ELEMENTE

DE

ALGEBRA

DE

E. BACALOGLO
PROFESSORE LA UNIVERSITATEA BUCURESCI.

PENTRU USULU SCOLELORU SECUNDARE

EDITIUNE A DUOA

BUCURESCI
TYPOGRAPHIA CURTII (LUCRATORII ASSOCIATI)
12, PASSAGIULU ROMANU, 12
1870

1942

1953

RC 123/05

1. B

PREFACIA

LA EDITIUNEA ANTEIA

Elementele presinte de Algebra suntu fructulu meditatiuniloru de patru anni. In patru ronduri am professatu aceste elemente, facendu pre fia-care annu esperientie noue in privinti'a predarei loru, si me simtu fericitu, deca mi este permissu a crede co am implinitu scopulu ce mi propuneamu, adico de a descepta interessulu pentru studiulu sciintieloru essacte, si de a pune junimea studiosa in stare de a urma acestu studiu mai departe si cu successu. Observatiunea consciintiosa si esperienti'a din tote dillele mi au aretatu co teoriile aci cuprinse, form'a si desvoltarea care s'a datu fia-caria din elle, suntu celle mai potrivite pentru implinirea acellui scopu. Ne mai avendu asta-di occasiune de a desvolta aceste teorii d'a dreptulu, credu a aduce unu ore-care avantagiu junimei nostre, puindu i in mani unu opu scrissu in spiritulu lectiuniloru ce amu professatu; unu deffectu pote cine-va imputà acestoru elemente co cu tota tendinti'a mea, totu nu suntu reproductiunea fidela a unui cursu facutu de viua voce, conditiune grea de implinitu, si pre care in genere majoritatea cartiloru didactice este departe de a o satisface.

Annulu 1866. BACALOGLO.

PREFACIA

LA EDITIUNEA A DUOA

Lips'a totala de ua carte elementara de Algebra, difficultatile ce intimpina scolarii de a studiea dupre carti scrisse in limbi streine si cautarea de care s'a bucuratu editiunea anteia acestoru elemente, me au decisu a procede la ua a duoa editiune a loru. Dimensiunile, form'a, sistem'a si desvoltarea materiei au fostu conservate mai intacte; pentru co esperienti'a din tote dillele facuta in scolele nostre au continuatu a areta co suntu celle mai nemerite pentru studiulu acestei sciintie. Mici modificari seu adaose, cari nu influintiedia de locu sistem'a, au fostu introduse pre aici si acolo, pentru implinirea unoru mici lacune, si pentru a satisface pre catu se pote cereriloru differiteloru programme. Me voiu simti fericitu deca si acesta a duoa editiune va potea fi de veri ua utilitate junimei scolastice.

BACALOGLO.

ELEMENTE DE ALGEBRA

CAPITOLU I.

NOTIUNI PRELIMINARII.

§ 1. INTRODUCERE.

Candu mai multe catimi au intre elle ore-cari relatiuni determinate, adico suntu legate intre elle astu-feliu ca scambarea unora sa attraga ua scambare si a celloru-alte, attunci ne potemu propune sa studiemu legile dupre cari se facu aceste scambari correlate, sa cunnoscemu proprietatile caracteristice alle catimiloru cari implinescu acelle relatiuni, sa descoperimu alte relatiuni noue intre catimile considerate, in fine sa determinamu cu ajutorulu legaturiloru date catimi enca necunnoscute : acesta formedia objectulu Matematicei propriu dissa. Astu-feliu candu radi'a unei sfere se scamba, suprafecia sferei se scamba asemenea; candu temperatur'a unui corpu variedia, volumulu lui variedia asemenea, etc. Radi'a si suprafeci'a sferei, temperatur'a si volumulu corpului suntu catimi legate intre elle prin ore-cari conditiuni si variatiunile simultane alle loru se facu dupre legi determinate si cunnoscute. De aci se vede importanti'a Matematicei, care se applica la Fisica, la Mecanica, Astronomia, etc.

Deca in studiulu catimiloru si allu relatiuniloru ce le lega domnesce metod'a representativa, adico deca lu facemu cu ajutorulu figuriloru si ne preoccupamu de proprietatile acestoru din urma, attunci formamu acea parte a matematicei care porta numele de Geometria in tota estensiune. Deca din contra ne servimu de metoda calculativa, adico deca ne servimu de calculu cu numere, (indifferentu deca acestea suntu aretate cu cifre seu cu littere), attunci formamu partea matematicei numita Analisa matematica. Algebr'a este numai ua parte elementara, ua introducere la analisa matematica.

Ua catime care variedia, precum temperatur'a unui corpu, si aduce printr'acesta varietiunile altoru catimi, cari depindu de densa, s. e. dilatatiunea corpuriloru, se numesce ua *variabila*. Catimile cari depindu de acesta variabila si cari se scamba impreuna cu densa se numescu *functiuni* alle acestoru variabile.

Ca sa esprimamu catimile ne servimu de litterile alfabetului; apoi servindu-ne si de ore-cari semne, s. e. acella allu adunarei, allu scaderei, allu potrivirei, etc., potemu esprima intr'unu modu precisu si scurtu tote relatiunile ce ne potemu inchipui intre differite catimi.

Catimile cunnoscute si pre acellea cari nefiindu suppuse la varietiuni le numimu constante, le insemnamu obicinuitu prin celle d'anteiu littere alle alfabetului a, b, c,...; era pre celle necunnoscute si variebile, prin celle din urma littere x, y,...; cu tote acestea nu essista ua regula fissa pentru acesta distinctiune.

Catimile potu fi intregi seu fractionare, rationale seu commensurabile si irrationale seu incommensurabile, positive seu negative, etc. Ua catime affectata de semnulu radicalu $\sqrt{}$ se numesce ua catime irrationala seu incommensurabila.

Catimile in natura nu suntu nici positive, nici negative; elle essista intr'unu modu absolutu. Noi, comparandu-le intre elle gasimu, co unele au unu modu de essistentia oppusu la altele, s. e. 500 lei considerati ca capitalu esprima unu ce cu totulu oppusu la 500 lei considerati ca datoria; ua distantia de 10 stanjeni spre resaritulu unui puntu este cu totulu differitu de aceia'si distantia stimata spre apusu. Ne invoimu dera sa numimu positive catimile stimate intr'unu sensu, era negative pre celle stimate in sensu contrariu.

Espressiune algebrica se numesce impreunarea mai multoru catimi (litterare seu numerare) legate prin semnele cunnoscute alle Algebrei, s. es. $ax^2+3bx-7cx-d^2$.

Unu *termenu* este impreunarea mai multoru catimi cari nu se despartu intre elle prin semnulu $+$ seu $-$; s. es. $4\,a\,xy$.

Ua espressiune de unu termenu se numesce *monomu*; de duoi termeni, *binomu* : $a+b$; de trei, *trinomu* : $a+b+c$; de mai multi termeni, *polinomu* : $a+b+c+d+e$.

Coefficientu se numesce ua catime cunnoscuta (litterara seu numerica) prin care se afla immultita ua alta catime, in genere necunnoscuta. Astufeliu in espressiunile : $5x, -7ay^2$, bcx^2, coefficientulu lui x *si* y suntu 5, $7a$ si bc; de multe ori numimu coefficienti tote catimile cunnoscute cari intra intr'ua espressiune algebrica. Coefficientii potu fi in multe casuri si catimi necunnoscute pre cari ne potemu propune a determina.

Termeni asemenea numimu aceii cari nu se deosebescu de catu prin semnulu $+$ seu $-$ si prin coefficienti. Asia : $+5x^3$ si $+7x^3$, $+4ax^2$ si $-5bx^2$, $+ax$ si $+bx$ si $-cx$ si $+x$, suntu termeni asemenea.

Esponentu se numesce unu numeru seu ua littera care se scrie la drepta unei littere (seu numeru) si ceva mai susu si care areta de cate-ori acesta littera este luata ca factoru, s. es. a^3, b^5, a^m, b^n unde *3*, *5*, *m* si *n* suntu esponenti.

Unu polinomu se numesce omogenu, candu summ'a esponentiloru din fia-care termenu allu lui este unu numeru constantu. Astu-feliu polinomulu:

$$5ab^2x - 3a^3x - 7c^2x^2 + b^2x^2 - 6abcx$$

este omogenu, pentru co summ'a esponentiloru in fia-care termenu este constanta si $= 4$.

§ 2. ADUNARE SI SCADERE.

Adunarea espressiuniloru algebrice se face scriindu-le una langa alta si fia-care cu semnulu ei. Deca in espressiunea resultanta, seu summ'a, se afla termeni asemenea, ii reducemu, adico ii impreunamu intr'unulu.

Essemple. 1⁰. Sa adunamu polinomele:

$$12b - 3c - 7m + 3n \text{ si } -3b + 8c - 9n + 5h.$$

summ'a este: $12b - 3c - 7m + 3n - 3b + 8c - 9n + 5h$.

seu facendu reductiunea termeniloru asemenea:

$$9b + 5c - 7m - 6n + 5h.$$

2⁰. Sa adunamu espressiunile:

$$ax^3 + abx^2 + a^2bx, px^3 - pqx^2 - p^2qx, -rx^3 + rsx^2 + s^3x.$$

summ'a va fi:

$$ax^3 + abx^2 + a^2bx + px^3 - pqx^2 - p^2qx - rx^3 + rsx^2 + s^3x.$$

seu facendu reductiunea termeniloru asemenea:

$$(a + p - r)\, x^3 + (ab - pq + rs)\, x^2 + (a^2b - p^2q + s^3)\, x.$$

Scaderea espressiuniloru algebrice se face scriindu termenii polinomului scadietoru cu semnele scambate langa polinomulu descadiutu, si facendu reductiunea termeniloru asemenea.

Este lesne a si da seama de acestu modu de a opera scaderea. In adeveru se scie co, ca sa scademu d'intr'unu numeru A pre unu altu B trebue sa scriemu A-B, adico trebue sa scriemu langa A pre B cu semnulu scambatu; dera a scamba semnulu lui B, va sa dica a lu considera intr'unu sensu oppusu de catu acella in care se afla. Deca acum B se compune din parti, unele positive si altele negative, se intiellege de sine co scambarea in sensulu lui B nu se pote face altu-feliu, de catu facendu negative partile lui positive, era positive pre acelle negative; adico din $+a-b$ sa facemu $-a+b$, si intocmai acesta este modulu indicatu pentru operarea scaderei.

Essemple. Sa se scadia espressiunile urmatore a duoa din cea d'anteiu:

$$1^0.\ -7f+3m-8x,\ -6x-5m-2x+3d+8.$$

Differinti'a va fi:

$$-7f+3m-8x+6x+5m+2x-3d-8.$$

seu facendu reductiunea termeniloru asemenea:

$$-7f+8m-3d-8.$$

$$2^0.\ (ax^3+bx^2+d)-(mx^3-nx^2-px+q).$$
$$=ax^3+bx^2+d-mx^3+nx^2+px-q.$$
$$=(a-m)\,x^3+(b+n)\,x^2+px+d-q.$$

$$3^0.\ (32a+3b)-(-5a+17b).$$
$$=32a+3b+5a-17b.$$
$$=37a-14b.$$

§ 3. IMMULTIRE.

Immultirea a duoe espressiuni algebrice se reduce totu de una la aceea a duoe monome. In casulu cellu mai simplu care se pote presinta, adico acella de a immulti pre a cu b, vomu scrie

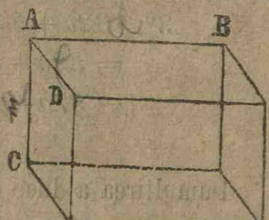
simplu $a \times b$. Deca ensa a si b suntu affectate de ore-cari semne, attunci vomu avea in genere celle patru casuri possibile:
$$+a \times +b;\ -a \times +b;\ +a \times -b;\ -a \times -b.$$

Deca ensa ne aducemu a minte de definitiunea immultirei, dupre care productulu trebue sa resulte din deimmultitulu $+a$ seu $-a$, precum immultitorulu $+b$ seu $-b$ se afla formatu din unime, vomu vedea, co productulu va fi in fia-care din acelle patru casuri:
$$+ab,\ -ab,\ -ab,+ab.$$
adico co productulu are semnulu $+$ seu $-$, dupre cum factorii au amenduoi acellu-asi semnu (ori-care va fi acestu semnu) seu semne contrarii.

Ca sa esprimamu mai scurtu unu productu de mai multi factori, seu ca sa facemu mai cu inlesnire differite reductiuni potemu muta factorii lui, scriindu litterile asemenea una langa alta; acesta operatiune se basedia pre principiulu urmatoru, cunnoscutu din Aritmetica:

Valorea unui productu de mai multi factori nu se scamba candu mutamu intr'ensu ordinea factoriloru; astu-feliu, s. es. $a.b..k.l.m.n....qr = ab....kmln...qr$.

Pentru acesta este destulu sa demonstramu co $ab...klm = ab....kml$, seu, insemnandu pentru prescurtare productulu $ab....k$ cu A, co $Alm = Aml$. Pre ua drepta AB sa luamu ua lungime ecala cu valorea lui A; in sensulu AC sa luamu AC ecala cu valorea lui m, si vomu forma unu dreptanghiu CB cu suprafecia $= A \times m$; in sensulu AD perpendicularu pre dreptanghiulu CB fia lungimea $AD = l$ si vomu forma unu arpallelepipedu allu carui volumu va fi $= A \times m \times l$. Dera



acestu volumu lu potemu enca messora considerandu anteiu fecia $DB = A \times l$ si immultindu-o cu inaltimea AC seu $A \times l \times m$; de unde $Aml = Alm$.

Candu avemu sa immultimu mai multe catimi affectate de esponenti, de es. $a^m \times a^n \times a^p \times a^q$, scriemu ua data litter'a communa si i damu de esponentu summ'a esponentiloru; astufeliu $a^m . a^n . a^p . a^q = a^{m+n+q+p}$. In adeveru m, n, p, q aretandu numerulu factoriloru a cari intra in $a^m, a^n \ldots$, $m+n+p+q$ va areta numerulu totalu allu factoriloru cari trebue sa intre in productulu cautatu.

Ess. $1^0 \ldots 4ab^2x \times 3a^3bx^4 = 4ab^2x3a^3bx^4$

$$= 4 \times 3aa^3b^2bxx^4$$

$$= 12a^4b^3x^5.$$

$$2^0 \ldots 5ax^2y \times -7aby^3 \times -6b^5xy^4 = 5ax^2y7aby^36b^5xy^4$$

$$= 5 \times 7 \times 6aabb^5x^2xyy^3y^4 = 210a^2b^6x^3y^8.$$

Dupre acestea resulta co ca sa immultimu duoe monome, immultimu anteiu coefficientii numerici intre sine, apoi scriemu litterile commune ua data, dandu-le de esponentu summ'a esponentiloru, apoi scriemu litterile cari intra numai la unulu din monome si in fine damu resultatului semnulu $+$ seu $-$, dupre cum monomele date au avutu acellasi semnu seu semne contrarii.

Unu polinomu fiindu ua espressiune compusa de mai multe parti, urmedia co immultirea lui se va face prin immultirea in parte a fia-carei parti, si pentru acesta nu se cere altu rationamentu, alta demonstratiune de catu acellea cari se dau in Aritmetica la immultirea unui numeru compusu din mai multe ciffre (de es. $465 = 4$ sutimi $+ 6$ decimi $+ 5$ unimi), cu unu altu numeru de ua ciffra seu de mai multe. De aci resulta co :

a) Ca sa immultimu unu polinomu cu unu monomu trebue sa immultimu fia-care parte a polinomului cu monomu; astufeliu $(a+b-c)\times m = am+bm-cm$.

Ess. 1°. $(3ab-5a^3-8b^3)\times -9ab = -27a^2b^2+45a^4b^2+72ab^4$.

2°. $(-6a+2b-8c)\times 7a = -42a^2+14ab-56ac$.

b) Ca sa immultimu duoe polinome intre elle, immultimu fia-care termenu allu unuia din elle cu toti termenii cellui-altu.

Ess. 1°... $(a+b-c)(m+p-n) = am+bm-cm-an-bn$
$+cn+ap+bp-cp$.

2°. $(2a-3b-8c-d+9c)(7f+2g-h) = \ldots..$

3°. $(5ab+3ac-4bc)(7ab-18ac+2bc+d) = \ldots.$

4°. $(4a^2-16ax+3x^2)(5a^3-2a^2x) = 20a^5-88a^4x$
$+47a^3x^2-6a^2x^3$.

5°. $(a^2+a^4+a^6)(a^2-1) = a^8-a^2 = a^2(a^6-1)$.

6°. $(x^3-3x-7)(x-2) = x^4-2x^3-3x^2-x+14$.

7°. $(7a^3-5a^2b+6ab^2-2b^3)(3a^4-4a^3b+16a^2b^2)$
$= 21a^7-43a^6b+150a^5b^2-110a^4b^3+104a^3b^4$
$-32a^2b^5$.

8°. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

9°. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

10°. $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Celle din urma trei essemple au ua applicatiune forte dessu. 8° esprima patratulu summei seu differintiei a doue catimi, seu a unui binomu; 9° esprima cubulu summei seu differintiei a doue catimi seu a unui binomu; 10° areta, co productulu summei a doue catimi prin differinti'a loru este ecalu cu differinti'a patrateloru loru.

§ 4. IMPARTIRE.

Impartirea a duoe espressiuni algebrice se reduce asemenea la aceea a duoe monome. Deca ne gandimu co catulu a duoe monome trebue sa implinesca conditiunea, ca immultitu cu monomulu impartitoru sa dea pre cellu de impartitu, vomu cunnosce indata co, ca sa impartimu unu monomu printr'altu monomu, trebue sa impartimu coefficientulu numericu allu cellui d'anteiu prin acell'a allu monomului impartitoru, apoi sa scriemu tote litterile commune la amendoue monome, dandu-le de esponentu differinti'a esponentiloru, si sa mai adaogamu si litterile cari se afla numai in monomulu de impartitu; catului astu-feliu aflatu, i damu semnulu + seu –, dupre cumu celle duoe monome date au acellasi semnu seu semne contrarii.

De aci resulta co impartirea nu se pote face: 1^0 candu ua littera va avea la impartitoru unu esponentu mai mare de câtu la deimpartitu; 2^0 candu impartitorulu cuprinde littere cari nu se afla in deimpartitu. In aceste casuri aretamu numai impartirea sub forma de fractiune.

Essemplu. $15a^3b^2x^5y : 3ab^2x = 5a^2x^4y$. Litter'a b^2 care are acelluasi esponentu in amenduoe monome a fostu scosa.

Ca sa impartimu $a^m : a^n$, vomu scrie $a^m : a^n = a^{m-n}$. Candu $m > n$ differinti'a $m-n$ va fi positiva si esponentulu asemenea positivu. Candu $m = n$, vomu avea $a^m : a^n = a^0$; pre de alta parte $a^m : a^n = 1$; de aceea ne invoimu sa punemu $a^0 = 1$, si sa dicemu co ori-ce catime affectata de esponentulu *nulla* este ecala cu 1. — Candu $m < n$, $m-n$ este negativu si potemu scrie $m-n = -p$, attunci va fi $a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-p}$; pre de alta parte $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m . a^p} = \frac{1}{a^p}$. Ne invoimu si aci sa scriemu $\bar{a}^p = \dfrac{1}{a^p}$; astu-feliu ua catime affectata de unu esponentu negativu èste ecala cu 1 impartita cu aceeasi catime, avendu acellasi esponentu luatu positivu.

Essemple 1⁰. $14a^3bc^5x^3y : -3ab^2cxy^3 = -\dfrac{14}{3}a^2\bar{b}^1c^4x^2\bar{y}^2$

$$= -\frac{14a^2c^4x^2}{3by^2}.$$

$$2^0.\ -42a^7k^3lm^5t^2u^6 : -6a^4kl^6m^5tu^2$$

$$= +7a^3k^2\bar{l}^5tu^4 = \frac{7a^3k^2tu^4}{l^5}.$$

Ca sa impartimu unu polinomu printr'unu altu polinomu, asiediamu amenduoe polinomele dupre poterile descrescende (seu crescende) alle unei si acelliasi littere principale; sa ne inchipuimu co cunnoscemu catulu si co lu amu asiediatu asemenea dupre poterile descrescende (seu crescende) alle acelliasi littere. Este claru co productulu cellui d'anteiu termenu allu impartitorului cu cellu d'anteiu termenu allu catului va da unu termenu in care litter'a principala va avea cellu mai mare esponentu, si care prin urmare va fi cellu d'anteiu termenu allu deimpartitului. De aceea impartimu cellu d'anteiu termenu allu deimpartitului cu cellu d'anteiu termenu allu impartitorului si catulu acesta va fi cellu d'anteiu termenu allu catului cerutu; immultimu cu acestu anteiu termenu pre toti termenii ai impartitorului si ii scademu din deimpartitu. Restulu acestei scaderi va fi formatu din productele tutuloru termeniloru impartitorului cu toti termenii catului, afara de acellu aflatu, si cellu d'anteiu termenu allu acellui restu va fi productulu cellui d'anteiu termenu allu impartitorului cu allu duoilea termenu allu catului. — De aceea impartimu era pre cellu d'anteiu termenu allu acestui restu cu cellu d'anteiu termenu allu impartitorului si vomu afla unu allu duoilea termenu allu catului; immultimu cu acesta pre toti termenii impartitorului si scademu era. Pre cellu d'anteiu termenu allu acestui nouu restu lu impartimu era cu cellu d'anteiu termenu allu impartitorului, si aflamu unu allu treilea termenu allu catului. Urmamu astu-feliu pene candu sa ajungemu la unu restu nullu (impartire essacta, catu intregu), seu la unu restu allu carui cellu d'anteiu termenu sa cuprindia litter'a principala la ua potere inferiora de catu aceea a cellui d'anteiu termenu allu impartitorului. In acestu din urma casu impartirea nu se mai pote face si catulu este fractionaru, adico compusu de unu polinomu intregu si de unu restu care se pote pune, ca si in Aritmetica, sub forma de ua fractiune.

Candu asiediamu dupre poterile crescende alle unei littere si gasimu unu restu in care litter'a principala porta unu esponentu mai mare de catu differinti'a intre cei mai mari esponenti ai acestei littere in deimpartitu si impartitoru, attunci catulu nu pote fi intregu.

Essemple 1^0. (Asiediare dupre poterile descrescende alle lui x).

$$
\begin{array}{l|l}
12a^2x^7 - 35a^3x^6 + 34a^4x^5 - 27a^5x^4 + 9a^6x^3 + a^7x^2 + 6a^9 & 4x^4 - 5ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^4 \\
\cline{2-2}
\underline{-12a^2x^7 + 15a^3x^6 - 9a^4x^5 \ldots\ldots + 6a^6x^3} & 3a^2x^3 - 5a^3x^2 - 3a^5 \\
\qquad -20a^3x^6 + 25a^4x^5 - 27a^5x^4 + 15a^6x^3 & \\
\qquad \underline{+20a^3x^6 - 25a^4x^5 + 15a^5x^4 \ldots\ldots - 10a^7x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad -12a^5x^4 + 15a^6x^3 - 9a^7x^2 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+12a^5x^4 - 15a^6x^3 + 9a^7x^2 - 6a^9} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

2^0. $(x^7 - a^2x^5 - 2a^3x^4 + a^4x^3 + a^5x^2) : (x^3 - a^3) = x^4 - a^2x^2 - a^3x + a^4 + \dfrac{-a^6x + a^7}{x^3 - a^3}$.

3^0. $(1 + x + x^2 + x^3) : (1 - x) = 1 + 2x + 3x^3 + \dfrac{4x^3}{1 - x}$.

4^0. $(72x^4 - 78x^3y - 10x^2y^2 + 17xy^3 + 3x^4) : (6x^2 - 4xy - y^2) = 12x^2 - 5xy - 3y^2$.

5^0. $(5a^5b^3c^5 - 22a^4b^3c^6 + 5a^3b^3c^7 + 12a^2b^3c^8 - 7a^3b^2c^8 + 28a^2b^2c^9) : (a^2bc^2 - 4abc^3)$
$= 5a^3b^2c^3 - 2a^2b^2c^4 - 3ab^2c^5 - 7abc^6$.

6^0. $(4a^2 + 6ab - 4ax + 9bx - 15x^2) : (2a + 3b - 5x) = 2a + 3x$.

§ 5. CATE-VA TEOREME DE IMPARTIRE

Teorema 1ª. Restulu independinte de litter'a x a impartirei polinomului $A_0x + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots\dots + A_{m-1}x + A_m$ prin $x-a$ este unu polinomu de aceiasi forma:

$$A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + A_3a^{m-3} + \dots + A_{m-1}a + A_m$$

care resulta de la cellu d'anteiu scambandu pre x in a.

In adeveru, fia Q catulu impartirei si R restulu si vomu avea: $A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots\dots + A_m = Q(x-a) + R$; facendu aci $x = a$, termenulu anteiu a membrului allu duoilea se annulledia, era R care nu cuprinde pre x remane nescambatu si vine:

$$A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \dots\dots + A_m = R.$$

Teorema 2ª. Candu, puindu a in loculu lui x in polinomulu $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots\dots + A_m$, acesta se reduce la nulla, atunci acestu polinomu se imparte essactu (fara restu) prin binomulu $x-a$.

In adeveru, dupre teorem'a precedinte, restulu, de aru essista, aru fi: $A_0a^m + A_1a^{m-1} + \dots\dots + A_m$; dera, dupre suppositiune, acesta espressiune este nulla; asia dera si restulu este nullu si impartirea essacta.

Teorema 3ª. Catulu impartirei binomului $x^m - a^m$ prin binonulu $x-a$, este polinomulu:

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} + \dots\dots + a^{m-2}x + a^{m-1};$$

coci, immultindu acesta cu $x-a$, aflamu binomulu $x^m - a^m$, dupre cum se areta aci:

$$\begin{array}{l}
x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} + \dots\dots + a^{m-2}x + a^{m-1} \\
x - a \\
\hline
x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + a^3x^{m-3} + \dots\dots + a^{m-2}x^2 + a^{m-1}x \\
\quad - ax^{m-1} - a^2x^{m-2} - a^3x^{m-3} - \dots\dots - a^{m-2}x^2 - a^{m-1}x - a^m \\
\hline
x^m - a^m
\end{array}$$

§ 6. FRACTIUNI ALGEBRICE

Teori'a fractiuniloru algebrice este aceeasi ca si a fractiuniloru aritmetice si nu avemu aici de catu a aminti celle cunoscute din Aritmetica.

1. Ua fractiune algebrica cresce candu numeratorulu ei cresce seu candu numitorulu ei descresce. Ca sa immultimu dera ua fractiune cu unu intregu, i immultimu numeratorulu seu i impartimu numitorulu cu acellu intregu.

Essemple 1. $\frac{3abx^2}{7cdy^3} \times 6axy = \frac{18a^2bx^3y}{7cdy^3}$.

2. $\frac{5a^2bx^3}{18ab^5y^4} \times 6ab^4y = \frac{5a^2bx^3}{3by^3}$.

2. Ua fractiune algebrica descresce, candu numeratorulu ei descresce seu candu numitorulu ei cresce. Ca sa impartimu dera ua fractiune cu unu intregu, i impartimu numeratorulu seu i immultimu numitorulu cu acellu intregu.

Essemple 1. $\frac{18ab^5y^4}{5a^2bx^3} : 6ab^4y = \frac{3by^3}{5a^2bx^3}$.

2. $\frac{7cdy^3}{3abx^2} : 6axy = \frac{7cdy^3}{18a^2bx^3y}$.

3. De aici resulta co ua fractiune nu si scamba valorea candu i immultimu seu candu i impartimu ambii termeni cu aceea-si catime. Impartindu dera amenduoi termenii unei fractiuni cu cellu mai mare comunu impartitoru allu loru, o reducemu la espressiunea cea mai simpla.

Essemple. Sa se reduca la cea mai simpla espressiune fractiunile :

1. $\frac{ax+x^2}{3bx+cx^2} = \frac{a+x}{3b+cx}$;

2. $\dfrac{21a^3b^2c-9ab^3c^2}{15a^2b^2c+3a^5b^4c^2-12ab^2c}=\dfrac{7a^2-3bc}{5a+a^4b^2c-4};$

3. $\dfrac{14x^2-7ax}{10bx-5ab}=\dfrac{7x}{5b};$

4. $\dfrac{6ax+9bx-5x^2}{12adf+18bdf-10dfx}=\dfrac{x}{2df};$

5. $\dfrac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}=\dfrac{5a}{a-x};$

6. $\dfrac{a^3+(a+1)ya+y^2}{a^4-y^2}=\dfrac{a+y}{a^2-y};$

7. $\dfrac{n^3-2n^2}{n^2-4n+4}=\dfrac{n^2}{n-2};$

8. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\dfrac{x-1}{x+2};$

9. $\dfrac{9x^3+53x^2-18}{x^2+11x+30}=\dfrac{9x^2-x-3}{x+5};$

10. $\dfrac{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2zy}{x^2-y^2-z^2-2yz}=\dfrac{x+y+z}{x-y-z};$

11. $\dfrac{x^2-2xy+xz+2y^2-2yz}{x^2-y^2+2yz^2-z^2}=\dfrac{x-2y}{x+y-z};$

4. Immultirea, impartirea, adunarea, scaderea, reductiunea fractiuniloru la acellasi numitoru se facu ca si la fractiunile numerice.

Ess. 1. $\dfrac{5ab^2x}{7cdf}\times\dfrac{3acx^3y}{2b^3df}=\dfrac{15a^2x^4y}{14bd^2f^2};$

2. $\dfrac{3a^5klnx^7y}{mz}:\dfrac{6a^3x^5}{bklz}=\dfrac{a^2bk^2l^2nx^2y}{2m};$

3. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{bc-ac+ab}{abc};$

4. $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}=a;$

5. $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a-b}{2}=b;$

6. $\dfrac{13x-5a}{4}-\dfrac{7x-2a}{6}-\dfrac{3x}{5}=\dfrac{89x-55a}{60};$

7. $\dfrac{3a-4b}{7}-\dfrac{2a-b-c}{3}=\dfrac{-5a-5b+7c}{21};$

8. $\dfrac{a}{a+z}+\dfrac{z}{a-z}=\dfrac{a^2+z^2}{a^2-z^2};$

9. $\dfrac{az}{a^2-z^2}-\dfrac{a-z}{a+z}=\dfrac{3az-a^2-z^2}{a^2-z^2};$

10. $\left(\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{b-x}{b+x}\right)\times\left(\dfrac{a-x}{a+x}+\dfrac{b+x}{b-x}\right)=$

$$=\frac{4(ab+x^2)^2}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)};$$

11. $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}}{\dfrac{e}{f}+\dfrac{g}{h}}=\dfrac{\dfrac{ad+bc}{bd}}{\dfrac{eh+fg}{fh}}=\dfrac{(ad+bc)fh}{(eh+fg)bd};$

12. $\dfrac{3a^2-\dfrac{7ab}{2}-\dfrac{21ac}{4}-\dfrac{5b^2}{2}+\dfrac{83bc}{8}-\dfrac{3c^2}{2}}{3a-5b+\dfrac{3c}{4}}$

$$=a+\frac{b}{2}-2c.$$

13. Care din duoe fractiuni $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{a+m}{b+m}$ este mai mare?

14. Sa se afle valorea fractiunei $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ candu $a=b$;

atunci $\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{0}{0}$. Dera observandu co $a-b$ este factoru comunu la ambii termeni și simplificandu fractiunea vine:

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=a+b$$

pentru $a=b$ se face: $\frac{a^2-b^2}{a-b}=2a$.

