LECŢIUNI ELEMENTARE

DE

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

ANALIZA COMBINATOARE. DETERMINANŢI. FUNCŢIUNI. LIMITE. CONTINUITATE. DERIVATE. VARIAŢIA FUNCŢIUNILOR. SERII. NUMĂRUL E. FUNCŢIUNEA EXPONENŢIALĂ, FUNCŢIUNI DE MAI MULTE VARIABILE FORME NEDETERMINATE. APLICAŢII LA CINEMATICĂ

PENTRU

CLASA VII SECŢIA ŞTIINŢIFICĂ

DE

N. ABRAMESCU

PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

EDIŢIA II

Aprobată de Ministerul Instrucţiunii cu ord. No. 57 din 19 Febr. 1935

Taxa timbrului didactic de 5% pentru acest manual s'a plătit direct Casei Corpului didactic conform deciziunei No. 3660/923

CR

EDITURA „CARTEA ROMÂNEASCĂ", BUCUREŞTI

6320—3.—935.

1935

ANALIZA COMBINATOARE

1. Analiza combinatoare se ocupă cu formarea, numărarea și proprietățile diferitelor grupe care se pot face, după anumite reguli, cu un număr de elemente date. Dintre toate felurile de a grupa mai multe elemente (cantități) date, se consideră ca fundamentale următoarele : *aranjările, permutările, combinările.*

2. **Aranjări.** Să considerăm n obiecte diferite, pe care să le însemnăm cu a_1, a_2,...a_n. Se numesc aranjări ale acestor n obiecte (elemente) luate câte p ($p \leqslant n$) grupele ce le putem face cu cele n obiecte, fiecare grupă conținând p obiecte și două grupări diferind între ele prin natura sau ordinea obiectelor. Numărul acestor aranjări se notează cu A_n^p.

Aranjările celor n obiecte luate câte unul sunt a_1, a_2,....a_n, iar numărul lor este $A_n^1 = n$. Aranjările a n obiecte luate câte două se formează așezând lângă fiecare din obiectele a_1, a_2,....a_n, pe rând, celelalte obiecte,

$$\begin{array}{l}
a_1a_2,\ a_1a_3,\ .\ .\ .\ .\ .\ a_1a_n,\\
a_2a_1,\ a_2a_3,\ .\ .\ .\ .\ .\ a_2a_n,\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
a_na_1,\ a_na_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_na_{n-1}
\end{array}$$

Se obțin astfel, din fiecare grupă a aranjărilor a n

obiecte luate câte unul, câte (n—1) grupe ; deci, aranjările a n obiecte, luate câte două, sunt de (n—1) ori mai multe ca aranjările a n obiecte luate câte unul; numărul lor este

$$A_n^2 = A_n^1\,(n-1) = n(n-1).$$

Aranjările a n obiecte luate câte trei se formează așezând lângă fiecare din aranjările a n obiecte luate câte două pe rând celelalte obiecte. Cum fiecare aranjare a n obiecte luate câte două conține două obiecte, mai rămân n—2 obiecte care nu intră în aranjarea considerată.

Deci, din fiecare grupă a aranjărilor a n obiecte luate câte 2, se obțin n—2 grupe noi. Așa dar, aranjările a n obiecte luate câte 3 sunt de n—2 ori mai multe ca aranjările a n obiecte luate câte 2, astfel că numărul lor este

$$A_n^3 = A_n^2(n-2) = n\,(n-1)\,(n-2).$$

In mod analog se vede că numărul aranjărilor a n obiecte luate câte 4 este

$$A_n^4 = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3),$$

și în general numărul aranjărilor a n obiecte luate câte p este

$$A_n^p = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p+1).$$

Această formulă presupune $o<p<n$. Dacă $p>n$, atunci A_n^p n'are nici o semnificare și se ia $A_n^p = o$, $p>n$. De asemenea se ia $A_n^o = 1$.

De ex., aranjările a 3 obiecte a_1, a_2, a_3 luate câte două, sunt

$$a_1 a_2,\ a_1 a_3$$
$$a_2 a_1,\ a_2 a_3$$
$$a_3 a_1,\ a_3 a_2$$

și numărul lor este $A_3^2 = 3.2 = 6$.

Aranjările a 4 obiecte a_1, a_2, a_3, a_4, luate câte două, sunt

$$\begin{array}{ccc} a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2a_1 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_4 \\ a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 \end{array}$$

şi numărul lor este $A_4^2=4.3=12$. $A_5^3=5.4.3=60$, $A_6^4=6.5.4.3=360$.

3. **Exerciţii.** 1. Câte numere de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3,....9.

R. $A_9^2=9.8=72$.

2. Ştiind că numărul aranjărilor a n obiecte luate câte 6 este egal cu de 12 ori numărul aranjărilor aceloraşi obiecte luate câte 4, să se găsească n.

R. $A_n^6=12A_n^4$, $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ $=12n(n-1)(n-2)(n-3)$. Simplificând cu $n(n-1)(n-2)(n-3)$, rămâne $(n-4)(n-5)=12$, de unde $n^2-9n+20=12$, rezolvând $n=1$ sau 8. Numai $n=8$.

3. Ştiind că numărul aranjărilor a n obiecte luate câte p este egal cu de m ori numărul aranjărilor aceloraşi obiecte luate câte $(p-2)$, să se găsească n. Cum trebue să fie m pentru ca problema să fie posibilă şi în acest caz câte soluţii avem.

R. Ecuaţia problemei este $n^2+n(3-2p)+p^2-3p+2-m=0$. Problema e posibilă, dacă $1+4m$ ce este sub radical este patrat perfect. Cum $(4m+1)$ este fără soţ (nepereche), trebue să avem $1+4m=(2k+1)^2$, deci $m=k(k+1)$, k fiind un întreg oarecare (adică m să fie produsul a două numere întregi consecutive). Această condiţie fiind îndeplinită, avem $n_1=p+k-1$, $n_2=p-k-2$; numai prima din aceste soluţii convine problemei.

4. **Permutări.** Permutările a n obiecte sunt grupele ce putem forma cu toate aceste n obiecte, fiecare grupă conţinând toate aceste n obiecte, o grupă diferind de alta numai prin ordinea obiectelor.

Permutările a n obiecte sunt un caz particular al aranjărilor a n obiecte luate câte p, în cazul $p=n$. Deci, numărul permutărilor a n obiecte este

$$P_n=A_n^n=n(n-1)\ldots 2.1$$

şi se notează cu P_n, sau $1.2\ldots n$, sau $n!$

De ex., permutările obiectelor a_1, a_2 sunt a_1a_2, a_2a_1. Pentru a găsi permutările a trei obiecte a_1, a_2, a_3, să observăm că în permutarea a_1a_2 putem aşeza pe a_3 înaintea lui a_1, între a_1 şi a_2, şi la dreapta lui a_2. Obţinem următoarele permutări

$$a_3a_1a_2, \quad a_1a_3a_2, \quad a_1a_2a_3.$$

Operând la fel cu permutarea a_2a_1, avem

$$a_3a_2a_1, \quad a_2a_3a_1, \quad a_2a_1a_3.$$

Deci, permutările elementelor a_1, a_2, a_3 sunt

$$a_3a_1a_2, \; a_1a_3a_2, \; a_1a_2a_3, \; a_3a_2a_1, \; a_2a_3a_1, \; a_2a_1a_3,$$

şi aşa trebue învăţat a face permutările lor.

Permutările circulare care se formează din permutarea a_1, a_2,... a_n, se obţin făcând să treacă primul element, pe rând, la sfârşitul fiecărei permutări; de ex., în cazul a n litere, aceste permutări sunt

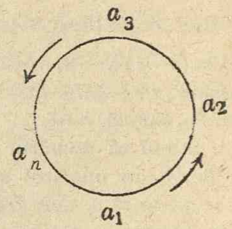


Fig. 1.

$$a_1a_2...a_n, \; a_2a_3...a_na_1, \; a_3a_4...a_na_1a_2, ... a_na_1a_2...a_{n-1}.$$

5. **Exerciţii.** 1. Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4.

R. $P_4 = 24$.

2. In câte moduri se pot schimba între ele literele cuvântului *ordine*.

R. $P_6 = 720$.

3. In aranjările a n litere câte m, să se afle câte aranjări încep cu literele a_1, a_2; în general, numărul aranjărilor care încep cu literele a_1, a_2, ... a_p.

R. Scoţând literele a_1, a_2, ... a_p, rămân $(n-p)$ litere luate câte $(m-p)$ în fiecare grupă. Numărul aranjărilor ce se pot forma cu ele este A_{n-p}^{m-p}. Aşezând literele a_1, a_2,... a_p în faţa fiecărei aranjări şi permutându-le în toate modurile posibile, numărul căutat este $P_p . A_{n-p}^{m-p}$. In cazul particular, $2 ! A_{n-2}^{m-2}$.

6. **Combinări.** Combinările a n obiecte luate câte p sunt grupele ce se pot forma cu aceste n obiecte, fie-

care grupă conţinând p obiecte, o grupă diferind de alta prin natura obiectelor. Numărul acestor combinări se notează cu C_n^p.

De ex., combinările a trei obiecte a_1, a_2, a_3 câte două, sunt

$$a_1a_2, \quad a_1a_3, \quad a_2a_3,$$

pe când aranjările aceloraşi obiecte câte două sunt

$$a_1a_2, \quad a_1a_3, \quad a_2a_1, \quad a_2a_3, \quad a_3a_1, \quad a_3a_2.$$

De asemenea, combinările a patru obiecte a_1, a_2, a_3, a_4 câte două sunt

$$\begin{aligned} &a_1a_2, \quad a_1a_3, \quad a_1a_4 \\ &a_2a_3, \quad a_2a_4, \\ &a_3a_4. \end{aligned}$$

Combinările aceloraşi patru obiecte câte trei, sunt

$$a_1a_2a_3, \quad a_1a_2a_4, \quad a_1a_3a_4, \quad a_2a_3a_4.$$

Să presupunem că am format combinările a n obiecte luate câte p. Pentru a găsi numărul lor, să luăm una din aceste combinări, ce conţin p obiecte, şi să permutăm, în toate modurile posibile, aceste p obiecte; vom obţine P_p grupe noi. Repetând această operaţie pentru toate combinările, obţinem în total $C_n^p \times P_p$ grupe noi, care sunt aranjări de n obiecte luate câte p, al căror număr este A_n^p. Deci avem

$$A_n^p = C_n^p \times P_p,$$

de unde

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

Dacă $p > n$, formula n'are sens şi se pune, pentru simetrie, $C_n^p = o$, $p > n$; de asemenea $C_n^0 = 1$.

De ex., $\quad C_4^2 = \frac{4.3}{1.2} = 6, \quad C_5^3 = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10.$

7. Observări. I. C_n^p fiind un număr întreg, urmează că *produsul a p numere întregi consecutive*, $n(n-1)\ldots(n-p+1)$, *este divizibil cu produsul celor dintâi p numere*, $1.2\ldots p$.

II. In formula

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}$$

să înmulţim ambii termeni ai fracţiei cu $1.2\ldots(n-p)$; avem

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)\,(n-p)\ldots 2.1}{1.2\ldots p\; 1.2\ldots(n-p)},$$

sau

$$C_n^p = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}$$

Inlocuind în această formulă pe p cu $(n-p)$, obţinem

$$C_n^{n-p} = \frac{n\,!}{(n-p)\,!\,p\,!} = C_n^p\,;\quad C_5^3 = C_5^2,\quad C_8^6 = C_8^2 = \frac{8.7}{12} = 28.$$

III. In tabloul (T) al combinărilor a n litere câte p, să dăm de o parte pe cele ce conţin obiectul a_1; se obţin două tablouri, unul (T′) ce cuprinde combinări ce conţin obiectul a_1, şi altul (T″), format din combinări ce nu mai conţin pe a_1. Să lăsăm de o parte obiectul a_1, în toate grupele tabloului (T′); rămân grupe de câte $(p-1)$ obiecte luate din $(n-1)$ obiecte, $a_2\ldots a_n$, adică tocmai combinările a $(n-1)$ obiecte luate câte $(p-1)$, al căror număr este C_{n-1}^{p-1}. In tabloul (T″) sunt combinările a $(n-1)$ obiecte, a_2, $a_3\ldots a_n$, luate câte p, iar numărul lor este C_{n-1}^p.

Scriind că numărul grupelor din tablourile (T′) şi (T″) este egal cu acela al grupelor din tabloul (T), obţinem formula

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Această identitate se putea obţine direct înlocuind pe C_{n-1}^{p-1} şi C_{n-1}^{p} cu valorile dezvoltate

$$\frac{(n-1)!}{(n-p)!\ p-1)!},\quad \frac{(n-1\ !}{(n-1-p)!\ p!}.$$

IV. Făcând în formula $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ pe n egal cu p, $p+1$, $p+2$, ... n, avem

$$C_p^p = C_{p-1}^{p-1} + C_{p-1}^p,$$

$$C_{p+1}^p = C_p^{p-1} + C_p^p,$$

$$C_{p+2}^p = C_{p+1}^{p-1} + C_{p+1}^p,$$

. . . .

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Adunând, deducem

$$C_n^p = C_{p-1}^{p-1} + C_{p-1}^p + C_p^{p-1} + C_{p+1}^{p-1} + \ldots + C_{n-1}^{p-1}.$$

Dar $C_{p-1}^p = 0$; deci

$$C_n^p = C_{p-1}^{p-1} + C_p^{p-1} + C_{p+1}^{p-1} + \ldots + C_{n-1}^{p-1},$$

Sau, pusă sub altă formă,

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_m^k = C_{m+1}^{k+1}.$$

De ex., $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = C_7^4$.

8. **Exerciţii.** 1. Să se afle câte diagonale se pot duce într'un poligon convex de 4 laturi, în general de n laturi.

R. $C_4^2 - C_4^1 = 2$; $C_n^2 - C_n^1 = \frac{n(n-3)}{2}$.

2. Să se afle numărul patrulaterelor în care se descompune un poligon de n laturi. Să se găsească numărul total al punctelor de intersecţie ale diagonalelor unui poligon convex de n laturi.

R. C_n^4. Descompunând poligonul în patrulatere, se observă că la fiecare patrulater corespunde un punct de intersecţie al diagonalelor.

3. Să se efectueze produsul

$$(1+2)\,(3+4+5)\,(6+7+8+9)\ldots,$$

in care se consideră n facto‑i.

R. In factorul de rangul n, primul termen este C^2_{n+1} şi ultimul $C^2_{n+2}-1$. Suma termenilor din acest factor de rangul n este

$$\frac{1}{2}\left(C^2_{n+1}+C^2_{n+2}-1\right)(n+1)=\frac{1}{2}n\,(n+1)\,(n+2).$$

Produsul căutat are valoarea

$$\frac{1}{2}1.2.3\frac{1}{2}2.3.4\ldots\frac{1}{2}n(n+1)\,(n+2)=$$

$$\frac{1}{2^n}\,1.2.3\;\;2.3.4\;\;4.5.6\;\ldots\;n\,(n+1)\,(n+2)=\frac{1}{2^n}\,n!\,n!\,(n+1)\frac{n!}{2}(n+1)\,(n+2)=$$

$$\frac{1}{2^{n+1}}\,(n!)^3(n+1)^2(n+2).$$

9. Noţiuni sumare din Calculul probabilităţilor. Bazele calculului probabilităţilor au fost puse de *Pascal* şi *Fermat* (în sec. XVII) cu ocazia unor probleme ce se puneau asupra jocurilor de noroc. Această teorie are azi numeroase aplicaţiuni în Fizică, Astronomie, Teoria asigurărilor, a tragerilor de artilerie, în domeniul matematicilor superioare.

Să presupunem că o persoană jucând, aruncă un zar perfect cubic, fiecare faţă fiind numerotată cu numerele dela 1 la 6, şi că acea persoană câştigă, dacă zarul arată 1. Zarul poate arăta unul din cele şase numere, fără a putea şti dinainte care (dacă jocul e corect). Vom zice că cele şase cazuri posibile din acest joc sunt la fel de probabile. Din aceste cazuri posibile în număr de şase, numai unul este favorabil jucătorului, atunci când zarul arată numărul 1. Se zice *probabilitatea* acestui joc, sau a *acestui eveniment raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului şi numărul cazurilor posibile*. Deci, când se aruncă zarul odată, probabilitatea de a câştiga este $\frac{1}{6}$.

Să presupunem că într'o urnă sunt 12 bile de egală mărime, 7 albe şi 5 negre. Se scoate o bilă la întâmplare şi se întreabă care este probabilitatea de a scoate o bilă albă. Bile albe fiind 7, sunt 7 cazuri favorabile şi 12 posibile, deci probabilitatea de a scoate o bilă albă este $\frac{7}{12}$.

Probabilitatea este un număr fracţionar mai mic sau cel mult egal cu 1, căci cazurile favorabile sunt mai puţine sau cel mult egale cu cele posibile. Dacă probabilitatea este 1, evenimentul este sigur; dacă este egală cu $\frac{1}{2}$ evenimentul este îndoelnic; dacă este cuprins între 0 şi $\frac{1}{2}$, evenimentul este posibil; iar când este cuprins între $\frac{1}{2}$ şi 1, se zice că evenimentul este probabil. In numărarea cazurilor posibile şi favorabile, ajungem în multe cazuri la probleme de analiză combinatoare.

Aplicaţie. *La o loterie ies la fiecare tragere 5 numere câştigătoare din totalul de 90 numere câte are. Jucătorul câştigă dacă numărul ales de el este printre cele 5 numere eşite.* Numărul cazurilor posibile este C_{90}^5. Cazurile favorabile sunt combinările care conţin numărul ales de jucător. Pentru a le forma, să ne închipuim că se scoate acest număr ales şi că se combină cele 89 rămase, 4 câte 4, apoi că se adaugă la fiecare aceste combinări numărul ales. Avem astfel toate combinările care ar conţine numărul ales. Deci numărul cazurilor favorabile este deci C_{89}^4. Probabilitatea eşirii numărului ales este

$$\frac{C_{89}^4}{C_{90}^5}=\frac{89.88.87.86}{1.2.3.4}:\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$$

Deci, asupra a 18 cazuri posibile, unul este favorabil persoanei ce ia o tragere şi 17 pentru loterie. Ar trebui, prin urmare, să se parieze 1 contra 17. Loteria în loc de 17 ori miza, nu dă de cât de 15 ori această miză.

Când am voi să ne iasă două numere alese, se zice un *amb*; dacă numerele alese sunt amândouă printre cele 5 scoase, s'a câştigat; dacă nu, s'a pierdut. Cazurile favorabile sunt combinările care conţin cele două numere alese; ele se obţin combinând cele 88 numere rămase 3 câte 3 şi adăogând la fiecare combninare cele două numere alese. Astfel că probabilitatea eşirii unui *amb* este raportul dintre C_{88}^3 şi C_{90}^5. adică

$$\frac{4.5}{90.89}=\frac{2}{801}.$$

Ar trebui deci să se parieze 2 contra 799, sau 1 contra $399+\frac{1}{2}$: loteria nu dă decât de 270 ori miza.

Tot astfel s'ar găsi că probabilitatea de a ieşi 3 numere din cele 5 trase (un tern), este $\frac{1}{11748}$, iar loteria dă de 5500 ori miza.

10. Exerciţii. 1. Intr'un sac sunt a bile albe şi b negre. Care este probabilitatea ca scoţând în acelaşi timp 2 bile, ele să fie de culoare diferită.

R. Numărul cazurilor posibile este C_{a+b}^2. Pentru a număra cazurile favorabile, observăm că fiecare bilă albă poate fi asociată cu b bile negre, deci numărul cazurilor favorabile este $a.b$. Probabilitatea evenimentului aşteptat este

$$p=\frac{ab}{C_{a+b}^2}=\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Probabilitatea evenimentului contrar (bilele să fie de aceeaşi culoare) este

$$q=1-p=\frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

2. Care este probabilitatea ca dintr'un pachet de 32 cărţi de joc trăgând 5 cărţi, în ele să fie 4 aşi.

R. Numărul cazurilor posibile este C_{32}^5. Pentru a număra cazurile favorabile, se observă că un grup de 5 cărţi, care conţine cei 4 aşi, se obţine adăogând la cei 4 aşi o carte din cele 28 rămase, după ce scoatem aşii. Cazurile favorabile sunt în număr de C_{28}^1. Probabilitatea este $28 : C_{32}^5=\frac{1}{12192}$.

3. Se aruncă două zaruri. Care e probabilitatea de a da o dublă anumită (6 şi 6) de ex.

R. Numărul cazurilor posibile este 36, căci o faţă a unui zar poate cădea cu una din cele 6 feţe ale celuilalt zar. Un singur caz e favorabil, deci probabilitatea este $\frac{1}{36}$.

Binomul lui Newton.

11. Să considerăm produsul

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots .(x+a_n).$$

Pentru a-l dezvolta, să luăm cazul a trei factori

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+x^2(a_1+a_2+a_3)$$
$$+x(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)+a_1a_2a_3,$$

care se mai poate scrie

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+x^2\ \Sigma a_1+x\Sigma a_1a_2+a_1a_2a_3.$$

Din aproape în aproape, se deduce formula

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)=x^n+x^{n-1}\Sigma a_1$$
$$+x^{n-2}\Sigma a_1a_2+\ldots+x^{n-p}\ \Sigma a_1\ a_2\ldots a_p+\ldots+a_1a_2\ldots a_n,$$

unde $\Sigma a_1a_2\ldots a_p$, reprezintă suma termenilor ce se obțin făcând combinările *a n* litere a_1, $a_2\ldots a_n$ luate câte p, iar numărul termenilor de această formă este egal cu numărul combinărilor a n litere luate câte p, adică C_n^p.

Să facem în această egalitate $a_1=a_2=\ldots=a_n=a$. Un termen oarecare, $x^{n-p}\Sigma a_1a_2\ \ldots\ a_p$, devine $x^{n-p}\ a^p\ C_n^p$, căci în $\Sigma a_1a_2\ldots a_p$ sunt C_n^p termeni. Obținem deci *formula binomului lui Newton*

$$(x+a)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}a+C_n^2x^{n-2}a^2+\ldots+C_n^px^{n-p}a^p+\ldots+a^n,$$

sau

$$(x+a)^n=\sum_{p=o}^{n}C_n^p\,x^{n-p}a^p,\ C_n^o=1.$$

Expresiunea desvoltată a formulei binomului este

$$(x+a)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\,a+\frac{n\,(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots.\ p}x^{n-p}a^p+\ldots+a^n.$$

Exemple. $(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$, $(x-a)^5=x^5-5ax^4$
$+10\,a^2\,x^3-10a^3x^2+5a^4x-a^5.$

12. Observări. I. *Coeficienţii a doi termeni egal depărtaţi de extremi sunt egali.* In adevăr, doi termeni egal depărtaţi de extremi sunt

$$C_n^p x^{n-p} a^p,\ C_n^{n-p} x^p a^{n-p};$$

coeficienţii lor sunt egali, căci $C_n^p = C_n^{n-p}$.

II. Să considerăm coeficienţii consecutivi, C_n^p şi C_n^{p+1}; avem

$$C_n^{p+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)}{1.2\ldots p(p+1)} = \frac{n-p}{p+1} C_n^p.$$

Deci, coeficientul unui termen se obţine înmulţind coeficientul termenului precedent cu exponentul lui a din termenul precedent şi împărţind cu exponentul lui x din termenul căutat.

III. *Cel mai mare coeficient din desvoltare.* Coeficienţii cresc dacă $\frac{n-p}{p+1} > 1$, adică $p < \frac{n-1}{2}$. Dacă n este cu soţ, numărul termenilor, $n+1$, este fără soţ, iar termenii corespunzându-se doi câte doi, cel din mijloc este cel mai mare şi este egal cu $C_n^{\frac{n}{2}}$. Dacă n este fără soţ, numărul termenilor este egal cu soţ şi fiind doi câte doi egali, cei doi coeficienţi de la mijloc sunt egali şi cei mai mari, iar valoarea lor este $C_n^{\frac{n-1}{2}}$.

13. Aplicaţie. *Să se desvolte* $(a+\sqrt{a^2-1})^6 + (a-\sqrt{a^2-1})^6$. Insemnând cu E expresia dată şi cu $b=\sqrt{a^2-1}$, aplicând formula, reducând termenii, avem

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6,$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6,$$

$$E = 2a^6 + 30a^4b^2 + 30a^2b^4 + 2b^6.$$

Dar $b^2 = (\sqrt{a^2-1})^2 = a^2-1$, $b^4 = (a^2-1)^2$, $b^6 = (a^2-1)^3$. Deci

$$E = 2(32a^6 - 48a^4 + 18a^2 - 1).$$

14. Exerciţii. 1. Să se desvolte $(x-a)^9$.

R. Desvoltarea are 10 termeni; trebue calculat primii cinci coeficienţi

$$(x-a)^9=x^9-9ax^8+36a^2x^7-84a^3x^6+126a^4x^5-126a^5x^4+84a^6x^3$$
$$-36a^7x^2+9a^8x-a^9.$$

2. Să se afle al şaptelea termen al desvoltării $(1-i)^{40}$, $i=\sqrt{-1}$.

R. $(-1)^6C_{40}^6(-i)^6=C_{40}^6(i^2)^3=C_{40}^6(-1)^3=-C_{40}^6$.

3. Să se arate că $C_m^1+C_m^2+\ldots+C_m^m=2^m-1$.

R. In desvoltarea $(x+a)^m$ se face $x=a=1$.

4. Să se arate că $1-C_m^1+C_m^2-\ldots+(-1)^mC_m^m=0$.

R. In desvoltarea $(x-a)^m$ se face $x=a=1$.

5. Să se arate că

$$C_m^1+C_m^3+C_m^5+\ldots=2^{m-1}$$

$$C_m^2+C_m^4+C_m^6+\ldots=2^{m-1}-1.$$

R. Ştim că

$$C_m^1+C_m^3+\ldots+(C_m^2+C_m^4+\ldots)=2^m-1.$$

$$C_m^1+C_m^3+\ldots-(C_m^2+C_m^4+\ldots)=1.$$

Adunând, avem

$$2(C_m^1+C_m^3+\ldots)=2^m, C_m^1+C_m^3+\ldots=2^{m-1}$$

Scăzând, avem cealaltă relaţie.

6. Să se verifice identităţile

$$C_{m+n}^1=C_m^1+C_n^1,$$

$$C_{m+n}^2=C_m^2+C_m^1C_n^1+C_n^2,$$

$$C_{m+n}^3=C_m^3+C_m^2C_m^1+C_m^1C_n^2+C_n^3$$

R. Se vor egala coeficienţii aceloraşi puteri ale lui x din desvoltarea identităţii $(x+a)^{m+n}=(x+a)^m(x+a)^n$.

7. Să se determine m astfel ca al 10-a termen al desvoltării $(3+m)^m$ să fie cel mai mare.

R. $C_m^9\, 3^{m-9}\, m^9 > C_m^8 3^{m-8}\, m^8$; $m^2-8m-27 > o$, adică m trebue să fie exterior intervalului rădăcinilor $m_1=4-\sqrt{43}$, $m_2=4+\sqrt{43}$ ale ecuații $m^2-8m-27=0$, $m<m_1$, $m>m_2$.

$C_m^9\, 3^{m-9}\, m^9 > C_m^{10}\, 3^{m-10} m^{10}$; $m^2-9m-30<0$, m interior intervalului rădăcinilor ecuației $m^2-9m-30=0$, $m_3<m<m_4$ $m_{3,4}=\frac{1}{2}(9-\sqrt{201})$.

Ordinea de mărime a rădăcinilor fiind $m_3<m_1<m_2<m_4$, m rămâne să fie cuprins între $4+\sqrt{43}$ şi $\frac{1}{2}(9+\sqrt{201})$ şi trebuind a fi număr întreg, $m=11$.

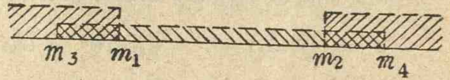


Fig. 2.

8. Să se demonstreze formulele

$$C_{n+p}^q = C_p^o C_n^q + C_p^1 C_n^{q-1} + C_p^2 C_n^{q-2} + \ldots + C_p^q C_n^o ,$$

$$C_{2n}^n = (C_n^o)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 .$$

R. Se identifică respectiv coeficienţii lui x^q şi x^n din desvoltările

$$(x+a)^n\,(x+a)^p = (x+a)^{n+p},\ (x+a)^n\,(x+a)^n = (x+a)^{2n}.$$

9. Să se găsească trei coeficienţi binomiali consecutivi în progresie aritmetică.

R. $C_n^p - C_n^{p-1} = C_n^{p+1} - C_n^p$; $2C_n^p = C_n^{p-1} + C_n^{p+1}$, $p=\frac{1}{2}(n\pm\sqrt{n+2})$.
Dacă n este cu soţ, n trebue să fie de forma $2(2k^2-1)$; $p=k^2\pm k-1$.
Dacă n este fără soţ, atunci $n=4(k-1)k-1$; $p=2k^2-k-1$, $p=2k^2-3k$.

Aplicaţii ale formulei binomului.

15. Suma puterilor asemenea unui şir de numere în progresie aritmetică. Fie a_1, a_2, ... a_n n numere în progresie aritmetică, cu raţia r. Să calculăm suma

$$S_m = a_1^{\,m} + a_2^{\,m} + \ldots + a_n^m .$$

Avem

$$(a_1+r)^{m+1} = a_1^{\,m+1} + C_{m+1}^1 r a_1^{\,m} + C_{m+1}^2 r^2 a_1^{m-1} + \ldots + r^{m+1} .$$

$$(a_2+r)^{m+1} = a_2^{m+1} + C_{m+1}^1 r a_2^m + C_{m+1}^2 r^2 a_2^{m-1} + \ldots + r^{m+1} ,$$

. . . .

$$(a_n+r)^{m+1}=a_n^{m+1}+C_{m+1}^1 r a_n^m+C_{m+1}^2 r^2 a_n^{m-1}+\ldots+r^{m+1},$$

Adunând membru cu membru şi observând că $a_p+r=a_{p+1}$, avem

$$(1)\quad (a_n+r)^{m+1}=a_1^{m+1}+C_{m+1}^1 r S_m+C_{m+1}^2 r^2 S_{m-1}+\ldots+nr^{m+1}$$

Făcând $m=1$, obţinem

$$(a_n+r)^2=a_1^2+C_2^1 r S_1+nr^2,$$

de unde deducem pe S_1.

Făcând $m=2$, obţinem

$$(a_n+r)^3=a_1^3+C_3^1 rS_2+C_3^2 r^2 S_1+nr^3,$$

relaţie care dă pe S_2, căci S_1 este cunoscut.

In cazul când progresia este şirul natural al numerelor, avem $a_1=1$, $r=1$, $a_n=n$, iar formula (1) devine

$$(2)\quad (n+1)^{m+1}=1+C_{m+1}^1 S_m+C_{m+1}^2 S_{m-1}+\ldots+n.$$

In cazul $m=1$, avem

$$(n+1)^2=1+C_2^1 S_1+n,\quad S_1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Când $m=2$, din (2) deducem

$$(n+1)^3=1+3S_2+3S_1+n,$$

$$S_2=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Făcând în (2) $m=3$, deducem

$$S_3=1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2=S_1^2.$$

16. Triunghiul lui Pascal. Să ridicăm binomul $(x+a)$ la diferite puteri succesive, iar coeficienţii să-i aranjăm într'un tablou, astfel

$(x+a)^0$	1	1
$(x+a)^1$	$1\ 1$	1 1
$(x+a)^2$	$1\ C_2^1\ C_2^2$	1 2 1
$(x+a)^3$	$1\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3$	1 3 3 1
$(x+a)^4$	$1\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4$	1 4 6 4 1
......	....	1 5 10 10 5 1
$(x+a)^n$	$1\ C_n^1\ C_n^2\ C_n^3\ C_n^4 \ldots C_n^n$	....

In triunghiul format, zis triunghiul lui Pascal, avem următoarele proprietăți :

1. Un număr dintr'o coloană a triunghiului lui Pascal este egal cu numărul deasupra lui și pe aceeași coloană, plus numărul ce se găsește la stânga precedentului și pe aceeași linie. Ex., $10=6+4$, sau, în general, $C_i^k=C_{i-1}^k+C_{i-1}^{k-1}$

2. Suma numerelor dintr'o coloană este egală cu numărul ce se găsește într'o coloană mai la dreapta și cu o linie mai jos. In adevăr, se cunoaște formula

$$C_k^k+C_{k+1}^k+\ldots+C_m^k=C_{m+1}^{k+1}, \quad \sum_{i=k}^{m} C_i^k = C_{m+1}^{k+1}.$$

De ex., $10=1+3+6$.

17. APLICAȚII. I. Să se calculeze

$$S=1.2.3+2.3.4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\sum_{n=1}^{n} n(n+1)(n+2).$$

Această expresiune se mai poate scrie

$$\frac{S}{3\,!}=\frac{3.2.1}{3\,!}+\frac{4.3.2}{3\,!}+\ldots+\frac{(n+2)(n+1)n}{3\,!},$$

$$\frac{S}{3\,!}=C_3^3+C_4^3+\ldots+C_{n+2}^3,$$

$$S=3\,!\sum_{n=1}^{n} C_{n+2}^3=3\,!\,C_{n+3}^4=\frac{1}{4}(n+3)(n+2)(n+1)n.$$

II. In cazul $\sum_{n=4}^{n} n(n-1)(n-3)$, vom căuta să punem termenul general $n(n-1)(n-3)$ sub forma următoare

$$(3) \qquad n(n-1)(n-3) = An(n-1)(n-2) + Bn(n-1) + Cn,$$

adică o sumă de produse de numere întregi consecutive descrescătoare, de trei factori, de doi factori, etc., începând cu n, primul produs având atâția factori cât este gradul termenului general.

Pentru a determina coeficienții A, B, C, simplificăm expresia (3) cu n,

$$(4) \qquad (n-1)(n-3) = A(n-1)(n-2) + B(n-1) + C$$

și facem $n=1$; avem $C=o$. Facem, în (4), $n=2$; de unde $B=-1$; pentru calculul lui A, facem, în (4), $n=3$, și deducem $A=1$. Se putea vedea valoarea lui A, observând că trebue să fie egali coeficienții lui n^3 din ambii membri din (3). Avem

$$n(n-1)(n-3) = n(n-1)(n-2) - n(n-1),$$

$$S = \sum_{n=4}^{n} n(n-1)(n-3) = \sum_{n=4}^{n} n(n-1)(n-2) - \sum_{n=4}^{n} n(n-1),$$

$$(5) \qquad S = 3!\sum_{n=4}^{n} C_n^3 - 2!\sum_{n=4}^{n} C_n^2.$$

Şi de oarece

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_s^k = C_{s+1}^{k+1}$$

urmează

$$\sum_{n=4}^{n} C_n^3 = \sum_{n=3}^{n} C_n^3 - C_3^3 = C_{n+1}^4 - 1,$$

$$\sum_{n=4}^{n} C_n^2 = \sum_{n=2}^{n} C_n^2 - C_2^2 - C_3^2 = C_{n+1}^3 - 1 - 3.$$

Inlocuind în (5), avem valoarea sumei cerute

$$S = 3!\,(C_{n+1}^4 - 1) - 2!\,(C_{n+1}^3 - 4),$$

$$S = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} - \frac{(n+1)n(n-1)}{3} - 2.$$

18. Exerciții. 1. Să se calculeze $\sum_{n=1}^{n} (2n-1)(2n+1)(2n+3)$.

R. $(2n+3)(2n+1)(2n-1) = (2n+3)(2n+2)(2n+1)$

$$+A(2n+3)(2n+2)+B(2n+3),$$

$$\sum = n(n+2)(2n^2+4n-1).$$

2. Să se calculeze

$$1\,n+2(n-1)+3(n-2)+\ldots+(n-1)\,2+n.1.$$

R. Se va scrie

$$n+2n+3n+\ldots+n^2-\left[1.2+2.3+\ldots+n(n-1)\right];$$

$$n(1+2+\ldots+n)-2\sum C_n^2=\frac{1}{2}n^2(n+1)-2\,C_{n+1}^3$$

3. Să se calculeze limita pentru $n\to\infty$ a raportului

$$\frac{(1^2+2^2+\ldots+n^2)^2}{(1+2+\ldots+n)^3}$$

R. $\frac{8}{9}$.

4. Să se calculeze

$$2(a_1+a_2+a_3+a_4)^3-(a_1+a_2+a_3-a_4)^3-(a_1+a_2-a_3+a_4)^3$$
$$-(a_1-a_2+a_3+a_4)^3-(-a_1+a_2+a_3+a_4)^3.$$

R. Rezultatul este o funcţiune simetrică şi de gradul al treilea, $k\sum a_1^3+k'\sum a_1^2a_2+k''\sum a_1a_2a_3$. Se face $a_1=1$, $a_2=a_3=a_4=o$, $k=o$; $a_1=a_2=1$, $a_3=a_4=o$, $k'=o$; $a_1=a_2=a_3=1$, $a_4=o$, $k''=24$; $24\,(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)$.

5. Să se verifice identitatea

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}\equiv\sum a^2+\sum ab.$$

R. Notând cu E valoarea membrului întâi, aducând la acelaşi numitor, avem

$$E\equiv\frac{-a^4(b-c)-b^4(c-a)-c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Se face la numărătorul fracţii $a=b$, şi se obţine zero; numărătorul e divizibil cu $(a-b)$; la fel se arată că e divizibil cu $(b-c)$ şi $(c-a)$, adică E este un polinom întreg, omogen, simetric şi de gradul al doilea; avem

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} \equiv K\Sigma a^2 + K'\Sigma ab.$$

Facem $c=o$, și avem

$$\frac{a^4}{(a-b)a} + \frac{b^4}{b(b-a)} \equiv K(a^2+b^2)+K'ab,$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} \equiv K(a^2+b^2)+K'ab,$$

$$a^2+b^2+ab \equiv K(a^2+b^2)+K'ab\,;\; K=1,\; K'=1.$$

6. Să se extragă rădăcina pătrată a polinomului $4x^4-4x^3+5x^2-2x+1$.

R. Avem $4x^4-4x^3+5x^2-2x+1 \equiv (2x^2+px+q)^2$. Se întrebuințează formula $(a+b+c+\ldots)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab$; $4x^4+p^2x^2+q^2+2.2x^2.px+2.2x^2q+2pxq$.

Identificând coeficienții lui x^3, x^2, x, x^0 (termeni constanți), găsim $-4=4p$, $5=p^2+4q$, $-2=2pq$, $1=q^2$; $\pm(2x^2-x+1)$.

7. Să se afle condiția ca polinomul $a^2x^4+ax^3+bx^2+cx+c^2$ să fie pătrat perfect.

R. $2ac+\frac{1}{4}=b$, $\pm(ax^2+\frac{1}{2}x+c)$.

8. Să se extragă rădăcina cubică a polinomului $f(x)=x^6+3x^5-5x^3+3x-1$.

R. $f(x)\equiv(x^2+px+q)^3$. Se întrebuințează formula $(a_1+a_2+\ldots)^3 = \Sigma a_1^3 + 3\Sigma a_1^2 a_2 + 6\Sigma a_1a_2a_3$; $f(x) \equiv (x^6+p^3x^3+q^3)+3(x^4px+x^2p^2x^2+x^4q+x^2q^2+p^2x^2q+pxq^2)+6x^2pxq$. Identificând coeficienții lui x^5, x^4, avem $3=3p$, $p=1$; $0=3p^2+3q$, $q=-1$; $f(x)\equiv(x^2+x-1)^3$

9. Rădăcina cubică a polinomului $x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8$ este x^2-3x+2.

DETERMINANȚI.

19. Definiții și principii generale. Teoria determinanților este una din cele mai vechi. Este creată de *Leibnitz* (1693), căutând să rezolve un sistem de n ecuații de gradul întâi.

Inversiuni. Să considerăm o permutare oarecare $a_4\, a_2\, a_3\, a_1$ a celor 4 litere a_1, a_2, a_3, a_4. Se zice că în această permutare avem o *inversiune*, când o literă cu indice mai mare este scrisă înaintea unei litere cu indice mai mic. In permutarea $a_4\, a_2\, a_3\, a_1$, avem trei inversiuni relative la a_4, care este înaintea lui a_2, a_3, a_1, o inversiune relativă la a_2, care este înaintea lui a_1 și în fine una datorită faptului că a_3 este înaintea lui a_1; în total sunt cinci inversiuni.

O permutare se zice de clasa întâi, când are un număr par (cu soţ) de inversiuni și de clasa a doua când are un număr impar de inversiuni.

Principiu fundamental. *Dacă într'o permutare schimbăm două litere (elemente) între ele, permutarea își schimbă clasa.* I. Fie a_α,a_β două litere consecutive în permutarea $P=Aa_\alpha a_\beta B$, unde A reprezintă toate elementele ce se află înaintea lui a_α și B toate elementele ce sunt după a_β. Schimbând locul literelor a_α și a_β, se obţine permutarea $P'=Aa_\beta a_\alpha B$. Indicii elementelor din A, care preced pe $a_\alpha a_\beta$, și indicii elementelor care sunt scrise după $a_\alpha a_\beta$ (cele din B), conservă aceeași relaţie de mărime cu α și β, numărul de inversiuni nu poate fi modificat decât de așezarea lui a_α, a_β. Insă, dacă aceste elemente prezintă o inversiune în poziţia $a_\alpha a_\beta$, nu mai prezintă inversiune în poziţia $a_\beta a_\alpha$ și viceversa. Deci, schimbând locul a două litere alăturate, numărul total de inversiuni variază cu o unitate, adică, din par devine impar, sau reciproc, și deci permutarea își schimbă clasa.

II. Să considerăm cazul când elementele a_α, a_β nu sunt consecutive, și fie $Aa_\alpha Ca_\beta B$ o permutare oarecare; să însemnăm cu k numărul elementelor din C. Schimbând pe a_α, pe rând, cu fiecare din elementele din C, se obţine permutarea $ACa_\alpha a_\beta B$, făcând astfel k schimbări de elemente consecutive. Schimbăm pe a_α cu a_β, se obţine $ACa_\beta a_\alpha B$, adică o nouă schimbare de elemente consecutive. Schimbăm în fine a_β cu k

elemente ale lui C, se obține permutarea $Aa_\beta Ca_\alpha B$, deci k schimbări de elemente consecutive. La fiecare schimbare de elemente consecutive permutarea își schimbă clasa ; în total, ca să trecem dela permutarea $Aa_\alpha\ Ca_\beta\ B$ la permutarea $Aa_\beta Ca_\alpha B$, s'a schimbat de $k+1+k=2k+1$ ori clasa permutării $Aa_\alpha Ca_\beta B$. Numărul $2k+1$ fiind impar (fără soț, nepereche), permutările $Aa_\alpha\ Ca_\beta\ B$ și $Aa_\beta\ Ca_\alpha\ B$ sunt de clase diferite. Deci schimbând locul a două elemente oarecare, permutarea își schimbă clasa.

Observare. Rezultă că schimbând între ele, în toate modurile posibile elementele $a_1, a_2, \ldots a_n$, numărul permutărilor de clasa întâi este egal cu numărul permutărilor de clasa a doua. In adevăr, la fiecare permutare de o clasă, întâi de ex., $Aa_\alpha\ Ca_\beta B$, corespunde o permutare de clasa a doua, $Aa_\beta\ Ca_\alpha\ B$. Numărul permutărilor a n elemente fiind $n\,!=1.2.\ldots.n$, rezultă că numărul permutărilor de clasa întâi sau de clasa a doua este $\frac{1}{2}n\,!$

20. Definiția și valoarea unui determinant. Să considerăm elementele a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} aranjate în tabloul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ce are 2 linii și 2 coloane. Acest tablou se zice determinantul de ordinul al doilea, format cu aceste $4=2^2$ elemente. Considerând un element oarecare a_{12}, primul indice 1 al acestui element arată linia întâi unde se află, iar al doilea indice 2 arată că este în coloana a doua. Prin definiție, valoarea acestui determinant este egală cu o sumă de termeni de forma $a_{1\alpha}a_{2\beta}$, care se obțin luând câte un element din fiecare linie și din fiecare coloană, termenii având semnul + sau —, după cum permutarea $\alpha\beta$ este de clasa întâi sau a doua, sau după cum numărul inversiunilor este cu soț sau fără soț. Valoarea determinantului considerat este

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21},$$

primul termen $a_{11}a_{22}$ are semnul +, iar al doilea $a_{12}a_{21}$ are semnul —, căci indicele 2 din a_{12} este înaintea indicelui 1 din a_{21}.

Mai clar, să luăm elementele a_{11}, a_{22} ale diagonalei principale a determinantului dat și să considerăm termenul format cu ele, $a_{11}\,a_{22}$. Să permutăm între ei indicii de al doilea, adică, dacă acest termen ar fi scris sub forma $a_{1\alpha}\,a_{2\beta}$, să permutăm între ei indicii α, β (α, β sunt numerele 1, 2 scrise într'o ordine oarecare). Găsim $2!=2$ termeni de forma $a_{1\alpha}a_{2\beta}$, care se obțin luând câte un element din fiecare linie și fiecare coloană a determinantului dat. Valoarea determinantului se poate scrie

$$\Sigma\left(\pm a_{1\alpha}a_{2\beta}\right) = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21},$$

termenii obținându-se permutând indicii α, β în toate modurile posibile, și având semnul + sau —, după cum permutarea $\alpha\,\beta$ este de clasa întâi sau de clasa a doua.

De ex.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba', \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 5.3 = 4 - 15 = -11.$$

21. Să considerăm **determinantul de ordinul al treilea**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ce are 3 linii şi 3 coloane, format cu $3^2=9$ elemente. Valoarea sa este $\Sigma(\pm a_{11} a_{22} a_{33})$, care se mai poate scrie $\Sigma(\pm a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma})$, şi se obţine luând câte un element din fiecare linie şi din fiecare coloană, sau lăsând ficşi primii indici şi permutând indicii de al doilea α, β, γ în toate modurile posibile, iar termenii vor avea semnul $+$ sau $-$, după cum permutarea $\alpha\beta\gamma$ este de clasa întâi sau clasa a doua.

Permutările indicilor 1, 2, 3 sunt (No. 4)

$$(1) \quad \begin{matrix} 312, & 132, & 123, & 321, & 231, & 213, \\ + & - & + & - & + & - \end{matrix}$$

iar semnele scrise dedesubt sunt date de clasa lor, având semnul $+$ sau $-$, după cum permutarea este de clasa întâi sau a doua, sau după cum numărul inversiunilor este cu soţ sau fără soţ. De ex., permutarea 312 are semnul $+$, căci indicele 3 este înaintea lui 1 şi înaintea lui 2, deci două inversiuni.

Revenind la termenul general $a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}$ al determinantului considerat, termenii săi se obţin permutând în toate modurile posibile indicii de al doilea $\alpha\beta\gamma$. Dar, permutările lor sunt date de (1), aşa că termenii determinantului se obţin scriind în termenul general $a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}$ în loc de $\alpha\beta\gamma$ pe rând permutările (1) cu semnele lor, şi deci termenii sunt

$$+a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$-a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33},$$

care împreună reprezintă valoarea determinantului dat

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Vom da mai departe o regulă practică pentru obţinerea valorii unui determinant de ordinul al treilea.

22. Determinantul de ordinul n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

are n linii şi n coloane şi este format cu n^2 elemente a_{ik}, primul indice i arată linia şi al doilea indice k arată coloana unde se află elementul a_{ik}. Valoarea acestui determinant este egală cu o sumă de termeni de formă $a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\lambda}$, $\alpha, \beta, \dots \lambda$, fiind numerele $1, 2, \dots n$ scrise într'o ordine oarecare, ce se obţin luând câte un element din fiecare linie şi fiecare coloană, termenii având semnul $+$ sau $-$, după cum permutarea $\alpha\beta\dots\lambda$ este de clasa întâi sau a doua, sau după cum numărul inversiunilor este cu soţ sau fără soţ. Valoarea determinantului se poate scrie

$$\Sigma\left(\pm a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\lambda}\right),$$

termenii obţinându-se permutând indicii de al doilea $\alpha, \beta, \dots \lambda$ în toate modurile posibile. Numărul termenilor unui determinant de ordinul n este deci $n\,!$, iar numărul termenilor pozitivi este egal cu al celor negativi.

Vom da mai departe o metodă pentru aflarea valorii unui determinant.

✗**23. Proprietăţi.** I. *Un determinant nu se schimbă când se substitue liniile în locul coloanelor şi coloanele în locul liniilor.* Fie determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} . = \sum \left(\pm a_{11}a_{22}a_{33}\right).$$

Schimbând liniile în coloane, se obţine determinantul

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

a cărui valoare, după definiţie, este $\Sigma(\pm a_{11}\ a_{22}\ a_{33})$. Valorile determinanţilor D şi D' sunt aceleaşi, căci amândoi se obţin permutând indicii de al doilea din termenul principal $a_{11}a_{22}a_{33}$, care este acelaşi la ambii determinanţi. Deci $D=D'$, adică valoarea unui determinant nu se schimbă dacă scriem liniile în locul coloanelor.

II. *Dacă într'un determinant schimbăm între ele două linii sau două coloane, se obţine determinantul considerat înmulţit cu* —1. In adevăr, schimbând două linii între ele, aceasta înseamnă că în fiecare termen al determinantului s'au schimbat între ei doi indici sau două litere.

Prin urmare, în termenii noului determinant, numărul inversiunilor se schimbă cu o unitate. Deci, noul determinant este egal cu valoarea primului determinant înmulţit cu —1.

III. *Un determinant care are două linii sau două coloane identice, este egal cu zero.* In adevăr, schimbând între ele cele două linii sau coloane identice ale determinantului D, se obţine determinantul schimbat de semn, $-D$. Pe de altă parte, liniile considerate fiind identice, schimbându-le între ele, determinantul nou este tot D; deci $D=-D, 2D=o, D=o$, adică determinantul cu două linii sau două coloane identice este nul.

