eisenbahnbau- und Betriebsinspektor E. Biedermann. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. (Nr. 144.)

Nach einem geschichtlichen Überblick über die Entwicklung der Eisenbahnen werden die wichtigsten Gebiete der modernen Eisenbahntechnik behandelt, der Oberbau, Entwicklung und Umfang der Spurbahnnetze in den verschiedenen Ländern, die Geschichte des Lokomotivenwesens bis zur Ausbildung der Heißdampflokomotiven einerseits und des elektrischen Betriebes andererseits, sowie der Sicherung des Betriebes durch Stellwerks- und Blockanlagen.

Eisenhüttenwesen. Das Eisenhüttenwesen. Erläutert in acht Vorträgen von Geh. Bergrat Professor Dr. H. Wedding. 2. Auflage. Mit 12 Figuren im Text. (Nr. 20.)

Schildert in gemeinfaßlicher Weise, wie Eisen, das unentbehrlichste Metall, erzeugt und in seine Gebrauchsformen gebracht wird. Besonders wird der Hochofenprozeß nach seinen chemischen, physikalischen und geologischen Grundlagen geschildert, die Erzeugung der verschiedenen Eisenarten und die dabei in Betracht kommenden Prozesse erörtert.

Elektrotechnik (s. a. Funkentelegraphie). Grundlagen der Elektrotechnik. Von Dr. Rud. Blochmann. Mit zahlreichen Abb. im Text. (Nr. 168.)

Eine durch lehrreiche Abbildungen unterstützte Darstellung der elektrischen Erscheinungen, ihrer Grundgesetze und ihrer Beziehungen zum Magnetismus, sowie eine Einführung in das Verständnis der zahlreichen praktischen Anwendungen der Elektrizität in den Maschinen zur Krafterzeugung, wie in der elektrischen Beleuchtung und in der Chemie.

Entdeckungen (s. a. Polarforschung). Das Zeitalter der Entdeckungen. Von Professor Dr. S. Günther. 2. Auflage. Mit einer Weltkarte. (Nr. 26.)

Mit lebendiger Darstellungsweise sind hier die großen weltbewegenden Ereignisse der geographischen Renaissancezeit ansprechend geschildert, von der Begründung der portugiesischen Kolonialherrschaft und den Fahrten des Columbus an bis zu dem Hervortreten der französischen, britischen und holländischen Seefahrer.

Erde (s. a. Mensch und Erde; Wirtschaftsgeschichte). Aus der Vorzeit der Erde. Vorträge über allgemeine Geologie. Von Professor Dr. Fr. Frech. Mit 49 Abbildungen im Text und auf 5 Doppeltafeln. (Nr. 61.)

Erörtert die interessantesten und praktisch wichtigsten Probleme der Geologie: die Tätigkeit der Vulkane, das Klima der Vorzeit, Gebirgsbildung, Korallenriffe, Talbildung und Erosion, Wildbäche und Wildbachverbauung.

Erfindungswesen s. Gewerbe.

Ernährung (s. a. Alkoholismus; Haushalt; Kaffee; Säugling). Ernährung und Volksnahrungsmittel. Sechs Vorträge von weil. Professor Dr. Johannes Frentzel. Mit 6 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. (Nr. 19.)

Gibt einen Überblick über die gesamte Ernährungslehre. Durch Erörterung der grundlegenden Begriffe werden die Zubereitung der Nahrung und der Verdauungsapparat besprochen und endlich die Herstellung der einzelnen Nahrungsmittel, insbesondere auch der Konserven behandelt.

Erziehung. (s. a. Jugendfürsorge; Knabenhandarbeit; Pädagogik). Moderne Erziehung in Haus und Schule. Vorträge in der Humboldt-Akademie zu Berlin. Von J. Tews. (Nr. 159.)

Betrachtet die Erziehung als Sache nicht eines einzelnen Berufes, sondern der gesamten gegenwärtigen Generation, zeichnet scharf die Schattenseiten der modernen Erziehung und zeigt Mittel und Wege für eine allseitige Durchdringung des Erziehungsproblems. In diesem Sinne werden die wichtigsten Erziehungsfragen behandelt: Die Familie und ihre pädagogischen Mängel, der Lebensmorgen des modernen Kindes, Bureaukratie und Schematismus, Persönlichkeitspädagogik, Zucht und Zuchtmittel, die religiöse Frage, gemeinsame Erziehung der Geschlechter, die Armen am Geiste, Erziehung der reiferen Jugend usw.

Farben s. Licht.

Frauenarbeit. Die Frauenarbeit, ein Problem des Kapitalismus. Von Privatdozent Dr. Robert Wilbrandt. (Nr. 106.)

Das Thema wird als ein brennendes Problem behandelt, das uns durch den Kapitalismus aufgegeben worden ist, und behandelt von dem Verhältnis von Beruf und Mutterschaft aus, als dem zentralen Problem der ganzen Frage, die Ursachen der niedrigen Bezahlung der weiblichen Arbeit, die daraus entstehenden Schwierigkeiten in der Konkurrenz der Frauen mit den Männern, den Gegensatz von Arbeiterinnenschutz und Befreiung der weiblichen Arbeit.

Frauenbewegung. Die moderne Frauenbewegung. Von Dr. Käthe Schirmacher. (Nr. 67.)

Gibt einen Überblick über die Haupttatsachen der modernen Frauenbewegung in allen Ländern und schildert eingehend die Bestrebungen der modernen Frau auf dem Gebiet der Bildung, der Arbeit, der Sittlichkeit, der Soziologie und Politik.

Frauenkrankheiten. Gesundheitslehre für Frauen. Von Privatdozent Dr. R. Sticher. Mit 13 Abbildungen im Text. (Nr. 171.)

Eine Gesundheitslehre für Frauen, die über die Anlage des weiblichen Organismus und seine Pflege unterrichtet, zeigt, wie diese bereits im Kindesalter beginnen muß, welche Bedeutung die allgemeine körperliche und geistige Hygiene insbesondere in der Zeit der Entwickelung hat, um sich dann eingehend mit dem Beruf der Frau als Gattin und Mutter zu beschäftigen.

Frauenleben. Deutsches Frauenleben im Wandel der Jahrhunderte. Von Direktor Dr. Ed. Otto. Mit 25 Abbildungen. (Nr. 45.)

Gibt ein Bild des deutschen Frauenlebens von der Urzeit bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts, von Denken und Fühlen, Stellung und Wirksamkeit der deutschen Frau, wie sie sich im Wandel der Jahrhunderte darstellen.

Friedensbewegung (s. a. Recht). Die moderne Friedensbewegung. Von Alfred H. Fried. (Nr. 157.)

Entwickelt das Wesen und die Ziele der Friedensbewegung, gibt dann eine Darstellung der Schiedsgerichtsbarkeit in ihrer Entwicklung und gegenwärtigem Umfang mit besonderer Berücksichtigung der hohen Bedeutung der Haager Friedenskonferenz, beschäftigt sich hierauf mit dem Abrüstungsproblem und gibt zum Schluß einen eingehenden Überblick über die Geschichte der Friedensbewegungen und eine chronologische Darstellung der für sie bedeutsamen Ereignisse.

Friedrich Fröbel. Sein Leben und sein Wirken. Von Adele von Portugall. (Nr. 82.)

Lehrt die grundlegenden Gedanken der Methode Fröbels kennen und gibt einen Überblick seiner wichtigsten Schriften mit Betonung aller jener Kernaussprüche, die treuen und oft ratlosen Müttern als Wegweiser in Ausübung ihres hehrsten und heiligsten Berufes dienen können.

Funkentelegraphie. Die Funkentelegraphie. Von Ober-Postpraktikant H. Thurn. Mit 50 Illustrationen. (Nr. 167.)

Nach einer Übersicht über die elektrischen Vorgänge bei der Funkentelegraphie und einer eingehenden Darstellung des Systems Telefunken werden die für die verschiedenen Anwendungsgebiete erforderlichen einzelnen Konstruktionstypen vorgeführt, (Schiffsstationen, Landstationen, Militärstationen und solche für den Eisenbahndienst), wobei nach dem neuesten Stand von Wissenschaft und Technik in jüngster Zeit ausgeführte Anlagen beschrieben werden. Danach wird der Einfluß der Funkentelegraphie auf Wirtschaftsverkehr und das Wirtschaftsleben (im Handels- und Kriegsseeverkehr, für den Heeresdienst, für den Wetterdienst usw.) sowie im Anschluß daran die Regelung der Funkentelegraphie im deutschen und internationalen Verkehr erörtert.

Fürsorgewesen s. Jugendfürsorge.

Fürstentum. Deutsches Fürstentum und deutsches Verfassungswesen. Von Professor Dr. E. Hubrich. (Nr. 80.)

Der Verfasser zeigt in großen Umrissen den Weg, auf dem deutsches Fürstentum und deutsche Volksfreiheit zu dem in der Gegenwart geltenden wechselseitigen Ausgleich gelangt sind, unter besonderer Berücksichtigung der preußischen Verfassungsverhältnisse. Nach kürzerer Beleuchtung der älteren Verfassungspartie schildert der Verfasser die Begründung des fürstlichen Absolutismus und demgegenüber das Erwachen, Fortschreiten und Siegen des modernen Konstitutionalismus.

Gasmaschinen s. Wärmekraftmaschinen.

Geisteskrankheiten. Von Anstaltsoberarzt Dr. Georg Ilberg. (Nr. 151.)

Erörtert das Wesen der Geisteskrankheiten und an eingehend zur Darstellung gelangenden Beispielen die wichtigsten Formen geistiger Erkrankung, um so ihre Kenntnis zu fördern, die richtige Beurteilung der Zeichen geistiger Erkrankung und damit eine rechtzeitige verständnisvolle Behandlung derselben zu ermöglichen.

Geographie s. Entdeckungen; Japan; Kolonien; Mensch; Palästina; Polarforschung; Städte; Volksstämme; Wirtschaftsleben.

Geologie s. Erde.

Germanen. Germanische Kultur in der Urzeit. Von Dr. G. Steinhausen. Mit 17 Abbildungen. (Nr. 75.)

Das Büchlein beruht auf eingehender Quellenforschung und gibt in fesselnder Darstellung einen Überblick über germanisches Leben von der Urzeit bis zur Berührung der Germanen mit der römischen Kultur.

—— Germanische Mythologie. Von Dr. Julius von Negelein. (Nr. 95.)

Der Verfasser gibt ein Bild germanischen Glaubenslebens, indem er die Äußerungen religiösen Lebens namentlich auch im Kultus und in den Gebräuchen des Aberglaubens aufsucht, sich überall bestrebt, das zugrunde liegende psychologische Motiv zu entdecken, die verwirrende Fülle mythischer Tatsachen und einzelner Namen aber demgegenüber zurücktreten läßt.

Geschichte (s. a. Amerika; Bildungswesen; Entdeckungen; Frauenleben; Fürstentum; Germanen; Japan; Jesuiten; Ingenieurtechnik; Kalender; Kriegswesen; Kultur; Kunstgeschichte; Literaturgeschichte; Luther; Münze; Musik; Palästina; Pompeji; Rom; Schulwesen; Städtewesen; Volksstämme; Welthandel; Wirtschaftsgeschichte).

Geschichte. Politische Hauptströmungen in Europa im 19. Jahrhundert. Von Professor Dr. K. Th. Heigel. (Nr. 129.)
Bietet eine knappe Darstellung der wichtigsten politischen Ereignisse vom Ausbruche der französischen Revolution bis zum Ausgang des 19. Jahrhunderts, womit eine Schilderung der politischen Ideen Hand in Hand geht und wobei überall Ursache und Folge, d. h. der innere Zusammenhang der einzelnen Vorgänge, dargelegt, auch Sinnesart und Taten wenigstens der einflußreichsten Persönlichkeiten gewürdigt werden.

——— Von Luther zu Bismarck. 12 Charakterbilder aus deutscher Geschichte. Von Professor Dr. Ottokar Weber. 2 Bändchen. (Nr. 123. 124.)
Ein knappes und doch eindrucksvolles Bild der nationalen und kulturellen Entwickelung der Neuzeit, das aus den vier Jahrhunderten je drei Persönlichkeiten herausgreift, die bestimmend eingegriffen haben in den Werdegang deutscher Geschichte. Der große Reformator, Regenten großer und kleiner Staaten, Generale, Diplomaten kommen zu Wort. Was Martin Luther einst geträumt: ein nationales deutsches Kaiserreich, unter Bismarck steht es begründet da.

——— 1848. Sechs Vorträge von Professor Dr. Ottokar Weber. (Nr. 53.)
Bringt auf Grund des überreichen Materials in knapper Form eine Darstellung der wichtigen Ereignisse des Jahres 1848, dieser nahezu über ganz Europa verbreiteten großen Bewegung in ihrer bis zur Gegenwart reichenden Wirkung.

——— Restauration und Revolution. Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Professor Dr. Richard Schwemer. (Nr. 37.)

——— Die Reaktion und die neue Ära. Skizzen zur Entwickelungsgeschichte der Gegenwart. Von Professor Dr. Richard Schwemer. (Nr. 101.)

——— Vom Bund zum Reich. Neue Skizzen zur Entwickelungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Professor Dr. Richard Schwemer. (Nr. 102.)
Die 3 Bändchen geben zusammen eine in Auffassung und Darstellung durchaus eigenartige Geschichte des deutschen Volkes im 19. Jahrhundert. „Restauration und Revolution" behandelt das Leben und Streben des deutschen Volkes in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, von dem ersten Aufleuchten des Gedankens des nationalen Staates bis zu dem tragischen Sturze in der Mitte des Jahrhunderts. „Die Reaktion und die neue Ära", beginnend mit der Zeit der Ermattung nach dem großen Aufschwung von 1848, stellt in den Mittelpunkt des Prinzen von Preußen und Otto von Bismarcks Schaffen. „Vom Bund zum Reich" zeigt uns Bismarck mit sicherer Hand die Grundlage des Reiches vorbereitend und dann immer entschiedener allem Geschehenen das Gepräge seines Geistes verleihend.

