EDITURA CASEI ŞCOALELOR

LECŢIUNI DE TEORIA FUNCŢIUNILOR

PARTEA II

FUNCŢIUNI ELIPTICE

DE

DAVID EMMANUEL

Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti

BUCUREŞTI

CVLTVRA NAŢIONALĂ

1927

EDITURA CASEI ŞCOALELOR

LECŢIUNI DE TEORIA FUNCŢIUNILOR

PARTEA II

FUNCŢIUNI ELIPTICE

DE

DAVID EMMANUEL
Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti

BUCUREŞTI
CVLTVRA NAŢIONALĂ
1927

PREFAȚĂ

Primele capitole ale acestor lecțiuni conțin expunerea proprietăților generale ale funcțiunilor analitice de două variabile complexe, deduse din expresiunea lor în serii de puteri și din teoremele lui Cauchy asupra integralei unei funcțiuni de variabilă complexă. Un capitol este consacrat proprietăților generale ale funcțiunilor algebrice de o variabilă, cuprinzând teorema lui Puiseux, *relativă la separațiunea ramurilor în domeniul unui punct critic. Se introduce, în aceste lecțiuni, noțiunile cele mai simple relative la suprafețele lui Riemann și la studiul funcțiunilor uniforme pe aceste suprafețe. Se face studiul integralelor eliptice aduse la formele normale clasice și se demonstrează teorema celebră a lui* Abel, *relativă la adițiunea integralelor eliptice de speța întâia.*

In capitolele următoare se studiază funcțiunile eliptice. Această parte a fost litografiată în anul 1911; ea apare aci mai completă decât în prima edițiune. Plecând dela integrala eliptică de speța întâia, a cărei inversiune se efectuează, se deduce existența funcțiunilor uniforme dublu periodice. *Se adoptă, ca punct de plecare, funcțiunea σu a lui Weierstrass, de unde se deduce funcțiunea $\wp u$ și derivata ei $\wp' u$. Cu ajutorul acestor elemente se construește efectiv o funcțiune eliptică oarecare. Tabla de materie indică chestiunile tratate în acest curs.*

«Casei Școalelor», care a avut bunavoință a dispune tipărirea acestui volum, exprim adânca mea recunoștință.

Editurii «Cultura Națională» datoresc mulțumirile mele pentru atențiunea susținută în tot timpul tipăririi acestor Lecțiuni.

D-lui Inginer A. Froda, care m'a ajutat la revizuirea corecturilor și d-lui Inginer E. Abason, la desenarea figurilor, exprim viile mele mulțumiri.

D. E.

TABLA DE MATERIE

CAPITOLUL I.

Funcţiuni analitice de două variabile.

CAPITOLUL II.

Funcţiuni algebrice.

CAPITOLUL III.

CAPITOLUL IV.

Suprafeţele lui Riemann.

CAPITOLUL V.

Funcţiuni uniforme pe suprafeţele lui Riemann.

CAPITOLUL XI.

Inversiunea integralei de speța I.

CAPITOLUL XII.

Funcțiuni dublu periodice.

CAPITOLUL XIII.

Funcțiunile σu, ζu, pu.

CAPITOLUL XIV.

Multiplicațiunea argumentului funcțiunii pu.

CAPITOLUL XIX.

Funcțiunile eliptice de speța II și de speța III.

CAPITOLUL XX.

Degenerarea funcțiunilor eliptice.

CAPITOLUL XXI.

Funcțiunea pu cu invarianți reali.

CAPITOLUL XXII.

Problema Inversiunii. Integrale eliptice.

CAPITOLUL XXVIII.

Teoremele D-lui Picard.

NOTA I.

NOTA II.

NOTA III.

NOTA IV.

ERRATA VOLUMULUI I

Pag.	linia	In loc de	Citește
79	13	A B	2A 2B
85	1	(15)	(10)
87	Nota	A se adăugă (§ 171)	
96	17	$a_n x$	$a_n x^n$
99	7	x_1 prin x_1+x-x_1	x prin $x_1+(x-x_1)$
109	6 (de jos)	a^n	a_n
115	16	a_n	Q_n

122 11 (de jos) a se adăugă linia: unul din ele ar fi prelungirea celuilalt (2º § 331): ceeace este imposibil (§ 138).

126	7	$p<r$	$\rho<r$

130 (§ 172). Acest paragraf trebuie înlocuit prin următorul:

§ 172. Fie $x=\xi+i\eta$, $f(x)=u(\xi, \eta)+iv(\xi, \eta)$, u și v funcțiuni reale de variabile reale ξ, η. *Valoarea maximă a funcțiunilor $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$, în domeniul punctului $x_0=\xi_0+i\eta_0$, nu este atinsă decât pe cercul $|x-x_0|=r$.*

In adevăr, din egalitatea

$$a_0=f(x_0)=u(\xi_0, \eta_0)+iv(\xi_0, \eta_0)$$

rezultă [(6), (8), § 114] egalitățile

$$u(\xi_0, \eta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r, \varphi)d\varphi, \quad v(\xi_0, \eta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(r, \varphi)d\varphi.$$

Fie A maximul funcțiunii $u(\xi, \eta)$ și B maximul funcțiunii $v(\xi\ \eta)$ în cercul $|x-x_0|=r$; din egalitățile precedente rezultă inegalitățile

$$u(\xi_0, \eta_0)<\mathrm{A}, \quad v(\xi_0, \eta_0)<\mathrm{B}.$$

Notă. Nici una din valorile $u(\xi_0, \eta_0)$, $v(\xi_0, \eta_0)$, nu poate fi egală cu maximul respectiv fără ca funcțiunea $u(\xi, \eta)$ sau $v(\xi, \eta)$ să se reducă la o constantă. Vom vedeà mai departe dacă una din aceste funcțiuni este o constantă, rezultă că și cealaltă este constantă și prin urmare $f(x)=c^{tă}$.

Pag.	linia	In loc de	Citeşte
134	formula (2)	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
142	Nota	$m \pm n$	$m \neq n$
143	5 (jos)	a^k	a_k
147	11	$\|x\|<1$	$\|x\| \lesseqgtr 1$
148	8 (jos)	$\|x\|<1$	$\|x\| \lesseqgtr 1$
148	10 (jos)	$\|x\|<1$	$\|x\| \lesseqgtr 1$
163	3 (jos)	fig. 12	fig. 13
164	11	fig. 13	fig. 14
164	12 (jos)	fig. 14	fig. 15
164	11 (jos)	$\xi<0$	$\xi \lesseqgtr 0$
165	2	$\eta<0$	$\eta \lesseqgtr 0$
167	17	în loc de $(1-\lambda^2)(u^2+v+1)-2(1+\lambda^2)v^2$ se citeşte $(1-\lambda^2)(u^2+v^2+1)-2(1+\lambda^2)v$	
167	19	$\lambda \gtrless 1$	$\lambda \lesseqgtr 1$
169	2 (jos)	cel	ceea
173	10	$p\,x\dfrac{dy}{dx}=1$	$p\,x\dfrac{dy}{dx}=y$
173	14 (jos)	$k=0, 1\ldots; p$	$k=0, 1,\ldots\, p-1$
180	9	fig. 1	fig. 20
180	11	*omb* | *anc*	*amb* | *anc*
180	12	*omb*	*amb*
181	1	*and*	*cnd*
183	16	$-\eta_1$	$-y_1$
192	fig. I	$M(-x)$	$M'(-x)$
192	1 (jos)	$M_1\widehat{AM}'$	$M_1\widehat{AM}'_1$
194	14 (jos)	parte unui	parte, unui
196	7	$P(x-x_0)$	$P_1(x-x_0)$

197 A se adăugă după a doua linie: Să mai considerăm seria

$\Sigma \dfrac{x^n}{n^2}$, care se poate scrie

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2}=\sum_1^\infty\int_0^x \frac{x^{n-1}}{n}\,dx=\int_0^x \frac{1}{x}\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\,dx=-\int_0^x \frac{\log(1-x)}{x}\,dx.$$

Funcţiunea $\dfrac{\log(1-x)}{x}$ nu are altă singularitate decât punctul $x=1$; de unde rezultă aceeaş concluziune pentru integrală şi prin urmare seria dată are, pe cercul său de convergenţă, unicul punct singular $x=1$.

198	8 (jos)	A suprimà prepoziţiunea *pe*.	
199	3 (jos)	A închide	[ ]
212	5 (jos)	S″ faţă de S	S′ faţă de S

Pag.	linia	In loc de	Citește
223	3	$\int \Delta = f(z)\, dz -$	$\Delta = \int_C f(z)\, dz -$
223	8	cu z	cu ε
230	1	Fize=	Fie $z=$
230	24	$\frac{1}{(z-x)^2\,(z-x-h)}$	$\frac{h}{(z-x)^2\,(z-x-h)}$
235	5	$\frac{1}{ziR}$	$\frac{h}{2i\pi}$
244	3	x^{n-}	x^{-n}
244	7 (jos)	a^n	a_n
245	5 (jos)	$z-a_k-(x-a_k)$	$x-a_k-(z-a_k)$
250	5 (jos)	$F(z+t)$	$F(z_0+t)$
254	4	toate	toată
255	6	$\frac{f(x)}{z-x}$	$\frac{f(z)}{z-x}$
255	18	$\int \frac{z-x}{f(z)}\, dx$	$\int \frac{f(z)}{z-x}\, dz$
267	3 (jos)	$\int \mathrm{J} =$	$\mathrm{J} = \int_{x_0}^{x_0+2\pi}$
277	1 (jos)	$\int_o$	$\int_o^1$
279	2	$\frac{A_m}{x-a^m}$	$\frac{A_m}{(x-a)^m}$
283	6 (jos)	$\frac{e^{\frac{2i\pi}{n}z^2}}{2i\pi z-1}$	$\frac{e^{\frac{2i\pi}{n}z^2}}{e^{2i\pi z}-1}$
287	5	legaritmicei	logaritmice
289	3	$\frac{\varphi(z)}{f(z)}$	$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$
291	13 (jos)	(3)	(2)
291	4 (jos)	$a_1\, b_1$	$a_1\, b_2$
293	1 (jos)	$P(x)_1\, P(o)$	$P_1(x), P_1(o)$
297	16	(C),	(C);
298	18, 19	A, A'	$\mathscr{A}, \mathscr{A}'$
298		A se înlocui în fig. A, A' prin	$\mathscr{A}, \mathscr{A}'$
300	4	$\|x-\xi\| = r$	$\|z-x\| = r$
302	24	A	$\mathscr{A}$
302	25	A	$\mathscr{A}$
326	10	$\omega = \int_{a_2}^{a_1}$	$\omega = \int_{a_1}^{a_2}$
»	14	$\int_{a_1}^{a_2} =$	$\int_{a_1}^{a_2} =$

Pag.	linia	In loc de	Citeşte
326	8 (jos)	fig. 70	fig. 75
331	20	a se şterge (fig. 2)	
335	8	(fig. 82)	(fig. 83)
338	15	$(-1, -\infty)$, $(1, +\infty)$	$\left(-1, -\frac{1}{k}\right)$, $\left(1, +\frac{1}{k}\right)$
»	16	(fig. 84)	(fig. 85)
339	9 (jos)	$\pm K_1 \pm K + 2iK'$	$\pm K, \pm K + 2iK'$
343	5 (jos)	(fig. 88)	(fig 89)
	A se înlocuì, pe fig. 89, punctele z', z'' prin x', x''		
345	9 (jos)	(fig. 89)	(fig. 90)
347	1 (jos)	$\underset{z'=z''}{\mathrm{Rez}}$	$\underset{z=z''}{\mathcal{R}ez}$
359	5 (Notă)	$e^{\varrho_n} \sum_{\nu}^{\infty} P_n(x)$	$e^{g_n} \sum_{\nu}^{\infty} P_n(x)$
361	9	Σ	$\sum_{m+1}^{\infty}$
370	20	A se închide parenteza după $e^{g(x)}$	
372	6	$f'(x)$	$f'(x)=o$
375	6	.	,
380	6 (jos)	1 la ∞	1 şi tinde către ∞ cu a.
380	5 (jos)	avem $\lvert \sin \pi x \rvert < 1$.	avem aşà dar $\lvert \sin \pi x \rvert < 1$.
386	2 (jos)	x	y
387	1 (jos)	$a\varrho$	$r\varrho$
391	6	$y_1, y_2 x_3$	y_1, y_2, y_3
391	12—13	punctelor	punctele
393	7	$\beta = \frac{R^2}{r} e^{i\beta}$	$\beta = \frac{R^2}{r} e^{i\varphi}$
393	10	ν	r
394	5	$\alpha = \frac{a\alpha+\beta}{c\alpha+d}$	$\alpha = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$
398	15 (jos)	ν_1	r_1
400	11	ν_1	r_1
400	Literile A şi B ale primului cerc trebuie permutate între ele		
400	Ultima linie trebuie descompusă şi scrisă astfel:		

$$\frac{1}{OA'} = \frac{OA}{a}, \quad \frac{1}{OB'} = \frac{OB}{a}; \quad \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{OA+OB}{a};$$

însă $OA+OB=2OC$, prin urmare

$$\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{2\,OC}{a} = \frac{2}{OD}.$$

ERRATA VOLUMULUI II.

Pag.	Linia	In loc de	Citeşte
33	14	$Ax^h+(\ )$	$Ax^h+\ldots+(\ )$
67	1	Numărul VII să fie şters.	
72 (Nota)		$x-a=x'^{\frac{1}{p}}$	$x-a=x'^p$
»	»	$\int_{\Gamma_1}(\ )\ldots$	$\int_{\Gamma_1} f(\ )\ldots$
97 (fig. 25)		Semnele $\pm$, pe tăietura A, să fie permutate.	
108 (fig. 29)		Litera B lipseşte pe tăietura din stânga	

176 *Adaos* (după egalitatea (12)): Coeficienţii desvoltării lui σu se pot obţine, introducând în identitatea

$$\sigma u\, \zeta u = \sigma' u.$$

seria $\sigma u = u + a_1 u^3 + a_2 u^5 + a_3 u^7 + \ldots$ şi identificând ambele membre, după ce s'a înlocuit ζu prin seria (11).

Pag.	Linia	In loc de	Citeşte
186	16	$u+v+w=o$	$u+v+w\equiv o$
201	12 (jos)	$p'^2 u$	$p' 2u$
204	10	$\frac{u}{n^{n^2}-1}$	$\frac{n}{u^{n^2}-1}$
309 (fig. 52)		$\omega_2, \omega_1+\omega_2$	$\omega_3, \omega_1+\omega_3$
453	3	τ	J.

CAPITOLUL I.

FUNCŢIUNI ANALITICE DE DOUĂ VARIABILE.

I. — PROPRIETĂŢI GENERALE.

1. Fie x şi y două variabile complexe independente. Le vom reprezentà pe două plane diferite: planul (x), planul (y). Un *sistem de valori* $x=x_0$, $y=y_0$ se zice că constitue un punct (x_0, y_0). Domeniul unui asemenea punct este format din ariile cercurilor

$$|x-x_0|=r \qquad |y-y_0|=\varrho,$$

r şi ϱ fiind două numere pozitive destul de mici.

Fie A şi B două arii situate respectiv în planul (x) şi în planul (y); vom zice că un punct (x_0, y_0) este situat în regiunea (A,B), dacă x_0 este în interiorul lui A şi y_0 în interiorul lui B.

O variabilă complexă z se numeşte funcţiune de variabilele x, y definite într'o regiune dată (A,B), dacă fiecărui punct situat în acea regiune corespunde una sau mai multe valori determinate pentru z. Continuitatea şi continuitatea uniformă a unei funcţiuni de două variabile complexe se defineşte ca în cazul variabilelor reale. O funcţiune continuă într'o regiune dată este uniform continuă în acea regiune.

2. Fie

$$f_1(x, y),\ f_2(x, y), \ldots\ldots, f_n(x, y), \ldots$$

un şir nelimitat de funcţiuni de variabilele x şi y; să considerăm seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, y)$$

Totalitatea punctelor în cari această serie este convergentă constitue regiunea sa de convergenţă.

Definiţiunea convergenţei uniforme a unei serii de funcţiuni de două variabile independente într'o regiune (A, B) este aceeaş ca în cazul unei singure variabile; înlocuim punctul x prin punctul (x, y) şi aria A prin regiunea (A, B).

Avem propoziţiunile următoare a căror demonstraţiune este aceeaş ca în cazul funcţiunilor de o singură variabilă:

1°. *Dacă există un şir de numere pozitive*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

astfel ca oricare ar fi punctul (x, y) în regiunea (A, B) să avem

$$|f_n(x, y)| \leqq a_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

şi dacă seria Σa_n este convergentă, seria

$$\sum_1^\infty f_n(x, y)$$

este absolut şi uniform convergentă în interiorul lui (A, B).

2°. *Suma*

$$F(x, y) = \sum_1^\infty f_n(x, y)$$

a unei serii uniform convergente de funcţiuni continue într'o regiune dată este o funcţiune continuă în acea regiune.

3°. *Serii de puteri.* O serie de puteri x, y este de forma

$$\sum_{m, n=-\infty}^{\infty} a_{m, n}\, x^m y^n,$$

coeficienţii $a_{m, n}$ fiind cantităţi constante. Dacă m şi n primesc numai valori întregi şi pozitive, seria se zice *întreagă.*

Teoremă. Dacă pentru un sistem de valori $x = x_0$, $y = y_0$, modulele termenilor seriei întregi

$$P(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{m, n}\, x^m y^n$$

sunt mai mici ca un număr pozitiv dat M, seria este absolut şi uniform convergentă pentru toate valorile lui x şi y cari satisfac inegalităţile

$$|x| < |x_0|, \quad |y| < |y_0|$$

Această teoremă este o extensiune a teoremei lui Abel relativă la seriile întregi de o singură variabilă. Să punem

$$|x_0| = r_0, \quad |y_0| = \varrho_0, \quad |x| = r, \quad |y| = \varrho.$$

Vom aveà, în virtutea ipotezei,

$$(1) \qquad |a_{m, n}|\, r_0^m \varrho_0^n < M;$$

de unde

$$(2) \qquad \left| a_{m,\,n} \right| r^m \varrho^n < M \left(\frac{r}{r_0}\right)^m \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n .$$

Presupunând $r < r_0$, $\varrho < \varrho_0$, avem

$$\sum_0^\infty \left(\frac{r}{r_0}\right)^m = \frac{1}{1 - \frac{r}{r_0}}, \quad \sum_0^\infty \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}}.$$

Multiplicând aceste două serii între ele, obţinem egalitatea

$$\sum_{m,\,n=0}^\infty \left(\frac{r}{r_0}\right)^m \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n = \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)};$$

de unde rezultă (1° § 2) că seria propusă este absolut şi uniform convergentă în regiunea considerată.

Corolar. Dacă seria P (x, y) este convergentă într'un punct (x_0, y_0) ea va fi absolut şi uniform convergentă pentru toate valorile lui x şi y cari satisfac inegalităţile

$$|x| < |x_0|, \; |y| < |y_0|.$$

De unde rezultă că dacă seria este divergentă într'un punct (x_0, y_0) ea va fi divergentă pentru toate valorile lui x şi y cari satisfac inegalităţile

$$|x| > |x_0|, \quad |y| > |y_0|.$$

4. *Cercuri de convergenţă asociate.* Fie R şi R′ două numere pozitive astfel că pentru $|x| < R$ şi $|y| < R'$ seria P (x, y) este convergentă, iar pentru $|x| > R$, $|y| > R'$ această serie este divergentă. Vom zice că cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$ sunt *cercuri de convergenţă asociate* ale seriei P (x, y). Există o deosebire esenţială între cercurile de convergenţă astfel definite şi între cercul de convergenţă al unei serii întregi de o singură variabilă. In cazul din urmă cercul de convergenţă este unic, pe când în cazul a două variabile, avem în genere o infinitate de sisteme de cercuri de convergenţă asociate. De exemplu seria:

$$\sum_{m,\,n=0}^\infty \frac{(m+n)!}{m!\,m!} x^m y^n = \sum_{\mu=0}^\infty (x+y)^\mu$$

este convergentă pentru $|x| + |y| < 1$ şi numai în acest caz; prin urmare razele R şi R′ ale cercurilor de convergenţă asociate satisfac egalitatea $R + R' = 1$. Numărul lor este deci nelimitat. Se poate însă întâmpla, ca şi în cazul unei serii întregi de două variabile, să existe un sistem unic de cercuri de convergenţă asociate. Astfel seria

$$\sum_{m,\, n=o}^{\infty} x^m y^n = \left(\sum_{m=o}^{\infty} x^m\right) \left(\sum_{n=o}^{\infty} y^m\right)$$

este convergentă numai pentru $|x| < 1, |y| < 1$; prin urmare $R = R' = 1$

5. *Dacă o serie întreagă*

$$P(x, y) = \sum_{m,\, n=o}^{\infty} a_{m,\, n} x^m y^n$$

se anulează pentru o infinitate de valori ale variabilelor x şi y, independente între ele şi vecine cu zero, ea este identic nulă.

In adevăr, să presupunem y fix, dar având o valoare oarecare vecină cu zero, şi să ordonăm seria după puterile lui x

$$P(x, y) = \sum_{m=o}^{\infty} A_m x^m, \quad A_m = \sum_{n=o}^{\infty} a_{m,n} y^n .$$

Seria $\sum\limits_{m=o}^{\infty} A_m x^m$ fiind, prin ipoteză, nulă într'o infinitate de puncte a căror limită este $x = o$, rezultă

$$A_m = o \qquad (m = o, 1, 2 \ldots)$$

Aceste egalităţi fiind adevărate pentru o infinitate de valori y a căror limită este $y = o$, rezultă că toţi coeficienţii seriilor

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_{m,\, n} \; y^n \qquad (m = o, 1, 2 \ldots)$$

sunt nuli. Ceeace demonstră teorema.

Corolar. Dacă două serii întregi $P(x, y)$, $P_1(x, y)$ sunt egale într'o infinitate de puncte (x, y) vecine cu punctul $(x = o, y = o)$, ele sunt identice.

6. *Inegalităţi ce satisfac coeficienţii unei serii întregi.*

Fie

$$P(x, y) = \sum_{m,\, n=o}^{\infty} a_{m,\, n} x^m y^n = \sum_{m=o}^{\infty} A_m x^m$$

$$A_m = \sum_{n=o}^{\infty} a_{m,\, n} \; y^n \; ;$$

r şi ϱ două numere pozitive, respectiv mai mici decât razele cercurilor de convergenţă relative la variabilele x, y. Fie M modulul maximum al seriei $P(x, y)$ pe cercurile (r) şi (ϱ); avem

$$|A_m| < \frac{M}{r^m};$$

prin urmare coeficienții seriei

$$A_m = \sum_{n=o}^{\infty} a_{m,\,n} y^n$$

vor satisface inegalitățile

$$|a_{m,\,n}| < \frac{M}{r^m \varrho^n}$$

$$(m,\ n = o, 1, 2 \ldots)$$

7. *Sumă de serii întregi.* Teorema lui *Weierstrass* asupra sumelor de serii de puteri de o singură variabilă se aplică și seriilor de puteri de mai multe variabile. Ne mărginim a considerà o sumă de serii întregi de două variabile.

Fie

$$(1) \qquad P_1(x, y), P_2(x, y), \ldots, P_i(x, y), \ldots$$

un șir nelimitat de serii întregi, convergente în cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$, reprezentate prin egalitățile

$$(2) \qquad P_i(x, y) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a^{(i)}_{m,\,n} x^m y^n$$

și să presupunem că seria

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y)$$

este uniform convergentă dealungul cercurilor $|x| = r$, $|y| = \varrho$, r și ϱ fiind două numere pozitive mai mici respectiv decât R și R' însă putând fi oricât de aproape voim de aceste numere. Voim să demonstrăm — în aceasta consistă teorema lui *Weierstrass* — că suma (3) se poate înlocui printr'o serie întreagă, convergentă în interiorul cercurilor $|x| = R$, $|y| = R'$.

In virtutea convergenții uniforme a seriei (3), la un număr pozitiv ε arbitrar de mic, corespunde un număr întreg μ astfel încât să avem

$$(4) \qquad \left|\sum_{i=\mu}^{\infty} P_i(x, y)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\sum_{i=\mu+p}^{\infty} P_i(x, y)\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

de unde inegalitatea

$$(5) \qquad \left|\sum_{i=\mu}^{\mu+p} P_i(x, y)\right| < \varepsilon,$$

oricât de mare ar fi numărul întreg pozitiv p. Primul membru al acestei inegalităţi conţinând un număr limitat de serii, putem grupà termenii după puterile lui x, y şi să scrim

$$\left| \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=\mu}^{\mu+p} a_{m,n}^{(i)} \right) x^m y^n \right| < \varepsilon$$

şi prin urmare, în virtutea inegalităţilor ce satisfac coeficienţii unei serii întregi (§ 6),

$$\left| \sum_{i=\mu}^{\mu+p} a_{m,n}^{(i)} \right| < \varepsilon\, r^{-m} \varrho^{-n}.$$

De unde conchidem că seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{m,n}^{(i)}$$

este convergentă. In locul inegalităţii precedente putem dar scrie pe cea următoare

$$(6) \qquad \left| \sum_{i=\mu}^{\infty} a_{m,n}^{(i)} \right| < \varepsilon\, r^{-m} \varrho^{-n}$$

Să punem

$$b_{m,n} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{m,n}^{(i)}$$

şi să considerăm seria

$$(7) \qquad \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n}\, x^m y^n$$

Vom probà că această serie este convergentă în regiunea considerată. Pentru aceasta să punem

$$b'_{m,n} = \sum_{i=1}^{\mu-1} a_{m,n}^{(i)}, \quad b''_{m,n} = \sum_{i=\mu}^{\infty} a_{m,n}^{(i)};$$

vom aveà

$$b_{m,n} = b'_{m,n} + b''_{m,n},$$

şi prin urmare

$$(8) \qquad \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n}\, x^m y^n = \sum_{m,n=0}^{\infty} b'_{m,n}\, x^m y^n + \sum_{m,n=0}^{\infty} b''_{m,n}\, x^m y^n$$

cu condiţiunea

$$(9) \qquad | b''_{m,n} | < \varepsilon\, r^{-m} \varrho^{-n}.$$

De aci rezultă că pentru toate valorile lui x, y cari satisfac inegalitățile

$$|x| = r' < r, \quad |y| = \varrho' < \varrho,$$

avem

$$(10) \quad \left| \sum_{m,n=0}^{\infty} b''_{m,n} x^m y^n \right| < \varepsilon \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^m \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^n = \frac{\varepsilon}{\left(1-\frac{r'}{r}\right)\left(1-\frac{\varrho'}{\varrho}\right)}$$

Seria

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} b''_{m,n} x^m y^n$$

este așà dar absolut și uniform convergentă în interiorul cercurilor $|x| = r$, $|y| = \varrho$. De altă parte, seria

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{\mu-1} b'_{m,n} x^m y^n = \sum_{i=1}^{\mu-1} P_i(x,y)$$

fiind suma celor dintâi $\mu—1$ serii (1) este convergentă în aceleași cercuri. Prin urmare seria

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n$$

este absolut convergentă pentru valorile

$$|x| < r \text{ și } |y| < \varrho.$$

Să considerăm acum diferența

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y) - \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n,$$

care, în virtutea egalităței (11), este egală cu diferența

$$\sum_{i=\mu}^{\infty} P_i(x, y) - \sum_{m,n=0}^{\infty} b''_{m,n} x^m y^n;$$

prin urmare

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y) - \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n \right| \leqq \left| \sum_{i=\mu}^{\infty} P_i(x, y) \right| + \left| \sum_{m,n=0}^{\infty} b''_{m,n} x^m y^n \right|$$

De unde, în virtutea inegalităților (4) și (10), rezultă inegalitatea

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x,y) - \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n \right| < \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{r\varrho}{(r-r')(\varrho-\varrho')} \right)$$

Insă membrul întâiu fiind independent de ε, rezultă că el este riguros nul; de unde egalitatea

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y) = \sum_{m,n=o}^{\infty} b_{m,n}\, x^m y^n,$$

valabilă în interiorul cercurilor $|x| = r$, $|y| = \varrho$ şi prin urmare în interiorul cercurilor de convergenţă $|x| = R$, $|y| = R'$; căci prin ipoteză, r şi ϱ difer respectiv de R şi R' oricât de puţin voim.

8. *Consecinţe.* Din teorema precedentă decurg consecinţe analoage cu cele relative la seriile de o singură variabilă, anume: [1])

I. Produsul a două serii întregi $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, convergente în aceleaşi cercuri $|x| = R$, $|y| = R'$, se poate înlocui printr'o singură serie întreagă convergentă în aceleaşi cercuri. De unde rezultă o consecinţă analoagă pentru o funcţiune raţională întreagă de un număr limitat de serii întregi convergente în cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$.

II. Fie

$$(13) \qquad P(u, v) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a_{m,n}\, u^m v^n$$

o serie întreagă de variabilele complexe u şi v, convergentă în cercurile $|u| = R$, $|v| = R'$; de altă parte, fie

$$(14) \qquad u = P_1(x, y), \quad v = P_2(x, y)$$

două serii întregi convergente în cercurile $|x| = R_1$, $|y| = R'_1$. Inlocuind în seria (13) u şi v prin seriile (14), $P(u, v)$ va deveni o serie întreagă de x şi y convergentă în domeniul punctului $(x = o, y = o)$ sub condiţiunea necesară şi suficientă ca să avem inegalităţile

$$|P_1(o, o)| < R, \quad |P_2(o, o)| < R'.$$

Aceeaş demonstraţiune ca în cazul seriilor de o singură variabilă.

III. Fie $P(x, y)$ o serie întreagă convergentă în domeniul originei $x = y = o$ şi să considerăm câtul

$$\frac{1}{P(x, y)}.$$

1°. Dacă numitorul nu se anulează în punctul $x = y = o$, există, în virtutea continuităţii, un număr pozitiv r astfel ca pentru

$$|x| < r, \quad |y| < r$$

[1]) I. & 120.

să avem

$$| P(x, y) - P(o, o) | < | P(o, o) |.$$

Punând pentru prescurtare

$$P_1(x, y) = P(x, y) - P(o, o),$$

avem dar

$$\left| \frac{P_1(x, y)}{P(o, o)} \right| < 1$$

și prin urmare

$$\frac{1}{P(x, y)} = \frac{1}{P(o, o) + P_1(x, y)} = \frac{1}{P(o, o)} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{P_1(x, y)}{P(o, o)} \right)^n$$

sau

$$(1) \qquad \frac{1}{P(x, y)} = \mathscr{P}(x, y),$$

adică câtul considerat se poate exprimà printr'o serie întreagă convergentă în domeniul originei.

2°. Dacă $P(o, o) = o$, egalitatea (1) este imposibilă; căci în vecinătatea originei $x = y = o$, membrul întâiu poate în valoare absolută devenì mai mare ca un număr pozitiv, oricât de mare voim, și nu poate prin urmare fi reprezentat printr'o serie întreagă $\mathscr{P}(x, y)$.

Să considerăm acum două serii $P(x, y)$, $P_1(x, y)$ convergente în acelaș domeniu și câtul

$$(2) \qquad \frac{P_1(x, y)}{P(x, y)}.$$

Din cele ce preced rezultă că dacă $P(o, o) \neq o$, câtul (2), privit ca produsul lui $P_1(x, y)$ prin $\frac{1}{P(x, y)}$ se va exprimà printr'o serie întreagă $P(x, y)$ convergentă în domeniul punctului $x = o$, $y = o$. Dacă $P(o, o) = o$ și $P_1(o, o) \neq o$ asemenea expresiune este imposibilă.

Dacă o egalitate de forma

$$\frac{P_1(x, y)}{P(x, y)} = \mathscr{P}(x, y)$$

este posibilă, se zice că seria $P_1(x, y)$ este divizibilă cu seria $P(x, y)$. Avem atunci

$$P_1(x, y) = P(x, y)\, \mathscr{P}(x, y).$$

Divizibilitatea astfel definită este totdeauna posibilă dacă seria $P(x, y)$ nu se anulează în punctul $x = y = o$.

Dacă ambele serii $P(x, y)$, $P_1(x, y)$ nu se anulează în punctul (o, o), fiecare din ele este divizibilă prin cealaltă.

Cazul când ambele serii se anulează în acelaş timp îl vom studià mai departe.

9. *Seria Taylor.* Fie

$$(1) \qquad P(x, y) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a_{m,n}\, x^m y^n$$

o serie întreagă convergentă în cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$ şi x_0, $x_0 + h$, y_0, $y_0 + k$ puncte situate respectiv în aceste cercuri. Vom aveà

$$(2) \qquad P(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a_{m,n} (x_0 + h)^m (y_0 + k)^n .$$

Membrul al doilea se poate transformà într'o serie întreagă de h şi k convergentă, sub condiţiunile

$$(3) \qquad |x_o| + |h| \leqq R_1, \qquad |y_o| + |k| \leqq R_1',$$

R_1 şi R_1' fiind două numere pozitive respectiv mai mici ca R şi R', însă oricât de apropiate voim de aceste numere.

Pentru a justificà această propoziţiune, să privim h şi k ca puncte variabile raportate respectiv la x_0 şi y_0 ca origină. Atunci inegalităţile (3) exprimă că aceste puncte sunt situate în interiorul sau pe cercurile, având punctele x_0 şi y_0 ca centre şi razele

$$r = R_1 - |x_o| \qquad \varrho = R_1' - |y_o|.$$

In aceste puncte avem

$$|a_{m,n} (x_o + h)^m (y_o + k)^n| \leqq |a_{m,n}|\, R_1^m R_1'^n ;$$

prin urmare seria, ai cărei termeni sunt funcţiunile raţionale şi întregi de h şi k

$$a_{m,n} (x_o + h)^m (y_o + k)^n ,$$

este absolut şi uniform convergentă şi suma sa se poate reprezentà printr'o serie întreagă de h şi k, convergentă în cercurile considerate.

Putem dar scrie egalitatea

$$(4) \qquad P(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{m,n=o}^{\infty} P_{m,n}(x_0, y_0) \frac{h^m\ k^n}{m!\ n!},$$

în care coeficienţii $P_{m,n}(x_0, y_0)$ sunt serii întregi de x_0, y_0 şi anume:

$$P_{0,0}(x_0, y_0) = \sum_{m,n=o}^{\infty} a_{m,n}\, x_0^m\, y_0^n ,$$

$$P_{1,0}(x_0, y_0) = \sum_{m,n=o}^{\infty} m\, a_{m,n}\, x_0^{m-1} y_0^n , \quad P_{0,1}(x_0, y_0) = \sum_{m,n=o}^{\infty} n\, a_{m,n}\, x_0^m y_0^{n-1},$$

cuprinse toate în expresiunea generală

$$(5)\quad P_{\mu,\nu}(x_0\, y_0) = \sum_{\substack{m=\mu\\ n=\nu}}^{\infty} m(m-1)\dots(m-\mu+1)\, n(n-1)\dots(n-\nu+1)\, a_{m,n}\, x_0^{\,m-\mu}\, y_0^{\,n-\nu},$$

$$(\mu, \nu = o, 1, 2, \dots).$$

(Să nu uităm că punctele x_0 și y_0 sunt interioare cercurilor $|x| = R$, $|y| = R'$).

Seriile

$$P_{1,0}(x, y) = \sum_{m,\,n=o}^{\infty} m\, a_{m,n}\, x^{m-1}\, y^n, \quad P_{0,1}(x, y) = \sum_{m,\,n=o}^{\infty} n\, a_{m,n}\, x^m\, y^{n-1}$$

se numesc *derivate parțiale* de ordinul întâiu ale seriei $P(x, y)$ respectiv în raport cu x și y; ele se reprezintă prin

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

Aceste serii au aceleași cercuri de convergență ca seria primitivă; căci, precum am zis mai sus, ele sunt convergente în interiorul cercurilor $|x| = R$, $|y| = R'$ și se recunoaște fără greutate că ele sunt divergente pentru valorile $|x| > R$, $|y| > R'$, pentru cari seria dată este divergentă. (A se vedeà cazul seriilor de o singură variabilă [1]).

Grupul de serii

$$P_{2,0}(x,y),\; P_{1,1}(x,y),\; P_{0,2}(x,y)$$

constitue derivatele parțiale de ordinul al doilea; le reprezentăm prin

$$\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2}.$$

Intr'un mod general, $P_{m,n}(x.y)$ se reprezintă prin

$$\frac{\partial^{m+n} P(x,y)}{\partial x^m\, \partial y^n}$$

și se numește derivată parțială de ordinul $m + n$ a seriei primitive, luată de m ori în raport cu x și de n ori în raport cu y.

Din expresiunea (5) rezultă că valoarea unei derivate parțiale oarecari, este independentă de ordinea în care operațiunea este efectuată.

Punând

$$x_0 + h = x, \quad y_0 + h = y$$

---

[1]) I. § 100.

egalitatea (1) se va putea scrie

$$(6)\ P(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^{m+n} P(x, y)}{\partial x^m \ \partial y^n} \right)_{x_0, y_0} \frac{(x-x_0)^m}{m!} \frac{(y-y_0)^n}{n!}.$$

In această dezvoltare consistă seria *Taylor* pentru o funcţiune de două variabile.

10. Reprezintând membrul al doilea (6) prin $P_1(x-x_0\ y-y_0)$, avem egalitatea

$$(7)\qquad P(x, y) = P_1(x-x_0, y-y_0),$$

valabilă în toate punctele x şi y situate în interiorul cercurilor având punctele x_0 şi y_0 ca centre şi tangente respectiv la cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$.

Razele cercurilor de convergenţă ale seriei $P_1(x-x_0, y-y_0)$, dedusă din seria $P(x, y)$, ale căror centre sunt punctele x_0 şi y_0, sunt cel puţin egale cu

$$R - |x_0|, \quad R' - |y_0|$$

dar ele pot fi mai mari. In cazul din urmă se zice că seria dată se prelungeşte în afară din cercurile sale de convergenţă. Se probează ca şi în cazul unei singure variabile că egalitatea (7) subsistă în toată regiunea comună de convergenţă a seriei primitive $P(x, y)$ şi a seriei deduse $P_1(x-x_0, y-y_0)$.

11. Noţiunea de *prelungire analitică* şi de *funcţiune analitică* de două variabile se introduce ca şi în cazul seriilor de o singură variabilă[1]). Fie

$$S = P(x-x_0, y-y_0)$$

o serie întreagă convergentă în cercurile C şi C'. Presupunând că seria se prelungeşte în afară din aceste cercuri, reprezentăm prin

$$S_1 = P(x-x_0, y-y_0;\ x_1, y_1)$$

seria prelungită, x_1 fiind un punct în interiorul cercului C şi y_1 un punct în interiorul lui C'. Fie C_1 şi C'_1 cercurile de convergenţă corespunzătoare. Dacă seria S_1 se prelungeşte afară din aceste cercuri, reprezentăm prin

$$S_2 = P(x-x_0, y-y_0;\ x_1, y_1;\ x_2, y_2)$$

seria prelungită, x_2 fiind un punct în C_1 şi y_2 un punct în C_2; etc. Totalitatea seriilor $S, S_1, S_2, \ldots$ constitue o *funcţiune analitică* $f(x, y)$ de variabilele independente x, y; una oarecare din

[1]) I. & 145.

aceste serii se numește *element* al funcțiunii. Regiunea acoperită de totalitatea cercurilor de convergență ale acestor serii formează regiunea de existență a funcțiunii.

Noțiunile de funcțiune uniformă și multiformă a funcțiunilor analitice de două variabile se introduc prin considerațiuni analoage cu cele din cazul unei singure variabile.

O funcțiune analitică $f(x, y)$ se zice *olomorfă* sau *regulată*, în domeniul unui punct (x_0, y_0), dacă în domeniul acestui punct ea se poate pune sub forma

(1) $$f(x, y) = P(x-x_0, y-y_0).$$

Funcțiunea se zice olomorfă într'o regiune dată, dacă este olomorfă în domeniul fiecărui punct al regiunei; ea se zice *întreagă* dacă este olomorfă pentru toate valorile finite ale variabilelor x și y. Dacă numărul termenilor lui $P(x, y)$ este limitat, funcțiunea se zice *întreagă rațională*; în caz contrar funcțiunea se zice *transcedentă*.

Dacă în domeniul unui punct (x_0, y_0) egalitatea (1) este imposibilă, punctul (x_0, y_0) se zice punct *singular* al funcțiunii.

12. In privința funcțiunilor analitice întregi de două variabile, avem teorema următoare, analoagă cu aceea a lui Liouville.

O funcțiune întreagă $f(x, y)$ nu poate rămânea finită în tot câmpul de variațiune al variabilelor x și y [1]*, dacă nu se reduce la o constantă.*

In adevăr, fie

(1) $$f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}\, x^m y^n$$

o funcțiune întreagă; să presupunem că există un număr pozitiv M astfel ca

(2) $$|f(x, y)| < M,$$

pentru toate valorile x, y satisfăcând egalitățile

$$|x| = R, \; |y| = R',$$

R și R′ fiind două numere arbitrar de mari.

Vom avea pentru coeficienții $a_{m,n}$ inegalitățile (§ 6)

$$|a_{m,n}| < \frac{M}{R^m R'^n}.$$

Insă R și R′ fiind prin ipoteză oricât de mari voim, rezultă că toți coeficienții $a_{m,n}$ sunt nuli exceptând coeficientul $a_{0,0}$. Ceeace demonstră teorema.

[1] Adică în tot planul (x) și în tot planul (y).

13. Dacă în locul inegalității (2), avem inegalitatea

$$\left|\frac{f(x, y)}{x^p\ y^q}\right| < M,$$

p și q fiind cele mai mici numere întregi satisfăcând această inegalitate, funcțiunea $f(x, y)$ este un polinom de gradul p în x și de gradul q în y. Căci, în virtutea acestei inegalități, coeficienții $a_{m,n}$ satisfac inegalitățile

$$|a_{m,n}| < \frac{M}{R^{m-p} R'^{n-q}}$$

și prin urmare sunt nuli pentru toate valorile $m > p$, $n > q$.

q.e.d.

14. *Extensiunea integralei lui Cauchy la o funcțiune analitică de două variabile, olomorfă într'un câmp dat.*

Fie $f(x, y)$ o funcțiune olomorfă în câmpul format dintr'o arie limitată de o curbă închisă C situată în planul variabilei x și dintr'o arie limitată de o curbă închisă C′ situată în planul variabilei y, continuă pe ambele curbe. Avem egalitățile

$$(1) \qquad f(x, y) = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_C \frac{f(z, y)}{z - x}\,dz,$$

$$(2) \qquad f(z, y) = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{C'} \frac{f(z, u)}{u - y}\,du;$$

de unde integrala lui Cauchy

$$(3) \qquad f(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_{C'} \frac{f(z, u)}{(z - x)(u - y)}\,dz\,du\ ^{1)}.$$

15. Egalitățile (1) și (2) dau respectiv:

$$(4) \qquad \frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^m} = \frac{m!}{2\,i\,\pi}\int_C \frac{f(z, y)}{(z - x)^{m+1}}\,dz,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial^n f(z, y)}{\partial y^n} = \frac{n!}{2\,i\,\pi}\int_{C'} \frac{f(z, u)}{(u - y)^{n+1}}\,du;$$

de unde

$$(6) \qquad \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m\,\partial y^n} = -\frac{m!\,n!}{4\pi^2}\int_C\int_{C'} \frac{f(z, u)}{(z-x)^{m+1}(u-y)^{n+1}}\,dz\,du,$$

---

1) Nu ne ocupăm aci de teoria integralelor duble de variabile complexe. Integrala dublă (3) are un sens bine determinat, consistând în două integrațiuni simple consecutive, precum rezultă din operațiunile (1) și (2). Membrul al doilea (1) reprezintă o funcțiune olomorfă de x în interiorul curbei C, oricare ar fi punctul y în interiorul lui C′, și membrul al doilea (2) reprezintă o funcțiune olomorfă de y în interiorul lui C′, oricare ar fi punctul z pe conturul C. Rezultatul celor două operațiuni consecutive, reprezintat prin integrala dublă (3), este o expresiune analitică a funcțiunei olomorfe $f(x, y)$ în domeniul considerat.

integralele fiind luate în sensul pozitiv dealungul fiecăreia din curbele C şi C'.

Corolar. Dacă C şi C' sunt cercuri având centrele lor respectiv în punctul x şi în punctul y cu razele r şi r'

$$|z - x| = r, \quad |u - y| = r'$$

şi dacă M este maximul lui $|f(z, u)|$ dealungul acestor cercuri, formula (6) ne dă inegalităţile

$$\left|\frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n}\right| \leqq m!\, n!\, \frac{M}{r^m r'^n}.$$

16. Fie $x = a$, $y = b$ un punct ordinar al funcţiunii $f(x, y)$ şi $f(a, b) = o$. Zicem că punctul (a, b) este un *zero* al funcţiunii.

(Trebue să observăm că un zero nu este un punct izolat, ci face parte dintr'un *continuum* de zeruri. Aceasta rezultă din faptul că, în virtutea ecuaţiunei $f(x, y) = o$ satisfăcută într'un punct ordinar, fiecare din cele două variabile x, y variază într'un mod continuu împreună cu cealaltă, precum se va vedea mai departe).

Să considerăm desvoltarea funcţiunei în domeniul unui zero şi, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că acest punct coincide cu origina. Este deajuns pentru aceasta, să facem substituţiunea $x = a + x'$, $y = b + y'$ şi să considerăm funcţiunea $f(a + x', b + y') = f_1(x', y')$, olomorfă în domeniul punctului $x' = y' = o$ şi anulându-se în acest punct.

Funcţiunea $f(x, y)$ olomorfă în domeniul punctului $x = y = o$ şi nulă în acest punct este reprezentată printr'o serie întreagă de forma

(1) $f(x, y) = a_{10} x + a_{01} y + a_{20} x^2 + a_{11} x y + a_{02} y^2 + \ldots$

convergentă în două cercuri $|x| = R$, $|y| = R'$, R şi R' fiind două numere pozitive.

Să presupunem într'un mod general că toţi coeficienţii a_{ik} în cari indicele $i < m$, m întreg pozitiv, sunt nuli şi coeficientul $a_{m,o} \neq o$; avem expresiunea de forma

(2) $$f(x, y) = x^m P(x, y), \quad P(o, o) = a_{m,o}$$

Funcţiunea $f(x, y)$ admite punctul $x = o$ ca zero de ordinul m, oricare ar fi valoarea lui y satisfăcând inegalitatea $|y| < R'$ ceeace constitue pentru funcţiunea dată o *infinitate de zeruri neizolate* în domeniul punctului $x = y = o$ (fapt fără analogie în cazul funcţiunilor analitice de o singură variabilă).

Dacă toţi coeficienţii a_{ik} în care $k < n$ sunt nuli şi $a_{o,n} \neq o$ avem expresiunea de forma

(3) $$f(x, y) = y^n P(x, y), \quad [P(o, o) = a_{m,n}].$$

Punctul $y = o$ este un zero de ordinul n al funcţiunii, oricare ar fi punctul x în interiorul cercului $|x| = R$: concluziune analoagă cu cea de mai sus, funcţiunea admite o infinitate de zeruri neizolate în domeniul punctului $x = y = o$.

Dacă toţi coeficienţii a_{ik} pentru $i < m$ şi $k < n$ sunt nuli şi $a_{m,n} \neq o$, avem expresiunea de forma

$$(4) \qquad f(x, y) = x^m y^n P(x, y), \quad [P(o, o) = a_{mn}].$$

Funcţiunea admite punctul $x = o$ ca zero de ordinul m, oricare ar fi punctul y în interiorul cercului $|y| = R'$ şi deasemenea punctul $y = o$ ca zero de ordinul n, oricare ar fi punctul x în interiorul cercului $|x| = R$.

Dacă funcţiunea $f(x, y)$ nu conţine ca factor comun nici una din cele două variabile, funcţiunea $f(o, y)$ nu poate admite în cercul $|y| = R'$ decât un număr limitat de zeruri, deasemenea funcţiunea $f(x, o)$ nu se poate anulà în cercul $|x| = R$ decât într'un număr limitat de puncte.

II. TEOREME GENERALE.

17. *Teoremă. Fie $f(x, y)$ o funcţiune analitică de variabilele x, y, olomorfă pentru toate valorile acestor variabile satisfăcând inegalităţile*

$$|x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R',$$

R şi R′ fiind două numere pozitive. Dacă pentru $x = o$ funcţiunea $f(o, y)$ admite $y = o$ ca zero multiplu de ordinul n, există două numere pozitive $r < R$, $\rho < R'$ astfel încât pentru o valoare x satisfăcând inegalitatea $|x| < r$, funcţiunea $f(x, y)$, admite n zeruri având modulele lor mai mici ca ρ, cari tind către zero când x tinde către zero.

Pentru a demonstrà această teoremă, să desvoltăm $f(x, y)$ după puterile crescânde ale lui x

$$(1) \quad f(x,y) = f(o,y) + x P_1(y) + x^2 P_2(y) + \ldots + x^m P_m(y) + \ldots,$$

coeficienţii $P_1(y)$, $P_2(y)$,... fiind serii întregi de y, convergente în cercul $|y| = R'$ şi pe acest cerc. Reprezentând prin M maximul lui $|f(x, y)|$ pentru valorile $|x| = R$, $|y| = R'$, avem, pentru coeficienţii seriei (1), inegalităţile

$$(2) \qquad |P_m(y)| \leqq \frac{M}{R^m},$$

oricare ar fi y satisfăcând inegalitatea $|y| \leqq R'$. Prin urmare punând $|x| = r < R$, avem, în regiunea considerată a lui y,

$$|x P_1(y) + x^2 P_2(y) + \ldots + x^m P_m(y) + \ldots| < M \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m,$$

sau

(3) $$|x P_1(y) + \ldots + x^m P_m(y) + \ldots| < M \frac{r}{R-r}.$$

De altă parte, putem determinà un număr pozitiv $\varrho < R'$ astfel ca pentru valorile lui y satisfăcând inegalitatea $|y| < \varrho$, $f(o, y)$ să nu se anuleze decât pentru $y = o$; căci, în virtutea ipotezei, $f(o, y)$ este de forma

(4) $$f(o, y) = y^n P_0(y),$$

$P_0(y)$ fiind o serie întreagă convergentă în cercul $|y| = R'$ și $P_0(o) \neq o$. Fie m minimul lui $|f(o, y)|$ pe cercul $|y| = \varrho$ așà determinat; m este mai mare ca zero. Să determinăm numărul r astfel ca să satisfacă egalitatea

$$M \frac{r}{R-r} = m,$$

de unde

$$r = \frac{mR}{M+m}.$$

Punând

(5) $$\varphi(x, y) = x P_1(y) + x^2 P_2(y) + \ldots,$$

avem, în virtutea inegalității (3),

$$|\varphi(x, y)| < |f(o, y)|,$$

pentru toate valorile x, y satisfăcând condițiunile

$$|x| < r, \quad |y| = \varrho.$$

Prin urmare funcțiunile $f(x, y) = f(o, y) + \varphi(x, y)$ și $f(o, y)$ au, în interiorul cercului $|y| = \varrho$, acelaș număr de zeruri oricare ar fi punctul x în interiorul cercului $|x| = r$ (I. § 348). De unde rezultă că oricare ar fi valoarea lui x satisfăcând inegalitatea $|x| < r$, funcțiunea $f(x, y)$ are n zeruri și numai n: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale căror module sunt mai mici ca ϱ. Toate celelalte zeruri ale acestei funcțiuni, dacă există, sunt exterioare cercului $|y| = \varrho$. Prin urmare dacă facem x să tindă către zero, $\varphi(x, y)$ tinzând astfel către zero, rădăcinele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuațiunei $f(x, y) = o$ și numai acestea, vor tinde către zero în același timp, în virtutea ecuațiunii (4). q. e. d.

18. *Teoremă. Cele n zeruri infinit mici, a căror existență a fost stabilită prin teorema precedentă, satisfac o ecuațiune de forma*

(7) $$y^n + \varphi_1(x) y^{n-1} + \ldots + \varphi_n(x) = o,$$

$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, fiind funcțiuni oloforme în domeniul lui $x = o$, cari se anulează pentru $x = o$.

Păstrând notaţiunile de mai sus, avem, k fiind un număr întreg pozitiv,

$$(8)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{y^k f'(x,y)}{f(x,y)}\,dy = \sum_{i=1}^{n} y_i^k, \qquad (|x|<r),$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv dealungul cercului $|y| = \varrho$; căci $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt polurile funcţiunei de sub semnul $\int$, situate în interiorul cercului $|y| = \varrho$, iar membrul al doilea al egalităţei este egal cu suma reziduurilor acestei funcţiuni relative la aceste poluri.

Să punem expresiunea

$$f(x,y) = y^n P_0(y) + x P_1(y) + x^2 P_2(y) + \ldots$$

sub forma

$$f(x,y) = y^n P_0(y)\left[1 + x\frac{P(x,y)}{y^n P_0(y)}\right];$$

de unde

$$\log f(x,y) = n \log y + \log P_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} x^m \left(\frac{P(x,y)}{y^n P_0(y)}\right)^m.$$

Derivând ambele membre în raport cu y, obţinem, pentru $\dfrac{f'_y(x,y)}{f(x,y)}$, o expresiune în serie de forma

$$(9)\qquad \frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)} = \frac{n}{y} + \frac{P'_0(y)}{P_0(y)} + x Q_1(y) + x^2 Q_2(y) + \ldots,$$

$Q_1(y), Q_2(y), \ldots$ fiind serii Laurent, convergente pentru valorile lui y cari satisfac inegalităţile

$$\varrho_0 \leqq |y| \leqq \varrho,$$

ϱ_0 fiind un număr pozitiv mai mic ca ϱ.

Multiplicând ambele membre ale egalităţei (9) cu y^k şi punând

$$(10)\qquad a_m^{(k)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} y^k Q_m(y)\,dy, \qquad S_k = \sum_{i=1}^{n} y_i^k,$$

avem (8) seria

$$(11)\qquad S_k = a_1^{(k)} x + a_2^{(k)} x^2 + \ldots + a_m^{(k)} x^m + \ldots,$$

convergentă în interiorul cercului $|x| = r$, care se anulează împreună cu x.

Dând lui k valorile 1, 2, ..., n, conchidem că funcţiunile simetrice elementare

$$\Sigma y_1, \ \Sigma y_1 y_2, \ldots, \ y_1 y_2 \cdots y_n$$

se exprimă prin serii întregi de x convergente în cercul $|x| = r$ şi cari se anulează pentru $x = o$.

De unde rezultă că $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt rădăcini ale unei ecuaţiuni de forma (7) [1]. *q. e. d.*

19. O expresiune foarte interesantă a unei funcţiuni $f(x, y)$ olomorfă în domeniul (o, o) este dată de teorema următoare, datorită lui Weierstrass. Vom presupune că funcţiunea se anulează în punctul $x = y = o$; în cazul contrar este deajuns a înlocuì $f(x, y)$ prin diferenţa $F(x, y) = f(x, y) - f(o, o)$.

Teoremă. Fie $f(x, y)$ o funcţiune olomorfă în domeniul (o, o); dacă $f(o, y)$ admite $y = o$ ca zero de ordinul n, avem expresiunea

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \, P(x, y) \tag{12}$$

în care

$$\varphi(x, y) = \prod_{i=1}^{n} (y - y_i) \tag{13}$$

este membrul întâiu al ecuaţiunei (7) (§ 18) *şi $P(x, y)$ este o serie întreagă care nu se anulează în domeniul (o, o).*

Pentru a demonstrà această teoremă, să ne referim mai întâiu la cele două teoreme precedente. In virtutea acestor teoreme există două numere pozitive r şi ϱ astfel că pentru $|x| < r$ funcţiunea admite n zeruri şi numai n,: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, cari satisfac ecuaţiunea (7) şi ale căror module sunt mai mici ca ϱ.

Fie acum $y = \eta$ un punct situat în interiorul cercului $|y| = \varrho$, diferit de punctele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ şi să considerăm funcţiunea

$$\frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} \, \frac{1}{y - \eta} \tag{14}$$

Privind punctul x fix, însă având o poziţiune oarecare în interiorul cercului $|x| = r$, expresiunea (14), considerată ca funcţiune de y, n'are în interiorul cercului $|y| = \varrho$, alte singularităţi decât polurile de ordinul întâiu $\eta, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Vom aveà dar, aplicând teorema reziduurilor,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} \, \frac{dy}{y - \eta} = \left(\frac{f'_y}{f}\right)_{y=\eta} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k - \eta} = \frac{d}{d\eta} \log \frac{f(x, \eta)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (\eta - y_k)}$$

sau

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} \, \frac{dy}{y - \eta} = \frac{d}{d\eta} \log \frac{f(x, \eta)}{\varphi(x, \eta)}. \tag{15}$$

---

[1]) Fiind dată ecuaţiunea

$$y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_n = o,$$

avem (v. funcţiunile simetrice)

$$S_1 + A_1 = o, \quad S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = o, \ldots,$$
$$S_n + A_1 S_{n-1} + \ldots + A_n = o.$$

Să evaluăm integrala din membrul întâiu. Punctul η fiind în interiorul cercului $|y| = \varrho$ pe când y descrie acest cerc, avem seria

$$(16)\qquad \frac{1}{y-\eta} = \frac{1}{y} + \frac{\eta}{y^2} + \ldots + \frac{\eta^m}{y^{m+1}} + \ldots$$

Multiplicând ambele membre ale acestei serii cu $\dfrac{f'_y(x, y)}{f(x, y)}$ şi integrând dealungul cercului $|y| = \varrho$, avem

$$(17)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)}\frac{dy}{y-\eta} = \frac{1}{2i\pi}\sum_{m=o}^{\infty}\eta^m\int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)}\frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Expresiunea de sub semnul $\int$ din membrul al doilea fiind funcţiune olomorfă de x în interiorul cercului $|x| = r$, pentru toate valorile lui y satisfăcând egalitatea $|y| = \varrho$, rezultă că această integrală este o funcţiune olomorfă de x în cercul considerat. Putem dar pune

$$(18)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(\varrho)} \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)}\frac{dy}{y^{m+1}} = p_{m+1}(x), \; (m = o, 1, 2, \ldots)$$

$p_{m+1}(x)$ fiind o serie întreagă convergentă în interiorul cercului $|x| = r$.

Membrul întâiu al egalităţei (17) este aşà dar egal cu suma

$$\sum_{m=o}^{\infty} \eta^m \, p_{m+1}(x)$$

şi egalitatea (15), după ce înlocuim η prin y, se poate scrie

$$(19)\qquad \frac{d}{dy}\log\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} = \sum_{m=o}^{\infty} y^m \, p_{m+1}(x).$$

De unde rezultă egalitatea:

$$(20)\qquad \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} = \psi(x)\, e^{\sum\limits_{o}^{\infty} \frac{y^{m+1}}{m+1} p_{m+1}(x)}, \quad |y| \leqq \varrho,$$

în care $\psi(x)$ este o funcţiune introdusă prin integraţiunea ecuaţiunei (19). Această funcţiune este olomorfă în cercul (r) şi nu se anulează în interiorul acestui cerc. In adevăr, oricare ar fi valoarea lui y privit constant, situat pe cercul $|y| = \varrho$, funcţiunile $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ sunt funcţiuni olomorfe de x, cari nu se anulează în interiorul cercului (r); raportul lor şi prin urmare funcţiunea $\psi(x)$ este o funcţiune olomorfă în cercul (r) şi nu se anulează în interiorul acestui cerc.

Membrul al doilea al egalităţii (20) este deci o funcţiune olomorfă de x, y pentru valorile $|x| < r$, $|y| < \varrho$. Putem dar reprezentă membrul al doilea prin $P(x, y)$, serie convergentă în domeniul (o, o), care nu se anulează în acest domeniu. Egalitatea (20) ia dar forma

$$(21) \qquad f(x, y) = \varphi(x, y)\, P(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ şi $P(x, y)$ având semnificările cuprinse în enunţul teoremei.

q. e. d.

Corolare I. In virtutea acestei teoreme, rădăcinile y, în număr nelimitat, ale ecuaţiunilor $f(x, y) = o$, $\varphi(x, y) = o$, coincid în domeniul $x = o$.

II. Dacă funcţiunea $f(x, y)$ este olomorfă în domeniul unui punct (a, b) şi $f(x, y)$ admite $y = b$ ca zero de ordinul n, egalitatea (21) se înlocueşte prin cea următoare

$$(22) \qquad f(x, y) = \varphi(x, y)\, P(x - a, y - b)$$

în care seria $P(x - a, y - b)$ nu se anulează în punctul (a, b) şi

$$(23) \qquad \varphi(x, y) = (y - b)^n + \varphi_1(x)(y - b)^{n-1} + \ldots + \varphi_n(x),$$

coeficienţii $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ fiind funcţiuni olomorfe în domeniul lui $x = a$, anulându-se în acest punct.

III. Dacă funcţiunea $f(x, y)$ olomorfă în domeniul (o, o) admite $x = o$ ca zero de ordinul μ, oricare ar fi y vecin cu zero şi $y = o$ ca zero de ordinul ν, oricare ar fi x vecin cu zero, câtul

$$f_1(x, y) = \frac{f(x, y)}{x^\mu y^\nu}$$

este o funcţiune olomorfă în domeniul originei şi, dacă presupunem că $f_1(o, y)$ admite $y = o$ ca zero de ordinul n, obţinem pentru $f(x, y)$, expresiunea

$$(24) \qquad f(x, y) = x^\mu y^\nu \varphi(x, y)\, P(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ şi $P(x, y)$ având semnificările considerate mai sus.

III. DIVIZIUNEA A DOUĂ SERII.

20. Cu ajutorul teoremei lui Weierstrass putem completă teoria divizibilităţii a două serii întregi $P(x, y)$, $P_1(x, y)$, convergente în cercurile $|x| = R$, $|y| = R'$, când ele se anulează în punctul $x = y = o$ [1].

Considerând cazul cel mai general, avem egalităţile

$$(1) \qquad \begin{cases} P(x, y) = x^\mu y^\nu \varphi(x, y)\, \mathscr{P}(x, y) \\ P_1(x, y) = x^{\mu_1} y^{\nu_1} \varphi_1(x, y)\, \mathscr{P}_1(x, y) \end{cases}$$

[1] (§ 8).

în cari, μ, ν, μ_1, ν_1 sunt numere întregi mai mari sau egale cu zero; funcţiunile $\varphi(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ sunt polinoame de y:

$$
(2) \qquad \begin{aligned} \varphi(x, y) &= y^m + p_1(x)\, y^{m-1} + \ldots + p_m(x), \\ \varphi_1(x, y) &= y^n + p'_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + p'_n(x), \end{aligned}
$$

ai căror coeficienţi $p(x)$ şi $p'(x)$ sunt serii întregi convergente într'un cerc cu centrul în punctul $x = o$, având o rază convenabilă $r < R$ şi cari se anulează în acest punct, pe când seriile $\mathcal{P}(x, y)$, $\mathcal{P}_1(x, y)$ sunt convergente pentru valorile $|x| < r$ şi $|y| < \varrho$, ϱ având o valoare convenabilă mai mică decât R' şi cari nu se anulează în domeniul determinat de cercurile $|x| = r$, $|y| = \varrho$ [1]).

Să considerăm câtul

$$
(3) \qquad \frac{P_1(x, y)}{P(x, y)} = x^{\mu_1 - \mu}\, y^{\nu_1 - \nu}\, \frac{\varphi_1(x, y)}{\varphi(x, y)}\, \frac{\mathcal{P}_1(x, y)}{\mathcal{P}(x, y)}.
$$

Pentru ca membrul al doilea al acestei egalităţi să fie o funcţiune olomorfă de x, y în domeniul (o, o), este necesar ca exponenţii $\mu_1 - \mu$, $\nu_1 - \nu$ să nu fie negativi.

Să examinăm câturile $\dfrac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}}$ şi $\dfrac{\varphi_1}{\varphi}$. Cel dintâiu este o funcţiune olomorfă în domeniul (o, o), căci seria dela numitor nu se anulează în acest domeniu. Pentru ca al doilea cât $\dfrac{\varphi_1}{\varphi}$ să fie funcţiune olomorfă în domeniul (o, o) este necesar şi suficient ca el să rămână finit în acest domeniu; prin urmare este necesar ca la un x dat oarecare vecin cu $x = o$, rădăcinile corespunzătoare y_1, $y_2, \ldots, y_i$ ale ecuaţiunei $\varphi(x, y) = o$ să fie rădăcini ale ecuaţiunei $\varphi_1(x, y) = o$. De unde rezultă că $\varphi_1(x, y)$, privit ca polinom de y, trebuie să fie *algebriceşte* divizibil cu $\varphi(x, y)$, privit deasemenea ca polinom de y. Trebuie dar să avem $n \geq m$. Efectuând împărţirea şi reprezentând câtul prin

$$
y^{n-m} + p''_1(x)\, y^{n-m-1} + \ldots + p''_{n-m}(x)
$$

şi restul prin

$$
p'''_1(x)\, y^{m-1} + \ldots + p'''_m(x),
$$

avem, în domeniul originei, identităţile

$$
(4) \qquad \begin{aligned} & y^n + p'_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + p'_n(x) \\ & = \left[y^m + p_1(x)\, y^{m-1} + \ldots + p_m(x)\right] \\ & \left[y^{n-m} + p''_1(x)\, y^{n-m-1} + \ldots + p''_{n-m}(x)\right], \end{aligned}
$$

$$
(5) \qquad p'''_1(x) = o,\ p'''_2(x) = o, \ldots, p'''_m(x) = o.
$$

---

[1]) Vezi teorema lui Weierstrass (§ 19).

Din identificarea ambelor membre (4) rezultă că coeficienţii $p_1''(x), \ldots, p''_{n-m}(x)$ sunt serii întregi cari se anulează pentru $x = o$.

Identităţile (5) formează condiţiunile necesare şi suficiente ca polinomul $\varphi_1(x, y)$ să fie divizibil cu polinomul $\varphi(x, y)$. Ele conţin o infinitate de ecuaţiuni, ce se obţin egalând cu zero toţi coeficienţii seriilor din membrul întâiu.

In rezumat, pentru ca seria $P_1(x, y)$ să fie divizibilă cu seria $P(x, y)$, definite de egalităţile (1) şi (2), este necesar şi suficient să avem

$$\mu_1 \geqslant \mu, \quad \nu_1 \geqslant \nu$$

şi ca polinomul de y, $\varphi_1(x, y)$, să fie algebriceşte divizibil cu polinomul de y, $\varphi(x, y)$.

Dacă aceste condiţiuni sunt împlinite, avem în domeniul (o, o)

$$\frac{P_1(x,y)}{P(x,y)} = P_2(x,y),$$

$P_2(x,y)$ fiind o serie întreagă convergentă în domeniul considerat.

21. *Puncte singulare.* Fie $x = a$, $y = b$ un punct singular al funcţiunii $f(x, y)$. Prin definiţiune egalitatea

$$f(x, y) = P(x-a, y-b)$$

este imposibilă în domeniul (a,b).

Se poate întâmplà să existe o serie $P_0(x-a, y-b)$, care se anulează în punctul (a, b) şi astfel ca produsul

$$f(x, y)\, P_0(x-a, y-b)$$

să fie olomorf în domeniul acestui punct, adică să avem

$$(1) \qquad f(x, y)\, P_0(x-a, y-b) = P_1(x-a, y-b);$$

de unde, pentru funcţiunea $f(x, y)$, expresiunea

$$(2) \qquad f(x, y) = \frac{P_1(x-a, y-b)}{P_0(x-a, y-b)},$$

valabilă în domeniul (a, b). Un asemenea punct se numeşte *punct singular neesenţial.*

Dacă nu există nici o serie $P_0(x-a, y-b)$ astfel ca egalitatea (1) să fie posibilă, punctul (a, b) se numeşte *punct singular esenţial.*

In cazul funcţiunilor uniforme de o singură variabilă nu există decât un singur tip de punct singular neesenţial, *polul.*

In cazul funcţiunilor uniforme de două variabile, considerăm două clase de puncte singulare neesenţiale. Vom zice că punctul singular (a, b) face parte din clasa I, dacă $P_1(a, b) \neq o$. In acest caz, $|f(x, y)|$ poate deveni oricât de mare voim pentru valori destul de mici $|x-a|$, $|y-b|$. Funcţiunea $f(x, y)$ tinde către unica valoare ∞, când x tinde către a şi y către b, oricare ar fi drumul urmat de fiecare din aceste variabile.

Zicem atunci că punctul (a, b) este un pol al funcţiunei.

Trebuie să observăm că un pol al funcţiunei $f(x, y)$ nu este punct izolat de alte poluri, ci face parte dintr'un continuum de poluri, căci un zero al seriei $P_0(x, y)$ face parte dintr'un continuum de zeruri (§ 16).

Vom zice că punctul (a, b) face parte din clasa II, dacă $P_1(a, b) = o$, fără ca seriile $P_1(x-a, y-b)$, $P_0(x-a, y-b)$ să aibă factor comun (ceeace se poate totdeauna presupune, suprimând din egalitatea (1) factorul comun, dacă există).

In acest caz, când x tinde către a şi y către b, valoarea către care tinde funcţiunea depinde de drumul urmat de fiecare din variabilele x, y; într'un mod mai precis, de limita către care tinde raportul $\dfrac{y-b}{x-a}$: funcţiunea dar nu tinde către o valoare determinată, finită sau infinită. Punctele de această speţă sunt puncte izolate, căci ele satisfac ambele ecuaţiuni

$$P_0(a, b) = o, \qquad P_1(a, b) = o.$$

Exemple. 1º Funcţiunea $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ admite ca poluri grămada nelimitată $x = y \neq o$; iar punctul $x = y = o$ ca punct singular neesenţial de clasa II. Punând $\dfrac{y}{x} = t$, ea devine funcţiune de variabila arbitrară t:

$$\frac{1+t}{1-t}$$

care poate primi o infinitate de valori, reale sau complexe, când x şi y tinde către zero.

2º Funcţiunea

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

admite punctul $x = y = o$ ca punct singular esenţial.

21. *Funcţiuni implicite.* Fie $f(x, y)$ o funcţiune olomorfă în domeniul unui punct $x = a$, $y = b$, în care ea se anulează. Să presupunem că $y = b$ este o rădăcină simplă a ecuaţiunei

$f(a, y) = o$. Vom aveà, în virtutea teoremei lui Weierstrass, în domeniul punctului (a, b), egalitatea

$$(1)\quad f(x, y) = [y-b-(x-a)\, P(x-a)]\, P_1(x-a, y-b),$$

$P(x-a)$ fiind o serie întreagă convergentă în domeniul punctului $x = a$ şi $P_1(x-a, y-b)$ o serie întreagă convergentă în domeniul punctului (a, b), care nu se anulează în acest punct. De unde rezultă că unica rădăcină y a ecuaţiunei

$$(2)\qquad f(x, y) = o,$$

care se reduce la b când x tinde către a este exprimată prin seria

$$(3)\qquad y = b + (x-a)\, P(x-a)$$

convergentă într'un cerc $|x-a| = r$. Dacă această serie se prelungeşte afară din cercul de convergenţă, prelungirea sa satisface ecuaţiunea (2), în virtutea *permanenţii relaţiunilor analitice* [1])

Seria (3) este un element de funcţiune analitică *implicită*, definită de ecuaţiunea (2). Fiecărei rădăcini simple a ecuaţiunei $f(x, y) = o$ corespunde câte un element de funcţiune analitică. Funcţiunile implicite aşà definite sunt ramurile unei funcţiuni analitice multiforme, cu un număr limitat sau nelimitat de ramuri.

Ne vom mărginì în cele ce urmează numai la cazul când $f(x, y)$ este funcţiune raţională de x şi y, adică la cazul funcţiunilor algebrice.

CAPITOLUL II.

FUNCŢIUNI ALGEBRICE.

22. Fie

$$(1)\quad f(x, y) = f_0(x)\, y^m + f_1(x)\, y^{m-1} + \ldots + f_m(x)$$

o funcţiune raţională întreagă de variabilele x, y de gradul μ în raport cu amândouă variabilele, coeficienţii $f_0(x), \ldots, f_m(x)$ fiind funcţiuni raţionale şi întregi de x. Să considerăm ecuaţiunea

$$(2)\qquad f(x, y) = o,$$

pe care o presupunem ireductibilă, adică membrul întâiu nu se descompune în factori, de grade mai mici, raţionali şi întregi în x şi y.

La o valoare finită x care nu anulează coeficientul $f_0(x)$ corespund, pentru y, m valori finite $y_1, y_2, \ldots, y_m$, în genere

1) I. § 170.

inegale. Trebuie să exceptăm valorile lui x cari anulează discriminantul $D(x)$ al ecuaţiunei (2), adică rezultanta eliminaţiunei lui y între ecuaţiunile

$$f(x, y) = o, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = o.$$

Ecuaţiunea (2) fiind ireductibilă, polinomul $D(x)$ al cărui grad este mai mic sau egal cu $\mu(\mu-1)$ nu poate fi identic nul [1]; prin urmare punctele x, căror corespund valori egale pentru y sunt în număr limitat şi prin urmare puncte izolate.

Dacă x coincide cu o rădăcină a ecuaţiunei $f_0(x) = o$, una cel puţin din valorile corespunzătoare ale lui y este infinită. Dacă $x = \infty$, facem substituţiunea $x' = \frac{1}{x}$ şi reducem astfel studiul rădăcinilor y în domeniul $(x = \infty)$ la studiul rădăcinilor ecuaţiunei transformate în domeniul punctului $x' = o$.

23. Fie $x = a$ o valoare a lui x diferită de valorile excepţionale considerate mai sus şi fie

$$b_1, b_2, \ldots, b_m, \tag{3}$$

valorile corespunzătoare ale lui y. Vom avea, în virtutea teoremei asupra funcţiunilor implicite, în domeniul punctului $x = a$, m elemente de funcţiune analitică:

$$y_n = b_n + (x-a) P_n(x-a), \quad (n = 1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

cari, pentru $x = a$, se reduc respectiv la valorile (3) şi cari satisfac ecuaţiunea (2). Fiecare din elementele (4) defineşte o ramură a unei funcţiuni analitice $y(x)$, multiformă cu m ramuri, numită funcţiune *algebrică* de x.

---

[1]) Fie într'un mod general, $f(x, y)$ şi $f_1(x, y)$ două polinoame de x, y respectiv de grade m şi n, $m > n$ şi $D(x)$ rezultatul eliminaţiunei lui y între ecuaţiunile $f(x, y) = o$, $f_1(x, y) = o$. Dacă $D(x) \equiv o$, cele două polinoame au un divizor comun polinom de x, y. In adevăr, aplicând operaţiunile celui mai mare comun divizor între polinoamele $f(x, y)$ şi $f_1(x, y)$ ordonate după puterile lui y, fie egalităţile obţinute

$$\begin{aligned} f &= f_1 Q_1 + f_2, \\ f_1 &= f_2 Q_2 + f_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{k-1} &= f_k Q_k + f_{k+1}, \\ f_k &= f_{k+1} Q_{k+1} + D(x) \end{aligned}$$

Dacă $D(x) = o$ pentru orice valoare a lui x, rezultă că polinomul f_{k+1} divide polinomul f_k şi prin urmare divide polinoamele $f_{k-1}, \ldots f_1$ şi f.

Polinomul $f(x,y)$ ar admite aşă dar ca divizor un polinom de un grad mai mic ca m şi prin urmare n'ar fi ireductibil, ceeace este contrar ipotezei.

24. *Calculul elementelor relative la un punct ordinar dat.* Fie $x=a$ o valoare a lui x şi $y=b$ o rădăcină simplă a ecuaţiunei $f(a,y)=o$. Punând, pentru prescurtare,

$$(1) \qquad A_{i,k} = \left(\frac{\partial^{i+k} f(x,y)}{\partial x^i \, \partial y^k}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}$$

şi ţinând seama că $A_{00} = f(a,b) = o$, vom aveà, în domeniul punctului $(x=a, y=b)$, dezvoltarea

$$(2) \quad f(x,y) = A_{10}(x-a)+A_{01}(y-b)+\frac{1}{1.2}[A_{20}(x-a)^2+2A_{11}(x-a)(y-b)+A_{02}(y-b)^2]+\ldots$$

în care coeficientul A_{01} este, în virtutea ipotezei, diferit de zero.

Elementul care se reduce la b când x tinde către a este dat de o serie de forma

$$(3) \qquad y-b = a_1(x-a) + a_2(x-a)^2+\ldots$$

ai cărei coeficienţi

$$a_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n y}{d x^n}\right)_{x=a}$$

sunt determinaţi de ecuaţiunile

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=o$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=o$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

în cari înlocuim x prin a şi y prin b, adică de ecuaţiunile

$$(4) \quad \begin{cases} A_{01}\,a_1 + A_{10} = o \\ A_{01}\,a_2 + A_{02}\,a_1^2 + 2A_{11}\,a_1 + A_{20} = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Fiecărei rădăcini simple a ecuaţiunei $f(a,y)=o$ corespunde o desvoltare de forma (3) ai cărei coeficienţi se calculează în acelaş mod. Cercurile de convergenţă ale acestor serii cu centrul comun în punctul $x=a$ pot coincide sau să fie diferite.

Prelungind fiecare element din aproape în aproape, obţinem ramura corespunzătoare, care rămâne olomorfă în orice arie ce nu conţine nici un punct critic.

Observare. Dacă coeficienţii ecuaţiunei (2) sunt reali şi a, b numere reale, b fiind rădăcină simplă a ecuaţiunei $f(a,y)=o$, coeficienţii a_n sunt reali; prin urmare elementul corespunzător $y = b + (x-a)\,P(x-a)$ este real împreună cu x.

Exemplu. Fie ecuaţiunea

$$y^3-3y+3x=o.$$

Lui $x = o$ corespund pentru y valorile distincte $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$. Cele trei rădăcini y sunt dar funcţiuni olomorfe în domeniul $x=o$. Pentru a obţine desvoltările lor în acest domeniu, vom aplicà seria

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1} x + \frac{y''_0}{1.2} x^2 + \ldots$$

în care înlocuim y_0 respectiv prin $0, \pm\sqrt{3}$ şi $y'_0, y''_0, \ldots$ prin valorile corespunzătoare ale derivatelor scoase din ecuaţiunea dată. Calculând primii termeni, obţinem

$$y_1 = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x^5 + \ldots$$

$$y_2 = \sqrt{3} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2!} \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 - \frac{1}{4!} \frac{35}{16} \sqrt{3}\, x^4 - \ldots$$

$$y_3 = -\sqrt{3} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2!} \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} \frac{35}{16} \sqrt{3}\, x^4 - \ldots$$

Rădăcina a cărei valoare iniţială este egală cu zero nu conţine în desvoltarea sa decât puteri impare a lui x; căci schimbând x în $-x$, una din rădăcini îşi schimbă semnul, sau toate îşi schimbă semnele. Cazul din urmă însă nu este admisibil, deoarece rădăcinile fiind funcţiuni continue de x în domeniul $x=o$, numai acea rădăcină îşi schimbă semnul care se anulează împreună cu x. Această rădăcină este o funcţiune impară de x.

25. *Permutarea ramurilor în domeniul unui punct critic.* Să examinăm efectul produs asupra ramurilor funcţiunei $y(x)$ când x, plecând dela un punct ordinar x_0, descrie o curbă închisă în jurul unui punct critic fără a trece prin niciunul din punctele critice.

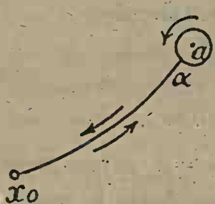

Fig. 1

Fie $x=a$ un punct critic şi $y=b$ una din rădăcinile ecuaţiunei $f(a, y) = o$. Putem înlocuì curba închisă printr'un contur elementar echivalent, adică printr'un drum format dintr'un cerc foarte mic descris din punctul a ca centru şi dintr'o linie dreaptă sau curbă care uneşte punctul iniţial x_0 cu un punct α al acestui cerc (fig. 1).

Fie

(1) $$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

valorile ramurilor în punctul x_0 şi

(2) $$y_{1a}, y_{2a}, \ldots, y_{ma}$$

valorile ce primesc respectiv aceste ramuri în punctul a când x descrie linia $x_0\, \alpha$.

Dealungul cercului (a) fiecare ramură variază într'un mod continuu. Să considerăm ramura a cărei valoare în a este y_{1a}. După ce x descrie cercul (a), revenind la punctul a, se poate întîmplà ca această ramură să regăsească valoarea sa iniţială sau nu. In cazul întâiu ramura considerată este olomorfă în domeniul $x=a$ şi descriind conturul elementar $x_0\,a(a)a\,x_0$ regăsim valoarea iniţială y_1. In cazul al doilea, y_{1a} se schimbă într'una din celelalte valori (2).

Fie y_{2a} valoarea în care y_{1a} se schimbă când x descrie cercul (a) în sensul pozitiv; acelaş cerc descris în sens invers cu valoarea iniţială y_{2a} va reproduce prin urmare pe y_{1a}. Dacă descrim cercul (a) în sensul pozitiv cu valoarea iniţială y_{2a}, valoarea finală va fi diferită de cea iniţială; căci altfel, acest cerc descris în sensul negativ ar schimbà y_{2a} în el însuşi, pe când, precum am văzut, în acest sens, y_{2a} se schimbă în y_{1a}[1]). Aşà dar y_{2a} se schimbă într'una din celelalte rădăcini (2). Dacă y_{2a} se schimbă în y_{1a}, atunci y_{1a} şi y_{2a} se permută între ele când x descrie cercul (a); prin urmare y_1 şi y_2 formează relativ la punctul a un sistem circular. Să presupunem că y_{2a} se schimbă în y_{3a}. Descriind cercul (a) cu y_{3a} ca valoare iniţială, nu putem obţine ca valoare finală nici y_{3a} nici y_{2a}; căci dacă ar fi aşà, ar urmà ca acelaş cerc descris în sens invers să ne dea în cazul întâiu y_{3a} şi în al doilea y_{1a}, pe când valoarea finală trebuie să fie aceea care, când cercul a fost descris în sensul pozitiv, a dat pe y_{3a}, adică trebuie să obţinem valoarea y_{2a}; rezultă dar că y_{3a} se va schimbà într'una din cantităţile (2) diferită de y_{2a} şi y_{3a}. Dacă y_{3a} se schimbă în y_{1a}, atunci cele trei rădăcini y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}, prin urmare y_1, y_2, y_3, formează un sistem circular relativ la punctul de ramificaţiune a.

Continuând în acelaş mod, recunoaştem că după un număr n de învârtiri în jurul punctului a, $n \leqq m$, regăsim în punctul x_0 valoarea iniţială y_1. Presupunând dar că dacă x descrie conturul elementar considerat de n ori după rând şi în acelaş sens, y_1 se schimbă în y_2, y_2 în $y_3, \ldots\, y_{n-1}$ în y_n şi y_n în y_1, zicem că ramurile ale căror valori în x_0 sunt respectiv $y_1, \ldots, y_n$ formează relativ la punctul critic a un *ciclu* sau un *sistem circular* de ordinul n. Punctul critic, relativ la un ciclu de ordinul n, se numeşte punct de *ramificaţiune de ordinul* $n-1$.

Dacă $n < m$, plecând dela x_0 cu una din rădăcinile rămase, de exemplu y_{n+1}, vom obţine, relativ la acelaş punct de

[1]) Două valori iniţiale diferite nu pot duce în a la o singură valoare, căci a nu este punct critic.

ramificaţiune, un sistem circular format din n' ramuri diferite de cele precedente, $n+n' \leqq m$, etc.

Este evident că tot ce am zis până aici se aplică la orice punct de ramificaţiune şi că ciclele formate de ramurile funcţiunei $y(x)$ nu depind de punctul origină x_0, ci numai de punctul de ramificaţiune considerat. Când trecem dela un punct de ramificaţiune la altul, ramurile cari se permută între ele sunt în genere diferite. Putem dar enunţà propoziţiunea următoare:

Cele m ramuri ale funcţiunii $y(x)$, *definită de ecuaţiunea* (1), *se grupează, relativ la un punct critic oarecare, într'unul sau mai multe sisteme circulare, ale căror ordine pot fi egale sau diferite, dacă convenim a privi ca formând un ciclu de ordinul întâiu ramura care se reproduce pe sine însă-şi.*

26. *Determinarea ciclelor relative la un punct critic dat.* Inainte de a tratà cazul general, voim să examinăm două cazuri simple.

1°. Fie $y = b$ o rădăcină multiplă de ordinul n a ecuaţiunei $f(a, y) = o$. Păstrând notaţiunile de mai sus să presupunem că avem

$$A_{01} = A_{02} = \ldots A_{0,n-1} = o\,; \quad A_{0n} \neq o,\ A_{10} \neq o.$$

Coeficientul A_{10} fiind diferit de zero rezultă că $x = a$ este o rădăcină simplă a ecuaţiunei $f(x, b) = o$. Privind dar x ca funcţiune de y, vom aveà, pentru ramura x care se reduce la a când y tinde către b, o serie de forma

$$(1) \qquad x-a=(y-b)^n\left[a+a_1(y-b)+a_2(y-b)^2+\ldots\right],$$

în care $a \neq o$. Extrăgând rădăcina $n^{\underline{a}}$ a ambelor membre, obţinem

$$(x-a)^{\frac{1}{n}} = \beta_1(y-b) + \beta_2(y-b)^2+\ldots\,; \beta_1 = a^{\frac{1}{n}} \neq o$$

De unde, prin inversiune,

$$(2) \qquad y-b = \gamma_1(x-a)^{\frac{1}{n}} + \gamma_2(x-a)^{\frac{2}{n}} + \ldots\,; \gamma_1 = \frac{1}{\beta_1}.$$

Punctul $x = a$ este aşà dar, relativ la rădăcina $y = b$, un punct de ramificaţiune în jurul căruia se permută cele n ramuri cari devin egale cu b, când x tinde către a. Aceste ramuri sunt reprezentate prin seria (2), în care înlocuim radicalul $(x-a)^{\frac{1}{n}}$ prin cele n valori de care este susceptibil; ele formează un singur sistem circular.

2°. *Cazul când ecuaţiunea* (1) *ordonată după puterile crescânde ale lui* $x-a$, $y-b$ *începe cu un grup de termeni omogeni de gradul* n.

Fie

(3) $$f(x,y)=\frac{1}{n!}[A_{n0}(x-a)^n+\frac{n}{1}A_{n-1,1}(x-a)^{n-1}(y-b)+\ldots+A_{0n}(y-b)^n]+\ldots=o,$$

Putem presupune că coeficientul A_{0n} este diferit de zero. In adevăr, aplicând substituţiunea

$$x-a=\alpha x'+y', \qquad y-b=\beta x'+\gamma y',$$

coeficienţii α, β, γ fiind supuşi la unica condiţiune

$$\alpha\gamma-\beta\neq o,$$

ecuaţiunea (3) se transformă într'o ecuaţiune de acelaş grad, ordonată după puterile lui x', y' în care grupul omogen de gradul cel mai mic este n. Coeficientul lui y'^n în acest grup fiind

$$\frac{1}{n!}[A_{n,o}+\frac{n}{1}A_{n-1,1}\ \gamma+\ldots+A_{on}\ \gamma^n],$$

este deajuns a da lui γ o valoare care să nu anuleze parenteza precedentă.

Să revenim la ecuaţiunea (3), în care vom presupune $A_{0n}\neq o$ şi să facem substituţiunea

(4) $$z=\frac{y-b}{x-a}$$

Ecuaţiunea (3) va luà forma

(5) $$f_n(z)+(x-a)f_{n+1}(z)+\ldots(x-a)^{m-n}f_m(z)\ldots=o,$$

$f_n(z)$, $f_{n+1}(z),\ldots$ fiind polinoame de grade egale cu indicii lor. Se poate întâmplà ca rădăcinile ecuaţiunei

(6) $$f_n(z)=o$$

să fie toate simple sau nu. Să considerăm mai întâiu cazul când rădăcinile c_1, $c_2,\ldots,c_n$ ale acestei ecuaţiuni sunt toate simple. Reprezentând prin c una din ele, vom aveà pentru elementul z care se reduce la c când x tinde către a, o serie de forma

$$z=c+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots$$

şi prin urmare

(7) $$y-b=c(x-a)+a_1(x-a)^2+\ldots$$

Fiecăreia din rădăcinile c_i $(i=1,2,\ldots n)$ corespunde câte o desvoltare analoagă cu cea precedentă. Cele n ramuri cari devin egale cu b, când x tinde către a, sunt aşà dar olomorfe în domeniul punctului $x=a$.