24. Determinanţi minori. Dacă în determinantul

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

suprimăm linia de rangul 2 şi coloana de rangul 3, se obţine determinantul

$$D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

care se zice determinantul minor corespunzător elementului a_{23}. Determinantul minor corespunzător elementului a_{11} este

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

× **25. Desvoltarea unui determinant după elementele unei linii sau coloane.** Fiecare termen al determinantului

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

conţine câte un element din fiecare linie şi din fiecare coloană şi numai câte unul. Să considerăm termenii care conţin pe a_{11} din linia întâi şi coloana întâi. Scoţând în factor acest element, termenii care-l conţin se pot scrie $a_{11}A_1$, A_1 fiind o sumă de produse de câte 3 elemente luate câte unul din celelalte linii şi coloane ale lui D, afară de linia întâi şi coloana întâi, adică tocmai determinantul minor D_{11} ce se obţine surpimând în D linia întâi şi coloana întâi. Deci, termenii ce conţin pe a_{11} se pot scrie a_{11} D_{11}.

De asemenea, termenii care conţin pe a_{12} se pot scrie $a_{12}A_2$, A_2 fiind o sumă de produse de 3 elemente luate din liniile şi coloanele determinantului D, afară de linia întâi şi coloana a doua din care face parte a_{12}. Deci $A_2 = D_{12}$, adică minorul corespunzător elementului a_{12}, şi care se obţine suprimând linia întâi şi coloana a doua. Dar, termenii determinantuliui D, ce au conţinut pe a_{12}, au avut acest element ca al doilea factor al produsului de 4 elemente (determinantul D este de ordinul al patrulea) ce formează fiecare termen. Insă scriind pe a_{12}, în faţă, am schimbat locul elementului întâi cu al doilea a_{12}, deci se introduce o inversiune, termenul schimbă de clasă şi de semn. De aceea, toţi aceşti termeni ce conţin pe a_{12}, trebue scrişi $-a_{12}D_{12}$, pentru ca readucând pe a_{12}, la locul al doilea, al său, în fiecare termen, să putem obţine tocmai termenii respectivi ai determinantului D.

La fel se vede că termenii ce conţin pe a_{13} se pot scrie $a_{13}D_{13}$, iar termenii ce conţin pe a_{14} se pot scrie $-a_{14}D_{14}$. Deci valoarea determinantului D se scrie

$$D=a_{11}D_{11}-a_{12}\,D_{12}+a_{13}D_{13}-a_{14}D_{14}.$$

Aceasta este *desvoltarea determinantului* D *după elementele linii întâi.*

Dacă voim să avem desvoltarea unui determinant după elementele altei linii, de ex. de rangul i, schimbăm locul acestei linii până vine în locul celei dintâi; deci se fac $(i-1)$ schimbări de câte două linii; deci se schimbă semnul de $i-1$ ori, se înmulţeşte determinantul cu $(-1)^{i-1}$, se obţine astfel $(-1)^{i-1}\,D$. Să presupunem că vrem a desvolta pe D după elementele linii a doua. Aducem linia a doua în locul celei dintâi, deci se face numai o schimbare de semn, avem $-D$. Desvoltând acum determinantul aşa aranjat, după elementele linii întâi, avem

$$D=(-1)(a_{21}D_{21}-a_{22}D_{22}+a_{23}D_{23}-a_{24}D_{24}),$$

care este desvoltarea determinantului D după elementele linii a doua.

La fel se face desvoltarea unui determinant oarecare de orice ordin după elementele unei linii sau coloane.

26. Desvoltarea determinantului de ordinul al treilea. Regula lui Sarrus. Desvoltând determinantul

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

după elementele liniei întâi, avem

$$D=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Desvoltând fiecare din determinanţii de ordinul al doilea, obţinem

$$D=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2),$$

$$D=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-b_1a_2c_3+b_1a_3c_2+c_1a_2b_3-c_1a_3b_2,$$

care este desvoltarea determinantului D de ordinul al treilea.

Această desvoltare se obţine cu regula lui Sarrus, aranjând sub determinantul dat primele două linii

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

şi înmulţim elementele din cele trei diagonale complecte care scoboară şi apoi scădem termenii formaţi înmulţind elementele din cele trei diagonale complecte ascendente (care urcă); obţinem

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.$$

De ex.,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1.0.6+(-2)5.3+4.2.1-4.0.3-5.1.1-6.(-2)2$$

$$=0-30+8-0-5+24=-3.$$

27. Alte proprietăți ale determinanților. I. *Dacă înmulțim sau împărțim cu un număr elementele unei linii sau coloane, se obține determinantul dat, înmulțit sau împărțit cu acel număr.* In adevăr, să înmulțim cu k elementele liniei întâia a determinantului

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13},$$

$$D_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Avem

$$D'=\begin{vmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & Ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

și desvoltându-l după linia întâia, obținem

$$D'=Ka_{11}D_{11}-Ka_{12}D_{12}+Ka_{13}D_{13}=K.D.$$

Exemplu.

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

II. *Dacă elementele unei linii sau coloane sunt zero, afară de unul singur, determinantul este egal cu produsul acelui element rămas cu determinantul minor corespunzător lui.*

Aceasta se poate ușor vedea, desvoltând determinantul după elementele acelei linii sau coloane.

III. *Un determinant ce are elementele de subt diagonala principală zero, se reduce la termenul principal.*

In adevăr, desvoltând după elementele coloanei întâi, avem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ o & b_2 & c_2 & d_2 \\ o & o & c_3 & d_3 \\ o & o & o & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ o & c_3 & d_3 \\ o & o & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \, b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ o & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

IV. *Un determinant, în care elementele a două linii sau coloane sunt proporţionale, este nul.* Fie D determinantul ce are două linii proporţionale; putem înmulţi cu doi factori K şi K', aleşi potrivit, respectiv elementele celor două linii proporţionale, astfel ca să devie identice. Se obţine $kk'D$. Dar rezultatul obţinut fiind un determinant cu două linii identice, este nul. Deci $kk'D=o$, $D=o$.

V. *Dacă elementele unei linii sau coloane sunt suma aceluiaşi număr de cantităţi, determinantul dat este suma atâtor determinanţi câţi termeni sunt în fiecare element. Aceşti determinanţi se obţin asociind respectiv diferiţii termeni ai elementelor linii sau coloanei compuse, cu elementele celorlalte linii sau coloane simple.* Să desvoltăm determinantul după elementele linii sau coloanei compuse. Avem

$$D = \begin{vmatrix} a_1+k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+k_1) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - (a_2+k_2) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (a_3+k_3) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + k_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - k_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

VI. *Valoarea unui determinant nu se schimbă, dacă se adaogă la elementele unei linii sau coloane acelea ale celorlalte linii sau coloane înmulţite respectiv cu factori constanţi.*

Fie

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Să considerăm determinantul

$$D'=\begin{vmatrix} a_1+ka_2+k'a_3 & b_1+kb_2+k'b_3 & c_1+kc_2+k'c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Conform proprietăţii precedente, avem

$$D'=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k'a_3 & k'b_3 & k'c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Al doilea şi al treilea determinant au respectiv liniile întâi şi a doua, întâi şi a treia, proporţionale; deci sunt nuli şi prin urmare $D=D'$.

De ex., să calculăm determinantul

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Să adăogăm elementele liniei a treia la elementele liniei a doua şi obţinem

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0,$$

căci are liniile întâi şi a doua identice.

28. Aplicaţie. Această proprietate serveşte ca să reducem un determinant de ordinul n la un altul de ordinul $(n-1)$: în adevăr, se aleg potrivit factorii k şi k', astfel ca elementele unei linii sau coloane să fie zero, afară de unul singur. Exemplu

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Scădem coloana întâi din a doua, a treia din întâia; avem

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Scădem acum coloana întâia din a doua şi a patra, apoi coloana întâi înmulţită cu 2 din a treia coloană ; avem

$$D=\begin{vmatrix} -5 & 8 & 17 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 17 & 13 \\ 5 & -7 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -7 & -9 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Am redus deci calculul determinantului de ordinul al patrulea la acela al unui determinant de ordinul al treilea, etc.

Observare. Valoarea determinantului dat D se putea obţine direct desvoltându-l după elementele unei linii sau coloane ; de exemplu să-l desvoltăm după elementele liniei întâia şi avem

$$D=2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix} -5\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} +7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} -8\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

Desvoltăm apoi fiecare determinant de ordinul al treilea cum ştim după regula lui Sarrus, şi obţinem astfel valoarea determinantului dat.

29. Calculul valorii câtorva determinanţi particulari. — Desvoltând un determinant de ordinul n după elementele unei linii sau coloane, se vede că se reduce calculul unui determinant de ordinul n la acela al unui determinant de ordinul $(n-1)$. Operând în mod analog asupra determinanţilor de ordinul $(n-1)$, se reduce calculul lor la acela al determinanţilor de ordinul $(n-2)$, etc. Vedem că operând astfel, ajungem la un determinant de ordinul al treilea.

Pentru calculul determinanţilor ne servim de proprietăţile precedente. făcând ca elementele unei linii sau coloane să fie zero afară de unul singur.

Exemple. 1^0
$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

Să adunăm coloanele întâi şi a doua şi rezultatul să-l scădem din coloana a treia ; avem
$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 1 & 4 \\ 6 & 28 & -1 & 8 \\ 10 & 40 & 4 & 13 \\ 8 & 37 & 1 & 11 \end{vmatrix}.$$

Adunăm linia a doua pe rând la liniile întâi şi a patra şi apoi linia a doua înmulţită cu 4 la linia a treia,

$$\begin{vmatrix} 9 & 41 & 0 & 12 \\ 6 & 28 & -1 & 8 \\ 34 & 152 & 0 & 45 \\ 14 & 65 & 0 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 41 & 12 \\ 34 & 152 & 45 \\ 14 & 65 & 19 \end{vmatrix}.$$

Scădem coloana întâi din a treia ; apoi, din coloana întâi pe a treia, înmulţită cu 3 şi înfine adunăm a doua linie cu a treia

$$\begin{vmatrix} 9 & 41 & 3 \\ 34 & 152 & 11 \\ 14 & 65 & 5 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 41 & 3 \\ 1 & 152 & 11 \\ -1 & 65 & 5 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 41 & 3 \\ 1 & 152 & 11 \\ 0 & 217 & 16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 41 & 3 \\ 217 & 16 \end{vmatrix} = -5.$$

2. *Să se calculeze determinantul lui Vandermonde*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Făcând $a_1 = a_2$, determinantul obţinut are două coloane identice ; deci este nul. Aşa dar D este divizibil cu $a_1 - a_2$. In mod analog se arată că este divizibil cu $a_1 - a_3$ şi $a_2 - a_3$. Determinantul D se poate scrie

$$(1) \qquad D = \left.\begin{matrix} (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \\ (a_2 - a_3) \end{matrix}\right\} k.$$

Termenii determinantului D se obţin luând câte un element din fiecare linie şi coloană ; deci un termen oarecare este de forma $\overset{1}{a_\alpha}\ \overset{2}{a_\beta}$ ca şi termenul principal $a_2 a_3^2$. Toţi termenii sunt de gradul $1+2=3$. Insă în desvoltarea (1), se vede că termenii sunt de gradul $2+1=3$, deci k este o constantă. Pentru a-l determina să calculăm coeficientul termenului $a_2 a_3^2$ din determinant şi din desvoltarea (1). In (1), acest termen este $k(-a_2)(-a_3)^2 = (-1)^{1+2}\, a_2 a_3^2\, k = -a^2 a_3^2\, k$. Coeficientul acestui termen, după diagonala principală a determinantului D fiind 1, trebue să avem $1 = -k$, deci $k = -1$. Aşa că desvoltarea determinantului lui Vandermonde de ordinul al treilea este

$$\begin{matrix} -(a_1 - a_2)\,(a_1 - a_3) \\ (a_2 - a_3). \end{matrix}$$

In cazul determinantului de ordinul n, avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ a_1 & a_2 & \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ n_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \begin{matrix} (a_1 - a_2)\,(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) \\ (a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (a_{n-1} - a_n). \end{matrix}$$

De ex., $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = -(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)$

3. *Să se desvolte determinantul*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

Raţionând ca mai sus, şi observând că D este o funcţiune omogenă, de gradul al 8-lea, valoarea sa este

$$D \equiv (a-b)(a-c)(a-d)$$

$$(2) \qquad (b-c)(b-d)(c-d)\left[k(a^2+b^2+c^2+d^2) + k'\sum ab \right].$$

Pentru a găsi pe k şi k', să facem în ambii membrii din (2), $a=o$; avem

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ b^3 & c^3 & d^3 \\ b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \equiv -bcd(b-c)(b-d)(c-d)\left[k(b^2+c^2+d^2)+k'(bc+cd+db)\right],$$

sau

$$bcd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & c^2 & d^2 \\ b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \equiv -bcd(b-c)(b-d)(c-d)\left[k\sum b^2 + k'\sum bc \right].$$

Simplificăm cu bcd şi pe urmă facem $b=o$ şi avem

$$\begin{vmatrix} c^2 & d^2 \\ c^3 & d^3 \end{vmatrix} \equiv -cd(c-d)\left[k(c^2+d^2)+k'cd \right],$$

$$c^2d^2(d-c) \equiv -cd(c-d)\left[k(c^2+d^2)+k'cd \right];$$

simplificăm cu cd $(c-d)$ şi obţinem $cd \equiv k(c^2+d^2)+k'cd$, de unde rezultă $k=o$, $k'=1$.

Desvoltarea determinantului este deci

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\sum ab.$$

4. *Să se desvolte determinantul*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

R. Adăogând ultimele două coloane la cea dintâi, avem

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix} = (q+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} =$$

$(a+b+c)\,(\sum ab - \sum a^2) = 3abc - \sum a^3$, care se obţinea direct cu regula lui Sarrus.

30. Exerciţii. Să se calculeze determinanţii şi să se generalizeze

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \qquad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

R. 1) 2. 2) 3 ; $(-1)^{n+1}n$. 3) $(-1)^{3-1}\frac{1}{2}3^3(3+1)$.

$$4)\ \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},\ \text{R.}\ \ -972.$$

$$5)\qquad D = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ a_1 & x & a_2 \\ a_1 & a_2 & x \end{vmatrix}.$$

R. Inlocuind x cu a_1 determinantul are două linii identice, deci e divizibil cu $x-a_1$; cu $x-a_2$. D fiind de gradul al treilea în x, al treilea factor se obţine adunând la coloana întâi pe celelalte. $D=(x-a_1)(x-a_2)(x+a_1+a_2)$. Se putea direct, adunând toate coloanele la întâia, dând factor comun pe $x+a_1+a_2$. Se poate generaliza.

$$6)\qquad D = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & b_1^2 \\ a_2^2 & a_2b_2 & b_2^2 \\ a_3^2 & a_3b_3 & b_3^2 \end{vmatrix}.$$

R. Se împarte linia întâi cu a_1^2, a doua cu a_2^2 ,... Se obţine determinantul lui Vandermonde.

$$D = -(a_1b_2-a_2b_1)\,(a_1b_3-a_3b_1)\,(a_2b_3-a_3b_2)$$

Se poate generaliza.

$$7)\ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix}.\ \text{R.}\ (-1)\,(x^3-1)^2;\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,(x^n-1)^{n-1}.$$

8) $D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x \\ x & a_2 & x \\ x & x & a_3 \end{vmatrix}$. R. $x(a_1—x)\,(a_2—x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}\right)$.

9) $$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}.$$

R. Se adună toate coloanele la întâia. $(a^3+b^3)^2$. Sau direct.

10) Să se rezolve ecuația

$$\begin{vmatrix} 1—x & 2 & 3 \\ 2 & 3—x & 1 \\ 3 & 1 & 2—x \end{vmatrix} =0.$$

R. Se adună toate coloanele la întâia.

$$(6—x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3—x & 1 \\ 1 & 1 & 2—x \end{vmatrix} =(6—x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1—x & —2 \\ 0 & —1 & 1—x \end{vmatrix} =(6—x)(x^2—3).$$

11) Să se arate că avem

$$\begin{vmatrix} a_0 & —1 & 0 \\ a_1 & x & —1 \\ a_3 & 0 & x \end{vmatrix} =a_0x^2+a_1x+a_2.$$ Se poate generaliza.

12) Să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} =—(a—b)\,(a—c)\,(b—c)\,(ab+bc+ca).$$

31. Aplicațiile determinanților. Rezolvarea ecuațiilor liniare când numărul necunoscutelor este egal cu al ecuațiilor. Fie ecuațiile

$$(1)\qquad \begin{aligned} E_1&\equiv a_1x+b_1y+c_1z—d_1=o \\ E_2&\equiv a_2x+b_2y+c_2z—d_2=o\,, \\ E_3&\equiv a_3x+b_3y+c_3z—d_3=o \end{aligned}$$

cu necunoscutele x, y, z. Să însemnăm cu

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

determinantul format de coeficienţii necunoscutelor. Să presupunem că acest determinant nu este egal cu zero. Desvoltând acest determinant după elementele coloanei întâi, avem

$$(2) \qquad D = a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3,$$

unde

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

sunt minorii corespunzători elementelor a_1, a_2, a_3.

Să înmulţim ecuaţia E_1 cu A_1, ecuaţia E_2 cu $-A_2$, ecuaţia E_3 cu A_3; adunându-le, avem

$$(3) \qquad x(a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3) + y(b_1A_1 - b_2A_2 + b_3A_3)$$
$$+ z(c_1A_1 - c_2A_2 + c_3A_3) = d_1A_1 - d_2A_2 + d_3A_3.$$

Dar observând relaţia (2), se vede că coeficientul lui x este

$$a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3 = D.$$

Apoi $b_1A_1 - b_2A_2 + b_3A_3$ este tocmai desvoltarea determinantului D, unde am înlocuit elementele a_1, a_2, a_3 ale coloanei întâi, cu elementele b_1, b_2, b_3, ale coloanei a doua. Adică este valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

care are coloana întâia şi a doua identice. Deci valoarea sa este zero, aşa dar coeficientul lui y în (3) este zero.

De asemenea coeficientul lui z din (3) este

$$c_1A_1 - c_2A_2 + c_3A_3 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = o,$$

căci are coloanele întâia și a treia identice. Termenul liber din (3) este

$$D_1=d_1A_1-d_2A_2+d_3A_3=d_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-d_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},$$

adică un determinant ce se obţine din D înlocuind coloana întâi formată din coeficienţii necunoscutei x, cu termenii liberi ai ecuaţiilor trecuţi în membrul al doilea al ecuaţiilor.

Deci relaţia (3) este

$$xD=D_1,$$

de unde

$$x=\frac{D_1}{D},\quad x=\frac{\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}.$$

In mod analog, obţinem

$$y=\frac{D_2}{D},\ z=\frac{D_3}{D},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix},$$

unde D_2 şi D_3 sunt determinanţii ce se obţin din D, înlocuind respectiv elementele coloanei a doua (a lui y) şi ale coloanei a treia (a lui z) cu termenii liberi ai ecuaţiilor trecuţi în membrul al doilea.

La fel se rezolvă orice sistem de m ecuaţii liniare cu m necunoscute.

31. *Exemple.* 1. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned}2x+3y-\ z&=\ \ 4\\ x+\ y-2z&=-3\\ 3x-2y+\ z&=\ \ 7.\end{aligned}$$

Avem

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & 3 & -1\\ -3 & 1 & -2\\ 7 & -2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-44}{-22}=2,\ y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 1 & -3 & -2\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}}=1, z=3.$$

2. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x+ay+a^2z+a^3=0,$$
$$x+by+b^2z+b^3=0,$$
$$x+cy+c^2z+c^3=0.$$

Avem

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-a^3 & a & a^2\\ -b^3 & b & b^2\\ -c^3 & c & c^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=\frac{-abc\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=-abc,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -a^3 & a^2\\ 1 & -b^3 & b^2\\ 1 & -c^3 & c^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=\frac{(a-b)(a-c)(c-b)\sum ab}{(a-b)(a-c)(c-b)}=\sum ab,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & -a^3\\ 1 & b & -b^3\\ 1 & c & -c^3\end{vmatrix}}{(a-b)(a-c)(c-b)}=\frac{-(a-b)(a-c)(c-b)k\sum a}{(a-b)(a-c)(c-b)}=-\sum a.$$

Alt procedeu. Să considerăm funcţiunea

$$f(X)=X^3+zX^2+yX+x.$$

Se vede că $f(a)=0$, $f(b)=0$, $f(c)=0$, ca fiind primele membre ale ecuaţiilor date.

Deci $f(X)$ se divide cu $(X-a)(X-b)(X-c)$. Identificând, avem

$$X^3+zX^2+yX+x\equiv(X-a)(X-b)(X-c),$$

$$X^3+zX^2+yX+x\equiv X^3-X^2\sum a+X\sum ab-abc,$$

$$z=-\sum a,\quad y=\sum ab,\quad x=-abc.$$

3. *Să se discute sistemul de ecuații*

$$ax+by=c, \quad a'x+b'y=c'.$$

Determinantul coeficienţilor este

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-ba'.$$

1^0 Dacă $D \neq 0$, atunci

$$(4)\, x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

Dreptele $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$ au un singur punct comun.

2^0 Să presupunem $D=o$, $ab'-ba'=0$, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, dar coeficientul $a \neq 0$, adică minorul a al determinantului D este diferit de zero. Rezolvând ecuaţia întâi în raport cu x,

$$x=\frac{c-by}{a}, \text{ (căci } a \neq 0),$$

înlocuind în a doua, obţinem

$$a'\frac{c-by}{a}+b'y=c', \quad (5) \quad y(ab'-ba')=ac'-ca'.$$

Dar am văzut că $D=0$, $ab'-ba'=0$. Deci, pentru ca să existe valori pentru x şi y care să verifice sistemul de ecuaţii, trebue ca

$$ac'-ca'=0, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=0, \quad \frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}.$$

Şi cum $D=0$, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, urmează că

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

Insemnând cu $\frac{1}{k}$ valoarea comună a acestor rapoarte, avem

$$\frac{a}{a'}=\frac{1}{k}, \quad a'=ka, \quad b'=kb, \quad c'=kc,$$

astfel că ecuaţia a doua devine

$$a'x+b'y-c'=k(ax+by-c),$$

adică ecuaţia a doua se reduce la ecuaţia întâi. Deci x şi y sunt daţi de o singură ecuaţie,

$$ax+by=c,$$

de unde
$$x=\frac{c-by}{a},$$

astfel că la fiecare valoare a lui y corespunde o valoare pentru x. Sistemul admite o infinitate de soluţii, este nedeterminat. Dreptele $ax+by=c$ $a'x+b'y=c'$ sunt confundate, au toate punctele comune. Şi cum valorile lui x şi y date de (4) au forma

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}=\frac{0}{0},\quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}=\frac{0}{0},$$

se zice că $\frac{0}{0}$ reprezintă o formă nedeterminată.

Am văzut că în acest caz am avut determinantul principal $D=0$, $a\neq0$ şi

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=0.$$

Acest ultim determinant se zice determinant caracteristic al sistemului.

3^0 Dacă $D=ab'-ba'=0$, $a\neq0$, dar determinantul caracteristic $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\neq0$, din relaţia (5) se vede că membrul întâi al ecuaţii este zero, iar membrul al doilea $ac'-ca'\neq0$, sistemul este imposibil, nu sunt valori pentru x şi y care să verifice sistemul dat. In adevăr din valorile (4) ale lui x şi y se vede că numai numitorul este zero, valoarea fracţii este foarte mare, valorile lui x şi y sunt foarte mari. Punctul (x, y) de intersecţie al dreptelor paralele

$$ax+by=c,\ a'x+b'y=c',\ \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},$$

este aruncat la infinit.

4^0 Coeficienţii necunoscutelor sunt nuli. Dacă unul din termenii cunoscuţi nu este nul, sistemul e imposibil; dacă ambii sunt nuli, sistemul e complect nedeterminat.

32. Discuţia sistemului de ecuaţii

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{aligned}$$

Primul caz. Am văzut că dacă determinantul sistemului

$$(7)\ D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

este deferit de zero, sistemul are valori determinate şi unice pentru x, y, z.

Cazul al doilea. Să presupunem că $D=o$, dar că unul din minorii săi, de ex.

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

este diferit de zero. Atunci se pot rezolva primele două ecuaţii (6) în raport cu x şi y, avem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y = d_1 - c_1z \\ a_2x + b_2y = d_2 - c_2z, \end{aligned}$$

de unde

$$(8)\qquad x = \frac{\begin{vmatrix} d_1-c_1z & b_1 \\ d_2-c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1z \\ a_2 & d_2-c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Dar

$$\begin{vmatrix} d_1-c_1z & b_1 \\ d_2-c_2z & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1z \\ a_2 & d_2-c_2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Pentru ca sistemul de ecuaţii (6) să fie compatibil, trebue ca valorile (8) ale lui x şi y să verifice şi ecuaţia a treia din (6). Inlocuind pe x şi pe y cu valorile lor în această ultimă ecuaţie din (6), avem

$$a_3\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\delta}+b_3\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}-z\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\delta}+c_3z-d_3=0, \delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Desvoltând și aranjând, obţinem

$$-a_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}-d_3\delta+z\left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\delta\right)=0,$$

$$(9)\quad z\left(a_3\begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}\right)=a_3\begin{vmatrix} b_1 d_1 \\ b_2 d_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 d_1 \\ a_2 d_2 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$$

Dar coeficientul lui z, adică paranteza, este tocmai determinantul D, după cum se vede din (7), desvoltat după elementele linii a treia. Membrul al doilea din (9) este desvoltarea după linia a treia a unui determinant ce se obţine din D înlocuind coloana a treia cu termenii d_1, d_2, d_3, ai ecuaţiilor (trecuţi în membrul al doilea),

$$\delta'=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Deci relaţia (9) devine

$$(10)\qquad Dz=\delta'.$$

Dar am spus că $D=o$. Deci ca sistemul să fie compatibil, trebue ca şi membrul al doilea să fie zero, adică determinantul $\delta'=o$. Acest determinant se zice determinant caracteristic al sistemului.

In aceste condiţii, $D=o$ și $\delta'=o$, sistemul e compatibil, ecuaţia a treia este verificată de soluţiile ce verifică primele două ecuaţii; ecuaţia a treia este o consecinţă (o transformare) a primelor două ecuaţii. Sunt o infinitate de soluţii date de

$$a_1x + b_1y = d_1 - c_1z,$$
$$a_2x + b_2y = d_2 - c_2z,$$

z fiind absolut oarecare.

Exemplu. $x+2y-3z=0,\ 2x-y+z=2,\ 3x+y-2z=2.$

Ecuaţia a treia se obţine adunând primele două ecuaţii.

Cazul al treilea. Dacă $D=o$, $\delta=o$, dar $\delta'\neq o$, adică determinantul caracteristic nu se anulează, sistemul este imposibil. Din (9) se vede că $z=\frac{\delta'}{D}=\frac{\delta'}{o}\rightarrow\infty$ este foarte mare, şi deci şi x şi y [din (8)] sunt foarte mari.

De ex., $x+2y-z=2,\ 2x-y+3z=4,\ 3x+y+2z=1.$

Primul membru al ecuaţii a treia este suma primelor membre ale celor dintâi două ecuaţii, dar membrul al doilea al ecuaţii a treia nu este suma membrelor de al doilea ale acestor ecuaţii.

Cazul al patrulea. Toţi minorii lui D sunt nuli, deci şi $D=o$; unul din coeficienţii necunoscutelor, $a_1\neq o$. Rezolvând prima ecuaţie din (6) în raport cu x, avem

$$x=\frac{1}{a_1}(d_1-b_1y-c_1z).$$

Scriind că şi ecuaţiile a doua şi a treia din (6) sunt verificate de această valoare a lui x, obţinem pentru a doua

$$\frac{a_2}{a_1}(d_1-b_1y-c_1z)+b_2y+c_2z=d_2,$$

$$y(-a_2b_1+a_1b_2)+z(-a_2c_1+a_1c_2)=a_1d_2-a_2d_1,$$

şi pentru a treia

$$y(-a_3b_1+a_1b_3)+z(-a_3c_1+a_1c_3)=a_1d_3-a_3d_1.$$

Sau

$$(11)\quad \begin{aligned} y\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}, \\ y\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dar coeficienţii lui y şi z sunt determinanţi minori ai lui D; şi cum am spus că toţi minorii lui D sunt nuli, urmează că pentru ca sistemul să fie compatibil, trebue ca determinanţii caracteristici din membrii al doilea din (11) să fie nuli

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = o, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = o.$$

Ecuaţiile a doua şi a treia se reduc la prima ecuaţie şi soluţiile sunt date de

$$x = \frac{d_1}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} y' - \frac{c_1}{a_1} z', \quad y = y', \quad z = z',$$

y' şi z' fiind arbitrare.

De ex., $x - y + 2z = 2$, $2x - 2y + 4z = 4$, $3x - 3y + 6z = 6$.

Cazul al cincilea. $D = o$, toţi minorii lui D sunt nuli, dar unul din determinanţii caracteristici este diferit de zero. Sistemul este imposibil.

De ex., $2x - y + z = 2$, $4x - 2y + 2z = 4$, $6x - 3y + 3z = 1$.

Cazul al şaselea. Coeficienţii necunoscutelor sunt nuli. Dacă unul din termenii cunoscuţi nu este nul, sistemul e imposibil; dacă toţi sunt nuli, sistemul e complet nedeterminat.

33. *Exemple.* 1. *Să se discute sistemul de ecuaţii*

$$\begin{aligned} 5x + 3y - 11z &= 13 \\ 4x - 5y + 4z &= 18 \\ 9x - 2y - 7z &= 25. \end{aligned}$$

Determinantul coeficienților este

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 4 \\ 9 & -2 & -7 \end{vmatrix}=0,$$

căci adunând linia întâi și a doua, determinantul obținut are două linii identice. Să considerăm determinanții de ordinul al doilea, minorii săi. Luând primul

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\neq 0$$

ca determinant principal, se poate forma determinantul caracteristic

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 13 \\ 4 & -5 & 18 \\ 9 & -2 & 25 \end{vmatrix},$$

care fiind diferit de zero, sistemul este imposibil.

2. *Să se discute sistemul*

$$\begin{aligned} x &+ ay + a^2z = 1 \\ x &+ ay + abz = a \\ bx &+ ay + a^2bz = a^2b. \end{aligned}$$

Determinantul principal este

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ 1 & a & a^2b \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ b & 1 & ab \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-a \\ b\text{-}1 & 0 & ab-a \end{vmatrix}=a^2(b-1)(b-a).$$

Avem trei cazuri. 1^0 $a=0$, 2^0 $b=1$, 3^0 $a=b$. Pentru ușurința discuții, întrebuințăm metoda grafică (Fig. 3), considerând a și b coordonatele unui punct din plan. Dacă $D\neq 0$, adică $a\neq 0$, sau $b\neq 1$, sau $a\neq b$, adică punctul (a, b) nu este pe axa 0b, pe dreapta $b=1$, pe bisectoarea întâi $b=a$, scăzând primele două ecuații avem

$$x=\frac{1-a}{a(a-b)}, \text{ etc.}$$

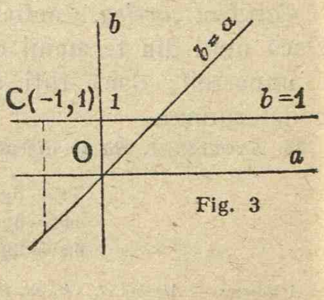


Fig. 3

1^0 Dacă $a=0$, sistemul devine

$$x=1, \quad x=0, \quad bx=0,$$

și este imposibil.

2^0 Dacă punctul (a, b) din plan este pe dreapta $b=1$, sistemul devine

$$x + ay + a^2z = 1$$
$$x + ay + az = a$$
$$x + ay + a^2z = a^2.$$

Când $a=0$ sistemul e imposibil; deci presupunem $a \neq 0$. Determinantul sistemului este

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $a=1$, nici un minor de ordinul al doilea nu este diferit de zero; luăm ca determinant principal primul element $|1|$. Determinanţii caracteristici sunt în acest caz $(a=1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

sistemul este nedeterminat de ordinul al doilea (şi y şi z oarecari), căci se reduce la ecuaţia $x+y+z=1$.

Dacă $a \neq 1$, putem forma un determinant principal de ordinul al doilea

$$\begin{vmatrix} a & a \\ a & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2(a-1) \neq 0.$$

Ecuaţiile principle sunt a doua şi a treia, cu necunoscutele principale y şi z. Formăm determinantul caracteristic

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a^2 & a^2 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & a^2-a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= a^2(a-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2(a-1)^2(a+1).$$

Dacă $a=-1$, determinantul caracteristic este nul, sistemul e deci posibil.

3^0 Când $b=a$, sistemul devine

$$x + ay + a^2z = 1$$
$$x + ay + a^2z = a$$
$$ax + ay + a^3z = a^3.$$

Determinantul necunoscutelor erte

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a & a^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Excludem cazul $a=1$, studiat, deci presupunem $a \neq 1$. Putem lua ca determinant principal

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & a \end{vmatrix} = a(a-1).$$

Determinantul caracteristic este

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & a & a^3 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & a(a-1) \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = a(1-a)^2 \neq 0,$$

sistemul este imposibil.

34. Condiția ca trei ecuații cu două necunoscute să fie compatibile. Eliminarea a două necunoscute între trei ecuații. Să considerăm ecuațiile

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= o \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= o \\ a_3 x + b_3 y + c_3 &= o, \end{aligned}$$

care sunt verificate de valorile lui x și y, date de ex., de primele două ecuații

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Scriind că aceste valori verifică ecuația a treia, obținem

$$a_3 \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_3 \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + c_3 = o,$$

$$a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_3(a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = o,$$

care este desvoltarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

format de coeficienţii celor trei ecuaţii date. Deci, condiţia ca sistemul să fie compatibil, adică cele trei ecuaţii să fie verificate în acelaşi timp de necunoscutele x şi y, este ca determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

A scrie că sistemul de trei ecuaţii cu două necunoscute este compatibil, înseamnă a elimina pe x şi y între cele trei ecuaţii date şi a găsi relaţia de condiţie care se exprimă egalând cu zero determinantul coeficienţilor.

In mod analog se procedează în cazul a n ecuaţii cu $(n-1)$ necunoscute.

Exemplu. Să se afle condiţia ca dreptele reprezentate de ecuaţiile

$$\begin{aligned} 2x-3y+1&=0 \\ x+2y-3&=0 \\ ax+y-2&=0 \end{aligned}$$

să fie concurente. Inseamnă că este un punct ale cărui coordonate x şi y verifică aceste trei ecuaţii. Deci, trebue să avem

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad a=1.$$

35. Condiţia ca trei ecuaţii liniare omogene în raport cu x, y, z să admită soluţii nu toate nule. Fie ecuaţiile omogene

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z&=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z&=0, \end{aligned}$$

care sunt verificate de valori pentru x, y, z nu toate nule. Presupunând că $z \neq o$, divizând ecuaţiile cu z, avem

$$
\begin{aligned}
& a_1 \frac{x}{z} + b_1 \frac{y}{z} + c_1 = o \\
(1) \qquad & a_2 \frac{x}{z} + b_2 \frac{y}{z} + c_2 = o \\
& a_3 \frac{x}{z} + b_3 \frac{y}{z} + c_3 = o
\end{aligned}
$$

trei ecuaţii verificate de necunoscutele $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$. Eliminând aceste necunoscute între ele, după cele ce am văzut mai sus, trebue să avem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = o,$$

care este condiţia ca cele trei ecuaţii omogene să aibă soluţii nu toate nule.

Din primele două ecuaţii (1), presupunând

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq o,$$

rezolvându-le în raport cu $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, avem

$$\frac{x}{z} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

de unde urmează

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

care ne dau valori proporţionale pentru x, y, z, ce verifică ecuaţiile omogene date.

Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuatii

$$\begin{aligned} 2y-4z&=sx,\\ 2x+2y-2z&=sy,\\ -4x-2y\quad&=sz,\\ x^2+y^2+z^2&=1. \end{aligned}$$

Primele trei ecuaţii fiind omogene în raport cu x, y, z,

$$\begin{aligned} -sx+2y\quad-4z&=0,\\ 2x+(2-s)y-2z&=0,\\ -4x-2y\quad-sz&=0, \end{aligned}\tag{2}$$

ca sistemul să aibă soluţii nu toate nule pentru x, y, z, trebue

$$\begin{vmatrix} -s & 2 & -4 \\ 2 & 2-s & -2 \\ -4 & -2 & -s \end{vmatrix}=0,$$

şi desvoltând, avem $s^3-2s^2-24s=0$; $s_1=0$, $s_2=-4$, $s_3=6$. Dând lui s una din aceste valori, deducem din primele două ecuaţii (2)

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2-s & -2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} -4 & -s \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} -s & 2 \\ 2 & 2-s \end{vmatrix}},$$

$$\frac{x}{4-4s}=\frac{y}{-8-2s}=\frac{z}{s^2-2s-4}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(4-4s)^2+(-8-2s)^2+(s^2-2s-4)^2}}=\frac{1}{\sqrt{}}.$$

Deci,

$$s_1=0,\ \frac{x}{4}=\frac{y}{-8}=\frac{z}{-4}=\frac{1}{4\sqrt{1+2^2+1}}=\frac{1}{4\sqrt{6}},\ x=\frac{4}{4\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ y=\frac{-2}{\sqrt{6}},\ z=\frac{-1}{\sqrt{6}};$$

$$s_2=-4,\ x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=0,\ z=\frac{1}{\sqrt{2}};\ s_3=6,\ x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ y=\frac{1}{\sqrt{3}},\ z=\frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

36. Exerciţii. 1. Să se rezolve cu determinanţi ecuaţiile

$$x+y-z=1,\quad x-y+z=2,\quad -x+y+z=3.$$

R. $x=\frac{3}{2}$, $y=2$, $z=\frac{5}{2}$.

2. Să se rezolve sistemul

$$2x-3y+4z=7,\ 3x+2y-5z=8,\ 5x-y-z=15.$$

R. Sistemul e nedeterminat, ultima ecuaţie e consecinţă a celorlalte.

$$x=\frac{1}{13}(38+7z),\quad y=\frac{1}{13}(22z-5).$$

3. Să se rezolve cu determinanţi sistemul

$$\begin{aligned}4x-3y\qquad\quad +2u&=9,\\ 2x\qquad +6z\qquad\quad &=28,\\ -2y\qquad +4u&=14,\\ 3x\qquad\qquad\quad +4u&=26.\end{aligned}$$

R. $x=2,\ y=3,\ z=4,\ u=5.$

3. Să se discute sistemul

$$x+y+z=9,\ 3x-y+2z=10,\ 2x+7y-3z=8,$$
$$ax-by+cz=20,\ ax+by+cz=44,\ 10ax+3by-cz=26.$$

R. Din primele trei ecuaţii se găseşte $x=1,\ y=3,\ z=5$. Scriind că verifică şi pe celelalte (adică scriind că determinanţii caracteristici sunt nuli), se obţin condiţiile $a-3b+5c=20$, $a+3b+5c=44$, $10a+9b-5c=0$,

$$a=2,\quad b=4,\quad c=6.$$

4. Să se discute sistemul

$$\begin{aligned}ax+by+cz&=1.\\ bx+cy+az&=1.\\ cx+ay+bz&=1.\end{aligned}$$

R. Determinantul sistemului este

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

Dacă $a\neq b\neq c$, $a+b+c\neq 0$, soluţii determinate. Dacă $a\neq b\neq c$, $a+b+c=0$, sistemul incompatibil, căci determinantul caracteristic

$$\begin{vmatrix} a & b & 1\\ b & c & 1\\ c & a & 1\end{vmatrix}\neq 0.$$

Dacă $a=b=c$, sistemul nedeterminat, ecuaţiile se reduc a una.
5. Să se discute sistemul

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=a,\\ 2x+3y+z&=b,\\ ax+by+z&=0. \end{aligned}$$

R. Determinantul prinicipal este

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 5b—7a—1.$$

Se construeşte dreapta $D\equiv 5b—7a—1=0$ în raport cu axele Oa, Ob. Punctul (a, b) nefiind pe dreapta D, sistemul e compatibil. Dacă (a, b) este pe D, atunci $7a—5b+1=0$. Luăm ca determinant principal

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

determinantul caracteristic este $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = a^2—(b—2a)^2=$

$$=\Big[a—(b—2a)\Big]\Big[a+(b—2a)\Big]=(b—a)(3a—b).$$

Determinantul e nul pentru $a=b$, $3a=b$. Când punctul (a, b) e pe dreapta D şi pe una din dreptele $b=a$, $3a=b$ (ce trec prin origine), sistemul este nedeterminat; adică pentru punctele de intersecţie ale dreptelor $5b—7a—1=0$, $a=b$ şi $5b—7a—1=0$, $3a—b=0$.

FUNCŢIUNI. LIMITE.

37. Noţiunea de funcţiune. Se numeşte cantitate variabilă, sau simplu variabilă, o cantitate care poate să ia după voe diferite valori. Se zice că y este o funcţiune de o variabilă x, când x fiind dat, atunci y este determinat. Variabila x care poate să fie dată după voe, se zice variabilă independentă.

Geometria, Fizica, Mecanica, ne dau numeroase exemple de funcţiuni. Astfel, aria y a cercului este o funcţiune de raza sa x, definită de relaţia $y=\pi x^2$; lungimea unei vergele este o funcţiune de temperatura sa.

In general, o funcţiune de variabila x se scrie

$$y=f(x),$$

şi se citeşte *ef* de x; forma expresiei $f(x)$ ne arată felul cum y depinde de x, şi ne indică şirul de operaţii ce trebue a le face asupra lui x, ca să avem valoarea lui y. De ex., $y=x^2-3x+2$, $y=\sqrt{x-2}$. Formula $y=f(x)$, care este o ecuaţie cu două necunoscute x şi y, rezolvată în raport cu y, defineşte pe y ca funcţie *explicită* de x.

Această relaţie dintre y şi x se înţelege uşor prin următoarea interpretare geometrică. Să dăm lui x o valoare $x=OP$ (Fig. 4) şi fie y valoarea funcţiunii $f(x)$, când facem pe $x=OP$. Să construim în raport cu două axe de coordonate punctul M cu abscisa x (egală cu

OP şi ordonata y egală cu $f(x)$, $y=PM$. Când facem să varieze x, atunci şi y variază, iar punctul M descrie o linie, care reprezintă grafic funcţiunea $f(x)$.

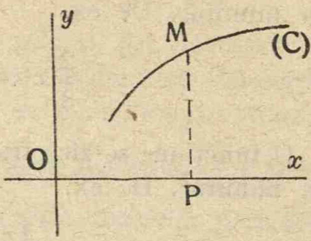


Fig. 4.

O ecuaţie $x^2+y^2=9$, sau în general, $f(x,y)=o$, nerezolvată, în raport cu y, defineşte pe y ca funcţiune *implicită* de x.

După cum unei funcţiuni $y=f(x)$ corespunde o curbă, invers fiind dată o curbă (C) (Fig. 4), există o relaţie între abscisa $x=OP$ și ordonata $y=PM$ a fiecărui punct M al curbei, adică $F(x,y)=o$, care poate fi rezolvată în raport cu y, $y=f(x)$. Deci, la orice curbă corespunde o ecuaţie $F(x, y)=o$, sau $y=f(x)$, natura funcţiunii $f(x)$ depinzând de forma curbei.

Sunt și funcţiuni ce depind de mai multe variabile x, y, z, cum este de ex.,

$$f(x, y, z)=x^2+2xy+5z^2-3xz+4yz,$$

unde x, y, z pot lua orice valori. De ex., volumul cilindrului, $V=\pi x^2 y$, este o funcţiune de raza x și înălţimea y; volumul paralelipipedului, $V=xyz$ este o funcţiune de cele trei dimensiuni x, y, z ale sale.

O funcţiune se zice *algebrică* când ea exprimă că asupra cantităţilor de care depinde se efectuează un număr finit sau mărginit de operaţiunile aritmetice cunoscute. De ex., un polinom, o fracţie, un radical,

$$f(x)=2x^3-4x^2+3x+7,\quad F(x)=\frac{3x^2-5x}{1+x^3},\quad \varphi(x)=\sqrt{x^2+1}.$$

Orice funcţiune ce nu este algebrică se zice *transcendentă*. De ex., $f(x)=log(x+1)$, $g(x)=a^x$, $h(x)=\sin x$.

O funcţiune este întreagă când nu conţine variabile la numitor. De ex.

$$\frac{2}{3}x^2-5x+\frac{7}{8}.$$

O funcţiune se zice fracţionară, când variabilele intră la numitor. De ex.

$$\frac{4x^2y-3}{x-2y^2}.$$

Forma generală a unei fracţiuni raţionale de o singură variabilă este

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n},$$

$P(x)$ şi $Q(x)$ fiind două polinoame în x.

O funcţiune se zice iraţională când variabila intră sub radicali ; de ex.

$$y=\sqrt{1-x^2},\ y=\frac{2}{3}\sqrt{a^2-x^2},\ y=\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}.$$

O funcţie se zice raţională, când variabila nu intră sub radicali ; de ex., un polinom sau o fracţie raţională,

$$f(x)=\frac{2x^2}{\sqrt{3}}-3x+1,\quad F(x)=\frac{2x^2+4x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,x^2-3}.$$

38. **Exerciţii.** Să se exprime explicit y definit de ecuaţiile $x-xy+2y+3=0$, $x^2+y^2=2$, $xy=3$, $x^2-y^2=1$, $y^2=2ax$, şi să se calculeze valorile funcţiunii corespunzătoare pentru $x=0$, -1, $\frac{1}{2}$, 2.

39. **Noţiunea de limită şi de număr iraţional (incomensurabil).** Se zice că o constantă A este limita unei cantităţi variabile X, când X variind se apropie ori cât am

voi de A, aşa în cât diferenţa $X—A$ este oricât de mică. Aceasta se scrie $\lim X=A$.

In Aritmetică sunt exemple care să dea noţiunea de limită. De ex., o fracţie ordinară nereductibilă (numărătorul şi numitorul primi între ei, n'au factori comuni), care nu se transformă exact în fracţie zecimală, $\frac{5}{6}=0{,}8333$, este limita către care tinde fracţia zecimală periodică $0{,}8333\ldots$, când numărul perioadelor (aci este 3 perioada) creşte nemărginit.

De asemenea, când rădăcina pătrată dintr'un număr nu se extrage exact, de ex. $\sqrt{2}$, o reprezentăm cu un număr zecimal, şi cu cât aflăm mai multe zecimale, cu atât ne apropiem de rădăcina pătrată exactă, aşa fel că rădăcina este considerată ca limita către care tinde fracţia zecimală când numărul zecimalelor creşte nemărginit.

Mai mult, să considerăm valorile apropiate ale lui $\sqrt{2}$, prin lipsă şi adaus, adică

$$1{,}4<1{,}41<1{,}414<\ldots$$
$$1{,}5>1{,}42>1{,}415>\ldots$$

Aceste două şiruri se pot scrie

$$\frac{a_1}{10}<\frac{a_2}{10^2}<\ldots<\frac{a_n}{10^n}<\ldots$$

$$\frac{a_1+1}{10}>\frac{a_2+1}{10^2}>\ldots>\frac{a_n+1}{10^n}>\ldots$$

Am obţinut deci două şiruri de numere, cele din şirul întâi cresc rămânând mai mici ca $\sqrt{2}$, iar cele din şirul al doilea descresc, rămânând mai mari ca $\sqrt{2}$. Orice număr din şirul întâi este mai mic decât orice număr din şirul al doilea. Diferenţa dintre doi termeni foarte depărtaţi, corespunzători la aceeaşi valoare a lui n,

$$\frac{a_n+1}{10^n}-\frac{a_n}{10^n}=\frac{1}{10^n},$$

tinde către zero, când n creşte nemărginit, astfel că la limită, când n este foarte mare, termenii corespunzători din cele două şiruri se apropie foarte mult de $\sqrt{2}$.

Reprezentând pe o axă Ox (Fig. 5), prin A_1 şi B_1 punctele de abscise egale cu 1,4 şi 1,5; apoi prin A_2 şi B_2 punctele cu abscisele egale cu 1,41 şi 1,42; prin A_n şi B_n punctele de abscise

$$OA_n=\frac{a_n}{10^n},\ OB_n=\frac{a_n+1}{10^n},$$

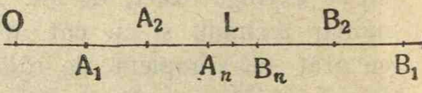


Fig. 5.

se vede că intervalul

$$(A_n,\ B_n)=OB_n-OA_n=\frac{1}{10^n}$$

tinde către zero când $n \rightarrow \infty$ (n tinde către infinit); astfel că la limită, când n creşte nemărginit, intervalul $(A_n,\ B_n)$ tinde către zero, punctele A_n şi B_n tind către acelaşi punct L a cărui abscisă este limita comună a celor două şiruri de numere, $\sqrt{2}$.

Valoarea exactă a lui $\sqrt{2}$ nu se poate calcula, şi atunci definim acest număr prin cele două şiruri de numere raţionale (întregi sau fracţionare), care îndeplinesc condiţiile enunţate mai sus şi care dau valoarea apropiată a acestui număr. Numărul astfel obţinut, se zice *iraţional* sau *incomensurabil*.

Infinit mare, este o cantitate variabilă care creşte nemărginit. De ex., să considerăm fracţiile ordinare

$$\frac{3}{5},\ \frac{3}{0{,}5},\ \frac{3}{0{,}05}\ \cdots$$

în care numitorul se micşorează şi tinde către zero. Aceste fracţii se pot scrie

$$\frac{3}{5}, \frac{30}{5}, \frac{300}{5}, \ldots$$

şi se vede că fracţiile cresc, iar când numitorul tinde către zero, valoarea ei creşte nemărginit. Deci

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} = \infty.$$

Când lim $X=A$, atunci $X=A+\alpha$, α fiind oricât de mic (care tinde către zero).

Dacă X are ca limită pe A, aceasta se exprimă prin inegalitatea

$$|X-A| < \varepsilon,$$

unde ε este o cantitate oricât de mică am voi, iar $|X-A|$ valoarea absolută a diferenţei $X-A$.

Se zice că limita unei funcţiuni $f(x)$ pentru $x=a$ este A, când diferenţa $f(x)-A$ tinde către zero în acelaşi timp cu $x-a$. Aceasta se mai poate scrie

$$f(x)=A+\alpha, \quad x=a+\beta,$$

α şi β fiind oricât de mici am voi şi tind către zero în acelaşi timp.