Gesundheitslehre (s. a. Alkoholismus; Ernährung; Frauenkrankheiten; Geisteskrankheiten; Haushalt; Heilwissenschaft; Krankenpflege; Leibesübungen; Mensch; Nervensystem; Säugling; Schulhygiene; Stimme; Tuberkulose). Acht Vorträge aus der Gesundheitslehre. Von Professor Dr. H. Buchner. 2. Auflage, besorgt von Professor Dr. M. Gruber. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. (Nr. 1.)
In klarer und überaus fesselnder Darstellung unterrichtet der Verfasser über die äußeren Lebensbedingungen des Menschen, über das Verhältnis von Luft, Licht und Wärme zum menschlichen Körper, über Kleidung und Wohnung, Bodenverhältnisse und Wasserversorgung, die Krankheiten erzeugenden Pilze und die Infektionskrankheiten, kurz über wichtige Fragen der Hygiene.

Gewerbe. Der gewerbliche Rechtsschutz in Deutschland. Von Patentanwalt B. Tolksdorf. (Nr. 138.)
Nach einem allgemeinen Überblick über Entstehung und Entwicklung des gewerblichen Rechtsschutzes und einer Bestimmung der Begriffe Patent und Erfindung wird zunächst das deutsche

Patentrecht behandelt, wobei der Gegenstand des Patentes, der Patentberechtigte, das Verfahren in Patentsachen, die Rechte und Pflichten des Patentinhabers, das Erlöschen des Patentrechtes und die Verletzung und Anmaßung des Patentschutzes erörtert werden. Sodann wird das Muster- und Warenzeichenrecht dargestellt und dabei besonders Art und Gegenstand der Muster, ihre Nachbildung, Eintragung, Schutzdauer und Löschung klargelegt. Ein weiterer Abschnitt befaßt sich mit den internationalen Verträgen und dem Ausstellungsschutz. Zum Schlusse wird noch die Stellung der Patentanwälte besprochen.

Handfertigkeit s. Knabenhandarbeit.

Handwerk. Das deutsche Handwerk in seiner kulturgeschichtlichen Entwicklung. Von Direktor Dr. Ed. Otto. 2. Aufl. Mit 27 Abb. auf 8 Tafeln. (Nr. 14.)

Eine Darstellung der Entwicklung des deutschen Handwerks bis in die neueste Zeit, der großen Umwälzung aller wirtschaftlichen Verhältnisse im Zeitalter der Eisenbahnen und Dampfmaschinen und der Handwerkerbewegungen des 19. Jahrhunderts, wie des älteren Handwerkslebens, seiner Sitten, Bräuche und Dichtung.

Haus (s. a. Kunst). Das deutsche Haus und sein Hausrat. Von Professor Dr. Rudolf Meringer. Mit 106 Abbildungen, darunter 85 von Professor A. von Schroetter. (Nr. 116.)

Das Buch will das Interesse an dem deutschen Haus, wie es geworden ist, fördern; mit zahlreichen künstlerischen Illustrationen ausgestattet, behandelt es nach dem „Herdhaus" das oberdeutsche Haus, führt dann anschaulich die Einrichtung der für dieses charakteristischen Stube, den Ofen, den Tisch, das Eßgerät vor und gibt einen Überblick über die Herkunft von Haus und Hausrat.

—— Kulturgeschichte des deutschen Bauernhauses. Von Regierungsbaumeister a. D. Chr. Ranck. Mit 70 Abbildungen. (Nr. 121.)

Der Verfasser führt den Leser in das Haus des germanischen Landwirtes und zeigt dessen Entwicklung, wendet sich dann dem Hause der skandinavischen Bauern zu, um hierauf die Entwicklung des deutschen Bauernhauses während des Mittelalters darzustellen und mit einer Schilderung der heutigen Form des deutschen Bauernhauses zu schließen.

Haushalt (s. a. Kaffee). Die Naturwissenschaften im Haushalt. Von Dr. J. Bongardt. 2 Bändchen. (Nr. 125. 126.)

1. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für die Gesundheit der Familie? Mit 31 Abbildungen.
2. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für gute Nahrung? Mit 17 Abbildungen.

Selbst gebildete Hausfrauen können sich Fragen nicht beantworten wie die, weshalb sie z. B. kondensierte Milch auch in der heißen Zeit in offenen Gefäßen aufbewahren können, weshalb sie hartem Wasser Soda zusetzen, weshalb Obst im kupfernen Kessel nicht erkalten soll. Da soll hier an der Hand einfacher Beispiele, unterstützt durch Experimente und Abbildungen, das naturwissenschaftliche Denken der Leserinnen so geschult werden, daß sie befähigt werden, auch solche Fragen selbst zu beantworten, die das Buch unberücksichtigt läßt.

—— Chemie in Küche und Haus. Von Professor Dr. G. Abel. Mit Abbildungen im Text und einer mehrfarbigen Doppeltafel. (Nr. 76.)

Das Bändchen will Gelegenheit bieten, die in Küche und Haus täglich sich vollziehenden chemischen und physikalischen Prozesse richtig zu beobachten und nutzbringend zu verwerten. Es wird Heizung und Beleuchtung, vor allem aber die Ernährung erörtert, werden tierische und pflanzliche Nahrungsmittel, Genußmittel und Getränke behandelt.

Haydn s. Musik.

Heilwissenschaft (s. a. Auge; Geisteskrankheiten; Gesundheitslehre; Krankenpflege; Säugling). Die moderne Heilwissenschaft. Wesen u. Grenzen des ärztlichen Wissens. Von Dr. E. Biernacki. Deutsch von Badearzt Dr. S. Ebel. (Nr. 25.)
Will in den Inhalt des ärztlichen Wissens und Könnens von einem allgemeineren Standpunkte aus einführen, indem die geschichtliche Entwicklung der medizinischen Grundbegriffe, die Leistungsfähigkeit und die Fortschritte der modernen Heilkunst, die Beziehungen zwischen der Diagnose und der Behandlung der Krankheit, sowie die Grenzen der modernen Diagnostik behandelt werden.

——— Der Aberglaube in der Medizin und seine Gefahr für Gesundheit und Leben. Von Professor Dr. D. von Hansemann. (Nr. 83.)
Behandelt alle menschlichen Verhältnisse, die in irgend einer Beziehung zu Leben und Gesundheit stehen, besonders mit Rücksicht auf viele schädliche Aberglauben, die geeignet sind, Krankheiten zu fördern, die Gesundheit herabzusetzen und auch in moralischer Beziehung zu schädigen.

Herbarts Lehren und Leben. Von Pastor O. Flügel. (Nr. 164.)
Herbarts Lehre zu kennen, ist für den Philosophen wie für den Pädagogen gleich wichtig. Aber seine eigenartige Terminologie und Deduktionsweise erschwert das Einleben in seine Gedankengefilde. Flügel übernimmt es mit musterhaftem Geschick, der Interpret des Meisters zu sein, dessen Werdegang zu prüfen, seine Philosophie und Pädagogik gemeinverständlich darzustellen.

Hilfsschulwesen (s. a. Geisteskrankheiten; Jugendfürsorge). Vom Hilfsschulwesen. Von Rektor Dr. B. Maennel. (Nr. 73.)
Es wird in kurzen Zügen eine Theorie und Praxis der Hilfsschulpädagogik gegeben. An Hand der vorhandenen Literatur und auf Grund von Erfahrungen wird nicht allein zusammengestellt, was bereits geleistet worden ist, sondern auch hervorgehoben, was noch der Entwicklung und Bearbeitung harrt.

Japan (s. a. Kunst). Die Japaner und ihre wirtschaftliche Entwicklung. Von Professor Dr. K. Rathgen. (Nr. 72.)
Vermag auf Grund eigener langjähriger Erfahrung ein wirkliches Verständnis der merkwürdigen und für uns wirtschaftlich so wichtigen Erscheinung der fabelhaften Entwicklung Japans zu eröffnen.

Jesuiten. Die Jesuiten. Eine historische Skizze von Professor Dr. H. Boehmer. (Nr. 49.)
Ein Büchlein nicht für oder gegen, sondern über die Jesuiten, also der Versuch einer gerechten Würdigung des vielgenannten Ordens, das nicht nur von der sogenannten Jesuitenmoral oder von der Ordensverfassung, sondern auch von der Jesuitenschule, von den Leistungen des Ordens auf dem Gebiete der geistigen Kultur, von dem Jesuitenstaate usw. handelt.

Jesus (s. a. Bibel; Christentum; Religion). Die Gleichnisse Jesu. Zugleich Anleitung zu einem quellenmäßigen Verständnis der Evangelien. Von Lic. Professor Dr. H. Weinel. 2. Auflage. (Nr. 46.)
Will gegenüber kirchlicher und nichtkirchlicher Allegorisierung der Gleichnisse Jesu mit ihrer richtigen, wörtlichen Auffassung bekannt machen und verbindet damit eine Einführung in die Arbeit der modernen Theologie.

——— Jesus und seine Zeitgenossen. Von Pastor K. Bonhoff. (Nr. 89.)
Die ganze Herbheit und köstliche Frische des Volkskindes, die hinreißende Hochherzigkeit und prophetische Überlegenheit des genialen Volksmannes, die reife Weisheit des Jüngerbildners und die religiöse Tiefe und Weite des Evangeliumverkünders von Nazareth wird erst empfunden, wenn man ihn in seinem Verkehr mit den ihn umgebenden Menschengestalten, Volks- und Parteigruppen zu verstehen sucht, wie es dieses Büchlein tun will.

Jesus. Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu. Von Pfarrer Dr. Paul Mehlhorn. (Nr. 137.)

Will zeigen, was von dem im Neuen Testament uns überlieferten Leben Jesu als wirklicher Tatbestand festzuhalten, was als Sage oder Dichtung zu betrachten ist, durch Darlegung der Grundsätze, nach denen die Scheidung des geschichtlich Glaubwürdigen und der es umrankenden Phantasiegebilde vorzunehmen ist und durch Vollziehung der so gekennzeichneten Art chemischer Analyse an den wichtigsten Stoffen des „Lebens Jesu".

Illustrationskunst. Die deutsche Illustration. Von Professor Dr. Rudolf Kautzsch. Mit 35 Abbildungen. (Nr. 44.)

Behandelt ein besonders wichtiges und besonders lehrreiches Gebiet der Kunst und leistet zugleich, indem es an der Hand der Geschichte das Charakteristische der Illustration als Kunst zu erforschen sucht, ein gut Stück „Kunsterziehung".

Ingenieurtechnik. Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. Von Baurat Kurt Merckel. 2. Auflage. Mit 55 Abbildungen im Text und auf Tafeln. (Nr. 28.)

Führt eine Reihe hervorragender und interessanter Ingenieurbauten nach ihrer technischen und wirtschaftlichen Bedeutung vor: die Gebirgsbahnen, die Bergbahnen, und als deren Vorläufer die bedeutenden Gebirgsstraßen der Schweiz und Tirols, die großen Eisenbahnverbindungen in Asien, endlich die modernen Kanal- und Hafenbauten.

——— Bilder aus der Ingenieurtechnik. Von Baurat Kurt Merckel. Mit 43 Abbildungen im Text und auf einer Doppeltafel. (Nr. 60.)

Zeigt in einer Schilderung der Ingenieurbauten der Babylonier und Assyrer, der Ingenieurtechnik der alten Ägypter unter vergleichsweiser Behandlung der modernen Irrigationsanlagen daselbst, der Schöpfungen der antiken griechischen Ingenieure, des Städtebaues im Altertum und der römischen Wasserleitungsbauten die hohen Leistungen der Völker des Altertums.

Israel s. Religion.

Jugend-Fürsorge. Von Direktor Dr. Joh. Petersen. 2 Bände. (Nr. 161. 162.)

Band I: Die öffentliche Fürsorge für die hilfsbedürftige Jugend.
Band II: Die öffentliche Fürsorge für die sittlich gefährdete und die gewerblich tätige Jugend.

Erörtert alle das Fürsorgewesen betreffenden Fragen, deckt die ihm anhaftenden Mängel auf, zeigt zugleich aber auch die Mittel und Wege zu ihrer Beseitigung. Besonders eingehend werden behandelt in dem 1. Bändchen das Vormundschaftsrecht, die Säuglingssterblichkeit, die Fürsorge für uneheliche Kinder, die Gemeindewaisenpflege, die Vor- und Nachteile der Anstalts- und Familienpflege, in dem 2. Bändchen die gewerbliche Ausnutzung der Kinder und der Kinderschutz im Gewerbe, die Kriminalität der Jugend und die Zwangserziehung, die Fürsorge für die schulentlassene Jugend.

Kaffee, Tee, Kakao und die übrigen narkotischen Aufgußgetränke (s. a. Ernährung; Haushalt). Von Professor Dr. A. Wieler. Mit 24 Abbildungen und 1 Karte. (Nr. 132.)

Behandelt, durch zweckentsprechende Abbildungen unterstützt, Kaffee, Tee und Kakao eingehender, Mate und Kola kürzer, in bezug auf die botanische Abstammung, die natürliche Verbreitung der Stammpflanzen, die Verbreitung ihrer Kultur, die Wachstumsbedingungen und die Kulturmethoden, die Erntezeit und die Ernte, endlich die Gewinnung der fertigen Ware, wie der Weltmarkt sie aufnimmt, aus dem geernteten Produkte.

Kakao s. Kaffee.

Kalender. Der Kalender. Von Professor Dr. W. F. Wislicenus. (Nr. 69.)
Erklärt die astronomischen Erscheinungen, die für unsere Zeitrechnung von Bedeutung sind, und schildert die historische Entwicklung des Kalenderwesens vom römischen Kalender ausgehend, den Werdegang der christlichen Kalender bis auf die neueste Zeit verfolgend, setzt ihre Einrichtungen auseinander und lehrt die Berechnung kalendarischer Angaben für Vergangenheit und Zukunft, sie durch zahlreiche Beispiele erläuternd.