Fie acum $z=c$ o rădăcină multiplă de un ordin $k\leq n$ a ecuaţiunei (6) şi să presupunem că polinomul $f_{n+1}(z)$ nu conţine factorul $z-c$. Ordonând polinoamele $f_n(z)$, $f_{n+1}(z), \ldots$ după puterile crescânde ale lui $z-c$, ecuaţiunea (5) va luà forma

$$(8) \quad A(z-c)^k + A_1(z-c)^{k+1} + \ldots + A_{n+k}(z-c)^n$$
$$-(x-a)\,[B + B_1(z-c) + \ldots] + \ldots = o,$$

primul coeficient A şi primul coeficient B din parenteză fiind, în virtutea ipotezei, diferiţi de zero.

De unde rezultă desvoltarea

$$x-a = \frac{A}{B}(z-c)^k + A'(z-c)^{k+1} + \ldots$$

şi, prin inversiune,

$$z-c = a_1(x-a)^{\frac{1}{k}} + a_2(x-a)^{\frac{2}{k}} + \ldots \quad (a_1 \neq o).$$

Prin urmare, pentru ramurile corespunzătoare y, avem desvoltarea

$$(9) \quad y-b = c(x-a) + a_1(x-a)^{\frac{k+1}{k}} + a_2(x-a)^{\frac{k+2}{k}} + \ldots$$

Fiecărei rădăcini multiple a ecuaţiunei (6), corespunde câte un grup de ramuri (y) formând sisteme circulare compuse din atâtea ramuri câte unităţi sunt în ordinul de multiplicitate al rădăcinii. Aşa dar cele n ramuri (y) cari se reduc la b pentru $x=a$, se grupează în diferite sisteme circulare corespunzătoare rădăcinilor multiple ale ecuaţiunei (6).

27. *Cazul general. Metoda lui Puiseux* [1]. Fie $x=a$ un punct critic căruia corespunde, între alte rădăcini, o rădăcină $y=b$ de ordinul n de multiplicitate. Făcând substituţiunea $x=a+x'$, $y=b+y'$, ecuaţiunea transformată $f(a+x', b+y')=o$ va aveà pentru $x'=o$ rădăcina $y'=o$ multiplă de ordinul n. Făcând dar în această ecuaţiune $x'=o$, exponentul termenului în y' de gradul cel mai mic va fi n. Ecuaţiunea transformată fiind ireductibilă în acelaş timp cu ecuaţiunea primitivă [2], va conţine cel puţin un termen în x', Ax'^h, $h \geq 1$ independent de y' şi cel puţin un termen în y', independent de x', al cărui exponent în virtutea ipotezei este n. Suprimând accentele şi păstrând simbolul f pentru membrul întâiu, ecuaţiunea ordonată după puterile crescânde ale lui y va aveà forma

$$(1) \quad f(x,y) = Ax^h + A'x^{h+1} + \ldots + (A_1x^{\alpha_1} + \ldots)y^{\beta_1} + (A_2x^{\alpha_2} + \ldots)y^{\beta_2} + \ldots$$
$$+ (B + \ldots)\,y^n + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha} y^{\beta} = o\,,$$

---

[1] V. Briot et Bouquet *Fonctions doublement periodiques* p. 42.

[2] Dacă am aveà $f(a+x', b+y') = \varphi(x', y')\, f_1(x', y')$, φ şi f_1 polinoame de x', y', ar urmà să avem $f(x,y) = \varphi(x-a, y-b)\, f_1(x-a, y-b)$. Contra ipotezei.

în care parentezele fiind ordonate după puterile crescânde ale lui x, exponenţii $a_1, a_2, \ldots$ ai primilor termeni din fiecare din ele sunt ≥ 1 şi exponenţii β din ultima sumă sunt mai mari ca n. In acelaş timp coeficientul A al lui x^h şi coeficientul B a lui y^n sunt diferiţi de zero. Voim să arătăm că cele n ramuri cari se anulează împreună cu x, admit desvoltări în serii de forma

$$y = a_0\, x^{\mu} + a_1\, x^{\mu+\mu'} + a_2\, x^{\mu+\mu'+\mu''} + \ldots,$$

$\mu, \mu', \ldots$ fiind numere pozitive, raţionale ce va trebuì să determinăm.

Să facem substituţiunea

$$(2) \qquad y = u\, x^{\mu},$$

u fiind o nouă variabilă care nu se anulează pentru $x = o$. Ecuaţiunea (1) va deveni

$$(3)\ \mathrm{A}\, x^h + (\mathrm{A}_1 + \ldots) x^{a_1 + \beta_1 \mu}\, u^{\beta_1} + (\mathrm{A}_2 + \ldots)\, x^{a_2 + \beta_2 \mu}\, u^{\beta_2} + \ldots$$
$$+ (\mathrm{B} + \ldots)\, x^{n\mu}\, u^n + \Sigma\, \mathrm{A}_{\alpha\beta}\, x^{\alpha + \beta\mu}\, u^{\beta} = o.$$

Variabila u fiind diferită de zero pentru $x = o$, să punem $u = a_0 + u'$, a_0 fiind o constantă diferită de zero, ce va trebuì să determinăm şi u' o variabilă care se anulează împreună cu x. In virtutea acestei substituţiuni, termenii cari conţin x la gradul cel mai mic nu se pot află decât printre cei următori

$$\mathrm{A} x^h,\ \mathrm{A}_1\, x^{a_1 + \beta_1 \mu}\, u^{\beta_1},\ \mathrm{A}_2\, x^{a_2 + \beta_2 \mu}\, u^{\beta_2},\ \ldots,\ \mathrm{B} x^{n\mu}\, u^n.$$

Dacă facem să crească μ dela zero, exponenţii lui x

$$(4) \qquad h,\ a_1 + \beta_1\, \mu,\ a_2 + \beta_2\, \mu,\ \ldots,\ n\, \mu,$$

afară de cel dintâiu care este constant, cresc necontenit şi cu atât mai repede cu cât multiplicatorul lui μ este mai mare. Do unde rezultă, ţinând seama de inegalităţile

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < n,$$

că pentru valori destul de mari ale lui μ, unul oarecare din numerele (4) poate întrece pe toate cele cari îl preced. Insă pentru μ foarte mic, $n\,\mu$ este cel mai mic număr, prin urmare făcând să crească μ dela zero, într'un mod continuu, vom întâlnì neapărat o valoare $\mu = \mu_1$ pentru care $n\,\mu$ va devenì egal cu unul sau mai multe din numerele (4). Fie

$$a_i + \beta_i\, \mu,\ a_{i_1} + \beta_{i_1}\, \mu, \ldots \quad (\beta_i < \beta i_1 < \ldots < n),$$

numerele cu cari $n\mu$ devine egal; vom aveà, pentru $\mu = \mu_1$,

$$a_i + \beta_i\, \mu_1 = a_{i_1} + \beta_{i_1}\, \mu_1 = \ldots = n\, \mu_1.$$

De unde
$$\mu_1 = \frac{a_i}{n - \beta_i}$$

Făcând acum μ să crească dela μ_1, numărul $a_i + \beta_i \mu$, care crește mai încet decât numerele situate la dreapta lui, va devenì mai mic decât numerele $a_{i_1} + \beta_{i_1} \mu, \ldots, n\mu$ cu cari a fost egal pentru $\mu = \mu_1$. Fie $\mu = \mu_2 > \mu_1$, cea dintâiu valoare ce întâlnim pentru care $a_i + \beta_i \mu$ devine egal cu unul sau cu mai multe din numerele (4) rămase. Fie $a_k + \beta_k \mu$ cel mai de la stânga din aceste numere; vom aveà, pentru $\mu = \mu_2$,

$$a_k + \beta_k \mu_2 = a_{k_1} + \beta_{k_1} \mu_2 = \ldots = a_i + \beta_i \mu_2,$$
$$(\beta_k < \beta_{k_1} < \ldots < \beta_i).$$

De unde
$$\mu_2 = -\frac{a_i - a_k}{\beta_i - \beta_k}.$$

Continuăm în acelaş mod până ce printre numerele cele mai mici se găseşte numărul h. Introducem astfel succesiv acele valori ale lui μ pentru cari două sau mai multe din numerele (4) sunt egale între ele şi mai mici decât toate cele rămase. *Toate aceste valori ale lui μ sunt numere raţionale.*

28. *Reprezintare geometrică care facilitează determinarea numerelor μ.* Să considerăm două axe rectangulare $0\,a$, $0\,\beta$ şi să fixăm punctele ale căror coordonate (a, β) sunt exponenţii termenilor consideraţi mai sus, anume

$$(5) \qquad (h, o),\ (a_1, \beta_1)\ (a_2, \beta_2), \ldots, (o, n).$$

Cu modul acesta fiecăruia din acei termeni ai ecuaţiunei date corespunde câte unul din punctele (5).

Printr'unul din aceste puncte (a_i, β_i) să ducem dreapta
$$Y - \beta_i = -\frac{1}{\mu}\,(X - a_i),$$
având $-\dfrac{1}{\mu}$ drept coeficient unghiular; abscisa la origină a acestei drepte este
$$a_i + \beta_i \mu,$$
număr care coincide cu gradul termenului corespunzător acestui punct. De aci rezultă că dacă prin toate punctele (a, β) ducem drepte paralele cu direcţiunea $-\dfrac{1}{\mu}$, punctele cari se află pe aceiaş dreaptă reprezintă termeni de acelaş grad şi că dreptei a cărei abscisă la origină este cea mai mică corespund termeni de gradul cel mai mic.

Prin urmare dreapta care conţine cel puţin două puncte (a, β) şi care lasă deasupra sa (de partea opusă cu origina) toate punctele cari nu se află pe dânsa, dă un grup omogen de termeni de gradul cel mai mic.

Din ceeace precede rezultă modul cum putem determinà valorile ce se cuvin să luăm pentru μ.

Prin punctul (o, n) să ne închipuim o dreaptă care coincide mai întâiu cu axa 0β şi care se învârteşte în jurul acestui punct în sensul axei 0α, până ce întâlneşte unul sau mai multe din punctele (5). In jurul ultimului punct să facem să se învârtească dreapta în acelaş sens, până ce va întâlnì unul sau mai multe puncte rămase. Continuăm astfel până ce dreapta va trece prin punctul (h,o). Formăm cu modul acesta o linie poligonală convexă, cu convexitetea spre origine. Fiecare din laturile poligonului prelungită lasă de partea opusă originei toate celelalte puncte. *Valorile căutate ale lui μ vor fi dar inverşii coeficienţilor unghiulari, cu semnele schimbate, ai laturilor poligonului considerat.*

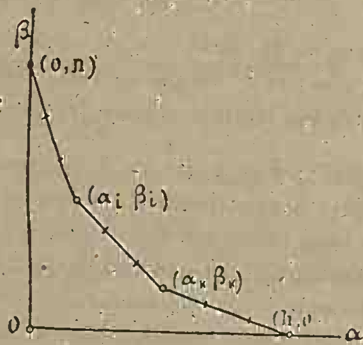

Fig. 2

Să considerăm una din aceste laturi, şi fie (fig. 2)

$$(a_i, \beta_i), (a_{i_1}, \beta_{i_1}), \ldots (a_k, \beta_k)$$

grupul de puncte situate pe această latură, dispuse dela 0β spre 0α, adică $\beta_i > \beta_{i_1} > \ldots > \beta_k$.

Valoarea coeficientului μ va fi

$$(6) \qquad \mu = \frac{a_k - a_i}{\beta_i - \beta_k} = \frac{a_k - a_{i_1}}{\beta_{i_1} - \beta_k} = \ldots = \frac{q}{p},$$

$\frac{q}{p}$ fiind o fracţiune ireductibilă.

Pentru această valoare a lui μ, substituţiunea (2) devine

$$(7) \qquad y = u\, x^{\frac{q}{p}} = u\, x'^q, \quad x = x'^p.$$

Ecuaţiunea (1) sau (3) va luà forma

$$(8) \qquad \mathrm{A}\, x'^{hp} \ldots + (\mathrm{A}_1 + \ldots)\, x'^{p\alpha_1 + q\beta_1}\, u^{\beta_1} + \ldots$$
$$+ (\mathrm{B} + \ldots)\, x'^{qn}\, u^n + \Sigma\, \mathrm{A}_{\alpha\beta}\, x'^{p\alpha + q\beta}\, u^{\beta} = o.$$

Grupând împreună termenii corespunzători laturii considerate şi al căror grad

$$p a_i + q\beta_i = p a_{i_1} + q\beta_{i_1} = \ldots = p a_k + q\beta_k$$

este mai mic decât al tuturor celorlalţi termeni, ecuaţiunea precedentă se va puteà scrie, după suprimarea lui $x'^{p\alpha_i+q\beta_i}$,

$$(9)\qquad A_i\, u^{\beta_i} + A_{i_1} u^{\beta_{i_1}} + \ldots + A_k\, u^{\beta_k} + x'\, \varphi\,(x', u) = o,$$

$\varphi\,(x', u)$ fiind un polinom de x' şi u. Făcând $x'=o$ şi suprimând factorul u^{β_k} [1]) obţinem ecuaţiunea

$$(10)\qquad A_i\, u^{\beta_i-\beta_k} + A_{i_1} u^{\beta_{i_1}-\beta_k} + \ldots + A_k = o,$$

care ne dă, pentru u, $\beta_i - \beta_k$ valori finite şi diferite de zero. Pentru valori x' vecine cu zero, ecuaţiunea (9) va admite dar $\beta_i-\beta_k$ rădăcini infinit vecine respectiv cu rădăcinile ecuaţiunii (10) (§ 17); $y = a_o\, x^{\frac{q}{p}}$ va fi, pentru x vecin cu zero, o rădăcină apropiată a ecuaţiunei (1), adică primul termen al desvoltărei în serie a unei ramure a funcţiunei $y\,(x)$ [2]). Prin urmare latura ale cărei extremităţi au ordonatele β_i, β_k dă primul termen al desvoltărei în serie a $\beta_i-\beta_k$ ramuri.

De unde concluziunea următoare:

Fiecărei laturi a poligonului corespunde primul termen al desvoltărei în serie a atâtor ramuri ale funcţiunei $y\,(x)$, câte unităţi sunt în diferenţa dintre ordonatele extremităţilor sale.

Suma acestor diferenţe fiind egală cu n, rezultă că *totalitatea laturilor dă primul termen al desvoltărei în serie a acelor n ramuri cari se anulează în punctul $x = o$.*

In virtutea ecuaţiunilor (6) putem scrie

$$(11)\qquad \begin{cases} \beta_i - \beta_k = \lambda\, p, & \beta_{i_1} - \beta_k = \lambda_1\, p, \ \ldots \\ \alpha_k - \alpha_i = \lambda\, q, & \alpha_k - \alpha_{i_1} = \lambda_1\, q, \ \ldots \end{cases},$$

λ, λ_1 fiind numere întregi pozitive. Punând

$$(12)\qquad u^p = v,$$

ecuaţiunea (10) devine

$$(13)\qquad A_i\, v^{\lambda} + A_{i_1} v^{\lambda_1} + \ldots + A_k = o.$$

La o rădăcină simplă $v = v_o$ a acestei ecuaţiuni, vor corespunde ecuaţiunei (10) p rădăcini simple date de ecuaţiunea (12) în care înlocuim v prin v_o.

Fie a_0 una din aceste rădăcini; cele p rădăcini vor puteà fi reprezentate prin

$$a_0,\ a_0^{(1)} = a_0\, e^{\frac{2q}{p} i\pi},\ a_0^{(2)} = a_0 e^{\frac{4q}{p} i\pi}, \ldots, a_0^{(p-1)} = a_0 e^{\frac{2(p-1)q}{p} i\pi}$$

---

[1]) Nu ţinem seamă de soluţiunea $u = o$, căci se caută pentru u numai valori finite şi diferite de zero (§ 24).

[2]) Posibilitatea acestei desvoltări va fi stabilită prin prezenta teoremă.

Prin urmare în domeniul lui $x' = o$, ecuațiunea (9) va admite p soluțiuni de forma

$$u_k = a_0^{(k)} + x' P_k(x'), \quad (k = o, 1, \ldots, p-1)$$

cărora vor corespunde ecuațiunei (1), în domeniul lui $x = o$, p soluțiuni de forma

$$(14) \quad y_k = x^{\frac{q}{p}} \left[a_0^{(k)} + x^{\frac{1}{p}} P_k\left(x^{\frac{1}{p}}\right) \right], \quad (k = o, 1, \ldots, p-1).$$

Dacă x descrie un cerc în jurul lui $x = o$, termenul $a_0 \, x^{\frac{q}{p}}$ devine $a_0 \, e^{\frac{2q}{p} i\pi} \, x^{\frac{q}{p}} = a_0^{(1)} x^{\frac{q}{p}}$, termenul $a_0^{(1)} \, x^{\frac{q}{p}}$ se schimbă în $a_0^{(2)} \, x^{\frac{q}{p}}, \ldots$, termenul $a_0^{(p-1)} \, x^{\frac{q}{p}}$ se schimbă în $a_0 \, x^{\frac{q}{p}}$; adică termenii principali

$$(15) \qquad a_0 \, x^{\frac{q}{p}}, \; a_0^{(1)} \, x^{\frac{q}{p}}, \; \ldots, \; a_0^{(p-1)} \, x^{\frac{q}{p}}$$

ai seriilor (14) formează un sistem circular. In acelaș timp y_k se schimbă în

$$e^{\frac{2q}{p} i\pi} \, x^{\frac{q}{p}} \left[a_0^{(k)} + e^{\frac{2i\pi}{p}} \, x^{\frac{1}{p}} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} x^{\frac{1}{p}}\right) \right]$$
$$= x^{\frac{q}{p}} \left[a_0^{(k+1)} + e^{\frac{2(q+1)}{p} i\pi} \, x^{\frac{1}{p}} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} x^{\frac{1}{p}}\right) \right].$$

Insă y_k trebuind să se schimbe într'una din soluțiunile y_0, $y_1, \ldots, y_{p-1}$ nu se poate schimbà decât în y_{k+1}. In adevăr, să presupunem că y_k se schimbă în y_{h+1}, $h \neq k$; va trebuì să avem

$$a_0^{(h+1)} + x^{\frac{1}{p}} \, P_{h+1}\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = a_0^{(k+1)} + e^{\frac{2(q+1)}{p} i\pi} \, x^{\frac{1}{p}} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} x^{\frac{1}{p}}\right),$$

sau

$$a_0^{(h+1)} - a_0^{(k+1)} = x^{\frac{1}{p}} \left[e^{\frac{2(q+1)}{p} i\pi} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} x^{\frac{1}{p}}\right) - P_{h+1}\left(x^{\frac{1}{p}}\right) \right],$$

egalitate imposibilă, căci membrul întâiu este o constantă diferită de zero și membrul al doilea tinde către zero împreună cu x. Trebuie dar să avem $h = k$, și în acelaș timp identitatea

$$P_{k+1}\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = e^{\frac{2(q+1)}{p} i\pi} \, P_k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}} x^{\frac{1}{p}}\right),$$

adică y_k se schimbă în y_{k+1}. Așà dar ramurile $y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}$ formează un singur sistem circular și se prezintă în ordinea în care se permută valorile lor principale (15).

Cele p ramuri considerate se pot reprezentà printr'o singură serie.

$$y = a_0 x^{\frac{q}{p}} + A_1 x^{\frac{q+1}{p}} + A_2 x^{\frac{q+2}{p}} + \ldots, \tag{16}$$

în care se dă lui $x^{\frac{q}{p}}$ cele p valori de care este susceptibil.

Astfel, *la fiecare rădăcină simplă* ν *a ecuaţiunei* (13), *corespunde ecuaţiunei* (1) *un sistem circular de* p *ramuri de forma* (16).

Dacă toate rădăcinile ecuaţiunei (13) sunt simple vor corespunde ecuaţiunei (1) $\lambda . p = \beta_i - \beta_k$ ramuri de forma (16), formând λ sisteme circulare de câte p ramuri. Ramurile corespunzătoare laturei considerate sunt astfel separate de la prima aproximaţiune. Toate aceste ramuri sunt în raport cu x de acelaş ordin infinitezimal $\frac{q}{p}$.

Să presupunem că $\nu = \nu_0$ este o rădăcină multiplă de ordinul n' ($n' \leqq \lambda$) [1]) a ecuaţiunei (13); fiecare din rădăcinile ecuaţiunei (12) în care înlocuim ν prin ν_0, adică $a_0\, e^{\frac{2qk\,i\pi}{p}}$, $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$ este rădăcină multiplă de acelaş ordin a ecuaţiunei (10); în domeniul lui $x' = o$, ecuaţiunea (9) va admite dar câte n' rădăcini u infinit vecine respectiv cu fiecare din ele. Prin urmare ecuaţiunea (1) va admite, pentru x vecin cu zero, câte n' rădăcini y a căror valoare principală este

$$a_0\, e^{\frac{2qki\pi}{p}}\, x^{\frac{q}{p}} \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Să căutăm a separà ramurile corespunzătoare. Plecând, de exemplu, dela rădăcina a_0, să punem în ecuaţiunea (9)

$$u = a_0 + y'; \tag{17}$$

ea se va transformà într'o ecuaţiune

$$f_1(x', y') = o, \tag{18}$$

care, pentru $x' = o$, admite o rădăcină $y' = o$ multiplă de ordinul n'. Acestei ecuaţiuni vom aplicà aceeaş metodă ca ecuaţiunei (1). Dacă ecuaţiunile analoage cu ecuaţiunea (13) au numai

[1]) Se poate întâmplà să avem $n' = \lambda = \lambda p = n$; prin urmare $p = 1$. Egalitatea $\beta_i - \beta_k = \lambda p$ devine $\beta_i - \beta_k = n$; de unde, în virtutea formulelor (11), rezultă egalitatea $\beta_i = n$, $\beta_k = o$, $a_i = o$, $a_k = nq$. Poligonul se reduce la o singură latură ale cărei extremităţi sunt punctele (o, n) (nq, o).

Ecuaţiunea (9) ia forma

$$A_i\, (u - a_0)^n + x\,\varphi\,(x, u) = o$$

şi cele n rădăcini infinit mici y au acelaş termen principal $a_0\, x^q$.

rădăcini simple, cele n' ramuri cari se anulează împreună cu x' se vor grupà în sisteme circulare dela cea dintâiu aproximaţiune.

Fie

$$(19) \qquad y' = a_1 x'^{\frac{q'}{p'}} + B_1 x'^{\frac{q'+1}{p'}} + B_2 x'^{\frac{q'+2}{p'}} + \ldots,$$

unul din aceste sisteme circulare compus din p' ramuri. Acestui sistem (y') corespunde sistemul circular

$$(20) \qquad y = u\, x'^{q} = (a_0 + y')\, x^{\frac{q}{p}}$$

$$= a_0\, x^{\frac{q}{p}} + a_1\, x^{\frac{qp'+q'}{pp'}} + B_1\, x^{\frac{qp'+q'+1}{pp'}} + \ldots,$$

cuprinzând pp' ramuri. In adevăr, când x se învârteşte în jurul lui $x = o$, primul termen $a_0 x^{\frac{q}{p}}$ primeşte p valori diferite; după p învârtiri primul termen îşi reià valoarea iniţială, pe când cel d'al doilea se reproduce multiplicat cu $e^{\frac{2q' i \pi}{p'}}$. Aşa dar este necesar ca x să se învârtească de pp' ori în jurul lui $x = o$ pentru ca cei dintâiu doi termeni (20) să se reproducă simultan. Toţi ceilalţi termeni se reproduc în acelaş caz. Expresiunea (20) reprezintă dar un sistem circular (y) compus din pp' ramuri.

Dacă cele n' ramuri (y'), cari se anulează pentru $x' = o$, nu se separă în sisteme circulare dela cea dintâiu aproximaţiune, vom repetà operaţiunile de mai sus şi vom continuà în acelaş mod până ce vom ajunge la o ecuaţiune $f_h(x^h, y^h) = o$, pentru care ecuaţiunile analoage cu (13) au toate rădăcinile lor simple. Obţinând astfel separaţiunea sistemelor circulare ale ecuaţiunei $f_h = o$, deducem separaţiunea în sisteme circulare ale ramurilor $y(x)$ definite de ecuaţiunea propusă (1).

Seria de operaţiuni se termină neapărat. In adevăr, numărul n' (ordinul de multiplicitate al rădăcinei $y' = o$ corespunzătoare lui $x' = o$ în ecuaţiunea (18)) fiind $\leqq \lambda \leqq \lambda p$, va fi $\leqq n$. După a doua operaţiune dacă va fi nevoie, ecuaţiunea (18) va fi înlocuită printr'o ecuaţiune analoagă având o rădăcină $y'' = o$ multiplă de un ordin $n'' \leqq n'$, etc.

Avem astfel un şir de numere întregi pozitive $n, n', n'', \ldots$ cari nu cresc. Dacă nici unul din aceste numere nu este egal cu 1, va trebuì ca începând dela un rang încolo, aceste numere să fie egale între ele. Să presupunem, pentru a fixà ideile, că ele sunt egale dela cel d'al doilea, adică $n' = n'' = \ldots$ Fie (α'_i, β'_i) (α'_k, β'_k) exponenţii lui (x', y') cari în ecuaţiunea (18) au acelaş rol ca exponenţii $(\alpha_i \beta_i)$, (α_k, β_k) în ecuaţiunea (1). Deasemenea λ' are rolul lui λ. Egalitatea $n'' = n'$, trage după sine egalităţile

$$p' = 1, \beta'_i = n', \beta'_k = o, \alpha'_i = o, \alpha'_k = \beta'_i q' = n'q$$

şi linia poligonală corespunzătoare se reduce la o singură latură având extremităţile (o, n'), $(n'q', o)$. Cele n' ramuri ale ecuaţiunii (18), cari se anulează împreună cu x', vor avea acelaş termen principal

$$a_1 \, x'^{q'},$$

a_1 fiind rădăcina multiplă de ordinul n' a ecuaţiunei analoage cu ecuaţiunea (13) şi vor putea fi reprezintate prin expresiunea

$$(21) \qquad y'_i = x'^q (a_1 + y''_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n')$$

y''_i tinzând către zero împreună cu x'.

Făcând în (18) substituţiunea

$$(22) \qquad y' = x'^q (a_1 + y''),$$

obţinem o ecuaţiune

$$(23) \qquad f_2(x', y'') = 0$$

între x' şi y'', căreia prin ipoteză se aplică concluziuni identice ca ecuaţiunei (18), adică cele $n'' = n'$ ramuri (y''), cari se anulează cu x', vor avea acelaş termen principal $a_2 x'^{q''}$ şi prin urmare cele n' ramuri (y') corespunzătoare vor avea aceiaşi primi doi termeni în desvoltarea lor şi vor putea fi reprezintate prin

$$y'_i = a_1 x'^{q'} + x'^{q'+q''} [a_2 + P_i(x')], \quad (i = 1, 2, \ldots n').$$

Continuând în acelaş mod, recunoaştem, deoarece prin ipoteză seria operaţiunilor nu se termină, că cele n' ramuri (y') considerate sunt reprezintate printr'o singură serie întreagă de x'

$$(24) \qquad y' = \mathcal{P}(x')$$

Suindu-ne la substituţiunea (2) (§ 28), în care înlocuim u prin valoarea sa (17), obţinem expresiunea

$$y_i = [a_0 + \mathcal{P}(x')] x'^q = [a_0 + \mathcal{P}(x^{\frac{1}{p}})] x^{\frac{q}{p}}, (i = 1, 2 \ldots, n')$$

care reprezintă n' ramuri (y) corespunzătoare la *aceeaş valoare* a lui $x^{\frac{1}{p}}$ şi prin urmare pn' ramuri, dacă dăm lui $x^{\frac{1}{p}}$ cele p valori ale sale. Prin urmare câte n' din valorile $y(x)$ considerate coincid într'o infinitate de puncte în domeniul lui $x = o$; ceeace este imposibil, căci punctele în cari două sau mai multe ramuri au aceeaş valoare sunt puncte izolate, ecuaţiunea (1) fiind ireductibilă [1]).

In rezumat din teorema precedentă rezultă că *ramurile* $y(x)$ *cari devin egale cu un număr* b *într'un punct de ramificaţiune* $x=a$, *se grupează în unul sau mai multe sisteme circulare şi că ramurile aceluiaş sistem sunt reprezintate printr'o serie unică de forma*

$$(25)\qquad y-b=a_0(x-a)^{\frac{q}{p}}+a_1(x-a)^{\frac{q+1}{p}}+\ldots,$$

p *reprezintând numărul ramurilor sistemului, care poate fi egal cu* 1, şi q *fiind un număr întreg* ≥ 1 *şi prim cu* p.

29. *Valori finite ale lui* x *pentru cari* y *devine infinit.* Fie

$$(1)\qquad f(x,y)=f_0(x)y^m+f_1(x)y^{m-1}+\ldots+f_m(x)=0$$

ecuaţiunea dată şi $x=a$ o valoare a lui x care anulează primul coeficient $f_0(x)$. In punctul $x=a$ una cel puţin din ramurile y devine infinită. Să presupunem într'un mod general că cei dintâi n coeficienţi $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ se anulează pentru $x=a$ şi $f_n(a)\neq 0$; n ramuri y vor deveni infinite. Să facem substituţiunea

$$(2)\qquad y'=\frac{1}{y};$$

ecuaţiunea transformată

$$(3)\qquad f_1(x,y')=0$$

va avea pentru $x=a$, n rădăcini $y'=0$. Cele n ramuri $y'(x)$ cari se anulează în punctul $x=a$, se grupează, în domeniul acestui punct, într'unul sau mai multe sisteme circulare. Fie

$$(4)\qquad y'=(x-a)^{\frac{q}{p}}\,\mathrm{P}\Big[(x-a)^{\frac{1}{p}}\Big],\quad \mathrm{P}\Big[(x-a)^{\frac{1}{p}}\Big]_{x=a}\neq 0,$$

unul din aceste sisteme. De unde rezultă

$$(5)\qquad y=(x-a)^{-\frac{q}{p}}\,\mathrm{P}_1\Big[(x-a)^{\frac{1}{p}}\Big],\quad \mathrm{P}_1\Big[(x-a)^{\frac{1}{p}}\Big]_{x=a}\neq 0,$$

P_1 fiind o serie întreagă de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$ convergentă într'un cerc cu centrul în a şi trecând prin punctul critic cel mai apropiat.

Aşa dar ramurile cari devin infinite se grupează şi ele într'unul sau mai multe sisteme circulare, ramurile unui sistem

---

[1]) Dacă exponenţii n, n'... ar fi egali dela cel dintâiu, cele n ramuri cari se anulează în punctul $x=0$ ar coincide; ecuaţiunea propusă ar fi reductibilă, de forma

$$[y-x\mathrm{P}(x)]^n\, f_1(x,y)=0,\quad f_1(0,0)\neq 0$$

$\mathrm{P}(x)$ şi $f_1(x,y)$ fiind polinoame.

fiind reprezintate printr'o serie de forma (5) în care *numărul termenilor cu exponenţi negativi este limitat.* Punctul a se zice pol de ordinul q al ramurilor cari compun sistemul circular dat. Dacă $p=1$, ramura corespunzătoare este uniformă în domeniul punctului a şi acest punct este atunci un pol ordinar al ramurei. Dacă $p>1$, punctul a este pol şi punct de ramificaţiune în acelaş timp pentru ramurile sistemului, sau sistemelor corespunzătoare.

30. In fine, mai rămâne de examinat cum se comportă ramurile $y(x)$ în domeniul punctului $x=\infty$. Pentru aceasta, făcând substituţiunea

$$(6) \qquad x = \frac{1}{x'},$$

suntem conduşi a studià ramurile definite de ecuaţiunea transformată

$$(7) \qquad \varphi(x', y) = o,$$

în domeniul lui $x' = o$.

O soluţiune a acestei ecuaţiuni, în domeniul lui $x' = o$, va fi de una din formele

$$y = b + x'^{\frac{q}{p}} \mathrm{P}\left(x'^{\frac{1}{p}}\right) \text{ sau } y = x'^{-\frac{q}{p}} \mathrm{P}\left(x'^{\frac{1}{p}}\right),$$

după cum $x'=o$ nu este pol sau este pol al ramurei considerate, presupusă ca făcând parte dintr'un sistem circular de p ramuri în cari p poate fi egal cu 1.

Revenind la variabila x, ramurile unui sistem circular compus din p ramuri, în domeniul punctului $x=\infty$, vor fi reprezintate printr'o serie având una din formele

$$(8) \qquad y = b + x^{-\frac{q}{p}}\left(\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x^{-\frac{1}{p}} + \mathrm{A}_2 x^{-\frac{2}{p}} + \ldots\right),$$

sau

$$(9) \qquad y = x^{\frac{q}{p}}\left(\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x^{-\frac{1}{p}} + \mathrm{A}_2 x^{-\frac{2}{p}} + \ldots\right).$$

Forma din urmă corespunde cazului când $x = \infty$ este un pol de ordinul q al ramurilor cari compun sistemul circular considerat. *Numărul termenilor cu exponenţi pozitivi în această serie este mărginit.*

31. Din tot studiul precedent rezultă că *o funcţiune algebrică este o funcţiune analitică multiformă cu un număr mărginit de ramuri, neavând în tot planul variabilei, inclusiv punctul dela* ∞, *alte singularităţi decât poluri şi puncte de ramificaţiune.* Aceste proprietăţi sunt caracteristice funcţiunilor algebrice, adică:

Teoremă. Orice funcţiune analitică

$$y = f(x),$$

multiformă cu un număr limitat de ramuri, care, în tot planul, inclusiv punctul ∞, n'are alte singularităţi decât poluri şi puncte de ramificaţiune satisface o ecuaţiune algebrică.

$$F(x, y) = o,$$

$F(x, y)$ fiind un polinom în x şi y.

In adevăr, fie

(10) $$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

valorile funcţiunei $y = f(x)$ într'un punct x oarecare.

Să considerăm funcţiunile simetrice

(11) $$\Sigma y_1, \Sigma y_1 y_2, \ldots, y_1 y_2 \ldots y_m,$$

formate respectiv cu suma valorilor (10), cu suma produselor lor două câte două, etc.

In domeniul unui punct ordinar, fiecare ramură fiind funcţiune uniformă de x, funcţiunile (11) sunt funcţiuni uniforme în acelaş domeniu.

In domeniul unui punct critic — fie că în acest punct ramurile sunt finite, fie că unele din ele admit acest punct ca pol — ramurile cari fac parte din acelaş sistem circular se permută între ele, când x se învârteşte în jurul acelui punct. De unde rezultă că orice funcţiune simetrică formată cu aceste ramuri, reià valoarea iniţială când x revine la punctul de plecare şi prin urmare este o funcţiune uniformă de x în domeniul considerat. Aceeaş concluziune se aplică punctului $x = \infty$.

Expresiunile (11) sunt prin urmare funcţiuni analitice unifome neavând în tot planul (x), inclusiv punctul $x = \infty$, alte singularităţi decât poluri. Ele sunt aşa dar funcţiuni raţionale de x.

Reprezintându-le prin

$$-\psi_1(x), \ \psi_2(x), \ldots, (-1)^m \psi_m(x),$$

cele m valori (10) vor fi rădăcini ale ecuaţiunei

(12) $$y^m + \psi_1(x) y^{m-1} + \psi_2(x) y^{m-2} + \ldots + \psi_m(x) = o,$$

care defineşte funcţiunea algebrică $y(x)$.

q. e. d.

32. *Teoremă. Polul unei ramure a ecuaţiunei algebrice*[1]

(1) $$F(x, y) = y^m + f_1(x) y^{m-1} + f_2(x) y^{m-2} + \ldots + f_{m-1}(x)\, y + f_m = o,$$

este pol cel puţin al unuia din coeficienţii ecuaţiunei şi vice-versa,

---

[1]) Adică a funcţiunii $y(x)$ definită de $F(x, y) = o$.

un pol al unui coeficient este pol cel puţin al uneia din ramurile funcţiunei.

Fie y_1 ramura care admite punctul a ca pol. Să scrim

(2) $F(x, y) = (y - y_1)[y^{m-1} + \varphi_1(x) y^{m-2} + \dots + \varphi_{m-2}(x) y + \varphi_{m-1}(x)]$;

de unde rezultă, prin identificarea ecuaţiunilor (1) şi (2), egalităţile următoare:

$$(3) \quad \begin{cases} f_m(x) = -y_1 \varphi_{m-1}(x), \\ f_{m-1}(x) = -y_1 \varphi_{m-2}(x) + \varphi_{m-1}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_2(x) = -y_1 \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \\ f_1(x) = -y_1 + \varphi_1(x). \end{cases}$$

Prin ipoteză $y_1(a) = \infty$; rezultă $f_m(a) = \infty$, afară dacă $\varphi_{m-1}(x)$ admite $x = a$ ca zero de un ordin cel puţin egal cu ordinul polului ramurei $y_1(x)$. In acest caz, avem

$$f_{m-1}(a) = -y_1(a)\, \varphi_{m-2}(a)$$

şi, în virtutea aceluiaş raţionament, rezultă $f_{m-1}(a) = \infty$ sau $\varphi_{m-2}(a) = o$, cel puţin de acelaş ordin ca mai sus, etc. Dacă toate funcţiunile

$$\varphi_{m-1}(x), \varphi_{m-2}(x), \dots, \varphi_1(x)$$

au a ca zero de ordinul menţionat, rezultă egalitatea

$$f_1(a) = -y_1(a),$$

prin urmare $f_1(x)$ are acelaş pol ca $y_1(x)$.

Reciproca teoremei este evidentă, căci dacă, de exemplu, coeficientul $f_k(x)$ are polul $x = a$, unul cel puţin din termenii sumei $\Sigma\, y_1 y_2 \dots y_k$ devine infinit pentru $x = a$ şi, prin urmare una cel puţin din rădăcinile $y_1, y_2, \dots, y_n$ devine infinită pentru această valoare a lui x.

33. *Funcţiunea algebrică definită de o ecuaţiune ireductibilă este monogenă în sensul lui Weierstrass* [1]).

Fie

(1) $$f(x, y) = o$$

o ecuaţiune algebrică ireductibilă de gradul m în y şi

(2) $$y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_m(x_0)$$

valorile ramurilor într'un punct x_0 diferit de un punct critic. Dacă x, plecând dela punctul x_0, descrie o curbă închisă, una oarecare

[1]) Adică două elemente oarecari se pot deduce unul din celalt prin prelungire analitică.

din rădăcinile (2) se reproduce, sau se schimbă într'una din celelalte rădăcini. Voim să arătăm că, oricare ar fi valoarea iniţială a ramurei corespunzătoare punctului x_0, *există drumuri închise astfel ca valoarea finală să fie una oarecare din rădăcinile* (2), *dată după voie.*

In adevăr, să presupunem că oricare ar fi drumul închis, care plecând dela x_0 revine la x_0, nu obţinem decât o parte din rădăcinile (2): $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n < m)$. Este evident că în acest caz, rădăcinile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nu pot decât să se permute între ele când x descrie o curbă închisă oarecare. De altă parte, aceste rădăcini, ca ramuri ale unei funcţiuni algebrice, n'au alte singularităţi decât un număr limitat de poluri şi de puncte de ramificaţiune, prin urmare ele satisfac o ecuaţiune algebrică

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = o$$

de gradul n în y. Ecuaţiunea (1) admiţând, oricare ar fi valoarea lui x, toate rădăcinile ecuaţiunei (3), rezultă că polinomul $f(x, y)$ este divizibil cu polinomul $\varphi(x, y)$; ceeace este în contrazicere cu ipoteza că ecuaţiunea (1) este ireductibilă.

Vice-versa. Dacă plecând dela punctul x_0 cu rădăcina $y_1(x_0)$ de exemplu, putem, prin drumuri închise convenabile, să obţinem toate rădăcinile (2), ecuaţiunea considerată (1) este ireductibilă. In adevăr, să presupunem că $f(x, y)$ conţine ca factor un polinom $\varphi(x, y)$ de un grad $n < m$ şi fie $y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)$ cele n rădăcini ale ecuaţiunei $\varphi(x_0, y) = o$. Este evident că dacă plecăm dela punctul x_0 cu rădăcina $y_i(x_0)$ ca valoare iniţială, nu vom puteà obţine ca valoare finală decât una din rădăcinile acestei ecuaţiuni, oricare ar fi drumul descris de x: ceeace este contra ipotezei. Ecuaţiunea (1) este aşadar ireductibilă. Polinomul $f(x, y)$ este dar ireductibil, sau o putere a unui polinom ireductibil.

34. *Observări.* 1° Să ne închipuim fixate toate punctele de ramificaţiune ale funcţiunei $y(x)$ şi construite contururile elementare corespunzătoare, origina fiind un punct x_0 dat, astfel ca aceste contururi să nu se taie între ele. Să ne închipuim deasemenea determinate ciclele relative la fiecare punct de ramificaţiune. Să presupunem acum că plecând dela x_0 cu una din valorile corespunzătoare $y(x_0)$ ca valoare iniţială, descriem o curbă închisă C care nu trece prin nici un punct de ramificaţiune. Cum obţinem valoarea sa finală? Pentru aceasta, considerăm contururile elementare cari prin succesiunea lor formează un drum echivalent cu C. Valoarea finală ce obţinem, după ce x descrie aceste contururi elementare, este valoarea căutată. Dacă C se tae pe sine însuşi,

înconjurând mai de multe ori un punct de ramificaţiune, conturul elementar corespunzător va fi descris, în sensul convenabil, de acelaş număr de ori.

2^0. Dacă limităm planul (x) prin tăeturi făcute dela fiecare punct de ramificaţiune până la ∞, astfel ca ele să nu se întâlnească, fiecare ramură este funcţiune uniformă în acest plan.

CAPITOLUL III.

EXEMPLE DE FUNCŢIUNI ALGEBRICE.

35. I. Fie ecuaţiunea

$$(1) \qquad y^3 - 3y + x = o.$$

Valorile lui x, cărora corespund rădăcini egale, sunt date de ecuaţiunea

$$(2) \qquad x^2 = 4,$$

adică $x = \pm 2$. Lui $x = 2$ corespunde rădăcina simplă $y = -2$ şi rădăcina dublă $y = 1$. Lui $x = -2$ corespund rădăcini egale şi de semne contrarii cu acestea.

Să examinăm cum se comportă ramurile în domeniul lui $x = 2$. Ramura y, care devine egală cu -2, este olomorfă; ea este dată de seria

$$(3) \qquad y = -2 - \frac{1}{9}(x-2) + \frac{2}{3.9^2}(x-2)^2 + \dots \text{ [1]}$$

Pentru a obţine desvoltarea ramurilor cari devin egale cu 1, să mutăm origina în punctul $x = 2$, $y = 1$, punând

$$x = x' + 2, \qquad y = y' + 1.$$

Ecuaţiunea (1) devine

$$(4) \qquad y'^3 + 3y'^2 + x' = o;$$

cele două ramuri y', cari se anulează pentru $x' = o$, se pot obţine efectuând inversiunea seriei

$$x'^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}\, y' \left(1 + \frac{y'}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}\, y' \left(1 + \frac{1}{2}\frac{y'}{3} + \dots\right);$$

[1]
$$y = -2 + \sum_{1}^{\infty}{}' a_n (x-2)^n$$
$$a_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n y}{d x^n}\right)_{\substack{x=2 \\ y=-2}}$$

de unde rezultă

$$(5) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{-3}}\, x'^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{18}\, x' + \dots.$$

Revenind la variabilele inițiale, avem

$$(6) \qquad y = 1 + \frac{1}{\sqrt{-3}} (x-2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{18}(x-2) + \dots.$$

Punctul $x = 2$ este așadar un punct de ramificațiune, în jurul căruia se permută cele două ramuri considerate.

In mod analog, găsim, relativ la punctul $x = -2$, ramura olomorfă

$$(7) \qquad y = 2 - \frac{1}{9}(x+2) - \frac{2}{3.9^2}(x+2)^2 + \dots$$

și cele două ramuri, cari devin egale între ele, reprezintate prin seria

$$(8) \qquad y = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{18}(x+2) + \dots.$$

Să alegem ca origină a contururilor elementare punctul $x = o$, căruia corespund rădăcinile simple

$$y_1^0 = 0, \quad y_2^0 = \sqrt{3}, \quad y_3^0 = -\sqrt{3}.$$

Acestor rădăcini corespund respectiv ramurile olomorfe

$$(9) \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3^4}\, x^3 + a x^5 + \dots \\[2ex] y_2 = \sqrt{3} - \dfrac{x}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{7^2}\, x^2 + \dots. \\[2ex] y_3 = -\sqrt{3} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{7^2}\, x^2 + \dots. \end{cases}$$

Să examinăm cum se comportă aceste ramuri când x descrie conturul $(0, 2)$ sau $(0, -2)$.

Rădăcinile ecuațiunii (1) fiind reale pentru valorile reale x cuprinse în intervalul $(-2, +2)$, rezultă că ramurile (9) sunt reale dealungul segmentului $(-2, 2)$ al axei reale. Ramurile y_1 și y_2 fiind pozitive pentru x pozitiv și foarte mic, păstrează acelaș semn în intervalul $(0, 2)$, pe când ramura y_3 este negativă în acest interval. De unde rezultă că x descriind conturul elementar $(0, 2)$, ramurile y_1 și y_2 se permută între ele, iar ramura y_3 se reproduce. Dealungul segmentului $(0, -2)$, ramurile y_1 și y_3 sunt negative, iar ramura y_2 este pozitivă; conchidem că conturul $(0, -2)$ permută ramurile y_1, y_3 şi reproduce ramura y_2.

Din cele ce preced rezultă că conturul $(0, 2)$ urmat de conturul $(0, -2)$ schimbă y_1^0 în y_2^0, y_2^0 în y_3^0, y_3^0 în y_1^0.

Aceleaşi contururi descrise în ordinea inversă, schimbă y^0_1 în y^0_3, y^0_3 în y_2^0, y_2^0 în y_1^0.

Punctul $x = \infty$ este un punct de ramificaţiune, în jurul căruia se permută cele trei ramuri cari devin infinite în acest punct. Căci punând

$$x = \frac{1}{x'}, \ y = \frac{1}{y'},$$

ecuaţiunea (1) devine

$$y'^3 - 3x'y'^2 + x' = o.$$

Puntul $x' = o$ este un punct de ramificaţiune, în jurul căruia se permută cele trei ramuri y', cari se anulează.

Pentru a obţine desvoltarea lor, punem

$$x' = t^3, \qquad y' = ut.$$

Ecuaţiunea transformată

$$u^3 - 3t^2u^2 + 1 = o$$

dă, pentru $t = 0$, trei valori inegale lui u; acestor valori corespund prin urmare trei ramuri u, funcţiuni olomorfe de t. Este de ajuns să calculăm una din ele. Fie aceea care, pentru $t = o$, este egală cu -1.

Găsim pentru această ramură o desvoltare de forma

$$u = -1 + t^2 + a_1 t^4 + \dots;$$

de unde rezultă, pentru cele trei ramuri y', desvoltarea

$$y' = x'^{\frac{1}{3}} (-1 + x'^{2/3} + a_1 x'^{\frac{4}{3}} + \dots).$$

Revenind la variabilele iniţiale, cele trei ramuri, cari devin infinite pentru $x = \infty$, sunt reprezintate printr'o serie de forma

$$(10) \qquad y = -x^{\frac{1}{3}} \left(1 + x^{-\frac{2}{3}} + b_1 x^{-\frac{4}{3}} + \dots\right)$$

Punctul $x = \infty$ este un pol de ordinul al treilea al acestor ramuri.

Se obicinueşte a numi contur elementar, relativ la punctul ∞, drumul format dintr'un cerc având o rază destul de mare, pentru ca în tot planul, exterior cercului, funcţiunea să nu aibă altă singularitate decât punctul ∞, şi dintr'o rază — linie dreaptă sau curbă — care unește un punct al cercului cu centrul său și care nu trece prin niciun punct singular. Un asemenea contur este echivalent cu totalitatea contururilor elementare descrise fiecare o singură dată într'o ordine determinată. Conturul OABCAO (fig. 3) este echivalent cu succesiunea contururilor $(0, 2)$ și $(0, -2)$; prin urmare el permută valorile inițiale y_1^0, y_2^0, y_3^0 în aceeaș ordine ca aceste contururi.

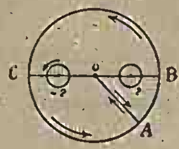

Fig. 3

Relativ la conturul elementar $(0, \infty)$, ramurile $y(x)$ formează dar un singur sistem circular. Acest fapt se citește direct pe desvoltarea (10); căci pentru valori ale lui x, al căror modul este foarte mare, ramurile sunt aproximativ reprezintate prin expresiunea

$$(11) \qquad y = -x^{\frac{1}{3}}$$

și se permută, conform acestei expresiuni, când x descrie cercul $|x| = R$, R fiind destul de mare.

Exemplul II. Să considerăm ecuațiunea

$$(1) \qquad 2y^3 - (3y - 2x)^2 = o.$$

Punctele critice la distanță finită sunt $x = o$ și $x = 1$. Punctului $x = 0$ corespunde rădăcina simplă $y = \frac{9}{2}$ și rădăcina dublă $y = o$; punctului $x = 1$ corespunde rădăcina simplă $y = \frac{1}{2}$ și rădăcina dublă $y = 2$. Să examinăm cum se comportă ramurile funcțiunii $y(x)$ în domeniul fiecăruia din punctele critice.

1° In domeniul punctului $x = o$, ramura olomorfă este reprezintată prin seria

$$(2) \qquad y = \frac{9}{2} - \frac{4}{3}x + ax^2 + \ldots$$

Pentru a găsi termenii principali ai desvoltării ramurilor cari se anulează, să punem

$$y = u\,x.$$

Ecuațiunea (1) devine, suprimând factorul x^2,

$$(3) \qquad 2x\,u^3 - (3u - 2)^2 = o.$$

Lui $x = o$ corespunde rădăcina dublă $u = \frac{2}{3}$. Suntem conduși a căută desvoltarea celor două ramuri $u(x)$, cari devin egale cu $\frac{2}{3}$. Punând

$$u = \frac{2}{3} + v,$$

obţinem ecuaţiunea

$$9v^2-\frac{16}{27}x-\frac{2}{3}xv(4+6v+3v^2)=o,$$

care dă desvoltarea

$$v=\frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{1}{2}}+ax+bx^{\frac{3}{2}}+\ldots;$$

prin urmare

$$u=\frac{2}{3}+\frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}+ax+\ldots$$

şi, în fine, pentru cele două ramuri y cari se anulează, avem expresiunea

$$(4)\qquad y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}+\ldots$$

2⁰. In domeniul punctului $x=1$, ramura olomorfă este de forma

$$(5)\qquad y=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x-1)+a(x-1)^2+\ldots$$

Pentru a obţine expresiunea ramurilor cari devin egale cu 2, punem

$$x=x'+1,\qquad y=y'+2.$$

Ecuaţiunea (1) devine:

$$(6)\qquad 3y'^2+16x'-4x'(x'-3y')+2y'^3=0;$$

de unde se deduce

$$y'=\frac{4}{\sqrt{-3}}x'^{\frac{1}{2}}+ax'+\ldots;$$

prin urmare ramurile, cari devin egale cu 2 pentru $x=1$, sunt date de seria

$$(7)\qquad y=2+\frac{4}{\sqrt{-3}}(x-1)^{\frac{1}{2}}+a(x-1)+\ldots$$

Să luăm ca origină a contururilor elementare un punct x_0, situat pe axa reală între punctele 0 şi 1, foarte aproape de cel dintâiu. Conturul (x_0, o) permută între ele ramurile (4).

Conturul $(x_0, 1)$ permută între ele două ramuri ale funcţiunii y. Se pune întrebarea: dintre ramurile (2) şi (4), cari sunt cele ce se permută între ele? Pentru a răspunde la această întrebare să observăm că rădăcinile ecuațiunii (1) sunt reale și pozitive în intervalul (0, 1).[1]) De altă parte, în virtutea acestei ecuațiuni, expresiunea $3y-2x$ nu se poate anulà decât pentru $y=o$, prin urmare numai pentru $x=o$; de unde rezultă că $3y-2x$ — funcțiune continuă de x — păstrează un semn invariabil pentru $0<x<1$.

Să reprezintăm prin y_1 ramura olomorfă (2) și să separăm ramurile (4) scriind

$$y_2=\frac{2}{3}x+\frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$
$$y_3=\frac{2}{3}x-\frac{4}{9\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}+\ldots.$$

De unde rezultă că pentru $x>o$ și foarte mic, avem inegalitățile

$$3y_2-2x>o,\qquad 3y_3-2x<0.$$

Prin urmare, pentru x foarte aproape de 1, avem

$$y_2>\frac{2}{3},\qquad y_3<\frac{2}{3}.$$

Insă pentru $x=1$, avem două valori $y=2$. De unde rezultă că dintre ramurile (2) și (4), y_1 și y_2 sunt cele ce devin egale cu 2.

Conturul $(x_0, 1)$ permută așa dar aceste două ramuri și reproduce ramura y_3.

In acelaș timp putem conchide că, dacă prelungim ramurile y_1, y_2, y_3 în afară din cercul $|x|<1$, în care ele sunt convergente, prelungirea analitică a celor dintâi două coincide cu ramurile (7), iar prelungirea celei de a treia coincide cu ramura (5).

---

[1]) In intervalul (0, 1), exceptând valorile $x=0$, $x=1$ ramurile $y(x)$ sunt funcțiuni olomorfe. Fie $o<x_0<1$ și y_0 valoarea corespunzătoare a unei ramuri; avem, în domeniul x_0

$$y-y_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_0^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$

Coeficienții ecuațiunii (1) fiind reali, dacă y_0 este real, toate derivatele $y_0^{(n)}$ sunt reale; prin urmare ramura corespunzătoare y este reală dealungul unui segment al axei reale. De unde rezultă (I. p. 305) că ea este reală cel puțin până la punctul singular cel mai apropiat. Pentru $x_0=\frac{1}{2}$, avem rădăcinile reale și pozitive $y=\frac{1}{2}$, $2\pm\sqrt{3}$. Ramurile corespunzătoare sunt așa dar reale în interiorul intervalului (0, 1) și neanulându-se rămân pozitive în tot intervalul.

Punctul $x = \infty$ este un punct de ramificațiune, relativ la care avem sistemul circular (y_1, y_3, y_2) sau (y_1, y_2, y_3) după cum conturul elementar (x_0, ∞) este descris în sensul în care se succed contururile $(x_0, 1)$, (x_0, o) sau în sens invers.

Exemplul III. Să considerăm ecuațiunea

$$(1) \qquad y^3 - 3\,x\,y + 2\,x^3 = o.$$

Punctele critice sunt date de ecuațiunea

$$(2) \qquad x^3\,(x^3 - 1) = o, \text{ [1]}$$

ale cărei rădăcini sunt

$$x = o,\ 1,\ e^{\frac{2i\pi}{3}},\ e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

Cele trei din urmă se găsesc pe cercul $|x| = 1$, razele corespunzătoare făcând cu direcțiunea pozitivă a axei reale unghiuri respectiv egale cu $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

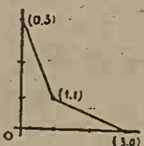

Fig. 4

Punctului $x = o$ corespunde rădăcina triplă $y = o$. Pentru a separà ramurile corespunzătoare acestui punct, să construim linia poligonală ale cărei vârfuri sunt exponenții ecuațiunii (1); obținem (fig. 4) latura $\{(0, 3), (1, 1)\}$ și latura $\{(1, 1), (3, 0).\}$

1°. Primei lature corespunde substituțiunea

$$y = u\,x^{\frac{1}{2}} = u\,x',\ (x = x'^2).$$

Ecuațiunea (1) devine, după suprimarea factorului x'^3,

$$(4) \qquad u\,(u^2 - 3) + 2\,x'^3 = 0.$$

Rădăcinile u diferite de zero sunt $u = \pm\sqrt{3}$. Ramurile $u(x')$ sunt așa dar olomorfe în domeniul $x' = o$. Este de ajuns a calculà

---

[1]) Eliminarea lui y între ecuațiunile

$$y^3 - 3\,x\,y + 2\,x^3 = 0, \quad y^2 - x = 0,$$

revine la eliminarea lui y între ecuațiunile

$$x\,y = x^3, \quad y^2 = x,$$

sau între $$x^2\,y^2 = x^6, \quad y^2 = x.$$

Rezultatul se mai poate obține aplicând condițiunea

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = o$$

relativă la ecuațiunea $y^3 + py + q = o$.

una din ele. Găsim pentru ramura, care se reduce la $\sqrt{3}$, o desvoltare de forma [1])

(5) $$u = \sqrt{3} - \frac{1}{3} x'^3 - \frac{\sqrt{3}}{18} x'^6 + \ldots,$$

în care exponenţii lui x' sunt multiplii de 3. De unde, pentru ramurile y cari se permută între ele, în domeniul $x = o$, o desvoltare a cărei formă este

(6) $$y = \sqrt{3}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} x^2 - \frac{\sqrt{3}}{18} x^{3+\frac{1}{2}} + \ldots + a_{n+1} x^{\frac{3n+1}{2}} + \ldots$$

2°. Celei de a doua laturi a liniei poligonale corespunde substituţiunea

(7) $$y = ux^2,$$

care conduce la ecuaţiunea transformată

$$x^3u^3 - 3u + 2 = o.$$

Această ecuaţiune dă ramura olomorfă

$$u = \frac{2}{3} + \frac{2^3}{3^4} x^3 + \ldots + a_n\, x^{3n} + \ldots,$$

căreia corespunde ramura olomorfă

(8) $$y = \frac{2}{3} x^2 + \frac{2^3}{3^4} x^5 + \ldots + a_n\, x^{3n+2} + \ldots$$

Să considerăm punctul critic $x = 1$. Acestui punct corespunde rădăcina simplă $y = -2$ şi rădăcina dublă $y = 1$.

Cea dintâi dă ramura olomorfă

(9) $$y = -2 - \frac{1}{2}(x - 1) + \ldots$$

Pentru celelalte două ramuri, punem

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 1.$$

Ecuaţiunea transformată

$$y'^3 + 3y'^2 - 3\, x'y' + x'\,(3 + 6\, x' + 2\, x'^2) = o$$

ne dă cele două ramuri cari se permută între ele:

$$y' = i\, x'^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} x' + \ldots \quad (i = \sqrt{-1});$$

---

[1]) Punând în ecuaţiunea (4) $x'^3 = t$, obţinem desvoltarea

$$u = \sqrt{3} + \Sigma\, a_n\, t^n.$$

prin urmare cele două ramuri cari se permută în jurul punctului $x = 1$ sunt date de seria

$$(10) \qquad y = 1 + i(x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(x-1) + \dots$$

Pentru a studià ramurile relative la punctul $x = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, observăm că punând

$$x = x' e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad y = y' e^{\frac{4i\pi}{3}},$$

ecuaţiunea (1) nu se schimbă. Rădăcinile $y(x)$, când x descrie raza care trece prin acest punct, nu difer dar, în totalitatea lor, de rădăcinile aceleiaş ecuaţiuni, când x descrie raza care trece prin punctul $x = 1$ decât prin factorul $e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

De asemenea ecuaţiunea (1) nu se schimbă dacă punem

$$x = x' e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad y = y' e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

de unde conchidem că rădăcinile, dealungul razei care trece prin punctul $x = e^{\frac{4i\pi}{3}}$, difer, în totalitatea lor, de cele corespunzătoare razei care trece prin punctul $x = 1$, numai prin factorul $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Fie a, b, c (fig. 5) punctele cari figurează respectiv valorile

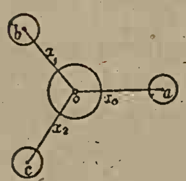

Fig. 5

$x = 1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}$, şi x_0 un punct situat pe axa reală între 0 şi 1, foarte aproape de $x = o$. Fie

$$x_1 = x_0 e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad x_2 = x_0 e^{\frac{4i\pi}{3}},$$

două puncte situate pe cercul $|x| = x_0$, pe razele cercului $|x| = 1$, cari trec respectiv prin punctele b şi c. Să luăm ca origină a contururilor elementare punctul x_0. Conturul elementar relativ la punctul a are forma rectilinie obicinuită; conturul relativ la punctul b este format de arcul $x_0 x_1$ urmat de porţiunea razei $x_1 b$; conturul relativ la punctul c este format de arcul $x_0 x_1 x_2$, urmat de porţiunea razei $x_2 c$. In fine conturul elementar relativ la punctul $x = 0$ este cercul $|x| = x_0$.

Să examinăm în ce mod se permută rădăcinile y corespunzătoare punctului x_0, când x descrie fiecare din contururile elementare considerate.

Conturul $(x_0 a)$. Dealungul razei $x_0 a$, rădăcinile ecuaţiunii (1) sunt reale, două sunt pozitive şi una este negativă.

Să reprezintăm prin y_1^0, y_2^0, y_3^0 aceste rădăcini în punctul x_0, date de formulele (8) și (6):

$$(11)\quad \begin{cases} y_1^0 = \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{2^3}{3^4}x^5 + \ldots, \\ y_2^0 = \sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{3}x^2 + \ldots, \quad (x = x_0) \\ y_3^0 = -\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{3}x^2 - \ldots. \end{cases}$$

Cele dintâi două sunt pozitive, cea de a treia este negativă [1]). Conturul $(x_0\, a)$ permută dar rădăcinile y_1^0, y_2^0 și reproduce rădăcina y_3^0.

Conturul $(x_0\, x_1\, b)$. Pentru a vedeà cum se comportă rădăcinile dealungul acestui contur, să căutăm mai întâi ce devin ele în punctul x_1 când x descrie arcul $x_0\, x_1$. Fie y_1', y_2', y_3' valorile în cari se schimbă respectiv rădăcinile (11), când înlocuim x prin $x_0 e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Precum am văzut mai sus, aceste valori nu difer de cele dintâi, abstracțiune făcând de ordinea lor, decât prin factorul $e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Făcând această înlocuire, obținem egalitățile următoare

$$(12)\qquad y'_1 = y_1^0 e^{\frac{4i\pi}{3}}, \qquad y'_2 = y_3^0 e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad y'_3 = y_2^0 e^{\frac{4i\pi}{3}},$$

cari arată că, abstracțiune făcând de factorul $e^{\frac{4i\pi}{3}}$, rădăcinile y_1' și y'_3 sunt pozitive, iar rădăcina y_2' este negativă. Conturul considerat permută dar între ele rădăcinile y_1^0, y_3^0 și reproduce rădăcina y_2^0.

Conturul $(x_0\, x_2\, c)$. In punctul x_2 rădăcinile, precum s'a văzut, nu difer de rădăcinile (11), abstracțiune făcând de ordinea lor, decât prin factorul $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Inlocuind în (11) x prin $x_0\, e^{\frac{4i\pi}{3}}$, obținem valorile corespunzătoare ale rădăcinilor

$$(13)\quad y_1^{(2)} = y_1^0 e^{\frac{8i\pi}{3}} = y_1^0 e^{\frac{2i\pi}{3}},\; y_2^{(2)} = y_2^0 e^{\frac{2i\pi}{3}},\; y_3^{(2)} = y_3^0 e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

De unde rezultă că conturul considerat are asupra rădăcinilor acelaș efect ca conturul $(x_0\, a)$; el permută rădăcinile y_1^0, y_2^0 și reproduce rădăcina y_3^0.

---

[1]) In intervalul (0, 1) rădăcinile y_1, y_2, y_3 fiind reale, distincte și diferite de zero, fiecare din ele își conservă semnul; cele cari devin egale în punctul $x = 1$ sunt cele de acelaș semn; ele se permută în jurul acestui punct.

In fine, conturul elementar relativ la punctul critic $x = o$, adică cercul $|x| = x_0$, permută, conform egalităților (6), (8) și (11) rădăcinile y_2^0, y_3^0 și reproduce rădăcina y_1^0.

Punctul $x=\infty$ este pol al tuturor ramurilor, fără a fi punct critic.

Exemplul IV. Fie ecuațiunea

$$y^3 - 3y^2 + 4x^4 = o. \tag{1}$$

Valorile x cărora corespund rădăcini multiple sunt date de ecuațiunea

$$x^4(x^4 - 1) = o.$$

Lui $x = o$ corespunde rădăcina simplă $y = 3$ și rădăcina dublă $y = o$.

Ramura care se reduce la 3 este de forma [1])

$$y = 3 - \frac{4}{9}x^4 + a\,x^8 + \ldots \tag{2}$$

Pentru cele cari se anulează, facem substituțiunea

$$y = ux^2.$$

Ecuațiunea transformată

$$x^2u^3 - 3u^2 + 4 = o$$

dă, pentru $x = o$, valorile inegale diferite de zero, $u = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ramura care se reduce la $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ este dată de seria

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9}x^2 + ax^4 + \ldots;$$

ramura care se reduce la $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ se obține schimbând $\sqrt{3}$ în $-\sqrt{3}$ în toți coeficienții seriei cari conțin acest radical.

Acestor valori ale lui u corespund două ramuri olomorfe pentru y

$$y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + \frac{2}{9}x^4 + \ldots \tag{3}$$

cari difer între ele prin semnul radicalului $\sqrt{3}$. Punctul $x = o$ nu este așa dar punct de ramificațiune.

Să examinăm cum se comportă ramurile în domeniul rădăcinilor ecuațiunii $x^4 = 1$.

---

[1]) Punând în ecuațiunea (1) $x^4 = t$, obținem desvoltarea

$$y = 3 + \Sigma a_n t^n.$$

Fie x_1 (± 1, $\pm i$) una din aceste rădăcini. Inlocuind x prin x_1, ecuațiunea (1) devine

$$y^3 - 3y^2 + 4 = (y+1)(y-2)^2;$$

ea admite rădăcina simplă $y = -1$ și rădăcina dublă $y = 2$.

Să considerăm punctul $x = 1$. In domeniul acestui punct ramura olomorfă este

$$y = -1 - \frac{16}{9}(x-1) + \dots \tag{4}$$

Pentru desvoltarea ramurilor cari devin egale cu 2, punem

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 2.$$

Ecuațiunea transformată

$$y'^3 + 3y'^2 + 4x'(4 + 6x' + 4x'^2 + x'^3) = o$$

dă pentru ramurile y', cari se anulează, desvoltarea

$$y' = \frac{4}{\sqrt{-3}} x'^{\frac{1}{2}} + \dots .$$

Ramurile care devin egale cu 2 se permută dar între ele în domeniul punctului $x = 1$ și sunt reprezintate prin seria

$$y = 2 + \frac{4}{\sqrt{-3}}(x-1)^{\frac{1}{2}} + \dots . \tag{5}$$

Dezvoltările ramurilor în domeniul celorlalte trei puncte x_1 (-1, $\pm i$) se deduc respectiv din formulele (4) și (5), dacă înlocuim x prin $x_1 x'$ și considerăm domeniul $x' = 1$.

Cele patru rădăcini ale ecuațiunii $x^4 = 1$ sunt așadar patru puncte de ramificațiune, în jurul cărora se permută respectiv cele două ramuri (5) și cele corespunzătoare prin transformarea $x = x_1 x'$.

Să examinăm cum se prezintă ramurile olomorfe din domeniul $x = o$, când x descrie contururile elementare corespunzătoare celor patru puncte critice, origina acestor contururi fiind punctul $x = o$. Pentru aceasta, să observăm că rădăcinile ecuațiunii (1) sunt reale pentru x real și cuprins în intervalul $(-1, +1)$, precum și pe axa imaginară în intervalul $(-i, +i)$, două din ele sunt pozitive și una este negativă, anume: ramura (2) este pozitivă pentru toate aceste valori; dintre celelalte două, ramura al cărei primul termen este

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} x^2$$

este pozitivă pe axa reală și negativă pe axa imaginară; pe când din contra, ramura al cărei prim termen este

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^2$$

este negativă pe axa reală și pozitivă pe axa imaginară.

Reprezintând cele trei ramuri în această ordine prin y_1, y_2, y_3 rezultă că ramura y_1 se permută cu y_2, pe conturile $(0, 1)$, $(0, -1)$ și cu y_3 pe celelalte două contururi $(0, i)$, $(0, -i)$. Cele dintâi două contururi sunt neutre pentru ramura y_3 și cele două din urmă pentru ramura y_2.

Punctul $x = \infty$ este pol și punct de ramificațiune. Conturul elementar corespunzător, descris în sensul pozitiv în raport cu origina, permută cele trei ramuri în ordinea (y_1, y_3, y_2), precum rezultă descriind succesiv cele patru contururi elementare (1), (i), (-1), $(-i)$.

Exemplul V. Să considerăm ecuațiunea

(1) $$y^6 - y^5 + xy^3 - 3x^3y + 2x^4 - x^5 = o$$

și să separăm ramurile în domeniul punctului $x = o$. Acestui punct corespunde rădăcina simplă $y = 1$ și rădăcina $y = o$, multiplă de ordinul al cincilea.

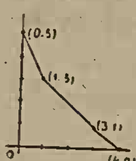

Fig. 6

Celei dintâi corespunde ramura olomorfă

(2) $$y = 1 - x + ax^2 + \dots$$

Pentru a separà ramurile cari se anulează, construim linia poligonală aci alăturată (fig. 6).

Latura $(0, 5)$, $(1, 3)$ dă substituțiunea

(3) $$y = u\,x^{\frac{1}{2}} = ux', \quad (x = x'^2)$$

Ecuațiunea (1) devine, după suprimarea factorului x'^2,

$$u^3(u^2 - 1) - x'(2x' - x'^4 - 3x'u + u^6) = o.$$

Pentru $x' = o$, avem două rădăcini inegale $u = \pm 1$, cărora corespund două ramuri olomorfe. Fie

$$u = 1 + \frac{1}{2}x' + \dots,$$

una din aceste ramuri, căreia corespund ramurile y, cari se permută între ele,

(4) $$y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x + a\,x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

A doua latură a liniei poligonale trece prin punctele $(1, 3)$, $(3, 1)$ $(4, 0)$; ea conduce la substituțiunea

(5) $$y = ux.$$

Ducând această expresiune în ecuaţiunea (1) şi suprimând factorul x^4, obţinem ecuaţiunea

$$u^3 - 3u + 2 - x(1 + u^5 - x u^6) = o, \tag{6}$$

care, pentru $x = o$, se reduce la

$$u^3 - 3u + 2 = (u + 2)(u - 1)^2.$$

Rădăcinei simple $u = -2$ corespunde ramura olomorfă

$$u = -2 - \frac{31}{9} x + \ldots\ldots$$

căreia corespunde, pentru y, ramura olomorfă

$$y = -2x - \frac{31}{9} x^2 + \ldots \tag{7}$$

Pentru a separà ramurile u, cari pentru $x = o$ devin egale cu 1, punem în ecuaţiunea (6)

$$u = 1 + v.$$

Ecuaţiunea transformată

$$3v^2 - 2x + \text{termeni de grad mai înalt} = o$$

dă pentru v două ramuri cari se permută, cuprinse în expresiunea

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{2}} + a x + b x^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots;$$

prin urmare ramurile corespunzătoare ale funcţiunii u sunt

$$u = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{2}} + a x + b x^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots$$

In fine, cele două ramuri y cari au rămas neseparate până aci, se permută între ele şi sunt reprezintate prin seria

$$y = x + \sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{3}{2}} + a x^2 + b x^{\frac{5}{2}} + \ldots\ldots \tag{8}$$

In rezumat, cele şase ramuri $y(x)$ ale ecuaţiunii (1) se separă, în domeniul punctului $x = 0$, în două ramuri olomorfe date de ecuaţiunile (2) şi (7) şi în patru ramuri formând două sisteme circulare reprezintate respectiv prin ecuaţiunile (4) şi (8).

36. *Observare.* Separaţiunea ramurilor unei funcţiuni definită de o ecuaţiune algebrică, în cazul când coeficienţii sunt reali, constitue o metodă de studiu al curbei reprezintative în vecinătatea punctelor multiple ale ei.

Să luăm ca exemplu ecuaţiunea (1) din exemplul precedent. Curba reprezintată de această ecuaţiune admite origina ca punct multiplu de ordinul al patrulea. Forma ei este dată de funcţiunile

(4), (7) și (8), cari se anulează împreună cu x. Astfel valorile apropiate ale celor două ramuri (4) $y = x^{\frac{1}{2}}$ dau arcele parabolei $y^2 = x$, situată de o parte și de alta a axei $O x$, având axa $O y$ ca tangentă.

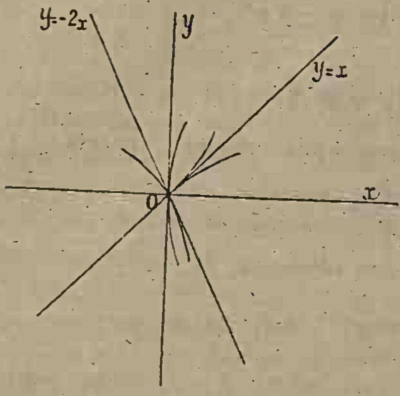

Fig. 7.

Valoarea apropiată a ramurei (7) $y = -2x$, este dreapta tangentă la parabola

$$y + 2x + \frac{31}{9} x^2 = o,$$

care în vecinătatea originei se confundă cu curba dată. Valorile apropiate ale ramurilor (8)

$$y = x + \sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{3}{2}}$$

reprezintă două arce tangente la dreapta $y = x$, situate de o parte și de alta a acestei tangente. Punctul $x = y = o$ este dar pentru curbă, un punct de întoarcere de speța I. Forma curbei în vecinătatea originei este reprezintată prin (fig. 7).

CAPITOLUL IV.

SUPRAFEȚELE LUI RIEMANN. GENERALITĂȚI [1]).

37. Am construit în altă parte [2]) suprafețele Riemann pentru funcțiuni algebrice de forme particulare. Inainte de a trece la cazul general, să mai considerăm câteva exemple particulare.

1⁰. Fie ecuațiunea

$$y^3 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

Fiecare din punctele a, b, c este punct de ramificațiune în jurul căruia se permută cele trei ramuri ale funcțiunii y. Reprezintând prin y_1 una din valorile lui y într'un punct x diferit de un punct critic, celelalte două vor fi $y_2 = y_1 e^{\frac{2 i \pi}{3}}$, $y_3 = y_2 e^{\frac{2 i \pi}{3}} = y_1 e^{\frac{4 i \pi}{3}}$.

Dacă plecăm dela un punct ordinar x cu valoarea inițială y_1 și descriem în sensul pozitiv o curbă închisă în jurul unuia oarecare din punctele critice, obținem ca valoare finală y_2; dacă cu aceiaș

[1]) Pentru un studiu complect, a se vedea tratate speciale asupra funcțiunilor algebrice; de exemplu, *Appell* et *Goursat*, Théorie des fonctions algébriques et leurs intégrales.

[2]) I, p. 182.

valoare inițială descriem o curbă închisă care să conțină în interiorul ei două puncte critice, obținem ca valoarea finală y_3. In fine, o curbă închisă în jurul celor trei puncte critice, descrisă în acelaș sens, readuce valoarea inițială.

Aceste observațiuni fiind făcute, să ducem o linie care să unească punctele a, b, c și care să nu se tae pe sine însăș. Dealungul acestei linii să facem o tăietură în planul (x) peste care variabila să nu treacă. In planul astfel limitat, fiecare ramură este o funcțiune uniformă, căci o curbă închisă, sau nu conține nici unul din punctele critice, sau le conține pe toate. Să reprezintăm prin t_1 porțiunea tăeturii cuprinsă între punctele a și b; prin t_2 porțiunea cuprinsă între punctele b și c și să examinăm relațiunile ce există între valorile funcțiunii y în două puncte infinit apropiate, de o parte și de alta a lui t_1 sau a lui t_2 (fig. 8).

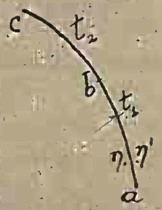

Fig. 8

Fie η valoarea lui y într'un punct pe țărmul stâng al lui t_1 și η' valoarea sa pe țărmul drept [1]; avem $\eta' = \eta\, e^{\frac{2i\pi}{3}}$ căci trecerea dela primul punct la cel de al doilea se face descriind o curbă închisă în sensul pozitiv în jurul punctului a. Dacă η este valoarea lui y într'un punct pe țărmul stâng al lui t_2, valoarea sa pe țărmul drept este $\eta\, e^{\frac{4i\pi}{3}}$ sau, ceeace este tot una, $\eta\, e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ căci trecerea dela țărmul stâng la cel drept se face sau descriind în sensul pozitiv o curbă închisă în jurul punctelor a și b, sau, în sensul negativ, o curbă închisă în jurul punctului c.

Din cele ce preced rezultă modul de a construi o suprafață Riemann pentru funcțiunea dată. Suprapunem peste planul (x) reprezintat prin P_1, două plane P_2 și P_3 și în fiecare facem câte o tăietură suprapusă peste cea din primul plan.

Raportând ramura y_k la planul P_k, $(k = 1, 2, 3)$, facem să coincidă, dealungul lui t_1, țărmul drept al lui P_1 cu țărmul stâng al lui P_2; țărmul drept al lui P_2 cu cel stâng al lui P_3; țărmul drept al lui P_3 cu cel stâng al lui P_1. Dealungul lui t_2, facem să coincidă țărmul drept al lui P_1 cu țărmul stâng al lui P_3, țărmul drept al lui P_3 cu cel stâng al lui P_2 și țărmul drept al lui P_2 cu cel stâng al lui P_1. Pe această suprafață funcțiunea y este uniformă. Trecerea dela o ramură la alta, adică dela un plan la altul se face numai străbătând tăieturile t_1, t_2 cari, pentru acest motiv, se numesc *linii*

---

[1]) Cele două puncte η, η' sunt situate față în față; *geometricește* ele se pot considera confundate, *analiticește* însă sunt distincte.

de trecere. Valoarea $x=\infty$ este reprezintată prin trei puncte distincte suprapuse, câte unul în fiecare foaie, punctul ∞ nefiind punct critic.

Suprafaţa Riemann plană poate fi înlocuită printr'o suprafaţă sferică cu trei foi suprapuse.

2°. Fie

$$y^3=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Pentru a obţine suprafaţa Riemann a acestei funcţiuni, este de ajuns a introduce în suprafaţa din exemplul precedent o tăietură în cele trei foi între punctele critice d şi ∞ şi a uni ţărmurile acestei tăieturi din cele trei foi în acelaş mod, ca dealungul tăieturii t_1. Punctul ∞ este comun tuturor foilor suprafeţei (fig. 9).

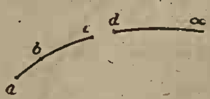

Fig. 9

3°. Fie

$$y^3=(x-a)^2(x-b)(x-c).$$

O curbă închisă, care conţine în interiorul său punctul a şi unul din celelalte două puncte b sau c, descrisă într'un sens oarecare, readuce valoarea iniţială a fiecărei ramuri. De unde rezultă că suprafaţa Riemann a acestei funcţiuni se poate deduce din suprafaţa considerată în exemplul 2°, suprimând din fiecare foaie tăietura dintre punctele b şi c şi făcând ca, dealungul tăieturii t_1 (fig. 10), ţărmurile să coincidă în acelaş mod ca în t_2 (fig. 8), adică ţărmul drept al lui t_2 din P_1 să coincidă cu ţărmul stâng din P_3, etc.; iar dealungul tăieturii (c, ∞) trecerea dela o foaie la alta să fie ca dealungul lui t_1 (fig. 8): ţărmul drept din P_1 să coincidă cu ţărmul stâng din P_2, etc.

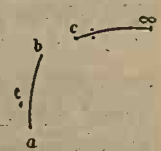

Fig. 10

4°. Fie

$$y^3=\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}.$$

Fig. 11

Se recunoaşte lesne că tăietura trebuie să treacă prin punctele a, b, c, ∞ şi că ţărmurile porţiunilor (a, b), (c, ∞) trebuie să coincidă în acelaş mod ca dealungul lui t_1 din exemplul 1° şi coincidenţa ţărmurilor porţiunii (b, c) este aceiaş ca în acel exemplu. (fig. 11).

38. *Cazul general.* Fie ecuaţiunea ireductibilă

$$(1)\qquad X_0\,y^m+X_1\,y^{m-1}+\ldots\ldots+X_m=o,$$

X_0, X_1, ..., X_m fiind polinoame de x.

In exemplele particulare considerate şi, în general, în cazul ecuaţiunilor binoame $y^m = R(x)$, $R(x)$ fiind o funcţiune raţională de x, punctele critice fiind cunoscute, ciclele corespunzătoare la toate punctele critice sunt date imediat; pe când în cazul unei ecuaţiuni algebrice de formă generală este nevoie, precum s'a văzut din metoda lui Puiseux, de operaţiuni, în genere, destul de lungi pentru obţinerea ciclelor. Cunoaşterea tuturor ciclelor funcţiunii este necesară pentru construirea suprafeţei corespunzătoare a lui Riemann. Presupunând dar că cunoaştem toate punctele critice: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ precum şi ciclele corespunzătoare, putem procede în modul următor:

Facem în planul (x) o tăietură trecând prin toate punctele critice, dela punctul a_1 până la ∞, care să nu se taie pe sine însăşi. In planul aşà limitat, toate ramurile funcţiunii y sunt funcţiuni uniforme. Peste planul (x) reprezintat prin P_1 punem $m-1$ plane $P_2, \ldots, P_m$, efectuând în toate aceeaş tăietură ca în P_1. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_m$ cele m valori ale lui y într'un punct ordinar x. Fiecare din aceste ramuri, raportată la planul afectat cu acelaş indice, este o funcţiune uniformă de x în acest plan. Rămâne să obţinem o trecere prin continuitate dela o ramură la alta, ceeace revine a stabili legături convenabile între cele m foi.

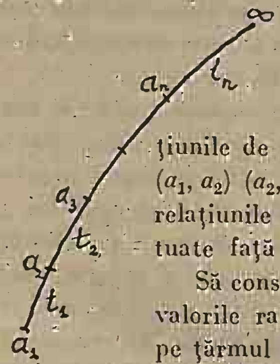

Fig. 12

Să reprezintăm prin $t_1, t_2, \ldots t_n$ porţiunile de tăieturi cuprinse respectiv între punctele (a_1, a_2) $(a_2, a_3), \ldots, (a_n, \infty)$ (fig. 12) şi să examinăm relaţiunile dintre valorile ramurilor în punctele situate faţă în faţă pe ţărmurile acestor tăieturi.

Să considerăm prima tăietură t_1. Fie $y_k(s)$, $y_k(d)$ valorile ramurii $y_k(x)$ în puncte situate respectiv pe ţărmul stâng şi pe ţărmul drept al acestei tăieturi. Dacă punctul a_1 nu este punct critic pentru ramura y_k, cele două valori ale acestei ramuri, dealungul lui t_1 sunt egale între ele; tăietura t_1 în planul P_k este inutilă, o suprimăm, astfel că, în punctul a_1, planul P_k este separat de celelalte plane ale suprafeţei. Dacă însă ramura y_k face parte, relativ la punctul a_1, dintr'un ciclu de p ramuri, facem să coincidă ţărmurile lui t_1 din planele corespunzătoare acestor ramuri, precum am procedat în exemplele particulare considerate mai sus. Aceste p plane au punctul a_1 comun şi sunt distincte, în acest punct, de celelalte plane ale suprafeţei. Dacă în afară de cele p ramuri considerate, există alte ramuri formând un ciclu relativ la punctul a_1 procedăm în acelaş mod cu planele corespunzătoare. Cele m plane se reunesc astfel între ele, în punctele a_1 situate pe aceeaş verticală la planul (x), în grupuri, conform ciclelor corespunzătoare lui $x = a_1$. Două grupuri diferite n'au nici o legătură în punctul a_1. Un punct variabil x care se învârteşte în jurul lui a_1, străbătând tăietura t_1, rămâne numai pe planele cari fac parte din acelaş grup cu planul iniţial.

Inainte de a trece la tăieturile t_2, $t_3 \ldots$ să reamintim propoziţiunea următoare [1]: In planul (x) din care suprimăm toate tăieturile, un drum închis conţinând în interiorul său un număr de puncte critice, descris în sensul pozitiv dela un punct x_0, este echivalent cu drumul format de contururile elementare corespunzătoare acelor puncte critice, descrise în acelaş sens din punctul x_0 ca origină. Ordinea în care aceste contururi sunt descrise trebue să fie aceea în care o rază vectoare cu origina în x_0, învârtindu-se în sensul pozitiv, întâlneşte punctele critice considerate.

Din această propoziţiune rezultă că din cunoştinţa ciclelor relative la punctele $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ conchidem ordinea în care ramurile se permută când x descrie o curbă închisă în jurul acestor puncte şi prin urmare, relativ la tăietura t_h $(h = 2, 3, \ldots n-1)$, fiind dată o ramură y_k pe ţărmul drept al acestei tăieturi, se poate deduce ramura cu care ea coincide pe ţărmul stâng. Ne aflăm astfel în condiţiuni analoage ca relativ la prima tăietură t_1 şi procedăm în acelaş mod în ceeace priveşte legătura planelor P_k între ele.

In ce priveşte ultima tăietură t_λ, observăm că a descrie în sensul pozitiv o curbă închisă în jurul tuturor punctelor critice situate la distanţă finită, revine a descrie aceeaş curbă în sensul negativ în jurul punctului ∞. Legătura între planele P_k dealungul lui t_n se poate dar determina ţinând seama de ciclele relative la punctul ∞. Dacă punctul ∞ nu este punct critic pentru nici o ramură, tăietura t_n se suprimă din toate planele.

Tăieturile t_1, $t_2, \ldots$ t_n se numesc *linii de trecere*. Trecerea dela o ramură la alta a funcţiunii se obţine dacă străbatem una din aceste linii şi numai atunci. Convenim că nu există legătură între două foi ale suprafeţei dealungul unei linii de trecere.

Suprafaţa astfel construită este suprafaţa T a lui Riemann, pentru funcţiunea algebrică definită de ecuaţiunea generală (1). Ea poate fi înlocuită prin o suprafaţă sferică formată din m foi suprapuse, rezultând din proiecţiunea pe o sferă a foilor plane, după metoda cunoscută. [2]; legăturile între aceste foi corespund legăturilor foilor plane.

---

[1] I, p. 178.
[2] I, p. 52.

O suprafaţă T se poate forma în diferite moduri. Liniile de trecere pot fi drepte sau curbe. Putem reunì între ele punctele critice în diferite moduri, prin urmare introduce linii de trecere diferite. In orice caz, însă, toate foile suprapuse sunt legate între ele, adică se poate trece dela o foaie oarecare la alta oarecare fără a eşi din suprafaţă. Căci, dacă una din foile P_k ar fi fără legătură cu celelalte foi, ar rezultà ca dela ramura corespunzătoare acestei foi să nu putem trece la nici una din celelalte ramuri; ceeace este în contradicţiune cu ipoteza că ecuaţiunea (1) este ireductibilă. Suprafaţa lui Riemann corespunzătoare unei ecuaţiuni algebrice este aşadar o suprafaţă conexă.

Din construcţiunea suprafeţii T rezultă:

1°. Fiecărui punct al suprafeţii corespunde un sistem unic (x, y);

2°. Funcţiunea y definită de ecuaţiunea (1) se comportă pe T ca o funcţiune uniformă; orice drum dus dela un punct la altul, fără a trece printr'un punct critic, conduce la aceeaş valoare a funcţiunii.

3°. Dacă unui punct x_0 corespunde o rădăcină multiplă y_0 de un ordin μ, fără ca acest punct să fie de ramificaţiune, sistemul (x_0, y_0) reprezintă pe T μ puncte confundate în cari foile corespunzătoare se ating, fără a fi legate între ele în domeniul acestui punct. Punctul (x_0, y_0) este un punct multiplu al suprafeţii cu foi separate.