40. *Limita sumei mai multor cantităţi variabile este egală cu suma limitelor a celor cantităţi, dacă numărul cantităţilor este finit.* In adevăr, însemnând cu X_1, $X_2, \ldots X_p$ cantităţile variabile şi cu A_1, $A_2, \ldots A_p$ limi-, tele lor, avem $\lim X_1 = A_1, \ldots \lim X_p = A_p$,

$$X_1 = A_2 + \alpha_1, \ldots X_p = A_p + \alpha_p,$$

unde α_1, α_2, ... α_p tind în acelaşi timp către zero. Deci

$$X_1 + \ldots + X_p = A_1 + A_2 + \ldots + A_p + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p.$$

Trecând la limită și observând că atunci $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ tind către zero, urmează că

$$\lim(X_1 + \ldots + X_p) = A_1 + \ldots + A_p,$$

$$\lim(X_1 + \ldots + X_p) = \lim X_1 + \ldots + \lim X_p.$$

41. *Limita unui produs de mai mulți factori variabili este egală cu produsul limitelor a celor factori, dacă numărul lor este finit.*

In adevăr, dacă $\lim X_1 = A_1$, $\lim X_2 = A_2$, $\lim X_3 = A_3$, avem

$$X_1 = A_1 + \alpha_1, \quad X_2 = A_2 + \alpha_2, \quad X_3 = A_3 + \alpha_3,$$

$$X_1 X_2 X_3 = (A_1 + \alpha_1)(A_2 + \alpha_2)(A_3 + \alpha_3) = A_1 A_2 A_3 +$$

$$+ A_1 A_2 \alpha_3 + A_2 A_3 \alpha_1 + A_3 A_1 \alpha_2 + A_1 \alpha_2 \alpha_3 + A_2 \alpha_3 \alpha_1 +$$

$$A_3 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3.$$

Insă, la limită toți α_1, α_2, α_3 tind către zero, deci $\lim(X_1 X_2 X_3) = A_1 A_2 A_3 = \lim X_1 \lim X_2 \lim X_3$.

La fel se arată pentru cazul de mai mulți factori.

42. *Limita unei puteri este egală cu puterea limitei dacă exponentul este finit.* Să considerăm întâi cazul când exponentul este întreg și pozitiv, X^n. Avem $\lim X = A$, $\lim X^n = \lim (XX \ldots X) = \lim X \ldots \lim X = (\lim X)^n$.

43. *Limita câtului a două cantități variabile este egală cu câtul limitelor acelor cantități când limita numitorului nu este zero.* X și Y fiind cele două cantități, să punem

$$\frac{X}{Y} = Z, \quad \text{deci} \quad X = Y.Z,$$

$\lim X = \lim Y. \lim Z$, de unde

$$\lim Z = \frac{\lim X}{\lim Y}, \quad \lim \frac{X}{Y} = \frac{\lim X}{\lim Y},$$

cu condiție ca $\lim Y \neq o$.

V. *Limita rădăcinii unei cantităţi variabile este egală cu rădăcina limitei acelei cantităţi.* Să punem

$$\sqrt[n]{X}=Y, \text{de unde } X=Y^n,$$

$$\lim X=\lim Y^n=(\lim Y)^n,$$

şi extrăgând rădăcina *a n-a*, avem

$$\lim Y=\sqrt[n]{\lim X}, \quad \lim\sqrt[n]{X}=\sqrt[n]{\lim X}.$$

Observare. In cazul când exponentul puterii este fracţionar, avem $X^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{X^p}$. Deci

$$\lim X^{\frac{p}{q}}=\lim\sqrt[q]{X^p}=\sqrt[q]{\lim X^p}=\sqrt[q]{(\lim X)^p},$$

$$\lim X^{\frac{p}{q}}=(\lim X)^{\frac{p}{q}}.$$

De asemenea, exponentul puterii fiind negativ, avem

$$\lim X^{-n}=\lim\frac{1}{X^n}=\frac{1}{(\lim X)^n},$$

$$\lim X^{-n}=(\lim X)^{-n}.$$

Deci, şi în cazul exponenţilor negativi sau fracţionari, avem $\lim X^n=(\lim X)^n$.

45. Aplicaţii. I. *Să se afle limita pentru $x=1$ a expresii*

$$E=\frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}.$$

Făcând $x=1$, expresia are forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Aceasta înseamnă că şi numărătorul şi numitorul fracţii se divide cu $x-1$. Făcând împărţirea, avem

$$E=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+3x)}=\frac{x^2+x+1}{x^2+3x},$$

unde făcând $x=1$, obţinem

$$\lim E = \frac{3}{4}.$$

II. *Să se afle limita pentru $x=a$ a expresiunii*

$$\frac{\sqrt{x}+3\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}.$$

Se aduc radicalii la acelaşi indice şi se pune $\sqrt[6]{x}=u$, $\sqrt[6]{a}=b$ şi căutăm limita pentru $u=b$ a expresii obţinute

$$\frac{u^3+3bu^2-3b^2u-b^3}{u^2-b^2} = \frac{(u-b)(u^2+4bu+b^2)}{(u-b)(u+b)}.$$

$\frac{6b^2-3b}{2b}$

Se simplifică ambii termeni cu $u-b$ şi pe urmă se face $u=b$. Se obţine $3\sqrt[6]{a}$.

III. *Să se arate că limitele expresiunilor* $\frac{\sin a}{a}$, $\frac{\operatorname{tg} a}{a}$ *pentru $a=o$ sunt egale cu* 1. Se vede pe un cerc trigonometric că

$$\sin a < a < \operatorname{tg} a,\ \sin a < a < \frac{\sin a}{\cos a},$$

şi divizând cu $\sin a$, avem

$$1 < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a}.$$

Dar când a tinde către zero, $\cos a$ tinde către 1, aşa că raportul variabil $\frac{a}{\sin a}$ rămâne cuprins între două cantităţi 1 şi $\frac{1}{\cos a}$ ce tind ambele către 1.

Deci şi $\frac{a}{\sin a}$ tinde către 1 când a tinde către zero.

Pentru $\frac{\operatorname{tg} a}{a} = \frac{\sin a}{\cos a}\frac{1}{a} = \frac{\sin a}{a}\cdot\frac{1}{\cos a}$ şi se ştie că $\frac{\sin a}{a} \to 1$, $\cos a \to 1$.

IV. Să se afle limita pentru $x=o$ a expresii $\frac{x\sin x}{1-\cos x}$.

R. Avem

$$E=\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\frac{x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{x\,2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=2\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\frac{x}{2} \text{ şi cum}$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\to 1,\ \lim E\to 2.$$

V. *Limita pentru $a=b$ a expresii* $\frac{\cos^2 a-\cos^2 b}{\sin(a-b)}$. Avem

$$E=\frac{(\cos a+\cos b)(\cos a-\cos b)}{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}=\frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}(-2)\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}},$$

$$E=-2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2},\ \lim E=-\sin 2a.$$

VI. *Limita pentru $x=1$ a expresii*

$$\frac{\sqrt{x^2+5x+3}-3}{x-1}.$$

Se face numărătorul raţional

$$E=\frac{\left(\sqrt{x^2+5x+3}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5x+3}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+5x+3}+3\right)}=\frac{x^2+5x+3-9}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+5x+3}+3\right)}$$

Se simplifică ambii termeni cu $x-1$, şi pe urmă se face $x=1$; $\lim E=\frac{7}{6}$.

45. **Exerciţii.** 1. Limita pentru $x=1$ a expresii

$$E=\frac{x^m-1-m(x-1)}{(x-1)^2}.$$

R. Se divide de două ori numărătorul şi numitorul cu $x-1$, pe urmă se face $x=1$; $\lim E=1+2+3+\ldots+m-1=\frac{(m-1)m}{2}$.

2. Limita pentru $x=-2$ a expresii $\frac{x^2+4x+4}{x^3+2x^2-4x-8}$.

R. $-\frac{1}{4}$.

3. Limita pentru $x=1$ a expresii $E=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$.

R. $E=\sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\to\sqrt{\frac{2}{0}}\to\infty$.

4. Limita pentru $x=-1$ a expresii $\frac{x^2-1}{\sqrt{x^4-1}}$.

R. $\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(x^2-1)(x^2+1)}}=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\to o$.

5. Limita pentru $x=1$ a expresii

$$E=\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+6}-\sqrt{6-x-x^2}}{x^2+4-\sqrt{5x^2+9x+11}}.$$

R. Din fiecare parte raţională sau iraţională se scade valoarea pe care o ia pentru $x=1$, diferenţele se vor divide cu $x-1$; avem

$$E=\frac{\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+6}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{6-x-x^2}-2}{x-1}}{\frac{x^2+4-5}{x-1}-\frac{\sqrt{5x^2+9x+11}-5}{x-1}}.$$

Se caută limita fiecărei părţi. Pentru prima se procedează astfel

$$E'=\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+6}-2}{x-1}=\frac{u-v}{x-1},\ u=\sqrt[3]{x^3+x^2+6},\ v=2,$$

şi pentrucă indicele radicalului este 3, ne servim de $u^3-v^3=(u-v)(u^2+uv+v^2)$, şi avem

$$E'=\frac{u-v}{x-1}=\frac{1}{x-1}\frac{(u-v)(u^2+uv+v^2)}{u^2+uv+v^2}=\frac{1}{x-1}\frac{u^3-v^3}{u^2+uv+v^2}=$$

$$\frac{u^3-v^3}{x-1}\cdot\frac{1}{u^2+uv+v^2},\quad E'=\frac{x^3+x^2+6-8}{x-1}\cdot\frac{1}{u^2+uv+v^2}.$$

Se caută limita primei fracţii şi cum $\lim u = \lim v = 2$, $\lim E' = \frac{5}{12}$.

$\lim\ E = \frac{35}{3}$.

6. Să se deterimine m astfel ca limita pentru $x=1$ a expresii

$$E = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1) + m(\sqrt{x}-1)^2 + 3(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(\sqrt[6]{x}-1)^3}$$

să fie finită. Apoi să se afle limita.

R. $\sqrt[6]{x} = y$, $E = \frac{(y^3-1)(y^2-1) + m(y^3-1)^2 + 3(y^2-1)^2}{(y-1)^3}$.

Se divide fiecare termen dela numărător cu $(y-1)^2$ şi simplificând, avem

$$E = \frac{(y^2+y+1)(y+1) + m(y^2+y+1)^2 + 3(y+1)^2}{y-1}.$$

Trebue ca numărătorul să se anuleze pentru $y=1$; $6+9m+12=0$, $m=-2$. Se desvoltă numărătorul, se divide cu $y-1$, pe urmă se face $y=1$, $\lim E = -15$.

7. Să se afle limita pentru $x=30^0$ a expresii $\frac{\sin(x-30^0)}{1-2\sin x}$.

R. $$E = \frac{\sin(x-30^0)}{2\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)} = \frac{2\sin\frac{x-30^0}{2}\cos\frac{x-30^0}{2}}{2(\sin 30^0 - \sin x)} =$$

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-15^0\right)\cos\left(\frac{x}{2}-15^0\right)}{2\sin\frac{30^0-x}{2}\cos\frac{30^0+x}{2}},$$

$E = -\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-15^0\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+15^0\right)}$, Când $x=30^0$, $\cos\left(\frac{x}{2}-15^0\right)=1$, $\lim E = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

46. *Limita pentru x egal cu infinit a fracţii*

$$E = \frac{ax^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{bx^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}.$$

Să vedem care este valoarea unui polinom pentru $x \to \infty$. Avem

$$ax^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = ax^m\left(1 + \frac{a_1}{a}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{a}\frac{1}{x^m}\right).$$

Când $x \to \infty$, atunci $\frac{1}{x}, \ldots \frac{1}{x^m}$ tind către zero, deci valoarea polinomului depinde primul termen ax^m, şi este $+\infty$ sau $-\infty$, după cum a este pozitiv sau negativ.

Când $x \to -\infty$, valoarea polinomului $\pm\infty$, după cum gradul m al polinomului este cu soţ sau fără soţ şi după cum a este pozitiv sau negativ.

Expresia dată are deci pentru $x \to \infty$ *forma* $\frac{\infty}{\infty}$. Pentru a-i calcula limita, o scriem sub forma

$$E = \frac{x^m\left(a + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}\right)}{x^n\left(b + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n}\right)} = x^{m-n}\,\frac{a + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}}{b + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n}}.$$

Dacă $m = n$, atunci

$$E = \frac{a + \frac{a_1}{x} + \ldots}{b + \frac{b_1}{x} + \ldots}, \quad \lim_{x \to \infty} E = \frac{a}{b},$$

adică raportul coeficienţilor lui x la puterile cele mai mari dela numărător şi numitor.

Când $m > n$, $m = n + p$, p pozitiv, avem

$$E = x^p\,\frac{a + \frac{a_1}{x} + \ldots}{b + \frac{b_1}{x} + \ldots}, \quad \lim_{x \to \infty} E = \lim(x^p).\,\frac{a}{b} = \infty.$$

Deci, când gradul numărătorului e mai mare ca al numitorului, limita etse ∞.

Când $m < n$, $n = m + q$, q pozitiv

$$E = \frac{1}{x^q} \frac{a + \frac{a_1}{x} + \dots}{b + \frac{b_1}{x} + \dots}, \quad \lim_{x\to\infty} E = \lim \frac{1}{x^q} \cdot \frac{a}{b} = 0,$$

astfel că dacă gradul numărătorului este mai mic decât al numitorului, limita este zero.

47. *Limita expresiei* $2^n \sin \frac{x}{2^n}$ *când* $n \to \infty$. Vedem că dacă $n \to \infty$, are *forma* $\infty . 0$. In acest o aducem sau la forma $\frac{0}{0}$ sau la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Pentru aceasta o scriem

$$E = \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = x \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Fracția e de forma $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ când $\alpha \to 0$; deci $\lim E = x$.

48. *Limita pentru* $x \to \infty$ *a expresii*

$$E = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x.$$

Vedem că pentru $x \to \infty$, expresia are *forma* $\infty - \infty$. Limita o calculăm scriind-o

$$E = u - v = \frac{(u-v)(u^2+uv+v^2)}{u^2+uv+v^2} = \frac{u^3-v^3}{u^2+uv+v^2},$$

$$u = \sqrt[3]{x^3+x^2+1}, \quad v = x.$$

Avem

$$E = \frac{(x^3+x^2+1)-x^3}{\sqrt{(x^3+x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^3+x^2+1} \,.\, x + x^2},$$

$$E = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1\right]},$$

simplificând cu x^2, observând că termenii cu $\frac{1}{x}$ tind către zero pentru $x \to \infty$, urmează că $\lim\limits_{x\to\infty} E = \frac{1}{3}$.

49. **Exerciţii.** Să se afle limitele pentru $x \to \infty$ a expresiilor

1. $\frac{\sqrt{3x^2-2x+1}}{2x+3}$. R. $\frac{x\sqrt{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{3}{x})}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\frac{x\sqrt{x}+2}{x^2-1}$. R. $\sqrt{x}=u$, $\frac{u^3+2}{u^4-1}$; $u \to \infty$, limita este 0.

3. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$.

R. $u-v=\frac{u^2-v^2}{u+v}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$; 0.

4. $2x-\sqrt{x^2+1}$.

R. $u-v=\frac{u^2-v^2}{u+v}=\frac{3x^2+1}{2x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$; ∞.

5. Să se determine p astfel ca pentru $x \to \infty$ limita expresii $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-px$ să fie finită şi definită de zero.

R. $\sqrt{x^2+x+1}$ şi $\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$ tind către infinit cu x; să scriem expresia sub forma $\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x\right)-(p-2)x$. Când $x \to \infty$, prima paranteză tinde către $\frac{1}{2}$, a doua către $\frac{1}{3}$; ca limita să fie finită, trebue $p=2$, iar limita este $\frac{5}{6}$.

DERIVATE.

50. Funcţiune crescătoare şi descrescătoare. Fie $y=f(x)$ o funcţiune definită în intervalul (a, b), adică $a<x<b$. Dând lui x două valori diferite x_1 şi x_2 din intervalul (a, b), valorile corespunzătoare ale funcţiunii sunt $f(x_1)$ şi $f(x_2)$. Dacă, pentru $x_1<x_2$, avem $f(x_1)<f(x_2)$, se zice că funcţiunea $y=f(x)$ este crescătoare; din contră, dacă pentru $x_1<x_2$, avem $f(x_1)>f(x_2)$, se zice că $y=f(x)$ este descrescătoare în intervalul (a,b).

Diferenţa $x_2-x_1=h$, se zice creşterea variabilei, iar $y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)=k$ creşterea funcţiunii; k poate fi pozitiv, negativ sau zero. Se mai notează şi cu Δx creşterea variabilei x şi cu Δy creşterea funcţiunii $y=f(x)$. Valoarea funcţiunii pentru x fiind $y=f(x)$, dând lui x creşterea Δx, corespunde pentru y creşterea Δy, aşa că valoarea funcţiunii pentru $x+\Delta x$ este

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

Scăzând din aceasta pe $y=f(x)$, se obţine

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

care este creşterea funcţiunii $f(x)$ corespunzătoare la creşterea Δx pentru variabila x.

Acestea fiind stabilite, să considerăm curba (C), reprezentarea grafică a funcţiunii $y=f(x)$ (Fig. 6).

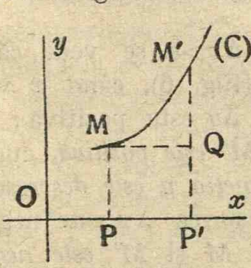


Fig. 6.

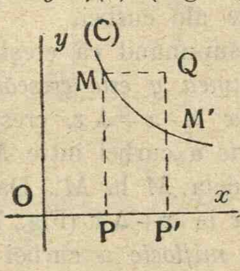


Fig. 7.

Să considerăm pe această curbă punctele M şi M'

corespunzătoare valorilor lui x egale cu $OP=x$, $OP'=x+\Delta x$. Avem

$$y=PM, \qquad y+\Delta y=P'M'.$$

Panta mijlocie a curbei între punctele M şi M' este raportul dintre creşterea funcţiunii şi creşterea variabilei,

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Să însemnăm cu Q punctul de intersecţie (Fig. 6 şi 7) al paralelei din M la Ox cu paralela din M' la Oy. Atunci $MQ=\Delta x$ este creşterea variabilei x şi $QM'=\Delta y$ este creşterea funcţiunii y (în cazul figurii 7, este descreşterea funcţiunii, care se zice tot creştere, dar este o creştere negativă).

Aşa fiind, din (1) se vede că

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{QM'}{MQ}$$

şi cum $QM':MQ$ este panta (tangenta trigonometrică a unghiului făcut de segment cu axa Ox) segmentului MM', rezultă că panta mijlocie a curbei între M şi M' este panta dreptei MM' care uneşte cele două puncte ale curbei.

Presupunând că creşterea $\Delta x>o$, se vede că dacă *funcţiunea y este crescătoare* (Fig. 6), când x variază dela x la $x+\Delta x$, creşterea Δy este pozitivă; *panta mijlocie* a curbei între M şi M' *este pozitivă*, curba se urcă dela M la M'. Dacă *funcţia y este descrescătoare* dela x la $x+\Delta x$ (Fig. 7), creşterea Δy este negativă, *panta mijlocie* a curbei între M şi M' *este negativă*, curba se coboară dela M la M'.

54. Funcţiune continuă. Considerând o funcţiune

$f(x)$, am văzut că dând variabilei x o creştere Δx, corespunde pentru funcţiune creşterea

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Presupunând că lăsăm pe x constant, dacă creşterea Δy a funcţiunii tinde către zero când creşterea Δx a variabilei tinde către zero, prin valori pozitive sau negative, se zice că funcţia $f(x)$ este continuă pentru valoarea x, sau continuă în punctul x.

De ex., pentru polinomul $y=f(x)=3x^2-5x+2$, dând lui x creşterea h, sau Δx, adică înlocuind pe x cu $x+h$, corespunde pentru y creşterea k sau Δy,

$$k=f(x+h)-f(x)=\left[3(x+h)^2-5(x+h)+2\right]-\left[3x^2-5x+2\right],$$

$$k=3h^2+6hx-5h,$$

şi vedem că dacă creşterea h a variabilei tinde către zero, şi creşterea k a funcţiunii tinde către zero, deci polinomul este o funcţiune continuă pentru orice valoare a lui x.

Presupunând că o funcţiune $y=f(x)$ este continuă în intervalul (a,b), punctul reprezentativ (x,y) descrie o linie neîntreruptă.

In cazul când funcţiunea nu este continuă, ea ar trece brusc dela o valoare la alta, linia reprezentativă ar fi întreruptă, ca în figura 8. In această figură, presupunând că x variază dela $a=OA$ la $c=OC$, y este reprezentat prin linia neîntreruptă $A'C'$; apoi, x variind dela $c=OC$ la $b=OB$, y este reprezentat prin linia neîntreruptă $C''B'$, începând dela un punct C'' altul de cât C' pe ordonata punctului C. Se zice atunci că pentru $x=c$ funcţiunea $y=f(x)$ este discontinuă.

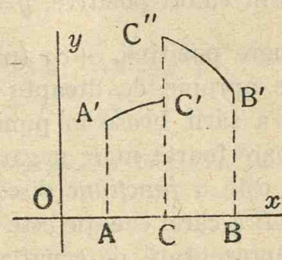


Fig. 8.

In cazul funcţiunii

$$y=\frac{1}{x-1},$$

se vede că dacă $x<1$, $y<o$, când $x>1$, $y>o$. Când $x=o$, $y=-1$, avem punctul $M(o,-1)$ (Fig. 9). Când x crește și

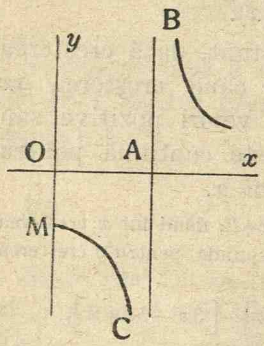


Fig. 9.

se apropie de 1, numitorul $x-1$ este negativ, se apropie de zero, deci crește, așa că inversa sa $y=\frac{1}{x-1}$ descrește și este negativ, iar când x este foarte aproape de 1, prin valori mai mici ca 1, $x-1$ se apropie de o, iar $\frac{1}{x-1}$ tinde către o câtime foarte mare, și cum y este negativ pentru $x<1$, y tinde $-\infty$ (minus infinit); linia ce descrie punctul M se apropie nemărginit de dreapta $x=1$, paralelă cu Oy, adică dreapta AC (Fig. 9), pe partea stângă a ei.

Când $x>1$, $y>o$, dar când x se apropie de 1 prin valori superioare lui 1, numitorul $x-1$ tinde către zero, prin valori pozitive, $y=\frac{1}{x-1}$ tinde către o valoare foarte mare pozitivă, $+\infty$ (plus infinit), curba descrisă de M se apropie de dreapta AB, $x=1$, pe partea dreaptă; y a sărit brusc în punctul A, pentru $x=1$, dela o valoare foarte mare negativă la alta foarte mare pozitivă, y este o *funcțiune discontinuă* pentru $x=1$, iar dreapta AB a cărei ecuație este $x=1$, se zice *asimptotă* la curba reprezentată de ecuația

$$y=\frac{1}{x-1}.$$

Se vede deci că o fracțiune rațională

$$\frac{2x^3-3x^2+4}{x^2-3x+2}$$

este discontinuă pentru valorile varibilei x care anulează numitorul. In cazul considerat sunt rădăcinile 1 și 2 ale ecuații $x^2-3x+2=o$ (rădăcini care nu anulează și numărătorul $2x^3-3x^2+4$).

52. **Proprietățile funcțiunilor continue.** I. Ca și la limite, se poate arăta că *suma mai multor funcțiuni continue (în număr finit) este o funcțiune continuă.* In adevăr, fie u, v, w trei funcțiuni continue ce depind de x. Dând lui x o creștere Δx, rezultă pentru u, v, w creșterile Δu, Δv, Δw, iar valoarea funcțiunii

$$y=u+v+w$$

când dăm lui x valoarea $x+\Delta x$, este

$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v+w+\Delta w,$$

Δy fiind creșterea funcțiunii y. Inlocuind pe y cu valoarea sa $u+v+w$, și făcând reducerile din ambii membri, rămâne

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v+\Delta w.$$

Dar funcțiunile u, v, w fiind continue, rezultă că dacă creșterea Δx a variabilei x tinde către zero, atunci și creșterile $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ tind către zero și deci și creșterea Δy a funcțiunii y tinde către zero, adică suma unui număr finit de funcțiuni continue este o funcțiune continuă.

De ex., $y=x^m$ este o funcție continuă, căci dând lui x creșterea h, creșterea funcțiunii este

$$k=(x+h)^m-x^m=x^m+C_m^1x^{m-1}h+\ldots+h^m-x^m,$$

$$k=C_m^1x^{m-1}h+C_m^2x^{m-2}h^2+\ldots+h^m,$$

și se vede că dacă h tinde către zero și creșterea k a funcțiunii $y=x^m$ tinde către zero.

Deci și un polinom

$$y=A_0x^m+A_1x^m+\ldots+A_m,$$

fiind o sumă de funcțiuni continue, este o funcțiune continuă.

II. De asemenea, *produsul unui număr finit de funcțiuni continue este o funcțiune continuă.* Fie $y=uv$, u și v fiind continue. Dând lui x creșterea Δx, valoarea funcțiunii y devine

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v).$$

Deci creşterea Δy a funcţiunii este

$$\Delta y=(u+\Delta u)\,(v+\Delta v)-y=uv+v\Delta u+u\Delta v-uv,$$

$$\Delta y=v\Delta u+u\Delta v.$$

Se vede că dacă $\Delta x \to o$, atunci şi Δu şi Δv tind către zero (căci u şi v sunt continue) deci $\Delta y \to o$, adică produsul uv este o funcţiune continuă.

De aci rezultă că *puterea unei funcţiuni continue este o funcţiune continuă.*

III. *Câtul a două funcţiuni continue este o funcţiune continuă, afară de valorile variabilei care anulează numitorul câtului* (fracţii). De ex.

$$y=\frac{u}{v},\quad \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\,\Delta u-u\,\Delta v}{v\,(v+\Delta v)},$$

şi se vede că dacă $\Delta x \to o$, atunci Δu, Δv şi deci Δy tind către zero.

IV. *Rădăcina unei funcţiuni continuă este o funcţiune continuă.* Avem

$$y=\sqrt[m]{u},\quad \Delta y=\sqrt[m]{u+\Delta u}-\sqrt[m]{u}.$$

Punând $v=\sqrt[m]{u+\Delta u}$, $w=\sqrt[m]{u}$, adică $v^m=u+\Delta u$, $w^m=u$, obţinem

$$\Delta y=v-w=\frac{v^m-w^m}{v^{m-1}+v^{m-2}w+\ldots+vw^{m+2}+w^{m-1}},$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u-u}{\sqrt[m]{(u+\Delta u)^{m-1}}+\sqrt[m]{(u+\Delta u)^{m-2}u}+\ldots+\sqrt[m]{(u+\Delta u)u^{m-2}}+\sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

Când $\Delta x \to o$, atunci $\Delta u \to o$, şi deci numitorul are ca limită

$$\sqrt[m]{u^{m-1}}+\sqrt[m]{u^{m-2}u}+\ldots+\sqrt[m]{u^{m-1}}=m\sqrt[m]{u^{m-1}}.$$

Numărătorul lui Δy fiind Δu, se vede că dacă $\Delta u \to o$, atunci şi $\Delta y \to o$, y este o funcţiune continuă.

53. Derivata unei funcţiuni. Când $y=f(x)$ este o funcţiune continuă de x, *derivata funcţiunii* y în raport cu x este limita raportului creşterii funcţiunii către creşterea variabilei x, când creşterea lui x tinde către zero.

Derivata se exprimă cu simbolul $\frac{dy}{dx}$, sau y', iar dacă y este exprimat prin $f(x)$, derivata se reprezintă prin

$f'(x)$. Aceasta se mai exprimă şi cu simbolul y'_x, pentru a arăta că derivata se ia în raport cu variabila x.

Astfel, dacă $y=f(x)$,

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

sau

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to o}\frac{k}{h}=\lim_{h\to o}\frac{f(x)+h)-f(x)}{h},$$

după cum notăm creşterile cu Δx, Δy sau cu h şi k.

De ex., să se calculeze derivata polinomului $y=f(x)=ax^2+bx+c$. Dând lui x creşterea h, creşterea funcţiunii $y=f(x)$ este

$$k=f(x+h)-f(x)=a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c),$$

$$k=ah^2+2axh+bh.$$

Deci

$$\frac{k}{y}=ah+2ax+b\ ,\ y'=f'(x)=\lim_{h\to o}\frac{k}{h}=2ax+b.$$

Exemple. 1. $y=ax^n$, a fiind o constantă şi n întreg pozitiv. Dând lui x creşterea h, va rezulta pentru y creşterea

$$k=a(x+h)^n-ax^n=a[(x+h)^n-x^n],$$
$$k=a(x^n+nx^{n-1}h+\ldots+h^n-x^n),$$
$$k=a(nx^{n-1}h+C_n^2x^{n-2}h^2+\ldots+h^n).$$

Divizând cu h, avem

$$y'=\lim_{h\to o}\frac{k}{h}=\lim_{h\to o}a(nx^{n-1}+C_n^2x^{n-2}h+\ldots+h^{n-1}),$$

$$y'=nax^{n-1},$$

care dă regula pentru a afla derivata lui $y=ax^n$.

2. *Derivata unei constante c este zero*, căci creşterea eu Δc este totdeauna zero, oricare ar fi x, şi deci $\frac{\Delta c}{\Delta x}=o$, şi prin urmare limita este zero.

3. Derivata unui polinom $y=3x^5-4x^3+2x^2+8x-5$ se obţine adunând în ordinea lor derivatele termenilor şi avem

$$y'=15x^4-12x^2+4x+8.$$

54. **Observare.** Am văzut că expresia derivatei unei funcţiuni $f(x)$ este

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Inainte de a trece la limită, avem

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

ε fiind oricât de mic, ce tinde către zero în acelaşi timp cu h. De aci rezultă formula importantă

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon].$$

55. **Interpretare geometrică pentru derivata unei funcţiuni. Panta unei curbe. Ecuaţia tangentei într'un punct al unei curbe.** I. Să considerăm curba reprezentativă a funcţiunii $y=f(x)$ şi pe ea punctele M şi M' C (Fig. 10) cu abscisele x şi $x+\Delta x$. Panta mijlocie (No. 50) a curbei între M şi M' este panta dreptei MM', adică

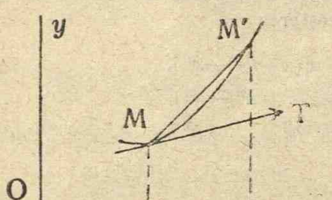


Fig. 10.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Când punctul M' se apropie de M, dreapta MM' tinde către tangenta în M la curbă, Δx tinde către zero, iar panta acestei curbe în M este panta tangentei în M, adică

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

care este derivata funcţiunii $f(x)$ în punctul x. Deci, *derivata unei funcţiuni $y=f(x)$ în punctul x este panta sau coeficientul unghiular al tangentei în acest punct la curba $y=f(x)$.*

Presupunând că se consideră pe curbă punctul M_1, de abscisă x_1, îi corespunde ordonata $y_1=f(x_1)$. Tangenta în acest punct este dreapta ce trece prin punctul (x_1,y_1) şi cu coeficientul unghiular (sau panta) $f'(x_1)$.

Deci, *ecuaţia tangentei în M_1 (x_1, y_1) la curba $y=f(x)$*, este

$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1), \quad y_1=f(x_1).$$

II. *O altă interpretare a derivatei.* Să presupunem că un punct M (Fig. 11) are o mişcare rectilinie pe axa Ox, ecuaţia mişcării fiind $s=f(t)$, t fiind timpul şi s spaţiul descris de mobil. Dacă M şi M' sunt poziţiile mobilului la momentele t şi $t+\Delta t$, drumul descris de mobil în timpul Δt este $MM'=OM'-OM=f(t+\Delta t)-f(t)=\Delta s$. Să ducem pe Ox, începând dela M,

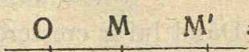


Fig. 10.

şi în sensul MM', o lungime MW egală cu $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; vectorul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ se zice vitesa mijlocie a mobilului M în intervalul de timp Δt. Presupunând că Δt tinde către zero, atunci vitesa la momentul t este dată de relaţia

$$v=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{t\Delta}=\frac{ds}{dt}=f'(t),$$

adică *vitesa este derivata spaţiului $s=f(t)$ în raport cu timpul.*

56. Calculul derivatelor. *Derivata unei funcţiuni înmulţită cu o constantă este egală cu constanta înmulţită cu derivata funcţiunii.* Să considerăm funcţia $y=cu$, c fiind o constantă şi u o funcţiune de x. Să însemnăm cu Δy și Δu creșterile funcțiunilor y și u corespunzătoare creșterii Δx a variabilei. Avem

$$\Delta y = c(u+\Delta u) - cu = c\Delta u.$$

De unde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \lim \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

deci

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{du}{dx}, \quad y' = cu'.$$

De ex. $y = 3(x^2+5x+2)$, $y' = 3(x^2+5x+2)' = 3(2x+5)$.

57. *Derivata sumei unui număr finit de funcțiuni este egală cu suma derivatelor funcțiunilor.* Fie u, v, w, trei funcțiuni de x și să considerăm funcțiunea

$$y = u+v+w.$$

Dând lui x creșterea Δx, corespund pentru u, v, w, y creșterile Δu, Δv, Δw și Δy. Avem

$$\Delta y = (u+\Delta u+v+\Delta v+w+\Delta w) - (u+v+w)$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Presupunând că Δx tinde către zero, și aplicând teoremele asupra limitelor, avem

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$y' = u' + v' + w'.$$

Ex. $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 7$, $y' = 3x^2 - 4x + 5$.

58. *Derivata unui produs de un număr finit de factori este egală cu suma produselor obținute înmulțind derivata* *fiecărei funcţiuni cu toţi ceilalţi factori*. In cazul a două funcţiuni u şi v, avem $y=uv$. Dând lui x creşterea Δx, fie Δy, Δu, Δv creşterile funcţiunilor y, u şi v. Avem

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v.$$

Când $\Delta x\to o$,

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta u}=u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim\Delta v.$$

Cum $\lim\Delta v=o$, urmează

$$y'=uv'+vu'.$$

Fie acum cazul a trei factori $y=uvw$. Considerând uv ca o singură funcţiune şi aplicând rezultatul găsit pentru cazul a doi factori, avem

$$y'=uvw'+w(uv)'=uvw'+w(uv'+vu'),$$

$$y'=uvw'+uwv'+vwu',$$

$$y'=u'vw+v'uw+w'uv.$$

Demonstraţia se aplică la un oarecare produs finit de factori.

De ex., $y=(2x-5)(2-x^2)x^3$.

$$y'=\frac{dy}{dx}=(2-x^2)x^3(2x-5)'+(2x-5)x^3(2-x^2)'+(2x-5)(2-x^2(x^3)'$$

$$y'=(2-x^2)x^3 2+(2x-5)x^3(-2x)+(2x-5)\ (2-x^2)(3x^2),$$

$$y'=-10x^5+25x^4+16x^2-30x^2.$$

59. *Derivata unei fracţii este egală cu produsul numitorului prin derivata numărătorului, minus produsul numărătorului prin derivata numitorului, şi totul împărţit cu pătratul numitorului*, Fie $y=\frac{u}{v}$, u şi v două funcţiuni de x. Avem

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v^2+v\Delta v},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\,\Delta v}$$

Când $\Delta x \to o$, aplicând teoremele limitelor, avem

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\lim\Delta v}$$

de unde

$$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Exemple. 1. $y=\frac{1}{x}$, $y'=-\frac{1}{x^2}$; 2. $y=\frac{1}{x^3}$, $y'=\frac{-3x^2}{x^6}=-\frac{3}{x^4}$;

3. $y=\frac{2x^2-1}{x^2+1}$, $y'=\frac{(x^2+1)4x-(2x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{6x}{(x^2+1)^2}$.

60. Derivata unei funcțiuni compuse. *Dacă y este o funcțiune de u și u este o funcțiune de x, atunci y este funcțiune de x, și derivata lui y în raport cu x este egală cu derivata lui y în raport cu u înmulțită cu derivata lui u în raport cu x.* La o creștere Δx corespunde pentru u creșterea Δu și la aceasta corespunde o creștere Δy pentru y. Avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},\ \lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{\Delta y}{\Delta y}\cdot\lim\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

$$y'=y'_u\cdot u'_x,$$

unde y'_u arată că se ia derivata lui y în raport cu u, iar u'_x este derivata lui u în raport cu x.

Exemplu. $y=4u^3-5u^2+2u+3$, $u=\frac{1}{x}$.

$$y'=(12u^2-10u+2)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\left(\frac{12}{x^4}-\frac{10}{x^2}+2\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$y'=-\frac{12-10x^2+2x^4}{x^6}.$$

61. *Derivata unei puteri u^n*. 1⁰ n număr întreg. Luând derivata lui u^n ca a unei funcţii compuse, avem

$$\frac{d(u^n)}{dx} = (u^n)'_u . u'_x = nu^{n-1}u'_x,$$

care dă regula pentru a afla derivata unei puteri.

2⁰ Când n este fracţie pozitivă, $n = \frac{p}{q}$, să punem

$$y = u^{\frac{p}{q}}.$$

Ridicând ambii membri la puterea q, avem

$$y^q = u^p.$$

Aceste două funcţiuni y^q şi u^p sunt egale pentru orice valoare a lui x. Dând lui x creşterea Δx, rezultă creşteri egale

$$\Delta(y^q) = \Delta(u^p), \quad \frac{\Delta(y^q)}{\Delta x} = \frac{\Delta(u^q)}{\Delta x},$$

deci la limită

$$\frac{d(y^q)}{dx} = \frac{d(u^p)}{dx}, \quad qy^{q-1}y' = pu^{p-1}u',$$

căci p şi q sunt numere întregi. Inlocuind pe y cu valoarea sa $u^{\frac{p}{q}}$, obţinem

$$y' = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} u',$$

deci şi în acest caz

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}u'.$$

3⁰ Când n este număr raţional negativ, $n = -m$, să punem

$$y = u^{-m} = \frac{1}{u^m}.$$

Aplicând regula derivării pentru o fracţie, avem

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{u^m}\right)'=\frac{-mu^{m-1}u'}{u^{2m}}=-mu^{-m-1}u'.$$

Inlocuind pe $-m$ cu n, rezultă

$$y'=(u^n)'=nu^{n-1}u',$$

aşa că regula găsită se aplică în toate cazurile.

Ex. $y=(x^2-3x+2)^5$, $y'=5(x^2-3x+2)^4(2x-3)$.

62. *Derivata unui radical* $y=\sqrt[m]{u}$. Scriind-o sub forma $y=u^{\frac{1}{m}}$, avem

$$y'=\left(u^{\frac{1}{m}}\right)'=\frac{1}{m}u^{\frac{1}{m}-1}u'=\frac{1}{m}u^{\frac{1-m}{m}}u',$$

$$y'=\frac{1}{m}u^{-\frac{m-1}{m}}u'=\frac{1}{mu^{\frac{m-1}{m}}}u'=\frac{1}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}u',$$

care dă regula pentru calculul derivatei unui radical.

63 *Exemple* 1. $y=\sqrt{x}$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 2. $y=\sqrt{x+3}$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

3. $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $y'=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

4. $y=\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{1}{x^2}=x^{\frac{4}{3}}+x^{-2}$; $y'=\dfrac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}-2x^{-2-1}=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x^3}$.

5. $y=(2x+1)\sqrt{x+1}$.

$$y'==(2x+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'+\sqrt{x^2+1}\,(2x+1)'=$$

$$y'=(2x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{x^2+1}\,.\,2=\frac{(2x+1)x+2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$y'=\frac{4x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3+1}}=\left(\dfrac{x}{x^3+1}\right)^{\frac{1}{3}}$.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x^3+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{x}{x^3+1}\right)'=$$

$$y'=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{1-2x^3}{3x^{\frac{2}{3}}(x^3+1)^{\frac{4}{3}}}.$$

64. **Formule.** Dăm tabloul formulelor demonstrate asupra derivatelor funcţiunilor considerate

$y=u+c,\ y'=u'$,

$y=cu,\ y'=cu'$,

$y=u+v,\ y'=u'+v'$

$y=uv,\ y'=uv'+vu'$,

$y=\dfrac{u}{v},\ y'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$,

$y'=u^n,\ y'=nu^{n-1}u'$

$$y'_x=y'_u u'_x.$$

65. **Derivate de ordin superior.** Dacă $y=f(x)$, atunci derivata sa $y'=f'(x)$ este în general o funcţiune de x şi poate fi derivată în raport cu x. Rezultatul se zice derivata a doua a lui y, în raport cu x şi se notează cu $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, sau pe scurt $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x)$ sau y''. De asemenea, derivata derivatei a doua se zice derivata a treia şi se notează y''', $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, sau $f'''(x)$ şi aşa mai departe.

Ex. Dacă $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$, să se calculeze $f''(o)$.

Avem

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2},\quad f''(x)=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3},$$

$$f''(o)=\frac{2.0-6.0-6.0+2}{(0+1)^3}=2.$$

66. **Exerciţii.** Să se calculeze derivatele funcţiunilor

1. $y=(2x+3)(x^2+3x-1)$. R. $y'=6x^2+18x+7$.

2. $y=(x^2+4x-3)(3x^2+12x+12)$. $y'=6(x+2)(2x^2+8x+1)$.

3. $y=\dfrac{x+a}{x-a}$, $y'=\dfrac{-2a}{(x-a)^2}$.

4. $y=\dfrac{2x^2+4x-3}{3x^2+6x+5}$. $y'=\dfrac{38(x+1)}{(3x^2+6x+5)^2}$.

5. $y=\dfrac{2}{x^2+4x+1}$. $y'=\dfrac{-4(x+2)}{(x^2+4x+1)^2}$.

6. $y=(x^3-1)^2$. $y'=2(x^3-1)3x^2$.

7. $y=\sqrt[3]{3x^2+6x-5}$. $y'=\dfrac{6(x+1)}{3\sqrt[3]{(3x^2+6x-5)^2}}$.

8. $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$. $y'=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-1}}$.

9. $y=(x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}(x^3+1)^{\frac{2}{3}}$, $y'=\dfrac{(5x^4-7x^3+6x^2+3x-3)(x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}}}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}$

10. $y=(x-1)\sqrt{x^2+1}$. $y'=\dfrac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Să se afle derivatele de ordinul întâi și al doilea ale funcțiunilor

11. $y=\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$ R. $y'=\dfrac{-(x+1)}{(x-1)^3}$, $y''=\dfrac{2(x+2)}{(x-1)^4}$.

12. $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ R. $y'=\dfrac{2x-3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)^3}}$, $y''=\dfrac{3}{2\sqrt{x(x-1)^5}}$.

67. Derivatele funcțiunilor trigonometrice. I. $y=\sin x$. Dând lui x creșterea h, corespunde pentru y creșterea $k=\sin(x+h)-\sin x$. Deci

$$\frac{k}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\dfrac{x+h-x}{2}\cos\dfrac{x+h+x}{h}}{h},$$

$$\frac{k}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Dar când h tinde către zero, raportul sinusului către arc are limita 1, deci

$$\lim \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1, \qquad \lim_{h\to o}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x,$$

$$y'=\lim\frac{k}{h}=\cos x.$$

Deci, derivata lui $y=\sin x$ este $y'=\cos x$.

II. $y=\cos x$. Avem $y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin u,\ u=\frac{\pi}{2}-x.$

Aplicând derivata unei funcţiuni compuse, avem

$$y'_x=y'_u\,u'_x,\ y'_u=\cos u,\ u'_x=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-1.$$

Deci $y'=(\cos u)(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x.$

Deci derivata lui $y=\cos x$ este $y'=-\sin x$.

III. $y=tgx$. Avem

$$y=\frac{\sin x}{\cos x},\ y'=\frac{\cos x\,(\sin x)'-\sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x},$$

$$y'=\frac{\cos x\cos x-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

IV. $y=\text{cotg}x$. Avem $y=\frac{\cos x}{\sin x}$,

$$y'=\frac{\sin x(\cos x)'-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{(\sin x)(-\sin x)-\cos x.\cos x}{\sin^2 x},$$

$$y'=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

V. $y=\sec x$. Avem $y=\frac{1}{\cos x},\ y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$

VI. $y=\text{cosec}x$. Avem $y=\dfrac{1}{\sin x}, y'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$.

68. Exerciţii. Să se calculeze derivatele

1. $y=2\sin^3 x\cos x$.

R. $y'=6\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^4 x=2\sin^2 x(1-4\sin^2 x)$.

2. $y=\text{tg}2x-\text{tg}^2 x$.

R. $y'=\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2-2\text{tg}\,x\dfrac{1}{\cos^2 x}=2\sec^2 2x-2\text{tg}x\sec^2 x$.

69. Derivata unei funcţiuni inverse. Dacă y este o funcţiune de x, atunci x este o funcţiune de y. Fie Δx şi Δy creşterile lui x şi y.

Avem $$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}, \lim\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

şi trecând la limită,

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}, x'_y=\frac{1}{y'_x},$$

adică derivata unei funcţiuni inverse este inversa derivatei funcţiunii directe.

70. Derivatele funcţiunilor trigonometrice inverse. I. $y=\arcsin x$. Avem $x=\sin y$. Dar, am văzut că

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}.$$

Cum $x'_y=\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}=\pm\sqrt{1-x^2}$, urmează că

$$y'_x=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Pentru a vedea semnul ce trebue luat înaintea radicalului, să observăm că $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$ este pozitiv când y este în cadranul întâi sau al patrulea şi este negativ când arcul y este în cadranul al doilea şi al treilea. Deci, pentru arcele y din primul cadran, avem

$$y=\arcsin x,\ y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

II. $y=\text{arc}\cos x$. Avem

$$x=\cos y,\ x'_y=-\sin y=\mp\sqrt{1-\cos^2 y}=\mp\sqrt{1-x^2},$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y},\ y'_x=\frac{1}{\mp\sqrt{1-x^2}}.$$

Dar avem $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}$ când arcul y este în cadranul întâi sau al doilea, și $\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}$ când y este în al treilea şi al patrulea cadran. Deci pentru arcele y din cadranul întâi, avem

$$y=\text{arc}\cos x,\ y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

III. $y=\text{arc}\,\text{tg}x$. Avem $x=tgy$, $x'_y=\dfrac{1}{\cos^2 y}$.

Dar
$$\cos y=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 y}},$$

unde înlocuind pe tgy cu egalul său x, urmează

$$\cos y=\frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}},\ x'_y=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}=1+x^2,$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1+x^2},$$

care este derivata funcţiunii $y=\text{arctg}x$.

IV. $y=\text{arccotg}x$. Avem $x=\text{cotg}y$, $x'_y=-\dfrac{1}{\sin^2 y}$,

$$\sin y=\frac{\text{tg}y}{\sqrt{1+\text{tg}^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2 y}}.$$

Inlocuind pe $\text{cotg}y$ cu egalul său x, urmează

$$\sin y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x'_y=-(1+x^2),\ y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1+x^2},$$

astfel că derivata funcţiunii $y=\text{arccotg}x$ este $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

V. $y=\text{arcsec}x$. Avem

$$x=\sec y,\ \cos y=\frac{1}{x},\ x'_y=\frac{\sin y}{\cos^2 y}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\cos^2 y},$$

$$x'_y=x\sqrt{x^2-1},\ y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

astfel că derivata funcţiunii $y=\text{arcsec}x$ este $y'=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

VI. $y=\text{arccosec}x$, $y'=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

71. Exerciţii. 1. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$, y fiind un arc mai mic decât 90^0.

R. $y=\arcsin u$, $y'=y'_u u'_x=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'$, $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, R. $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Funcţiunile $y=\text{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$, $z=\text{arctg}x$ au aceeaşi derivată. Să se explice rezultatul.

R. Avem $y'=z'=\dfrac{1}{1+x^2}$. Funcţiunile având aceeaşi derivată, diferă cu o constantă. Deci $y=z+c$, c fiind o constantă. Aceasta se poate vedea direct, căci din $z=\operatorname{arctg} x$, avem $\operatorname{tg} z=x$, şi înlocuind pe x în valoarea lui y, obţinem

$$y=\operatorname{arctg}\frac{1+\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg} z}, \operatorname{tg} y=\frac{\operatorname{tg} 45^0+\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg} 45^0 \operatorname{tg} z}=\operatorname{tg}(z+45^0),$$

de unde $y=z+45^0+k\pi$, k fiind o constantă, deci funcţiunile y şi z diferă cu o constantă, de aceea au aceeaşi dierivată.

VARIAŢIA FUNCŢIUNILOR ŞI REPREZENTAREA LOR.

72. Variaţia unei funcţiuni. Introducerea noţiunii de derivată ne permite a studia variaţia unei funcţiuni $y=f(x)$. In adevăr, dacă într'un interval, la o creştere Δx a variabilei corespunde o creştere pozitivă a funcţiunii, atunci $f(x+\Delta x)>f(x)$, deci

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>o, \; y'>o,$$

derivata $y'=f'(x)$ a funcţiunii este pozitivă. Funcţiunea este crescătoare, curba reprezentativă a funcţiunii $y=f(x)$ se urcă spre dreapta. Dacă, din contră, la o creştere Δx a variabilei, corespunde o descreştere (o creştere negativă) pentru funcţiune, atunci $f(x+\Delta x)<f(x)$, deci

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<o, \; y'<o,$$

derivata este negativă. Funcţiunea este descrescătoare, curba reprezentativă a funcţiunii se coboară spre dreapta.

De ex., pentru funcţiunea $y=\frac{1}{8}(x^3-3x^2-9x+27)$,

$y'=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{9}{8}$, $y'=\frac{3}{8}(x+1)(x-3)$. Dar y' este pozitiv pentru $x<-1$, negativ pentru $-1<x<3$, şi pozitiv pentru $x>3$. Funcţia este deci crescătoare când

$x < -1$, descrescătoare când x e cuprins între -1 și 3 și crescătoare când $x > 3$ (Fig. 12).