Kant (s. a. Philosophie). Immanuel Kant; Darstellung und Würdigung. Von Professor Dr. O. Külpe. Mit einem Bildnisse Kants. (Nr. 146.)
Kant hat durch seine grundlegenden Werke ein neues Fundament für die Philosophie aller Völker und Zeiten geschaffen. Dieses in seiner Tragfähigkeit für moderne Ideen darzustellen, hat sich der Verfasser zur Aufgabe gestellt. Es ist ihm gelungen, den wirklichen Kant mit historischer Treue zu schildern und doch auch zu beleuchten, wie die Nachwelt berufen ist, hinauszustreben über die Anschauungen des gewaltigen Denkers, da auch er ein Kind seiner Zeit ist und manche seiner Lehrmeinungen vergänglicher Art sein müssen.

Kinderpflege s. Säugling.

Knabenhandarbeit. Die Knabenhandarbeit in der heutigen Erziehung. Von Seminardirektor Dr. Alw. Pabst. Mit 21 Abbildungen im Text und 1 Titelbild. (Nr. 140.)
Gibt einen Überblick über die Geschichte des Knabenhandarbeitsunterrichts, untersucht seine Stellung im Lichte der modernen pädagogischen Strömungen und erhärtet seinen Wert als Erziehungsmittel, erörtert sodann die Art des Betriebes in den verschiedenen Schulen und gibt zum Schlusse eine vergleichende Darstellung der Systeme in den verschiedenen Ländern.

Kolonien. Die deutschen Kolonien. Land und Leute. Von Dr. Adolf Heilborn. Mit zahlreichen Abbildungen und 2 Karten. (Nr. 98.)
Bringt auf engem Raume eine durch Abbildungen und Karten unterstützte, wissenschaftlich genaue Schilderung der deutschen Kolonien, sowie eine einwandfreie Darstellung ihrer Völker nach Nahrung und Kleidung, Haus und Gemeindeleben, Sitte und Recht, Glaube und Aberglaube, Arbeit und Vergnügen, Gewerbe und Handel, Waffen und Kampfesweise.

Kraftfahrzeuge s. Automobil.

Krankenpflege. Vorträge gehalten von Chefarzt Dr. B. Leick. (Nr. 152.)
Gibt zunächst einen Überblick über Bau und Funktion der inneren Organe des Körpers und deren hauptsächlichste Erkrankungen und erörtert dann die hiebei zu ergreifenden Maßnahmen. Besonders eingehend wird die Krankenpflege bei Infektionskrankheiten sowie bei plötzlichen Unglücksfällen und Erkrankungen behandelt.

Kriegswesen. Vom Kriegswesen im 19. Jahrhundert. Zwanglose Skizzen von Major O. von Sothen. Mit 9 Übersichtskärtchen. (Nr. 59.)
In einzelnen Abschnitten wird insbesondere die Napoleonische und Moltkesche Kriegführung an Beispielen (Jena-Königgrätz-Sedan) dargestellt und durch Kartenskizzen erläutert. Damit verbunden sind kurze Schilderungen der preußischen Armee von 1806 und nach den Befreiungskriegen, sowie nach der Reorganisation von 1860, endlich des deutschen Heeres von 1870 bis zur Jetztzeit.

—— Der Seekrieg. Seine geschichtliche Entwicklung vom Zeitalter der Entdeckungen bis zur Gegenwart. Von Kurt Freiherr von Maltzahn, Vize-Admiral a. D. (Nr. 99.)
Der Verf. bringt den Seekrieg als Kriegsmittel wie als Mittel der Politik zur Darstellung, indem er zunächst die Entwicklung der Kriegsflotte und der Seekriegsmittel schildert und dann die heutigen Weltwirtschaftsstaaten und den Seekrieg behandelt, wobei er besonders das Abhängigkeitsverhältnis, in dem unsere Weltwirtschaftsstaaten kommerziell und politisch zu den Verkehrswegen der See stehen, darstellt.

Kultur (s. a. Germanen; Geschichte; griech. Städtebilder). Die Anfänge der menschlichen Kultur. Von Professor Dr. Ludwig Stein. (Nr. 93.)
Behandelt in der Überzeugung, daß die Kulturprobleme der Gegenwart sich uns nur durch einen tieferen Einblick in ihren Werdegang erschließen, Natur und Kultur, den vorgeschichtlichen Menschen, die Anfänge der Arbeitsteilung, die Anfänge der Rassenbildung, ferner die Anfänge der wirtschaftlichen, intellektuellen, moralischen und sozialen Kultur.

Kunst (s. a. Baukunst; Dürer; Städtebilder; Illustrationskunst; Rembrandt; Schriftwesen). Bau und Leben der bildenden Kunst. Von Direktor Dr. Theodor Volbehr. Mit 44 Abbildungen. (Nr. 68.)
Führt von einem neuen Standpunkte aus in das Verständnis des Wesens der bildenden Kunst ein, erörtert die Grundlagen der menschlichen Gestaltungskraft und zeigt, wie das künstlerische Interesse sich allmählich weitere und immer weitere Stoffgebiete erobert.

——— Kunstpflege in Haus und Heimat. Von Superintendent R. Bürkner. Mit 14 Abbildungen. (Nr. 77.)
Will, ausgehend von der Überzeugung, daß zu einem vollen Menschensein und Volkstum die Pflege des Schönen unabweisbar gehört, die Augen zum rechten Sehen öffnen lehren und die ganze Lebensführung, Kleidung und Häuslichkeit ästhetisch gestalten, um so auch zur Erkenntnis dessen zu führen, was an Heimatkunst und Heimatschatz zu hegen ist, und auf diesem großen Gebiete persönlichen und allgemeinen ästhetischen Lebens ein praktischer Ratgeber sein.

——— Die ostasiatische Kunst und ihre Einwirkung auf Europa. Von Direktor Dr. R. Graul. Mit 49 Abb. im Text und auf 1 Doppeltafel. (Nr. 87.)
Bringt die bedeutungsvolle Einwirkung der japanischen und chinesischen Kunst auf die europäische zur Darstellung unter Mitteilung eines reichen Bildermaterials, den Einfluß Chinas auf die Entwicklung der zum Rokoko drängenden freien Richtungen in der dekorativen Kunst des 18. Jahrhunderts wie den auf die Entwicklung des 19. Jahrhunderts. Der Verfasser weist auf die Beziehungen der Malerei und Farbendruckkunst Japans zum Impressionismus der modernen europäischen Kunst hin.

Leben. Die Erscheinungen des Lebens. Grundprobleme der modernen Biologie. Von Privatdozent Dr. H. Miehe. Mit 46 Figuren im Text. (Nr. 130.)
Versucht eine umfassende Totalansicht des organischen Lebens zu geben, indem nach einer Erörterung der spekulativen Vorstellungen über das Leben und einer Beschreibung des Protoplasmas und der Zelle die hauptsächlichsten Aeußerungen des Lebens behandelt werden, als Entwicklung, Ernährung, Atmung, das Sinnesleben, die Fortpflanzung, der Tod, die Variabilität und im Anschluß daran die Theorien über Entstehung und Entwicklung der Lebewelt, sowie die mannigfachen Beziehungen der Lebewesen untereinander.

Leibesübungen. Die Leibesübungen und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Von Professor Dr. R. Zander. 2. Auflage. Mit 19 Abb. (Nr. 13.)
Will darüber aufklären, weshalb und unter welchen Umständen die Leibesübungen segensreich wirken, indem es ihr Wesen, andererseits die in Betracht kommenden Organe bespricht; erörtert besonders die Wechselbeziehungen zwischen körperlicher und geistiger Arbeit, die Leibesübungen der Frauen, die Bedeutung des Sportes und die Gefahren der sportlichen Übertreibungen.

Licht (s. a. Beleuchtungsarten; Chemie). Das Licht und die Farben. Sechs Vorlesungen, gehalten im Volkshochschulverein München. Von Professor Dr. L. Graetz. 2. Auflage. Mit 116 Abbildungen. (Nr. 17.)
Führt, von den einfachsten optischen Erscheinungen ausgehend, zur tieferen Einsicht in die Natur des Lichtes und der Farben, behandelt, ausgehend von der scheinbar geradlinigen Ausbreitung, Zurückwerfung und Brechung des Lichtes, das Wesen der Farben, die Beugungserscheinungen und die Photographie.

Literaturgeschichte s. Drama; Schiller; Theater; Volkslied.

Luther (s. a. Geschichte). Luther im Lichte der neueren Forschung. Ein kritischer Bericht. Von Professor Dr. H. Boehmer. (Nr. 113.)
Versucht durch sorgfältige historische Untersuchung eine erschöpfende Darstellung von Luthers Leben und Wirken zu geben, die Persönlichkeit des Reformators aus ihrer Zeit heraus zu erfassen, ihre Schwächen und Stärken beleuchtend zu einem wahrheitsgetreuen Bilde zu gelangen, und gibt so nicht nur ein psychologisches Porträt, sondern bietet zugleich ein interessantes Stück Kulturgeschichte.

Mädchenschule (s. a. Bildungswesen; Schulwesen). Die höhere Mädchenschule in Deutschland. Von Oberlehrerin M. Martin. (Nr. 65.)
Bietet aus berufenster Feder eine Darstellung der Ziele, der historischen Entwicklung, der heutigen Gestalt und der Zukunftsaufgaben der höheren Mädchenschulen.

Mathematische Spiele (s. a. Arithmetik). Von Dr. W. Ahrens. (Nr. 170.)
Sucht in das Verständnis all der Spiele, die „ungleich voll von Nachdenken" vergnügen, weil man bei ihnen rechnet, ohne Voraussetzung irgend welcher mathematischer Kenntnisse einzuführen und so ihren Reiz für Nachdenkliche erheblich zu erhöhen. So werden unter Beigabe von einfachen, das Mitarbeiten des Lesers belebenden Fragen Wettspringen, Boß-Puzzle, Solitär- oder Einsiedlerspiel, Wanderungsspiele, Dyadische Spiele, der Baguenaudier, Mim, der Rösselsprung und die Magischen Quadrate behandelt.

Meeresforschung. Meeresforschung und Meeresleben. Von Dr. O. Janson. 2. Auflage. Mit 41 Figuren. (Nr. 30.)
Schildert kurz und lebendig die Fortschritte der modernen Meeresuntersuchung auf geographischem, physikalisch-chemischem und biologischem Gebiete, die Verteilung von Wasser und Land auf der Erde, die Tiefen des Meeres, die physikalischen und chemischen Verhältnisse des Meerwassers, endlich die wichtigsten Organismen des Meeres, die Pflanzen und Tiere.

Mensch (s. a. Auge; Kultur; Stimme). Der Mensch. Sechs Vorlesungen a. d. Gebiete der Anthropologie. Von Dr. A. Heilborn. Mit zahlr. Abb. (Nr. 62.)
Stellt die Lehren der „Wissenschaft aller Wissenschaften" streng sachlich und doch durchaus volkstümlich dar: das Wissen vom Ursprung des Menschen, die Entwicklungsgeschichte des Individuums, die künstlerische Betrachtung der Proportionen des menschlichen Körpers und die streng wissenschaftlichen Meßmethoden (Schädelmessung usf.), behandelt ferner die Menschenrassen, die rassenanatomischen Verschiedenheiten, den Tertiärmenschen.

—— Bau und Tätigkeit des menschlichen Körpers. Von Privatdozent Dr. H. Sachs. 2. Auflage. Mit 37 Abbildungen. (Nr. 32.)
Stellt eine Reihe schematischer Abbildungen dar, erläutert die Einrichtung und die Tätigkeit der einzelnen Organe des Körpers und zeigt dabei vor allem, wie diese einzelnen Organe in ihrer Tätigkeit aufeinander einwirken, miteinander zusammenhängen und so den menschlichen Körper zu einem einheitlichen Ganzen, zu einem wohlgeordneten Staate machen.

—— Die Seele des Menschen. Von Prof. Dr. J. Rehmke. 2. Aufl. (Nr. 36.)
Behandelt, von der Tatsache ausgehend, daß der Mensch eine Seele habe, die ebenso gewiß sei wie die andere, daß der Körper eine Gestalt habe, das Seelenwesen und das Seelenleben und erörtert, unter Abwehr der materialistischen und halbmaterialistischen Anschauungen, von dem Standpunkt aus, daß die Seele Unkörperliches Immaterielles sei, nicht etwa eine Bestimmtheit des menschlichen Einzelwesens, auch nicht eine Wirkung oder eine „Funktion" des Gehirns, die verschiedenen Tätigkeitsäußerungen des als Seele Erkannten.

—— Die fünf Sinne des Menschen. Von Professor Dr. Jos. Clem. Kreibig. Mit 30 Abbildungen im Text. 2. Auflage. (Nr. 27.)
Beantwortet die Fragen über die Bedeutung, Anzahl, Benennung und Leistungen der Sinne in gemeinfaßlicher Weise, indem das Organ und seine Funktionsweise, dann die als Reiz wirkenden äußeren Ursachen und zuletzt der Inhalt, die Stärke, das räumliche und zeitliche Merkmal der Empfindungen besprochen werden.

Mensch und Erde. Mensch und Erde. Skizzen von den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von Prof. Dr. A. Kirchhoff. 2. Aufl. (Nr. 31.)
Zeigt, wie die Ländernatur auf den Menschen und seine Kultur einwirkt, durch Schilderungen allgemeiner und besonderer Art, über Steppen- und Wüstenvölker, über die Entstehung von Nationen, wie Deutschland und China u. a. m.

——— **und Tier.** Der Kampf zwischen Mensch und Tier. Von Professor Dr. Karl Eckstein. Mit 31 Abbildungen im Text. (Nr. 18.)
Der hohe wirtschaftliche Bedeutung beanspruchende Kampf erfährt eine eingehende, ebenso interessante wie lehrreiche Darstellung; besonders werden die Kampfmittel beider Gegner geschildert: Schußwaffen, Fallen, Gifte, oder auch besondere Wirtschaftsmethoden, dort spitzige Kralle, scharfer Zahn, furchtbares Gift, List und Gewandtheit, der Schutzfärbung und Anpassungsfähigkeit nicht zu vergessen.

Menschenleben. Aufgaben und Ziele des Menschenlebens. Von Dr. J. Unold. 2. Auflage. (Nr. 12.)
Beantwortet die Frage: Gibt es keine bindenden Regeln des menschlichen Handelns? in zuversichtlich bejahender, zugleich wohl begründeter Weise und entwirft die Grundzüge einer wissenschaftlich haltbaren und für eine nationale Erziehung brauchbaren Lebensanschauung und Lebensordnung.