39. *Exemple*. Să formăm suprafeţe Riemann pentru ecuaţiunile I—IV, considerate în capitolul precedent.

I. $$y^3 - 3y + x = o.$$

Fie y_1, y_2, y_3 ramurile olomorfe în domeniul $x = o$ şi P_1, P_2, P_3 planele la cari se raportează respectiv aceste ramuri. Ciclul relativ la punctul critic $x = 2$ este (y_1, y_2), cel relativ la punctul $x = -2$ este (y_1, y_3). Obţinem suprafaţa T, făcând în planele P_1, P_2 o tăietură dealungul axei reale dela $+2$ la ∞ şi în

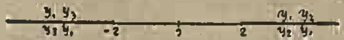

Fig. 13

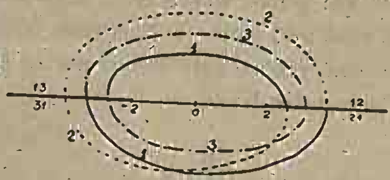

Fig. 14

planele P_1, P_3 o tăietură dealungul aceleiaş axe dela -2 la $-\infty$ şi facem să coincidă ţărmul stâng al tăieturii dintr'un plan cu ţărmul drept al tăieturii din celalalt plan şi viceversa (fig. 13). Trecerea între planele P_1 şi P_2 se face dealungul tăieturii comune, tot astfel între planele P_1 şi P_3. Trecerea dela P_2 la P_3 sau vice-versa se face prin intermediul planului P_1. Un drum care conţine în interiorul său punctele ± 2 nu se poate închide decât înconjurând origina de trei ori. Plecând dela un punct situat într'un plan, acest drum trece dela un plan la altul, străbătând liniile de trecere respective, până revine pe planul inițial la punctul dela care am plecat (fig. 14)

II. $$2y^3 - (3y - 2x)^2 = o.$$

Ciclul relativ la punctul critic $x = 1$ este (y_1, y_2), cel relativ la $x = o$ este (y_2, y_3). Obținem suprafața T a ecuațiunii date, făcând dela 1 la ∞ o tăietură comună planelor P_1, P_2 și, dela O la $-\infty$, o tăietură comună planelor P_2, P_3 (fig. 15).

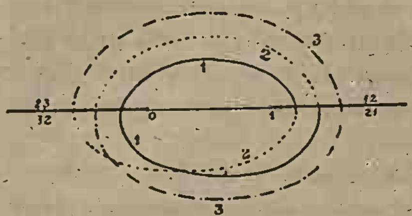
Fig. 15

III. $$y^3 - 3xy + 2x^3 = o$$

Ciclul relativ la punctul $x = o$ este (y_2, y_3); cele relative la punctele a și c cuprind ramurile y_1, y_2; ciclul relativ la punctul b este (y_1, y_3). Contururile elementare fiind, în ordinea pozitivă (a), (b), (c), (O), obținem suprafața T în modul următor: prelungim până la ∞ razele Oa, Ob, Oc și facem tăieturi dealungul acestor prelungiri, astfel ca tăieturile cari pleacă dela punctele a și c să fie comune planelor P_1, P_2 și tăietura care pleacă dela punctul b să fie comună planelor P_1, P_3. In fine introducem între Oa și Oc o tăietură dela O la ∞, comună planelor P_2, P_3 (fig. 16).

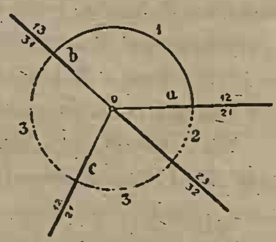
Fig. 16

Un punct mobil care descrie un cerc cu centrul în origină, cu o rază mai mare ca 1, revine la punctul de plecare după *un singur circuit*, ceeace este de accord cu faptul că punctul ∞ nu este punct de ramificațiune.

IV. $$y^3 - 3y^2 + 4x^4 = o.$$

Punctele critice $x = \pm 1$ permută ramurile y_1, y_2; punctele $x = \pm i$ permută ramurile y_1, y_3. Obținem suprafața T făcând pe axa reală tăieturile $(+1, +\infty)$, $(-1, -\infty)$ comune planelor P_1, P_2 și pe axa imaginară tăieturile $(+i, +\infty)$, $(-i, -\infty)$ comune planelor P_1, P_3 (fig. 17).

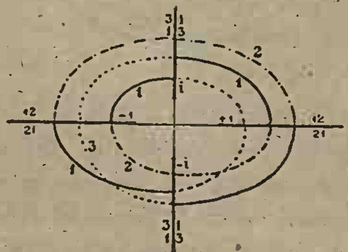
Fig. 17

CAPITOLUL V

VII. FUNCŢIUNI UNIFORME PE SUPRAFEŢELE LUI RIEMANN.

40. Fie

(1) $$F(x, y) = o$$

o ecuaţiune algebrică ireductibilă de gradul m în raport cu y. Se numeşte *punct analitic* (x, y) un sistem format dintr'o valoare a lui x şi din una din rădăcinile corespunzătoare ale ecuaţiunii (1). Să reprezintăm prin T suprafaţa cu m foi a lui Riemann corespunzătoare acestei ecuaţiuni. Din definiţiunea suprafeţei rezultă că între punctele ei şi între punctele analitice există o corespondenţă biunivocă, exceptând punctele critice în domeniul cărora ramurile y se grupează în mai multe sisteme circulare. Dacă, de exemplu, valorilor $x = a$, $y = b$, a şi b satisfăcând ecuaţiunea $F(a, b) = o$, corespund $\mu > 1$ cicle, punctul de ramificaţiune corespunzător va reprezintà μ puncte diferite ale suprafeţei, fiecare fiind comun ramurilor cari se permută între ele. Aceste puncte numite vârfuri ale ciclelor corespunzătoare, fiind în număr limitat, putem, în virtutea corespondenţii biunivoce, să figurăm punctele analitice (x, y) pe suprafaţa T.

41. *Definiţiune. Domeniul unui punct pe suprafaţa T.* Fie $x = a$ un punct ordinar al suprafeţei T. Numim domeniu al punctului a totalitatea punctelor situate pe foaia acestui punct, satisfăcând inegalitatea

$$|x - a| \leqq r,$$

r fiind un număr pozitiv destul de mic.

Să presupunem acum că punctul $x = a$ este un punct critic în jurul căruia se permută p ramuri. Numim domeniu al punctului a totalitatea punctelor situate pe cele p foi, cari trec prin acest punct, satisfăcând inegalitatea

$$|x - a| \leqq r,$$

r fiind un număr pozitiv destul de mic. Curba închisă care limitează acest domeniu înconjoară dar punctul a de p ori.

Să facem substituţiunea

(2) $$x - a = x'^{p}$$

şi să figurăm variabila x' pe un plan diferit. Când x se învârteşte în sensul pozitiv de p ori în jurul punctului a, x' se învârteşte odată în acelaş sens în jurul punctului $x' = o$. Fie C curba închisă care limitează pe suprafaţa T domeniul punctului a şi C′ curba corespunzătoare în planul x'. Aceste două curbe, precum şi ariile ce ele limitează se corespund punct cu punct; exceptând punctul $x = a$, $x' = o$, fiecare arie este transformata conformă a celeilalte.

42. Fie $z = f(x)$ o funcţiune uniformă pe suprafaţa T sau, ceeace este tot una, o funcţiune uniformă $\varphi(x, y)$ de punctul analitic (x, y). Să căutăm forma desvoltării în serie a funcţiunii în domeniul unui punct al suprafeţei.

Fie (a, b) un punct analitic în domeniul căruia funcţiunea $\varphi(x, y)$ este olomorfă; vom avea în domeniul acestui punct (§ 11).

$$\varphi(x, y) = \mathrm{P}(x-a, y-b). \tag{3}$$

Dacă $b = \infty$, înlocuim $y - b$ prin $\frac{1}{y}$ şi avem în domeniul punctului (a, ∞),

$$\varphi(x, y) = \mathrm{P}\left(x-a, \frac{1}{y}\right). \tag{4}$$

Să presupunem că funcţiunea $\varphi(x, y)$ admite punctul (a, b) ca punct singular izolat, pol sau punct singular esenţial, vom avea în domeniul acestui punct.

$$\varphi(x, y) = \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta}(x-a)^{\alpha}(y-b)^{\beta}, \tag{5}$$

α şi β primind valori întregi, pozitive şi negative.[1]) Dacă $b = \infty$, expresiunea precedentă se înlocueşte prin ceà următoare

$$\varphi(x, y) = \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta}(x-a)^{\alpha} y^{-\beta}. \tag{6}$$

Pentru a obţine desvoltarea funcţiunii $f(x)$ corespunzătoare desvoltărilor precedente ale funcţiunii $\varphi(x, y)$, trebuie să înlocuim, în fiecare din ele, ramura y prin desvoltarea sa corespunzătoare punctului analitic considerat.

1°. Să presupunem că punctul $x = a$ al suprafeţei T nu este punct critic pentru ramura y care devine egală cu b în acest punct. Dacă b este finit, avem în domeniul lui $x = a$,

$$y - b = \mathrm{P}_1(x-a), \tag{7}$$

---

[1]) Funcţiunea $\varphi(x, y)$ este, în virtutea ecuaţiunii $\mathrm{F}(x, y) = o$, o funcţiune de o singură variabilă; de unde rezultă că polul (a, b), definit de egalitatea $\mathrm{P}_0(x-a, y-b)\,\varphi(x, y) = \mathrm{P}(x-a, y-b)$, este punct izolat. Dacă unul cel puţin din exponenţii α, β primeşte o infinitate de valori întregi negative, punctul (a, b) este punct singular esenţial al funcţiunii $\varphi(x, y)$. Acest punct poate fi izolat sau nu; îl presupunem izolat.

$P_1(x-a)$ fiind o serie întreagă care se anulează pentru $x=a$. In cazul când $b=\infty$, punctul $x=a$ este pol al ramurii considerate. Fie μ ordinul acestui pol; avem

$$(8)\qquad \frac{1}{y}=(x-a)^{\mu}\,P_2(x-a),$$

$P_2(x-a)$ fiind o serie întreagă diferită de zero în punctul $x=a$. Făcând în egalitățile (3) și (4) respectiv substituțiunea (7) sau (8), obținem, pentru funcțiunea $z=f(x)$, expresiunea unică

$$(9)\qquad f(x)=\mathcal{P}(x-a),$$

valabilă pe suprafața T în domeniul punctului $x=a$.

Egalitățile (5) și (6) conduc, în virtutea acelorași substituțiuni, la expresiunea

$$(10)\qquad f(x)=\sum_{n=-\nu}^{\infty}A_n(x-a)^n,$$

ν fiind un număr întreg pozitiv finit sau infinit.

2°. Să presupunem acum că punctul $x=a$ al suprafeței T este un punct de ramificațiune de ordinul $p-1$. Vom aveà, în domeniul acestui punct,

$$(11)\qquad y-b=P_1\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right],$$

sau

$$(12)\qquad \frac{1}{y}=(x-a)^{\frac{q}{p}}\,P_2\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right],\qquad \left[P_2(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]_a\neq o,$$

q fiind un număr întreg pozitiv, după cum ramura y are în punctul $x=a$ o valoare finită b sau este infinită în acest punct. Inlocuind în egalitățile (3) și (4) respectiv $y-b$ și $\frac{1}{y}$ prin valorile (11) și (12), obținem pentru $f(x)$ o expresiune având forma unică

$$(13)\quad f(x)=P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]=A_0+A_1(x-a)^{\frac{1}{p}}+\ldots+A_n(x-a)^{\frac{n}{p}}+\ldots$$

Egalitățile (5) și (6) conduc deasemenea la expresiunea

$$(14)\qquad f(x)=\sum_{n=-\nu}^{\infty}A_n\,(x-a)^{\frac{n}{p}}$$

ν fiind un număr întreg pozitiv, finit sau infinit.

Dacă $a=\infty$, înlocuim în formulele precedente $x-a$ prin $\frac{1}{x}$.

43. Din cele ce preced rezultă că o funcţiune

$$f(x) = \varphi(x, y),$$

uniformă pe suprafaţa T, corespunzătoare ecuaţiunii (1), nu are alte puncte de ramificaţiune decât acelea ale funcţiunii y definită de acea ecuaţiune şi numărul valorilor sale corespunzătoare unei valori x, este egal cel mult cu gradul ecuaţiunii. Ordinul unui punct de ramificaţiune al funcţiunii $f(x)$ este de asemenea cel mult egal cu ordinul lui y; el poate fi nul.

Exemplu

$$F(x, y) = y^3 - x = o,$$

$$f(x) = \varphi(x, y) = y^6 + y^3 + x.$$

Funcţiunea $\varphi(x, y)$ se reduce la $x^2 + 2x$, funcţiune întreagă; punctul de ramificaţiune $x = o$ al lui y este punct ordinar pentru funcţiunea $f(x)$.

44. Vom zice că punctul de ramificaţiune $x = a$ este un *zero* de ordinul μ al funcţiunii $f(x)$, dacă seria (13) se anulează în acest punct şi dacă puterea cea mai mică a lui $(x-a)$ este $(x-a)^{\frac{\mu}{p}}$; de asemenea vom zice că $x = a$ este un *pol* al funcţiunii $f(x)$ de ordinul μ, dacă în seria (14) avem $\nu = \mu$. Aceste definiţiuni se justifică prin aceea că în punctul de ramificaţiune a al suprafeţei T, p ramuri se anulează sau devin infinite, fiecare de acelaş ordin $\frac{\mu}{p}$: zerurile sau polurile suprapuse în acel punct constitue un zero sau pol de ordinul $p\frac{\mu}{p} = \mu$. Ele se mai justifică în modul următor:

Dacă avem

$$f(x) = (x-a)^{\frac{\mu}{p}} P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right], \quad P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]_{x=a} \neq o,$$

şi facem substituţiunea

$$x - a = x'^p,$$

obţinem

$$f(x) = f(a + x'^p) = x'^{\mu} P(x') \quad (\mu \gtrless o).$$

Punctului $x = a$ corespunde punctul $x' = o$, care este, pentru funcţiunea transformată, un zero sau pol de ordinul μ.

Dacă în seria (14) $\nu = \infty$, adică dacă numărul termenilor cu exponenţi negativi este nelimitat, punctul a se zice *punct singular esenţial* al funcţiunii $f(x)$.

Derivând seriile (13) și (14) se recunoaște că un punct de ramificațiune al funcțiunii este punct de ramificațiune de acelaș ordin al derivatei. Avem de observat că, pe când în domeniul unui punct care nu este de ramificațiune, derivata este continuă în acelaș timp cu funcțiunea, nu este totdeauna astfel în domeniul unui punct de ramificațiune.

Fie, de exemplu

$$f(x) = A_0 + A_q (x-a)^{\frac{q}{p}} + A_{q+1} (x-a)^{\frac{q+1}{p}} + \ldots, \; q < p, \; A_q \neq 0;$$

de unde

$$f'(x) = \frac{1}{p}\left[q A_q (x-a)^{\frac{q}{p}-1} + (q+1) A_{q+1} (x-a)^{\frac{q+1}{p}-1} + \ldots\right];$$

derivata admite dar punctul $x = a$ ca pol de ordinul $p - q$.

45. Integrala unei serii întregi de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$ este o serie de aceeaș formă. Să presupunem că punctul de ramificațiune a de ordinul $p-1$ este în acelaș timp un punct singular al funcțiunii $f(x)$ și fie, într'un mod general, în domeniul acestui punct,

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n (x-a)^{\frac{n}{p}};$$

de unde integrala nedefinită

$$(16) \quad \int f(x)\,dx = C + A_{-p} \log(x-a) + p \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_n}{n+p} (x-a)^{\frac{n+p}{p}},$$

suma Σ raportându-se la toate valorile întregi pozitive și negative ale lui n, exceptând valoarea $-p$. Să facem ca x să descrie, în sensul pozitiv, în jurul punctului a, o curbă închisă Γ, situată în domeniul acestui punct și care să nu conțină în interiorul său altă singularitate nici alt punct critic decât punctul a. In descrierea acestei curbe pe suprafața T, x se învârtește de p ori în jurul lui a, toți termenii seriei își reiau valorile inițiale și $\log(x-a)$ se reproduce mărit cu $2pi\pi$. Avem dar

$$\int_\Gamma f(x)\,dx = 2pi\pi A_{-p}.$$

Prin analogie cu definițiunea reziduului unei funcțiuni uniforme pe planul simplu al variabilei, numim *reziduu* al funcțiunii $f(x)$, relativ la un punct singular, care este în acelaș timp punct de ramificațiune, expresiunea $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(x)\,dx$.

Avem aşadar, pentru reziduul corespunzător, valoarea

$$(17) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} f(x)\,dx = p\,\mathrm{A}_{-p}.\text{[1]}$$

Dacă $\mathrm{A}_{-p} = 0$, seria integrată este de aceeaş formă cu seria propusă. Dacă punctul de ramificaţiune a de ordinul $p-1$ este un pol de un ordin $q < p$, avem, totdeauna $\mathrm{A}_{-p} = 0$.

In domeniul punctului $x = \infty$, dacă acest punct est punct singular izolat şi de ramificaţiune de ordinul $p-1$, avem, într'un mod general

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{A}_n\, x^{-\frac{n}{p}};$$

de unde, integrând ambele membre în sensul negativ, în raport cu $x = 0$, dealungul unei curbe închise C pe suprafaţa T, în exteriorul căreia nu se găseşte nici un punct singular situat la distanţă finită, avem, pentru reziduul corespunzător punctului $x = \infty$,

$$(18) \qquad \frac{1}{2\,i\pi}\int_{C} f(x)\,dx = -p\,\mathrm{A}_p.$$

Această expresiune arată că reziduul relativ la punctul ∞ poate fi diferit de zero şi în cazul când acest punct nu este singular; pe când, relativ la un punct situat la distanţă finită, diferit de un punct singular, reziduul este totdeauna nul.

Corolar. Fie

$$(19) \quad f(x) = (x-a)^{\frac{q}{p}}\,\mathrm{P}\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right], \qquad \mathrm{P}\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]_{x=a} \neq 0,$$

q fiind un număr întreg pozitiv sau negativ. Avem, în domeniul punctului $x = a$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{q}{p}\,\frac{1}{x-a} + \mathscr{P}\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]$$

şi prin urmare, în virtutea formulei (17),

$$(20) \qquad \mathop{\mathscr{R}}_{x=a}\frac{f'(x)}{f(x)} = q;$$

---

[1]) Obţinem acelaş rezultat, aplicând substituţiunea $x - a = x'^{\frac{1}{p}}$ şi considerând integrala

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1}\left(a + x'^{\,p}\right)\frac{dx}{dx'}\,dx',$$

Γ_1 fiind o curbă închisă în planul x' corespunzătoare curbei Γ. De unde rezultă egalitatea

$$\mathop{\mathscr{R}}_{x=a} f(x) = \mathop{\mathscr{R}}_{x=o}\left[f\left(a + x'^{\,p}\right)\frac{dx}{dx'}\right] = p\,\mathrm{A}_{-p}.$$

adică reziduul derivatei logaritmice a funcţiunii $f(x)$, relativ la un zero sau pol al funcţiunii, dă ordinul acelui zero sau pol, fie că el este punct ordinar sau punct critic.

46. *Teorema lui Cauchy pe o suprafaţă a lui Riemann.* Se ştie că pentru a aplicà teorema fundamentală a lui Cauchy funcţiunilor uniforme într'o porţiune a planului variabilei complexe, este necesar ca conturul, dealungul căruia se consideră integrala, să limiteze acea porţiune într'un mod complect, adică să fie imposibil a trece prin continuitate dela un punct interior la un punct exterior, sau viceversa, fără a întâlnì conturul. Voim să arătăm că această teoremă se aplică funcţiunilor uniforme pe suprafaţa lui Riemann în orice regiune în care un contur închis limitează complect o porţiune a suprafeţii. Este de observat că o curbă închisă, care conţine în interiorul său linii de trecere, *nu limitează* prin sine însăş o porţiune a suprafeţii.

Fie $f(x)$ o funcţiune olomorfă într'o arie S a suprafeţei T a lui Riemann, continuă pe curba închisă C care limitează această arie, fără a trece prin nici un punct critic. Cazurile următoare se pot prezentà:

1°. Aria S se găseşte într'o singură foaie a suprafeţei T. Acest caz se confundă cu cel în care variabila este figurată pe un plan simplu şi prin urmare avem

$$\int_C f(x)\,dx = 0.$$

2°. Aria S este situată în mai multe foi fără a conţine puncte de ramificaţiune. Rezultatul este acelaş, căci forma unei linii de trecere se poate modificà astfel ca aria considerată să nu conţină nici un punct al unei asemenea linii şi prin urmare să fie conţinută într'o singură foaie. Ceeace rămâne neschimbat sunt punctele de ramificaţiune, cari, prin ipoteză, sunt exterioare lui S.

3°. Aria S conţine un singur punct critic. Fie $x = a$ un asemenea punct în jurul căruia se permută p ramuri.

Punând $x = a + x'^p$ şi reprezintând prin C′ curba din planul (x') corespunzătoare lui C, avem

$$\int_C f(x)\,dx = p\int_{C'} f(a + x'^p)\,x'^{p-1}\,dx' = 0.$$

4°. Aria S se întinde în mai multe foi ale lui T, conţinând n puncte critice şi este limitată de un contur simplu C. Descompunem S în n arii destul de mici astfel ca fiecare să conţină un singur punct critic. Fie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ contururile cari le limitează, şi $L_1, L_2, \ldots,$

L_n, n linii care unesc respectiv un punct al fiecăreia din ele cu câte un punct al curbei C, fără a se întâlni între dânsele.

Aria limitată de curbele C, C_1, ..., C_n şi de liniile L neconţinând nici un punct critic, integrala luată dealungul conturului total este nulă. In descrierea acestui contur, liniile L sunt descrise fiecare de două ori în sens invers, prin urmare integralele corespunzătoare se distrug. Avem aşa dar egalitatea.

$$\int_C f(x)\,dx + \Sigma \int_{C_i} f(x)\,dx = 0$$

Integralele de sub semnul Σ fiind toate nule, rezultă egalitatea

$$\int_C f(x)\,dx = o. \tag{21}$$

q. e. d.

47. Teorema subsistă dacă conturul C este format din mai multe curbe închise, limitând într'un mod complect o porţiune de suprafaţă şi integrala este luată dealungul acestor curbe în sensul pozitiv în raport cu aria limitată de conturul total. Demonstraţiune analoagă cu cea relativă la planul simplu [1]).

48. Fie $f(x)$ o funcţiune olomorfă într'o arie S a suprafeţei T, pusă sub forma

$$f(x) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta), \quad (x = \xi + i\eta)$$

u şi v fiind funcţiuni reale de variabilele reale ξ, η. Fie C conturul care limitează aria S fără a trece prin punctele critice. Avem inegalitatea (Riemann)

$$\int_C u\,dv > o, \tag{22}$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv. Această inegalitate a fost stabilită în cazul planului simplu [2]); ea subsistă pe suprafaţa T. In adevăr, descompunând S, în arii fără puncte critice şi în arii foarte mici conţinând un singur punct critic, putem scrie

$$\int_C u\,dv = \Sigma \int_{C_i} u\,dv,$$

integralele din ambele membre fiind luate în sensul pozitiv în raport cu ariile limitate de curbele C şi C_i. Ariile de speţa întâiu se găsesc în cazul ariilor situate în planul simplu [3]); inegalitatea

---

[1]) I, p. 223.

[2]) I. p. 232.

[3]) Printr'o mică modificare a liniei de trecere, aria se găseşte toată situată într'o singură foaie.

(22) se aplică dar acestor arii. In ce priveşte ariile cari conţin câte un punct critic, făcând să tindă către zero contururile corespunzătoare, integralele respective tind către zero, căci funcţiunile u şi v sunt, în virtutea ipotezei, funcţiuni continue în aria S. De unde rezultă inegalitatea (22).

49. *Teorema reziduurilor.* Fie $f(x)$ o funcţiune uniformă într'o arie S a suprafeţei T, având în această arie un număr limitat de puncte singulare $a_1, a_2, \ldots, a_n$, indiferent dacă acest puncte sunt de ramificaţiune sau nu. Fie C conturul care limitează această arie, contur format din una sau mai multe curbe închise cari nu trec prin puncte singulare sau de ramificaţiune. Să izolăm punctele singulare respective prin curbe închise $c_1, c_2, \ldots, c_n$ cari să nu se întâlnească între ele. In aria limitată de curba C şi de aceste curbe, funcţiunea $f(x)$ fiind olomorfă, avem, aplicând teorema lui Cauchy,

$$\int_C + \int_{c_1} + \int_{c_2} + \ldots + \int_{c_n} = o;$$

sau, schimbând sensul integraţiunilor după curbele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ avem

$$\int_C f(x)\, dx = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \ldots + \int_{c_n}$$

Reprezentând prin A_k reziduul lui $f(x)$ relativ la singularitatea a_k avem

$$\int_{c_k} f(x)\, dx = 2\, i\pi A_k\, ;$$

prin urmare

$$\int_C f(x)\, dx) = 2i\pi\, (A_1 + A_2 + \ldots + A_n\ ). \tag{23}$$

Teorema lui Cauchy, asupra reziduurilor, subsistă dar pe suprafaţa T în aceleaşi condiţiuni ca pe planul simplu.

50. *Corolar.* Fie x_0 *şi* x două puncte situate pe suprafaţa T şi L, L′ două drumuri cari unesc aceste puncte fără a trece prin puncte singulare sau puncte critice (fig. 18). Dacă aceste drumuri împreună formează un contur care limitează o porţiune de suprafaţă, în interiorul căreia se găsesc punctele singulare $a_1, \ldots, a_n$ avem

Fig. 18

$$\int_{x_0 L' x} f(x)\, dx = \int_{x_0 L x} f(x)\, dx + 2i\pi\, (A_1 + \ldots + A_n).$$

51. *Teoremă. Suma reziduurilor unei funcţiuni uniforme, care pe toată suprafaţa* T *are un număr limitat de singularităţi, este nulă.*

In adevăr, să ne închipuim suprafaţa T sferică şi să izolăm, prin curbe închise, toate punctele singulare, precum şi punctul ∞, din fiecare foaie a suprafeţei. In suprafaţa rămasă după exclusiunea acestor puncte, funcţiunea fiind olomorfă, rezultă că suma integralelor

$$\int_{c_i} f(x)\,dx,$$

luate după toate aceste curbe, descrise în acelaş sens, este nulă. Ceeace demonstră teorema.

52. Fie $f(x)$ o funcţiune uniformă într'o arie S a suprafeţei T, neavând în această arie alte singularităţi decât poluri. Se presupune că conturul C nu trece prin puncte singulare şi critice şi prin nici un zero al funcţiunii. In acest caz integrala

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx, \tag{24}$$

luată în sensul pozitiv, este, în virtutea formulei (20) (§ 45) şi a egalităţii (23) (§ 49), egală cu diferenţa dintre suma ordinelor zerurilor şi suma ordinelor polurilor funcţiunii cuprinse în aria S. Cu alte cuvinte, *integrala* (24) *este egală cu diferenţa dintre numărul zerurilor şi numărul polurilor funcţiunii cuprinse în* S, *fiecare zero şi fiecare pol fiind socotit de atâtea ori câte unităţi sunt în ordinul său de multiplicitate.*

53. *Funcţiuni raţionale pe suprafaţa* T. O funcţiune raţională pe suprafaţa T, sau de punctul analitic (x, y) este de forma

$$z = \frac{Q_1(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{25}$$

$Q_1(x, y)$ şi $Q(x, y)$ fiind polinoame de x şi y, aceste două variabile fiind legate între ele prin ecuaţiunea (1). In domeniul unui punct $x = a$ pe suprafaţa T, numărătorul şi numitorul se desvoltă în serii întregi de $(x-a)$ sau de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$ după cum punctul a nu este sau este punct de ramificaţiune de ordinul $p-1$. Câtul celor două polinoame nu poate dar aveà, în domeniul punctului $x = a$, decât una din formele următoare

$$\left\{\begin{aligned} & z = (x-a)^{\mu}\,P(x-a), && \Big[P(x-a)\Big]_{x=a} \neq o, \\ & z = (x-a)^{\frac{\mu}{p}}\,P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right], && P\left[(x-a)^{\frac{1}{p}}\right]_{x=a} \neq o, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

μ fiind un număr întreg, pozitiv negativ sau nul. Numărul termenilor cu exponenți negativi este dar mărginit. Dacă $a = \infty$, înlocuim în formele precedente $x - a$ prin $\frac{1}{x}$. De unde rezultă că într'un punct oarecare al suprafeței T, funcțiunea z este olomorfă sau admite acest punct ca pol.

O funcțiune rațională pe suprafața T *nu admite dar alte singularități decât poluri.*

54. *Vice-versa. Orice funcțiune uniformă* z, *care pe toată suprafața sferică* T *n'are alte singularități decât poluri, este o funcțiune rațională de* x *și* y.

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ramurile funcțiunii algebrice y definită de ecuațiunea (1) și $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ramurile funcțiunii $z = f(x)$ corespunzătoare ramurilor y. Să considerăm cele m sume

$$z_1 y_1^k + z_2 y_1^k + \ldots\ldots + z_m y_m^k, \quad (k = 0, 1 \ldots, m-1).$$

Când x descrie o curbă închisă oarecare în planul său, termenii acestor sume nu pot decât să se permute între ei: fiecare din aceste sume este dar, în virtutea ipotezei, o funcțiune uniformă de x, neavând în tot planul inclusiv punctul ∞, alte singularități decât poluri și prin urmare ele sunt funcțiuni raționale de x, pe cari le reprezintăm prin $R_k(x)$:

$$z_1 y_1^k + z_2 y_2^k + \ldots + z_m y_m^k = R_k(x), \quad (k = 0, 1 \ldots m-1). \tag{27}$$

Să considerăm determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_m \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ y_1^{m-1} & y_2^{m-1} & \ldots & y_m^{m-1} \end{vmatrix} \tag{28}$$

Două oarecari din ramurile $y_1, y_2, \ldots, y_m$ nefiind identice, determinantul D nu este identic nul. Soluțiunile $z_1, z_2, \ldots z_m$ ale sistemului de ecuațiuni lineare (27) se prezintă dar sub formă de câturi a doi determinanți. Fie câtul

$$z_1 = \frac{D_1}{D},$$

în care avem

$$D_1 = \begin{vmatrix} R_0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ R_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{m-1} & y_2^{m-1} & y_3^{m-1} & \ldots & y_m^{m-1} \end{vmatrix} \tag{29}$$

Determinantul D este o funcţiune simetrică de rădăcinile y ale ecuaţiunii $F(x, y) = o$ şi prin urmare o funcţiune raţională de x. Determinatul D_1 este o funcţiune raţională de x şi raţională şi simetrică de ramurile $y_2, \ldots, y_m$. Aceste ramuri sunt însă rădăcini ale ecuaţiunii

$$\frac{F(x, y)}{y - y_1} = o;$$

prin urmare D_1 este o funcţiune raţională de coeficienţii acestei ecuaţiuni, adică o funcţiune raţională de x şi de y_1. Ramura z_1 este aşadar o funcţiune raţională de x şi y_1; ceeace vom scrie

$$(30) \qquad z_1 = R(x, y_1) = \frac{Q_1(x, y_1)}{Q(x, y_1)},$$

$Q_1(x, y_1)$ şi $Q(x, y_1)$ fiind două polinoame de x şi y_1. Această relaţiune subsistă pentru toate sistemele (y_i, z_i), $(i = 1, 2, \ldots m)$; căci prin prelungirea analitică a ramurii y_1, obţinem succesiv celelalte ramuri y_i, cărora corespund ramurile z_i ale funcţiunii z. Avem aşa dar, pentru funcţiunea z, relaţiunea

$$(31) \qquad z = R(x, y).$$

55. *Teoremă. Funcţiunea raţională* $R(x, y)$ *se poate pune sub forma unui polinom de* y *de gradul* $m - 1$ *cu coeficienţi raţionali de* x. Pentru a demonstrà această teoremă să multiplicăm ambii termeni ai fracţiunii (30) cu produsul $Q(x, y_2) \ldots Q(x, y_m)$. Numitorul devine o funcţiune simetrică întreagă de ramurile $y_1, y_2, \ldots, y_m$ şi numărătorul o funcţiune simetrică întreagă de $y_2, y_3, \ldots y_m$. Rezultă pentru numitor o funcţiune $\psi(x)$ raţională de x şi pentru numărător o funcţiune $\varphi(x, y_1)$ raţională de x şi raţională şi întreagă în raport cu y_1:

$$R(x, y_1) = \frac{\varphi(x, y_1)}{\psi(x)}.$$

Prin prelungirea analitică a ramurii y_1 se conchide că această relaţiune subsistă pentru toate ramurile funcţiunii $R(x, y)$. Avem aşadar

$$R(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x)}$$

De altă parte, ecuaţiunea $F(x, y) = o$, de gradul m în raport cu y, permite să se exprime puterile $y^m, y^{m+1}, \ldots$ prin polinoame de gradul $m - 1$ în y, ai căror coeficienţi sunt funcţiuni raţionale de x. De unde rezultă forma

$$(32) \qquad R(x, y) = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots + X_{m-1} y^{m-1},$$

coeficienţii $X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}$ fiind funcţiuni raţionale de x.

56. Aplicând teorema reziduurilor (§ 49) funcţiunilor raţionale pe suprafaţa T, în acelaş mod ca în cazul funcţiunilor raţionale în planul (x)[1], conchidem:

I. *Suma reziduurilor unei funcţiuni raţionale $f(x)$ pe toată suprafaţa T este nulă.*

II. Derivata logaritmică $\frac{f'(x)}{f(x)}$ fiind o funcţiune raţională pe suprafaţa T, suma tuturor reziduurilor sale pe această suprafaţă este nulă. Cu alte cuvinte, *numărul zerurilor unei funcţiuni raţionale pe suprafaţa T este egal cu numărul polurilor sale, fiecare zero sau pol fiind socotit cu gradul său de multiplicitate.*

57. Numim *ordin* al unei funcţiuni raţionale $R(x, y)$, de punctul analitic (x, y), numărul polurilor sale, fiecare pol fiind socotit cu gradul său de multiplicitate. Fie N acest ordin. Diferenţa

$$R(x, y) - C,$$

C fiind o constantă arbitrară, are aceleaşi poluri ca funcţiunea $R(x, y)$; prin urmare este de acelaş ordin, adică funcţiunea raţională $R(x, y)$ de ordinul N primeşte o valoare arbitrară oar ecare în N puncte ale suprafeţei T, printre cari unele pot coincide.

58. *O funcţiune olomorfă pe suprafaţa T este constantă.* Fie $z = f(x)$ o funcţiune olomorfă pe toată suprafaţa T şi $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ramurile acestei funcţiuni corespunzătoare aceleiaşi valori x. Funcţiunile simetrice

$$\Sigma z_1, \ \Sigma z_1 z_2, \ldots; z_1 z_2 \ldots z_m.$$

sunt funcţiuni uniforme de x, olomorfe, în virtutea ipotezei, pe tot planul (x), inclusiv punctul $x = \infty$; ele sunt aşa dar cantităţi constante.

Funcţiunea z satisface dar o ecuaţiune algebrică cu coeficienţi constanţi şi prin urmare ea însăş este o constantă.

CAPITOLUL VI

FUNCŢIUNI RAŢIONALE PE O SUPRAFAŢĂ T CU DOUĂ FOI

59. Să considerăm cazul când suprafaţa T este formată din două foi, adică când ecuaţiunea algebrică $F(x, y) = o$ este de gradul

---

[1] I. p. 260.

al doilea în raport cu y. Putem presupune ecuaţiunea de forma binoamă [1]) şi fie

$$(1) \qquad y^2=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

n fiind un număr par sau impar ≥ 3. O funcţiune raţională R (x, y) se pune sub forma

$$(2) \qquad z=\frac{P(x)+yQ(x)}{R(x)},$$

P, Q, R fiind polinoame de x; pe cari le putem presupune fără factori comuni. Fie x_0 un zero de un ordin a al numitorului, diferit de un punct critic şi y_0 valoarea corespunzătoare a lui y. Unul cel puţin din punctele (x_0, y_0), $(x_0, -y_0)$ este pol de ordinul a al funcţiunii z, căci dacă nici unul din aceste puncte n'ar fi pol, ar trebuì să avem egalităţile

$$P(x_0)+y_0Q(x_0)=o, \quad P(x_0)-y_0P(x_0)=o,$$

de unde ar rezultà P $(x_0) = o$, Q $(x_0) = o$, adică polinoamele P, Q, R ar aveà un factor comun, ceeace este contra ipotezei.

Dacă x_0 coincide cu unul din punctele critice a_i şi $P(a_i)\neq o$, ordinul polului este $2a$. Dacă P $(a_i) = o$, ordinul polului este $2a$-1 [2]).

Să observăm că un punct x_0 care anulează numitorul, poate anulà numărătorul fără a anulà polinoamele P şi Q, căci putem aveà una din egalităţile

$$P(x_0) + y_0\, Q(x_0) = o, \quad P(x_0) - y_0\, Q(x_0) = o,$$

nu însă amândouă, precum am văzut mai sus. Intr'unul din aceste cazuri, expresiunea (2) se prezintă sub formă nedeterminată;

---

[1]) O ecuaţiune de forma

$$y^2+2by+c=o,$$

b şi c fiind două polinoame de x, se aduce la forma binoamă dacă punem

$$y+b=\eta.$$

[2]) In domeniul (a_i), punând $R(x)=(x-a_i)^a R_1(x)$, avem

$$z = (x-a_i)^{-a}\left[A_0 + A_1 (x-a_i)^{\frac{1}{2}} + \ldots\ldots\right]$$

sau punând $x - a_i = x'^2$

$$z = x'^{-2a}(A_0 + A_1 x' + \ldots)$$

$$A_0 = \frac{P(a_i)}{R_1(a_i)}, \quad A_1 = \frac{Q(a_i)}{R_1(a_i)},$$

P (a_i) şi Q (a_i) nu sunt nuli în acelaş timp.

nedeterminarea dispare, dacă înlocuim y prin desvoltarea sa în domeniul punctului (x_0, y_0) sau $(x_0, -y_0)$ în care numărătorul se anulează și desvoltăm funcțiunea z în domeniul acestui punct. Unul din aceste puncte fiind pol de un ordin oarecare pe o foaie, este dar, pe cealaltă foaie, pol de un ordin mai mic, sau nu este pol, sau chiar poate fi un zero. [1])

60. *Dacă numărul punctelor de ramificațiune este mai mare ca 2, nu există funcțiune rațională pe suprafața T, al cărei ordin să fie mai mic ca 2.*

In adevăr, dacă funcțiunea n'are nici un pol la distanță finită, numitorul $R(x)$ trebuie să fie o constantă, căci altmintrelea un zero al lui $R(x)$ este, precum am văzut, un pol al funcțiunii. In acest caz, funcțiunea este de forma

$$z = P(x) + y\,Q(x). \tag{3}$$

Dacă polinomul $Q(x)$ este identic nul, punctele $x = \infty$, $y = \pm\infty$ sunt poluri, fiecare de un ordin egal cu gradul polinomului $P(x)$. Dacă $P(x)$ este identic nul, ordinul polului $x = \infty$ este dat de produsul $[y\,Q(x)]_{x=\infty}$. Dacă nici unul din aceste polinoame nu este identic nul, punctul $x = \infty$ este pol cel puțin pe una din cele două foi ale lui T și ordinul acestui pol nu poate evident fi mai mic decât $\frac{n}{2}$, dacă n este par $(n = 4, 6, \ldots)$, sau mai mic decât n, dacă n este impar $(n = 3, 5, \ldots)$ [2]).

---

[1]) Exemplu:

$$z = \frac{1 + ax + bx^2 + y(1 + x)}{x^2}, \quad y = \sqrt{1 + x}.$$

Punctul $x = o$, $y = 1$ este pol de ordinul al doilea.
In domeniul punctului $x = o$, $y = -1$, avem

$$z = \frac{a - 2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)x - x^2 + \ldots}{x}.$$

Dacă $a \neq 2$, acest punct este pol de ordinul întâi; dacă $a = 2$, avem $z_0 = b - \frac{3}{2} \neq o$ sau $= o$, după cum b este $\neq \frac{3}{2}$ sau $= \frac{3}{2}$.

[2]) In cazul $n = 2k$, avem, în domeniul (∞),

$$y = x^k (A_0 + A_1 x^{-1} + \ldots);$$

în cazul $n = 2k + 1$, avem, în acelaș domeniu

$$y = x^{k + \frac{1}{2}} (A_0 + A_1 x^{-\frac{1}{2}} + \ldots) = x'^{2k+1} (A_0 + A_1 x'^{-1} + \ldots), \quad (x = x'^2).$$

O funcţiune raţională de ordinul cel mai mic posibil, când numărul punctelor de ramificaţiune este mai mare decât 2, are forma

$$(4) \qquad z = a + \frac{b}{x - x_0},$$

a şi b fiind două constante. Dacă x_0 este diferit de un punct critic, punctele (x_0, y_0), (x_0, y_0) sunt poluri de ordinul întâiu; dacă x_0 este punct critic, punctul (x_0, o) este pol de ordinul al doilea.

Din tot ce precede rezultă că o funcţiune raţională pe o suprafaţă T cu două foi şi cu mai mult decât două puncte de ramificaţiune, este *cel puţin de ordinul al doilea.*

q. e. d.

61. Dacă avem *două* puncte de ramificaţiune, punctul ∞ fiind sau nu unul din aceste puncte, este posibil a formà funcţiuni raţionale pe suprafaţa T, având un singur pol de ordinul întâiu, la distanţă finită sau infinită.

Exemple.—1°. Fie ecuaţiunea

$$(1) \qquad y^2 = a^2 x^2 + 2bx + c = a^2 (x - \alpha)(x - \beta);$$

funcţiunea

$$(2) \qquad z = \mathrm{A}(ax + y) + \mathrm{B},$$

A şi B fiind două constante arbitrare, admite pe o singură foaie unicul pol $x = \infty$ de ordinul întâiu. Deasemenea, funcţiunea

$$(3) \qquad z = \mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{y - y_0}{x - x_0}$$

admite unicul pol $(x_0, -y_0)$, x_0 fiind un punct oarecare al suprafeţei T şi y_0 una din cele două valori corespunzătoare ale lui y. Dacă punctul de ramificaţiune $x = \alpha$, $y = o$ este pol de ordinul întâiu funcţiunea are forma

$$(4) \qquad z = \mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{y}{x - a}.$$

2°. Fie ecuaţiunea

$$(5) \qquad y^2 = x \;;$$

funcţiunile

$$(6) \qquad z = \mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{y}{x}, \quad z = \mathrm{A} + \mathrm{B}y$$

admit ca pol de ordinul întâiu, cea dintâiu punctul $x = o$, cea de a doua punctul $x = \infty$.

In toate exemplele precedente putem dispune de unul din coeficienţii A, B pentru ca z să aibă un zero dat.

In fine, observăm că în cazul a două puncte critice, variabilele x şi y se pot exprimà într'un mod raţional cu ajutorul unei variabile auxiliare convenabile şi prin urmarè o funcţiune raţională oarecare de (x, y) devine, în acest caz, o funcţiune raţională de o singură variabilă.

Astfel în exemplul 1⁰, punând $y=(x-\alpha)t$, obţinem expresiunile

$$x = \frac{\alpha t^2 - \beta}{t^2 - 1}, \quad y = \frac{(\alpha - \beta)}{t^2 - 1} t.$$

In exemplul 2⁰, avem

$$x = \frac{1}{t^2}, \qquad y = \frac{1}{t}.$$

62. *Exemple de funcţiuni raţionale.*

Exemplul I. Fie dată ecuaţiunea

(1) $$y^2 = 3x^2 + 1$$

şi funcţiunea

(2) $$z = \frac{2x^2 + xy}{x - 1}.$$

Să căutăm polurile şi zerurile acestei funcţiuni.

1⁰. Pentru $x = 1$, ecuaţiunea (1) dă $y = \pm 2$.

In domeniul punctului $x = 1$, $y = 2$, avem, pentru ramura y, desvoltarea

$$y = 2 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{16}(x-1)^2 - \ldots,$$

căreia corespunde, pentru z, desvoltarea

$$z = \frac{4}{x-1} + \frac{15}{2} + a(x-1) + \ldots$$

Punctul ($x = 1$, $y = 2$) este aşa dar un pol de ordinul întâiu al funcţiunii z, cu reziduul 4.

In domeniul ($x = 1$, $y = -2$), avem pentru y o desvoltare egală cu cea precedentă, însă de semn contrar,

$$y = -2 - \frac{3}{2}(x-1) - \frac{3}{16}(x-1)^2 - \ldots$$

Ducând această desvoltare în expresiunea (2), obţinem

$$z = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}(x-1) + a(x-1)^2 + \ldots$$

Punctul ($x=1$, $y=-2$) este aşa dar un punct ordinar al funcţiunii z.

2^0. Punctului $x=\infty$, pe foaia determinată de $\lim\limits_{x=\infty}\frac{y}{x}=\sqrt{3}$, corespunde desvoltarea

$$y=\sqrt{3}\,x\left(1+\frac{1}{6x^2}+\ldots\right);$$

de unde, pentru z,

$$z=(2+\sqrt{3})(x+1)+\left(2+\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\ldots$$

Punctul ∞ pe foaia considerată este un pol de ordinul întâiu, cu reziduul $-\left(2+\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$.

Punctului $x=\infty$, pe foaia determinată de $\lim\limits_{x=\infty}\frac{y}{x}=-\sqrt{3}$, corespunde aceiaş desvoltare în care $\sqrt{3}$ este înlocuit prin $-\sqrt{3}$. Valoarea corespunzătoare a lui z este

$$z=(2-\sqrt{3})\ (x+1)+\left(2-\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)\frac{1}{x}+\ldots$$

Punctul $x=\infty$ pe a doua foaie este pol de ordinul întâiu cu reziduul $-\left(2-\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$.

Suma reziduurilor 4, $-\left(2+\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$, $-\left(2-\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$ ale polurilor este nulă, conform teoremei generale (§ 56).

Zerurile funcţiunii z sunt determinate de sistemul de ecuaţiuni

$$y^2=3x^2+1,\quad x(2x+y)=o,$$

cari dau sistemele următoare de valori:

$$x=o;\ y=\pm 1;\quad x=1,\ y=-2;\quad x=-1,\ y=2.$$

Sistemul $x=1$, $y=-2$ dă $z=\frac{1}{2}$. Să examinăm celelalte sisteme.

In domeniul punctului $x=o$, avem

$$y=\pm(1+3x^2)^{\frac{1}{2}}=\pm\left(1+\frac{3}{2}x^2+\ldots\right).$$

Ducând aceste valori în expresiunea (2), obţinem respectiv desvoltările

$$z=-x(1+3x+\ldots),$$

$$z=x\left(1+\frac{1}{2}x+\ldots\right).$$

Punctele $x = o$, $y = \pm 1$ sunt zeruri de ordinul întâiu. Inlocuind în expresiunea (2) x prin -1, avem

$$z = -1 + \frac{1}{2} y.$$

In domeniul $x = -1$, ramura y a ecuaţiunii (1) care se reduce a 2, este dată de desvoltarea

$$y = 2 - \frac{3}{2}(x+1) + \frac{3}{16}(x+1)^2 + \ldots;$$

de unde rezultă, pentru z, expresiunea

$$z = \frac{3}{4}(x+1)\left[-1 + \frac{1}{8}(x+1) + \ldots\right].$$

Punctul $x = -1$, $y = 2$ este un zero de ordinul întâiu. Numărul zerurilor este egal cu al polurilor conform teoremei (§ 56).

Exemplul II. Să considerăm ecuaţiunea

$$(1) \qquad y^2 = x^4 - 1$$

şi funcţiunea

$$(2) \qquad z = \frac{x^3 + xy}{x - 1}.$$

1°. Pentru a obţine desvoltarea acestei funcţiuni în domeniul punctului $x = o$, să punem $x = 1 + t$; cele două ramuri $y(t)$ vor fi date de seria

$$y = t^{1/2}\left(2 + \frac{3}{2} t + at^2 + \ldots\right).$$

Ducând aceste valori în ecuaţiunea (2), obţinem

$$z = \frac{1}{t}\left(1 + 2t^{1/2} + 3t + \frac{7}{2} t^{\frac{3}{2}} + \ldots\right),$$

sau

$$z = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^{1/2}} + 3 + \frac{7}{2}(x-1)^{1/2} + \ldots$$

Punctul $x = 1$, $y = o$ este un pol al funcţiunii pe ambele foi; el este dublu cu reziduul 2 [1]).

---

[1]) Dacă
$$z = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^{1/2}} + C + \ldots$$
$$\mathcal{R}_{x=1} z = p.A; \quad (p = 2) \quad (\S\ 45).$$

2°. In domeniul $x = \infty$ ecuaţiunea (1) dă două ramuri infinite, uniforme, ale căror desvoltări sunt

$$\frac{y_1}{y_2} = \pm x^2\left(1-\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm x^2\left(1-\frac{1}{2x^4}+\ldots\right).$$

Să considerăm ramura y_1 şi să ţinem seama de desvoltările

$$\frac{x^3}{x-1} = x^2+x+1+\frac{1}{x}+\ldots$$

$$\frac{x}{x-1} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots\ldots\ldots$$

Substituind aceste valori în expresiunea (2), obţinem, pentru z, desvoltarea

$$z = 2x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\ldots\right).$$

Punctul $x = \infty$ pe foaia suprafeţii T, cu ramura y_1, este dar un pol de ordinul al doilea cu reziduul -2.

Dacă înlocuim ramura y_1, prin ramura y_2, obţinem desvoltarea

$$z = \frac{1}{2x^2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\ldots\right)$$

Punctul $x = \infty$ pe suprafaţa T cu ramura y_1 este un zero de ordinul al doilea al funcţiunii z. Reziduul corespunzător acestui punct este nul.

Zerurile funcţiunii la distanţă finită sunt punctele $x = o$, $y = \pm i$. Desvoltarea funcţiunii z, în domeniul punctului $x = o$, $y = i$ este

$$z = -x\,[\,i+i\,x+(i-1)\,x^2+\ldots]$$

Desvoltarea celeilalte ramuri se deduce din cea precedentă, înlocuind i prin $-i$.

63. *Conexiunea suprafeţelor T.* O suprafaţă T se zice *conexă* dacă două puncte oarecari ale ei pot fi unite între ele printr'o linie continuă situată pe suprafaţă. Cea mai simplă dintre suprafeţele conexe este suprafaţa plană.

O suprafaţă plană sau sferică, formată dintr'o singură foaie, limitată de un contur simplu, adică de o curbă închisă, care poate fi descrisă printr'o mişcare continuă, se zice că este *simplu conexă.* Orice suprafaţă S între punctele căreia şi acelea ale suprafeţii plane simplu conexe se poate stabilì o corespondenţă analitică bi-univocă se zice deasemenea simplu conexă. Conturului simplu din plan corespunde un contur simplu pe suprafaţa S.

O suprafață T cu *două* foi și *două* puncte de ramificațiune este simplu conexă, căci între această suprafață și o suprafață plană se poate stabili o relațiune birațională.

Să considerăm, de exemplu, suprafețele corespunzătoare ecuațiunilor

$$(1) \qquad y^2 = x,$$

$$(2) \qquad y^2 = (x-a)(x-b).$$

1°. Ecuațiunea (1) se poate înlocui prin cele două următoare

$$(3) \qquad x = t^2, \quad y = t.$$

Figurând variabila t pe planul (t), vedem că fiecărui punct t corespunde un singur punct analitic (x, y); viceversa, fiecărui punct analitic (x, y) corespunde un singur punct

$$(4) \qquad t = \frac{x}{y}.$$

2°. Ecuațiunea (2) se poate scrie

$$y^2 = (x-b)^2 \frac{x-a}{x-b};$$

punând

$$(5) \qquad \frac{x-a}{x-b} = t^2$$

obținem ecuațiunile

$$(6) \qquad x = \frac{bt^2-a}{t^2-1}; \quad y = t(x-b) = \frac{(b-a)\,t}{t^2-1}.$$

și

$$t = \frac{y}{x-b},$$

cari pun în evidență corespondența bi-univocă între punctele suprafeței (2) și acelea ale planului (t).

64. *Conexiune multiplă.* Orice curbă închisă situată pe o suprafață simplu conexă, precum și orice linie interioară care unește două puncte ale conturului peste care un punct mobil al suprafeței nu trebuie să treacă, distruge conexiunea suprafeței: căci două puncte situate de o parte și de alta a unei asemenea linii, nu pot fi unite între ele printr'o linie situată pe suprafață. Această proprietate este evidentă pentru plan și prin urmare, în virtutea corespondenței biunivoce între suprafața simplu conexă și plan, ea este adevărată și pentru suprafața considerată.

Propozițiunea precedentă poate fi luată ca definițiune a conexiunii simple. De unde, prin opozițiune, rezultă definițiunea următoare: *Conexiunea unei suprafeţe se zice multiplă, sau suprafaţa se zice multiplu conexă, dacă se poate trage o curbă închisă pe suprafaţă sau o linie între două puncte ale conturului, privite ca frontiere, care să nu distrugă conexiunea suprafeţei.* Două puncte situate de o parte şi de alta a unei asemenea curbe se pot unì între ele printr'o linie pe suprafaţă, fără a o străbate. Este evident că nu orice curbă închisă se bucură de această proprietate.

Exemple. 1⁰. Aria plană limitată de o curbă închisă C şi de mai multe curbe închise C_1, C_2 ... interioare celei dintâiu, este cu conexiune multiplă. Conturul total, care limitează aria, consistă în curba exterioară şi curbele interioare. Introducând liniile $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ cari unesc două puncte oarecari α, γ ale curbei C respectiv cu două puncte oarecari β, δ ale curbelor interioare (fig. 19) şi privind aceste linii ca făcând parte din conturul total, conexiunea ariei nu este distrusă. Aria limitată de curbele primitive şi de liniile introduse devine simplu conexă, conturul ei poate fi descris printr'o mişcare continuă.

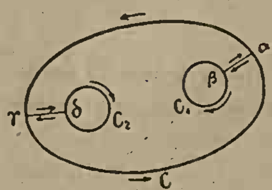

Fig. 19

2⁰. Să considerăm, ca al doilea exemplu, o suprafaţă Riemann cu două foi şi patru puncte de ramificaţiune a, b, c, d, suprafaţă care serveşte de bază integralelor eliptice [1]).

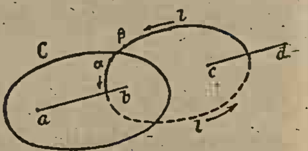

Fig. 20

Această suprafaţă este multiplu conexă. In adevăr, să considerăm o curbă închisă C situată pe o singură foaie, de exemplu, pe foaia întâiu şi cuprinzând în interiorul ei linia de trecere ab şi fie α, β două puncte situate de o parte şi de alta a curbei C (fig. 20).

---

[1]) Ecuaţiunea corespunzătoare este

(1) $$y^2 = A\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d).$$

Dacă unul din punctele critice este la infinit, membrul al doilea este de gradul trei. Se poate trece dela un caz la celalalt printr'o transformare biratională. Astfel substituţiunea

(2) $$x-d = \frac{1}{t};\ y = \frac{\eta}{t^2}$$

reduce ecuaţiunea (1) la forma

(3) $$\eta^2 = At^3 + Bt^2 + Ct + D.$$

Viceversa, formulele

$$t = \frac{1}{x-d},\ \eta = \frac{y}{(x-d)^2}$$

transformă ecuaţiunea (3) în ecuaţiunea (1).

Aceste două puncte se pot unì între ele printr'o linie l care străbate liniile de trecere ab și cd fără a întâlni curba C.[1]) O a doua curbă închisă care ar înconjurà aceleași puncte critice a, b, sau care ar înconjurà celelalte două puncte c, d ar rupe conexiunea suprafeții, precum lesne se recunoaște.

Observare. Intre o suprafață T cu conexiune multiplă și o suprafață formată dintr'o singură foaie nu există corespondență analitică biunivocă. Căci, dacă o asemenea corespondență ar există, ar urmà ca unei curbe închise a suprafeții T, care nu distruge conexiunea ei, să corespundă pe a doua suprafață o curbă închisă care să nu distrugă conexiunea acestei suprafețe. Ceeace este imposibil.

65. Să privim curba C (fig. 20) ca frontieră a suprafeței considerate, sau să efectuăm o tăietură dealungul acestei curbe. Suprafața astfel transformată este conexă, precum am văzut, dar nu este simplu conexă; căci o a doua tăietură C′, făcută după o curbă închisă care conține în interiorul ei punctele critice b și c, nu distruge conexiunea suprafeței (fig. 21). De aci înainte, orice tăietură făcută dealungul unei curbe închise ar distruge conexiunea suprafeței. Suprafața transformată prin introducerea tăieturilor C și C′ este dar simplu conexă. Tăieturile C și C′ se întâlnesc într'un singur punct O; amândouă împreună, adică cele patru țărmuri ale lor, formează un contur care poate fi descris printr'o mișcare continuă și prin urmare este un contur simplu. Pentru a face conturul mai vizibil, să lărgim puțin spațiul dintre țărmurile opuse ale tăieturilor A și B (fig. 22). Tăietura B este pe foaia întâiu, tăietura A este parte pe foaia întâiu, parte pe foaia a doua, străbătând liniile de trecere ab și cd. Țărmurile exterioare sunt figurate prin linii, respectiv puncte, mai groase decât cele interioare. Sensul în care conturul este descris este indicat prin săgeți. Țărmurile opuse sunt descrise în sensuri inverse.

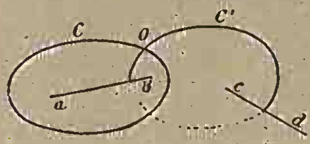

Fig. 21

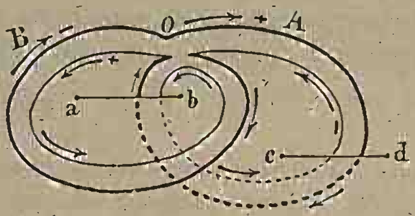

Fig. 22

Este important de fixat pentru fiecare tăietură direcțiunea ei, astfel ca expresiunile de țărmul stâng (+) și țărmul drept (—) să

---

[1]) Porțiunea plină a liniei l face parte din foaia întâi, cea punctată din foaia a doua.

fie bine definite. Sensul direct pentru conturul total poate fi luat într'un mod arbitrar; dacă însă s'a fixat sensul direct pe ţărmul unei tăieturi, acest sens este determinat pe tot conturul, care trebuie descris în acelaş sens printr'o mişcare continuă.

Dacă, de exemplu, privim pozitiv ţărmul *exterior* al lui A, vom privì pozitiv ţărmul *interior* al lui B. Acest ţărm este continuarea ţărmului + al lui A, când descriem cele două tăieturi în sensul indicat de săgeţi. Ţărmurile respectiv opuse sunt negative.

Suprafaţa limitată de ţărmurile tăieturilor A şi B, suprafaţă pe care o reprezintăm prin T′, este formată din două părţi ale suprafeţii primitive T, conexe între ele: anume, o parte situată de aceeaş parte cu ţărmurile exterioare şi o parte situată de aceeaş parte cu ţărmurile interioare ale tăieturilor A şi B. Ţărmurile acestor două tăieturi constitue conturul total Γ al suprafeţei T′. Pe această suprafaţă teorema lui Cauchy relativă la integrala dealungul unei curbe închise, se aplică fără restricţiune. De unde rezultă că dacă toate reziduurile funcţiunii $f(x)$ sunt nule pe suprafaţa T, integrala

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

este o funcţiune uniformă pe această suprafaţă.

66. *Teoremă. Integrala unei funcţiuni uniforme pe suprafaţa T, luată dealungul conturului total al suprafeţii T′, este nulă.*

In adevăr, cele două ţărmuri ale fiecărei tăieturi sunt descrise în sens contrar şi funcţiunea trece pe ambele ţărmuri prin aceleaşi valori, căci, prin ipoteză, ea este uniformă nu numai pe T′ ci şi pe T. Integralele provenite din cele două ţărmuri se distrug între ele şi integrala totală este nulă.

q. e. d.

CAPITOLUL VII

INTEGRALE ELIPTICE

I. REDUCEREA LA ELEMENTE SIMPLE. GENERALITĂŢI

67. Fie $f(x)$ un polinom de gradul trei sau patru fără factori multipli şi $R(x, \sqrt{f(x)})$ o funcţiune raţională de x şi de $\sqrt{f(x)}$. Numim *integrală eliptică* o integrală de forma

$$\int R\left(x, \sqrt{f(x)}\right) dx. \text{ [1]}$$

---

[1]) Dacă $f(x)$ este de gradul patru şi a este o rădăcină a ecuaţiunii $f(x) = o$, substituţiunea $x - a = \frac{1}{t}$ transformă integrala în alta în care polinomul de

Acest nume se datoreşte faptului că lungimea unui arc de elipsă se exprimă printr'o integrală de această speţă.

O funcţiune raţională de x şi de $\sqrt{f(x)}$ se poate pune sub forma

$$R\left(x, \sqrt{f(x)}\right) = \frac{A + B\,f(x)}{C + D\sqrt{f(x)}},$$

A, B, C, D fiind polinoame de x. Multiplicând ambii termeni ai fracţiunii prin $C - D\sqrt{f(x)}$, putem scrie

$$R\left(x, \sqrt{f(x)}\right) = \frac{M}{P} + \frac{N}{P}\frac{1}{\sqrt{f(x)}},$$

M, N, P fiind polinoame de x. Avem aşa dar

$$\int R\left(x, \sqrt{f x}\right) dx = \int \frac{M}{P} d\,x + \int \frac{N}{P}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Lăsând la o parte prima integrală din membrul al doilea, care, fiind integrala unei funcţiuni raţionale de x, se exprimă printr'o funcţiune raţională şi prin logaritmi de funcţiuni raţionale, să considerăm cea de a doua

$$\int \frac{N}{P}\frac{d\,x}{\sqrt{f(x)}}.$$

Fracţiunea raţională $\frac{N}{P}$, descompusă într'o funcţiune întreagă şi în fracţiuni simple, dă loc la integrale de forma

$$P_n = \int \frac{x^n\,d\,x}{\sqrt{f(x)}}, \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

şi

$$Q_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{f(x)}}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Să presupunem $f(x)$ de gradul patru şi fie

(1) $$f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3\,x + a_4.$$

Avem

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\sqrt{f(x)}\right) = n\,x^{n-1}\sqrt{f(x)} + \frac{1}{2}\frac{x^n f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$$

$$= \frac{(n+2)\,a_0x^{n+3} + 2\,(2n+3)\,a_1x^{n+2} + 6(n+1)a_2x^{n+1} + 2(2n+1)a_3x^n + na_4x^{n-1}}{\sqrt{(f\,x)}}$$

---

sub radical este de gradul al treilea. Viceversa, dacă $f(x)$ este de gradul al treilea şi a un număr oarecare diferit de o rădăcină a ecuaţiunii $f(x) = o$, aceiaş substituţiune realizează transformarea inversă.

Integrând ambele membre, obţinem formula recurentă

$$(2)\quad (n+2)\,a_0 P_{n+3} = x^n \sqrt{f(x)} - 2(2n+3)\,a_1 P_{n+2} - 6(n+1)\,a_2 P_{n+1} + 2(2n+1)\,a_3 P_n + n a_4 P_{n-1}.$$

Dând lui n valorile 0, 1, 2, ... vedem că toate integralele P_n, începând dela $n = 3$, se reduc la

$$P_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},\quad P_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}},\quad P_2 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{f(x)}},$$

la cari se mai adaugă o funcţiune algebrică $P(x)\sqrt{f(x)}$, $P(x)$ fiind un polinom.

Se obţine o formulă de reducţiune pentru integrala Q_n, plecând dela egalitatea

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)^{n-1}} = -(n-1)\frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)^n} + \frac{f'(x)}{2(x-a)^{n-1}\sqrt{f(x)}}$$
$$= \frac{-2(n-1)\,f(x) + (x-a)\,f'(x)}{2(x-a)^n\sqrt{f(x)}}.$$

Desvoltând numărătorul după puterile lui $(x-a)$, avem

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)^{n-1}} = -\frac{2(n-1)\,f(a) + (2n-3)\,f'(a)\,(x-a)}{2(x-a)^n\sqrt{f(x)}}$$
$$-\frac{\frac{1}{2}(2n-4)\,f''(a)\,(x-a)^2 + \frac{1}{6}(2n-5)\,f'''(a)\,(x-a)^3 + \frac{2n-6}{24}f^{(\mathrm{IV})}(a)\,(x-a)^4}{2(x-a)^n\sqrt{f(x)}};$$

de unde, integrând ambele membre,

$$(3)\quad -(n-1)\,f(a)\,Q_n = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2}\,f'(a)\,Q_{n-1} +$$
$$+ \frac{n-2}{2}\,f''(a)\,Q_{n-2} + \frac{2n-5}{12}\,f'''(a)\,Q_{n-3} + \frac{n-3}{24}\,f^{(\mathrm{IV})}(a)\,Q_{n-4}.$$

Să presupunem întâiu că a nu este rădăcină a ecuaţiunii $f(x) = o$ şi să dăm lui n valoarea 2; obţinem

$$(4)\quad -f(a)\,Q_2 = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x-a)} + \frac{1}{2}\,f'(a)\,Q_1 - \frac{1}{12}\,f'''(a)\,Q_{-1} - \frac{1}{24}f^{\mathrm{IV}}(a)\,Q_{-2}.$$

Insă

$$Q_{-1} = \int \frac{x-a}{\sqrt{f(x)}}\,dx = P_1 - a\,P_0,$$

$$Q_{-2} = \int \frac{(x-a)^2}{\sqrt{f(x)}}\,dx = P_2 - 2a\,P_1 + a^2 P_0,$$

De unde conchidem că toate integralele Q pentru $n > 1$ se exprimă cu ajutorul integralei

$$(5) \qquad Q_1 = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{f(x)}}$$

şi cu ajutorul integralelor dejà considerate P_0, P_1, P_2.

Dacă a este rădăcină a ecuaţiunii $f(a) = o$, $f'(a)$ fiind neapărat diferit de zero, căci factorii lineari ai lui $f(x)$ sunt simpli, rezultă din formula (4) că integrala Q_1 şi prin urmare toate integralele Q_n se exprimă cu ajutorul integralelor P_0, P_1, P_2.

68. In cazul când polinomul $f(x)$ este de gradul al treilea, integrala P_2 se reduce la integralele P_0 şi P_1, precum rezultă din formula recurentă (2) în care facem coeficientul a_0 al lui x^4 egal cu zero Toate integralele P_n se reduc dar la cele două P_0 şi P_1. Integrala. Q_1 subsistă în aceleaşi condiţiuni ca şi în cazul când $f(x)$ este de gradul 4. In acest caz integrala eliptică generală

$$\int R\left(x, \sqrt{f(x)}\right) dx$$

se reduce la trei speţe de integrale ireductibile între ele

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{f(x)}}, \quad (f(a) \neq o).$$

69. Să considerăm integrala

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$f(x)$ fiind un polinom de gradul trei sau patru. In domeniul unui punct x_0 diferit de un zero al lui $f(x)$, avem

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = P(x-x_0), \quad \Big[P(x-x_0)\Big]_{x_0} \neq o;$$

de unde

$$(2) \qquad u = \mathcal{P}(x-x_0).$$

Dacă x_0 este un zero al lui $f(x)$, avem în domeniul acestui punct

$$(3) \qquad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = (x-x_0)^{-\frac{1}{2}} P(x-x_0), \quad \Big[P(x-x_0)\Big]_{x_0} \neq o;$$

de unde

$$(4) \qquad u = C + (x-x_0)^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}(x-x_0).$$

In domeniul punctului $x = \infty$, avem

$$(5) \qquad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = x^{-2} P(x^{-1}) \text{ sau } x^{-\frac{3}{2}} P(x^{-1}), \Big[P(x^{-1})\Big]_{x=\infty} \neq o,$$

după cum $f(x)$ este de gradul 4 sau 3. Acestor egalități corespund pentru integrala u respectiv expresiunile

$$(6) \qquad u = \mathscr{P}(x^{-1}), \quad u = \mathrm{P}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathrm{C} + x^{-\frac{1}{2}}\mathscr{P}(x^{-1}).$$

Din desvoltările precedente rezultă că integrala u este o funcțiune analitică de x, care rămâne finită pe toată suprafața T a lui Riemann, corespunzătoare ecuațiunii $y^2 = f(x)$; ea este uniformă pe suprafața simplu conexă T' (§ 65), căci, pe această suprafață, funcțiunea $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ este olomorfă. Vom vedeà că pe suprafața T ea este multiformă cu o infinitate de ramuri.

70. *O integrală eliptică, care rămâne finită pentru orice valoare a variabilei finită sau infinită, se zice că este de speța întâia.* Integrala considerată

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

este de speța întâia. Ea este, abstracțiune făcând de un factor constant și de o constantă aditivă, singura integrală de speța întâia, relativ la aceeaș suprafață T, $y^2 = f(x)$.

In adevăr, să presupunem că integrala

$$\mathscr{J} = \int \mathrm{R}(x, y)\, dx = \int y\, \mathrm{R}(x, y)\, \frac{dx}{y}$$

în care $\mathrm{R}(x, y)$ este o funcțiune rațională, este de speța întâia. In domeniul unui punct x_0, avem

$$y\, \mathrm{R}(x, y) = (x - x_0)^{\mu}\, \mathrm{P}(x - x_0),$$

sau

$$y\, \mathrm{R}(x, y) = (x - x_0)^{\frac{\mu}{2}}\, \mathrm{P}\left[(x - x_0)^{\frac{1}{2}}\right],$$

după cum x_0 este punct ordinar sau punct critic, μ fiind un număr întreg pozitiv, negativ sau nul. Dacă $x_0 = \infty$, înlocuim în formula precedentă $x - x_0$ prin $\frac{1}{x}$. In virtutea acestor expresiuni și ținând seama de desvoltările de mai sus date de formulele (1), (3), (5) ale lui $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ (§ 69), conchidem că pentru ca integrala $\mathscr{J}$ să fie finită pentru orice valoare a lui x, finită sau infinită, este necesar și suficient ca funcțiunea $y\, \mathrm{R}(x, y)$ să rămână finită pe toată suprafața T, inclusiv punctul ∞. De unde rezultă că această funcțiune este o constantă C (§ 58), adică

$$\mathrm{R}(x, y) = \frac{\mathrm{C}}{y} = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{f(x)}};$$

de unde

$$\mathcal{I} = \mathrm{C}\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \mathrm{C}'.$$

71. Integralele eliptice cari admit poluri, nu însă şi puncte critice logaritmice se zic integrale de speţa *doua*. Astfel integrala

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{f(x)}},$$

$f(x)$ fiind polinom de gradul trei, este o integrală de speţa doua, având punctul $x = \infty$ ca pol de ordinul întâi. Integralele cari admit puncte critice logaritmice se zic de speţa *treia*. Numărul acestor puncte este cel puţin egal cu doi. In adevăr, pentru ca un punct analitic (x_0, y_0) să fie logaritmic al integralei

$$\int \mathrm{R}(x, y)\, dx,$$

este necesar şi suficient ca reziduul funcţiunii $\mathrm{R}(x, y)$, relativ la polul (x_0, y_0), să fie diferit de zero. Insă suma reziduurilor funcţiunii raţionale $\mathrm{R}(x, y)$ pe toată suprafaţa T este nulă, prin urmare avem cel puţin două reziduuri diferite de zero.

Printre aceste integrale se găseşte integrala

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{f(x)}},$$

$f(x)$ polinom de gradul trei şi a diferit de un zero al acestui polinom. Punctele logaritmice ale acestei integrale sunt $\left(a, \pm\sqrt{f(a)}\right)$ şi reziduurile corespunzătoare $\pm\dfrac{1}{\sqrt{f(a)}}$.

II. MULTIPLICITATEA VALORILOR INTEGRALELOR ELIPTICE

72. Să ne închipuim suprafaţa T, corespunzătoare ecuaţiunii $y^2 = f(x)$, transformată în suprafaţă simplu conexă T′ prin ajutorul a două tăieturi A, B (§ 65, fig. 22). Tăietura B situată pe foaia întâi, conţine în interiorul său linia de trecere ab; tăietura A, situată parte pe una, parte pe cealaltă foaie, conţine în interiorul său punctele critice b şi c. Al patrulea punct critic este exterior curbelor A şi B, la distanţă finită sau la infinit, după cum polinomul $f(x)$ este de gradul 4 sau de gradul 3; a doua linie de trecere uneşte punctul c cu cel de al patrulea punct critic.

Din definițiunea celor trei spețe de integrale eliptice, rezultă că pe suprafața T′ integralele de speța I și II sunt funcțiuni uniforme; cele dintâi sunt funcțiuni olomorfe și cele de al doilea funcțiuni meromorfe. Integralele de speța III însă sunt susceptibile într'un punct oarecare al suprafeței T′ de o infinitate de valori. Fie w o integrală de speța III, având punctele logaritmice $a_1, a_2, \ldots a_n$, pe cari le presupunem diferite de punctele de ramificațiune și fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ reziduurile derivatei $\frac{dw}{dx}$ corespunzătoare acestor puncte. Să reprezintăm prin w_0 una din valorile integralei într'un punct x al suprafeței T′; expresiunea generală a integralei w în punctul x este dată de expresiunea

$$w = w_0 + 2i\pi (m_1 A_1 + \ldots + m_n A_n),$$

$m_1, \ldots, m_n$ fiind numere întregi.

73. Fie

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} R(x, y)\, dx$$

o integrală eliptică de speța I sau II. Această integrală este, precum am văzut, o funcțiune uniformă de x pe suprafața T′. Avem propozițiunea următoare:

Diferența între valorile integralei în două puncte ale conturului lui T′, situate față în față, unul pe țărmul stâng (+), celalt pe țărmul drept (—), este constantă dealungul conturului.

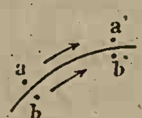

Fig. 23

In adevăr, fie a, a' două puncte situate pe țărmul (+) și b, b' cele două puncte în fața lor pe țărmul (—) (fig. 23) Funcțiunea R (x, y), fiind rațională pe suprafața T, trece prin aceleași valori pe cele două țărmuri și prin urmare avem, integrând respectiv dealungul acestor țărmuri,

$$\int_a^{a'} R(x, y)\, dx = \int_b^{b'} R(x, y)\, dx,$$

adică

$$I(a') - I(a) = I(b') - I(b),$$

sau

$$I(a) - I(b) = I(a') - I(b').$$

Diferența constantă $I(a) - I(b)$ a valorii integralei din țărmul (+) și a aceleia din țărmul (—), a primit numele de *modul de periodicitate* sau, mai scurt, de *perioadă* a integralei $I(x)$. Fiecărei tăieturi corespunde o perioadă.

Să reprezintăm prin $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{B}$ perioadele corespunzătoare tăieturilor A şi B. Pentru a calculà aceste perioade să fixăm patru puncte λ, ϱ, μ, ν infinit apropiate de punctul de întâlnire al celor două tăieturi: λ, ϱ fiind situate respectiv pe ţărmul $\pm$ al tăieturii A, de partea negativă a tăieturii B şi μ, ν având aceiaş poziţiune ca λ, ϱ, relativ la tăietura A, însă situate de partea pozitivă a tăieturii B (fig. 24) Vom aveà

$$\mathscr{A} = I(\lambda) - I(\varrho) = I(\mu) - I(\nu) = \int_{\varrho CB\lambda} R(x, y)dx = \int_{\nu CB\mu} R(x, y)\,dx,$$

$$\mathscr{B} = I(\mu) - I(\lambda) = I(\nu) - I(\varrho) = \int_{\lambda AD\mu} R(x\,y)\,dx = \int_{\varrho AD\nu} R(x, y)'\,dx;$$

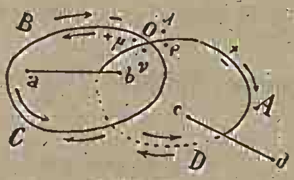

Fig. 24

Adică: *perioada* $\mathscr{A}$ *este egală cu valoarea integralei*

$$\int R(x, y)\,dx,$$

luată dealungul tăieturii B, dela ţărmul (—) la cel (+) al tăieturii A; iar perioada $\mathscr{B}$ *este egală cu valoarea aceleaşi integrale, luată dealungul tăieturii A, dela ţărmul (—) la cel (+) al tăieturii B.*

74. Până aci am presupus că drumul de integraţiune $(x_0 \ldots x)$ rămâne pe suprafaţa T′ adică nu străbate nici una din tăieturile A sau B. Se numeşte *valoare principală* valoarea acestei integrale. Să suprimăm această restricţiune şi să examinăm efectul produs asupra integralei, când drumul de integraţiune străbate conturul.

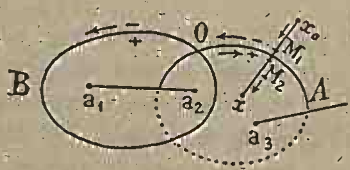

Fig. 25

Să considerăm dar un drum care uneşte punctul x_0 cu punctul x şi străbate tăietura A într'un punct M, trecând dela ţărmul (+) la cel (—) şi fie M_1, M_2 două puncte ale acestui drum, infinit apropiate de M, situate respectiv pe cele două ţărmuri (fig. 25). Să reprezintăm prin I' valoarea integralei dealungul acestui drum, şi fie I valoarea principală a integralei luată între aceleaşi limite. Drumul corespunzător se poate reduce la drumurile

$$x_0 M_1,\ M_1 O,\ \text{tăietura B (pe ţărmul —)},\ OM_2,\ M_2 x$$

descrise succesiv în sensul săgeţii.

Integralele după drumurile $M_1 O$, OM_2 se distrug, funcţiunea $R(x, y)$ fiind uniformă pe suprafaţa T. Avem dar

$$I = \int_{x_0 M_1} R(x, y)\, dx - \mathscr{A} + \int_{M_2 x} R(x, y)\, dx = I' - \mathscr{A};$$

de unde

$$I' = I + \mathscr{A}.$$

Dacă drumul de integraţiune străbate tăietura A, trecând dela ţărmul (—) la ţărmul (+), obţinem egalitatea

$$I' = I - \mathscr{A}$$

Avem dar egalitatea

(1) $$I' = I \pm \mathscr{A},$$

după cum trecerea se face dela ţărmul (+) la ţărmul (—), sau viceversa.

Deasemenea, dacă drumul de integraţiune străbate tăietura B, obţinem egalitatea

(2) $$I' = I \pm \mathscr{B},$$

după cum trecerea se face dela ţărmul (+) la ţărmul (—), sau viceversa.

Intr'un mod general, dacă drumul de integraţiune străbate tăieturile A şi B de un număr oarecare de ori, valoarea I' a integralei în punctul final x este legată de valoarea principală I prin formula

(3) $$I' = I + m\,\mathscr{A} + n\,\mathscr{B}.$$

m şi n fiind numere întregi pozitive sau negative.

Integralele eliptice de speţa I sau de speţa II sunt aşa dar funcţiuni analitice monogene pe toată suprafaţa T a lui Riemann, având o infinitate de ramuri, cari difer de ramura principală corespunzătoare printr'o sumă de multipli arbitrari de perioade. Fiecare ramură este o funcţiune uniformă pe suprafaţa T'.

Dacă integrala este de speţa III, pe lângă perioadele la cari dau naştere tăieturile A şi B, cari se determină în acelaş mod ca cele ale integralei de speţa I şi II, avem alte perioade cari se introduc din cauza punctelor singulare logaritmice.

Pe suprafaţa T', integrala de speţa III nu este uniformă; însă putem transforma această suprafaţă într'alta T'', în care integrala să fie uniformă. Aceasta se realizează dacă izolăm punctele logaritmice prin cercuri foarte mici şi unim câte un punct al fiecăruia din ele cu un punct al conturului lui T', de exemplu cu punctul O, comun curbelor A şi B, prin linii L_1, L_2,... cari nu se întâlnesc între ele şi cari nu întâlnesc conturul decât în punctul O şi obligăm variabila a nu le străbate (fig. 26).

Suprafaţa T″ este simplu conexă; conturul ei este format din conturul lui T′ şi din ţărmurile tăieturilor făcute dealungul liniilor L_1, L_2, ...

Reprezintând prin A_k reziduul lui $R(x, y)$ relativ la polul $x = a_k$, diferenţa valorilor integralei între ţărmul (+) şi cel (—) al tăieturii L_k este $+2i\pi A_k$: această constantă este perioada integralei relativ la tăietura L_k.

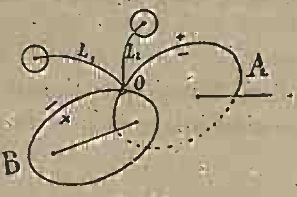

Fig. 26

Dacă variabila străbate această tăietură integrala se măreşte cu $\pm 2i\pi A_k$, după cum trecerea se face dela ţărmul (—) la cel (+) sau viceversa. Intr'un punct x, o ramură oarecare I' a integralei este exprimată prin egalitatea

$$(4) \qquad I' = I + m\mathscr{A} + n\mathscr{B} + 2i\pi \sum_{k=1}^{k=n} m_k A_k ;$$

I fiind valoarea principală şi m, n, m_k fiind numere întregi.

Observare. Din egalităţile (3) şi (4) rezultă că valoarea unei integrale eliptice, luată după o curbă închisă, este egală cu o sumă de multipli de perioade, căci valoarea principală corespunzătoare este nulă.

CAPITOLUL VIII.

INTEGRALA ELIPTICĂ DE SPEŢA I.

75. Printre integralele eliptice relative la suprafaţa T a lui Riemann, cea de speţa I

$$(1) \qquad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

are o importanţă deosebită, datorită proprietăţii de a fi finită pentru orice valoare finită sau infinită a variabilei; de unde rezultă, precum am văzut, că ea este unică, abstracţiune făcând de un multiplicator constant şi de o constantă aditivă. O altă proprietate de o importanţă analitică fundamentală a integralei de speţa I este, precum vom vedeà, aceea a inversiunii uniforme; ceeace însemnează că limita superioară x a integralei u este o funcţiune uniformă de u în tot planul acestei variabile. Vom vedeà de asemenea că, într'un mod general, o funcțiune rațională R (x, y) pe suprafața T este o funcțiune uniformă de această integrală.

Este important de observat că x și $\sqrt{f(x)}$ nu se pot exprimà prin funcțiuni raționale de un parametru, precum aceasta este posibil în cazul când polinomul $f(x)$ este de gradul întâi sau al doilea. Căci dacă s'ar puteà ca

$$x = \varphi(t), \quad \sqrt{f(x)} = \psi(t)$$

să fie funcțiuni raționale de t, ar urma ca integrala de speța I, devenind integrala unei funcțiuni raționale de t

$$u = \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt,$$

să devină înfinită cel puțin odată pentru o valoare finită sau infinită a lui t, și prin urmare a lui x.

76. Să reprezintăm prin ω și ω' perioadele integralei u, relative la tăieturile A și B; vom aveà pentru u, în acelaș punct x pe suprafața T, expresiunea

$$(2) \qquad u = u_0 + m\omega + m'\omega',$$

m și m' fiind numere întregi și u_0 fiind una din valorile lui u corespunzătoare lui x.

Să examinăm relațiunea ce există între valorile integralei în două puncte suprapuse (x, y), $(x, -y)$ ale suprafeței T.

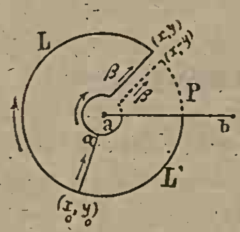

Fig. 27

Dacă punctul inițial este un punct de ramificațiune a și drumurile care unesc acest punct cu punctele finale (x, y), $(x, -y)$ sunt suprapuse în toată intinderea lor, valorile integralelor sunt egale și de semne contrarii; căci dealungul acestor drumuri, $\sqrt{f(x)}$ trece prin valori egale și de semne contrarii. Rezultatul subsistă dacă înlocuim unul din cele două drumuri printr'un drum echivalent cu el.

Să considerăm acum două drumuri L, L', plecând dela un punct (x_0, y_0), cel dintâi situat pe foaia întâia, iar cel de al doilea străbătând, de exemplu, linia de trecere ab într'un punct P (fig. 27). Să înlocuim aceste drumuri prin drumurile respectiv echivalente $x_0 a \beta (x, y)$, $x_0 a \beta' (x, -y)$ formate din drumul comun $x_0 a$ — punctul a fiind foarte aproape de punctul critic a — din două semicercuri $a\beta$, $a\beta'$ cu centrul în a și din drumurile suprapuse $\beta (x, y)$, $\beta' (x, -y)$.

Vom aveà, reprezintând prin u și u' valorile integralei după L și L',

$$u = \int_{x_0\, y_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{a\beta} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{\beta}^{x,\, y} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$$u' = \int_{x_0,\, y_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{a\beta'} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{\beta'}^{x,-y} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Făcând suma acestor egalități și ținând seamă că integralele după arcele $a\beta$, $a\beta'$ tind către zero împreună cu aceste arce și că ultimele integrale din membrele de al doilea devin egale și de semne contrarii, rezultă egalitatea

$$u + u' = 2\int_{x_0,\, y_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}. \tag{3}$$

Reprezintând prin u_0 una din valorile lui u' în punctul $(x, -y)$, avem:

$$u' = u_0 - m\,\omega - n\omega',$$

m și n fiind numere întregi oarecari, pozitive sau negative. Substituind aceste valori ale lui u' în egalitatea (3), obținem expresiunea generală

$$u + u_0 = 2\int_{x_0,\, y_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + m\omega + n\omega'. \tag{4}$$

Din egalitățile (2) și (4) rezultă că într'un punct x pe *planul simplu* al variabilei, valorile integralei u sunt cuprinse în expresiunile

$$u = \begin{cases} u_0 + m\omega + n\omega', \\ 2\displaystyle\int_{x_0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} - u_0 + m\omega + n\omega' \end{cases} \tag{5}$$

Dacă limita inferioară x_0 coincide cu punctul a (în genere, cu un punct critic), expresiunile (5) devin

$$u = \pm u_0 + m\omega + n\omega'.$$

77. Fie C, C' două curbe închise situate pe aceiaș foaie, conținând în interiorul lor respectiv liniile de trecere $a\,b$, $c\,d$ fără a se tăià între ele. Avem

$$\int_{C} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{C'} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 0, \tag{1}$$

integralele fiind luate în acelaș sens. Pentru a justificà această egalitate, să considerăm un cerc (R) situat pe aceiaș foaie, având o rază R destul de mare pentru ca să cuprindă în interiorul său curbele C şi C'. In aria limitată de cercul (R) şi de aceste două curbe, funcţiunea $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ fiind olomorfă, avem

$$(2) \qquad \int_C \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{C'} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{(R)} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Făcând R să tindă către infinit, membrul al doilea tinde către zero; valoarea sa fiind constantă, aceea a membrului întâi, este riguros nulă. De unde rezultă egalitatea (1).

78. Perioadele ω şi ω' sunt date, precum am văzut (§ 72) [1]) de integrala $\int \frac{dx}{\sqrt{(fx)}}$, luată, cea dintâi după o curbă închisă conţinând în interiorul ei linia de trecere a_1 a_2 şi situată în foaia întâi; cea de a doua, după o curbă închisă conţinând punctele de ramificaţiune a_2, a_3, situată parte pe o foaie, parte pe cealaltă foaie, ambele curbe fiind descrise în sensul negativ în raport cu punctele critice situate în interiorul lor. Valorile acestor integrale rămân neschimbate dacă modificăm forma celor două curbe fără ca ele să întâlnească vreun punct de ramificaţiune. Forma liniilor de trecere dela o foaie la alta poate deasemenea fi schimbată. Ceeace rămâne invariabil sunt punctele de ramificaţiune a căror poziţiune este dată.