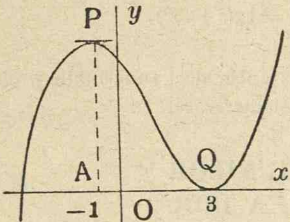


Fig. 12.

Se vede că pentru $x = -1$, derivata y' se anulează schimbând semnul; înainte de -1 derivata este pozitivă, după -1 este negativă, deci înainte de $x = -1$ funcția crește, după $x = -1$ y descrește, deci valoarea ce o ia funcția $y = f(x)$ pentru $x = -1$, $AP = f(-1) = 4$ (Fig. 12), este cea mai mare, este un *maximum* pentru funcțiunea $y = f(x)$. De asemenea, se vede că pentru $x = 3$, derivata y' a funcțiunii se anulează din nou, schimbând semnul, înainte de $x = 3$ este negativă, funcția descrește, după $x = 3$ derivata este pozitivă, funcția crește; deci valoarea ce o ia funcțiunea pentru $x = 3$, $f'(3) = 0$, este cea mai mică, un *minimum* pentru funcțiunea $y = f(x)$.

In cazul funcțiunii $y = \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 27x - 19)$, derivata sa $y' = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ este totdeauna pozitivă. Funcțiunea y este totdeauna crescătoare, derivata se anulează pentru $x = 3$, dar nu-și schimbă semnul. In punctul M de coordonate $x = 3$, $y = f(3) = \frac{8}{3}$. (Fig. 13) curba prezintă un *punct de inflexiune.*

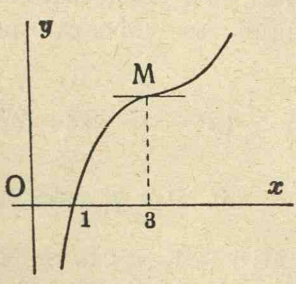


Fig. 13.

Tangenta în punctele curbei unde derivata se anulează, având panta (coeficientul unghiular) nulă, este paralelă cu axa Ox, ceeace se vede în punctele P, Q (Fig. 12) și M (Fig. 13).

Deci, valorile pentru care o funcțiune este maximum sau minimum corespund valorilor lui x pentru care derivata funcţiunii se anulează, schimbând semnul.

Pentru a studia variaţia unei funcţiuni $y=f(x)$, se determină mai întâi intervalele în care funcţiunea există, unde are valori reale. Se află valorile lui x pentru care y se anulează, date de ecuaţia $f(x)=o$, şi care corespund punctelor unde curba reprezentativă a variaţii funcţiunii tae axa Ox. Se determină valorile lui x pentru care y devine infinit, adică direcţiile în care curba $y=f(x)$ are ramuri infinite. Se calculează derivata $y'=f'(x)$ a funcţiunii, se vede semnul său, şi pentru valorile lui x pentru care $y'>o$, funcţia $f(x)$ creşte, iar pentru acelea pentru care $y'<o$, funcţia $f(x)$ descreşte. Valorile lui x, pentru care derivata $f'(x)$ se anulează schimbând semnul, corespund la maximum sau minimum funcţiunii; când derivata $f'(x)$ trece dela semnul $+$ la $-$, acolo este maxim, iar când trece dela $-$ la $+$ avem un minim. De fapt, studiul variaţii unei funcţiuni $y=f(x)$ revine la construcţia curbei $y=f(x)$.

In cele ce urmează vom studia variaţia a câtorva din cele mai simple funcţiuni.

73. $y=ax+b$, a şi b fiind numere date. x poate să ia valori dela $-\infty$ la $+\infty$. $y=o$ când $ax+b=o$, $x=-\dfrac{b}{a}$, $a\neq o$. Derivata este $y'=a$; când $a>o$, y creşte şi când $a<o$, y descreşte. Variaţia funcţiunii se vede din tabloul alăturat, iar curba reprezentativă este o dreaptă, ce tae axa Ox în punctul de abscisă $x=-\dfrac{b}{a}$; a cărei pantă este a şi pe care ştim a o construi, observând că tae axa Oy, în punctul de abscisă $x=o$ şi ordonată $y=b$.

$a>o, x$	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	crește	o	crește	$+\infty$

$a<o, x$	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
y		$-$		$-$	
y	$+\infty$	descrește	o	descrește	$-\infty$

In cazul $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$, avem tabloul alăturat.

x	$-\infty$		-3		∞
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\rightarrow$	∞

74. $y=ax^2+bx+c$, a, b, c constante și $a \neq o$. 1^0 Avem $y=o$ pentru rădăcinile ecuații $ax^2+bx+c=o$; când rădăcinile sunt reale, curba tae axa Ox în două puncte diferite; când $b^2-4ac<o$, curba nu tae axa Ox; când $b^2-4ac=o$, curba tae axa Ox în două puncte confundate, este tangentă la axa Ox în punctul a cărei abscisă este rădăcina dublă a ecuații $ax^2+bx+c=o$. 2^0 Curba tae axa Oy în punctul de abscisă $x=o$, și ordonată $y=c$ dată de ecuația curbei $y=ax^2+bx+c$ unde facem $x=o$.

3^0 Derivata fiind $y'=2ax+b$, se anulează pentru $x=-\frac{b}{2a}$ și schimbă semnul, deci avem maximum sau minimum pentru această valoare a lui x. Când $a>o$, atunci $y'<o$ pentru $x<-\frac{b}{2a}$ și $y'>o$ pentru $x>-\frac{b}{2a}$, avem un minimum. Dacă $a<o$, atunci $y>o$ pentru $x<-\frac{b}{2a}$ și $y'<o$

pentru $x > -\frac{b}{2a}$, este un maximum. 4° Pentru $x = \pm\infty$, y este $\pm\infty$, semnul fiind dat de a; când $a > o$, termenul ax^2, care dă valoarea pentru $x = \pm\infty$, are semnul $+$, deci $y \to \infty$; când $a < o$, $y \to -\infty$. Avem deci tablourile alăturate, iar curba este o parabolă, pe care știm să o construim.

$a > o$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	∞	descrește ↘	minimum	crește ↗	∞

$a < o$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	$-\infty$	crește ↗	maximum	descrește ↘	$+\infty$

75. *Exemple.* 1. $y = -2x^2$.

x	$-\infty$		0		∞
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0 maxim	↘	$-\infty$

2. $y = x^2 - 4x + 3$.

x	$-\infty$		1		2		3		∞
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	∞	↘	0	↘	-1 min.	↗	0	↗	∞

3. $y = x^2 + x + 1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		∞
y'		$-$	0	$+$	
y	∞	↘	$\frac{3}{4}$	↗	∞

4. $y = -x^2 + 3x - 4$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		∞
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{7}{4}$ maximum	↘	$-\infty$

5. *Se dă o bucată de carton în formă de pătrat* ABCD (fig. 14) *cu latura* $AB=a$. *Se desenează pe acest carton liniile* FE, HG, MN, PQ *depărtate de marginile cartonului cu aceeaşi distanţă* $DF=HC=CM=PB=BG=EA=AQ=ND=x$. *Aceste linii se tae în punctele* m, n, p, q. *Se tae din carton bucăţile* CHmM, PBGp, AEqQ, NnFD *şi se îndoeşte cartonul rămas de-a-lungul liniilor* mn, nq, qp, pm, *ca astfel ridicate, să facă o cutie paralelipipedică, cu baza* $mnqp$ *şi înălţimea* x. *Să se afle distanţa* x *astfel ca volumul cutii obţinute să fie maximum.* Se vede că baza paralelipipedului este pătratul $mpnq$ cu latura egală cu $mn=a-2x$, iar înălţimea este x. Deci volumul este $y=(a-2x)^2x$. Când x variază, volumul y variază dela o pentru $x=o$; iar maximul său este dat de valoarea ce anulează derivata, pentru care derivata are înainte semnul $+$ şi apoi semnul $-$.

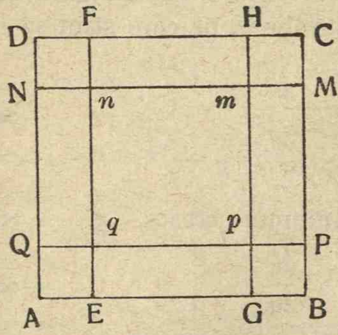


Fig. 14.

Derivata este

$$y'=2(a-2x)(-2)x+(a-2x)^2=(a-2x)(-4x+a-2x)=(a-2x)(a-6x)=$$
$$y'=(2x-a)(6x-a).$$

Se anulează pentru $x=\frac{a}{6}$ şi $x=\frac{a}{2}$; între rădăcini $y'<0$, în afară $y'>0$, deci dela 0 la $\frac{a}{6}$, $y'>0$, pentru $\frac{a}{6}$ se anulează, apoi $y'<0$, aşa că maximul are loc pentru $x=\frac{a}{6}$ şi este egal cu $\left(a-2\frac{a}{6}\right)^2\frac{a}{6}=\frac{2a^3}{27}$.

76. Exerciţii. Să se studieze variaţia funcţiunilor şi să se construiască curbele reprezentative

1. $y=x^2-1$, 2. $y=x^2-4x+5$, 3. $g=9-4x^2$, 4. $y=x-2x^2$.

5. Să se afle conul de volum maximum înscris într'o sferă de rază r.

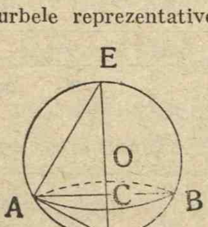


Fig. 15.

R. Insemnând cu $u=AC$ raza conului şi $x=EC$ (Fig. 15) înălţimea, volumul este $V=\frac{\pi}{3}u^2.x$. Din triunghiul dreptunghic DAE,

$\overline{AC}^2 = DC.EC$, $u^2 = x(2r-x)$, $v = \frac{\pi}{3}(2r-x)x^2$. Max. are loc pentru $x = \frac{4r}{3}$ şi este egal cu $\pi\frac{32r^3}{81}$.

6. Să se afle dreptunghiul de aria cea mai mare înscris într'un triunghiu dat.

R. $DEHF$ fiind dreptunghiul înscris în triunghiul ABC (Fig. 16) de bază $AB=a$ şi înălţime $h=CG$, să însemnăm cu $x=DF$ şi $y=DE$ dimensiunile dreptunghiului. Aria este

$S = \frac{1}{2}xy$. Dar din triunghiurile asemenea CDE şi CAB, avem

$DE : AB = (h-x) : h$, $y : a = (h-x) : h$,

de unde $y = \frac{a}{h}(h-x)$, $S = \frac{1}{2}\frac{a}{h}x(h-x)$.

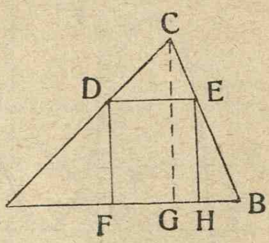


Fig. 16.

Maximul are loc pentru valoarea ce anulează derivata, $x = \frac{h}{2}$, adică atunci când DE trece prin mijlocul înălţimii.

77. $y = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$. 1^0 Avem $y' = 6x^2 + 2x - 8$ şi se anulează când $6x^2 + 2x - 8 = 0$, sau simplificând, $3x^2 + x - 4 = 0$, admite rădăcinile 1 şi $-\frac{4}{3}$. Trinomul $3x^2 + x - 4$ are între rădăcinile $-\frac{4}{3}$ şi 1 semn contrar cu primul termen $3x^2$, adică semnul —, şi în afară rădăcinilor semnul +. Pentru $x = -\frac{4}{3}$ derivata y' trece de la + la — anulându-se deci este maximum; iar pentru $x=1$, derivata trece dela — la +, adică y este un minimum. Valoarea minimului se află făcând $x=1$, şi este $f(1) = 2.1 + 1 - 8.1 + 5 = 0$; maximul se obţine făcând

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = 2\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(-\frac{4}{3}\right) + 5 = \frac{343}{27}.$$

2^0 Vedem că $y=0$ pentru rădăcinile ecuaţii $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = 0$, care se observă că admite rădăcina 1, căci făcând $x=1$, avem $2.1^3 + 1^2 - 8.1 + 5 = o$. Divizând cu $x-1$, avem $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = (x-1)(2x^2 + 3x - 5)$; deci celelalte rădăcini sunt date de $2x^2 + 3x - 5 = o$, care sunt 1 şi $-\frac{5}{2}$. Dacă nu putem rezolva ecuaţia $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = 0$, din construcţia curbei vedeam unde tae axa Ox, acolo fiind $y=0$, şi ne făceam o ideie de intervalele unde sunt cuprinse rădăcinile acestei ecuaţii.

3^0 Vedem că pentru $x=0$, $y=5$, deci avem punctul unde curba tae pe Oy.

4^0 Când $x=\infty$, $y=+\infty$, iar când $x=-\infty$, polinomul $2x^3+x^2-8x+5$ fiind de gradul al treilea (fără soţ) are semnul $-\infty$.

Avem tabloul şi curba alăturată (Fig. 17) construită aproximativ.

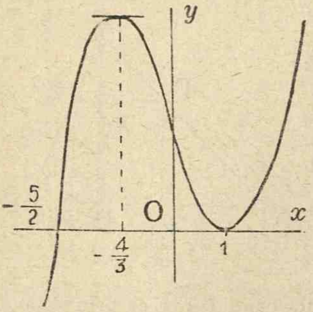


Fig. 17.

x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	creşte
$-\frac{5}{2}$		0
	$+$	creşte
$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{343}{27}$ maximum
	$-$	descr.
1	0	0 min.
	$+$	creşte
∞		$+\infty$

18. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. Când $x=o$, avem $y=\dfrac{1}{2}$, punctul unde curba tae axa $0y$; pentru $y=0$, avem $x=1$, punctul curbei pe axa $0x$.

Derivata este $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$, nu se anulează şi are tot timpul semnul $-$, y descreşte.

y devine ∞ când se anulează numitorul, $x-2=0$, $x=2$; dreapta $x=2$ paralelă cu Oy este o asimptotă. Se observă că pentru valori ale lui x mai mici ca 2 şi foarte aproape de 2, adică $x=2-\varepsilon$ (ε foarte mic, ce tinde către zero), atunci

$$y=\frac{2-\varepsilon-1}{2-\varepsilon-2}=\frac{1-\varepsilon}{-\varepsilon},$$

y este negaitv şi deci când ε tinde către zero, y tinde către $-\infty$. Când x tinde către 2 prin valori pozitive (mai mari ca 2), $x=2+\varepsilon$,

$$y=\frac{2+\varepsilon-1}{2+\varepsilon-2}=\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon},\ y>0,$$

şi când ε tinde către zero, adică atunci când se apropie de 2 prin valori mai mari ca 2, y tinde către $+\infty$.

Gradele numărătorului $x-1$ şi al numitorului $x-2$ fiind egale, urmează că pentru $x=\pm\infty$, y tinde către raportul coeficienţilor de gradul cel mai mare al lui $x-1$ şi $x-2$, adică 1. Deci $y=1$ este altă asimptotă a curbei. Pentru $x=2$, y sare dela $-\infty$ la $+\infty$, funcţia y nu este

x	$-\infty$		1		2		∞
y'		$-$		$-$		$-$	
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-\infty}{\infty}$	$\searrow$	1

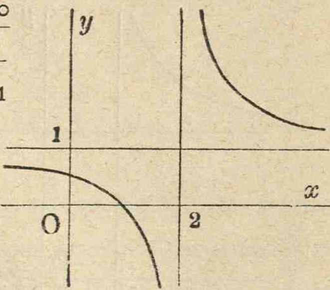


Fig. 18.

continuă în acest punct. Avem tabloul şi figura 18. Curba este o iperbolă echilateră, cu asimptotele $x=2$, $y=1$ perpendiculare.

x	y'	y
		2
$-\infty$	$+$	cr
-1		$\frac{+\infty}{-\infty}$
	$+$	cr
$\frac{1}{2}$		0
	$+$	cr
$5-3\sqrt{2}$	0	$\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$ Maxim
	$-$	des
1		0
	$-$	des
2		$\frac{-\infty}{\infty}$
	$-$	des
$5+3\sqrt{2}$	0	$\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$
	$+$	cr
∞		2

79. $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-x-2}$. Se vede că $y=0$ când $2x^2-3x+1=0$, deci $x=1$ şi $\frac{1}{2}$; y devine infinit când $x^2-x-2=0$, adică $x=-1$ şi 2; dreptele $x=1$ şi $x=2$ sunt asimptote.

Derivata este $y'=\dfrac{x^2-10x+7}{(x^2-x-2)^2}$, se anulează pentru $x^2-10x+7=0$, $x=5\pm3\sqrt{2}$ şi derivata este pozitivă în afară de rădăcini şi negativă între ele, $5-3\sqrt{2}<x<5+3\sqrt{2}$; deci are un maximum pentru $x=5-3\sqrt{2}$, care se calculează înlocuind în y pe x cu $5—3\sqrt{2}$ şi are valoarea $\frac{3—2\sqrt{2}}{3}$; minimul are loc pentru $x=5+3\sqrt{2}$ şi este egal cu $\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

Când înlocuim pe x cu $\pm\infty$, gradul numărătorului lui y fiind egal cu al numitorului, y tinde către raportul coeficienţilor lui x la gradul cel

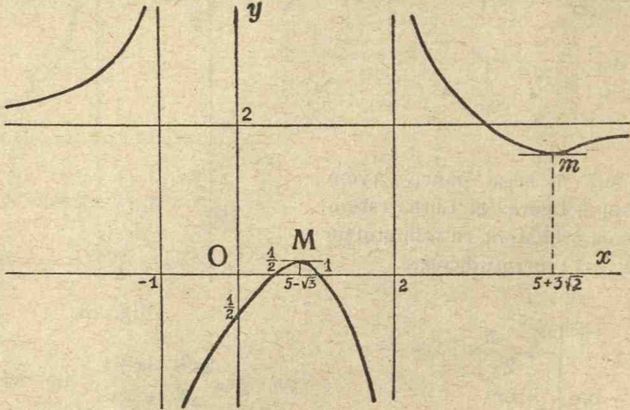


Fig. 19.

mai înalt, adică $2:1=2$; deci dreapta $y=2$ este o asimptotă. Se aşează valorile principale ale lui x în ordine de mărime crescătoare, se calculează valorile lui y pentru aceste valori ale lui x şi avem tabloul şi figura alăturată (Fig. 19).

80. $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x—2}}$. Pentru ca y să fie real (să existe), trebue ca să fie pozitivă câtimea de sub radical, adică $x^2+2—2>0$. Rădăcinile ecuaţii $x^2+2—2=0$ fiind 1 şi —2, trinomul $x^2+x—2$ este negativ între rădăcini şi pozitiv în afară, deci x nu poate să ia valori între —2 şi 1, astfel că curba reprezentativă este în afară de regiunea determinată de dreptele $x=—2$ şi $x=1$ paralele cu Oy (Fig. 20). Pentru aceste valori —2 şi 1 ale lui x, numitorul se anulează. y devine infinit şi anume pentru $x=—2$ numărătorul $x+1$ al lui y are valoarea $—1<0$, deci $\lim\limits_{x=-2} y=—\infty$, iar pentru $x=1$, $y=\infty$.

y se anulează când $x+1=0$, adică $x=—1$. Dar între —2 şi 1, funcţiunea y nu este reală, totuşi pentru $x=—1$, funcţiunea ia valoarea reală $y=0$. Cum înainte şi după această valoare y este imaginar, rezultă că punctul corespunzător $x=-1$, $y=0$ este un *punct izolat* al curbei reprezentative a funcţiunii date. Curba nu tae axa Ox.

Punctul unde curba tae axa Oy se obţine făcând $x=0$, căruia îi corespunde pentru y o valoare imaginară, căci am văzut că în intervalul $(-2, 1)$ curba nu există.

Pentru $x=-\infty$, y are forma $\frac{-\infty}{\infty}$, şi valoarea adevărată se obţine scriind

$$y=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}},$$

şi pentru $x\to-\infty$ este egală cu -1, căci numărătorul este negativ şi numitorul totdeauna pozitiv. Pentru $x\to\infty$, y are forma $\frac{\infty}{\infty}$ şi tinde catre 1. Deci dreptele $y=-1$ şi $y=1$ sunt asimptote pentru curba reprezentativă.

Calculând derivata y', avem

$$y'=\frac{-x-5}{2\sqrt{(x^2+x-2)^3}},$$

şi se anulează pentru $x=-5$. Cum $-x-5$ este de semn contrar cu coeficientul -1 al primului termen $-x$ înainte de rădăcina $x=-5$ şi de acelaşi semn după $x=-5$, urmează că înainte de -5, $y'>0$, iar după $x=-5$, $y'<0$. Deci funcţiunea y creşte înainte de -5 şi descreşte apoi, astfel că pentru $x=-5$ y este maximum egal cu valoarea ce se obţine făcând pe $x=-5$ în y, adică $-\frac{4}{3\sqrt{2}}$.

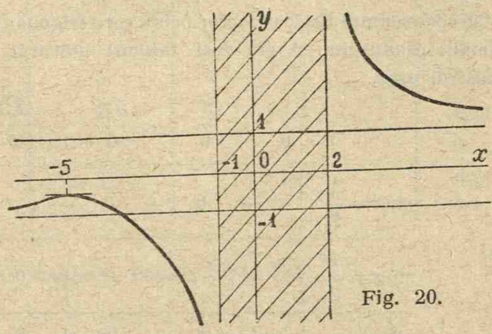


Fig. 20.

Avem deci tabloul şi curba alăturată (Fig. 20).

81. $y=2\sin^3 x \cos x$ (Examen de Admitere, Şcoala de Artilerie şi Geniu, 1910). Avem $y'=6\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^4 x=2\sin^2 x(1-4\sin^2 x)$.

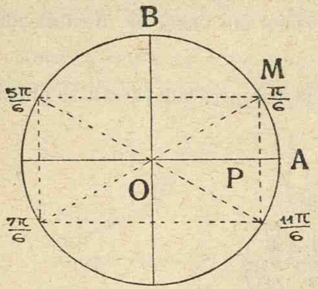


Fig. 21.

x	y'	y
$-\infty$		-1
	$+$	cr
-5	0	$-\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ Max
	$-$	descr
-1		$-\infty$
//////	//////	//////
2		∞
	$-$	descr.
∞		1

E destul a face să varieze x dela 0 la 2π; $y'=0$, când $\sin^2 x=0$, şi $1-4\sin^2 x=0$. Dar factorul $\sin^2 x$ este totdeauna pozitiv, deci semnul derivatei îl dă $1-4\sin^2 x$, care se anulează pentru $\sin x=\pm\frac{1}{2}$; pentru $\sin x=\frac{1}{2}$, avem $x=\frac{\pi}{6}$, $\pi-\frac{\pi}{6}=5\frac{\pi}{6}$; pentru $\sin x=-\frac{1}{2}$, avem $x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ şi $\pi+\frac{5\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$. Semnul derivatei îl aflăm scriind pe $1-4\sin^2 x$ sub forma $-4\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)=-4\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)$ şi se vede semnul fiecărui factor pe un cerc trigonometric (Fig. 21) şi apoi semnul produsului. Avem deci tabloul alăturat, iar curba se poate construi uşor.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\sin x-\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\sin x+\frac{1}{2}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}\sqrt{3}$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	0
			Max		min						

82. Exerciţii. Să se studieze variaţia funcţiunilor 1. $y=-x^4+2x^2+5$. Avem tabloul şi curba variaţiei (Fig. 22).

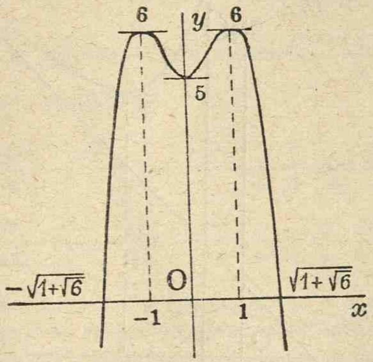


Fig. 22.

x	x	$(x-1)(x+1)$	$y'=-4x(x-1)(x+1)$	y
$-\infty$				$-\infty$
	$-$	$+$	$+$	cr
$-\sqrt{1+\sqrt{6}}$				0
	$-$	$+$	$+$	cr
-1		0	0	6 Max
	$-$	$-$	$-$	descr
0	0		0	5 min
	$+$	$-$	$+$	creşte
1		0	0	6 max
	$+$	$+$	$-$	descr
$\sqrt{1+\sqrt{6}}$				0
	$+$	$+$	$-$	descr
∞				$-\infty$

2. $y=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ (Artilerie şi Geniu, 1908). (Fig. 23).

x	$-\infty$		-1		$1-\varepsilon$	$1+\varepsilon$		3		∞
y'		$+$	0	$-$			$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	7	$\nearrow$	∞
			max					min		

3. $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-x-2}$ (Bursele Facultăţii de Ştiinţe, Bucureşti, 1899).

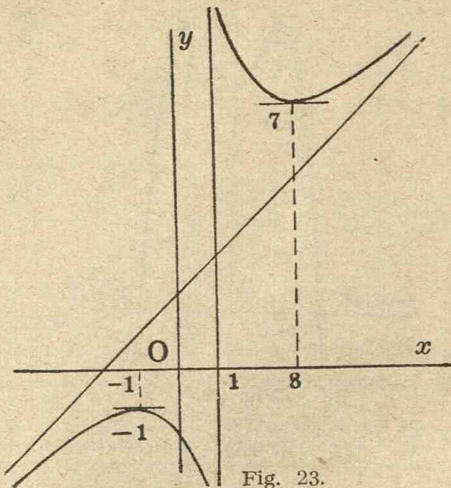


Fig. 23.

R.

x	$-\infty$	cr	-1	cr	$\frac{1}{2}$	cr	$5-3\sqrt{2}$	cr	1	cr	2	cr	$5+3\sqrt{2}$	cr	∞
y'		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-\infty}{\infty}$	$\searrow$	$\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	
							Max						min		

4. $y=\dfrac{3x^2-x-1}{2x^2+x-1}$.

R. y' nu se anulează, y n'are nici maximum nici minimum.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{6}\left(1-\sqrt{13}\right)$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}\left(1+\sqrt{13}\right)$		∞
y'		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
y	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

5. $y=\sqrt{x^3+x^2-2x}$.

R. y este real când $x^3+x^2-2x>0$, $x(x^2+x-2)>0$; semnul expresii x^3+x^2-2x se vede, observând semnul lui x şi al factorului

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ şi apoi al produsului lor; deci x poate să ia valori între $(-2, 0)$ şi $(1,\infty)$. Derivata este $y'=\frac{3x^2+2x-2}{2\sqrt{x^3+x^2-2x}}$ şi semnul său este dat de $3x^2+2x-2$, cu rădăcinile $\frac{-1\pm\sqrt{6}}{3}$; între rădăcini are semnul —, în afară +.

x	$-\infty$		-2		0		1		∞
x		—		—	0	+		+	
$(x-1)(x+2)$		+	0	—		—	0	+	
$x(x-1)(x+2)$		—		+		—		+	

Se vede că pentru $x=-2$, 0 şi 1 numitorul lui y' se anulează, $y'\to\infty$, deci panta tangentei în aceste puncte la curbă este infinită; tangenta face cu $0x$ 90^0, este perpendiculară pe $0x$ în aceste puncte. Avem deci tabloul şi curba alăturată (Fig. 24).

x	y'	y
$-\infty$		
-2		0
	+	cr
$\frac{-1-\sqrt{6}}{3}$	0	$\sqrt{\frac{20+5\sqrt{6}}{27}}$ max
	—	des
0		0
$\frac{-1+\sqrt{6}}{3}$	— 0 +	
1		0
	+	cr
∞		∞

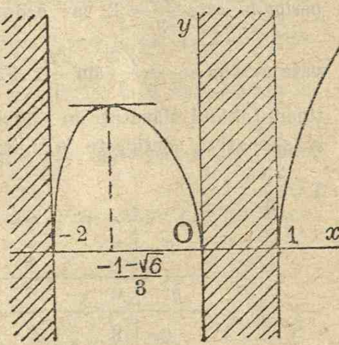


Fig. 24.

6. $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

R. Inlocuind pe x cu $x+2\pi$, y rămâne neschimbat; deci vom studia variaţia numai în intervalul $(0, 2\pi)$. $y=0$, când $x+\frac{\pi}{3}=0$,

$x=-\frac{\pi}{3}$, $x+\frac{\pi}{3}=\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x+\frac{\pi}{3}=2\pi$, $x=\frac{5\pi}{3}$. $y'=3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ este nul când $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{7\pi}{6}$. Avem tabloul alăturat, iar curba este asemănătoare unei sinusoide deplasată paralel pe axa $0x$ în punctul $x=\frac{\pi}{3}$ şi ordonatele mărite de 3 ori.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$4\frac{\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{10\pi}{6}$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$3\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7. $y=2\cos 3x$.

R. Inlocuind pe x cu $x+\frac{2\pi}{3}$, y rămâne neschimbat; deci studiem variaţia numai în intervalul $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$. Variaţia lui y este periodică, perioada este $\frac{2\pi}{3}=\mathrm{T}$, iar ecuaţia dată devine $y=2\cos\frac{2\pi}{\mathrm{T}}x$. Derivata este $y'=-2.\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}$. Făcând pe x să varieze dela 0 la T, obţinem tabloul alăturat. In Cinematică ecuaţia $s=2\cos 3t$, t fiind timpul şi s spaţiul, defineşte o mişcare vibratoare simplă cu perioada $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{3}$.

x	0		$\frac{\mathrm{T}}{4}$		$\frac{\mathrm{T}}{2}$		$\frac{3\mathrm{T}}{4}$		T
y'	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
y	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

8. $y=\sin x+\cos x$.

R. $y=0$, $\sin x+\cos x=0$, $\mathrm{tg}x=-1$, $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$; $y'=\cos x-\sin x$, $y'=0$, $\mathrm{tg}x=1$, $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$. Semnul derivatei se vede pe un cerc trigonometric, aşezând extremităţile arcelor $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ şi văzând mărimea sinusului față de cosinus și semnele lor. Avem tabloul

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

9. $y=\frac{\sin 2x}{1+\sin x}$.

R. Va fi de ajuns de a studia variația într'un interval oarecare egal cu 2π, de a construi curba corespunzătoare și de a imprima acestei curbe translații succesive dealungul lui Ox și egale cu 2π. Dacă se schimbă x în $\pi-x$, y nu se schimbă; deci curba este simetrică în raport cu un punct A al axei $0x$ de abscisă $\frac{\pi}{2}$. Pentru a simplifica construcția curbei, trebue găsit un interval egal cu 2π, cu mijlocul A în $\frac{\pi}{2}$ și acest interval este $\left(\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}+\pi\right)$, și vom studia numai într'o jumătate a acestui interval, și pe urmă luăm simetrica în raport cu A. Jumătățile acestui interval sunt $\left(\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi\right)$ și deci vom studia în primul interval $\left(\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, apoi vom lua simetrica în raport cu A de abscisă $\frac{\pi}{2}$ și avem imaginea variații funcțiunii într'un interval egal cu 2π.

Avem

$$y'=-2\,\frac{\sin^2 x+\sin x-1}{1+\sin x}=-2\,\frac{\left(\sin x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sin x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1+\sin x}$$

Cum $1+\sin x$ și $\sin x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sunt totdeauna pozitivi, căci $\sin x$ este cuprins între -1 și $+1$, semnul derivatei y' depinde de $\sin x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Insemnând cu α unghiul astfel ca $\sin\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, și care α este cuprins între 0 şi $\frac{\pi}{2}$, vedem că y' se anulează în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ numai pentru α şi că $y' > 0$ pentru $x < \alpha$ şi $y' < 0$ pentru $x > \alpha$. Avem deci tabloul

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		α		$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$		$+$		$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Pentru $x = -\frac{\pi}{2}$, y are forma $\frac{0}{0}$. Pentru a afla adevărata valoare, să punem $x = -\frac{\pi}{2} + \theta$, θ având ca limită pe zero; avem atunci

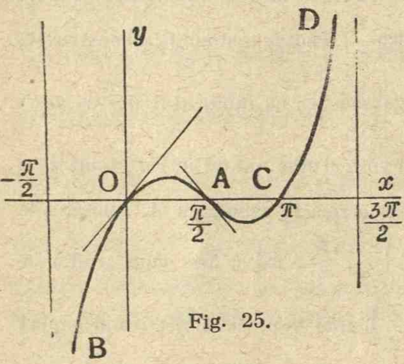


Fig. 25.

$$y = -\frac{\sin 2\theta}{1-\cos\theta} = -\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

şi vedem că pentru $\theta \to 0$ prin valori pozitive, y este infinit negativ. Avem curba corespunzătoare *BOA* (Fig. 25) şi apoi luăm simetrica *ACD* în raport cu *A*. Pantele tangentelor la curbă în *O* şi *A* sunt date de derivata y', unde facem $x=0$ şi $\frac{\pi}{2}$ şi avem forma curbei în aceste puncte.

SERII.

83. Generalităţi. Să considerăm un şir nelimitat de numere

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n, \ldots,$$

care se deduc după o lege dată. Se zice serie suma

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Fie S_n suma *a* n termeni

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Seria se zice convergentă când S_n are o limită finită şi determinată, pentru $n = \infty$; în orice alt caz seria se zice divergentă.

Restul serii $\qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

este $\qquad R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots,$

astfel că S fiind suma seriei, avem

$$S = S_n + R_n.$$

Condiția ca seria să fie convergentă se mai exprimă zicând că restul serii poate rămâne mai mic decât orice număr pozitiv ε oricât de mic am voi, sau că acest rest tinde către zero când n creşte nemărginit.

Progresia geometrică descrescătoare

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

este o serie convergentă, căci suma S_n are ca limită

$$\lim S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Seria $1 + 2 + \ldots + n + \ldots$ este divergentă, căci suma a întrece orice număr dat; în fine seria

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

este divergentă, căci suma S_n este nedeterminată, 0 sau 1.

Un alt exemplu de serie convergentă îl avem considerând *fracția periodică* (1) $a = 0{,}36741741\ldots$, cu perioada 741. Aceasta se poate scrie

$$a = \frac{36}{100} + \frac{741}{10000} + \ldots = \frac{36}{10^2} + \frac{741}{10^5} + \frac{741}{10^8} + \ldots$$

Pentru a găsi valoarea acestei fracţii periodice fără ajutorul progresiilor, să înmulţim în expresiunea ei (1) cu 10^5 (exponentul arată câte cifre sunt la partea neperiodică 36 şi câte sunt la partea periodică 741).

Avem

$$(2) \qquad 10000\, a = 36741,\ 741\ 741\ldots.$$

Inmulţind cu 10^2 (2 arată câte cifre sunt la partea neperiodică), obţinem

$$100\, a = 36{,}741\ 741\ldots$$

Scăzând această egalitate din (2), găsim

$$10000\, a - 100\, a = 36741 - 36,$$

$$99900\, a = 36741 - 36,$$

$$a = \frac{36741 - 36}{99900}.$$

Aceasta este fracţia generatoare a fracţii periodice 0,36 741 741..., şi are ca numărător diferenţa dintre numărul format din partea neperiodică alături cu cea periodică, minus partea neperiodică, iar ca numitor un număr format din atâţea 9 câte cifre sunt la partea periodică urmat de atâtea zeruri câte cifre sunt la partea neperiodică.

Fracţiile periodice ne dau un exemplu simplu de noţiunea de limită. In adevăr, să considerăm fracţia periodică simplă

$$\frac{21}{37} = \frac{567}{999} = 0{,}567\ 567\ldots,$$

cu perioada 567. Dacă aflăm câtul cu aproximaţie de $\frac{1}{1000}$, câtul apropiat prin lipsă este 0,567, iar prin adaus 0,568. Deci

$$0{,}567 < \frac{21}{37} < 0{,}568.$$

Calculând cu aproximaţie de $\frac{1}{1000^2}$, avem

$$0{,}567\ 567 < \frac{21}{37} < 0{,}567\ 568.$$

Valorile prin lipsă

$$0{,}567\ ;\ 0{,}567\ 567\ ;\ 0{,}567567567\ ;\ldots$$

merg crescând, rămânând mai mici ca $\frac{21}{37}$. Valorile apropiate prin adaus

$$0,568\,;\,0,567\ 568\,;\,0,567\ 567\ 568\,;\ldots$$

merg descrescând, toate fiind mai mari ca $\frac{21}{37}$.

Avem deci două şiruri

$$0,567<0,567\ 567<\ldots<\frac{21}{37},$$

$$0,568>0,567\ 568>\ldots>\frac{21}{37},$$

astfel că diferenţa dintre doi termeni corespunzători de rangul n este $\frac{1}{1000^n}$, deci tinde către zero când $n\to\infty$, şi aceste două şiruri au ca limită comună pe $\frac{21}{37}$.

84. *Dacă seria*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

este convergentă atunci termenul general descreşte şi tinde către zero.

In adevăr, S fiind suma serii, avem pentru n foarte mare

$$\lim S_{n+1}=S,\quad \lim S_n=S,$$
$$\lim (S_{n+1}-S_n)=S-S=0,$$
$$\lim u_{n+1}=0,$$

adică termenul general u_{n+1} tinde către zero când n creşte nemărginit (tinde către infinit).

Această condiţie nu e suficientă. De ex., seria

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

are termenul general $u_n=\frac{1}{n}$, descrescător şi tinde către zero, totuşi seria e divergentă. In adevăr, avem

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

Adunând, se vede că suma seriei este mai mare ca

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots,$$

un număr foarte mare, adică seria e divergentă.

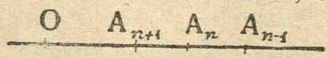


Fig. 26.

Această serie se zice *armonică* căci reprezentând pe o dreaptă lungimile

$OA_{n+1}=\frac{1}{n+1}, OA_n=\frac{1}{n}, OA_{n-1}=\frac{1}{n-1}$, avem (Fig. 26)

$$\frac{2}{OA_n}=\frac{1}{OA_{n-1}}+\frac{1}{OA_{n+1}},$$

relaţie care probează că diviziuea $(OA_n\ A_{n+1}\ A_{n-1})$ este armonică.

85. Criterii de convergenţă a seriilor. In cele ce urmează, ne vom ocupa de serii cu termeni pozitivi. I. *Se calculează dacă se poate, suma S_n a n termeni şi pe urmă se face n să tindă către infinit.*

Exemplu. Seria Σu_n, $u_n=\dfrac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$.

Descompunem termenul general u_n într'o sumă de trei fracţii,

$$\frac{2n+1}{n(n+1\ (n+2)}\equiv\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Pentru a determina pe A, B, C, se înmulţesc ambii membrii respectiv cu n, $(n+1)$, $(n+2)$ şi apoi se face, pe rând, $n=0$, $n=-1$, $n=-2$; avem

$$\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} \equiv A + \frac{Bn}{n+1} + \frac{Cn}{n+2};\ n=0,\ A=\frac{1}{2};$$

$$\frac{2n+1}{n(n+2)} \equiv \left(\frac{A}{n} + \frac{C}{n+2}\right)(n+1) + B;\ n=-1,\ B=1;$$

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} \equiv \left(\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}\right)(n+2) + C;\ n=-2,\ C=-\frac{3}{2}.$$

Avem

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2}\right).$$

Facem, în această relaţie pe n egal cu 1, 2,...n şi obţinem

$$\frac{3}{1.2.3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{3}{3}\right),$$

$$\frac{5}{2.3.4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right),$$

$$\frac{7}{3.4.5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5}\right),$$

....

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2}\right).$$

Adunând, termenii $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right)$, etc., se reduc şi deci

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2}\right).$$

Când n creşte nemărginit,

$$S = lim\ S_n = \frac{5}{4}.$$

86. II. *Se compară termenii serii date cu termenii altei serii a cărei natură este cunoscută. Dacă termenii serii u sunt, începând dela un rang oarecare p, mai mici ca* *termenii unei serii convergente v, atunci seria u este convergentă.*

In adevăr, avem

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < v_{n+2} + v_{n+2} + \ldots,$$

adică restul seriei u este mai mic ca restul seriei v, și deci și $|R_n| < \varepsilon$.

Dacă termenii serii u sunt mai mari ca termenii serii divergente v, și seria u este divergentă.

Exemple. Seria

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

este convergentă, căci începând dela rangul al treilea, avem

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{1.2.3} < \frac{1}{2^2}, \frac{1}{1.2.3.4} < \frac{1}{2^3}, \ldots,$$

adică termenii sunt mai mici ca temenii serii convergente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

o progresie geometrică descrescătoare.

In mod analog, seria

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

e divergentă, căci termenii sunt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}, \ldots,$$

mai mari ca termenii serii armonice.

Seria de comparație este

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

Să vedem cum trebue să fie α pentru ca această serie să fie convergentă.

Avem

$$\frac{1}{1^\alpha}=1,$$

$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}<\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}=\frac{2}{2^\alpha}=\frac{1}{2^{\alpha-1}},$$

$$\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}<\frac{4}{4^\alpha}=\frac{1}{4^{\alpha-1}}=\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2,$$

Suma serii $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ este mai mică decât a progresii

$$1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{(2^{\alpha-1})^2}+\ldots.$$

Progresia este descrescătoare, când

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}}<1,\ 2^{\alpha-1}>1,\ \alpha-1\geqq 0.$$

Nu se poate $\alpha=1$, căci seria

$$\frac{1}{1^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

devine seria armonică, divergentă.

Deci seria

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

este convergentă când $\alpha>1$. Ex.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Exemplu. Seria

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$$

este convergentă, căci termenii săi sunt mai mici ca ai serii convergente

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots$$

87. III. *Teorema raportului (D'Alembert). Dacă începând dela un rang oarecare, avem*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<k\,,\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<k<1\,;$$

seria e convergentă; dacă

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>k,\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}>k\ldots;\ k>1$$

seria e divergentă.

In adevăr, avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<k,\quad u_{n+1}<ku_n,$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<k,\quad u_{n+2}<ku_{n+1}<k^2u_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Termenii seriei u, sunt, începând dela termenul u_{n+1} mai mici ca ai progresiei geometrice descrescătoare

$$u_n(k+k^2+\ldots),\qquad k<1,$$

deci seria u este convergentă.

Dacă luăm în loc de suma adevărată a seriei, suma a n termeni, eroarea ce o facem este egală cu

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots<u_n\frac{k}{1-k}.$$

Avem, astfel, limita superioară a eroarei ce o facem, când se ia numai primii n termeni în serie.

Când $\frac{u_{n+1}}{u_n} > k > 1$, înseamnă că începând dela termenul de rangul n, avem $u_{n+1} > u_n$; termenii serii cresc, seria e diveregentă.

In practică se calculează $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *Dacă* $l < 1$, *seria e convergentă; dacă* $l > 1$, *e divergentă; dacă* $l = 1$, *tinzând către* 1 *prin valori mai mari ca* 1, *seria e divergentă; iar dacă* $l = 1$, *tinzând către* 1 *prin valori mai mici decât* 1, *este îndoială.*

In adevăr, dacă $l < 1$, putem alege între l și 1 un număr fix $k < 1$, față de care $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, deci seria e convergentă. Dacă $l > 1$, putem alege între 1 și l un număr $k > 1$, față de care avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} > k$, deci seria e divergentă. Dacă $l = 1$, tinzând către 1 prin valori superioare lui 1, atunci termenii seriei merg crescând, seria e divergentă.

88. Aplicații. I. *In cazul serii*

$$a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n + \ldots,$$

seria e convergentă când raportul

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\,a^{n+1}}{n\,a^n} = \frac{n+1}{n}a$$

e mai mic decât 1; deci, trecând la limită, $\lim \frac{u_{n+1}}{n} = a$; dacă $a < 1$, seria e convergentă; dacă $a > 1$, divergentă. Când $a = 1$, seria e divergentă,

II. $$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Avem

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{1} = \lim \frac{n}{n+2} = 1.$$

Ar fi deci îndoială. Dar $u_n < \frac{1}{n^2}$, deci seria e convergentă.

III. $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$ Avem

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim x \frac{n}{n+1} = x.$$

Dacă $|x| < 1$, seria e convergentă; dacă $x > 1$, divergentă; $x = 1$, divergentă.

89. IV. Teorema rădăcinii (Cauchy). *Dacă, începând dela un rang destul de depărtat, avem*

$$\sqrt[n]{u_n} < k, \sqrt[n+1]{u_{n+1}} < k \ldots; k < 1,$$

seria e convergentă. Dacă

$$\sqrt[n]{u_n} > k > 1,$$

seria e divergentă.

In adevăr, în primul caz, avem

$$\sqrt[n]{u_n} < k, \quad u_n < k^n$$

$$\sqrt[n+1]{u_{n+1}} < k, \quad u_{n+1} < k^{n+1}$$

. . . .

Termenii serii sunt respectiv mai mici ca termenii serii convergente

$$k^n + k^{n+1} + \ldots, \quad k < 1,$$

deci seria e convergentă. Luând, în loc de suma serii, suma a n termeni, eroarea ce o facem este

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < k^n + k^{n+1} + \ldots = \frac{k^n}{1-k},$$

deci, mai mică decât $\frac{k^n}{1-k}$.

Dacă, din contră, avem $\sqrt[n]{u_n} > k > 1$, rezultă $u_n > k^n$, $k > 1$, seria e divergentă, căci are termenii mai mari ca ai progresii geometrice crescătoare $k^n + k^{n+1} + \ldots$.

In practică, se calculează $\lim \sqrt[n]{u_n}=l$. *Dacă* $l<1$, *seria e convergentă; dacă* $l>1$, *divergentă; dacă* $l=1$, *îndoială.* Demonstraţia este analoagă ca la teorema raportului.

Dacă $\sqrt[n]{u_n}$ tinde către 1 prin valori mai mari ca 1, seria e divergentă.

Exemplu. Seria

$$1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^n}{n^n}+\ldots,$$

este totdeauna convergentă, căci

$$\lim \sqrt[n]{u_n}=\lim \frac{x}{n}=0<1.$$

90. Exerciţii.. Să se găsească suma celor dintâi n termeni ai seriilor următoare şi să se deducă convergenţa lor

1. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$

2. $\frac{4}{2.3.4}+\frac{7}{3.4.5}+\ldots+\frac{3n+1}{(n+1)(u+2)(n+3)}+\ldots$

3. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+\ldots$

R. 1. $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$,

$\lim S_n=\frac{3}{4}$.

R. 2. $\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{-1}{n+1}+\frac{5}{n+2}+\frac{-4}{n+3}$, $S_n=\frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$,

$\lim S_n=\frac{5}{6}$.

R. 3. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2n-1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}$, $S_n=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}$

$\lim S_n=\frac{\pi}{4}$.

4. Să se arate că seria următoare e convergentă

$$\sum \frac{n^4+5n+1}{n^6+1}.$$

R. Se compară cu seria de termen general $\frac{1}{n^2}$.

5. Să se cerceteze natura serii

$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\ldots+\frac{n}{3^{n-1}}+\ldots$$

R. $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}$, convergentă.

6. Să se cerceteze seria

$$\frac{1}{2.1}+\frac{1}{2^3.3}+\frac{1}{2^5.5}+-\ldots+\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}+\ldots$$

R. Teorema raportului; convergentă.

7. Pentru care valori ale lui x seria

$$1+\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)+\ldots+\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^n+\ldots$$

e convergentă.

R. Se aplică teorema rădăcinii. Trebue să avem $-1<\frac{x-1}{x^2+1}<1$, $x>0$ sau $x<-1$.

91. Calculul numeric al sumei unei serii convergente. Fiind dată seria convergentă

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

metoda întrebuințată pentru calculul valorii apropiate a sumei unei serii constă în a păstra un număr oarecare de termeni începând dela primul și a neglija ceilalți, care sunt relativ mici, căci termenul general tinde către zero. Mai mult, se înlocuiesc termenii păstrați prin valorile lor zecimale apropiate cu un grad de aproximație oarecare. Oprindu-ne la termenul u_n, și înlocuind termenii $u_1, u_2, \ldots u_n$ prin $u'_1, u'_2, \ldots u'_n$, suma

$$S'_n = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n$$

reprezintă o valoare apropiată a sumei S a serii. Eroarea comisă se compune: 1⁰ din restul serii

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots;$$

2⁰ din erorile făcute când se iau valorile $u'_1, u'_2, \ldots u'_n$ în loc de $u_1, u_2, \ldots u_n$. In general, se dă mai dinainte gradul de aproximație cu care voim a calcula pe S; se determină rangul n al termenului la care trebue să ne oprim, apoi aproximația cu care să calculăm termenii conservați, astfel ca eroarea totală să fie inferioară celei ce se dă.

I. *In cazul serii cu termeni pozitivi*, limita superioară a lui R_n se calculează, căutând o progresie geometrică descrescătoare, ai cărei termeni să fie egali sau superiori acelora ce compun pe R_n. Se aplică, sau teorema raportului, sau a rădăcinii, cu care ocazie se cunoaște o valoare apropiată a restului serii,

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < u_{n+1}(1 + k + k^2 + \ldots), \quad R_n < \frac{u_{n+1}}{1-k}.$$

Exemplu. Să se afle cu aproximație de $\frac{1}{1000}$ suma serii

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \ldots + \frac{n}{8^n} + \ldots$$

Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{8n}, \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{8} < 1$$

seria este convergentă. Restul este

$$R_n = \frac{n+1}{8^{n+1}} + \frac{n+2}{8^{n+2}} + \ldots$$

Se observă că $\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{n+2}{8(n+1)}$, şi cum

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k, \ldots,$$

k poate fi cel mult egal cu $\dfrac{n+2}{8(n+1)}$, iar restul e mai mic decât

$$\frac{u_{n+1}}{1-k} = \frac{n+1}{8^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{n+2}{8(n+1)}} = \frac{(n+1)^2}{(7n+6)8^n}.$$

Pentru $n=4$, acest ultim număr este mai mic decât $\dfrac{1}{5000}$, deci $R_n < \dfrac{1}{5000}$. Trebue atunci a păstra primii 4 termeni; primul fiind exact, rămâne de calculat ceilalţi trei, fiecare cu aproximaţie de $\dfrac{1}{1000}$. Eroarea totală va fi inferioară cantităţii

$$\frac{1}{5000} + \frac{3}{10000} = \frac{5}{10000}$$

şi deci cu atât mai mult mai mică decât $\dfrac{1}{1000}$. Să luăm primii patru termeni cu patru zecimale,

$$u_1' = 0{,}125,$$
$$u_2' = 0{,}0312,$$
$$u_3' = 0.0058,$$
$$u_4' = 0{,}0009;$$

de unde, adunând, $u_1' + u_2' + u_3' + u_4' = 0{,}1629$. Aceasta este valoarea apropiată prin lipsă a serii cu aproximaţie de $\dfrac{5}{10000} = 0{,}0005$. Suma e cuprinsă între 0,1629 şi $0{,}1629 + 0{,}0005 = 0{,}1634$.