Metalle. Die Metalle. Von Professor Dr. K. Scheid. Mit 16 Abb. (Nr. 29.)
Behandelt die für Kulturleben und Industrie wichtigen Metalle, schildert die mutmaßliche Bildung der Erze, die Gewinnung der Metalle aus den Erzen, das Hüttenwesen mit seinen verschiedenen Systemen, die Fundorte der Metalle, ihre Eigenschaften und Verwendung, unter Angabe historischer, kulturgeschichtlicher und statistischer Daten, sowie die Verarbeitung der Metalle.

Meteorologie s. Wetter.

Mikroskop (s. a. Optik; Tierwelt). Das Mikroskop, seine Optik, Geschichte und Anwendung, gemeinverständlich dargestellt. Von Dr. W. Scheffer. Mit 66 Abbildungen im Text und einer Tafel. (Nr. 35.)
Nach Erläuterung der optischen Konstruktion und Wirkung des Mikroskops, und Darstellung der historischen Entwicklung wird eine Beschreibung der modernsten Mikroskoptypen, Hilfsapparate und Instrumente gegeben, endlich gezeigt, wie die mikroskopische Untersuchung die Einsicht in Naturvorgänge vertieft.

Moleküle. Moleküle — Atome — Weltäther. Von Professor Dr. G. Mie. 2. Auflage. Mit 27 Figuren im Text. (Nr. 58.)
Stellt die physikalische Atomlehre als die kurze, logische Zusammenfassung einer großen Menge physikalischer Tatsachen unter einem Begriffe dar, die ausführlich und nach Möglichkeit als einzelne Experimente geschildert werden.

Mond (s. a. Weltall). Der Mond. Von Professor Dr. J. Franz. Mit 31 Abbildungen im Text und auf 2 Doppeltafeln. (Nr. 90.)
Gibt die Ergebnisse der neueren Mondforschung wieder, erörtert die Mondbewegung und Mondbahn, bespricht den Einfluß des Mondes auf die Erde und behandelt die Fragen der Oberflächenbedingungen des Mondes und die charakteristischen Mondgebilde anschaulich zusammengefaßt in „Beobachtungen eines Mondbewohners", endlich die Bewohnbarkeit des Mondes.

Mozart s. Musik.

Münze. Die Münze als historisches Denkmal sowie ihre Bedeutung im Rechts- und Wirtschaftsleben. Von Dr. A. Luschin v. Ebengreuth. Mit 53 Abbildungen im Text. (Nr. 91.)
Zeigt, wie Münzen als geschichtliche Überbleibsel der Vergangenheit zur Aufhellung der wirtschaftlichen Zustände und der Rechtseinrichtungen früherer Zeiten dienen, die verschiedenen Arten von Münzen, ihre äußeren und inneren Merkmale sowie ihre Herstellung werden in historischer Entwicklung dargelegt und im Anschluß daran Münzsammlern beherzigenswerte Winke gegeben.

Musik. Einführung in das Wesen der Musik. Von Professor C. R. Hennig. (Nr. 119.)

Die hier gegebene Ästhetik der Tonkunst untersucht das Wesen des Tones als eines Kunstmaterials; sie prüft die Natur der Darstellungsmittel und untersucht die Objekte der Darstellung, indem sie klarlegt, welche Ideen im musikalischen Kunstwerke gemäß der Natur des Tonmateriales und der Darstellungsmittel in idealer Gestaltung zur Darstellung gebracht werden können.

—— Geschichte der Musik. Von Dr. Friedrich Spiro. (Nr. 143.)

Gibt in großen Zügen eine übersichtliche äußerst lebendig gehaltene Darstellung von der Entwicklung der Musik vom Altertum bis zur Gegenwart mit besonderer Berücksichtigung der führenden Persönlichkeiten und der großen Strömungen und unter strenger Ausscheidung alles dessen, was für die Entwicklung der Musik ohne Bedeutung war.

—— Haydn, Mozart, Beethoven. Mit vier Bildnissen auf Tafeln. Von Professor Dr. C. Krebs. (Nr. 92.)

Eine Darstellung des Entwicklungsganges und der Bedeutung eines jeden der drei großen Komponisten für die Musikgeschichte. Sie gibt mit wenigen, aber scharfen Strichen ein Bild der menschlichen Persönlichkeit und des künstlerischen Wesens der drei Heroen mit Hervorhebung dessen, was ein jeder aus seiner Zeit geschöpft und was er aus eignem hinzugebracht hat.

Muttersprache. Entstehung und Entwicklung unserer Muttersprache. Von Professor Dr. Wilhelm Uhl. Mit vielen Abbildungen im Text und auf Tafeln, sowie mit 1 Karte. (Nr. 84.)

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse der sprachlich-wissenschaftlich lautphysiologischen wie der philologisch-germanistischen Forschung, die Ursprung und Organ, Bau und Bildung, andererseits die Hauptperioden der Entwicklung unserer Muttersprache zur Darstellung bringt.

Mythologie s. Germanen.

Nahrungsmittel s. Alkoholismus; Chemie; Ernährung; Haushalt; Kaffee.

Nationalökonomie s. Arbeiterschutz; Bevölkerungslehre; Soziale Bewegungen; Frauenbewegung; Schiffahrt; Welthandel; Wirtschaftsleben.

Naturlehre. Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Von Professor Dr. Felix Auerbach. 2. Auflage. Mit 79 Figuren im Text. (Nr. 40.)

Eine zusammenhängende, für jeden Gebildeten verständliche Entwicklung der in der modernen Naturlehre eine allgemeine und exakte Rolle spielenden Begriffe Raum und Bewegung, Kraft und Masse und die allgemeinen Eigenschaften der Materie, Arbeit, Energie und Entropie.

Naturwissenschaften s. Abstammungslehre; Ameisen; Astronomie; Befruchtungsvorgang; Chemie; Erde; Haushalt; Licht; Meeresforschung; Mensch; Moleküle; Naturlehre; Obstbau; Pflanzen; Plankton; Religion; Strahlen; Tierleben; Wald; Weltall; Wetter.

Nervensystem. Vom Nervensystem, seinem Bau und seiner Bedeutung für Leib und Seele im gesunden und kranken Zustande. Von Professor Dr. R. Zander. Mit 27 Figuren im Text. (Nr. 48.)

Erörtert die Bedeutung der nervösen Vorgänge für den Körper, die Geistestätigkeit und das Seelenleben und sucht klarzulegen, unter welchen Bedingungen Störungen der nervösen Vorgänge auftreten, wie sie zu beseitigen und zu vermeiden sind.

Obstbau. Der Obstbau. Von Dr. Ernst Voges. Mit 13 Abbildungen im Text. (Nr. 107.)

Will über die wissenschaftlichen und technischen Grundlagen des Obstbaues, sowie seine Naturgeschichte und große volkswirtschaftliche Bedeutung unterrichten. Die Geschichte des Obstbaues, das Leben des Obstbaumes, Obstbaumpflege und Obstbaumschutz, die wissenschaftliche Obstkunde, die Ästhetik des Obstbaues gelangen zur Behandlung.

Optik (s. a. Mikroskop; Stereoskop). Die optischen Instrumente. Von Dr. M. von Rohr. Mit 84 Abbildungen im Text. (Nr. 88.)

Gibt eine elementare Darstellung der optischen Instrumente nach modernen Anschauungen, wobei weder das Ultramikroskop noch die neuen Apparate zur Mikrophotographie mit ultraviolettem Licht (Monochromate), weder die Prismen- noch die Zielfernrohre, weder die Projektionsapparate noch die stereoskopischen Entfernungsmesser und der Stereokomparator fehlen.

Ostasien s. Kunst.

Pädagogik (s. a. Bildungswesen; Erziehung; Fröbel; Herbart; Hilfsschulwesen; Jugendfürsorge; Knabenhandarbeit; Mädchenschule; Schulwesen). Allgemeine Pädagogik. Von Professor Dr. Th. Ziegler. 2. Aufl. (Nr. 33.)

Behandelt die großen Fragen der Volkserziehung in praktischer, allgemeinverständlicher Weise und in sittlich-sozialem Geiste. Die Zwecke und Motive der Erziehung, das Erziehungsgeschäft selbst, dessen Organisation werden erörtert, die verschiedenen Schulgattungen dargestellt.

Palästina. Palästina und seine Geschichte. Sechs Vorträge von Professor Dr. H. Freiherr von Soden. 2. Auflage. Mit 2 Karten und 1 Plan von Jerusalem und 6 Ansichten des Heiligen Landes. (Nr. 6.)

Ein Bild, nicht nur des Landes selbst, sondern auch alles dessen, was aus ihm hervor- oder über es hingegangen ist im Laufe der Jahrhunderte — ein wechselvolles, farbenreiches Bild, in dessen Verlauf die Patriarchen Israels und die Kreuzfahrer, David und Christus, die alten Assyrer und die Scharen Mohammeds einander ablösen.

Patentrecht s. Gewerbe.

Pflanzen (s. a. Obstbau; Plankton; Tierleben). Unsere wichtigsten Kulturpflanzen. (Die Getreidegräser.) Sechs Vorträge aus der Pflanzenkunde. Von Professor Dr. K. Giesenhagen. Mit 38 Figuren im Text. 2. Auflage. (Nr. 10.)

Behandelt die Getreidepflanzen und ihren Anbau nach botanischen wie kulturgeschichtlichen Gesichtspunkten, damit zugleich in anschaulichster Form allgemeine botanische Kenntnisse vermittelnd.

——— Vermehrung und Sexualität bei den Pflanzen. Von Privatdozent Dr. Ernst Küster. Mit 38 Abbildungen im Text. (Nr. 112.)

Gibt eine kurze Übersicht über die wichtigsten Formen der vegetativen Vermehrung und beschäftigt sich eingehend mit der Sexualität der Pflanzen, deren überraschend vielfache und mannigfaltige Äußerungen, ihre große Verbreitung im Pflanzenreich und ihre in allen Einzelheiten erkennbare Übereinstimmung mit der Sexualität der Tiere zur Darstellung gelangen.

Philosophie (s. a. Buddha; Herbart; Kant; Menschenleben; Schopenhauer; Weltanschauung; Weltproblem). Die Philosophie der Gegenwart in Deutschland. Eine Charakteristik ihrer Hauptrichtungen. Von Professor Dr. O. Külpe. 2. Auflage. (Nr. 41.)

Schildert die vier Hauptrichtungen der deutschen Philosophie der Gegenwart, den Positivismus, Materialismus, Naturalismus und Idealismus, nicht nur im allgemeinen, sondern auch durch eingehendere Würdigung einzelner typischer Vertreter wie Mach und Dühring, Haeckel, Nietzsche, Fechner, Lotze, v. Hartmann und Wundt.

Philosophie. Einführung in die Philosophie. Sechs Vorträge von Professor Raoul Richter. (Nr. 155.)
Bietet eine gemeinverständliche Darstellung der philosophischen Hauptprobleme und der Richtung ihrer Lösung, insbesondere des Erkenntnisproblems und nimmt dabei zu den Standpunkten des Materialismus, Spiritualismus, Theismus und Pantheismus Stellung, um zum Schlusse die religions- und moralphilosophischen Fragen zu beleuchten.

Physik s. Licht; Mikroskop; Moleküle; Naturlehre; Optik; Strahlen.

Plankton. Das Süßwasser-Plankton. Einführung in die freischwebende Organismenwelt unserer Teiche, Flüsse und Seebecken. Von Dr. Otto Zacharias. Mit 49 Abbildungen. (Nr. 156.)
Gibt eine Anleitung zur Kenntnis der interessantesten Planktonorganismen, jener mikroskopisch kleinen und für die Existenz der höheren Lebewesen und für die Naturgeschichte der Gewässer so wichtigen Tiere und Pflanzen. Die wichtigsten Formen werden vorgeführt und die merkwürdigen Lebensverhältnisse und -bedingungen dieser unsichtbaren Welt einfach und doch vielseitig erörtert.

Polarforschung. Die Polarforschung. Geschichte der Entdeckungsreisen zum Nord- und Südpol von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Von Professor Dr. Kurt Hassert. Mit 6 Karten auf 2 Tafeln. (Nr. 38.)
Das in der neuen Auflage bis auf die Gegenwart fortgeführte und im einzelnen nicht unerheblich umgestaltete Buch faßt in gedrängtem Überblick die Hauptergebnisse der Nord- und Südpolarforschung zusammen. Nach gemeinverständlicher Erörterung der Ziele arktischer und antarktischer Forschung werden die Polarreisen selbst von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart geschildert unter besonderer Berücksichtigung der topographischen Ergebnisse.

Pompeji, eine hellenistische Stadt in Italien. Von Hofrat Professor Dr. Fr. v. Duhn. Mit 62 Abbildungen. (Nr. 114.)
Sucht, durch zahlreiche Abbildungen unterstützt, an dem besonders greifbaren Beispiel Pompejis die Übertragung der griechischen Kultur und Kunst nach Italien, ihr Werden zur Weltkultur und Weltkunst verständlich zu machen, wobei die Hauptphasen der Entwicklung Pompejis, immer im Hinblick auf die gestaltende Bedeutung, die gerade der Hellenismus für die Ausbildung der Stadt, ihrer Lebens- und Kunstformen gehabt hat, zur Darstellung gelangen.

Post. Das Postwesen, seine Entwickelung und Bedeutung. Von Postrat J. Bruns. (Nr. 165.)
Schildert immer unter besonderer Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung die Post als Staatsverkehrsanstalt, ihre Organisation und ihren Wirkungskreis, das Tarif- und Gebührenwesen, die Beförderungsmittel, den Betriebsdienst, den Weltpostverein, sowie die deutsche Post im In- und Ausland.

Psychologie s. Mensch; Nervensystem; Seele.

Recht (s. a. Gewerbe). Moderne Rechtsprobleme. Von Professor Josef Kohler. (Nr. 128.)
Behandelt nach einem einleitenden Abschnitte über Rechtsphilosophie die wichtigsten und interessantesten Probleme der modernen Rechtsprüfung, insbesondere die des Strafrechts, des Strafprozesses, des Genossenschaftsrechts, des Zivilprozesses und des Völkerrechtes.