Să ne închipuim curbele de integraţiune reduse, cea dintâi la cele două ţărmuri situate pe aceeaş foaie ale liniei a_1 a_2 şi la două cercuri infinit mici având centrele lor în punctele a_1, a_2; iar cea de a doua la drumul format din două linii suprapuse între punctele a_2 şi a_3, una în foaia întâi, cealaltă în foaia doua a lui T şi două cercuri infinit mici, având centrele lor în aceste puncte (fig. 28). Integralele dealungul cercurilor tinzând către zero împreună cu razele cercurilor şi $\sqrt{f(x)}$ trecând prin aceleaşi valori cu semne contrarii pe laturile opuse, rezultă egalităţile

Fig. 28

$$(1) \qquad \omega = 2\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad \omega' = 2\int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

integralele fiind luate pe ţărmul stâng al segmentelor a_1 a_2 şi a_2 a_3.

---

[1]) Inlocuim literile $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{B}$ respectiv prin ω şi ω'.

79. Să considerăm, de exemplu, integrala normală a lui Legendre

$$(2) \qquad u = \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

în care presupunem *modulul* k real, cuprins între 0 și 1 și radicalul egal cu $+1$ în punctul $x = o$ pe țărmul stâng din foaia întâi. Punctele critice sunt ± 1, $\pm \frac{1}{k}$. Să luăm $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{k}$, $a_4 = -\frac{1}{k}$. Formulele (1) dau, adoptând notațiunile lui Legendre și Jacobi,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= 4\,\mathrm{K} = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ \omega' &= 2i\mathrm{K}' = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 2i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}, \text{[1]} \end{aligned} \right.$$

radicalele reale fiind pozitive. De unde

$$\mathrm{K} = \int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \quad \mathrm{K}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

Să considerăm, ca al doilea exemplu, integrala normală a lui Weierstrass

$$(4) \qquad u = -\int_\infty^x \frac{d\,x}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_2)}},$$

în cazul când e_1, e_2, e_2 sunt cantități reale, dispuse în ordinea $e_1 > e_2 > e_3$. Radicalul este luat cu valoarea sa pozitivă pentru x real și $> e_1$.

Dacă punem

$$a_1 = e_3, \quad a_2 = e_2, \quad a_3 = e_1, \quad a_4 = \infty,$$

[1]) Radicalul $\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}$ se schimbă în $-i\sqrt{(x^2-1)\,(1-k^2x^2)}$ pe țărmul stâng al segmentului $(1, \frac{1}{k})$.

avem, în virtutea formulelor (1), egalitățile

$$
(5)\left\{\begin{aligned}
\omega &= \int_{e_3}^{e_2}\frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)(e_2-x)(x-e_3)}},\\
\omega' &= \int_{e_2}^{1}\frac{-dx}{\sqrt{(e_1-x)(e_2-x)(x-e_3)}} = i\int_{e_2}^{e_1}\frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)(x-e_2)(x-e_3)}}
\end{aligned}\right.
$$

în cari radicalul $\sqrt{(e_1-x)(e_2-x)(x-e_3)}$ din prima egalitate și radicalul $\sqrt{(e_1-x)(x-e_2)(x-e_3)}$ din ultima egalitate sunt reale și pozitive [1]).

Raportul $\frac{\omega'}{\omega}$ al perioadelor este, precum se vede, imaginar în ambele integrale considerate. Această terorema este generală.

80. *Teoremă. Raportul perioadelor unei integrale eliptice de speța I este imaginar* [2]).

Să punem integrala

$$(1)\qquad u=\int\frac{d\,x}{\sqrt{f(x)}}$$

sub forma

$$(2)\qquad u=v+iw,\quad x=\xi+i\eta$$

v și w fiind funcțiuni reale de variabilele reale ξ, η și să considerăm integrala

$$(3)\qquad \int_\Gamma v\,dw,$$

luată în sensul pozitiv dealungul conturului Γ (fig. 22, § 65), care limitează într'un mod complect suprafața T'. Integrala u fiind o funcțiune olomorfă de x pe această suprafață, avem, în virtutea teoremei lui Riemann, (§ 48), inegalitatea

$$(4)\qquad \int_\Gamma v dw > 0$$

Să calculăm membrul întâi. Fie

$$(5)\qquad \omega=\alpha+i\beta,\quad \omega'=\alpha'+i\beta'$$

perioadele integralei u relative la tăieturile A și B. Reprezintând

---

[1]) Dacă x descrie în sensul negativ un semicerc cu centrul în e_2, situat deasupra axei reale, radicalul $\sqrt{e_2-x}$ se schimbă în $-i\sqrt{x-e_2}$

[2]) Teoremă deja văzută I. p. 327

prin

$$\int_{\overset{+}{A}} v\,dw,\ \int_{\overset{+}{B}} v\,dw,\ \int_{\overset{-}{A}} v\,dw,\ \int_{\overset{-}{B}} v\,dw,$$

integralele luate în sensul direct (indicat de săgeți) după țărmurile pozitive și negative ale celor două tăieturi, avem

$$\begin{aligned}(6)\qquad \int_{\Gamma} v\,dw &= \int_{\overset{+}{A}} v\,dw + \int_{\overset{+}{B}} + \int_{\overset{-}{A}} + \int_{\overset{-}{B}} \\ &= \int_{\overset{+}{A}} (\overset{+}{v}-\overset{-}{v})\,dw + \int_{\overset{+}{B}} (\overset{+}{v}-\overset{-}{v})\,dw,\end{aligned}$$

$\overset{+}{v}$ și $\overset{-}{v}$ reprezintând valorile v în două puncte situate față în față pe țărmurile respective.

Insă, în virtutea definițiunii perioadelor ω și ω', [1]) avem

$$(7)\qquad \left(\overset{+}{u}-\overset{-}{u}\right)_{A} = \alpha + i\beta,\quad \left(\overset{+}{u}-\overset{-}{u}\right)_{B} = \alpha' + i\beta',$$

$$(8)\qquad \int_{\overset{+}{A}} d(v+iw) = \omega' = \alpha' + i\beta',\quad \int_{\overset{+}{B}} d(v+iw) = -\omega = -(\alpha+i\beta).$$

De unde rezultă egalitățile

$$(9)\qquad \left(\overset{+}{v}-\overset{-}{v}\right)_{A} = \alpha,\quad \left(\overset{+}{v}-\overset{-}{v}\right)_{B} = \alpha',$$

$$(10)\qquad \int_{\overset{+}{A}} dw = \beta',\quad \int_{\overset{+}{B}} dw = -\beta.$$

In virtutea acestor egalități, egalitatea (6) devine

$$(11)\qquad \int_{\Gamma} v\,dw = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

Avem așa dar inegalitatea

$$(12)\qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' > o.$$

Din această inegalitate rezultă:

1°. Cantitățile α și β nu pot fi nule în acelaș timp; deasemenea cantitățile α' și β'. *Nici una din perioadele ω, ω' nu poate dar fi nulă*

2°. *Raportul*

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\alpha'+i\beta'}{\alpha+i\beta} = \frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha^2+\beta^2} + i\,\frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\alpha^2+\beta^2}$$

este imaginar și coeficientul lui i este pozitiv [2]).

---

[1]) § 72, $\mathscr{A}=\omega$, $\mathscr{B}=\omega'$.

[2]) Acest semn corespunde direcțiunii considerate a tăieturilor A, B. Intr'o dispozițiune diferită, semnul lui i ar puteà fi negativ.

81. *Observare.* Dacă membrul întâi (12) ar fi nul, integrala u s'ar reduce la o constantă. Căci din egalitatea

$$\int_{\mathrm{F}} v\,dw = \int\int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2\right] d\xi d\eta = o, \quad (x = \xi + i\eta)$$

rezultă egalitățile

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = o, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = o,$$

adică v=const; de unde, precum se știe, rezultă și

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = o, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = o,$$

Prin urmare

$$v + iw = \text{const}.$$

SCHIMBAREA SISTEMULUI DE TĂIETURI.

82. Cele două tăieturi necesare, pentru a face suprafața T simplu conexă, pot fi determinate în diferite moduri, de unde pot rezultà diferite sisteme de perioade. Este interesant de examinat ce relațiuni există între perioadele corespunzătoare la două sisteme diferite de tăieturi.

Fie A, B tăieturile primului sistem și A′, B′ tăieturile sistemului al doilea. Pentru ca tăieturile A′, B′ să nu distrugă conexiunea T′ este necesar ca fiecare din ele să străbată cel puțin odată una din tăieturile A, B, căci suprafața T′ fiind simplu conexă, orice curbă închisă trasă pe această suprafață distruge conexiunea ei.

Să reprezintăm prin Ω, Ω' perioadele relative la sistemul (A′,B′). Aceste perioade fiind valorile ce primește integrala $\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ luată, în sensuri convenabile, dealungul curbelor A′, B′, vor fi date de egalități de forma

$$(1) \qquad \Omega = m\,\omega + n\omega', \quad \Omega' = m'\omega + n'\,\omega',$$

m, m', n, n' fiind numere întregi (observare § 74).

Pentru acelaș motiv, perioadele ω, ω', relativ la sistemul (A, B), sunt sume de multipli de perioadele Ω, Ω',

$$(2). \qquad \omega = \mu\,\Omega + \nu\,\Omega', \quad \omega' = \mu'\,\Omega + \nu'\,\Omega'.$$

Identificând valorile perioadelor ω și ω' din ecuațiunile (1) și (2), obținem egalitățile

$$\mu = \frac{n'}{\Delta}, \quad \nu = -\frac{n}{\Delta}, \quad \mu' = -\frac{m'}{\Delta}, \quad \nu' = \frac{m}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix};$$

prin urmare

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} n' & -n \\ -m' & m \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta},$$

sau

$$(3) \qquad \Delta \Delta' = 1,$$

adică

$$(4) \qquad \Delta = \Delta' = \pm 1,$$

semnele fiind aceleaşi pentru Δ şi Δ'.

Se zice că două sisteme de perioade (ω, ω'), (Ω, Ω') sunt *echivalente*, dacă între ele există relaţiunile (1) şi (2). Schimbarea tăieturilor suprafeţei T are dar drept efect a înlocui un sistem de perioade printr'un sistem de perioade echivalente.

83. Fie

$$\frac{\omega'}{\omega} = a + i\beta;$$

vom avea

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{(m'+n'a) + n'i\beta}{(m+na)+ni\beta} = \frac{\Lambda + i\beta\Delta}{(m+na)^2 + n^2\beta^2},$$

$$\Lambda = (m'+n'a)(m+na) + nn'\beta.$$

Raportul $\dfrac{\Omega'}{\Omega}$, corespunzător raportului $\dfrac{\omega'}{\omega}$, este dar de asemenea imaginar şi coeficienţii lui i în ambele raporturi au acelaş semn sau sunt de semne contrarii după cum $\Delta = \pm 1$.

84. *Aplicaţiune.* Să considerăm integrala lui Weierstrass

$$u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} \text{ [1]}$$

e_1, e_2, e_3 fiind trei cantităţi date oarecari distincte între ele şi să examinăm, în câteva cazuri, relaţiunile dintre perioadele integralei, când tăieturile A şi B au diferite dispoziţiuni.

Pentru a evità orice confuziune să numim A tăietura al cărui ţărm + este luat după voie, ori care ar fi cele două puncte critice cuprinse în interiorul ei; A se va zice *prima tăietură*. Ţărmul + al celeilalte tăieturi, reprezintată prin B, (a doua tăietură), este ţărmul care urmează imediat după cel + al lui A, când conturul suprafeţei T' este descris în sensul direct (+). Conturul este descris în sensul direct, dacă aria suprafeţei T' situată de partea ţărmului + se găseşte la stânga observatorului care descrie acest contur. Să reamintim: *primo,* perioada relativă unei tăieturi este diferenţa

[1] Nu punem semn înaintea radicalului, punctul x plecând dela ∞ pe una sau pe cealaltă foaie.

între valoarea integralei într'un punct al ţărmului + al tăieturii şi valoarea ei în punctul opus din ţărmul —; ea este dată de valoarea integralei luată dealungul celeilalte tăieturi în sensul care duce dela punctul ţărmului — la punctul ţărmului + al tăieturei la care se referă perioada (§ 73); *secundo*, variabila x străbătând o tăietură, integrala u se măreşte cu $\pm$ perioada corespunzătoare acelei tăieturi, după cum trecerea se face dela ţărmul + la cel — sau viceversa (§ 74).

1⁰. Să plecăm dela sistemul reprezintat prin figura (29) şi fie ω, ω'

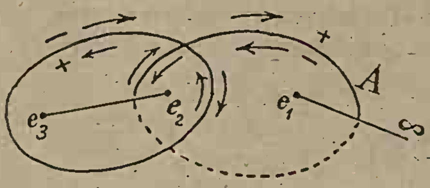

Fig. 29

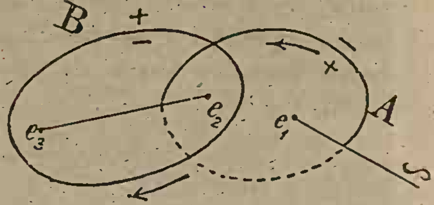

Fig. 30

perioadele relative la tăieturile A, B, ω este valoarea integralei u dealungul curbei B şi ω' este valoarea integralei dealungul curbei A, descrise amândouă în sensul săgeţilor exterioare.

2⁰. Să schimbăm semnele ţărmurilor lui A; se schimbă în acelaş timp semnele ţărmurilor lui B (fig. 30). Numind Ω, Ω' perioadele corespunzătoare, avem

$$\Omega = -\omega, \quad \Omega' = -\omega'.$$

3⁰. Să permutăm tăieturile A şi B, adică să luăm B drept prima

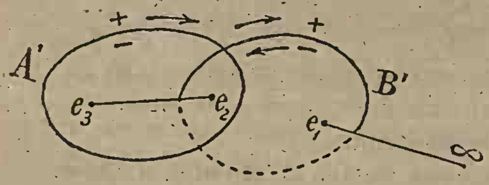

Fig. 31

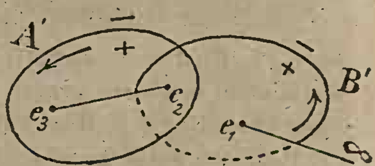

Fig. 32

tăietură şi s'o notăm A' şi drept a doua tăietură A pe care o notăm B' (fig. 31). Reprezintând prin Ω, Ω' perioadele relative la A', B', avem

$$\Omega = -\omega', \quad \Omega' = \omega.$$

4⁰. Schimbând în figura precedentă semnele lui A', semnele lui B' se schimbă în acelaş timp; de unde rezultă (fig. 32) aceleaşi perioade cu semnele schimbate

$$\Omega = \omega', \quad \Omega' = -\omega.$$

5⁰. Să păstrăm în cazul 1⁰ tăietura B şi să înlocuim tăietura A printr'o tăietură A′ care să conţină în interiorul ei punctele e_1 şi e_3. Obţinem figura (33) sau figura (34), după cum descriind conturul lui T′ în sensul direct, tăietura A′ străbate tăietura A trecând dela ţărmul — la cel +, sau viceversa.

In ambele aceste dispoziţiuni perioada Ω relativă la tăietura A′ este egală cu perioada ω relativă la tăietura A, iar perioada relativă la tăietura B este dată respectiv de egalităţile

$$\Omega' = \mp \omega + \omega',$$

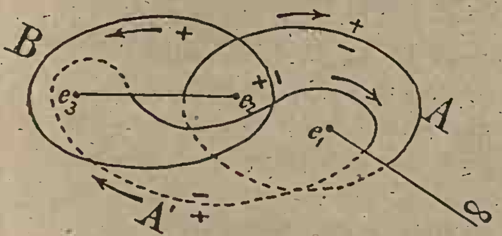

Fig. 33

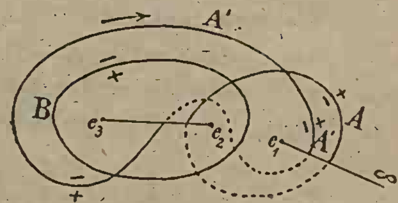

Fig. 34

căci drumul A′ străbate ambele tăieturi A şi B, pe cea dintâi în sensurile menţionate şi pe cea de a doua dela ţărmul + la cel —. Schimbarea sistemului 1⁰ în sistemul 5⁰ are dar drept efect a înlocuì perioadele iniţiale ω, ω' prin perioadele Ω, Ω' date respectiv de egalităţile

$$\Omega = \omega, \qquad \Omega' = \mp \omega + \omega'.$$

In toate formulele precedente determinantul substituţiunii este egal cu + 1.

CAPITOLUL IX.

TEOREMA LUI ABEL PENTRU ADIŢIUNEA INTEGRALELOR ELIPTICE DE SPEŢA I.

85. Fie R (x, y) o funcţiune raţională de ordinul n pe suprafaţa T, $y^2 = f(x)$, având zerurile

$$(a_1, y_{a_1}), (a_2, y_{a_2}), \ldots, (a_n, y_{a_n})$$

şi polurile

$$(b_1, y_{b_1}), b_2, y_{b_2}), \ldots, (b_n, y_{b_n}).$$

Printre zerurile de o parte ca şi printre polurile de altă parte, pot fi mai multe egale între ele. Vom reprezintà aceste puncte analitice mai scurt, respectiv prin punctele

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \quad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

situate pe suprafaţa T. Presupunem că aceste puncte nu sunt situate pe tăieturile A şi B, ceeace se poate totdeauna obţine modificând, dacă este necesar, forma acestor tăieturi.

Fie acum $u(x)$ o integrală eliptică de speţa I, relativă la aceiaş suprafaţă T. Să considerăm integrala

$$(2) \qquad I = \int_{\Gamma} u \frac{d}{dx} \log \mathrm{R}\,(x,y)\, dx,$$

dealungul conturului Γ al suprafeţei T′, (fig 22, §, 65), adică

$$I = \int_{\mathrm{A}}^{+} + \int_{\mathrm{B}}^{+} + \int_{\mathrm{A}}^{-} + \int_{\mathrm{B}}^{-}.$$

Avem

$$\int_{\mathrm{A}}^{+} + \int_{\mathrm{A}}^{-} = \omega \int_{\mathrm{A}}^{+} \frac{d}{dx} \log \mathrm{R}\,(x, y)\, dx = \omega\, (\log \mathrm{R})_{\mathrm{A}},$$

$$\int_{\mathrm{B}}^{+} + \int_{\mathrm{B}}^{-} = \omega' \int_{\mathrm{B}}^{+} \frac{d}{dx} \log \mathrm{R}\,(x, y)\, dx = \omega'\, (\log \mathrm{R})_{\mathrm{B}}.$$

Valoarea finală a funcţiunii $\mathrm{R}\,(x, y)$ pe fiecare din tăieturile A şi B fiind egală cu valoarea sa iniţială, diferenţa dintre valoarea finală şi ceà iniţială a funcţiunii $\log \mathrm{R}\,(x, y)$ este nulă sau un multiplu de $2\,i\pi$. De unde rezultă egalitatea

$$(2) \qquad I = 2\,i\pi\,(m\,\omega + m'\,\omega'),$$

m şi m' fiind două numere întregi

$$\gtreqless 0,$$

ale căror valori sunt date de integralele

$$(3) \qquad m = \frac{1}{2\,i\pi} \int_{\mathrm{A}} \frac{d\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}}, \quad m' = \frac{1}{2\,i\pi} \int_{\mathrm{B}} \frac{d\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}}.$$

O altă expresiune a integralei (1) se obţine aplicând teorema reziduurilor pe toată suprafaţa T.

Reziduurile funcţiunii $u \dfrac{d}{dx} \log \mathrm{R}\,(x, y)$ provin numai dela zerurile şi polurile funcţiunii $\mathrm{R}\,(x, y)$, căci funcţiunea $u\,(x)$ rămâne finită pe suprafaţa T şi în punctul $x = \infty$ reziduul său este nul. Avem aşa dar egalitatea

$$(4) \qquad I = 2\,i\pi \left[\sum_{k=1}^{n} u\,(a_k) - \sum_{k=1}^{n} u\,(b_k) \right].$$

Din egalitățile (2) și (4) rezultă relațiunea

$$(5) \qquad \sum_{1}^{n} u(a_k) - \sum_{1}^{n} u(b_k) \equiv o. \ (mo\partial\partial\ \omega, \omega')\ ^{1})$$

In această relațiune consistă *teorema lui Abel, pentru adițiunea integralelor eliptice de speța I.*

Ea se enunță:

Suma

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} du(x)$$

valorilor integralei eliptice de speța I $u(x)$, *luată între două sisteme de puncte în cari funcțiunea rațională* $R(x, y)$ *pe suprafața* T *se anulează și devine infinită, este nulă, abstracțiune făcând de o sumă de multipli de perioade.*

Această teoremă este cuprinsă în teorema mai generală relativă la integralele de forma

$$\int \varphi(x, y)\, dx,$$

$\varphi(x, y)$ fiind o funcțiune rațională de variabilele x, y legate între ele printr'o ecuațiune algebrică $F(x, y) = o$ de un grad oarecare, integrale, cărora Jacobi a dat numele de *integrale Abeliane* în memoria lui Abel [2]).

86. *Teorema lui Abel se poate enunță sub o formă diferită.* Pentru aceasta, să considerăm funcțiunea rațională de ordinul n pe suprafața T.

$$(6) \qquad R(x, y) - \lambda,$$

λ fiind o constantă oarecare dată. Fie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n\ ;\ b_1, b_2, \ldots, b_n$$

respectiv zerurile și polurile funcțiunii. Intre aceste puncte avem relațiunea lui Abel

$$(7) \qquad \sum_{1}^{n} u(a_k) - \sum_{1}^{n} u(b_k) = m\omega + m'\omega'.$$

Dacă facem să varieze într'un mod continuu parametrul λ, zerurile funcțiunii (6) vor varia într'un mod continuu, descriind

---

[1]) Această notațiune exprimă că membrul întâi este nul, abstracțiune făcând de un multiplu de ω și de un multiplu de ω'.

[2]) Vezi tratate speciale; de exemplu, Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algebriques et de leurs intégrales.*

linii determinate pe suprafaţa T, pe când polurile rămân neschimbate. Dacă drumurile simultane descrise de zerurile a_k nu întâlnesc nici una din tăieturile A sau B, integralele $u(a_k)$ variază într'un mod continuu. De unde rezultă că la o variaţiune foarte mică a lui λ nu poate corespunde pentru membrul întâi (7), adică pentru suma $\sum_1^n u(a_k)$, decât o variaţiune foarte mică, prin urmare, o variaţiune foarte mică pentru membrul al doilea. Insă, valoarea membrului al doilea nu se poate schimbà decât împreună cu unul din numerile m, m'. Aceste numere fiind întregi nu pot varià decât într'un mod brusc. De unde rezultă că pe cât timp drumurile descrise de zerurile a nu întâlnesc tăieturile A, B, numerele m, m', rămân constante; prin urmare, variaţiunea corespunzătoare a sumei $\sum u(a_k)$ este nulă. Aşa dar, făcând să varieze λ dela o valoare iniţială λ_0 până la o valoare finală λ, astfel ca drumurile descrise de zerurile funcţiunii (6) să nu întâlnească tăieturile A, B, variaţiunea sumei dealungul acestor drumuri este nulă.

Din cele ce preced rezultă enunţul următor:

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reprezintă un sistem de puncte în cari o funcţiune raţională R (x, y) *de ordinul n primeşte aceiaş valoare λ_0 şi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ un al doilea sistem de puncte în cari* R (x, y) *primeşte aceeaş valoare λ, avem egalitatea*

$$(8) \qquad \sum_1^n \int_{a_k}^{\beta_k} d\,u(x) = o,$$

integralele fiind luate dealungul drumurilor simultane descrise de x, când λ variază dela valoarea iniţială până la valoarea finală, astfel ca drumurile de integraţiune să nu întâlnească tăieturile A, B.

Dacă drumurile $(a_k, \ldots \beta_k)$ străbat un număr oarecare de ori tăieturile A, B, egalitatea precedentă trebuie înlocuită prin cea următoare

$$(9) \qquad \sum_1^n \int_{a_k}^{\beta_k} du(x) = m\omega + m'\omega'$$

87. Să înlocuim în membrul întâi (8) limitele inferioare a_k prin n puncte α_k luate după voie pe suprafaţa T şi să ţinem seamă de egalitatea

$$\int_{a_k}^{\beta_k} = \int_{a_k}^{\alpha_k} + \int_{\alpha_k}^{\beta_k};$$

obţinem egalitatea

$$(10) \qquad \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\beta_k} d\,u(x) = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{a_k} du(x) = \mathrm{C},$$

constanta C fiind independentă de limitele superioare β_k, prin urmare independentă de valoarea λ ce funcţiunea R (x, y) primeşte în punctele β_k. Să ne închipuim că înlocuim λ printr'un coeficient oarecare al funcţiunii R (x, y), conchidem că suma (10) este independentă de toţi coeficienţii funcţiunii R (x, y). Putem dar enunţà teorema lui Abel sub forma următoare:

Fiind dată o funcţiune raţională oarecare $R(x, y)$ de ordinul n, suma valorilor unei integrale de speţa întâi ale căror limite inferioare sunt n puncte date după voie pe suprafaţa T, iar limitele superioare sunt n puncte pe aceiaş suprafaţă în cari $R(x, y)$ primeşte aceiaş valoare arbitrară λ, este o constantă independentă de coeficienţii funcţiunii.

88. Luând $\lambda = o$, avem, în termeni geometrici, enunţul următor:

Suma valorilor integralei $u(x)$, luată dela n puncte fixe oarecari ale curbei $y^2 = f(x)$ până la punctele de intersecţiune ale ei cu o curbă mobilă care o taie în n puncte, este o constantă independentă de coeficienţii curbei mobile.

Dacă cele n puncte fixe aparţin curbei mobile, într'una din poziţiunile ei, constanta este nulă sau egală cu o sumă de multipli de perioade, în virtutea egalităţii (10) în care facem $a_k = a_k$, $(k=1, 2, \ldots, n)$.

89. *Aplicaţiuni. Adiţiunea integralelor eliptice de speţa I.*

Suma valorilor unei integrale eliptice de speţa I într'un număr m de puncte este egală, abstracţiune făcând de o constantă aditivă, cu valoarea aceleuşi integrale într'un singur punct, ale cărui coordonate sunt funcţiuni raţionale de coordonatele celor dintâi.

Fie mai întâi $m = 2$ şi să considerăm succesiv cazurile când ecuaţiunea

$$y^2 = f(x)$$

este de gradul trei sau patru.

I. Fie

$$y^2 = A\,x^3 + A_1\,x^2 + A_2\,x + A_3. \tag{1}$$

Să luăm, drept curbă mobilă, linia dreaptă

$$y = a\,x + b. \tag{2}$$

Abscisele punctelor de intersecţiune ale acestei drepte cu curba (1) sunt rădăcini ale ecuaţiunii de gradul al treilea

$$(ax+b)^2 = A\,x^3 + A_1\,x^2 + A_2 x + A_3. \tag{3}$$

Fie x_1, x_2, x_3 aceste rădăcini, variabile împreună cu coeficienţii a şi b, căror corespund, pentru y, valorile

$$y_i = a x_i + b \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Două din cele trei puncte de intersecţiune (x_1, y_1), (x_2, y_2) fiind date după voie, rezultă pentru a şi b valorile raţionale

$$(5) \qquad a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad b = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}.$$

Inlocuind în ecuaţiunea (3) a şi b prin aceste valori, fiecare din cele trei relaţiuni, cari există între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiunii, va da pentru x, o expresiune raţională de coordonatele celor două puncte date; de unde rezultă pentru $y_3 = ax_3 + b$ o expresiune raţională de aceleaşi coordonate.

Considerând, de exemplu, relaţiunea

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{A_1 - a^2}{A},$$

obţinem relaţiunile raţionale

$$(6) \quad \begin{cases} x_3 = -(x_1 + x_2) - \dfrac{1}{A}\left[A_1 - \left(\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2\right], \\ y_3 = -\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\left\{x_1 + x_2 + \dfrac{1}{A}\left[A_1 - \left(\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2\right]\right\} + \dfrac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}. \end{cases}$$

Fie acum (ξ_i, η_i), $(i = 1, 2, 3)$, trei puncte date după voie pe curba (1), luate ca limite inferioare ale integralei

$$u(x_i, y_i) = \int_{\xi_i, \eta_i}^{x_i, y_i} \frac{dx}{y};$$

avem (§ 88)

$$(7) \qquad u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + u(x_3, y_3) = C;$$

sau înlocuind, în integrala a treia y prin $-y$, ceeace dă

$$u(x_3, -y_3) = -u(x_3, y_3),$$

avem, scriind $u(x_i)$ în loc de $u(x_i, y_i)$, egalitatea

$$(8) \qquad u(x_1) + u(x_2) = u(x_3) + C.$$

Constanta C depinde numai de limitele inferioare; ea este nulă, sau egală cu o sumă de multipli de perioade, dacă punctele (ξ_i, η_i) se găsesc pe dreapta (2) (§ 88, fine).

II. Fie

$$(9) \qquad y^2 = A^2 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4.$$

Luând, drept curbă mobilă, parabola

$$(10) \qquad y = A x^2 + a x + b,$$

avem, pentru determinarea absciselor punctelor de intersecţiune, ecuaţiunea de gradul al treilea

(11) $2\,A\,x^2(ax+b) + (ax+b)^2 = A_1\,x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4.$

Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile acestei ecuaţiuni, căror corespund pentru y valorile

(12) $y_i = A\,x^2_i + ax_i + b \qquad (i = 1, 2, 3).$

Punctele (x_1, y_1), (x_2, y_2) fiind date după voie, ecuaţiunile (12) vor da pentru a şi b valori raţionale de coordonatele acestor puncte. Substituind aceste valori în ecuaţiunea (11) şi procedând ca în cazul I, ajungem la aceeaş concluziune.

Am presupus până aci $m = 2$. Pentru a arătà că teorema este adevărată pentru un număr întreg m oarecare, să arătăm că, dacă este adevărată pentru m, va fi adevărată şi pentru $m + 1$. Avem prin ipoteză

$$u(x_1, y_1) + \ldots + u(x_m, y_m) = u(\xi, \eta) + C,$$

(ξ, η) fiind un punct al curbei $y^2 = f(x)$, ale cărui coordonate sunt funcţiuni raţionale de coordonatele celor m puncte date (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Fie acum (x_{m+1}, y_{m+1}) un punct oarecare al curbei considerate; există pe această curbă un punct (x_{m+2}, y_{m+2}) ale cărui coordonate sunt funcţiuni raţionale de (x_{m+1}, y_{m+1}) şi de (ξ, η), astfel că

$$u(x_{m+1}, y_{m+1}) + u(\xi, \eta) = u(x_{m+2}, y_{m+2}) + C_1;$$

de unde rezultă egalitatea

$$\sum_{i=1}^{m+1} u(x_i, y_i) = u(x_{m+2}, y_{m+2}) + C,$$

în care x_{m+2}, y_{m+2} sunt funcţiuni raţionale de cele $m + 1$ puncte date după voie.

Teorema este aşà dar generală.

90. Vom întâlnì mai departe formele normale

(1) $y^2 = 4\,x^3 - g_2\,x - g_3$ (Weierstrass),

(2) $y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2\,x^2)$ (Legendre).

1⁰. Relativ la cea dintâi, punctele x_1, x_2, x_3 fiind pe aceiaş foaie a lui T şi limitele inferioare ale celor trei integrale fiind punctul ∞, care este un punct de ramificaţiune în care ele sunt nule, avem (7), (§ 89)

(3) $u(x_1) + u(x_2) + u(x_3) = o,$

cu relaţiunea

$$(4) \qquad x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2,$$

precum rezultă din prima egalitate (6) (§ 89).

Astfel dar, fiind date punctele (x_1, y_1), (x_2, y_2), valoarea lui x_3 este determinată; acestei valori corespunde valoarea unică

$$y_3 = x_3 \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} + \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

dată de a doua egalitate (6).

2°. Să considerăm forma lui Legendre şi să luăm familia de parabole

$$(5) \qquad y = a x^2 + bx + 1.$$

Abscisele punctelor de intersecţiune sunt rădăcinile ecuaţiunii

$$x\,[(a^2 - k^2)\,x^3 + 2\,abx^2 + (2\,a + b^2 + 1 + k^2)\,x + 2b] = o.$$

Punctul $x = o, y = 1$ rămânând fix, avem numai trei puncte de intersecţiune variabile împreună cu coeficienţii a, b. Abscisele x_1, x_2, x_3 ale acestor puncte satisfac relaţiunile

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2ab}{k^2 - a^2},$$

$$x_1 x_2 + x_3 (x_1 + x_2) = \frac{2\,a + b^2 + 1 + k^2}{a^2 - k^2},$$

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{2\,b}{k^2 - a^2};$$

de unde rezultă egalitatea

$$(6) \qquad x_1 + x_2 + x_3 = a\, x_1 x_2 x_3.$$

De altă parte, ecuaţiunea (5) ne dă

$$y_1 = a x_1^2 + b x_1 + 1, \quad y_2 = a x_2^2 + b x_2 + 1;$$

de unde, eliminând b între aceste două ecuaţiuni, avem

$$(7) \qquad a x_1 x_2 = 1 + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_1 - x_2}.$$

Din ecuaţiunile (6) şi (7) rezultă expresiunea

$$(8) \qquad x_3 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{y_1 x_2 - x_1 y_2},$$

sau multiplicând ambii termeni cu $y_1 x_2 + x_1 y_2$, avem, în virtutea ecuaţiunei (2),

$$(9) \qquad x_3 = -\frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{1-k^2 x_1^2 x_2^2}.$$

Luând punctul ($x = o$, $y = 1$) ca limită inferioară a celor trei integrale

$$(10) \qquad u(x_i) = \int_o^{x_i} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2}}$$

şi schimbând în (3) x_3 în $-x_3$, avem

$$(11) \qquad u(x_1) + u(x_2) = u(x_3),$$

cu relaţiunea

$$(12) \quad x_3 = \frac{x_1 \sqrt{(1-x_2^2)(1-k^2 x_2^2)} + x_2 \sqrt{(1-x_1^2)(1-k_2 x_1^2)}}{1-k^2 x^2_1 x_2^2},$$

dedusă din egalitatea (9).

Ecuaţiunea lui Euler. Ecuaţiunea diferenţială

$$(13) \qquad \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = 0,$$

în care $f(x)$ este un polinom de gradul trei sau patru, poartă numele de *ecuaţiunea lui Euler.* Integrala generală a acestei ecuaţiuni, presupunând $f(x)$ de forma lui Legendre, se obţine înlocuind în formula (11) x_1 şi x_2 respectiv prin x şi y şi x_3 printr'o constantă C:

$$(14) \qquad \frac{x\sqrt{f(y)} + y\sqrt{f(x)}}{1-k^2 x^2 y^2} = C.$$

In adevăr, integrala generală a ecuaţiunei (13) este

$$(15) \qquad \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_o^y \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = \text{C-tă arbitrară.}$$

Membrul întâi al acestei ecuaţiuni fiind identic cu membrul întâi (11) în care facem $x_1 = x$, $x_2 = y$, rezultă că membrul al doilea $u(x_3)$ trebuie să se reducă la o constantă arbitrară, ceeace trage după sine că x_3 este o constantă arbitrară.

q. e. d.

CAPITOLUL X.

TRANSFORMAREA INTEGRALEI ELIPTICE DE SPEŢA I PRIN SUBSTITUŢIUNI LINEARE.

91. Fie

$$(1) \qquad f(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

un polinom de gradul al patrulea, fără factori multipli şi

$$(2) \qquad u = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

integrala eliptică corespunzătoare. Să facem substituţiunea

$$(3) \qquad x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta};$$

de unde

$$(4) \qquad y = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ fiind coeficienţi constanţi cu condiţiunea

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq o.$$

Obţinem

$$(5) \qquad f(x) = \frac{\varphi(y)}{(\gamma y + \delta)^4},$$

$\varphi(y)$ fiind un polinom de gradul al patrulea.

Integrala (2) devine

$$(6) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \Delta \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}.$$

Integrala eliptică de speţa I este aşà dar un *covariant* al polinomului $f(x)$ de ordinul -1, căci reprezintând integrala transformată prin v, avem

$$v = \Delta^{-1} u.$$

Substituţiunea (3) este determinată când se dă raportul a trei coeficienţi către al patrulea, însă pentru ca polinomul $\varphi(y)$ să fie determinat este necesar ca toţi coeficienţii substituţiunii să fie daţi. Putem determinà substituţiunea (3) astfel ca la trei zeruri ale lui $f(x)$ să corespundă lui $\varphi(y)$ trei zeruri arbitrare, însă distincte, sau ca coeficienţii acestui polinom să satisfacă trei condiţiuni date. Bine înţeles, aceste condiţiuni trebuie să difere de cele ce exprimă că $\varphi(y)$ are un zero multiplu. Putem, de exemplu, face ca coeficientul termenului de gradul patru să fie nul, nu însă în acelaş timp şi cel de gradul trei, căci atunci punctul $y = \infty$ ar fi un zero dublu al polinomului $\varphi(y)$. Cu alte cuvinte, putem face ca polinomul transformat să fie de gradul trei, nu însă de gradul doi [1]).

92. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 zerurile polinomului $f(x)$ şi y_1, y_2, y_3, trei puncte arbitrare distincte date, ce voim să corespundă punctelor x_1, x_2, x_3. Substituţiunea care realizează această corespondenţă este, precum se recunoaşte imediat,

$$(7)\qquad \frac{(y-y_1)\,(y_2-y_3)}{(y-y_2)\,(y_1-y_3)} = \frac{(x-x_1)\,(x_2-x_3)}{(x-x_2)\,(x_1-x_3)}.$$

Al patrulea punct y_4 corespunzător lui x_4 va fi dar determinat de egalitatea

$$(8)\qquad \frac{(y_4-y_1)\,(y_2-y_3)}{(y_4-y_2)\,(y_1-y_3)} = \frac{(x_4-x_1)\,(x_2-x_3)}{(x_4-x_2)\,(x_1-x_3)},$$

adică raporturile anarmonice, formate de o parte cu punctele x_k şi de alta cu punctele y_k, sunt egale. Egalitatea precedentă exprimă o condiţiune necesară pentru ca polinomului $f(x)$, ale cărui zeruri sunt x_1, x_2, x_3, x_4 să corespundă, în virtutea transformării liniare, un polinom $\varphi(y)$, astfel ca zerurile lui $f(x)$ să corespundă respectiv zerurilor y_1, y_2, y_3, y_4 ale lui $\varphi(y)$. Această condiţiune este suficientă, căci înlocuind unul din punctele x_k, de exemplu x_4, prin variabila x şi punctul corespunzător y_4 prin variabila y, obţinem substituţiunea lineară (7), care împlineşte condiţiunile cerute.

Să punem

$$(9)\qquad A = a_0\,(x_1-x_2)\,(x_3-x_4),\ B = a_0\,(x_2-x_3)\,(x_1-x_4),$$
$$C = a_0\,(x_3-x_1)\,(x_2-x_4),$$

B şi C rezultând din A prin permutarea circulară a indicilor 1, 2, 3. Intre A, B, C există relaţiunea

$$(10)\qquad A + B + C = 0.$$

Permutând indicii 1, 2, 3, 4, obţinem 24 permutări cărora corespunde, pentru fiecare din constantele A, B, C, 6 valori diferite, cari se obţin păstrând unul din indici şi permutând pe ceilalţi trei. Patru câte patru, din cele 24 permutări, dau aceiaş valoare, anume: cele ce se obţin când permutăm în acelaş timp indicii doi câte doi.

---

[1]) Această imposibilitate mai rezultă şi din faptul că dacă polinomul transformat ar fi de gradul doi, x şi $\sqrt{f(x)}$ s'ar exprimà prin funcţiuni raţionale de un parametru, ceeace este imposibil (§ 77).

Avem, precum se recunoaşte lesne, tabloul următor, în care celor 6 permutări ale numerelor 1, 2, 3 corespund respectiv valorile în cari se schimbă cantităţile A, B, C:

$$(11)\qquad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & A & B & C \\ 2 & 3 & 1 & B & C & A \\ 3 & 1 & 2 & C & A & B \\ 1 & 3 & 2 & -C & -B & -A \\ 3 & 2 & 1 & -B & -A & -C \\ 2 & 1 & 3 & -A & -C & -B \end{array}$$

Să reprezintăm prin λ valoarea unuia din cele 6 raporturi anarmonice.

$$\lambda = -\frac{B}{C}.$$

Fiecărei linii orizontale a tabloului corespunde câte o valoare pentru λ. Aceste valori sunt respectiv

$$(12)\qquad \lambda = -\frac{B}{C}, \lambda_1 = -\frac{C}{A} = \frac{C}{B+C} = \frac{1}{1-\lambda},$$

$$\lambda_2 = -\frac{A}{B} = \frac{B+C}{B} = \frac{\lambda-1}{\lambda}, \lambda_3 = -\frac{B}{A} = \frac{\lambda}{\lambda-1},$$

$$\lambda_4 = -\frac{A}{C} = 1-\lambda, \lambda_5 = -\frac{C}{B} = \frac{1}{\lambda}.$$

Toate raporturile sunt funcţiuni raţionale lineare de unul din ele şi se permută între dânsele când permutăm rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 ale ecuaţiunii $f(x) = o$. Prin urmare orice funcţiune simetrică a celor 6 valori λ fiind funcţiune simetrică de rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 este o funcţiune raţională de coeficienţii lui $f(x)$; de unde rezultă că λ este rădăcina unei ecuaţiuni algebrice de gradul al şaselea, ai cărei coeficienţi sunt funcţiuni raţionale de coeficienţii lui $f(x)$. Cele 6 valori λ sunt în general inegale. Excepţiune există în cazurile următoare:

1⁰. Una din constantele A, B, C este nulă. Valorile λ sunt egale două câte două respectiv cu 0, 1, ∞. In acest caz două din punctele x_k coincid. Integrala corespunzătoare încetează de a fi eliptică.

2⁰. Două din cantităţile A, B, C sunt egale între ele. Fie de exemplu B = C; avem

$$\lambda = \lambda_5 = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 2.$$

Lui $\lambda = -1$ corespunde diviziunea armonică

$$\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} = -\frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4}.$$

3°. $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{A}$. Valorile corespunzătoare ale lui λ sunt trei câte trei egale între ele şi satisfac ecuaţiunea

$$(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 = 0.$$

Vom formà mai departe ecuaţiunea de gradul al şaselea a lui λ.

93. *Digresiune asupra invarianţilor unui polinom de gradul al patrulea sau a unei forme bipatratice.*

Să punem $x = \frac{x_1}{x_2}$ şi să considerăm un polinom omogen

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

Să aplicăm acestui polinom substituţiunea lineară

$$x_1 = \alpha y_2 + \beta y_2, \quad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2, \quad D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0,$$

corespunzătoare substituţiunii (3) şi fie

$$\varphi(y_1, y_2) = b_0 y_1^4 + 4 b_1 y_1^3 y_2 + 6 b_2 y_1^2 y_2^2 + 4 b_3 y_1 y_2^3 + b_4 y_2^4$$

polinomul transformat.

Se verifică lesne că expresiunile

$$(13) \qquad g_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$

$$(14) \qquad g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a^3_2,$$

raţionale şi întregi de coeficienţii polinomului $f(x_1, x_2)$ se reproduc în polinomul transformat $\varphi(y_1, y_2)$ multiplicate respectiv cu D^4 şi D^6; anume, reprezintând prin g'_2 şi g'_3 aceleaşi expresiuni formate cu coeficienţii b_k ai lui $\varphi(y_1, y_2)$, avem

$$(15) \qquad g'_2 = D^4 g_2, \qquad g'_3 = D^6 g_3.$$

Pentru acest motiv, funcţiunile g_2 şi g_3 au primit numele de *invarianţi* ai polinomului omogen $f(x_1, x_2)$, precum şi ai polinomului neomogen $f(x)$.

Oricare ar fi valoarea determinantului D, raportul

$$\frac{g_2^3}{g_3^2}$$

rămâne invariabil. Acest raport este un *invariant absolut* al polinomului $f(x)$. Orice funcţiune raţională a acestui raport se bucură evident de aceiaş proprietate.

Să aplicăm generalităţile cari preced pentru a aduce integrala eliptică de speţa I la cele trei forme *normale clasice*.

I. FORMA NORMALĂ A LUI WEIERSTRASS.

94. In loc de a aplicà substituţiunea lineară generală, putem aplicà succesiv substituţiuni lineare mai simple, al căror efect este acelaş.

Fie $x = a$ o rădăcină a ecuaţiunii $f(x) = o$. Să punem

$$(1) \qquad x = a - \frac{1}{y};$$

obţinem egalitatea

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{y^4}\varphi(y),$$

în care avem

$$(3) \qquad \varphi(y) = -f'(a)\,y^3 + \frac{1}{2}f''(a)\,y^2 - \frac{1}{6}f'''(a)\,y + a_0.$$

Pentru a face să dispară termenul de gradul al doilea din polinomul $\varphi(y)$, aplicăm substituţiunea

$$(4) \qquad y = z + \frac{1}{6}\frac{f''(a)}{f'(a)}.$$

Reprezintând prin $\varphi_1(z)$ polinomul transformat, avem

$$(5) \quad \varphi(y) = \varphi_1(z) = -f'(a)\,z^3 + \frac{1}{12f'(a)}[f''^2(a) - 2f'(a)\,f'''(a)]z$$
$$-\frac{1}{36\,f'^2(a)}[f'(a)\,f''(a)\,f'''(a) - \frac{1}{3}f''^3(a) - 36\,a_0\,f'^2(a)],$$

a cărui formă este

$$\varphi_1(z) = -f'(a)\,z^3 + \frac{4}{f'(a)}Az - \frac{4^2}{f'^2(a)}B.$$

Putem identificà acest polinom cu polinomul complect de gradul patru, în care facem

$$a_0 = o, \quad a_1 = -\frac{1}{4}f'(a), \quad a_2 = o, \quad a_3 = \frac{V}{f'(a)}, \quad a_4 = -\frac{4^2}{f'^2(a)}B.$$

Reprezintând prin g'_2, g'_3 invarianţii acestui polinom de gradul patru avem, în virtutea expresiunilor (13) şi (14) (§ 93),

$$g'_2 = A, \quad g'_3 = B.$$

Determinanţii substituţiunilor (1) şi (4) fiind egali cu 1, rezultă că invarianţii g'_2 şi g'_3 sunt egali cu invarianţii g_2 şi g_3 ai polinomului $f(x)$, astfel că polinomul $\varphi_1(z)$ este

$$(6) \qquad \varphi_1(z) = -f'(a)z^3 + \frac{4}{f'(a)} g_2 z - \frac{4^2}{f'^2(a)} g_3.$$

Să punem în fine

$$(7) \qquad z = -\frac{4t}{f'(a)};$$

obţinem, reprezintând polinomul transformat prin $\psi(t)$,

$$(8) \qquad \varphi_1(z) = \psi(t) = \frac{4}{f'(a)}(4t^3 - g_2 t - g_3).$$

$$(9) \qquad \sqrt{\psi(t)} = \frac{4}{f'(a)}\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}.$$

Din substituţiunile considerate rezultă egalităţile

$$(10) \qquad \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = \frac{dz}{\sqrt{\varphi_1(z)}} = -\frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

şi relaţiunile

$$(11) \qquad \begin{cases} t = \dfrac{1}{4}\dfrac{f'(a)}{x-a} + \dfrac{1}{24}f''(a), \\ \sqrt{4t^3 - gt_2 - t^3} = \dfrac{1}{4}\dfrac{f'(a)}{(x-a)^2}\sqrt{f(x)}. \end{cases}$$

In virtutea acestor relaţiuni, suprafaţa lui Riemann relativă la ecuaţiunea

$$X^2 = f(x),$$

corespunde punct cu punct suprafeţii definită de ecuaţiunea

$$T^2 = 4t^3 - g_2 t - g_3.$$

Integrala de forma

$$u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

se numeşte integrala *normală de speţa I* a lui Weierstass.

Avem patru substituţiuni diferite cari transformă integrala propusă în aceia a lui Weierstrass, după cum luăm drept a, una oarecare din cele patru rădăcini ale ecuaţiunii $f(x) = o$. Toate aceste substituţiuni nu schimbă coeficienţii g_2 şi g_3, cari sunt funcţiuni raţionale de coeficienţii acestei ecuaţiuni.

95. *Transformarea integralei lui Weierstrass în ea însăşi.* Să reprezintăm prin e_1, e_2, e_3 zerurile polinomului

$$(1) \qquad R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_2).$$

In cazul când cele trei zeruri sunt în linie dreaptă, presupunem e_2 cuprins între e_1 şi e_3. Pentru ca o substituţiune lineară să poată transforma o integrală în ea însăşi, este necesar ca să fie cuprinsă printre substituţiunile cari permută punctele critice două câte două, astfel ca raporturile anarmonice formate cu aceste puncte să fie egale (§ 92).

Să considerăm, de ex., raportul anarmonic

$$\frac{(e_1-\infty)\,(e_2-e_3)}{(e_2-\infty)\,(e_1-e_3)}$$

şi să permutăm cele patru puncte conform tabloului

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{cccc} \infty & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & \infty & e_3 & e_2 \\ e_2 & e_3 & \infty & e_1 \\ e_3 & e_2 & e_1 & \infty \end{array}\right.$$

în care punctele primei linii se permută respectiv cu cele situate pe aceiaş coloană ale celorlalte trei linii.

Obţinem egalităţile

$$(3)\qquad \frac{(e_1-\infty)\,(e_2-e_3)}{(e_2-\infty)\,(e_1-e_3)}=\frac{(\infty-e_1)\,(e_3-e_2)}{(e_3-e_1)\,(\infty-e_2)}.$$
$$=\frac{(e_3-e_2)\,(\infty-e_1)}{(\infty-e_2)\,(e_3-e_1)}=\frac{(e_2-e_3)\,(e_1-\infty)}{(e_1-e_3)\,(e_2-\infty)}.$$

Să înlocuim în primul raport punctul ∞ prin variabila y şi în celelalte raporturi să înlocuim prin variabila x punctele cu cari ∞ se permută. Cu modul acesta vom egala raportul

$$\frac{(e_1-y)\,(e_2-e_3)}{(e_2-y)\,(e_1-e_3)}$$

respectiv cu raporturile

$$\frac{e_3-e_2}{e_3-x},\quad \frac{e_3-x}{e_3-e_1},\quad \frac{e_2-x}{e_1-x}.$$

Din egalităţile astfel obţinute rezultă substituţiunile

$$(4)\qquad x-e_1=\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{y-e_1},\quad x-e_2=\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{y-e_2},$$
$$x-e_3=\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{y-e_3}\ [1].$$

---

[1]) Oricare din cele şase sisteme de patru raporturi anarmonice egale dă aceleaşi substituţiuni.

Cele două din urmă nu difer de cea dintâi decât prin permutarea punctelor (e_1, e_2), (e_1, e_3). Aplicând prima substituţiune (4), obţinem relaţiunea

$$(5) \qquad \sqrt{R(x)} = \pm \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{(y-e_1)^2} \sqrt{R(y)} .$$

Toate aceste substituţiuni conduc la egalitatea

$$(6) \qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} .$$

Semnul membrului al doilea rămâne nedeterminat pe cât timp nu fixăm corespondenţa dintre ramurile $\sqrt{R(x)}$ şi $\sqrt{R(y)}$, legate între ele prin formula (5).

Fiind dată ramura $\sqrt{R(x)}$, dacă luăm după voie una din cele două ramuri corespunzătoare ale lui $\sqrt{R(y)}$, trebuie să alegem semnul astfel ca cele două membre (5) să fie egale pentru valorile x, y cari se corespund [1]).

Substituţiunilor (4) corespund respectiv egalităţile

$$(7) \qquad \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \begin{cases} \displaystyle\int_{e_1}^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}, \\ \displaystyle\int_{e_2}^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}, \\ \displaystyle\int_{e_3}^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}. \end{cases}$$

96. Să notăm cu ω_1, ω_3 un sistem de două semiperioade date de integralele

$$(8) \qquad \omega_1 = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \omega_3 = \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

luată fiecare dealungul liniei care uneşte punctele critice corespunzătoare. Aplicând acestor integrale respectiv a treia şi a doua substituţiune (4), obţinem, pentru cele două semiperioade, un al doilea sistem de integrale, anume

$$\omega_1 = \int_\infty^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \omega_3 = \int_\infty^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}. \;^{2)}$$

---

[1]) Să presupunem, de exemplu, rădăcinile reale $e_1 > e_2 > e_3$ şi pentru x real $> e_1$, $\sqrt{R(x)} > 0$; semnul membrului al doilea va fi semnul ce voim să dăm lui $\sqrt{R(y)}$.

[2]) Egalităţile

$$\int_{e_3}^{e_2} = \int_\infty^{e_1}, \quad \int_{e_2}^{e_1} = \int_\infty^{e_3},$$

se pot deduce din egalitatea (1) (§ 77), dacă curbele c, c' se reduc la ţărmurile liniilor cari unesc respectiv punctele e_2 cu e_3 şi e_1 cu ∞.

II. FORMA NORMALĂ A LUI RIEMANN.

97. Integrala normală a lui Riemann este de forma

$$(1) \qquad v = \int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}},$$

λ fiind o constantă diferită de zero şi unu. Să căutăm a deduce această integrală din aceia a lui Weierstrass

$$(2) \qquad u = \int \frac{dy}{2\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}.$$

Pentru aceasta, să aplicăm variabilei y o transformare lineară, făcând să se corespundă într'o ordine oarecare, punctele critice ale integralelor (1) şi (2).

Să considerăm, de exemplu, corespondenţa

$$(3) \qquad \begin{array}{c|cccc} y & \infty & e_3 & e_2 & e_1, \\ x & \infty & o & 1 & \dfrac{1}{\lambda}, \end{array}$$

căreia corespunde egalitatea raporturilor anarmonice

$$(4) \qquad \frac{(e_1-e_3)(e_2-\infty)}{(e_2-e_3)(e_1-\infty)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\lambda}-o\right)\left(1-\infty\right)}{\left(1-o\right)\left(\dfrac{1}{\lambda}-\infty\right)}.$$

De unde, pentru λ, valoarea

$$(5) \qquad \lambda = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

Din egalitatea (4) se pot deduce patru substituţiuni lineare, prin care trecem dela integrala lui Weierstrass la integrala lui Riemann, dacă înlocuim $\dfrac{1}{\lambda}$ prin x şi punem y succesiv în locul punctelor e_1, e_2, e_3, ∞.

Substituţiunile cari rezultă astfel sunt date respectiv de egalităţile

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{ll} y-e_3=(e_2-e_3)x, & y-e_3=\dfrac{e_1-e_3}{x}, \\ y-e_1=(e_1-e_2)\dfrac{x}{1-x}, & y-e_2=(e_1-e_3)\dfrac{\lambda x}{1-\lambda x}, \end{array}\right.$$

λ având valoarea (5).

Toate aceste substituţiuni conduc la egalitatea

$$(7) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}};$$

de unde respectiv pentru fiecare din ele

$$(8)\qquad \sqrt{e_1-e_3}\int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \begin{cases} \displaystyle\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}, \\ \displaystyle\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}, \\ \displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}, \end{cases}$$

$$\mathrm{R}(x) = x(1-x)(1-\lambda x).$$

Semnul radicalului $\sqrt{e_1-e_3}$ poate fi luat după voie, iar semnul radicalului din membrul al doilea se determină desvoltând ambele membre în domeniul a două puncte critice cari se corespund şi egalând valorile principale corespunzătoare.

Reprezintând prin ω, ω' semiperioadele integralei lui Riemann corespunzătoare semiperioadelor (8) din paragraful precedent, avem

$$(9)\qquad \omega = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}},\quad \omega' = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}.$$

Intre cele două sisteme de perioade avem, în virtutea substituţiunii $y-e_3 = (e_1-e_3)x$ şi a valoarei $\lambda = \dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$,

$$(10)\qquad \omega = \omega_1\sqrt{e_1-e_3},\qquad \omega' = \omega_3\sqrt{e_1-e_3}.$$

98. Avem patru substituţiuni lineare, printre cari substituţiunea identică, cari transformă integrala lui Riemann în ea însăş. Aceste substituţiuni se pot obţine procedând ca în cazul integralei lui Weierstrass. Ele se mai pot obţine înlocuind în prima egalitate (6) x prin x' şi eliminând y între această egalitate şi celelalte trei. Obţinem substituţiunile:

$$(11)\qquad x' = \frac{1}{\lambda x},\quad x' = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1-\lambda x}{1-x},\quad x' = \frac{1-x}{1-\lambda x},$$

în virtutea cărora avem respectiv egalităţile

$$(12)\qquad \int_\infty^{x'} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}, \\ \displaystyle\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}, \\ \displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}. \end{cases}$$

99. Permutând în egalitatea (5) punctele e_1, e_2, e_3, obţinem pentru λ şase valori diferite, funcţiuni raţionale de una din ele: cele şase raporturi anarmonice corespunzătoare. Acestor permutări corespund în virtutea egalităţii (6), şase sisteme de substituţiuni diferite, cari transformă integrala lui Weierstrass în aceea a lui Riemann, având pentru λ valoarea corespunzătoare acestei permutări.

Aceste substituţiuni se pot obţine căutând a transformà integrala dată a lui Riemann în alta de aceeaş formă, având pentru λ cele şase valori considerate. Să reprezintăm prin λ' una dintre aceste valori şi să stabilim corespondenţa între cele două variabile x, x' astfel ca ele să se anuleze în acelaş timp. Pentru aceasta, trebuie să stabilim corespondenţele următoare:

$$(13) \qquad x = \left\{ \begin{array}{c|cccc} x' = & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda'} & \infty \\ \hline 1^0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} & \infty \\ 2^0 & 0 & 1 & \infty & \frac{1}{\lambda} \\ 3^0 & 0 & \infty & 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 4^0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 1 & \infty \\ 5^0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & \infty & 1 \\ 6^0 & 0 & \infty & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{array} \right.$$

Fie

$$v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}$$

integrala dată şi

$$v' = \int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda' x)}}$$

integrala transformată; vom aveà egalitatea

$$v' = \mathrm{M}v,$$

M fiind un *multiplicator* independent de x.

Formulele de substituţiune, valorile lui λ' şi a multiplicatorului M sunt date de tabloul următor:

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l|c|c|c} & x' = & \lambda' = & M^2 = \\ \hline 1^0 & x & \lambda & 1 \\ 2^0 & \dfrac{(1-\lambda)\,x}{1-\lambda\,x} & \dfrac{\lambda}{\lambda-1} & \dfrac{1}{1-\lambda} \\ 3^0 & \dfrac{\lambda\,x}{\lambda\,x-1} & \dfrac{\lambda-1}{\lambda} & -\dfrac{1}{\lambda} \\ 4^0 & \lambda\,x & \dfrac{1}{\lambda} & \dfrac{1}{\lambda} \\ 5^0 & \dfrac{(1-\lambda)\,x}{x-1} & \dfrac{1}{1-\lambda} & -\dfrac{1}{1-\lambda} \\ 6^0 & \dfrac{x}{x-1} & 1-\lambda & -1. \end{array}\right.$$

100. *Expresiunea invarianţilor* g_2, g_3 *şi* J *în funcţiune de* λ. Polinomul

$$(1)\qquad 4\,x\,(1-x)\,(1-\lambda\,x) = 4\,\lambda\,x^3 - 4\,(1+\lambda)\,x^2 + 4\,x$$

poate fi privit ca un polinom de gradul patru cu coeficienţi binomiali în care am aveà

$$a_0 = o,\quad a_1 = \lambda,\quad a_2 = -\frac{2}{3}\,(1+\lambda),\quad a_3 = 1,\quad a_4 = o.$$

Reprezintând prin g'_2, g'_3, cei doi invarianţi ai acestui polinom avem, aplicând formulele (13) şi (14) (§ 93)

$$(2)\qquad g'_2 = \frac{4}{3}\,(\lambda^2-\lambda+1),\qquad g'_3 = \frac{4}{27}\,(2\,\lambda^3-3\,\lambda^2-3\,\lambda+2).$$

Să considerăm una din substituţiunile lineare (6) (§ 97), cari transformă integrala lui Weierstrass în aceea a lui Riemann; fie, de ex., substituţiunea

$$(3)\qquad y-e_3 = (e_2-e_3)\,x,$$

căreia corespunde valoarea

$$(4)\qquad \lambda = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3};$$

obţinem egalitatea

$$(5)\qquad 4\,y^3 - g_2\,y - g_3 = 4\,(e_2-e_3)^2\,(e_1-e_3)\,x\,(1-x)\,(1-\lambda\,x).$$

Se recunoaşte lesne că multiplicând polinomul (1) cu produsul $(e_2-e_3)^2\,(e_1-e_3)$, invarianţii g'_2 şi g'_3 se multiplică respectiv cu pătratul şi cubul acestui produs, adică

$$(6)\quad \begin{cases} g''_2 = \frac{4}{3}(e_2-e_3)^4(e_1-e_3)^2(\lambda^2-\lambda+1), \\ g''_3 = \frac{4}{27}(e_2-e_3)^6(e_1-e_3)^3(2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2). \end{cases}$$

Intre invarianţii ambelor membre (5), avem, în virtutea proprietăţii acestor invarianţi (15) § 93.

$$g''_2 = D^4 g_2, \qquad g''_3 = D^6 g_3,$$

D fiind determinantul substituţiunii considerate.

Determinantul substituţiunii fiind

$$D = e_2 - e_3,$$

rezultă pentru g_2 şi g_3, expresiunile

$$(7)\quad \begin{cases} g_2 = \frac{4}{3}(e_1-e_3)^2(\lambda^2-\lambda+1), \\ g_3 = \frac{4}{27}(e_1-e_3)^3\ (2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2). \end{cases}$$

O verificare a acestor formule se obţine înlocuind λ prin valoarea sa (4), ceeace ne dă valorile cunoscute

$$g_2 = -4\,(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)$$
$$g_3 = 4\, e_1 e_2 e_3\ ^{1)}.$$

Fie

$$(8)\qquad \Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2 = 16\,(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2$$

---

[1]) Dacă reprezintăm prin λ_1 una din cele şase valori ale lui λ, adică

$$\lambda_1 = \frac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha},$$

α, β, γ fiind, într'o ordine oarecare, numerele 1, 2, 3 şi considerăm expresiunea

$$y - e_\alpha = (e_\gamma - e_\alpha)\, x,$$

care stabileşte corespondenţa

$$\begin{array}{c|cccc} y & \infty & e_\alpha & e_\gamma & e_\beta \\ \hline x & \infty & o & 1 & \frac{1}{\lambda_1} \end{array}$$

obţinem expresiunile

$$g_2 = \frac{4}{3}(e_\beta - e_\alpha)^2(\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1)$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(e_\beta - e_\alpha)^3(2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 2).$$

discriminantul polinomului

$$4\,y^3-g_2\,y-g_3.$$

Inlocuind coeficienţii g_2 şi g_3 prin valorile lor (7), obţinem

$$\Delta=16\,(e_1-e_3)^6\,\lambda^2\,(\lambda-1)^2. \tag{9}$$

Expresiunea

$$\mathrm{J}=\frac{g_2{}^3}{\Delta} \tag{10}$$

este, ca şi raportul $\dfrac{g_2^3}{g_3^2}$, un invariant absolut.

Din formulele (7) şi (9) rezultă egalitatea

$$\mathrm{J}=\frac{4}{27}\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2\,(\lambda-1)^2}. \tag{11}$$

Membrul al doilea este o funcţiune simetrică de cele şase valori (12) (§ 92) de cari λ este susceptibil prin permutarea punctelor e_1, e_2, e_3 sau, ceeace este tot una, prin permutarea rădăcinilor x_k ale ecuaţiunii

$$f\,(x)=a_0x^4+4\,a_1\,x^3+6\,a_2\,x^2+4\,a_3\,x+a_4=o.$$

101. Fie J′ invariantul analog lui J al unui polinom $\varphi\,(y)$ de gradul trei sau patru. Pentru ca să existe o substituţiune lineară între x şi y, în virtutea căreia polinoamele $f\,(x)$ şi $\varphi\,(y)$ să se poată corespunde, este necesar şi suficient ca cei doi invarianţi să fie egali.

In adevăr, pentruca rădăcinile x_k ale ecuaţiunii $f\,(x)=o$ să corespundă într'o ordine dată rădăcinilor y_k [1]) $(k=1, 2, 3, 4)$ ale ecuaţiunii $\varphi\,(y)=o$, este necesar şi suficient ca raporturile anarmonice λ, λ' corespunzătoare, formate cu aceste rădăcini, să fie egale (§ 92). Insă din egalitatea $\lambda=\lambda'$ rezultă că toate raporturile anarmonice, funcţiuni raţionale de λ, sunt egale respectiv cu toate raporturile anarmonice, funcţiuni raţionale de λ'. De unde rezultă egalitatea $\mathrm{J}=\mathrm{J}'$.

102. Fiind dată valoarea invariantului J, ecuaţiunea (11) determină cele şase valori de cari este susceptibil raportul anarmonic λ, format cu rădăcinile ecuaţiunii de gradul al patrulea sau ale ecuaţiunii de gradul al treilea, cu condiţiunea de a privi înacest caz a patra rădăcină infinită. Aceste valori sunt distincte şi finite pentru orice valoare $\mathrm{J}\neq o,\ 1,\ \infty$.

---

[1]) Dacă $\varphi\,(y)$ este de gradul trei, luăm $y_4=\infty$.

1°. Pentru J = o, ecuaţiunea (11) devine

$$(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 = o,$$

ale cărei rădăcini sunt egale trei câte trei, având valorile

$$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

2°. Valoarea J = 1, dă ecuaţiunea

$$4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 - 27\lambda^2(\lambda - 1)^2 = o,$$

ale cărei rădăcini egale două câte două sunt respectiv

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad 2.$$

3°. Pentru J = ∞, avem trei valori egale două câte două, anume

$$0, \quad 1, \quad \infty.$$

In acest din urmă caz, integrala

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

încetează de a fi eliptică, precum rezultă din transformata ei dată de forma lui Riemann

$$v = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}. \text{ [1]}$$

III. FORMA NORMALĂ A LUI LEGENDRE.

103. Integrala normală a lui Legendre este de forma

$$(1) \qquad w = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2 z^2)}},$$

în care $\mu \neq \pm 1$ poartă numele de *modulul* integralei.

Să deducem această integrală din aceea a lui Riemann

$$(2) \qquad v = \int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}$$

cu ajutorul unei substituţiuni lineare.

---

[1]) Regăsim astfel pe altă cale excepţiunile menţionate (§ 92).

Să considerăm corespondenţa următoare între punctele critice al celor două integrale:

$$(3) \qquad \begin{array}{c|cccc} x & \infty & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda}, \\ z & 1 & \frac{1}{\mu} & -\frac{1}{\mu} & -1; \end{array}$$

de unde rezultă condiţiunea (§ 92)

$$(4) \qquad \frac{(\infty - 0)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(\infty - 1)\left(0 - \frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(-\frac{1}{\mu} + 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{\mu} + 1\right)},$$

adică

$$(5) \qquad 1 - \lambda = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2;$$

de unde

$$(6) \qquad \mu = \frac{1 - \sqrt{1-\lambda}}{1 + \sqrt{1-\lambda}},$$

$$(7) \qquad \lambda = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2}.$$

Inlocuind în egalitatea (4) $\frac{1}{\lambda}$ prin x şi punctul corespunzător -1 prin z, obţinem substituţiunea

$$(8) \qquad x = \frac{1+\mu}{2\mu} \cdot \frac{1-\mu z}{1-z}.$$

Efectuând calculele şi ţinând seama de valoarea (7) a lui λ, obţinem egalitatea

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = (1+\mu) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2 z^2)}}.$$

104. La o valoare λ corespunde, în virtutea formulei (6), două valori diferite pentru μ, inverse una alteia, iar dacă înlocuim λ prin $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$, care deasemenea este una din valorile raportului anarmonic al aceloraşi puncte critice, obţinem pentru μ valori respectiv egale şi de semne contrarii. La valori diferite ale lui λ corespund valori diferite pentru μ; căci, în cazul contrar, ar urma ca λ să primească valori diferite pentru aceeaş valoare μ, ceeace, în virtutea

egalităţii (7), este absurd. Cele douăsprezece valori μ, corespunzătoare celor şase valori λ sunt dar distincte.

Integrala generală.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

care se transformă în şase integrale diferite de forma lui Riemann, se transformă dar, în douăsprezece integrale diferite de forma lui Legendre, adică în integrale de forma

$$\mathrm{M} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2 z^2)}},$$

în care sistemul (M, μ) are douăsprezece valori diferite.

105. Avem, pentru integrala lui Legendre, ca şi pentru integrala lui Weierstrass şi a lui Riemann, trei substituţiuni lineare diferite, cari o transformă în ea însăş. Aceste substituţiuni se obţin, în virtutea corespondenţelor următoare, cari lasă neschimbat raportul anarmonic (4)

$$(10)\qquad \begin{array}{c|cccc}
z = & 1 & \frac{1}{\mu} & -\frac{1}{\mu} & -1 \\
\hline
 & \frac{1}{\mu} & 1 & -1 & -\frac{1}{\mu}, \\
z' = & -\frac{1}{\mu} & -1 & 1 & \frac{1}{\mu}, \\
 & -1 & -\frac{1}{\mu} & \frac{1}{\mu} & 1.
\end{array}$$

Substituţiunile corespunzătoare sunt date de formulele

$$(11)\qquad z' = \frac{1}{\mu z}, \quad z' = -\frac{1}{\mu z}, \quad z' = -z.$$

In virtutea celei dintâi din aceste formule, avem egalitatea

$$(12)\qquad \int_{\frac{1}{\mu}}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\, 1-\mu^2 x^2)}} = \int^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\mu^2 x^2)}},$$

Integrala normală a lui Riemann se transformă imediat în aceea a lui Legendre prin substituţiunile de gradul al doilea

$$x = t^2.$$

Obținem

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\quad k^2=\lambda.$$

Modulul k este diferit de modulul μ obținut prin ajutorul transformării lineare considerate mai sus.

CAPITOLUL XI.

INVERSIUNEA INTEGRALEI DE SPEȚA I.

106. Să considerăm integrala

$$(1)\qquad u=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

în care $R(x)$ este un polinom de gradul 3 sau 4 și x_0 un punct dat după voie la distanță finită sau la infinit. Această integrală rămâne finită pentru orice valoare finită sau infinită a lui x; ea nu poate deveni infinită decât prin adăugarea unui număr nelimitat de perioade, prin urmare numai când x descrie un număr infinit de ori un drum închis care introduce modulele de periodicitate.

Ecuațiunea (1) este echivalentă cu ecuațiunea diferențială

$$(2)\qquad \frac{dx}{du}=\sqrt{R(x)},$$

în care facem să corespundă lui x_0 o valoare finită u_0, dată după voie.

Dacă x_0 este diferit de un punct de ramificațiune, avem în domeniul (x_0)

$$(3)\qquad \sqrt{R(x)}=P(x-x_0)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots,a_0\neq o;$$

iar dacă x_0 este un punct de ramificațiune, desvoltarea lui $\sqrt{R(x)}$ este de forma

$$(4)\qquad \sqrt{R(x)}=(x-x_0)^{\frac{1}{2}}P(x-x_0),\quad [P(x-x_0)]_{x_0}\neq o.$$

In cazul întâiu avem așa dar

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{a_0+a_1(x-x_0)+\ldots}=\frac{1}{a_0}+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ldots;$$

de unde

$$u-u_0=\frac{x-x_0}{a_0}+\frac{b_1}{2}(x-x_0)^2+\frac{b_2}{3}(x-x_0)^3+\ldots$$

Efectuând inversiunea seriei din urmă, avem

$$(5)\qquad x-x_0=a_0(u-u_0)+c_1(u-u_0)^2+\ldots.$$

In cazul al doilea, punând $x-x_0=t^2$, ecuaţiunea (2) ia forma

$$\frac{dt}{du}=a_0+a_1t^2+a_2t^4+\ldots,\quad a_0\neq o;$$

de unde

$$u-u_0=\frac{t}{a_0}+b_1t^3+b_2t^5+\ldots,$$

sau, ridicând ambele membre la pătrat şi înlocuind t^2 prin $x-x_0$,

$$(u-u_0)^2=\frac{x-x_0}{a_0^2}[1+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots]$$

De unde, prin inversiune,

$$(6)\qquad x-x_0=a_0(u-u_0)^2+a_1(u-u_0)^4+\ldots$$

membrul al doilea conţinând numai puteri pare de $u-u_0$.

Dacă $x_0=\infty$, avem, în domeniul acestui punct,

$$\left.\begin{array}{ll}(7) & \sqrt{R(x)}=x^2\,P\left(\frac{1}{x}\right)\\ \text{sau} & \\ (8) & \sqrt{R(x)}=x^{\frac{3}{2}}\,P\left(\frac{1}{x}\right)\end{array}\right\}\quad\left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right]_\infty\neq o,$$

după cum $R(x)$ este de gradul 4 sau 3.

In cazul întâiu avem:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\right);\quad a_0\neq o$$

$$u-u_0=-\frac{a_0}{x}-\frac{a_1}{2x^2}-\frac{a_2}{3x^3}-\ldots,$$

$$\frac{1}{x}=-\frac{u-u_0}{a_0}\left[1+b_1(u-u_0)+b_2(u-u_0)^2+\ldots\right],$$

$$x=-\frac{a_0}{u-u_0}\,\frac{1}{1+b_1(u-u_0)+b_2(u-u_0)^2+\ldots}$$

$$(9)\qquad x=-\frac{a_0}{u-u_0}+c_0+c_1(u-u_0)+c_2(u-u_0)^2+\ldots$$

In cazul al doilea, avem

$$\frac{du}{dx} = x^{-\frac{3}{2}} \left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots \right], \quad a_0 \neq o,$$

$$u - u_0 = -2a_0 x^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots \right],$$

$$(u - u_0)^2 = \frac{4a_0^2}{x} \left[1 + c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x^2} + \ldots \right],$$

$$\frac{1}{x} = \frac{(u-u_0)^2}{4a_0^2} \left[1 + d_1 (u-u_0)^2 + \ldots \right];$$

de unde

$$(10) \qquad x = \frac{4a_0^2}{(u-u_0)^2} + a_0 + a_1 (u - u_0)^2 + a_2 (u - u_0)^4 + \ldots,$$

membrul al doilea conţinând numai puteri pare de $u - u_0$.

107. Din cele ce preced rezultă că orice integrală x a ecuaţiunii (2) se poate pune, în domeniul punctului u_0, situat la distanţă finită în planul (u), sub una din formele

$$(11) \qquad x - x_0 = \mathrm{P}(u - u_0)$$

sau

$$(12) \qquad x = \frac{1}{(u-u_0)^m} \mathrm{P}(u - u_0) \qquad \left[\mathrm{P}(u - u_0) \right]_{u=u_0} \neq o,$$

m fiind egal cu 1 sau 2, după cum R (x) este de gradul 4 sau 3. Ceeace revine a zice că există numere pozitive r, a căror limită inferioară este un număr $\varrho > o$, astfel că în cercul $|u - u_0| = r$, ecuaţiunea (2) admite o integrală de forma (11) sau (12).

Pentru a puteà conchide că integrala generală x este o funcţiune analitică uniformă de u, neavând în tot planul alte singularităţi decât poluri, rămâne să arătăm că plecând dela un punct dat u_0 cu o valoare arbitrară $x = x_0$, obţinem prin prelungire analitică, într'un punct oarecare u, o valoare determinată (finită sau infinită) pentru x; căci în stabilirea formulelor (11) şi (12) s'a presupus că asociăm o valoare finită a lui u cu o valoare determinată, finită sau infinită x.

Să considerăm dar un drum oarecare L trecând prin u_0 şi fie $x = x_0$ valoarea ce facem să corespundă lui u_0; valoarea ce va primì x prin prelungirea elementului iniţial dealungul acestui drum va fi determinată în orice punct al drumului. Să presupunem că n'ar fi aşa şi fie $u = \alpha$ cel dintâiu punct pe L în care x devine nedeterminat. Să considerăm pe L un punct $u = \beta$ cuprins între u_0 şi α aşa ca distanţa sa de α să fie mai mică decât ϱ. Elementul care reprezintă x sau $\frac{1}{x}$ corespunzător punctului β va fi convergent într'un cerc cu centrul în β şi a cărui rază este cel puţin egală cu ϱ, prin urmare acest cerc cuprinde în interiorul său punctul α; ceeace este în contradicţiune cu ipoteza că punctul α este un punct de nedeterminare. Ipoteza că funcţiunea x ar puteà deveni nedeterminată într'un punct u oarecare este aşàdar inadmisibilă.

Aşa dar funcţiunea x, obţinută prin inversiunea integralei eliptice de speţa I, este o funcţiune analitică, uniformă în tot planul, neavând alte singularităţi decât poluri de ordinul întâi sau al doilea, după cum polinomul de sub radical este de gradul 4 sau 3, precum rezultă din formulele (9) şi (10).

Reprezintând prin ω şi ω' două module de periodicitate distincte ale integralei u, avem (§ 74), pentru aceeaş valoare a lui x, o infinitate de valori pentru u, cuprinse în expresiunea

$$u = u_0 + m\omega + n\omega', \tag{13}$$

u_0 fiind una din ele. De unde rezultă, punând $x = \varphi(u)$, egalitatea

$$\varphi(u + m\omega + n\omega') = \varphi(u), \tag{14}$$

oricare ar fi valoarea finită a lui u.

Funcţiunea $x = \varphi(u)$ *este aşa dar o funcţiune de* u, *având cantităţile* ω *şi* ω' *ca perioade.* Această proprietate fundamentală a fost descoperită în acelaş timp de *Abel* şi *Iacobi.*

Corolar. Din egalitatea $\sqrt{R(x)} = \frac{dx}{du} = \varphi'(u)$ rezultă că radicalul $\sqrt{R(x)}$, privit ca funcţiune de u, este funcţiune uniformă în tot planul (u), având aceleaşi poluri şi aceleaşi perioade ca funcţiunea $\varphi(u)$.

108. *Reprezintarea suprafeţii T' a lui Riemann pe planul* (u) *printr'o integrală eliptică de speţa I.*

Fie

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{1}$$

o integrală eliptică de speţa I, $f(x)$ fiind un polinom de gradul 3.

sau 4. Orice ramură a integralei fiind o funcțiune olomorfă de x pe supafața T′ (§ 71) și viceversa, $x = \varphi(u)$ fiind o funcțiune uniformă în tot planul (u) (§ 107), rezultă că suprafața T′ și aria (A) în care ea se transformă, în virtutea integralei (1), se corespund punct cu punct. Conturul lui T′, adică cele patru țărmuri ale tăieturilor A și B (fig. 35) se transformă într'un contur simplu închis ale cărui puncte sunt toate situate la distanță finită. Acest contur este format din patru porțiuni de linii, drepte sau curbe, corespunzătoare, punct cu punct, celor patru țărmuri. De altă parte, în două puncte situate față în față pe țărmurile unei tăieturi, diferența dintre valorile integralei fiind constantă (egală cu perioada corespunzătoare tăieturii), rezultă că punctele conturului (A) se corespund două câte două: u', u'', astfel că între ele există relațiunea

$$(2) \qquad u' - u'' = \text{perioadă}.$$

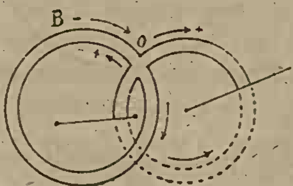

Fig. 35

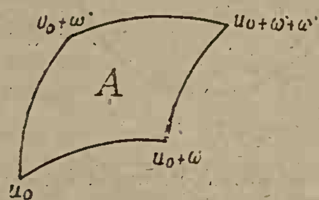

Fig. 36

Fie, de exemplu, u_0 valoarea lui u în punctul de întâlnire O ale celor patru țărmuri și să presupunem că x plecând dela punctul O descrie țărmul exterior B în sensul săgeții: u va descrie un arc de curbă ale cărui puncte extreme sunt u_0, $u_0 + \omega$; punctul x continuând mișcarea sa și descriind țărmul exterior A, u va descrie un arc dela punctul $u_0 + \omega$ până la punctul $u_0 + \omega + \omega'$, ω și ω' fiind respectiv perioadele corespunzătoare tăieturilor A și B (§ 73). Țărmurilor opuse celor două dintâi vor corespunde, în virtutea relațiunii (2), două arce respectiv paralele, cel dintâi cuprins între punctele $(u_0 + \omega + \omega', \ u_0 + \omega')$ și cel din urmă între punctele $(u_0 + \omega', u_0)$ (fig. 36). Conturul lui (A) este așadar un paralelogram rectiliniu sau curbiliniu, pe care îl numim *paralelogramul perioadelor*. Când x descrie conturul lui T′, u descrie acest paralelogram fără a trece de două ori prin acelaș punct, în virtutea corespondenții biunivoce dintre suprafața T′ și aria A.

109. Să considerăm, în particular, integrala normală a lui Weierstrass

$$(1) \qquad u = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

în cazul când rădăcinile e_1, e_2, e_3, ale polinomului de sub radical, sunt reale şi dispuse în ordinea $e_1 > e_2 > e_3$. Să limităm planul (x) prin două tăieturi dealungul axei reale $(e_1, +\infty)$, (e_2, e_3) (fig. 37), sau $(e_3, -\infty)$, (e_1, e_2) (fig. 38) şi să considerăm suprafaţa T′ formată din acest plan — pe care îl numim planul P — şi dintr'un plan suprapus — pe care îl numim planul S —, liniile de trecere dela un plan la celalt fiind tăieturile considerate. Conturul acestei suprafeţe va fi considerat ca format din ţărmurile tăieturilor, din cercul $|x| = R$ şi din cercurile $|x-e_\alpha| = r$, $(\alpha = 1, 2, 3)$, toate

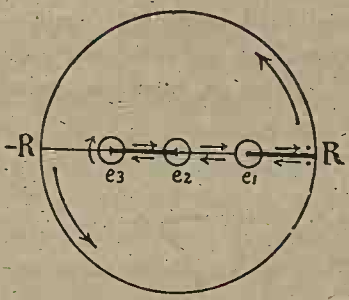

Fig. 37

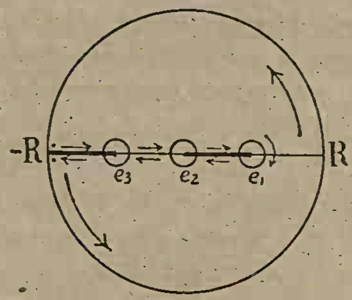

Fig. 38

situate în planul P, unind între ele două puncte opuse ale tăieturii corespunzătoare; $\lim R = \infty$, $\lim r = o$.

Să reunim aci determinaţiunile radicalelor

$$\sqrt{x-e_1},\quad \sqrt{x-e_2},\quad \sqrt{x-e_3},$$

considerate pe cele două plane, pentru x real, cuprins între $-\infty$ i $+\infty$.

Adoptând, pentru $x > e_1$, în planul P, pe ţărmul inferior, valori pozitive pentru cele trei radicale, avem, dealungul axei reale, în partea inferioară, egalităţile

$$(2)\qquad \begin{cases} \sqrt{x-e_1} = -i\sqrt{e_1-x} & \text{pentru } x<e_1, \\ \sqrt{x-e_2} = -i\sqrt{e_2-x} & \quad\text{»}\quad x<e_2, \\ \sqrt{x-e_3} = -i\sqrt{e_3-x} & \quad\text{»}\quad x<e_3. \end{cases}$$

Radicalele vor fi determinate pe ambele plane ale suprafeţii T′. In virtutea acestor determinaţiuni, integrala

$$(3)\qquad u = \int_{x}^{x} \frac{-dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

luată dealungul conturului închis (fig. 37) sau (fig. 38), în sensul indicat de săgeți, conduce respectiv la egalitățile următoare, cari determină un sistem de perioade [1]):

$$(4)\quad 2\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_3)}} = \int_{e^3}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)\,(e_2-x)\,(x-e_3)}},$$

$$(5)\quad 2\omega_3 = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)\,(e_2-x)\,(e_3-x)}} = i\int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)\,(x-e_2)\,(x-e_3)}};$$

radicalele fiind reale și pozitive în ambele membre.

Perioada $2\,\omega_1$ este dar reală și pozitivă, iar perioada $2\,\omega_3$ este pur imaginară, coeficientul lui i fiind pozitiv.

In virtutea rezultatelor de mai sus, este ușor să găsim reprezintarea planelor P și S pe planul (u) cu ajutorul integralei (3).

Pentru a obține reprezintarea semiplanului P, situat dedesubtul axei reale, să luăm integrala (3) dealungul conturului format din axa reală, din care excludem punctele critice prin semicercuri infinit mici, și din semicercul cu centrul în $x = o$, având o rază R pe care o facem să tindă către infinit; toate semicercurile sunt situate dedesubtul axei reale (fig. 39).

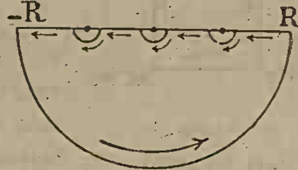

Fig. 39

Se recunoaște lesne că semicercurilor $|\,x - e_a\,| = r$ corespund în planul (u) arce cari difer foarte puțin de cadrane circulare descrise în sensul negativ și cari tind către zero împreună cu raza r; iar semicercului $|\,x\,| = \mathrm{R}$ corespunde un cadran cu centrul în $u = o$, care tinde către zero împreună cu $\frac{1}{\mathrm{R}}$. Segmentelor (R, e_1) și (e_2, e_3) corespund, pentru u, valori reale cari variază respectiv dela 0 la ω_1 și dela $\omega_1+\omega_3$ până la ω_3; segmentelor (e_1, e_2), $(e_3, -\mathrm{R})$ corespund expresiunile

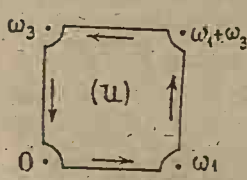

Fig. 40

$$u = \omega_1 + it, \quad u = \omega_3 - it,$$

t crescând dela o la $\frac{\omega_3}{i}$. Figura (40) reprezintă conturul (u), corespunzător conturului (x) (fig. 39). Cele două contururi corespunzându-se punct cu punct și u fiind funcțiune olomorfă de x în in-

---

[1]) Conturul din (fig. 37) este format din liniile:

$\mathrm{R}e_1 + e_1 e_2 + e_2\, e_3 +$ cercul $(e_3) + e_3\, e_2 + e_2 e_1 + e_1 \mathrm{R} +$ cercul (R)

Conturul din fig. (38):

$(-\mathrm{R}, e_3) + e_3 e_2 + e_2 e_1 +$ cercul $(e_1) + e_1 e_2 + e_2 e_3 + (e_3, -\mathrm{R}) +$ cercul (R).

Integralele după segmentele $e_1\ e_2$ și $e_2\ e_1$ din prima figură și cele după segmentele $e_3\ e_2$, $e_2\ e_3$ din a doua figură se distrug.

teriorul conturului (x), rezultă, făcând $r = o$, $R = \infty$, că semiplanul P, situat dedesubtul axei reale, este reprezintat într'un mod conform, pe dreptunghiul (u) ale cărui vârfuri sunt punctele

$$O, \omega_1, \omega_1 + \omega_3, \omega_3.$$

Prin prelungire analitică se conchide [1]) că semiplanul P, situat deasupra axei reale, se transformă într'un dreptunghiu simetric cu cel dintâi, în raport cu axa reală (u), ale cărui vârfuri sunt punctele $u = o$, ω_1, $\omega_1 - \omega_3$, $-\omega_3$.

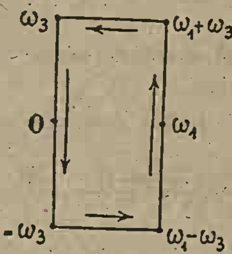

Fig. 41

Cele două semiplane P, separate printr'o tăietură făcută dealungul axei reale dela punctul e_1 până la $-\infty$, cu alte cuvinte, planul P limitat de tăietura $(e_1, -\infty)$, și dreptunghiul (u) cu vârfurile

$$-\omega_3, \quad \omega_1 - \omega_3, \quad \omega_1 + \omega_3, \quad \omega_3$$

se corespund dar punct cu punct. Acest dreptunghiu poate fi obținut printr'o mișcare continuă a lui x; de ex., dacă x pleacă dela punctul $-\infty$ deasupra axei reale (fig. 38) și descrie drumul închis indicat de săgeți, u pleacă dela punctul $u = o$ și descrie, în sensul săgeților, conturul reprezintat prin fig. 41. Când cercurile cele mici tind către zero și cercul cel mare către infinit, conturul devine dreptunghiul considerat.