II. *Când termenii serii descresc repede*, ne mulţumim a calcula termeni începând dela primul, cu una sau două zecimale mai mult decât are aproximaţia cerută; ne oprim atunci când, calculul astfel condus, nu mai dă cifră însemnătoare şi se face suma termenilor calculaţi. Se vede că restul care este comparabil cu primul termen neglijat, este inferior erorii ce se dă şi atunci nu-l mai calculăm. Totuşi, e bine să facem o limită superioară a restului şi să vedem dacă nu cumva eroarea totală nu este mai mare decât cea impusă la început. In exemplul precedent, calculând termenii cu patru zecimale, avem pentru u_1', u_2', u_3', u_4' valorile deja găsite, iar pentru u_5', 0.0001, şi u_6' nu mai intervine. Suma termenilor conservaţi este 0,1630 şi se ia 0,163 ca valoare cerută.

92. Numărul (Seria lui) e. Să considerăm seria

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

care e convergentă, căci

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1.2\ldots(n-1)}{1}=\lim\frac{1}{n}=0<1.$$

Suma acestei serii este un număr care se notează cu e. Dacă ne oprim la termenul

$$\frac{1}{1.2\ldots n},$$

eroarea ce o facem este

$$R_n=\frac{1}{1.2\ldots n(n+1)}+\frac{1}{(n+2)\,!}+\ldots;$$

avem

$$\frac{1}{(n+2)\,!}<\frac{1}{(n+1)\,!\;(n+1)}$$

$$\frac{1}{(n+3)\,!}<\frac{1}{(n+1)\,!\;(n+1)^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n<\frac{1}{1.2\ldots n(n+1)}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right],$$

$$R_n<\frac{1}{1.2\ldots n(n+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}},\quad R_n<\frac{1}{1.2\ldots n(n+1)}\cdot\frac{n+1}{n},$$

$$R_n < \frac{1}{1.2\ldots n} \cdot \frac{1}{n}.$$

93. Calculul lui e. Numărul e este incomensurabil. Dacă am avea

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + R_n,$$

adică egal cu o fracţie, înmulţind cu $n!$, deducem

$$m(n-1)! = n! + n! + 3.4\ldots n + \ldots + 1 + n!R_n.$$

Insemnând cu A şi B membrul întâi şi partea întreagă a membrului al doilea, avem

$$A - B = n!\, R_n.$$

Dar, am văzut că $R_n < \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$. Deci

$$A - B < n!\frac{1}{n!}\frac{1}{n}, \quad A - B < \frac{1}{n}.$$

Ar urma, deci, ca un număr întreg $(A - B)$ să fie mai mic decât o fracţie $\frac{1}{n}$, ceea ce este absurd. Deci nu se poate exprima numărul e cu o fracţie $\frac{m}{n}$, adică este un număr incomensurabil.

Să calculăm pe e cu două zecimale exacte. Luând $n=5$, eroarea este

$$R_n < \frac{1}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1}{5}, \quad R_n < \frac{1}{600} < \frac{1}{500}.$$

Suma termenilor păstraţi este

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}.$$

Să calculăm ultimii trei, cu trei zecimale; eroarea făcută e mai mică decât

$$\frac{1}{500}+\frac{3}{1000}=\frac{5}{1000}<\frac{1}{100}.$$

Suma primilor cinci termeni este

$$1+1+0,5+0,166+0,041+0,008=2,715.$$

Numărul e, este cuprins între 2,715 şi 2,720. Valoarea lui e cu cinci zecimale este $e=2,71828$.

94. Seria e este un caz particular al serii

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

care este convergentă, oricare ar fi x finit.

95. Limita expresii $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ **pentru** $m\to\infty$. *Să presupunem mai întâi m întreg şi pozitiv.* Vom demonstra mai întâi următoarea propoziţiune:

Dacă $a_1, a_2, \ldots a_p$ sunt numere mai mici decât 1, avem

$$\Pi(1-a_i)=(1-a_1)(1-a_2)\ldots\ (1-a_p)=1-\theta_p(a_1+a_2+\ldots+a_p),$$

θ_p fiind un număr cuprins între 0 şi 1.

In adevăr, avem

$$(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)+a_1a_2>1-(a_1+a_2).$$

Ca să restablilim egalitatea, trebue să micşorăm scăzătorul, deci trebue înmulţit cu un număr $\theta_2<1$, astfel ca să avem

$$(1-a_1)(1-a_2)=1-\theta_2(a_1+a_2).$$

De asemenea,

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)>[1-(a_1+a_2)](1-a_3),$$

$$\prod^{3} (1-a_i) > 1-(a_1+a_2+a_3)+a_3(a_1+a_2) > 1-(a_1+a_2+a_3),$$

$$\prod^{3} (1-a_i) = 1-\theta_3(a_1+a_2+a_3),\ 0<\theta_3<1.$$

Din aproape în aproape, se vede că

$$(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n) = 1-\theta_n(a_1+a_2+...+a_n),\ 0<\theta_n<1.$$

Voim să demonstrăm că această relaţie este generală. In adevăr, să presupunem că e adevărată pentru cazul a n factori, când avem

$$(1-a_1)...(1-a_n) = 1-\theta_n(a_1+...+a_n),\ 0<\theta_n<1,$$

şi voim să arătăm că este adevărată şi pentru cazul a $(n+1)$ factori. Avem

$$(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n) > 1-(a_1+a_2+...+a_n),$$

$$(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)(1-a_{n+1}) > \left[1-(a_1+...+a_n)\right](1-a_{n+1}),$$

$$(1-a_1)...(1-a_{n+1}) > 1-(a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1})+a_{n+1}(a_1+...+a_n);$$

deci $$(1-a_1)...(1-a_{n+1}) > 1-(a_1+a_2+...+a_{n+1}),$$

$$(1-a_1)...(1-a_{n+1}) = 1-\theta_{n+1}(a_1+...+a_{n+1}),\ 0<\theta_{n+1}<1.$$

Relaţia este deci generală.

Aşa fiind, *să considerăm desvoltarea*

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,$$

pentru cazul m întreg şi pozitiv. Aplicând formula binomului, avem

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+...+$$

$$\frac{m(m-1)...(m-i+1)}{1.2....i}\frac{1}{m^i}+...+\frac{m(m-1)...1}{1.2...m}\frac{1}{m^m}.$$

Transformând această expresie, obţinem

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3!}+...+$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{i-1}{m}\right)}{i\,!}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{m}.$$

Insă, după propoziţiunea precedentă,

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_p)=1-\theta_p(a_1+a_2+\ldots+a_p),\quad 0<\theta_p<1,$$

avem $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{i-1}{m}\right)=1-\theta_{i-1}\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\ldots+\frac{i-1}{m}\right)$,

deci $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{i-1}{m}\right)=1-\frac{\theta_{i-1}}{2m}\,i(i-1)$;

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{2\,!}+\frac{1-\theta_2\frac{3}{m}}{3\,!}+\frac{1-\frac{\theta_3}{2m}4.3}{4\,!}+\ldots+$$

$$\frac{1-\frac{\theta_{i-1}}{2m}i(i-1)}{i\,!}+\ldots+\frac{1-\frac{\theta_{m-1}}{2m}m(m-1)}{m\,!},$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\ldots+\frac{1}{m\,!}-$$

$$\frac{1}{2m}\left[1+\frac{\theta_2}{1}+\frac{\theta_3}{2\,!}+\ldots+\frac{\theta_{i-1}}{(i-2)\,!}+\ldots+\frac{\theta_{m-1}}{(m-2)\,!}\right].$$

Când m tinde către ∞ prin valori întregi și pozitive,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2\,!}+\ldots+\frac{1}{m\,!}$$

tinde către

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2\,!}+\ldots+\frac{1}{m\,!}+\ldots=e,$$

iar

$$S=1+\frac{\theta_2}{1}+\frac{\theta_3}{2\,!}+\ldots+\frac{\theta_{i-1}}{(i-2)\,!}+\ldots+\frac{\theta_{m-1}}{(m-2)\,!},\quad 0<\theta_p<1.$$

tinde către o serie, ai cărei termeni sunt mai mici ca ai seriei convergente

$$1+\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\ldots+\frac{1}{(m-2)\,!}+\ldots,$$

căci $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{m-1}$ sunt mai mici decât 1. Deci seria S este convergentă, şi prin urmare

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{2m}\left[1+\frac{\theta_2}{1}+\frac{\theta_3}{2!}+\ldots\right]=0,$$

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=e.$$

Aşa dar, *numărul e este limita, pentru m egal cu infinit, a expresiei*

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

96. *Să arătăm că această limită este aceeaşi când m tinde către ∞ trecând prin valori fracţionare sau iraţionale.* In acest caz, m este cuprins între două numere întregi consecutive, m' şi $(m'+1)$; deci

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'+1}, \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m>\left(1+\frac{1}{m'+1}\right)^{m'}$$

$$\left(1+\frac{1}{m'+1}\right)^{m'+1}:\left(1+\frac{1}{m'+1}\right)<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'}\left(1+\frac{1}{m'}\right)$$

Când $m=\infty$, atunci şi $m'=\infty$ şi deci $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ este cuprins între două cantităţi, care tind respectiv către $e:1=e$, şi $e.1=e$, adică $\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e.$

Când m tinde către ∞ prin valori negative, să punem $m=-m'$, $m'>0$, Avem

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\left(1-\frac{1}{m'}\right)^{-m'}=\left(\frac{m'-1}{m'}\right)^{-m'}=\left(\frac{m'}{m'-1}\right)^{m'}=$$

$$\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'}=\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'-1}.\left(1+\frac{1}{m'-1}\right).$$

Deci,

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\lim_{m'=\infty}\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'-1}\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)=e.\ 1=e.$$

Aşa dar, în toate cazurile,

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e.$$

97. *Limita pentru* $\alpha=0$, *a expresii* $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ *este egală cu* e. Punând $\alpha=\frac{1}{m}$, avem

$$\lim_{\alpha=o}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e.$$

98. *Limita expresiunilor de forma* 1^{∞}. Fie că, pentru anumite valori, $\lim u=1$, $\lim v=\infty$; atunci $\lim. u^{v}=1^{\infty}$. Putem scrie în acest caz

$$u^{v}=\left\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\right\}^{(u-1)v};\quad u-1=\alpha,$$

$$\lim u^{v}=\lim\left[(l+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{(u-1)v}, \lim u^{v}=e^{\lim(u-1)v}.$$

Exemplu. Limita expresii $\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}$ pentru $m\to\infty$. Avem

$$u=1+\frac{x}{m},\ v=m,\quad (u-1)v=x,\ \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=e^{x}.$$

99. **Seria** e^{x}. Dezvoltând cu formula binomului $\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}$, apoi făcând $m=\infty$, printr'un raţionament analog cu cel făcut pentru $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$, găsim

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\ldots,$$

şi comparând cu rezultatul obţinut precedent, avem

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

100. Exerciţii. 1. Limita pentru $x=0$ a expresii $(1-\sin x)^{\operatorname{cotg} x}$.

R. 1^∞, $\lim u^v = e^{\lim (u-1)v}$; e^{-1}.

2. Limita expresii $\left(\cos\frac{a}{m} + x\sin\frac{a}{m}\right)^m$ pentru $m=\infty$.

R. $(u-1)\,v = a\,\dfrac{\frac{a}{\sin 2m}}{\frac{a}{2m}}\left(x\cos\frac{a}{2m} - \sin\frac{a}{2m}\right)$; e^{ax}.

3. Să se cereceteze natura serii $u_n = \left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n^2}$.

R. $\lim \sqrt[n]{u_n} = e^{-a} < 1$, convergentă.

4. Să se aplice teorema raportului şi rădăcinii serii $u_n = \dfrac{n^{n+a}}{(2n+1)^n}$.

R. $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$, convergentă.

Funcţiunea exponenţială. Funcţiunea logaritmică.

101. Funcţiunea $y=a^x$ se zice *funcţiunea exponenţială*. Dând lui x o valoare întreagă n, valoarea lui y se obţine ridicând pe a la puterea n. Dacă n este o fracţie $\frac{p}{q}$, y este rădăcina de rangul q din puterea p a lui a. Când n este un număr iraţional (incomensurabil), se poate obţine valoarea apropiată a lui $y=a^x$, exprimând pe x aproximativ cu un număr raţional. Dacă $x=0$, atunci $y=a^0=1$, iar când $x=-m$, m fiind un număr pozitiv, atunci $y = a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.

Se vede că dacă ridicăm un număr $a>1$ la puteri x care cresc, atunci și valorile corespunzătoare ale lui a^x cresc[1]; deci funcțiunea exponențială $y=a^x$ este crescătoare când $a>1$. Avem $a^{\infty}\rightarrow\infty$, iar $a^{-\infty}=\frac{1}{a^{\infty}}\rightarrow 0$.

Dacă $a<1$, când exponentul x crește, atunci puterile a^x descresc; deci, dacă $a<1$, atunci $y=a^x$ este o funcțiune descrescătoare. Punând $a=\frac{1}{b}$, $b>1$, se vede că

$$a^x=\frac{1}{b^x}, \text{ astfel că pentru } x\rightarrow\infty,\ a^{\infty}=\frac{1}{b^{\infty}}\rightarrow\frac{1}{\infty}\rightarrow 0,$$

$$a^{-\infty}=\frac{1}{b^{-\infty}}=b^{\infty}\rightarrow\infty \quad (\text{căci } b>1).$$

Pentru funcțiunea exponențială avem următoarele tablouri a variații și curbele corespunzătoare (Fig. 27, 28), ce au axa Ox ca asimptotă.

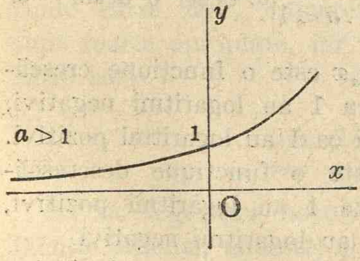


Fig. 27.

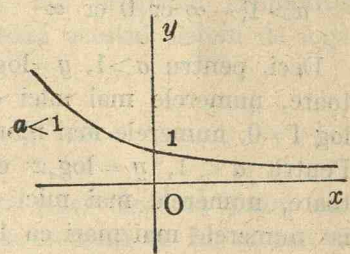


Fig. 28.

	x	$-\infty$		0		∞
$a>1$	y	0	cr	1	cr	∞

	x	$-\infty$		0		∞
$a<1$	y	∞	descr	1	descr	0

Funcțiunea logaritmică este $y=\log_a x$. Cum $x=a^y$, iar a^y fiind totdeauna pozitiv, rezultă că pentru ca $\log x$ să existe, trebue ca x să fie pozitiv, variabila să ia valori pozitive.

[1] A se vedea, *N. Abramescu*, Algebra clasa VI. p. 27.

Tabloul variaţii şi curbele reprezentative (Fig. 29, 30), se obţin din cele de mai sus, schimbând în locul lui x pe y, şi în locul lui y punând x, şi apoi răsturnând figurile pe dos. Se observă că $\log 1=0$.

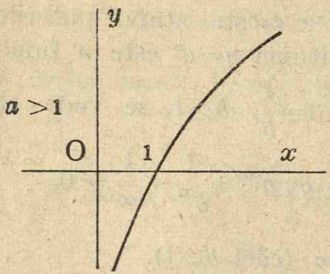


Fig. 29.

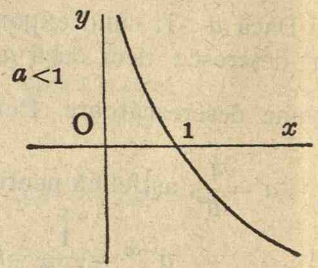


Fig. 30.

x	0	cr	1	cr	∞
$y=\log_a x$, $a>1$	$-\infty$	cr	0	cr	∞

x	0	cr	1	cr	∞
$y=\log_a x$, $a<1$	∞	descr	0	descr	$-\infty$

Deci, pentru $a>1$, $y=\log_a x$ este o funcţiune crescătoare, numerele mai mici ca 1 au logaritmi negativi, $\log 1=0$, numerele mai mari ca 1 au logaritmi pozitivi. Pentru $a<1$, $y=\log_a x$ este o funcţiune descrescătoare, numerele mai mici ca 1 au logaritmi pozitivi, iar numerele mai mari ca 1 au logaritmi negativi.

102. Sisteme de logaritmi. Logaritmi neperieni. Am văzut cum se poate defini un sistem de logaritmi cu baza a cu ajutorul funcţiunii exponenţial $y=a$, considerând şirul de numere

$$(1) \qquad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n, \quad \ldots$$

care sunt logaritmii valorilor

$$(2) \qquad 1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad \ldots \quad a^n \quad \ldots$$

corespunzătoare funcţiunii a^x.

Se vede că şirul (1) este o progresie aritmetică cu primul termen 0 și rația 1, iar şirul (2) este o progresie geometrică cu primul termen 1 şi raţia a. Deci, aceste două progresii definesc un sistem de logaritmi, astfel că termenii din progresia aritmetică sunt logaritmii numerelor corespunzătoare din progresia geometrică.

Să considerăm două progresii, una geometrică

$$\div\div\ 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : \ldots (1+\alpha)^m : \ldots$$

şi alta aritmetică

$$\div\ 0.\ \alpha.\ 2\alpha\ .\ .\ .\ m\alpha\ .\ .\ .$$

Logaritmul unui număr din progresia geometrică este numărul corespunzător din cea aritmetică. Baza este numărul $(1+\alpha)^m$, al cărui logaritm $m\alpha$ este egal cu 1, adică $m\alpha=1$, $m=\frac{1}{\alpha}$. Când α este destul de mic şi tinde către zero, numerele din progresia geometrică sunt foarte apropiate, iar baza acestui sistem de logaritmi este

$$\lim_{\alpha \to o} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Se zic logaritmi naturali (căci alegerea bazei este făcută raţional, natural) şi se notează cu L; se mai zic şi logaritmi neperieni.

103. Schimbarea bazei. Fiind cunoscut logaritmul unui număr N în baza a, să calculăm logaritmul lui N în baza b. Avem

$$\log_a N = u,\quad N = a^u;\ \log_b N = \log_b a^u = u \log_b a,$$

$$\log_b N = \log N.\ \log_b a. \tag{3}$$

Punând $\log_a b = v$, avem $b = a^v$, $\log_b b = \log_b a^v$, $1 = v \log_b a$, $1 = \log_a b\ \log_b a$; deci înlocuind în (3),

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad \log_b N = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a b}.$$

Numărul $\frac{1}{\log_a b}$ se zice modul de transformare. De ex.,

$$L2 = \log 2 \frac{1}{\log e}.$$

In tablele de logaritmi Dupuis p. 32, avem

$\frac{1}{\log e} = 2{,}30258$ și deci $L2 = 0{,}30103 \times 2{,}30258$.

104. Ecuații exponențiale și logaritmice sunt acelea în care necunoscutele intră la exponenți sau prin logaritmii lor.

Exemple. 1. $a^x = b$, $a > 0$, $b > 0$. Aplicând logaritmii, avem

$$x \log a = \log b, \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

2. $a^{b^x} = c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Avem

$$b^x \log a = \log c, \quad b^x = \frac{\log c}{\log a}.$$

Aplicând din nou logaritmii, obținem

$$x \log b = \log \frac{\log c}{\log a}, \quad x = \frac{\log\log c - \log\log a}{\log b}.$$

3. $\frac{\log a + \log x}{\log (m + x)} = 2$. Discuție.

Avem $\log ax = 2\log(m+x)$, $\log ax = \log(m+x)^2$,

$$ax = (m+x)^2, \quad x^2 + (2m-a)x + m^2 = 0.$$

Ca rădăcinile să fie reale și pozitive, trebue $(2m-a)^2 - 4m^2 > 0$ și $2m - a < 0$. Din prima $m < \frac{a}{4}$, din a doua $m < \frac{a}{2}$; deci trebue $m < \frac{a}{4}$. Mai trebue ca $m + x > 0$, $x > -m$. Când $m > 0$ ambele rădăcini convin, iar când $m < 0$ numai cea mai mare.

4. $x + y = 65$, $\log x + \log y = 3$.

Ultima ecuaţie se scrie $\log xy=3$, $xy=1000$. Necunoscutele x şi y a căror sumă şi produs sunt cunoscute, sunt rădăcinile ecuaţii

$$x^2-65x+1000=0\ ;\ x=25,\ y=40.$$

105. Exerciţii. 1) $e^{\frac{x}{a}}=e^{-\frac{x}{a}}$; 2) $a^{a^x}=1$; 3) $3^{2^x}=81$

R. 1) $x=0$; 2) $x=-\infty$; 3) $x=2$.

4. $3^{x+2}+9^{x+1}=810$.

R. $3^x3^2+(3^2)^{x+1}=810$, $3^x=y$, $9y^2+9y-810=0$, $y=9$, $x=2$.

5. $3^x\ 5^y=10125$, $x+y=7$.

R. Se poate scrie $3^x\ 5^{7-x}=10125$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{10125}{57}=\left(\frac{3}{5}\right)^4$, $x=4, y=3$.

6. $x^2+y^3=101$, $2\log x+3\log y=2$.

R. $\log x^2y^3=2$; $x^2=u$ $y^3=v$, $u+v=101$, $uv=100$, $x=10$, $y=1$.

7. $x^y=y^x$, $x^p=y^q$.

R. Avem $x\log y=y\log x$, $p\log x=q\log y$, $px=qy$, $p\log x=$ $q\left(\log x+\log\frac{p}{q}\right)$, $x=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}$, $y=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}$.

106. Derivata funcţiunii exponenţiale $y=a^x$. Insemnând cu h creşterea variabilei şi cu k creşterea funcţiunii, avem

$$\frac{k}{h}=\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\frac{a^h-1}{h}. \tag{4}$$

Derivata y' este $\lim\frac{k}{h}$ pentru $h=o$. Deci, trebue a găsi limita expresii

$$z=\frac{a^h-1}{h},$$

pentru $h\to o$. Din această relaţie, avem

$$zh=a^h-1,\quad a^h=1+zh,\quad a=(1+zh)^{\frac{1}{h}}.$$

Luând limita pentru $h=0$, a ambilor membri, avem

$$a=\lim(1+zh)^{\frac{1}{h}}.$$

Dar această expresie este de forma u^v, unde

$u=1+zh$, $v=\frac{1}{h}$, şi are forma 1^∞ pentru $h\to 0$.

Am văzut că

$$\lim u^v=e^{\lim(u-1)v},\ u-1=1+zh-1=zh,$$

$$(u-1)v=zh\frac{1}{h}=z.$$

Deci
$$\lim(1+zh)^{\frac{1}{h}}=e^z,\quad a=e^z,$$

$$z=\mathrm{L}a.$$

Luând limita expresii (4), avem derivata funcţiunii $y=a^x$, care este

$$y'=a^x\mathrm{L}a.$$

In cazul $y=e^x$, avem $y'=e^x$, căci $\mathrm{L}e=1$.

Când avem funcţiunea $y=a^u$, u fiind o funcţiune de x, aplicând derivata unei funcţiuni compuse, avem

$$y'=y'_u u'_x=(a^u)'\,u',$$

$$y'=a^u\,\mathrm{L}a\,.\,u',\quad u'=\frac{du}{dx}$$

De ex.,
$$y=e^u,\ y'=e^u.u'.$$

$$y=e^{-x^2},\quad y'=e^{-x^2}\frac{d(-x^2)}{dx}=e^{-x^2}(-2x)=-2xe^{-x^2}.$$

107. Derivata funcţiunii logaritmice $y=\log_a x$. Avem $x=a^y$ care este funcţiunea inversă a funcţiunii logaritmice. Derivata acestei funcţiunii a^y în raport cu y este $a^y\,\mathrm{L}a$, adică $x'_y=a^y\,\mathrm{L}a$. Insă ştim (N. 69) că derivata unei funcţiuni inverse este inversa derivatei funcţiunii directe. Deci derivata funcţiunii logaritmice este inversa acestei derivate,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{a^y \mathrm{L}a}.$$

Inlocuind pe a^y cu egalul său x, avem

$$y'_x = \frac{1}{x\mathrm{L}a}, \quad y' = \frac{1}{x\mathrm{L}a}.$$

Cum ştim (Nr. 103) că $\frac{1}{\mathrm{L}a} = \log_a e$,. obţinem derivata funcţiunii $y = \log_a x$, $y' = \frac{1}{x} \log_a e$.

108. Tabloul derivatelor funcţiunilor exponenţiale şi logaritmice este

$$y = e^x, \quad y' = e^x \qquad y = \mathrm{L}x, \quad y' = \frac{1}{x},$$

$$y = a^x, \quad y' = a^x \mathrm{L}a, \qquad y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{x}\log_a e,$$

$$y = e^u, \quad y' = e^u u' \qquad y = \mathrm{L}u, \quad y' = \frac{1}{u} u',$$

$$y = a^u, \quad y' = (a^u \mathrm{L}a)u' \qquad y = \log_a u, \quad y' = \left(\frac{1}{u}\log_a e\right)u'.$$

109. Exerciţii. Să se afle derivatele funcţiunilor

1. $y = e^{-\frac{1}{x}}$. R. $y' = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$. 2. $y = e^{x^2+1}$, R. $y' = 2xe^{x^2+1}$.

3. $y = e^x(1 - x^3)$. R. $y' = e^x(1 - 3x^2 - x^3)$.

4. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. R. $y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ 5. $y = \mathrm{L}(e^x + e^{-x})$. R. $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

6. $y = \mathrm{Ltg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$. $y' = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2\sin(\ )\cos(\ )}=\frac{1}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}=\frac{1}{\cos x}.$$

7. $y=L\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. R. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

8. Variaţia funcţiuni $y=a^x$.

R. $y'=a^x La$, totdeauna a^x este pozitivă. Dacă $a>1$, $La>0$, deci $y'>0$, funcţiunea creşte; dacă $a<1$, $La<0$, atunci $y'<0$. funcţiunea descreşte. Avem tablourile următoarele şi curbele (Fig. 27, 28).

$a>1$,

x	$-\infty$		0		∞
y'		$+$		$+$	
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

$a<1$,

x	$-\infty$		0		∞
y'		$-$		$-$	
y	∞	$\searrow$	1	$\searrow$	0

9. Variaţia funcţiunei $y=\log_a x$.

R. $y'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{La}$. Cum x este totdeauna pozitiv, dacă $a>1$, $La>0$, funcţiunea este crescătoare; dacă $a<1$, $La<0$, funcţiunea este descrescătoare. Avem tablourile şi curbele (Fig. 29, 30).

$a>1$,

x	0		1		∞
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

$a<1$,

x	0		1		∞
y'		$-$		$-$	
y	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

10. Variaţia funcţiunii $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

R. Cum e^u este totdeauna pozitivă, urmează că $e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}>0$, deci y, nu se poate anula. Pentru $x\to-\infty$, $e^{\frac{x}{a}}\to 0$, $e^{-\frac{x}{a}}\to\infty$, deci $y\to\infty$; deasemenea când $x\to\infty$, $y\to\infty$.

Avem $y'=\frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a}+e^{-\frac{x}{a}}\left(-\frac{1}{a}\right)\right]$, $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{u}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Derivata y' se anulează când

$$e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}=0,\quad e^{\frac{2x}{a}}=1,$$

adică $\frac{2x}{a}=0$, deci $x=0$. Pentru $x<0$, $y'<0$, şi când $x>0$, $y'>0$,

deci pentru $x=o$, $y=a$ este un minimum.

x	y'	y
$-\infty$		∞
	$-$	des
0	0	a min
	$+$	cr
∞		∞

Curba e simetrică în raport cu axa Oy, căci punctele de abscisă x şi $-x$ au aceeaşi ordonată. Curba (Fig. 31) obţinută este poziţia de echilibru al unui fir greu fixat la cele două extremităţi şi se numeşte chaînette (lănţişor).

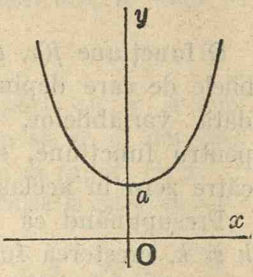


Fig. 31.

11. $y=e^{-x}\sin 2x$.

R. e^{-x} fiind totdeauna pozitivă, y se anulează numai pentru $2x=k\pi$, adică $x=o, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2},\ldots$ Cum $y'=\sin 2x.(-1)e^{-x}+e^{-x}2\cos 2x$, $y'=e^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)$, y' se anulează când $2\cos 2x=\sin 2x$, $\mathrm{tg}2x=2$: α fiind astfel ca $\mathrm{tg}2\alpha=2$, $\alpha>45^0$, $y'=o$ pentru arcele $2x=k\pi+2\alpha$, $x=k\frac{\pi}{2}+\alpha$, k fiind întreg. Valorile lui y pot fi calculate înmulţind ordonatele curbei $y=e^{-x}$ prin valorile lui $\sin 2x$ pentru abscisele corespunzătoare. Cum valorile lui $\sin 2x$ oscilează între -1 şi $+1$, valorile lui $e^{-x}\sin 2x$ nu pot întrece acelea ale lui e^{-x}.

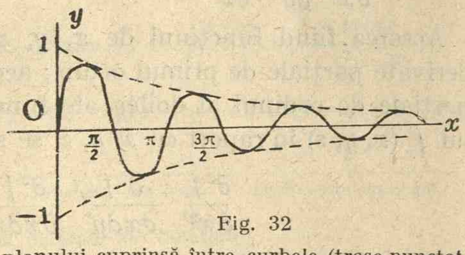


Fig. 32

Curba (Fig. 32) este deci situată în porţiunea planului cuprinsă între curbele (trase punctat) $y=e^{-x}$ şi $y=-e^{-x}$.

Funcţiuni de mai multe variabile.

110. Când într'o expresiune intră mai multe variabile x, y, z, care pot lua orice valori, se zice că acea expresiune este funcţiune de acele variabile şi se scrie

$$u=f(x, y, z).$$

De ex., volumul unui paralelipiped este funcţiune de cele trei dimensiuni x, y, z ale sale,

$$V = xyz.$$

O funcţiune $f(x, y)$ este continuă în raport cu variabilele de care depinde, când la o creştere foarte mică dată variabilelor, corespunde o creştere foarte mică pentru funcţiune, sau dacă creşterea funcţiunii tinde către zero în acelaşi timp cu creşterea variabilelor.

Presupunând că variabilelor x şi y le dăm creşterile h şi k, creşterea funcţiunii $u = f(x, y)$ este

$$\Delta u = f(x+h, y+k) - f(x, y).$$

111. Derivate parţiale. Se zice derivata parţială a unei funcţiuni $f(x, y, z)$ de mai multe variabile, derivata acestei funcţiuni în raport cu una din variabile, celelalte fiind considerate constante. Derivatele parţiale de ordinul întâi în raport cu x, y, z se notează cu f'_x, f'_y, f'_z, sau cu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Acestea fiind funcţiuni de x, y, z, pot admite şi ele derivate parţiale de primul ordin; acestea se zic derivate parţiale de ordinul al doilea ale funcţiunii f. Derivatele lui $f'_x(x, y, z)$ în raport cu x, y, z, se scriu f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{xz}, sau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}.$$

Tot asemenea, derivatele parţiale ale acestor derivate de ordinul al doilea se zic derivate parţiale de ordinul al treilea şi aşa mai departe.

De ex.,

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 5xy + 4x - 2y + 3,$$

avem

$$f'_x = 2.2x - 5y + 4 = 4x - 5y + 4,$$

$$f'_y = 2.3y - 5x - 2 = 6y - 5x - 2.$$

$$f''_{x^2} = 4, \quad f''_{xy} = -5, \quad f''_{y^2} = 6.$$

Se demonstrează, ceea ce se vede direct pe exemple, că o derivată parţială nu se schimbă, dacă se interverteşte ordinea derivării. In cazul de mai sus, se vede că

$$f''_{xy} = -5, \; f''_{yx} = -5,$$

adică se poate lua derivata în raport cu x şi apoi derivata acesteia în raport cu y, sau să se ia derivata întâi în raport cu y şi apoi derivata ei în raport cu x.

112. Exerciţii. 1. Să se calculeze derivatele parţiale în raport cu x, y, z ale funcţiunii

$$f(x,y,z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Egalând aceste derivate parţiale cu zero, se obţin trei ecuaţii omogene în raport cu x, y, z care au soluţii nu toate nule. Să se găsească apoi valori proporţionale pentru x, y, z.

R. Se arată că determinatul acestor ecuaţii omogene este zero, iar din două se abţin valorile proporţionale pentru x, y, z.

2. Să se calculeze derivatele parţiale în raport cu x şi y ale funcţiunii

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2}\, cos y + \sqrt{1-y^2}\, sin x.$$

R. $f'_x = \dfrac{-x cos y}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-y^2}\, cos x$, $f'_y = -\sqrt{1-x^2}\, sin y - \dfrac{y sin x}{\sqrt{1-y^2}}$.

3. $f(x, y, z) = tg(ax + by - cz) + tg(bx - cy + az) + tg(-cx + ay + br)$.

R. $f'_x = \dfrac{a}{cos^2(ax+by-cz)} + \dfrac{b}{cos^2(bx-cy+az)} - \dfrac{c}{cos^2(-cx+ay+br)}$.

4. Să se afle derivatele parţiale ale funcţiunii

$$y = \text{arctg}\, \frac{y}{x}.$$

R. $f'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f'_x = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

5. De asemenea pentru funcţiunea $y = \arcsin \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

R. $f'_x = \dfrac{\sqrt{2}}{x^2+y^2}\,\dfrac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\quad f'_y = -\dfrac{\sqrt{2}\, x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$

6. Să se afle derivatele parţiale ale funcţiunii

$$f(x,y)=\mathrm{L}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

R. $f'_x=\frac{a^2x}{a^2x^2+b^2y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{a^2},\ f'_y=\frac{b^2y}{a^2x^2+b^2y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{b^2}.$

7. Să se afle derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea a funcţiunii

$$f(x,y)=2x^3-3x^2y+xy^2-8y^3+5x^2-3xy+7x-2y+3.$$

113. Derivatele funcţiunilor compuse. Am văzut (Nr. 57, 58), cum se poate calcula derivata unei funcţiuni de o variabilă x obţinută combinând prin adunare, înmulţire şi împărţire alte funcţiuni u, v, w, de x, admiţând derivate. In ceea ce urmează, ne propunem a generaliza formulele găsite, pentru o funcţiune $y=f(u, v, w)$ obţinută prin o combinare oarecare a funcţiunilor u, v, w. Funcţiunea $y=f(u, v, w)$ este deci o funcţiune de x, prin intermediul funcţiunilor u, v, w, şi se zice că $f(u, v, w)$ este o *funcţiune compusă.*

Dând lui x o creştere Δx, rezultă pentru u, v, w creşterile Δu, Δv, Δw, iar pentru y creşterea Δy definită de egalitatea

$$y+\Delta y=f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta u),$$

de unde avem

$$\Delta y=f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)-f(u, v, w).$$

Aceasta se mai poate scrie

$$(1)\quad \begin{aligned}\Delta y=&f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u, v+\Delta v, w+\Delta w).\\&+f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u, v, w+\Delta w)\\&+f(u, v, w+\Delta w)-f(u, v, w).\end{aligned}$$

Dar, am văzut (Nr. 54) că pentru funcţiunea $F(x)$, avem

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)+\varepsilon,$$

$$(2) \qquad F(x+h)-F(x)=h[F'(x)+\varepsilon],$$

unde h este creşterea lui x, F' derivata în raport cu x a funcţiunii F, iar ε un număr foarte mic ce tinde către zero în acelaşi timp cu h.

Aplicând acest rezultat pentru expresia

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u, v+\Delta v, w+\Delta w),$$

unde numai u are creşterea Δu, care în (2) era h, rezultă

$$(3)\ f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u, v+\Delta v, w+\Delta w=\Delta u[f'_u+\varepsilon].$$

Avem de asemenea

$$(4) \qquad f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u, v, w+\Delta w)=\Delta v[f'_v+\varepsilon'],$$

căci aci v are creşterea Δv, iar ε' tinde către zero în acelaşi timp cu Δv.

In fine

$$(5) \qquad f(u, v, w+\Delta w)-f(u, v, w)=\Delta w[f'_u+\varepsilon''],$$

ε'' tinzând către zero în acelaşi timp cu Δw.

Inlocuind în (1) expresiunile (3), (4), (5) cu valorile lor, obţinem

$$\Delta y=\Delta u(f'_u+\varepsilon)+\Delta v(f'_v+\varepsilon)+\Delta w(f'_w+\varepsilon''),$$

unde împărţind cu Δx, avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}(f'_u+\varepsilon)+\frac{\Delta v}{\Delta x}(f'_v+\varepsilon')+\frac{\Delta w}{\Delta x}(f'_w+\varepsilon'').$$

Trecând la limită, când $\Delta x \to 0$, atunci

$$\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x,\ \lim\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'_x,\ \lim\frac{\Delta w}{\Delta x}=w'_x,\ \lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=y',$$

ε, ε', ε'' tind către zero şi astfel avem

$$y'=f'_v u'+f'_v v'+f'_w w',$$

care este derivata funcţiunii compuse $f(u, v, w)$ în raport cu x.

114. Formula lui Euler pentru funcţiunile omogene. Un polinom de mai multe variabile este omogen în raport cu aceste variabile, când gradul termenilor săi, în raport cu acele variabile, este acelaşi. De ex.,

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+z^4+y^4+z^4, \quad x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x+xyz$$

sunt polinoame omogene, primul de gradul al patrulea, ultimul de gradul al treilea.

Funcţiunea $ax+by+cz$ este forma generală a funcţiunilor liniare omogene. Funcţiunea

$$f(x, y, z)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2$$

este forma generală a funcţiunilor omogene de gradul al doilea de trei variabile x, y, z.

Inlocuind pe x, y, z cu tx, ty, tz, se vede că

$$(6) \qquad f(tx, ty, tz)=t^2f(x, y, z),$$

care este proprietatea caracteristică a unei funcţiuni omogene de gradul 2. In cazul unui polinom de gradul m, exponentul 2 al lui t^2 este m.

Insemnând cu $u=tx$, $v=ty$, $w=tz$, se vede că $f(tx, ty, tz)=f(u, v, w)$ este o funcţiune de t prin intermediul lui u, v, w, Deci derivata sa în raport cu t este

$$(7) \qquad f'_u u'+f'_v v'+f'_w w'=f'_u x+f'_v y+f'_w z.$$

Luând şi derivata în raport cu t a membrului al doilea $t^2f(x, y, z)$ din (6), obţinem

$$(8) \qquad 2tf(x, y, z).$$

Egalând aceste derivate (7) şi (8), căci şi funcţiunile au fost egale, cum se vede din (6), obţinem

$$f'_u x+f'_v y+f'_w z=2tf(x, y, z).$$

Făcând în această expresie $t=1$, u, v, w devin x, y, z şi avem

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=2f(x,\ y,\ z),$$

care este formula lui Euler relativă la funcţiunile omogene. In cazul unui polinom omogen de gradul m, avem

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=mf(x,\ y,\ z).$$

115. *Exemple.* 1. $y=u^v$, u şi v fiind funcţiuni de x. Avem

$$y'=y'_u\,u'_x+y'_v\,v'_x,$$

$$y'=vu^{v-1}u'+(u^v\mathrm{L}u)v'=u^v\left(\frac{v}{u}u'+v'\mathrm{L}\,u\right)\cdot$$

2. $y=(\operatorname{arctg}x)^{\mathrm{L}x}$. Punând $u=\operatorname{arctg}x$, $v=\mathrm{L}x$, avem $y=u^v$,

$$y'=vu^{v-1}u'+(u^v\mathrm{L}u)v',\quad u'=\frac{1}{1+x^2},\quad v'=\frac{1}{x},$$

şi înlocuind, avem

$$y'=(\operatorname{arctg}x)^{\mathrm{L}x}\left[\frac{\mathrm{L}x}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}+\frac{1}{x}\mathrm{L}(\operatorname{arctg}x)\right]\cdot$$

3. $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}\cdot$

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}\left[-\frac{\operatorname{tg}x}{x}+\frac{1}{\cos^2x}L\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}\left[-\frac{\operatorname{tg}x}{x}+\frac{1}{\cos^2x}\left(-\mathrm{L}x\right)\right]$$

$$y'=-\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}\left[\frac{\operatorname{tg}x}{x}+\frac{\mathrm{L}x}{\cos^2x}\right]\cdot$$

4. $y=\operatorname{tg}(ax+b)^{x^2}$, Se pune $z=(ax+b)^{x^2}$, $y=\operatorname{tg}z$, $y'=\frac{1}{\cos^2z}z'$,

$$y'=\frac{1}{\cos^2(ax+b)^{x^2}}\left[(ax+b)^{x^2}\right]\left[\frac{x^2}{ax+b}a+2\,x\,\mathrm{L}(ax+b)\right],$$

$$y'=\frac{x(ax+b)^{x^2}}{\cos^2(ax+b)^{x^2}}\left[\frac{ax}{ax+b}+\mathrm{L}(ax+b)^2\right]\cdot$$

5. $y=\operatorname{arctg}\frac{2uv}{u^2-v^2}$, Se pune $z=\frac{2uv}{u^2-v^2}$; $y=\operatorname{arctg}z$, $y'=\frac{z'}{1+z^2}$,

$$y'=2\frac{uv'-vu'}{u^2+v^2}.$$

6. $y=\arcsin\frac{2\sqrt{uv}}{u+v}$, $y'=\frac{uv'-vu'}{(u+v)\sqrt{uv}}$.

7. Fiind dată $y=u\,v\,w$, să se calculeze $\frac{y'}{y}$.

R. Se aplică logaritmii și avem $Ly=Lu+Lv+Lw$, apoi se ia derivata în raport cu x,

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}.$$

116. Derivata unei funcțiuni implicite. Ecuația $f(x, y)=0$, ce nu se poate rezolva în raport cu x, definește o funcțiune implicită y de x, adică $y=f(x)$. Pentru a calcula derivata în raport cu x a acestei funcțiuni implicite, să luăm derivata în raport cu x a funcțiunii compuse $f(x, y)=0$, ce depinde de x prin intermediul funcțiunilor $u=x$, $v=y$.

Avem

$$f'_x x'+f'_y y'=0,\quad x'=1,\quad f'_x+f'_y y'=0,$$

relație de unde aflăm derivata y' în raport cu x a funcțiunii implicite,

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Derivata y' este coeficientul unghiular al tangentei în punctul (x, y) la curba $f(x, y)=0$.

117. *Exemple.* 1. Derivata funcțiunei implicite y definită de ecuația

$$f(x,y)=x^2+y^2-R^2=0$$

este

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$$

2. $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$; $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$; $y^2-2px=0.$

$$y'=\frac{-b^2x}{a^2y}\ ;\ y'=\frac{b^2x}{a^2y}\ ;\ y'=\frac{p}{y}.$$

3. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0$; $y'=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}.$

4. $x^3+y^3-3\,a\,x\,y=0$; $y'=-\dfrac{x^2-ay}{y^2-ax}.$

5. $e^{\frac{x-y}{y}}-x=0$; $y'=\dfrac{y(x-y)}{x^2}$, se observă că $e^{\frac{x-y}{y}}=x.$

6. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+xy=0$; $y'=\dfrac{y(1-x^2-y^2)}{x(1+x^2+y^2)}.$

118. Expresiuni nedeterminate. După cum am mai întâlnit (Nr. 45), unele exemple simple, sunt cazuri când expresiuni date au, pentru anumite valori ale variabilelor, formele

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 0^{\infty},\ 1^{\infty},\ \infty^0.$$

Se pot căuta limitele acestor expresiuni cu ajutorul derivatelor.

I. **Forma** $\dfrac{0}{0}$. De ex., dacă funcțiunile $f(x)$ și $g(x)$ se anulează pentru $x=a$, atunci raportul $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ pentru $x=a$ are forma $\dfrac{f(a)}{g(a)}=\dfrac{0}{0}$. Pentru a găsi limita acestei expresii, ne servim de relația (Nr. 54).

$$f(a+h)-f(a)=h\left[f'(a)+\varepsilon\right],$$

unde h tinde către zero în același timp cu ε. Cum $f(a)=0$, avem

$$f(a+h)=h\left[f'(a)+\varepsilon\right].$$

De asemenea

$$g(a+h)=h\left[g'(a)+\varepsilon'\right],$$

şi deci

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{h\left[f'(a)+\varepsilon\right]}{h\left[g'(a)+\varepsilon'\right]}=\frac{f'(a)+\varepsilon}{g'(a)+\varepsilon'}.$$

Când facem $h=0$, avem

$$\lim \frac{f(a)}{g(a)}=\lim \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

Deci

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

adică *limita raportului a două funcţiuni ce devin nule pentru o valoare a variabilei, este egală cu limita raportului derivatelor acelor funcţiuni.*

Aceasta se zice regula lui *Hospital.*

119. *Exemple*. 1. Limpita expresii $y=\frac{x^m-a^m}{x-a}$ pentru $x=a$. Avem

$$\lim y=\lim \frac{mx^{m-1}}{1}=ma^{m-1}.$$

2. *Limita pentru $x\to 0$ a a expresii*

$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}.$$

Fiind de forma $\frac{0}{0}$, luăm raportul derivatelor numărătorului şi numitorului,

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2x},$$

care, pentru $x\to 0$, fiind tot de forma $\frac{0}{0}$, căutăm limita raportului a derivatelor termenilor fracţii, şi avem

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

care, pentru $x \to 0$, este

$$\frac{1+1}{2}=1.$$

Să se afle limitele expresiunilor

3. $\dfrac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}$ pentru $x=0$ R. $\dfrac{1}{6}$

4. $\dfrac{a^{x}-b^{x}}{x}$ pentru $x=0$. R. $L\dfrac{a}{b}$.

5. $\dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}$ pentru $x=0$. R. 0

6. $\dfrac{x^{2}-x}{1-x-\mathrm{L}x}$ pentru $x=1$ R. $-\dfrac{1}{2}$

7. $\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ pentru $x=0$. R. 2.

8. $\dfrac{\mathrm{L}(1+x)-x}{x^{2}}$ pentru $x=0$. R. $-\dfrac{1}{2}$

9. $\dfrac{\sqrt{x^{2}+ax+a^{2}}-\sqrt{x^{2}-ax+a^{2}}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ pentru $x=0$. R. $\sqrt{a}$

120. Observare. *Regula lui Hospital* (se citeşte Hopital), *se aplică chiar când nedeterminarea are loc pentru* $x=\infty$. In adevăr, dacă $f(x)$ și $g(x)$ se anulează pentru $x \to \infty$, putem face schimbarea de variabilă

$$x=\frac{1}{u}$$

și se vede că dacă $x \to \infty$, atunci u tinde către zero. Deci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)},$$

şi se poate aplica regula de mai sus ultimului raport, care este de forma $\dfrac{0}{0}$ pentru $u=0$. Dar $f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ și $g\left(\dfrac{1}{u}\right)$ sunt funcţiuni de funcţiune în raport cu u şi deci aplicând raportul derivatelor, avem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{u\to o}\frac{-\frac{1}{u^2}f'\left(\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u^2}g'\left(\frac{1}{u}\right)}=\lim_{u\to o}\frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplu. Limita pentru $n\to\infty$ a expresii

$$y=\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{a^{\frac{p+1}{n}}-1}$$

fiind de forma $\frac{0}{0}$ (variabila este n), aplicând limita raportului derivatelor, avem

$$\lim y=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}a^{\frac{1}{n}}La}{-\frac{p+1}{n^2}a^{\frac{p+1}{n}}La}=\frac{1}{p+1}.$$

121. Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Să presupunem că funcţiunile $f(x)$ şi $g(x)$ devin infinite pentru $x=a$. Limita raportului $\frac{f(x)}{g(x)}$ poate fi sau o valoare finită l, sau zero, sau ∞.

1⁰ Fie că

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

Avem

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

şi cum $f(x)$ şi $g(x)$ devin ∞ pentru $x=a$, atunci inversele lor $\frac{1}{g(x)}$ şi $\frac{1}{f(x)}$ devin 0, astfel că raportul y se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ şi i se poate aplica regula lui Hospital. Avem deci la limită pentru $x=a$

$$\lim y = \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}},$$

$$\lim y = \lim \frac{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2}{\frac{f'(x)}{g'(x)}}, \quad l = \frac{l^2}{\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}}, \quad l = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Deci regula lui Hospital se aplică și în acest caz.

2^0 Când limita l a raportului este zero, să considerăm expresiunea

$$z = k + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{kg(x) + f(x)}{g(x)},$$

unde k este un număr finit. Această expresie la limită e de forma $\frac{\infty}{\infty}$, dar are limita k finită, căci $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Suntem deci ca în cazul precedent 1^0, deci se poate aplica limita raportului derivatelor. Avem

$$\lim z = k = \lim \frac{kg'(z) + f'(x)}{g'(x)},$$

$$k = k + \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad 0 = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

adică limita căutată care este zero este egală cu limita raportului derivatelor, astfel că

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

și deci regula lui Hospital se aplică și când limita este zero.

3^0 Când limita $l \to \infty$, atunci limita raportului invers

$\frac{g(x)}{f(x)}$ este $\frac{1}{\infty}$ adică 0, și deci suntem în cazul precedent

2^0, când limita este zero și aplicând regula de mai sus, avem

$$0 = \lim \frac{g(x)}{f(x)} = \lim \frac{g'(x)}{f'(x)},$$

de unde urmează

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty = \lim_{x \to v} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prin urmare în toate cazurile, când o expresie se prezintă sub forma $\frac{\infty}{\infty}$, se aplică regula lui Hospital,

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Se poate arăta că aceasta are loc și când limita se caută pentru $x \to \infty$, ca și pentru valori finite ale lui x.