Religion (s. a. Buddha; Christentum; Germanen; Jesuiten; Jesus; Luther). Die Grundzüge der israelitischen Religionsgeschichte. Von Professor Dr. Fr. Giesebrecht. (Nr. 52.)
Schildert, wie Israels Religion entsteht, wie sie die nationale Schale sprengt, um in den Propheten die Ansätze einer Menschheitsreligion auszubilden, wie auch diese neue Religion sich verpuppt in die Formen eines Priesterstaats.

Religion. Religion und Naturwissenschaft in Kampf und Frieden. Ein geschichtlicher Rückblick von Dr. A. Pfannkuche. (Nr. 141.)

Will durch geschichtliche Darstellung der Beziehungen beider Gebiete eine vorurteilsfreie Beurteilung des heiß umstrittenen Problems ermöglichen. Ausgehend von der ursprünglichen Einheit von Religion und Naturerkennen in den Naturreligionen schildert der Verfasser das Entstehen der Naturwissenschaft in Griechenland und der Religion in Israel, um dann zu zeigen, wie aus der Verschwisterung beider jene ergreifenden Konflikte erwachsen, die sich besonders an die Namen von Kopernikus und Darwin knüpfen.

——— Die religiösen Strömungen der Gegenwart. Von Superintendent D. A. H. Braasch. (Nr. 66.)

Will die gegenwärtige religiöse Lage nach ihren bedeutsamen Seiten hin darlegen und ihr geschichtliches Verständnis vermitteln; die markanten Persönlichkeiten und Richtungen, die durch wissenschaftliche und wirtschaftliche Entwicklung gestellten Probleme, wie die Ergebnisse der Forschung, der Ultramontanismus wie die christliche Liebestätigkeit gelangen zur Behandlung.

Rembrandt. Von Professor Dr. Paul Schubring. Mit einem Titelbild und 49 Textabbildungen. (Nr. 158.)

Eine durch zahlreiche Abbildungen unterstützte lebensvolle Schilderung des menschlichen und künstlerischen Entwickelungsganges Rembrandts. Zur Darstellung gelangen so seine persönlichen Schicksale bis 1642, die Frühzeit, die Zeit bis zu Saskias Tode, die Nachtwache, Rembrandts Verhältnis zur Bibel, die Radierungen, Urkundliches über die Zeit nach 1642 die Periode des farbigen Helldunkels, die Gemälde nach der Nachtwache und die Spätzeit. Beigefügt sind die beiden ältesten Biographien Rembrandts.

Rom. Die ständischen und sozialen Kämpfe in der römischen Republik. Von Privatdozent Dr. Leo Bloch. (Nr. 22.)

Behandelt die Sozialgeschichte Roms, soweit sie mit Rücksicht auf die die Gegenwart bewegenden Fragen von allgemeinem Interesse ist. Insbesondere gelangen die durch die Großmachtstellung Roms bedingte Entstehung neuer sozialer Unterschiede, die Herrschaft des Amtsadels und des Kapitals, auf der anderen Seite eines großstädtischen Proletariats zur Darstellung, die ein Ausblick auf die Lösung der Parteikämpfe durch die Monarchie beschließt.

Säugling. Der Säugling, seine Ernährung und seine Pflege. Von Dr. Walther Kaupe. Mit 17 Textabbildungen. (Nr. 154.)

Will der jungen Mutter oder Pflegerin in allen Fragen, mit denen sie sich im Interesse des kleinen Erdenbürgers beschäftigen müssen, den nötigen Rat erteilen. Außer der allgemeinen geistigen und körperlichen Pflege des Kindchens wird besonders die natürliche und künstliche Ernährung behandelt und für alle diese Fälle zugleich praktische Anleitung gegeben.

Schiffahrt. Deutsche Schiffahrt und Schiffahrtspolitik der Gegenwart. Von Professor Dr. K. Thieß. (Nr. 169.)

Verfasser will weiteren Kreisen eine genaue Kenntnis unserer Schiffahrt erschließen, indem er in leicht faßlicher und doch erschöpfender Darstellung einen allgemeinen Überblick über das gesamte deutsche Schiffswesen gibt mit besonderer Berücksichtigung seiner geschichtlichen Entwicklung und seiner großen volkswirtschaftlichen Bedeutung.

Schiller. Von Professor Dr. Th. Ziegler. Mit dem Bildnis Schillers von Kügelgen in Heliogravüre. (Nr. 74.)

Gedacht als eine Einführung in das Verständnis von Schillers Werdegang und Werken, behandelt das Büchlein vor allem die Dramen Schillers und sein Leben, ebenso aber auch einzelne seiner lyrischen Gedichte und die historischen und die philosophischen Studien als ein wichtiges Glied in der Kette seiner Entwicklung.

Schopenhauer. Seine Persönlichkeit, seine Lehre, seine Bedeutung. Sechs Vorträge von Oberlehrer H. Richert. Mit dem Bildnis Schopenhauers. (Nr. 81.)
Unterrichtet über Schopenhauer in seinem Werden, seinen Werken und seinem Fortwirken, in seiner historischen Bedingtheit und seiner bleibenden Bedeutung, indem es eine gründliche Einführung in die Schriften Schopenhauers und zugleich einen zusammenfassenden Überblick über das Ganze seines philosophischen Systems gibt.

Schriftwesen. Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Professor Dr. O. Weise. 2. Auflage. Mit 37 Abbildungen. (Nr. 4.)
Verfolgt durch mehr als vier Jahrtausende Schrift-, Brief- und Zeitungswesen, Buchhandel und Bibliotheken.

Schulhygiene. Von Privatdozent Dr. Leo Burgerstein. Mit einem Bildnis und 33 Figuren im Text. (Nr. 96.)
Bietet eine auf den Forschungen und Erfahrungen in den verschiedensten Kulturländern beruhende Darstellung, die ebenso die Hygiene des Unterrichts und Schullebens wie jene des Hauses, die im Zusammenhang mit der Schule stehenden modernen materiellen Wohlfahrtseinrichtungen, endlich die hygienische Unterweisung der Jugend, die Hygiene des Lehrers und die Schularztfrage behandelt.

Schulwesen (s. a. Bildungswesen; Fröbel; Hilfsschulwesen; Mädchenschule; Pädagogik). Geschichte des deutschen Schulwesens. Von Oberrealschuldirektor Dr. K. Knabe. (Nr. 85.)
Stellt die Entwicklung des deutschen Schulwesens in seinen Hauptperioden dar und bringt so Anfänge des deutschen Schulwesens, Scholastik, Humanismus, Reformation, Gegenreformation, neue Bildungsziele, Pietismus, Philanthropismus, Aufklärung, Neuhumanismus, Prinzip der allseitigen Ausbildung vermittels einer Anstalt, Teilung der Arbeit und den nationalen Humanismus der Gegenwart zur Darstellung.

——— Schulkämpfe der Gegenwart. Vorträge zum Kampf um die Volksschule in Preußen, gehalten in der Humboldt-Akademie in Berlin. Von J. Tews. (Nr. 111.)
Knapp und doch umfassend stellt der Verfasser die Probleme dar, um die es sich bei der Reorganisation der Volksschule handelt, deren Stellung zu Staat und Kirche, deren Abhängigkeit von Zeitgeist und Zeitbedürfnissen, deren Wichtigkeit für die Herausgestaltung einer volksfreundlichen Gesamtkultur scharf beleuchtet werden.

——— Volksschule und Lehrerbildung der Vereinigten Staaten in ihren hervortretenden Zügen. Reiseeindrücke. Von Direktor Dr. Franz Kuypers. Mit 48 Abbildungen im Text und einem Titelbild. (Nr. 150.)
Schildert anschaulich das Schulwesen vom Kindergarten bis zur Hochschule, überall das Wesentliche der amerikanischen Erziehungsweise (die stete Erziehung zum Leben, das Wecken des Betätigungstriebes, das Hindrängen auf praktische Verwertung usw.) hervorhebend und unter dem Gesichtspunkte der Beobachtungen an unserer schulentlassenen Jugend in den Fortbildungsschulen zum Vergleich mit der heimischen Unterrichtsweise anregend.

Seekrieg s. Kriegswesen.

Seele s. Mensch.

Sinnesleben s. Mensch.

Soziale Bewegungen (s. a. Arbeiterschutz; Frauenbewegung). Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung. Von Professor Dr. G. Maier. 3. Auflage. (Nr. 2.)
In einer geschichtlichen Betrachtung, die mit den altorientalischen Kulturvölkern beginnt, werden an den zwei großen wirtschaftlichen Schriften Platos die Wirtschaft der Griechen,

an der Gracchischen Bewegung die der Römer beleuchtet, ferner die Utopie des Thomas Morus, andererseits der Bauernkrieg behandelt, die Bestrebungen Colberts und das Merkantilsystem, die Physiokraten und die ersten wissenschaftlichen Staatswirtschaftslehrer gewürdigt und über die Entstehung des Sozialismus und die Anfänge der neueren Handels-, Zoll- und Verkehrspolitik aufgeklärt.

Spiele s. Mathematik.

Sprache s. Muttersprache; Stimme.

Städtewesen. Die Städte. Geographisch betrachtet. Von Professor Dr. Kurt Hassert. Mit 21 Abbildungen. (Nr. 163.)

Behandelt als Versuch einer allgemeinen Geographie der Städte einen der wichtigsten Abschnitte der Siedlungskunde, erörtert die Ursache des Entstehens, Wachsens und Vergehens der Städte, charakterisiert ihre landwirtschaftliche und Verkehrs-Bedeutung als Grundlage der Großstadtbildung und schildert das Städtebild als geographische Erscheinung.

——— Deutsche Städte und Bürger im Mittelalter. Von Oberlehrer Dr. B. Heil. 2. Auflage. Mit zahlreichen Abbildungen im Text und auf 1 Doppeltafel. (Nr. 43.)

Stellt die geschichtliche Entwicklung dar, schildert die wirtschaftlichen, sozialen und staatsrechtlichen Verhältnisse und gibt ein zusammenfassendes Bild von der äußeren Erscheinung und dem inneren Leben der deutschen Städte.

——— Historische Städtebilder aus Holland und Niederdeutschland. Vorträge gehalten bei der Oberschulbehörde in Hamburg. Von Regierungs-Baumeister Albert Erbe. Mit 59 Abbildungen. (Nr. 117.)

Will dem als Zeichen wachsenden Kunstverständnisses zu begrüßenden Sinn für die Reize der alten malerischen Städtebilder durch eine mit Abbildungen reich unterstützte Schilderung der so eigenartigen und vielfachen Herrlichkeit Alt-Hollands wie Niederdeutschlands, ferner Danzigs, Lübecks, Bremens und Hamburgs nicht nur vom rein künstlerischen, sondern auch vom kulturgeschichtlichen Standpunkt aus entgegenkommen.

——— Kulturbilder aus griechischen Städten. Von Oberlehrer Dr. Erich Ziebarth. Mit 22 Abbildungen im Text und 1 Tafel. (Nr. 131.)

Sucht ein anschauliches Bild zu entwerfen von dem Aussehen einer altgriechischen Stadt und von dem städtischen Leben in ihr, auf Grund der Ausgrabungen und der inschriftlichen Denkmäler; die altgriechischen Bergstädte Thera, Pergamon, Priene, Milet, der Tempel von Didyma werden geschildert. Stadtpläne und Abbildungen suchen die einzelnen Städtebilder zu erläutern.

Stereoskop (s. a. Optik). Das Stereoskop und seine Anwendungen. Von Professor Th. Hartwig. Mit 40 Abbildungen im Text und 19 stereoskopischen Tafeln. (Nr. 135.)

Behandelt die verschiedenen Erscheinungen und praktischen Anwendungen der Stereoskopie, insbesondere die stereoskopischen Himmelsphotographien, die stereoskopische Darstellung mikroskopischer Objekte, das Stereoskop als Meßinstrument und die Bedeutung und Anwendung des Stereokomparators, insbesondere in bezug auf photogrammetrische Messungen. Beigegeben sind 19 stereoskopische Tafeln.

Stimme, die menschliche, und ihre Hygiene. Sieben volkstümliche Vorlesungen. Von Professor Dr. P. Gerber. Mit 20 Abbildungen. (Nr. 136.)

Nach den notwendigsten Erörterungen über das Zustandekommen und über die Natur der Töne wird der Kehlkopf des Menschen, sein Bau, seine Verrichtungen und seine Funktion als musikalisches Instrument behandelt; dann werden die Gesang- und die Sprechstimme, ihre Ausbildung, ihre Fehler und Erkrankungen, sowie deren Verhütung und Behandlung, insbesondere Erkältungskrankheiten, die professionelle Stimmschwäche, der Alkoholeinfluß und die Abhärtung erörtert.

Strahlen (s. a. Licht). Sichtbare und unsichtbare Strahlen. Von Professor Dr. R. Börnstein und Professor Dr. W. Marckwald. Mit 82 Abb. (Nr. 64.)
Schildert die verschiedenen Arten der Strahlen, darunter die Kathoden- und Röntgenstrahlen, die Hertzschen Wellen, die Strahlungen der radioaktiven Körper (Uran und Radium) nach ihrer Entstehung und Wirkungsweise, unter Darstellung der charakteristischen Vorgänge der Strahlung.

Süßwasser-Plankton s. Plankton.

Technik (s. a. Automobil; Beleuchtungsarten; Dampf; Eisenbahnen; Eisenhüttenwesen; Elektrotechnik; Funkentelegraphie; Ingenieurtechnik; Metalle; Mikroskop; Post; Rechtsschutz; Stereoskop; Wärmekraftmaschinen). Am sausenden Webstuhl der Zeit. Übersicht über die Wirkungen der Entwicklung der Naturwissenschaften und der Technik auf das gesamte Kulturleben. Von Geh. Regierungsrat Professor Dr. W. Launhardt. 2. Auflage. Mit 16 Abbildungen im Text und auf 5 Tafeln. (Nr. 23.)
Ein geistreicher Rückblick auf die Entwicklung der Naturwissenschaften und der Technik, der die Weltwunder unserer Zeit verdankt werden.