Pentru a obține reprezintarea planului S pe planul (u), este deajuns să observăm că în două puncte suprapuse în planele P și S, radicalul $\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}$ are valori egale și de semne contrarii; prin urmare, acestor puncte x corespund punctele u simetrice în raport cu origina $u = o$. Așà dar semiplanul S, situat deasupra sau dedesubtul axei reale (x), este reprezintat pe planul (u) printr'un dreptunghiu situat respectiv deasupra sau dedesubtul axei reale; cel dintâi având vârfurile O, ω_3, $-\omega_1 + \omega_3$, $-\omega_1$ și cel de al doilea având vârfurile O, $-\omega_3$, $-\omega_1 - \omega_3$, $-\omega_1$. Planul S, limitat de tăietura $(e_1, -\infty)$ și dreptunghiul cu vârfurile ω_3, $-\omega_1 + \omega_3$, $-\omega_1 - \omega_3$, $-\omega_3$ se corespund punct cu punct.

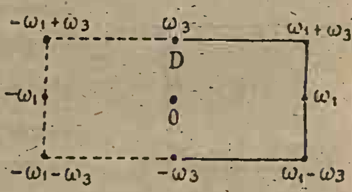

Fig. 42

Cele două dreptunghiuri (u), corespunzătoare planelor P și S, formează un dreptunghiu D (fig. 42), având vârfurile

$$\omega_1 - \omega_3, \quad \omega_1 + \omega_3, \quad -\omega_1 + \omega_3, \quad -\omega_1 - \omega_3$$

[1]) I. p. 302

Putem alege un contur pentru x astfel ca u să descrie conturul lui D într'un mod continuu. Pentru aceasta, să considerăm suprafața T′ limitată de tăieturile (e_1, e_2), $(e_3, -\infty)$ și să luăm drept contur drumul format din liniile următoare (fig. 43): segmentul $e_1\, e_3$ din semiplanul inferior P; cercul (e_3) trecând din P în S; țărmul superior $e_3\, e_1$ urmat, prin intermediul cercului e_1, de cel inferior $e_1\, e_3$ pe planul S; cercul (e_3) trecând din S în P; țărmul superior $e_3\, e_1$ din P; cercul (e_1) trecând din țărmul superior la cel inferior al lui P.

Când x descrie acest contur (fig. 43) în sensul pozitiv, începând dela punctul e_1, u descrie, în acelaș sens, conturul lui D, începând dela punctul ω_1 (fig. 42). Liniile pline ale conturului (x) sunt situate pe planul P, cele punctate pe planul S; liniile corespunzătoare ale dreptunghiului D sunt reprezintate în acelaș mod.

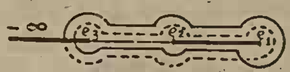

Fig. 43

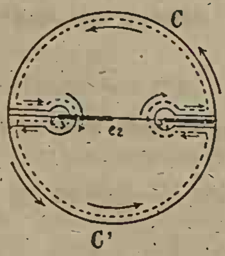

Fig. 44

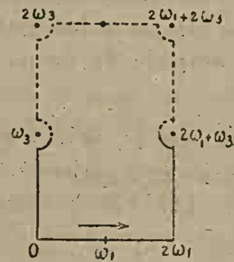

Fig. 45

110. In locul liniilor de trecere dintre planele P și S reprezintate prin (fig. 38), să considerăm liniile de trecere reprezintate prin (fig. 37) și să facem ca x să descrie conturul format din liniile următoare (fig. 44):

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{R}\, e_1)_-\,, (e_1)\,, (e_1\mathrm{R})_+\,, (\mathrm{RCR}')\,; (\mathrm{R}'e_3)_+\,, (e_3)\,, (\mathrm{P})\,; \\ (e_3\mathrm{R}')_-\,, (\mathrm{R}'\mathrm{C}'\mathrm{R})\,, (\mathrm{R}e_1)_-\,, (e_1)\,, (e_1\mathrm{R})_+\,, (\mathrm{RCR}')\,, (\mathrm{R}'e_3)_+\,, (\mathrm{S})\,; \\ (e_3)\,, \ (e_3\,\mathrm{R}')_-\,, (\mathrm{R}'\mathrm{C}'\mathrm{R})\,, (\mathrm{P}). \end{array}\right.$$

Notă. — Notațiunea $(ab)_{\pm}$ indică țărmul superior sau inferior al segmentului $(a\, b)$. Parentezele (P), (S) reprezintă cele două plane in cari sunt situate liniile cari preced aceste semne; (e_1) și (e_3) sunt cercurile cu centrele in punctele corespunzătoare, situate, parte intr'un plan, parte in celalt plan.

Când x descrie acest contur, plecând dela punctul R $(+\infty)$ pe țărmul inferior din planul P, u pleacă dela O și descrie dreptunghiul $(2\,\omega_1, 2\,\omega_3)$ (fig. 45). Liniile pline și cele punctate se corespund.

CAPITOLUL XII.

FUNCŢIUNI DUBLU PERIODICE.

111. O funcţiune $f(u)$ se zice *periodică* dacă există o cantitate constantă ω astfel că, oricare ar fi valoarea variabilei u — căreia de obiceiu se zice şi *argument* — avem

$$f(u+\omega)=f(u);$$

ω se chiamă *perioada* funcţiunii $f(u)$.

Dacă o funcţiune admite mai multe perioade ω, ω',..., orice cantitate de forma

$$m\omega+m'\omega'+\ldots,$$

în care m, m',... sunt numere întregi, pozitive sau negative, este evident o perioadă.

112. Fie, în domeniul unui punct u_0,

$$f(u)=(u-u_0)^k\,[a_0+a_1(u-u_0)+\ldots],\quad a_0\neq o,$$

k fiind un număr întreg pozitiv sau negativ. Să înlocuim, în ambele membre, u prin $u-\omega$; membrul întâi se reproduce şi avem egalitatea

$$f(u)=[u-(u_0+\omega)]^k\,[a_0+a_1(u-u_0)+\ldots].$$

De unde se conchide că dacă funcţiunea $f(u)$ admite punctul u_0 ca zero sau pol de un ordin k, ea admite respectiv ca zero sau pol de *acelaş ordin* punctul $u_0+\omega$ şi, în general, toate punctele cuprinse în expresiunea

$$u_0+m\,\omega+n\,\omega',$$

m şi n fiind numere întregi arbitrare.

113. Să considerăm punctele cari figurează perioadele unei funcţiuni uniforme $f(u)$, cărora, pentru prescurtare, le vom zice *puncte perioade.* Să unim printr'o linie dreaptă origina cu un punct perioadă oarecare şi fie, pe acestă dreaptă, ω punctul perioadă cel mai apropiat de origină. Există un număr $\varrho>o$ astfel că $|\omega|>\varrho$; căci a presupune contrariul, ar urma să fie posibilă inegalitatea

$$|\omega|<\varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. De unde ar rezultà ca într'un punct ordinar oarecare u şi în punctul infinit vecin $u+\omega$, funcţiunea $f(u)$ să aibă aceeaş valoare, adică punctele ordinare în cari $f(u)$ primeşte aceeaş valoare n'ar fi puncte izolate; ceeace este imposibil, afară numai dacă $f(u)$ se reduce la o constantă.

Fie Ω un punct perioadă situat pe dreapta nelimitată care uneşte origina cu punctul ω; vom aveà egalitatea

$$\Omega = m\,\omega,$$

m fiind un număr întreg $\gtreqless$ o. Căci dacă punctul

$$(m + \lambda)\,\omega,$$

λ fiind real şi cuprins între 0 şi 1, ar fi o perioadă, ar urmà ca $\lambda\omega$ să fie o perioadă; ceeace este contrar ipotezei că ω este, pe dreapta considerată, punctul perioadă cel mai apropiat de origină.

Perioada ω, care împlineşte condiţiunea că orice perioadă figurată pe dreapta $(0, \omega)$ este un multiplu pozitiv sau negativ de ω, se numeşte *perioadă primitivă*.

114. Să presupunem că funcţiunea $f(u)$ admite puncte perioade situate şi în afară de dreapta $(0,\omega)$, care uneşte punctul O cu punctul ω şi fie ω' unul din aceste puncte (fig. 46) a cărui distanţă de dreaptă $(0, \omega)$ este cea mai mică posibilă. De unde rezultă că, în fâşia cuprinsă între dreapta nelimitată $(0, \omega)$ şi paralela la această dreaptă dusă prin punctul ω' nu există nici un punct perioadă: ω' este o perioadă primitivă; căci pe dreapta $(0, \omega')$, punctul ω' este cel mai apropiat de origină. Orice punct perioadă situat pe această dreaptă este de forma $n\omega'$, n fiind un număr întreg pozitiv sau negativ.

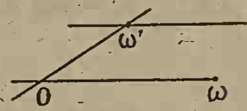

Fig 46

115. *Teoremă. Două perioade între cari există o relaţiune lineară, omogenă cu coeficienţi întregi, sunt multipli ai unei singure perioade.*

In adevăr, fie ω, ω' două perioade între cari există o relaţiune lineară şi omogenă pe care o putem presupune pusă sub forma

$$\frac{\omega}{m} = \frac{\omega'}{m'}, \tag{1}$$

m şi m' fiind numere întregi, prime între ele. Putem determinà o infinitate de sisteme de două numere întregi n şi n' cari să satisfacă ecuaţiunea

$$mn + m'n' = 1. \tag{2}$$

Să reprezintăm prin Ω raporturile (1) şi să multiplicăm ambele membre (2) cu Ω; vom obţine egalitatea

$$n\omega + n'\omega' = \Omega. \tag{3}$$

Cantitatea Ω este aşa dar o perioadă şi $\omega = m\Omega$, $\omega' = m'\Omega$ sunt multipli ai acestei perioade. q. e. d.

Două perioade se zic *distincte* dacă între ele nu există relaţiune de forma (1).

116. *Teoremă. Raportul a două perioade distincte ale unei funcţiuni analitice uniforme nu poate fi un număr real.*

In adevăr, dacă raportul a două perioade ω, ω' este real, punctele perioade corespunzătoare sunt în linie dreaptă cu origina şi prin urmare ω şi ω' sunt multipli ai unei aceleiaş perioade primitive: ele nu sunt dar distincte.

Iată alt mod de a probà aceste teoremă fundamentală.

1°. Dacă raportul celor două perioade ar fi raţional, ele n'ar fi distincte (§ 115).

2°. Să presupunem raportul $\dfrac{\omega'}{\omega}$ egal cu un număr incomensurabil şi să-l desvoltăm într'o fracţiune continuă. Reprezintând prin $\dfrac{m}{n}$ o *redusă* de un rang oarecare, avem

$$\left|\frac{\omega'}{\omega}-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2};$$

de unde

$$|m\omega-n\omega'|<\frac{|\omega|}{n}.$$

Membrul întâi al acestei inegalităţi este o perioadă a funcţiunei, care poate deveni mai mică decât orice cantitate dată, căci n poate fi luat oricât de mare voim: ceeace este imposibil.

I. REPREZINTAREA GEOMETRICĂ A PERIODICITĂŢII DUBLE.

117. Fie $\omega=\varrho e^{i\alpha}$, $\omega'=\varrho' e^{i\alpha'}$ două perioade distincte; prin urmare diferenţa $\alpha-\alpha'$ este diferită de o şi de π. Putem dar pe segmentele (O, ω), (O, ω') să construim un paralelogram: *paralelogramul perioadelor.* Vârfurile acestui paralelogram (fig. 47) sunt punctele $u = O, \omega, \omega', \omega+\omega'$.

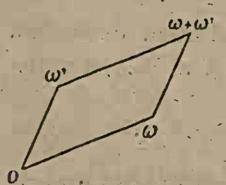

Fig. 47

Să ne închipuim prelungite laturile paralelogramului până la infinit, în ambele sensuri, şi pe latura (O, ω') prelungită ca şi pe paralela ei să luăm, începând dela vârfurile paralelogramului, distanţe egale cu $|\omega'|$; deasemenea pe celelalte două laturi prelungite să luăm, începând dela aceleaşi vârfuri, distanţe egale cu $|\omega|$. Prin punctele aşa obţinute să ducem paralele cu laturile paralelogramului; formăm în modul acesta o rețeà de o infinitate de paralelograme de perioade cari acoper tot planul. Vârfurile acestor paralelograme sunt date de expresiunea $m\omega + n\omega'$, m și n fiind numere întregi pozitive, negative sau nule; prin urmare, exceptând punctul $u = o$, ele sunt puncte perioade.

118. Două puncte u_0, u se zic *congruente*, dacă între ele există relațiunea

$$u = u_0 + m\omega + n\omega', \tag{1}$$

m și n fiind numere întregi oarecari. Această egalitate se înlocuește de obiceiu prin congruența

$$u \equiv u_0 \,(mo\delta\delta\ \omega,\ \omega'),\ ^{1)}$$

după exemplul din Teoria Numerelor unde, dacă voim să punem în evidență restul r al diviziunii unui număr a printr'un număr d, fără a menționà câtul, scriem

$$a \equiv r \ \ (mod\, \mathrm{d}).$$

Relațiunea (1) arată că în *interiorul* unui paralelogram de perioade nu există două puncte congruente între ele, pe când unui punct situat pe o lature a paralelogramului îi corespunde un punct congruent pe laturea opusă și că toate vârfurile sunt puncte congruente. Pentru a puteà enunțà propozițiuni generale relativ la un paralelogram de perioade, *convenim* a privì o lature a rețelei de paralelograme ca făcând parte dintr'un singur paralelogram, iar laturea opusă ca aparțiânnd paralelogramului imediat vecin. Cu modul acesta, unui punct al paralelogramului — fie acest punct interior, pe o lature sau un vârf — nu-i corespunde nici un punct congruent care să facă parte din acelaș paralelogram. Așadar două puncte congruente aparțin la paralelograme diferite. Aceeaș relațiune (1) arată că unui punct u_0 oarecare din plan îi corespunde un punct congruent în primul paralelogram.

Să mai observăm că putem luà ca paralelogram de perioade un paralelogram care să aibă unul din vârfurile sale într'un punct $u = a$ oarecare, celelalte vârfuri vor fi atunci punctele $a + \omega$, $a + \omega'$, $a + \omega + \omega'$. Printr'o translațiune în plan putem aduce acest paralelogram să coincidă cu cel al căruia unul din vârfuri este punctul $u = o$.

119. Fie ω și ω' două perioade primitive, paralelogramul corespunzător se zice *elementar*. Din definițiunea perioadelor primitive rezultă că în interiorul unui paralelogram elementar, având unul

---

[1]) Notațiunea *moδδ* a fost adoptată pentru a distinge congruențele relative la două module de cele relative la un modul.

din vârfuri în origină nu există punct perioadă. De asemenea pe laturile paralelogramului nu există alte puncte perioade decât vârfurile lui. Propozițiunea este evidentă în privința laturilor (O, ω), (O, ω'). De altă parte, existența unui punct perioadă pe una din laturile $(\omega, \omega + \omega')$, $(\omega', \omega + \omega')$ ar atrage după sine existența unui asemenea punct pe laturile opuse (O, ω), (O, ω'). De unde conchidem că în tot planul nu există alte puncte perioade decât vârfurile rețelei construite cu ajutorul paralelogramului (ω, ω'). Căci dacă ar exista în plan un punct perioadă diferit de un vârf al rețelei de paralelograme considerate, ar urmà să existe un asemenea punct în paralelogramul elementar (ω, ω') sau pe una din laturile acestui paralelogram într'un punct diferit de vârfurile sale: ceeace am văzut că este imposibil. De aci rezultă teorema fundamentală următoare:

O funcțiune analitică uniformă de o variabilă nu admite mai mult decât două perioade distincte.

120. *O funcțiune analitică uniformă dublu periodică admite o infinitate de sisteme de perioade primitive.* In adevăr, fie ω și ω' un sistem de perioade primitive și ω_1, ω'_1 alte două perioade; avem

$$(1) \qquad \omega_1 = \mu\,\omega + \mu'\omega', \quad \omega_1' = \nu\,\omega + \nu'\omega',$$

μ, μ', ν, ν' numere întregi. Pentru ca ω_1 și ω'_1 să formeze un sistem de perioade primitive este necesar și suficient să avem

$$(2) \qquad \omega = m\omega_1 + m'\omega'_1, \quad \omega' = n\omega_1 + n'\omega'_1,$$

m, m', n, n' numere întregi; căci atunci orice perioadă se va exprimà printr'o sumă de multipli de ω_1 și ω'_1. Pentru aceasta este necesar și suficient să avem

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \mu & \mu' \\ \nu & \nu' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Condițiunea este evident suficientă. Ea este și necesară. Din ecuațiunile (1) scoatem

$$(4) \qquad \omega = \frac{\nu'\omega_1 - \mu'\omega'_1}{\Delta}, \quad \omega' = \frac{\mu\,\omega'_1 - \nu\,\omega_1}{\Delta}.$$

Identificând aceste valori ale lui ω și ω' cu cele date de ecuațiunile (2) obținem

$$(5) \qquad \nu' = m\,\Delta, \quad \mu' = -m'\Delta, \quad \nu = -n\Delta, \quad \mu = n'\Delta$$

De unde rezultă

$$\Delta = \begin{vmatrix} n' & -m' \\ -n & m \end{vmatrix} \Delta^2,$$

sau $$(m n' - n m') \Delta = 1;$$

ambii factori ai membrului întâiu fiind numere întregi, conchidem

$$mn' - nm' = \pm 1, \quad \mu\nu' - \nu\mu' = \pm 1,$$

semnele superioare şi inferioare fiind luate împreună.

Egalitatea $\mu\nu' - \nu\mu' = +1$ fiind posibilă pentru o infinitate de valori, propozițiunea este justificată.

121. Fie ω şi ω' un sistem de două perioade oarecări şi ω_1, ω'_1 un al doilea sistem de perioade legate de cele dintâiu prin ecuațiunile (1). Pentru ca perioadele ω, ω' să se poată exprimà prin sume de multipli de ω_1 şi ω'_1 este necesar şi suficient ca condițiunea (3) să fie împlinită. Raționamentul este acelaş în ca cazul considerat mai sus.

Două sisteme de perioade legate între ele prin ecuațiunile (1) cu condițiunea (3) se zic echivalente, *propriu* sau *impropriu*, după cum $\Delta = \pm 1$.

Toate sistemele de perioade primitive sunt echivalente între ele.

Corolar. Două rețele construite cu ajutorul a două sisteme de perioade primitive (ω, ω'), (ω_1, ω'_1), dacă au un vârf comun, vor aveà toate vârfurile comune; căci perioadele fiecărui sistem sunt sume de multipli ai perioadelor celuilalt sistem.

Propozițiunea este adevărată şi pentru două rețele construite cu ajutorul a două sisteme de perioade echivalente oarecări.

122. Condițiunea $|\Delta| = 1$ exprimă că ariile paralelogramelor echivalente (ω, ω'), (ω_1, ω'_1) sunt egale. In adevăr, fie

$$\omega = a + ib, \quad \omega' = a' + ib';$$

vom aveà

$$\omega_1 = (\mu a + \mu' a') + i(\mu b + \mu' b'), \quad \omega'_1 = (\nu a + \nu' a') + i(\nu b + \nu' b').$$

Reprezentând prin s, S ariile paralelogramelor corespunzătoare avem, abstracțiune făcând de semn:

$$s = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{vmatrix} = s.$$

Toate paralelogramele elementare au aceeaş arie.

123. *Dintre toate paralelogramele de perioade, paralelogramele elementare au aria cea mai mică.* In adevăr, reprezentând prin (ω, ω') un sistem de două perioade primitive şi prin (ω'_1, ω'_1) un sistem de două perioade oarecări, nu primitive, vom aveà:

$$\omega_1 = \mu\omega + \mu'\omega', \quad \omega'_1 = \nu\omega + \nu'\omega'$$

şi determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} \mu & \mu' \\ \nu & \nu' \end{vmatrix}$ este un număr întreg diferit de unu.

Păstrând notaţiunile de mai sus, rezultă

$$S = |\Delta| s > s.$$

Observare. Dacă ω şi ω' sunt două perioade primitive ale unei funcţiuni uniforme $f(u)$, este imposibil să avem în acelaş timp egalităţile

$$f\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = -f(u), \quad f\left(u + \frac{\omega'}{2}\right) = -f(u),$$

căci altmintrelea ω şi $\frac{\omega + \omega'}{2}$ ar formà un sistem de perioade al căror paralelogram are o arie mai mică decât aceea a paralelogramului (ω, ω'): ceeace este în contrazicere cu teorema precedentă.

II. TRANSFORMAREA PERIOADELOR.

124. Fie (ω_1, ω_2), (ω_1', ω_2') două sisteme de perioade legate între ele prin egalităţile

$$(1) \qquad \omega_1' = a\omega_1 + b\,\omega_2, \quad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2,$$

coeficienţii a, b, c, d fiind numere întregi şi determinantul $ad - bc = n > o$. Se zice că aceste egalităţi constitue o *transformare* a perioadelor de *gradul* n. Dacă $n = 1$, transformarea se zice *lineară*. Transformarea este determinată de coeficienţii a, b, c, d şi se reprezintă simbolic prin notaţiunea

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Să considerăm o a doua transformare

$$(2) \qquad \omega_1'' = a'\omega_1' + b'\omega_2', \quad \omega_2'' = c'\omega_1' + d'\omega_2', \quad a'd' - b'c' = n',$$

de gradul n', reprezintată simbolic prin

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Să înlocuim în egalităţile (2) ω_1', ω_2' prin valorile (1); obţinem egalităţile

$$(3) \qquad \omega_1'' = a''\omega_1 + b''\omega_2, \quad \omega_2'' = c''\omega_1 + d''\omega_2,$$

cu relaţiunile

$$(4) \qquad \begin{cases} a'' = aa' + cb', & b'' = ba' + db', \\ c'' = ac' + cd', & d'' = bc' + dd', \end{cases}$$

cari arată că determinantul coeficienţilor transformării (3) este egal cu produsul determinanţilor coeficienţilor transformărilor (1) şi (2). Transformarea (3) care rezultă din aplicarea succesivă a transformărilor (1) şi (2) se notează

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

şi se zice că este *produsul* celor dintâi două.

Prin aplicarea a două transformări succesive rezultă o a treia transformare al cărei grad este produsul gradelor celor dintâi. Este important de observat ordinea în care acest produs este efectuat: se multiplică elementele liniilor verticale ale primului factor cu elementele liniilor orizontale ale celui de al doilea. Schimbând ordinea factorilor, produsul, adică transformarea rezultantă, se schimbă în genere, precum ne arată egalităţile (4).

In acelaş mod se introduce produsul a trei şi a unui număr oarecare de transformări. Se recunoaşte că proprietatea *asociativă* a produsului subsistă, adică aplicarea succesivă a trei transformări, pe cari le notăm, pentru prescurtare S, S′, S″, se poate reprezintà prin egalităţile

$$S.\, S'.\, S'' = (S.\, S')\, S'' = S\, (S.'\, S'').$$

Dacă, într'un caz particular, proprietatea comutativă se conservă, adică dacă produsul a două transformări nu se schimbă când schimbăm ordinea factorilor, se zice că cele două transformări sunt *permutabile*.

Dacă două transformări au aceiaşi coeficienţi, transformarea care rezultă din aplicarea lor succesivă se notează simbolic

$$S.\, S = S^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2.$$

In acelaş sens avem egalităţile

$$S^{\lambda}\, S^{\mu} = S^{\lambda+\mu}.$$

Notaţiunea S^0 reprezintă transformarea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

numită transformare *identică*; ea lasă neschimbate cantităţile cărora se aplică. Se scrie

$$S^0 = 1.$$

Transformarea $\overset{-1}{S}$ se zice transformarea *inversă* a transformării S; ea reprezintă o transformare astfel că produsul $S.\,\overset{-1}{S}$

este o transformare identică:

(6) $$S\,S^{-1} = S^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fiind dată transformarea

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = n,$$

deducem transformarea inversă

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

aplicând formula (6). Obținem egalitățile

$$a\alpha + c\beta = 1 \qquad b\alpha + d\beta = 0,$$
$$a\gamma + c\delta = 0, \qquad b\gamma + d\delta = 1;$$

de unde

$$\alpha = \frac{d}{n}, \ \beta = \frac{-b}{n}, \ \gamma = \frac{-c}{n}, \ \delta = \frac{a}{n}.$$

Dacă transformarea S este lineară ($n = 1$), avem

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Transformările S și S^{-1} sunt inverse una alteia, căci avem

$$S\,S^{-1} = S^{-1}S = 1.$$

Se verifică egalitatea

(7) $$(S\,S')^{-1} = S'^{-1}S^{-1},$$

căci ambele membre multiplicate cu S.S′ dau un produs egal cu 1.

$$(S.S')^{-1}\,(S.S') = S'^{-1}\ S^{-1}\ S\ S' = S'^{-1}\ S' = 1.$$

Fie S, S′, T trei transformări legate între ele prin egalitatea

$$S.\,S' = T.$$

Multiplicând ambele membre, *la dreapta*, cu S'^{-1}, obținem

$$S = T\,S'^{-1}.$$

De asemenea, multiplicând ambele membre, *la stânga*, cu S^{-1}, rezultă

$$S' = S^{-1}\,T.$$

In mod analog, din egalitatea

$$S.S'.S'' = T$$

rezultă egalitățile

$$S\,S' = T\,S''^{-1}$$
$$S = T\,S''^{-1}\,S'^{-1}$$
$$S' = S^{-1}\,T\,S''^{-1}.$$

In cele ce urmează vom consideră numai transformările lineare.

125. *Reducerea transformărilor lineare la tipuri simple.*
Teoremă. Orice transformare lineară

$$(1) \qquad V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1,$$

se poate exprimà printr'un produs de puteri pozitive și negative cu ajutorul transformărilor elementare.

$$(2) \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ [1]

I. *Unul din cele patru numere a, b, c, d este nul.*

Putem presupune că acel număr este situat în prima linie a lui V; căci în caz contrar, produsul

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

are un număr nul în prima linie. De unde rezultă expresiunea

$$V = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Dintre cele două numere ale primei linii, putem presupune că numărul nul ocupă rangul ce voim, de ex. rangul al doilea. Căci dacă $a = o$, considerăm produsul

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix};$$

de unde

$$V = T^{-1}\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

Fie dar

$$V = \begin{pmatrix} a & o \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad = 1;$$

de unde

$$a = d = 1 \text{ sau } a = d = -1.$$

---

[1] Aceste transformări coincid cu formulele 4°, 5°, (§, 84); ele corespund sistemului de tăieturi din paragraful citat.

1^0. $a = d = 1$. Dacă $c>o$, considerăm egalităţile

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ c-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ c-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2 = \ldots = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^c;$$

de unde

$$(4)\qquad \mathrm{V} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^c = \mathrm{S}^c.$$

Dacă $c<o$, considerăm egalităţile

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ c+1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ c+2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^2 = \ldots\ldots = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-c}.$$

Insă

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \mathrm{S}^{-1};$$

prin urmare, în ambele cazuri ($c \lessgtr o$) egalitatea (4) subsistă.

2^0. $a=d=-1$, adică

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ c & -1\end{pmatrix};$$

avem

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ c & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -c & 1\end{pmatrix} = \mathrm{S}^{-c}.$$

Insă

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^2 = \mathrm{T}^2;$$

prin urmare

$$(5)\qquad \mathrm{V} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ c & -1\end{pmatrix} = \mathrm{S}^{-c}\,\mathrm{T}^2.$$

II. *Nici unul din cele patru numere a, b, c, d nu este nul.* Acest caz se poate aduce la cel precedent.

Presupunând $|a| \geqslant |b|$, fie

$$a = b\lambda + a_1,$$

a_1 fiind restul diviziunii lui a prin b; prin urmare $|a_1| < |b|$. Să punem

$$c = d\lambda + c_1;$$

avem

$$(6)\qquad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b\\ c_1 & d\end{pmatrix} = \mathrm{S}^\lambda \begin{pmatrix}a_1 & b\\ c_1 & d\end{pmatrix}.$$

In cazul $|a| < |b|$, avem $\lambda = o$, $a_1 = a$, $c_1 = c$.

Dacă $a_1 = o$, transformarea intră în cazul I.

Dacă $a_1 \neq o$, fie

$$b = a_1\mu + b_1, \quad |b_1| < |a_1|$$

şi

$$d = c_1 \mu + d_1;$$

avem

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Dacă $b_1 = o$, intrăm în cazul I, etc. Resturile a_1, b_1, $a_2, \ldots$ ale diviziunilor merg descrescând, astfel că după un număr limitat de operaţiuni, unul din numerele primei linii devine nul.

Transformarea

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se reduce în modul următor. Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mu}$$

şi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{S.\,T.\,S};$$

prin urmare

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\mathrm{S\,T\,S})^{\mu}.$$

De unde rezultă, pentru transformarea V, expresiunea

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{S}^{\lambda} (\mathrm{S.T.S})^{\mu}\, \mathrm{S}^{\lambda_1}$$

$$= \mathrm{S}^{\lambda+\mu}\, \mathrm{T}^{\mu}\, \mathrm{S}^{\mu+\lambda_1} \ldots\ldots,$$

numerele λ, μ, $\lambda_1, \ldots$ fiind numere întregi pozitive sau negative; numărul λ poate fi nul.

q. e. d.

Exemple.

1⁰.
$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (\mathrm{S.\,T.\,S})^2\, \mathrm{S}^2 \text{ (formula (8)).}$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{S}\,(\mathrm{S\,T\,S})^2\, \mathrm{S}^2 = \mathrm{S}^2\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}^2\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}^3.$$

2⁰.
$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{T}^{-1}\, \mathrm{S}^2$$

$$V = S^{-1}\, T^{-1}\, S^{-3}\, T^{-1}\, S^{2}$$

$$\left[\begin{array}{ll} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ S^{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, & S^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right]^{1)}.$$

III. TEOREME GENERALE.

126. *O funcţiune uniformă dublu periodică devine neapărat infinită într'un paralelogram de perioade.* In adevăr, funcţiunea având aceeaş valoare în puncte congruente, dacă modulul ei ar fi într'un paralelogram de perioade, mai mic decât un număr fix M, ar urmà ca el să fie mai mic decât M în tot planul, prin urmare funcţiunea s'ar reduce la o constantă. Aşadar nu există funcţiune dublu periodică care să fie olomorfă într'un paralelogram de perioade.

Se numeşte *funcţiune eliptică* o funcţiune uniformă $f(u)$ dublu periodică care nu are alte singularităţi decât poluri. Este evident că punctul dela infinit este punct singular esenţial, căci altmintrelea $f(u)$ s'ar reduce la o funcţiune raţională.

Numim *ordin* al unei funcţiuni eliptice, *numărul polurilor* ce are funcţiunea într'un paralelogram elementar, fiecare pol fiind socotit cu gradul său de multiplicitate.

127. *Suma reziduurilor unei funcţiuni eliptice $f(u)$ relative la polurile situate într'un paralelogram de perioade este nulă.* In adevăr, această sumă este dată de integrala

$$S = \frac{1}{2i\pi}\int f(u)\, du,$$

luată după conturul paralelogramului în sensul pozitiv. Insă în două puncte congruente $f(u)$ având aceeaş valoare şi două laturi ale paralelogramului fiind descrise în sens invers, aceste laturi dau pentru integrală valori egale şi de semne contrarii. De unde rezultă

$$S = 0.$$

Demonstraţiunea presupune că funcţiunea $f(u)$ n'are poluri pe conturul paralelogramului, căci în aceste puncte integrala n'are sens. Insă polurile funcţiunii fiind puncte izolate, putem, printr'o

---

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S^{-1}.\, T^{-1}.\, S^{-1};\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = S^{-2}.$

translaţiune convenabilă, face ca laturile paralelogramului să nu treacă prin niciunul din ele [1]).

Corolar. Ordinul unei funcţiuni eliptice este cel puţin doi. Căci dacă ordinul funcţiunii ar fi unu, reziduul său ar fi nul, adică funcţiunea n'ar aveà niciun pol într'un paralelogram elementar; ceeace este imposibil (§ 126).

128. *Numărul zerurilor unei funcţiuni eliptice într'un paralelogram de perioade este egal cu numărul polurilor.*

Fie n numărul zerurilor şi n' numărul polurilor funcţiunii $f(u)$ situate într'un paralelogram de perioade. Putem presupune acest paralelogram situat astfel ca laturile sale să nu conţină nici un zero şi niciun pol al lui $f(u)$. Avem aşà dar

$$n - n' = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du,$$

integrala fiind luată după conturul paralelogramului în sensul pozitiv. Insă $\dfrac{f'(u)}{f(u)}$ este o funcţiune eliptică având aceleaşi perioade ca $f(u)$; integrala considerată este aşadar nulă (§ 127) şi avem $n' = n$.

Corolar. Funcţiunea $f(u) - C$, C fiind o constantă arbitrară, având aceleaşi perioade şi poluri ca $f(u)$, va admite într'un paralelogram de perioade acelaş număr de zeruri ca $f(u)$. Dacă $f(u)$ este de ordinul n, numărul zerurilor egale sau neegale ale ecuaţiunii $f(u) - C = o$ va fi n. Cu alte cuvinte, există în interiorul paralelogramului n puncte, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, distincte sau nu, în cari $f(u)$ primeşte aceeaş valoare arbitrară C. Numărul acestor puncte este egal cu ordinul funcţiunii.

129. *Suma zerurilor unei funcţiuni eliptice în interiorul unui paralelogram de perioade, este egală cu suma polurilor, abstracţiune făcând de multipli de perioade* (Liouville).

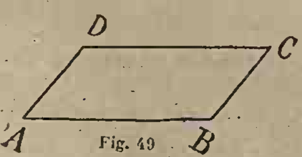

Fig. 49

Să considerăm un paralelogram ABCD având vârful A într'un punct ordinar u_0, celelalte vârfuri fiind respectiv în punctele

$$u_0 + \omega,\ u_0 + \omega + \omega',\ u_0 + \omega'.$$

[1]) Se mai poate procede în modul următor:

Dacă $f(u)$ are poluri pe o latură, va aveà tot atâtea poluri şi pe latura opusă care, prin definiţiune, nu face parte din acelaş paralelogram. Vom evità polurile (fig. 48) prin semicercuri congruente (ale căror puncte sunt respectiv congruente).

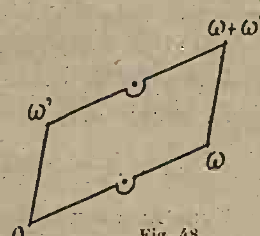

Fig. 48

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zerurile şi $b_1, b_2, \ldots b_n$ polurile funcţiunii, distincte sau nu, situate în acest paralelogram. Avem:

$$\Sigma a - \Sigma b = \frac{1}{2i\pi}\int_{ABCDA} \frac{u f'(u)}{f(u)}\, du.$$

Să evaluăm integrala după laturile paralelogramului, paralele două câte două.

Avem

$$(AB) + (CD) = \int_{u_0}^{u_0+\omega} \frac{u\, f'(u)}{f(u)}\, du - \int_{u_0+\omega'}^{u_0+\omega'+\omega} \frac{u f'(u)}{f(u)}\, du,$$

sau, înlocuind în ultima integrală u prin $u + \omega'$,

$$(AB) + (CD) = \int_{u_0}^{u_0+\omega} \left[\frac{u f'(u)}{f(u)} - \frac{(u+\omega') f'(u+\omega')}{f(u+\omega')}\right] du,$$

$$= -\omega' \int_{u_0}^{u_0+\omega} \frac{f'(u)}{f(u)}\, du = -\omega' \log \frac{f(u_0+\omega)}{f(u_0)} = -\omega' \log 1 = 2m' i \pi \omega'.$$

De asemenea, avem

$$(BC) + (DA) = 2mi\pi\omega,$$

m şi m' fiind numere întregi sau zero. Prin urmare

$$\Sigma a - \Sigma b = m\omega + m'\omega',$$

sau, abstracţiune făcând de multipli de ω şi ω',

$$\Sigma a \equiv \Sigma b.$$

Corolar. Fie $u_1, \ldots, u_n$ rădăcinile ecuaţiunii

$$f(u) - C = 0,$$

situate într'un paralelogram de perioade. C fiind o constantă arbitrară. Vom aveà

$$\Sigma u_i \equiv \Sigma b_i = \text{constantă},$$

adică, *suma valorilor argumentelor dintr'un paralelogram de perioade pentru care $f(u)$ primeşte aceeaş valoare arbitrară este constantă* ($\equiv$ suma polurilor).

130. Din corolarul precedent rezultă că dacă $f(u)$ este o funcţiune eliptică de ordinul al doilea având un pol dublu α, sau două poluri simple α, β, avem respectiv

$$f(\alpha + u) = f(\alpha - u), \quad f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + u\right) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - u\right).$$

Funcţiunea transformată

$$\varphi(u) = f(\alpha + u),$$

sau
$$\varphi(u) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+u\right)$$
satisface egalitatea
$$\varphi(-u) = \varphi(u),$$
oricare ar fi punctul u. Ea este aşadar o funcţiune pară.

131. *Teorema lui Liouville* (129) *este cuprinsă în teorema lui Abel asupra adiţiunii integralelor eliptice de speţa I.*

In adevăr, fie R (x) o funcţiune raţională pe suprafaţa T; ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ respectiv zerurile şi polurile sale şi fie $u(x)$ integrala eliptică de speţa I relativă la suprafaţa T; avem (5 § 85):

(1) $$\sum_1^h u(\xi_i) \equiv \sum_1^h u(\eta_i) \pmod{\omega, \omega'}$$

Insă, $u(x)$ fiind integrală eliptică de speţa I, rezultă că funcţiunea inversă $x = \varphi(u)$ este o funcţiune eliptică de u; prin urmare expresiunea

(2) $$R(x) = R[\varphi(u)] = F(u)$$

este funcţiune eliptică de u. Fie a_i una din valorile integralei u în punctul ξ_i şi b_i una din valorile aceleiaş integrale în punctul η_i, adică
$$u(\xi_i) = a_i \quad u(\eta_i) = b_i.$$

Punctele a_i şi b_i sunt aşà dar respectiv zerurile şi polurile funcţiunei F (u). Egalitatea (1) devine
$$\Sigma a_i \equiv \Sigma b_i \pmod{\omega, \omega'}.$$

q. e. d.

132. *Două funcţiuni eliptice,* $f(u)$, $\varphi(u)$ *având aceleaşi perioade, aceleaşi poluri şi aceleaşi zeruri sunt într'un raport constant.* Căci raportul
$$\frac{f(u)}{\varphi(u)}$$
este o funcţiune cu aceleaşi perioade şi fără poluri, prin urmare se reduce la o constantă.

133. *Două funcţiuni eliptice* $f(u)$, $\varphi(u)$ *de ordinul al doilea, având aceleaşi perioade şi aceleaşi poluri, sunt legate între ele printr'o ecuaţiune lineară cu coeficienţi constanţi.*

In adevăr, presupunând polurile simple, fie a şi b cele două poluri situate într'un paralelogram elementar. In interiorul paralelogramului cele două funcţiuni se vor puteà pune sub forma

(1) $$\begin{aligned} f(u) &= A\left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b}\right) + f_1(u), \\ \varphi(u) &= A'\left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b}\right) + \varphi_1(u), \end{aligned}$$

A şi A' fiind reziduurile lor, corespunzătoare polului a şi $f_1(u)$, $\varphi_1(u)$ fiind funcţiuni olomorfe în interiorul paralelogramului. Eliminând parenteza între aceste două egalităţi, obţinem ecuaţiunea

$$A' f(u) - A\varphi(u) = A' f_1(u) - A\varphi_1(u).$$

Membrul al doilea fiind olomorf în paralelogramul considerat, rezultă că membrul întâiu, care este o funcţiune eliptică, se reduce la o constantă. Avem aşà dar, între cele două funcţiuni, o ecuaţiune de forma

$$(2) \qquad A' f(u) - A\varphi(u) = C.$$

Dacă a este un pol dublu, reziduul corespunzător este nul şi ecuaţiunile (1) se înlocuesc prin cele următoare

$$(3) \qquad f(u) = \frac{A}{(u-a)^2} + f_1(u),$$

$$\varphi(u) = \frac{A'}{(u-a)^2} + \varphi_1(u),$$

A şi A' fiind doi coeficienţi constanţi. Rezultatul eliminării lui $\frac{1}{(u-a)^2}$ conduce la aceeaş ecuaţiune (2).

134. *Teoremă. O funcţiune eliptică $f(u)$, care primeşte valori reale dealungul unui segment al axei reale, admite o perioadă reală şi o perioadă pur imaginară.* Să demonstrăm mai întâi că dacă o *cantitate imaginară ω este o perioadă a funcţiunii, cantitatea imaginară conjugată, reprezintată prin ω', este de asemenea o perioadă.*

In adevăr, fie u şi u' două argumente imaginare conjugate, cantităţile $u+\omega$, $u'+\omega'$ sunt de asemenea imaginare conjugate şi prin urmare valorile

$$f(u'),\ f(u'+\omega')$$

sunt respectiv conjugate cu valorile

$$f(u),\ f(u+\omega).$$ [1]

In virtutea ipotezei, avem

$$f(u+\omega) = f(u),$$

prin urmare

$$f(u'+\omega') = f(u').$$

Insă u' ca şi u este un argument oarecare, de unde conchidem că egalitatea

$$f(u+\omega') = f(u)$$

subsistă oricare ar fi valoarea lui u şi prin urmare ω' este o perioadă.

---

[1]) I. p. 299–300.

De aici rezultă teorema ce voim să demonstrăm. Căci suma şi diferenţa a două perioade sunt perioade, prin urmare cantităţile $\omega + \omega'$ şi $\omega - \omega'$ sunt perioade ale funcţiunii: cea dintâi este *reală* şi cea de a doua este *pur imaginară*.

135. *Analogii între proprietăţile funcţiunilor raţionale $F(x, y)$ pe suprafaţa T cu două foi şi patru puncte critice şi proprietăţile funcţiunilor eliptice $f(u)$ într'un paralelogram de perioade.* Să menţionăm proprietăţile următoare:

1°. O funcţiune raţională $F(x, y)$ finită pe toată suprafaţa T este o constantă (§ 58); aceeaş proprietate aparţine funcţiunilor eliptice $f(u)$ într'un paralelogram de perioade.

2°. Ordinul minimum al unei funcţiuni raţionale $F(x, y)$ pe suprafaţa T este 2 (§ 60), adică funcţiunea $F(x, y)$ are, pe suprafaţa T, cel puţin două poluri simple sau un pol dublu; aceeaş proprietate aparţine funcţiunilor eliptice într'un paralelogram elementar.

3°. Suma reziduurilor unei funcţiuni raţionale $F(x, y)$ pe suprafaţa T este nulă (§ 56); aceeaş proprietate aparţine funcţiunilor eliptice într'un paralelogram de perioade.

4°. Numărul zerurilor funcţiunii $F(x, y)$ este egal cu numărul polurilor, fiecare zero şi pol fiind socotit de atâtea ori câte unităţi sunt în ordinul său de multiplicitate (§ 56). Aceeaş proprietate aparţine funcţiunilor eliptice $f(u)$ într'un paralelogram de perioade.

Aceste analogii se explică dacă observăm, de o parte, că suprafaţa T, limitată prin conturul format de ţărmurile celor două tăieturi cari o fac simplu conexă (suprafaţa T'), corespunde, într'un mod biunivoc, unui paralelogram de perioade (§ 108) ale cărui laturi corespund acelor ţărmuri şi, de altă parte, că variabila x şi variabila $y = \sqrt{R(x)}$, $R(x)$ fiind polinom de gradul 3 sau 4, sunt funcţiuni eliptice de aceeaş variabilă u.

In virtutea acestor proprietăţi, funcţiunea raţională $F(x, y)$ se transformă într'o funcţiune eliptică $f(u)$, zerurile şi polurile (x, y) ale funcţiunei $F(x, y)$ se transformă în zeruri şi poluri (u) de acelaş ordin ale funcţiunii $f(u)$. In fine, integrala

$$\int R(x, y)\, dx$$

dealungul conturului suprafeţii T' se transformă în integrala

$$\int f(u) \frac{dx}{du} du$$

dealungul paralelogramului perioadelor.

CAPITOLUL XIII.

FUNCŢIUNILE σu, ζu, $\wp u$.

Prin inversiunea integralei eliptice de speţa I (§ 107) s'a stabilit existenţa funcţiunilor *eliptice*; ne propunem acum să construim efectiv asemenea funcţiuni. Vom consideră funcţiunile introduse de Weierstrass.

136. ***Funcţiunea*** σu. Cu două cantităţi date ω_1, ω_3 al căror raport este imaginar putem construì o funcţiune întreagă care să admită ca zeruri de ordinul întâiu punctele

$$(1)\qquad w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

m şi n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. Una din funcţiunile în număr infinit ce se pot construì astfel (toate diferind între ele printr'un factor exponenţial $e^{G(x)}$) este funcţiunea introdusă de Weierstrass

$$(\mathrm{I})\qquad \sigma u = u \prod_{m,n}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

în care simbolul Π' înseamnă că m şi n primesc toate valorile întregi, afară de valorile $m = n = 0$. (I. p. 369).

Să ne închipuim construit paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ având unul din vârfurile sale în origină, precum şi reţeaua corespunzătoare. Zerurile funcţiunii σu coincid cu vârfurile acestei reţele.

Funcţiunea σu depinde de argumentul u şi de constantele ω_1, ω_3, [1]) cari au servit la construirea ei. Dacă voim să punem în evidenţă aceste constante, se obişnueşte a se scrie

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

Proprietăţi. 1°. *Funcţiunea* σu *este o funcţiune impară*, adică avem egalitatea

$$(2)\qquad \sigma(-u) = -\sigma u.$$

In adevăr, fiecărui factor

$$\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

corespunde, în produsul (I), factorul

$$\left(1 + \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

---

[1]) Cantităţile $2\omega_1$, $2\omega_3$ le numim perioade.

dedus din cel dintâiu când schimbăm semnele indicilor m, n. Insă înlocuind u prin $-u$, aceşti doi factori se permută şi produsul Π' nu se schimbă. De unde rezultă egalitatea (2)

Să notăm egalităţile următoare:

$$(3)\qquad \lim_{u=0} \frac{\sigma u}{u} = 1, \qquad \left[\frac{d\,\sigma u}{du}\right]_{u=0} = 1,$$

cari rezultă din expresiunea (I).

2°. *Funcţiunea σu este omogenă în raport cu cantităţile u, ω_1, ω_3 şi gradul său de omogeneitate este egal cu 1.* Această proprietate se constată imediat, dacă înlocuim, în egalitatea (I), u, ω_1, ω_3 prin λu, $\lambda\omega_1$, $\lambda\omega_3$, λ fiind un factor arbitrar diferit de zero. Obţinem egalitatea

$$(4)\qquad \sigma(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \lambda\, \sigma(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

3°. *Funcţiunea σu nu se schimbă dacă înlocuim perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ printr'un sistem de perioade echivalente.* Fie $(2\omega'_1, 2\omega'_3)$ un sistem de perioade echivalente cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ şi

$$(5)\qquad \sigma(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = u\, \Pi' \left(1 - \frac{u}{w'}\right) e^{\frac{u}{w'} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w'^2}}, \quad w' = 2m\,\omega'_1 + 2n\,\omega'_3$$

funcţiunea σu construită cu aceste perioade. Vârfurile reţelelor de paralelograme construite cu ajutorul acestor două sisteme de perioade fiind aceleaşi (§ 121), rezultă că zerurile funcţiunilor

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3), \qquad \sigma(u \mid \omega'_1, \omega'_3)$$

coincid prin urmare şi membrele de al doilea (I) şi (5) conţin aceiaşi factori într'o ordine diferită. Aceste produse fiind absolut convergente, conchidem că cele două funcţiuni σu sunt identice.

Dacă substituim perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ alte două perioade *nu echivalente*, funcţiunea σu corespunzătoare nu are aceleaşi zeruri ca funcţiunea primitivă şi prin urmare cele două funcţiuni σu sunt diferite. Din cele ce preced conchidem:

Condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca două funcţiuni σu, construite cu perioade diferite, să coincidă, este ca cele două sisteme de perioade să fie echivalente.

137. **Funcţiunea ζu.** Această funcţiune este definită prin egalitatea

$$(6)\qquad \zeta u = \frac{d}{du} \log \sigma u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}.$$

Luând derivata logaritmică a ambelor membre ale egalităţii (I), obţinem

$$(II)\qquad \zeta u = \frac{1}{u} + \Sigma' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

simbolul Σ' referindu-se la toate valorile întregi ale numerelor m şi n *dela* $-\infty$ *la* $+\infty$, exceptând valorile $m = n = o$.

Se poate vedeà direct că seria din membrul al doilea este absolut şi uniform convergentă în orice porţiune finită a planului care nu conţine nici unul din punctele $u = w$. Căci termenul general

$$\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} = \frac{u}{w^2\,(u - w)},$$

este, pentru valori foarte mari ale lui m şi n, comparabil cu termenul $\frac{1}{w^3}$.

Punctele $u = w$ sunt poluri de ordinul întâiu ale funcţiunii; reziduul relativ la un pol oarecare este egal cu 1. De aci rezultă că funcţiunea *ζu nu poate fi funcţiune eliptică,* căci oricare ar fi paralelogramul considerat în plan, *suma reziduurilor relative la polurile situate în interiorul său nu este nulă.*

Proprietăţi. 1°. Din relaţiunile

$$\sigma(-u) = -\sigma u, \qquad \sigma'(-u) = +\sigma' u,$$

rezultă

$$(7)\qquad \zeta(-u) = -\zeta u$$

adică ζu este *o funcţiune impară.*

2°. Dacă în seria (II) înlocuim u, ω_1, ω_3 prin λu, $\lambda\omega_1$, $\lambda\omega_3$ obţinem egalitatea

$$(9)\qquad \zeta(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \frac{1}{\lambda}\, \zeta(u \mid \omega_1, \omega_3),$$

care exprimă că ζu este *o funcţiune omogenă de gradul* -1 *în raport cu* u, ω_1, ω_3.

Desvoltarea funcţiunii ζu în domeniul originii. Să consoderăm un cerc cu centrul în origină şi trecând prin cel mai apropiat pol w. In interiorul acestui cerc avem $|u| < |w|$; prin urmare putem scrie

$$\frac{1}{u - w} = -\left[\frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \ldots + \frac{u^{n-1}}{w^n} + \ldots\right].$$

Inlocuind, în egalitatea (II), $\frac{1}{u - w}$ prin desvoltarea precedentă şi ţinând seama că seriile $\Sigma' \frac{1}{w^n}$, pentru $n > 3$, sunt absolut convergente şi că în sumele $\Sigma' \frac{1}{w^{2n+3}}$, termenii se distrug doi câte doi, obţinem, ordonând după puterile lui u,

$$\text{(10)} \qquad \zeta u = \frac{1}{u} - u^3 \, \Sigma' \frac{1}{w^4} - u^5 \, \Sigma' \frac{1}{w^6} - \dots$$

Să integrăm ambele membre ale egalităţii precedente; obţinem

$$\log \frac{\sigma u}{c u} = -\frac{u^4}{4} \, \Sigma' \frac{1}{w^4} - \frac{u^6}{6} \, \Sigma' \frac{1}{w^6} - \dots$$

De unde

$$\sigma u = u \, e^{-\frac{u^4}{4} \Sigma' \frac{1}{w^4} - \dots}$$

căci

$$c = \left(\frac{\sigma u}{u}\right)_0 = 1.$$

Desvoltând exponenţiala din membrul al doilea în serie întreagă, obţinem, pentru funcţiunea σu, seria

$$\text{(11)} \qquad \sigma u = u - \frac{u^5}{4} \Sigma' \frac{1}{w^4} - \frac{u^7}{6} \Sigma' \frac{1}{w^6} + A u^9 + \dots$$

Această egalitate, deşi obţinută în ipoteza că $|u|$ este mai mic ca cel mai mic din modulele $2|\omega_1|$, $2|\omega_3|$, este valabilă în tot planul (u), căci membrul întâiu fiind o funcţiune întreagă şi amândouă membrele fiind egale într'o regiune a planului, sunt egale în tot planul.

138. ***Funcţiunea pu.*** Această funcţiune este definită de egalitatea

$$\text{(12)} \qquad pu = -\frac{d\zeta u}{du} = -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma u.$$

Avem aşa dar, derivând seria (II),

$$\text{(III)} \qquad pu = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left(\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Din convergenţa absolută a seriei (II) rezultă că seria din urmă este absolut convergentă în tot planul (u) din care excludem punctele $u = w$. Acest rezultat se constată direct, observând că termenul general

$$\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}$$

este, pentru valori foarte mari ale lui m şi n, comparabil cu $\frac{1}{w^3}$.

Punctele $u = w$ sunt poluri de ordinul al doilea ale funcţiunii pu; rèziduurile corespunzătoare sunt nule.

Proprietăţi. 1°. Funcţiunea pu, fiind derivata unei funcţiuni impare, este o *funcţiune pară*. Avem aşà dar

$$(12) \qquad p(-u) = pu.$$

Funcţiunea pu este omogenă de gradul -2 *în raport cu* u, ω_1, ω_3; ceeace se recunoaşte înlocuind în egalitatea (III) u ω_1, ω_3 prin λu, $\lambda\omega_1$, $\lambda\omega_3$:

$$(13) \qquad p(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \frac{1}{\lambda^2} p(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

Derivând ambele membre ale egalităţii (10), avem

$$(14) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \Sigma' \frac{1}{w^4} + 5u^4 \Sigma' \frac{1}{w^6} + \ldots,$$

egalitate valabilă în acelaş cerc ca şi seria (10).

139. *Derivata* $p'u$. Derivând ambele membre ale egalităţii (III), obţinem funcţiunea

$$(\text{IV}) \qquad p'u = -2\Sigma \frac{1}{(u-w)^3},$$

care admite punctele $u = w$ ca poluri de ordinul al treilea. Această funcţiune este impară:

$$(15) \qquad p'(-u) = -p'(u).$$

In domeniul originii avem, derivând ambele membre ale egalităţii (14),

$$(16) \qquad p'u = -\frac{2}{u^3} + 6u\Sigma' \frac{1}{w^4} + 20u^3\Sigma' \frac{1}{w^6} + \ldots$$

140. Proprietatea 3° (§ 136) a funcţiunii σu de a rămâneà neschimbată, când substituim perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ alte două perioade echivalente şi numai în acest caz, aparţine funcţiunilor ζu, pu, $p'u$.

141. *Dubla periodicitate*. Expresiunea (IV) a derivatei $p'u$ pune în evidenţă proprietatea acestei funcţiuni, aceea a *periodicităţii duble*. Intr'adevăr, înlocuind u prin $u + 2\omega_1$, obţinem egalitatea

$$p'(u + 2\omega_1) = -2\Sigma \frac{1}{[u - 2(m-1)\omega_1 - 2n\omega_3]^3},$$

în care membrul al doilea nu diferă de membrul al doilea (IV) de cât prin aceea că indicele m este înlocuit prin $m-1$; însă m variind dela $-\infty$ la $+\infty$, $m-1$ trece prin aceleaşi valori şi cele două serii sunt egale.

Avem aşà dar

(1) $$p'(u + 2\omega_1) = p'u.$$

In acelaş mod se recunoaşte că avem

(2) $$p'(u + 2\omega_3) = p'u.$$

De unde rezultă că funcţiunea $p'u$ admite cantităţile $2\omega_1$, $2\omega_3$ ca perioade.

Integrând ambele membre ale egalităţii (1), obţinem

$$p(u + 2\omega_1) = pu + C.$$

Făcând $u = -\omega_1$, rezultă

$$p\,\omega_1 = p(-\omega_1) + C.$$

Insă $p\,\omega_1 = p(-\omega_1)$, prin urmare $C = o$. Aşà dar, avem

(3) $$p(u + 2\omega_1) = pu.$$

Deasemenea, plecând dela egalitatea (2), găsim

(4) $$p(u + 2\omega_3) = pu.$$

Funcţiunea pu admite aşà dar aceleaşi două perioade. Această funcţiune neavând în tot planul alte singularităţi decât poluri şi admiţând perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ este, prin urmare, o *funcţiune eliptică*.

Proprietatea periodicităţii duble a funcţiunii pu rezultă şi din definiţiunea (III) a acestei funcţiuni. In adevăr, diferenţa $p(u + 2\omega_1) - pu$ se poate scrie

$$p(u+2\omega_1) - pu = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{(u + 2\omega_1 - w)^2} - \frac{1}{(u - w)^2}\right].$$

Pentru o valoare constantă oarecare a lui n, seriile

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[u - 2n\,\omega_3 - 2(m-1)\,\omega_1]^2}, \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[u - 2n\,\omega_3 - 2m\,\omega_1]^2}$$

sunt absolut convergente şi evident egale căci m şi $m-1$ trec prin aceleaşi valori când m variază dela $-\infty$ la $+\infty$; prin urmare avem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{(u + 2\,\omega_1 - w)^2} - \frac{1}{(u - w)^2}\right] = 0;$$

de unde rezultă

$$p(u + 2\,\omega_1) = pu.$$

In acelaş mod se probează că $2\omega_3$ este o perioadă.

Intr'un paralelogram construit cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, funcţiunea pu are un *singur pol dublu.* Această funcţiune este aşà dar de ordinul al doilea — ordinul cel mai mic posibil — şi paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ este un paralelogram elementar. Funcţiunea pu este ceà mai simplă dintre funcţiunile eliptice: derivata sa $p'u$ fiind de ordinul al treilea pe când derivata unei funcţiuni eliptice care are două poluri simple, este de ordinul al patrulea.

142. *Rădăcinile ecuaţiunii*

$$(1) \qquad pu = pa,$$

a fiind o constantă arbitrară diferită de un multiplu de perioade.

Funcţiunea pu fiind de ordinul al doilea, ecuaţiunea precedentă are două rădăcini într'un paralelogram elementar, prin urmare două rădăcini *nu congruente* în tot planul. Punctul $u=a$ este evident o rădăcină şi deoarece funcţiunea pu este pară, $u=-a$ este de asemenea o rădăcină. Expresiunea generală a rădăcinilor ecuaţiunii (1) este aşadar

$$(2) \qquad u = \pm a + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

m şi n fiind numere întregi arbitrare.

In cazul $a=\omega_1$, ω_3, $\omega_1+\omega_3$, punctele a şi $-a$ sunt puncte congruente; atunci a este neapărat o rădăcină dublă a ecuaţiunii (1). Se va vedeà, dealtmintrelea, mai jos, că valorile ω_1, ω_3, $\omega_1+\omega_3$ anulează derivata $p'u$.

143. Derivata $p'u$ având un pol triplu unic, $u=o$, abstracţiune făcând de multipli de $2\omega_1$, $2\omega_3$, este o funcţiune eliptică de ordinul al *treilea*, pentru care perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ sunt perioade primitive.

Zerurile funcţiunii $p'u$. Să facem în egalitatea

$$p'(u+2\omega_1) = p'u$$

$u=-\omega_1$; obţinem

$$p'\omega_1 = p'(-\omega_1) = -p'\omega_1$$

Punctul $u = \omega_1$ nefiind pol, rezultă că el este un zero.

In acelaş mod conchidem, plecând dela relaţiunile

$$p'(u+2\omega_3) = p'u, \quad p'(u+2\omega_1+2\omega_3) = p'u,$$

în cari înlocuim u respectiv prin $-\omega_3$, $-(\omega_1+\omega_3)$, că ω_3 şi $\omega_1+\omega_3$ sunt zeruri.

Se introduce, pentru motive de simetrie, cantitatea ω_2 definită de relaţiunea

$$(3) \qquad \omega_1+\omega_2+\omega_3 = o.$$

Zerurile funcțiunii $p'u$ sunt dar, abstracțiune făcând de multipli de perioade,

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3.$$

In paralelogramul ale cărui vârfuri sunt punctele:

$$0, 2\omega_1,\ 2(\omega_1+\omega_3)=-2\omega_2,\ 2\omega_3,$$

zerurile lui $p'u$ sunt semiperioadele

$$\omega_1,\ -\omega_2,\ \omega_3.$$

Să punem

$$p\omega_1=e_1,\qquad p\omega_2=e_2,\qquad p\omega_3=e_3.$$

Aceste trei cantități sunt diferite între ele; căci, dacă am aveà

$$p\omega_1=p\omega_3$$

ar urmà să avem egalitatea (2 § 142):

$$\omega_1=\pm\omega_3+2m\omega_1+2n\omega_3,$$

adică perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ n'ar fi distincte (§ 115).

In acelaş mod se recunoaşte imposibilitatea egalităților

$$p\omega_1=p\omega_2,\quad p\omega_2=p\omega_3.$$

144. ***Ecuațiunea diferențială a funcțiunii pu.*** Intre funcțiunea pu şi derivata sa $p'u$ există o ecuațiune algebrică cu coeficienți independenți de u ce se poate obține în modul următor: Să formăm diferența

$$(1)\quad p'^2u-4p^3u=-\frac{60}{u^2}\Sigma'\frac{1}{w^4}-140\,\Sigma'\frac{1}{w^6}+Au^2+\ldots,$$

servindu-ne de seriile (14) şi (16), (§ 138, 139), cari reprezintă funcțiunile pu şi $p'u$ în domeniul originii. In acelaş domeniu avem seria

$$(2)\qquad 60\,pu\,\Sigma'\frac{1}{w^4}=\frac{60}{u^2}\Sigma'\frac{1}{w^4}+Bu^2+\ldots$$

Adunând egalitățile (1) şi (2), obținem egalitatea

$$(3)\quad p'^2u-4p^3u+60\,pu\,\Sigma'\frac{1}{w^4}=-140\,\Sigma'\frac{1}{w^6}+Cu^2+\ldots$$

Membrul întâiu fiind o funcțiune eliptică cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, olomorfă în paralelogramul perioadelor, se reduce la o constantă.

Această constantă este $-140\,\Sigma'\frac{1}{w^6}$, valoarea membrului al doilea pentru $u=o$.

Punând

$$(4) \qquad g_2 = 60\,\Sigma' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140\,\Sigma' \frac{1}{w^6},$$

vom aveà între pu şi $p'u$ ecuaţiunea fundamentală

$$(5) \qquad p'^2u = 4\,p^3u - g_2\,pu - g_3.$$

Coeficienţii g_2 şi g_3 sunt, precum ne arată expresiunile (4), determinaţi când constantele ω_1 şi ω_3 sunt date; ei sunt omogeni în raport cu aceste cantităţi şi gradul lor de omogeneitate este respectiv egal cu -4, -6.

Dacă substituim perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ un alt sistem de perioade primitive $2\omega_1'$, $2\omega_3'$, vârfurile paralelogramelor celor două reţele corespunzătoare fiind aceleaşi, rezultă că expresiunile $2m\omega_1 + 2n\omega_3$ şi $2m\omega'_1 + 2n\omega'_3$ trec prin aceleaşi valori când m şi n primesc toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. De unde urmează că, substituind unui sistem de perioade primitive un alt sistem de perioade primitive, coeficienţii g_2 şi g_3 rămân neschimbaţi. Pentru acest motiv coeficienţii g_2 şi g_3 au primit numele de *invarianţi*.

Observare. Fiind date ecuaţiunile $pu = a$, $p'u = b$, cu condiţiunea de compatibilitate $b^2 = 4a^3 - g_2\,a - g_3$, există într'un paralelogram o singură valoare u care să satisfacă cele două ecuaţiuni. In adevăr, fie v un argument astfel ca $pv = a$; vom aveà $u = \pm v$. Insă $p'(-v) = -p'v$; de unde rezultă că numai una din valorile $\pm v$ satisface ecuaţiunea $p'u = b$.

145. Punând $x = pu$, ecuaţiunea (5) devine

$$(6) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4\,x^3 - g_2x - g_3.$$

Funcţiunea $x = pu$ este aşà dar o soluţiune a acestei ecuaţiuni diferenţiale; ea este o integrală particulară a ecuaţiunii (6), anume aceea care devine infinită pentru $u = 0$. Această ecuaţiune rămânând neschimbată când înlocuim u prin $u + C$, C fiind o constantă arbitrară, rezultă că $x = p(u + C)$ este o integrală şi prin urmare integrala generală a ecuaţiunii.

Să punem în evidenţă valorile e_1, e_2, e_3 ale lui pu, cărora corespunde valoarea zero pentru $p'u$; ecuaţiunea (5) se va scrie

$$(7) \qquad p'^2u = 4\,(pu - e_1)\,(pu - e_2)\,(pu - e_3).$$

Cantităţile e_1, e_2, e_3 sunt, după definiţiunea lor, omogene, de gradul -2, în raport cu ω_1 şi ω_3; ele satisfac, în virtutea ecuațiunii (5), relațiunile

$$(8)\quad \begin{cases} e_1+e_2+e_3=0, \\ e_1\,e_2+e_2\,e_3+e_3\,e_1=-\frac{1}{4}g_2, \\ e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3. \end{cases}$$

Reprezintând prin Δ discriminantul ecuațiunii

$$(9)\qquad 4x^3-g_2\,x-g_3=o,$$

vom luà

$$(10)\qquad \Delta=16\,(e_1-e_2)^2\,(e_2-e_3)^2\,(e_3-e_1)^2.$$

Factorul 16 se introduce pentru simplificarea rezultatului.
Pentru a calculà acest discriminant, să punem

$$f(x)=4x^3-g_2\,x-g_3=4(x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_3);$$

de unde, prin derivare, și înlocuind succesiv x prin e_1, e_2, e_3, avem

$$f'(e_1)=4(e_1-e_2)\,(e_1-e_3),$$
$$f'(e_2)=4(e_2-e_1)\,(e_2-e_3),$$
$$f'(e_3)=4(e_3-e_1)\,(e_3-e_2),$$

$$-\frac{1}{4}f'(e_1)\,f'(e_2)\,f'(e_3)=16\,(e_1-e_2)^2\,(e_2-e_3)^2\,(e_3-e_1)^2=\Delta.$$

Insă

$$f'(x)=12x^2-g_2;$$

prin urmare

$$\begin{aligned} f'(e_1)\,f'(e_2)\,f'(e_3) &=(12\,e_1^2-g_2)\,(12e_2^2-g_2)\,(12\,e_3^2-g_2) \\ &=12^3\,e_1^2\,e_2^2\,e_3^2-12^2\,g_2\,(e_1^2\,e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2)+12\,g_2^2(e_1^2+e_2^2+e_3^2)-g_2^3, \\ &=4\,(27\,g_3^2-g_2^3). \end{aligned}$$

Așadar avem

$$(11)\qquad \Delta=g_2^3-27\,g_3^2.$$

Δ este omogen și de gradul -12 în raport cu ω_1 și ω_3.

Constantele e_1, e_2, e_3 fiind distincte, rezultă $\Delta\neq o$.

146. *Definițiunea funcțiunei pu prin invarianți*

Până acì funcțiunea pu a fost definită în funcțiune de perioadele date $2\omega_1$, $2\omega_3$; ea satisface ecuațiunea diferențială

$$(1)\qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2=4x^3-g_2x-g_3$$

în care g_2 și g_3 au valorile (4) (§ 144). Să considerăm acum această ecuaţiune dată, în care coeficienţii g_2 şi g_3 sunt două *constante arbitrare* cu condiţiunea ca discriminantul

$$(2) \qquad \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

să fie diferit de zero. Voim să arătăm că *soluţiunea acestei ecuaţiuni care, pentru $u = o$, se reduce la ∞, coincide cu funcţiunea pu, construită cu perioadele integralei*

$$(3) \qquad u = \int_{\infty}^{x} \frac{du}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

determinate de două tăieturi cari fac simplu conexă suprafaţa T corespunzătoare ecuaţiunei

$$(4) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

In adevăr fie, $x = \varphi(u)$ funcţiunea ce rezultă din inversiunea integralei (3). Această funcţiune este uniformă în tot planul (u), neavând la distanţă finită alte singularităţi decât poluri; ea este dublu periodică, având ca perioade două perioade distincte ale integralei (3) (§ 107). Cu aceste perioade pe cari le notăm $2\omega_1$, $2\omega_3$, putem construi funcţiunea $p(u|\omega_1,\omega_3)$. Limita inferioară a integralei (3) fiind un punct de ramificaţiune (punctul $x=\infty$), rezultă că $\varphi(u)$ este o funcţiune pară [(10), § 106] şi totalitatea valorilor lui u în cari ea se reproduce este cuprinsă în expresiunea

$$(5) \qquad \pm u_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

u_0 fiind una din ele (§ 142) adică funcţiunea $\varphi(u)$ nu poate relua valoarea $\varphi(u_0)$ decât într'unul din punctele cuprinse în expresiunea (3).

In domeniul punctului $u = o$, funcţiunea $\varphi(u)$ este de forma

$$\varphi(u) = \frac{1}{u^2} + au^2 + bu^4 + \dots$$

Punctul $u = o$ este dar un pol de ordinul al doilea şi, în virtutea egalităţii

$$(6) \qquad \varphi(\pm u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \varphi(u),$$

toate polurile funcţiunei sunt de ordinul al doilea şi date de expresiunea

$$(7) \qquad u = 2m\omega_1 + 2n\omega_3.$$

Din cele ce preced rezultă că diferenţa

$$\varphi(u) - p(u \mid \omega_1, \omega_3)$$

este o funcţiune eliptică care nu are nici un pol; ea se reduce dar la o constantă. Această constantă este nulă, precum rezultă din desvoltarea funcțiunilor pu și $\varphi(u)$ în domeniul lui $u = o$. Avem așa dar identitatea

$$\varphi(u) = pu.$$

q. e. d.

Pentru a pune în evidență invarianții funcțiunei pu, se scrie $p(u; g_2, g_3)$. De asemenea în privința funcțiunilor σu și ζu: $\sigma(u; g_2, g_3)$, $\zeta(u; g_2, g_3)$.

Formulele de omogenitate corespunzătoare celor trei funcțiuni sunt

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma\left(\lambda u; \dfrac{g_2}{\lambda^4}, \dfrac{g_3}{\lambda^6}\right) = \lambda\,\sigma(u; g_2, g_3), \\ \zeta\left(\lambda u; \dfrac{g_2}{\lambda^4}, \dfrac{g_3}{\lambda^6}\right) = \dfrac{1}{\lambda}\zeta(u; g_2, g_3), \\ p\left(\lambda u; \dfrac{g_2}{\lambda^4}, \dfrac{g_3}{\lambda^6}\right) = \dfrac{1}{\lambda^2} p(u; g_2, g_3), \end{cases}$$

căci, multiplicând ω_1 și ω_3 cu λ, invarianții g_2 și g_3 se reproduc multiplicați respectiv cu λ^{-4}, λ^{-6}.

Făcând în formulele precedente $\lambda = i$ și înlocuind u prin iu, obținem relațiunile

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma(iu; g_2, g_3) = i\sigma(u; g_2, -g_3), \\ \zeta(iu; g_2, g_3) = -i\zeta(u; g_2, -g_3), \\ p(iu; g_2, g_3) = -p(u; g_2, -g_3). \end{cases}$$

147. *Derivate de diferite ordine ale funcțiunii pu.* Derivând ecuațiunea

$$(1)\qquad p'^2u = 4p^3u - g_2\,pu - g_3,$$

și suprimând $p'u$ din amândouă membrele, obținem

$$(2)\qquad p''u = 6p^2u - \frac{1}{2}g_2.$$

De unde, prin derivațiuni succesive,

$$(3)\quad \begin{cases} p'''u = 12\,pu\,p'u, \\ p^{\mathrm{IV}}u = 12\,p'^2u + 12\,pu\,p''u \\ \qquad\;\; = 120\,p^3u - 18\,g_2\,pu - 12\,g_3, \\ p^{\mathrm{V}}u = 18\,(20\,p^2u - g_2)\,p'u. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

Toate derivatele de ordin par sunt polinoame de pu, pe când derivatele de ordin impar se pot exprimà printr'un produs de $p'u$

cu un polinom de pu. Coeficienţii acestor polinoame sunt funcţiuni întregi de $\frac{1}{2}g_2$ şi de g_3.

Se mai poate observà că punând

$$p^{(2n)}u = f(pu), \quad p^{(2n+1)}u = p'u\,\varphi(pu),$$

gradele polinoamelor $f(pu)$, $\varphi(pu)$ sunt respectiv $n+1$, n. Aceasta se verifică din aproape în aproape.

148. Din ecuaţiunile (2) şi (3) putem, viceversa, deduce puterea a n^a, a lui pu, precum şi produsul acestei puteri prin $p'u$ $(n = 2, 3, \ldots)$, în *funcţiune lineară de pu şi de derivatele sale.* In adevăr, să considerăm ecuaţiunile cari determină derivatele de ordin par

$$p''u, \; p^{\mathrm{IV}}u, \ldots, \; p^{(2n)}u.$$

Acest sistem de n ecuaţiuni, lineare în raport cu puterile

$$p^2 u, \; p^3 u, \ldots, \; p^{n+1} u,$$

determină aceste puteri în funcţiune lineară de derivatele

$$p''u, \; p^{\mathrm{IV}}u, \ldots, \; p^{(2n)} u.$$

Considerând, de altă parte, ecuaţiunile care determină derivatele de ordin impar, obţinem funcţiunile

$$p'u\,pu, \; p'u\,p^2u, \ldots, \; p'u\,p^n u$$

exprimate în mod linear cu ajutorul derivatelor

$$p'''u, \; p^{\mathrm{IV}}u, \ldots, \; p^{(2n+1)} u.$$

149. *Formulă recurentă pentru a determinà coeficienţii desvoltării funcţiunii pu după puterile crescânde ale lui u.*

Punând, pentru prescurtare

$$(4) \qquad c_2 = 3\,\Sigma' \frac{1}{w^4}, \quad c_3 = 5\,\Sigma' \frac{1}{w^6}, \ldots,$$

avem (14) (§ 138).

$$(5) \qquad p u = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots + c^n u^{2n-2} + \ldots$$

De unde, derivând ambele membre,

$$(6) \quad p'u = -\frac{2}{u^3} + 2 c_2 u + 4 c_3 u^3 + \ldots + (2n-2)\, u^{2n-1} + \ldots$$

$$(7) \quad p''u = \frac{6}{u^4} + 2 c_2 + 4{,}3\, c_3 u^3 + \ldots + (2n-2)(2n-3)\, u^{2n-4} + \ldots$$

Ducând desvoltările lui pu şi $p''u$ în egalitatea

$$p''u = 6\,p^2u - \frac{1}{2}g_2$$

şi identificând coeficienţii lui u^{2n-4} din amândouă membrele, obţinem

$$(2\,n-2)\,(2\,n-3)\,c_n = 6\,(c_n + c_2\,c_{n-2} + \ldots + c_{n-2}\,c_2 + c_n);$$

de unde

$$(8)\qquad c_n = \frac{3}{(2n+1)\,(n-3)}\sum_{i=2}^{n-2} c_i\,c_{n-i}, \qquad n=4, 5, \ldots$$

Această formulă arată că coeficienţii c_4, $c_5, \ldots$ sunt funcţiuni întregi de c_2 şi c_3 şi serveşte a-i determinà din aproape în aproape. Coeficienţii c_2 şi c_3 sunt daţi prin definiţiune de expresiunile

$$c_2 = 3\,\Sigma'\,\frac{1}{w^4} = \frac{g_2}{20}, \qquad c_3 = 5\,\Sigma'\,\frac{1}{w^6} = \frac{g_3}{28};$$

sau, se deduc din ecuaţiunea (1), în care înlocuim pu şi $p'u$ prin desvoltările lor (5) şi (6) şi identificăm. Coeficienţii desvoltării funcţiunii pu, în domeniul $u=o$, sunt aşà dar funcţiuni întregi, cu coeficienţi raţionali, de invarianţii g_2 şi g_3.

Observare. Din cecace precede rezultă că sumele $\Sigma'\,\frac{1}{w^{2n}}$, n fiind un număr întreg > 3, sunt funcţiuni întregi de cele două sume $\Sigma'\,\frac{1}{w^4}$ şi $\Sigma'\,\frac{1}{w^6}$.

150. Incepând dela $n=4$, formula (8) ne dă

$$(9)\qquad \begin{cases} c_4 = \dfrac{1}{3}\,c_2^2 = \dfrac{g_2^2}{2^4\,3.5^2}, \\[2ex] c_5 = \dfrac{3}{11}\,c_2\,c_3 = \dfrac{3\,g_2\,g_3}{2^4.\,5.7.11} \\[2ex] c_6 = \dfrac{1}{13}\,(2\,c_2\,c_4 + c_3^2) = \dfrac{1}{13}\left(\dfrac{g_2^3}{2^5.\,3.5^3} + \dfrac{g_3^2}{2^4\,7^2}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

De unde primii termeni ai desvoltării funcţiunii:

$$(10)\qquad pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}\,u^2 + \frac{g_3}{28}\,u^4 + \frac{g_2^2}{2^4.\,3.5^2}\,u^6 + \ldots$$

Din această desvoltare deducem aceea a funcţiunii $\zeta u = -\int pu\, du$,

$$(11) \qquad \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60} u^3 - \frac{g_3}{28.5} u^5 - \ldots,$$

fără constantă arbitrară, căci din definiţiunea funcţiunii ζu (11) (§ 137) rezultă că diferenţa $\zeta u - \frac{1}{u}$ se anulează pentru $u = 0$.

Integrând ambele membre ale egalităţii (11) şi ţinând seamă de relaţiunea $\left(\frac{\sigma u}{u}\right)_0 = 1$, obţinem

$$\log \frac{\sigma u}{u} = -\frac{g_2}{60.4} u^4 - \frac{g_3}{28.5.6} u^6 - \ldots$$

De unde, trecând dela logaritm la funcţiunea exponenţială şi desvoltând această funcţiune într'o serie întreagă, obţinem, pentru primii termeni ai desvoltării funcţiunii σu:

$$(12) \qquad \sigma u = u - \frac{g_2}{2^4.3.5} u^5 - \frac{g_3}{2^3.3.5.7} u^7 - \ldots$$

Coeficienţii seriilor celor trei funcţiuni pu, ζu, σu, desvoltate după puterile lui u, sunt funcţiuni întregi de invarianţii g_2, g_3, cu coeficienţi numerici raţionali.

151. *Observare.* Funcţiunea pu fiind omogenă în u, ω_1, ω_3 şi de ordinul -2, rezultă că coeficientul lui u^{2n} în desvoltarea (10) este omogen în ω_1, ω_3 şi gradul său de omogeneitate este $-(2n+2)$; prin urmare acest coeficient este de forma

$$\Sigma A_{\alpha\beta}\, g_2^\alpha g_3^\beta,$$

$A_{\alpha\beta}$ fiind numere raţionale şi α, β numere întregi pozitive satisfăcând egalitatea

$$2\alpha + 3\beta = n + 1.$$

Ceeace permite a scrie partea literală a coeficienţilor seriei, în funcţiune de g_2 şi g_3.

152. *Mărirea argumentului u cu o perioadă în funcţiunea ζu.*

Din relaţiunea

$$pu = -\frac{d\zeta u}{du}$$

deducem

$$\frac{d\zeta(u + 2\omega_1)}{du} = \frac{d\zeta u}{du},$$

$$\frac{d\zeta(u + 2\omega_3)}{du} = \frac{d\zeta u}{du};$$

de unde, prin integraţiune,

$$\zeta(u+2\omega_1) = \zeta u + C,$$
$$\zeta(u+2\omega_3) = \zeta u + C'.$$

Făcând în prima din aceste egalităţi $u = -\omega_1$ şi în a doua $u = -\omega_3$, obţinem

$$\zeta\omega_1 = \zeta(-\omega_1) + C, \quad \zeta\omega_3 = \zeta(-\omega_3) + C';$$

de unde

$$C = 2\zeta\omega_1, \quad C' = 2\zeta\omega_3.$$

Punând

(1) $$\zeta\omega_1 = \eta_1, \quad \zeta\omega_3 = \eta_3,$$

avem relaţiunile

(2) $$\begin{cases} \zeta(u+2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1, \\ \zeta(u+2\omega_3) = \zeta u + 2\eta_3. \end{cases}$$

Intr'un mod general, avem

(3) $$\zeta(u+2m\omega_1+2n\omega_3) = \zeta u + 2m\eta_1 + 2n\eta_3,$$

m şi n fiind numere întregi.

Făcând în egalitatea precedentă $m = n = -1$ şi introducând cantitatea η_2 definită de relaţiunea

(4) $$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = o,$$

obţinem egalitatea

(5) $$\zeta(u+2\omega_2) = \zeta u + 2\eta_2.$$

Inlocnind u prin $-\omega_2$, această egalitate dă

(6) $$\zeta\omega_2 = \eta_2.$$

Aşà dar, oricare ar fi semiperioada ω_α, avem egalităţile

(7) $$\zeta(u+2\omega_\alpha) = \zeta u + 2\eta_\alpha, \quad \eta_\alpha = \zeta\omega_\alpha,$$

pe lângă cari alăturăm relaţiunile

(8) $$\Sigma\omega_\alpha = o, \quad \Sigma\eta_\alpha = o, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

153. Constantele η_α introduse mai sus, sunt funcţiuni uniforme de semiperioadele ω_1, ω_3; ele sunt finite, oricare ar fi sistemul (ω_1, ω_3) cu condiţiunea, ce se presupune împlinită în toate desvoltările precedente, ca raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ să fie imaginar. Două din aceste constante nu pot fi nule în acelaş timp, căci altmintrelea ar rezultà din prima formulă (7) ca funcţiunea ζu să fie dublu periodică; ceeace este imposibil.

Să considerăm două din cantităţile η_a, fie η_1 şi η_3. Aceste constante nu sunt independente între ele, ci sunt legate printr'o relaţiune numită *relaţiunea lui Legendre.* Pentru a obţine această relaţiune să considerăm integrala

$$\int \zeta u \, du,$$

luată după un paralelogram de perioade $(2\omega_1, 2\omega_3)$, având unul din vârfuri într'un punct u_0 diferit de un pol. Acest paralelogram conţinând un singur pol al funcţiunii ζu cu reziduul 1, valoarea integralei este egală cu $2i\pi$.

Să presupunem *pozitiv* coeficientul lui i în raportul $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$,

$$(9) \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \left|\frac{\omega_3}{\omega_1}\right| e^{ia}, \qquad 0 < a < \pi.$$

In acest caz, plecând dela vârful A (u_0), (fig. 49) (§ 129) şi descriind paralelogramul în sensul pozitiv, avem

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DA) = 2i\pi.$$

Reunind integralele după laturile opuse, două câte două, obţinem

$$(AB) + (CD) = \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} \zeta u \, du - \int_{u_0+2\omega_3}^{u_0+2\omega_1+2\omega_3} \zeta u \, du$$

$$= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} [\zeta u - \zeta(u + 2\omega_3)] \, du$$

$$= -2\eta_3 \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} du = -4\eta_3 \omega_1.$$

De asemenea găsim

$$(BC) + (DA) = 4\eta_1 \omega_3.$$

Relaţiunea lui Legendre consistă în egalitatea

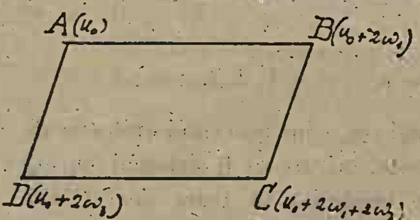

Fig. 50

$$(10) \qquad \eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2}.$$

Dacă în raportul $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ coeficientul lui i este negativ

$$(0 > a > -\pi),$$

dispoziţiunea paralelogramului este precum arată (fig, 50) In acest caz obţinem relaţiunea

$$(11) \qquad \eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = -\frac{i\pi}{2}.$$

Introducând cantităţile ω_2, η_2 în relaţiunea lui Legendre, obţinem, în virtutea formulelor (8), egalităţile următoare:

$$(12)\qquad \eta_2\,\omega_1 - \eta_1\,\omega_2 = \eta_3\,\omega_2 - \eta_2\,\omega_3 = \eta_1\,\omega_3 - \eta_3\,\omega_1 = \pm\frac{i\pi}{2},$$

în cari luăm semnul $\pm$ după cum coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ este pozitiv sau negativ.

154. Este interesant de examinat cum se modifică cantităţile η_1, η_3 când înlocuim sistemul de perioade $(2\omega_1, 2\omega_3)$ printr'un sistem de perioade echivalente $(2\omega'_1, 2\omega'_3)$. Fie

$$(a)\qquad \omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \qquad \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

formulele de transformare ale perioadelor. Avem, în virtutea formulelor (12),

$$\zeta\,(u + 2\alpha\omega_1 + 2\beta\omega_3) = \zeta\,u + 2\alpha\eta_1 + 2\beta\eta_3,$$
$$\zeta\,(u + 2\gamma\omega_1 + 2\delta\omega_3) = \zeta\,u + 2\gamma\eta_1 + 2\delta\eta_3,$$

Făcând în aceste egalităţi respectiv

$$u = -\alpha\omega_1 - \beta\omega_3, \qquad u = -\gamma\omega_1 - \delta\,\omega_3,$$

deducem formulele

$$\zeta\,(\alpha\omega_1 + \beta\omega_3) = \alpha\eta_1 + \beta\eta_3,$$
$$\zeta\,(\gamma\omega_1 + \delta\omega_3) = \gamma\eta_1 + \delta\eta_3.$$

sau, punând

$$\eta'_1 = \zeta\omega'_1 = \zeta\,(\alpha\omega_1 + \beta\omega_3), \qquad \eta'_3 = \zeta\,\omega'_3 = \zeta\,(\gamma\omega_1 + \delta\omega_3),$$

avem formulele de transformare

$$(b)\qquad \eta'_1 = \alpha\eta_1 + \beta\eta_3, \qquad \eta'_3 = \gamma\eta_1 + \delta\eta_3.$$

identice cu formulele (a) în cari înlocuim ω_1, ω_3, ω'_1, ω'_3 respectiv prin η_1, η_3, η'_1, η'_3.

155. *Mărirea argumentului u cu o perioadă în funcţiunea σu.* Pentru a găsi ce devine funcţiunea σu, când înlocuim u prin $u + 2\omega_a$, să integrăm ambele membre ale egalităţii (7).

Obţinem

$$\log\frac{\sigma\,(u + 2\omega_a)}{C\sigma u} = 2\eta_a\,u,$$

sau

$$(13)\qquad \sigma\,(u + 2\omega_a) = C\,e^{2\eta_a u}\,\sigma u,$$

C fiind o constantă a cărei valoare se determină făcând $u = -\omega_a$; obţinem

$$C\,e^{-2\eta_a\,\omega_a} = -1.$$

Avem aşa dar relaţiunea

$$(14) \qquad \sigma(u + 2\omega_a) = -e^{2\eta_a (u + \omega_a)} \sigma u, \quad (a = 1, 2, 3).$$

Efectul produs asupra funcţiunii σu, când adăugăm argumentului u o perioadă oarecare, este dar a o reproduce multiplicată cu un factor exponenţial al cărui exponent este o funcţiune lineară întreagă de u. Erà evident că, prin această substituţiune, funcţiunea σu trebuie să se reproducă multiplicată cu un factor care *nu se poate anulà*, căci funcţiunea $\sigma(u + 2\omega_a)$ are aceleaşi zeruri ca funcţiunea σu.