122 *Exemple*. 1. Limita expresii $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$ pentru $x = \frac{\pi}{2}$. Cum este de forma $\frac{\infty}{\infty}$, avem

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} = \frac{1}{3}\left[\lim \frac{\cos 3x}{\cos x}\right]^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\lim \frac{-3\sin 3x}{-\sin x}\right)^2 = \frac{1}{3} 9 = 3.$$

2. Limita expresii $y = \frac{L(1+x^3)}{x^2}$ pentru $x \to \infty$. Avem

$$\lim y = \lim \frac{\frac{3x^2}{1+z^3}}{2x} = \lim \frac{3x}{2(1+x^3)} = \lim \frac{3}{2.\,3x^2} \to 0.$$

3. Limita pentru $x \to \infty$ a expresii $y = \dfrac{a^x}{x^3}$. Avem

$$\lim y = \lim \frac{a^x La}{3x^2} = La \lim \frac{a^x La}{6x} = (La)^2 \lim \frac{a^x La}{6} \to \infty.$$

123. Forma $0.\infty$. Când o expresie $y = f(x)g(x)$ se prezintă pentru $x = a$ sub această formă, se aduce sau la forma $\frac{0}{0}$, scriind-o $\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$, sau la forma $\frac{\infty}{\infty}$ scriind-o $\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ şi apoi se aplică regula lui Hospital.

124. *Exemple.* Să se afle limitele expresiunilor

1. $y = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$ pentru $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

E de forma $0.\infty$; se poate scrie $y = \dfrac{x - \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} = \dfrac{x - \dfrac{\pi}{2}}{\operatorname{cotg} x}$,

$$\lim y = \lim \frac{1}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}} = -\lim \sin^2 x = -\sin^2 \frac{\pi}{2} = -1.$$

2. $y = x e^{\frac{1}{x}}$ pentru $x = 0$. R. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\dfrac{1}{x}}$; ∞.

3. $y = xLx$ pentru $x = 0$. R. $y = \dfrac{Lx}{\dfrac{1}{x}}$; 0.

125. Forma $\infty - \infty$. Când două funcţiuni $f(x)$ şi $g(x)$ devin infinite pentru o valoare $x = a$ a variabilei, atunci expresiunea $y = f(x) - g(x)$ are forma $\infty - \infty$. Limita acestei expresii se află scriind-o $y = f(x) \left[1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$ şi căutând limita expresiei $\frac{g(x)}{f(x)}$ care se prezintă sub forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se pot prezenta două cazuri.

1⁰ $\lim \frac{g(x)}{f(x)} = 1$. Atunci y are forma $\infty . 0$, pe a cărei limită știm a o găsi.

Exemplu. $y = \cot g x - \frac{1}{x}$ pentru $x = 0$ are forma $\infty - \infty$. Avem

$f(x) = \cot g x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $y = \cot g x \left(1 - \frac{1}{x \cot g x}\right) = \cot g x \left(1 - \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$.

Căutăm

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 1, \text{ astfel că } y \text{ este de forma } \infty . 0.$$

Deci

$$\lim y = \lim \frac{1 - \frac{\operatorname{tg} x}{x}}{\frac{1}{\cot g x}} = \lim \frac{x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \lim \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x \cos x + x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1} = 0,$$

astfel că expresiunea dată tinde către zero când x tinde către 0.

2⁰ Când $\lim \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, atunci $y = f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$ este la limită produsul limitei lui $f(x)$ care este foarte mare, cu o câtime finită $\lim \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$, astfel că limita expresiei date este foarte mare.

126. Exerciții. 1. $y = e^x - x$ pentru $x = \infty$.

R. $y = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$, $\lim \frac{e^x}{x} \to \infty$, $\lim y = \infty$. Se mai putea scrie și $y = e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$, $\lim \frac{x}{e^x} \to 0$, $\lim y = \infty . 1 = \infty$.

2. $y=2x-\sqrt{4x^2-3x+1}$ pentru $x\to\infty$.

R. $\lim y$ este de forma $\infty-\infty$. Avem

$$y=u-v=\frac{u^2-v^2}{u+v}=\frac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2-3x+1}\right)^2}{2x+\sqrt{4x^2-3x+1}}=\frac{3x+1}{2x+\sqrt{4x^2-3x+1}}.$$

Gradele numărătorului și numitorului în x fiind egale cu 1, împărțind ambii termeni cu x, avem

$$y=\frac{3+\frac{1}{x}}{2+\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}},\quad \lim y=\frac{3}{4},\text{ căci } \lim\frac{1}{x^p}\to 0,\ p>0.$$

A se vedea exercițiul dela No. 48. In cazuri analoage este mai bine a se urma acest procedeu, decât cel expus în teoria de mai sus.

3. $y=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}$ pentru $\to\infty$.

R. ∞.

4. $y=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{Lx}$ pentru $x=1$.

R. y este de forma $\infty-\infty$. Este bine a se efectua calculele

$y=\dfrac{xLx-x+1}{(x-1)Lx}$, ce are forma $\dfrac{0}{0}$ și se aplică regula lui Hospital,

$$\lim y=\lim\frac{Lx}{Lx+\frac{x-1}{x}}=\lim\frac{nLx}{xLx+x-1};\ \frac{1}{2}.$$

5. $y=\dfrac{1}{x}+Lx$ pentru $x=0$.

R. y e de forma $\infty-\infty$, căci $L0=-\infty$. Se poate scrie

$y=\dfrac{1+xLx}{x}$, se caută $\lim xLx=\lim\dfrac{Lx}{\frac{1}{x}}=0$, deci $\lim y=\dfrac{1}{0}\to\infty$.

12'. Formele 0^0, ∞^0 și 0^∞ se aduc la acele studiate, aplicând logaritmul neperian expresii y, ce are una din aceste forme şi apoi se caută $\lim y$, şi pe urmă se revine la y.

Exemple. 1. $y=(\sin x)^{\sin x}$ pentru $x=0$.

R. $Ly = \sin x \, L\sin x$, $0.(-\infty)$,

$$\lim Ly = \lim \frac{L\sin x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim(-\sin x) = 0, \ \lim Ly = 0, \ \lim y = 1.$$

2. $y = x^{\frac{1}{x}}$ pentru $x \to \infty$.

R. ∞^0, $Ly = \frac{1}{x} Lx$; $\lim Ly =$ $\lim y = 1$.

3. $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ pentru $x \to \infty$.

R. 0^{∞}; $Ly = xL\frac{1}{x}$, $\lim Ly = \infty.(-\infty) = -\infty$, $\lim y = 0$.

128. **Forma 1^{∞}.** Dacă o expresie $y=u^v$ devine de forma 1^{∞}, am văzut (Nr. 98), că $\lim y = e^{\lim (u-1)v}$. Se caută $\lim (u-1)v$ şi apoi $\lim y$ e cunoscută.

Exemple. Să se afle limitele expresiilor

1. $y=(1-\sin x)^{\operatorname{cotg} x}$ pentru $x = 0$. R. e^{-1}.

2. $y=(\sin x + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$ „ $x = \frac{\pi}{2}$. R. e.

3. $y = \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$ „ $x = a$. R. $e^{\frac{2}{\pi}}$.

4. $(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ „ $x = 0$. R. $e^{-\frac{1}{2}}$.

5. $x^{L(x-1)}$ „ $x = 1$. R. 1.

6. $n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ când $n \to \infty$.

R. Se notează $y = n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, de unde $\left(1+\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = a$, $a = e^{\lim y}$, $\lim y = La$.

7. $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ pentru $n \to \infty$.

R. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ tinde către 1 când $n \to \infty$. E de forma u^v, lim $u=1$, lim $v=\infty$.

$$(u-1)v = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}-1\right)n+\left(\sqrt[n]{b}-1\right)n}{2}\text{; cum}$$

m$\left(\sqrt[n]{a}-1\right)n = \mathrm{L}a$, $\lim(u-1)v = \dfrac{\mathrm{L}a+\mathrm{L}b}{2} = \mathrm{L}\sqrt{ab}$, iar limita expresii date este $e^{\lim(u-1)v} = \sqrt{ab}$.

129. Aplicaţie. *Variaţia funcţiunii*

$$y = x + \frac{3x^2-x}{2(1+x^2)} - \tfrac{3}{2}\,\mathrm{L}(1+x^2) - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

R. $y' = \dfrac{x^2(x-1)(x-2)}{(1+x^2)^2}$, semnul îl dă numai $(x-1)(x-2)$; y creşte dela $-\infty$ la $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{L}\,2-\frac{1}{2}$aıctg1, descreşte până a $3-\frac{3}{2}\mathrm{L}\,5-\frac{1}{2}$ artg2, apoi creşte până la $+\infty$.

APLICAŢII LA CINEMATICĂ.

130. *Cinematica* este acea parte a Mecanicei, care studiază mişcarea corpurilor, fără să se ţie seamă de cauzele care au produs acea mişcare. In cinematică intervin două unităţi fundamentale: unitatea de lungime şi unitatea de timp, care sunt centimetru şi secunda. Durata timpului este evaluată dela un moment determinat, numit originea timpului, sau timpul zero. Timpul t este pozitiv sau negativ, după cum momentul considerat este posterior sau anterior momentului iniţial (originei).

Un corp poate fi considerat ca format dintr'un sistem de puncte materiale. De aceea, se începe în Cinematică cu studiul mişcării unui punct material, sau a unui mobil.

131. Traectorie. Ecuaţia mişcării. Drumul (spaţiul s) descris de un punct material în mişcare se zice traectoria acelui punct. Mişcarea este rectilinie sau curbilinie, după cum traectoria sa este o linie dreaptă sau curbă.

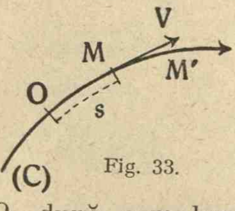


Fig. 33.

Poziţia unui punct M pe traectoria sa (Fig. 33), este o cunoscută, dacă se ştie lungimea arcului $OM=s$ socotită dela un punct fix O al curbei numit originea spaţiilor. Punctul M va fi la dreapta sau la stânga lui O, după cum lungimea arcului OM este un număr pozitiv sau negativ.

Socotind timpul t dela o origine dată, să presupunem că M (Fig. 33) este poziţia mobilului la timpul t pe traectoria sa. Cum la altă valoare a lui t corespunde o altă poziţie determinantă pe curbă (traectorie), după o lege anumită, rezultă că spaţiul $s=OM$ descris de mobil este o funcţiune $f(t)$ de timpul t. Relaţia $s=f(t)$ se zice ecuaţia mişcării mobilului pe traectoria sa. Această relaţie ne arată cum se mişcă mai repede sau mai încet mobilul pe curbă la diferite momente, şi nu are nici o legătură cu forma curbei, care poate fi linie dreaptă sau o curbă aşezată într'un plan, sau curbă strâmbă în spaţiu. De aceea vom presupune că mişcarea reprezentată de ecuaţia $s = f(t)$ se face o linie dreaptă.

132. Schimbarea originei spaţiilor. Schimbarea originei timpurilor. Este uneori nevoe de a schimba originea spaţiilor, adică cunoscând poziţiile diferitelor puncte în raport cu originea O de pe traectorie (linia dreaptă, axa Os) (Fig. 34), ne propunem a calcula poziţiile aceloraşi puncte faţă de altă origine, alt punct O' al traectoriei luat ca nouă origine. Este evident că trebue a cunoaşte poziţia punctului O' în raport cu punctul O, adică trebue să ştim lungimea $OO'=d$.

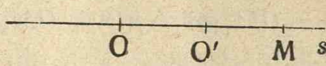


Fig. 34.

Să însemnăm cu $s=OM$ abscisa punctului M în raport cu originea O şi cu $s'=O'M$ abscisa aceluiaşi punct în raport cu originea O'. Avem

$$OM=OO'+O'M, \quad s=d+s', \quad s'=s-d,$$

adică abscisa unui punct M în raport cu noua origine O' este egală cu abscisa lui M în raport cu vechea origine O, din care se scade abscisa originei cea nouă în raport cu cea veche.

Şi pentru timpuri este uneori nevoe a schimba originea. Raţionând la fel, se vede că însemnând cu t, epoca (timpul) unui eveniment socotit dela o origine O și cu t' epoca (timpul) aceluiași eveniment socotit dela o origine nouă O', a cărui epocă în raport cu originea O este t_0, se vede că

$$t=t_0+t', \quad t'=t-t_0.$$

adică epoca t' a unui eveniment în raport cu noua origine, este egală cu epoca sa t în raport cu cea veche, micșorată cu epoca t_0 a originei cea nouă în raport cu cea veche. De ex., dacă socotim orele dela 0 la 12, când zicem că este ora 7 seara, înseamnă că socotim timpul dela amiază când este ora 12, și au trecut 7 ore, iar când măsurăm timpul dela miezul nopții (când este ora zero), atunci avem ora $7+12=19$ ore, au trecut 19 ore; deci $7=19-12$, unde $t=19$, $t'=7$, $t_0=12$.

133. Vitesă. Să considerăm mișcarea $s=f(t)$ ce se face pe dreapta Os (Fig. 35) și fie M_1 și M_2 pozițiile mobilului la timpurile t_1 și t_2 $(t_2>t_1)$, adică

$$OM_1=s_1=f(t_1), \quad OM_2=s_2=f(t_2).$$

Spațiul descris de mobil în timpul t_2-t_1 este $\overline{OM_2}-\overline{OM_1}=\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_2}=s_2-s_1=f(t_2)-f(t_1)$.

Se zice *vitesă mijlocie* în timpul t_2-t_1, raportul

$$\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1},$$

adică raportul dintre spațiul descris și timpul în care a fost descris.

Vitesă la momentul t. Dacă M și M' (Fig. 35) sunt pozițiile mobilului la momentele t și $t+\Delta t$, spațiul descris de mobil în timpul $t+\Delta t-t=\Delta t$, este $MM'=OM'-OM=f(t+\Delta t)-f(t)=\Delta s$. Să ducem pe Os, începând dela M, și în sensul MM' o lungime MV egală cu

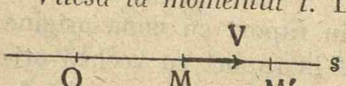


Fig. 35.

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Vectorul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ este vitesa mijlocie a mobilului M în intervalul de timp Δt. Presupunând că Δt tinde către zero, și că funcțiunea $f(t)$ admite o derivată în raport cu t, atunci vitesa la momentul t este dată de relația

$$v=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=f'(t),$$

adică vitesa este derivata spațiului în raport cu timpul.

In cazul mișcării rectilinii, vectorul vitesă este îndreptat după dreapta pe care se face mișcarea, în sensul mișcării. In mișcarea unui mobil M (Fig. 33) pe o curbă (C), M' fiind un punct infinit vecin de M, vitesa este limita raportului $\frac{MM'}{\Delta t}$, adică $\frac{ds}{dt}$. Dar MM' tinde către tangenta în M la curba (C), astfel că vitesa MV în acest caz este îndreptată dealungul tangentei în M la traectorie, în sensul arcelor crescătoare.

De ex., în cazul mișcării $s=2t+3$, vitesa v la momentul t este egală cu $v=2$. Pentru $s=at+b$, a și b constante, $v=a$. Când $s=3t^2-5t+2$, vitesa $v=6t-5$.

13. **Mișcare uniformă** este *aceea în care vitesa v este constantă.*

I. Dacă $v=$const., pentru a găsi ecuația mișcării $s=f(t)$, trebue să căutăm o funcțiune a cărei derivată în raport cu timpul să fie o constantă v. Această funcțiune de t este

$$f(t)=vt+s_0,$$

s_0 fiind o constantă, de oarece derivata ei în raport cu timpul este v. Deci ecuația mișcării uniforme este

$$s=vt+s_0,$$

o funcțiune liniară (de gradul întâi) în raport cu timpul t.

Făcând pe $t=0$, adică socotind spaţiul la originea timpului, avem $s=s_0$; deci s_0 din ecuaţia mişcării este spaţiul la momentul iniţial, iar dacă M_0 este punctul cu abscisa $OM_0=s_0$ rezultă că M_0 este poziţia punctului pe traectorie la momentul iniţial (originea timpului).

Coeficientul v este vitesa în această mişcare uniformă. Considerând poziţiile M_1 şi M_2 a mobilului la momentele t_1 şi t_2, avem

$$\overline{OM_2}=s_2=vt_2+s_0,$$

$$\overline{OM_1}=s_1=vt_1+s_0,$$

de unde urmează

$$\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_1}=v(t_2-t_1),$$

$$\frac{M_1M_2}{t_2-t_1}=v=\text{const.},$$

adică raportul dintre spaţiul descris M_1M_2 şi timpul t_2-t_1 în care a fost descris este constant şi egal cu vitesa v, deci în mişcarea uniformă în timpuri egale se descriu spaţii egale. Sau vitesa este cantitatea cu care creşte spaţiul în unitata de timp.

Ecuaţia redusă a mişcării uniforme. Ecuaţia $s=vt+s_0$ se poate scrie $s-s_0=vt$. Să luăm ca origine a spaţiului poziţia mobilului la momentul iniţial $t=o$ când spaţiul este egal cu s_0. Insemnând cu S şi T spaţiul şi timpul în raport cu aceste origini, avem

$$S=s-s_0, \quad T=t,$$

astfel că ecuaţia mişcării uniforme în raport cu aceste noui origini este

$$S=vT,$$

sau cu aceleaşi litere s şi t, se poate scrie $s=vt$.

II. *Diagrama spaţiilor. Diagrama vitesei.* Se poate urmări cu uşurinţă o mişcare, dacă se face reprezentarea grafică a ecuaţii mişcării, care se zice diagrama spaţiilor.

135. *Exemple.* 1. $s=2t-3$. Luăm două axe perpendiculare $0t$ şi $0s$, şi figurăm valorile timpului t pe axa $0t$, reprezentând o secundă printr'un centimetru. Valorile spaţiului să le figurăm pe axa Os, reprezentând un metru printr'un centimetru. Pentru construcţia dreptei reprezentată de ecuaţia $s=2t-3$, facem întâi $t=0$, şi găsim punctul $B(0,-3)$ (Fig. 36) unde tae axa $0s$; făcând $s=0$, avem punctul $A(\frac{3}{2},0)$ unde tae axa $0t$. Diagrama spaţiilor este dreapta AB.

Această reprezentare ne înlesneşte studiul mişcării, permiţând să determinăm grafic spaţiul descris de mobil la un moment dat. De ex., la timpul $t=3$ sec, spaţiul este $s=CD=3$.

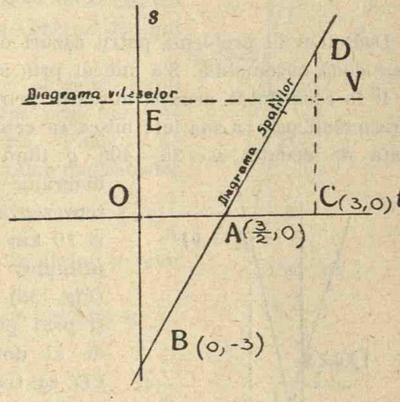


Fig. 36.

Diagrama viteselor este dreapta reprezentată de ecuaţia $v=2$. Figurăm vitesele pe axa Os, reprezentând vitesa de 1 m pe secundă, 1m/s, cu un centimetru. Diagrama vitesei este dreapta EV (Fig. 36) paralelă cu $0t$. In triunghiul ACD, avem $CD=3$, $AC=OC-OA=3-1,5=1,5$,

$$CD=AC\mathrm{tg}CAD,\ 3=1,5\mathrm{tg}CAD,\ \mathrm{tg}CAD=\frac{3}{1,5}=2,$$

ceeace trebuia, căci 2 din ecuaţia $s=2t-3$ a dreptei AB este coeficientul unghiular sau panta acestei drepte. Deci tangenta unghiului CAD, sau panta dreptei AB, se exprimă prin acelaşi număr ca şi vitesa v a mobilului.

2. *Să se studieze, cu ajutorul diagramelor, mişcarea a două automobile care parcurg aceeaşi linie dreaptă cu vitese constante de* 60 *km. şi* 40 *km pe oră. Distanţa dintre ele la momentul iniţial este de* 25 *km. Să se determine grafic momentul întâlnirii lor şi spaţiile parcurse de fiecare din ele.*

Fie O (Fig. 37) staţia în care se găseşte primul automobil la momentul iniţial şi O′ staţia unde se găseşte al doilea automobil la acelaşi moment. Luăm originea spaţiilor în O şi sensul pozitiv al axei dela O la O′ (Fig. 37).

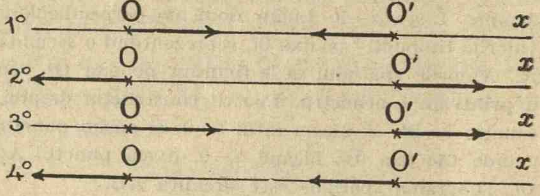


Fig. 37.

Deosebim în problemă patru cazuri după direcţia în care se mişcă cele două automobile. S'a indicat prin săgeţi pe figură aceste sensuri.

1^0 In cazul întâi, ecuaţia mişcării primului automobil este $x=60t$, însemnând prin x spaţiul; mişcarea celui de al doilea automobil este dată de ecuaţia $y=25-40t$, y fiind spaţiul. Pentru a construi diagrama spaţiilor celor două automobile, reprezentăm o oră prin un centimetru şi 10 km prin un centimetru. Diagrama primului automobil este dreapta OA (Fig. 38) ce trece prin originea axelor şi prin punctul A(1,6). Diagrama celui de al doilea automobil este dreapta CD ce trece prin punctul C (1 ;—1,5) şi D(0 ;2,5). Coordonatele punctului I $\left(\frac{1}{4}; 1,5\right)$ de intersecţie a celor două drepte $x=60t$, $x=25-40t$, ne dă momentul $t=\frac{1}{4}$ oră şi distanţa $x=15$ km

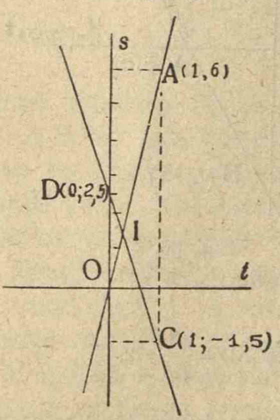


Fig. 38.

de întâlnire a celor două automobile. Tabloul ce urmează rezumă mişcarea automobilelor.

t	$-\infty$		0	$\frac{1}{4}$		$+\infty$
x	$-\infty$	mişcare	0	15	directă	$+\infty$
y	$+\infty$	mişcare	25	15	retrogradă	$-\infty$

2^0 In cazul acesta ecuaţiile de mişcare a celor două automobile sunt $x=-60t$, $y=25+40t$. Se observă numai decât că dacă în aceste ecuaţii punem $t=-t'$ ele devin identice cu ecuaţiile din primul caz. Deci cazul 1^0 şi 2^0 diferă numai prin sensul în care a fost socotit timpul. De ex., în acest caz automobilele s'au întâlnit la timpul $t=-\frac{1}{4}$ ore în punctul depărtat cu $x=15$ km. Diagramele acestui caz se deduc din cazul întâi luând Ot ca sens negativ.

3^0 Ecuaţiile de mişcare în acest caz sunt $x=60t$, $y=25+40t$. Diagramele le figurăm păstrând aceeaşi scară ca în cazul întâi. Diagrama mişcării primului automobil este aceeaşi dreaptă OA ca în cazul 1^0 (Fig. 39).

Diagrama mişcării celui de al doilea automobil este dreapta $C\dot{D}$ ce trece prin punctele C(1 ; 6,5) şi D(0 ; 2,5) (Fig. 39). Punctul de întâlnire I (1,25 ; 7,5) al dreptelor diagramelor $x=60t$, $x=25+40t$, ne dă momentul $t=1\frac{1}{4}$ ore şi distanţa $x=75$ km de întâlnire a celor două automobile.

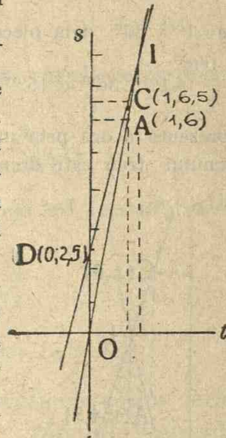


Fig. 39.

Tabloul ce urmează ne rezumă mişcarea.

t	$-\infty$		0	$1\frac{1}{4}$		$+\infty$
x	$-\infty$	mişcare	0	75	directă	$+\infty$
y	$-\infty$	mişcare	25	75	directă	$+\infty$

4^0 In acest caz mişcarea este dată de ecuaţiile $x=-60t$ $y=25-40t$ Cazul acesta se reduce la cazul 3^0, în acelaşi mod, cum am redus cazul 2^0 la cazul 1^0.

3. *Un tren pleacă din staţia* O *către staţia* O′ *la* $14\frac{1}{4}$ *ore. Un al doilea tren pleacă din* O′ *către* O *cu c oră mai târziu decât primul tren. Ambele trenuri au o mişcare uniformă, primul parcurgând distanţa* OO′=90 *km în* 2 *ore şi al doilea în* 3 *ore. Să se afle ora de întâlnire a celor două trenuri. Să se reprezinte diagramele de mişcare.* Se ia dreapta OO′ ca axa Ox originea fiind în O şi sensul pozitiv dela O către O′. Se ia deasemenea originea timpului în momentul plecării primului tren. Timpul îl socotim în ore şi spaţiul în kilometri. Mişcarea primului tren este dată

de ecuaţia $x=45t$, căci la momentul zero el se găseşte în O, iar vitesa lui este 45 km/oră. Ecuaţia mişcării trenului al doilea este $y=-30t+120$ căci el are vitesa 30 km/oră, iar pentru $t=1$ avem $y=90$ km. Intâlnirea celor două trenuri este dată de $45t=-30t+120$ şi este la $t=\frac{8}{5}$ ore$=1^{\text{oră}}\ 36^{\text{m}}$ dela plecarea primului tren. Ora de întâlnire este deci $14\frac{1^{\text{ore}}}{4}+1^{\text{oră}}\ 36^{\text{m}}=15^{\text{ore}}\,51^{\text{m}}$. Pentru a construi diagramele, vom reprezenta o oră prin un centimetru şi 10 km prin 1 cm. Diagrama primului tren este dreapta OA (Fig. 40), care trece prin punctul A (1 ; 4,5). Diagrama trenului al doilea este dreapta BC care trece prin punctele B(4 ; 0) şi C(1 ; 9) Coordonatele punctului $I\left(\frac{8}{5}\,;7{,}2\right)$ ne dau momentul şi distanţa întâlnirei trenurilor.

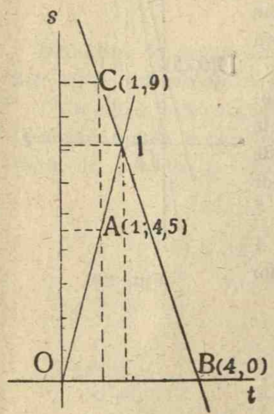


Fig. 40.

4. *Un mobil* M *plecând din* O *se mişcă uniform pe dreapta* Ox (Fig. 41) *cu vitesa* 4 *m/s. Un alt mobil* N *pleacă din* O_1 *în acelaşi timp cu* M. *Ce traectorie rectilinie trebue să descrie acest mobil pentruca mergând cu o mişcare uniformă să întâlnească mobilul* M. *Vitesa lui* N *este egală cu diagonala patratului construit pe vitesa lui* M. *Se dă distanţa* $OO_1=$ 24 *m şi unghiul* $O_1Ox=45^0$. Fie O_1A (Fig. 41) traectoria lui A. Această traectorie va fi determinată dacă vom cunoaşte unghiul $OO_1A=\alpha$. Insemnând cu t timpul când cele două mobile ajung în A, avem $OA=4t$, $OA_1=4\sqrt{2}\,t$, căci mobilul M are vitesa 4 m/sec., iar N are vitesa $4\sqrt{2}$ m/sec. In triunghiul OO_1A avem egalităţile

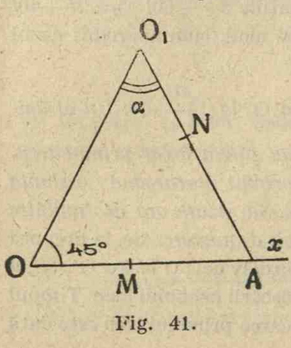


Fig. 41.

$$\frac{OA}{\sin\alpha}=\frac{O_1A}{\sin 45^0}=\frac{OO_1}{\sin(\alpha+45^0)},$$

Primele două rapoarte ne dau înlocuind pe OA şi O_1A cu valorile lor

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^0},$$

de unde $\sin\alpha = \frac{\sin 45^0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, deci $\alpha = 30^0$. N trebue să meargă pe traectoria O_1A care face 30^0 cu OO_1 pentru ca să întâlnească pe M. Din egalitatea

$$\frac{OA}{\sin\alpha} = \frac{OO_1}{\sin(\alpha + 45^0)},$$

deducem înlocuind mai întâi pe OA şi OO_1 cu valorile lor în funcţie de timp

$$t = \frac{24}{2 \times 4 \times \sin 75^0} = \frac{3}{\sin 75^0}.$$

Insă avem $\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0 =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Deci $t = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$, se găseşte aproximativ $t = 3$ sec.

136. *Graficul mersului trenurilor.* Graficele căilor ferate sunt diagramele mişcării trenurilor. Mersul trenurilor care circulă pe o linie, fie la dus, fie la întors, în 24 ore, este reprezentat cu un grafic. Figura alăturată este un extras al liniei Cluj—Oradea.

Timpurile, care sunt luate ca abscise, au ca unitate de durată 10 minute, şi spaţiile, luate ca ordonate, au lungime dela 10 la 20 km. Originea spaţiilor este staţia Cluj, aceea a timpurilor ora 24 (miezul nopţii) sau 0 (zero). A doua coloană indică staţiunile, iar prima kilometrii socotiţi dela Cluj.

Mersul trenurilor este socotit uniform între fiecare staţie; opririle în gări sunt figurate cu o paralelă la axa timpurilor, a cărei lungime arată durata opririi.

Graficul considerat reprezintă mersul a 4 trenuri Cluj—Oradea, două dus, două pentru întors, mişcarea trenului fiind presupusă uniformă între staţii. Pentru trenul Nr. 43 Cluj—Oradea, dăm orariul în tabloul alăturat.

Stații	Distanța în Km.	Sosire Ore min.	Oprire min.	Plecare Ore min.
Cluj	—		—	5^{39}
	11,1			
Nădășel	—	5^{52}	—	5^{52}
	37,5			
Huedin	—	6^{40}	1	6^{41}
	22,6			
Ciucea	—	7^{7}	7	7^{14}
	20,7			
Bratca	—	7^{38}	6	7^{44}
	13			
Vadul Crișului . . .	—	8	—	8
	36,9			
Oșorhei	—	8^{40}	2	8^{42}
	5,9			
Oradea Veneția . . .	—	8^{50}	—	8^{50}
	3,6			
Oradea	—	8^{56}		

137. Exerciții. 1. Un tren pleacă din București la 20 ore 50m și ajunge la Cluj la 8 ore 20 m. Știind că distanța parcursă este 502 km., să se calculeze vitesa mijlocie a trenului, în kilometri pe oră și în metri pe secundă.

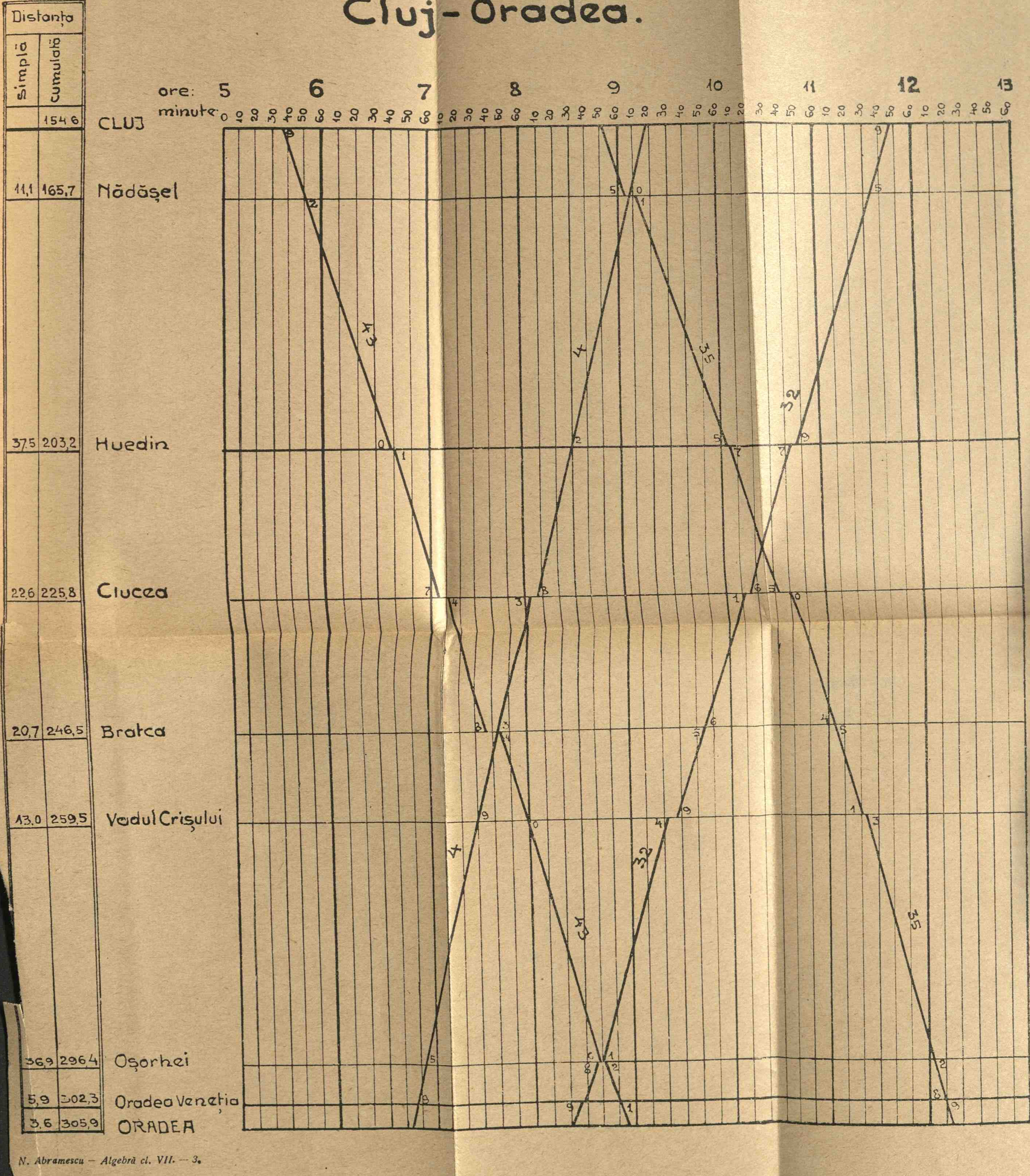
2. Un punct mobil parcurge pe fiecare secundă o distanță de 25 mm; la momentul de când începem să socotim timpul, el se găsea la 9 m depărtare de un punct fix. Să se găsească distanța mobilului după o oră, distanța socotită dela același punct fix.

R. $x=a\pm vt$, $a=9$, v vitesa, semnele + și — corespund la cele două sensuri ale mișcării. In cazul considerat, $x=9\pm25.60.60$, 99 m sau — 81 m, după sensul mișcării.

3. Intr'o mișcare rectilinie uniformă un punct mobil se găsește, la momentele t_1 și t_2, la distanțele x_1 și x_2 de un punct fix O depe dreapta parcursă de mobil. Să se afle vitesa și ecuația mișcării. Aplicație $t_1=1$ sec., $t_2=5$ sec, $x_1=2$ m, $x_2=20$ m. Să se figureze diagrama mișcării.

R. Ecuația mișcării este de forma $x=x_0+vt$; avem $x_1=x_0+vt_1$, $x_2=x_0+vt_2$, de unde $v=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$, $x_0=\dfrac{x_1t_2-x_2t_1}{t_2-t_1}$, $(t_2-t_1)x=x_1t_2-x_2t_1+(x_2-x_1)t$. Pentru datele numerice $v=\dfrac{18}{4}=4{,}5m/\text{sec}.$; $x=4{,}5t-2{,}5$. Se construește dreapta $x=4{,}5t-2{,}5$.

Tablou grafic de mersul trenurilor
Cluj-Oradea.



4. La ce interval de timp trebue să lansăm uniform şi rectiliniu două mobile dintr'un punct A, pentru ca ele să ajungă deodată la distanţa a de acest punct, ştiind că vitesa primului mobil este de 3 ori mai mică decât vitesa v a celui de al doilea.

R. Se calculează timpul în care parcurge fiecare mobil spaţiul a: diferenţa dintre aceste timpuri este intervalul de timp cerut $t=\frac{a}{\frac{v}{3}}-\frac{a}{v}=\frac{2a}{v}$.

5. Un mobil pleacă dintr'un punct A cu vitesa de 5 cm/sec. După 10 minute pleacă din acelaşi punct A un al doilea mobil, care ajunge pe cel dintâi după 2 minute. Să se afle vitesa mobilului al doilea.

R. Il ajunge pe cel dintâi după 12 minute, care face drumul $s=0.05\times 12\times 60$ metri. Cel de al doilea face acest drum în 2 minute sau 120 sec. cu vitesa $v=\frac{s}{120}=0{,}3$ metri/sec.

6. Să se studieze şi să se figureze diagramele mişcărilor definite de ecuaţiile $x=2t-3$, $x=t$, $x=-3t+2$.

138. Acceleraţia. Mişcarea variată. Am văzut că în mişcarea $s=f(t)$, vitesa este $v=f'(t)$, adică derivata spaţiului s în raport cu timpul t. Vitesa v fiind o funcţiune de t, dând timpului t o creştere Δt, vitesa va avea o creştere Δv. Raportul $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ dintre creşterea vitesei şi creşterea timpului se zice acceleraţia mijlocie. Acceleraţia la momentul t este limita raportului dintre creşterea vitesei şi creşterea timpului, când creşterea timpului tinde către zero. Notând cu γ acceleraţia, avem

$$\gamma=\lim\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt},$$

adică acceleraţia este derivata vitesei în raport cu timpul. Cum vitesa v este derivata întâi a spaţiului în raport cu timpul, urmează că acceleraţia este derivata a doua a spaţiului în raport cu timpul t,

$$\gamma=\frac{d^2s}{dt^2},\quad \gamma=f''(t).$$

Exemple. 1. $s=v_0t+s_0$. Avem $v=s'=v_0$, $\gamma=v'=s''=0$.

Deci, în mişcarea uniformă acceleraţia este zero.

2. $s=at^2+bt+c$, a, b, c fiind constante. Avem

$$v=s'=2at+b, \quad \gamma=v'=2a=\text{const}.$$

Această mişcare unde acceleraţia este constantă se zice *uniform variată*, căci vitesa $v=2at+b$ variază proporţional cu timpul. Acceleraţia este cantitatea cu care variază vitesa în unitatea de timp.

139. Mişcarea uniform variată. I. Pentru a găsi ecuaţia mişcării uniform variate, în care acceleraţia este constantă, şi egală cu γ, să calculăm mai întâi vitesa v şi apoi spaţiul s. Acceleraţia fiind derivata vitesei v în raport cu timpul t, vitesa v este o funcţiune de t, astfel că derivata ei să fie egală cu γ, deci

$$(1) \qquad v=\gamma t+v_0,$$

v_0 fiind o constantă. In adevăr, derivata acestei funcţiuni în raport cu t este γ. Presupunând că facem $t=0$, atunci $v=v_0$ este vitesa mobilului la momentul iniţial. Deci constanta v_0 din (1) este vitesa la momentul iniţial, $t=0$.

Pentru a găsi spaţiul s, în funcţie de timp, ştim că vitesa v este derivata spaţiului s în raport cu t. Deci s este o funcţiune de t, a cărei derivată este expresia (1) $\gamma t+v_0$. Această funcţiune este

$$(2) \qquad s=\gamma\frac{t^2}{2}+v_0t+s_0,$$

s_0 fiind o constantă, căci derivata sa este $2\gamma\frac{t}{2}+v_0=\gamma t+v_0$.

Deci ecuaţia mişcării uniform variate este dată de relaţia (2)

$$s=\gamma\frac{t^2}{2}+v_0t+s_0.$$

Făcând $t=0$, se vede că $s=s_0$, adică s_0 este spaţiul OM_0 (Fig. 42) la momentul iniţial, care dă poziţia M_0 a punctului M la momentul iniţial (originea timpului).

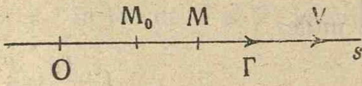


Fig. 42.

Vitesa în această mişcare este dată de (1)

$$v=\gamma t+v_0,$$

şi este figurată cu vectorul MV (Fig. 42), având ca origine mobilul M la momentul considerat și dirijat în sensul mişcării, dealungul traectorii rectilinii. Aceasta este o caracteristică a mişcării rectilinii, că vitesa la orice moment este îndreptată dealungul traectoriei.

Acceleraţia este γ și este reprezentată de vectorul $M\Gamma$ (Fig. 42) aşezat pe traectoria mobilului.

In general, $s=at^2+bt+c$ este ecuaţia unei mişcări uniforme variată, şi se vede că în această ecuaţie $a=\frac{1}{2}\gamma$, $b=v_0$, $c=s_0$, care dau acceleraţia γ, vitesa v_0 şi spaţiul s_0 la momentul iniţial $t=0$. Vitesa este $v=2at+b$, iar acceleraţia este $\gamma=2a$.

140. Relaţia dintre spaţiu şi vitesă în acelaşi moment. Ecuaţia (2) a mişcării se poate scrie

$$(3)\qquad s=\frac{1}{2}\gamma\left(t+\frac{v_0}{\gamma}\right)^2-\frac{v_0^2}{2\gamma}+s_0,$$

şi notând cu $s_1=-\frac{v_0^2}{2\gamma}+s_0$, această ecuaţie devine

$$(4)\qquad s-s_1=\frac{1}{2}\gamma\left(t+\frac{v_0}{\gamma}\right)^2.$$

Vitesa v este $v=\gamma t+v_0$, care se poate scrie

$$(5) \qquad v=\gamma\left(t+\frac{v_0}{\gamma}\right),$$

de unde

$$t+\frac{v_0}{\gamma}=\frac{v}{\gamma}.$$

Inlocuind în (4) pe $t+\frac{v_0}{\gamma}$ cu $\frac{v}{\gamma}$, avem $s-s_1=\frac{1}{2}\gamma\frac{v^2}{\gamma^2}$,

$$(6) \qquad v^2=2\gamma(s-s_1),$$

care este relaţia dintre spaţiu şi vitesă în acelaşi moment.

141. Ecuaţia redusă a mişcării uniform variată. Vitesa fiind dată de (5), se vede că se anulează când $t+\frac{v_0}{\gamma}=0$, de unde $t=-\frac{v_0}{\gamma}$. Să însemnăm cu $t_1=-\frac{v_0}{\gamma}$ momentul când vitesa este nulă. Spaţiul s în acest moment este dat de (4), unde facem $t=-\frac{v_0}{\gamma}$ şi avem $s-s_1=0$, $s=s_1=-\frac{v_0}{2\gamma}+s_0$. Atunci ecuaţia (4) se poate scrie

$$s-s_1=\frac{1}{2}\gamma(t-t_1)^2.$$

Să luăm ca origine a timpului momentul t_1 când vitesa se anulează şi ca origine a spaţiului poziţia mobilului la acest moment când spaţiul este s_1. Insemnând cu T şi S timpul şi spaţiul în raport cu aceste noui origini, avem

$$T=t-t_1, \quad S=s-s_1,$$

astfel că ecuaţia mişcării în raport cu aceste noui origini este redusă

$$S=\frac{1}{2}\gamma T^2.$$

Sau, întrebuințând tot s și t în loc de S și T, ecuația redusă este

$$s=\frac{1}{2}\gamma t^2,$$

iar vitesa este $v=\gamma t$.

Subt aceste forme, se vede că vitesele sunt proporționale cu timpurile, iar spațiile proporționale cu pătratele timpurilor. Se mai vede că, în aceste forme reduse, relația dintre spațiu și vitesă este $v^2=2\gamma s$.

142. Mișcare rectilinie uniform accelerată și uniform întârziată. Se zice că o mișcare este accelerată sau întârziată, după cum vitesa crește sau descrește în valoare absolută în raport cu timpul.

Expresiunea vitesei fiind

$$v=\gamma t+v_0=\gamma(t-t_1),\ t_1=-\frac{v_0}{\gamma},$$

se vede că se anulează când $t=t_1$ și semnul său depinde de factorii γ și $t-t_1$. Distingem două cazuri.

1⁰ Dacă $\gamma>0$, avem tabloul alăturat. In acest caz, se vede că înainte de timpul t_1, vitesa este negativă, se

t	$-\infty$	t_1	∞
γ	$+$		$+$
$t-t_1$	$-$	0	$+$
$v=\gamma(t-t_1)$	$-$	0	$+$
$v\gamma$	$-$		$+$

apropie de zero, deci descrește în valoare absolută, este mișcare întârziată. După t_1, vitesa v este pozitivă, crește și deci crește în valoare absolută; este mișcare accelerată.

Se vede că, înainte de t_1, când vitesa descrește în valoare absolută, produsul $v\gamma<0$, iar după t_1, când viteza crește în valoare absolută, produsul $v\gamma>0$.

Deci, vitesa crește în valoare absolută, avem mișcarea uniform accelerată, când produsul $v\gamma>0$; din contră, vitesa descrește în valoare absolută, avem mișcare uniform întârziată, când produsul $v\gamma<0$,

2^0 Dacă $\gamma<0$, avem tabloul următor. In acest caz, se vede că înainte de t_1, vitesa este pozitivă, se apropie

t	$-\infty$	t_1	∞
γ	$-$		$-$
$t-t_1$	$-$	0	$+$
$v=\gamma(t-t_1)$	$+$	0	$-$
$v\gamma$	$-$	0	$+$

de zero, deci descrește în valoare absolută, produsul $v\gamma<0$; după t_1 vitesa este negativă, pornește dela zero, crește în valoare absolută, produsul $v\gamma>0$.

Deci, și în acest caz, mișcarea este uniform accelerată, sau uniform întârziată, după cum produsul $v\gamma$, al vitesei cu accelerația, este un număr pozitiv sau negativ.

Așa dar, o mișcare uniform variată este accelerată sau întârziată, într'un interval de timp, după cum în acel interval produsul $v\gamma$ al vitesei cu accelerația este un număr pozitiv sau negativ; sau după cum vitesa și accelerația au același semn sau semne contrare.

In cazul mișcării uniform accelerată, valoarea absolută a vitesei crește cu o cantitate constantă în unitatea de timp; în mișcarea uniform întârziată valoarea absolută a vitesei descrește.

Vectorul accelerației de mărime γ este îndreptat în sensul vitesei sau al mișcării dacă este uniform accelerată, sau în sens contrar dacă mișcarea este întârziată.

Un exemplu de mișcare uniform accelerată este căderea corpurilor la suprafața pământului. Creșterea vitesei, adică accelerația (zisă a gravității) este de 9,8m pe secundă la București.

143. Diagramele mișcării uniform variate. Discuția mișcării. Se știe că față de două axe perpendiculare $0x$ și Oy, ecuația $y=ax^2+bx+c$ reprezintă o parabolă, a cărei așezare dep nde de s mnul lui a și de realitatea rădăcinilor ecuații $ax^2+bx+c=0$, care corespund punctelor de intersecție ale parabolei cu axa $0x$.

In cazul mișcării uniform variate, diagrama mișcării este parabola reprezentată de ecuația mișcării

$$(7) \qquad s=\frac{1}{2}\gamma t^2+v_0t+s_0,$$

în raport cu axele de coordonate perpendiculare Ot (axa timpurilor) și Os (axa spațiilor) (Fig. 43).

Pentru a o construi și discuta mișcarea, să luăm derivata în raport cu timpul t a funcțiunii s definită de ecuația (7) și avem

$$\frac{ds}{dt}=s'=\gamma t+v_0, \quad v=\gamma t+ v_0,$$

v fiind vitesa. Accelerația mișcării este derivata vitesei în raport cu timpul, adică $\frac{dv}{dt}=v'=\gamma$.