Tee s. Kaffee.

Telegraphie s. Funkentelegraphie.

Theater (s. a. Drama). Das Theater. Sein Wesen, seine Geschichte, seine Meister. Von Professor Dr. K. Borinski. Mit 8 Bildnissen. (Nr. 11.)
Begreift das Drama als ein Selbstgericht des Menschentums und charakterisiert die größten Dramatiker der Weltliteratur bei aller Knappheit liebevoll und geistvoll, wobei es die dramatischen Meister der Völker und Zeiten tunlichst selbst reden läßt.

Theologie s. Bibel; Christentum; Jesus; Palästina; Religion.

Tierleben (s. a. Ameise; Mensch und Tier; Plankton). Die Beziehungen der Tiere zueinander und zur Pflanzenwelt. Von Professor Dr. K. Kraepelin. (Nr. 79.)
Stellt in großen Zügen eine Fülle wechselseitiger Beziehungen der Organismen zueinander dar. Familienleben und Staatenbildung der Tiere, wie die interessanten Beziehungen der Tiere und Pflanzen zueinander werden geschildert.

—— Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie. Von Privatdozent Dr. Kurt Hennings. Mit 34 Abbildungen. (Nr. 142.)
Will die Einheitlichkeit des gesamten Tierreiches zum Ausdruck bringen, Bewegung und Empfindung, Stoffwechsel und Fortpflanzung als die charakterisierenden Eigenschaften aller Tiere darstellen und sodann die Tätigkeit des Tierleibes aus seinem Bau verständlich machen, wobei der Schwerpunkt der Darstellung auf die Lebensweise der Tiere gelegt ist. So werden nach einem Vergleich der drei Naturreiche die Bestandteile des tierischen Körpers behandelt, sodann ein Überblick über die sieben großen Kreise des Tierreiches gegeben, ferner Bewegung und Bewegungsorgane, Aufenthaltsort, Bewußtsein und Empfindung, Nervensystem und Sinnesorgane, Stoffwechsel, Fortpflanzung und Entwicklung erörtert.

—— Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus). Von Dr. Friedrich Knauer. Mit 37 Abbildungen. (Nr. 148.)
Zeigt, von der ungeschlechtlichen Fortpflanzung zahlreicher niederster Tiere ausgehend, wie sich aus diesem Hermaphroditismus allmählich die Zweigeschlechtigkeit herausgebildet hat und sich bei verschiedenen Tierarten zu auffälligstem geschlechtlichem Dimorphismus entwickelt, an interessanten Fällen solcher Verschiedenheit zwischen Männchen und Weibchen, wobei vielfach die Brutpflege in der Tierwelt und das Verhalten der Männchen zu derselben erörtert wird

Tierleben. Die Tierwelt des Mikroskops (die Urtiere). Von Privatdozent Dr. Richard Goldschmidt. Mit 39 Abbildungen. (Nr. 160.)

Bietet nach dem Grundsatz, daß die Kenntnis des Einfachen grundlegend zum Verständnis des Komplizierten ist, eine einführende Darstellung des Lebens und des Baues der Urtiere, dieses mikroskopisch kleinen, formenreichen, unendlich zahlreichen Geschlechtes der Tierwelt und stellt nicht nur eine anregende und durch Abbildungen instruktive Lektüre dar, sondern vermag namentlich auch zu eigener Beobachtung der wichtigen und interessanten Tatsachen vom Bau und aus dem Leben der Urtiere anzuregen.

——— Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere. Von Professor Dr. Otto Maas. Mit Karten und Abbildungen. (Nr. 139.)

Lehrt das Verhältnis der Tierwelt zur Gesamtheit des Lebens auf der Erde verständnisvoll ahnen, zeigt die Tierwelt als einen Teil des organischen Erdganzen, die Abhängigkeit der Verbreitung des Tieres nicht nur vor dessen Lebensbedingungen, sondern auch von der Erdgeschichte, ferner von Nahrung, Temperatur, Licht, Luft, Feuchtigkeit und Vegetation, wie von dem Eingreifen des Menschen und betrachtet als Ergebnis an der Hand von Karten die geographische Einteilung der Tierwelt auf der Erde nach besonderen Gebieten.

Tuberkulose. Die Tuberkulose, ihr Wesen, ihre Verbreitung, Ursache, Verhütung und Heilung. Für die Gebildeten aller Stände gemeinfaßlich dargestellt von Oberstabsarzt Dr. W. Schumburg. Mit 1 Tafel und 8 Figuren im Text. (Nr. 47.)

Schildert nach einem Überblick über die Verbreitung der Tuberkulose das Wesen derselben, beschäftigt sich eingehend mit dem Tuberkelbazillus, bespricht die Maßnahmen, durch die man ihn von sich fernhalten kann, und erörtert die Fragen der Heilung der Tuberkulose, vor allem die hygienisch-diätetische Behandlung in Sanatorien und Lungenheilstätten.

Turnen s. Leibesübungen.

Verfassung (s. a. Fürstentum). Grundzüge der Verfassung des Deutschen Reiches. Sechs Vorträge von Professor Dr. E. Loening. 2. Aufl. (Nr. 34.)

Beabsichtigt in gemeinverständlicher Sprache in das Verfassungsrecht des Deutschen Reiches einzuführen, soweit dies für jeden Deutschen erforderlich ist, und durch Aufweisung des Zusammenhanges sowie durch geschichtliche Rückblicke und Vergleiche den richtigen Standpunkt für das Verständnis des geltenden Rechtes zu gewinnen.

Verkehrsentwicklung (s. a. Automobil; Eisenbahnen; Funkentelegraphie, Post; Technik). Verkehrsentwicklung in Deutschland. 1800—1900. Vorträge über Deutschlands Eisenbahnen und Binnenwasserstraßen, ihre Entwicklung und Verwaltung, sowie ihre Bedeutung für die heutige Volkswirtschaft von Professor Dr. W. Lotz. 2. Auflage. (Nr. 15.)

Gibt nach einer kurzen Übersicht über die Hauptfortschritte in den Verkehrsmitteln und deren wirtschaftliche Wirkungen eine Geschichte des Eisenbahnwesens, schildert den heutigen Stand der Eisenbahnverfassung, das Güter- und das Personentarifwesen, die Reformversuche und die Reformfrage, ferner die Bedeutung der Binnenwasserstraßen und endlich die Wirkungen der modernen Verkehrsmittel.

Versicherung (s. a. Arbeiterschutz). Grundzüge des Versicherungswesens. Von Professor Dr. A. Manes. (Nr. 105.)

Behandelt sowohl die Stellung der Versicherung im Wirtschaftsleben, die Entwicklung der Versicherung, die Organisation ihrer Unternehmungsformen, den Geschäftsgang eines Versicherungsbetriebs, die Versicherungspolitik, das Versicherungsvertragsrecht und die Versicherungswissenschaft, als die einzelnen Zweige der Versicherung, wie Lebensversicherung, Unfallversicherung, Haftpflichtversicherung, Transportversicherung, Feuerversicherung, Hagelversicherung, Viehversicherung, kleinere Versicherungszweige, Rückversicherung.

Volkslied. Das deutsche Volkslied. Über Wesen und Werden des deutschen Volksgesanges. Von Privatdozent Dr. J. W. Bruinier. 2. Auflage. (Nr. 7.)

Handelt in schwungvoller Darstellung vom Wesen und Werden des deutschen Volksgesanges, unterrichtet über die deutsche Volksliederpflege in der Gegenwart, über Wesen und Ursprung des deutschen Volksgesanges, Skop und Spielmann, Geschichte und Mär, Leben und Liebe.

Volksschule s. Schulwesen.

Volksstämme. Die deutschen Volksstämme und Landschaften. Von Professor Dr. O. Weise. 3. Auflage. Mit 29 Abbildungen im Text und auf 15 Tafeln. (Nr. 16.)

Schildert, durch eine gute Auswahl von Städte-, Landschafts- und anderen Bildern unterstützt, die Eigenart der deutschen Gaue und Stämme, die charakteristischen Eigentümlichkeiten der Landschaft, den Einfluß auf das Temperament und die geistige Anlage der Menschen, die Leistungen hervorragender Männer, Sitten und Gebräuche, Sagen und Märchen, Besonderheiten in der Sprache und Hauseinrichtung u. a. m.

Volkswirtschaftslehre s. Amerika; Arbeiterschutz; Bevölkerungslehre; Frauenbewegung; Japan; Soziale Bewegungen; Verkehrsentwicklung; Versicherung; Wirtschaftsgeschichte.

Wald. Der deutsche Wald. Von Professor Dr. Hans Hausrath. Mit 15 Textabbildungen und 2 Karten. (Nr. 153.)

Schildert unter besonderer Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung die Lebensbedingungen und den Zustand unseres deutschen Waldes, die Verwendung seiner Erzeugnisse, sowie seine günstige Einwirkung auf Klima, Fruchtbarkeit, Sicherheit und Gesundheit des Landes und erörtert zum Schlusse die Pflege des Waldes und die Aufgaben seiner Eigentümer, ein Büchlein also für jeden Waldfreund.

Warenzeichenrecht s. Gewerbe.

Wärme s. Chemie.

Wärmekraftmaschinen (s. a. Dampf). Einführung in die Theorie und den Bau der neueren Wärmekraftmaschinen (Gasmaschinen). Von Professor Dr. Richard Vater. 2. Auflage. Mit 34 Abbildungen. (Nr. 21.)

Will Interesse und Verständnis für die immer wichtiger werdenden Gas-, Petroleum- und Benzinmaschinen erwecken. Nach einem einleitenden Abschnitte folgt eine kurze Besprechung der verschiedenen Betriebsmittel, wie Leuchtgas, Kraftgas usw., der Viertakt- und Zweitaktwirkung, woran sich dann das Wichtigste über die Bauarten der Gas-, Benzin-, Petroleum- und Spiritusmaschinen sowie eine Darstellung des Wärmemotors Patent Diesel anschließt.

——— Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen. Von Professor Dr. Richard Vater. Mit 48 Abbildungen. (Nr. 86.)

Ohne den Streit, ob „Lokomobile oder Sauggasmaschine“, „Dampfturbine oder Großgasmaschine“, entscheiden zu wollen, behandelt Verfasser die einzelnen Maschinengattungen mit Rücksicht auf ihre Vorteile und Nachteile, wobei im zweiten Teil der Versuch unternommen ist, eine möglichst einfache und leichtverständliche Einführung in die Theorie und den Bau der Dampfturbine zu geben.

Wasser s. Chemie.

Weltall (s. a. Astronomie). Der Bau des Weltalls. Von Professor Dr. J. Scheiner. 2. Auflage. Mit 24 Figuren im Text und auf einer Tafel. (Nr. 24.)

Stellt nach einer Einführung in die wirklichen Verhältnisse von Raum und Zeit im Weltall dar, wie das Weltall von der Erde aus erscheint, erörtert den inneren Bau des Weltalls, d. h. die Struktur der selbständigen Himmelskörper und schließlich die Frage über die äußere Konstitution der Fixsternwelt.

Weltanschauung (s. a. Kant; Menschenleben; Philosophie; Weltproblem). Die Weltanschauungen der großen Philosophen der Neuzeit. Von Professor Dr. L. Busse. 2. Auflage. (Nr. 56.)

Will mit den bedeutendsten Erscheinungen der neueren Philosophie bekannt machen; die Beschränkung auf die Darstellung der großen klassischen Systeme ermöglicht es, die beherrschenden und charakteristischen Grundgedanken eines jeden scharf herauszuarbeiten und so ein möglichst klares Gesamtbild der in ihm enthaltenen Weltanschauung zu entwerfen.

Weltäther s. Moleküle.

Welthandel. Geschichte des Welthandels. Von Oberlehrer Dr. Max Georg Schmidt. (Nr. 118.)

Eine zusammenfassende Übersicht der Entwickelung des Handels führt von dem Altertum an über das Mittelalter, in dem Konstantinopel, seit den Kreuzzügen Italien und Deutschland den Weltverkehr beherrschen, zur Neuzeit, die mit der Auffindung des Seewegs nach Indien und der Entdeckung Amerikas beginnt und bis zur Gegenwart, in der auch der deutsche Kaufmann nach dem alten Hansawort „Mein Feld ist die Welt“ den ganzen Erdball erobert.

Weltproblem (s. a. Philosophie; Weltanschauung). Das Weltproblem von positivistischem Standpunkte aus. Von Privatdozent Dr. J. Petzoldt. (Nr. 133.)

Sucht die Geschichte des Nachdenkens über die Welt als eine sinnvolle Geschichte von Irrtümern psychologisch verständlich zu machen im Dienste der von Schuppe, Mach und Avenarius vertretenen Anschauung, daß es keine Welt an sich, sondern nur eine Welt für uns gibt. Ihre Elemente sind nicht Atome oder sonstige absolute Existenzen, sondern Farben-, Ton-, Druck-, Raum-, Zeit- usw. Empfindungen. Trotzdem aber sind die Dinge nicht bloß subjektiv, nicht bloß Bewußtseinserscheinungen, vielmehr müssen die aus jenen Empfindungen zusammengesetzten Bestandteile unserer Umgebung fortexistierend gedacht werden, auch wenn wir sie nicht mehr wahrnehmen.

Wetter. Wind und Wetter. Fünf Vorträge über die Grundlagen und wichtigeren Aufgaben der Meteorologie. Von Professor Dr. Leonh. Weber. Mit 27 Figuren im Text und 3 Tafeln. (Nr. 55.)

Schildert die historischen Wurzeln der Meteorologie, ihre physikalischen Grundlagen und ihre Bedeutung im gesamten Gebiete des Wissens, erörtert die hauptsächlichsten Aufgaben, die dem ausübenden Meteorologen obliegen, wie die praktische Anwendung in der Wettervorhersage.

Wirtschaftsgeschichte (s. a. Amerika; Eisenbahnen; Geographie; Handwerk; Japan; Rom; Soziale Bewegungen; Verkehrsentwicklung). Die Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens im 19. Jahrhundert. Von Professor Dr. L. Pohle. (Nr. 57.)