Simbolulu $\frac{0}{0}$ este semnulu nedeterminarei; acesta pote esprima ori-ce catime.

15. Sa se afle valorea fractiunei $\frac{a}{b-x}$ candu $b=x$ atunci $\frac{a}{b-x}=\frac{a}{0}$. Sa observamu co cu catu x se apropie de a deveni ecalu cu b, cu atata numitorulu fractiunei $b-x$ devine mai micu, era fractiunea insasi $\frac{a}{b-x}$ devine mai mare de catu ori-ce catime data.

Candu dera numitorulu $b-x$ devine nullu, fractiunea devine infinitu de mare ceea ce se insemnedia cu ∞; asia dera $\frac{a}{0}=\infty$.

CAPITOLU II.

ECALITATI DE GRADULU ANTEIU.

§ 1. INTRODUCERE.

Candu ne propunemu sa deslegamu ua problema trebue sa cunoscemu ore-cari relatiuni intre catimile problemei; aceste relatiuni, candu problem'a data este de natura determinata, voru conduce in genere la potriviri seu *ecalitati* intre espressiunile compuse din catimile problemei. Astu-feliu printr'ua *ecalitate* seu *ecatiune* (*) intiellegemu obicinuitu ua potrivire intre catimi parte cunoscute, parte necunoscute, cu tote co acesta nu este de rigore si in genere *potrivire*, *ecalitate* si *ecatiune* suntu sinonime, precum si dicerea o areta. Ua ecalitate seu potrivire este formata din duoi membri despartiti prin semnulu potrivirei $=$.

Ua ecalitate cuprindiendu ua conditiune, ua relatiune intre mai multe catimi, pote servi pentru determinarea uneia din elle : ua ecalitate determina ua necunoscuta.

Obicinuitu insemnamu catimile cunoscute alle unei probleme prin celle d'anteiu littere alle alfabetului; era pre celle necunoscute prin litterile finale.

(*) Distinctiunea intre ecalitate si ecatiune porta in sine ceva pedantu; amenduoe areta ua potrivire care essista independentu de consideratiuni particolare alle nostre, dupre cari unele din catimi ne aru fi necunoscute seu cunoscute.

Ca sa fia ua problema determinata trebue sa cuprindia unu numeru de relatiuni, cari sa conduca la unu numeru de ecalitati, ecalu cu acell'a allu necunoscuteloru ce suntu a se determina.

Candu numerulu ecalitatiloru este mai mare de catu acella allu necunoscuteloru, atunci unele din aceste ecalitati suntu de prisosu; se pote enca intempla ca une din elle sa contradica pre celle-alte, ca ecalitatile sa fia *incompatibile* intre elle.

Candu ua problema cuprinde mai pucine relatiuni seu ecalitati de catu necunoscute, atunci problem'a este nedeterminata.

Ecatiunile cari resulta dupre conditiunile unei probleme, cari esprima relatiunile intre catimile problemei, potu cuprinde pre necunoscute la poterea anteia seu la unu gradu ore-care mai mare. Ecatiunile se numescu atunci de gradulu I-iu, allu II-lea, allu III-lea dupre gradulu poterei necunoscuteloru; se intiellege co la pretiuirea gradului unei ecalitati, necunoscut'a nu trebue sa se afle la numitoru, seu sa fia affectata de semne radicale.

§ 2. DESLEGAREA UNEI ECALITATI DE GRADULU I-iu CU UA NECUNOSCUTA.

Ca sa deslegamu ua ecalitate, adico ca sa aflamu valorea necunoscutei cuprinsa in acesta ecatiune, cautamu sa o transformamu astu-feliu in catu sa isolamu necunoscut'a intr'unu membru, lasandu in cellu-altu membru numai catimi cunoscute: Pentru acesta:

1. Eliminamu mai anteiu numitorii, deca ecatiunea va avea, dupre acelleasi reguli, ca la reductiunea fractiuniloru la acelluasi numitoru.

2. Trecemu toti termenii cari cuprindu pre necunoscut'a intr'unu membru, si pre toti termenii cunoscuti in cellu-altu membru, observandu regul'a, ca la transpositiunea unui termenu dintr'unu membru intr'altulu sa i scambamu si semnulu.

3. Facemu in amenduoi membrii reductiunea termeniloru asemenea si impartimu membrulu cunoscutu cu coefficientulu necunoscutei (*).

Essemple 1. $x-\frac{1}{100}-\frac{7x}{15}=\frac{7x}{20}-\frac{1}{540}+\frac{8x}{45}$.

Eliminamu numitorii, observandu co 5400 se imparte essactu prin toti cei-alti numitori :

$$5400x-54-2520x=1890x-10+960x.$$

Trecendu pre toti termenii cu x intr'unu membru si pre toti termenii cunoscuti in cellu-altu cu semnele scambate :

$$5400x-2520x-1890x-960x=54-10.$$

Facendu reductiunile :

$$30x=44.$$

(*) Tota teori'a unei ecalitati de gradulu anteiu cu ua necunoscuta se reduce la ceea ce s'a disu aici. Uni autori francesi mai considera enca si proprietatile unei ecatiuni, adico co se potu immulti seu imparti amenduoi membri cu aceeasi catime, seu co se potu adaoga seu scadea de la amenduoi membri aceeasi catime, fara a strica ecalitatea. Acestea suntu ensa nisce principii elementare de aritmetica. — Asemenea se gasesce prin une carti si prin imitatiune s'a introdusu si la noi pre aici si acolo obiceiulu de a face si ua *discussiune* a unei ecalitati de gradulu anteiu cu ua necunoscuta, ceea ce nu are ensa nici ua importantia. Dupre regulile de mai susu deslegandu-o vomu ajunge la ua ecalitate de form'a $Ax=B$, de unde $x=\frac{A}{B}$. Tota discussiunea se reduce attunci intru a dice co 1-iu se pote intampla co $A=0$, de unde $x=\frac{B}{0}=\infty$ si ecalitatea data este imposibila; si allu 2-lea co $A=0, B=0$ si atunci $x=\frac{0}{0}$, adico valorea lui x este nedermінata. Se intiellege co asemenea studii nu suntu nici de cum seriose.

Impartindu cu coefficientulu 30 allu lui x:

$$x=\frac{44}{30}=\frac{22}{15}.$$

Asia dera valorea lui x este $\frac{22}{15}$. Punendu acesta valore in loculu lui x in ecatiunea data, ne potemu incredintia co o satisface scambandu-o intr'ua identitate; astu-feliu gasimu:

$$\frac{22}{15}-\frac{1}{100}+\frac{7}{15}\times\frac{22}{15}=\frac{7}{20}\times\frac{22}{15}-\frac{1}{540}+\frac{8}{45}\times\frac{22}{15}$$

care este ua identitate. Acesta substitutiune a valorei aflate a necunoscutei in ecalitatea data se numesce si verificatiune.

$$2. \quad \frac{d}{cf}+\frac{ax}{bc}=g-\frac{dx}{bf}.$$

Eliminandu numitorii gasimu:

$$bd+afx=bcfg-cdx.$$

Trecendu termenii cunoscuti intr'unu membru si pre cei necunoscuti in cellu-altu:

$$afx+cdx=bfcg-bd.$$

Facendu reductiunile termeniloru asemenea:

$$(af+cd)\,x=b\,(fcg-d).$$

Impartindu cu coefficientulu lui x:

$$x=\frac{b\,(cfg-d)}{af+cd}$$

Alte essemple:

1. $8x-5=13-7x;\ x=\boxed{\frac{6}{5}}.$

2. $\overset{4x}{\cancel{2x}}+7+\frac{2}{3}x=6x+23;\ x=12.$

3. $\frac{3x}{5}-\frac{7x}{10}+\frac{3x}{4}-\frac{7x}{8}+15=0;\ x=66+\frac{2}{3}.$

4. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=7x-712+\frac{x}{5}$; $x=\overset{116}{\cancel{166}}+\frac{148}{367}$.

5. $ax+b=cx+d$; $x=\frac{d-b}{a-c}$.

6. $\frac{5ab}{6}+\frac{4ac}{5}-\frac{2cx}{3}=\frac{3ac}{4}-2ab-bcx$;

$$x=\frac{(170b-3c)a}{320c}.$$

7. $b=a+\frac{m(a-x)}{3a+x}$; $x=\frac{a(m-3b+3a)}{b-a+m}$.

8. $\frac{a(d^2+x^2)}{dx}=\frac{ax}{d}+ac$; $x=\frac{d}{c}$.

9. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$;

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

§ 3 PROBLEME.

1. Unu parinte murindu ordona prin testamentulu lui ca, cellu d'anteiu fiu allu lui sa ia ua summa a si a n parte din ceea ce remane din starea lui; allu duoilea fiu sa ia summ'a $2a$ si a n parte din restu; allu treilea fiu sa ia $3a$ si a n parte din restu, si asia mai inainte. Dupre impartirea acesta s'a gasitu co toti copii au avutu parti ecale, fara sa mai remana nici unu restu. Se cere acum starea totala, numerulu copiiloru si partea fia-caruia.

Sa insemnamu cu x starea, cu z numerulu copiiloru si cu y partea fia-caruia. Dupre celle aretate in problema va lua :

Cellu d'anteiu fiu . . . . $a+\frac{x-a}{n}=y$.

Cellu d'allu duoilea . . . . . . $2a + \frac{x-y-2a}{n} = y.$

Cellu d'allu treilea . . . . . . $3a + \frac{x-y-y-3a}{n} = y.$

Cellu d'allu z^{-lea} . . . . . . $za + \frac{x-(z-1)y-za}{n} = y.$

Fiindu co in modulu acesta tota starea s'a impartitu fara restu, urmedia co partea cellui din urma fiu este za, si fiindu co numerulu fiiloru este z, resulta co de z ori za seu $z^2a = x$.

Dera fiindu co tote partile suntu ecale, va fi si:

$$a + \frac{x-a}{n} = za$$

seu puindu z^2a in loculu lui x:

$$a + \frac{z^2a - a}{n} = za.$$

Eliminandu numitorulu n:

$$na + az^2 - a = naz$$

trecendu termenulu na in membrulu din drepta:

$$az^2 - a = naz - na,$$

seu $\quad a(z^2-1) = na(z-1),$

seu $\quad a(z+1)(z-1) = an(z-1)$

impartindu cu factorulu comunu $a(z-1)$, vine:

$$z+1 = n,$$

de unde $\quad z = n-1$

asia dera numerulu copiiloru z este ecalu cu $n-i$. Partea fia-carui fiindu za, vomu avea:

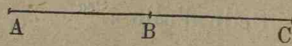
$$y = za = a(n-1)$$

si starea fiindu ecala cu productulu parti fia-carui prin numerulu copiiloru, vomu avea:

$$x = yz = a(n-1)^2.$$

Asia dera starea este $a(n-1)^2$, partea fia-carui fiu $a(n-1)$ si numerulu loru $n-1$.

2. Duoi currieri pleca de ua data unulu de la A cu iutiel'a v, cellu altu de la B cu iutiel'a v', mergendu in aceiasi directiune spre C. Departarea puntului A de la B este cunoscuta si ecala cu d.



Se cere distanti'a x a puntului C de la A s. e., unde amenduoi currierii se voru intalni.

Distanti'a x impartita cu iutiel'a v, seu $\frac{x}{v}$ esprima timpulu ce va trece pene candu currierulu A sa ajunga la puntulu C; distanti'a $x-d$ impartita cu iutiel'a v' seu $\frac{x-d}{v'}$ esprima asemenea timpulu ce va trece pene candu currierulu B sa ajunga la C; si fiindu co currierii ajungu de ua data la C, timpurile acestea voru fi ecale si vomu avea :

$$\frac{x}{v}=\frac{x-d}{v'}, \text{ seu } v'x=vx-vd$$

seu

$$(v-v')\,x=vd$$

de unde

$$x=\frac{vd}{v-v'}.$$

Valorea acesta a lui x devine impossibila, candu $v=v'$, seu $v<v'$.

In casulu anteiu, adico candu $v=v'$, va fi $x=\frac{vd}{0}=\infty$; currierii avendu iutieli ecale, voru fi totu de una departati cu aceiasi distantia d si nu se voru intalni nici ua data, seu la infinitu.

Candu $v<v'$, x devine negativu, si este claru co currierulu A mergendu mai incetu de catu B nu lu va ajunge nici ua data.

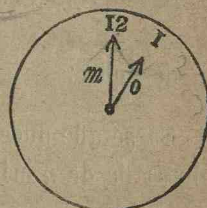
Candu currierii A si B mergu in sensu contrariu spre unu puntu C intre A si B, atunci ecatiunea de mai susu se scamba in :

$$\frac{x}{v}=\frac{d-x}{v'}, \quad \text{seu :} \quad v'x=vd-vx$$

de unde :

$$x=\frac{vd}{v+v'}.$$

Problem'a currieriloru se pote esprima si sub differite alte forme. Astu-feliu cestiunea de a sci de cate ori minutarulu se intalnesce cu orarulu in timpu de 12 ore, este identica cu a currieriloru. Minutarulu m este currierulu A si iutiel'a lui este 12; orarulu o este currierulu B si iutiel'a lui este 1, pentru co minutarulu percurge de 12 ori cadranulu pene candu orarulu lu percurge ua data; era distanti'a primitiva AB seu d o potemu pune $=1$, insemnandu cu 12 circumferinti'a cadranului. Atunci formul'a de mai susu : $x=\frac{vd}{v-v'}$ se transforma punendu $v=12$, $v'=1$, $d=1$ in :



$$x=\frac{12}{11}=1+\frac{1}{11}=1^0\,5'+\frac{5}{11}$$

prin urmare minutarulu se intalnesce cu orarulu de 11 ori in 12 ore.

3. Duoe fontane amplu unu reservoriu una in a ore, cea alta in b ore; ua gaura in reservoriu lu golesce in c ore. Deschidiendu de ua data catesi trelle gauri, in cate ore se va amplea reservoriulu?

Fia x numerulu cerutu de ore, si sa esprimamu cu 1 capacitatea reservoriului. Proportiunile :

$$a : x = 1 : \frac{x}{a}$$

$$b : x = 1 : \frac{x}{b}$$

$$c : x = 1 : \frac{x}{c}$$

voru da partile reservoriului amplute, respective desiertate, prin fia-care din aceste gauri in timpulu x; astu-feliu in catu:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = 1$$

de unde: $$x = \frac{abc}{ac + bc - ab}.$$

4. Sa se afle duoe numere a caroru summ'a sa fia a; era unulu sa fia de n ori mai mare de catu cellu-altu.

Respunsu: $$\frac{a}{n+1} \text{ si } \frac{na}{n+1}.$$

5. Sa se impartia numerulu a in duoe parti cari sa fia intre elle : : $m : n$.

Resp. $$\frac{ma}{m+n} \text{ si } \frac{na}{m+n}.$$

6. Sa se impartia numerulu a in trei parti astu-feliu in catu partea anteia sa se aiba catre a duoa : : $m : n$; era a duoa catre a treia : : $p : q$.

Resp. Partile suntu: $$\frac{mpa}{mp+np+nq}, \quad \frac{npa}{mp+np+nq},$$
$$\frac{nqa}{mp+np+nq}.$$

7. Unu murindu a lasatu nevestei selle diumetatea din starea sea; fia-carui din duoi copii ai sei a 6-a parte, servito-

rului a 12-a parte, si restulu de 600 lei la saraci. Care a fostu staree acestui omu?

Resp. 7200 lei.

8. Sa se afle trei numere a caroru summ'a sa fia 70; allu duoilea impartitu cu cellu d'anteiu da catulu *2* si restulu *1*; allu treilea impartitu cu allu duoilea da catulu si restulu pre acellasi numeru 3.

Resp. 7, 15, 48.

9. Unulu a plecatu de la unu locu sa merga la altulu si a observatu co, in acesta calletoria, rot'a d'inante a trasurei selle a facutu 2000 de invertituri mai multu de catu cea de inderetu. Se scie co circumferinti'a rotei d'inante este de $5 + 1/4$ piciore, era aceea a rotei d'inderetu de $7\ 1/8$. Se cere distanti'a x intre aceste duoe locuri.

Respunsu: $x = 39900$ piciore.

10. Unu tata de 40 anni are unu copilu de 9 anni. Preste cati anni etatea tatalui va fi induoita de a fiului?

Resp. Preste 22 de anni.

11. Ore cine are ua amestecatura de 7 parti nitru cu 3 parti sulfu, impreuna 80 kilogramme. Sa se adaoge la acesta massa enca nitru astu-feliu ca rapportulu nitrului catre sulfu sa fia acum precum 11 catre 4.

Resp. Sa se mai adaoge 10 kilogramme de nitru.

12. Trei fontani amplu unu reservoriu fia-care in $1\ 1/3$, $3\ 1/3$, 5 ore. In catu timpu lu voru amplea curgendu tote impreuna?

Resp. In 48 minute.

§ 4. ECALITATI DE GRADULU I-iu CU DUOE NECUNOSCUTE.

Form'a generala a acestoru ecalitati este :

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

Ca sa le deslegamu trebue sa eliminamu successivu cate una din necunoscutele x si y. Eliminarea se pote face in differite moduri cari ensa se reducu la duoe metode principale : metod'a *substitutiunei* si aceea *a reductiunei la acellasi coefficientu.*

I. *Metoda substitutiunei.* Consideramu in ecatiunea anteia pre x ca cunoscutu si o deslegamu despre y, ceea ce ne da :

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Valorea acesta a lui y o punemu in ecatiunea a duoa

$$a'x + b' . \frac{c - ax}{b} = c'$$

si astu-feliu obtinemu ua ecatiune cu ua necunoscuta pre care o deslegamu dupre regulile de mai susu. Vomu gasi astu-feliu :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Puindu acesta valore in loculu lui x in espressiunea aflata mai susu pentru y, vine :

$$y = \frac{c - ax}{b} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Essemplu.

$$7x - 3y = 15.$$
$$9x + 15y = 58.$$

Ecalitatea anteia da : $7x = 3y + 15$, de unde $y = \frac{7x - 15}{3}$; si punendu acesta valore a lui y in ecatiunea a duoa vine :

$$9x + 15\,\frac{7x - 15}{3} = 58.$$

Eliminandu numitorii si facendu immultirea aretata cu 15:

$$27x + 105x - 225 = 174$$

de unde:
$$x = \frac{399}{132} = \frac{133}{44} = 3 + {}^1/_{44}.$$

era pentru y gasimu:

$$y = \frac{7x - 15}{3} = \frac{7 \times \frac{133}{44} - 15}{3} = \frac{271}{132} = 2 + \frac{7}{132}.$$

II. *Metoda prin reductiune.* Sa ne propunemu sa eliminamu pre y din ecalitatile:

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c';$$

Atunci immultimu pre toti termenii ecalitatiei anteia cu coefficientulu necunoscutei in ecatiunea a duoa, si pre toti termenii ai acestei din urma cu coefficientulu acelleia'si necunoscute din ecatiunea anteia; apoi adunamu seu scademu aceste ecatiuni dupre cum necunoscut'a pre care voimu sa o eliminamu are semne contrarii seu acella'si semnu in amenduoe ecalitatile.

Essemplu.
$$7x - 3y = 15$$
$$9x + 15y = 58.$$

Immultimu ecatiunea anteia cu *15*, era pre a duoa cu *3* si le adunamu, fiindu co necunoscut'a y are semne contrarii in aceste duoe ecalitati:

$$105x + 27x = 225 + 174$$

de unde:
$$x = \frac{399}{132} = \frac{133}{44} = 3 + {}^1/_{44}.$$

Apoi ca sa eliminamu pre x, immultimu antei'a ecalitate cu 9, pre a duoa cu 7 si le scademu :

$$105y+27y=406-135.$$

de unde :
$$y=\frac{271}{132}=2+{}^{7}/_{132}.$$

Valorile generale cari deriva din solutiunea ecalitatiloru de mai susu, adico :

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\ y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

au acellasi numitoru; era numeratorulu fia-carei din elle resulta din numitoru, scambandu coefficientii necunoscutei in termenii cu totulu cunoscuti din ecalitatile respective, s. e. a si a' in c si c'; era b si b' in c si c'.

Candu numitorulu comunu $ab'-ba'=0$ seu $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, fara ca si numeratorii sa fia $=0$, atunci $x=\infty$, $y=\infty$ si ecalitatile $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$ suntu imposibile, pentru co membrii din stanga ai acestoru ecalitati suntu proportionali intre ei si se au : : $a:a'::b:b'$; era membrii din drepta c si c' nu stau in acellasi rapportu.

Candu numitorulu $ab'-ba'=0$ si totu de ua data si unulu din numeratori, s. e. $cb'-bc'=0$, atunci resulta co si $ac'-ca'=0$; x si y se presinta sub form'a $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$ si scimu ca acesta este simbolulu nedeterminarei. Intr'adeveru, atunci nu avemu in realitate de catu numai ua ecalitate intre celle duoe necunoscute x si y; era a duoa ecalitate resulta din anteia prin immultirea cu unu numeru constantu. Dupre suppositiune este $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ si $\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$ seu $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$; asia dera toti coefficientii ecalitatiei $a'x+b'y=c'$ suntu proportionali cu coefficientii ecatiunei $ax+by=c$ (*).

§ 5. ECALITATI DE GRADULU I-iu CU MAI MULTE NECUNOSCUTE.

Ca sa deslegamu m ecalitati cu m necunoscute :

$$\begin{array}{l}
a_1x+b_1y+c_1z+\ldots\ldots=k_1\\
a_2x+b_2y+c_2z+\ldots\ldots=k_2\\
a_3x+b_3y+c_3z+\ldots\ldots=k_3\\
\vdots\\
a_mx+b_my+c_mz+\ldots\ldots=k_m
\end{array}$$

trebue era sa eliminamu necunoscutele cate una, pene candu

(*) Aceste pucine observatiuni in privinti'a valoriloru generale alle lui x si y precum si regulile date mai susu pentru solutiunea a duoe ecalitati de gradulu anteiu cu duoe necunoscute constitue tota teori'a acestoru ecalitati. Cei mai multi autori francesi, in cari acesta teoria se reproduce intr'unu modu aprope stereotypu, mai adaoga enca si unu studiu sub titlu «discussiunea valoriloru generale $x=\dfrac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, $y=\dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$,» unde se cuprindu acelle pucine observatiuni de mai susu. Acesta metoda s'a introdusu prin imitatiune si in invetiamentulu nostru cu ua admirabila fidelitate. Ecca in scurtu ua skitza acestei discussiuni :

1-iu Se studiedia casulu candu unulu din numeratori $cb'-bc'$ seu $ac'-ca'$ este nullu si intiellege ori cine co acesta nu are trebuintia de nici ua discussiune ;

2-ea Candu numitorulu comunu $ab'-ba'=0$;

3-ea Candu pre langa acesta si unulu din numeratori este nullu ;

4-ea Se dau reguli, ce le numescu mnemonetice (?!), pentru formarea valoriloru generali si alte asemenea.

Cu ajutorulu unui rationamentu sanetosu se pote vedea co acestu studiu care s'a intamplatu sa occupe pre unu professoru în timpu de una si chiaru de duoe lectiuni nu adaoga nemica la cunoscintiele cuprinse in pucinele observatiuni din textu, ci numai impovaredia studiulu sciintiei, pre candu acesta discussiune nu presinta nici chiaru vre ua importantia practica de ua insemnetate mai mare.

sa ajungemu la ua ecalitate cu ua singura necunoscuta, pre care o deslegamu dupre cum s'a aretatu mai susu. Eliminarea acesta se face era :

I. *Prin substitutiune :* adico luandu valorea lui x spre essemplu din ecalitatea anteia si substituindu-o in tote celle alte; astu-feliu vomu avea $m-1$ ecalitati cu $m-1$ necunoscute. Urmandu astu-feliu vomu elimina pre y, pre z, si celle-alte.

II. *Prin reductiuni successive la acellasi coefficientu*, applicata successivu la aceste ecalitati luate cate duoe.

III. *Prin factori arbitrarii* seu prin metod'a numita a lui Bézout, modificata de Gergonne, care ensa in principiu a fostu aretata mai inainte enca de *Euler*; immultimu pre celle m ecalitati date cu m factori arbitrarii si apoi le adunamu pre tote; astu-feliu formamu ua ecalitate in care pre langa celle m necunoscute date mai figuredia enca alte m numere necunoscute $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_m$:

$$(a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_mp_m)x+(b_1p_1+b_2p_2+\ldots\ldots+b_mp_m)y$$
$$+\ldots\ldots\ldots=k_1p_1+k_2p_2+\ldots+k_mp_m.$$

Fiindu co $p_1, p_2, \ldots\ldots p_m$ suntu numere arbitrarii potemu dispune de elle facendu ca coefficientii tutuloru necunoscuteloru, afara de acella allu lui x de essemplu, sa fia$=0$, adico:

$$b_1p_1+b_2p_2+\ldots\ldots+b_mp_m=0$$
$$c_1p_1+c_2p_2+\ldots\ldots+c_mp_m=0$$
$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Luandu dupre voia pre unulu din aceste numere $p_1, p_2 \ldots\ldots p_m$, determinamu pre celle-alte $m-1$ numere prin aceste $m-1$ ecalitati; atunci punemu valorile loru in valorea urmatore a lui x :

$$x=\frac{k_1p_1+k_2p_2+\ldots+k_mp_m}{a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_mp_m}.$$

Dupre metoda acesta se vede co deslegarea celloru m ecalitati date s'a redusu la deslegarea de alte $m-1$ ecalitati; asemenea potemu reduce successive la $m-2$, $m-3$ si asia mai inante.

Ess. 1. $\left\{\begin{array}{r} 3x+2y=118 \\ x+5y=191 \end{array}\right\} x=16,\ y=35.$

2. $\left\{\begin{array}{l} 7y=2x-3y \\ 19x-60y=621+{}^1\!/_4 \end{array}\right\} x=88\,{}^3\!/_4,\ y=17\,{}^3\!/_4.$

3. $\left\{\begin{array}{c} (x+5)(y+7)=(x+1)(y-9)+112 \\ 2x+10=3y+1 \end{array}\right.$

$$x=3,\ y=5.$$

4. $\left\{\begin{array}{l} bcx+2b-cy=0 \\ b^2x+\dfrac{a(c^3-b^3)}{bc}=\dfrac{2b^3}{c}+c^3x \end{array}\right\} x=\dfrac{a}{bc},\ y=\dfrac{a+2b}{c}.$

5. $\left\{\begin{array}{l} 3x+5y=\dfrac{(8b-2f)bf}{b^2-f^2} \\ b^2x-\dfrac{bcf^2}{b-f}+(b+c+f)fy=f^2x+(b+2f)bf \end{array}\right.$

$$x=\frac{bf}{b-f},\ =\frac{bf}{b+f}.$$

6. $\left\{\begin{array}{l} x+y=10 \\ x+z=19 \\ y+z=23 \end{array}\right\} x=3,\ y=7,\ z=16.$

7. $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=29\,{}^1\!/_4 \\ x+y+z=18\,{}^1\!/_4 \\ x+y+z=13\,{}^3\!/_4 \end{array}\right\} x=16,\ y=7\,{}^3\!/_4,\ z=5\,{}^1\!/_2.$

$$8.\quad \left\{\begin{array}{l} 2x+{}^3/_4\,y=93-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4} \\ 7x-5z=y+x-86 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=58 \end{array}\right\} x=48,\ y=54,\ z=64.$$

$$9.\quad \left\{\begin{array}{l} 18x-7y-5z=11 \\ \dfrac{22}{5}y+\dfrac{2}{3}y+z=108 \\ {}^7/_2\,y+2y+{}^3/_4\,z=80 \end{array}\right\} x=12,\ y=25,\ z=64.$$

$$10.\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b,\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c$$

$$x=\frac{2}{a+b-c},\ y=\frac{2}{a+c-b},\ z=\frac{2}{b+c-a}.$$

$$11.\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{2z}{7}=58,\ \dfrac{5x}{4}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{3}=76 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3z}{8}+\dfrac{u}{5}=79,\ y+z+u=248 \end{array}\right.$$

$$x=12,\ y=30,\ z=168,\ u=50.$$

§ 6. PROBLEME.

1. Regele Siracusei a datu 6 kilogramme de auru ca sa i feca ua corona si a cerutu de la Archimede sa i spuna deca aceea corona nu cum va cuprindea si argintu. Archimede, care a descoperitu principiulu ce porta in Fisica numele lui, a determinatu densitatea aurului $= 19{,}3$; aceea a argintului $= 10{,}5$ si aceea a coronei $= 16$; de unde se vede co coron'a erea ua combinatiune. Dupre aceste date cum a potutu Archimede sa cunosca cantitatea de auru x si pre aceea de argintu y cuprinse in corona?

Greutatea de auru x impartita cu densitatea lui $19{,}3$ seu

$\frac{x}{19,3}$ areta volumulu occupatu de auru; aceea de argintu y impartita cu densitatea lui $10,5$ seu $\frac{y}{10,5}$ areta volumulu de argintu; in fine greutatea coronei 16, impartita cu densitatea ei 16, seu $\frac{6}{16}$, areta volumulu coronei; de unde resulta:

$$\frac{x}{19,3}+\frac{y}{10,5}=\frac{6}{16};$$

dera mai este si $x+y=16$.

Deslegandu aceste duoe ecatiuni cu duoe necunoscute aflamu:

$$x=4,52, \ y=1,48.$$

2. A este datoru 1200 lei; B este datoru 2550 si nici unulu nici altulu n'au destulu ca sa plateasca datori'a loru. A dice lui B: «da mi a 8-a parte din ceea ce ai si me voiu plati de datoria.» B dice lui A: «dami tu mai bine a 6-a parte din ceea ce ai si me voiu plati de datoria.» Ce capitalu a avutu fia care?

x insemnandu capitalulu lui A, y pre acell'a allu lui B, va fi:

$$x+\frac{y}{8}=1200 \text{ si } y+\frac{x}{6}=2550.$$

de unde aflamu: $x=900, \ y=2400.$

3. Unulu are trei betie de nisce combinatiuni differite de auru, argintu si cupru. Cellu d'anteiu betiu are 10 gramme auru, $30^{gr.}$ argintu si $60^{gr.}$ cupru; allu duoilea $40^{gr.}$ auru, $56^{gr.}$ argintu si $96^{gr.}$ cupru; allu treilea betiu are $24^{gr.}$ auru, $78^{gr.}$ argintu si $48^{gr.}$ cupru. Se cere catu sa ia din fia-care din aceste betie, ca sa feca unu allu patrulea betiu compusu din $20^{gr.}$ auru, $46^{gr.}$ argintu si $52^{gr.}$ cupru.

Insemnandu cu x, y, z ceea ce se va lua din fia-care din betiele date, vomu gasi cantitatile de auru, de argintu si de cupru cuprinse in x, puindu proportiunile:

$$10 + 30 + 60 \text{ seu}$$

$$100 : 10 :: x : \frac{10x}{100},\ 100 : 30 = x : \frac{30x}{100},\ 100 : 60 :: x : \frac{60x}{100}.$$

era cantitatile de auru, argintu si cupru cuprinse in y si z voru fi:

$$40 + 56 + 96 \text{ seu}$$

$$192 : 40 :: y : \frac{40y}{192},\ 192 : 56 :: y : \frac{56y}{192},\ 192 : 96 :: y : \frac{96y}{192}.$$

$$24 + 78 + 48 \text{ seu}$$

$$150 : 24 :: z : \frac{24z}{150},\ 150 : 78 = z : \frac{78z}{150},\ 150 : 48 :: z : \frac{48z}{155}.$$

De aci resulta:

$$\frac{10x}{100} + \frac{40y}{192} + \frac{24z}{150} = 20 \quad \text{seu} \quad \frac{x}{10} + \frac{5y}{24} + \frac{4z}{25} = 20$$

$$\frac{30x}{100} + \frac{56y}{192} + \frac{78z}{150} = 46 \quad \text{"} \quad \frac{3x}{10} + \frac{7y}{24} + \frac{13z}{25} = 46$$

$$\frac{60x}{100} + \frac{96y}{192} + \frac{48z}{150} = 52 \quad \text{"} \quad \frac{6x}{10} + \frac{12y}{24} + \frac{8z}{25} = 52.$$

de unde aflamu: $x = 20,\ y = 48,\ z = 50.$

4. Ce conditiune trebue sa implinesca coefficientii a, b, c, a', b', c' ca espressiunea:

$$\frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2}$$

sa conserve ua valore constanta m pentru ori care valore a lui x?