Distingem două cazuri după cum γ este pozitiv sau negativ. I. $\gamma<0$. 1⁰ *Diagrama mișcării este* curba reprezentativă a funcțiunii (7). Cum derivata acestei funcțiuni se anulează pentru $\gamma t+v_0=0$, $t=-\frac{v_0}{\gamma}$, se vede că dacă t variază dela $-\infty$ la $-\frac{v_0}{\gamma}$, atunci derivata $s'=\gamma t+v_0=\gamma\left[t-\left(-\frac{v_0}{\gamma}\right)\right]$ are semn contrar cu γ, adică semnul $+$; deci funcțiunea crește. Când t variază dela

$-\frac{v_0}{\gamma}$ la $+\infty$, derivata are acelaşi semn cu γ, adică semnul $-$; deci funcţiunea s descreşte. Aşa dar, pentru $t=-\frac{v_0}{\gamma}$ funcţiunea s este un maximum, a cărui valoare se obţine înlocuind în (7) pe t cu $-\frac{v_0}{\gamma}$, şi este

$$\frac{1}{2}\gamma\left(-\frac{v_0}{\gamma}\right)^2+v_0\left(-\frac{v_0}{\gamma}\right)+s_0=s_0-\frac{v_0^2}{2\gamma}.$$

Fie D (Fig. 43) punctul pe axa Ot astfel ca $OD=-\frac{v_0}{\gamma}$; pe perpendiculara în D pe Ot să luăm $DF=s_0-\frac{v_0^2}{2\gamma}$. La fiecare valoare a lui $t=OQ$ corespunde din (7) o valoare pentru $s=QP$. Punctul P astfel construit descrie curba (parabola) reprezentată de (7) şi anume (Fig. 43)

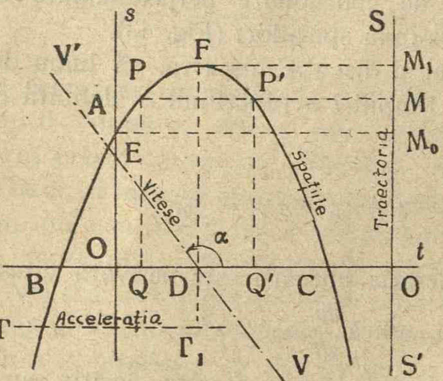


Fig. 43.

pentru valori ale lui t mai mici ca $-\frac{v_0}{\gamma}$ descrie ramura BAF, iar pentru valorile lui t mai mari ca $-\frac{v_0}{\gamma}$ descrie ramura FC. F este vârful parabolei. Această parabolă este diagrama mişcării. Are concavitatea (partea deschisă) către direcţia negativă a axei Os. Punctul A unde tae axa Os corespunde lui $t=0$, iar valoarea lui s dată de (7) pentru $t=0$ este $s=s_0$. Deci $OA=s_0$ este spaţiul la momentul inițial $t=0$. Punctele B și C unde parabola tae axa Ot corespund la valorile lui t pentru care $s=0$, $\frac{1}{2}\gamma t^2+v_0 t+s_0=0$, care sunt reale dacă

$$v_0^2-4\left(\frac{1}{2}\gamma s_0\right)>0, \quad -\gamma\left(s_0-\frac{v_0^2}{2\gamma}\right)>0;$$

cum $\gamma<0$, $-\gamma>0$, deci sunt reale dacă

$$s_0-\frac{v_0^2}{2\gamma}>0.$$

Ceea ce trebuia, căci $s_0-\frac{v_0^2}{2\gamma}=DF$ (Fig. 43), adică trebue ca acest maximum al lui s să fie pozitiv, punctul F deasupra axei Ot.

Când vârful F al parabolei este dedesubt, adică $DF=s_0-\frac{v_0^2}{2\gamma}<0$, parabola nu mai tae axa Ot, este așezată subt axa Ot.

Scriind ecuația mișcării subt forma (3),

$$s=\frac{1}{2}\gamma\left(t+\frac{v_0}{\gamma}\right)^2-\frac{v_0^2}{2\gamma}+s_0,$$

să înlocuim pe t cu valorile $-\frac{v_0}{\gamma}+k$ și $-\frac{v_0}{\gamma}-k$ corespunzătoare punctelor Q' și Q (Fig. 43) de pe Ot simetrice față de D.

Obținem pentru s aceeași valoare

$$\frac{1}{2}\gamma k^2-\frac{v_o^2}{2\gamma}+s_0,$$

și cum $\gamma<0$, urmează că $\frac{1}{2}\gamma k^2<0$, deci această valoare este mai mică decât $-\frac{v_0^2}{2\gamma}+s_0$. Așa dar, ordonatele QP și $Q'P'$ corespunzătoare sunt egale, deci curba (diagrama) este simetrică față de dreapta DF (Fig. 43).

Diagrama vitesei $v = \gamma t + v_0$ este dreapta $V'V$ (Fig. 43), care tae axa Ot în punctul D corespunzător lui $t_1 = -\frac{v_0}{\gamma}$; panta (coeficientul unghiular) dreptei $V'V$ este egală cu γ, adică face cu Ot unghiul α, astfel că $\operatorname{tg}\alpha = \gamma$. Cum panta $\gamma < 0$, dreapta $V'V$ scoboară.

Diagrama accelerației este dreapta $\Gamma\Gamma_1$ (Fig. 43), paralelă cu Ot, la distanța de O egală cu $\gamma < 0$.

Discuția mișcării. Diagrama ne arată cum variază spațiul, care este reprezentat prin ordonatele QP ale acestei curbe. Să ducem dreapta SOS' (Fig. 43) paralelă cu Os și fie M_0, M, M_1 punctele ei de intersecție cu paralelele din A, P, F, la Ot. Dreapta SOS' figurează traectoria. Spațiul la momentul inițial $t=0$, este $OA = OM_0$, deci M_0 este poziția mobilului la momentul inițial. Când timpul crește, curba diagramă se urcă dela A către F, ordonatele curbei cresc, spațiul s crește, mobilul merge dela M_0 la M și ajunge la distanța cea mai mare $OM_1 = DF$, când $t = -\frac{v_0}{\gamma}$. Din tabloul alăturat se vede că până la acest timp, vitesa v este pozitivă și descrește până la 0, accelerația $\gamma < 0$, deci v și γ sunt de semne contrare, produsul $v\gamma < 0$, așa dar mișcarea este întârziată.

t	$-\infty$		0		$-\frac{v_0}{\gamma}$		∞
γ		$-$		$-$		$-$	
v		$+$		$+$	0	$-$	
$v\gamma$		$-$		$-$		$+$	
s	$-\infty$	$\nearrow$	s_0	$\nearrow$	$s_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}$	$\searrow$	$-\infty$
Mişcarea	întârziată					accelerată	

Timpul crescând dela valoarea $-\frac{v_0}{\gamma}$, ordonatele diagramei descresc, spaţiul s se micşorează mobilul se întoarce îndărăt, dela M_1 către O, mişcarea se face în sens contrar celei dintâi; vitesa $v<0$, şi descreşte, acceleraţia $\gamma<0$, deci de acelaşi semn cu v, produsul $v\gamma>0$, aşa dar mişcarea este accelerată.

Inlocuind în valoarea vitesei $v=\gamma t+v_0$ pe timpul t cu $-\frac{v_0}{\gamma}+k$ şi $-\frac{v_0}{\gamma}-k$, corespunzătoare la momente simetric aşezate faţă de momentul $-\frac{v_0}{\gamma}$, se obţine pentru v valorile

$$\gamma\left(-\frac{v_0}{\gamma}+k\right)+v_0=\gamma k,\quad \gamma\left(-\frac{v_0}{\gamma}-k\right)+v_0=-\gamma k,$$

care sunt egale şi de semne contrare. Dar, am văzut că pentru aceste valori ale lui t spaţiile erau egale, adică mobilul trece de două ori prin acelaşi punct M al traectoriei SOS' (Fig. 43), odată când merge către M, apoi când se întoarce îndărăt. Deci, la cele două treceri ale mobilului prin acelaşi punct al traectoriei, vitesele sunt egale şi de semne contrare, mobilul are aceeaşi vitesă în valoare absolută.

144. *Cazul II.* $\gamma>0$. Diagrama mişcării este curba reprezentativă (Fig. 44) a funcţiunii

$$s=\frac{1}{2}\gamma t^2+v_0 t+s_0.$$

Derivata este $v=\gamma t+v_0$, se anulează pentru $t_1=-\frac{v_0}{\gamma}$. Diagrama vitezelor este dreapta VV' reprezentată de

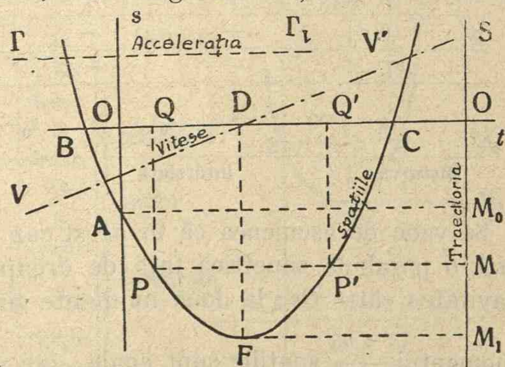


Fig. 44.

ecuaţia $v=\gamma t+v_0$, care se urcă în sus, căci panta (coeficientul unghiular) este $\gamma>0$. Diagrama acceleraţiilor este dreapta $\Gamma\Gamma_1$ paralelă cu Ot, deasupra axei Ot, depărtată de O cu $\gamma>0$. Traectoria e reprezentată prin dreapta SOS' paralelă cu Os. La momentul iniţial $t=0$, spaţiul este $OA=s_0$, M_0 este poziţia mobilului la momentul iniţial. Când timpul creşte, diagrama spaţiilor coboară, spaţiul s descreşte, mobilul merge dela M_0 la M_1, care corespunde la distanţa cea mai mică (minimum) $OM_1=DF$, când $t=-\frac{v_0}{\gamma}\cdot$ Din tabloul alăturat se vede că până la M_1 vitesa v este negativă şi creşte până la 0, v şi γ sunt de semne contrare, mişcarea este întârziată.

Timpul crescând dela $-\frac{v_0}{\gamma}$, spaţiile cresc, mobilul se ntoarce îndărăt dela M_1 către O, mişcarea se face în sens contrar cu cea dintâi ; vitesa $v>0$, $\gamma>0$, de acelaşi semn, produsul $v\gamma>0$, aşa dar mişcarea este accelerată.

t	$-\infty$		0		$-\frac{v_0}{\gamma}$		∞
γ		$+$		$+$		$+$	
v		$-$		$-$		$+$	
$v\gamma$		$-$		$-$		$-$	
s	∞	$\searrow$	s_0	$\searrow$	$s_0-\frac{v_0^2}{2\gamma}$	$\nearrow$	∞
Mişcarea			întârziată			accelerată	

Se vede de asemenea că în acest caz $\gamma>0$, diagrama este o parabolă simetrică faţă de dreapta DF, cu concavitatea către Os ; la două momente simetrice faţă de momentul $-\frac{v_0}{\gamma}$ spaţiile sunt egale, iar vitesele în acele momente sunt egale şi de semne contrare, adică la două treceri ale mobilului prin acelaşi punct al traectorii vitesele sunt egale şi de semne contrare.

Aceasta se poate vedea şi din relaţia (6), dintre vitesă şi spaţiu în acelaşi moment

$$v^2=2\gamma(s-s_1), \quad v=\pm\sqrt{2\gamma(s-s_1)}.$$

E uşor de văzut că vitesa v este reală, adică $\gamma(s-s_1)>0$. In adevăr, când $\gamma<0$, $s_1=DF$ (Fig. 43) este cel mai mare (maximum), deci $s-s_1<0$, $\gamma(s-s_1)>0$. Când $\gamma>0$, $s_1=DF$ (Fig. 44) este un minimum, $s-s_1>0$, $\gamma(s-s_1)>0$. Apoi la aceeaşi valoare a lui s, rezultă din $v=\pm\sqrt{2\gamma(s-s_1)}$ două valori egale şi de semne contrare pentru v, adică la cele două treceri ale mobilului prin acelaşi punct, mobilul are aceeaşi vitesă în valoare absolută.

145. Aplicaţii. 1. *Un mobil descrie o dreaptă cu o mişcare uniform accelerată. Să se găsească ecuaţia mişcării, ştiind că la timpurile* 0, 1, 2, *spaţiile sunt egale cu* 3, 6 *şi* 19. *Să se determine momentul când mobilul este cel mai apropiat de originea spaţiilor şi care este această distanţă minimă.*

Din ecuaţia mişcării $s=\frac{1}{2}\gamma t^2+v_0t+s_0$, deducem

$$s_0=3, \; s_0+v_0+\frac{1}{2}\gamma=6, \; s_0+2v_0+2\gamma=19,$$

de unde $s_0=3$, $v_0=-2$, $\gamma=10$. Ecuaţia mişcării este $s=5t^2-2t+3$, iar

t	v	$v\gamma$	s	Mişcarea
$-\infty$			$+\infty$	
	—	—	descr.	întârziată
0			3	
	—	—	descr.	
$\frac{1}{5}$	0		$\frac{14}{5}$	oprire
	+	+	creşte	accelerată
$\frac{2}{5}$			3	
	+	+	creşte	
$\infty+$			$+\infty$	

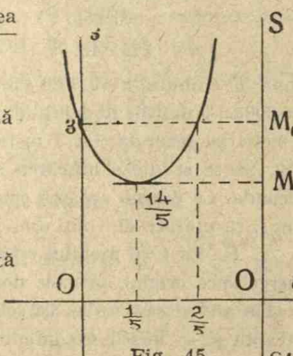


Fig. 45.

vitesa $v=10t-2$. Din tabloul şi diagrama alăturată (Fig. 45), se vede că până la $t=\frac{1}{5}$ este mişcare întârziată; în acest moment $t=\frac{1}{5}$ este *oprirea*; apoi mobilul se întoarce înapoi cu mişcare accelerată. Mobilul este cel mai aproape de orginea spaţiilor când vitesa se anulează, $t=\frac{1}{5}$, când s este minimum şi egal cu $\frac{14}{5}$.

II. *Două mobile descriu aceeaşi dreaptă cu acceleraţiile constante* $\gamma=6$ şi $\gamma'=4$. *La momentul iniţial trec împreună prin originea spaţiilor cu vitesele* $v_0=-1$ şi $v_0'=1$. *Să se găsească locul şi momentul întâlnirii a doua.* Ecuaţiile mişcării sunt $s=3t^2-t$, $s=2t^2+t$; la a doua întâlnire au aceeaşi distanţă de originea spaţiilor, şi acest moment e dat de

$$2t^2+t=3t^2-t.$$

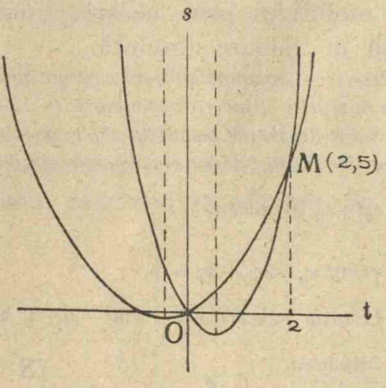


Fig. 46.

Suprimând rădăcina $t=0$, care corespunde la momentul iniţial, se obţine $t=2$, iar spaţiul este $s=2.2^2+2=10$.

Se poate şi cu ajutorul diagramelor spaţiilor, găsind al doilea punct M al intersecţii lor (Fig. 46).

146. Exerciţii. 1. s fiind spaţiul descris de un punct mobil şi t timpul în secunde, să se afle vitesa mobilului după 5 minute, când ecuaţiile mişcării sunt $s=t^2+3t+4, s=at^2+bt+c$.

R. $v=2t+3$, $v=2at+b$; după 5 minute, $v=2.5.60+3=603$ unităţi de felul lui 4 pe sec, $v=600a+b$ unităţi de felul lui c pe sec. Dacă c reprezintă metri, atunci b metri pe secundă, iar a metri pe secundă la pătrat.

2. Să se studieze mişcarea $s=3-2t+\frac{1}{2}t^2$, unităţile fiind metru şi secunda. Ce devine această ecuaţie când se ia ca unitate de lungime km şi ca unitate de timp ora.

R. La $t=0$ mobilul este la distanţa $s=3$ m cu vitesa -2 m/sec, merge spre origine primele două secunde, iar când ajunge la distanţa $s=1$ m are vitesa nulă; îşi schimbă apoi sensul mişcării pornind spre dreapta şi se mişcă necontenit în acest sens cu vitesa care creşte de asemenea necontenit. Se construeşte diagrama. Când se ia ca unităţi km şi ora, $s = \frac{3}{1000} - \frac{2}{1000} \times (60 \times 60)t + \frac{1}{2.1000}(60 \times 60)^2 t^2$, $s = 0{,}003 - 7{,}2t + 6480t^2$, $v = -7{,}2t + 12960$.

3. Să se studieze mişcarea rectilinie uniform variată, cunoscând acceleraţia $\gamma = 12$ cm/sec^2, spaţiul $s = -1m$ la ora 12 şi 3 secunde, iar vitesa $v = 107{,}5$ m/sec. la ora 12 ¼ (şi un sfert.).

R. Luând ca unităţi metrul şi secunda, momentul iniţial ora 12, se aduc datele la aceste unităţi $s = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + s_0$, $v = \gamma t + v_0$, unde înlocuind datele, obţinem $s = 0{,}06t^2 - 0{,}5t - 0.04$.

4. Ştiind că vitesa unui mobil este $v = 7 - 2t$, să se găsească drumul ce-l parcurge între timpurile $t_1 = 2$, $t_2 = 5$.

R. $s = -t^2 + 7t + s_0$. La cele două epoci spaţiile sunt egale, $s_1 = s_2 = s_0 + 10$, mobilul trece prin acelaşi punct al traectorii, unde vitesele sunt egale şi de semne contrare, $v_1 = 3$, $v_2 = -3$. Vitesa se anulează pentru $t_3 = \frac{7}{2}$, când spaţiul este atunci $s_3 = s_0 + 12{,}25$. Mobilul a parcurs 2,25 într'un sens şi 2,25 în sens opus, în total 4,50 (unităţi de lungime). Se vede bine acest rezultat construind diagrama spaţiilor.

5. Să se afle acceleraţia unei mişcări uniform variate ştiind că la momentul $t = 1$, spaţiul este 1, iar la momentul $t = 2$, vitesa sa este zero şi spaţiul descris este egal cu -1.

R. $s = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + s_0$. $v = \gamma t + v_0$; $\frac{1}{2}\gamma + v_0 + s_0 = 1$, $2\gamma + 2v_0 + s_0 = -1$, $2\gamma + v_0 = 0$; $\gamma = 4$, $v_0 = -8$, $s_0 = 7$.

6. Se dau două axe perpendiculare Ox, Oy, pe care se mişcă două mobile M şi M′ cu acceleraţiile γ şi γ'. Mobilele pleacă fără vitesă iniţială din punctele date A pe Ox şi B pe Oy către punctul O cu o mişcare uniform accelerată. Să se afle : 1^0 după cât timp distanţa MM' a celor două mobile este un minimum ; 2^0 valoarea acestei distanţe ; 3^0 poziţiile corespunzătoare ale mobilelor pe axe. Aplicaţie pentru $OA = 20$ m, $OB = 10$m, $\gamma = \gamma' = 1$ m.

R. $OA = a$, $OB = b$, $x = OM = a - \frac{1}{2}\gamma t^2$, $y = b - \frac{1}{2}\gamma' t^2$, $d^2 = \overline{MM'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = x^2 + y^2$, $d^2 = (a - \frac{1}{2}\gamma t^2)^2 + (b - \frac{1}{2}\gamma' t^2)^2$,

$$d^2 = \frac{1}{4}(\gamma^2 + \gamma'^2)t^4 - (a\gamma + b\gamma')t^2 + (a^2 + b^2).$$

1^0 Acest trinom bipătrat trece prin două minime pentru

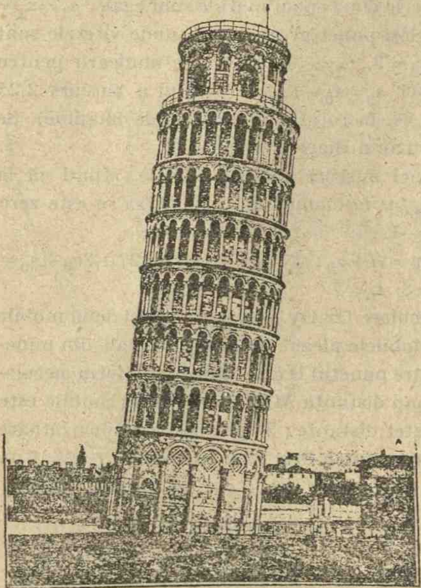
$t_1 = \pm\sqrt{\frac{2(a\gamma + b\gamma')}{\gamma^2 + \gamma'^2}}$. 2^0. In acest moment, distanţa $d_1^2 = \frac{(b\gamma - a\gamma')^2}{\gamma^2 + \gamma'^2}$.

3^0. Mobilele ocupă atunci poziţile $x_1 = \frac{\gamma'(a\gamma' - b\gamma)}{\gamma^2 + \gamma'^2}$, $y_1 = \frac{\gamma(b\gamma - a\gamma')}{\gamma^2 + \gamma'^2}$.

când $\gamma = \gamma'$, $t_1 = \pm\sqrt{\frac{a+b}{\gamma}}$, $d_1^2 = \frac{(b-a)^2}{2}$, $x_1 = -y_1 = \frac{a-b}{2}$.

Numeric, $t_1=\sqrt{30}=5{,}47\text{sec}$, $d_1=\sqrt{50}=7,07\,m$; $x_1=5m$, $y_1=-5\text{m}$.

147. Căderea corpurilor. Căderea corpurilor la suprafața pământului este o *mişcare uniform accelerată.* Aceasta se demonstrează în Fizică cu ajutorul planului înclinat al lui Galileu, cu mașina lui Atwood, cu aparatul Morin. Experiențele celebre, asupra căderii corpurilor, au fost executate în mod public de Galileu (1590), la turnul înclinat dela Pisa. Ele au stabilit, contrariu opiniei lui Aristot, că în vid toate corpurile cad cu aceeași vitesă. Și anume, *spațiile parcurse de un corp, în cădere liberă, sunt proporționale cu pătratele timpurilor în care au căzut.* Mişcarea este deci uniform variată. (A se vedea ecuațiile reduse, Nr. 141).



Turnul înclinat din Pisa.

Accelerația gravitării.

Accelerația acestei mișcări de cădere se zice accelerația gravității și se notează cu g. Valoarea sa este de 9,8 m la Paris, 9,83 m la pol, 9,781 la ecuator.

148. Corp căzând în cădere liberă. I. Corp plecând din repaus. Corpul este totdeauna presupus că se mişcă în vid. Accelerația $\gamma=g$. Corpul plecând din repaus, vitesa sa inițială este $v_0=0$. După timpul t, corpul a căzut dela înălțimea h,

(1) $$h = \frac{g}{2} t^2,$$

iar vitesa este

(2) $$v = gt.$$

Scoţând valoarea lui t din (2) şi înlocuind în (1), operaţie care se zice eliminarea lui t între aceste două ecuaţii, avem

$$t = \frac{v}{g}, \quad h = \frac{g}{2}\left(\frac{v}{g}\right)^2, \; h = \frac{g}{2} \cdot \frac{v^2}{g^2},$$

(3) $$v^2 = 2gh.$$

Deci, după căderea dela înălţimea h, vitesa mobilului este $v = \sqrt{2gh}$.

Făcând $t = 1$, în (1), găsim

$$h_1 = \frac{g}{2}, \quad g = 2h_1,$$

deci, acceleraţia gravităţii g este egală cu îndoitul spaţiului parcurs în timpul primei secunde de cădere. Acest spaţiu este aproximativ 4,9 m.

Diagramele mişcării. Diagrama spaţiilor. Ecuaţia (1), este reprezentată cu o parabolă (Fig. 47) cu axa $0h$, verticala care scoboară. Curba este cu ramură infinită, căci mişcarea de cădere poate să se facă indefinit. *Diagrama viteselor* este o dreaptă OV (Fig. 47) ce trece prin origine, cu panta sau coeficientul unghiular g. *Diagrama acceleraţiilor* este o dreaptă $\Gamma\Gamma_1$, paralelă cu Ot, și dedesubt, căci $g > 0$.

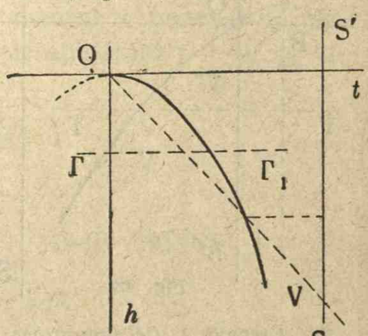


Fig. 47.

149. Corp aruncat în jos cu o viteză v_0. Avem

$$(4) \qquad h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

$$(5) \qquad v = v_0 + gt.$$

Dar, din (5) avem

$$t = \frac{v - v_0}{g},$$

pe care înlocuind-o în (4), obţinem

$$h = \frac{v_0(v - v_0)}{g} + \frac{(v - v_0)^2}{2g}, \quad h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g},$$

de unde

$$(6) \qquad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Deci, după căderea dela înălţimea h, mobilul are vitesa $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

Diagrama spaţiilor este o parabolă cu axa verticală AB (Fig. 48), cu vârful în A, de abscisă $OB = t = -\frac{v_0}{g}$ (ce corespunde la $v=0$) şi ordonată

$$h = BA = -\frac{v_0^2}{2g}.$$

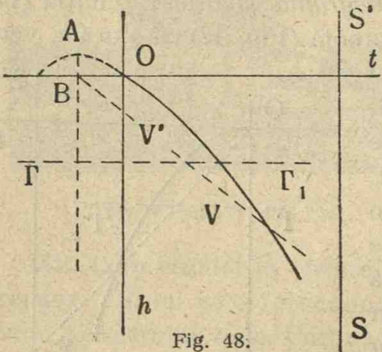


Fig. 48.

Diagrama vitezelor este dreapta $V'V$, cu panta (coeficientul unghiular) g. Diagrama acceleraţiilor este dreapta $\Gamma\Gamma_1$ paralelă cu Ot, şi dedesubt, căci $g > 0$.

150. *Exemple. 1. Cât timp trebue unui corp pentru a cădea dela o înălţime de* 300 *m.* Din (1) avem

$$h = g\frac{t^2}{2}, \quad t^2 = \frac{2h}{g}, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$t = \sqrt{\frac{600}{9,81}} = 7 \text{ sec, } 82.$$

Din (2), obținem

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{19,62 \times 300} = 76,72 \text{ m/sec}.$$

2. *Două corpuri cad din acelaşi punct, la 2 secunde de interval. Se cere distanța dintre ele după 5 secunde de cădere a primului corp.* După 5 secunde de cădere, primul crop a parcurs [a se vedea formula (1)]

$$h = \tfrac{1}{2}\, 9,81 \times 5^2 = 122,625 \text{ m}.$$

La acest moment, corpul al doilea plecat cu 2 secunde mai târziu ca primul, a căzut dela înă.țimea

$$h' = \tfrac{1}{2}\, 9,81 \times 3^2 = 44,145 \text{ m}.$$

Cele două corpuri sunt deci unul de altul depărtate cu

$$122,625 \text{ m} - 44,145 \text{ m} = 78,48 \text{ m}.$$

Aceasta se putea obține direct

$$h = h' = \tfrac{1}{2} g(t^2 - t'^2) = \tfrac{1}{2}\, 9,81(5^2 - 3^2) = 78,48 \text{ m}.$$

151. Corp aruncat vertical de jos în sus. I. *Ecuațiile mişcării.* Punctul greu este aruncat cu o vitesă inițială v_0. Să luăm ca sens pozitiv al traectorii sensul de urcare al mobilului și ca origine momentul și punctul de plecare al mobilului, $s_0 = 0$. Accelerația fiind $\gamma = -g$, v_0 vitesa inițială, avem

$$h = v_0 t - \tfrac{1}{2} 2gt^2. \tag{7}$$

$$v = v_0 - gt. \tag{8}$$

Eliminând pe t între aceste ecuații, obținem

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

II. *Durata şi înălțimea ascensiunii.* Ascensiunea se oprește când vitesa se anulează. Deci când

$$v_0 - gt = 0, \quad v_0 = gt, \quad t = \frac{v_0}{g}.$$

Durata ascensiunii este deci

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

Inlocuind pe t cu valoarea aceasta în (7), înălțimea maximă este

$$(9) \qquad h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

III. *Căderea mobilului.* In această primă fază a mișcării sale, mișcarea este uniform întârziată, căci vitesa v și accelerația g sunt de semne contrare. Dela această înălțime h, mobilul cade liber, cu o mișcare uniform accelerată. Timpul în care se descrie acest spațiu h, în cădere liberă este dat de $h = \frac{1}{2} g t^2$, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Inlocuind pe h cu valoarea sa din (9), avem

$$t = \sqrt{\frac{2\frac{v_0^2}{2g}}{g}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}}, \quad t = \frac{v_0}{g},$$

deci timpul în care cade este același în care s'a ridicat. In momentul căderii dela înălțimea h, mobilul are vitesa dată de (3)

$$v = \sqrt{2gh},$$

unde înlocuind pe h cu valoarea sa dată de (9), $h = \frac{v_0^2}{2g}$, avem

$$v = \sqrt{2g\frac{v_0^2}{2g}} = \sqrt{v_0^2}, \quad v = v_0.$$

Deci, vitesa mobilului în momentul căderii, este egală cu vitesa inițială v_0 cu care a fost aruncat de jos în sus la momentul inițial. Ceea ce trebuia, de oarece mișcarea considerată fiind uniform variată, se știe (Nr. 143), că la cele două treceri ale mobilului pe traectoria sa, în acelaşi punct, mobilul are aceeaşi vitesă în valoare absolută.

Diagramele mişcării (Fig. 49), sunt analoage cu cele din cazul general. Alegând originea în locul unde e aruncat, parabola trece prin originea O, dar ramura AC, corespunzând căderii, se prelungeşte nemărginit.

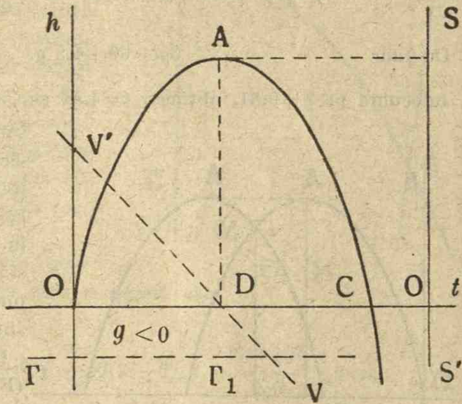


Fig. 49.

152. *Exemple.* 1. *Un corp este aruncat vertical de jos în sus cu o vitesă de 60 m/sec. Neglijând rezistența aerului, să se afle înălțimea la care se va ridica şi timpul care trece între plecarea şi căderea sa.* Inălțimea maximă de ascensiune este

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(60)^2}{2.9,81} = 183,48 \text{ m.}$$

Timpul total este îndoitul celui necesar ascensiunii

$$t = 2\frac{v_0}{g} = \frac{2.60}{9,81} = 12,23 \text{ sec.}$$

Vitesa datorită căderii este $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.9,81.183,48} = 60$ metri, cu care a fost aruncat.

2. *Se aruncă de jos în sus vertical două corpuri A şi B cu vitesă de* 30 m/sec, *dar B este aruncat cu* 3 *secunde mai târziu ca* A. *Să se afle după cât timp şi la ce înălțime va fi întâlnirea lor.* Pentru primul mobil,

$$h_1 = 30t - \frac{1}{2}gt^2$$

şi pentru al doilea

$$h_2 = 30(t-3) - \frac{1}{2} g(t-3)^2.$$

Aceste înălţimi fiind cele ce corespund întâlnirii, sunt egale ; deci

$$h_1 = h_2,\ 30t - \frac{1}{2} gt^2 = 30(t-3) - \frac{1}{2} g(t-3)^2.$$

De unde $$3gt = 90 + 4{,}5\ g.$$

Inlocuind pe $g=9{,}81$, obţinem $t=4{,}56$ sec, şi deci $h_1=h_2=34{,}88$ m.

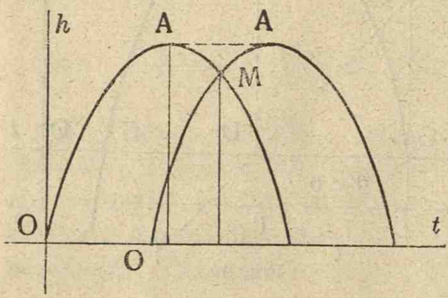


Fig. 50.

Intâlnirea are loc după 4,56 sec. dela plecarea primului mobil, şi 1,56 sec.după a celui de al doilea ; şi anume, în timpul căderii primului şi a ascensiunii celui de al poilea, căci timpul ascensiunii este 3,06 sec.

Diagramele spaţiilor (Fig 50)

$$h = 30t - \frac{1}{2} gt^2,$$

$$h = 30(t-3) - \frac{1}{2} g(t-3)^2$$

pun în evidenţă mai uşor fazele acestei mişcări, întâlnirea corespunzând punctului M de intersecţie al parabolelor.

153. Exerciţii. 1. Un observator lasă să cadă o piatră în fundul unei fântâni. Să se afle adâncimea fântânii, dacă suntetul căderii se aude după $t=9$ sec, ştiind că vitesa sunetului este $v=340$ m/sec. Să se construiască diagramele.

R. v vitesa sunetului. Timpul $t=t'+t''$, t' al căderii pietrii, t'' al urcării sunetului. Adâncimea este $h=\frac{1}{2}gt'^2=vt''$; de unde $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{b}{v}$. Avem ecuaţia

$$h^2 - 2\left(vt + \frac{v^2}{g}\right)h + v^2t^2 = 0.$$

$$h = vt + \frac{v^2}{g} - \sqrt{\frac{v^2}{g}\left(2vt + \frac{v^2}{g}\right)},$$

înlăturând rădăcina pozitivă care ar da $t'>t$. Numeric $t=9s$, $h=319$ m.

Alegem două axe (Fig. 51) *Ot şi Oh*, verticală şi îndreptată în sensul căderii. Diagrama mişcării pietrii, $h=\frac{1}{2}gt^2$ este parabola OA. Diagrama mişcării sunetului, $h=vt$ este o dreaptă AB, cu panta v; este paralelă cu dreapta EC, şi tae axa Ot a timpurilor în punctul B de abscisă $OB=t=9$ sec şi parabola în punctul A de ordonantă $AD=h=319$m adâncimea fântânii

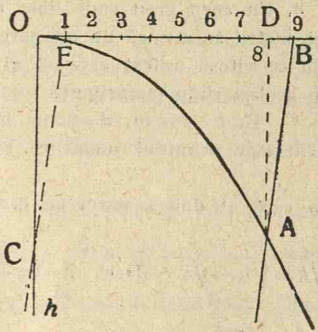


Fig. 51.

2. Două corpuri cad din acelaşi punct, fără vitesă iniţială, la interval de θ secunde. Să se afle: 1⁰ la ce moment ele sunt la distanţa h şi 2⁰ ce drum au parcurs ele până atunci. Aplicaţie $\theta=23$ sec. $h=103$ m, $g=9{,}81$.

R. 1⁰ După t secunde dela căderea primului, distanţa care le separă este

$$h=\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g(t-\theta)^2=\frac{1}{2}g\theta(2t-\theta),\ t=\frac{2h+g\theta^2}{2g\theta}=5 \text{ sec.}$$

2⁰ Primul mobil cade dela $h^1=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{8g}\left(\frac{2h+g\theta^2}{\theta}\right)^2=122{,}62$ şi al

doilea dela $h_2=\frac{1}{2}g(t-\theta)^2=\frac{1}{89}\left(\frac{2h-g\theta^2}{\theta}\right)^2=19{,}62.$

3. Un mobil este lăsat să cadă fără vitesă iniţială; după θ secunde se aruncă de sus în jos cu vitesa v_0 dealungul verticalei, care îl ajunge pe cel dintâi la distanţa d de punctul de plecare. Să se afle timpul θ cât a trecut între plecările lor.

R. La momentul întâlnirii, ecuaţiile mişcării mobilelor sunt

$$d=\frac{1}{2}gt^2,\ \text{unde}\ t=\sqrt{\frac{2d}{g}}\ \text{şi}\ d=v_0\,(t-\theta)+\frac{1}{2}g(t-\theta)^2=v_0\left(\sqrt{\frac{2d}{g}}-\theta\right)$$

$$+\frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2d}{g}}-\theta\right)^2;\ \text{avem ecuaţia}\ \frac{1}{2}g\theta^2-\left(v_0+\sqrt{2gd}\right)\theta+v_0\sqrt{\frac{2d}{g}}=0.$$

de unde $\theta=\frac{1}{g}\left(v_0+v_1\pm\sqrt{v_o^2+v_1^2}\right)$, $v_1=\sqrt{2gd}$ fiind vitesa primului mobil după căderea dela înălţimea d. Semnul + nu este admisibil, căci $\theta>t$ timpul necesar căderii dela înălţimea h a primului.

4. Un corp greu cade liber dela 144 m înălţime. Când a parcurs 25 metri, se aruncă un alt corp dela aceeaşi înălţime după verticală. Cu ce vitesă a fost aruncat al doilea corp ca să ajungă la pământ în acelaşi timp cu primul.

R. $h=144$ m, $d=25$ m, v_0 vitesa mobilului al doilea. Timpul t necesar primului mobil ca să parcurgă $h—d$ este acelaşi cu acela în care al doilea parcurge h. Dar $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{2d}{g}}=\sqrt{\frac{2k}{g}}$ unde $\sqrt{k}=\sqrt{h}-\sqrt{d}$. Deci $h=v_0t+\frac{1}{2}gt^2=v_0\sqrt{\frac{2k}{g}}+k$, de unde $v_0=\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{h-k}{\sqrt{k}}$. Problema e posibilă, căci $h>k$. Numeric $\sqrt{k}=7$, $v_0=30{,}056$ m.

5. Două mobile cad din două puncte A şi B situate pe aceeaşi verticală depărtate cu distanţa d; ele sunt aruncate de sus în jos cu vitesele iniţiale v şi v', iar cel mai ridicat pleacă cu θ secunde înaintea celuilalt. Să se afle: 1^0 după cât se întâlnesc; 2^0 la ce distanţă de B se găseşte punctul de întâlnire. Să se figureze diagramele. Discuţie.

R. C fiind punctul de întâlnire, să punem $BC=y$ şi sensul pozitiv al verticalei care coboară. Ecuaţiile mişcării celor două mobile sunt

$$AC=d+y=v(t+\theta)+\frac{1}{2}g(t+\theta)^2,\quad BC=y=v't+\frac{1}{2}gt^2.$$

1^0 Scăzând, $d=(v-v'+g\theta)t+v\theta+\frac{1}{2}g\theta^2$, $t=\frac{d-s_1}{v_1-v'}$;

$$s_1=v\theta+\frac{1}{2}g\theta,\quad v_1=v+g\theta$$

iind spaţiul parcurs şi viteza câştigată de primul mobil în timpul θ.

Discuţie. Cum $t>o$, trebue $(d-s_1)(v_1-v')>o$. Cazul I. $d>s_1$, trebue $v_1>v'$; primul mobil neajungând în B în momentul plecării celui de al doilea, trebue ca în acest moment vitesa $v_1>v'$ pentru ca întâlnirea să aibă loc ulterior în C. Cazul II, $d<s_1$, $v_1<v'$; primul mobil a trecut de B în momentul plecării celui de al doilea; acesta nu poate să-l ajungă de cât dacă vitesa $v'>v_1$. Cazul III. $d=s_1$ dacă $v_1\neq v'$, avem $t=o$; cele două mobile, odată în coincidență în B, se depărtează fără a se mai putea întâlni; dacă $v_1=v'$, $t=\frac{0}{0}$, mobilele merg împreună, de unde rezultă și nedeterminarea. Construind diagramele se văd mai ușor rezultatele.

6. Trei mobile cad liber din acelaşi punct, dar la intervale de timp egale $\theta=2$ secunde. La ce moment distanța celui de al doilea mobil de primul va fi dublul distanței sale de al treilea. Generalizare.

R. Ecuațiile mişcării celor trei mobile sunt $s_1=\frac{1}{2}g(t+2\theta)^2$, $s_2=\frac{1}{2}g(t+\theta)^2$, $s_3=\frac{1}{2}gt^2$. Dacă distanța s_1-s_2 este de n ori mai mare în valoare absolută ca distanța s_2-s_3, avem $(t+2\theta)^2-(t+\theta)^2=n\left[(t+\theta)^2-t^2\right]$, $t=\frac{3-n}{2(n-1)}\theta$. Ca $t>o$, trebue $1<n<3$. Când $\theta=2s$ și $n=2$, $t=1sec.$

7. Cu ce vitesă inițială trebue aruncat vertical pentru a se putea ridica la 2000 m, neținând seamă de rezistența aerului. Care este timpul ce a trecut între plecare și cădere.

R. Inălțimea maximă $h=\frac{v_o^2}{2g}$, $v_0=\sqrt{2gh},=198{,}09$ m. Timpul scurs între plecare și cădere este îndoitul lui $t_1=\frac{v_0}{g}$, adică 40,39 secunde.

8. Un proectil, aruncat vertical de jos în sus, a revenit în punctul de plecare după θ secunde. Să se afle: 1^0 vitesa inițială v_0 și 2^0 la ce înălțime h s'a ridicat. Aplicație $\theta=10s$, $g=9{,}81$.

R. 1^0 Durata ascensiunii fiind $\frac{\theta}{2}$, avem $\frac{\theta}{2}=\frac{v_0}{g}$, $v_0=\frac{g\theta}{2}$, $v_0=40{,}05$ m; $2^0 h=\frac{v_o^2}{2g}=122{,}62$ m.

6. Un observator, aşezat la înălțime h, vede trecând în fața lui un corp aruncat de jos în sus, și θ secunde mai târziu îl vede din nou. Să se afle: 1^0 vitesa inițială a corpului; 2^0 înălțimea maximă a ascensiunii sale. Aplicație $h=60$ m, $\theta=8s$, $g=9{,}81$.

R. Ecuația este $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ atât pentru urcare ca și pentru coborîre. Avem ordonând în t, $\frac{1}{2}gt^2-v_0t+h=o$, $t=\frac{v_0\pm\sqrt{v_o^2-2gh}}{g}$.

Dar diferența rădăcinilor $t'-t''=\theta$, $\theta=\frac{2\sqrt{v_o^2-2gh}}{g}$. 1⁰ De unde, vitesa inițială $v_0=\frac{1}{2}\sqrt{g(g\theta^2+8h)}=52{,}12$m ; 2⁰ înălțimea maximă de ascensiune $h_1=\frac{v_o^2}{2g}=138{,}48$ m.

10. Un proectil este aruncat vertical de jos în sus cu vitesa v_0. Si se afle în cât timp va ajunge : 1⁰ la jumătatea înălțimii sale maxime, 2⁰ o înălțime h. Discuție. Să se figureze diagrama.

R. $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, (1)$t=\frac{v_0\pm\sqrt{v_o^2-2gh}}{g}$. Când $h=\frac{1}{2}h_1=\frac{v_o^2}{4g}$ (h_1 înălțimea maximă), avem $t=\frac{v_0}{g}\left(t\mp\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, semnul—corespunde la urcare și + la coborâre.

Discuție. Problema e posibilă dacă $v_0^2-2gh\geq o$, $h\leq\frac{v_0^2}{2g}$, înălțimea h trebue să fie cel mult egală cu înălțimea maximă h_1. Cazul I. $h>o$. Ambele rădăcini sunt pozitive și convin, cea mai mică t_1 corespunde punctului A în urcare, cea mai mare t_1' la coborâre după ce mobilul a atins punctul cel mai de sus B. Cazul II. $h=o$, $t_1=o$, $t_1'=\frac{2v_0}{g}$, cea dintâi corespunde momentului de plecare din originea O, a doua este timpul necesar proectilului pentru a reveni la punctul de plecare și este îndoitul duratei de urcare. Cazul III. $h<0$. Făcând $h=-h'$ în (1), avem $t=\frac{1}{g}\left(v_0\pm\sqrt{v_0^2+2gh'}\right)$, și numai rădăcina pozitivă convine. Mobilul pleacă din O, se urcă până în B, se coboară la punctul de plecare unde are vitesa v_0 și ajunge în punctul dat C dedesubtul punctului de plecare la timpul t'. Rădăcina negativă corespunde momentului când mobilul era în C înainte de a se urca în O. Cazul IV. $h=h_1$, valorile lui t sunt egale cu $t_1=\frac{v_0}{g}$, necesare ascensiunnii.

11. Două corpuri grele sunt aruncate succesiv din același punct, de jos în sus, cu aceeași vitesă v_0. Să se afle timpul θ ce trebue între plecările lor pentru ca corpurile să se întâlnească : 1⁰ la înălțimea h, 2⁰ la mijlocul înălțimii maxime a ascensiunii lor.

R. 1⁰ Ecuațiile mișcării sunt $h_1=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, $v_1=v_0-gt$,

$h_2 = v_0(t+\theta) - \frac{1}{2}g(t+\theta)^2$, $v_2 = v_0 - g(t+\theta)$; t fiind momentul întâlnirii,

$h_1 = h_2$, de unde $t = \frac{v_0}{g} - \frac{\theta}{2}$, înlăturând $\theta = o$ şi deci înălţimea de întâlnire

h se obţine înlocuind pe t în h_1, $h = \frac{g}{2}\left(\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{\theta^2}{4}\right)$, de unde

$\theta = \frac{2}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh}$. 2^0 $h = \frac{1}{2}h' = \frac{v_0^2}{4g}$, $\theta = \frac{v_0}{g}\sqrt{2}$, $\theta = t'\sqrt{2}$, t' fiind

impul ascensiunii h'.

12. Din două puncte A şi B (Fig. 52) situate pe aceeaşi verticală la distanţa d, se aruncă două mobile, întâiul de sus în jos cu vitesa v, al doilea de jos în sus cu vitesa v'. Se cere locul şi momentul întâlnirii. Discuţie. Să se construiască diagramele. Aplicaţii $d = 100$ m, $v = 20$ m, $v' = 30$ m. $g = 9{,}81$.

R. C fiind punctul de întâlnire, avem $AC = vt + \frac{1}{2}gt^2$, $BC = \frac{1}{2}gt^2 - v't$, de unde prin scădere $AB = d = t(v+v')$, $t = \frac{d}{v+v'}$ deci $BC = h = d\frac{gd - 2v'(v+v')}{2(v+v')^2}$.

Discuţie. 1^0 Întâlnirea are loc deasupra lui B (Fig. 52), dacă $h < o$, $v'(v+v') > \frac{gd}{2}$; 2^0 în B, dacă $h = o$, $v'(v+v') = \frac{gd}{2}$; 3^0 dedesubtul lui B, dacă $h > o$,

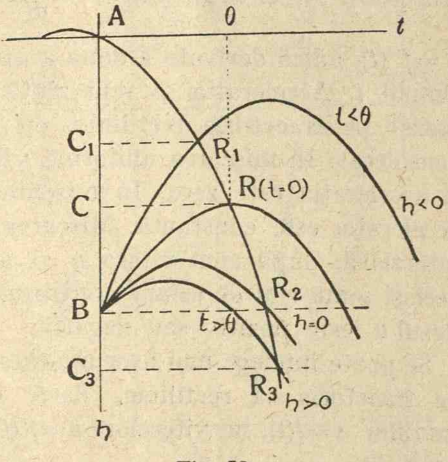


Fig. 52.

$v'(v+v') < \frac{gd}{2}$. După cum avem $t = \theta = \frac{v'}{g}$, sau $t < \theta$, sau $t > \theta$, întâlnirea mobilelor are loc în punctul culminant C al ascensiunii mobilului al doilea, sau în timpul urcării, sau în timpul scoborârii. Construind diagramele se pot vedea mai limpede aceste rezultate. Numeric $t = 2$ sec, $h = -40{,}38$ m, întâlnirea între A şi B.

154. Mişcarea rectilinie generală. Să considerăm mişcarea unui mobil M pe axa Os (Fig. 53), ecuaţia mişcării fiind $s=f(t)$, unde $f(t)$ este o funcţiune oarecare de timpul t, iar spaţiul descris la mometul t este $OM=s=f(t)$. Vitesa v la momentul t este

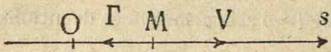


Fig. 53.

$$v=f'(t),\ v=\frac{ds}{dt},$$

derivata spaţiului în raport cu timpul, şi este reprezentată cu un vector $\overrightarrow{MV}$ cu originea în M şi îndreptat dealungul traectorii Os. Aceasta este o caracteristică a mişcării rectilinii, ca vitesa să fie îndreptată dealungul traectorii. Acceleraţia este $\gamma=\frac{dv}{dt}=v'$, sau $\gamma=\frac{d^2s}{dt^2}=s''$, $\gamma=f''(t)$, adică derivata a doua a spaţiului în raport cu timpul t. Acceleraţia se reprezintă cu un vector $M\Gamma$ aşezat pe traectoria rectilinie, cu originea în punctul considerat. In mişcarea uniformă vitesa v este constantă şi acceleraţia este zero. In mişcarea uniformă variată, acceleraţia este constantă. Mişcarea este accelerată sau întârziată, după cum viteza v şi acceleraţia γ sunt de acelaşi semn sau de semne contrare, sau după cum produsul v este pozitiv sau negativ.

Se poate înţelege mai uşor mişcarea $s=f(t)$ a mobilului pe traectoria sa rectilinie, dacă construim diagrama spaţiilor $s=f(t)$, a viteselor $v=f'(t)$ şi a acceleraţiilor $\gamma=f''(t)$.

Să considerăm mişcarea $s=t^3-7t-6$, pentru care

$$s'=v=3t^2-7,\quad s''=\gamma=6t.$$

Diagrama spaţiilor este curba reprezentată de ecuaţia $s=t^3-7t-6$, în raport cu două axe perpendiculare, timpurile t ca abscise şi spaţiile s ca ordonate. Reprezentăm unitatea de timp cu o lungime îndoită ca aceea care reprezintă unitatea spaţiilor (Scara timpurilor şi aceea a spaţiilor sunt independente). Pentru construcţia diagramei spaţiilor ABE (Fig. 54) avem tabloul

t	$-\infty$		-3		-2		$-1{,}5$		-1		0		1		$1{,}5$		2		3		∞
$v=s'$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	-7	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\gamma=s''$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$v\gamma$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
s	$-\infty$	$\nearrow$	-12	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-6	$\searrow$	-12	$\searrow$	-13	$\nearrow$	-12	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
							Max				infl				min						
Mişcarea				întârziată			M_1		accel.		M_3		întârziată		M_2		accelerată				

Diagrama vitezelor $v=3t^2-7$ este parabola CLD (Fig. 54) cu vârful L, cu axa OS. Diagrama acceleraţiilor $\gamma=6t$ este drepta $O\Gamma$ (Fig. 54). Traectoria este repretzentată de dreapta SS'.

Poziţia mobilului la un moment $t=1$, se obţine luând pe Ot o lungime $OK=1$, şi ordonata corespunzătoare $KQ=-12$ determină poziţia M a mobilului pe traectoria SS', ce se obţine ducând prin Q paralela QM la Ot. Vitesa în acest punct este egală cu $KN=-7$ şi se ştie că tangenta în Q la diagrama spaţiilor $s=t^3-7t-6$ are ca pantă (coeficient unghiului $\operatorname{tg}\alpha$) $\frac{ds}{dt}=s'$, adică panta tangentei în Q este vitesa $v=-7$ a mobilului în acest punct.