Relaţiunea necesară între aceste două funcţiuni este aşà dar de forma

$$\sigma(u + 2\omega_a) = e^{g(u)} \sigma u,$$

$g(u)$ fiind o funcţiune întreagă. Luând derivata logaritmică a ambelor membre, avem

$$\zeta(u + 2\omega_a) = \zeta u + g'(u);$$

prin urmare, în virtutea egalităţii (7),

$$g'(u) = 2\eta_a.$$

Aşà dar

$$g(u) = 2\eta_a u, \qquad \sigma(u + 2\omega_a) = Ce^{2\eta_a u} \sigma u.$$

Să înlocuim în ambele membre (14) u prin $u + 2(k-1)\omega_a$; avem

$$\sigma(u + 2k\omega_a) = -e^{2\eta_a [u + (2k-1)\omega_a]} \sigma[u + 2(k-1)\omega_a].$$

Dând lui k valorile $1, 2, \ldots, m$ şi făcând produsul tuturor egalităţilor, obţinem formula

$$(15) \qquad \sigma(u + 2m\omega_a) = (-1)^m e^{2\eta_a (mu + m^2\omega_a)} \sigma u.$$

Inlocuind în amândouă membrele acestei egalităţi u prin $u + 2n\omega_\beta$, $\beta \neq a = 1, 2, 3$, obţinem

$$\sigma(u + 2m\omega_a + 2n\omega_\beta) = (-1)^{m+n} e^{2(m\eta_a + n\eta_\beta)(u + m\omega_a + n\omega_\beta) - 2mn(\eta_a\omega_\beta - \eta_\beta\omega_a)} \sigma u,$$

sau, în virtutea formulelor (12),

$$(16) \; \sigma(u + 2m\omega_a + 2n\omega_\beta) = (-1)^{m+n+mn} e^{2(m\eta_a + n\eta_\beta)(u + m\omega_a + n\omega_\beta)} \sigma u.$$

156. *Expresiunea funcţiunilor eliptice prin funcţiunea* σ.

I. Ne propunem întâiu problema următoare: Să se construiască o funcţiune eliptică având două perioade primitive date

$(2\omega_1, 2\omega_3)$ ale cărei zeruri şi poluri să fie respectiv punctele date

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Pentru ca problema să fie posibilă este necesar ca între zerurile (a_i) şi polurile (b_i) să existe in virtutea teoremei lui Liouville (§ 129), relaţiunea

$$(1) \qquad \Sigma a_i \equiv \Sigma b_i \quad (mod\delta\ 2\omega_1, 2\omega_3).$$

1°. Să presupunem că congruenţa (1) se reduce la egalitatea

$$(2) \qquad \Sigma a_i = \Sigma b_i.$$

Să considerăm raportul

$$\frac{\sigma(u - a_i)}{\sigma(u - b_i)},$$

care reprezintă o funcţiune uniformă în tot planul având, abstracţiune făcând de multipli de perioade, singurul zero $u = a_i$ şi singurul pol $u = b_i$. De altă parte, în virtutea formulei (14) din paragraful precedent, avem egalitatea

$$(3) \qquad \frac{\sigma(u - a_i + 2\omega_a)}{\sigma(u - b_i + 2\omega_a)} = e^{2\eta_a(b_i - a_i)} \frac{\sigma(u - a_i)}{\sigma(u - b_i)}.$$

Dând lui i valorile 1, 2, ..., n să considerăm funcţiunea

$$(4) \qquad \varphi(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}.$$

Această funcţiune satisface relaţiunile

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi(u + 2\omega_1) = \varphi(u)\, e^{2\eta_1[\Sigma b_i - \Sigma a_i]}, \\ \varphi(u + 2\omega_3) = \varphi(u)\, e^{2\eta_3[\Sigma b_i - \Sigma a_i]}; \end{cases}$$

prin urmare, în virtutea egalităţii (2), avem

$$(6) \qquad \varphi(u + 2\omega_1) = \varphi(u), \quad \varphi(u + 2\omega_3) = \varphi(u).$$

Funcţiunea $\varphi(u)$ împlineşte condiţiunile cerute: *ea este o funcţiune eliptică având perioadele* $2\omega_1$, $2\omega_3$, *zerurile* (a_i) *şi polurile* (b_i). Toate funcţiunile eliptice având aceleaşi perioade, zeruri şi poluri nu pot diferi de $\varphi(u)$ decât printr'un factor constant.

Să observăm că nu este exclus cazul când punctele a_i de o parte, sau punctele b_i de altă parte n'ar fi distincte între ele. Dacă, de ex. a_i este un zero multiplu de ordinul α, repetăm în expresiunea lui $\varphi(u)$ punctul a_i de α ori.

2⁰. Să presupunem acum că între zerurile a_i şi polurile b_i există egalitatea

$$(7) \qquad \Sigma a_i - \Sigma b_i = 2\lambda\,\omega_1 + 2\mu\,\omega_3,$$

λ şi μ fiind două numere întregi date. Fie a un punct congruent cu punctul a_1, legat de el prin egalitatea

$$(8) \qquad a_1 = a + 2\,\lambda\omega_1 + 2\mu\,\omega_3.$$

Funcţiunea

$$\psi(u) = \frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}$$

împlineşte condiţiunea cazului precedent: suma zerurilor este egală cu suma polurilor; ea admite dar perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$. Inlocuind a prin valoarea sa (8), avem, în virtutea formulei (16) (§ 155), egalitatea

$$\sigma(u-a) = \sigma(u-a_1+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3)$$
$$= (-1)^{\lambda+\mu+\lambda\mu}\, e^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)(u+\lambda\omega_1+\mu\omega_3)}\sigma(u-a_1) = \mathrm{C}e^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)}\sigma(u-a_1),$$

în care $\mathrm{C} = (-1)^{\lambda+\mu+\lambda\mu}\, e^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)(\lambda\omega_1+\mu\omega_3)}$. Lăsând la o parte factorul constant C, rezultă că funcţiunea

$$(9) \qquad \psi(u) = e^{2(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)\,u} \prod_1^n \frac{\sigma(u-a_i)}{\sigma(u-b_i)}$$

este, în cazul egalităţii (7), o funcţiune eliptică având perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, zerurile a_i şi polurile b_i.

II. Să presupunem acum dată o funcţiune eliptică $f(u)$ având perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ şi fie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \qquad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

respectiv zerurile şi polurile sale, distincte sau nu, situate într'un paralelogram elementar. Dacă între aceste puncte există congruenţa (1), înlocuim un zero sau un pol prin punctul respectiv congruent astfel ca egalitatea (2) să fie împlinită şi construim funcţiunea (4). Expresiunea lui $f(u)$ va fi

$$(10) \qquad f(u) = \mathrm{C} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma(u-a_i)}{\sigma(u-b_i)}.$$

Constanta C se determină dând lui u o valoare particulară diferită de a_i şi de b_i şi exprimând că amândouă membrele sunt egale Dacă, de ex., nici unul din punctele a_i şi b_i nu este congruent cu o avem

$$(11) \qquad f(u) = f(o) \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma\, b_i\ \sigma(u-a_i)}{\sigma\, a_i\ \sigma(u-b_i)}.$$

Constanta C se mai poate determinà desvoltând ambele membre (10) în domeniul unui pol b_i şi egalând coeficienţii puterii celei mai înalte a lui $\frac{1}{u - b_i}$.

Observare. Expresiunea funcţiunilor eliptice prin funcţiunea σ este analoagă cu aceea a unei funcţiuni raţionale pusă sub forma unui cât de două polinoame descompuse în factori de gradul întâiu, funcţiunea $\sigma(u - a)$ ţinând locul factorului linear $u - a$.

157. *Aplicaţiuni.* I. *Expresiunea derivatei $p'u$ prin funcţiunea σ.* Funcţiunea $p'u$ admite zerurile incongruente ω_1, ω_2, ω_3 a căror sumă este nulă şi polul triplu $u = o$. Avem aşà dar

$$p'u = C \frac{\sigma(u - \omega_1)\,\sigma(u - \omega_2)\,\sigma(u - \omega_3)}{\sigma^3 u}.$$

In domeniul originii, valorile principale ale ambelor membre sunt respectiv

$$-\frac{2}{u^3}, \quad -C\frac{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}{u^3};$$

de unde rezultă $C = \frac{2}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}$ şi prin urmare

$$(1) \qquad p'u = 2\frac{\sigma(u - \omega_1)\,\sigma(u - \omega_2)\,\sigma(u - \omega_3)}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3\,\sigma^3 u}.$$

II. Să considerăm funcţiunea

$$pu - pv,$$

v fiind o constantă nu congruentă cu 0. Zerurile acestei funcţiuni sunt punctele $u \equiv \pm v$ şi punctul $u \equiv o$ este un pol dublu. Luând ca zeruri punctele $\pm v$, avem expresiunea

$$pu - pv = C\frac{\sigma(u + v)\,\sigma(u - v)}{\sigma^2 u}.$$

Valorile principale ale ambelor membre în domeniul lui $u = o$ fiind respectiv

$$\frac{1}{u^2}, \quad -C\frac{\sigma^2 v}{u^2},$$

rezultă formula fundamentală

$$(2) \qquad pu - pv = -\frac{\sigma(u + v)\,\sigma(u - v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}.$$

In cazul când v este egal cu o semiperioadă, $v = \omega_\alpha$, punctele $\pm v$ sunt congruente şi $v = \omega_\alpha$ este un zero dublu al funcţiunii

$pu - p\omega_a$. Formula devine

(3) $$pu - e_a = -\frac{\sigma(u+\omega_a)\,\sigma(u-\omega_a)}{\sigma^2\omega_a\,\sigma^2 u}.$$

158. Din formula (2) rezultă o nouă expresiune a derivatei $p'u$ prin funcţiunea σ. Să împărţim ambele membre ale acestei egalităţi cu $u - v$:

$$\frac{pu - pv}{u - v} = -\frac{\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}\,\frac{\sigma(u-v)}{u-v}$$

şi să facem v să tindă către u; obţinem egalitatea

(4) $$p'u = -\frac{\sigma 2u}{\sigma^4 u}.$$

159. Acciaş formulă (2) conduce la o relaţiune interesantă pentru funcţiunea σ. Să considerăm identitatea

$$(B-C)(D-A) + (C-A)(D-B) + (A-B)(D-C) = 0,$$

şi să punem

$$A = pa, \quad B = pb, \quad C = pc, \quad D = pd;$$

obţinem identitatea

$$(pb-pc)(pu-pa) + (pc-pa)(pu-pb) + (pa-pb)(pu-pc) = o.$$

Aplicând parentezelor formula (2), obţinem relaţiunea căutată

$$\sigma(u+a)\sigma(u-a)\sigma(b+c)\sigma(b-c) + \sigma(u+b)\sigma(u-b)\sigma(c+a)\sigma(c-a) + \sigma(u+c)\sigma(u-c)\sigma(a+b)\sigma(a-b) = o.$$

160. *Formule de adiţiune pentru funcţiunile* ζu, pu, $p'u$. Să reluăm formula fundamentală

(1) $$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\;\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\;\sigma^2 v}$$

şi să luăm derivatele logaritmice ale ambelor membre succesiv în raport cu u şi în raport cu v; vom aveà

(2) $$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u = \frac{p'u}{pu - pv},$$

(3) $$\zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v = -\frac{p'v}{pu - pv}.$$

Adunând aceste două egalităţi, obţinem formula zisă *de adiţiune* pentru funcţiunea ζu:

(4) $$\zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

Această formulă de adițiune nu este algebrică, căci între pu și ζu nu există ecuațiune algebrică și prin urmare $\zeta(u+v)$ nu este funcțiune algebrică de ζu și de ζv.

161. Derivând formula (4) în raport cu u, obținem formula de adițiune pentru funcțiunea pu:

$$(5) \qquad p(u+v) = pu - \frac{1}{2}\frac{d}{du}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

Această formulă se poate transformà și pune sub diferite forme.

Pentru a obține una din aceste forme, să efectuăm derivațiunea din membrul al doilea în raport cu u.

$$p(u+v) - pu = -\frac{1}{2}\frac{p''u}{pu-pv} + \frac{1}{2}\frac{(p'u-p'v)\,p'u}{(pu-pv)^2}$$

și să permutăm u cu v

$$p(u+v) - pv = \frac{1}{2}\frac{p''v}{pu-pv} - \frac{1}{2}\frac{(p'u-p'v)\,p'v}{(pu-pv)^2}.$$

Adunând aceste două egalități și ținând seamă de identitatea

$$p''u - p''v = 6(pu - pv),$$

obținem formula de adițiune

$$(6) \qquad p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

Această formulă ne dă expresiunea lui $p(u+v)$ în *funcțiune rațională* de pu, pv și derivatele lor $p'u$, $p'v$, precum formula de adițiune a funcțiunii $\sin u$ dă expresiunea lui $\sin(u+v)$ în funcțiune rațională de $\sin u$, $\sin v$ și de derivatele lor $\cos u$, $\cos v$.

Eliminând $p'u$ și $p'v$ între ecuațiunea (6) și ecuațiunile

$$p'^2u = 4p^3u - g_2\,pu - g_3, \qquad p'^2v = 4p^3v - g_2\,pv - g_3,$$

obținem între

$$p(u+v),\ pu,\ pv$$

o ecuațiune algebrică. De aceea se zice că funcțiunea eliptică pu admite o *formulă* (sau o *teoremă*) *de adițiune algebrică*.

162. O altă formă se obține punând în (6)

$$u + v = -w.$$

Formula devine

$$pu + pv + pw = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

Membrul întâiu rămânând invariabil când permutăm între ele argumentele u, v, w deducem egalitățile

$$\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = \left(\frac{p'v - p'w}{pv - pw}\right)^2 = \left(\frac{p'w - p'u}{pw - pu}\right)^2.$$

De unde

$$(7) \qquad \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \frac{p'v - p'w}{pv - pw} = \frac{p'w - p'u}{pw - pu}, \quad u + v + w = o.$$

Semnele primelor două rapoarte se justifică considerând valorile lor principale în domeniul lui $v = o$; al treilea raport este o consecință a celor dintâi.

163. Formula de adițiune (7) se poate pune sub forma unui determinant

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \\ 1 & pv & p'v \\ 1 & pw & p'w \end{vmatrix} = o.$$

Această ecuațiune transcendentă între argumentele, u, v, w este așa dar o consecință a relațiunii algebrice

$$(9) \qquad u + v + w = o.$$

Viceversa, ecuațiunea (8) trage după sine relațiunea (9), sau în general, relațiunea

$$(10) \qquad u + v + w = o, \quad (mo\mathfrak{d}\mathfrak{d}.\ 2\omega_1,\ 2\omega_3).$$

In adevăr, membrul întâiu al ecuațiunii (8), privit ca funcțiune de u, este o funcțiune eliptică de ordinul al treilea, având $u = o$ ca pol triplu. Această funcțiune se anulează evident pentru $u = v$, $u = w$; prin urmare cel de al treilea zero este $u \equiv -(v + w)$. De unde rezultă relațiunea (10).

164. Se obține o formulă de adițiune pentru derivata $p'u$, derivând egalitatea (5) în raport cu v. Obținem

$$p'(u + v) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right),$$

sau

$$(12)\ p'(u+v) = \left[\frac{p'^2 v}{(pv - pu)^3} - \frac{p''v}{2\,(pv - pu)^2}\right]p'u + \left[\frac{p'^2 u}{(pu - pv)^3} - \frac{p''u}{2\,(pu - pv)^2}\right]p'v.$$

Inlocuind p'^2u, p'^2v, $p''u$, $p''v$ prin valorile lor în funcțiune de pu, pv vedem că $p'(u + v)$ este o funcțiune rațională de pu, pv, $p'u$, $p'v$.

Aceeaș concluziune se aplică derivatelor de orice ordin $p^{(n)}(u+v)$: *toate aceste derivate sunt funcțiuni raționale de* pu, pv, $p'u$, $p'v$.

Nu există teoremă de adițiune pentru funcțiunea σu.

165. *Aplicațiune.* In formula de adițiune (6) să facem succesiv $v = \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ținând seama de relațiunea

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3),$$

obținem formulele

$$(13)\quad \begin{cases} p(u+\omega_1) - e_1 = \dfrac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{pu - e_1}, \\[2ex] p(u+\omega_2) - e_2 = \dfrac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{pu - e_2}, \\[2ex] p(u+\omega_3) - e_3 = \dfrac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pu - e_3}. \end{cases}$$

Observare. Aceste formule se pot obține fără a recurge la formula de adițiune dacă observăm că produsul

$$\left[p(u+\omega_a) - e_a\right](pu - e_a) \qquad (a = 1, 2, 3)$$

este olomorf în paralelogramul perioadelor și că prin urmare se reduce la o constantă C. Pentru a obține valoarea acestei constante să înlocuim u printr'o semiperioadă ω_β diferită de ω_a; obținem

$$C = \left[p(\omega_a + \omega_\beta) - e_a\right](p\omega_\beta - e_a) = (e_\gamma - e_a)(e_\beta - e_a).$$

Avem astfel formula

$$p(u+\omega_a) - e_a = \frac{(e_a - e_\beta)(e_a - e_\gamma)}{pu - e_a},$$

care rezumă formulele (13).

166. *Formulă de adițiune a funcțiunii pu pentru un număr oare care de argumente.*

Fie

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n,$$

n puncte incongruente între ele și incongruente cu zero; să considerăm determinantul

$$(1)\quad \varphi_n(u, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u & \ldots & p^{(n-1)}u \\ 1 & pu_1 & p'u_1 & \ldots & p^{(n-1)}u_1 \\ 1 & pu_2 & p'u_2 & \ldots & p^{(n-1)}u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & pu_n & p'u_n & \ldots & p^{(n-1)}u_n \end{vmatrix}$$

Acest determinant privit ca funcțiune de u este o funcțiune eliptică de ordinul $n+1$, având polul $u=o$ de ordinul $n+1$; ea se anulează în punctele $u=u_1, u_2, \ldots, u_n$, prin urmare se anulează şi în punctul $u=-(u_1+u_2+\ldots+u_n)$ (§ 129). Aşă dar ecuaţiunea

$$(2) \qquad \varphi_n(u, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

trage după sine congruenţa

$$(3) \qquad u+u_1+u_2+\ldots+u_n \equiv 0 \pmod{2\omega_1, 2\omega_3}.$$

In virtutea acestei congruenţe, ecuaţiunea (2) este o ecuaţiune algebrică între funcţiunea $p(u_1+u_2+\ldots+u_n)$ şi funcţiunile $pu_1, pu_2, \ldots, pu_n$. Ea constitue formula de adiţiune căutată.

Să exprimăm funcţiunea $\varphi_n(u, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ cu ajutorul funcţiunii σ.

Funcţiunea eliptică φ_n de variabila u, având polul $u=0$ de ordinul $n+1$ şi zerurile simple $u_1, u_2, \ldots, u_n, -(u_1+u_2+\ldots+u_n)$, este de forma

$$(4) \qquad \varphi_n = c_n \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\ldots\sigma(u-u_n)\,\sigma(u+u_1+\ldots u_n)}{\sigma^{n+1} u}.$$

factorul c_n fiind independent de u. Pentru a obţine acest factor să egalăm valorile principale ale desvoltării ambelor membre în domeniul lui $u=0$. Valoarea principală a membrului al doilea este

$$(-1)^n c_n \frac{\sigma u_1\,\sigma u_2\ldots\sigma u_n\,\sigma(u_1+u_2+\ldots+u_n)}{u^{n+1}},$$

iar aceea a membrului întâiu este

$$-\frac{n!}{u^{n+1}}\varphi_{n-1}(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

φ_{n-1} fiind determinantul minor dedus din (1) când suprimăm linia întâia şi coloana din urmă. Avem aşà dar egalitatea

$$(5) \qquad n!\,\varphi_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (-1)^{n-1} c_n \sigma u_1 \sigma u_2 \ldots \sigma u_n \sigma(u_1+u_2+\ldots+u_n).$$

Să privim φ_{n-1} ca funcţiune de u_1 şi să-i aplicăm o formulă analoagă cu formula (4); obţinem expresiunea

$$(6) \qquad \varphi_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = c_{n-1} \frac{\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_3)\ldots\sigma(u_1-u_n)\,\sigma(u_1+u_2+\ldots+u_n)}{\sigma^n u_1}$$

în care factorul c_{n-1} este independent de u_1. Din (5) şi (6) rezultă relaţiunea

$$(7) \qquad c_n = (-1)^{n-1} n!\, c_{n-1} \frac{\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_3)\ldots\sigma(u_1-u_n)}{\sigma^{n+1} u_1\, \sigma u_2 \ldots \sigma u_n}$$

De asemenea, avem egalităţile

$$(8)\quad \begin{cases} c_{n-1} = (-1)^{n-2}(n-1)!\, c_{n-2}\, \dfrac{\sigma(u_2-u_3)\,\sigma(u_2-u_4)\ldots\sigma(u_2-u_n)}{\sigma^n u_2\, \sigma u_3 \ldots \sigma u_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_2 = -2!\, c_1\, \dfrac{\sigma(u_{n-1}-u_n)}{\sigma^3 u_{n-1}\, \sigma u_n}. \end{cases}$$

Coeficientul c_1 îl deducem direct din expresiunea

$$\varphi_1(u_{n-1}, u_n) = \begin{vmatrix} 1 & p u_{n-1} \\ 1 & p u_n \end{vmatrix} = c_1 \frac{\sigma(u_{n-1}-u_n)\,\sigma(u_{n-1}+u_n)}{\sigma^2 u_{n-1}}$$

$$= \frac{\sigma(u_{n-1}-u_n)\,\sigma(u_{n-1}+u_n)}{\sigma^2 u_{n-1}\, \sigma^2 u_n};$$

de unde

$$(9)\qquad c_1 = \frac{1}{\sigma^2 u_n}.$$

Multiplicând egalităţile (4), (7), (8) şi (9), obţinem

$$\varphi_n(u_1\, u_1, u_2, \ldots, u_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, 2!\,3!\ldots n!\, \frac{\sigma(u+u_1+\ldots+u_n)\, \Pi\sigma(u_i-u_k)}{(\sigma u\, \sigma u_1 \ldots \sigma u_n)^{n+1}}$$

$$(i = 0, 1 \ldots n-1;\ k = 1, 2 \ldots n;\ i<k;\ u_0 = u).$$

Până aci s'a presupus că punctele u_i sunt distincte. Dacă două din aceste puncte coincid, de ex., $u_2 = u_1$, determinantul φ_n devine identic nul. Să examinăm prin ce se înlocueşte formula (10). Să punem $u_2 = u_1 + h$ şi să înlocuim linia a treia prin diferenţa dintre această linie şi linia a doua. Determinantul (1) desvoltat după puterile lui h devine

$$h \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u & \ldots & p^{(n-1)}u \\ 1 & pu_1 & p'u_1 & \ldots & p^{(n-1)}u_1 \\ 0 & p'u_1 & p''u_1 & \ldots & p^{(n)}u_1 \\ 1 & pu_3 & p'u_3 & \ldots & p^{(n-1)}u_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & pu_n & p'u_n & \ldots & p^{(n-1)}u_n \end{vmatrix} + h^2\, \mathrm{P}(h),$$

P(h) fiind o serie întreagă de h convergentă în domeniul $h = o$. Substituind această expresiune în formula (10) şi ţinând seamă de egalitatea

$$\lim_{h=0} \frac{\sigma h}{h} = 1,$$

obţinem, suprimând factorul h şi făcând $h = o$,

$$
(11)\quad \begin{vmatrix}
1 & pu & p'u \dots & p^{(n-1)}u \\
1 & pu_1 & p'u_1 \dots & p^{(n-1)}u_1 \\
0 & p'u_1 & p''u_1 \dots & p^{(n)}u_1 \\
1 & pu_3 & p'u_3 \dots & p^{(n-1)}u_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & pu_n & p'u_n \dots & p^{(n-1)}u_n
\end{vmatrix}
$$

$$
= -c\,\frac{\sigma(u+2u_1+u_3+\dots+u_n)\sigma^2(u-u_1)\,\Pi_3^n\sigma(u-u_i)\,\sigma^2(u_1-u_i)\,\Pi\,\sigma(u_\lambda-u_\mu)}{\sigma^{n+1}u\,\sigma^{2(n+1)}u_1\,\sigma^{n+1}u_3\dots\sigma^{n+1}u_n}
$$

$$
(\lambda = 3, 4, \dots, n-1;\ \mu = 4, 5, \dots, n;\ \lambda < \mu)
$$

c fiind coeficientul numeric din membrul al doilea (10).

Să presupunem că şi punctul u_3 tinde către u_1; punând în (11) $u_3 = u_1 + h$ şi înlocuind linia a patra prin diferenţa dintre această linie şi linia a doua, membrul întâi va conţine factorul $\frac{h^2}{1.2}$. Divizând ambele membre cu h^2 şi făcând $h = o$, egalitatea (11) devine

$$
(12)\quad \frac{1}{2\,!}\begin{vmatrix}
1 & pu & p'u \dots & p^{(n-1)}u \\
1 & pu_1 & p'u_1 \dots & p^{(n-1)}u_1 \\
0 & p'u_1 & p''u_1 \dots & p^{(n)}u_1 \\
0 & p''u_1 & p'''u_1 \dots & p^{(n+1)}u_1 \\
1 & pu_4 & p'u_4 \dots & p^{(n-1)}u_4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & pu_n & p'u_n \dots & p^{(n-1)}u_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^3 c\,\frac{\sigma(u+3u_1+u_4+\dots+u_n)\,\sigma^3(u-u_1)\,\Pi_4^n\sigma(u-u_i)\,\sigma^3(u_1-u_i)\,\Pi\,\sigma(u_\lambda-u_\mu)}{\sigma^{n+1}u\,\sigma^{3(n+1)}u_1\,\sigma^{n+1}u_4\dots\sigma^{n+1}u_n}
$$

$$
(\lambda = 4, 5\dots, n-1;\ \mu = 5, 6, \dots, n;\ \lambda < \mu).
$$

Fie, într'un mod general, $u_1 = u_2 = \dots = u_\nu$; vom obţine, procedând în mod analog, egalitatea

$$
(13)\quad \frac{1}{2!\,3!\dots(\nu-1)!}\begin{vmatrix}
1 & pu & p'u \dots & p^{(n-1)}u \\
1 & pu_1 & p'u_1 \dots & p^{(n-1)}u_1 \\
0 & p'u_1 & p''u_1 \dots & p^{(n)}u_1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & p^{(\nu-1)}u_1 & p^{(\nu)}u_1 \dots & p^{(n+\nu-2)}u_1 \\
1 & pu_{\nu+1} & p'u_{\nu+2} \dots & p^{(n-1)}u_{\nu+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & pu_n & p'u_n \dots & p^{(n-1)}u_n
\end{vmatrix}
$$

$$=(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} c \frac{\sigma(u+\nu u_1+u_{\nu-1}+\dots+u_n)\sigma^\nu(u-u_1)\prod_{\nu+1}^{n}\sigma(u-u_i)\,\sigma^\nu(u_1-u_i)\prod(\sigma u_\lambda-u_\mu)}{\sigma^{n+1}u\,\sigma^{\nu(n+1)}u_1\,\sigma^{n+1}u_{\nu+1}\dots\sigma^{n+1}u_n}$$

$$(\lambda=\nu+1,\dots,n-1;\ \mu=\nu+2,\dots,n;\ \lambda<\mu).$$

Să presupunem, în fine, că toate punctele u_i coincid; vom avea, punând în egalitatea (13) $\nu = n$, $u_1 = v$ și înlocuind constanta c prin valoarea sa:

$$(14)\qquad f(u)=\begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \dots & p^{(n-1)}u \\ 1 & pv & p'v \dots & p^{(n-1)}v \\ 0 & p'v & p''v \dots & p^{(n)}v \\ 0 & p''v & p'''v \dots & p^{(n+1)}v \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p^{(n-1)}v & p^{(n)}v \dots & p^{(2n-2)}v \end{vmatrix}$$

$$=\Big[2!\,3!\dots(n-1)!\Big]^2 n!\,\frac{\sigma^n(u-v)\,\sigma(u+nv)}{\sigma^{n+1}u\cdot\sigma^{n(n+1)}v}.$$

Funcțiunea $f(u)$, reprezintată prin determinantul precedent, este o funcțiune eliptică de ordinul $n+1$, având polul $u=o$, multiplu de ordinul $n+1$ și, precum ne arată membrul al doilea, ea admite $u=v$ ca zero multiplu de ordinul n și $u=-nv$ ca zero simplu. Acest din urmă rezultat se conchide direct din forma determinantului, căci acest determinant și primele $n-1$ derivate ale sale:

$$(15)\qquad f(u)=\begin{vmatrix} 0 & p^{(\nu)}u & p^{(\nu+1)}u\dots & p^{(n+\nu-1)}u \\ 1 & pv & p'v\dots & p^{(n-1)}v \\ 0 & p'v & p''v\dots & p^{(n)}v \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p^{(n-1)}v & p^{(n)}v\dots & p^{(2n-2)}v \end{vmatrix}$$

$$(\nu=1,2,\dots,n-1).$$

se anulează pentru $u=v$ și, prin urmare, în virtutea teoremei (§ 129) se anulează și pentru $u=-nv$.

Corolar. Dacă în egalitatea (14) multiplicăm ambele membre cu u^{n+1} și facem $u=o$, rezultă egalitatea

$$-n!\begin{vmatrix} 1 & pv & p'v\dots & p^{(n-2)}v \\ 0 & p'v & p''v\dots & p^{(n-1)}v \\ 0 & p''v & p'''v\dots & p^{(n)}v \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p^{(n-1)}v & p^{(n)}v\dots & p^{(2n-3)}v \end{vmatrix}=(-1)^n\,[2!\,3!\dots(n-1)!]^2 n!\,\frac{\sigma^n v\,\sigma n v}{\sigma^{n(n+1)}v}$$

sau

$$(16)\quad \begin{vmatrix} p'v & p''v \dots & p^{(n-1)}v \\ p''v & p'''v \dots & p^{(n)}v \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ p^{(n-1)}v & p^{(n)}v \dots & p^{(2n-3)}v \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)}[2!\,3!\dots(n-1)!]^2 \frac{\sigma n v}{\sigma^{nn} v}$$

Această interesantă formulă ne va servi la soluţiunea problemei de multiplicaţiune a funcţiunii pu.

167. *Expresiunea funcţiunilor eliptice prin funcţiunea* ζ.

Din definiţiunea funcţiunii ζu rezultă că funcţiunea $\zeta(u-a)$, a fiind un punct arbitrar, admite acest punct ca pol simplu cu reziduul 1. In domeniul punctului a avem

$$(1)\qquad \zeta(u-a) = \frac{1}{u-a} + \mathrm{P}(u-a),$$

$\mathrm{P}(u-a)$ fiind o serie întreagă de $u-a$, convergentă în domeniul acestui punct. Derivând ambele membre de α ori după rând, obţinem expresiunile:

$$(2)\qquad \begin{cases} \zeta'(u-a) = -\dfrac{1}{(u-a)^2} + \mathrm{P}'(u-a), \\ \zeta''(u-a) = \dfrac{1.2}{(u-a)^3} + \mathrm{P}''(u-a, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \zeta^{(\alpha)}(u-a) = (-1)^\alpha \dfrac{\alpha!}{(u-a)^{\alpha+1}} + \mathrm{P}^{(\alpha)}(u-a). \end{cases}$$

Din relaţiunea $\zeta'(u-a) = -p(u-a)$ rezultă că derivatele $\zeta'(u-a), \zeta''(u-a), \dots$ sunt funcţiuni eliptice având perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$; ele admit, în virtutea formulelor (2), punctul a ca pol de un ordin respectiv egal cu $2, 3, \dots, \alpha+1$.

Ne propunem să construim o funcţiune eliptică cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, având, în paralelogramul perioadelor, polurile $a, b, \dots l$, respectiv de ordinele $\alpha+1, \beta+1, \dots, \lambda+1$ şi astfel ca părţile principale din desvoltarea funcţiunii în domeniile acestor poluri să fie respectiv

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{A}}{u-a} + \dfrac{\mathrm{A}_1}{(u-a)^2} + \dots + \dfrac{\mathrm{A}_\alpha}{(u-a)^{\alpha+1}}, \\ \dfrac{\mathrm{B}}{u-b} + \dfrac{\mathrm{B}_1}{(u-b)^2} + \dots + \dfrac{\mathrm{B}_\beta}{(u-b)^{\beta+1}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\mathrm{L}}{u-l} + \dfrac{\mathrm{L}_1}{(u-l)^2} + \dots + \dfrac{\mathrm{L}_\lambda}{(u-l)^{\lambda+1}}, \end{cases}$$

coeficienţii cari figurează la numărători pot fi arbitrari cu *unica condiţiune ca suma reziduurilor*

$$A + B + \ldots + L$$

să fie nulă, conform teoremei (§ 127). Această condiţiune fiind îmPlinită rezultă că suma

$$(4) \qquad A\,\zeta\,(u-a) + B\,\zeta\,(u-b) + \ldots + L\,\zeta\,(u-l)$$

admite perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$. In adevăr, din relaţiunile

$$\zeta\,(u-a+2\omega_a) = \zeta\,(u-a) + 2\eta_a, \ldots, \zeta\,(u-l+2\omega_a) = \zeta\,(u-l) + 2\eta_a,$$

deducem egalitatea

$$A\,\zeta\,(u-a+2\omega_a) + \ldots + L\,\zeta\,(u-l+2\omega_a) = A\,\zeta\,(u-a) + \ldots + L\zeta(u-l);$$

adică suma considerată este o funcţiune eliptică având aceleaşi perioade ca funcţiunea pu.

Din cele ce preced recunoaştem imediat că funcţiunea

$$(5)\ \varphi(u) = \Sigma[A\zeta(u-a) - A_1\zeta'(u-a) + \frac{A_2}{2!}\zeta''(u-a) - \ldots + (-1)^a \frac{A_a}{a!}\zeta^{(a)}(u-a)],$$

în care simbolul Σ se referă la toate polurile $a, b, \ldots, l$, este o funcţiune eliptică având proprietăţile date.

Fie acum $f\,(u)$ o funcţiune eliptică dată având aceleaşi perioade şi poluri ca funcţiunea $\varphi\,(u)$ şi ale cărei părţi principale în domeniile polurilor să fie cele din tabloul (3). Diferenţa

$$f\,(u) - \varphi\,(u)$$

va fi o funcţiune eliptică neavând nici un pol, prin urmare această diferenţă se reduce la o constantă. De unde rezultă, pentru $f\,(u)$, expresiunea

$$(6)\ f\,(u) = C + \Sigma\left[A\,\zeta\,(u-a) - A_1\,\zeta'\,(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^a}{a!}A_a\,\zeta^{(a)}\,(u-a)\right].$$

Constanta C se determină dând lui u o valoare particulară, sau din desvoltarea în serie a ambelor membre în domeniul unui pol. Formula precedentă constitue *o formulă de descompunere a funcţiunilor eliptice în elemente simple*, elementele simple fiind funcţiunea ζ şi derivatele sale; ea este analoagă cu expresiunea fracţiunilor raţionale în fracţiuni simple. Această formulă a fost dată de *Hermite.*

Formula (6) se poate înlocui prin cea următoare:

$$f\,(u) = C + \Sigma\left[A\,\zeta\,(u-a) + A_1\,p\,(u-a) - \frac{A_2}{2!}p'(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^{a-1}}{a!}\,A_a\,p^{(a-1)}(u-a)\right].$$

Ex. Fie $f(u) = \frac{1}{p'u}$. Această funcţiune de ordinul al treilea admite ca poluri simple punctele incongruente $u=\omega_a$ cu reziduurile corespunzătoare $\frac{1}{p''\omega_a}$, $a = 1, 2, 3$. Avem aşà dar

$$\frac{1}{p'u} = C + \Sigma \frac{1}{p''\omega_a} \zeta(u - \omega_a).$$

Făcând $u = o$, rezultă $C = \Sigma \frac{\eta_a}{p''\omega_a}$.

168. Teoremă. *Orice funcţiune eliptică $f(u)$ se poate exprimà printr'o funcţiune raţională de pu şi $p'u$, construite cu aceleaşi perioade (Liouville).*

Pentru a demonstrà această teoremă, să punem funcţiunea $f(u)$ sub forma (7) şi să aplicăm formulele de adiţiune ale funcţiunilor $\zeta(u-a)$, $p(u-a)$ şi ale derivatelor $p'(u-a)$,... Funcţiunea $p(u-a)$ şi derivatele sale sunt funcţiuni raţionale de pu, $p'u$, pa şi $p'a$. Formula de adiţiune a funcţiunii ζu, în care înlocuim a prin $-a$, dă

$$\zeta(u-a) = \zeta u - \zeta a + \frac{1}{2}\frac{p'u + p'a}{pu - pa};$$

de unde egalitatea

$$\Sigma A \zeta(u-a) = \zeta u \Sigma A - \Sigma A\zeta a + \frac{1}{2}\Sigma A \frac{p'u+p'a}{pu-pa}. \tag{8}$$

Însă, în virtutea teoremei asupra reziduurilor, avem $\Sigma A = 0$; prin urmare membrul întâiu al egalităţii precedente este o funcţiune raţională de pu şi $p'u$. De unde rezultă că funcţiunea $f(u)$, reprezintată prin egalitatea (7), se poate pune sub forma

$$f(u) = R(pu, p'u), \tag{9}$$

R fiind funcţiune raţională de pu şi $p'u$.

q. e. d.

In virtutea ecuaţiunii

$$p'^2u = 4p^3u - g_2 pu - g_3,$$

putem aduce funcţiunea (9) la forma

$$f(u) = \frac{M + N p'u}{M_1 + N_1 p'u} = R(pu) + p'u R_1(pu), \tag{10}$$

M, N, M_1, N_1 fiind funcţiuni raţionale de pu. Schimbând u în $-u$, formula precedentă devine

$$f(u) = R(pu) - p'u R_1(pu). \tag{11}$$

De aci rezultă că dacă $f(u)$ este o funcţiune pară, $R_1 = 0$ şi dacă $f(u)$ este o funcţiune impară, avem $R = 0$, adică:

Orice funcţiune eliptică pară este o funcţiune raţională de pu şi orice funcţiune eliptică impară este un produs de p'u printr'o funcţiune raţională de pu; funcţiunea pu fiind construită cu perioadele funcţiunii eliptice date.

Corolar. Dacă funcţiunea $f(u)$ are unicul pol $u \equiv o$ de ordinul a, funcţiunile raţionale $R(pu)$, $R_1(pu)$ se reduc la două polinoame $P(pu)$, $P_1(pu)$. Dacă a este un număr par, $f(u)$ este o funcţiune pară şi avem

$$f(u) = P(pu);$$

dacă a este un număr impar, $f(u)$ este o funcţiune impară şi avem

$$f(u) = p'u\, P_1(pu).$$

Ordinul funcţiunii pu fiind 2 şi al derivatei fiind 3, rezultă că gradul polinomului $P(pu)$ este $\frac{a}{2}$ şi al polinomului $P_1(pu)$ este $\frac{a-3}{2}$.

169. Teorema precedentă se poate stabili independent de formulele de adiţiune. Pentru aceasta, să facem mai întâiu observările preliminare următoare:

I. Dacă o funcţiune eliptică pară $f(u)$ se anulează sau devine infinită pentru $u = o$, acest zero sau pol este de un ordin par de multiplicitate. Căci $f(u)$ desvoltat după puterile lui u, în domeniul lui $u = o$, trebuie să conţină numai puteri pare ale acestei variabile.

II. Ordinul unei funcţiuni eliptice pare este un număr par, căci unui zero (sau pol) a îi corespunde un zero (sau pol) egal cu $-a$, dacă $a \not\equiv o$; în cazul $a = o$, ordinul său de multiplicitate este un număr par, precum am văzut mai sus.

Fie acum $f(u)$ o funcţiune eliptică *pară* şi

$$\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_n,$$
$$\pm b_1, \pm b_2, \ldots, \pm b_n,$$

respectiv zerurile şi polurile acestei funcţiuni, incongruente între ele. Printre zeruri pot fi mai multe egale; de asemenea mai multe poluri pot coincide.

1°. Presupunând că nici unul din punctele a sau b nu este congruent cu zero, considerăm funcţiunea

$$\varphi(u) = \frac{(pu - pa_1)\ldots(pu - pa_n)}{(pu - pb_1)\ldots(pu - pb_n)}.$$

2°. Dacă $a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_k \equiv o$, punem

$$\varphi(u) = \frac{(pu - pa_{k+1})\ldots(pu - pa_n)}{(pu - pb_1)\ldots(pu - pb_n)}.$$

3°. In fine, dacă $b_1 \equiv b_2 \equiv \ldots \equiv b_k \equiv o$, punem

$$\varphi(u) = \frac{(pu - pa_1)\ldots(pu - pa_n)}{(pu - pb_{k+1})\ldots(pu - pb_n)}.$$

In câte trele cazuri funcţiunile $f(u)$ şi $\varphi(u)$ au aceleaşi zeruri şi poluri; de unde rezultă, C fiind o constantă

$$f(u) = C\,\varphi(u),$$

adică $f(u)$ este o funcţiune raţională de pu.

Dacă $f(u)$ este o funcţiune eliptică *impară*, câtul

$$\frac{f(u)}{p'u}$$

va fi o funcţiune eliptică pară şi prin urmare o funcţiune raţională de pu. De unde

$$f(u) = p'u\,R(pu).$$

In fine, să presupunem $f(u)$ o funcţiune eliptică oarecare. Expresiunile

$$\frac{f(u)+f(-u)}{2}, \qquad \frac{f(u)-f(-u)}{2}$$

sunt funcţiuni eliptice cu aceleaşi perioade ca funcţiunea $f(u)$, cea dintâiu pară şi a doua impară. Avem aşà dar

$$\frac{f(u)+f(-u)}{2} = R(pu),$$

$$\frac{f(u)-f(-u)}{2} = p'u\,R_1(pu).$$

De unde

$$f(u) = R(pu) + p'u\,R_1(pu).$$

170. Teoremă. *Orice funcţiune eliptică $f(u)$ admite o teoremă de adiţiune algebrică.* In adevăr, în virtutea teoremei precedente, putem scrie

(1) $$f(u) = R(pu) + p'u\,R_1(pu),$$

(2) $$f(v) = R(pv) + p'v\,R_1(pv),$$

(3) $$f(u+v) = R[p(u+v)] + p'(u+v)\,R'[p(u+v)].$$

Inlocuind în ultima egalitate $p(u+v)$ şi $p'(u+v)$ prin valorile lor în funcţiune de pu, $p'u$, pv, $p'v$, obţinem pentru $f(u+v)$ o expresiune raţională de pu, $p'u$, pv, $p'v$:

$$f(u+v) = \mathrm{R}(pu, pv, p'u, p'v). \tag{4}$$

Eliminând pu, pv, $p'u$, $p'v$ între ecuaţiunile (1), (2), (4) şi cele două următoare:

$$p'^2u = 4p^3u - g_2\, pu - g_3, \qquad p'^2v = 4\,p^3v - g_2\, pv - g_3,$$

obţinem o ecuaţiune algebrică între $f(u+v)$, $f(u)$ şi $f(v)$.

III. INTEGRAŢIUNEA FUNCŢIUNILOR ELIPTICE.

171. Fie $f(u)$ o funcţiune eliptică oarecare. Pentru a efectuà integraţiunea

$$\int f(u)\, du,$$

putem procede în două moduri:

1°. Descompunem funcţiunea în elemente simple (§ 167)

$$f(u) = \mathrm{C} + \Sigma\left[\mathrm{A}\zeta(u-a) + \mathrm{A}_1 p(u-a) - \frac{\mathrm{A}_2}{2!}p'(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha!}\mathrm{A}_\alpha\, p^{(\alpha-1)}(u-a)\right];$$

de unde rezultă, integrând fiecare termen,

$$\int f(u)\, du = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}u + \Sigma\, \mathrm{A}\, \log\sigma(u-a)$$

$$+\Sigma\left[-\mathrm{A}_1\zeta(u-a) - \frac{\mathrm{A}_2}{2!}p(u-a) + \ldots + (-1)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{A}_\alpha}{\alpha!}\,p^{(\alpha-2)}(u-a)\right].$$

Integrala, în genere, nu este funcţiune eliptică. Pentru ca integrala să fie funcţiune eliptică este necesar şi suficient să avem

$$\mathrm{C} = o, \quad \Sigma\mathrm{A}_1 = o$$

şi ca coeficienţii A, B,... cari multiplică funcţiunile $\log\sigma(u-a)$, $\log\sigma(u-b)$,..., adică reziduurile funcţiunii $f(u)$, să fie nule. Condiţiunea ca aceste reziduuri să fie nule este necesară pentru ca funcţiunea integrală să fie uniformă în tot planul.

2°. Să presupunem funcţiunea eliptică pusă sub forma

$$f(u) = \mathrm{R}(pu) + p'u\, \mathrm{R}_1(pu),$$

R şi R_1 fiind funcţiuni raţionale de pu. Vom avea

$$\int f(u)\, du = \int \mathrm{R}(pu)\, du + \int p'u\, \mathrm{R}_1(pu)\, du.$$

Punând $x = pu$ în a doua integrală, avem

$$\int p'u \, R_1(pu) \, du = \int R_1(x) \, dx,$$

integrala unei funcţiuni raţionale de x. Rămâne de considerat prima integrală.

Pentru aceasta, să descompunem funcţiunea raţională $R(pu)$ în fracţiuni simple. Vom aveà o expresiune de forma

$$R(pu) = c_0 + c_1 pu + \ldots + c_m p^m u$$
$$+ \frac{A}{pu-a} + \frac{A_1}{(pu-a)^2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(pu-a)^n} + \frac{B}{pu-\beta} + \frac{B_1}{(pu-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_{n'-1}}{(pu-\beta)^{n'}} + \ldots$$

Puterile întregi şi pozitive ale lui pu se pot înlocuì prin funcţiuni lineare cu coeficienţi constanţi de pu şi de derivatele sale de ordin par. Astfel avem (§ 148)

$$p^2u = \frac{1}{6}\left(p''u + \frac{1}{2} g_2\right),$$

$$p^3u = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{12} p^{\mathrm{IV}}u + \frac{3}{2} g_2 \, pu + g_3\right),$$

$$p^4u = \frac{1}{140}\left(\frac{1}{36} p^{\mathrm{VI}}u + \frac{14}{3} g_2 \, p''u + 20 \, g_3 \, pu + \frac{25}{12} g_2^2\right),$$

. . . .

Prin urmare partea întreagă va aveà forma

$$C_0 + C_1 \, pu + C_2 \, p''u + \ldots + C_m \, p^{(2m-2)}u,$$

a cărei integrală se obţine imediat şi este egală cu expresiunea

$$C_0 u - C_1 \zeta u + C_2 \, p'u + \ldots + C_m \, p^{(2m-3)}u.$$

Să considerăm acum termenii fracţionari. Determinăm mai întâiu câte o soluţiune a ecuaţiunilor

$$pu = a, \quad pu = \beta, \ldots$$

Fie respectiv $a, b, \ldots$ asemenea soluţiuni, astfel că

$$pa = a, \quad pb = \beta, \ldots$$

Vom aveà de considerat fracţiunile

$$\frac{A}{pu - pa} + \frac{A_1}{(pu - pa)^2} + \ldots$$

Referindu-ne la formula [(3), (§ 160)]

$$\zeta(u + v) - \zeta(u - v) - 2\zeta v = -\frac{p'v}{pu - pv},$$

putem scrie

$$(1) \qquad \frac{1}{pu - pa} = \frac{1}{p'a}\left[\zeta(u-a) - \zeta(u+a) + 2\zeta a\right].$$

De unde rezultă

$$\int \frac{du}{pu - pa} = \frac{1}{p'a}\left[\log \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + 2u\zeta a\right] + c.$$

Diferențiând egalitatea (1) în raport cu a, obținem

$$(2) \quad \frac{p'a}{(pu-pa)^2} = \frac{p''a}{p'^2 a}\left[\zeta(u-a) - \zeta(u+a) + 2\zeta a\right] - \frac{1}{p'a}\left[\zeta'(u-a) + \zeta'(u+a) - 2\zeta' a\right],$$

formulă de descompunere în elemente simple a expresiunii $\dfrac{p'a}{(pu-pa)^2}$.

Derivând această formulă în raport cu a, după ce dividem ambele membre cu $p'a$, obținem formula de descompunere a fracțiunii $\dfrac{1}{(pu-pa)^3}$, etc.

De unde se deduc imediat integralele

$$\int \frac{du}{(pu-pa)^2}, \quad \int \frac{du}{(pu-pa)^3}, \ldots$$

Formula (1) nu se aplică dacă a este egal cu unul din numerele e_1, e_2, e_3, căci atunci

$$p'a = o.$$

In acest caz, fie de ex., $a = e_1$, avem [(13), 165]

$$(3) \qquad \frac{1}{pu - e_1} = \frac{1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}\left[p(u + \omega_1) - e_1\right].$$

Ridicând această egalitate la diferite puteri întregi și pozitive obținem fracțiunile

$$\frac{1}{(pu - e_1)^n}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

exprimate în funcțiune întreagă de $p(u + \omega_1)$. Inlocuind puterile lui $p(u + \omega_1)$ prin expresiunile lor în funcțiune lineară de $p(u + \omega_1)$ și de derivatele sale de ordin par, obținem pentru fracțiunile considerate, expresiuni de forma

$$c_0 + c_1 p(u + \omega_1) + c_2 p''(u + \omega_1) + \ldots + c_m p^{(2m-2)}(u + \omega_1),$$

ale căror integrale sunt

$$c_0 u - c_1 \zeta(u + \omega_1) + c_2 p'(u + \omega_1) + \ldots + c_m p^{(2m-3)}(u + \omega_1).$$

172. Se poate obține o formulă de reducțiune pentru integrala

$$(4) \qquad I_n = \int p^n u \, du,$$

în care n este număr întreg pozitiv sau negativ. Avem

$$\frac{d}{du}\left[p^{n-1}u p'u\right]=(n-1)p^{n-2}u\, p'^2u+p^{n-1}u\, p''u$$

$$=(n-1)\, p^{n-2}u\,(4\,p^3u-g_2\,pu-g_3)+p^{n-1}u\left(6\,p^2u-\frac{1}{2}g_2\right)$$

$$=(4\,n+2)\,p^{n+1}u-\left(n-\frac{1}{2}\right)g_2\,p^{n-1}u-(n-1)\,g_3\,p^{n-2}u.$$

Din această egalitate rezultă formula de reducţiune

(5) $$p^{n-1}u\,p'u=(4\,n+2)\,I_{n+1}-\left(n-\frac{1}{2}\right)g_2\,I_{n-1}-(n-1)g_3\,I_{n-2}.$$

Dând lui n succesiv valorile 2, 3,..., şi ţinând seamă de egalităţile

$$I_0=u,$$

$$I_1=\int pu\,du=-\zeta\,u,$$

$$I_2=\int p^2u\,du=\frac{1}{6}\int\left(p''u-\frac{1}{2}\,g_2\right)du=\frac{1}{6}\,p'u-\frac{1}{12}\,g_2u,$$

obţinem valorile integralei I_n pentru $n=3, 4,\ldots$

Dacă în egalitatea (5) înlocuim n prin $-n$, obţinem formula de reducţiune

(6) $$\frac{p'u}{p^{n+1}u}=(n+1)g_3\,I_{-n-2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)g_2\,I_{-n-1}-(4\,n-2)\,I_{-n+1}$$

Dând lui n succesiv valorile, 0, 1, 2,..., obţinem integralele

(7) $$I_{-n}=\int\frac{du}{p^nu},\quad (n>1)$$

exprimate în funcţiune lineară de $\frac{p'u}{p^{n+1}u}$, $(n=0, 1,\ldots)$, de u, ζu şi de integrala

$$I_{-1}=\int\frac{du}{pu}.$$

Pentru a obţine ultima integrală, trebuie să cunoaştem un zero al funcţiunii pu. Dacă $u=a$ este un zero diferit de o semiperioadă, aplicând formula (1), (§ 171) în care facem $pa=0$, avem

$$\frac{1}{pu}=\frac{1}{p'a}\left[\zeta\,(u-a)-\zeta\,(u+a)+2\,\zeta\,a\right].$$

Dacă $a=\omega_\alpha$, aplicăm formula (3) (§ 171) în care facem $e_\alpha=0$; obţinem formula

$$\frac{1}{pu}=\frac{1}{e_\beta\,e_\gamma}\,p\,(u+\omega_\alpha)=-\frac{1}{e_\beta^2}\,p\,(u+\omega_\alpha),$$

α, β, γ fiind numerele 1, 2, 3, însă diferite între ele.

CAPITOLUL XIV.

MULTIPLICAŢIUNEA ARGUMENTULUI FUNCŢIUNII pu.

173. Funcţiunea $p\,nu$ şi derivata sa $p'nu$, n fiind un număr întreg oarecare, sunt funcţiuni eliptice având perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, cea dintâiu este pară şi cea de a doua impară. Prin urmare pnu se exprimă printr'o funcţiune raţională de pu, iar $p'nu$ este produsul lui $p'u$ printr'o funcţiune raţională de pu (§ 168).

Fie $n=2$. Pentru a obţine expresiunea lui $p2u$ să facem în formula de adiţiune

$$(1) \qquad p(u+v)+pu+pv=\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2$$

v să tindă către u. Raportul din membrul al doilea prezentându-se sub forma $\frac{o}{o}$ îl vom înlocui prin raportul derivatelor.

Obţinem astfel

$$p2u+2pu=\frac{1}{4}\left(\frac{p''^2u}{p'^2u}\right)=\frac{1}{4}\,\frac{(6\,p^2u-\frac{1}{2}g_2)^2}{4\,p^3u-g_2\,pu-g_3}$$

de unde, pentru

$$(2) \qquad p2u=\frac{p^4u+\frac{1}{2}g_2\,p^2u+2g_3\,pu+\frac{1}{16}g_2^2}{4p^3u-g_2\,pu-g_3},$$

o expresiune raţională de gradul 4 în pu.

Derivând ambele membre, obţinem $p'2u$ exprimat printr'un produs al lui $p'u$ printr'o funcţiune raţională de pu de gradul 6.

Făcând în formula de adiţiune (1) $v=2u$ şi înlocuind $p2u$, $p'2u$ prin valorile lor, obţinem $p3u$, $p'3u$, etc.

174. Se pot obţine formule generale de multiplicaţiune urmând o cale diferită.

Să plecăm dela formula (2) (§ 157) în care să facem $v=nu$:

$$(1) \qquad pu-pnu=\frac{\sigma(n+1)u\;\sigma(n-1)u}{\sigma^2nu\;\sigma^2u}$$

Această formulă se poate scrie

$$pu-pnu=\frac{\dfrac{\sigma(n+1)u}{\sigma^{(n+1)^2}u}\;\dfrac{\sigma(n-1)u}{\sigma^{(n-1)^2}u}}{\left(\dfrac{\sigma nu}{\sigma^{n^2}u}\right)^2}.$$

Punând

$$(2) \qquad \varphi_n(u)=\frac{\sigma nu}{\sigma^{n^2}u},$$

avem egalitatea

$$(3) \qquad pu - pnu = \frac{\varphi_{n+1}(u)\,\varphi_{n-1}(u)}{\varphi_n^2(u)}.$$

Funcţiunea $\varphi_n(u)$ are polul unic $u \equiv 0$ $(mo\delta\delta\ 2\omega_1, 2\omega_3)$ de ordinul n^2-1, căci acest punct este în acelaş timp un zero de ordinul întâi al numărătorului. Zerurile acestei funcţiuni în paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ sunt date de egalitatea

$$(4) \qquad u = \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n},$$

în care λ şi μ primesc valorile $0, 1, 2, \ldots, n-1$, exceptând sistemul $\lambda = \mu = 0$. Funcţiunea $\varphi_n(u)$ este o funcţiune eliptică cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, precum se recunoaşte aplicând raportului din membrul al doilea (2) formula (15) (§ 155) sau, în virtutea formulei (16) (§ 166), care reprezintă raportul considerat printr'un determinant ale cărui elemente sunt derivatele de diferite ordine ale funcţiunii pu.

Formula (2) arată că funcţiunea $\varphi_n(u)$ este pară sau impară, după cum n este un număr impar sau par. In ambele cazuri, membrul al doilea (3) este o funcţiune pară, căci funcţiunile $\varphi_{n+1}(u)$, $\varphi_{n-1}(u)$ sunt de aceeaş paritate şi numitorul $\varphi_n^2(u)$ este o funcţiune pară; ceeace, de altmintrelea, rezultă şi din forma membrului întâi. Din cele ce preced rezultă că funcţiunea $\varphi_n(u)$ este de una din formele

$$(5) \qquad \varphi_n(u) = \mathrm{P}(pu),$$

sau

$$(6) \qquad \varphi_n(u) = p'u\, \mathrm{P}_1(pu),$$

după cum n este impar sau par, P şi P_1 fiind polinoame de pu. Gradul celui dintâi este $\frac{n^2-1}{2}$ şi al celui de al doilea este $\frac{n^2-4}{2}$ (§ 168), (corolar).

Pentru a formà polinoamele $\mathrm{P}(pu)$ şi $\mathrm{P}_1(pu)$ cari se anulează în punctele (4), trebuie să ţinem seama de relaţiunile

$$p(2\omega_1 - u) = pu, \quad p(2\omega_3 - u) = pu;$$

de unde rezultă o reducţiune a numărului valorilor menţionate ale lui λ şi μ. Astfel, sistemul (λ, μ) şi sistemul $(n-\lambda, n-\mu)$ dau aceeaş valoare pentru pu. Să considerăm după rând cazul n impar şi cazul n par.

1°. Dacă n este un număr *impar*, obţinem cele $\frac{n^2-1}{2}$ rădăcini ale ecuațiunii

$$P(x) = o, \qquad (x = pu),$$

luând, de ex., sistemul format de valorile

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda = 0; & \mu = 1,2 \ldots, \dfrac{n-1}{2} \\ \lambda = 1,2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}; & \mu = 0. \\ \lambda = 1,2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}; & \mu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \dfrac{n-1}{2}, \end{cases}$$

al căror număr este

$$\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} = \frac{n^2-1}{2}.$$

Funcțiunea întreagă

$$(8) \qquad G(pu) = \prod_{\lambda, \mu} \left(pu - p\,\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right),$$

corespunzătoare sistemului (7), nu poate diferì de polinomul $P(pu)$ decât printr'un factor constant:

$$P(pu) = C\,G(pu).$$

Termenii principali în domeniul $u = 0$ a ambelor membre fiind, precum arată formulele (2) și (8), respectiv

$$\frac{n}{u^{n^2-1}}, \quad \frac{C}{u^{n^2-1}},$$

rezultă valoarea $C = n$. Avem așa dar egalitatea

$$(9) \qquad \varphi_n(u) = n\,G(pu), \quad (n \text{ impar}).$$

2⁰. Dacă n este un număr par, funcțiunea $\varphi_n(u)$ are în paralelogramul perioadelor zerurile $\omega_1, -\omega_2, \omega_3$ cuprinse în formula (4), în care facem respectiv

$$\lambda = \frac{n}{2}, \mu = 0; \lambda = \mu = \frac{n}{2}; \lambda = o, \mu = \frac{n}{2}$$

și alte $\dfrac{n^2-4}{2}$ zeruri date de aceeaș formulă, în care putem da numerelor λ, μ valorile cuprinse în tabloul:

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2}; & \mu = 0, \dfrac{n}{2} \\ \lambda = 0, \dfrac{n}{2}; & \mu = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2} \\ \lambda = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2}; & \mu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \dfrac{n-2}{2}, \end{cases}$$

al căror număr este

$$(n-2)+(n-2)+\frac{(n-2)^2}{2}=\frac{n^2-4}{2}.$$

Funcţiunea întreagă

$$(11)\qquad G_1(pu)=\prod_{\lambda,\mu}\left[pu-p\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n}\right],$$

corespunzătoare tabloului (10), nu poate diferi de polinomul $P_1(pu)$ decât printr'un factor constant; prin urmare

$$\varphi_n(u)=C\,p'u\,G_1(pu).$$

Termenii principali în domeniul $u=0$ ai ambelor membre fiind respectiv

$$\frac{u}{n^{n^2-1}},\qquad \frac{-2C}{u^{n^2-1}},$$

rezultă valoarea $C=-\frac{n}{2}$. Avem aşà dar egalitatea

$$(12)\qquad \varphi_n(u)=-\frac{n}{2}p'u\,G_1(pu),\quad (n\ par).$$

Inlocuind în formula (3) funcţiunile $\varphi_n(u)$ prin expresiunile lor (9) şi (12), în cari funcţiunile $G(pu)$, $G_1(pu)$ sunt date de expresiunile (8) şi (11), obţinem, fie n par sau impar, pentru pnu o expresiune de forma

$$(13)\qquad pnu=\frac{g_{n^2}(pu)}{g_{n^2-1}(pu)},$$

termenii fracţiunii fiind polinoame de pu, de grade egale cu indicii lor.

Observare. Polinoamele $G(pu)$, $G_1(pu)$ date de egalităţile (8) şi (11) conţin constantele $p\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n}$, ale căror valori nu pot fi considerate ca cunoscute. Determinarea acestor constante constitue problema diviziunii perioadelor.

Altă formă a problemei (Kiepert) [1]. Soluţiunea problemei se reduce, în virtutea egalităţii (3), la calculul funcţiunii $\varphi_n(u)$.

Avem, sub formă de determinant (16, § 166), expresiunea

$$(14)\quad \varphi_n(u)=\frac{(-1)^{n-1}}{[2!3!\ldots(n-1)!]^2}\begin{vmatrix} p'u & p''u\ldots p^{(n-1)}u\\ p''u & p'''u\ldots p^{(n)}u\\ \cdots & \cdots\\ p^{(n-1)}u & p^{(n)}u\ldots p^{(2n-3)}u\end{vmatrix},$$

[1] Journal de Crelle, t. 76, 1873.

raţională întreagă de derivatele $p'u, p''u, \ldots, p^{(2n-3)}u$. Funcţiunea $\varphi_n(u)$ este aşa dar o funcţiune raţională întreagă de pu şi $p'u$, ai cărei coeficienţi sunt funcţiuni întregi de $\frac{1}{2}g_2$ şi g_3.

Să dăm lui n succesiv valorile 1, 2,... Pentru $n = 1$, formula (2) ne dă

$$\varphi_1(u) = 1. \tag{15}$$

Incepând dela $n = 2$, recurgem la formula (14), în care înlocuim derivatele de diferite ordine $p''u, p'''u, \ldots$, prin expresiunile lor (§ 147) în funcţiune de pu şi $p'u$. Obţinem astfel, pentru $n = 2$ 3, 4, valorile

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_2(u) &= -p'u, \\ \varphi_3(u) &= 3\,p^4u - \frac{3}{2}g_2 p^2u - 3\,g_3\,pu - \frac{1}{16}g_2^2 \\ \varphi_4(u) &= p'u\Big[-2\,p^6u + \frac{5}{2}g_2p^4u + 10\,g_3p^3u + \frac{5}{8}g_2^2p^2u \\ &\qquad + \frac{1}{2}g_2g_3\,pu + g_3^2 - \frac{1}{32}g_2^3\Big] \text{ [1]}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Calculele pe această cale sunt din ce în ce mai lungi. Există însă formule de recurenţă între funcţiunile $\varphi_n(u)$ cari permit a se calculà lesne valorile lor începând dela $n = 5$. Pentru a obţine aceste formule, să înlocuim în formula

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2u\,\sigma^2v}$$

u prin mu şi v prin nu; obţinem egalitatea

$$pnu - pmu = \frac{\sigma(m+n)u\,\sigma(m-n)u}{\sigma^2mu\,\sigma^2nu}$$

$$= \frac{\dfrac{\sigma(m+n)u}{(\sigma u)^{(m+n)^2}}\;\dfrac{\sigma(m-n)u}{(\sigma u)^{(m-n)^2}}}{\left(\dfrac{\sigma mu}{\sigma^{m^2}u}\right)^2\left(\dfrac{\sigma nu}{\sigma^{n^2}u}\right)^2},$$

adică

$$pnu - pmu = \frac{\varphi_{m+n}(u)\;\varphi_{m-n}(u)}{\varphi_m^2(u)\;\varphi_n^2(u)}. \tag{17}$$

---

[1]) Funcţiunea $\varphi_n(u)$ este, în virtutea definiţiunii sale (2), o funcţiune omogenă de gradul $-(n^2-1)$ în raport cu u, ω_1, ω_3; ceeace explică lipsa în polinoamele de pu, din membrul al doilea, a termenului $p^{m-1}u$, m fiind gradul acestui polinom.

Pentru a stabili legătura între funcţiunile $\varphi_{m+n}, \varphi_{m-n}, \varphi_m, \varphi_n$, să considerăm indentitatea

(18) $$(pnu - pmu) + (pu - pnu) + (pmu - pu) = o.$$

Inlocuind parentezele acestor identităţi prin expresiunile lor date de formulele (3) şi (17), obţinem relaţiunea

(19) $$\varphi_{m+n}\,\varphi_{m-n} = \varphi_{m+1}\,\varphi_{m-1}\,\varphi_n^2 - \varphi_{n+1}\,\varphi_{n-1}\,\varphi_m^2.$$

Făcând în această egalitate $m = n + 1$ şi ţinând seamă de valoarea $\varphi_1 = 1$, obţinem egalitatea

(20) $$\varphi_{2n+1}(u) = \varphi_{n+2}(u)\,\varphi^3_n(u) - \varphi_{n-1}(u)\,\varphi^3_{n+1}(u).$$

Dacă în aceeaş egalitate facem $m = n + 2$ şi apoi înlocuim n prin $n - 1$, avem, ţinând seamă de valoarea $\varphi_2(u) = -p'u$,

(21) $$p'u\,\varphi_{2n}(u) = \varphi_n(u)\left[\varphi_{n+2}(u)\,\varphi^2_{n-1}(u) - \varphi_{n-2}(u)\,\varphi^2_{n+1}(u)\right].$$

Formulele (20) şi (21) sunt formulele de recurenţă căutate. Dând în cea dintâi lui n valorile 2, 3,..., obţinem expresiunile funcţiunilor $\varphi_5, \varphi_7, \ldots$; pe când cea de a doua dă, pentru $n = 3, 4, \ldots$ expresiunile funcţiunilor $p'u\,\varphi_6(u), p'u\,\varphi_8(u), \ldots$

Problema multiplicaţiunii argumentului lui pu printr'un număr întreg este astfel complect rezolvită.

CAPITOLUL XV.

RELAŢIUNI ALGEBRICE INTRE FUNCŢIUNI ELIPTICE.

ECUAŢIUNE ALGEBRICĂ INTRE O FUNCŢIUNE ELIPTICĂ ŞI DERIVATA SA.

175. *Pentru ca între două funcţiuni eliptice $f(u)$ şi $\varphi(u)$ să existe o ecuaţiune algebrică cu coeficienţi constanţi este necesar ca aceste funcţiuni să aibă un sistem comun de perioade.*

Fie

1) $$F(f(u), \varphi(u)) = o$$

o ecuaţiune algebrică cu coeficienţi constanţi între funcţiunile $f(u)$, $\varphi(u)$, de gradul m în raport cu $\varphi(u)$. Să reprezintăm prin 2ω, $2\omega'$ un sistem de perioade primitive ale funcţiunii $f(u)$ şi să înlocuim în ecuaţiunea (1) u prin $u + 2k\omega + 2k'\omega'$, k şi k' fiind numere întregi arbitrare. Funcţiunea $f(u)$ reproducându-se, ecuaţiunea (1) va deveni

(2) $$F(f(u), \varphi(u + 2k\omega + 2k'\omega')) = o.$$

Gradul acestei ecuaţiuni în raport cu φ fiind m, la o valoare dată lui u, funcţiunea

(3) $$\varphi(u + 2k\omega + 2k'\omega'),$$

privită ca rădăcină a ecuaţiunii (2) nu poate admite mai mult decât m valori distincte. Insă, dacă perioadele funcţiunii $\varphi(u)$ n'ar fi cuprinse în expresiunea

(4) $$2k\omega + 2k'\omega',$$

pentru *valori convenabile ale numerelor k şi k'*, ar urmà ca dând acestor numere o infinitate de valori, funcţiunea (3) să admită o infinitate de valori pentru aceeaş valoare a lui u; căci numărul punctelor incongruente, în cari funcţiunea se poate reproduce, fiind egal cu ordinul ei, este limitat. De unde rezultă că perioadele funcţiunii $\varphi(u)$ sunt cuprinse în expresiunea (4). Funcţiunile $f(u)$ şi $\varphi(u)$ admit dar un sistem de perioade comune.

Corolar. Fie a, b, c, d patru numere întregi pentru cari expresiunile $2a\omega + 2b\omega'$, $2c\omega + 2d\omega'$ coincid cu două perioade distincte 2Ω, $2\Omega'$ ale funcţiunii $\varphi(u)$, adică

$$\Omega = a\omega + b\omega', \qquad \Omega' = c\omega + d\omega'.$$

Reprezintând prin $2\omega_1$, $2\omega'_1$ un sistem de perioade primitive ale acestei funcţiuni, avem

$$\Omega = a_1\omega_1 + b_1\omega'_1, \qquad \Omega' = c_1\omega_1 + d_1\omega'_1,$$

coeficienţii fiind numere întregi. Determinanţii

$$ad - bc, \qquad a_1d_1 - b_1c_1$$

sunt diferiţi de zero; căci dacă vreunul din aceşti determinanţi ar fi nul, raportul $\frac{\Omega'}{\Omega}$ ar fi real şi prin urmare perioadele 2Ω, $2\Omega'$ n'ar fi distincte. De unde rezultă că între perioadele primitive ale funcţiunilor $f(u)$ şi $\varphi(u)$ există două relaţiuni de forma

$$\begin{cases} a\omega + b\omega' = a_1\omega_1 + b_1\omega'_1, \\ c\omega + d\omega' = c_1\omega_1 + d_1\omega'_1, \end{cases}$$

coeficienţii fiind numere întregi şi determinanţii

$$ad - bc \neq 0, \qquad a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0.$$

176. *Viceversa. Intre două funcţiuni eliptice $f(u)$ şi $\varphi(u)$ cari au aceleaşi perioade există o ecuaţiune algebrică cu coeficienţi constanţi.*

In adevăr, să exprimăm $f(u)$ şi $\varphi(u)$ în funcţiuni raţionale de pu şi $p'u$; putem scrie

(5) $$f(u) = A + B\,p'u, \qquad \varphi(u) = A_1 + B_1\,p'u,$$

A, B, A_1, B_1 fiind funcţiuni raţionale de pu şi $p'u$. Eliminând pu şi $p'u$ între ecuaţiunile precedente şi ecuaţiunea

$$(6) \qquad p'^2u = 4\,p^3\,u - g_2\,pu - g_3,$$

obţinem o ecuaţiune algebrică

$$(7) \qquad F\,(f\,(u),\ \varphi\,(u)) = o,$$

ai cărei coeficienţi sunt independenţi de u. Se poate determinà gradul ecuaţiunii în raport cu fiecare din cele două funcţiuni. Să punem

$$x = f\,(u), \quad y = \varphi\,(u).$$

Ecuaţiunea (7) devine

$$(8) \qquad F\,(x, y) = o.$$

Gradul acestei ecuaţiuni în raport cu x este egal cu numărul rădăcinilor sale în x corespunzătoare unei valori arbitrare a lui y şi viceversa, gradul său în raport cu y este egal cu numărul rădăcinilor sale în y corespunzătoare unei valori oarecari a lui x. Aceste numere se pot lesne determinà.

Fie m ordinul funcţiunii $x = f\,(u)$ şi n ordinul funcţiunii $y=\varphi(u)$. La o valoare oarecare y, ecuaţiunea $y = \varphi\,(u)$ va da, pentru u, n valori incongruente $u_1, u_2, \ldots, u_n$, în genere distincte [1]). Fiecăreia din aceste valori corespunde câte o singură valoare pentru $x = f\,(u)$. De unde rezultă că, pentru o valoare a lui y, ecuaţiunea (8) admite n rădăcini x, adică ecuaţiunea este de gradul n în raport cu această variabilă. Intr'un mod analog se stabileşte că ecuaţiunea (8) este de gradul m în y.

177. In cazuri particulare, gradul ecuaţiunii (8) se poate micşorà. Astfel, dacă $f\,(u)$ şi $\varphi\,(u)$ sunt amândouă funcţiuni pare, gradul ecuaţiunii se reduce la jumătate în raport cu fiecare din aceste funcţiuni. In adevăr, în acest caz, cele n valori u corespunzătoare unei valori y sunt două câte două egale şi de semne contrarii; fie

$$(9) \qquad \pm u_1, \pm u_2, \ldots, \pm u_{\frac{n}{2}}$$

aceste valori. Insă $f\,(u)$ fiind funcţiune pară, avem $f\,(u) = f\,(-u)$ şi prin urmare valorilor (9) ale lui u le vor corespunde numai $\frac{n}{2}$

---

[1]) Dacă unei valori particulare $y = y_0$ îi corespund k valori egale $u = u_0$ unei valori y vecină cu y_0 îi vor corespunde k valori inegale. In adevăr, în cazul considerat avem, în domeniul lui u_0, desvoltarea $y - y_0 = a_0\,(u - u_0)^k + \ldots$ şi prin inversiune $u - u_0 = \left(\frac{y - y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{k}} + b_1\,(y - y_0)^{\frac{2}{k}} + \ldots$ Această expresiune justifică aserţiunea noastră.

valori pentru x; adică unei valori arbitrare a lui y corespund $\frac{n}{2}$ valori pentru x, etc.

178. Să examinăm un al doilea caz particular. Să presupunem că funcțiunile x și y au aceleași poluri și fie n ordinul comun al acestor două funcțiuni. Ecuațiunea $F(x, y) = o$, de gradul n în raport cu fiecare variabilă, *va fi de gradul n în raport cu amândouă variabilele*. In adevăr, privind x, y ca coordonate carteziane, gradul ecuațiunii $F(x, y) = o$ este egal cu numărul punctelor de intersecțiune ale curbei $F = o$ cu o dreaptă oarecare

$$A x + B y + C = o.$$

Prin urmare acest număr este egal cu numărul valorilor incongruente ale lui u cari satisfac ecuațiunea

$$A f(u) + B \varphi(u) + C = o.$$

Insă membrul întâiu al acestei ecuațiuni este o funcțiune eliptică de ordinul n, prin urmare, numărul zerurilor sale este n.

179. Teoremă. *Orice funcțiune eliptică satisface o ecuațiune diferențială de ordinul întâiu cu coeficienți constanți.* Această teoremă este o consecință imediată a celei precedente. Căci $x = f(u)$ fiind o funcțiune eliptică, derivata sa $\frac{dx}{du}$ este o funcțiune eliptică cu aceleași perioade; prin urmare între x și $\frac{dx}{du}$ există o ecuațiune algebrică

$$(1) \qquad F\left(x, \frac{dx}{du}\right) = o,$$

care nu conține variabila independentă într'un mod explicit.

Să evaluăm gradul ecuațiunii. Un pol de un ordin α al funcțiunii $f(u)$ fiind pol de ordinul $\alpha + 1$ al derivatei $f'(u)$, urmează că, dacă $f(u)$ are n poluri respectiv de ordinele $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ordinul său este

$$N = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$

și ordinul derivatei sale este

$$N + n.$$

Așà dar gradul ecuațiunii (1) este N în raport cu $\frac{dx}{du}$ și $N + n$ în raport cu x.

Dacă toate polurile sunt simple, avem $N = n$ și gradul în raport cu x este $2n$. Dacă polul este unic, gradul ecuațiunii în raport cu x este $n + 1$.

180. Forma ecuaţiunii (1) se poate preciză mai mult. Fie m ordinul funcţiunii $x = f(u)$; gradul cel mai mare posibil ce-l poate aveà ecuaţiunea (1) în raport cu x este $2m$. De altă parte, derivata unei funcţiuni uniforme neputând deveni infinită decât în acelaş timp cu funcţiunea, urmează că dacă ordonăm ecuaţiunea (1) după puterile descrescânde ale derivatei $\frac{dx}{du}$, coeficientul puterii celei mai înalte trebuie să fie o constantă, pe care o putem presupune egală cu unitatea. Forma ecuaţiunii este aşà dar

$$(2) \qquad x'^m + X_1 x'^{m-1} + \ldots + X_{m-1} x' + X_m = o, \quad x' = \frac{dx}{du},$$

coeficienţii X_i fiind polinoame de x de grade cel mult egale cu $2m$.

Suma valorilor argumentelor $u_1, u_2, \ldots, u_m$ pentru cari $x = f(u)$ primeşte aceeaş valoare fiind constantă (§ 129, corolar):

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = C,$$

rezultă egalitatea

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{du_m}{dx} = 0,$$

sau

$$(3) \qquad \frac{1}{x'_1} + \frac{1}{x'_2} + \ldots + \frac{1}{x'_m} = 0, \quad x'_i = \frac{dx}{du_i}.$$

Această egalitate exprimă că suma inverselor rădăcinilor ecuaţiunii (2) este nulă. De unde rezultă condiţiunea

$$(4) \qquad X_{m-1} = o.$$

Forma ecuaţiunii (2) este aşa dar

$$(5) \qquad x'^m + X_1 x'^{m-1} + \ldots + X_{m-2} x'^2 + X_m = o.$$

Se poate fixà o limită superioară a gradului fiecărui polinom X_i. Pentru aceasta să facem substituţiunea

$$y = \frac{1}{x};$$

y va fi o funcţiune eliptică de u de acelaş ordin ca x. Avem

$$x' = -\frac{y'}{y^2}, \; x'^2 = \frac{y'^2}{y^4}, \ldots$$

Ducând aceste valori în ecuaţiunea (5), obţinem

$$(6) \qquad y'^m - y^2 X_1 y'^{m-1} + y^4 X_2 y'^{m-2} - \ldots \pm y^{2m-4} X_{m-2} y'^2 \mp y^{2m} X_m = o.$$

Coeficienţii ecuaţiunii trebuind să fie polinoame de y (în urma înlocuirii lui x prin $\frac{1}{y}$), urmează că polinoamele $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sunt respectiv de grade cel mult egale cu $2, 4, \ldots, 2m$.

181. *Aplicaţiune. Cazul* $m = 2$. Ecuaţiunea între funcţiunea $x = f(u)$ şi derivata sa $\frac{dx}{du}$ este de una din formele

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = A x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4,$$

sau

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = A x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3,$$

după cum $f(u)$ are un pol dublu, sau două poluri simple.

182. Forma ecuaţiunii diferenţiale (5) (§ 180), necesară între o funcţiune eliptică şi derivata sa, nu este suficientă. Să considerăm cazul cel mai simplu, anume, când ecuaţiunea se reduce la forma binoamă

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^m = f(x) \tag{1}$$

şi să examinăm condiţiunile ce trebuie să împlinească polinomul $f(x)$, precum şi ce valori poate aveà gradul m, pentru ca integrala să fie o funcţiune eliptică $x = \varphi(u)$.

Inainte de toate avem de căutat condiţiunile ca această integrală să fie o funcţiune uniformă, neavând alte singularităţi de cât poluri. Pentru aceasta, să considerăm integrala

$$u = \int^x \frac{dx}{\sqrt[m]{f(x)}} \tag{2}$$

şi, procedând ca în (§ 106), să examinăm desvoltarea ei în domeniul unui punct x_0, diferit de un zero al polinomului $f(x)$, situat la distanţă finită sau la infinit şi în domeniul unui zero al acestui polinom.

1°. Fie $x = x_0$ un punct oarecare situat la distanţă finită, $f(x_0) \neq o$. In domeniul acestui punct avem forma

$$\frac{1}{\sqrt[m]{f(x)}} = P(x - x_0), \quad \left[P(x - x_0)\right]_{x_0} = \frac{1}{\sqrt[m]{f(x_0)}} \neq o.$$

Fie u_0 o valoare finită a lui u ce voim să corespundă lui $x = x_0$. Integrala (2) conduce la o desvoltare de forma

$$u - u_0 = a_0 (x - x_0) + a_1 (x - x_0)^2 + \ldots, \; a_0 \neq o;$$

de unde

$$(x - x_0) = P(u - u_0). \tag{3}$$

2⁰. Să presupunem $x_0=\infty$. Pentru ca integrala u să fie finită [1]) când x tinde către infinit, este necesar şi suficient ca gradul lui $f(x)$ să fie cel puţin $m+1$. De altă parte, gradul acestui polinom este cel mult egal cu $2m$ (§ 180). Putem totdeauna presupune că gradul lui $f(x)$ este $2m$. Căci, făcând substituţiunea

$$x=a+\frac{1}{z},$$

a fiind diferit de un zero al lui $f(x)$, ecuaţiunea (1) se transformă într'o ecuaţiune de aceeaş formă, în care polinomul din membrul al doilea este de gradul $2m$. In acest caz avem, în domeniul punctului $x=\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt[m]{f(x)}}=\frac{1}{x^2}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\dots\right),\quad a_0\neq o;$$

prin urmare

$$u-u_0=-\frac{a_0}{x}-\frac{a_1}{2x^2}-\dots$$

De unde rezultă, pentru x, o desvoltare de forma

$$(4)\qquad x=-\frac{a_0}{u-u_0}+\mathrm{P}(u-u_0).$$

Punctul $u=u_0$ este aşà dar un pol al funcţiunii $x=\varphi(u)$.

3⁰. Fie $x=a$ un zero al polinomului $f(x)$ de un ordin α. Pentru ca integrala (2) să fie finită când x tinde către a, este necesar şi suficient ca α să fie $< m$.

In domeniul punctului $x=a$, avem

$$\frac{1}{\sqrt[m]{f(x)}}=(x-a)^{-\frac{\alpha}{m}}\,\mathrm{P}(x-a),\qquad [\mathrm{P}(x-a)]_{x=a}\neq o;$$

prin urmare

$$(5)\qquad u-u_0=(x-a)^{\frac{m-\alpha}{m}}\,\mathrm{P}_1(x-a),\quad [\mathrm{P}_1]_a\neq o.$$

De unde rezultă o desvoltare de forma

$$(6)\qquad x-a=(u-u_0)^{\frac{m}{m-\alpha}}\,\mathscr{P}\left[(u-u_0)^{\frac{m}{m-\alpha}}\right].$$

---

[1]) Nu se consideră valoarea $u=\infty$; căci, dacă $x=\varphi(u)$ este funcţiune eliptică, u este integrală de speţa I în raport cu x şi prin urmare este finită pe toată sfera (x).

Pentru ca x să fie funcţiune uniformă în domeniul punctului u_0 este necesar şi suficient ca exponentul $\frac{m}{m-a}$ să fie un număr întreg:

$$\frac{m}{m-a} = k, \tag{7}$$

care, în virtutea expresiunii (5), reprezintă numărul ramurilor u cari se permută în jurul punctului $x=a$. Din (7) rezultă valoarea

$$a = m\left(1 - \frac{1}{k}\right). \tag{8}$$

Numărul m trebuie dar să fie divizibil cu k.

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zerurile polinomului $f(x)$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ordinele corespunzătoare acestor zeruri. Din cele ce preced rezultă condiţiunile necesare

$$\alpha_i = m\left(1 - \frac{1}{k_i}\right), \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{9}$$

numărul k_i având, relativ la punctul a_i, semnificarea numărului k relativ la punctul a.

Aşà dar: *dacă polinomul* $f(x)$ *este de gradul* $2m$ *şi ordinele zerurilor sale împlinesc condiţiunile* (9), *integrala generală* $x=\varphi(u)$ *a ecuaţiunii* (1) *este o funcţiune uniformă în domeniul oricărui punct* u *situat la distanţă finită, neavând alte singularităţi decât poluri.* De unde conchidem, printr'un raţionament analog cu cel din (§ 108), că $\varphi(u)$ *este o funcţiune uniformă în tot planul* (u), *neavând la distanţă finită alte puncte singulare decât poluri.*

Să presupunem ecuaţiunea (1) ireductibilă şi să examinăm soluţiunile posibile ale ecuaţiunii (9), adică ce valori pot primi numerele întregi k_i, de unde va rezultà şi valoarea gradului m. Să observăm că acest grad, care, precum am văzut, este divizibil cu numerele k_i, este cel mai mic multiplu comun al acestor numere. In adevăr, să presupunem m' cel mai mic multiplu comun al numerelor k_i şi fie $m = \mu m'$, μ fiind un număr întreg. Ecuaţiunile (9) scrise sub forma

$$\alpha_i = \mu(k_i - 1)\frac{m'}{k_i},$$

arată că exponenţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şi m sunt divizibili cu numărul μ: ecuaţiunea (1) n'ar fi ireductibilă; ceeace este contra ipotezei.

Din cele ce preced se poate deduce valorile întregi ale numerelor k_i şi prin urmare valorile corespunzătoare ale lui m. Căci, suma ordinelor $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ fiind egală cu $2m$, rezultă, în virtutea egalității (9),

$$m \sum_{1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) = 2m;$$

de unde, egalitatea

$$(10) \qquad n - 2 = \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n}.$$

Numerele k_i, fiind mai mari ca 1, sunt cel puțin egale cu 2, prin urmare membrul al doilea al egalității precedente este $\leq \frac{n}{2}$; de unde, dubla inegalitate

$$0 < n - 2 \leq \frac{n}{2}$$

sau

$$(11) \qquad 2 < n \leq 4.$$

Numărul n al zerurilor *distincte* ale polinomului $f(x)$ *nu poate dar fi decât* 3 *sau* 4.

1). Fie $n = 4$. Ecuațiunea (10) devine

$$(12) \qquad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} = 2.$$

Unica soluțiune a acestei egalități este

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2,$$

căreia corespunde valoarea $m = 2$ (cel m. m. multiplu comun al numerelor k_i).

In acest caz, ecuațiunea (1) este de forma

$$(\mathrm{I}) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \mathrm{A}\,(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4).$$

2) Fie $n = 3$. Ecuațiunea (10) este de forma

$$(13) \qquad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = 1.$$

Toate soluțiunile întregi sunt cuprinse în tabloul de valori:

k_1	k_2	k_3	m	α_1	α_2	α_3
3	3	3	3	2	2	2
2	4	4	4	2	3	3
2	3	6	6	3	4	5

cărora corespund respectiv ecuațiunile de forma

(II) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^3 = A\,(x-a_1)^2\,(x-a_2)^2\,(x-a_3)^2,$$

(III) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^4 = A\,(x-a_1)^2\,(x-a_2)^3\,(x-a_3)^3,$$

(IV) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^6 = A\,(x-a_1)^3\,(x-a_2)^4\,(x-a_3)^5.$$

Din cele ce preced rezultă că dacă gradul polinomului $f(x)$ din ecuațiunea (I) este $2m$, ecuațiunile (I), (II), (III) și (IV) sunt *singurele a căror integrală generală este o funcțiune uniformă în tot planul* (u) — *din care se exclude punctul* $u=\infty$ — *neavând alte singularități decât poluri.*

Dacă substituim variabilei x o altă variabilă astfel ca unul din zerurile lui $f(x)$ să fie aruncat la infinit, punând

$$x - a_i = \frac{1}{z},$$

a_i fiind unul din aceste zeruri, ecuațiunile transformate ale celor patru ecuațiuni considerate se bucură de aceleași proprietăți. Ecuațiunile (I) și (II) dau naștere la câte o singură ecuațiune nouă, a căror formă este respectiv, înlocuind litera z prin litera x,

(I_1) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = A\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c),$$

(II_1) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^3 = A\,(x-a)^2\,(x-b)^2.$$

Ecuațiunea (III) dă naștere la următoarele două ecuațiuni;

(III_1) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^4 = A\,(x-a)^3\,(x-b)^2,$$

(III_2) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^4 = A\,(x-a)^3\,(x-b)^3.$$

In fine, ecuațiunea (IV) dă naștere la trei ecuațiuni transformate:

(IV_1) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^6 = A\,(x-a)^4\,(x-b)^3,$$

(IV_2) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^6 = A\,(x-a)^5\,(x-b)^3,$$

(IV_3) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^6 = A\,(x-a)^5\,(x-b)^4.$$

Voim să arătăm acum că toate aceste ecuaţiuni definesc funcţiuni eliptice de argumentul u. Această propoziţiune este evidentă pentru ecuaţiunea (I_1). In ce priveşte celelalte ecuaţiuni, se stabileşte lesne că, prin substituţiuni raţionale, le aducem la forma

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = X,$$

X fiind un polinom de x de gradul 3 sau 4.

Să le considerăm după rând.