Din:

$$\frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2} = m$$

resulta :

$$a+bx+cx^2=a'm+b'mx+c'mx^2$$

Facendu $x=0$, vine $a=a'm$, seu $\frac{a}{a'}=m$, prin urmare ecalitatea de mai susu se reduce la $bx+cx^2=b'mx+c'mx^2$; de unde impartindu cu x :

$$b+cx=b'm+c'mx;$$

facendu era $x=0$ resulta :

$$b=b'm, \text{ seu } \frac{b}{b'}=m;$$

si in fine va fi :

$$c=c'm, \text{ seu } \frac{c}{c'}=m.$$

Din aceste valori alle lui m resulta :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},$$

adica co coefficientii poteriloru ecale alle lui x la numeratoru si numitoru trebue sa fia proportionali intre ei.

5. Ore-cine voindu sa cumpere ua casa, se decide sa retraga de la fia-care din datornicii sei ua summa ecala x de lei, ca sa platesca cas'a. Cerendu de la fia-care cate *1250* i aru lipsi enca *10000* lei ca sa platesca cas'a; cerendu ensa cate *1600* i ar remanea unu restu de *4400* lei. Se cere sa fissamu summ'a x ce are sa ia de la fia-care datornicu, numerulu y allu loru si pretiulu casei.

Resp. $x=1562\,^1/_2$, $y=32$, era pretiulu casei $=50000$ lei.

7. Unu reservoriu de incapere de *210* litre este alimentatu de duoe fontane. Se scie co aceste duoe fontane curgendu una *4* ore, ceea alta *5* ore, dau impreuna *90* litre de apa; alta data era curgendu una *7* oie, ceea alta *3* $^1/_2$ ore, au datu

126 litre. Se cere cate litre de apa da fia-care fontana pre ora si in cate ore aru amplea reservoriulu, curgendu amenduoe impreuna.

Resp. I^a^ 15 litre; II^a^ 6 litre;
amenduoe impreuna amplu reservoriulu in 10 ore.

7. Summ'a a duoe numere x si y este a; differinti'a loru b. Sa se afle numerile.

Resp. $$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a-b}{2}.$$

8. Valorea unei fractiuni se reduce la $\frac{1}{4}$, candu scademu numerulu 3 din amenduoi termenii sei; ea devine $\frac{1}{2}$ candu se adaoga 5 la ambii termeni. Sa se afle fractiunea.

Resp. $\frac{7}{19}$.

9. Sa se afle duoe numere a caroru summ'a sa fia de m ori era productulu de n ori mai mare de catu differinti'a loru.

Resp. $$\frac{2n}{m-1} \text{ si } \frac{2n}{m+1}.$$

10. Cinci persone se punu la jocu cu conditiune ca acella, care perde sa platesca la fia-care din cei-alti atatu catu va avea fia-care din ei. Dupre 5 jocuri la cari fia-care a perdutu cate ua data s'a gasitu co toti au summe ecale si fia-care cate 32 lei. Se cere catu a avutu fia-care din jucatori la inceputu.

Resp. *81, 41, 21, 16, 11.*

§ 7. ECALITATI NEDETERMINATE DE GRADULU I^lu^.

Candu ua problema cuprinde mai pucine conditiuni de catu necunoscute duce la unu numeru mai micu de ecalitati de catu acell'a allu necunoscuteloru; acestea nu potu fi determinate si problem'a este nedeterminata. Potemu ensa sa ceremu ca necunoscutele sa implineasca ore-cari conditiuni, s. es. sa fia numere intregi, seu intregi si positive, si atunci problem'a nu mai este nedeterminata de totu; numerulu solutiuniloru pote sa fia astu-feliu restrensu. Partea Algebrei care se occupa cu deslegarea, dupre nisce conditiuni date, a ecalitatiloru, candu numerulu loru este mai micu de catu allu necunoscuteloru, s'a numitu Analisa nedeterminata. Aici ne vomu occupa numai cu ua parte a acestei analise, adico cu deslegarea unei ecalitati de gradulu I^iu cu duoe necunoscute.

Form'a generala a unei asemenea ecalitati este:

$$Ax+By=C.$$

Candu A, B, C voru avea veri unu factoru comunu, impartimu ecalitatea cu acestu factoru si astu-feliu obtinemu pre ceea urmatore cu coefficienti mai mici:

$$A'x+B'y=C'.$$

Potemu si in loculu acestei ecalitati sa punemu alta cu coefficienti mai mici, candu se va intampla ca A' si C', seu B' si C', sa aiba unu factoru comunu. Fia D acestu factoru allu lui A' si C'; impartindu vomu gasi:

$$A''x+\frac{B'}{D}y=C''$$

Puindu $y=Du$ vine: $A''x+B'u=C''$,
unde A'' si C'' suntu mai mici de catu A' si C'.

Ecalitatea $Ax+By=C$ nu pote priimi solutiuni intregi de catu numai candu coefficientii necunoscuteloru A si B voru fi numere prime intre elle. Caci deca A si B au unu impartitoru comunu d, care nu imparte essactu si pre C, potemu

scrie :
$$A_1x+B_1y=\frac{C}{d}.$$

A_1 si B_1 fiindu numere intregi, era $\frac{C}{d}$ unu numeru fractionaru, se vede co x, seu y, seu amenduoi trebue sa fia asemenea fractionari.

Sa ne inchipuimu co, dupre ce amu facutu tote simplificarile possibile, amu ajunsu la ecalitatea :
$$ax+by=c,$$
unde a, b, c suntu numere prime si prin urmare neecale intre elle ; sa supunemu co $a<b$ si sa deslegamu ecalitatea despre x, adico despre necunoscut'a cu cellu mai micu coefficientu ; vomu gasi :
$$x=\frac{c-by}{a}.$$
Sa impartimu b cu a si sa insemnamu catulu cu q, restulu cu r si va fi :
$$b=aq+r,\ x=-qy+\frac{c-ry}{a}=-qy+t;$$
unde s'a pusu $\frac{c-ry}{a}=t$ (insemnandu cu t unu numeru intregu ore care, fiindu co numai atunci x pote fi asemenea intregu). De aici resulta :
$$ry+at=c;$$
adico era ua ecalitate cu duoe necunoscute, ensa cu coefficientii mai mici de catu acei ai ecalitatiei propuse ; deslegandu despre y gasimu :
$$y=\frac{c-at}{r},\ a=rq_1+r_1,$$

$$y = -q_1 t + \frac{c - r_1 t}{r} = -q_1 t + t_1,$$

unde amu pusu era $\frac{c - r_1 t}{r} = t_1$;

de unde : $r_1 t + r t_1 = c$.

Deslegandu si pre acesta ecalitate, unde coefficientii suntu enca si mai mici, gasimu :

$$t = \frac{c - r t_1}{r_1},\ r = r_1 q_2 + r_2,\ t = -q_2 t_1 + \frac{c - r_2 t_1}{r_1} = -q_2 t_1 + t_2$$

si asia mai inante :

$$t_1 = \frac{c - r_1 t_2}{r_2},\ r_1 = r_2 q_3 + r_3,\ t_1 = -q_3 t_2 + \frac{c - r_3 t_2}{r_2} = -q_3 t_2 + t_3;$$

$$t_2 = \frac{c - r_2 t_3}{r_3},\ r_2 = r_3 q_4 + r_4,\ t_2 = -q_4 t_3 + \frac{c - r_4 t_3}{r_3} = -q_4 t_3 + t_4;$$

si asia mai inante.

Impartirile successive a lui b cu a, a lui a cu restulu anteiu r, a lui r cu restulu allu duoilea r_1, a lui r_1 cu restulu allu treilea r_2, etc., formedia operatiunile prin cari se afla cellu mare comunu divisoru a duoe numere; si fiindu co a si b suntu numere prime, vomu ajunge dupre mai multe asemenea impartiri la celle duoe resturi din urma 1 si 0. Sa supunemu co $r_3 = 1$ si $r_4 = 0$; atunci aflamu prin substitutiuni successive :

$$t_2 = -q_4 t_3 + c,\ t_1 = (q_3 q_4 + 1) t_3 - q_3 c,$$

$$t = -(q_2 q_3 q_4 + q_2 + q_4) t_3 + (q_2 q_3 + 1) c,$$

$$y = (q_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + 1) t_3 - (q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3) c,$$

$$x = -(q q_1 q_2 q_3 q_4 + q q_1 q_2 + q q_1 q_4 + q q_3 q_4 + q_2 q_3 q_4 + q + q_2 + q_4) t_3 + (q q_1 q_2 q_3 + q q_1 + q q_3 + q_2 q_3 + 1) c.$$

Asia dera x si y se presinta sub form'a :

$$x = \alpha + A t_3,\ y = \beta + B t_3$$

si voru avea valori intregi pentru tote valorile intregi alle lui t_3.

Essemplu. Sa se afle tote valorile intregi alle lui x si y cari satisfacu ecalitatea : $177x-128y=95$;
vomu gasi successivu :

$$y=\frac{177x-95}{128}=x+\frac{49x-95}{128}=x+t,$$

$$\frac{49x-95}{128}=t,\ 49x-128t=95,$$

$$x=\frac{128t+95}{49}=3t-\frac{19t}{49}+\frac{95}{49}=3t-\frac{19t-95}{49},$$

$$x=3t-19\frac{t-5}{49}=3t-19t_1,$$

$$\frac{t-5}{49}=t_1,\ t=49t_1+5,$$

substituindu acum valorea lui t in aceea a lui x si a lui y gasimu

$$x=3t-19t_1=3(49t_1+5)-19t_1=15+128t_1$$
$$y=x+t=15+128t_1+49t_1+5=20+177t_1$$

dandu lui t_1 valori positive, vomu afla asemenea pentru x si y valori positive.

Teorema. Deca α si β este ua pereche de valori alle lui x si y cari satisfacu ecalitatea : $ax+by=c$,
atunci valorile generale alle lui x si y suntu cuprinse in formulele :

$$x=\alpha-bt,\ y=\beta+at$$

unde t insemnedia unu numeru intregu ore-care, si acesta se afla immultitu pentru fia-care necunoscuta cu coefficientulu cellei-alte necunoscute, luatu pentru y cu semnulu lui, era pentru x cu semnulu contrariu si vice-versa.

In adeveru, α si β formandu ua solutiune a ecalitatiei :

$$ax+by=c$$

vomu avea :

$$a\alpha+b\beta=c;$$

scadiendu: $$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$$

de unde: $$x=\alpha-b\frac{(y-\beta)}{a}.$$

Ca sa fia x intregu este destulu ca $\frac{y-\beta}{a}$ sa fia unu intregu, adico

$$\frac{y-\beta}{a}=t,$$

de unde $$y=\beta+at$$

si prin urmare: $$x=\alpha-bt$$

Cu ajutorulu fractiuniloru continue se pote totu de una afla ua pereche de valori α si β.

Numerulu solutiuniloru intregi date prin valorile generale: $x=\alpha-bt$, $y=\beta+at$, pote eñca fi restrensu, deca ceremu ca x si y sa fia numere positive. Pentru acesta avemu conditiunile:

$$\alpha-bt>0 \text{ si } \beta+at>0$$

de unde: $$t<\frac{\alpha}{b} \quad \text{si} \quad t>-\frac{\beta}{a}$$

astu-feliu t nu va potea lua de catu numai valorile intregi cuprinse intre aceste duoe limite.

Problema. Sa se platesca 1000 lei in sfanti si icosari; x fiindu numerulu sfantiloru, y allu icosariloru vomu avea

$$2\tfrac{10}{40}x+12\tfrac{10}{40}y=1000,$$

seu $$9x+49y=4000,$$

de unde aflamu

$$x=\frac{4000-49y}{9}=-5y+\frac{4000-4y}{9}$$

$$=-5y+4\,\frac{1000-y}{9}=-5y+4t,$$

$$\text{si } \frac{1000-y}{9}=t, \text{ de unde } y=1000-9t$$

si prin urmare : $x=-5000+49t$

x si y trebuindu sa fia positive vomu avea :

$$1000-9t>0 \text{ si } -5000+49t>0,$$

de unde : $t<\frac{1000}{9}=111\,{}^1/{}_9$ si $t>\frac{5000}{49}=102\,{}^2/{}_{49}$.

asia dera valorile lui t cari satisfacu cererea suntu in numeru de noue :

$$t=103,\ 104,\ 105,\ 106,\ 107,\ 108,\ 109,\ 110,\ 111.$$

asia dera summ'a de 1000 lei se pote plati in noue differite moduri.

Probleme. Sa se afle solutiunile intregi si positive alle ecalitatiloru :

1. $17x-23y=19$; $x=-7+23t$, $y=-6+17t$, $t \geqq 1$.
2. $11x-5y=254$; $x=24-5t$, $y=-2+11t$, $\frac{24}{5}>t>\frac{2}{11}$.
3. $20x-31y=7$; $x=98+31t$, $y=63+20t$.
4. Sa se afle tote numerile cari impartite cu 3 dau restulu 1, si impartite cu 5 dau restulu 2.

Respunsu $x=7+15t$.

5. Sa se afle tote numerile cari impartite cu 8 dau restulu 5; era impartite cu 11 dau restulu 4.

Respunsu $x=37+88t$.

6. Sa se afle unu numeru divisibilu prin 9 si care impartitu cu 14 sa dea restulu 8.

Respunsu $x=36+126t$.

7. Mai multi barbati, femei si copii au facutu ua escursiune. Fia-care barbatu a cheltuitu *19* lei, fia-care femee *10*, era copii cate *5*. Barbatii au cheltuitu *7* lei mai multu de catu femeile si acestea *15* lei mai multu de catu copii. Se cere numerulu barbatiloru, femeiloru si allu copiiloru.

Respunsu *13*, *24*, *29*.

CAPITOLU III.

ECALITATI DE GRADULU ALLU DUOILEA.

§ 1. ECALITATI CU UA NECUNOSCUTA.

Form'a cea mai generala a unei ecalitati de gradulu allu duoilea cu ua necunoscuta, dupre ce intr'ensa s'au facutu tote reductiunile, este :

$$ax^2+bx+c=0.$$

Impartindu tota ecalitatea cu coefficientulu a allu patratului necunoscutei obtinemu ecalitatea

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

si puindu pentru prescurtare : $\frac{b}{a}=p, \frac{c}{a}=q$, vine :

$$x^2+px+q=0.$$

Ca sa deslegamu acesta ecalitate, observamu co x^2+px suntu cei duoi d'anteiu termeni ai patratului unui binomu $x+\frac{p}{2}$; adaogandu dera la ambii membri $\frac{p^2}{4}$, vomu forma unu patratu completu, adico :

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}+q=\frac{p^2}{4}.$$

seu trecendu pre q cu semnulu contrariu in membrulu cellualtu :

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$$

seu : $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$, seu : $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$,

de unde aflamu $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

De aci se vede co necunoscut'a unei ecalitati de gradulu allu duoilea admitte duoe valori si co aceste valori suntu ecale cu diumetatea coefficientului poterei anteia a necunoscutei, luatu cu semnulu contrariu, plus seu minus radicin'a patrata a patratului acestei diumetati mai pucinu termenulu cu totulu cunoscutu.

Ua ecalitate de gradulu allu duoilea are duoe radicini si nu pote avea mai multe. Sa impartimu membrulu anteiu x^2+px+q cu $x-x'$, x' insemnandu un'a din radicini, si vomu avea la catu unu binomu de gradulu anteiu, era restulu va fi nullu (capit. I, § 5, teor. II); astu-feliu va fi :

$$x^2+px+q=(x-x')\,(x-x'')$$

si x'' este a duoa radicina a ecalitatiei $x^2+px+q=0$, pentru co facendu $x=x''$, allu duoilea membru allu ecalitatiei de mai susu se anuledia si prin urmare si cellu d'anteiu. Acum de mai essista ua a treia radicina x''', ar trebui ca trinomulu x^2+px+q seu productulu $(x-x')(x-x'')$ sa fia divisibilu cu $x-x'''$ ceea ce nu se pote.

Din ecalitatea de mai susu :

$$x^2+px+q=(x-x')\,(x-x'')$$

resulta co, *ori-ce trinomu de gradulu allu duoilea x^2+px+q pote fi descompusu in duoi factori binomiali de gradulu anteiu.*

De aici mai resulta enca :

$$x^2+px+q=x^2-(x'+x'')x+x'x''$$

si fiindu co acesta ecalitate trebue sa fia adeverata pentru ori-care x, trebue ca coefficientii poteriloru ecale alle lui x sa fia ecale (vedi capit. II, § 6, probl. IV), adico ca :

$$p=-(x'+x''),\quad q=x'x''.$$

Asia dera : *coefficientulu poterei anteia a lui* **x** *este ecalu cu summ'a radiciniloru luata cu semnu contrariu, si termenulu cu totulu cunoscutu este ecalu cu productulu radiciniloru.*

Aceste duoe teoreme se potu enca demonstra si in modulu urmetoru. I-iu Trinomulu de gradulu allu duoilea

$$x^2+px+q$$

pote fi pusu sub form'a

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q,$$

seu

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$$

Considerandu acesta espressiune ca differintia a duoe patrate, o potemu descompune in productulu a duoi factori, adico

$$\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right).$$

Insemnandu $-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x'$, $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x$, va fi productulu din urma, adico trinomulu

$$x^2+px+q=(x-x')\,(x-x'');$$

ceea ce probedia teorem'a co trinomulu x^2+px+q se pote descompune in duoi factori binomiali de gradulu anteiu si totu de ua data se vede co termenii x' si x'' suntu radicinile acellui trinomu.

II-ea Deslegandu ecalitatea

$$x^2+px+q=0,$$

amu gasitu pentru necunoscut'a celle duoe valori

$$x' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x'' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Adunandu-le gasimu immediatu :

$$x' + x'' = -p.$$

Immultindu-le si observandu co valorea anteia represinta summ'a, era a duoa differinti'a catimiloru $-\frac{p}{2}$ si $-\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

vine $$x'x'' = \frac{p^2}{4} - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = q;$$

ceea ce areta co summ'a radiciniloru este ecala cu coefficientulu termenului px luatu cu semnu contrariu, era productulu loru este ecalu cu termenulu q.

De aici resulta co, candu q este positivu, amenduoe radicinile au acellasi semnu si suntu positive, candu p este negativu; negative candu p este positivu. Radicinile suntu de semnu contrariu, candu q este negativu. Insemnandu dera cu p si q valorile absolute alle acestoru catimi, vomu avea a considera celle patru casuri :

$x^2 - px + q = 0$, atunci avemu duoe radicini positive;
$x^2 + px + q = 0$, „ „ „ negative;
$x^2 + px - q = 0$, \
$x^2 - px - q = 0$, } „ una positiva si alta negativa.

Candu, trecendu de la unu termenu la altulu, semnulu se scamba, spre es. de la $+$ la $-$, seu de la $-$ la $+$, dicemu co avemu ua *variatiune*; candu semnulu nu se scamba, avemu ua *permanentia* (de semnu).

Ecatiunea anteia are 2 variatiuni si 2 radicini positive,
„ a duoa „ 2 permanentie si 2 radicini negative,
„ a treia „ 1 perm. si 1 variat. } 1 radicina positiva si 1 negat.
„ a patra „ 1 variat. si 1 perm. }

de unde resulta co ua ecatiune de gradulu allu duoilea are atatea radicini positive cate variatiuni si atatea radicini negative cate permanentie.

Catimea de sub radicalu $\frac{p^2}{4}-q$, care intra in valorea lui x:

$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, pote fi positiva, nulla seu negativa.

Candu: $\frac{p^2}{4}-q>0$, atunci catimea radicala este reala si celle duoe valori alle lui x, seu radicinile ecalitatiei, suntu reale si neecale.

„ $\frac{p^2}{4}-q=0$, atunci radicalulu este nullu, $x=-\frac{p}{2}$ si radicinile suntu reale si ecale, (in realitate n'avemu de catu ua singura radicina).

„ $\frac{p^2}{4}-q<0$, atunci radicalulu devine imaginaru, si avemu duoe radicini imaginare si neecale. In casulu acesta ecatiunea $x^2+px+q=0$ este imposibila. Fiindu co este $\frac{p^2}{4}-q<0$, potemu pune $\frac{p^2}{4}-q=-k^2$, de unde: $q=\frac{p^2}{4}+k^2$, si ecalitatea devine: $x^2+px+\frac{p^2}{4}+k^2=0$

seu $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2=0;$$

ecalitate imposibila, pentru co nici ua data summ'a a duoe patrate, adico a duoe catimi positive, nu pote fi ecala cu nulla.

Ecatiunea generala de gradulu allu duoilea:

$$ax^2+bx+c=0$$

pote fi deslegata directu, immultindu-o cu $4a$ si adaogandu la ambii membrii b^2, astu-feliu gasimu :

$$4a^2x^2+4abx+b^2+4ac=b^2,$$

seu : $$(2ax+b)^2=b^2-4ac,$$

de unde : $$x=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

acesta espressiune va fi reala seu imaginara dupre cum $b^2-4ac \gtrless 0$; era regul'a semneloru radiciniloru este aceiasi ca si mai susu, facendu suppositiunea co a este positivu.

§ 2. ESSEMPLE SI PROBLEME.

Esemple.

1. $$\frac{5x^2}{8}-\frac{3x}{5}=\frac{x^2}{8}-\frac{x}{6}+\frac{1}{5}$$

eliminandu numitorii : $150x^2-144x=30x^2-40x+48$

facendu reductiunile : $120x^2-104x-48=0,$

seu : $$x^2-\frac{13}{15}x-\frac{2}{5}=0,$$

de unde : $$x=\frac{13}{30}\pm\sqrt{\left(\frac{13}{30}\right)^2+\frac{2}{5}}=\begin{cases}\frac{6}{5}\\ -\frac{1}{3}\end{cases}$$

2. $9^1/_3\, x^2-90^1/_5\, x+195=0;\ x'=6^3/_7,\ x''=3^1/_4.$

3. $80x+\frac{3x^2}{4}+\frac{21x-27782}{12}=1859^1/_3-3x^2;$

$$x'=--46,\ x''=24\tfrac{1}{5}$$

4. $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x+5};\ x'=14,\ x''=-10.$

5. $\frac{2x+3}{10-x}=\frac{2x}{25-3x}-6^1/_2;\ x'=13\frac{22}{31},\ x''=8.$

6. $\dfrac{18+x}{6(3+x)}=\dfrac{20x+9}{19-7x}-\dfrac{65}{4(3-x)}$; $x'=7\frac{22}{118}$, $x''=2\frac{1}{8}$.

7. $adx-acx^2=bcx-bd$; $x'=\dfrac{d}{c}$, $x''=-\dfrac{b}{a}$.

8. $\dfrac{2c^2}{d^2}+\dfrac{ac}{d}-(a-b)(2c+ad)\dfrac{x}{d}=(a+b)\dfrac{cx}{d}-(a^2-b^2)x^2$;

$$x'=\frac{2c+ad}{d(a+b)};\ x''=\frac{c}{d(a-b)}.$$

9. $3\sqrt{112-8x}=19+\sqrt{3x+7}$; $x'=6$, $x''=-11\frac{523}{625}$.

10. $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$; $x'=9$, $x''=-3\frac{2}{5}$.

— Probleme. 1. Sa se afle duoe numere x si y alle caroru snmm'a sa fia s, era productulu p. Va fi :

$$x+y=s \text{ si } xy=p.$$

Din ecalitatea anteia resulta $y=s-x$, si substituindu acesta valore a lui y in ecalitatea a duoa, vine :

$$x(s-x)=p, \text{ seu : } sx-x^2=p,$$

de unde :

$$x^2-sx+p=0.$$

Deslegandu acesta ecatiune precum amu aretatu mai susu :

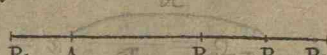
$$x=\frac{s\pm\sqrt{s^2-4p}}{2}$$

si numerile cerute suntu :

$$x=\frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \text{ si } y=\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}.$$

II. Sa se determine pe drept'a care trece prin punturile A si B puntulu R (R_1, R_2) ecalu luminatu de duoi luminatori ce se afla la aceste punturi.

Distanti'a AB a luminatoriloru



se da $=d$, si intensitatile respective alle acestoru duoi luminatori (la unimea de distantia) le insemnamu cu a si b, Fia R puntulu cerutu; distanti'a lui de la A sa o insemnamu cu x, era pre aceea de la B cu $d-x$. Se scie din Fisica co intensitatea luminei descresce cu patratulu distantiei, adico sta in rapportu inversu cu acestu patratu; prin urmare intensitatea luminatorului A va fi la R ecala cu $\frac{a}{x^2}$; era aceea a luminatorului B la R va fi ecala cu $\frac{b}{(d-x)^2}$. Puntulu R, priimindu lumina ecala de la A si B, va fi:

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2};$$

cu tote co ecatiunea acesta este de gradulu allu duoilea, pote ensa fi deslegata ca ua ecatiune de gradulu anteiu. Estragendu radicin'a patrata aflamu:

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\pm\sqrt{b}}{d-x}, \text{ seu : } \sqrt{a}(d-x)=\pm\sqrt{b}.x$$

seu : $$d\sqrt{a}-x\sqrt{a}=\pm x\sqrt{b}$$

de unde: $x\sqrt{a}\pm x\sqrt{b}=d\sqrt{a}$ seu $x(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})=d\sqrt{a}$

si in fine: $$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}.$$

De aici se vede co suntu duoe punturi ecalu luminate de A si B: unulu R intre A si B, determinatu prin distanti'a $AR=x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ care este $< AB$, coci $\sqrt{a}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$; cellu-altu R_1, dincolo de B determinatu prin distanti'a $AR_1=x_1=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. Candu $a<b$ atunci acestu allu duoilea puntu cade la R_2.

Candu $a = b$, atunci numai unu puntu se afla intre A si B ecalu luminatu de A si B, si cade la mediuloculu dreptei AB.

III. Ua dama care traia in secolulu allu 12-lea, intrebandu-se de etatea ei, a respunsu co, deca differinti'a intre annii ei si numerulu de ordinu allu secolului in care traesce se va immulti cu numerulu annilou ce i mai trebue ca sa implinesca unu secolu, se va gasi cellu din urma annu allu secolului allu 19-lea.

x fiindu etatea necunoscuta, $x - 12$ va fi differenti'a intre annii damei si secolulu in care traia; $100 - x$ suntu annii cari i lipsescu ca sa implinesca unu secolu; era productulu $(x - 12)(100 - x)$ trebue sa fia ecalu cu cellu din urma annu allu secolului allu 19-lea, adico $= 1900$. Asia dera vomu avea:

$$(x - 12)(100 - x) = 1900,$$

de unde:

$$x^2 - 112x + 3100 = 0,$$

$$x = 56 \pm \sqrt{3136 - 3100} = 56 \pm 6,$$

asia dera

$$x = 62, \text{ seu } = 50.$$

De aici vedemu co cate-ua data ecatiunea care servesce spre a deslega ua problema, pote cuprinde mai multe solutiuni de catu permittu conditiunile fisice alle problemei. In celle mai multe casuri potemu decide care din aceste solutiuni correspunde cererei cuprinse in problema si care este straina, precum se areta in problem'a urmetore.

IV. Lasandu sa cadia ua petra intr'unu putiu de mina, s'a gasitu co a trecutu t secunde intre momentulu pornirei selle si acella la care sunetulu din fundulu putiului a ajunsu la urechea observatorului. Sa se afle adencimea x a putiului.

Se scie din Ficica co, unu corpu care cade in golu (aici vomu face abstractiune de resistenti'a aerului), percurge in secund'a anteia unu spatiu insemnatu cu $\frac{g}{2}$ (g este $=9^m,8088$), in 2 percurge de 4 ori atata, in 3 de 9 ori atata, in y secunde de y^2 ori atata, adico $\frac{g}{2}y^2=x$, unde y insemnedia secundele in cate petr'a a ajunsu la fundulu putiului; de aici aflamu :

$$y=\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Pre de alta parte scimu co sunetulu percurge intr'ua secunda a ($=337$) metre; insemnandu cu z numerulu secundeloru ce a intrebuintiatu sunetulu ca sa ajunga din fundulu putiului la urechea observatorului, va fi $za=x$, de unde $z=\frac{x}{a}$. Summ'a secundeloru y si z trebue sa fia impreuna $=t$, de unde :

$$y+z=t \text{ seu } \sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{a}=t.$$

Ecalitatea acesta o potemu scrie si sub form'a

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{a},$$

seu redicandu la patratu

$$\frac{2x}{g}=t^2-\frac{2tx}{a}+\frac{x^2}{a^2}$$

eliminandu numitorii si asiediendu :

$$x^2-2\frac{a(gt+a)}{g}x+a^2t^2=0$$

de unde : $$x=\frac{a(gt+a)}{g}\pm\sqrt{\frac{a^2(gt+a)^2}{g^2}-a^2t^2}$$

$$=\frac{a(gt+a)}{g}\pm\frac{a}{g}\sqrt{g^2t^2+2agt+a^2-g^2t^2}$$

seu : $$x=\frac{a}{g}\left(gt+a\pm\sqrt{a(2gt+a)}\right).$$

Acesta valore a lui x pote enca fi scrisa :

$$x=at+\frac{a}{g}\left(a\pm\sqrt{a(2gt+a)}\right).$$

Este claru co una din aceste duoe valori este straina, pentru co putiulu are numai ua adencime. Ca sa cunoscemu care din elle correspunde cererei, observamu co x trebue sa fia mai micu de catu at, pentru co sunetulu, ca sa percurga spatiulu x, a intrebuintiatu mai pucine secunde de catu t; dera luandu semnulu $+$ vedemu co se mai adaoga lui at, astu-feliu in catu atunci x va fi mai mare de catu at; trebue dera sa luamu semnulu $-$, si atunci adencimea putiului va fi :

$$x=at+\frac{a}{g}\left(a-\sqrt{a(2gt+a)}\right).$$

§ 3. DUOE ECALITATI DE GRADULU ALLU DUOILEA CU DUOE NECUNOSCUTE.

Deslegarea loru conduce in celle mai multe casuri, prin eliminarea uneia din necunoscute, la ua ecalitate de gradulu allu patrulea, pre care in genere nu o potemu deslega prin metodele Algebrei elementare; une ori ensa ecalitatile suntu astu-feliu, in catu le potemu reduce la ua ecatiune de gradulu allu duoilea.

Problema. Sa se afle duoe numere x si y, astu-feliu in catu summ'a patrateloru loru sa fia $=s^2$, era productulu loru $=p^2$.