Gibt in gedrängter Form einen Überblick über die gewaltige Umwälzung, die die deutsche Volkswirtschaft im letzten Jahrhundert durchgemacht hat: die Umgestaltung der Landwirtschaft; die Lage von Handwerk und Hausindustrie; die Entstehung der Großindustrie mit ihren Begleiterscheinungen; Kartellbewegung und Arbeiterfrage; die Umgestaltung des Verkehrswesens und die Wandlungen auf dem Gebiete des Handels.

Wirtschaftsgeschichte. Deutsches Wirtschaftsleben. Auf geographischer Grundlage geschildert von Prof. Dr. Chr. Gruber. Mit 4 Karten. (Nr. 42.)

Beabsichtigt, ein gründliches Verständnis für den sieghaften Aufschwung unseres wirtschaftlichen Lebens seit der Wiederaufrichtung des Reichs herbeizuführen und darzulegen, inwieweit sich Produktion und Verkehrsbewegung auf die natürlichen Gelegenheiten, die geographischen Vorzüge unseres Vaterlandes stützen können und in ihnen sicher verankert liegen.

——— Wirtschaftliche Erdkunde. Von Professor Dr. Chr. Gruber. (Nr. 122.)

Will die ursprünglichen Zusammenhänge zwischen der natürlichen Ausstattung der einzelnen Länder und der wirtschaftlichen Kraftäußerung ihrer Bewohner klar machen und das Verständnis für die wahre Machtstellung der einzelnen Völker und Staaten eröffnen. Das Weltmeer als Hochstraße des Weltwirtschaftsverkehrs und als Quelle der Völkergröße, — die Landmassen als Schauplatz alles Kulturlebens und der Weltproduktion, — Europa nach seiner wirtschaftsgeographischen Veranlagung und Bedeutung, — die einzelnen Kulturstaaten nach ihrer wirtschaftlichen Entfaltung (viele geistreiche Gegenüberstellungen!): all dies wird in anschaulicher und großzügiger Weise vorgeführt.

Zoologie s. Ameisen; Tierleben.

Übersicht nach den Autoren.

Abel, Chemie in Küche und Haus.
Abelsdorff, Das Auge.
Ahrens, Mathematische Spiele.
Alkoholismus, der, seine Wirkungen und seine Bekämpfung. 3 Bände.
Auerbach, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre.
Biedermann, Die technische Entwickl. der Eisenbahnen der Gegenwart.
Biernacki, Die moderne Heilwissenschaft.
Blau, Das Automobil.
Bloch, Die ständischen u. sozialen Kämpfe.
Blochmann, Luft, Wasser, Licht u. Wärme.
— Grundlagen der Elektrotechnik.
Boehmer, Jesuiten.
Boehmer, Luther im Lichte der neueren Forschungen.
Bongardt, Die Naturwissenschaften im Haushalt. 2 Bändchen.
Bonhoff, Jesus und seine Zeitgenossen.
Borinski, Das Theater.
Börnstein und Marckwald, Sichtbare und unsichtbare Strahlen.
Braasch, Religiöse Strömungen.
Bruinier, Das deutsche Volkslied.
Brüsch, Die Beleuchtungsarten der Gegenwart.
Buchner, 8 Vorträge a. d. Gesundheitslehre.
Burgerstein, Schulhygiene.
Bürkner, Kunstpflege in Haus u. Heimat.
Busse, Weltanschauung. d. gr. Philosoph.
Crantz, Arithmetik und Algebra. I.
Daenell, Geschichte der Ver. Staaten von Amerika.
v. Duhn, Pompeji.
Eckstein, Der Kampf zwischen Mensch und Tier.
Erbe, Hist. Städtebilder aus Holland und Niederdeutschland.
Flügel, Herbarts Lehren und Leben.
Franz, Der Mond.
Frech, Aus der Vorzeit der Erde.
Frentzel, Ernähr. u. Volksnahrungsmittel.
Fried, Die moderne Friedensbewegung.
Geffcken, A. d. Werdezeit d. Christentums.
Gerber, Die menschliche Stimme.
Giesebrecht, Die Grundzüge der israelitischen Religionsgeschichte.
Giesenhagen, Unsere wichtigsten Kulturpflanzen.

Aus Natur und Geisteswelt.

Jedes Bändchen geheftet 1 Mk., geschmackvoll gebunden 1 Mk. 25 Pfg.

Goldschmidt, Die Tierwelt d. Mikroskops.
Graetz, Licht und Farben.
Graul, Ostasiatische Kunst.
Gruber, Deutsches Wirtschaftsleben.
Gruber, Wirtschaftliche Erdkunde.
Günther, Das Zeitalter der Entdeckungen.
Hahn, Die Eisenbahnen.
v. Hansemann, Der Aberglaube in der Medizin.
Hartwig, Das Stereoskop.
Hassert, Die Polarforschung.
Hassert, Die deutschen Städte.
Haushofer, Bevölkerungslehre.
Hausrath, Der deutsche Wald.
Heigel, Politische Hauptströmungen in Europa im 19. Jahrh.
Heil, D. Städte u. Bürger im Mittelalter.
Heilborn, Die deutschen Kolonien. (Land und Leute.)
Heilborn, Der Mensch.
Hennig, Einführung in das Wesen der Musik.
Hennings, Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie.
Hesse, Abstammungslehre u. Darwinismus.
Hubrich, Deutsches Fürstentum und deutsches Verfassungswesen.
Janson, Meeresforschung u. Meeresleben.
Ilberg, Geisteskrankheiten.
Kaupe, Der Säugling.
Kautzsch, Die deutsche Illustration.
Kirchhoff, Mensch und Erde.
Knabe, Geschichte d. deutsch. Schulwesens.
Knauer, Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt.
Knauer, Die Ameisen.
Kohler, Moderne Rechtsprobleme.
Kraepelin, Die Beziehungen der Tiere zueinander.
Krebs, Haydn, Mozart, Beethoven.
Kreibig, Die fünf Sinne des Menschen.
Külpe, Die Philosophie der Gegenwart.
Külpe, Immanuel Kant.
Küster, Vermehrung und Sexualität bei den Pflanzen.
Kuypers, Volksschule und Lehrerbildung der Ver. Staaten.
Laughlin, Aus dem amerikanischen Wirtschaftsleben.
Launhardt, Am sausenden Webstuhl der Zeit.
Leick, Krankenpflege.
Loening, Grundzüge der Verfassung des Deutschen Reiches.
Lotz, Verkehrsentwcklg. i. Dtschl. 1800–1900.
Luschin von Ebengreuth, Die Münze.
Maas, Lebensbedingungen der Tiere.
Maier, Soziale Bewegungen u. Theorien.
von Maltzahn, Der Seekrieg.
Manes, Grundzüge d. Versicherungswes.
Maennel, Vom Hilfsschulwesen.
Martin, Die höh. Mädchenschule in Dtschld.
Matthaei, Deutsche Baukunst i. Mittelalt.
Mehlhorn, Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu.
Merckel, Bilder aus der Ingenieurtechnik.
Merckel, Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit.
Meringer, Das deutsche Haus und sein Hausrat.
Mie, Moleküle — Atome — Weltäther.
Miehe, Die Erscheinungen des Lebens.
von Negelein, Germ. Mythologie.
Oppenheim, Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit.
Otto, Das deutsche Handwerk.
Otto, Deutsches Frauenleben.
Pabst, Die Knabenhandarbeit.
Paulsen, Das deutsche Bildungswesen.
Petersen, Öffentliche Fürsorge für die hilfsbedürftige Jugend.
Petzoldt, Das Weltproblem.
Pfannkuche, Religion u. Naturwissensch.
Pischel, Leben und Lehre des Buddha.
Pohle, Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens im 19. Jahrhundert.
von Portugall, Friedrich Fröbel.
Pott, Der Text des Neuen Testaments nach seiner geschichtl. Entwicklung.
Rand, Kulturgeschichte des deutschen Bauernhauses.
Rathgen, Die Japaner.
Rehmke, Die Seele des Menschen.
Reukauf, Die Pflanzenwelt d. Mikroskops.
Richert, Schopenhauer.
Richter, Einführung in die Philosophie.
von Rohr, Optische Instrumente.
Sachs, Bau und Tätigkeit des menschlichen Körpers.
Scheffer, Das Mikroskop.
Scheid, Die Metalle.
Scheiner, Der Bau des Weltalls.
Schirmacher, Die mod. Frauenbewegung.
Schmidt, Gesch. des Welthandels.
Schubring, Rembrandt.
Schumburg, Die Tuberkulose.
Schwemer, Restauration und Revolution.
Schwemer, Die Reaktion u. die neue Ära.
Schwemer, Vom Bund zum Reich.
von Soden, Palästina.
von Sothen, D. Kriegswesen i. 19. Jahrh.
Spiro, Geschichte der Musik.
Stein, Die Anfänge der menschl. Kultur.
Steinhausen, Germanische Kultur in der Urzeit.
Sticher, Eine Gesundheitslehre für Frauen.
Teichmann, Der Befruchtungsvorgang.
Tews, Schulkämpfe der Gegenwart.
Tews, Mod. Erziehung in Haus u. Schule.
Thieß, Deutsche Schiffahrt.

Aus Natur und Geisteswelt.

Jedes Bändchen geheftet 1 Mk., geschmackvoll gebunden 1 Mk. 25 Pfg.

Thurn, Die Funkentelegraphie.
Tolksdorf, Gewerblicher Rechtsschutz in Deutschland.
Uhl, Entsteh. u. Entwickl. uns. Mutterspr.
Unold, Aufgab. u. Ziele d. Menschenlebens.
Vater, Theorie u. Bau der neueren Wärmekraftmaschinen. — Die neueren Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen. — Dampf u. Dampfmaschine.
Voges, Der Obstbau.
Volbehr, Bau u. Leben d. bildenden Kunst.
Wahrmund, Ehe und Eherecht.
Weber, Wind und Wetter.
Weber, Von Luther zu Bismarck. 2 Bdch.
Wedding, Eisenhüttenwesen.
Weinel, Die Gleichnisse Jesu.
Weise, Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit.
Weise, Die d. Volksstämme u. Landschaft.
Wieler, Kaffee, Tee, Kakao und die übrigen narkotischen Aufgußgetränke.
Wilbrandt, Die Frauenarbeit.
Wislicenus, Der Kalender.
Witkowski, Das d. Drama d. XIX. Jahrh.
Wustmann, Albrecht Dürer.
Zacharias, Süßwasserplankton.
Zander, Nervensystem. — Leibesübungen.
Ziebarth, Kulturbilder aus griechischen Städten.
Ziegler, Allgem. Pädagogik. — Schiller.
v. Zwiedineck-Südenhorst, Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung.

Es werden folgen:

Alt, Physik der Kälte.
Anselmino, Das Wasser.
Arndt, Deutschlands Stellung in der Weltwirtschaft.
Auhagen, Agrarpolitische Zeitfragen.
Backhaus, Die Milch.
Bardeleben, Die menschliche Anatomie.
Barinck, Erforschung und künstliche Herstellung der Stoffe des Pflanzen- und Tierreichs.
Bendix, Geldmarkt.
Bitterauf, Die franz. Revolution.
— Napoleon und seine Zeit.
— Friedrich der Große.
Bock, Zeitmesser.
Böckel, Die deutsche Volkssage.
Börnstein, Wärmelehre.
Brandenburger, Deutschland u. Polen in ihren geschichtlichen Beziehungen.
Braun, Ethik.
Buchgewerbe und die Kultur. (Vorträge von: Focke, Hermelink, Kautzsch, Wäntig, Witkowski und Wuttke.)
Buchka, Geschichte der Chemie.
Buhl, Kultur des Islams.
Claasen, Deutsche Landwirtschaft.
Cohn, Führende Denker.
Cornils, Einführung in das Studium der Theologie.
Dähnhardt, Das Märchen.
Dippe, Die Hygiene des täglichen Lebens.
Doren, Die Hansa und die Entwickelung der deutschen Seemacht.
Eckert, Kolonialpolitik.
Endell, Städtebau.
Feßler, Die neueren Fortschritte der Chirurgie.
Fitzner, Allgemeine Völkerkunde.
Franke, Geschichte des deutschen Gefühls.
Fried, Internationales Leben der Gegenwart.
Friedrich, Die wirtschaftlichen Verhältnisse Asiens.
Fritz, Das moderne Volksbildungswesen.
Gaehde, Das Theater.
Gaupp, Kinderpsychologie.
Geffken, Grundzüge des Völkerrechts.
Gisevius, Die Pflanzen.
Graul, Die Entwickelung der deutschen Malerei im 19. Jahrhundert.
Gutzeit, Die Bakterien.
Haendke, Die deutsche Kunst im täglichen Leben.
Haguenin, Hauptströmungen der französischen Literatur.
v. Halle, Truste und Kartelle.
Heinrici, Recht und Rechtspflege in Deutschland.
Hellwig, Verbrechen und Aberglaube.
Hensel, Rousseau.
Hoffmann, Die europäischen Sprachen.
Jacob, Einleitung in das Studium der Geschichte.
Jaeschke, Dante.
Ihering, Wasserkraftmaschinen.
Jiriczek, Geschichte der engl. Dichtung.
Istel, Die musikalische Romantik in Deutschland.
— Das Kunstwerk Wagners.
Kahle, Ibsen, Björnson und ihre Zeitgenossen.
Kautzsch, Die Krebskrankheit.
Kirn, Die sittlichen Lebensanschauungen der Gegenwart.
Knabe, Das deutsche Schulwesen der Gegenwart.

Aus Natur und Geisteswelt.

Jedes Bändchen geheftet 1 Mk., geschmackvoll gebunden 1 Mk. 25 Pfg.