Ecuaţiunea (II_1) se scrie

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^3 = A\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]^2.$$

Să punem

$$(2) \qquad \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = t^3;$$

de unde

$$2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\frac{dx}{du} = 3t^2\frac{dt}{du};$$

prin urmare, în virtutea ecuaţiunilor (1) şi (2),

$$(3) \qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{1}{9}\sqrt[3]{A^2}\left(4t^3+(a-b)^2\right).$$

Ecuaţiunea (III_1), în care punem

$$(4) \qquad x-a = t^2,$$

devine

$$(5) \qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{\sqrt{A}}{4}\,t\,(t^2+a-b).$$

Ecuaţiunea (III_2) se scrie

$$(6) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^4 = A\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]^3.$$

Punând

$$(7) \qquad \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = t^2,$$

avem

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\frac{dx}{du} = t\frac{dt}{du};$$

Ecuaţiunea considerată devine

$$(8)\qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{1}{4}\sqrt{A}\cdot t\,(4t^2 + (a-b)^2).$$

Ecuaţiunile (IV_1) şi (IV_2), în cari punem

$$(9)\qquad x-a = t^3,$$

devin respectiv

$$(10)\qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{\sqrt[3]{A}}{9}\,(t^3 + a-b),$$

$$(11)\qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{\sqrt[3]{A}}{9}\,t\,(t^3 + a-b).$$

Ecuaţiunea (IV_3), în care punem

$$(12)\qquad x-a = \frac{1}{z},$$

devine

$$(13)\qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^6 = A\,z^3\left[(a-b)\,z+1\right]^4 = A\,(a-b)^4\,z^3\left[z+\frac{1}{a-b}\right]^4$$

de aceeaş formă cu (IV_1).

Teorema este aşà dar demonstrată.

CAPITOLUL XVI.

COFUNCŢIUNILE σ sau FUNCŢIUNILE σ cu INDICI. FUNCŢIUNILE ELIPTICE ALE LUI JACOBI.

I. *Cofuncţiunile* σ.

183. Pe lângă funcţiunea σu se consideră trei funcţiuni, numite cofuncţiuni cu σu, sau funcţiuni σ cu indici şi definite în modul următor

$$(1)\qquad \sigma_a u = e^{-\eta_a u}\,\frac{\sigma(u+\omega_a)}{\sigma\omega_a}, \qquad a = 1, 2, 3.$$

Referindu-ne la formula [(14), 156]

$$(2)\qquad \sigma(u + 2\,\omega_a) = -e^{2\eta_a(u+\omega_a)}\,\sigma u$$

şi înlocuind u prin $u-\omega_a$, obţinem egalitatea

$$(3)\qquad e^{-\eta_a u}\,\sigma(u+\omega_a) = e^{\eta_a u}\,\sigma(\omega_a - u).$$

De unde rezultă dubla definiţiune a funcţiunilor $\sigma_a u$

$$(4)\qquad \sigma_a u = e^{-\eta_a u}\frac{\sigma(u+\omega_a)}{\sigma\omega_a} = e^{\eta_a u}\frac{\sigma(\omega_a - u)}{\sigma\omega_a}\text{ [1]}.$$

Funcţiunile $\sigma_a u$ sunt funcţiuni întregi ca şi funcţiunea σu şi din dubla lor definiţiune rezultă că ele sunt funcţiuni pare

$$(5)\qquad \sigma_a(-u) = \sigma_a u.$$

Făcând în (4) $u = o, \omega_a, \omega_\beta$, obţinem respectiv

$$(6)\qquad \sigma_a 0 = 1,\ \sigma_a \omega_a = 0,\ \sigma_a \omega_\beta = -e^{\eta_a \omega_\beta}\frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_a}.$$

Zerurile funcţiunilor $\sigma_a u$ sunt valorile cari anulează funcţiunea $\sigma(\omega_a - u)$; ele sunt aşà dar date de expresiunea

$$u = \omega_a + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

sau, într'un mod explicit pentru fiecare din aceste funcţiuni,

$$(7)\qquad u = \begin{cases} (2m+1)\omega_1 + 2n\omega_3 & \text{pentru } \sigma_1 u, \\ (2m+1)\omega_1 + (2n+1)\omega_3 & \text{»}\quad \sigma_2 u, \\ 2m\omega_1 + (2n+1)\omega_3 & \text{»}\quad \sigma_3 u, \end{cases}$$

m şi n fiind numere întregi arbitrare.

Funcţiunile $\sigma_a u$ sunt omogene şi de gradul zero în raport cu u, ω_1, ω_3, căci raportul $\dfrac{\sigma(\omega_a \pm u)}{\sigma\omega_a}$ este de gradul zero şi $\eta_a = \zeta\omega_a$ este funcţiune omogenă, de gradul -1, în raport cu ω_1 şi ω_3.

184. *Mărirea argumentului cu o perioadă.* Inlocuind în formula (1) u prin $u + 2\omega_a$ şi ţinând seamă de relaţiunea (2), obţinem formula

$$(8)\qquad \sigma_a(u + 2\omega_a) = -e^{2\eta_a(u+\omega_a)}\sigma_a u$$

Deasemenea, în virtutea relaţiunii

$$(9)\qquad \eta_a\omega_\beta - \eta_\beta\omega_a = \pm i\frac{\pi}{2},$$

avem egalitatea

$$(10)\quad \sigma_\beta(u+2\omega_a) = e^{2\eta_a(u+\omega_a)}\sigma_\beta u,\qquad a, \beta = 1, 2, 3,\quad a \neq \beta.$$

---

[1]) Analogie cu formulele $\cos u = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + u\right)$.

185. *Mărirea argumentului cu jumătăți de perioade.* Din dubla definițiune (4) (§ 183) a funcțiunii $\sigma_a u$ scoatem

$$(11) \qquad \sigma(u \pm \omega_a) = \pm e^{\pm \eta_a u} \sigma\omega_a \sigma_a u,$$

semnele superioare și inferioare mergând împreună. Inlocuind în formulele de definițiune

$$(12) \qquad \sigma_a u = e^{\eta_a u} \frac{\sigma(\omega_a - u)}{\sigma\omega_a}, \quad \sigma_a u = e^{-\eta_a u} \frac{\sigma(\omega_a + u)}{\sigma\omega_a}$$

u respectiv prin $u + \omega_a$, $u - \omega_a$, obținem două egalități cuprinse în cea următoare

$$(13) \qquad \sigma_a(u \pm \omega_a) = \mp e^{\pm \eta_a u + \eta_a \omega_a} \frac{\sigma u}{\sigma\omega_a},$$

semnele superioare și inferioare mergând împreună. Inlocuind în a doua formulă (12) u prin $u + \omega_\beta$, iar în cea dintâi u prin $u - \omega_\beta$, obținem respectiv egalitățile

$$(14) \quad \begin{cases} \sigma_a(u+\omega_\beta) = e^{-\eta_a(u+\omega_\beta)} \dfrac{\sigma(u-\omega_\gamma)}{\sigma\omega_a} = -e^{\eta_\beta u - \eta_a \omega_\beta} \dfrac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_a} \sigma_\gamma u, \\[2ex] \sigma_a(u-\omega_\beta) = -e^{\eta_a(u-\omega_\beta)} \dfrac{\sigma(u+\omega_\gamma)}{\sigma\omega_a} = -e^{-\eta_\beta u - \eta_a \omega_\beta} \dfrac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_a} \sigma_\gamma u. \end{cases}$$

Să facem $u = o$ în una din egalitățile (14); obținem

$$(15) \qquad e^{\eta_a \omega_\beta} = -\frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_a \sigma_a \omega_\beta}.$$

Permutând α cu γ, avem

$$(16) \qquad e^{\eta_\gamma \omega_\beta} = -\frac{\sigma\omega_a}{\sigma\omega_\gamma \sigma_\gamma \omega_\beta}.$$

Multiplicând între ele aceste două egalități, rezultă

$$e^{\eta_\beta \omega_\beta} = \sigma_a \omega_\beta \sigma_\gamma \omega_\beta,$$

sau, permutând β cu α,

$$(17) \qquad e^{\eta_a \omega_a} = \sigma_\beta \omega_a \sigma_\gamma \omega_a.$$

186. In formula [(1), (§ 160)]

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\ \sigma(u-v)}{\sigma^2 u\ \sigma^2 v}$$

să facem $v = \omega_a$; obţinem

$$pu - e_a = -\frac{\sigma(u+\omega_a)\,\sigma(u-\omega_a)}{\sigma^2\omega_a\,\sigma^2 u},$$

sau, multiplicând între ele cele două expresiuni (4) ale lui $\sigma_a u$,

$$pu - e_a = \frac{\sigma_a^2 u}{\sigma^2 u}. \tag{18}$$

De unde rezultă că cele două determinaţiuni ale radicalului $\sqrt{pu - e_a}$ sunt funcţiuni uniforme de u. Vom luà, prin definiţiune,

$$\sqrt{pu - e_a} = \frac{\sigma_a u}{\sigma u}, \quad a = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Semnul radicalului fiind determinat de funcţiunea uniformă din membrul al doilea. Din formulele (2), (8) şi (10) rezultă că funcţiunile

$$\sqrt{pu - e_1}, \quad \sqrt{pu - e_2}, \quad \sqrt{pu - e_3}$$

sunt funcţiuni eliptice având respectiv ca perioade primitive cantităţile

$$(2\omega_1, 4\omega_3), \quad (4\omega_1, 2\omega_2), \quad (4\omega_1, 2\omega_3).$$

187. Introducând funcţiunile $\sigma_a u$, formula (1) (§ 157)

$$p'u = 2\frac{\sigma(u-\omega_1)\,\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u-\omega_3)}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3\,\sigma^3 u}$$

se va scrie

$$p'u = -2\,\frac{\sigma_1 u\;\sigma_2 u\;\sigma_3 u}{\sigma^3 u}. \tag{20}$$

Această formulă se mai poate deduce înlocuind în (19) a prin 1, 2, 3 şi făcând produsul egalităţilor corespunzătoare

$$\sqrt{pu - e_1}\,\sqrt{pu - e_2}\,\sqrt{pu - e_3} = \frac{\sigma_1 u\;\sigma_2 u\;\sigma_3 u}{\sigma^3 u}.$$

De altă parte avem

$$p'u = -2\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)},$$

membrul al doilea fiind precedat de semnul — pentru ca valoarea sa principală în domeniul lui $u = o$ să coincidă cu aceea a membrului întâiu. De unde rezultă formula (20). Din această formulă şi din egalitatea

$$p'u = -\frac{\sigma 2u}{\sigma^4 u} \quad (4\ § \ 158)$$

rezultă, pentru $\sigma 2u$, expresiunea

$$(21) \qquad \sigma 2u = 2\sigma u\ \sigma_1 u\ \sigma_2 u\ \sigma_3 u.$$

187. *Expresiunea funcțiunilor* $\sigma_\alpha u$ *sub formă de produse.* In expresiunea

$$pu = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right); \quad w = 2m\omega_1 + 2n\omega,$$

să înlocuim u succesiv prin a și prin $u + a$, a fiind $\neq o$, și să scădem rezultatele între ele. Obținem

$$(1) \qquad p(u+a) - pa = \Sigma \left[\frac{1}{(u+a-w)^2} - \frac{1}{(a-w)^2}\right].$$

Integrând între o și u, rezultă egalitatea

$$(2) \qquad \zeta(u+a) - \zeta a + upa = \Sigma \left[\frac{1}{u+a-w} + \frac{1}{w-a} + \frac{u}{(w-a)^2}\right].$$

Integrând, între aceleași limite, ambele membre ale acestei egalități, avem

$$\log \frac{\sigma(u+a)}{\sigma a} - u\zeta a + \frac{u^2}{2} pa = \log \Pi \left\{\left(1 - \frac{u}{w-a}\right) e^{\frac{u}{w-a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(w-a)^2}}\right\};$$

de unde

$$(3) \qquad \frac{\sigma(u+a)}{\sigma a} e^{-u\zeta a + \frac{u^2}{2} pa} = \Pi \left[\left(1 - \frac{u}{w-a}\right) e^{\frac{u}{w-a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(w-a)^2}}\right].$$

Făcând în această egalitate $a = \omega_\alpha$ și ținând seamă de relațiunea

$$\sigma_\alpha u = e^{-\eta_\alpha u} \frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha},$$

obținem expresiunea căutată

$$(4) \qquad \sigma_\alpha\, u\, e^{\frac{1}{2} e_\alpha u^2} = \Pi \left[\left(1 - \frac{u}{w-\omega_\alpha}\right) e^{\frac{u}{w-\omega_\alpha} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(w-\omega_\alpha)^2}}\right].$$

188. *Transformarea cantităților* e_α *și a funcțiunilor* $\sigma_\alpha u$ *când înlocuim perioadele* $2\omega_1$, $2\omega_3$ *prin două perioade echivalente* $2\omega_1'$, $2\omega_3'$.

Fie

$$(5) \qquad \begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_3 \\ \omega_3' = c\omega_1 + d\omega_3 \end{cases} \qquad (6) \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

formulele de transformare ale perioadelor. Invarianții g_2 și g_3 rămânând neschimbați, rezultă că rădăcinile

$$(7) \qquad e_\alpha' = p(\omega_\alpha' | \omega_1', \omega_3') \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

ale ecuaţiunii

$$(8)\qquad 4x^3 - g_2 x - g_3 = o$$

coincid, abstracţiune făcând de ordinea lor, cu rădăcinile e_1, e_2, e_3 ale aceleiaş ecuaţiuni. Ordinea în care aceste rădăcini se corespund depinde de paritatea coeficienţilor substituţiunii. Egalitatea (6) arată că numerele din aceeaş coloană sau linie nu pot fi pare în acelaş timp; deasemenea nu toate pot fi în acelaş timp impare. Avem pentru aceste numere şase congruenţe (mod. 2).

Figurăm aci printr'un tablou aceste congruenţe împreună cu valorile corespunzătoare ale rădăcinilor e'_a:

(9)

$a =$	$b =$	$c =$	$d =$	$e'_1 =$	$e'_2 =$	$e'_3 =$
1	0	0	1	e_1	e_2	e_3
1	0	1	1	e_1	e_3	e_2
1	1	0	1	e_2	e_1	e_3
1	1	1	0	e_2	e_3	e_1
0	1	1	0	e_3	e_2	e_1
0	1	1	1	e_3	e_1	e_2

Să considerăm acum cofuncţiunile σ corespunzătoare sistemului celui nou de perioade. Punând

$$w' = 2m'\omega'_1 + 2n'\omega'_3,$$

vom avea, în virtutea formulei (4),

$$(10)\quad \sigma_\beta(u|\omega'_1, \omega'_3)\, e^{\frac{1}{2}e'_\beta u^2} = \Pi \left\{ \left(1 - \frac{u}{w' - \omega'_\beta}\right) e^{\frac{u}{w'-\omega'_\beta} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(w'-\omega'_\beta)^2}} \right\}$$

Expresiunile

$$2m'\omega'_1 + 2n'\omega'_3 - \omega'_\beta, \qquad 2m\omega_1 + 2n\omega_3 - \omega_a$$

reprezintând, în virtutea echivalenţii perioadelor, aceleaşi puncte când m, n, m', n' primesc toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, rezultă că membrele de al doilea (4) şi (10) sunt aceleaşi; prin urmare avem

$$(11)\qquad \sigma_\beta(u\,|\,\omega'_1, \omega'_3)\, e^{\frac{1}{2}e'_\beta u^2} = \sigma_a(u\,|\,\omega_1, \omega_3)\, e^{\frac{1}{2}e_a u^2}.$$

Substituţiunea (5) fiind dată, la fiecare valoare a (1, 2, 3) corespunde o valoare β (1, 2, 3), pentru care, în virtutea tabloului

(9), avem $e'_\beta = e_\alpha$. *Pentru această valoare β,* avem

$$\sigma_\beta(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = \sigma_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_3), \tag{12}$$

adică, *înlocuirea perioadelor date prin perioade echivalente are drept efect a permuta între ele cofuncțiunile σ în aceeaș ordine în care se permută cantitățile* e_1, e_2, e_3 [1]).

189. *Expresiunea radicalelor* $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$. In formula

$$\sqrt{pu - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$$

să înlocuim u prin ω_β; obținem

$$\sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha \omega_\beta}{\sigma\omega_\beta} = e^{-\eta_\alpha \omega_\beta} \frac{\sigma(\omega_\alpha + \omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\, \sigma\omega_\beta} = -e^{-\eta_\alpha \omega_\beta} \frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha \sigma\omega_\beta}, \tag{1}$$

$$(\alpha \neq \beta \neq \gamma = 1, 2, 3).$$

Permutând numerele α și β, avem

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = -e^{-\eta_\beta \omega_\alpha} \frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha\, \sigma\omega_\beta}. \tag{2}$$

Radicalele din membrele dintâiu ale egalităților (1) și (2) sunt astfel determinate fără ambiguitate. In fiecare din egalități sunt cuprinse următoarele radicale:

$$\begin{cases} \sqrt{e_1 - e_2} = \dfrac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma\omega_1} = -e^{-\eta_2 \omega_1} \dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\, \sigma\omega_2}, \\ \sqrt{e_2 - e_1} = \dfrac{\sigma_1 \omega_2}{\sigma\omega_2} = -e^{-\eta_1 \omega_2} \dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\, \sigma\omega_2}; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \sqrt{e_1 - e_3} = \dfrac{\sigma_3 \omega_1}{\sigma\omega_1} = -e^{-\eta_3 \omega_1} \dfrac{\sigma\omega_2}{\sigma\omega_1\, \sigma\omega_3}, \\ \sqrt{e_3 - e_1} = \dfrac{\sigma_1 \omega_3}{\sigma\omega_3} = -e^{-\eta_1 \omega_3} \dfrac{\sigma\omega_2}{\sigma\omega_1\, \sigma\omega_3}; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \sqrt{e_2 - e_3} = \dfrac{\sigma_3 \omega_2}{\sigma\omega_2} = -e^{-\eta_3 \omega_2} \dfrac{\sigma\omega_1}{\sigma\omega_2\, \sigma\omega_3}, \\ \sqrt{e_3 - e_2} = \dfrac{\sigma_2 \omega_3}{\sigma\omega_3} = -e^{-\eta_2 \omega_3} \dfrac{\sigma\omega_1}{\sigma\omega_2\, \sigma\omega_3}. \end{cases} \tag{5}$$

---

[1]) Acest rezultat se poate deduce din formula $pu - e_\alpha = \dfrac{\sigma^2_\alpha u}{\sigma^2 u}$, în virtutea căreia pătratele $\sigma^2_\alpha u$ se permută în aceaș ordine ca e_1, e_2, e_3. Pentru $u = o$, cele trei funcțiuni $\sigma_\alpha u$ fiind egale cu 1, rezultă că ele se permută în acelaș mod.

In ipoteza că coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ este pozitiv, avem egalităţile (12) § (153)

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2 = \eta_3 \omega_2 - \eta_2 \omega_3 = i \frac{\pi}{2},$$

în virtutea cărora formulele precedente dau

$$(6) \quad \begin{cases} \sqrt{e_2 - e_1} = e^{\eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2} \sqrt{e_1 - e_2} = i \sqrt{e_1 - e_2}, \\ \sqrt{e_3 - e_1} = e^{\eta_3 \omega_1 - \eta_1 \omega_3} \sqrt{e_1 - e_3} = -i \sqrt{e_1 - e_3}, \\ \sqrt{e_3 - e_2} = e^{\eta_3 \omega_2 - \eta_2 \omega_3} \sqrt{e_2 - e_3} = i \sqrt{e_2 - e_3}. \end{cases}$$

190. *Relaţiuni între pătratele funcţiunilor* σ. In formula

$$pu - e_a = \frac{\sigma^2_a u}{\sigma^2 u}$$

să dăm lui a valorile 1, 2, 3 şi să eliminăm funcţiunea pu între ecuaţiunile astfel obţinute. Găsim ecuaţiunile

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma_1^2 u - \sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\, \sigma^2 u = 0, \\ \sigma_2^2 u - \sigma_3^2 u + (e_2 - e_3)\, \sigma^2 u = 0, \\ \sigma_3^2 u - \sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\, \sigma^2 u = 0. \end{cases}$$

Multiplicând aceste egalităţi respectiv cu e_3, e_1, e_2 şi adunând, avem

$$(2) \quad (e_2 - e_3)\, \sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\, \sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\, \sigma_3^2 u = 0.$$

191. *Raporturile funcţiunilor* σ. Din formulele

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma(u + 2\omega_a) = -e^{2\eta_a (u+\omega_a)} \sigma u, \\ \sigma_a(u + 2\omega_a) = -e^{2\eta_a (u+\omega_a)} \sigma_a u, \\ \sigma_\beta(u + 2\omega_a) = e^{2\eta_a (u+\omega_a)} \sigma_\beta u, \end{cases}$$

rezultă că raporturile funcţiunilor σ luate două câte două se reproduc, abstracţiune făcând de semn, când mărim argumentul cu o perioadă oarecare. Aceste raporturi, în număr de 12, se pot exprimà cu ajutorul a trei dintre ele.

Să considerăm cele trei următoare:

$$(2) \quad \sigma_{03}\, u = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u}, \quad \sigma_{13} u = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \quad \sigma_{23} u = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u},$$

cari definesc funcţiuni uniforme în tot planul neavând alte singularităţi la distanţă finită decât poluri, anume zerurile numitorului $\sigma_3\, u$:

$$(3) \quad u = 2m\omega_1 + (2n + 1)\, \omega_3.$$

Din relațiunile (1) rezultă formulele

(4) $\begin{cases} \sigma_{03}(u + 2\,\omega_\alpha) = \sigma_{03}\,u & \text{pentru } \alpha = 3 \\ \sigma_{03}(u + 2\,\omega_\alpha) = -\sigma_{03}\,u & \text{»} \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \sigma_{13}(u + 2\,\omega_\alpha) = \sigma_{13}\,u & \text{»} \quad \alpha = 2 \\ \sigma_{13}(u + 2\,\omega_\alpha) = -\sigma_{13}\,u & \text{»} \quad \alpha = 1, 3. \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \sigma_{23}(u + 2\,\omega_\alpha) = \sigma_{23}\,u & \text{»} \quad \alpha = 1 \\ \sigma_{23}(u + 2\,\omega_\alpha) = -\sigma_{23}\,u & \text{»} \quad \alpha = 2, 3. \end{cases}$

Funcțiunile $\sigma_{03}\,u$, $\sigma_{13}\,u$, $\sigma_{23}\,u$ sunt funcțiuni eliptice de ordinul al doilea, având respectiv ca perioade primitive perioadele

(7) $4\omega_1,\ 2\omega_3;\quad 4\omega_1,\ 2(\omega_1 + \omega_3);\quad 2\omega_1,\ 4\omega_3,$

căci fiecare din ele are în paralelogramul de perioade corespunzător numai două poluri simple, anume

(8)

funcțiuni	poluri
$\sigma_{03}u$	$\omega_3,\ \omega_3 + 2\omega_1,$
$\sigma_{13}\,u$	$\omega_3 + 2\omega_1,\ \omega_3 + 4\,\omega_1,$
$\sigma_{23}\,u$	$\omega_3,\ 3\,\omega_3.$

Funcțiunea $\sigma_{03}u$ este impară, celelalte două sunt pare. Pentru $u = 0$, avem

(9) $$\sigma_{03}\,0 = 0,\quad \sigma_{13}\,0 = \sigma_{23}\,0 = 1.$$

Intre pătratele acestor funcțiuni luate două câte două există relațiuni ce se deduc din formulele (1) (§ 189), dacă le dividem cu $\sigma_3^2 u$. Considerând cele două din urmă, obținem

(10) $$\begin{cases} \sigma_{1\,3}^{\,2}\,u + (e_1 - e_3)\,\sigma_{0\,3}^{\,2}\,u = 1, \\ \sigma_{2\,3}^{\,2}\,u + (e_2 - e_3)\,\sigma_{0\,3}^{\,2}\,u = 1. \end{cases}$$

192. *Mărirea argumentului cu jumătăți de perioade.* Din formulele (§ 185)

(1) $$\begin{cases} \sigma\,(u + \omega_\alpha) = e^{\eta_\alpha u}\,\sigma\omega_\alpha\,\sigma_\alpha u, \\[2ex] \sigma_\alpha\,(u + \omega_\alpha) = -\,e^{\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\dfrac{\sigma u}{\sigma\omega_\alpha}, \\[2ex] \sigma_\alpha(u + \omega_\beta) = -\,e^{\eta_\beta u - \eta_\alpha \omega_\beta}\,\dfrac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha}\,\sigma_\gamma u, \end{cases}$$

ținând seamă de expresiunea radicalelor $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$ (§ 188), deducem tabloul următor de egalităţi:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma_3(u+\omega_1)} = -e^{\eta_3\omega_1}\dfrac{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_3}{\sigma\omega_2}\,\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u} = \dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}, \\[2ex] \dfrac{\sigma(u+\omega_2)}{\sigma_3(u+\omega_2)} = -e^{\eta_3\omega_2}\dfrac{\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1}\,\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u} = \dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u}, \\[2ex] \dfrac{\sigma(u+\omega_3)}{\sigma_3(u+\omega_3)} = -e^{\eta_3\omega_3}\,\sigma^2\omega_3\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u} = -\dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u}. \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_1(u+\omega_1)}{\sigma_3(u+\omega_1)} = e^{-\eta_2\omega_1}\dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u} = -\sqrt{e_1-e_2}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u}, \\[2ex] \dfrac{\sigma_1(u+\omega_2)}{\sigma_3(u+\omega_2)} = e^{(\eta_3-\eta_1)\omega_2}\left(\dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1}\right)^2\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u} = i\,\dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u}, \\[2ex] \dfrac{\sigma_1(u+\omega_3)}{\sigma_3(u+\omega_3)} = e^{\eta_2\omega_3}\,\dfrac{\sigma\omega_2\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1}\,\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u} = \dfrac{i}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u}. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_2(u+\omega_1)}{\sigma_3(u+\omega_1)} = e^{(\eta_3-\eta_2)\omega_1}\left(\dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_2}\right)^2\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = \dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}, \\[2ex] \dfrac{\sigma_2(u+\omega_2)}{\sigma_3(u+\omega_2)} = e^{-\eta_1\omega_2}\,\dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_1 u} = -i\sqrt{e_1-e_2}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_1 u}, \\[2ex] \dfrac{\sigma_2(u+\omega_3)}{\sigma_3(u+\omega_3)} = e^{\eta_1\omega_3}\,\dfrac{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_3}{\sigma\omega_2}\,\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u} = -\dfrac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u}. \end{cases}$$

192 bis. Din definiţiunea celor trei funcţiuni rezultă că avem

$$(11)\quad \begin{cases} \sigma_{03}(\lambda u \mid \lambda\omega_1,\ \lambda\omega_3) = \lambda\sigma_{03}(u \mid \omega_1, \omega_3), \\ \sigma_{\alpha 3}(\lambda u \mid \lambda\omega_1,\ \lambda\omega_3) = \sigma_{\alpha 3}(u \mid \omega_1, \omega_3), \qquad (\alpha = 1, 2), \end{cases}$$

λ fiind un factor arbitrar. Aceste funcţiuni sunt dar omogene în raport cu u, ω_1, ω_3, ceà dintâiu de gradul unu şi celelalte două de gradul zero.

De altă parte, radicalele

$$\sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha\,\omega_\beta}{\sigma\omega_\beta}$$

fiind în raport cu ω_1, ω_3 omogene şi de gradul -1, rezultă că produsul funcţiunii $\sigma_{03}\,u$ printr'unul din aceste radicale este o funcţiune omogenă şi de gradul zero în raport cu u, ω_1, ω_3.

II. FUNCŢIUNILE ELIPTICE $sn\varphi$, $cn\varphi$, $dn\varphi$ ale lui JACOBI.

193. Raporturile funcţiunilor σ, considerate mai sus,

$$\sigma_{03}(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad \sigma_{13}(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad \sigma_{23}(u \mid \omega_1, \omega_3)$$

conduc la funcţiunile eliptice introduse în Analiză de Jacobi. Să înlocuim funcţiunea $\sigma_{03}u$ prin produsul

$$\varphi(u) = \sqrt{e_1 - e_3}\, \sigma_{03}\, u,$$

omogen şi de gradul zero în raport cu u, ω_1, ω_3 ca şi funcţiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$ şi să facem schimbarea de variabilă

(1) $$u = \frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Funcţiunile

(2) $$\varphi\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \mid \omega_1, \omega_3\right), \quad \sigma_{\alpha 3}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \mid \omega_1, \omega_3\right), \quad (\alpha = 1,2)$$

depind numai de argumentul φ şi de raportul $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ al perioadelor.

In adevăr, multiplicând ω_1, ω_3 printr'un factor arbitrar λ şi reprezintând prin

$$(\sqrt{e_1 - e_3})'$$

ceeace devine $\sqrt{e_1 - e_3}$, avem

$$(\sqrt{e_1 - e_3})' = \frac{1}{\lambda}\sqrt{e_1 - e_3};$$

prin urmare

$$\varphi\left(\frac{\varphi}{(\sqrt{e_1 - e_3})'} \,\middle|\, \lambda\omega_1, \lambda\omega_3\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{\lambda\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \lambda\omega_1, \lambda\omega_3\right) = \varphi\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right),$$

adică funcţiunea $\varphi\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right)$ este omogenă şi de gradul zero în raport cu ω_1, ω_3; ea depinde aşa dar de argumentul φ şi de raportul $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$.

Aceeaş concluziune se aplică funcţiunilor $\sigma_{\alpha 3}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right)$, $(\alpha = 1, 2)$.

194. Funcţiunile (2) aşà definite au fost introduse în Analiză de Jacobi, care le reprezintă prin notaţiunile

$$\sin am\, v \quad , \quad \cos am\, v \quad , \quad \Delta\; am\, v \; ^{1)}$$

şi cari se notează mai scurt:

$$sn\, v \quad , \quad cn\, v \quad , \quad dn\, v.$$

Aceste trei funcţiuni sunt aşa dar definite prin expresiunile

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} snv &= \sqrt{e_1 - e_2}\, \frac{\sigma u}{\sigma_3 u}, \\ cnv &= \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \\ dnv &= \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}, \end{aligned} \right. \qquad v = u\sqrt{e_1 - e_3}:$$

cari, în virtutea relaţiunilor (18) (§ 184), se pot scrie

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} snv &= \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{pu - e_3}}, \\ cnv &= \frac{\sqrt{pu - e_1}}{\sqrt{pu - e_3}}, \\ dnv &= \frac{\sqrt{pu - e_2}}{\sqrt{pu - e_3}}. \end{aligned} \right. \qquad v = u\sqrt{e_1 - e_3}.$$

Cea dintâiu este impară şi celelalte două sunt pare:

$$(5) \qquad sn\,(-v) = -sn\, v,\; cn\,(-v) = cn\, v,\; dn\,(-v) = dn\, v.$$

Pentru $v = o$, avem

$$(6) \qquad sn\, 0 = 0, \quad cn\, 0 = dn\, 0 = 1.$$

Dacă voim să punem în evidenţă raportul $\tau = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ al perioadelor, scriem

$$sn\,(v, \tau),\; cn\,(v, \tau),\; dn\,(v, \tau).$$

195. Să observăm că semnul radicalului $\sqrt{e_1 - e_3}$, care figurează în definiţiunea funcţiunii $sn\, v$, este indiferent, însă acelaş ca în formula $v = u\sqrt{e_1 - e_3}$; căci schimbând semnul acestui radical, se schimbă semnul lui v şi ecuaţiunea care defineşte funcţiunea $sn\, v$ rămâne neschimbată.

---

1) *Fundamenta nova: sinus amplitudinis v, cosinus amplitudinis v, delta amplitudinis v.*

196. Să introducem cantitatea k definită de egalitatea

$$(1) \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

care se numeşte *modul* al funcţiunilor eliptice ale lui Jacobi; vom aveà, în virtutea egalităţilor (10) (§ 191), între pătratele acestor funcţiuni, relaţiunile următoare:

$$(2) \qquad \begin{cases} sn^2 v + cn^2 v = 1, \\ k^2 sn^2 v + dn^2 v = 1. \end{cases}$$

Pe lângă modulul k se introduce modulul *complementar* k', definit de egalitatea

$$(3) \qquad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

Din egalităţile (1) şi (3) rezultă egalitatea

$$(4) \qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

Cantităţile e_1, e_2, e_3 fiind distincte, rezultă că modulele k şi k' sunt finite şi diferite de 0 şi 1. Se presupune totdeauna că dacă cantităţile e_1, e_2, e_3 sunt reale, ele sunt dispuse în ordinea $e_1 > e_2 > e_3$; în cazul când ele sunt complexe şi situate în linie dreaptă, reprezintăm prin e_2 punctul cuprins între e_1 şi e_3. In aceste cazuri, k^2 şi k'^2 sunt reale, pozitive şi mai mici decât 1. In cazul general, când cele trei puncte formează un triunghiu, latura (e_1, e_3) este presupusă cea mai mare, sau cel puţin egală cu celelalte laturi; unghiurile $\hat{e}_1$, $\hat{e}_3$ ce ea formează cu acestea sunt aşà dar ascuţite. Aceste unghiuri fiind respectiv egale cu cea mai mică valoare absolută a fiecărui argument al raporturilor membrelor de al doilea (1) şi (3), rezultă că aceste argumente sunt cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ şi $+\frac{\pi}{2}$.

Cu modul acesta, punând

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \varrho e^{i\varphi}, \qquad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \varrho' e^{i\varphi'},$$

avem inegalităţile

$$\varrho \leq 1, \quad \varrho' \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi' < \frac{\pi}{2}.$$

Prin definiţiune, luăm

$$k = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \qquad k' = \varrho'^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi'}{2}},$$

$$\sqrt{k} = \varrho^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\varphi}{4}}, \qquad \sqrt{k'} = \varrho'^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\varphi'}{4}},$$

In virtutea acestei definiţiuni, modulele k, k' şi rădăcinile lor sunt reale, pozitive şi mai mici decât 1 în acelaş timp cu k^2 şi k'^2; în *cazul general, partea lor reală este pozitivă.*

Introducând notaţiunea lui Jacobi relativ la perioade, punem

$$(5) \qquad K = \omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}, \quad i\,K' = \omega_3 \sqrt{e_1 - e_3}.$$

197. Este interesant de observat că modulele k, k', precum şi cantităţile K şi i K' sunt funcţiuni omogene şi de gradul zero în ω_1, ω_3; ele depind dar numai de raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. De unde rezultă că dându-se una din aceste patru cantităţi, celelalte nu pot fi luate într'un mod arbitrar. Intre modulele k şi k' avem relaţiunea *algebrică* (4). Relaţiunile ce există între k şi K, i K' sunt transcedente, precum vom vedeà mai departe.

198. *Mărirea argumentului* v *cu* 2K, $2i$K'.

Să înlocuim în formulele

$$(1) \qquad snv = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}, \quad cnv = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \quad dnv = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} \qquad (v = u\sqrt{e_1 - e_3})$$

v succesiv prin $v + 2K$, $v + 2iK'$; ceea ce revine, în virtutea formulelor (5) (§ 197), *a* mări u respectiv cu $2\omega_1$, $2\omega_3$. Obţinem relaţiunile următoare:

$$(2) \quad \begin{cases} sn(v+2K) = -snv, \; cn(v+2K) = -cnv, \; dn(v+2K) = dnv, \\ sn(v+2iK') = snv, \; cn(v+2iK') = -cnv, \; dn(v+2iK') = -dnv. \end{cases}$$

Schimbând v în $-v$, aceste relaţiuni devin

$$(3) \quad \begin{cases} sn(2K - v) = snv, \; cn(2K - v) = -cnv, \; dn(2K - v) = dnv, \\ sn(2iK' - v) = -snv, \; cn(2iK' - v) = -cnv, \; dn(2iK' - v) = dnv. \end{cases}$$

Din formulele (2) rezultă că funcţiunile snv, cnv, dnv admit respectiv perioadele

$$4K, 2iK'; \; 4K, 2K + 2iK'; \; 2K, 4iK'.$$

Polurile celor trei funcţiuni, fiind punctele corespunzătoare zerurilor funcţiunii $\sigma_3 u$, sunt date de expresiunea

$$(4) \qquad v = 2mK + (2n+1)\,iK',$$

m şi n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. Aceste poluri sunt de ordinul întâiu, precum sunt zerurile funcţiunii $\sigma_3 u$

și fiecare din funcțiunile snv, cnv, dnv are, precum se recunoaște imediat, numai două poluri în paralelogramul respectiv de perioade. Perioadele considerate sunt așadar primitive pentru aceste funcțiuni.

Zerurile celor trei funcțiuni, fiind punctele corespunzătoare zerurilor funcțiunilor σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, sunt de ordinul întâi, date, în virtutea formulelor (7) (§ 183), de expresiunile

$$(5)\qquad \begin{cases} v = 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' & \text{pentru } snv, \\ v = (2m+1)\,\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' & \text{»} \quad cnv, \\ v = (2m+1)\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}' & \text{»} \quad dnv. \end{cases}$$

199. *Mărirea argumentului v cu K, iK′, K + iK′.*

Să înlocuim, în formulele (1), v succesiv prin $v+\mathrm{K}$, $v+i\mathrm{K}'$; ceeace revine a înlocui u respectiv prin $u+\omega_1$, $u+\omega_3$. Obținem, în virtutea formulelor (§ 191), relațiunile următoare:

$$(6)\qquad \begin{cases} sn\,(v+\mathrm{K}) = \dfrac{cnv,}{dnv,} \\[2ex] cn\,(v+\mathrm{K}) = -\sqrt{\dfrac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}\,\dfrac{snv}{dnv} = -k'\,\dfrac{snv}{dnv}, \\[2ex] dn\,(v+\mathrm{K}) = \sqrt{\dfrac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}\,\dfrac{1}{dnv} = k'\,\dfrac{1}{dnv} \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} sn\,(v+i\mathrm{K}') = -\dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u} = \dfrac{1}{k\,snv}, \\[2ex] cn\,(v+i\mathrm{K}') = \dfrac{i}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u} = -i\,\dfrac{dnv}{k\,snv} \\[2ex] dn\,(v+i\mathrm{K}') = -\dfrac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u} = -i\,\dfrac{cnv}{snv}. \end{cases}$$

Inlocuind în aceste din urmă egalități v prin $v+\mathrm{K}$, obținem, în virtutea formulelor (6),

$$(8)\qquad \begin{cases} sn\,(v+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{dnv}{cnv} \\[2ex] cn\,(v+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = -i\,\dfrac{k'}{k}\,\dfrac{1}{cnv}, \\[2ex] dn\,(v+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = i\,k'\dfrac{snv}{cnv}. \end{cases}$$

200. Din formulele precedente rezultă următorul tablou de valori:

$$
(9)\qquad
\begin{array}{c|cccc}
v = & 0 & K & K+iK' & iK' \\
\hline
snv = & 0 & 1 & \dfrac{1}{k} & \infty, \\
cnv = & 1 & 0 & -i\dfrac{k'}{k} & \infty; \\
dnv = & 1 & k' & 0 & \infty.
\end{array}
$$

201. *Ecuaţiuni diferenţiale.* Funcţiunile snv, cnv, dnv fiind funcţiuni eliptice de ordinul al doilea cu poluri simple, trebuie să satisfacă (§ 181) ecuaţiuni de forma

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 = \text{polinom } (x) \text{ de gradul } 4,$$

x reprezintând una oarecare din aceste funcţiuni.

Pentru a formà ecuaţiunea diferenţială a funcţiunii snv, să derivăm, în raport cu v, prima ecuaţiune (4), (§ 194) şi să ţinem seamă de egalitatea

$$p'u = -2\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3)}.$$

Obţinem ecuaţiunea căutată

$$(1)\qquad \frac{dsnv}{dv} = cnv\ dnv = \sqrt{(1-sn^2v)(1-k^2sn^2v)}.$$

Derivând celelalte ecuaţiuni (4) sau ecuaţiunile (2) (§ 196), obţinem ecuaţiunile diferenţiale ale celorlalte două funcţiuni:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dcnv}{dv} = -snv\ dnv = -\sqrt{(1-cn^2v)(k'^2+k^2cn^2v)}, \\[2ex] \dfrac{d\,dnv}{dv} = -k^2\ snv\ cnv = -\sqrt{(1-dn^2v)(dn^2v-k'^2)}. \end{cases}$$

Punând $x = snv$, ecuaţiunea (1) se scrie

$$(3)\qquad \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2).$$

Funcţiunea $x = snv$ este o integrală particulară a acestei ecuaţiuni şi de oarece ecuaţiunea nu se schimbă când înlocuim v prin $v + C$, C fiind o constantă arbitrară, rezultă că $x = sn\,(v + C)$ este integrala generală a ecuaţiunii.

Funcţiunea $x = snv$ este funcţiunea inversă a integralei

$$(4)\qquad v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

precum $x = pu$ este funcțiunea inversă a integralei

$$(5) \qquad u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Aceste două integrale se numesc integrale *normale*, cea dintâiu a lui *Legendre* și cea de a doua a lui *Weierstrass*. Variabilele independente v, u ale funcțiunilor lui Jacobi și Weierstrass sunt respectiv integralele normale considerate. Intre aceste două variabile există relațiunea $v = u\sqrt{e_1 - e_3}$.

Funcțiunile lui Jacobi depind de un singur parametru, modulul k, iar funcțiunea pu a lui Weierstrass depinde de două parametre, invarianții g_2 și g_3. Perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$ ale funcțiunii pu sunt independente între ele, pe când printre perioadele funcțiunilor lui Jacobi numai una poate fi arbitrară.

Dacă voim să punem modulul k în evidență, scriem

$$sn(v, k),\ cn(v, k),\ dn(v, k).$$

202. Integrala (4) conduce, în virtutea tabloului (9) (§ 200), la expresiunile următoare:

$$(6) \qquad \mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \mathrm{K} + i\,\mathrm{K}' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

de unde

$$(7) \qquad i\,\mathrm{K}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Integralele sunt luate după drumuri rectilinii (sau altele echivalente) cari nu se întâlnesc decât la limita comună, punctele critice ce se pot aflà pe aceste drumuri fiind evitate prin câte un arc de cerc infinit mic descris într'un sens convenabil. Acest sens poate fi ales astfel ca în raportul

$$\frac{i\,\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \alpha + i\beta$$

α și β fiind cantități reale, să avem $\beta > 0$.

203. *Desvoltarea integralelor K și K' după puterile modulului k.* Din definițiunea modulelor k și k' (§ 196):

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

rezultă că dacă punctele e_1, e_2, e_2 sunt notate astfel ca

$$|e_1 - e_3| > \begin{cases} |e_2 - e_3|, \\ |e_1 - e_2|, \end{cases}$$

valorile absolute ale acestor module sunt mai mici ca 1; ceeace vom presupune în cele ce urmează.

I. Să considerăm integrala

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

luată dealungul segmentului (0, 1), valoarea radicalului pentru $x = 0$ fiind egală cu $+1$ şi valoarea iniţială a integralei fiind egală cu zero. In tot intervalul considerat avem

$$|k^2 x^2| < 1;$$

prin urmare putem aplicà formula binomului

$$(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4x^4 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}k^{2n}x^{2n} + \ldots,$$

de unde deducem

$$(2) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \left[1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}k^{2n}x^{2n} + \ldots\right]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aplicând formula de reducţiune

$$(3) \qquad \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n-1}{2n}\frac{x^{2n-2}}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2n}d\,x\sqrt{1-x^2}$$

şi punând

$$(4) \qquad \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots2n} = a_n, \quad a_0 = 1,$$

obţinem egalitatea

$$(5) \qquad \int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = a_n\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - a_n x\sqrt{1-x^2}\,P_n(x),$$

$P_n(x)$ fiind polinomul de gradul $2n-2$

$$(6) \qquad P_n(x) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2.4}{3.5}x^4 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}x^{2n-2}.$$

Multiplicând ambele membre (4) cu $a_n k^{2n}$ şi făcând suma pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, la care adăugăm integrala membrului întâiu pentru $n = o$, obţinem egalitatea

$$(7) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left(1 + \sum_1^\infty a_n^2 k^{2n}\right)\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - x\sqrt{1-x^2}\sum_1^\infty a_n^2 k^{2n} P_n(x).$$

Seria

$$(8) \qquad \mathcal{A} = 1 + \sum_1^\infty a_n^2 k^{2n}$$

este absolut convergentă, căci termenii ei sunt în valoare absolută mai mici ca termenii progresiunii geometrice $\sum\limits_{o}^{\infty}|k^{2n}| = \frac{1}{1-|k^2|}$.

Să examinăm seria

$$
\begin{aligned}
P(x)=\sum_{1}^{\infty} a_n^2 k^{2n} P_n(x) = a_1^2\, k^2 & \\
&+ a_2^2\, k^4\left(1+\frac{2}{3}x^2\right)\\
&+ a_3^2\, k^6\left(1+\frac{2}{3}x^2+\frac{2.4}{3.5}x^4\right)\\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ a_n^2\, k^{2n}\left(1+\frac{2}{3}x^2+\ldots+\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}x^{2n-2}\right)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Seriile formate din termenii situați pe aceeaș coloană sunt absolut convergente și sumele lor sunt în valoare absolută mai mici respectiv ca termenii

$$
\frac{|k^2|}{1-|k^2|},\ \frac{|k^4 x^2|}{1-|k^2|},\ \frac{|k^6 x^4|}{1-|k^2|},\ldots,
$$

a căror sumă este finită pe cât timp $|k^2 x^2| < 1$. Această sumă rămâne finită și pentru $x = 1$.

Seria P (x) este așà dar absolut convergentă și o putem ordonà după puterile lui x:

$$
(9)\qquad P(x)=c_1+\frac{2}{3}c_2x^2+\frac{2.4}{3.5}c_3x^4+\ldots+\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}c_n\,x^{2n-2}+\ldots
$$

$$
(10)\qquad c_n=\sum_{m=n}^{\infty} a_m^2 k^{2m},\quad (n=1,2,\ldots).
$$

Avem așà dar egalitatea

$$
(11)\qquad \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}
$$

$$
=\mathcal{A}\int_o^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-x\sqrt{1-x^2}\left[c_1x+\frac{2}{3}c_2x^3+\frac{2.4}{3.5}c_3x^5+\ldots+\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}c_n\overset{2n-2}{x}+\ldots\right]
$$

De unde, pentru semiperioada K, în interiorul cercului $|k|=1$, desvoltarea

$$
(12)\qquad \int_o^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=K=\frac{\pi}{2}\left[1+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ 2n}\right)^2 k^{2n}\right].
$$

Observare. Din egalitatea $|k^2x^2| < 1$ rezultă că $1 - k^2 x^2$ nu poate fi egal cu un număr negativ; prin urmare, partea reală a radicalului $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ păstrează un semn invariabil când x variază dela 0 la 1. Acest semn fiind acelaş şi pentru partea reală a lui K, rezultă că această semiperioadă nu se anulează în cercul $|k| = 1$.

II. Să considerăm acum integrala

$$(13) \qquad iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

şi să facem schimbarea de variabilă

$$(14) \qquad k^2x^2 + k'^2y^2 = 1.$$

Obţinem, înlocuind litera y prin litera x,

$$(15) \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

expresiune care nu diferă de aceea a integralei K decât prin înlocuirea modulului k prin modulul complementar k'. De unde rezultă, pentru K', desvoltarea după puterile lui k'

$$(16) \qquad K' = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_1^\infty \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k'^{2n}\right].$$

Seria (12) convergează cu atât mai repede cu cât modulul k este mai aproape de zero, dar atunci k' fiind aproape de 1, seria (16) convergează încet. Viceversa, dacă k' este aproape de zero, seria (16) convergează repede şi seria (12) convergează încet. Pentru $k = 1$, seria (12) este divergentă şi pentru $k = o$, seria (16) este divergentă.

Pentru $k = o$, avem

$$(17) \qquad K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty.$$

Punctul $k = o$ este aşadar un punct singular pentru integrala K'. Să căutăm forma analitică a acestei integrale în domeniul punctului $k = o$. Pentru aceasta, să reluăm formula (12), care, abstracţiune făcând de semn, se poate scrie

$$(18) \qquad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Intre limitele 1 şi $\frac{1}{k}$ să intercalăm punctul $\frac{1}{\sqrt{k}}$ şi să înlocuim integrala din membrul al doilea prin suma

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

In ultima integrală să facem substituţiunea

$$(19) \qquad x = \frac{1}{kz},$$

prin care se reproduce prima integrală. Putem dar scrie

$$(20) \qquad K' = 2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Pe segmentul $\left(1, \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ avem

$$|kx| \leqq |\sqrt{k}| < 1;$$

putem dar aplicà formula binomului

$$(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} k^{2n} x^{2n}.$$

Dacă considerăm formula de reducţiune

$$\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2n-1}{2n} \frac{x^{2n-2}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx + \frac{1}{2n}\,dx^{2n-1}\sqrt{x^2-1}$$

şi procedăm ca mai sus, obţinem egalitatea

$$(21) \quad K' = 2\sum_0^{\infty} a_n^2 k^{2n} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + 2\sqrt{1-k}\sum_1^{\infty} a_n^2 k^{2n} P_n\left(\frac{1}{k}\right),$$

$P_n\left(\frac{1}{k}\right)$ fiind polinomul (6) în care înlocuim x^2 prin $\frac{1}{k}$. De altă parte, avem expresiunea

$$\int_1^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = log\frac{1+\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2}log\frac{(1+\sqrt{1-k})^2}{k} = \frac{1}{2}log\frac{1+\sqrt{1-k}}{1-\sqrt{1-k}},$$

în care trebuie să dăm logaritmului valoarea sa principală [1]), căci numai astfel membrul întâiu este real şi pozitiv dacă k, fiind real şi cuprins între 0 şi 1, luăm pentru $\sqrt{k}$ şi $\sqrt{1-k}$ valorile lor pozitive.

---

[1]) Valoarea principală a logaritmului unei cantităţi $x = \varrho e^{i\theta}$ este definită de egalitatea $\log x = \log \varrho + i\theta$, $\quad -\pi < \theta < \pi$.

Pentru $|k| < 1$ avem desvoltările

$$(22)\quad \begin{cases} \sqrt{1-k} = 1 - \dfrac{1}{2}\left(k + \dfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{2} + \dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{k^3}{3} + \ldots + \dfrac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\dfrac{k^{n+1}}{n+1} + \ldots\right)^{1)}, \\ \dfrac{1+\sqrt{1-k}}{1-\sqrt{1-k}} = \dfrac{4}{k}\left(1 - \dfrac{k}{2} - \dfrac{k^2}{16} - \ldots\right) \\ \log\dfrac{1+\sqrt{1-k}}{1-\sqrt{1-k}} = \log\dfrac{4}{k} - \left(\dfrac{k}{2} + \dfrac{3}{16}k^2 + \ldots\right). \end{cases}$$

Făcând înlocuirile în egalitatea (21), obţinem expresiunea analitică a lui K′, în domeniul $k = 0$ a cărei formă este

$$(23)\quad K' = \left(1 + \sum_1^\infty a_n^2 k^{2n}\right)\log\frac{4}{k} - P(k^2) = \frac{2}{\pi} K \log\frac{4}{k} - P(k^2),$$

$P(k^2)$ fiind o serie întreagă de k^2 cu coeficienţi numere raţionale, convergentă în cercul $|k| = 1$, ai cărei primii termeni sunt

$$(24)\quad P(k^2) = \frac{1}{4}k^2 + \frac{21}{2^7}k^2 + \ldots$$

Faptul că seria P conţine numai puteri pare ale lui k se justifică prin aceea că integrala K′, prin definiţiunea sa (12), este funcţiune de k^2 şi primul termen al membrului al doilea (23), în virtutea relaţiunii $\log\dfrac{4}{k} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{16}{k^2}$, este de asemenea funcţiune de k^2.

Tot ce s'a spus despre integrala K′, în domeniul $k = 0$, se aplică integralei K, în domeniul $k = 1$ sau $k' = 0$. Este de ajuns a permută k cu k' şi K′ cu K. Avem aşà dar în domeniul punctului $k' = 0$, $k = 1$

$$(25)\quad K = \left(1 + \sum_1^\infty a_n^2 k^{2n}\right)\log\frac{4}{k'} - P(k'^2) = \frac{2}{\pi} K' \log\frac{4}{k'} - P(k'^2).$$

204. *Desvoltarea în serie a funcţiunii snv în domeniul originii.* Derivând ecuaţiunea

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2) = 1 - (1+k^2)x^2 + k^2x^4,$$

---

1) Plecând dela egalitatea

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x} = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{1}{2}(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots),$$

integrând, obţinem

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}\left(x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots\right),\quad a_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}.$$

obţinem

$$\frac{d^2x}{dv^2} = -(1+k^2)\,x + 2k^2\,x^3,$$

$$\frac{d^3x}{dv^3} = -(1+k^2-6\,k^2x^2)\,\frac{dx}{dv},$$

$$\frac{d^4x}{dv^4} = -(1+k^2-6\,k^2x^2)\,\frac{d^2x}{dv^2} + 12k^2x\,\frac{dx}{dv},$$

$$\frac{d^5x}{dv^5} = -(1+k^2-6\,k^2x^2)\,\frac{d^3x}{dv^3} + 24\,k^2x\,\frac{d^2x}{dv^2} + 12\,k^2\left(\frac{dx}{dv}\right)^2,$$

. . . .

Făcând $v = o$, prin urmare $x = o$, obţinem

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_0 = 1^{1)}, \left(\frac{dx^3}{dv^3}\right)_0 = -(1+k^2), \left(\frac{d^5x}{dv^5}\right)_0 = (1+k^2)^2 + 12\,k^2, \ldots,$$

derivatele de ordin par fiind toate nule.

Desvoltarea căutată este aşà dar de forma

$$snv = v - \frac{1+k^2}{3!}v^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}v^5 + \ldots + \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!}v^{2n+1} + \ldots,$$

coeficienţii a_{2n+1} fiind, precum se recunoaşte lesne, polinoame de k^2 cu coeficienţi întregi. Această desvoltare este valabilă în cercul cu centrul în punctul $v = o$ şi trecând prin polul cel mai apropiat.

205. Plecând dela ecuaţiunile diferenţiale ale funcţiunilor cnv, dnv, obţinem desvoltări cari conţin numai puteri pare ale lui v:

$$cn\,v = 1 + \frac{b_2}{2!}v^2 + \ldots + \frac{b_{2n}}{(2n)!}v^{2n} + \ldots,$$

$$dn\,v = 1 + \frac{c_2}{2!}v^2 + \ldots + \frac{c_{2n}}{(2n)!}v^{2n} + \ldots,$$

coeficienţii b_{2n}, c_{2n} fiind polinoame de k^2.

206. *Ecuaţiunile* $snv = sna$, $cnv = cna$, $dnv = dna$.

Din formulele

$$sn\,(2k - v) = sn\,v,\ cn(\pm v) = cnv,\ dn\,(\pm v) = dnv$$

conchidem, ţinând seamă de perioadele primitive ale celor trei funcţiuni, că soluţiunile ecuaţiunilor

$$sn\,v = sn\,a, \quad cn\,v = cn\,a, \quad dnv = dn\,a, \quad a \neq 2m\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}'$$

---

1) Din $\frac{dx}{dv} = cnv\ dnv$ rezultă $\left(\frac{dx}{dv}\right)_0 = +1.$

sunt date respectiv de egalităţile

$$v = \begin{cases} a + 4m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}', \\ -a + (4m+2)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'; \end{cases}$$

$$v = \pm a + (4m+2n)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}';$$

$$v = \pm a + 2m\mathrm{K} + 4ni\mathrm{K}'.$$

Rădăcinile considerate sunt simple, exceptând respectiv valorile următoare ale lui a:

$$a = \pm\mathrm{K}, \pm(\mathrm{K} + i\mathrm{K}'),$$

$$a = 0,\ 2\mathrm{K},\ (\mathrm{K}+i\mathrm{K}'),\ 3\mathrm{K} + i\mathrm{K}',$$

$$a = 0,\ \mathrm{K},\ \mathrm{K} + 2i\mathrm{K}',\ 2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}',$$

abstracţiune făcând de multipli de perioade corespunzătoare funcţiunilor *sn*, *cn*, *dn*. Aceste valori dau rădăcini duble, căci ele anulează derivatele funcţiunilor respective.

III. FORMULE DE ADIŢIUNE PENTRU FUNCŢIUNILE snv, cnv, dnv.

207. *Funcţiunea* snv. Să considerăm funcţiunea

$$(1) \qquad f(v) = \frac{sn(v + a) + sn(v - a)}{snv},$$

a fiind o constantă $\neq \mathrm{K}, i\mathrm{K}'\ \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$. Această funcţiune este pară şi admite perioadele $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$.

Se recunoaşte lesne că $f(v)$ n'are poluri decât cele ale numărătorului, cari, abstracţiune făcând de multipli de perioade, sunt date de expresiunile

$$v = \pm a + i\mathrm{K}'.$$

Polul numitorului, $v = i\mathrm{K}'$, anulează numărătorul, căci avem

$$sn(a + i\mathrm{K}') = sn(a - i\mathrm{K}').$$

Punctul $v = i\mathrm{K}'$ este aşadar un zero dublu al funcţiunii $f(v)$; el nu poate fi de ordin mai înalt, căci, în paralelogramul $(2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}')$, $f(v)$ are două poluri simple.

Să introducem acum funcţiunea

$$\varphi(v) = 1 + \alpha\, sn^2 v,$$

α fiind o constantă diferită de zero. Această funcţiune are aceleaşi perioade şi admite, abstracţiune făcând de multipli de perioade, unicul pol dublu $v = i\mathrm{K}'$. Să determinăm α astfel ca funcţiunea

$\varphi(v)$ să se anuleze în punctul $v = a + iK'$; ea se va anulà atunci şi în punctul $v = -a + iK'$. Trebuie dar să avem

$$1 + \alpha\, sn^2(a + iK') = 0,$$

sau, în virtutea formulei $sn(a + iK') = \frac{1}{k\, sna}$,

$$1 + \frac{\alpha}{k^2\, sn^2 a} = 0.$$

De unde, pentru funcțiunea $\varphi(v)$, expresiunea

(2) $$\varphi(v) = 1 - k^2 sn^2 a\, sn^2 v.$$

Produsul $f(v)\,\varphi(v)$ neavând nici un pol este o constantă. Avem dar

$$\frac{sn(v + a) + sn(v - a)}{snv} = \frac{C}{1 - k^2 sn^2 a\, sn^2 v}.$$

Făcând $v = 0$, obținem $C = 2\, sn'a$.

Avem aşà dar formula

(3) $$\frac{sn(v + a) + sn(v - a)}{snv} = \frac{2\, sn'a}{1 - k^2 sn^2\, sn^2 v},$$

sau, ținând seamă de relațiunea

$$sn'a = cna\, dna,$$

avem formula fundamentală

(4) $$sn(v + a) + sn(v - a) = \frac{2 snv\, cna\, dna}{1 - k^2 sn^2 a\, sn^2 v}.$$

Permutând v cu a, avem

(5) $$sn(v + a) - sn(v - a) = \frac{2\, sn\, a\, cnv\, dnv}{1 - k^2 sn^2 a\, sn^2 v}.$$

Adunând aceste două egalități, obținem formula de adițiune

(6) $$sn(v + a) = \frac{snv\, cna\, dna + sna\, cnv\, dnv}{1 - k^2 sn^2 a\, sn^2 v}.$$

208. Formula subsistă şi pentru valorile excluse ale lui a. Căci ambele membre ale egalității (6) fiind funcțiuni analitice de a, egale pentru o infinitate de valori ale acestei cantități, sunt egale şi pentru acele valori particulare. De altmintrelea, pentru valorile $a = K, iK', K + iK'$ avem (§ 199) expresiunile

$$sn(v + K) = \frac{cnv}{dnv},\quad sn(v + iK') = \frac{1}{k\, snv},\quad sn(v + K + iK') = \frac{dnv}{k\, cnv}$$

cuprinse în formula generală (6).

209. *Funcțiunea* $cn\nu$. Avem

$$cn^2(\nu + a) = 1 - sn^2(\nu + a) = \frac{(1 - k^2 sn^2 a\, sn^2\nu)^2 - (sn\nu\, cna\, dna + sna\, cn\nu\, dn\nu)^2}{(1 - k^2 sn^2 a\, sn^2\nu)^2}.$$

Insă

$$1 - k^2 sn^2 a\, sn^2\nu = 1 - sn^2\nu\,(1 - dn^2 a) = cn^2\nu + sn^2\nu\, dn^2 a$$
$$= 1 - sn^2 a\,(1 - dn^2\nu) = cn^2 a + sn^2 a\, dn^2\nu.$$

Inlocuind primul termen al numărătorului $(1 - k^2 sn^2 a\, sn^2\nu)^2$ prin produsul $(cn^2\nu + sn^2\nu\, dn^2 a)(cn^2 a + sn^2 a\, dn^2\nu)$ avem

$$cn^2(\nu + a) = \frac{(cna\, cn\nu - sna\, dna\, sn\nu\, dn\nu)^2}{(1 - k^2 sn^2 a\, sn^2\nu)^2}.$$

Extrăgând rădăcina pătrată și observând că pentru $\nu = o$, ambele membre trebuie să se reducă la cna, obținem formula

$$(7) \qquad cn(\nu + a) = \frac{cna\, cn\nu - sna\, sn\nu\, dna\, dn\nu}{1 - k^2\, sn^2 a\, sn^2\nu}.$$

210. *Funcțiunea* $dn\nu$. Pentru a obține formula de adițiune a funcțiunii $dn\nu$, plecăm dela egalitatea

$$dn^2(\nu + a) = 1 - k^2 sn^2(\nu + a)$$
$$= \frac{(1 - k^2 sn^2 a\, sn^2\nu)^2 - k^2(sn\nu\, cna\, dna + sna\, cn\nu\, dn\nu)^2}{(1 - k^2 sn^2 a\, sn^2\nu)^2}.$$

Insă

$$1 - k^2 sn^2 a\, sn^2\nu = dn^2\nu + k^2 sn^2\nu\, cn^2 a$$
$$= dn^2 a + k^2 sn^2 a\, cn^2\nu.$$

Inlocuind primul termen al numărătorului prin produsul $(dn^2\nu + k^2 sn^2\nu\, cn^2 a)(dn^2 a + k^2 sn^2 a\, cn^2\nu)$, obținem

$$dn^2(\nu + a) = \frac{(dna\, dn\nu - k^2\, sna\, sn\nu\, cna\, cn\nu)^2}{(1 - k^2\, sn^2 a\, sn^2\nu)^2}.$$

De unde, extrăgând rădăcina pătrată și observând că pentru $\nu = o$, ambele membre trebuie să coincidă cu dna, avem formula

$$(8) \qquad dn(\nu + a) = \frac{dna\, dn\nu - k^2 sna\, sn\nu\, cna\, cn\nu}{1 - k^2 sn^2 a\, sn^2\nu}.$$

211. Făcând $\nu = a$ în egalitățile (6), (7) și (8), obținem egalitățile

$$(9) \qquad \begin{cases} sn2a = \dfrac{2sna\, cna\, dna}{1 - k^2\, sn^4 a}, \\[2ex] cn2a = \dfrac{cn^2 a - sn^2 a\, dn^2 a}{1 - k^2\, sn^4 a}, \\[2ex] dn2a = \dfrac{dn^2 a - k^2\, sn^2 a\, cn^2 a}{1 - k^2\, sn^4 a}. \end{cases}$$

CAPITOLUL XVII.

Expresiunea funcțiunilor ζu, pu prin serii de funcțiuni simplu periodice.

Funcțiunile σu, $\sigma_\alpha u$ exprimate prin produse de funcțiuni simplu periodice.

FUNCȚIUNILE ζu, pu; σu, $\sigma_\alpha u$.

212. *Funcțiunea* ζu. Seria dublă care definește funcțiunea ζu (II, 137) se poate, printr'o grupare convenabilă a termenilor, transformà într'o serie cu un singur indice. Să facem substituțiunile

$$(1) \qquad \frac{u}{2\omega_1} = v, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau;$$

seria considerată se va scrie

$$(2) \quad \zeta u = \frac{1}{2\omega_1 v} + \frac{1}{2\omega_1}\Sigma'\left[\frac{1}{v-(m+n\tau)} + \frac{1}{m+n\tau} + \frac{v}{(m+n\tau)^2}\right].$$

Să reunim în membrul al doilea, de o parte, toți termenii în cari $n=0$ și, de altă parte, toți termenii în cari n are aceeaș valoare oarecare diferită de zero. Reprezintând prima sumă prin s_0, cea de a doua prin s_n și ținând seamă de egalitățile

$$\sum_1^\infty \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n\tau+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 n\pi\tau},^{1)}$$

$$\frac{1}{v} + \Sigma'\left(\frac{1}{v-m} + \frac{1}{m}\right) = \pi \cot \pi v,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{v-n\tau-m} + \frac{1}{n\tau+m}\right] = \pi\left[\cot\pi(v-n\tau) + \cot n\pi\tau\right];^{2)}$$

vom aveà

$$s_0 = \frac{\pi^2 v}{6\omega_1} + \frac{\pi \cot \pi v}{2\omega_1},$$

$$s_n = \frac{v}{2\omega_1}\frac{\pi^2}{\sin^2 n\pi\tau} + \frac{\pi}{2\omega_1}\left[\cot\pi(v-n\tau) + \cot n\pi\tau\right].$$

---

[1]) Diferența dintre funcțiunea $\frac{1}{\sin^2 \pi x}$ și seria $\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+m)^2}$, absolut și uniform convergentă în tot planul, exceptând polurile $x=-m$, este, precum se recunoaște lesne o funcțiune olomorfă în tot planul. Această diferență se reduce dar la o constantă, a cărei valoare este nulă (I, pag. 380—1). Inlocuind x prin $n\tau$, obținem egalitatea de mai sus.

[2]) I. p. 382.

Raportul τ al perioadelor fiind imaginar, seriile

$$\Sigma' \frac{1}{\sin^2 n\pi\tau},$$

$$\Sigma'\left[\cot \pi(v - n\tau) + \cot n\pi\tau\right] = \sin \pi v \, \Sigma' \frac{1}{\sin n\pi\tau \sin \pi(v - n\tau)}$$

sunt absolut convergente. Este de ajuns a probà că cea dintâiu din aceste două serii este convergentă, de unde, în virtutea egalităţii

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{\sin \pi (v - n\tau)}{\sin n\pi\tau} \right| = 1,$$

va rezultà că şi cea de a doua este convergentă.

Punând

$$\pi\tau = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq o,$$

avem

$$\sin n\pi\tau = \frac{e^{-n\beta + ni\alpha} - e^{n\beta - ni\alpha}}{2i},$$

de unde egalitatea

$$\frac{1}{|\sin^2 n\pi\tau|} < \frac{1}{n^2\beta^2},$$

care justifică convergenţa seriei considerate.

Avem aşàdar egalitatea

$$(3) \quad \zeta u = \frac{\pi^2 v}{\omega_1}\left[\frac{1}{6} + \sum_1^\infty \frac{1}{\sin^2 n\pi\tau}\right] + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi v + \frac{\pi}{2\omega_1} \Sigma'\left[\cot \pi(v - n\tau) + \cot n\pi\tau\right].$$

Făcând $v = \frac{1}{2}$ şi observând că termenii sumei $\Sigma'\left[\cot \pi\left(\frac{1}{2} - n\tau\right) + \cot n\pi\tau\right]$ corespunzători la valori ale lui n egale şi de semne contrare se distrug, obţinem

$$(4) \quad \eta_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1}\left[\frac{1}{6} + \sum_1^\infty \frac{1}{\sin^2 n\pi\tau}\right].$$

Egalitatea (3) devine

$$(5) \quad \zeta u = 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi v + \frac{\pi}{2\omega_1} \Sigma'\left[\cot \pi(v - n\tau) + \cot n\pi\tau\right],$$

$$= 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi v + \frac{\pi}{2\omega_1} \sum_1^\infty \left[\cot \pi(v - n\tau) + \cot \pi(v + n\tau)\right].$$

213. *Funcţiunea pu.* Derivând egalitatea precedentă în raport cu v, obţinem

$$(6) \quad pu = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 \pi(v - n\tau)}.$$

Făcând succesiv $v=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\ \frac{\tau}{2}$, rezultă

$$\eta_1\omega_1=-e_1\omega_1^2+\frac{\pi^2}{4}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cos^2 n\pi\tau},$$

$$(7)\qquad \eta_1\omega_1=-e_2\omega_1^2+\frac{\pi^2}{4}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cos^2\frac{2n-1}{2}\pi\tau},$$

$$\eta_1\omega_1=-e_3\omega_1^2+\frac{\pi^2}{4}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{2n-1}{2}\pi\tau},$$

214. *Funcțiunea* σu. Integrând egalitatea (5) în raport cu v, obținem

$$\log\frac{\sigma u}{c\sin\pi v}=2\eta_1\omega_1 v^2+\Sigma'\left[\log\frac{\sin\pi(v-n\tau)}{-\sin n\pi\tau}+\pi v\cot n\pi\tau\right].$$

Trecând dela logaritmi la numere și făcând $v=0$, găsim

$$c=\frac{2\omega_1}{\pi}.$$

Avem așà dar expresiunea căutată a funcțiunii σu, sub formă de produs simplu,

$$(8)\qquad \sigma u=\frac{2\omega_1}{\pi}e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\sin\pi v\,\Pi'\frac{\sin\pi(v-n\tau)}{-\sin n\pi\tau}e^{\pi v\cot n\pi\tau}.$$

O altă formă a acestui produs se obține, dacă grupăm factorii doi câte doi corespunzători la $\pm n$ și ținem seamă de identitatea

$$\sin\pi(v-n\tau)\sin\pi(v+n\tau)=\sin^2\pi v-\sin^2 n\pi\tau.$$

Egalitatea (8) devine

$$(9)\qquad \sigma u=\frac{2\omega_1}{\pi}e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\sin\pi v\prod_n^{1,\infty}\left(1-\frac{\sin^2\pi v}{\sin^2\pi n\tau}\right).$$

O a treia formă a produsului sub care se poate pune funcțiunea σu se obține, dacă înlocuim în (8) funcțiunile circulare prin funcțiuni exponențiale.

Introducem notațiunile următoare:

$$(10)\qquad e^{i\pi v}=z,\quad e^{i\pi\tau}=q$$

și observăm că putem, fără a restrânge generalitatea, presupune $|q|<1$. Căci, punând

$$\frac{\omega_3}{\omega_1}=a+ib,$$

avem

$$q = e^{-b\pi}.$$

Putem totdeauna dispune ca b să fie *pozitiv*, schimbând, dacă este necesar, semnul lui ω_3; ceea ce n'are influență asupra funcțiunii σu. Vom aveà

$$\sin \pi v = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

$$\sin n\pi\tau = \frac{q^n - q^{-n}}{2i} = i\frac{1 - q^{2n}}{2q^n},$$

$$\sin \pi(v - n\tau) = \frac{q^{-n} z - q^n z^{-1}}{2i} = -iz\frac{1 - q^{2n} . z^{-2}}{2q^n},$$

$$\sin \pi(v + n\tau) = \frac{q^n z - q^{-n} z^{-1}}{2i} = iz^{-1}\frac{1 - q^{2n} z^2}{2\, q^n}.$$

Substituind aceste valori în egalitatea (8), obținem

$$(11) \quad \sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{z - z^{-1}}{2\,i} \prod_n^{1,\infty} \frac{(1 - q^{2n} z^2)\,(1 - q^{2n} z^{-2})}{(1 - q^{2n})^2}.$$

Produsul $\prod_1^\infty (1 - q^{2n})$ este absolut convergent, căci $|\,q\,| < 1$; de asemenea pentru orice valoare z, finită și diferită de zero, produsele

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^2), \quad \prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^{-2})$$

sunt absolut și uniform convergente. Putem dar descompune produsul din membrul al doilea (11) în trei produse și scrie

$$(12) \quad \sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{z - z^{-1}}{2\,i} \frac{\prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^2) \prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^{-2})}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})^2},$$

sau

$$(13) \quad \sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \sin \pi v \frac{\prod_1^\infty (1 - 2\, q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n})}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})^2}.$$

215. Introducând cantitatea q în egalitatea (4), obținem

$$(14) \quad \eta_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1} \left[\frac{1}{6} - 4 \sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2}\right],$$

expresiune comodă pentru calculul lui η_1. Valoarea lui η_3 se va deduce din formula lui Legendre

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2}, \tag{15}$$

în care înlocuim η_1 prin valoarea sa din (14).

Prin introducerea lui q egalitățile (7) devin

$$\eta_1 \omega_1 = -e_1 \omega_1^2 + \pi^2 \left[\frac{1}{4} + 2\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right],$$

$$\eta_1 \omega_1 = -e_2 \omega_1^2 + 2\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}, \tag{16}$$

$$\eta_1 \omega_1 = -e_3 \omega_1^2 - 2\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}.$$

216. *Valorile funcțiunii σu pentru $u = \omega_\alpha$* $(\alpha = 1, 2, 3)$. Făcând în formula (12) succesiv $v = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\frac{\omega_3}{\omega_1}$, $\frac{1}{2}\frac{\omega_2}{\omega_1}$, obținem valorile $\sigma\omega_1$, $\sigma\omega_3$, $\sigma\omega_2$ sub formă de produse.

1°. $\sigma\omega_1$.— Făcând $v = \frac{1}{2}$, prima formulă (10) dă $z = i$ și formula (12) devine

$$\sigma\omega_1 = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1} \frac{\prod_1^\infty (1+q^{2n})^2}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})^2}. \tag{17}$$

2°. $\sigma\omega_3$.— Pentru $v = \frac{1}{2}\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\tau}{2}$, formulele (10) dau $z = e^{i\pi\frac{\tau}{2}} = q^{\frac{1}{2}}$.

Ducând valorile $v = \frac{\tau}{2}$, $z = q^{\frac{1}{2}}$ în egalitatea (12), obținem

$$\sigma\omega_3 = \frac{i\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta_1\frac{\omega_3^2}{\omega_1}} q^{-\frac{1}{2}}(1-q) \frac{\prod_1^\infty (1-q^{2n+1}) \prod_1^\infty (1-q^{2n-1})}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})^2}$$

Insă din formula (15) rezultă

$$\eta_1 \frac{\omega_3^2}{\omega_1} = \eta_3 \omega_3 + \frac{i\pi\tau}{2} \tag{18}$$

Ducând această valoare în expresiunea lui $\sigma\omega_3$ și făcând să intre factorul $(1-q)$ în primul produs al numărătorului, avem

$$\sigma\omega_3 = i\frac{\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3} q^{-\frac{1}{4}} \frac{\prod_1^\infty (1-q^{2n-1})^2}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})^2}. \tag{19}$$

3°. Fie $v=\frac{1}{2}\frac{\omega_2}{\omega_1}=-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}$; prin urmare $z=-iq^{-\frac{1}{2}}$. Ducând aceste valori ale lui v şi z în egalitatea (12), avem

$$\sigma\,\omega_2=-\frac{\omega_1}{\pi}\,e^{\frac{1}{2}\eta_1\frac{\omega_2^2}{\omega_1}}\,q^{-\frac{1}{2}}(1+q)\,\frac{\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1+q^{2n-1})\,\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1+q^{2n+1})}{\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1-q^{2n})^2}\,.$$

Insă din formula

$$\eta_2\,\omega_1-\eta_1\,\omega_2=\frac{i\pi}{2}\,, \tag{20}$$

rezultă

$$\eta_1\frac{\omega_2^2}{\omega_1}=\eta_2\,\omega_2-\frac{i\pi}{2}\,\frac{\omega_2}{\omega_1}=\eta_2\,\omega_2+\frac{i\pi}{2}(1+\tau). \tag{21}$$

Avem aşà dar

$$\sigma\omega_2=-\frac{\omega_1}{\pi}\,e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}\,\sqrt{i}\,q^{-\frac{1}{4}}\frac{\Pi\,(1+q^{2n-1})^2}{\Pi\,(1-q^{2n})^2}\,,\quad\left(\sqrt{i}=e^{i\frac{\pi}{4}}\right). \tag{22}$$

217. *Funcţiunile* $\sigma_\alpha\,u$.—Vom calculà succesiv produsele funcţiunilor σ_1, σ_2, σ_3, cari nu pot fi cuprinse într'o singură formulă; căci perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, cari în produsele duble intră în mod simetric, figurează în mod diferit în produsele simple.

1°. Funcţiunea $\sigma_1\,u=e^{-\eta_1 u}\,\frac{\sigma\,(u+\omega_1)}{\sigma\,\omega_1}$.

A mărì u cu ω_1 revine a mărì $v=\frac{u}{2\omega_1}$ cu $\frac{1}{2}$, prin urmare a înlocuì $z=e^{i\pi v}$ prin iz. Făcând aceste substituţiuni în formula (12), avem

$$e^{-\eta_1 u}\,\sigma\,(u+\omega_1)=\frac{2\omega_1}{\pi}\,e^{2\eta_1\omega_1(v^2+\frac{1}{4})}\,\frac{z+z^{-1}}{2}\,\frac{\Pi\,(1+q^{2n}z^2)\,\Pi\,(1+q^{2n}z^{-2})}{\Pi\,(1-q^{2n})^2}\,.$$

Divizând această egalitate cu $\sigma\omega_1$ (17), obţinem

$$\sigma_1 u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,\frac{z+z^{-1}}{2}\,\frac{\Pi(1+q^{2n}z^2)\,\Pi(1+q^{2n}z^{-2})}{\Pi\,(1+q^{2n})^2}\,, \tag{23}$$

sau

$$\sigma_1 u\;=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,\cos\pi v\,\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}\,\frac{1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2}. \tag{24}$$

2°. Funcţiunea $\sigma_3\,u=e^{-\eta_3 u}\,\frac{\sigma\,(u+\omega_3)}{\sigma\omega_3}$.

A înlocuì u cu $u+\omega_3$ revine a mărì v cu $\frac{\tau}{2}$ şi a înlocuì z prin $q^{\frac{1}{2}}\,z$. Prin această înlocuire avem, în virtutea egalităţii (15),

$$2\eta_1\,\omega_3\,v=2\eta_3\,\omega_1\,v+i\pi v=\eta_3\,u+i\pi v.$$

Făcând substituţiunea şi ţinând seamă de egalitatea (18), formula (12) devine

$$e^{-\eta_3 u}\,\sigma(u+\omega_3)=i\,\frac{\omega_1}{\pi}\,e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3}\,q^{-\frac{1}{4}}\,\frac{\Pi(1-q^{2n-1}z^2)\,\Pi(1-q^{2n-1}z^{-2})}{\Pi(1-q^{2n})^2}.$$

Divizând ambele membre cu $\sigma\omega_3$ (19), obţinem

$$\sigma_3 u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,\frac{\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1-q^{2n-1}z^2)\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1-q^{2n-1}z^{-2})}{\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1-q^{2n-1})^2},\tag{25}$$

sau

$$\sigma_3 u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}\,\frac{1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}}{(1-q^{2n-1})^2}.\tag{26}$$

3°. Funcţiunea $\sigma_2 u=e^{-\eta_2 u}\,\dfrac{\sigma(u+\omega_2)}{\sigma u}$.

Inlocuind u prin $u+\omega_2$, adică v prin $v-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\tau}{2}$, z prin valoarea corespunzătoare $-izq^{-\frac{1}{2}}$ şi, ţinând seamă de egalitatea (21), formula (12) devine

$$e^{-\eta_2 u}\,\sigma(u+\omega_2)=-\frac{\omega_1}{\pi}\,e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}\,\sqrt{i}\,q^{-\frac{1}{4}}\,\frac{\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1+q^{2n-1}z^2)\,\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1+q^{2n-1}z^{-2})}{\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1-q^{2n})^2}$$

Divizând ambele membre cu $\sigma\omega_2$ (22), obţinem

$$\sigma_2(u)=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,\frac{\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})}{\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1+q^{2n-1})^2},\tag{27}$$

sau

$$\sigma_2(u)=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}\,\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}}{(1+q^{2n-1})^2}.\tag{28}$$

218. Să punem

$$\left\{\begin{aligned} q_0&=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1-q^{2n}), & q_1&=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1+q^{2n}),\\ q_2&=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1+q^{2n-1}), & q_3&=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}(1-q^{2n-1}).\end{aligned}\right.\tag{29}$$

Aceste produse sunt absolut şi uniform convergente pentru toate valorile lui q cari satisfac inegalitatea $|q|<1$; ele reprezintă dar funcţiuni olomorfe în interiorul cercului $|q|=1$. Aceleaşi produse privite ca funcţiuni de τ, sunt olomorfe în semiplanul situat deasupra axei reale a variabilei τ.

Multiplicând între ele produsele situate pe aceeaş linie orizontală (29), obţinem

$$q_0\, q_1 = \prod_1^\infty (1-q^{4n}), \qquad q_2\, q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{4n-2}).$$

Produsele q_0 şi $q_0\, q_1\, q_2\, q_3$ conţin aceiaşi factori; avem aşà dar $q_0\, q_1\, q_2\, q_3 = q_0$, de unde egalitatea

$$q_1\, q_2\, q_3 = 1. \tag{30}$$

Introducând aceste notaţiuni, formulele (17), (19) şi (22) se scriu

$$\left\{\begin{aligned} \sigma\omega_1 &= \frac{2\omega_1}{\pi}\, e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1}\, \frac{q_1^2}{q_0^2}, \\ \sigma\omega_2 &= -\sqrt{i}\,\frac{\omega_1}{\pi}\, q^{-\frac{1}{4}}\, e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}\, \frac{q_2^2}{q_0^2}, \\ \sigma\omega_3 &= i\,\frac{\omega_1}{\pi}\, q^{-\frac{1}{4}}\, e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3}\, \frac{q_3^2}{q_0^2}. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

219. Cu ajutorul acestor expresiuni, valorile radicalelor $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$ (§ 188) devin, ţinând seamă de egalitatea (30) de mai sus,

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{e_2-e_3} &= -i\sqrt{e_3-e_2} = -\frac{2\pi}{\omega_1}\, q^{\frac{1}{2}}\, q_0^2\, q_1^4, \\ \sqrt{e_1-e_3} &= i\sqrt{e_3-e_1} = \frac{\pi}{2\omega_1}\, q_0^2\, q_2^4, \qquad q^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{i\pi\tau}{2}} \\ \sqrt{e_1-e_2} &= -i\sqrt{e_2-e_1} = \frac{\pi}{2\omega_1}\, q_0^2\, q_3^4. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Aceste radicale sunt aşà dar funcţiuni uniforme de raportul τ al perioadelor.

In cazul când ω_1 şi $\frac{\omega_3}{i}$ sunt reale şi pozitive, $q = e^{i\pi\tau}$ este real şi cuprins între 0 şi 1; prin urmare, cantităţile q_0, q_1, q_2, q_3 sunt reale şi pozitive. De unde rezultă că, în acest caz, radicalele

$$\sqrt{e_1-e_2}, \quad \sqrt{e_1-e_3},$$

sunt reale şi pozitive, iar radicalul

$$\sqrt{e_2-e_3}$$

este real şi negativ.

Egalităţile precedente ne permit a defini, în nod univoc, rădăcinile de ordinul al patrulea ale diferenţelor e_2-e_3, e_1-e_2, e_1-e_3.

Observăm mai întâi că acestor radicale nu se pot da decât două valori egale şi de semne contrarii, ale căror pătrate sunt membrele dintâi (1). Să mai observăm că, dacă luăm după voie semnul unuia din cele trei radicale, semnele celorlalte sunt determinate. Căci, din produsul a două din egalităţile (1), de ex., a celor dintâi,

$$\sqrt{e_2-e_3}\,\sqrt{e_1-e_3}=-\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 q^{\frac{1}{2}} q_0^4\, q_1^4\, q_2^4,$$

deducem, luând $\sqrt{-1}=e^{i\frac{\pi}{2}}$,

$$\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}=i\frac{\pi}{\omega_1}\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0^2\, q_1^2\, q_2^2.$$

Semnul produsului fiind determinat, semnul ce se dă unuia din factori determină semnul celuilalt factor.

Putem dar pune

$$(2)\qquad \begin{cases} \sqrt[4]{e_2-e_3}=2i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\, q^{\frac{1}{4}} q_0\, q_1^2, \\ \sqrt[4]{e_1-e_3}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0\, q_2^2, \qquad q^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{i\pi\tau}{4}} \\ \sqrt[4]{e_1-e_2}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0\, q_3^2. \end{cases}$$

Semnul radicalului $\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}$ poate fi luat după voie, însă acelaş în toate egalităţile. Radicalele $\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}$ astfel definite sunt funcţiuni uniforme de τ.

Din egalităţile precedente rezultă, pentru rădăcina a opta a discriminantului

$$\Delta=16\,(e_1-e_2)^2\,(e_1-e_3)^2\,(e_2-e_3)^2,$$

expresiunea

$$(3)\qquad \sqrt[8]{\Delta}=\sqrt{2}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}=i\frac{\pi}{\omega_1}\sqrt{\frac{\pi}{\omega_1}}\, q^{1/4}\, q_0^3.$$

220. Am definit modulele k, k' ca rădăcini pătrate ale expresiunilor

$$(4)\qquad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},\qquad k'^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},$$

cu condiţiunea ca partea reală a acestor rădăcini să fie pozitivă.

(§ 196). In virtutea acestei definiţiuni, luăm

$$(5) \qquad k=-\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}}, \quad k'=\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}};$$

căci, precum am văzut mai sus, în cazul când ω_1 şi $\frac{\omega_3}{i}$ sunt reale şi pozitive, radicalul $\sqrt{e_2-e_3}$ este negativ, iar celelalte două sunt pozitive. Substituind în locul radicalelor valorile lor (1), avem expresiunile

$$(6) \qquad k=4q^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^4, \quad k'=\left(\frac{q_3}{q_2}\right)^4;$$

de unde, în virtutea aceleaş definiţiuni,

$$(7) \qquad \sqrt{k}=2q^{\frac{1}{4}}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2, \quad \sqrt{k'}=\left(\frac{q_3}{q_2}\right)^2.$$

Din a doua egalitate (1) rezultă, pentru cantitatea

$$K=\omega_1\sqrt{e_1-e_3},$$

valoarea

$$(8) \qquad K=\frac{\pi}{2}q_0^2\, q_2^4;$$

de unde expresiunea

$$(9) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}}=q_0\, q_2^2.$$

Multiplicând egalitatea (3) cu σu (12) (§ 214) şi egalităţile (2) respectiv cu funcţiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ date de egalităţile (23), (27), (25) (§ 217), obţinem expresiunile următoare ale celor patru funcţiuni σ

$$(10) \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\,\sigma u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}(z-z^{-1})\,q^{1/4}q_0\prod\limits_1^\infty(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2}), \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u=ie^{2\eta_1\omega_1 v^2}(z+z^{-1})\,q^{1/4}q_0\prod\limits_1^\infty(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2}), \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,q_0\prod\limits_1^\infty(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}), \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,q_0\prod\limits_1^\infty(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2}). \end{cases}$$

221. Formulele (2) (3) (§ 219) şi formulele (10) (§ 220) au fost stabilite plecând dela două perioade primitive $(2\omega_1, 2\omega_3)$. Este util a avea formule analoage, corespunzătoare unui sistem oarecare de perioade echivalente $(2\bar{\omega}_1, 2\bar{\omega}_3)$.

Fie

$$\tilde{\omega}_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \quad \tilde{\omega}_3 = c\omega_1 + d\omega_3, \quad ad - bc = 1,$$

(1) $$\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_3 = o.$$

Să punem

(2) $$p\tilde{\omega}_1 = e_\lambda, \quad p\tilde{\omega}_2 = e_\mu, \quad p\tilde{\omega}_3 = e_\nu,$$

indicii λ, μ, ν primind, într'o ordine oarecare, valorile 1, 2, 3 determinate de coeficienţii a, b, c, d, conform tabloului (9) (§ 187). Este esenţial de observat că coeficientul lui i în raportul $\frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_1}$ are acelaş semn ca în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, precum se recunoaşte imediat.

Pentru a obţine formulele corespunzătoare celor considerate, este de ajuns a înlocuì în acele formule semiperioadele ω_1, ω_2, ω_3 prin semiperioadele transformate $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ şi, în acelaş timp, cantităţile construite cu ajutorul celor dintâi prin expresiuni construite în acelaş mod cu ajutorul celor din urmă.