Vomu avea celle duoe ecalitati de gradulu allu duoilea :

$$x^2+y^2=s^2,\ xy=p^2.$$

Dera immultindu pre a duoa cu 2, si adunandu-o cu cea d'anteiu, apoi scadiendu'o, gasimu :

$$x^2+y^2+2xy=s^2+2p^2, \text{ seu } (x+y)^2=s^2+2p^2$$
$$x^2+y^2-2xy=s^2-2p^2, \text{ seu } (x-y)^2=s^2-2p^2.$$

de unde resulta celle duoe ecalitati de gradulu anteiu :

$$x+y=\sqrt{s^2+2p^2},\ x-y=\sqrt{s^2-2p^2}$$

si in fine :

$$x=\frac{\sqrt{s^2+2p^2}+\sqrt{s^2-2p^2}}{2},\ y=\frac{\sqrt{s^2+2p^2}-\sqrt{s^2-2p^2}}{2}.$$

Ecalitatea bipatrata $x^4+px^2+q=0$ care este de gradulu allu patrulea, in care ensa intra numai poterile parii a necunoscutei, pote asemenea fi tratata ca ua ecalitate de gradulu allu duoilea ; sa punemu $x^2=y$, de unde :

$$y^2+py+q=0;$$

acesta din urma ecatiune da :

$$y=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

asia dera fiindu co $x=\pm\sqrt{y}$, va fi si :

$$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$$

de aici vedemu co ecalitatea bipatrata are patru radicini. In generalu se demonstra in teori'a generala a ecatiuniloru, co ua ecatiune de gradulu m, are m radicini reale seu imaginare.

Valorea lui **X** *se presinta sub forma de unu radicalu induoitu :* $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ *si se pote cere sa lu transformamu intr'ua alta espressiune de form'a* $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ *in care sa nu fia de catu numai radicale simple.* Ca sa ajungemu la acesta sa punemu :

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y};$$

redicandu ambi membrii la patratu, aflamu :

$$A\pm\sqrt{B}=x+y\pm2\sqrt{xy}.$$

Acesta ecalitate fiindu compusa de catimi rationale si nerationale, se descompune in duoe, adico intr'ua ecalitate intre catimi numai rationale :

$$A = x + y$$

si ua alta intre catimi nerationale :

$$\sqrt{B} = \pm 2\sqrt{xy}.$$

redicandu pre a duoa la patratu vine :

$$B = 4xy$$

Asia dera avemu ecalitatile : $x + y = A,\ xy = \frac{B}{4};$ si x si y suntu radicinile ecalitatiei de gradulu allu duoilea.

$$X^2 - AX + \frac{B}{4} = 0,$$

de unde :

$$X = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

seu :

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

si prin urmare :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}};$$

Transformatiunea ceruta se va potea face prin urmare, candu $\sqrt{A^2 - B}$ va fi ua catime rationala seu candu $A^2 - B$ va fi unu patratu essactu.

Essemple 1. $\sqrt{31 - 10\sqrt{6}} = \sqrt{31 - \sqrt{600}};\ A=31,\ B=600.$

Asia dera $\quad \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{961 - 600} = 19$

este unu numeru rationalu si prin urmare :

$$\sqrt{31 - 10\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{31 + 19}{2}} - \sqrt{\frac{31 - 19}{2}} = 5 - \sqrt{6}.$$

2. Sa se transforme espressiunea : $\sqrt{43 - 15\sqrt{8}}$ in $5 - 3\sqrt{2}$;

3. $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$;

4. $\sqrt{a^2 + b + 2a\sqrt{b}} = a + \sqrt{b}$;

5. $\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$;

6. $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 1 + \sqrt{x-1}$.

§ 4. PROBLEME DE GRADULU ALLU DUOILEA.

I. Sa se afle duoe numere alle caroru productu sa fia a, si catulu b.

Respunsu : $\sqrt{ab}$ si $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

II. Summ'a patrateloru a duoe numere este a, differinti'a acestoru patrate este b; sa se afle numerile.

Respunsu : $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ si $\sqrt{\frac{a-b}{2}}$.

III. Sa se afle trei numere, astu-feliu in catu productele loru luate cate duoe sa fia a, b, c.

Respunsu : $\sqrt{\frac{ac}{b}}$, $\sqrt{\frac{ab}{c}}$, $\sqrt{\frac{bc}{a}}$.

IV. Sa se afle cinci numere, astu-feliu in catu immultindu pre fia-care din elle, cu acell'a care vine dupre ellu si pre cellu din urma cu cellu d'anteiu, sa aflamu productele : a, b, c, d, e.

V. Unulu intrebatu de etatea lui a respunsu : mum'amea a fostu de 20 anni candu m'a nascutu, era productulu anni-loru mei cu ai mumei melle, intrecu cu 2500 unimi summ'a loru.

Respunsu: Etatea ceruta este *42* de anni; aceea a mumei *62*.

VI. Unulu a cumperatu batiste pentru 60 lei; de aru mai fi luatu enca 3 batiste totu cu cei 60 lei, pretiulu fia-caria erà sa fia cu unu leu mai pucinu. Se cere numerulu batisteloru.

Respunsu: *12*.

VII. Unulu voindu sa impartia 864 lei la cati-va omeni, observa co, deca numerulu loru aru fi cu 6 mai micu, fia-care aru priimi duoi lei mai multu. Se cere numerulu omeniloru.

Respunsu: *54*.

VIII. Unu tata murindu lasa 46800 lei la copii sei ca sa impartia de ua potriva. Inainte de a imparti acesta summa, duoi din copii moru, si cei alti iau cate 1950 lei mai multu. Se cere numerulu totalu allu copiiloru.

Respunsu: *8*.

IX. Duoi commercianti au facutu ua intreprindere comuna cu 500 de galbeni. Unulu a lasatu capitalulu lui 5 luni, era cellu-altu numai 2 luni; candu s'au desfacutu a luatu fia-care cate 450 galbeni. Se ceru summele cu cari a inceputu fie-care acestu commerciu.

Respunsu: *200* si *300*.

X. Care este numerulu care impreuna cu radicin'a sea patrata da numerulu 1332?

Respunsu: *1296*.

XI. Sa se afle duoe numere astu-felu in catu summ'a loru impreuna cu summ'a patrateloru loru sa fia $= 330$, era differinti'a loru impreuna cu differinti'a patrateloru loru sa fia $= 150$.

Respunsu: *9* si *15*.

XII. Sa sa afle duoe numere alle caroru summ'a, productulu si differenti'a patrateloru sa fia ecale intre elle.

Respunsu : $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ si $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

XIII. Trei numere formedia ua proportiune geometrica continua; summ'a loru este 126, era productulu loru 13824; sa se afle aceste numere.

Respunsu : *6, 24, 96.*

XIV. Differinti'a a duoe numere immultita cu differenti'a patrateloru loru este 160; era summ'a loru immultita cu aceea a patrateloru loru este 580. Sa se afle numerele acestea.

Respunsu : *3* si *7.*

XV. Sa se impartia numerulu a in duoe parti astu-feliu in catu summ'a poteriloru a patra alle acestoru parti sa fia b. Partile cerute suntu :

$$\frac{a+\sqrt{-3a^2 \pm \sqrt{8a^4+8b}}}{2} \text{ si } \frac{a-\sqrt{-3a^2 \pm \sqrt{8a^4+8b}}}{2}.$$

XVI. Intr'ua proportiune geometrica, summ'a mediiloru este ecala cu a, aceea a estremiloru este ecala cu b, summ'a patrateloru celloru 4 termeni este c. Sa se afle proportiunea.

Respunsu :

$$\frac{b-\sqrt{c-a^2}}{2} : \frac{a-\sqrt{c-b^2}}{2} = \frac{a+\sqrt{c-b^2}}{2} : \frac{b+\sqrt{c-a^2}}{2}.$$

§ 5. DESPRE MASSIMA SI MINIMA DE GRADULU ALLU DUOILEA.

Candu ua variabila x priimesce differite valori atunci urmedia co si ua functiune ore-care $f(x)$ a acestei variabile sa priimesca asemenea differite valori. Deca in acesta successiune de valori se va intempla ca pentru ua valore particulara $x=a$

functiunea $f(x)$ sa priimesca ua valore correspundietore A, care sa fia mai mare (seu mai mica) de catu tote valorile vecine alle lui $f(x)$, atunci dicemu ca A este *maximum* (seu *minimum*) si co functiunea $f(x)$ priimesce ua valore massimala (seu minimala). In partea superiora a analysei matematice se dau metode generale pentru a determina valorile variabileloru cari facu ca ua functiune a loru sa devie unu massimum seu minimum, precum si pre aceste massima seu minima ensusi.

Dera si ecalitatile de gradulu allu duoilea dau unu mediu spre a le determina cellu pucinu in une casuri particulare. Spre essemplu, deca functiunea y depinde de variabil'a x prin relatiunea urmetore : $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$, si ceremu sa aflamu valorea aceea a lui x pentru care y seu espressiunea $\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ devine unu massimum seu unu minimum, supunemu pre y ca cunoscutu si deslegamu ecalitatea despre x. Espressiunea pre care o vomu gasi pentru x trebuindu sa dea pentru acesta valori reale, va fi supusa la ore cari conditiuni, seu y va fi cuprinsu intre ore-cari limite, preste cari de va trece, valorile correspundietore alle lui x devinu imaginare. Aceste valori limite suntu massima seu minima functiunei y cautandu ce devine atunci espressiunea pentru x, aflamu valorea lui correspundietore la massimum seu minimum lui y.

Eliminandu numitorulu in ecalitatea de mai susu aflamu :

$$dyx^2 + eyx + fy = ax^2 + bx + c$$

trecendu toti termenii intr'unu membru si reducendu termenii asemenea :

$$(a - dy)x^2 + (b - ey)x + c - fy = 0,$$

seu $$x^2+\frac{b-ey}{a-dy}x+\frac{c-fy}{a-dy}=0$$

puindu pentru prescurtare : $\frac{b-ey}{a-dy}=p$, $\frac{c-fy}{a-dy}=q$,

vine : $$x^2+px+q=0,$$

de unde : $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Ca sa fia x realu trebue ca $\frac{p^2}{4}-q>0$ seu cellu pucinu

$$\frac{p^2}{4}-q=0.$$

La acesta limita correspunde valorea limita a lui y, care va fi unu massimum seu minimum; valorea correspundietore a lui x va fi atunci : $$x=-\frac{p}{2}.$$

Problema I. Sa se impartia numerulu a in duoe parti allu caroru productu sa fia massimum, adico cellu mai mare possibilu.

x fiindu un'a din partile, $a-x$ va fi cea-alta si se cere ca productulu loru $x(a-x)=y$ sa fia unu massimum. Deslegandu acesta ecatiune despre x aflamu : $x^2-ax+y=0$

de unde : $$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-y}.$$

Asia dera $\frac{a^2}{4}$ este mai mare de catu y, seu cellu pucinu $\frac{a^2}{4}=y$. Asia dera y trebuindu sa fia mai micu de catu $\frac{a^2}{4}$, ceea mai mare valore pre care o pote lua este $\frac{a^2}{4}$; atunci

$x=\frac{a}{2}$ si prin urmare $a-x=\frac{a}{2}$; de unde se vede co, numerulu a trebue sa fia impartitu in parti ecale, in duoe diumetati, si productulu massimum este ecalu cu patratulu acestei diumetatiei.

De aici resulta co, productulu celloru m parti alle unui numeru a este massimum, candu partile acestea suntu ecale intre elle.

Fia $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ aceste parti si va fi :
$x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_m=a$, si $x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots x_m=$massimum.
Deca duoe din aceste parti, spre essemplu : x_1 si x_2, nu voru fi ecale intre elle, atunci productulu nu va fi massimum. In adeveru atunci potemu scrie :

$$\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+\ldots\ldots+x_m=a$$

si productulu $\frac{x_1+x_2}{2}\times\frac{x_1+x_2}{2}$, ca formatu din parti ecale, va fi mai mare de catu productulu $x_1\, x_2$, asia dera si :

$$\frac{x_1+x_2}{2}\times\frac{x_1+x_2}{2}\, x_3 \ldots\ldots x_m > x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots x_m.$$

II. Sa se descompuna numerulu a in duoi factori a caroru summ'a sa fia minimum.

x fiindu unulu din factori, $\frac{a}{x}$ va fi cellu-altu, si summ'a loru trebue sa fia unu minimum, adico :

$$x+\frac{a}{x}=y.$$

Deslegandu acesta ecalitate despre x aflamu :

$$x^2-yx+a=0, \text{ de unde : } x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}-a}.$$

De aici resulta co, $\frac{y^2}{4} > a$ seu cellu pucinu $\frac{y^2}{4} = a$; asia dera minimum cerutu este $y = 2\sqrt{a}$; atunci $x = \frac{y}{2} = \sqrt{a}$.

III. Din tote trianghiurile dreptanghiuri cu aceeasi ipotenusa a care este acella allu carui perimetru este massimum seu minimum?

Sa insemnamu cu b, c, catetele acestoru trianghiuri, sa observamu co dupre ua teorema din geometria

$$b^2 + c^2 = a^2;$$

era pre de alta parte fiindu co ipotenus'a a este constanta, perimetrulu va fi massimum, candu summ'a cateteloru va fi ensasi massimum, adico candu:

$$b + c = y.$$

Redicandu acesta din urma ecalitate la patratu si scadiendu dintr'ensa pre cea d'anteiu, gasimu:

$$2bc = y^2 - a^2 \quad \text{seu} \quad bc = \frac{y^2 - a^2}{2}.$$

Asia dera b si c suntu radicinile unei ecatiuni de gradulu allu duoilea de form'a:

$$X^2 - yX + \frac{y^2 - a^2}{2} = 0,$$

de unde: $X = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{y^2 - a^2}{2}} = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{2a^2 - y^2}{4}}$,

si prin urmare:

$$b = \frac{y + \sqrt{2a^2 - y^2}}{2}, \quad c = \frac{y - \sqrt{2a^2 - y^2}}{2}.$$

Ca sa fia aceste valori alle lui b si c reale trebue ca:

$$2a^2 - y^2 > \text{ seu cellu pucinu } = 0,$$

$$\text{seu } y^2 < \text{ seu ecalu cu } 2a^2.$$

y^2 trebuindu sa remana $< 2a^2$, cea mai mare valore pre care o pote lua este $2a^2$; asia dera $y = a\sqrt{2}$ este valorea massimum seu $a+b+c = a+y = a+a\sqrt{2} = a(1+\sqrt{2})$ este massimum perimetrului. Atunci b devine ecalu cu c si $= \frac{y}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Trianghiulu dreptunghiu cu perimetrulu massimum este trianghiulu isoscelu. Dera valorile cateteloru b si c trebue sa implinesca si ua alta conditiune, trebue sa fia positive, asia dera :

$$y > \sqrt{2a^2 - y^2} \text{ seu } y^2 > 2a^2 - y^2 \text{ seu } 2y^2 > 2a^2$$

si prin urmare : $y^2 > a^2$ seu $y > a$ si cellu pucinu $y = a$. Dera atunci va fi $c = 0$, $b = a$, si perimetrulu $a+b+c = 2a$; de unde se vede co perimetrulu este minimum, candu totu trianghiulu se reduce la ua linia drepta.

Alte essemple. Sa se afle valorile lui x cari facu massimum seu minimum functiunile.

1. $y = x^2 + (8-x)^2$; Resp. $x = 4$, $y = 32$ minimum.
2. $y = \sqrt{x} + \sqrt{10-x}$; Resp. $x = 5$, $y = 2\sqrt{5}$ massimum.
3. $y = \frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{a-x}$; Resp. $x = \frac{a}{2}$, $y = 4a$ minimum.
4. Din tote dreptanghiurile de acellasi perimetru $2a$ sa se afle acell'a allu carui suprafeci'a este massimum.

Respunsu : patratulu cu latur'a $= \frac{a}{2}$.

§ 6. CANTITATI COMPLESSE SI IMAGINARE.

Radicin'a patrata si in genere aceea de unu gradu pariu a unui numeru negativu, seu simbolulu $\sqrt{-a^2}$ lu numimu ua espressiune imaginara; pentru co nu essista nici ua catime reala care immultita prin ea insasi sa produca unu numeru negativu; espressiunea de mai susu o potemu pune si sub form'a : $a\sqrt{-1}$.

In generalu numimu *espressiune complessa* seu *imaginara* ua espressiune de form'a : $a+b\sqrt{-1}$ in care a si b suntu numere reale, intregi seu fractionare, positive seu negative, commensurabile seu incommensurabile.

Espresiuunile $a+b\sqrt{-1}$ si $a-b\sqrt{-1}$ cari nu se deosebescu de catu numai prin semnulu coefficientului lui $\sqrt{-1}$ se numescu *conjugate*.

Cantitatea reala si positiva $\sqrt{a^2+b^2}$ se numesce *modululu* espressiuniloru imaginare conjugate $a\pm b\sqrt{-1}$.

Candu avemu ua potrivire intre catimi reale si imaginare, acesta se desface in alte duoe, una intre catimile reale si alta intre catimile imaginare, adico intre coefficientii lui $\sqrt{-1}$. Spre ess. din : $A+B\sqrt{-1}=P+Q\sqrt{-1}$
resulta :
$$A=P \text{ si } B=Q.$$

Ne invoimu sa applicamu si la catimile complesse acelleasi operatiuni si reguli ca si la catimile reale. Astu-feliu gasimu pentru adunarea :

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=a+c+(b+d)\sqrt{-1},$$

scaderea :

$$(a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=a-c+(b-d)\sqrt{-1},$$

immultirea :

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1},$$

impartirea :

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

De unde vedemu co resultatulu operatiunilorn algebrice, applicate la espressiuni imaginare, este in generalu ua espressiune de aceeasi forma : $A+B\sqrt{-1}$.

Cateva teoreme elementare, dera importante, asupra complesseloru suntu celle urmetore :

Teorema I. Ca sa fia ua espressiune complessa $a\pm b\sqrt{-1}$ nulla, trebue si este destulu ca modululu ei $\sqrt{a^2+b^2}$ sa fia nullu. Coci atunci : $a=0, b=0$ si prin urmare $a\pm b\sqrt{-1}=0$.

Teorema II. Modululu unui productu de mai multe espressiuni complesse este ecalu cu productulu moduleloru factoriloru.

Immultindu espressiunile $a+b\sqrt{-1}$ si $c+d\sqrt{-1}$ intre elle gasimu :

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1}.$$

Modulele factoriloru suntu : $\sqrt{a^2+b^2}$ si $\sqrt{c^2+d^2}$, era acell'a allu productului este :

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)d^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}.$$

Teorema III. Modululu catului a duoe espressiuni complesse este ecalu cu catulu modulului allu deimpartitului prin acell'a allu impartitorului.

Fia $a+b\sqrt{-1}$ deimpartitulu, $c+d\sqrt{-1}$ impartitorulu si $p+q\sqrt{-1}$ catulu. Dupre teorem'a precedinte va fi :

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c^2+d^2}\times\sqrt{p^2+q^2};$$

pentru co deimpartitulu este ecàlu cu productulu impartitorului cu catulu, de aici resulta :

$$\sqrt{p^2+q^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

ceea ce erà de demonstratu.

APPENDICE.

Pene aici s'au aretatu metode pentru a deslega ecalitatile de gradulu anteiu, cu una seu mai multe necunoscute, precum si pre acellea de gradulu allu duoilea, cu ua singura necunoscuta. Metodele prin cari se deslega ecalitatile de gradulu allu treilea si allu patrulea, la cari conducu obicinuitu si ecatiunile de gradulu allu duoilea cu mai multe necunoscute, suntu imperfecte si complicate. Italienii *Ferrei* si *Tartalea*, pe la 1505 au datu acesta metoda pentru ecalitatile de gradulu allu treilea cu ua necunoscuta, metoda numita obicinuitu a lui *Cardanus*, care a publicatu-o cellu d'anteiu; asemenea italianulu *Aloysius Ferrari* a deslegatu ecalitatea de gradulu allu patrulea, si metoda lui porta numele de regula lui *Bombelli*. Deslegarea generala a ecatiunilor de grade superiore la allu patrulea cu coefficienti litterari fiindu asta-di impossibila si chiaru pentru gradulu allu treilea si allu patrulea in celle mai multe casuri nepracticabila, matematicii au cautatu metode speciale ca sa deslege aceste ecalitati, candu coefficientii loru suntu numerici; aceste metode dau ensa in genere numai resultate approssimative si se gasescu espuse in teori'a generala a ecalitatiloru care constitue un'a din partile superiore alle Algebrei.

CAPITOLU IV.

POTERI SI RADICINI ALLE ESPRESSIUNILORU ALGEBRICE.

§ 1. OPERATIUNI CU MONOME.

Din regulile immultirei resulta co, ca sa redicamu unu monomu la ua potere, redicamu la aceea potere pre coefficientulu numericu si pre fia-care littera in parte, immultindu esponentii loru cu esponentulu poterei la care se redica monomulu; resultatulu va avea acellasi semnu cu monomulu datu, candu esponentulu acesta este impariu, era totu de una semnulu $+$, candu acesta este pariu.

Essemplu.

$$(\pm 3a^3b^7x^5)^3 = \pm 27a^9b^{21}x^{15};\ (\pm 3a^3b^7x^5)^4 = +81a^{12}b^{28}x^{20}.$$

Ca sa estragemu dera radicin'a m a unui monomu trebue sa estragemu in parte pre aceea a coefficientului numericu si a fia-carei littere in parte, impartindu esponentii loru cu indicele radicinei. Radicin'a va avea acellasi semnu cu monomulu datu, candu indicele radicinei este impariu, era candu acesta este pariu radicin'a pote avea in generalu amenduoe semnele $+$ si $-$.

Essemplu.

$$\sqrt[4]{a^8b^{12}} = \pm a^2b^3;\ \sqrt[3]{-27a^3b^6c^{15}} = -3ab^2c^5.$$

In generalu va fi dera : $(a^m)^n = a^{mn}$ si candu n va fi unu numeru intregu, va fi si $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

De aici resulta co potemu scote ua littera de sub unu radicalu, estragendu'i radicin'a aretata prin indice, si vice-versa potemu pune sub unu radicalu ua littera care lu immultiescé redicandu-o la poterea aretata prin indicele radicalului.

Essemple :

1. $\sqrt[3]{16a^6bc^3d^2} = \sqrt[3]{2^3a^6c^3 2bd^2} = 2a^2c\sqrt[3]{2bd^2}$

2. $ac^3\sqrt[5]{bx^2} = \sqrt[5]{a^5c^{15}bx^2}$.

3. $(a-x)\sqrt{ax} = \sqrt{(a-x)^2ax}$.

Ca sa adunamu seu sa scademu duoe radicale, operamu ca si cu esnressiunile algebrice rationale, reducendu radicalele asemenea.

Radicale asemenea numimu acelle cari nu se deosebescu de catu prin coefficientii cari le immultiescu; spre essemplu : $5a\sqrt[3]{bc^4}, -3c\sqrt[3]{bc^4}, 7x\sqrt[3]{bc^4}$, cari potu fi redusse, spre ess. : $5a\sqrt[3]{bc^4} + 7x\sqrt[3]{bc^4} - 3c\sqrt[3]{bc^4} = (5a+7x-3c)\sqrt[3]{bc^4}$.

Potemu face ca ori cate radicale sa aiba acellasi indice, precum se face cu reductiunea fractiuniloru la acellasi numitoru. Potemu immulti seu imparti indicele unui radicalu cu unu numeru intregu si positivu ore-care fara ca radicalulu sa si scambe valorea, deca vomu immulti totu de ua data cu acellasi numeru si esponentulu catimei de sub radicalu; astufeliu : $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$.

In adeveru plecandu din identitatea $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$, si redicandu ambi membri la poterea n, gasimu : $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = a^n$, de unde estragendu radicin'a mn : $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$.

Ca sa immultimu duoe radicale seu sa le impartimu, le aducemu la acellasi indice si apoi scriemu tote catimile sub unu radicalu comunu.

Essemplu.

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^n}\times\sqrt[mn]{b^m}=\sqrt[mn]{a^nb^m};\ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[mn]{a^n}}{\sqrt[mn]{b^m}}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}.$$

In adeveru $\left(\frac{\sqrt[mn]{a^n}}{\sqrt[mn]{b^m}}\right)^{mn}$ va fi dupre regul'a redicarei fractiuniloru la ua potere $=\frac{\left(\sqrt[mn]{a^n}\right)^{mn}}{\left(\sqrt[mn]{b^m}\right)^{mn}}=\frac{a^n}{b^m}$; dera si $\left(\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}\right)^{mn}=\frac{a^n}{b^m}$.
Duoe catimi ecale cu ua a treia fiindu si intre elle ecale resulta :

$$\frac{\sqrt[mn]{a^n}}{\sqrt[mn]{b^m}}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}.$$

Ca sa redicamu unu radicalu la ua potere, redicamu catimea de sub radicalu la aceea potere :

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)=\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a}\ldots,\ \text{seu}\ \left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a.a.a\ldots}=\sqrt[m]{a^n}.$$

Ca sa estragemu radicin'a unui radicalu, o estragemu din catimea de sub radicalu. Sa insemnamu cu x radicin'a necunosuta n a radicalului $\sqrt[m]{a}$, adico

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=x;$$

sa redicamu ambi membrii la poterea n :

$$\sqrt[m]{a}=x^n;$$

si era la poterea m, adico :

$$a=x^{mn}=(x^m)^n.$$

Sa estragemu acum successivu radicin'a n si apoi radicin'a m :

$$\sqrt[n]{a}=x^m;\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=x.$$

Din ecalitatea de mai susu $a=x^{mn}$ resulta ensa $x=\sqrt[mn]{a}$, si $x=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, de unde: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$; adico, ca sa estragemu radicin'a n a unui radicalu, potemu enca immulti indicele radicalului cu numerulu n.

Esponenti fractionari. Candu la estragerea radicinei n a monomului a^m, m nu se imparte essactu cu n, atunci aretamu numai acesta impartire si ne invoimu sa consideramu si in casulu acesta ca ecivalente espressiunile $a^{\frac{m}{n}}$ si $\sqrt[n]{a^m}$, adico co: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$. Esponentulu $\frac{m}{n}$ este atunci fractionaru. Totu prin aceeasi conventiune applicamu catimiloru affectate cu esponenti fractionari acelleasi operatiuni ca si catimiloru cu esponenti intregi. Astu-feliu spre essemplu:

1. $a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}$; pentru co:

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\times\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq}\times a^{np}}$$
$$=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}.$$

2. $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

3. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}=a^{\frac{mp}{nq}}$.

§ 2. RONDUIRI, PERMUTARI, COMBINARI.

Avendu mai multe catimi, objecte seu littere, potemu sa le asiediamu una langa alta in differite moduri, luandu-le pre tote, seu numai cate duoe, trei, patru, etc. Aceste differite asiediari se potu face numai intr'unu numeru limitatu de moduri cu unu numeru limitatu de objecte. Acestu numeru pre care ne vomu propune aici sa lu aflamu, este de ua importantia mare pentru formarea poteriloru binomeloru si alle polinomeloru, precum si la differite alte parti alle analysei matematice.

Ronduiri se numescu tote grupele cari se potu forma cu unu numeru datu de objecte luate cate *2, 3, 4*, etc.; fia-care objectu intra numai ua data in fia-care grupa. Fia R_m^n numerulu ronduiriloru de m littere cate n; R_m^{n-1} acell'a de m littere cate $n-1$; R_m^{n-2} de m littere cate $n-2$, si asia mai inainte; R_m^1 de m littere cate *1*, adico $R_m^1=m$. Sa ne inchipuimu co amu formatu tote ronduirile R_m^{n-1}; ca sa formamu pre acellea R_m^n, trebue la fia-care grupa R_m^{n-1} sa mai adaogamu pre rondu fia-care din litterile lasate, cari suntu $m-(n-1)$ seu $m-n+1$; asia dera fia-care grupa din R_m^{n-1} va fi luata de $(m-n+1)$ ori si prin urmare:

$$R_m^n=(m-n+1)\ R_m^{n-1}.$$

Scambandu aici pre rondu pre n in $n-1, n-2, \dots 2, 1,$ aflamu:

$$\begin{aligned} R_m^{n-1}&=(m-n+2)\ R_m^{n-2}\\ R_m^{n-2}&=(m-n+3)\ R_m^{n-3}\\ R_m^{n-3}&=(m-n+4)\ R_m^{n-4}\\ &\vdots\\ R_m^2&=(m-1)\ R_m^1\\ R_m^1&=m. \end{aligned}$$

Immultindu tote aceste ecalitati impreuna cu aceea de mai susu si scotiendu factorii comuni la ambi membrii:

$$R_m^n=m(m-1)(m-2)\dots(m-n+3)(m-n+2)(m-n+1).$$

Acesta formula ne da numerulu ronduiriloru de m littere cate n, si sa observamu co numerulu factoriloru este n.

Permutari se numescu grupele cari se potu forma cu m littere asiediate in tote modurile possibile; permutarile suntu dera nisce ronduiri de m littere cate m. Sa insemnamu cu P_m numerulu loru si sa observamu co dupre formul'a de mai susu avemu :

$$P_m = R_m^m = m(m-1)(m-2)\dots(m-m+2)(m-m+1)$$

de unde scambandu rondulu factoriloru :

$$P_m = 1.2.3.4\dots(m-2)(m-1)m.$$

Acestu productu de m numere $1.2.3\dots m$ se numesce cate ua data ua *facultate* si se insemnedia pentru prescurtare cu $m!$

Combinari se numescu grupele cari se potu forma cu m littere luate cate n, astu-feliu ensa in catu duoe grupe sa se deosebesca cellu pucinu printr'una din litterile cari se afla intr'ensele.

Ca sa aflamu numerulu de combinari ce potemu forma cu m littere luate cate n, adico C_m^n, sa ne inchipuimu anteiu co le amu formatu pre tote si le amu inscrisu intr'ua colona verticala; in fia-care grupa a acestei colone care cuprinde n littere sa formamu tote permutarile alle carora numeru sa lu insemnamu ca si mai susu cu P_n si sa le scriemu pre lini'a orizontala; totalitatea grupeloru astu-feliu formate va esprima prin urmare ronduirile de m littere cate n si numerulu loru va fi R_m^n. Dera acestu numeru se pote enca afla immultindu numerulu grupeloru din colon'a verticala, adica C_m^n, cu numerulu grupeloru din fia-care rondu orizontalu, adico P_n, si va fi $= C_m^n \times P_n$. De aici urmedia : $C_m^n \times P_n = R_m^n$, de unde : $C_m^n = \frac{R_m^n}{P_n}$; puindu in loculu lui R_m^n si P_n valorile loru de mai susu, aflamu numerulu combinariloru de m littere cate n, adico :

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots n}.$$

Teorema. Numerulu combinariloru de m littere cate n este ecalu cu acell'a de m littere cate $m-n$. In adeveru la fia-care grupa din C_m^n de catu n littere correspunde ua alta grupa de $m-n$ littere cari au remasu. Astu-feliu $C_m^n = C_m^{m-n}$ seu :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m-n)}.$$

Acesta se pote enca demonstra si prin aducerea acestoru duoe espresiuni la acellasi numitoru; atunci fractiunile cari resulta voru avea si numeratorii loru ecali si voru fi ecale intre elle.

§ 3. FORMUL'A BINOMULUI LUI NEWTON.

Candu voimu sa redicamu unu binomu la ua potere superiora la a duoa seu la a treia, operatiunile devinu lungi si ostenitore; essista ensa ua regula data de *Newton* spre a forma ori-care potere m a unui binomu datu si care pote fi applicata si la polinome.