Köhler, Aufklärung.
Krumm, Das Drama.
Kühne, Geschichte der Freiheitskriege.
Kümmel, Photochemie.
Lampert, Welt der Organismen.
Landauer, Talmud.
Landsberg, Biologie.
Langenbeck, Englands Weltmacht.
Lehmann, Mystik.
— Die tierische Form in Beziehung zur Lebensweise der Tiere.
Lehmann-Haupt, Die babylonische Kultur.
— Schliemanns Ausgrabungen.
Lehner, Römische Kultur in Deutschland.
Leser, Börse und Börsengeschäfte.
Louis, Liszt und Berlioz.
Lyon, Einführung in die deutsche Sprach- und Literatur-Forschung.
Maas, Die geistige Entwickelung des Kindes.
Marcuse, Praktische Himmelskunde.
Matthäi, Die deutsche Baukunst vom 15. Jahrhundert bis zur Gegenwart.
May, Gesteinsbildende Tiere.
Mayer, Geschichte des westeuropäischen Beamtentums.
Menzer, Grundzüge der Ästhetik.
Meyer, Der Krieg im Zeitalter des Verkehrs.
— Das Neue Testament.
Meyer, R. M., Neuzeitliche Meister der Weltliteratur.
Mielke, Das deutsche Dorf.
Mollwo, Die deutschen Erwerbsgesellschaften.
Morgenroth, Die Statistik.
Most, Die Boden- und Wohnungsfrage.
Müller, Methoden der Physiologie.
— Die chemische Industrie.
Müller, S., Amerikanische technische Hochschulen.
Natorp, Pestalozzi.
Neurath, Antike Wirtschaftsgeschichte.
Ohr, Staat und Kirche im Mittelalter.
Oppenheim, Die Probleme der neueren Astronomie.
Peter, Die Planeten.
Pinder, Einführung in das Studium der Kunstgeschichte.
Pöschel, Die Luftschiffahrt.
Potonié, Morphologie der Pflanzen.
Rehm, Deutsche Volksfeste und Volkssitten.
Reukauf, Die Pflanzenwelt des Mikroskops.
Richert, Einleitung in das Studium der Philosophie.
Riemann, Geschichte des deutschen Romans.
Rietsch, Die Grundlagen der Tonkunst.
Rosin, Herz, Blutgefäße, Blut und deren Erkrankungen.
Sallwürk, Einleitung in die wissenschaftliche Pädagogik.
Salomon, Die politische und kulturelle Entwickelung Rußlands.
Saenger, Das englische Kulturleben der Gegenwart.
v. Scala, Die Entwickelung des griechischen Volkes.
Scheibe, Die Minerale.
Scheler, Erkenntnislehre.
Schmidt, Bedeutung der Seemacht in der neueren Geschichte.
Schöne, Politische Geographie.
Schulz, Antike Wirtschaft, Technik und Kultur.
Schwarz, Allgemeine Finanzverwaltung.
Sieger, Der moderne Begriff der Nation.
— Shakespeare.
Solmsen, Die russische Literatur des 19. Jahrhunderts.
Spiro, Antikes Leben im Liede.
Steindorf, Kultur des alten Ägyptens.
Steinmann, Die Eiszeit und der urgeschichtliche Mensch.
Stöcker, Die Frau und die moderne Kultur.
Strauß, Mietrecht.
Thieß, Zeitungswesen.
Thumb, Die Völker der Balkanhalbinsel.
Tobler, Kolonialbotanik.
Troeltsch, Einführung in die Arbeiterfrage.
Trömner, Suggestion und Hypnotismus.
Trüper, Die Charakterfehler im Kindes- und Jugendalter.
Überschaer, Die deutsche Zollpolitik.
Unger, Das Buch und seine Herstellung.
Vater, Maschinenkunde.
Verworn, Mechanik des Geisteslebens.
Vischer, Paulus.
Vogt, Deutsches Vogelleben.
Vollers, Weltreligionen.
Walzel, Geschichte der deutschen Romantik.
Weber, Probleme der großindustriellen Entwickelung.
Weinstein, Entstehung der Welt und der Erde.
Wendscher, Goethes Welt- und Lebensanschauung.
Wentscher, Geschichte und Kritik des Materialismus.
Wernicke, Ansteckende Volkskrankheiten.
Wiedenfeld, Verkehrswesen.
— Die Seehäfen des Weltverkehrs.
Wobbermin, Wesen und Wahrheit der Religion.
Zur Straßen, Seelenleben der Tiere.

Aus deutscher Wissenschaft u. Kunst.

Die Sammlung soll dazu dienen, alle, die bestrebt sind, ihre Bildung zu erweitern, in die Lektüre wissenschaftlicher Werke einzuführen. Aus geisteswissenschaftlichen, naturwissenschaftlichen, religiösen und philosophischen Werken wird eine Auslese getroffen, die geeignet ist, in die wichtigsten Fragen auf den einzelnen Gebieten einzuführen, den Weg zu den Quellen zu weisen und zugleich die Kunstformen der Darstellung in Musterbeispielen zu zeigen. Die Erläuterungen räumen unter Beiseitelassen unnötiger Gelehrsamkeit und auf das knappste Maß beschränkt, nur solche Schwierigkeiten aus dem Wege, die eine unbefangene und rasche Aufnahme der Lektüre verhindern. Zunächst erschienen folgende Bändchen:

Zur Geschichte der deutschen Literatur. Proben literar-historischer Darstellung für Schule und Haus ausgewählt und erläutert von Dr. R. Wessely. geb. M. 1.20.

Inhalt: Vogt, Der Heliand. Uhland, Walther von der Vogelweide. v. Treitschke, Die neue Literatur. Gervinus, Lessing. Hettner, Herder. Bielschowsky, Goethe und Schiller. Bellermann, Schillers Don Carlos. Brahm, Kleists Hermannsschlacht. Scherer, Grillparzer. Mayne, Mörike als Lyriker. Schmidt, Gustav Freytag.

Zur Kunst. Ausgewählte Stücke moderner Prosa zur Kunstbetrachtung und zum Kunstgenuß herausgegeben von Dr. M. Spanier. Mit Einleitung, Anmerkungen und Bilderanhang. geb. M. 1.20.

Inhalt: Avenarius, Kunstgenuß und helfendes Wort. Avenarius, Rethel: Der Tod als Freund. v. Seidlitz, Deutsche Kunst. Springer, Albrecht Dürers Phantasiekunst: Ritter, Tod und Teufel. Hirth, Malerische Auffassungen und Techniken des Mittelalters und der Renaissance. Hirth, Das Natürliche in der Kunst. Lichtwark, Rembrandt: Der blinde Tobias. Lichtwark, Rembrandts Haus. Furtwängler, Medusa. Urlichs, Die Laokoongruppe. Bürkner, Gotische Schmuckformen. Borrmann, Andreas Schlüter. Bayersdorfer, Zur Charakteristik Michelangelos. Bayersdorfer, Über Kunst. (Aphorismen.) Wölfflin, Die Teppichkartons Raffaels: Der wunderbare Fischzug. Justi, Velazquez: Die Übergabe von Breda. Schultze-Naumburg, Vom Bauernhaus. Gurlitt, Sachlicher Stil im Gewerbe. Gurlitt, Was will die Hellmalerei? Brinckmann, Meißner Porzellan. Floercke, Etwas über Böcklin. Thoma, Ansprache an die Freunde bei Gelegenheit seines 60. Geburtstages.

Zur Geschichte. Proben von Darstellungen aus der deutschen Geschichte für Schule und Haus ausgewählt und erläutert von Dr. W. Scheel. geb. M. 1.20.

Inhalt: Mommsen, Kelten und Germanen vor Cäsar. Brunner, Kriegswesen und Gefolgschaft. Freytag, Karl der Große. v. Giesebrecht, Gründung des Deutschen Reichs durch Heinrich I. v. Kugler, Der Kreuzzug Kaiser Friedrichs I. v. Below, Die Stadtverwaltung in ihrer Beziehung zu Handel und Gewerbe. Schäfer, Die Hanse. Lamprecht, Entwicklung der ritterlichen Gesellschaft. v. Treitschke, Luther und die deutsche Nation. v. Ranke, Die Epoche der Reformation und der Religionskriege. Schiller, Die Schlacht bei Lützen. Droysen, Fehrbellin. Friederich, Blücher und Gneisenau. v. Moltke, Schlacht bei Vionville — Mars la Tour (16. August). Marcks, Kaiser Wilhelm I. Anhänge.

Zur Erdkunde. Proben erdkundlicher Darstellung für Schule und Haus ausgewählt und erläutert von Dr. F. Lampe. geb. M. 1.20.

Inhalt: v. Humboldt, Über die Wasserfälle des Orinoko bei Atures und Maypures. Ritter, Aus der Einleitung zur „Erdkunde im Verhältnis zur Natur und zur Geschichte des Menschen oder allgemeine vergleichende Geographie". Peschel, Der Zeitraum der großen Entdeckungen. Barth, Reise in Adamaua, Entdeckung des Benue. v. Richthofen, Aus China. v. Drygalski, Die deutsche Südpolarexpedition. Kirchhoff, Das Meer im Leben der Völker. Ratzel, Deutschlands Lage und Raum. Partsch, Das niederrheinische Gebirge, seine Täler und seine Tieflandbucht. v. d. Steinen, Jägertum, Feldbau und Steinzeitkultur der Indianer am Schingu. Geschichtlich-biographische Anmerkungen. Erklärung geologischer Fachausdrücke.

Zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. Acht Vorträge von Prof. Dr. A. Riehl.

2. Auflage. Geheftet M 3.—, in Leinwand gebunden M 3.60.

„Wir gestehen, daß uns selten die Lektüre eines Buches so viel geistigen Genuß bereitet hat, als die des vorliegenden. Der Verfasser hat es meisterhaft verstanden, die vielfach als äußerst langweilig und trocken verschriene Disziplin nicht nur interessant und fesselnd darzustellen, sondern es ist ihm auch gelungen, recht klar und allgemein verständlich zu schreiben, so daß jeder Gebildete getrost nach dem Buche greifen kann." (Leipziger Lehrerzeitung.)

„Von den üblichen Einleitungen in die Philosophie unterscheidet sich Riehls Buch nicht bloß durch die Form der freien Rede, sondern auch durch seine ganze methodische Auffassung und Anlage, die wir nur als eine höchst glückliche bezeichnen können. Nichts von eigenem System, nichts von langatmigen logischen, psychologischen oder gelehrten historischen Entwicklungen, sondern eine lebendig anregende und doch nicht oberflächliche, vielmehr in das Zentrum der Philosophie führende Betrachtungsweise. . . . Wir möchten somit das philosophische Interesse . . . mit Nachdruck auf Riehls Schrift hinweisen. (Monatsschr. f. höh. Schulen.)

Arbeit und Rhythmus. Von Prof. Dr. Karl Bücher.

Dritte, stark vermehrte Auflage. Geheftet M 7.—, in Leinwand gebunden M 8.—

„. . . Die übrige Gemeinde allgemein Gebildeter, welche nicht bloß diese oder jene Einzelheit der in der Bücherschen Arbeit enthaltenen wissenschaftlichen Errungenschaften interessiert, sondern die sich für die Gesamtheit des selbständigen und weitgreifenden Überblicks über den vielverschlungenen Zusammenhang von Arbeit und Rhythmus aufrichtig freuen darf, wird meines Erachtens dem bewährten Forscher auch dafür besonders dankbar sein, daß er ihr einen wertvollen Beitrag zu einer Lehre geliefert hat, welche die edelsten Genüsse in unserm armen Menschenleben vermittelt, nämlich zur Lehre von der denkenden Beobachtung nicht bloß welterschütternder Ereignisse, sondern auch alltäglicher, auf Schritt und Tritt uns begegnender Geschehnisse."

(G. v. Mayr in der Beilage z. Allgem. Ztg.)

Himmelsbild und Weltanschauung im Wandel der Zeiten. Von Prof. Troels-Lund.

Autorisierte Übersetzung von L. Bloch. Zweite Auflage. In Leinwand gebunden M 5.—

„. . . Es ist eine wahre Lust, diesem kundigen und geistreichen Führer auf dem langen, aber nie ermüdenden Wege zu folgen, den er uns durch Asien, Afrika und Europa, durch Altertum und Mittelalter bis herab in die Neuzeit führt. . . . Es ist ein Werk aus einem Guß, in großen Zügen und ohne alle Kleinlichkeit geschrieben. . . . Wir möchten dem schönen, inhaltreichen und anregenden Buche einen recht großen Leserkreis nicht nur unter den zünftigen Gelehrten, sondern auch unter den gebildeten Laien wünschen. Denn es ist nicht nur eine geschichtliche, d. h. der Vergangenheit angehörige Frage, die darin erörtert wird, sondern auch eine solche, die jedem Denkenden auf den Fingern brennt. Und nicht immer wird über solche Dinge so kundig und so frei, so leidenschaftlos und doch mit solcher Wärme gesprochen und geschrieben, wie es hier geschieht. . . ." (W. Nestle in den Neuen Jahrbüchern für das klassische Altertum.)

Das Erlebnis und die Dichtung. Lessing, Goethe, Novalis, Hölderlin. Vier Aufsätze von Wilhelm Dilthey.

Geheftet M 4.80, in Leinwand gebunden M 5.60.

„. . . Dieses tiefe und schöne Buch gewährt einen starken Reiz, Diltheys feinfühlig wägende und leitende Hand das künstlerische Fazit so außerordentlicher Phänomene im unmittelbaren Anschluß an die knappe, großlinige Darstellung ihres Wesens und Lebens ziehen zu sehen. Hier, das fühlt man auf Schritt und Tritt, liegt auch wahrhaft inneres Erlebnis eines Mannes zugrunde, dessen eigene Geistesbeschaffenheit ihn zum nachschöpferischen Eindringen in die Welt unserer Dichter und Denker geradezu bestimmen mußte. . . . Was diesen auf einen Lebenszeitraum von 40 Jahren verteilten — man wendet hier das Wort fast instinktiv an — klassischen Aufsätzen ein ganz besonders edles Gepräge gibt, das ist der goldene Schimmer geistiger Jugendfrische, der sie verklärt, die lautere Verehrung unserer höchsten literarischen Kulturwerke, der den Ausdruck überall durchzittert. Hier schreibt Ehrfurcht und zwar lebendige Ehrfurcht, die sich den Geistern und ihrem Werk in liebendem Erkenntnisdrange hingibt und weiß, warum sie es tut."

(Das literarische Echo.)

397