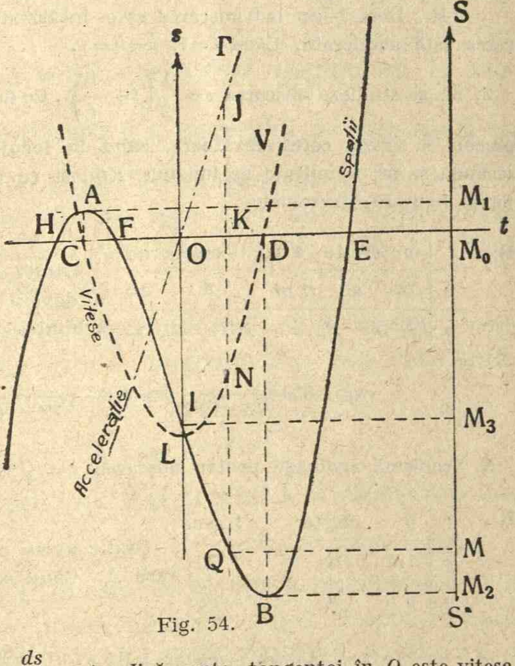


Fig. 54.

Vitesa v se anulează în $C(-1{,}5\,;0)$ şi $D(1{,}5\,;0)$ unde tangentele în A şi B la diagrama spaţiilor sunt paralele cu Ot. Ordonatele CA şi

DB a acestor puncte sunt maximum şi minimum, cărora le corespund pe traectoria SS' punctele M_1 şi M_2. In aceste puncte mobilul îşi schimbă sensul mişcării pe traectorie.

Mobilul pleacă dela $-\infty$ ajunge în M_1, ce corespunde lui $A(-1,5;1)$; în acest interval $v\gamma<o$, mişcarea este întârziată. Dela M_1 se întoarce înapoi până la M_3 ce corespunde lui $I(0,-6)$ unde acceleraţia$\gamma=6t=0$; în acest interval $v\gamma>0$, mişcarea este accelerată. De aci mobilul merge către S', şi ajunge în M_2, ce corespunde lui $B(1,5; -13)$ unde vitesa se anulează; în acest interval $v\gamma<o$, mişcarea este întârziată. Dela M_2 mobilul merge către S, schimbându-şi sensul mişcării, în acest interval $v\gamma>o$, mişcarea este accelerată.

155. **Exerciţii.** 1. Să se studieze mişcarea $s=t^3+3t+2$. Să se figureze diagranele şi să se arate că este un punct unde spaţiul, vitesa şi acceleraţia sunt egale.

R. Dela $-\infty$ la 0 mişcarea este întârziată, dela 0 la ∞ mişcarea este accelerată. Când $t=1$, $s=v=\gamma$.

2. Să se studieze mişcarea $s=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$. Ce devine această relaţie, precum şi vitesa corespunzătoare, când în locul unităţilor metru şi secundă se ia ca unitate de lungime Km, şi ca unitate de timp ora. Să se figureze diagramele.

R.

t	o	creşte	1 sec	creşte	∞
s	∞	$\searrow$	1 m	$\nearrow$	∞
v	$-\infty$	$\nearrow$	o	$\nearrow$	∞

Când t creşte, mişcarea tinde a deveni uniformă. Când se schimbă unităţile

$$s=1,8t+\frac{1}{72\times10^5t},\ v=1,8-\frac{1}{72\times10^5t^2}.$$

3. Problemă analoagă pentru mişcarea $s=\sqrt{1-t^2}$.

R.

t	o	creşte	1 sec
s	1m	$\searrow$	o
v	o	$\searrow$	$-\infty$

Grafic avem un sfert de cerc de rază 1. Când se schimbă unităţile

$$s=\sqrt{0,001^2-12960t^2},\ v=\frac{-12960t}{\sqrt{0.001^2-12960t^2}}.$$

156. **Mişcarea circulară.** Se zice că o mişcare este circulară, când traectoria mobilului este un cerc. Po-

ziția punctului M (Fig. 55) pe cerc este cunoscută, dacă se știe relația $\theta = f(t)$, care dă unghiul făcut de raza variabilă OM (Fig. 55), cu o rază fixă OA. Socotind arcele s dela originea A și în sensul indicat pe figură, avem $s = R\theta$, R fiind raza cercului, iar θ unghiul exprimat în radiani.

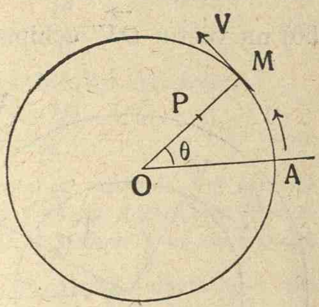


Fig. 55.

Vitesă. Vitesă unghiulară. Vitesa în această mișcare este

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}.$$

Cantitatea $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ se zice vitesă unghiulară la momentul t. Vitesa liniară v a punctului M este egală cu vectorul $\overrightarrow{MV} = R\omega$ (Fig. 55) tangent în M la cerc.

Toate punctele de pe raza OM au aceeași vitesă unghiulară. Descriind un cerc cu raza $OP=1$, vitesa liniară a lui P este ω.

Mișcarea circulară este **uniformă**, când viteza v este constantă, adică vitesa unghiulară ω este constantă. In acest caz, avem $\theta = \omega t + \theta_0$, $s = R(\omega t + \theta_0)$,

$$s = vt + s_0,\quad v = R\omega,$$

θ_0 și s_0 fiind valorile lui θ și arcului s la momentul inițial $t=0$.

Insemnând cu T durata de rotație a mobilului M, pe cercul pe care se mișcă uniform, adică timpul în care parcurge lungimea cercului $2\pi R$, (un tur), notând cu n numărul de tururi pe minut, avem

$$\mathrm{T} = \frac{60}{n},\ \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}},\ v = \frac{2\pi R}{\mathrm{T}},\ \omega = \frac{\pi n}{30},\ v = \frac{\pi R n}{30}.$$

Accelerație. Hodograful mișcării. Pentru a înțelege mai bine mișcarea, să ducem prin centrul O al cercului (Fig. 56) un vector $\overrightarrow{OV'}$ echipolent cu vitesa $\overrightarrow{MV}$ (OV' egal și paralel cu MV). Când M descrie cercul, V' descrie o curbă care se zice hodograful mișcării. Vitesa mobilului V' la momentul t este figurată prin vectorul $\overrightarrow{V'\Gamma'}$ tangent în V' la hodograf și dirijat în sensul mișcării lui V'.

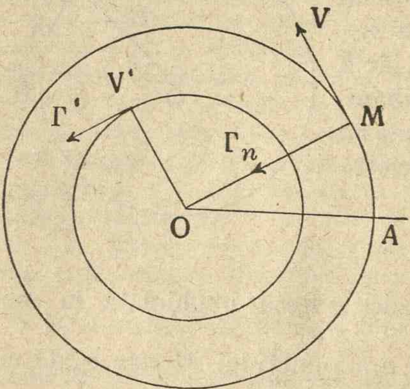


Fig. 56.

Când mobilul M are o mișcare uniformă de vitesă unghiulară constantă ω, vitesa sa $v = R\omega$, este constantă și punctul V' descrie un cerc cu raza $OV' = v$. Mișcarea lui V' este tot uniformă și mai mult, punctele M și V' au aceeași vitesă unghiulară ω. Vitesa $V'\Gamma'$ a lui V' este constantă și egală cu produsul razei v a cercului său cu vitesa unghiulară ω, adică $V'\Gamma' = v.\omega = R\omega^2$. Această vitesă liniară $V'\Gamma'$ a lui V' este tangentă în V' (Fig. 56) la cercul său, deci paralelă cu OM, adică perpendiculară pe vitesa MV a mobilului M.

Vitesa mobilului V' este *accelerația mobilului M* la momentul considerat. Accelerația mobluluii M este reprezentat cu vectorul $\overrightarrow{M\Gamma_n}$ (Fig. 56) echipolent cu $\overrightarrow{V'\Gamma'}$ și este îndreptat după raza MO, perpendiculară pe tangenta MV la cerc (MC se mai zice normală la cerc). In cazul mișcării circulare uniforme, accelerația este normală la traectorie și îndreptată către centrul O al cercului. Valoarea sa γ_n este $\gamma_n = R\omega^2$, și cum $v = R\omega$, accelerația în mișcarea circulară uniformă este

$$\gamma_n = R\omega^2, \ \gamma_n = \frac{v^2}{R}.$$

T fiind durata de rotație a mobilului M, avem

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \gamma = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

157. Aplicații. I. *Un volan al unei mașini cu vapori de 5 m diametru face 120 tururi pe minut. Să se calculeze* 1^0 *vitesa unghiulară*; 2^0 *vitesa unui punct al cercului*; 3^0 *accelerația.* 1^0 Timpul T al unei rotații complecte este $T = \frac{60\text{sec}}{120} = \frac{1}{2}$ sec. 2^0 Vitesa unghiulară este $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$ rad./sec. 3^0 Vitesa liniară este $v = \omega R = 4\pi . 2{,}50 = 10\pi =$ 31,416 m/sec.

4^0 Accelerația este $\gamma_n = \frac{v^2}{R} = \frac{100\pi^2}{2{,}50} = 40\pi^2 = 394{,}784$ m/sec.^{2}

II. *Doi bicicliști se mișcă uniform pe două piste circulare de raze* R *și* R'. *Când merg în același sens, cel care parcurge periferia cercului interior întrece pe celalt la fiecare m secunde; iar când merg în sens contrar, ei se întâlnesc după n secunde. Să se afle vitesele și accelerațiile fiecărui biciclist. Aplicație pentru cazul când lungimile pistelor circulare sunt* 500 *m și* 60 *metri și* $m = 240s$, $n = 48$ *secunde. Se înțelege că cei doi bicicliști se întâlnesc când se găsesc pe aceeași rază și de aceeași parte a centrului comun celor două cercuri.* Fie ω și ω' vitesele unghiulare ale bicicliștilor, primul fiind pe pista interioară. 1^0 *Vitesele unghiulare.* Dacă pleacă din puncte așezate pe aceeași rază și merg în același sens, diferența drumurilor pe un cerc de rază 1 este $\omega - \omega'$ după 1 secundă. După m secunde această diferență este egală cu lungimea acestui cerc, adică

$$2\pi = (\omega - \omega')m, \quad \omega - \omega' = \frac{2\pi}{m}. \tag{1}$$

Dacă merg în sens contrar, diferența drumurilor după 1 secundă este $\omega + \omega'$, deci

$$2\pi = (\omega + \omega')n, \quad \omega + \omega' = \frac{2\pi}{n}. \tag{2}$$

Din ecuațiile (1) și (2) avem

$$\omega = \pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right), \quad \omega' = \pi\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right). \tag{3}$$

2^0 *Vitesele și accelerațiile.* Pentru primul

$$v=\omega\,\mathrm{R}=\omega\,\mathrm{R}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right),\quad \gamma=\omega^2\mathrm{R}=\pi^2\mathrm{R}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)^2.$$

Pentru al doilea

$$v'=\omega'\mathrm{R}=\pi\mathrm{R}'\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right),\quad \gamma'=\omega^2\mathrm{R}'=\pi^2\mathrm{R}'\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)^2.$$

3^0 **Aplicaţie.** $\mathrm{R}=\frac{560}{2\pi}=\frac{280}{\pi},\ \mathrm{R}'=\frac{600}{2\pi}=\frac{300}{\pi},$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{48}+\frac{1}{240}=\frac{1}{40},\quad \frac{1}{n}-\frac{1}{m}'=\frac{1}{60}.$$

Pentru primul $v=280\times\frac{1}{40}=7m/\mathrm{sec.}$, sau 25,200 km/oră,

$$\gamma=280\,\pi\left(\frac{1}{40}\right)^2=\frac{70\pi}{40}=0{,}5497\ \mathrm{m/sec^2}.$$

Pentru al doilea $v'=300\times\frac{1}{60}=5\ \mathrm{m/sec}$, sau 18 km/oră;

$$\gamma'=300\pi\left(\frac{1}{60}\right)^2=\frac{\pi}{12}=0{,}2618\ \mathrm{m/sec^2}.$$

158. Exerciţii. 1. Să se calculeze vitesa liniară şi acceleraţia unui mobil care descrie uniform un cerc de rază $\mathrm{R}=5$ m, făcând $n=2500$ tururi în $t=8$ ore 43 m 36 sec.

R. $v=\frac{2\pi\,\mathrm{R}n}{t}=2{,}5\ \mathrm{m/sec}$; $\gamma=\frac{v^2}{\mathrm{R}}=1{,}25\ \mathrm{m/sec^2}$.

2. O roată de 2 metri diametru are o vitesă liniară v de 9,425 m pe secundă. Să se afle numărul de tururi pe minut.

R. $v=\frac{\pi\mathrm{R}n}{30}$, $n=\frac{30v}{\pi\mathrm{R}}=90$ tururi.

3. O locomotivă merge cu o vitesă uniformă de 60 km pe oră pe un drum circular de 600 metri rază. Să se afle acceleraţia.

R. $v=\frac{60000\ m}{60\times60}=16\frac{2}{3}\mathrm{m/sec.}$; $\gamma_n=\frac{v^2}{\mathrm{R}}=0{,}465\ \mathrm{m/sec.^2}$

4. Un mobil descrie un cerc de rază $\mathrm{R}=10$ cm cu o vitesă constantă egală cu jumătatea acceleraţii. Să se afle: 1^0 vitesa unghiulară a mo-

bilului; 2^0 numărul de tururi pe minut (cu o aproximaţie de o unitate); 3^0 vitesa şi acceleraţia.

R. 1^0 $2v=\gamma$, $2\omega R=\omega^2 R$, $\omega=2$rad/sec.; 2^0 $n=\frac{30\omega}{\pi}$, 19 tururi; 3^0 $v=20$cm/sec., $\gamma=40$cm/sec.^{2}

5. Două mobile parcurg acelaşi cerc cu o mişcare uniformă, în acelaşi sens, unul în 42 minute, celalt în 105 minute. Să se afle cât timp va trece: 1^0 între două întâlniri consecutive; 2^0 între două întâlniri în acelaşi punct al cercului.

R. Fie t şi t' aceste două intervale. 1^0 Vitesele unghiulare sunt $\frac{2\pi}{42}=\omega$, $\frac{2\pi}{105}=\omega'$; luând ca origine epoca unei întâlniri, la momentul t diferenţa drumurilor fiind 2π, avem $\left(\frac{2\pi}{42}-\frac{2\pi}{105}\right)t=2\pi$, $t=70$ minute. 2^0 La momentul t', fiecare drum este egal cu un număr întreg k sau k' de tururi. Avem $\frac{2\pi t'}{42}=k.2\pi$, $\frac{2\pi t'}{105}=k'.2\pi$, $\frac{k}{k'}=\frac{105}{42}=\frac{5}{2}$.

Cea mai mică valoare a lui k este 5. Atunci $t'=5\times 42=210$ minute. Cum avem $t'=3t$, se vede că cele două mobile se vor regăsi în acelaşi punct la interval de 3 secunde, unul făcând 5 tururi şi celalt 2.

6. Acele unui ceasornic având vitese unghiulare constante, să se afle la ce ore ele vor fi îndreptate după aceeaşi dreaptă.

R. ω şi ω' fiind vitesele unghiulare şi t una din epoci socotite dela 12, avem $\omega' t-\omega t=k\pi$, $t=\frac{k\pi}{\omega'-\omega}$.

$$\text{Dar } \omega=\frac{2\pi}{3600},\ \omega'=\frac{2\omega}{12\times 3600},\quad t=k\times\left(32 \text{ min. } 43\frac{7}{11} \text{ sec}\right).$$

7. Ce interval θ de timp separă două întâlniri consecutive: 1^0 ale acelor orelor şi minutelor; 2^0 ale acelor minutelor şi secundelor.

R. Ora fiind luată ca unitate, $\frac{1}{\theta}=\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}$,

$$T=\frac{2\pi}{\omega},\ T'=\frac{2\pi}{\omega'},\ \frac{1}{\theta}=\frac{1}{1}-\frac{1}{12}=\frac{11}{12},\ \theta=\frac{12}{11} \text{ ore} =1 \text{ oră } 5\text{m}\,27\frac{3}{11} \text{ sec.}$$

$$2^0\quad \frac{1}{\theta'}=\frac{1}{1}-\frac{1}{60}=\frac{59}{60},\ \theta'=\frac{60}{59} \text{ minute} = 1\text{m}1\frac{1}{59} \text{ sec.}$$

8. Trei ace arătând orele, minutele şi secundele se mişcă pe un cadran al unui ceasornic, şi coincid la ora 12. Să se afle la ce momente unul din ele este bisectoarea unghiului format de celelalte două.

R. Vitesele unghiulare sunt $\omega=\frac{2\pi}{43200}$, $\omega'=\frac{2\omega}{3600}$, $\omega''=\frac{2\omega}{60}$.
1^0 t epoca unde acul orelor este bisectoare, $\omega' t+\omega'' t=2\omega t+2k\pi$, $t=\frac{2k\pi}{\omega'+\omega''-2\omega}=k\left(59+\frac{13}{73}\right)$ sec ; 2^0 acul minutelor este bisectoarea, $\omega t+\omega'' t=2\omega' t+2k\pi$, $t=k\left(1\text{m}\,1\frac{683}{697}\text{ sec}\right)$; 3^0 acul secundelor este bisectoarea, $\omega t+\omega' t=2\omega'' t+2k\pi$, $t=k\left(30+\frac{390}{1427}\right)$ sec. k este un întreg oarecare, putând lua valorile $k=1,2,\ldots$ Se mai observă că $\omega'=12\omega$, $\omega''=720\omega$.

159. Mişcarea rectilinie oscilatoare (vibratoare) simplă. Să considerăm un mobil M care se mişcă uniform pe cercul O de rază R şi cu vitesa unghiulară $\omega=\frac{2\pi}{T}\cdot$ Insemnând cu θ unghiul făcut de raza OM (Fig. 57), cu o rază fixă OA, fie P proectia punctului M pe diametrul OA, Avem

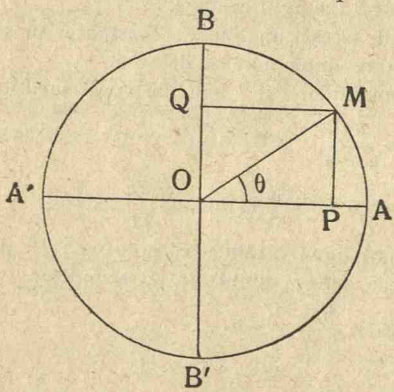


Fig. 57.

$$OP=R\cos\theta=R\cos\omega t.$$

Când M se mişcă pe cerc şi descrie arcul ABA', punctul P descrie segmentul AA' ; când M descrie arcul $A'B'A$, punctul P descrie segmentul $A'A$. Insemnând cu $x=OP$, ecuaţia mişcării punctului P este

$$x=R\cos\omega t,\quad \omega=\frac{2\pi}{\mathrm{T}},$$

T fiind timpul în care mobilul M face odată ocolul cercului. Mişcarea lui P se face între A şi A'. Fiecare din deplasările dela A la A', sau dela A' la A, constitue o *oscilație simplă* și ambele aceste două deplasări consecutive este o *oscilație dublă* sau oscilație complectă. Punctul P are o mișcare oscilatoare pe diametrul AA'.

Se zice *elongația* punctului P abscisa $OP=x$; aceasta variază dela $-R$ la $+R$; maximul său R se zice *amplitudinea* oscilații. Punctul O, mijlocul lui $A'A$, este *centrul oscilațiunii*. Se alege punctul O ca origine a spațiilor în mișcarea punctului P. Unghiul $AOM=\omega t$ se zice *faza* mișcării oscilatorii a punctului P.

Mișcarea oscilatoare este *periodică*. In adevăr, la intervale de timp egale, ori de câte ori de ex., mobilul M revine în același punct al cercului, după intervalul de timp T, P se află în aceeași poziție și cu aceeași vitesă.

Durata de timp constantă T în care face ocolul complect al cercului, se zice *perioada* mișcării oscilatoare. *Frecvența* este numărul de oscilațiuni complete efectuate în unitatea de timp. Insemnând cu N acest număr, trebue să avem $N.\mathrm{T}=1$, de unde $N=\frac{1}{\mathrm{T}}$.

160. Proecția unei mișcări circulare uniforme pe un diametru ce trece prin originea spațiilor. Vom considera mai întâi cazul când la momentul inițial $t=0$, mobilele M și P (Fig. 57) pleacă amândouă din punctul A, adică originea timpurilor coincide cu originea spațiilor, pentru punctul M. Ecuația mișcării este

$$x=R\cos\omega t, \tag{1}$$

vitesa și accelerația sunt

$$v=-R\omega\sin\omega t, \tag{2}$$

$$\gamma=-R\omega^2\cos\omega t. \tag{3}$$

Inlocuind în γ pe $R\cos\omega t$ cu valoarea sa x, obținem

$$(4) \qquad \gamma = -\omega^2 x,$$

care arată că într'o mişcare oscilatoare simplă, $x=R\cos\omega t$, *acceleraţia este proporţională cu elongaţia* şi semnul negativ arată că ea este totdeauna dirijată dela P către centrul O de oscilaţie. Se zice că O este *centru atractiv*.

Din relaţiile (1) şi (2), avem

$$x^2 = R^2 \cos^2\omega t, \quad \frac{v^2}{\omega^2} = R^2 \sin^2\omega t.$$

Adunând şi ţinând seamă că $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$, avem

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = 1, \quad v = \pm\omega\sqrt{R^2 - x^2},$$

relaţia dintre viteză şi elongaţia x.

De asemenea, din (2) şi (3) avem

$$\frac{v^2}{\omega^2} + \frac{\gamma^2}{\omega^4} = R^2(\cos^2\omega t + \sin\omega^2 t),$$

$$v^2 + \frac{\gamma^2}{\omega^2} = \omega^2 R^2, \quad \gamma = \pm\omega\sqrt{R^2\omega^2 - v^2},$$

relaţia dintre acceleraţie şi viteză.

Mişcarea considerată este oscilatoare, cu amplitudinea R şi perioada $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Făcând şi pentru această mişcare oscilatoare simplă discuţia ca şi pentru mişcarea uniform variată, avem tabloul următor, pentru o oscilaţie complectă. Se pot construi diagramele (Fig. 58), $x=R\cos\omega t$, $v=-R\omega\sin\omega t$, $\gamma=-R\omega^2\cos\omega t$, ale spaţiilor, vitezelor, acceleraţiilor, care sunt cosinusoide pentru spaţii şi acceleraţii şi sinu-

ωt	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
t	0		$\frac{\pi}{2\omega}$		$\frac{\pi}{\omega}$		$\frac{3\pi}{2\omega}$		$\frac{2\pi}{\omega}$
γ	$-R\omega^2$	$-$	0	$+$	$R\omega^2$	$+$		$-$	$-R\omega$
v	0	$\searrow$ $-$	$-R\omega$	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$	$R\omega$	$\searrow$ $+$	0
$v\gamma$		$+$		$-$		$+$		$-$	
x	R	$\searrow$	o	$\searrow$	$-R$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	R
mişcarea		retrogradă accelerată		retrogradă întârziată		directă accelerată		directă întârziată	

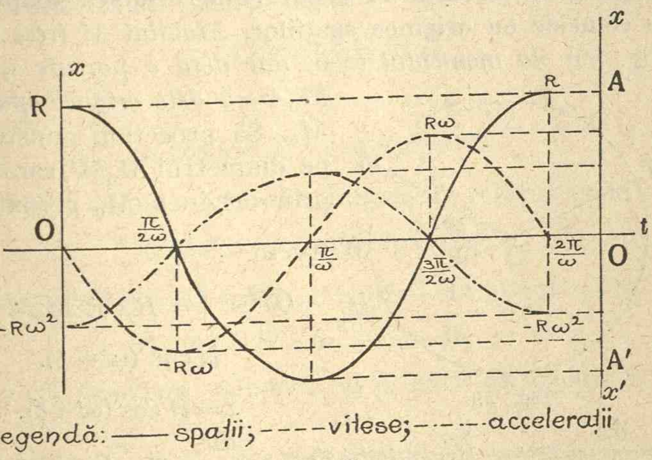


Fig. 58.

soidă pentru vitese. Se vede că mişcarea oscilatoare este accelerată când mobilul se apropie de punctul O; în caz contrar este întârziată. Vitesa este maximă în valoare absolută, când mobilul trece prin O şi este nulă în A şi A'.

Accelerația se anulează în O și este maximum în valoare absolută în A și A'.

161. **Proecția mișcării punctului M pe diametrul BB′ perpendicular pe AA′.** Insemnând cu Q proecția lui M pe BB' (Fig. 57), avem

$$O\mathrm{Q}=y=R\sin\omega t,$$

care este iarăși o mișcare oscilatoare cu amplitudinea R și perioada $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$.

Vitesa v și accelerația γ a mișcării punctului Q sunt $v=R\cos\omega t$, $\gamma=R\omega^2\sin\omega t$, $\gamma=-\omega^2 y$. Se pot de asemenea construi diagramele și discuta mișcarea ca și în cazul $x=R\cos\omega t$.

162. **Proecția unei mișcări circulare uniforme pe un diametru al cercului în cazul când originea timpurilor nu coincide cu originea spațiilor.** *Mobilul M trece în A* (Fig. 59) *la momentul* $t=0$, *dar deja a parcurs spațiul* $M_0A=\delta$ *dela orignea spațiilor* M_0. Să proectăm punctul M pe diametrul M_0M', care trece prin originea M_0 a spațiilor. Avem

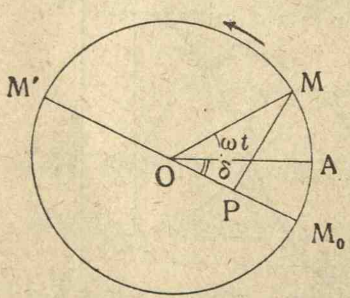


Fig. 59.

$$OP=x=R\cos M_0M=R\cos(\omega t+\delta),$$

$$x=R\cos(\omega t+\delta),$$

$$v=\frac{dx}{dt}=x'=-R\omega\sin(\omega t+\delta),\ \gamma=\frac{dv}{dt}=v'=R\omega^2\cos(\omega t+\delta)$$
$$=-\omega^2 x.$$

Aceasta reprezintă o mișcare oscilatoare (vibratoare). Spațiul s oscilează între $-R$ și R. Amplitudinea este R, iar unghiul $\omega t+\delta$ este faza. Durata unei oscilațiuni complecte, dus și întors, este cea mai mică constantă, care trebue adăogată lui t, pentru ca x și v, adică $\sin(\omega t+\delta)$ și $\cos(\omega t+\delta)$, să reia aceleași valori. Deci

$$\omega T=2\pi, \quad T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Se pot face aceleași discuțiuni ca în cazurile precedente, și se pot construi diagramele respective, care sunt sinusoide și cosinusoide.

163. Mișcarea generală oscilatoare (vibratoare) $x=A\cos\alpha t+B\sin\alpha t$. Să căutăm a aduce ecuația la forma

$$(5) \qquad x=a\cos(\alpha t+\beta).$$

Desvoltând această ecuație, obținem

$$x=a\cos\alpha t\cos\beta-a\sin\alpha t\sin\beta.$$

Identificând cu ecuația dată

$$x=A\cos\alpha t+B\sin\alpha t,$$

obținem

$$(6) \qquad a\cos\beta=A, \quad -a\sin\beta=B.$$

Ridicând la pătrat și adunând aceste relații, avem

$$a^2\cos^2\beta=A^2, \quad a^2\sin^2\beta=B^2,$$

$$a^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta=A^2+B^2, \quad a^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=A^2+B^2,$$

$$a^2=A^2+B^2, \quad a=\sqrt{A^2+B^2}.$$

Din (6) deducem valoarea lui β, dată de ecuațiile

$$(7) \quad \cos\beta=\frac{A}{a}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\beta=\frac{-B}{a}=\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Așa dar ecuația generală $x=A\cos\alpha t+B\sin\alpha t$ se aduce la forma

$$(8) \qquad x=a\cos(\alpha t+\beta), \quad a=\sqrt{A^2+B^2},$$

β fiind dat de ecuaţiile (7); deci este o mişcare vibratoare.

Ecuaţia (8) se mai poate simplifica, luând ca origine a timpului atunci când timpul este egal cu $-\frac{\beta}{\alpha}$. Inlocuind pe t cu $t_1-\frac{\beta}{\alpha}$, se vede că dacă $t_1=0$, atunci din $t=t_1-\frac{\beta}{\alpha}$ rezultă $t=-\frac{\beta}{\alpha}$. Făcând în ecuaţia (8) pe $t=t_1-\frac{\beta}{\alpha}$, obţinem

$$x=a\cos\left[\alpha\left(t_1-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\beta\right]=a\cos\alpha t_1,$$

adică ecuaţia generală $x=A\cos\alpha t+B\sin\alpha t$ se reduce la forma

$$x=a\cos\alpha t,\quad a=\sqrt{A^2+B^2},$$

deci reprezintă o mişcare oscilatoare, cu amplitudinea

$$a=\sqrt{A^2+B^2},\ \text{cu perioada } T=\frac{2\pi}{\alpha}.$$

164. **Exerciţii.** 1. Să se studieze mişcarea $x=3\sin 2t$. Să se afle vitesa şi acceleraţia după 5 m.

R. $v=6\cos 2t$, după 5 minute, $v=6\cos\left(2\times5\times60\times\frac{360}{2\pi}\right)^0$, aproape $6\cos177^0=-5{,}99$ m|sec; $\gamma=-12\sin 2t$, după 5 minute, aproape $-12\sin177^0=-0{,}628$m|sec^2. Am transformat în grade radianii $2t$ din ecuaţia mişcării, înmulţind cu numărul de grade ce are un radian $\frac{360^0}{2\pi}$ aproape 57^0.

2. Să se studieze mişcarea $x=\sin(3t+4)$.

R. Amplitudinea 1, perioada $T=\frac{2\pi}{3}=2{,}161$, frecvenţa $N=\frac{1}{T}=0{,}467$. Diferenţa de fază 4 arată că în raport cu vibraţia $x=\sin 3t$, cea propusă are loc înainte cu $\frac{4}{3}$ (din secundă), căci pentru $t=-\frac{4}{3}$, $x=0$.

3. Să se studieze mişcările $x=\sin\frac{t}{2}$, $x=-\cos 2t$.

4. Să se studieze mişcarea $x=3\sin t+4\cos t$. Să se afle maximul vitesei.

R. Amplitudinea $a=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Faza sa $\varphi=t+\beta$, $x=a\cos(t+\beta)$, din (7) rezultă $\operatorname{tg}\beta=-\frac{3}{4}$, $\beta=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; $v=3\cos t-4\sin t$ este maximum când acceleraţia $\gamma=-(3\sin t+4\cos t)$ trece dela + la —, $\operatorname{tg} t=-\frac{4}{3}$, $\sin t=-\frac{4}{5}$, $\cos t=\frac{3}{5}$, vitesa maximum $v_1=\frac{9}{5}+\frac{16}{5}=5$.

5. Să se arate că mişcarea rectilinie $x=5-2\cos^2 t$ este oscilatoare. Să se determine centrul de oscilaţie, amplitudinea, perioada.

R. x variază între 3 şi 5; luând noua origine $x_1=4$, şi punând $X=x-x_1=1-2\cos^2 t=-\cos 2t=\cos(\pi+2t)$, amplitudinea este 2, iar perioada este π.

6. Să se determine o mişcare oscilatoare rectilinie, ştiind că la momentul $t=0$ mobilul se găseşte la distanţa x_0 de un punct fix O, are vitesa v_0, iar durata unei oscilaţii duble este T. Aplicaţie $x_0=-1$m, $v_0=2$m/sec, T = 3sec.

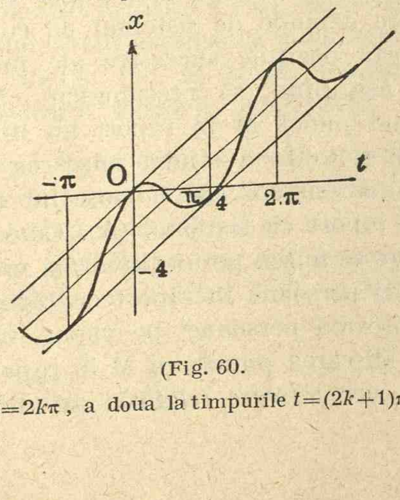
R. $x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$, $v=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$; trebue să avem $x_0=A$, $v_0=B\omega$, $\omega T=2\pi$, $x=x_0\cos\frac{2\pi t}{T}+\frac{v_0 T}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}$; numeric,

$x=-\cos(2{,}0944t)+0{,}955\sin(2{,}0944t)$.

7. Să se studieze mişcarea rectilinie ce are ecuaţia

$$x=t+2t\cos t-2.$$

R. $v=1-2\sin t$, $\gamma=-2\cos t$ sunt periodice cu perioada 2π şi oscilează a doua între —2 şi 2 şi prima între —1 şi 3. Acceleraţia schimbă de semn pentru $t=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ şi vitesa pentru $\sin t=\frac{1}{2}$, $t=(12k+1)\frac{\pi}{6}$ şi $(12k+5)\frac{\pi}{6}$. Diagrama este o curbă sinusuidală oblică, cuprinsă între dreptele paralele $x=t$, $x=t-4$ (Fig. 60), pe care le atinge prima la momentele $t=2k\pi$, a doua la timpurile $t=(2k+1)\pi$.



(Fig. 60.

8. Se consideră mişcarea rectilinie

$$x = e^{-kt}\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t),$$

A, B, ω, k fiind constante. Să se arate că momentele unde vitesa este nulă formează o progresie aritmetică cu raţia $\frac{\pi}{\omega}$, iar abscisele corespunzătoare fac o progresie geometrică cu raţia $-e^{-\frac{k\pi}{\omega}}$. Să se arate apoi că mişcarea se compune dintr'un şir de oscilaţiuni cu durata constantă, dar cu amplitudini care tind către zero. Aplicaţie pentru $x = e^{-t}\sin 2t$.

R. A se vedea exerciţiul 11 dela No. 109.

165. Mişcarea relativă. Compunerea vitezelor. — Când zicem că un corp este în repaus sau în mişcare, se înţelege că acest repaus sau mişcare au loc în raport cu alte corpuri considerate ca fixe, numite *de reper*. Cum corpurile la care raportăm mişcarea sau repausul nu sunt fixe, căci toate împreună cu Pământul se mişcă, urmează că ideea de *mişcare este relativă*, şi totdeauna trebue spus care sunt corpurile în raport cu care se defineşte repausul sau mişcarea. De ex., o persoană care este pe un vapor ce se mişcă pe un fluviu este în repaus faţă de vaporul în care stă, dar este în stare de mişcare faţă de ţărmul fluviului.

Deci, mişcarea unui punct este un fenomen relativ, care depinde de sistemul de comparaţie la care se raportă poziţiile succesive ale mobilului.

Aşa fiind, să presupunem că se cunoaşte mişcarea unui punct M în raport cu un sistem de comparaţie (S) şi voim a studia mişcarea punctului M în raport cu alt sistem (A), cunoscând mişcarea sistemului (S) în raport cu sistemul (A). Cum ar fi de ex., un vapor care se mişcă pe un fluviu, şi vrem să studiem mişcarea unei persoane în raport cu ţărmul fluviului, cunoscând mişcarea persoanei pe vapor.

Mişcarea punctului M în raport cu primul sistem (S) se zice *mişcare relativă*, iar vitesa în această mişcare, se zice *vitesă relativă*; vitesa sistemului (S) în raport cu (A) se zice *vitesă de antrenament*; vitesa punctului M în raport cu sistemul (A) se zice *vitesă absolută*.

Fie C traectoria descrisă de mobilul M (Fig. 61) în raport cu sistemul de comparație (S). In timp ce mobilul M

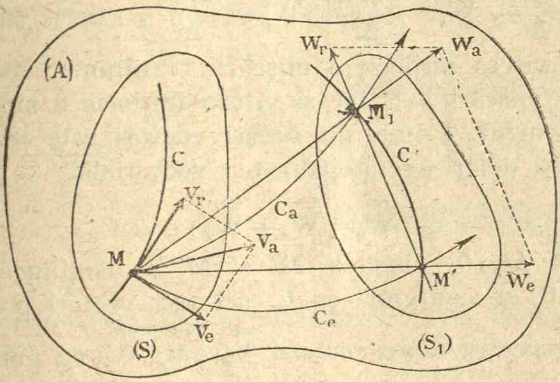


Fig. 61.

descrie această curbă C invariabil legată de (S), sistemul (S) se deplasează astfel că la momentul t mobilul, sistemul de comparație și traectoria sa ocupă pozițiile M, (S) și C, pe când la momentul următor $t+\Delta t$, ele ocupă pozițiile M_1, (S_1), C_1. Deplasarea rezultantă a mobilului este MM_1, iar mobilul merge din M în M_1 descriind curba C_a care este traectoria mișcării rezultante.

Fie M' poziția ce ocupă la momentul $t+\Delta t$ punctul sistemului (S) cu care M era în coincidență la momentul t; $M'M_1$ este deplasarea relativă a mobilului în raport cu sistemul (S_1); MM' este deplasarea de antrenament. Vectorul MM_1 este rezultanta vectorilor $M'M_1$ și MM', care se notează vectorial

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M'M_1} + \overrightarrow{MM'}.$$

Impărţind cu Δt, avem

$$\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{M'M_1}}{\Delta t}+\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}.$$

Să luăm pe dreptele MM_1, $M'M_1$, MM' vectorii $\overrightarrow{W}_a=\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$, $\overrightarrow{W}_r=\frac{\overrightarrow{M'M_1}}{\Delta t}$, $\overrightarrow{W}_e=\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$, care sunt respectiv vitesa mijlocie a mişcării rezultante, vitesa mijlocie a mişcării relative şi vitesa mijlocie a mişcării de antrenament. Primul din aceşti vectori este rezultanta celorlalţi doi şi avem egalitatea vectorială

$$(1)\qquad \overrightarrow{W}_a=\overrightarrow{W}_r+\overrightarrow{W}_e.$$

Dacă $\Delta t\rightarrow 0$, punctele M' şi M_1 se confundă cu M, curba C_1 se confundă cu C, cei trei vectori precedenţi tind respectiv către vectorii $\overrightarrow{V}_a$, $\overrightarrow{V}_r$, $\overrightarrow{V}_e$ cu punctul de aplicaţie în M (Fig. 61), şi sunt vitesa $\overrightarrow{V}_a$ a mişcării rezultante la momentul t, vitesa relativă $\overrightarrow{V}_r$ şi vitesa de antrenament $\overrightarrow{V}_e$. Deci trecând la limită, din relaţia (1) deducem egalitatea vectorială

$$\overrightarrow{V}_a=\overrightarrow{V}_r+\overrightarrow{V}_e,$$

adică vitesa $\overrightarrow{V}_a$ în mişcarea rezultantă este rezultanta vitesei relative $\overrightarrow{V}_r$ şi a vitesei de antrenament $\overrightarrow{V}_e$ a punctului M.

Aceşti trei vectori sunt respectiv dirijaţi după tangentele în M, primul $\overrightarrow{V}_a$ la traectoria mişcării rezultante, al doilea $\overrightarrow{V}_r$ la traectoria relativă C, al treilea $\overrightarrow{V}_e$ la traectoria punctului geometric al sistemului (S) cu care punctul M coincide la momentul t.

Deci vitesa în mişcarea rezultantă este rezultanta viteselor relative şi vitesei de antrenament; ea este diagonala paralelogramului construit cu vitesele relativă şi de antrenament.

166. Aplicaţie la compunerea mişcărilor. — Fie punctul M (Fig. 62) ce are deodată mişcarea uniformă dealungul dreptei Ox cu vitesa $v_e = MV_e$ şi dealungul lui Oy mişcarea uniformă cu vitesa $v' = MV_r$. Punctul M se mişcă dealungul diagonalei MV_a a paralelogramului construit cu MV_e şi MV_r, ca şi cum ar avea vitesa $MV_a = v_a$.

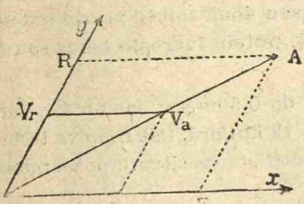


Fig. 62.

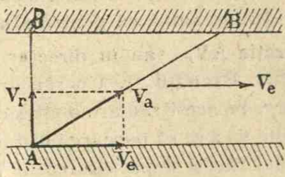


Fig. 63.

167. *Exemple.* — 1. O barcă trebue să traverseze un râu de lărgime l. Vitesa sa este v_r, iar aceea a apei este v_e. Să se afle: 1⁰ în ce punct va ajunge pe celălalt ţărm al râului, dacă se îndreaptă perpendicular pe râu; 2⁰ în ce direcţie trebue să îndreptăm barca pentru ca traversarea să se facă perpendicular pe râu; 3⁰ în ce direcţie trebue îndreptată barca pentru ca să ajungă într'un punct determinat pe celălalt ţărm (Se consideră că barca ar fi ca un punct material).

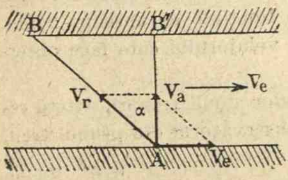


Fig. 64.

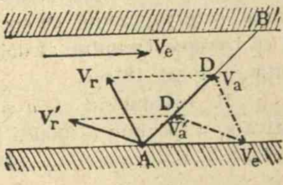


Fig. 65.

1⁰ Dacă apa ar fi imobilă, n'ar fi mişcarea de antrenament, distanţa AB (Fig. 63) ar fi parcursă în $\frac{l}{v_r}$ secunde. In realitate, la sfârşitul acestui timp, barca se găseşte în B', astfel că $BB' = v_e \frac{l}{v_r}$.

2^0 Fie AB direcţia căutată, ce face unghiul α cu perpendiculara (normală) pe râu (Fig. 64). Avem

$$\sin\alpha = \frac{V_r V_a}{AV_r} = \frac{v_e}{v_r}.$$

Problema e posibilă dacă $v_e < v_r$. Când $v_e = v_r$, $\alpha = 90^0$, barca ar rămâne nemişcată.

3^0 Pentru a ajunge în B (Fig. 65), trebue ca vitesa rezultantă să fie îndreptată după AB. Se cunoaşte unghiul BAV_e şi vitesele v_e şi v_r; trebue a rezolva un triunghiu cunoscând două laturi şi unghiul opus la una din ele. Pot fi, nici o soluţie, una sau două soluţii ; cazul a două soluţii înseamnă că pentru a ajunge în B, putem îndrepta barca sau în direcţia AV_r sau în direcţia AV_r'

186. Exerciţii. 1. Un râu are o vitesă de 0,50m/sec, iar un vas care merge pe acest râu are o vitesă proprie de 12 km/oră. Cât timp va trebui acelui vas ca să parcurgă distanţa dintre două oraşe situate pe marginea acelui râu şi depărtare cu 30 km.

R. Dacă vasul merge în josul apei, vitesa rezultantă a lui este suma vitesei relative (proprii) a vasului şi vitesei de antrenament a curentului, iar dacă merge în susul apei diferenţa lor. Avem 1^0 $v = 12 + 0{,}0005 \times 3600 = 13{,}8$ km/oră, $T = \frac{30}{13{,}8}$ aproape 2 ore 10 min.;

$2^0 v = 12 - 0.0005 \times 3600 = 10{,}2$ km/oră, $T = \frac{30}{10{,}2} = 2$ ore 56 min.

2. Două trenuri merg în sens contrar, unul cu vitesa de 40 km. pe oră, iar celalt cu o vitesă necunoscută. Să se determine vitesa trenului al doilea, ştiind că o persoană din primul tren a observat că are 40 vagoane, care împreună cu locomotiva au o lungime de aproape 210m, şi că trecerea trenului al doilea, prin faţa voiajorului care face observaţia, a durat 12 sec.

R. Insemnând cu v şi v' vitesele celor două trenuri, vitesa relativă v_1 a trenului al doilea în raport cu observatorul din primul tren, este suma viteselor $v_1 = v + v'$ şi $v_1 = \frac{210}{12}$. Deci $v' = v_1 - v = \frac{210}{12} - \frac{40000}{3600} = 6{,}39$ m/sec. $= 23$ km./oră.

3. Dela Brăila la Sulina vapoarele de pasageri ale Navigaţiunii Fluviale Române, fac în afară de timpul de oprire, 7 ore, iar dela Sulina la Brăila 8 ¾ ore. Distanţa Brăila—Sulina fiind aproximativ 150 km, să se găsească vitesa mijlocie proprie a vapoarelor şi vitesa mijlocie a Dunării.

R. v şi v' fiind vitesele proprii mijlocii pentru vapoare şi pentru Dunăre, avem $v+v'=\frac{150}{7}$ km/oră, $v-v'=\frac{150}{8,75}$ km/oră ; $v=75\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8,75}\right)$ $=19,3$ km/oră, $v'=2,14$ km/oră$=0.60$ m/sec.

4. Două puncte se mişcă pe aceeaşi axă, astfel că la momentul t abscisele lor au ca expresii $s_1=3t^2+5t+6$, $s_2=6t^2-5t+4$. Să se afle vitesa relativă la momentul când distanţa lor este maximum sau minimum.

R. $d=s_2-s_1=3t^2-10t-2$ admite un minimum când $t_0=\frac{5}{3}$. Vitesele mobilelor sunt $v_1=6t_0+5$, $v_2=12t_0-5$, iar vitesa relativă este $v_2-v_1=6t_0-10=0$, căci în acest moment vitesele lor sunt egale şi de acelaşi sens.

5. Revoluţia sinodică a Lunei, dată prin observarea eclipselor, fiind, în zile solare mijlocii, 29,53, şi revoluţia siderală a Pământului de 365,256, să se afle durata de revoluţie siderală a Lunei.

R. x fiind durata revoluţiii siderale şi α deplasarea unghiulară a Pământului în jurul Soarelui în timpul revoluţiei sinodice, avem

$$\frac{x}{2\pi}=\frac{29,53}{2\pi+\alpha},\qquad \frac{\alpha}{29,53}=\frac{2\pi}{365,356}=\frac{2\pi+\alpha}{394,786}.$$

$$x=29,53\times\frac{365,256}{394,786}=27,322 \text{ zile.}$$

6. O barcă traversează un râu de lungimea $l=40$m. vitesa sa este 2m/sec, iar vitesa apei 0,50m/sec. Să se afle : 1^0 In ce punct şi după ce distanţă va ajunge, dacă îndreptăm barca perpendicular pe ţărmurile paralele ale râului ; 2^0 în ce direcţie trebue să fie orientată barca, şi în cât timp, ca traversarea să se facă perpendicular la ţărm ; 3^0 în ce direcţie trebue îndreptată barca, pentru ca plecând din A să ajungă în B pe celalt ţărm, astfel ca unghiul dreptei BA cu ţărmul lui A să fie de $40' 30^0$.

R. 1^0 Insemnând cu v_e şi v_r vitesa de antrenament a râului şi vitesa relativă (proprie) a bărcii (Fig. 63), timpul în care se face traversarea este $\frac{l}{v_r}=\frac{40}{2}=20$ sec., $BB'=20\times0,5=10$m, drumul parcurs de barcă este $AB'=\sqrt{40^2+10^2}=41,23$m. 2^0 Avem (Fig. 64) $\sin B'AB=$ $\frac{v_e}{v_r}=\frac{0,5}{2}=\frac{1}{4}$, iar $B'AB=14^0 28'$ este înclinarea pe verticala BB' ce trebue să dăm bărcii spre a traversa perpendicular râul şi vitesa rezultantă este $v_a = AV_a = \sqrt{\overline{AV_r}^2 - \overline{AV_e}^2} = 1,93$ m/sec., durata traversării este 40 $AV_a = 20,7$ sec. 3^0 In triunghiul $V_a A V_e$(Fig. 65) se cunoaşte unghiul $V_a A V_e = 40^0 30'$ şi laturile $AV_e = v_e = 0,5$, $V_e V^a = AV^r = v_r = 2$m; avem numai o soluţie, $2 : \sin 40^0 30' = 0,5 : \sin\alpha$, $\alpha = V_a A V_r$, $\sin\alpha = \frac{1}{4} \sin 40^0 30'$, $\alpha = 9^0\ 19' 31''$, barca să facă cu ţărmul de unde pleacă unghiul $40^0 30' + 9^0 19' 31''$.

7. O persoană merge pe stradă cu vitesa 2m/sec. în timpul unei ploi care cade vertical cu 1,40m/sec. Ce direcţie trebue să dea umbrelei ca să fie cât mai bine apărat de ploae.

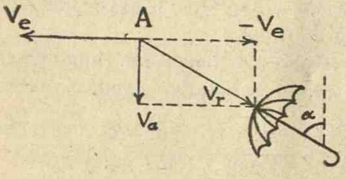


Fig. 66.

R. Bastonul umbrelei trebue să facă cu verticala (Fig. 66) unghiul α, $tg\alpha = \frac{V_e}{V_a} = \frac{2}{1\ 4}$, V_e fiind vitesa de antrenament a persoanei şi V_a vitesa absolută a picăturilor de ploae; bastonul umbrelei are direcţia vitesei relative V_r rezulranta vitesei V_a şi a unei vitese egală şi direct opusă cu a voiajorului, $\vec{V_r} = \vec{V_a} - \vec{V_e}$; $\alpha = 55^0$.

8. Un cilindru gol are bazele sale de hârtie; el se învârteşte în jurul axe sale cu o mişcare uniformă. La un moment dat un glonţ de puşcă străbate cilindrul paralel cu axa lui; razele care trec prin centrele celor două găuri făcute de glonţ în bazele cilindrului, fac între ele unghiul α. Să se deducă vitesa glonţului, presupunând că ea este constantă în timpul cât glonţul străbate cilindrul. Aplicaţie când cilindru face 80 rotaţii pe minut, lungimea lui este de 1,20m., $\alpha = 3^0$.

R. Fie l lungimea cilindrului, ω şi v vitesa unghiulară a cilindrului şi a glonţului; avem $l = vt$, $\alpha = \omega t$, $v = \frac{l\omega}{\alpha}$; numeric, $v = \frac{1,20 \times \frac{2\pi \times 80}{60}}{\frac{2\pi \times 3}{360}}$ $= 192$ m/sec.

TABLA DE MATERIE