Sa formamu mai anteiu productulu de m factori binomiali cari se deosbescu numai prin allu duoilea termenu :

$$(x+a)(x+b) = x^2 + \left.\begin{array}{l} a \\ +b \end{array}\right| x + ab;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + \left.\begin{array}{l} a \\ +b \\ +c \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} ab \\ +ac \\ +bc \end{array}\right| x + abc;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + \left.\begin{array}{l} a \\ +b \\ +c \\ +d \end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{l} ab \\ +ac \\ +bc \\ +bd \\ +ad \\ +cd \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \end{array}\right| x + abcd;$$

si asia mai inainte.

De aci se vede co cellu d'anteiu termenu allu productului de m factori $(x+a)(x+b)\ldots\ldots$ este formatu de poterea m a lui x adico este x^m;

Allu duoilea termenu cuprinde pre x la poterea $m-1$, avendu de coefficientu summ'a litteriloru $a, b, c \ldots m$;

Allu treilea termenu cuprinde pre x la poterea $m-2$, avendu de coefficientu summ'a producteloru litteriloru $a, b, c \ldots m$ luate cate duoe;

Allu n^{-lea} termenu seu termenulu generalu cuprinde pre x la poterea $m-(n-1)$ seu $m-n+1$, adico x^{m-n+1}, avendu de coefficientu summ'a producteloru a acestoru m littere luate cate $n-1$;

Allu $(m+1)^{lea}$ seu cellu din urma termenu cuprinde pre x la poterea 0 si este formatu numai de productulu celloru m littere $a, b, c \ldots m$.

La desvoltarea acesta a productului de m factori binomiali $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+m)$ sa supunemu co $a=b=c=\cdots=m$, atunci productulu se scamba in $(x+a)(x+a)(x+a)\ldots(x+a)$, adico intr'unu productu de m factori ecali si esprima poterea m a binomului $x+a$, adico $(x+a)^m$; coefficientulu poterei x^{m-1} devine $a+a+a+\cdots=ma$; coefficientulu poterei x^{m-2} devine: $aa+ac+bc+\cdots=a^2+a^2+\cdots$ adico a^2 luatu de atatea ori catu este numerulu producteloru de m littere cate 2, adico numerulu combinariloru de m littere cate 2, adico $=\dfrac{m(m-1)}{1.2}$; coefficientulu poterei x^{m-3} devine: $abc+abd+bcd+\cdots=a^3+a^3+a^3\ldots$, seu a^3 luatu de atatea ori, catu este numerulu producteloru seu allu combinariloru de m littere cate 3, adico $\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ si asia mai inainte.

Coefficientulu termenului $n+1$ adico allu poterei x^{m-n} este ecalu cu a^n luatu de atatea ori, cate combinari potemu forma cu m littere luate cate n, adico

$$=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n};$$

cellu din urma termenu este $a.b.c\ldots=a^m$.

De aici resulta :

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}a^nx^{m-n}+\ldots+a^m.$$

Acesta formula porta numele de *binomulu lui Newton*. Poterile lui x mergu descrescendu cu ua unime; acellea alle lui a crescu cu ua unime; coefficientii se formedia dupre regul'a de mai susu. Astu-feliu coefficientulu termenului $n+1$ este ecalu cu numerulu combinariloru de m littere cate n; numerulu totalu allu termeniloru este $m+1$.

Regul'a esponentiloru si a poteriloru s'a generalisatu prin inductiune, conchidiendu de la 2, 3 termeni; se pote ensa completa demonstratiunea. Sa admitemu co aceste reguli suntu adeverate pentru esponentulu m si vomu demonstra co suntu asemenea adeverate si pentru esponentulu $m+1$; atunci regulile fiindu demonstrate pentru esponentulu $2, 3$ voru fi si pentru $4, 5, 6$ si in genere pentru ori-ce esponentu. Sa immultimu dera desvoltarea hypotetica de mai susu a binomului $(x+a)^m$ cu $x+a$, ca sa aflamu desvoltarea lui $(x+a)^{m+1}$; astu-feliu vomu gasi :

$$(x+a)^{m+1}=x^{m+1}+\left.\begin{matrix} m \\ +1 \end{matrix}\right| ax^m+\left.\begin{matrix} \dfrac{m(m-1)}{1\,.\,2} \\ +m \end{matrix}\right| a^2x^{m-1}+\cdots$$

$$+\left.\begin{matrix} \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n} \\ +\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)} \end{matrix}\right| a^nx^{m-n+1}+\cdots+\left.\begin{matrix} 1 \\ +m \end{matrix}\right| ax^m+a^{m+1}.$$

In acesta desvoltare coefficientulu termenului $n+1$ este:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)n}$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)}$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n-1}\left(\frac{m-n+1}{n}+1\right)$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)(m-n+1+n)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)n}$$

$$=\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m+1-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n},$$

si se vede co este formatu totu dupre aceeasi regula, adico este $=C^n_{m+1}$. Regul'a esponentiloru este evidenta.

Teorem'a I. Termenii ecalu departati de la estremi au acellasi coefficientu. Sa consideramu termenulu allu $n+1$ de la inceputu si pre allu $n+1$ de la finitu, care va fi allu $m+1-n-1$ socotitu de la inceputu seu allu $(m-n)^{\text{-lea}}$. Coefficientulu cellui d'anteiu va fi ecalu cu numerulu combinariloru de m littere cate n seu C^n_m; coefficientulu cellui-altu termenu va fi asemenea ecalu cu numerulu combinariloru de m littere cate $m-n$, seu C^{m-n}_m; dera amu vediutu mai susu la combinari co $C^n_m=C^{m-n}_m$.

Teorem'a II. Summ'a coefficientiloru binomiali este $=2^m$.

In desvoltarea binomului $(x+a)^m$ sa punemu $x=1$, $a=1$ si va fi : $2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}+\ldots+m+1.$$

Sa scambamu in binomulu lui Newton a in $-a$, atunci toti termenii desvoltarei lui $(x-a)^m$ in cari intra a la ua potere imparia voru lua semnulu $-$, astu-feliu gasimu :

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}+\ldots\ldots\pm a^m.$$

Sa facemu enca in formulele $(x+a)^m$ si $(x-a)^m$ $x=1$ si $a=x$:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ldots\ldots+x^m,$$

$$(1-x)^m=1-mx+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ldots\ldots\pm x^m.$$

Binomulu lui Newton care s'a demonstratu aici numai pentru poteri intregi si positive, este adeveratu pentru ori cari valori alle lui m; generalisarea acesta este ensa mai pucinu elementara.

§ 4. RADICIN'A PATRATA UNUI POLINOMU.

Ca sa estragemu radicin'a patrata a unui polinomu lu asiediamu dupre poterile descrescende alle unei littere; cellu d'anteiu termenu allu polinomului astu-feliu asiediatu va fi patratulu cellui d'anteiu termenu allu radicinei cerute; scademu acestu patratu si impartimu pre cellu d'anteiu termenu allu restului cu induoitulu termenului anteiu allu radicinei, ceea ce ne da unu allu duoilea termenu allu acesteia; immultimu cu acesta termenii aflati ai radicinei din cari cei d'anteiu suntu induoiti si scademu din polinomulu datu; impartimu era pre cellu d'anteiu termenu allu acestui allu duoilea restu cu induoitulu cellui d'anteiu termenu allu radicinei, si operamu asia mai inainte ca si la estragerea radicinei numeriloru. Dispositiunea calculiloru se vede in essemplulu urmetoru:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4 - 12ax^3 + 25a^2x^2 - 24a^3x + 16a^4 & 2x^2 - 3ax + 4a^2 \\
\underline{-4x^4} & \overline{4x^2 - 3ax} \\
0 \quad \underline{+12ax^3 - 9a^2x^2} & \quad\;\; \underline{-3ax} \\
\qquad\qquad +16a^2x^2 & 4x^2 - 6ax + 4a^2 \\
\qquad\qquad \underline{-16a^2x^2 + 24a^3x - 16a^4} & \qquad\qquad\quad +4a^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Essemple. Sa se estraga radicin'a patrata a polinomeloru :

1. $\sqrt{9x^2 - 30ax + 25a^2 + 5a^3 + \frac{a^4}{4}} = 3x - 5a + \frac{a^2}{2}.$

2. $\sqrt{4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4} = 2x^2 + 2ax + 4b^2.$

3. $\sqrt{9a^2 - 6ab + 30ac + 6ad + b^2 - 10bc - 2bd + 25c^2 + 10cd + d^2} = 3a - b + 5c + d.$

4. $\sqrt{9x^4 - 3ax^3 + 6bx^3 + \frac{a^2x^2}{4} - abx^2 + b^2x^2} = 3x^2 - \frac{ax}{2} + bx.$

5. $\sqrt{\frac{4}{9}a^2x^2 - \frac{4}{3}abx^3z + b^2x^2z^2 + \frac{8}{3}a^2bx^2z^2 - 4ab^2xz^3 + 4a^2b^2z^4} = \frac{2}{3}ax^2 - bxz + 2abz^2.$

CAPITOLU V.

SERII SI PROGRESSIUNI

Seria se numesce ua successiune de termeni in numeru nelimitatu cari deriva uni de alti dupre ua lege data. Numimu mai specialu *progressiune aritmetica* seu *prin differintia* ua seria in care differinti'a intre duoi termeni consecutivi este constanta; *progressiune geometrica* seu *prin catu,* ua seria in care catulu intre duoi termeni consecutivi este constantu.

§ 1. PROGRESSIUNI ARITMETICE

Ua progressiune aritmetica seu prin differintia

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,\ldots\ldots\, k \,.\, l$$

in care differinti'a constanta intre duoi termeni consecutivi este δ, pote fi scrisa:

$$a \,.\, a+\delta \,.\, b+\delta \,.\, c+\delta \,.\, d+\delta \,.\, e+\delta \ldots k+\delta,$$

seu enca $a \,.\, a+\delta \,.\, a+2\delta \,.\, a+3\delta \,.\, a+4\delta \ldots a+(n-1)\delta$, unde se supune co numerulu termeniloru este n; astu-feliu termenulu generalu l seu allu $n^{\text{-lea}}$ allu unei progressiuni aritmetice se gasesce prin formul'a:

$$l = a + (n-1)\delta.$$

Candu δ este positivu, atunci termenii progressiunei de mai susu mergu crescendu, adico progressiunea este *crescenda;* candu δ este negativu, atunci avemu ua progressiune *descrescenda*:

$$a \,.\, a-\delta \,.\, a-2\delta \,.\, a-3\delta \,\ldots\, a-(n-1)\delta.$$

Teorem'a I. Intr'ua progressiune aritmetica summ'a a duoi termeni ecalu departati de la estremi este constanta si ecala cu summ'a estremiloru.

Fia progressiunea :

$$a\,.\,b\,.\,c\,.\ldots.\,k\,.\ldots.\,p\,.\ldots.\,u$$

in care fia k termenulu allu $n^{\text{-lea}}$ de la inceputu si p termenulu allu $n^{\text{-lea}}$ incependu de la finitu; atunci u va fi asemenea termenulu allu $n^{\text{-lea}}$ incependu de la p si vomu avea, differinti'a fiindu era δ :

$$k=a+(n-1)\,\delta,\quad u=p+(n-1)\,\delta.$$

Scadiendu aceste ecatiuni vine :

$$k-u=a-p,\ \text{seu}\ k+p=a+u$$

si fiindu co summ'a estremiloru $a+u$ este constanta, urmedia ca si summ'a termeniloru k, p, ecalu departati de estremi, sa fia asemenea constanta.

Teorem'a II. Summ'a de n termeni unei progressiuni aritmetice este ecala cu cellu d'anteiu plus cellu din urma termenu, immultiti cu numerulu loru si impartiti cu 2.

Sa insemnamu summ'a acesta cu S, adico :

$$S=a+b+c+\ldots.+i+k+l;$$

seu

$$S=l+k+i+\ldots.+c+b+a;$$

adunandu aceste potriviri :

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots.+(a+l).$$

Numerulu parenteseloru este n si tote suntu ecale intre elle dupre teorem'a precedinte, de unde :

$$2S=n(a+l),\ \text{seu}\ S=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Problema. Dandu-ni-se duoe numere a si b, se cere sa aflamu alte n numere cari impreuna cu a si b sa formedie ua progressiune aritmetica. Fia x differinti'a necunoscuta intre duoi termeni consecutivi, seu *ratiunea* progressiunei cerute, si vomu avea progressiunea :

$$a \,.\, a+x \,.\, a+2x \,.\, .\, .\, .\, .\, b.$$

b fiindu termenulu allu $n+2$, lu potemu esprima precum urmedia :

$$b=a+(n+1)x,$$

de unde aflamu differinti'a necunoscuta x

$$x=\frac{b-a}{n+1}$$

si cunoscendu-o potemu forma pre toti termenii ceruti.

§ 2. PROGRESSIUNI GEOMETRICE.

Ua progressiune geometrica seu prin catu :

$$a : b : c : d : \ldots\ldots : k : l.$$

in care catulu constantu intre duoi termeni consecutivi este q, pote enca fi scrisa sub form'a :

$$a : aq : bq : cq : \ldots\ldots\ldots : kq,$$

seu $$a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots\ldots\ldots : aq^{n-1},$$

unde supunemu co numerulu termeniloru este n; astu-feliu termenulu generalu l seu allu n^{lea} va fi :

$$l=aq^{n-1}.$$

Candu progressiunea este crescenda, $q>1$; candu ea este descrescenda q este <1.

Teorem'a I. Productulu a duoi termeni ecalu departati de estremi este constantu si ecalu cu productulu estremiloru. Fia progressiunea :

$$a : b : c : \ldots\ldots : k : \ldots\ldots : p : \ldots\ldots : u;$$

k fiindu termenulu allu n de la inceputu, era p allu n de la finitu; va fi :

$$k=aq^{n-1}; \qquad u=pq^{n-1};$$

impartindu intre elle aceste duoe potriviri, vine :

$$\frac{k}{u}=\frac{a}{p},\ \text{seu}\ kp=au.$$

Teorema II. Productulu de n termeni consecutivi unei progressiuni geometrice este ecalu cu radicin'a patrata poterei n a productului cellui d'anteiu cu cellu din urma termenu :

Fia P acestu productu si vomu avea :

$$P=a\,.\,b\,.\,c\,\ldots\ldots k\,.\,l.$$

seu

$$P=l\,.\,k\,\ldots\ldots\ldots b\,.\,a$$

de unde prin immultire :

$$P^2=(al)(bk)\ldots.(al);$$

numerulu parenteseloru este n si tote suntu ecale intre elle, de unde :

$$P^2=(al)^n\quad \text{seu}\quad P=\sqrt{(al)^n}.$$

Teorema III. Summ'a de n termeni consecutivi unei progressiunei geometrice este ecala cu differinti'a intre cellu din urma termenu immultitu cu catulu q si cellu d'anteiu termenu, impartita cu differinti'a $q-1$; seu este ecala cu cellu d'anteiu termenu immultitu cu differinti'a q^n-1 si impartitu cu differinti'a $q-1$.

Sa insemnamu summ'a acesta cu S, adico :

$$S=a+b+c+\ldots+k+l;$$

sa immultimu amenduoi membri cu q, ceea ce da :

$$Sq=aq+bq+cq+\ldots+kq+lq,$$

seu

$$Sq=b+c+\ldots+l+lq.$$

Scadiendu din acèsta ecalitate pre ceea de mai susu vine :

$$Sq-S=lq-a,\ \text{de unde}\ S=\frac{lq-a}{q-1}.$$

$lq-a \quad aq^{n}-1\,a$

Deca observamu co $l = a^{q-1}$ va fi si

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}, \text{ seu } S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Aceste formule potu enca fi scrise, deca scambamu semnele la amenduoi termenii ai fractiunei, sub form'a :

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}, \quad S = a\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

si servescu pentru casulu unde q este < 1, adico candu progressiunea este descrescenda.

Formul'a din urma o potemu enca scrie sub form'a,

$$S = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q};$$

candu $q < 1$, poterile selle mergu descrescendu si deca consideramu unu numeru infinitu de termeni, adico $n = \infty$, atunci si $q^n = o$; asia dera in casulu acesta, summ'a termeniloru progressiunei descrescende, cu catu numerulu loru este mai mare, cu atatu se apropie mai multu de valorea espressiunei date prin formul'a :

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

Essemplu. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

Problema. Se cere ca intre duoe numere a, b sa punemu n termeni cari impreuna cu a si b sa formedie ua progressiune geometrica. Fia a catulu seu ratiunea necunoscuta a progressiunei cerute si vomu avea, observandu co numerulu totalu allu termeniloru este $n + 2$:

$$a, ax, ax^2, \ldots\ldots b, b = ax^{n+1},$$

$bx^{n+1} = a$

$x^{n+1} = a$

$x = \frac{a}{b}$

de unde aflamu catulu necunoscutu

$$x = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

Cunoscendu acestu catu, potemu lesne sa formamu progressiunea ceruta.

§ 3. DESPRE INTERESSE SI ANNUITATI

Teori'a interesseloru si annuitatiloru se basedia pre aceea a proportiuniloru si a progressiuniloru geometrice. Unu capitalu c datu la interessu de r la $^0/_0$ da intr'unu annu interessulu $\frac{cr}{100}$, era in n anni, interessulu $\frac{crn}{100}$ care impreuna cu capitalulu primitivu c da capitalulu definitivu C, adico

$$C = c + \frac{crn}{100} = c\left(1 + \frac{rn}{100}\right).$$

Candu la finitulu fia-carui annu interessulu se adaoga la capitalu, producendu si ellu in annulu urmetoru interessu nou, atunci dicemu co capitalulu primitivu este datu la interessu compusu. In teoria ne potemu inchipui co interessulu se impreuna in totu momentulu cu capitalu, ca sa maresca interessulu in momentulu urmetoru. Calcululu interessului compusu dupre acesta suppositiune cere cunoscintie de calculu infinitesimalu si apoi in transactiunile commerciale interessulu compusu se socotesce numai prin intervalle annuale, lunare, etc.

Fia c capitalulu datu pre n anni la interessu compusu de r $^0/_0$ pre annu; la finele annului anteiu acestu capitalu impreuna cu interessulu va pretiui

$$c\left(1 + \frac{r}{100}\right);$$

acesta summa considerata ca unu capitalu nouu va pretiui la finele annului allu duoilea :

$$c\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \left(1 + \frac{r}{100}\right) = c\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2;$$

la finele annului allu treilea vomu avea

$$c\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)=c\left(1+\frac{r}{100}\right)^3;$$

astu-feliu vomu avea pentru capitalulu definitivu C peste n anni :

$$C=c\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

Acesta formula, fiindu ua relatiune intre patru catimi, pote servi la deslegarea de patru probleme differite; este destulu sa ni se dea trei din aceste catimi si vomu potea determina pre a patra.

Candu cunoscemu capitalulu definitivu C si ceremu capitalulu seu valorea actuala c, avemu ua problema de scontu, atunci

$$c=\frac{C}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$$

Candu ni se cere procentulu r cu care trebue sa damu unu capitalu c, ca preste n anni sa devia C, punemu ecalitatea sub form'a

$$\frac{r}{100}=\sqrt[n]{\frac{C}{c}}-1,$$

unde potemu calcula radicalulu $\sqrt[n]{\frac{C}{c}}$ cu ajutorulu logaritmiloru.

Candu necunoscut'a este n, applicamu logaritmii (vedi teori'a loru) si aflamu

$$n=\frac{\log C-\log c}{\log\left(1+\frac{r}{100}\right)},$$

candu $C = 2c$, $\qquad n = \dfrac{\log 2}{\log\left(1+\dfrac{r}{100}\right)}$.

Annuitate se numesce ua summa fissa care se da pre fiacare annu la interessu, insummandu-se cu celle din annii precedenti. Annuitatile servescu obicinuitu pentru amortisare seu rafuire de datorii cu termenu lungu.

Sum. a data la annu I sta la inter. n anni si pret. $a\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n$

» a » » II » » $n-1$ » » $a\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{n-1}$

» a » » III » » $n-2$ » » $a\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{n-2}$

. . . .

» a » » $n-1$ » » 2 » » $a\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2$

» a » » n » » 1 » » $a\left(1+\dfrac{r}{150}\right)$

Summ'a totala va fi :

$$A = a\left(1+\frac{r}{100}\right)\left\{1+\left(1+\frac{r}{100}\right)+\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+\ldots\ldots + \left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-2}+\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}\right\}.$$

Observandu co termenii scrisi in parentese formedia ua progressiune geometrica a carei catu este $1+\dfrac{r}{100}$ si facendu summ'a acestei progressiuni vine

$$A = a\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1}{\frac{r}{100}}.$$

Si acesta formula pote deslega patru classe de probleme, dupre cum va fi A, a, r seu n catimea necunoscuta. Pentru esercitiu propunemu problem'a urmetore :

Unu statu imprumutandu-se cu *15000000* lei cu interessu de $3^0/_0$ pre annu vrea sa scia cata summa x trebue sa platesca la finitulu fia carui annu, ca sa se rafuesca de acesta datoria preste *30* de anni.

Ecalitatea de care depinde solutiunea acestei probleme este

$$15000000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}=x\frac{(1,03)^{30}-1}{0,03}$$

de unde $$x=\frac{450000(1,03)^{30}}{(1,03)^{30}-1}.$$

Ca allu duoilea essercitiu propunemu aceeasi problema, ensa cu interessu simplu; atunci ecalitatea de care depinde deslegarea ei va fi :

$$15000000\times\left(1+\frac{3\times30}{100}\right)=x\left(1+\frac{3\times29}{100}\right)$$
$$+x\left(1+\frac{3\times28}{100}\right)+\cdots\cdots+x\left(1+\frac{3\times1}{100}\right)+x,$$
$$15000000\times\left(1+\frac{3\times30}{100}\right)=x\left(30+\frac{3}{100}\cdot\frac{30\times29}{2}\right),$$

de unde se pote calcula x.

§ 4. CELLE D'ANTEIU NOTIUNI DESPRE SERII IN GENERALU SI DESPRE CONVERGINTI'A LORU.

Ua seria se numesee *converginta*, candu summ'a termeniloru sei se apropie de ua limita constanta cu atatu mai multu, cu catu adunamu unu numeru mai mare de termeni; aceea limita se numesçe *summ'a* seriei. Seri'a se numesce *diverginta*, candu summ'a termeniloru sei se departedia de ori-ce limita fissa, cu catu adunamu unu numeru mai mare de termeni. Unu essemplu de ua seria converginta ne da progressiunea geometrica de mai susu :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots \text{ pene la infinitu,}$$

a carei summa amu gasitu-o $= 2$; cu catu adunamu unu numeru mai mare de termeni, cu atatu ne apropiemu de summ'a 2.

Ca sa pota fi ua seria converginta, trebue ca termenii ei sa pota descresce necontenitu si deveni mai mici de catu ori-ce catime data; caci altu-feliu luandu unu numeru mare de termeni, summ'a loru pote deveni mai mare de catu ori ce catime data si seri'a nu mai converge catre ua limita fissa. Dera acesta conditiune singura nu este destula spre a conchide co seri'a este in realitate converginta, coci essista serii diverginte alle caroru termeni mergu descrescendu si potu deveni mai mici de catu ori-ce catime data; spre es. seri'a numita *armonica*.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n+1}+\ldots$$

Cu tote co termenii acestei serii descrescu si potu deveni mai mici de catu ori-ce catime data, seri'a nu este convergenta, si summ'a ei pote deveni mai mare de catu ori-ce catime data, de vomu lua numai unu numeru de termeni destulu de mare.

In adeveru seri'a acesta pote fi scrissa :

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)+\left(\frac{1}{4n+1}+\cdots+\frac{1}{8n}\right)+\cdots\cdots$$

Numerulu termeniloru din aceste parentese este $n, 2n, 4n, 8n\ldots$

si observandu co cellu din urma termenu din fia-care parentesa este mai micu de catu cei-alti, vomu avea :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>n\times\frac{1}{n}=1;$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots\frac{1}{4n}>2n\times\frac{1}{4n}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}+\ldots+\frac{1}{8n}>4n\times\frac{1}{8n}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{8n+1}+\frac{1}{8n+2}+\ldots+\frac{1}{16n}>8n\times\frac{1}{16n}=\frac{1}{2};$$

si asia mai inainte.

Asia dera seri'a propusa este $>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ldots$, adico mai mare de catu $1+\frac{1}{2}$ luata de unu numeru nemarginitu de ori, pote deveni mai mare de catu ori-ce catime data si este divergenta.

Teorema I. Ua seria $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, u_{n+1}\ldots$ este convergenta, candu, de la unu termenu inainte, rapportulu unui termenu catre precedintele seu este mai micu de catu unu numeru fissu mai micu de catu unimea. Fia $k<1$ acestu numeru si vomu avea :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<k,\ \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<k,\ \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}<k,\text{ etc.};$$

seu : $u_{n+1}<ku_n,\ u_{n+2}<ku_{n+1},\ u_{n+3}<ku_{n+2},\ldots\ldots;$

seu : $u_{n+1}<ku_n,\ u_{n+2}<k^2u_n,\ u_{n+3}<k^3u_n,\ \ldots\ldots;$

de unde prin adunare :

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots\ldots<ku_n+k^2u_n+k^3u_n+\ldots\ldots$$

De aici resulta co de la termenulu u_n inainte summ'a termeniloru seriei date este mai mica de catu aceea a unei progresiunei geometrice descrescende $ku_n + k^2u_n + k^3u_n + \ldots\ldots$ allu carei catu este $k < 1$. Dera amu vediutu mai susu (despre progres. geom., Teor. III.) co summ'a acestei din urma este $\frac{ku_n}{1-k}$, adico unu numeru constantu; de unde urmedia co si seri'a propusa ai caria termeni suntu mai mici de catu acei ai progressiunei este convergenta.

De vomu face summ'a celloru d'anteiu n termeni ai seriei,

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n$$

lepedandu pre cei alti: $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots\ldots$ gresial'a pre care o commitemu este mai mica de catu $\frac{ku_n}{1-k}$.

Essemplu. Seri'a: $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$

$$+ \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} + \ldots$$

este convergenta, pentru co rapportulu:

$$\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} : \frac{x^n}{1.2\ldots n} = \frac{x}{n+1},$$ pote deveni mai micu de catu unimea, candu luamu pre n destulu de mare. Luandu summ'a celloru d'anteiu $n+1$ termeni

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

dreptu summ'a seriei intregi commitemu ua erore

$$< \frac{\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}} \cdot \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Candu $x = 1$, seri'a devine:

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots,$$ era erorea $< \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots n}$.

Acesta seria este importanta la teori'a logaritmiloru si in alte parti alle analisei matematice; summ'a ei o insemnamu cu litter'a $e = 2{,}7182818284\ldots$

Teorema II. Ua seria cu termenii descrescendu pene la nulla si alternativu positivi si negativi este convergenta.

Fia seri'a:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \cdots\cdots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \cdots\cdots$$

pre care o potemu scrie si sub celle duoe forme:

$$(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + u_n) - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \cdots\cdots$$

si $(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + u_n - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_{n+3})$

$$+ (u_{n+4} - u_{n+5}) + \cdots\cdots$$

de unde se vede co summ'a seriei propuse este:

$$< u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_n$$

si $\qquad > u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_n - u_{n+1}$,

prin urmare se afla cuprinsa intre duoe limite alle caroru differinti'a este u_{n+1} si pote deveni mai mica de catu ori ce catime data.

Ua espressiune algebrica pote fi transformata intr'ua seria, in differite moduri. Ca sa transformamu spre essemplu espresiunile $\sqrt{1+x}$, $\sqrt{1-x}$ in serii, le scriemu sub form'a $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ si le desvoltamu dupre formul'a binomului lui Newton, admitendu precum se va demonstra mai inante co acesta formula este adeverata pentru ori ce esponentu:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots\cdots$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \cdots\cdots$$

Espresiunile $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$ le transformamu in serii seu prin impartire, seu puindu-le sub form'a $(1+x)^{-1}$, $(1-x)^{-1}$ si desvoltandu dupre binomulu:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots;$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

aceste patru serii suntu forte convergente, candu x este forte micu.

Teori'a derivateloru si metod'a coefficientiloru arbitrarii ne conducu mai sicuru la desvoltarea unei espressiuni algebrice in seria.

§ 5. NUMERE FIGURATE; TRIANGHIULU LUI PASCAL.

	1	1	1	1	1	1	1	...
I	1	2	3	4	5	6	7	...
II	1	3	6	10	15	21	28	...
III	1	4	10	20	35	56	84	...
IV	1	5	15	35	70	126	210	...
V	1	6	21	56	126	252	462	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

	I	II	III	IV	V	...
1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Numerele figurate formedia na classa de serii dupre principiulu urmetoru: sa ne inchipuimu 1 scrisa pre ua linia orizontala de mai multe ori; sa adunamu 1, 2, 3 termeni ai acestei serii si resultatele sa le scriemu pre ua a duoa linia orizontala, formandu astu-feliu seri'a numeriloru naturali:

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\ldots..$$

seu numerile figurate de ordinulu I. — Sa adunamu era pre cei d'anteiu duoi, trei, patru,.... termeni ai acestei seriei si vomu forma ua seria noua scrisa in a treea linia orizontala, adico : $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots\ldots$ seu numerile figurate de ordinulu allu II-a, numite si numere trigonale. Asemenea vomu forma numerile din rondulu allu patrulea seu numerile figurate de ordinulu allu III-a, numite si piramidale, si asia mai inainte.

Aceste differite ordine de numere figurate le potemu asiedía si sub form'a unui trianghiu care porta si numele de trianghiulu lui Pascal.

Teorema I. Termenulu allu n din seri'a m este ecalu cu summ'a celloru d'anteiu n termeni ai seriei $m-1$; s. ess. termenulu allu 6-ea din seri'a IV, adico $126=1+4+10+20+35+56$. Acesta resulta din modulu in care s'a formatu tabelulu acesta.

Teorema II. Termenulu allu n din seri'a m este coefficientulu termenului $m+1$ din desvoltarea poterei $n+m-1$ a binomului lui Newton, seu potemu enca dice co este ecalu cu numerulu combinariloru formate cu $n+m-1$ littere luate cate m, adico insemnandu pre acestu termenu cu $T_{n,m}$ va fi :

$$T_{n,m}=\frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+m-1-[m-1]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots m}$$

$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots m};$$

Sa admitemu co teorem'a acesta este adeverata pentru seri'a m si pentru cei $n-1$ termeni d'anteiu ai seriei $m+1$, teorem'a va fi generala, candu vomu demonstra co este adeverata si pentru termenulu n din seri'a $m+1$.

Dupre teorem'a anteia avemu :

$$T_{n,\;+1}=T_{n-1,\;+1}+T_{n,}$$

[illegible]re sunt sterse la noi [illegible]?

dera prin suppositiune :

$$T_{n,m}=\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-1)}{1\;.\;2\ldots\ldots\ldots m},$$

$$T_{n-1,m+1}=\frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots m(m+1)},$$

prin urmare :

$$T_{n,m}+T_{n-1,m+1}=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\;.\;2\ldots\ldots\ldots m}\left(1+\frac{n-1}{m+1}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\;.\;2\ldots\ldots\ldots m}\times\frac{m+n}{m+1}$$

$$=\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-1)(m+n)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m(m+1)};$$

si in fine : $T_{n,m+1}=\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m)}{1\;.\;2\;\ldots\ldots(m+1)};$

Asia dera si termenulu n din seri'a $m+1$ este formatu totu dupre acellasi principiu. Toti termenii din seri'a I fiindu coefficienti binomiali, precum si cei d'anteiu termeni: $1, 3, 6\ldots$ din seri'a II, urmedia co si allu 4-lea, prin urmare si allu 5-lea, etc. termenu din acesta seria va fi formatu dupre regul'a coefficientiloru binomiali; si era allu 2-lea termenu 4 din seri'a III fiindu unu coefficientu binomialu, urmedia co si allu 3-lea, allu 4-lea, etc. voru fi asemenea formati si asia mai inante.

Din aceste duoe teoreme resulta co summ'a $S_{n,m}$ a celloru n d'anteiu termeni ai numereloru figurate de ordinulu m, fiindu ecala cu termenulu allu n allu numereloru figurate de ordinulu $m+1$, adico $=T_{n,m+1}$, va fi esprimata prin formul'a :

$$S_{n,m}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-1)(n+m)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\;m(m+1)}.$$

Applicandu acesta formula la numerele figurate de ordinulu I gasimu : $S_{n,1} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2}$, formul'a cunoscuta din progressiunile aritmetice.

Pentru numerele trigonale (de ordinulu allu II) gasimu :

$$S_{n,2} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + \dots$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Pentru numerele piramidale seu de ordinulu allu III :

$$S_{n,3} = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + \dots$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4};$$

si asia mai inainte, unde numerulu termeniloru in fia-care seria este n.

§ 6. GRAMEDI DE CORPURI SFERICE.

Corpuri sferice, precum glontie, ghiulele, etc., se potu asiedia in grupe largi la basa si mai anguste la verfu. Numerulu ghiuleleloru de ua asemenea grupa depinde de form'a si dimensiunile basei. Numerele figurate ne voru servi pentru a determina numerulu ghiuleleloru unoru grupe, spre essemplu a celloru cu basa triangulara, patrata si rectangulara.

Ghiulele asiediate intr'ua asemenea grupa triangulara, formedia straturi cari incependu de susu, cuprindu una, trei, sesse, diece, etc. ghiulele, prin urmare summ'a loru este : $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \dots =$ cu summ'a numereloru figurate de ordinulu allu II-lea ; asia dera n fiindu numerulu strateloru, S summ'a ghiuleleloru, vomu avea :

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Ghiulelele asiediate intr'ua grupa patrata, formedia straturi cari incependu de susu cuprindu una, patru, noue, etc. ghiulele, si summ'a totala represinta summ'a patrateloru numeriloru naturale, adico :

$$1+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+n^2$$

seu $$1+4+9+16+\ldots\ldots+n^2$$

pre care o potemu descompune in duoe serii triangulare, adico :

$$1+4+9+16+\ldots\ldots+n^2$$

$$\left.\begin{array}{l} =1+3+6+10+\ldots\ldots+\dfrac{n(n+1)}{2} \\ \quad +1+3+6+\ldots\ldots+\dfrac{(n-1)n}{2} \end{array}\right\}=S_{n,2}+S_{n-1,2}.$$

Dera avemu dupre formul'a generala :

$$S_{n,2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},\ S_{n-1,2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}$$

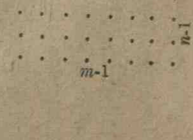
de unde :

$$S_{n,2}+S_{n-1,2}=\frac{n(n+1)}{6}(n+2+n-1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

asia dera :

$$1+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

Ua grupa rectangulara este formata de straturi rectangulare cari, incependu de josu, cuprindu $m\times n$, $(m-1)(n-1)$, $(m-2)(n-2)$, etc. ghiulele; stratulu superioru este formatu numai de unu siru de ghiulele in numeru de $m-(n-1)$. Summ'a totala a ghiuleleloru va fi :



$$S = m\times n + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \ldots\ldots + (m-[n-1])(m-[n-1]);$$

desfaçendu fia care termenu in trei producte, vine :

$$S = mn + mn + mn + \ldots + mn + 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2 - \left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right)(m+n)$$

$$= mn^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(m+n)n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n}{6}\left\{6mn + (n-1)(2n-1) - 3(m+n)(n-1)\right\},$$

seu : $S = \frac{n}{6}\left\{6mn + 2n^2 - 3n + 1 - 3mn - 3n^2 + 3m + 3n\right\}$

$$= \frac{n}{6}\left\{3mn - n^2 + 3m + 1\right\} = \frac{n}{6}\left\{3m(n+1) - (n^2-1)\right\},$$

si in fine : $S = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$

CAPITOLU VI.

NOTIUNI DESPRE FRACTIUNILE CONTINUE.

Valorea unui numeru x care nu este intregu o potemu esprime prin cellu mai mare intregu a cuprinsu intr'ensu plus ua fractiune de form'a $\frac{1}{y}$; astu-feliu $x = a + \frac{1}{y}$. Numerulu y pote fi intregu, seu unu intregu b plus ua fractiune $\frac{1}{z}$; astu-feliu:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{z}};$$

z va fi asemenea ecalu cu $c + \frac{1}{u}$, si asia mai inainte. Potemu dera pune pre x sub form'a urmatore:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}$$

Ua asemenea espressiune se numesce *fractiune continua* si este formata de unu intregu (care pote fi si $= 0$) si de ua fractiune allu carei numeratoru este 1, era numitorulu se compune de unu intregu plus ua fractiune allu carei numeratoru este erasi *1*, era numitorulu unu intregu plus ua fractiune, si asia mai inainte.

Fractiunile intermediare : $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \ldots\ldots$ se numescu fractiuni *integrante* seu *partiale*. Numerele $a, b, c\ldots$ se numescu *caturi necomplete*; era espressiunile :

$$\frac{a}{1}, a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}, a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{(bc+1)a+c}{bc+1}, \text{ etc.}$$

adico ua fractiune ordinara, ecala cu ua parte a fractiunei continue luata de la inceputu, se numesce *redusa* seu *fractiune convergenta*.

Ca sa transformamu ua fractiune ordinara in fractiune continua, operamu ca si pentru aflarea cellui mai mare comunu impartitoru intre numeratorulu si numitorulu fractiunei date; caturile successive formedia caturile incomplete alle fractiunei continue cerute, pre care atunci lesne o potemu forma. Impartirile successive spre aflarea divisorului comunu, fiindu in numeru limitatu, urmedia co si fractiunea continua se va termina, adico va fi compusa de unu numeru limitatu de fractiuni partiale. Fractiunile diecimale avendu de numitoru *1* urmata de cate-va nulle, nu se deosebescu de fractiunile comune si reductiunea loru in fractiuni continue se face totu in accellasi modu.

Essemplu.

$$\frac{271}{608}=\frac{1}{\frac{608}{271}}=\frac{1}{2+\frac{66}{271}}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{271}{66}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{7}{66}}}=\text{etc.}$$

Aflarea cellui mai mare comunu divisoru :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|l} & 2 & 4 & 9 & 2 & 3 & \text{caturi incomplete} \\ \hline 608 & 271 & 66 & 7 & 3 & 1 & \end{array}$$

de unde :

$$\frac{271}{608}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3.}}}}}$$

Ua fractiune continua o transformamu in fractiune ordinara prin reductiuni successive. Astu-feliu ca sa transformamu fractiunea :

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\dots\cfrac{}{+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\dots\text{ etc.}}}}}}}$$

in fractiune comuna, formamu redusele consecutive :

$$\frac{a}{1},\ a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b};\ a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1},$$

si asia mai 'nainte.

Pentru formarea reduseloru successive avemu ua regula forte importanta cuprinsa in teorem'a urmetore.

Teorema I. Numeratorulu R allu unei reduse se gasesce immultindu pre acell'a N allu redusei precedinte cu catulu incompletu r correspundiatoru la cea-d'anteiu si adaogandu numeratorulu M allu redusei ante-precedinte; numitorulu R se afla totu prin acelleasi operatiuni applicate la numitorii N_1 si M_1; astu-feliu $\frac{M}{M_1}$, $\frac{N}{N_1}$, $\frac{R}{R_1}$ fiindu trei reduse consecutive, vomu avea:

$$R = Nr + M, \quad R_1 = N_1 r + M_1 \text{ si } \frac{R}{R_1} = \frac{Nr+M}{N_1 r + M_1}.$$

Sa supunemu co acesta teorema este adeverata pentru $\frac{R}{R_1}$; ea va fi generala, deca o vomu demonstra si pentru redus'a urmetore $\frac{S}{S_1}$. — Acesta din urma se pote forma din $\frac{R}{R_1}$ puindu in loculu catului incompletu r espressiunea $r + \frac{1}{s}$, astu-feliu va fi:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{N\left(r+\frac{1}{s}\right)+M}{N_1\left(r+\frac{1}{s}\right)+M_1} = \frac{(Nr+M)s+N}{(N_1 r+M_1)s+N_1};$$

dera $Nr + M = R$, $N_1 r + M_1 = R_1$, dupre supositiune, de unde:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{Rs+N}{R_1 s + N_1};$$

de unde se vede co redus'a $\frac{S}{S_1}$ se formedia din $\frac{R}{R_1}$ si $\frac{N}{N_1}$, precum $\frac{R}{R_1}$ din $\frac{N}{N_1}$ si $\frac{M}{M_1}$; dera formarea acesta este adeverata pentru a treia redusa $\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$ care s'a formatu din celle precedinti $\frac{ab+1}{b}$ si $\frac{a}{1}$ conformu regulei date, prin urmare va fi adeverata si pentru a 4-a, a 5-a redusa, etc.

Teorema II. Numeratorulu differintiei a duoe reduse consecutive $\frac{M}{M_1}$ si $\frac{N}{N_1}$ este ± 1, dupre cum redus'a din care scademu este de rangu pariu seu impariu, incependu a numera de la anteia redusa $\frac{a}{1}$ care pote fi si $=0$; differinti'a ensasi va fi:

$$\frac{N}{N_1}-\frac{M}{M_1}=\frac{\pm 1}{M_1N_1}.$$

Sa consideramu mai multe reduse consecutive $\frac{M}{M_1}, \frac{N}{N_1}, \frac{R}{R_1}, \frac{S}{S_1}$ si sa formamu differintiele:

$$\frac{N}{N_1}-\frac{M}{M_1}=\frac{NM_1-N_1M}{N_1M_1},$$

$$\frac{R}{R_1}-\frac{N}{N_1}=\frac{Nr+M}{N_1r+M_1}-\frac{N}{N_1}=-\frac{NM_1-MN_1}{R_1N_1};$$

de unde se vede co differintiele successive au tote acellasi numeratoru NM_1-MN_1 si numai semnulu se scamba de la una la alta. Differinti'a intre redus'a a duoa $\frac{ab+1}{b}$ si anteia $\frac{a}{1}$ fiindu $\frac{1}{b}$, urmedia co $NM_1-MN_1=\pm 1$.

Redusele suntu fractiuni nereductibile, pentru co deca termenii fractiunei $\frac{N}{N_1}$ voru avea unu factoru comunu, acesta ar fi trebuitu sa impartia membrulu anteiu allu potrivirei $NM_1-MN_1=\pm 1$; ceea ce nu se pote, pentru co membrulu allu duoilea, unimea, nu are altu impartitoru de catu unimea ensasi.

Teorem'a III. Valorea fractiunei continue x este mai mica de catu ori-care redusa de rangu pariu $\frac{N}{N_1}$ si mai mare de catu ori ce redusa de rangu impariu $\frac{R}{R_1}$.

Sa observamu mai anteiu co x resulta din valorea redusei $\frac{R}{R_1}=\frac{Nr+M}{N_1r+M_1}$, substituindu in loculu lui r espressiunea

$$r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{t+\cdots}}$$

pre care pentru prescurtare o insemnamu cu y; asia va fi :

$$x=\frac{Ny+M}{N_1y+M}$$

si prin urmare :

$$x-\frac{M}{M_1}=\frac{Ny+M}{N_1y+M_1}-\frac{M}{M_1}=+\frac{y}{(N_1y+M_1)M_1}$$

$$x-\frac{N}{N_1}=\frac{Ny+M}{N_1y+M_1}-\frac{N}{N_1}=-\frac{1}{(N_1y+M_1)N_1}$$

differinti'a anteia fiindu positiva, era a duoa negativa, urmedia co $x>\frac{M}{M_1}$ si $<\frac{N}{N_1}$.

Valorea x a fractiunei continue fiindu cuprinsa intre duoe reduse consecutive $\frac{M}{M_1}$ si $\frac{N}{N_1}$, gresiala pre care o commitemu candu luamu pre un'a din acestea in loculu valorei essacte x, este mai mica de catu differinti'a loru $\pm\left(\frac{M}{M_1}-\frac{N}{N_1}\right)$ seu $\pm\frac{1}{M_1N_1}$.

Teorema IV. Ua redusa se apropie de valorea x a fractiunei continue cu atatu mai multu cu catu va fi de unu rangu superioru.

In adeveru facendu differintiele pre cari le amu avutu si in teorem'a precedinte :

$$x-\frac{N}{N_1}=\frac{Ny+M}{N_1y+M_1}-\frac{N}{N_1}=-\frac{1}{(N_1y+M_1)N_1},$$
$$x-\frac{M}{M_1}=\frac{Ny+M}{Ny+M_1}-\frac{M}{M_1}=\frac{y}{(Ny+M_1)M_1},$$

vedemu co, netinendu sema de semne, antei'a este mai mica de catu a duoa; pentru co numeratorulu ei 1, este mai micu de catu acell'a y allu differintiei a duoa, era numitorulu cellei d'anteiu este mai mare de catu numitorulu d'allu duoilea, pentru co $N_1 > M_1$.

Teorema V. Ua redusa ore-care $\frac{N}{N_1}$ se apropie de valorea essacta x a fractiunei continue mai multu de catu ori-ce alta fractiune $\frac{m}{n}$ cu tèrmeni mai mici, in care $m < N$ si $n < N_1$.

x fiindu cuprinsu intre duoe reduse consecutive $\frac{M}{M_1}, \frac{N}{N_1}$, trebue ca si $\frac{m}{n}$ sa fia cuprinsu intre acelleasi reduse, coci altufèliu s'ar departa mai multu de x; de aici urmedia :

$$\frac{m}{n}-\frac{M}{M_1}<\frac{N}{N_1}-\frac{M}{M_1} \text{ seu } \frac{mM_1-nM}{nM_1}<\frac{1}{N_1M_1}.$$

Ca sa esiste acesta nepotrivire trebue ca $n > N_1$, fiindu co numeratorulu $mM_1 - nM$, ca ua diferintia de duoe numere intregi, nu pote fi mai micu de catu 1. Asemenea se demonstredia co $m > N$, pentru ca $\frac{m}{n}$ fiindu cuprinsa intre $\frac{M}{M_1}$ si $\frac{N}{N_1}$, trebue ca si invers'a $\frac{n}{m}$ sa fia cuprinsa intre inversele $\frac{M_1}{M}$ si $\frac{N_1}{N}$ adico :

$$\frac{n}{m} - \frac{M_1}{M} < \frac{M_1}{M} - \frac{N_1}{N},$$

seu :

$$\frac{nM - mM_1}{mM} < \frac{1}{MN} \text{ (in valore absoluta).}$$

De unde se vede co fractiunea $\frac{m}{n}$ nu esprima valorea x mai essactu de catu $\frac{N}{N_1}$, de catu numai deca $m > N$ si $n > N_1$.

Ua catime nerationala seu necommensurabila nu pote fi transformata intr'ua fractiune continua limitata; coci formandu redusele successive alle acestei din urma, amu transforma-o, deca ar fi limitata, intr'ua fractiune ordinara, care, fiindu catime commensurabila, nu pote fi ecala cu catimea nerationala propusa.

Ua fractiune continua se numesce periodica, candu fractiunile partiale se reproducu in aceeasi ordine. Sa transformamu de ess. numerulu $\sqrt{15}$ intr'ua fractiune continua; pentru acesta observamu co cellu mai mare patratu cuprinsu in *15* este *9*; prin urmare potemu pune :

$$\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{x}$$

ca sa determinamu pre x avemu : $\frac{1}{x} = \sqrt{15} - 3$, de unde :

$$x=\frac{1}{\sqrt{15}-3}=\frac{\sqrt{15}+3}{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)}=\frac{\sqrt{15}+3}{6}=1+\frac{1}{y}.$$

si pentru determinarea lui y avemu :

$$\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{15}+3}{6}-1=\frac{\sqrt{15}-3}{6},$$

de unde :

$$y=\frac{6}{\sqrt{15}-3}=\frac{6(\sqrt{15}+3)}{15-9}=\sqrt{15}+3=6+\frac{1}{z}.$$

Pentru z gasimu erasi :

$$\frac{1}{z}=\sqrt{15}-3;\ z=\frac{1}{\sqrt{15}-3}=\frac{\sqrt{15}+3}{6}=1+\frac{1}{y}.$$

De unde se vede ca z este ecalu cu x si prin urmare de aici inante se voru repeti totu acelleasi caturi incomplete; de aici resulta fractiunea continua periodica :

$$\sqrt{15}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}$$

Teorema VI. Ua fractiune continua periodica este un'a din radicinile unei ecalitatiei de gradulu allu duoilea cu coefficienti rationali.

Fia fractiunea continua periodica :

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ddots + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ddots + \cfrac{1}{n + \ldots}}}}}} \qquad \text{seu} \qquad x = a + \cfrac{1}{b + \ddots + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{x}}}$$

sa insemnamu cu $\frac{M}{M_1}$ si $\frac{N}{N_1}$ celle duoe din urma reduse alle periodului si vomu avea :

$$x = \frac{Nx + M}{N_1 x + M_1}$$

care representa ua ecalitate de gradulu allu duoilea despre x si da:

$$N_1 x^2 + (M_1 - N)x - M = 0.$$

Deca fractiunea continua este mista :

$$y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \ddots + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \ddots + \cfrac{1}{s + \ldots}}}}}}}} \qquad \text{seu} \qquad y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{x}}}$$

x insemnandu periodulu, atunci insemnandu ca si mai susu cu $\frac{M}{M_1}$ si $\frac{N}{N_1}$ celle din urma reduse alle periodului, era cu $\frac{U}{U_1}$ si $\frac{V}{V_1}$, pre acellea alle partiei neregulate, vomu avea :

$$y = \frac{Vx + U}{V_1 x + U_1},\ x = \frac{Nx + M}{N_1 x + M_1};$$

eliminandu pre x, gasimu ua ecalitate de gradulu allu duoilea despre y.

Fractiunile continue gasescu intre altele ua applicatiune si la deslegarea ecalitatiloru nedeterminate de gradulu anteiu cu duoe necunoscute : $ax + by = c$.

Sa transformamu catulu $\frac{b}{a}$ intr'ua fractiune continua; fia $\frac{m}{n}$ penultim'a redusa si vomu avea dupre teorem'a a duoa :

$$\frac{m}{n} - \frac{b}{a} = \pm \frac{1}{an},\ \text{seu}\ am - bn = \pm 1;$$

immultindu cu $\pm c$:

$$\pm cam \mp bnc = c$$

de unde :

$$x = \pm mc,\ y = \mp nc.$$

Cunoscendu astu-feliu ua pereche de valori alle lui x si y potemu afla si valorile generale dupre teoremele date in Cap. II, § 7 ; astu-feliu va fi :

$$x = \pm mc + bt,\ y = \mp nc - at.$$

a $N = b^x$ $x = \log n$

CAPITOLU VII.

b

LOGARITMII

---

§ 1. PROPRIETATILE LOGARITMILORU

Logaritmulu unui numeru se numesce esponentulu poterei la care trebue sa redicamu unu altu numeru constantu, numitu *basa*, ca sa producemu pre cellu d'anteiu. Astu-feliu b fiindu unu numeru pre care lu amu alesu dupre voia ca sa represinte bas'a, x esponentulu poterei la care trebue sa redicamu bas'a b ca sa producemu ~~unu numeru N,~~ va fi :

$$N = b^x \text{ si } x = \log N.$$

Dupre acesta difinitiune a logaritmiloru este claru co, candu mai multe numere formedia ua progresiune geometrica, logaritmii loru voru forma ua progresiune aritmetica. In adeveru fia progresiunea numeriloru cu catulu q :

$$N : N_1 : N_2 : N_3 : \ldots\ldots \text{ seu } N : Nq : Nq^2 : Nq^3 : \ldots\ldots$$

si $N = b^x$, $q = b^\delta$, astu-feliu in catu termenii acestei progresiunei potu fi scrisi dupre cum urmedia :

$$b^x : b^x \times b^\delta : b^x \times b^{2\delta} : b^x \times b^{3\delta} : \ldots\ldots,$$

seu
$$b^x : b^{x+\delta} : b^{x+2\delta} : b^{x+3\delta} : \ldots;$$

de unde vedemu co esponentii x, $x+\delta$, $x+2\delta$, etc., adico logaritmii numeriloru N, N_1, $N_2 \ldots$, formedia ua progresiune aritmetica cu diferinti'a δ, care este

$$x \,.\, x+\delta \,.\, x+2\delta \,.\, x+3\delta \ldots.$$

De essemplu numerile scrise mai josu, pre a duoa linia orizontala, suntu logaritmii numeriloru din lini'a anteia, rapportati la bas'a *2* :

$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 \ldots$ numere
$0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 \ldots$ logaritmi

Asemenea si progresiunile urmatore, unde bas'a este *10* :

$1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots$ numere
$0 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots$ logaritmi.

Bas'a logaritmiloru comuni, calculati de englesulu *Briggs* este *10*; inventatorulu logaritmiloru este erasi unu matematicu englesu *Neper* seu *Napier* care calculase logaritmii numiti *naturali* seu *hyperbolici* seu si *neperiani*, dupre ua alta basa insemnata cu litter'a $e = 2,7182818284 \ldots$ care este ua fractiune diecimala nelimitata si represinta summ'a unei serii converginte (vedi Cap. V, § 4)*).

---

*) In aritmetica se considera logaritmii ca termenii unei progresiunei aritmetice, era numerele ca termenii correspundiatori ai unei progresiunei geometrice; se intiellege ensa co acestu modu de a represinta logaritmii este mai pucinu practicu. Cu ajutorulu unei prolixitatiei mai mari se pote funda teori'a elementara a logaritmiloru si pre acesta basa. Ecca duoe teoreme caroru se da ua importantia in acesta teoria :

I. Inchipuindune progresiunea numereloru

$$a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots aq^n : aq^{n+1} : \ldots\ldots$$

se probedia co differinti'a $aq^{n+1} - aq^n = aq^n(q-1)$ intre duoi termeni consecutivi pote deveni mai mica de catu ori ce catime data, deca q, remanendu > 1, differa de 1 cu ua catime forte mica; pentru co atunci factorulu $q-1$ tinde catre *nulla* si differinti'a $aq^{n+1} - aq^n$ ensasi devine mai mica de catu ori ce catime.

II. Se pote gasi in progressiunea de mai susu unu termenu aq^n care sa se apropie de unu numeru datu N catu de multu voimu. In adeveru termenii acestei progressiunei crescendu fara limita, vomu gasi pre unulu din ei de ess $aq^{n+1} > N$, astu-feliu in catu N va fi cuprinsu intre aq^n si aq^{n+1}, si fiindu-co acesti duoi termeni potu differi intre ei catu de pucinu voimu, urmedia co differinti'a intre fia-care din ei si N va fi mai mica de catu ori ce catime data.

Teorema I. Logaritmulu unui productu de mai multi factori este ecalu cu summ'a logaritmiloru factoriloru. Fia numerele N, N_1, N_2,... si logaritmii loru x, x_1, x_2,... luati dupre ua basa ore-care b; va fi :

$$N = b^x,\ N_1 = b^{x_1},\ N_2 = b^{x_2},\ldots..$$

si
$$x = \log N,\ x_1 = \log N_1,\ x_2 = \log N_2,\ldots$$

immultindu intre elle aceste ecalitati aflamu :

$$N N_1 N_2 \ldots = b^x \times b^{x_1} \times b^{x_2} \ldots = b^{x + x_1 + x_2 + \ldots}$$

dupre regul'a immultirei poteriloru acelleiasi littere. De aici resulta co summ'a $x + x_1 + x_2 + \ldots$, fiindu esponentulu poterei la care trebue sa redicamu bas'a b ca sa formamu productulu : $N N_1 N_2 \ldots.$, represinta logaritmulu acestui productu, adico :

$$\log(N N_1 N_2 \ldots) = x + x_1 + x_2 \ldots$$

seu puindu in loculu lui x, x_1, x_2... valorile loru de mai susu :

$$\log(N N_1 N_2 \ldots) = \log N + \log N_1 + \log N_2 + \ldots$$

Teorema II. Logaritmulu catului de duoe numere este ecalu cu logaritmulu deimpartitului minus acell'a allu impartitorului, seu logaritmulu unei fractiunei este ecalu cu logaritmulu numeratorului, minus acell'a allu numitorului; astu-feliu :

$$\log(N : N_1) = \log \frac{N}{N_1} = \log N - \log N_1.$$

Din $N = b^x$, $N_1 = b^{x_1}$, resulta :

$$N : N_1 = b^x : b^{x_1} = b^{x - x_1},$$

de unde : $\log(N : N_1) = x - x_1 = \log N - \log N_1$.

Teorema III. Logaritmulu poterei m a unui numeru este ecalu cu logaritmulu acestui numeru immultitu cu esponentulu m.

Fia $N = b^x$, de unde : $N^m = b^{mx}$, prin urmare :

$$\log(N^m) = mx$$

si in fine : $$log(N^m) = m\, log\, N.$$

Teorema IV. Logaritmulu unui radicalu este ecalu cu logaritmulu catimei de sub radicalu, impartitu cu indicele radicalului; astu-feliu :

$$log\sqrt[m]{N} = \frac{log\, N}{m}.$$

Fia $N = b^x$, de unde $\sqrt[m]{N} = \sqrt[m]{b^x} = b^{\frac{x}{m}}$; asia dera :

$$log\sqrt[m]{N} = \frac{x}{m}, \text{ prin urmare : } log\sqrt[m]{N} = \frac{log\, N}{m}.$$

Bas'a logaritmiloru b trebue sa fia unu numeru differitu de unime, $<$ seu < 1; pentru co 1 redicatu la ori-ce potere nu pote produce altu numeru de catu pre sine insusi.

Candu $b > 1$, adico candu bas'a este > 1, atunci resulta din $N = b^x$ co x va fi > 0 candu $N > 1$ si devine cu atatu mai mare, cu catu numerulu N cresce; de aici resulta co, candu $b > 1$, tote numerele mai mari de catu 1 au logaritmi positivi si cu atatu mai mari cu catu numerulu ensusi este mai mare.

Candu numerulu $N < 1$, atunci potemu sa lu punemu sub form'a $\frac{1}{N_1} = \frac{1}{b^{x_1}}$, N_1 fiindu acum > 1 si $x_1 > 0$; potemu ensa sa scriemu acesta din urma potrivire si $\frac{1}{N_1} = b^{-x_1}$, de unde resulta co, candu $b > 1$, logaritmulu unei fractiunei < 1 este negativu. Acesta resulta si din teorem'a II.

Candu $N_1 = \infty$, atunci $\frac{1}{N_1} = 0$ si potrivirea $\frac{1}{N_1} = \frac{1}{b^{x_1}}$ devine $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{b^\infty} = b^{-\infty}$, seu : $0 = b^{-\infty}$; asia dera candu $b > 1$, logaritmulu lui 0 este infinitulu negativu.

Logaritmii comuni fiindu calculati dupre bas'a *10* care este > 1, totu ce s'a disu pene acum se applica la ei.

Candu $b < 1$, adico candu bas'a este < 1, N fiindu unu numeru > 1, va fi :

$$N = \frac{1}{b^x} = b^{-x}; \ \frac{1}{N} = b^x; \ \frac{1}{\infty} = b^{\infty};$$

asia dera in casulu acesta, numerele > 1 au logaritmi negativi, numerele < 1 au logaritmi positivi si logaritmulu lui *0* este infinitulu positivu.

Bas'a, fiindu totu de una unu numeru positivu, nu pote prin redicarea la poteri sa produca numere negative, de aceea s'au esclusu din table logaritmii numereloru negative.

Dupre ceea ce s'a disu pene acum, se vede co logaritmii comuni ai numereloru *1, 10, 100, 1000, 10000* ..... suntu *0, 1, 2, 3, 4*..... Tote celle alte numere cuprinse intre *1* si *10*, adico *2, 3, 4*..... au logaritmii < 1 esprimati in diecimale; numerele intre *10* si *100*, adico *11, 12, 13*.... au logaritmii loru intre *1* si *2*, prin urmare ecali cu una plus ua fractiune diecimala; logaritmii numeriloru intre *100* si *1000* sunt ecali cu duoe plus ua fractiune diecimala si asia mai inainte. Partea intrega a unui logaritmu se numesce cate ua data si *caracteristica.*

Logaritmulu unui numeru de 10^n ori mai mare de catu unu altu N are la caracteristica n unimi mai multu de catu logaritmulu acestui din urma; era partea diecimala este comuna la amenduoi logaritmi, pentru co dupre teorem'a I :

$$log\,(10^n \times N) = log\,10^n + log\,N = n + log\,N.$$

Tote numerele cuprinse intre 10^n si 10^{n+1} suntu compuse de $n+1$ ciffre, era logaritmii loru fiindu cuprinsi intre n si $n+1$, au caracteristic'a n; de unde resulta co logaritmulu unui numeru are la caracteristica atatea unimi intregi, cate ciffre are numerulu, mai pucinu una.

Logaritmulu unei fractiuni diecimale, spre ess. $0,0005 = \frac{5}{10000}$, se gasesce scadiendu $log\ 10000$ care este $=4$ din $log\ 5$, adico :

$$log\ 0,0005 = log\ 5 - log\ 10000 = 0,69897 - 4.$$

Pentru prescurtare vomu scrie :

$$log\ 0,0005 = \bar{4},69897,$$

unde partea diecimala este positiva, era numai caràcteristic'a este negativa; de unde se vede co logaritmii fractiuniloru diecimale mai mici de catu 1 au caracteristic'a negativa, si numerulu unimiloru ce ea cuprinde este aretatu prin rangulu ce occupa dupre virgula ceea d'anteiu ciffra semnificativa a diecimalei.

§ 2. FORMAREA SI USULU TABLELORU DE LOGARITMI.

Sa vedemu acum cum s'au potutu calcula table de logaritmi. Sa luamu unu numeru N si sa ne propunemu sa ii aflamu logaritmulu x. Dupre definitiunea logaritmiloru avemu : $N=b^x$; cautamu mai anteiu poterea basei b care se apropie forte multu de N, fara ensa ca sa lu intreca; fia m acesta potere si vomu potea scrie pre x sub form'a : $x = m + \frac{1}{y}$; astu-feliu va fi :

$$N = b^{m+\frac{1}{y}} = b^m \times b^{\frac{1}{y}},$$

de unde :

$$b^{\frac{1}{y}} = \frac{N}{b^m} = b_1,$$

de unde $b = b_1^y$, adico ua ecatiune de aceeasi forma ca si $N=b^x$. Cautamu era cea mai mare potere a lui b_1 care se apropie de b, fara ca sa lu intreca, si insemnandu-o cu n, vomu avèa :

$$y = n + \frac{1}{z} \text{ si } b = b_1^{n+\frac{1}{z}} = b_1^n \times b_1^{\frac{1}{z}},$$

de unde
$$b_1^{\frac{1}{z}} = \frac{b}{b_1^n} = b_2$$

si in fine $b_1 = b_2^z$. Fia era p cellu mai mare intregu cuprinsu in z, si vomu avea :

$$z = p + \frac{1}{u} \text{ si } b_1 = b_2^{p+\frac{1}{u}} = b_2^p \times b_2^{\frac{1}{u}};$$

de unde : $b_2^{\frac{1}{u}} = \frac{b_1}{b_2^p} = b_3$ si $b_2 = b_3^u$ si asia mai inante.

Substituindu in x aceste valori alle lui $y, z \ldots$, gasimu pre x esprimatu printr'ua fractiune continua.

$$x = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cdots}}$$

si astu-feliu potemu sa determinamu logaritmulu x allu lui N cu ori cata approssimatiune vomu voi.

Aceste operatiuni suntu camu lungi, si intentiunea nostra a fostu numai de a areta possibilitatea de a calcula logaritmii numeriloru. Dupre ce s'au calculatu logaritmii prin asemenea metode grele, s'au inventatu alte metode multu mai espeditive pentru calcularea loru, despre cari vomu vorbi mai tardiu.

Cunoscendu ua sistema de logaritmi dupre ua basa b potemu sa trecemu la ua alta, adico sa aflamu logaritmii dupre ua alta basa b_1, fara ca sa avemu trebuintia sa calculamu enca ua data si directu pre aceste din urma. Unu numeru N pote fi represintatu dupre aceste duoe base prin $N = b^x$ si $N = b_1^{x_1}$, unde $x = log\, N$ si $x_1 = log_1\, N$.

Ca sa determinamu pre x_1 adico logaritmulu lui N dupre bas'a b_1, sa applicamu logaritmii cunoscuti dupre bas'a b la potrivirea : $N = b_1^{x_1}$ si va veni :

$$log\, N = x_1 \times log\, b_1,$$

de unde aflamu :

$$x_1 = log_1 N = \frac{log\, N}{log\, b_1} = \frac{1}{log\, b_1} \times log\, N.$$

Ca sa aflamu dera logaritmii numereloru dupre ua basa noua b_1, immultimu pre toti logaritmii dupre bas'a vechie b cu ua catime constanta $\frac{1}{log b_1}$, numita *modulu*, pre care o calculamu ua data pentru totu-de-una, impartindu unimea cu logaritmulu basei cellei noue, luatu in sistem'a cea vechie.

Dupre aceste principii ne potemu servi la ori-ce calculu de logaritmi; dispositiunea loru nu este aceeasi la tote tablele de logaritmi si fia-care din elle este insocita de ua instructiune esplicativa a dispositiunei logaritmiloru. Đera tote tablele se compunu in principiu de duoe colone verticale alaturate, intitulate un'a *Numeru* si ceea-alta *Logaritmu*; ceea d'anteiu cuprinde tote numerele intregi incependu de la *1*, era a duoa, logaritmii loru dupre bas'a *10* cu *5*, *6* seu *7* diecimale. Astufeliu candu ni se da unu numeru, lu cautamu in table, si gasimu in dreptulu lui logaritmulu lui si vice-versa, candu ni se da logaritmulu, cautamu in dreptulu lui numerulu care i corespunde.

Candu ni se da unu $\left\{\begin{array}{l}\text{numeru *)}\\ \text{logaritmu}\end{array}\right\}$ care nu se afla in table si

---

*) Candu numerulu este prea mare, s. e. 2067315, lu impartimu cu 1000 si cautamu logaritmulu lui 2067,315 la care adaogamu pre urma enca 3 unimi; numerulu 2067,315 este cuprinsu intre numerele consecutive 2067 si 2068.

ni se cere $\left\{\begin{matrix}\text{logaritmulu}\\ \text{numerulu}\end{matrix}\right\}$ lui, cautamu in table duoe $\left\{\begin{matrix}\text{numere}\\ \text{logaritmi}\end{matrix}\right\}$ consecutive intre cari sa fia cuprinsu $\left\{\begin{matrix}\text{numerulu}\\ \text{logaritmulu}\end{matrix}\right\}$ datu, aflamu differinti'a intre acésta si cellu mai micu din celle duoe $\left\{\begin{matrix}\text{numere}\\ \text{logaritmi}\end{matrix}\right\}$ din tabla si asiedamu proportiunea :

Differinti'a 1 a acelloru duoe numere consecutive se are catre differinti'a logaritmiloru loru, care obicinuitu se afla in table inscrisa intr'ua a treea colona, precum diferinti'a $\left\{\begin{matrix}\text{cunoscuta}\\ \text{necunoscuta}\end{matrix}\right\}$ intre numerulu $\left\{\begin{matrix}\text{datu}\\ \text{cerutu}\end{matrix}\right\}$ si cellu mai micu din numerele consecutive din table, catre diferinti'a $\left\{\begin{matrix}\text{necunoscuta}\\ \text{cunoscuta}\end{matrix}\right\}$ intre logaritmulu $\left\{\begin{matrix}\text{cerutu}\\ \text{datu}\end{matrix}\right\}$ si acell'a allu acestui din urma numeru ; calculamu termenulu necunoscutu in acesta proportiune, lu adaogamu la cellu mai micu din $\left\{\begin{matrix}\text{logaritmi}\\ \text{numere}\end{matrix}\right\}$ consecutive si resultatulu va fi $\left\{\begin{matrix}\text{logaritmulu}\\ \text{numerulu}\end{matrix}\right\}$ cerutu correspundiatoru la $\left\{\begin{matrix}\text{numerulu}\\ \text{logaritmulu}\end{matrix}\right\}$ datu.

§ 3. CATIMI SI ECALITATI ESPONENTIALE

Numimu catimi esponentiale, nisce catimi cunoscute afectate de esponenti necunoscuti, spre ess. a^x, b^x, c^y... Candu esponentulu este necunoscutu, atunci aceea esponentiala se numesce de gradulu seu ordinulu anteiu; candu esponentulu ensusi este ua catime esponentiala, atunci catimea se numesce ua esponentiala de gradulu seu ordinulu allu duoilea, spre es. a^{b^x}, si asia mai inainte.

Ecalitate esponentiala se numesce ua ecalitate in care intra catimi esponentiale, seu in care necunoscutele se afla la esponentu; gradulu ei se determina dupre gradulu esponentialeloru ce cuprinde.

Logaritmii potu servi de multe ori la deslegarea seu cellu pucinu la transformarea de nisce asemenea ecalitati in ecalitati algebrice.

Fia spre ess. ecalitatea : $a^x = b$; applicandu logaritmii aflamu :

$$x \log a = \log b \text{ de unde : } x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Fia enca ecalitatea $a^{b^x} = c$, applicandu era logaritmii vine :

$$b^x \times \log a = c, \text{ de unde } b^x = \frac{c}{\log a} = c_1;$$

applicandu enca ua data logaritmii, vine :

$$x \log b = \log c_1, \text{ de unde : } x = \frac{\log c_1}{\log b}.$$

Sa luamu ecalitatea esponentiala de ordinulu anteiu :

$$Aa^{mx+m_1} + Bb^{nx+n_1} + Cc^{px+p_1} = 0$$

sa o scriemu sub forma :

$$Aa^{m_1} . a^{mx} + Bb^{n_1} . b^{nx} + Cc^{p_1} . c^{px} = 0$$

seu

$$A'a^{mx} + B'b^{nx} + C'c^{px} = 0;$$

sa punemu $b = a^\beta$, $c = a^\gamma$, β si γ fiindu necunoscute cari se potu determina prin logaritmi :

$$\beta = \frac{\log b}{\log a}, \ \gamma = \frac{\log c}{\log a},$$

si va fi

$$A'a^{mx} + B'a^{\beta nx} + C'a^{\gamma px} = 0;$$

puindu $a^x = y$, ajungemu la ecalitatea algebrica :

$$A'y^{m} + B'y^{\beta n} + C'y^{\gamma p} = 0$$

in care esponentii suntu cunoscuti. Candu vomu afla din acesta ecalitate valorea lui y, vomu potea determina pre aceea a lui x din ecalitatea esponentiala $a^x = y$ care da:

$$x \log a = \log y; \text{ de unde } x = \frac{\log y}{\log a}.$$

Probleme. I. Sa se afle valórea lui x din ecalitatea:

$$a^{mx} \times b^{nx} = c.$$

Respunsu: $$x = \frac{\log c}{m \log a + n \log b}.$$

II. Sa se afle x din ecalitatea $3^x = 177147$.

Respunsu: $x = 11$.

III. Sa se resolve ecalitatile:

$$\log x - \log y = \log n, \quad ax + by = c.$$

Respunsu: $x = \dfrac{nc}{an + b}$, $y = \dfrac{c}{an + b}$.

IV. $Log\, x = \dfrac{1}{2} \log a - \dfrac{1}{4} \log b$.

Respunsu: $$x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}.$$

V. Sa se afle ecalitatea de unde a provenitu valorea urmatore a lui x: $x = \dfrac{h \log c + k \log d - f \log a - g \log b}{m \log a + n \log b - p \log c - q \log d}$.

Respunsu: $a^{mx+f} b^{nx+g} = c^{px+h} d^{qx+k}$.

CAPITOLU VIII.

CELLE D'ANTEIU NOTIUNI DIN TEORI'A DERIVATELORU

§ 1. NOTIUNI PRELIMINARIE; DERIVATELE FUNCTIUNILORU ALGEBRICE

Ua catime a carei valore depinde de aceea a altoru catimi se numesce *functiunea* acestoru din urma. Era acestea se numescu *variabile* seu *variabile independente* alle functiunei. Astu-feliu : $y=f(x)$, $z=\varphi(x,y)$, $z=F(x,t)$, $u=\psi(x,y,z)$ areta co y depinde intr'unu modu ore-care de x, co z depinde de x si y, si asia mai inainte.

Ua functiune se dice *continua* intre duoe limite date, candu variabilele ei variandu fara intreruptiune, functiunea trece asemenea fara intreruptiune prin tote valorile possibile intre acelle duoe limite.

Limita unei functiunei se numesce valorea catre care tinde, candu variabilele de care depinde convergu ensasi catre limite determinate.

Ioan Bernouilli si *Leibnitz* au generalisatu cei d'anteiu notiunea de functiune; mai inainte ua functiune erà ua potere a unei littere, spre ess. x^m.

Candu ua catime x variedia intr'unu modu continuu, ne potemu inchipui co aceea catime x priimesce in totu momentulu unu crescementu, ua variatiune (positiva deca catimea cresce, negativa deca descresce) catu de mica, mai mica de catu ori-ce catime data, si acestu crescementu infinitu de micu lu numimu *differentialulu* catimei x, seu *incrementulu* ei si lu insemnamu cu caracteristic'a d, seu dx.

Ua asemenea variatiune correspunde si la functiunea $y = f(x)$ care depinde de variabil'a x; acesta se numesce era differentialulu functiunei y seu $f(x)$ si se areta prin aceeasi caracteristica d, adico dy, seu $df(x) = f(x + dx) - f(x)$.

Rapportulu intre differentialulu unei functiunei si acell'a allu variabilei selle independente, seu rapportulu intre variatiunea unei functiuni si variatiunea correspundiatore a variabilei selle, amenduoe variatiunile considerate ca infinitu de mice, se numesce *catu differentialu*, seu *coefficientu differentialu*, seu *derivata*. Acestu rapportu, seu functiunea derivata $\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$, pre care o insemnamu pentru prescurtare si $f'(x)$, areta enca iutiela cu care variedia functiunea primitiva $f(x)$ in urma scambariloru variabilei selle. In adeveru, deca ne inchipuimu co variabil'a independenta este timpulu, era functiunea spatiulu percursu, catulu impartirei a spatiului cu timpu, adico $\frac{df(x)}{dx}$, areta spatiulu percursu in unimea de timpu, adico iutiel'a cu care spatiulu este percursu.

Derivat'a fiindu in generalu ua functiune a variabilei independente x, va fi ensasi supusa la variatiuni, candu acesta din urma se scamba; va avea prin urmare, ca si ori-ce alta functiune a variabilei x, differentialulu $df'(x)$ si derivat'a ei $\frac{df'(x)}{dx}$ seu $f''(x)$, care va esprima era iutiel'a cu care se scamba derivat'a anteia. Derivat'a $\frac{df'(x)}{dx}$ seu $f''(x)$ a derivatei $f'(x)$

se numesce *derivata a duoa* seu *de ordinulu allu II-lea*; asemenea va fi ua derivata a III-a seu de ordinulu allu III-lea; derivata a IV-a seu de ordinulu allu IV-lea si asia mai inainte.

Studiulu rapporturiloru, allu relatiuniloru cari essista intre functiunile primitive si derivatele loru, formedia ua ramura speciala si ceea mai importenta a matematicei, numita *calculu differentialu si integralu*, seu *calculu infinitesimalu*, descoperitu pre la a duoa diumetate a secolului allu XVII, de la 1656 incoce. Glori'a acestei descoperirei, cellei mai mari in domenulu sciintieloru teoretice, revine la duoi matematici mari, *Leibnitz* si *Newton*, cellu d'anteiu germanu si cellu d'allu duoilea englesu. Fia-care din ei a facutu inventiunea lui independentu de cellu-altu, plecandu din punturi de vedere differite si amenduoe metodele se completedia; metod'a lui Leibnitz este ensa mai conforma naturei lucruriloru si mai productiva, de aceea si mai generalu intrebuintiata. Numai cu ajutorulu acestei sciintie fisic'a, mecan'c'a, astronomi'a, etc. s'au potutu desvolta si perfectionà. Acestu capitolu va fi ua introducere, si aceea numai preliminara, la acesta ramura a analisei matematice.

Variabil'a de care depinde ua functiune, pote ensasi sa depinda de ua alta variabila independenta si sa fia astu-feliu ua functiune a acestei din urma; atunci functiunea anteia va fi ua functiune *mediata* a variabilei independente, seu ua *functiune de functiune*; spre ess. $y = f(u)$ esprima co y este ua functiune, co depinde intr'unu modu ore-care de catimea u; dera u insusi pote depinde de ua alta variabila x, pote fi $u = \varphi(x)$; atunci y va fi ua functiune mediata a lui x, ua functiune de functiune, si vomu potea scrie : $y = f[\varphi(x)]$, unde amu scrisu $\varphi(x)$ in loculu ecalului seu u. Astu-feliu pote sa fia functiuni intreite, impatrite, etc., spre ess. $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, $x=\psi(t)$ seu $y=f\{\varphi[\psi(t)]\}$.

Teorema I. Derivat'a unei functiuni de functiune despre variabil'a independenta este ecala cu productulu derivateloru acestoru functiuni, despre variabil'a de care fia-care din elle depinde immediatu. Astu-feliu y fiindu ua functiune de functiune, adico $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, seu $y=f[\varphi(x)]$, va fi :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}; \text{ seu } \frac{dy}{dx}=\frac{df(u)}{du}\times\frac{d\varphi(x)}{dx}=f'(u)\times\varphi'(x).$$

In adeveru, derivat'a functiunei $f(u)$ despre u este :

$$\frac{dy}{du}=\frac{f(u+du)-f(u)}{du};$$

era derivat'a functiunei $\varphi(x)$ despre x este :

$$\frac{du}{dx}=\frac{\varphi(x+dx)-\varphi(x)}{dx}.$$

Immultindu intre elle aceste duoe ecalitati vine :

$$\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \text{ seu } \frac{dy}{dx}=\frac{f(u+du)-f(u)}{du}\times\frac{\varphi(x+dx)-\varphi(x)}{dx}$$

si la limita va fi :

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\times\varphi'(x).$$

Teorema II. Derivat'a summei seu differintiei a duoe functiuni este ecala cu summ'a seu differinti'a derivateloru acestoru functiuni in parte.

Fia $\quad y=f(x)=\varphi(x)+\psi(x)-\chi(x).$

Derivat'a va fi :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$$

$$=\frac{\varphi(x+dx)+\psi(x+dx)-\chi(x+dx)-[\varphi(x)+\psi(x)-\chi(x)]}{dx};$$

seu desfacendu parentesele :

$$\frac{df(x)}{dx}$$

$$=\frac{\varphi(x+dx)-\varphi(x)+\psi(x+dx)-\psi(x)-[\chi(x+dx)-\chi(x)]}{dx}$$

$$=\frac{\varphi(x+dx)-\varphi(x)}{dx}+\frac{\psi(x+dx)-\psi(x)}{dx}-\frac{\chi(x+dx)-\chi(x)}{dx}$$

si in fine :

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ seu } f'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)-\chi'(x).$$

Este claru co ua catime constanta, nefiindu supusa la variatiuni, nu pote avea nici differentialu nici derivata, cu alte cuvinte, differentialulu si derivat'a unei constante este nulla si vice-versa derivat'a unei functiunei despre ua variabila fiindu nulla, aceea functiune va fi constanta, adico independinte de aceea variabila.

De aici resulta co, duoe functiuni cari nu se deosebescu de catu printr'ua constanta, ce se adaoga seu se scade la un'a din elle, au aceeasi derivata; de ess. derivat'a comuna a functiuniloru $f(x)$ si $f(x)+c$ va fi $f'(x)$. Era candu duoe functiuni au ua derivata comuna, atunci acelle functiuni suntu identice, seu se deosebescu numai printr'ua constanta.

Teorema III. Derivat'a unui productu de duoe functiuni, este ecala cu derivat'a cellei d'anteiu, immultita cu functiunea a duoa, plus derivat'a acestei din urma, immultita cu functiunea anteia.

Fia
$$y=f(x)\times\varphi(x).$$
derivat'a va fi :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x+dx)\times\varphi(x+dx)-f(x)\times\varphi(x)}{dx}.$$

Potemu adaoga si scadea aceeasi catime $f(x)\times\varphi(x+dx)$ la numeratoru, fara sa i scambamu valorea; astu-feliu gasimu:

$$\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{f(x+dx)\times\varphi(x+dx)-f(x)\times\varphi(x+dx)+f(x)\times\varphi(x+dx)-f(x)\times\varphi(x)}{dx}$$

$$=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\times\varphi(x+dx)+\frac{\varphi(x+dx)-\varphi(x)}{dx}\times f(x).$$

La limita, adico candu dx devenindu mai micu de catu ori ce catime data tinde catre 0, $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ represinta derivat'a $f'(x)$; $\frac{\varphi(x+dx)-\varphi(x)}{dx}$, derivat'a $\varphi'(x)$; era $\varphi(x+dx)$ este ecalu cu $\varphi(x)$. Prin urmare potemu scrie:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\times\varphi(x)+\varphi'(x)\times f(x).$$

De aici resulta co derivat'a unui productu de mai multe functiuni este ecala cu summ'a producteloru formate prin immultirea derivatei fia-caria functiunei cu celle alte functiuni; astu-feliu deca este: $y=t.u.v.w$, va fi si

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}uvw+\frac{du}{dx}tvw+\frac{dv}{dx}tuw+\frac{dw}{dx}tuv,$$

seu: $\quad y'=t'uvw+u'tvw+v'tuw+w'tuv.$

Teorema IV. Derivat'a poterei m a unei variabile x este ecala cu de m ori poterea $m-1$ a lui x, adico $\frac{dx^m}{dx}=mx^{m-1}$.

In adeveru, candu in espressiunea de mai susu toti factorii suntu ecali intre ei si $=x$, adico $y=x.x.x\ldots=x^m$, ea se transforma in:

$$\frac{dy}{dx} \text{ seu } \frac{dx^m}{dx}=x^{m-1}+x^{m-1}+x^{m-1}+\ldots=mx^{m-1}.$$

Deca m este unu numeru fractionaru $\frac{p}{q}$, vomu avea $y=x^{\frac{p}{q}}$, de unde $y^q=x^p$. Luandu derivatele :

$$qy^{q-1}\cdot\frac{dy}{dx}=px^{p-1},\text{ de unde }\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}\cdot y}{y^q}$$

si punendu in loculu lui y^q si y valorile loru de mai susu

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}\,x^{\frac{p}{q}}}{x^p}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Candu m este negativu, adico $y=x^{-m}$, va fi $y=\frac{1}{x^m}$ seu $yx^m=1$. Luandu derivatele :

$$\frac{dy}{dx}x^m+y\,m\,x^{m-1}=0,$$

de unde : $\frac{dy}{dx}=-m\frac{yx^{m-1}}{x^m}=-m\,y\,x^{-1}=-mx^{-m-1}$.

Teorema V. Derivat'a unui catu seu a unei fractiuni, este ecala cu derivat'a numeratorului immultita cu numitoru, minus derivat'a numitorului immultita cu numeratoru, totulu impartitu cu patratulu numitorului.

Fia $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ si teorem'a va fi esprimata prin formul'a :

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{f'(x)\times\varphi(x)-\varphi'(x)f(x)}{[\varphi(x)]^2}.$$

Ecalitatea de mai susu se pote scrie : $y\times\varphi(x)=f(x)$ si luandu derivatele dupre teorem'a III, vine :

$$y'\times\varphi(x)+y\times'\varphi(x)=f'(x),$$

de unde

$$y'\varphi(x)=f'(x)-y\varphi'(x);$$

punendu in loculu lui y valorea sea :

$$y'\varphi(x)=f'(x)-\frac{f(x)}{\varphi(x)}\varphi'(x)=\frac{f'(x)\varphi(x)-\varphi'(x)f(x)}{\varphi(x)}$$

si in fine : y' seu $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)f(x)}{[\varphi(x)]^2}$.

§ 2. DERIVATELE FUNCTIUNILORU ESPONENTIALE SI LOGARITMICE

Ca sa aflamu derivat'a functiunei esponentiale $y = a^x$, sa damu variabilei x unu micu crescementu h, atunci functiunea y va priimi unu crescementu correspundiatoru k, astu-feliu in catu $y + k = a^{x+h}$ si prin urmare $k = a^{x+h} - a^x$. Derivat'a esponentialei $y = a^x$ va fi dupre definitiune rapportulu intre crescementulu k allu functiunei y si crescementulu h allu variabilei x, candu aceste crescemente tindu a deveni mai mici de catu ori-ce catime data; astu-feliu va fi :

$$\frac{dy}{dx} = \text{limita rapportului } \frac{k}{h} = Lim\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = Lim\frac{a^x . a^h - a^x}{h}.$$

Scotiendu pre a^x ca factoru comunu si observandu co a^x remane constantu, pre candu numai h variedia si tinde sa devia mai micu de catu ori-ce catime data, vomu avea :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \,.\, a^x}{dx} = a^x \,.\, Lim\frac{a^h - 1}{h}.$$

Ca sa aflamu dera derivat'a esponentialei a^x, trebue sa cunoscemu limit'a la care tinde espressiunea $\frac{a^h - 1}{h}$, candu h ensusi tinde catre nulla. Pentru acesta sa observamu co a^0 fiindu $= 1$, a^h va differi forte pucinu de 1, in catu potemu pune $a^h = 1 + \delta$, δ fiindu ua catime forte mica si care tinde catre nulla, candu h ensusi tinde a deveni nullu; atunci vomu avea :

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{1 + \delta - 1}{h} = \frac{\delta}{h}.$$

Dera din $a^h = 1 + \delta$ resulta prin applicarea logaritmiloru :

$$h \log a = \log(1 + \delta),$$

de unde : $$h=\frac{log(1+\delta)}{log\,a} \text{ si } \frac{1}{h}=\frac{log\,a}{log(1+\delta)}.$$

Immultindu ambii membrii cu δ :

$$\frac{\delta}{h}=\frac{\delta\,log\,a}{log(1+\delta)}=\frac{log\,a}{\frac{1}{\delta}\,log(1+\delta)}$$

si fiindu co dupre teori'a logaritmiloru :

$$\frac{1}{\delta}\,log(1+\delta)=log\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}},$$

va fi si $$\frac{\delta}{h}=\frac{a^h-1}{h}=\frac{log\,a}{log(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}}$$

prin urmare :

$$\frac{d\,.\,a^x}{dx}=a^x Lim\frac{h^h-1}{h}=a^x Lim\frac{log\,a}{log(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}}=\frac{a^x\,log\,a}{Lim.log(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}},$$

fiindu co $log\,a$ este constantu. Mai remane dera sa aflamu care este limit'a espressiunei $(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$, candu δ tinde a deveni $=0$. Sa observamu co potemu face ca δ sa devia mai micu de catu ori-ce catime data, puindu $\delta=\frac{1}{n}$ si luandu pentru n valori intregi si positive din ce in ce mai mari. Atunci va fi :

$$\frac{1}{\delta}=n,$$

$$Lim\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}=Lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Sa desvoltamu espressiunea $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ dupre binomulu lui Newton, pre care lu amu demonstratu numai pentru esponenti intregi si positivi si se applica aici, n fiindu intregu si positivu :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.}\cdot\frac{1}{n^3}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cdot\frac{1}{n^4}+\cdots;$$

scotiendu pre n din parentese si impartindu pre ambii termeni ai fractiuniloru respective cu $n, n^2, n^3, n^4 \ldots$ vine :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1.2}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}$$

$$+\frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

Candu n va fi infinitu de mare, atunci tote fractiunile scrise in parentese $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots\ldots$ devinu $= 0$ si espresssiunea de mai susu ajunge la limit'a ei, adico va fi :

$$(1) \qquad Lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\ldots\ldots$$

Dera amu vediutu mai susu (Cap. V, § 4, Teor. I) co acesta seria este convergenta si summ'a ei $= 2{,}7182818284\ldots\ldots$ amu insemnatu-o cu litter'a e, observandu totu de ua data co e este bas'a logaritmiloru numiti neperiani ; asia dera :

$$Lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots\ldots = e$$

si prin urmare : $Lim.(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e$, $Lim. log\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = log e$, si in fine :

$$(2) \qquad \frac{da^x}{dx} = \frac{a^x \log a}{Lim. \log(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}} = a^x \frac{\log a}{\log e}.$$

Deca sistem'a logaritmiloru cu care operamu este ceea neperiana seu naturala, atunci e fiindu bas'a, $log\, e$ va fi $= 1$ si prin urmare :

$$(3) \qquad \frac{d \,.\, a^x}{dx} = a^x \, l\, a,$$

insemnandu cu $l\,a$ logaritmulu naturalu, spre a lu deosebi de cei-alti $log\ a$; de unde vedemu co derivat'a esponentialei a^x este ecala cu esponential'a ensasi a^x immultita cu logaritmulu naturalu allu constantei a.

Candu $a = e$ adico ecalu cu bas'a logaritmiloru neperiani, atunci $l\,e$ fiindu $= 1$, vine:

$$(4) \qquad \frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Asia dera derivatele esponentialei e^x suntu ecale cu functiunea primitiva.

Differitele simplificari cari au fostu introduse mai susu prin suppositiunea co e este bas'a logaritmiloru, precum si differitele proprietati alle acestei espressiunei, ca aceea de a fi ecala cu derivatele ei etc., facu ca acesta functiune si numerulu e ensusi sa fia de ua importantia mare in teori'a functiuniloru. Nisce proprietati analoge au condusu pre Neper sa formedie cu acestu numeru e logaritmii numereloru cari, ca cei d'anteiu logaritmi, au parutu a fi si mai naturali si au fostu numiti naturali. Acesti logaritmi s'au numitu enca si neperiani dupre inventatoru si hyperbolici, dupre ua relatiune forte intima in care stau cu ua linia curba numita hyperbola.

Sa aflamu acum derivat'a espressiunei $y = log\ x$. Fia a bas'a acestoru logaritmi si va fi dupre teori'a cunoscuta a logaritmiloru $x = a^y$, era derivat'a

$$\frac{dx}{dy} = a^y \frac{log\ a}{log\ e},$$

dupre cum s'a aretatu mai susu. Fiindu co a este basa, logaritmulu ei va fi $= 1$; era $a^y = x$; prin urmare

$$(5) \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{x}{log\, e}, \text{ de unde } \frac{dy}{dx}=\frac{log\, e}{x} \text{ seu } \frac{d.log\, x}{dx}=\frac{log\, e}{x}.$$

Candu operamu cu logaritmi naturali, $log\, e = 1$, e fiindu bas'a, de unde :

$$(6) \qquad \frac{d.\,lx}{dx}=\frac{1}{x}.$$

§ 3. TRANSFORMAREA FUNCTIUNILORU IN SERII CONVERGENTE ; GENERALISAREA BINOMULUI LUI NEWTON

Vorbindu despre serii (Cap. V, § 4), am datu cate-va essemple de transformarea unoru functiuni in serii convergente cu ajutorulu binomului lui Newton, pre care nu lu amu demonstratu pene acum de catu numai pentru esponenti intregi si positivi. Aceste transformari in serii suntu de ua intrebuintiare mare in matematica si fisica, pentru a calcula valori approssimative alle differiteloru catimi pre cari nu le potemu calcula directu prin formule limitate si pentru alte. *Newton* si *Leibnitz* au aretatu cei d'anteiu metodele acestei noue descoperiri si de atunci incoce desvoltarea seriiloru a devenitu ua ramura importenta a analisei matematice. Derivatele, combinate si cu coefficientii nedeterminati seu arbitrarii, ne dau unu mediulocu forte inlesnitoru pentru formarea seriiloru; binomulu lui Newton duce adesea la acellasi resultatu, ensa are trebuintia de a fi generalisatu; in fine ua formula, potemu dice cea mai importenta in tota matematic'a, formul'a lui *Taylor*, pre care o vomu demonstra mai tardiu, ne da mediuloce escellinti pentru formarea seriiloru.

Generalisarea binomului lui Newton. Fia binomulu $(a+x)^m$ pre care lu potemu pune sub form'a :

$$a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m \text{ seu } a^m(1+z)^m,$$

facendu pentru prescurtare $\frac{x}{a}=z$.

Candu m este unu numeru intregu, scimu co potemu desvolta $(1+z)^m$ intr'ua seria cu poterile crescende alle lui z; sa suppunemu dera co in generalu, insemnandu cu $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n \ldots$ nisce coefficienti nedeterminati seu arbitrarii, vomu avea:

$$(1+z)^m = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots + A_k z^k + A_{k+1} z^{k+1} + \ldots$$

si sa ne propunemu sa determinamu valorile acestoru coefficienti. Sa formamu dupre regulile de mai susu derivat'a fiacarui membru allu acestei ecalitati:

$$m(1+z)^{m-1} = A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + \ldots + kA_k z^{k-1} + (k+1)A_{k+1} z^k + \ldots$$

Immultindu ambi membrii cu $(1+z)$, vomu avea:

$$m(1+z)^m = A_1 + \left.\begin{matrix}2A_2\\+A_1\end{matrix}\right| z + \left.\begin{matrix}3A_3\\+2A_2\end{matrix}\right| z^2 + \ldots + \left.\begin{matrix}kA_k\\+(k-1)A_{k-1}\end{matrix}\right| z^{k-1} + \left.\begin{matrix}(k+1)A_{k+1}\\+kA_k\end{matrix}\right| z^k + \ldots$$

Comparandu acesta ecalitate cu aceea de la care amu plecatu, immultita cu m, adico cu ecalitatea:

$$m(1+z)^m = m + mA_1 z + mA_2 z^2 + \ldots + mA_k z^k + \ldots$$

si observandu co aceste duoe valori alle lui $m(1+z)^m$ trebue sa fia identice pentru ori-care valore a lui z, ajungemu la resultatulu co coefficientii poteriloru ecale alle lui z in aceste duoe espressiuni trebue sa fia ecali intre ei, adico:

$$A_1 = m,\ A_1 + 2A_2 = mA_1,$$
$$2A_2 + 3A_3 = mA_2, \ldots kA_k + (k+1)A_{k+1} = mA_k,$$

de unde prin substitutiuni successive:

$$A_1 = m,\ A_2 = \frac{A_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2},$$

$$A_3 = \frac{A_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3};$$

$$A_{k+1} = A_k \frac{(m-k)}{(k+1)} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k)}{1\,.\,2\,.\,3\quad\ldots\ldots(k+1)},$$

si prin urmare puindu aceste valori alle coefficientiloru $A_1, A_2 \ldots\ldots$ in espressiunea primitiva a lui $(1+z)^m$

$$(7) \qquad (1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} z^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} z^3 + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k} z^k + \ldots\ldots$$

unde vedemu co coefficientii poteriloru lui z suntu formati dupre aceeasi regula ca si candu m este unu numeru intregu.

Puindu $\frac{x}{a}$ in loculu lui z si immultindu ambi membrii cu a^m, va veni :

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} a^{m-2}x^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} a^{m-3}x^3 + \ldots\ldots$$

Desvoltarea lui a^x *si* e^x *in serii convergente.* Sa punemu :

$$a^x = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots\ldots$$

unde cellu d'anteiu termenu trebue sa fia $=1$, pentru co, candu $x=0$, $a^0=1$; sa formamu derivatele si vomu avea :

$$a^x \frac{\log a}{\log e} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots\ldots$$

seu, puindu pentru prescurtare : $k = \frac{\log a}{\log e}$:

$$a^x\,.\,k = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots\ldots$$

Dera immultindu pre cea d'anteiu ecalitate cu k, aflamu :

$$a^x\,.\,k = k + k\,A_1x + k\,A_2x^2 + k\,A_3x^3 + \ldots\ldots$$

de unde urmedia ca si mai susu co coefficientii poteriloru ecale alle lui x in aceste duoe espressiuni alle lui a^x. k trebue sa fia ecali intre ei, adico:

$$A_1 = k,\ 2A_2 = kA_1,\ 3A_3 = kA_2,\ 4A_4 = kA_3,\ \text{etc.}$$

si prin urmare:

$$A_1 = k,\ A_2 = \frac{k^2}{1.2},\ A_3 = \frac{k^3}{1.2.3},\ A_4 = \frac{k^5}{1.2.3.4},\ \text{etc.}$$

Puindu aceste valori alle coefficientiloru $A_1, A_2, A_3 \ldots$ in ecalitatea anteia:

$$(8) \qquad a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{(kx)^2}{1.2} + \frac{(kx)^3}{1.2.3} + \frac{(kx)^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

care este seri'a ceruta.

Candu $a = e$, va fi si $k = \frac{\log e}{\log a} = 1$ si vomu avea desvoltarea lui e^x, adico:

$$(9) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots$$

Ne potemu lesne incredintia, applicandu teorem'a I din teori'a seriiloru (Cap. V, § 4), co aceste duoe serii suntu convergente. In adeveru, termenii consecutivi allu $m^{\text{-lea}}$ si allu $(m+1)^{\text{-lea}}$ fiindu:

$$\frac{x^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} \quad \text{si} \quad \frac{x^m}{1.2.3\ldots(m-1)m},$$

catulu loru va fi $\frac{x}{m}$ si acest'a converge catre nulla, candu m tinde catre ∞.

Scambandu in seri'a din urma x in $-x$, toti termenii de rangu pariu cari cuprindu potèrile imparii alle lui x voru scamba semnulu si va fi:

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}$$

$$=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots..$$

Desvoltarea lui $log(1+x)$, $log(1+x)$, $log\,\frac{1+x}{1-x}$ *in serii convergente.* Fia:

$$log(1+x)=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots..$$

Sa luamu derivatele, aducendu-ne aminte co:

$$\frac{d.log(1+x)}{dx}=\frac{log\,e}{1+x};$$

si vomu gasi:

$$\frac{log\,e}{1+x}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+\ldots..$$

dera: $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots..$

si prin urmare:

$$\frac{log\,e}{1+x}=log\,e-x.log\,e+x^2.log\,e-x^3.log\,e+\ldots..$$

de unde:

$$A_1=log\,e;\; A_2=-\frac{log\,e}{2},\; A_3=\frac{log\,e}{3},\; A_4=-\frac{log\,e}{4}\ldots..$$

si prin urmare scotiendu factorulu comunu $log\,e$:

(10) $log(1+x)=log\,e\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots..\right\};$

scambandu pre x in $-x$, vine:

(11) $log(1-x)=-log\,e\left\{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots..\right\};$

si scadiendu aceste duoe formule, un'a din ceea alta:

$$log(1+x)-log(1-x),\text{ seu:}$$

$$(12)\quad \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\log e\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\cdots\cdots\right\}.$$

Deca operamu cu logaritmi neperiani seu naturali, $\log e=1$, si formulele de mai susu se transforma in celle urmatore :

$$(13)\quad \begin{cases} l(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots\cdots; \\ l(1-x)=-\left(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right); \\ l\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{5}+\dfrac{x^7}{7}+\dfrac{x^9}{9}+\cdots\cdots\right). \end{cases}$$

Aceste sesse formule suntu convergente candu $x<1$. Espressiunile pentru $\log(1+x)$ si $l(1+x)$ suntu enca convergente si pentru $x=1$ (vedi despre serii Cap. V, § 4).

Facendu in formul'a (12)

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\log e\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots\right\},$$

$$x=\frac{1}{z}, \text{ de unde } 1+x=1+\frac{1}{z}=\frac{z+1}{z},$$

si

$$1-x=1-\frac{1}{z}=\frac{z-1}{z},$$

si prin urmare : $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{z+1}{z-1}$, vine :

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\log(z+1)-\log(z-1)$$

$$=2\log e\left\{\frac{1}{z}+\frac{1}{3z^3}+\frac{1}{5z^5}+\cdots\cdots\right\},$$

de unde :

$$(14)\quad \log(z+1)=\log(z-1)+2\log e\left\{\frac{1}{z}+\frac{1}{3z^3}+\frac{1}{5z^5}+\frac{1}{7z^7}+\cdots\right\}.$$

Prin mediuloculu acestei formule vomu potea lesne sa calculamu logaritmii tutuloru numereloru, facendu successivu $z=2, =3, =4, =5\ldots\ldots$ Seri'a este convergenta pentru $z>1$.

§ 4. CASURI DE NEDETERMINARE ALLE FUNCTIUNILORU CARI SE PRESINTA SUB FORM'A $\frac{0}{0}$

Teori'a derivateloru ne da enca regule generale pentru a afla valorea adeverata a functiuniloru fractionare $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ cari pentru valori particulare alle variabilei x se reducu la form'a nedeterminata $\frac{0}{0}$. Vorbindu despre fractiuni, amu aretatu co de multe ori in asemenea casuri potemu determina sensulu acestui simbolu, scotiendu unu factoru comunu la ambi termenii ai fractiunei care singuru se anulledia; dera scoterea acestui factoru nu este totu de una lesne de facutu, nici nu este la tote casurile posibila; spre ess. espressiunea $\frac{a^x-b^x}{x}$ se reduce la form'a $\frac{0}{0}$ pentru $x=0$ si nu se vede vre unu factoru comunu la ambi termenii ei, afara numai deca ne vomu servi de seria (8) applicata la a^x si b^x.

Fia functiunea fractionara $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ care pentru ua valore x_0 a lui x se reduce la $\frac{0}{0}$. Este invederatu co valorea acestei functiunei resulta din ceea urmatore $\frac{\varphi(x_0+\varDelta x)}{\psi(x_0+\varDelta x)}$, candu crescementulu $\varDelta x$ se anulledia. Dera scimu co, candu variabil'a x a unei functiunei priimesce unu crescementu $\varDelta x$, functiunea en-

sasi $\varphi(x)$ priimesce asemenea unu crescementu pre care lu insemnamu cu $\Delta\varphi(x)$, astu-feliu in catu :
$\varphi(x_0+\Delta x)=\varphi(x_0)+\Delta\varphi(x)$, seu $\Delta\varphi(x)=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$
Asemenea va fi :
$\psi(x_0+\Delta x)=\psi(x_0)+\Delta\psi(x_0)$, seu $\Delta\psi(x)=\psi(x_0+\Delta x)-\psi(x_0)$
si prin urmare :

$$\frac{\varphi(x_0+\Delta x)}{\psi(x_0+\Delta x)}=\frac{\varphi(x_0)+\Delta\varphi(x)}{\psi(x_0)+\Delta\psi(x)}.$$

Fiindu ce $\varphi(x_0)=0$ si $\psi(x_0)=0$, dupre suppositiune, va fi :

$$\frac{\varphi(x_0+\Delta x)}{\psi(x_0+\Delta x)}=\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta\psi(x)}=\frac{\dfrac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}}{\dfrac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}};$$

trecendu la limite, adice facendu pre Δx mai micu de catu ori-ce catime data, functiunile $\varphi(x_0+\Delta x)$ si $\varphi(x_0+\Delta x)$ se reducu la $\varphi(x_0)$ si $\psi(x_0)$, era functiunile $\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$, $\frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}$ se transforma in $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, $\frac{d\psi(x)}{dx}$ si esprima derivatele $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$; prin urmare va fi :

$$(15) \qquad \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}$$

De aici resulta regul'a : candu ua functiune fractionara de form'a $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ se reduce la form'a $\frac{0}{0}$ pentru ua valore particulara x_0 a variabilei selle, atunci cautamu in parte derivatele numeratorului si a numitorului si punendu in loculu lui x aceea valore particulara x_0, catulu acestoru derivate va esprima valorea adeverata a espressiunei $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$. Deca se va intempla ca derivatele $\varphi'(x)$ si $\psi'(x)$ sa se anulledie si elle pentru $x = x_0$, atunci considerandu pre acestea ca pre nisce functiuni primitive, cautamu derivatele loru $\varphi''(x)$ si $\psi''(x)$, adico derivatele secunde alle lui $\varphi(x)$ si $\psi(x)$ si catulu $\frac{\varphi''(x_0)}{\psi''(x_0)}$ va esprima valorea adeverata a functiunei $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Deca si derivatele de ordinulu allu II-lea $\varphi''(x)$ si $\psi''(x)$ se anulledia luamu pre acellea de ordinulu allu III-lea $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$ si asia mai inainte.

Essemple. Functiunea $\frac{a^x - b^x}{x}$ luandu form'a $\frac{0}{0}$ pentru $x = 0$, formamu derivat'a numeratorului, adico:

$$\frac{da^x}{dx} - \frac{db^x}{dx} = a^x la - b^x lb = la - lb,$$

candu $x = 0$; era derivat'a numitorului este $\frac{dx}{dx} = 1$; asia dera

$$\frac{a^x - b^x}{x} \text{ pentru } x = 0 \text{ devine} = \frac{l.a - l.b}{1} = la - lb = l.\frac{a}{b}.$$

2. Functiunea $\frac{\log 1}{1-x}$ devenindu $= \frac{0}{0}$ pentru $x = 1$, formamu derivatele numeratorului si a numitorului in parte:

$$\frac{d.\log x}{dx} = \frac{l.e}{x}, \quad \frac{d(1-x)}{dx} = -1;$$

prin urmare:

$$\frac{\log x}{1-x} = \frac{\frac{le}{x}}{-1} = -\frac{\log e}{x} = -\log e \text{ pentru } x = 1.$$

3. $\frac{x-1}{x^n - 1}$ devine $\frac{0}{0}$ pentru $x = 1$. Derivat'a numeratoru-

lui este $= 1$; aceea a numitorului este $= nx^{n-1}$; prin urmare:

$$\frac{x-1}{x^n-1}=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n} \text{ pentru } x=1.$$

4. $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-1+(x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}-x+1}$ devine $\dfrac{0}{0}$ pentru $x=1$; derivat'a numeratorului este $=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$; aceea a numitorului este $=3(x^2-1)^{\frac{1}{2}}x-1$, si valorea espressiunei propuse pentru $x=1$, va fi:

$$=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt{x+1}}{3x\sqrt{x^2-1}-1}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{1-1}}{2\sqrt{1-1}-1}=-\frac{3}{2}, \text{ pentru } x=1.$$

5. $$\frac{x^{\frac{3}{2}}-1+(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt{x-1}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\infty}=0, \text{ » } x=1.$$

6. $\dfrac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{2a-2x+3ala-3alx}$, devine $=\dfrac{0}{0}$ pentru $x=a$. Derivat'a numeratorului este $=-\dfrac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$; aceea a numitorului este $=-\left(2+\dfrac{3a}{x}\right)$. Prin urmare functiunea propusa va fi pentru $x=a$:

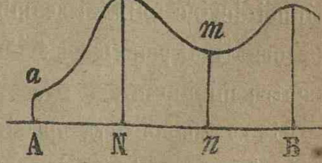
$$\frac{\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}}{2+\frac{3a}{x}}=\frac{\frac{a-a}{\sqrt{a^2}}}{2+3}=\frac{a-a}{5a}=0.$$

§ 5. MASSIMA SI MINIMA FUNCTIUNILORU CU UA VARIABILA INDEPENDENTA

Ecalitatile de gradulu allu II-iea ne dau in unele casuri mediuloculu de a determina massima si minima functiuniloru de ua variabila; dera acelle casuri suntu forte speciale si numai teori'a derivateloru ne da metode sicure pentru deslegarea generala a acestei probleme.

Sa consideramu valorile successive alle unei functiunei $y = f(x)$ correspundiendu la tote valorile asemenea successive alle variabilei x, admittendu co y variedia intr'unu modu continuu, fara intreruptiuni si fara ca sa priimesca valori infinite in intervallulu consideratu in care aceste din urma casuri nu pote sa essiste nici massimum, nici minimum.

Deca valorile lui y dupre ce au crescutu incepu era a descresce, atunci y a trecutu printr'ua valore mai mare de catu acelle care o preceda seu cari vinu immediatu dupre densa; aceea valore o numimu valorea *massimala* seu unu *massimum*. Din contra, deca valorile lui y dupre ce au descrescutu incepu a cresce, atunci y trece printr'ua valore mai mica de catu tote acelle cari o preceda si o urmedia immediatu, pre care o numimu valore *minimala* seu *minimum*. Ua functiune pote sa nu aiba nici minimum, nici massimum, seu pote sa aiba pentru differite valori alle variabilei selle mai multe minima seu massima.



In figur'a alaturata sa insemnedie abscissele AN, An, AB valorile successive alle variabilei independente x, era ordinatele Aa, MN, mn, etc. valorile successive correspundiatore alle functiunei $y = f(x)$; atunci intre A si n este unu massimum NM; intre N si B unu minimum nm.

Determinarea valorei massimale seu minimale a unei functiunei revine la determinarea valorei correspundiende a variabilei independente care este propria sa dea pentru functiunea unu massimum seu unu minimum.

Candu ua functiune $y=f(x)$ trece de la ua valore la alta vecina mai mare, priimesce unu crescementu positivu $dy=d.f(x)$ pre care lu amu numitu si differentialulu functiunei $f(x)$; atunci va fi si derivat'a $f'(x)=\frac{d.f(x)}{dx}$ positiva. Astu-feliu differentialulu si derivat'a unei functiunei care cresce, tindiendu spre massimum, remanu permanentu positive. Candu din contra functiunea $f(x)$ trece de la ua valore la alta vecina mai mica, atunci priimesce unu crescementu negativu (descresce); prin urmare differentialulu si derivat'a unei functiunei care descresce, departandu-se de massimum, remanu permanentu negative. Derivat'a $f'(x)$ a unei functiunei $f(x)$, in casurile celle mai comune in cari acesta este continua, scambandu dera semnulu, candu functiunea trece printr'unu massimum, devine nulla in acestu casu. Asemenea gasimu co derivat'a unei functiunei trece era prin valorea nulla, scambandu semnulu, candu functiunea ensasi trece printr'unu minimum; scambarea de semnu se face ensa acum de la negativu la positivu. De aici resulta co candu ua functiune priimesce ua valore massimala seu minimala, derivat'a anteia a acestei functiunei devine nulla si scamba semnulu trecendu de la positivu la negativu pentru massimum si de la negativu la positivu pentru minimum.

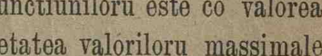
Ca sa aflamu dera massimum seu minimum unei functiunei, formamu derivat'a anteia, o punemu ecala cu nulla si deslegandu ecalitatea care resulta, aflamu valorile variabilei independente cari anulledia acesta derivata si care prin urmare dau massimum seu minimum functiunei propuse; substituindu valorile astu-feliu aflate alle variabilei in functiunea data, determinamu valorile ei massimale seu minimale ensasi. La celle mai multe casuri natur'a functiunei ne areta deca avemu a face cu unu massimum seu minimum.

Cu tote acestea teori'a derivateloru ne da unu caracteru sicuru spre a distinge massimum de minimum. In adeveru, pentru casulu de massima, derivat'a variandu intr'unu modu continuu trece de la positivu la negativu prin nulla si prin urmare descresce, priimindu astu-feliu crescemente seu differentiale negative; asia dera derivat'a ei care este derivat'a a duoa a functiunei primitive remane in permanentia negativa. Pentru casulu de minima, derivat'a trece prin nulla de la negativu la positivu, prin urmare cresce; differentialulu si derivat'a ei suntu prin urmare permanentu positive si acesta derivata este ca si mai susu derivat'a a duoa a functiunei primitive.

De aici resulta co *ua functiune va fi massimum seu minimum, candu derivat'a anteia fiindu* $= 0$, *derivat'a a duoa este negativa seu positiva.*

Functiunea $f(x)$ amu supusu-o positiva; deca este negativa, atunci la massimum correspunde ua derivata a duoa positiva si la minimum negativa.

Ua proprietate importanta a functiuniloru este co valorea loru variedia forte incetu in vecinetatea valoriloru massimale seu minimale. Acesta proprietate a descoperitu-o Keppler si a demonstratu-o basanduse pre teorii geometrice.

Problema I. Sa se determine pre drept'a AB puntulu cellu mai tare (slabu) luminatu, adico 

massimum seu minimum intensitatiei luminei impreunate a acestoru luminatori.

Problem'a acesta amu tratatu-o sub unu altu puntu de vedere, candu ne amu occupatu cu deslegarea ecalitatiloru de gradulu allu II-lea. Notatiunea remanendu aceeasi, lumin'a pre care o priimesce unu puntu ore care R de la cei duoi luminatori, va fi :

$$f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2};$$

Ca sa gasimu mai lesne derivat'a anteia a acestei functiunei, o punemu sub form'a :

$$f(x)=ax^{-2}+b(d-x)^{-2}$$

si apoi operamu dupre teorema a IV^a de mai susu :

$$f'(x)=-2ax^{-3}+2b(d-x)^{-3}=-\frac{2a}{x^3}+\frac{2b}{(d-x)^3}=0;$$

de aici resulta :

$$\frac{a}{x^3}=\frac{b}{(d-x)^3}, \text{ seu } \frac{\sqrt[3]{a}}{x}=\frac{\sqrt[3]{b}}{d-x}.$$

de unde :

$$x=\frac{d\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \text{ si } d-x=\frac{d\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$$

Pentru valorea acesta a lui x derivat'a $f'(x)$ devenindu $=0$, functiunea $f(x)$ va fi unu massimum seu minimum; formandu derivat'a a duoa :

$$f''(x)=+6ax^{-4}+6b(d-x)^{-4}=\frac{6a}{x^4}+\frac{6b}{(d-x)^4},$$

vedemu co acesta remane permanentu positiva; de unde conchidemu co valorea de mai susu a lui x correspunde la unu minimum allu functiunei $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{(d-x)^2}$.

Acesta valore minimala ensasi o aflamu puindu valorile lui x si $d-x$, ceea ce da :

$$f(x)=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3}{d^2}.$$

Distanti'a $x=d\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$, fiindu mai mica de catu $d=AB$, puntulu cellu mai slabu luminatu R va cadea intre A si B; de la R lumin'a cresce pre amenduoe partile spre A si B, de unde inainte descresce era pene la distanti'a $+\infty$ la drept'a de A si $-\infty$ la steng'a de B.

II. Din tote dreptanghiurile cari potu fi inscrise intr'unu cercu de diametru datu d care este acell'a allu carui suprafeci'a este massimala ?

Fia x un'a din laturile dreptanghiului cerutu ; ceea alta va fi $\sqrt{d^2-x^2}$ si suprafeci'a dreptanghiului va fi $=x\sqrt{d^2-x^2}$; prin urmare :

$$f(x)=x\sqrt{d^2-x^2}=x(d^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\sqrt{d^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}=\frac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}=0$$

de unde : $$x=\frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Asia dera dreptanghiulu cerutu este patratulu si suprafeci'a lui este massimum.

III. Sa se impartia numerulu a in duoe parti x si $a-x$, astu-feliu in catu productulu $x^m.(a-x)^n$ sa fia massimum, m si n fiindu numere intregi si positive.

$$f(x)=x^m.(a-x)^n,$$

$$f'(x)=mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}$$

seu:
$$f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}\{m(a-x) - nx\}$$
$$= x^{m-1}(a-x)^{n-1}(ma - mx - nx) = 0;$$
prin urmare conditiunea pentru massimum este:

$$ma - mx - nx = 0, \text{ de unde : } x = \frac{ma}{m+n}.$$

§ 6. FORMUL'A LUI TAYLOR

Acesta formula fundamentala si din celle mai importante in analis'a matematica, descoperita de englesulu *Taylor*, servesce intre altele pentru desvoltarea functiuniloru in serii, dupre poterile crescende alle variabileloru. Demonstratiunea directa a ei, data de inventatorulu ensusi si care pare a fi ceea mai buna sub multe punturi de vedere, presupune ore-cari cunoscintie de calculul *differintieloru finite*, care a trebuitu sa fia lasatu in acesta scurta espunere a teoriei functiuniloru; aici vomu da ua alta demonstratiune totu asia de rigurosa, mai simpla chiaru, ensa mai pucinu directa.

Sa consideramu functiunea $f(x)$; sa scriemu $x+h$ in loculu lui x, unde h nu mai insemnedia unu crescementu infinitu de micu, ci ua catime finita ore-care. Astu-feliu vomu forma functiunea $f(x+h)$ si ne propunemu sa o desvoltamu dupre poterile crescende alle lui h. Pentru acesta sa punemu:

$$f(x+h) = f(x) + h \,.\, \varphi(x,h) \tag{16}$$

unde $\varphi(x,h)$ insemnedia ua functiune enca necunoscuta a lui x si h, astu-feliu in catu termenulu $h\,.\,\varphi(x,h)$ sa se anulledie pentru $h = o$. Din ecalitatea acesta resulta:

$$\varphi(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

in care membrulu din drepta tinde a deveni $= f'(x)$, candu h

tinde a deveni $=0$, si dupre definitiunea derivateloru la limita este $=f'(x)$, fiindu co atunci h devine unu crescementu infinitu de micu allu variabilei x. Potemu dera pune :

$$(17) \qquad \varphi(x,h)=f'(x)+h\varphi_1(x,h),$$

unde $\varphi_1(x,h)$ insemnedia era ua functiune noua, astu-feliu in catu, pentru $h=o$, termenulu $h\,.\,\varphi_1(x,h)$ sa se anulledie. Puindu in ecalitatea (16) valorea lui $\varphi(x,h)$ din (17) vine :

$$(18) \qquad f(x+h)=f(x)+h\,.\,f'(x)+h^2\,.\,\varphi_1(x,h).$$

De aici resulta pentru determinarea functiunei $\varphi_1(x,h)$:

$$\varphi_1(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h^2};$$

care espressiune devine $=\frac{0}{0}$ pentru $h=0$. Applicandu ensa regul'a din § 4 formul'a (15) si observandu co derivat'a lui $f(x+h)$ este aceeasi despre x seu despre h, vomu gasi co derivat'a numeratorului este $f'(x+h)-f'(x)$ si aceea a numitorului $=1\,.\,2\,.\,h$, de unde :

$$\varphi_1(x,h)=\frac{f'(x+h)-f'(x)}{1\,.\,2\,.\,h}=\frac{f''(x)}{1\,.\,2},$$

pentru co candu h devine unu crescementu infinitu de micu, espressiunea acesta esprima derivat'a lui $f'(x)$, seu derivat'a a duoa a lui $f(x)$. Fiindu co dera $\varphi_1(x,h)$, pentru $h=0$, devine $=\frac{f''(x)}{1\,.\,2}$, potemu pune :

$$\varphi_1(x,h)=\frac{f''(x)}{1\,.\,2}+h\varphi_2(x,h).$$

unde $\varphi_2(x,h)$ insemnedia ua noua functiune care pote fi determinata ca si functiunile $\varphi(x,h)$, $\varphi_1(x,h)$. Puindu in (18) aflamu :

$$(19) \quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+h^3\,.\,\varphi_2(x,h).$$

De aici resulta era pentru determinarea lui $\varphi_2(x,h)$:

$$\varphi_2(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)}{h^3}$$

Fiind co espressiunea acesta se reduce la $\frac{0}{0}$ pentru $h=0$, applicamu era regul'a din § 4, formula (15), formandu successivu de duoe ori derivatele numeratorului si pre alle numitorului in parte, ceea ce da :

$$\varphi_2(x,h)$$

$$=\frac{f''(x+h)-f''(x)}{1.2.3.h}=\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}=\frac{1}{1.2.3}f'''(x).$$

Astu-feliu potemu era sa punemu :

$$\varphi_2(x,h)=\frac{f'''(x)}{1.2.3}+h\varphi_3(x,h)$$

si puindu in (19) aflamu :

$$f(x+h)$$

$$=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+h^4\varphi_3(x,h)$$

Fara ca sa mergemu mai inainte, vedemu legea dupre care se formedia termenii successivi; fia-care din ei cuprinde crescementulu h la ua potere mai inalta cu ua unime de catu termenulu precedinte, era coefficientii acestoru poteri alle lui h suntu derivatele de acellasi ordinu (aretatu prin esponentulu lui h) alle functiunei $f(x)$, impartite cu productulu numereloru naturali $1, 2, 3, 4., \ldots$ de la 1 pene la numerulu care areta ordinulu derivatei; astu-feliu se formedia formul'a :

$$(20)\ f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{n)}(x)+\ldots$$

care este aceea a lui Taylor. Acesta formula este supusa la ore cari restrictiuni, despre cari nu potemu trata in aceste elemente.

Matematicii cari au simtitu importanti'a ceea mare a acestei formule s'au grabitu a o demonstra in differite moduri si astu-feliu essista ua multime de demonstratiuni pentru acesta. Unu interessu istoricu presinta demonstratiunea data de Lagrange, unulu din cei mai mari matematici francesi; demonstratiunea lui ensa nu este nici rigurosa, nici generala si de aceea astadi este lasata de toti; numai unii din autorii de algebre elementare o reproducu, nepotendu a se inaltia la principiele mai sanetose alle calculului infinitesimalu. Lagrange a pretinsu sa deduca si sa fundedie pre aceea demonstratiune tota teori'a derivateloru si a functiuniloru si a crediutu co va potea sa scape de teori'a limiteloru a lui Newton si a differentialeloru lui Leibnitz; spre acesta a si scrisu duoe tratate : *Théorie des fonctions analytiques* si *Leçons sur le calcul des fonctions*. Teoriile lui ensa au fostu defectuose si nu au potutu avea nici unu successu, de catu numai la inceputulu apparitiunei acestoru tratate, cari negresitu sub alte punturi de vedere au merite mari. Ecca cum se esprima in privinti'a loru unu autoru francesu (*Cournot*) din cei mai stimati : « Deca « aceste duoe tratate, din caus'a numelui imposantu allu auto- « rului loru, au fostu d'anteiu admisse de ua generatiune in- « trega de juni matematici ca bas'a instructiunei in matema- « tica, ua essaminare ensa mai profunda a trebuitu sa arete « co in elle se afla unulu din acelle paralogisme metafisice, « in cari potu sa cadia chiaru invetiatii cei mai mari, candu « natur'a subjectului loru ii silesce sa iasa din analis'a si sin- « tes'a scientifica, ca sa intre in critic'a ideiloru cari formedia « materialulu ensusi allu scientiei. »

Sa facemu in formul'a (20) $x = a,\ h = x$, ceea ce va sa dica sa punemu pentru x ua valore determinata a in functiunea primitiva $f(x)$ si in derivatele ei si sa ceremu valorea generala a functiunei $f(x)$, va veni :

(21)
$$f(a+x)$$
$$= f(a) + \frac{x}{1} f'(a) + \frac{x^2}{1.2} f''(a) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(a) + \frac{x^4}{1.2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(a) + \cdots;$$

ua formula care ne da functiunea $f(x)$ esprimata intr'ua seria dupre poterile crescende alle variabilei x, candu cunoscemu valorea functiunei si a derivateloru ei pentru ua singura valore a variabilei x.

Candu $a = o$, formul'a de-mai susu se transforma in cea urmatore :

(22)
$$f(x)$$
$$= f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \frac{x^2}{1.2} f''(o) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(o) + \frac{x^4}{1.2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(o) + \cdots,$$

numita obicinuitu formul'a lui *Mac-Laurin*, cu tote co adeveratulu inventatoru este *Stirling*. Acesta formula este totu asia de generala ca si aceea a lui Taylor; Mac-Laurin seu Stirling, amenduoi englesi, au demonstratu-o independentu de formul'a lui Taylor.

Ca sa damu unu essemplu forte simplu din nenumeratele la care se applica aceste formule, sa ne propunemu sa demonstramu binomulu lui Newton. Atunci $f(x) = x^m$,
$f'(x) = mx^{m-1},\ f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \ldots f(x+h) = (x+h)^m$,
si prin urmure :

$$f(x+h) = (x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 x^{m-2} + \ldots.$$

Pentru allu duoilea essemplu sa luamu functiunea e^x; pentru $x = 0$ vomu avea $e^x = 1$; prin urmare $f(x) = a^x$, $f(0) = 1$,

$f'(o) = e^0 = 1, f''(o) = 1$, etc. si applicandu formul'a lui Mac-Laurin, vine :

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots,$$

formula pre care o cunoscemu de mai inainte.

§ 7. DESPRE INTERPOLATIUNE

Candu ua catime este ua functiune a unei alte, candu depinde de acesta printr'ua ecalitate algebrica de unu gradu superioru la allu II-lea, seu printr'ua ecalitate transcendenta, adico in care necunoscut'a intra ca ua catime esponentiala, logaritmica, goniometrica, etc., atunci de multe ori ecalitatea este insolubila si in celle mai multe casuri, deca solutiunea se pote face, va fi lunga si complicata preste mesura; se pote enca intempla, si acestu casu este forte importantu, nu numai pentru co a condusu la teori'a interpolatiunei, deru mai cu sema pentru co se presinta in totu momentulu la applicatiunile sciintieloru fisice, se pote intempla nici sa nu cunoscemu ecalitatea, legatur'a intre duoe catimi dependente una de alta, ci sa scimu numai co la nisce valori date alle uneia din elle correspundu nisce valori asemenea cunoscute (spre ess. determinate prin esperientie) alle cellei-alte si sa ceremu a areta printr'ua formula matematica modulu legaturei loru, seu a intercala, a interpola, intre duoe perechi alle acelloru catimi dependente una de alta, unu numeru determinatu de valori noue. Acesta este problem'a interpolatiunei care se pote resolve prin formul'a interpolatiunei a lui *Lagrange*.

Fia y si x celle duoe catimi dependente una de alta; sa represintamu relatiunea necunoscuta intre aceste duoe catimi prin ecalitatea :

$$(e) \qquad y = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots kx^{n-1}$$

Candu valorile variabilei x formedia ua progressiune aritmetica, atunci in loculu formulei (i) potemu pune ua alta mai simpla, data multu mai inainte de *Newton* si pre care se basedia si demonstratiunea directa a formulei lui Taylor. Formul'a de interpolare a lui Newton este forte desu intrebuintiata, dera aici nu potemu sa o demonstramu, pentru co presupune cunoscinti'a calculului cu *differintie finite*.

F I N E.

88 : 8 = 10
= 0

TABULA DE MATERII

CAPITOLU IV.

POTERI SI RADICINI ALLE ESPRESSIUNILORU ALGEBRICE

CAPITOLU V.

SERII SI PROGRESSIUNI

CAPITOLU VI.

CAPITOLU VII.

LOGARITMII

CAPITOLU VIII.

CELLE D'ANTEIU NOTIUNI DIN TEORI'A DERIVATELORU