Aşa dar, înlocuind ω_1, ω_2, ω_3 respectiv prin $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$, vom înlocuì η_1, η_2, η_3 prin transformatele corespunzătoare $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$, $\tilde{\eta}_3$, determinate de ecuaţiunile

$$\tilde{\eta}_1 = a\eta_1 + b\eta_3, \quad \tilde{\eta}_3 = c\eta_1 + \eta d_3, \quad \tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2 + \tilde{\eta}_3 = o$$ [1]).

In acelaş timp, vom înlocuì e_1, e_2, e_3 prin e_λ, e_μ, e_ν şi funcţiunile transformate

$$\sigma_1(u|\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_3), \quad \sigma_2(u|\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_3), \quad \sigma_3(u|\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_3),$$

le vom scrie

$$\sigma_\lambda(u|\omega_1,\omega_3), \quad \sigma_\mu(u|\omega_1,\omega_3), \quad \sigma_\nu(u|\omega_1,\omega_3),$$

sau, mai scurt,

$$\sigma_\lambda u, \quad \sigma_\mu u, \quad \sigma_\nu u,$$

subînţelegând perioadele iniţiale.

Cantităţile

(3) $$v = \frac{u}{2\omega_1}, \quad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad q = e^{i\pi\tau},$$

se vor înlocuì prin

(4) $$\tilde{v} = \frac{u}{2\tilde{\omega}_1}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_1}, \quad \tilde{q} = e^{i\pi\tilde{\tau}}$$

[1]) V. (§ 144).

Pentru a nu încărcà formulele cu prea multe accente, vom păstrà, în formulele generale, literile ν, τ, q, fără accente; valorile lor însă vor fi cele exprimate prin formulele (4). In fine, produsele

$$(5)\quad \begin{cases} q_0 = \prod_1^\infty (1-q^{2n}), \quad q_1 = \prod_1^\infty (1+q^{2n}) \\ q_2 = \prod_1^\infty (1+q^{2n-1}), \quad q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{2n-2}) \end{cases}$$

păstrează aceiaş formă, q având valoarea menţionată (4).

Aplicând cele zise mai sus, formulele corespunzătoare formulelor (2), (3) (§ 219) se vor scrie

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu} = 2i\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0\, q_1^2, \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} = q_0\, q_2^2, \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu} = q_0\, q_3^2, \\ \frac{\tilde{\omega}_1}{\pi}\sqrt{\frac{\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta} = i\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0^3. \end{cases}$$

Deasemenea, formulele transformate ale formulelor (10) se vor scrie

$$(7)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\;\sigma u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu^2}(z-z^{-1})\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0 \prod_1^\infty (1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2}), \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\;\sigma_\lambda u = ie^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu^2}(z+z^{-1})\, q^{\frac{1}{4}}\, q_0 \prod_1^\infty (1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2}), \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\;\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu^2}\, q_0 \prod_1^\infty (1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}), \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\;\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu^2}\, q_0 \prod_1^\infty (1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n+1}z^{-2}). \end{cases}$$

In toate aceste formule, elementele ν, z, τ şi q sunt definite de egalităţile

$$(8)\quad \nu = \frac{u}{2\tilde{\omega}_1},\; z = e^{i\pi\nu},\; \tau = \frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_1},\; q = e^{i\pi\tau}.$$

Observare. Discriminantul Δ este un invariant relativ la orice transformare de perioade echivalente; nu se poate spune acelaş lucru despre radicalul $\sqrt[8]{\Delta}$, a cărui valoare transformată diferă de cea dintâiu printr'un factor ε, ($\varepsilon^8=1$), care depinde de perioadele transformate.

CAPITOLUL XVIII.

FUNCŢIUNILE $\vartheta(v)$ ale lui JACOBI.

Jacobi a introdus în Analiză o clasă de serii cari poartă numele de serii sau funcţiuni ϑ, funcţiuni simplu periodice; în locul acestor funcţiuni, Weierstrass a introdus funcţiunile σ.

222. *Seria* $\vartheta_1(v)$. Pentru a formà seria ce se reprezintă prin simbolul $\vartheta_1(v)$ şi a găsì în acelaş timp relaţiunea ce o leagă de funcţiunea σu, să plecăm dela expresiunea acestei funcţiuni sub formă de produs simplu (12) (§ 215).

$$(1)\quad \frac{\pi}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta_1 u^2}{\omega_1}} \sigma u = \frac{1}{q_0^2} \frac{z - z^{-1}}{i} \prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2}),$$

$$v = \frac{u}{2\omega_1},\ z = e^{i\pi v},\ q = e^{i\pi\tau},\ q_0 = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}),$$

şi să căutăm a transformà membrul al doilea într'o serie de puteri. Să punem

$$(2)\qquad \varphi(z) = (z - z^{-1}) \prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2}).$$

In virtutea ipotezei $|q| < 1$, produsele

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^2),\quad \prod_1 (1 - q^{2n} z^{-2})$$

sunt absolut şi uniform convergente, cel dintâiu pentru orice valoare finită a lui z, cel de al doilea în tot planul, exceptând punctul $z = 0$.

Funcţiunea $\varphi(z)$ este aşàdar uniformă în tot planul z, neavând alte singularităţi decât punctele $z = 0$, $z = \infty$, cari sunt puncte singulare esenţiale; prin urmare ea se desvoltă în serie Laurent, convergentă pentru orice valoare finită z, exceptând valoarea $z = 0$.

Funcţiunea $\varphi(z)$, definită de egalitatea (2), satisface relaţiunile

$$(3)\qquad \varphi(-z) = -\varphi(z),$$

$$(4)\qquad \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = -\varphi(z).$$

Din relaţiunea (3) rezultă că desvoltarea acestei funcţiuni în serie Laurent conţine z numai la puteri impare şi este de forma

$$(5)\qquad \varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n z^{2n+1};$$

din relaţiunea (4) rezultă că termenii seriei, în cari exponenţii lui

z sunt egali şi de semne contrarii, trebuie să fie egali şi de semne contrarii. De unde deducem, pentru $\varphi(z)$, forma

$$(6)\qquad \varphi(z) = \sum_0^\infty A_n \left(z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\right).$$

Determinarea coeficienţilor A_n. Să considerăm produsul

$$(7)\qquad \varphi_m(z) = (z - z^{-1}) \prod_{n=1}^{m} (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2}),$$

a cărui limită, pentru $m = \infty$, este funcţiunea $\varphi(z)$. Putem scrie sub formă de sumă,

$$(8)\qquad \varphi_m(z) = a_0\left(z - z^{-1}\right) + a_1\left(z^3 - z^{-3}\right) + \ldots + a_m\left(z^{2m+1} - z^{-(2m+1)}\right).$$

Coeficienţii a_k, $(k = 0, 1, \ldots, m)$, variază împreună cu m şi avem $\lim\limits_{m=\infty} a_k = A_k$. Căci: 1⁰ oricare ar fi valoarea finită a lui z, exceptând $z = o$, există un număr întreg pozitiv μ astfel că pentru $m \geqq \mu$ avem

$$|\varphi(z) - \varphi_m(z)| < \varepsilon,$$

$\varepsilon > o$ arbitrar de mic; 2⁰ desvoltarea este unică.

Intre coeficienţii a_k există o formulă de recurenţă, care se deduce din egalitatea (6) în care înlocuim z prin qz. Obţinem astfel identitatea

$$\varphi_m(qz) = -\frac{1}{qz^2}\,\frac{1 - q^{2m+2} z^2}{1 - q^{2m} z^{-2}}\,\varphi_m(z).$$

sau

$$(9)\qquad (qz^2 - q^{2m+1})\,\varphi_m(qz) = (q^{2m+2} z^2 - 1)\,\varphi_m(z).$$

Să înlocuim $\varphi_m(z)$ prin expresiunea sa (7), precum şi $\varphi_m(qz)$ prin aceeaş expresiune în care scriem qz în loc de z şi să egalăm coeficienţii lui z^{2k+1} din ambele membre (9); obţinem egalitatea

$$a_{k-1} q^{2k} - a_k\, q^{2m+2k+2} = a_{k-1} q^{2m+2} - a_k\ ;$$

de unde

$$(10)\qquad a_k = -\frac{q^{2k}\,(1 - q^{2m-2k+2})}{1 - q^{2m+2k+2}}\,a_{k-1}.$$

Dând lui k valorile 1, 2, 3,... k şi făcând produsul egalităţilor (10) aşà obţinute, găsim

$$(11)\qquad a_k = (-1)^k q^{k(k+1)} \frac{(1 - q^{2m})(1 - q^{2m-2}) \ldots (1 - q^{2m-2k+2})}{(1 - q^{2m+4})(1 - q^{2m+6}) \ldots (1 - q^{2m+2k+2})}\, a_0$$

şi făcând $k = m$,

$$(12)\qquad a_m = (-1)^m q^{m(m+1)} \frac{(1 - q^2)(1 - q^4) \ldots (1 - q^{2m})}{(1 - q^{2m+4})(1 - q^{2m+6}) \ldots (1 - q^{4m+2})}\, a_0.$$

De altă parte, egalitatea (7) ne dă direct valoarea coeficientului puterii celei mai înalte, z^{2m+1}, care este

$$(13)\qquad a_m = (-1)^m q^{m(m+1)}.$$

Avem așà dar

$$(14)\qquad a_0 = \frac{(1-q^{2m+4})(1-q^{2m+6})\ldots(1-q^{4m+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2m})}.$$

Produsul $\prod\limits_1^{\infty}(1-q^{2n})$ fiind absolut convergent, la un ε dat corespunde un număr întreg pozitiv μ, astfel că pentru $m \geqslant \mu$, avem inegalitatea

$$\left|\prod_{n=m+1}^{2m}(1-q^{2n+2})-1\right| < \varepsilon;$$

de unde rezultă că numărătorul membrului al doilea tinde către 1, când m tinde către infinit, astfel că avem

$$(15)\qquad A_0 = \lim_{m=\infty} a_0 = \frac{1}{\prod\limits_1^{\infty}(1-q^{2n})} = \frac{1}{q_0}.$$

Deasemenea, făcând, în formula (11), $m = \infty$ și înlocuind $\lim a_0$ prin $\frac{1}{q_0}$, obținem, pentru orice valoare finită și întreagă k,

$$(16)\qquad A_k = \lim_{m=\infty} a_k = (-1)^k q^{k(k+1)} A_0 = \frac{(-1)^k}{q_0} q^{k(k+1)}.$$

Desvoltarea funcțiunii $\varphi(z)$, reprezintată prin egalitatea (5), este așà dar

$$(17)\quad \varphi(z) = \frac{1}{q_0}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n(n+1)} z^{2n+1} = \frac{q^{-\frac{1}{4}}}{q_0}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1}$$

$$= \frac{q^{-\frac{1}{4}}}{q_0}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)i\pi\nu}, \qquad z = e^{i\pi\nu}.$$

Se reprezintă prin $\vartheta_1(\nu)$ seria

$$(18)\qquad \vartheta_1(\nu) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)i\pi\nu}.$$

Grupând doi câte doi termenii cari corespund valorilor n și $-(n+1)$, egalitatea precedentă devine

$$(19)\qquad \vartheta_1(\nu) = 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)\pi\nu.$$

Referindu-ne la produsul (2), avem, pentru $\vartheta_1(\nu)$, expresiunile următoare sub formă de produse:

$$(20) \qquad \vartheta_1(\nu) = q_0\, q^{\frac{1}{4}} \frac{z - z^{-1}}{i} \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2})$$

$$(21) \qquad \vartheta_1(\nu) = 2\, q_0\, q^{\frac{1}{4}} \sin \pi\nu \prod_1^{\infty} (1 - 2\, q^{2n} \cos 2\pi\nu + q^{4n}).$$

Introducând funcţiunea $\vartheta_1(\nu)$ în formula (1), obţinem relaţiunea

$$(22) \qquad \frac{\pi}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta_1 u^2}{\omega_1}} \sigma u = q_0^{-3}\, q^{-\frac{1}{4}}\, \vartheta_1(\nu),$$

care leagă între dânsele funcţiunile σu şi $\vartheta_1(\nu)$.

223. Pe lângă funcţiunea $\vartheta_1(\nu)$, care corespunde funcţiunii σu, se consideră funcţiunile $\vartheta_2(\nu)$, $\vartheta_3(\nu)$, $\vartheta_0(\nu)$ corespunzătoare funcţiunilor $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$. Vom deduce aceste funcţiuni din funcţiunea $\vartheta_1(\nu)$.

1°. *Funcţiunea* $\vartheta_2(\nu)$. Să înlocuim în formula (18) ν prin $\nu + \frac{1}{2}$ şi să punem

$$(23) \qquad \vartheta_2(\nu) = \vartheta_1\left((\nu + \frac{1}{2}\right);$$

vom aveà egalitatea

$$(24) \qquad \vartheta_2(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)i\pi\nu},$$

sau

$$(25) \qquad \vartheta_2(\nu) = 2 \sum_0^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos (2n+1)\pi\nu.$$

2°. *Funcţiunea* $\vartheta_3(\nu)$. Să înlocuim în egalitatea (18) ν prin $\nu + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, sau, ceeace este tot una, în (24) ν prin $\nu + \frac{\tau}{2}$; obţinem

$$\vartheta_1\left(\nu + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_2\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{(2n+1)i\pi\nu}.$$

Punând în membrul din urmă $n - 1$ în loc de n, avem

$$(26) \qquad \vartheta_1\left(\nu + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_2\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2ni\pi\nu}.$$

Seria din membrul al doilea se reprezintă prin $\vartheta_3(\nu)$:

$$(27) \qquad \vartheta_3(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2ni\pi\nu},$$

sau

(28) $$\vartheta_3(\nu) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} \cos 2n\pi\nu.$$

Intre funcțiunile $\vartheta_1(\nu)$ sau $\vartheta_2(\nu)$ și $\vartheta_3(\nu)$ avem așà dar relațiunile

(29) $$\vartheta_1\left(\nu + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_2\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi\nu}\, \vartheta_3(\nu).$$

3°. *Funcțiunea* $\vartheta_0(\nu)$. Să înlocuim în egalitatea (18) ν prin $\nu + \frac{\tau}{2}$; avem

$$\vartheta_1(\nu + \frac{\tau}{2}) = -i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{2}} e^{(2n+1)\,i\pi\nu}$$

$$= -iq^{-\frac{1}{4}}\,\Sigma(-1)^n\, q^{(n+1)^2} e^{(2n+1)\,i\pi\nu},$$

sau, scriind $n - 1$ în loc de n,

(30) $$\vartheta_1(\nu + \frac{\tau}{2}) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2n\,i\pi\nu}.$$

Se reprezintă prin $\vartheta_0(\nu)$ seria din membrul al doilea:

(31) $$\vartheta_0(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2ni\pi\nu}$$

sau

(32) $$\vartheta_0(\nu) = 1 + 2\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi\nu.$$

Intre $\vartheta_1(\nu)$ și $\vartheta_0(\nu)$ avem așà dar relațiunea

(33) $$\vartheta_1(\nu + \frac{\tau}{2}) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi\nu}\vartheta_0(\nu).$$

224. Pentru a obține cele trei funcțiuni $\vartheta(\nu)$ sub formă de produse, vom face, în produsele (20) și (21) ale funcțiunii $\vartheta_1(\nu)$, substituțiunile corespunzătoare considerate mai sus.

1°. $\vartheta_2(\nu)$. Mărind ν cu $\frac{1}{2}$, z se înlocuiește prin iz; obținem expresiunile

(34) $$\begin{aligned}\vartheta_2(\nu) &= q_0 q^{\frac{1}{4}}(z + z^{-1}) \prod_1^\infty (1 + q^{2n}z^2)(1 + q^{2n}z^{-2}),\\ &= 2q_0 q^{\frac{1}{4}} \cos \pi\nu \prod_1^\infty (1 + 2q^{2n}\cos 2\pi\nu + q^{4n}).\end{aligned}$$

2°. $\vartheta_3(\nu)$. Să înlocuim în prima egalitate (34) ν prin $\nu+\frac{\tau}{2}$, ceeace revine a înlocui z prin $q^{\frac{1}{2}}z$; obţinem

$$\vartheta_2\left(\nu+\frac{\tau}{2}\right)=q_0 q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\prod_1^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}).$$

Prin urmare, în virtutea relaţiunii (29) dintre $\vartheta_2\left(\nu+\frac{\tau}{2}\right)$ şi $\vartheta_3(\nu)$:

$$(35)\quad \begin{aligned}\vartheta_3(\nu)&=q_0\prod_1^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})\\ &=q_0\prod_1^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi\nu+q^{4n-2}).\end{aligned}$$

3°. $\vartheta_0(\nu)$. Inlocuind în egalitatea (20) ν prin $\nu+\frac{\tau}{2}$, sau z prin $q^{\frac{1}{2}}z$, obţinem

$$\vartheta_1\left(\nu+\frac{\tau}{2}\right)=iq_0 q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\prod_1^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2}).$$

De unde, în virtutea relaţiunii (33),

$$(36)\quad \begin{aligned}\vartheta_0(\nu)&=q_0\prod_1^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})\\ &=q_0\prod_1^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi\nu+q^{4n-2}).\end{aligned}$$

225. Să reunim, de o parte, seriile, de altă parte, produsele funcţiunilor ϑ:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\vartheta_1(\nu)&=\frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)i\pi\nu}\\ &=2\sum_0^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)\pi\nu,\\ \vartheta_2(\nu)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)i\pi\nu}\\ &=2\sum_0^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)\pi\nu,\\ \vartheta_3(\nu)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}q^{n^2}e^{2ni\pi\nu}\\ &=1+2\sum_1^{\infty}q^{n^2}\cos 2n\pi\nu,\\ \vartheta_0(\nu)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2ni\pi\nu}\\ &=1+2\sum_1^{\infty}(-1)q^{n^2}\cos 2n\pi\nu.\end{aligned}\right.$$

$$
(2)\quad \begin{cases}
\vartheta_1(v)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\ \prod\limits_1^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),\\
\vartheta_2(v)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\prod\limits_1^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),\\
\vartheta_3(v)=q_0\prod\limits_1^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}),\\
\vartheta_0(v)=q_0\ \prod\limits_1^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}).
\end{cases}
$$

226. Funcțiunile $\vartheta(v)$ sunt funcțiuni întregi; $\vartheta_1(v)$ este funcțiune impară, celelalte trei sunt funcțiuni pare. Făcând în formulele precedente $v = o$, avem

$$
(3)\quad \begin{cases}
\vartheta_1(o)=o,\\
\vartheta_2(o)=2\sum\limits_0^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}=2q^{\frac{1}{4}}\prod\limits_1^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2=2q^{\frac{1}{4}}q_0q_1^2,\\
\vartheta_3(o)=1+2\sum\limits_1^{\infty}q^{n^2}=\prod\limits_1^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2=q_0q_2^2,\\
\vartheta_0(o)=1+2\ \sum\limits_1^{\infty}(-1)^nq^{n^2}=\prod\limits_1^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2=q_0q_3^2.
\end{cases}
$$

Din egalitățile precedente rezultă

$$\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)=2q^{\frac{1}{4}}q^3{}_0(q_1q_2q_3)^2,$$

sau, în virtutea relațiunii (30) (§ 218),

$$(4)\qquad \vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)=2q^{\frac{1}{4}}q_0^3.$$

Derivând funcțiunea $\vartheta_1(v)$ exprimată sub formă de produs (2) și făcând $v = 0$, obținem egalitatea

$$(5)\qquad \vartheta'_1(0)=2\pi q^{\frac{1}{4}}\prod\limits_1^{\infty}(1-q^{2n})^3=2\pi q^{\frac{1}{4}}q_0^3.$$

Avem așa dar identitatea

$$(6)\qquad \vartheta'_1(0)=\pi\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0).$$

227. *Observare.* Este interesant de observat că cele patru serii $\vartheta(v)$ sunt cuprinse în formula

$$\vartheta_{gh}(v)=(-i)^{gh}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{hn}q^{\left(n+\frac{g}{2}\right)^2}e^{2i\pi(n+\frac{g}{2})v},$$

în care indicii g, h primesc respectiv valorile (1, 1), (1, 0), (0, 0), (0, 1), astfel că avem

$$\vartheta_{1,1}(v)=\vartheta_1(v),\ \ \vartheta_{1,0}(v)=\vartheta_2(v),\ \ \vartheta_{0,0}(v)=\vartheta_3(v),\ \ \vartheta_{0,1}(v)=\vartheta_0(v).$$

228. *Mărirea argumentului v respectiv cu* 1 *şi* τ. Din tabloul (1) rezultă relaţiunile următoare:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\vartheta_1(v+1)=-\vartheta_1(v), \quad \vartheta_2(v+1)=-\vartheta_2(v),\\ &\vartheta_3(v+1)=\vartheta_3(v), \quad \vartheta_0(v+1)=\vartheta_0(v). \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(v+\tau)=-q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_1(v),\\ \vartheta_2(v+\tau)=q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_2(v),\\ \vartheta_3(v+\tau)=q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_3(v),\\ \vartheta_0(v+\tau)=-q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_0(v). \end{cases}$$

De unde

$$(3)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(v+1+\tau)=q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_1(v),\\ \vartheta_2(v+1+\tau)=-q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_2(v),\\ \vartheta_3(v+1+\tau)=q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_3(v),\\ \vartheta_0(v+1+\tau)=-q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_0(v). \end{cases}$$

229. *Mărirea argumentului respectiv cu* $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$. Din acelaş tablou (1) deducem formulele următoare:

$$(4)\qquad \begin{cases} \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_2(v),\\ \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}\right)=-\vartheta_1(v),\\ \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_0(v),\\ \vartheta_0\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3(v). \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_0(v),\\ \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_3(v),\\ \vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_2(v),\\ \vartheta_0\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_1(v). \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_3(v), \\ \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=-iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_0(v), \\ \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_1(v), \\ \vartheta_0\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_2(v). \end{cases}$$

230. *Ecuațiune diferențială.* Cele patru funcțiuni $\vartheta(v, \tau)$ privite ca funcțiuni de variabilele v și τ satisfac una și aceeaș ecuațiune cu derivate parțiale. In adevăr, reprezintând prin $\vartheta(v, \tau)$ una oarecare din ele, se verifică ecuațiunea diferențială

$$(7)\quad \frac{\partial^2 \vartheta(v, \tau)}{\partial v^2} = 4i\pi \frac{\partial \vartheta(v, \tau)}{\partial \tau},$$

231. *Expresiunea radicalelor.*

$$\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}, \quad \sqrt[8]{\Delta}, \quad \sqrt{k}, \quad \sqrt{k'}, \quad \sqrt{\frac{2K}{\pi}}.$$

In virtutea formulelor (3) (§ 225), egalitățile (2) (§ 219) se pot scrie

$$(7)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3} = i\vartheta_2(0) = 2i\left(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+\ldots\right), \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = \vartheta_3(0) = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = \vartheta_0(0) = 1-2q+2q^4-2q^9+\ldots \end{cases}$$

de unde, în virtutea egalităților (6) (§ 189),

$$(8)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_3-e_2} = \sqrt{i}\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3} = i\sqrt{i}\,\vartheta_2(0), \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_3-e_1} = \frac{1}{\sqrt{i}}\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = \frac{1}{\sqrt{i}}\vartheta_3(0), \quad \sqrt{i}=e^{\frac{i\pi}{4}} \\ \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1} = \sqrt{i}\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt{i}\,\vartheta_0(0). \end{cases}$$

Deasemenea, în virtutea formulei (5) (§ 225), egalitatea (3) (§ 219) se scrie

$$(9)\quad \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta} = \frac{i}{2\omega_1}\vartheta_1'(0) = \frac{i\pi}{\omega_1}q^{\frac{1}{4}}(1-3q^2+5q^{2\cdot 3}-7q^{3\cdot 4}+\ldots).$$

Expresiunile radicalelor $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, date de egalităţile (7), şi (9) (§ 220) devin, în virtutea egalităţilor (7), şi ţinând seamă de expresiunile (3) (§ 226,)

$$(10) \qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{2(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \ldots)}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

$$(11) \qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

$$(12) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$$

Putem obţine, pentru membrul întâi al egalităţii precedente, o serie mai convergentă, adunând a doua şi a treia din egalităţile (7):

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = \frac{\vartheta_3(0) + \vartheta_0(0)}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} (1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \ldots);$$

de unde

$$(13) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \frac{2}{1 + \sqrt{k'}} (1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \ldots).$$

Din egalitatea (11) rezultă expresiunea

$$(14) \qquad \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{\vartheta_3(0) - \vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0) + \vartheta_0(0)} = \frac{2(q + q^9 + q^{25} + \ldots)}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots}.$$

Membrul din urmă al acestei egalităţi nu diferă de acela al egalităţii (10) decât prin înlocuirea lui q prin q^4; ceeace corespunde la înlocuirea lui τ prin 4τ. Reprezintând membrul întâi prin l şi punând τ în evidenţă, avem egalitatea

$$(15) \qquad l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \sqrt{k(4\tau)}.$$

Din egalităţile (10) şi (11) ridicate la pătrat şi ţinând seamă de egalitatea $k^2 + k'^2 = 1$, rezultă identitatea

$$(16) \qquad \vartheta_0^4(0) + \vartheta_2^4(0) = \vartheta_3^4(0).$$

232. *Expresiunea cantităţilor e_α, a invarianţilor g_2, g_3 şi a invariantului absolut J.*

Din egalităţile (7) rezultă

$$(17) \quad e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \vartheta_0^4(0), \quad e_2 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \vartheta_2^4(0), \quad e_1 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \vartheta_3^4(0)$$

De unde, în virtutea relațiunii $e_1 + e_2 + e_3 = o$,

$$(18) \quad \begin{cases} 3e_1 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\vartheta_0^4(0) + \vartheta_3^4(0)], \\ 3e_2 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\vartheta_2^4(0) - \vartheta_0^4(0)], \\ 3e_3 = -\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)]. \end{cases}$$

Adunând cele dintâi două egalități (17) și scăzând a treia, obținem relațiunea (16) de mai sus.

Pentru a obține expresiunea invariantului $g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)$, să considerăm identitatea

$$(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2 = 2(e_1 + e_2 + e_3)^2 - 6(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1);$$

de unde deducem

$$(19) \qquad g_2 = \frac{1}{2^3.3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4 [\vartheta_0^8(0) + \vartheta_2^8(0) + \vartheta_3^8(0)].$$

Expresiunea invariantului $g_3 = 4e_1e_2e_3$ este

$$(20) \qquad g_3 = \frac{1}{2^4.3^3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6 (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4).$$

Să considerăm invariantul absolut

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta},$$

care, fiind omogen și de gradul zero în raport cu ω_1 și ω_3, depinde numai de raportul $\tau = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}$. Inlocuind g_2 prin valoarea sa (19) și descriminantul

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2$$

prin valoarea sa dedusă din formulele (7), adică

$$(21) \qquad \Delta = 16\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6 (\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^8,$$

obținem expresiunea

$$(22) \qquad J(\tau) = \frac{1}{54}\,\frac{(\vartheta_0^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8)^3}{(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^8}.$$

233. *Expresiunea funcțiunilor σ prin funcțiunile ϑ.* Intre funcțiunea σu și funcțiunea $\vartheta(v)$ avem (22) (§ 222), relațiunea

$$(1) \qquad \frac{\pi}{\omega_1} q^{\frac{1}{4}} q_0^3 e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma u = \vartheta_1(v) \qquad (u = 2\omega_1 v).$$

Divizând ambele membre cu v şi făcând $v = 0$, obţinem egalitatea

$$(2) \qquad 2\pi q^{\frac{1}{4}} q_0^3 = \vartheta_1'(0),$$

care reproduce relaţiunea (5) (§ 226). Relaţiunea (1) se poate dar scrie

$$(3) \qquad e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma u = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}.$$

Să dăm lui u succesiv valorile ω_1, $-\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$, ω_3, cărora corespund valorile $v = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, $\frac{\tau}{2}$; obţinem egalităţile

$$(4) \quad \begin{cases} e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2}} \sigma\omega_1 = 2\omega_1 \dfrac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1'(0)} = 2\omega_1 \dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1\omega_2^2}{2\omega_1}} \sigma\omega_2 = -2\omega_1 \dfrac{\vartheta_1\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1'(0)} = -2\omega_1 q^{-\frac{1}{4}} \dfrac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}} \sigma\omega_3 = 2\omega_1 \dfrac{\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta'_1(0)} = 2i\omega_1 q^{-\frac{1}{4}} \dfrac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_1'(0)}. \end{cases}$$

In virtutea formulelor

$$\eta_1 \frac{\omega_2^2}{\omega_1} = \eta_2\omega_2 + \frac{i\pi}{2}(1+\tau), \qquad \eta_1 \frac{\omega_3^2}{\omega_1} = \eta_3\omega_3 + \frac{i\pi\tau}{2} \text{ (§ 216)},$$

egalităţile precedente devin

$$(5) \quad \begin{cases} e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2}} \sigma\omega_1 = 2\omega_1 \dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_2\omega_2}{2}} \sigma\omega_2 = -2\omega_1 \sqrt{i} \dfrac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_3\omega_3}{2}} \sigma\omega_3 = 2i\omega_1 \dfrac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_1'(0)}. \end{cases}$$

Pentru a obţine relaţiunile dintre funcţiunile $\sigma_\alpha u$ şi funcţiunile $\vartheta(v)$, să înlocuim în formula (3) u succesiv prin $u + \omega_1$, $u - \omega_2$, $u + \omega_3$, prin urmare v respectiv prin $v + \frac{1}{2}$, $v + \frac{1+\tau}{2}$, $v + \frac{\tau}{2}$; rezultă

$$(6) \quad \begin{cases} e^{-\frac{\eta_1(u+\omega_1)^2}{2\omega_1}} \sigma(u+\omega_1) = 2\omega_1 \dfrac{\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1'(0)} = 2\omega_1 \dfrac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1(u-\omega_2)^2}{2\omega_1}} \sigma(u-\omega_2) = 2\omega_1 \dfrac{\vartheta_1\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1'(0)} = 2\omega_1 q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_1'(0)}, \\ e^{-\frac{\eta_1(u+\omega_3)^2}{2\omega_1}} \sigma(u+\omega_3) = 2\omega_1 \dfrac{\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1'(0)} = 2\omega_1 q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \dfrac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1'(0)}. \end{cases}$$

Să facem în aceste egalități $u = \nu = 0$ și să dividem fiecare din ele prin valoarea care îi corespunde; obținem

$$
(7)\quad \begin{cases}
e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} e^{-\eta_1 u} \dfrac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma\omega_1} = \dfrac{\vartheta_2(\nu)}{\vartheta_2(0)}, \\[2ex]
e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} e^{+\frac{\eta_1\omega_2}{\omega_1}u} \dfrac{\sigma(\omega_2-u)}{\sigma\,\omega_2} = e^{-i\pi\nu} \dfrac{\vartheta_3(\nu)}{\vartheta_3(0)}, \\[2ex]
e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} e^{-\frac{\eta_1\omega_3}{\omega_1}u} \dfrac{\sigma(u+\omega_3)}{\sigma\omega_3} = e^{-i\pi\nu} \dfrac{\vartheta_0(\nu)}{\vartheta_0(0)}.
\end{cases}
$$

Însă, în virtutea formulelor lui Legendre

$$
\eta_1\,\omega_2 - \eta_2\,\omega_1 = -\frac{i\pi}{2}, \quad \eta_1\,\omega_3 - \eta_3\,\omega_1 = \frac{i\pi}{2};
$$

avem

$$
e^{\frac{\eta_1\omega_2}{\omega_1}u} = e^{\eta_2 u}\, e^{-i\pi\nu}, \quad e^{-\frac{\eta_1\omega_3}{\omega_1}u} = e^{-\eta_3 u}\, e^{-i\pi\nu}.
$$

De unde rezultă *expresiunile funcțiunilor σ prin funcțiunile ϑ*:

$$
(8)\quad \begin{cases}
\sigma u = 2\omega_1\, e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \dfrac{\vartheta_1(\nu)}{\vartheta_1'(0)}, \\[2ex]
\sigma_1 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \dfrac{\vartheta_2(\nu)}{\vartheta_2(0)}, \\[2ex]
\sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \dfrac{\vartheta_3(\nu)}{\vartheta_3(0)}, \\[2ex]
\sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \dfrac{\vartheta_0(\nu)}{\vartheta_0(0)}.
\end{cases}
$$

Expresiunile precedente se pot pune sub altă formă, înlocuind numitorii membrelor de al doilea prin valorile lor date de egalitățile (9) și (7) (§ 231). Obținem egalitățile

$$
(9)\quad \begin{cases}
\sqrt{\dfrac{\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[8]{\Delta}\;\sigma u = i e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\,\vartheta_1(\nu), \\[2ex]
\sqrt{\dfrac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}\;\sigma_1 u = i e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\,\vartheta_2(\nu), \\[2ex]
\sqrt{\dfrac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\;\sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\,\vartheta_3(\nu), \quad \left(\nu = \dfrac{u}{2\omega_1}\right) \\[2ex]
\sqrt{\dfrac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}\;\sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\,\vartheta_0(\nu).
\end{cases}
$$

Fiecărei funcțiuni σ corespunde o funcțiune ϑ al cărei indice întrece cu o unitate indicele corespunzător al funcțiunii σ; indicele 4 se înlocuește prin indicele o.

234. Dacă în locul perioadelor $(2\omega_1, 2\omega_3)$ introducem un sistem de perioade echivalente $(2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_3)$, formulele [(7), (9), § 231 şi formulele (9) din paragraful precedent se vor înlocuì respectiv prin cele două tablouri de formule următoare:

$$
(10)\quad \begin{cases}
\sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu} = i\vartheta_2(0|\tau_1) = 2iq^{\frac{1}{4}}\, q_0 q_1^2, \\
\sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} = \vartheta_3(0\,|\,\tau_1) = q_0 q_2^2, \\
\sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu} = \vartheta_0(0\,|\,\tau_1) = q_0\, q_3^2, \\
\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta} = \dfrac{i}{2\tilde{\omega}_1}\vartheta_1'(0\,|\,\tau_1) = i\dfrac{\pi}{\tilde{\omega}_1} q_1^4\, q_0^3.
\end{cases}
$$

$$
(11)\quad \begin{cases}
\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\,\sigma u = ie^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 v_1^2}\,\vartheta_1(v_1\,|\,\tau_1), \\
\sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\,\sigma_\lambda u = ie^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 v_1^2}\,\vartheta_2(v_1\,|\,\tau_1), \\
\sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 v_1^2}\,\vartheta_3(v_1\,|\,\tau_1), \\
\sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 v_1^2}\,\vartheta_0(v_1\,|\,\tau_1).
\end{cases}
$$

$$
v_1 = \frac{u}{2\tilde{\omega}_1},\quad \tau_1 = \frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_1},\quad q = e^{i\pi\tau_1},\quad q_0 = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}),
$$

$$
q_1 = \prod_1^\infty (1 + q^{2n}),\quad q_2 = \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1}),\quad q_3 = \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}).
$$

Indicii λ, μ, ν sunt numerele 1, 2, 3 în ordinea determinată de tabloul următor în care numerele a, b, c, d sunt date (mod. 2):

(12)

a	b	c	d	λ	μ	ν
1	0	0	1	1	2	3
1	0	1	1	1	3	2
1	1	0	1	2	1	3
1	1	1	0	2	3	1
0	1	1	0	3	2	1
0	1	1	1	3	1	2

Funcţiunile $\sigma_\lambda u$, $\sigma_\mu u$, $\sigma_\nu u$ se referă la perioadele iniţiale $(2\omega_1, 2\omega_3)$

235. *Expresiunea produsului* $\tilde{\eta}_1\,\tilde{\omega}_1$.

Desvoltarea în serie a funcțiunii $\vartheta_1(\nu)$ după puterile lui ν este

$$\vartheta_1(\nu)=\nu\,\vartheta'_1(0)+\frac{\nu^3}{6}\vartheta_1'''(0)+\ldots,$$

iar funcțiunea σu, desvoltată după puterile lui u, are forma

$$\sigma u = u + a_1 u^5 + a_2 u^7 + \ldots$$

Dacă dar desvoltăm, după puterile lui ν, ambele membre ale primei ecuațiuni (8), în care înlocuim $\eta_1\,\omega_1$ prin $\tilde{\eta}_1\,\tilde{\omega}_1$ și identificăm ambele membre, obținem egalitatea

$$(13)\qquad \tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1=-\frac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta'_1(0)}=\frac{\pi^2}{12}\frac{1-3^3q^2+5^3q^6-\ldots}{1-3\,q^2+5\,q^6-\ldots}$$

Această egalitate ca și egalitatea (14) (§ 215) determină cantitatea $\tilde{\eta}_1$, fiind dată $2\tilde{\omega}_1$ și $q=e^{i\pi\tau}$

236. *Zerurile funcțiunilor* $\vartheta(\nu)$.

Zerurile celor patru funcțiuni $\vartheta(\nu\,|\,\tau)$ sunt, în virtutea egalităților (8) sau (9), date de valorile $\nu=\dfrac{u}{2\omega_1}$ corespunzătoare zerurilor funcțiunilor σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$. Aceste zeruri sunt (7) (§ 183) date de tabloul

(14)

funcțiunea	*zeruri*
$\vartheta_1(\nu)$	$m+n\tau$
$\vartheta_2(\nu)$	$m+\frac{1}{2}+n\tau$
$\vartheta_3(\nu)$	$m+\frac{1}{2}+(n+\frac{1}{2})\tau$
$\vartheta_0(\nu)$	$m+(n+\frac{1}{2})\tau$

Zerurile funcțiunilor σ fiind de ordinul întâiu, rezultă că zerurile funcțiunilor $\vartheta(\nu)$ sunt de acelaș ordin [1]).

237. *Expresiunea funcțiunilor* ζu, $\wp u$ *prin funcțiunile* $\vartheta(\nu)$.

Luând, în raport cu ν, derivata logaritmică a primei egalități (8) (§ 233), obținem expresiunea

$$(15)\qquad \zeta u=\frac{1}{2\omega_1}\left[4\,\eta_1\,\omega_1\,\nu+\frac{\vartheta'_1(\nu)}{\vartheta_1(\nu)}\right].$$

De unde, derivând ambele membre în raport cu ν,

$$(16)\qquad \wp u=-\frac{1}{4\omega_1^2}\left(4\eta_1\,\omega_1+\frac{\vartheta_1(\nu)\,\vartheta_1''(\nu)-\vartheta'_1(\nu)}{\vartheta_1^2(\nu)}\right).$$

Se obține o formulă mai simplă, dacă considerăm egalitatea

---

[1]) Zerurile funcțiunilor $\vartheta(\nu)$ rezultă și din expresiunile acestor funcțiuni sub formă de produse ((2) (§ 225).

$$(17)\qquad \sqrt{pu-e_a}=\frac{\sigma_a u}{\sigma u}=\frac{1}{2\omega_1}\,\frac{\vartheta'_1(0)\,\vartheta_{a+1}(v)}{\vartheta_{a+1}(0)\,\vartheta_1(v)},$$

cuprinsă în aceleaşi formule (8); de unde

$$(18)\qquad pu=e_a+\frac{1}{4\omega_1^2}\left[\frac{\vartheta'_1(0)\vartheta_{a+1}(v)}{\vartheta_{a+1}(0)\,\vartheta_1(v)}\right]^2,\ (a=1,2,3),\ \vartheta_4=\vartheta_0.$$

238. *Expresiunea funcţiunilor snv, cnv, dnv.*

Formulele (3) (§ 194) cari definesc funcţiunile snv, cnv, dnv se pot scrie astfel

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} snv &= \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma\left(\frac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)},\\ cnv &= \frac{\sigma_1\left(\frac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)},\\ dnv &= \frac{\sigma_2\left(\frac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Inlocuind funcţiunile σ prin valorile lor (8) (§ 233) şi ţinând seamă de relaţiunea $\omega_1\sqrt{e_1-e_3}=K$, obţinem egalităţile

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} snv &= 2K\,\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta'_1(0)}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2K}\right)},\\ cnv &= \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\,\frac{\vartheta_2\left(\frac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2K}\right)},\\ dnv &= \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\,\frac{\vartheta_3\left(\frac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2K}\right)}. \end{aligned}\right.$$

sau, în virtutea egalităților (6) (§ 226) și (10), (11), (12) (§ 231),

$$
(21) \quad \begin{cases}
snv = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \dfrac{\vartheta_1\left(\dfrac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{v}{2K}\right)} \\[2ex]
cnv = \dfrac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \dfrac{\vartheta_2\left(\dfrac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{v}{2K}\right)} \\[2ex]
dnv = \sqrt{k'} \dfrac{\vartheta_3\left(\dfrac{v}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{v}{2K}\right)}
\end{cases}
$$

239. *Transformarea lineară a funcțiunilor $\vartheta(v \mid \tau)$.*

Pentru a obține relațiunile dintre funcțiunile $\vartheta(v \mid \tau)$, corespunzătoare perioadelor $(2\omega_1, 2\omega_3)$, și funcțiunile $\vartheta(\overline{v} \mid \overline{\tau})$, corespunzătoare perioadelor echivalente $(2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_3)$, ne putem servi de formulele generale (11) (§ 234), înlocuind, în primele membre, elementele transformate prin valorile lor determinate de formulele (10), conform tabloului (12), și eliminând, după aceea, funcțiunile σ între ecuațiunile astfel obținute și ecuațiunile (9) (§ 233) corespunzătoare sistemului inițial $(2\omega_1, 2\omega_3)$.

Este deajuns a considera substituțiunile fundamentale

$$
S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},
$$

cu ajutorul cărora se poate exprimà orice substituțiune lineară (§ 125).

I. Substituțiunii S

$$
\tilde{\omega}_1 = \omega_1, \quad \tilde{\omega}_3 = \omega_1 + \omega_3
$$

corespund valorile

$$
\bar{e}_1 = e_1, \quad \bar{e}_2 = e_3, \quad \bar{e}_3 = e_2;
$$

prin urmare

$$
\lambda = 1, \quad \mu = 3, \quad \nu = 2.
$$

Vom avea dar

$$
e_\lambda = e_1, \quad e_\mu = e_3, \quad e_\nu = e_2
$$

$$
\overline{v} = \frac{u}{2\omega_1} = v, \quad \overline{\tau} = \frac{\omega_1 + \omega_3}{\omega_1} = \tau + 1, \quad \bar{\eta}_1 = \eta_1.
$$

Făcând aceste substituţiuni în egalităţile (11) (§ 234) şi ţinând seamă de egalitatea

$$\sqrt[4]{e_3-e_2}=\sqrt{i}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}, \quad (§\ 231),$$

de unde rezultă, pentru valoarea corespunzătoare a radicalului $\sqrt[8]{\varDelta}$,

$$\left(\sqrt[8]{\varDelta}\right)=\sqrt{2}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_3-e_2}=\sqrt{i}\,\sqrt[8]{\varDelta},$$

obţinem egalităţile

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt{i}\,\sqrt{\dfrac{\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[8]{\varDelta}\,\sigma u=ie^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\,\vartheta_1(\nu\mid\tau+1), \\ \sqrt{i}\,\sqrt{\dfrac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u=ie^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\,\vartheta_2(\nu\mid\tau+1), \\ \sqrt{\dfrac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u=e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\,\vartheta_3(\nu\mid\tau+1), \\ \sqrt[4]{\dfrac{2\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u=e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}\,\vartheta_0(\nu\mid\tau+1). \end{cases}$$

Comparând aceste egalităţi cu egalităţile (9) (§ 231), deducem formulele de transformare:

$$(2)\quad \begin{cases} \vartheta_1(\nu\mid\tau+1)=\sqrt{i}\,\vartheta_1(\nu\mid\tau), \\ \vartheta_2(\nu\mid\tau+1)=\sqrt{i}\,\vartheta_2(\nu\mid\tau), \\ \vartheta_3(\nu\mid\tau+1)=\vartheta_0(\nu\mid\tau), \\ \vartheta_0(\nu\mid\tau+1)=\vartheta_3(\nu\mid\tau). \end{cases}$$

II. Să considerăm acum substituţiunea T

$$\tilde{\omega}_1=\omega_3, \quad \tilde{\omega}_3=-\omega_1,$$

căreia corespund valorile

$$\bar{e}_1=e_3, \quad \bar{e}_2=e_2, \quad \bar{e}_3=e_1;$$

prin urmare

$$\lambda=3, \quad \mu=2, \quad \nu=1.$$

Elementele transfornate sunt

$$(3)\quad \tilde{\eta}_1=\eta_3,\ \tilde{\eta}_3=-\eta_1; \quad \tau_1=-\frac{\omega_1}{\omega_3}=-\frac{1}{\tau};$$

$$\nu_1=\frac{u}{2\omega_3}=\frac{\omega_1}{\omega_3}\nu=\frac{\nu}{\tau}, \quad e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1\nu_1^2}=e^{\frac{2\eta_3\omega_1^2\nu^2}{\omega_3}}.$$

Insă, în virtutea formulei

$$\eta_3\omega_1-\eta_1\omega_3=-\frac{i\pi}{2},$$

rezultă

$$2\eta_3\frac{\omega_1^2}{\omega_3}=2\eta_1\omega_1-\frac{i\pi}{\tau};$$

prin urmare

$$(4)\qquad e^{2\bar{\eta}_1\bar{\omega}_1\nu_1^2}=e^{2\eta_1\omega_1\nu^2-\frac{i\pi}{\tau}\nu^2}.$$

Ducând aceste valori în egalitățile (11) (§ 234) și ținând seamă de egalitățile (8) (§ 231), obținem

$$(5)\quad \begin{cases} \sqrt{i}\sqrt{\dfrac{\omega_3}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\,\sigma u=ie^{2\eta_1\omega_1\nu^2-\frac{i\pi}{\tau}\nu^2}\,\vartheta_1\left(\dfrac{\nu}{\tau}\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right), \\ \sqrt{i}\sqrt{\dfrac{2\omega_3}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u=ie^{2\eta_1\omega_1\nu^2-\frac{i\pi}{\tau}\nu^2}\,\vartheta_2\left(\dfrac{\nu}{\tau}\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right), \\ \dfrac{1}{\sqrt{i}}\sqrt{\dfrac{2\omega_3}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u=e^{2\eta_1\omega_1\nu^2-\frac{i\pi}{\tau}\nu^2}\,\vartheta_3\left(\dfrac{\nu}{\tau}\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right), \\ \sqrt{i}\sqrt{\dfrac{2\omega_3}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u=e^{2\eta_1\omega_1\nu^2-\frac{i\pi}{\tau}\nu^2}\,\vartheta_0\left(\dfrac{\nu}{\tau}\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right). \end{cases}$$

Comparând aceste egalități cu egalitățile (9) (§ 233), deducem formulele de transformare:

$$(6)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(\dfrac{\nu}{\tau}\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right)=\dfrac{1}{i}\sqrt{-i\tau}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}\nu^2}\,\vartheta_1(\nu|\tau), \\ \vartheta_2\left(\dfrac{\nu}{\tau}\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right)=\sqrt{-i\tau}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}\nu^2}\,\vartheta_0(\nu|\tau), \\ \vartheta_3\left(\dfrac{\nu}{\tau}\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right)=\sqrt{-i\tau}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}\nu^2}\,\vartheta_3(\nu|\tau), \\ \vartheta_0\left(\dfrac{\nu}{\tau}\middle|-\dfrac{1}{\tau}\right)=\sqrt{-i\tau}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}\nu^2}\,\vartheta_2(\nu|\tau). \end{cases}$$

Semnul radicalului $\sqrt{-i\tau}$ este determinat de condițiunea ca partea sa reală să fie pozitivă, căci semnul acestui radical nu se schimbă fără ca partea reală a lui $(-i\tau)$ să-și schimbe semnul; prin urmare partea reală a lui $\sqrt{-i\tau}$ conservă totdeauna acelaș semn. Insă, pentru $\tau=i$ și $\nu=o$, avem $\vartheta_3(0|i)=\sqrt{1}\,\vartheta_3\,(0\,|\,i)$; de unde $\sqrt{1}=+1$.

240 Făcând $u=\nu=0$ în formulele (5), obținem expresiunile

$$(7)\quad \sqrt{\frac{2\omega_3}{i\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}=\vartheta_2\left(0\,\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=2\left(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+\dots\right),$$

$$(8)\quad \sqrt{\frac{2\omega_3}{i\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}=\vartheta_3\left(0\,\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=1+2q+2q^4+2q^9+\dots,\left(q=e^{-\frac{i\pi}{\tau}}\right)$$

$$(9)\quad i\sqrt{\frac{2\omega_3}{i\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}=\vartheta_0\left(0\,\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=1-2q+2q^4-2q^9+\dots$$

Adunând egalităţile (8) şi (9), avem

$$(10) \qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{i\pi}} = \frac{\vartheta_3\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right) + \vartheta_0\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right)}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + i\sqrt[4]{e_2-e_3}}.$$

Inlocuind în egalităţile (8) şi (10) $\omega_3\sqrt{e_1-e_3}$ prin $i\mathrm{K}'$ (§ 196), obţinem expresiunile

$$(11) \qquad \sqrt{\frac{2\mathrm{K}'}{\pi}} = \vartheta_3\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right) = 1+2q+2q^4+2q^9+\dots$$

$$(12) \qquad \sqrt{\frac{2\mathrm{K}'}{\pi}} = \frac{2}{1+\sqrt{k}}\,(1+2q^4+2q^{16}+\dots),$$

a căror formă este aceeaş ca a expresiunilor (12) şi (13) (§ 231), din cari ele se pot deduce înlocuind τ, k', K respectiv prin $-\frac{1}{\tau}$, k, K$'$.

241. Formulele de transformare ale funcţiunilor $\vartheta(\nu \mid \tau)$, considerate mai sus, se pot obţine fără a face uz de formulele generale (11) (§ 234) cari presupun, pentru radicalele $\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}$, un semn luat după voie, de care relaţiunile dintre funcţiunile ϑ sunt independente.

1°. Să considerăm substituţiunea S, care constă în transformarea

$$\tau' = \tau + 1,$$

căreia corespund valorile

$$q' = e^{i\pi(\tau+1)} = -q, \quad q'^{\frac{1}{4}} = \sqrt{i}\, q^{\frac{1}{4}} \quad \left(\sqrt{i} = e^{\frac{i\pi}{4}}\right).$$

Substituind aceste valori în seriile cari definesc funcţiunile $\vartheta(\nu)$ (1) (§ 225), obţinem imediat relaţiunile (2) (§ 239).

2°. Cazul substituţiunii T este mai puţin simplu; căci, în acest caz, relaţiunea dintre cantităţile

$$q' = e^{-\frac{i\pi}{\tau}} \text{ şi } q = e^{i\pi\tau}$$

nu este algebrică. Substituţiunea T permutând între ele cantităţile e_1 şi e_3 şi lăsând e_2 neschimbat, lasă funcţiunea $\sigma_2 u$ neschimbată şi permută între ele funcţiunile $\sigma_1 u$ şi $\sigma_3 u$. Pentru transformarea radicalelor, observăm că prin permutarea cantităţilor e_1 şi e_3, se permută între ele pătratele $(e_2-e_3)^2$, $(e_1-e_2)^2$, iar pătratul $(e_1-e_3)^2$

se reproduce; de unde rezultă că rădăcinile de ordinul al optelea ale acestor pătrate, adică radicalele

$$\sqrt[4]{e_2-e_3} \quad \sqrt[4]{e_1-e_3}, \quad \sqrt[4]{e_1-e_2}$$

sunt determinate abstracţiune făcând de un factor, rădăcina a opta a unităţii. Transformatele acestor radicale, precum şi a radicalului $\sqrt[8]{\Delta}$, se pot dar scrie

$$(1) \qquad \begin{gathered} \left(\sqrt[4]{e_2-e_3}\right)=\varepsilon_1 \sqrt[4]{e_1-e_2}, \quad \left(\sqrt[4]{e_3-e_1}\right)=\varepsilon_2 \sqrt[4]{e_1-e_3} \\ \left(\sqrt[4]{e_1-e_2}\right)=\varepsilon_3 \sqrt{e_2-e_3}, \quad \left(\sqrt[8]{\Delta}\right)=\varepsilon \sqrt[8]{\Delta}, \end{gathered}$$

numerele ε, ε_1, ε_2, ε_3 fiind rădăcini convenabile ale ecuaţiunii $\varepsilon^8=1$, între cari există relaţiunea $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$, în virtutea definiţiunii radicalului $\sqrt[8]{\Delta}$ (3, § 219). De unde rezultă egalităţile

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) &= \varepsilon \sqrt{\tau}\, e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_1(v|\tau), \\ \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) &= \varepsilon_1 \sqrt{\tau}\, e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_0(v|\tau), \\ \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) &= \varepsilon_2 \sqrt{\tau}\, e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_3(v|\tau), \\ \vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) &= \varepsilon_3 \sqrt{\tau}\, e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_2(v|\tau). \end{aligned}\right.$$

Aceste egalităţi subsistă oricare ar fi valoarea lui τ cu condiţiunea ca partea reală a lui $\frac{\tau}{i}$ să fie pozitivă [1]. Făcând $v=0$ şi $\tau=i$, cele trei din urmă egalităţi devin

$$(3) \qquad \begin{aligned} \vartheta_2(0|i) &= \varepsilon_1 \sqrt{i}\, \vartheta_0(0|i), \\ \vartheta_3(0|i) &= \varepsilon_2 \sqrt{i}\, \vartheta_3(0|i), \\ \vartheta_0(0|i) &= \varepsilon_3 \sqrt{i}\, \vartheta_2(0|i). \end{aligned}$$

In acest caz, avem valorile

$$q=e^{-\pi}, \quad q^{\frac{1}{4}}=e^{-\frac{\pi}{4}},$$

în virtutea cărora formulele (3) (§ 226) dau, pentru cantităţile

[1]) Această condiţiune este necesară pentru ca $|q|<1$ şi prin urmare pentru ca seriile $\vartheta(v|\tau)$ să fie convergente.

$\vartheta_0(0\,|\,i)$, $\vartheta_2(0\,|\,i)$, $\vartheta_3(0\,|\,i)$, valori reale şi pozitive; de unde rezultă valorile necesare

$$(4)\qquad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{i}}$$

şi prin urmare

$$(5)\qquad \varepsilon=\frac{1}{i\sqrt{i}}.$$

Ducând aceste valori în formulele (2), obţinem formulele de transformare (6) (§ 239).

242. ***Transformarea funcţiunilor*** $sn\,v$, $cn\,v$, $dn\,v$ ***prin substituţiuni lineare de perioade.*** Pe când funcţiunea eliptică $p(u;\, g_2, g_3)$ rămâne neschimbată când înlocuim perioadele iniţiale prin perioade echivalente, coeficienţii g_2 şi g_3 fiind invarianţi corespunzători acestor substituţiuni, nu este tot aşà cu funcţiunile $sn\,(v, k)$, $cn\,(v,k)$, $dn\,(v\,, k)$; căci, printr'o transformare lineară a perioadelor, modulul k, definit de ecuaţiunea

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},$$

primeşte, în genere şease valori diferite [1]). Vom considerà substituţiunile S şi T.

I. Substituţiunea

$$\text{S)}\qquad \tilde{\omega}_1=\omega_1,\ \tilde{\omega}_3=\omega_1+\omega_3$$

transformă expresiunile

$$v=\sqrt{e_1-e_3}\,u,\quad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},\quad k'^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}$$

în cele următoare

$$\bar{v}=\sqrt{e_1-e_2}\,u=k'v,\quad \bar{k}^2=\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}=-\frac{k^2}{k'^2};$$

de unde rezultă funcţiunile transformate:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} sn\left(k'v,-\frac{k^2}{k'^2}\right)&=\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma u}{\sigma_2 u}=k'\,\frac{sn\,(v,k)}{dn(v,k)},\\ cn\left(k'v,-\frac{k^2}{k'^2}\right)&=\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}=\frac{cn\,(v,k)}{dn\,(v,k)},\\ dn\left(k'v,-\frac{k^2}{k'^2}\right)&=\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}=\frac{1}{dn\,(v,k)}\end{aligned}\right.$$

---

[1]) Prin definiţiune, la o valoare a lui k^2 corespunde o valoare unică pentru k (§ 196, 22).

Sau, înlocuind $k'v$ prin v, avem

$$(2)\qquad \begin{cases} sn\left(v, -\dfrac{k^2}{k'^2}\right) = k' \dfrac{sn\left(\dfrac{v}{k'}, k\right)}{dn\left(\dfrac{v}{k'}, k\right)}, \\[2ex] cn\left(v, -\dfrac{k^2}{k'^2}\right) = \dfrac{cn\left(\dfrac{v}{k'}, k\right)}{dn\left(\dfrac{v}{k'}, k\right)}, \\[2ex] dn\left(v, -\dfrac{k^2}{k'^2}\right) = \dfrac{1}{dn\left(\dfrac{v}{k'}, k\right)}. \end{cases}$$

II. Substituțiunea

$$\text{T)}\qquad \tilde{\omega}_1 = \omega_3, \quad \tilde{\omega}_3 = -\omega_1$$

ne dă valorile transformate

$$\bar{v} = \sqrt{e_3 - e_1}\, u = -i\sqrt{e_1 - e_3}\, u = -iv, \quad \bar{k}^2 = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1} = k'^2;$$

de unde rezultă

$$(3)\qquad \begin{cases} sn(iv, k') = i\dfrac{sn(v, k)}{cn(v, k)}, \\[2ex] cn(iv, k') = \dfrac{1}{cn(v, k)}, \\[2ex] dn(iv, k') = \dfrac{dn(v, k)}{cn(v, k)}. \end{cases}$$

Sau înlocuind, iv prin v, avem expresiunile transformate ale celor trei funcțiuni, când înlocuim modulul k prin modulul complementar k':

$$(4)\qquad \begin{cases} sn(v, k') = -i\dfrac{sn(iv, k)}{cn(iv, k)}, \\[2ex] cn(v, k') = \dfrac{1}{cn(iv, k)}, \\[2ex] dn(v, k') = \dfrac{dn(iv, k)}{cn(iv, k)}. \end{cases}$$

Permutând între ele modulele k și k', avem formulele

$$(5) \quad \begin{cases} sn(v,k) = -i\,\dfrac{sn(iv,k')}{cn(iv,k')}, \\ cn(v,k) = \dfrac{1}{cn(iv,k')}, \\ dn(v,k) = \dfrac{dn(iv,k')}{cn(iv,k')}. \end{cases}$$

Inlocuind în aceste formule v prin iv, avem

$$(6) \quad \begin{cases} sn(iv,k) = i\,\dfrac{sn(v,k')}{cn(v,k')}, \\ cn(iv,k) = \dfrac{1}{cn(v,k')}, \\ dn(iv,k) = \dfrac{dn(v,k')}{cn(v,k')}. \end{cases}$$

243. *Observare asupra diferitelor notațiuni ale funcțiunilor ϑ și ale funcțiunilor sn, cn, dn.* Notațiunile adoptate mai sus pentru funcțiunile ϑ sunt acelea ale lui Weierstrass, [1]) cu deosebirea că litera h este înlocuită prin litera q, după Jacobi. Jacobi [2]) pune

$$(1) \quad \begin{cases} \vartheta(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2nix} = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots, \\ \vartheta_1(x) = -\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} i^{2n+1} q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} e^{(2n+1)ix} = 2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\ldots \\ \vartheta_2(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} e^{(2n+1)ix} = 2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\ldots \\ \vartheta_3(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2nix} = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots \end{cases}$$

Așà dar se trece dela notațiunea lui Jacobi la aceea a lui Weierstrass scriind $\vartheta_a\left(\frac{x}{\pi}\right)$ în loc de $\vartheta_a(x)$, $a = 1, 2, 3$, iar indicele zero se suprimă. Avem astfel relațiunile

$$\Big[\vartheta(x)\Big]_J = \left[\vartheta_0\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]_W \quad ; \quad \Big[\vartheta_a(x)\Big]_J = \left[\vartheta_a\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]_W,$$

sau

$$a = 1, 2, 3.$$

$$\Big[\vartheta_0(x)\Big]_W = \Big[\vartheta(\pi x)\Big]_J \quad ; \quad \Big[\vartheta_a(x)\Big]_W = \Big[\vartheta_a(\pi x)\Big]_J,$$

[1]) H. A. Schwarz. *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen*, anul 1885. In *Vorlesungen über die Th. der ell. Funktionen*, Band V, notațiunile $\vartheta_1\ \vartheta_2\ \vartheta_3\ \vartheta_0$ sunt înlocuite resp. prin $\vartheta_0\ \vartheta_1\ \vartheta_2\ \vartheta_3$.

[2]) *Gesammelte Werke*, Erster Band, pag. 501.

indicii W J, reprezintând respectiv notațiunea lui Jacobi și a lui Weierstrass.

In «*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*» Jacobi adoptase notațiunile H și Θ, variabila independentă fiind integrala normală a lui Legendre, aceeaș ca în funcțiunile *snv, cnv, dnv*. Intre aceste funcțiuni și funcțiunile ϑ — notațiunea lui Weierstrass — există relațiunile următoare:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &H(v) = \vartheta_1\left(\frac{v}{2K}\right) = \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right), \\ &\Theta(v) = \vartheta_0\left(\frac{v}{2K}\right) = \vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega_1}\right), \qquad v = u\sqrt{e_1-e_3}, \\ &H_1(v) = \vartheta_2\left(\frac{v}{2K}\right) = \vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right), \qquad K = \omega_1\sqrt{e_1-e_3}. \\ &\Theta_1(v) = \vartheta_3\left(\frac{v}{2K}\right) = \vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega_1}\right). \end{aligned}\right.$$

Cu ajutorul acestor relațiuni avem așa dar

$$(3)\quad snv = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(v)}{\Theta(v)}, \quad cnv = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{H_1(v)}{\Theta(v)}, \quad dnv = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(v)}{\Theta(v)}.$$

Formulele după cari se transformă funcțiunile H și Θ când mărim argumentul v cu 2K, $2iK'$, K, iK' corespund formulelor (1—6) (§ 228, 229) în cari v se mărește respectiv cu $1, \tau, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}$ și se pot deduce imediat din acelea. Nu le transcriem aci.

244. Să menționăm notațiunea lui Hermite.

K și K' fiind, nu ca în notațiunea lui Jacobi dependente între ele, ci două constante oarecari, supuse la singura condițiune ca partea reală a raportului $\frac{K'}{K}$ să fie pozitivă, se pune

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &H(u) = 2\sum_0^\infty(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin\frac{(2n+1)\pi u}{2K}, \\ &\Theta(u) = 1 + 2\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{n\pi u}{K}, \\ &H_1(u) = 2\sum_0^\infty q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi u}{2K}, \\ &\Theta_1(u) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos\frac{n\pi u}{K}. \end{aligned}\right.$$

Constantele K şi K′ fiind arbitrare, putem identifică K cu ω_1 şi iK' cu ω_3; avem astfel relaţiunile

$$(5)\qquad \begin{aligned} H(u) &= \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right), & \Theta(u) &= \vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega_1}\right), \\ H_1(u) &= \vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right), & \Theta_1(u) &= \vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega_1}\right). \end{aligned}$$

Cu ajutorul acestor funcţiuni, Hermite scrie

$$(6)\qquad sn\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)},\quad cnu = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)},\quad dnu = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}\ ^{1)}$$

Comparând aceste formule cu formulele (21 § 238) şi ţinând seamă că între constanta K a lui Jacobi din acele formule şi ω_1 există relaţiunea $K = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3}$, rezultă că între funcţiunile $sn\nu$, $cn\nu$, $dn\nu$ ale lui Jacobi şi cele ale lui Hermite există relaţiunile

$$(7)\quad [snu]_H = [sn(u\sqrt{e_1 - e_3})]_J,\ [cnu]_H = [cn(u\sqrt{e_1 - e_3})]_J,\ [dnu]_H = [dn(u\sqrt{e_1 - e_3})]_J$$

De unde rezultă că cu notaţiunea lui Hermite avem valoarea

$$(8)\qquad \left(\frac{dsnu}{du}\right)_0 = \sqrt{e_1 - e_3},$$

pe care Hermite o reprezintă prin ω. Punând $x = snu$, ecuaţiunea diferenţială a acestei funcţiuni este

$$(9)\qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \omega^2(1 - x^2)(1 - k^2x^2);$$

ω se numeşte *multiplicatorul* funcţiunii $x = snu$. Această funcţiune dar, ca şi funcţiunea pu a lui Weierstrass, depinde de două parametre, modulul k şi multiplicatorul ω. Constantele K şi iK' în această notaţiune sunt date de egalităţile

$$(10)\qquad K = \frac{1}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad iK' = \frac{1}{\omega}\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

---

1) Constanta

$$q = e^{i\pi\frac{\omega_3}{\omega_1}} = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

are aceeaş semnificare în toate notaţiunile, prin urmare şi constantele $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ au pretutindeni acelaş sens, căci seriile (10) şi (11) (§ 231), cu cari ele se exprimă sunt aceleaşi.

CAPITOLUL XIX.

FUNCŢIUNI ELIPTICE DE SPEŢA A DOUA ŞI DE SPEŢA A TREIA.

I. FUNCŢIUNI ELIPTICE DE SPEŢA A DOUA.

245. După *Hermite* se numeşte *funcţiune eliptică de speţa a doua* o funcţiune uniformă în tot planul, neavând la distanţă finită alte singularităţi decât poluri şi care se reproduce multiplicată cu un factor constant, când mărim argumentul cu una sau cealaltă perioadă $2\omega_1$, $2\omega_3$. O asemenea funcţiune satisface aşà dar două ecuaţiuni funcţionale independente, de forma

$$(1) \qquad \begin{cases} f(u+2\omega_1)=\mu_1 f(u), \\ f(u+2\omega_3)=\mu_3 f(u), \end{cases}$$

în cari μ_1 şi μ_3 sunt două constante numite *multiplicatorii* funcţiunii date. Dacă ambii multiplicatori sunt egali cu 1, $f(u)$ este o funcţiune eliptică ordinară, căreia i se zice, uneori, funcţiune eliptică de speţa I. Prin cuvântul de funcţiune eliptică, fără epitet se va înţelege cea de speţa I.

Câtul a două funcţiuni eliptice de speţa a doua *cu aceiaşi multiplicatori* este evident o funcţiune eliptică de speţa I.

246. Din egalităţile (1) rezultă că dacă un punct $u=u_0$ este un zero sau un pol al funcţiunii $f(u)$, punctele congruente $u=u_0+2m\omega_1+2n\omega_3$ vor fi respectiv zeruri sau poluri, ale funcţiunii de acelaş ordin ca punctul u_0.

Dacă reprezintăm prin A reziduul lui $f(u)$ relativ la polul u_0, reziduul corespunzător punctului $u_0+2m\omega_1+2n\omega_3$ va fi

$$\mu_1^m \mu_3^n \mathrm{A}.$$

Aceasta rezultă din ecuaţiunea

$$f(u+2m\omega_1+2n\omega_3)=\mu_1^m \mu_3^n f(u),$$

care este o consecinţă a ecuaţiunilor (1).

247. *Exemplu.* Funcţiunea

$$(2) \qquad \varphi(u)=e^{\lambda u}\frac{\sigma(u-\nu)}{\sigma u},$$

în care λ şi ν sunt constante arbitrare, este o funcţiune eliptică de speţa a doua; căci, în virtutea formulelor (3) (§ 156), avem

$$\varphi(u+2\omega_1)=e^{2\lambda\omega_1-2\eta_1\nu}\varphi(u),$$

$$\varphi(u+2\omega_3)=e^{2\lambda\omega_3-2\eta_3\nu}\varphi(u).$$

Multiplicatorii funcţiunii sunt aşà dar

$$(2)\qquad \mu_1=e^{2\lambda\omega_1-2\eta_1\nu},\qquad \mu_3=e^{2\lambda\omega_3-2\eta_3\nu}.$$

Putem dispune de constantele λ şi ν astfel ca multiplicatorii să aibă valori date după voie. In adevăr, din (3) rezultă egalităţile

$$2\lambda\omega_1-2\eta_1\nu=\log\mu_1,\qquad 2\lambda\omega_3-2\eta_3\nu=\log\mu_3,$$

din cari, ţinând seamă de formula lui Legendre $\eta_1\omega_3-\omega_1\eta_3=i\frac{\pi}{2}$, scoatem valorile

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{i\pi}\left[\eta_1\log\mu_3-\eta_3\log\mu_1\right], \\ \nu=\dfrac{1}{i\pi}\left[\omega_1\log\mu_3-\omega_3\log\mu_1\right]; \end{cases}$$

logaritmii având determinaţiuni oarecari, însă respectiv aceleaşi în ambele egalităţi.

O funcţiune exponenţială $\varphi(u)=e^{\lambda u}$, al cărui exponent este o funcţiune lineară de u, poate fi considerată ca o funcţiune eliptică de speţa II, cu multiplicatorii $\mu_1=e^{2\lambda\omega_1}$, $\mu_3=e^{2\lambda\omega_3}$.

248. Câtul a două funcţiuni eliptice de speţa a doua cu aceiaşi multiplicatori fiind o funcţiune eliptică ordinară, rezultă, din cele ce preced, că o funcţiune $f(u)$ de speţa II intră într'unul din tipurile următoare:

$$(6)\qquad f(u)=e^{\lambda u}\,\mathrm{F}(u),$$

sau

$$(7)\qquad f(u)=e^{\lambda u}\,\frac{\sigma(u-\nu)}{\sigma u}\,\mathrm{F}(u),$$

$\mathrm{F}(u)$ fiind o funcţiune eliptică. Din aceste expresiuni rezultă că o funcţiune eliptică de speţa II are în paralelogramul perioadelor atâtea poluri câte zeruri, fiecare pol şi fiecare zero fiind socotit de atâtea ori câte unităţi sunt în ordinul său de multiplicitate.

249. Multiplicând o funcţiune $f(u)$ de speţa II cu exponenţiala e^{cu} şi dând lui c o valoare convenabilă, putem face ca unul din multiplicatori să fie egal cu 1. In adevăr, μ_1 şi μ_3 fiind multiplicatorii lui $f(u)$ multiplicatorii produsului $e^{cu}f(u)$ vor fi

$$\mu_1 e^{2c\omega_1},\qquad \mu_3 e^{2c\omega_3}.$$

Pentru ca primul din aceşti multiplicatori să fie egal cu 1, este de ajuns să luăm $c=-\frac{1}{2\omega_1}\log\mu_1$, oricare ar fi determinaţiunea logaritmului. Făcând, în egalităţile (4), $\mu_1=1$, avem

$$(11) \qquad \nu=\frac{\omega_1}{i\pi}\log\mu_3, \quad \lambda=\frac{\eta_1}{i\pi}\log\mu_3=\frac{\eta_1\nu}{\omega_1}.$$

In cazul particular $\mu_1^n=\mu_3^n=1$, n fiind un număr întreg, puterea a n^a-a funcţiunii, $[f(u)]^n$, este o funcţiune eliptică ordinară. Punând

$$\mu_1=e^{-2\frac{k_1 i\pi}{n}}, \qquad \mu_3=e^{2\frac{k_3 i\pi}{n}},$$

k_1 şi k_3 fiind numere întregi, egalităţile (4) dau

$$\lambda=\frac{2}{n}(k_3\eta_1+k_1\eta_3), \qquad \nu=\frac{2}{n}(k_3\omega_1+k_1\omega_3).$$

De ex., câturile $\frac{\sigma_a u}{\sigma_\beta u}$ au multiplicatorii $\frac{\mu_1}{\mu_3}=\Big\{\pm1$; de unde rezultă că pătratele acestor câturi sunt funcţiuni eliptice.

II. FUNCŢIUNI ELIPTICE DE SPEŢA A TREIA.

250. Se dă, după Hermite, numele de funcţiuni eliptice de speţa III, funcţiunilor $f(u)$ uniforme, cari n'au la distanţă finită alte singularităţi decât poluri şi cari satisfac două ecuaţiuni funcţionale de forma

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(u+2\omega_1)&=e^{a_1u+b_1}f(u),\\ f(u+2\omega_3)&=e^{a_3u+b_3}f(u), \end{aligned}$$

a_1, b_1, a_3, b_3 fiind constante. Funcţiunile exponenţiale $e^{a_1u+b_1}$ şi $e^{a_3u+b_3}$ se numesc *multiplicatorii* funcţiunii corespunzători perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$. In această categorie de funcţiuni intră funcţiunile σu, $\sigma_a u$ precum şi inversele lor $\frac{1}{\sigma u}$, $\frac{1}{\sigma_a u}$.

Din ecuaţiunile (1) rezultă consecinţele următoare:

1°. Dacă un punct u_0 este un zero sau un pol al funcţiunii $f(u)$, toate punctele congruente sunt zeruri sau poluri respectiv de acelaş ordin.

2°. Câtul a două funcţiuni de speţa III cu aceleaşi perioade şi aceiaşi multiplicatori este o funcţiune eliptică.

3°. Câtul sau produsul a două funcţiuni de speţa III, cu aceleaşi perioade, este o funcţiune de aceeaş speţă ai cărei multiplicatori sunt respectiv câtul sau produsul multiplicatorilor celor două funcţiuni.

4°. Fie c o constantă arbitrară şi

$$\varphi(u)=f(u+c);$$

ecuaţiunile (1) dau

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(u+2\omega_1) = e^{a_1 u + (b_1 + a_1 c)} \varphi(u), \\ \varphi(u+2\omega_3) = e^{a_3 u + (b_3 + a_3 c)} \varphi(u). \end{cases}$$

251. Luând derivata logaritmică a ecuaţiunilor (1), avem relaţiunile

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{f'(u+2\omega_1)}{f(u+2\omega_1)} &= \frac{f'(u)}{f(u)} + a_1, \\ \frac{f'(u+2\omega_3)}{f(u+2\omega_3)} &= \frac{f'(u)}{f(u)} + a_3, \end{aligned}$$

analoage cu cele relative la funcţiunea $\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$:

$$\zeta(u+2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1, \quad \zeta(u+2\omega_3) = \zeta u + 2\eta_3.$$

Ecuaţiunile (3) arată că derivata

$$\frac{d}{du} \frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{d^2}{du^2} \log f(u)$$

este o funcţiune eliptică cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Ca şi cantităţile η_1, η_3, cantităţile a_1, a_3 nu sunt independente între ele. Pentru a găsi relaţiunea ce există între a_1 şi a_3 să mărim u în prima ecuaţiune (1) cu $2\omega_3$ şi în a doua cu $2\omega_1$. Membrele dintâi fiind egale, de oarece funcţiunea $f(u)$ este uniformă, rezultă condiţiunea

$$(4) \qquad a_1\omega_3 - a_3\omega_1 = mi\pi,$$

m fiind un număr întreg pozitiv, negativ sau nul. *Acest număr este egal cu diferenţa dintre numărul zerurilor şi numărul polurilor funcţiunii $f(u)$ cuprinse în paralelogramul* $(2\omega_1, 2\omega_3)$. In adevăr fie δ această diferenţă; avem

$$2i\pi\delta = \int \frac{f'(u)}{f(u)} du,$$

integrala fiind luată dealungul paralelogramului în sensul pozitiv [1]). Ţinând seamă de relaţiunile (3), găsim (fig. 49, § 154)

$$(AB)+(CD) = \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} \frac{f'(u)}{f(u)} du - \int_{u_0+2\omega_3}^{u_0+2\omega_1+2\omega_3} \frac{f'(u)}{f(u)} du = -a_3 \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} du = -2a_3\omega_1,$$

$$(BC)+(DA) = \int_{u_0+2\omega_1}^{u_0+2\omega_1+2\omega_3} \frac{f'(u)}{f(u)} du - \int_{u_0}^{u_0+2\omega_3} \frac{f'(u)}{f(u)} du = a_1 \int_{u_0}^{u_0+2\omega_3} du = 2a_1\omega_3.$$

---

[1]) Condiţiunea $R\,\frac{\omega_3}{i\omega_1} > o$ este presupusă totdeauna împlinită.

Avem aşà dar relaţiunea

(5) $$a_1\omega_3 - a_3\omega_1 = i\pi\delta;$$

prin urmare $m=\delta$.

Acest număr se numeşte *ordinul* funcţiunii; el poate fi pozitiv, negativ sau nul, după cum numărul zerurilor este mai mare, mai mic sau egal cu numărul polurilor. Proprietatea ca numărul zerurilor să fie egal cu numărul polurilor, care aparţine funcţiunilor de speţa I şi II, nu aparţine tuturor funcţiunilor de speţa a treia.

Dacă funcţiunea eliptică de speţa III este o funcţiune întreagă — proprietate imposibilă pentru funcţiunile eliptice ordinare, iar pentru cele de speţa II aparţinând numai tipului e^{au+b} — numărul $m=\frac{1}{i\pi}(a_1\omega_3-a_3\omega_1)$ reprezintă numărul zerurilor funcţiunii situate în paralelogramul perioadelor. Acest număr poate fi nul. De ex., funcţiunea

(6) $$e^{au^2+bu+c}$$

a, b, c fiind cantităţi constante, este o funcţiune eliptică de speţa III de ordinul zero.

Orice funcţiune eliptică $f(u)$ de speţa III, întreagă şi de ordinul zero, intră în tipul precedent. In adevăr, $f(u)$ fiind o funcţiune întreagă şi neavând niciun zero este de forma

$$f(u)=e^{G(u)},$$

$G(u)$ fiind o funcţiune întreagă. Insă expresiunea

$$\frac{d^2}{du^2}\log f(u) = G''(u),$$

fiind o funcţiune eliptică întreagă, se reduce la o constantă; de unde rezultă că $f(u)$ este de forma (6).

252. Fie $f(u)$ o funcţiune eliptică de speţa III; produsul

(7) $$\varphi(u) = e^{\alpha u^2+\beta u} f(u)$$

este o funcţiune de aceeaş speţă, având aceleaşi zeruri şi aceleaşi poluri. Putem dispune de constantele α, β, astfel ca multiplicatorul lui $\varphi(u)$ corespunzător perioadei $2\omega_1$ să fie $e^{a_1u+b_1}$, a_1 şi b_1 fiind constante date. Luând $a_1=b_1=0$, multiplicatorul corespunzător al lui $\varphi(u)$ va fi egal cu 1. Se zice că o funcţiune de speţa III este *redusă*, dacă multiplicatorul considerat este egal cu 1.

Ecuaţiunea (7) scrisă sub forma

$$f(u) = e^{-\alpha u^2-\beta u}\varphi(u),$$

în care presupunem $\varphi(u)$ *redusă*, arată că orice funcţiune eliptică de speţa III se poate exprimà printr'o funcţiune redusă, multiplicată cu o exponenţială de forma e^{au^2+bu}.

Făcând $a_1 = o$ în formula (4), obţinem

$$a_3 = -\frac{mi\pi}{\omega_1}. \tag{8}$$

Ecuaţiunile funcţionale (1) corespunzătoare unei funcţiuni reduse sunt dar de forma, scriind $- i\pi b_3$ în loc de b_3,

$$\left\{\begin{aligned} & f(u+2\omega_1)=f(u), \\ & f(u+2\omega_3)=e^{-i\pi\left(\frac{mu}{\omega_1}+b_3\right)}f(u). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

253. *Diferenţa între suma zerurilor şi suma polurilor.* Vom presupune funcţiunea $f(u)$ *redusă*, adică satisfăcând ecuaţiunile (9). Reprezintând prin d diferenţa dintre suma zerurilor şi suma polurilor, avem (fig. 49, § 154).

$$2i\pi d=\int_{ABCD} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du. \tag{10}$$

Ţinând seamă de relaţiunile (3) în cari facem $a_1 = o$, avem

$$(AB)+(CD)=\int_{u_0}^{u_0+2\omega_1}\left[u\,\frac{f'(u)}{f(u)}-(u+2\omega_3)\,\frac{f'(u+2\omega_3)}{f(u+2\omega_3)}\right]du$$

$$=\int_{u_0}^{u_0+2\omega_1}\left[u\,\frac{f'(u)}{f(u)}-(u+2\omega_3)\left(\frac{f'(u)}{f(u)}+a_3\right)\right]du$$

$$=-2\omega_3 log\,\frac{f(u_0+2\omega_1)}{f(u_0)}-2a_3\omega_1(u_0+\omega_1+2\omega_3).$$

Funcţiunea $f(u)$ fiind redusă, avem $f(u_0+2\omega_1)=f(u_0)$; deci

$$(AB)+(CD)=4ki\pi\omega_3-2a_3\omega_1(u_0+\omega_1+2\omega_3).$$

De asemenea găsim

$$(BC)+(DA)=\int_{u_0}^{u_0+2\omega_3}\left[-u\,\frac{f'(u)}{f(u)}+(u+2\omega_1)\,\frac{f'(u+2\omega_1)}{f(u+2\omega_1)}\right]du$$

$$=2\omega_1 log\,\frac{f(u_0+2\omega_3)}{f(u_0)}=2\omega_1(a_3u_0-i\pi b_1+2k'i\pi).$$

Prin urmare

$$\int_{ABCD} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=4i\pi(k'\omega_1+k\omega_3)-2a_3\omega_1(\omega_1+2\omega_3)-2i\pi b_3\omega_1,$$

k și k' fiind numere întregi. Inlocuind a_3 prin valoarea sa (8), formula (10) devine

(11) $$d=(m-b_3)\omega_1, \quad (mod\delta 2\omega_1, 2\omega_3).$$

254. *Funcțiuni eliptice de speța III întregi.* Fie $f(u)$ o funcțiune eliptică de speța III întreagă, de ordinul m, satisfăcând ecuațiunile (9) și fie $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zerurile funcțiunii cuprinse în paralelogramul perioadelor; vom aveà (formula (11)):

(12) $$\sum_1^m a_k \equiv (m-b_3)\omega_1.$$

De unde rezultă că dacă $m-1$ zeruri $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ sunt date, cel din urmă a_m este determinat, abstracțiune făcând de un multiplu de perioade. Prin urmare două funcțiuni întregi $f(u)$, $f_1(u)$ satisfăcând aceleași ecuațiuni (9), dacă au $m-1$ zeruri comune vor aveà comun și pe cel din urmă. Aceste funcțiuni nu pot diferì între ele decât printr'un factor constant, căci raportul lor este o funcțiune eliptică ordinară, de ordinul zero.

Inlocuind argumentul u prin $u+C$, C fiind o constantă arbitrară, zerurile funcțiunii $f(u+C)$ vor fi $a'_k = a_k - C$, a căror sumă va satisface congruența

(13) $$\sum_1^m a'_k = \sum_1^m a_k - mC \equiv (m-b_3)\omega_1 - mC.$$

Putem dar dispune de constanta C astfel ca suma zerurilor funcțiunii $f(u+C)$ să aibă o valoare dată după voie. Aceeaș proprietate aparține funcțiunii $e^{au} f(u+C)$, a fiind o constantă arbitrară.

255. Funcțiunea $f(u)$ fiind cea considerată mai sus, să punem

(14) $$T(u)=e^{-g_1 i\pi\frac{u}{2\omega_1}} f(u+\omega_3),$$

g_1 fiind un număr real oarecare. Inlocuind u succesiv prin $u+2\omega_1$, $u+2\omega_3$, avem, în virtutea formulelor (9), ecuațiunile funcționale

(15) $$\begin{cases} T(u+2\omega_1)=e^{-g_1 i\pi}T(u), \\ T(u+2\omega_3)=e^{-i'\pi\left(g_1\frac{\omega_3}{\omega_1}+b_3\right)} e^{\frac{-mi\pi}{\omega_1}(u+\omega_3)} T(u). \end{cases}$$

Să punem

(16) $$g_1\frac{\omega_3}{\omega_1}+b_3=g_3.$$

Se recunoaşte lesne că oricare ar fi valoarea parametrului b_3, există un sistem unic de valori reale pentru coeficienţii g_1 şi g_3 [1]. Funcţiunea $T(u)$ satisface dar ecuaţiunile

$$(17)\quad \begin{cases} T(u+2\omega_1)=e^{-g_1 i\pi}T(u), \\ T(u+2\omega_3)=e^{-g_3 i\pi}e^{-\frac{mi\pi}{\omega_1}(u+\omega_3)}T(u). \end{cases}$$

Numerele g_1, g_3 se numesc *caracteristicele* funcţiunii $T(u)$; se notează $T_{g_1, g_3}(u)$, punând caracteristicele în evidenţă. Relaţiunile (17) rămân neschimbate dacă mărim caracteristicele cu numere pare. Suma zerurilor funcţiunii $T(u)$, cuprinse într'un paralelogram de perioade, rezultă din congruenţa (13) în care facem $C=\omega_3$. Această sumă, abstracţiune făcând de multiplii de perioade, este aşà dar

$$S=m(\omega_1+\omega_3)-b_3\omega_1,$$

sau, în virtutea egalităţii (16)

$$(18)\qquad S=m(\omega_1+\omega_3)+g_1\omega_3-g_3\omega_1.$$

256. Să facem substituţiunile

$$(19)\qquad \frac{u}{2\omega_1}=v,\quad \frac{\omega_3}{\omega_1}=\tau,\quad e^{i\pi\tau}=q$$

şi să punem

$$(20)\qquad \Theta_{g_1,g_3}(v)=T_{g_1,g_3}(u).$$

Introducem astfel o clasă de funcţiuni întregi numite funcţiunile lui Jacobi, cari satisfac ecuaţiunile funcţionale

$$(21.\quad \begin{cases} \Theta_{g_1,g_3}(v+1)=e^{-g_1 i\pi}\,\Theta_{g_1 g_3}(v) \\ \Theta_{g_1,g_3}(v+\tau)=q^{-m}\,e^{-g_3 i\pi}\,e^{-2mi\pi v}\,\Theta_{g_1,g_3}(v). \end{cases}$$

Paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ din planul (u) se transformă, în virtutea relaţiunilor (19), în paralelogramul $(1, \tau)$ din planul (v). Suma zerurilor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ale funcţiunii $\Theta_{g_1, g_3}(v)$, cuprinse, în acest paralelogram, satisface, în virtutea formulei (18),[2] congruenţa

$$(22)\qquad \Sigma a_k \equiv \frac{m}{2}(1+\tau)+\frac{1}{2}(g_1\tau-g_3)\quad (mo\partial\partial\ 1, \tau).$$

---

[1] Punând $\frac{\omega_3}{\omega_1}=a+i\beta$, $\beta\neq o$ şi $b_3=a+ib$, avem $g_1(a+i\beta)+a+ib=g_3$; de unde ecuaţiunile

$$\beta g_1+b=o,\quad ag_1+a=g_3,$$

cari determină valorile reale g_1, g_3.

[2] In care se împarte membrul al doila cu $2\,\omega_1$.

Să considerăm în particular funcţiunea $\Theta_{g_1, g_2}(\nu)$ de ordinul m ale cărei caracteristice sunt nule şi să scrim $\Theta(\nu)$ în loc de $\Theta_{0,0}(\nu)$. Relaţiunile (21) corespunzătoare acestei funcţiuni vor fi

$$(23) \qquad \begin{aligned} &\Theta(\nu+1) = \Theta(\nu), \\ &\Theta(\nu+\tau) = q^{-m}\, e^{-2mi\pi\nu}\, \Theta(\nu). \end{aligned}$$

Orice altă funcţiune întreagă satisfăcând aceste relaţiuni şi având $m-1$ zeruri comune cu $\Theta(\nu)$ este de forma $A\Theta(\nu)$, A fiind o constantă arbitrară (§ 254). De unde rezultă că funcţiunea cea mai generală $\Theta(\nu)$ de ordinul m depinde de m constante arbitrare; căci putem luà după voie $m-1$ zeruri ale sale şi coeficientul constant A.

257. Teoremă (Hermite). *Funcţiunea $\Theta(\nu)$ cea mai generală care satisface ecuaţiunile (23) se poate exprimà în funcţiune lineară şi omogenă prin m funcţiuni $\Theta_a(\nu)$ speciale, satisfăcând aceleaşi ecuaţiuni, ($a = 0, 1, 2, \ldots, m-1$).*

Funcţiunea $\Theta(\nu)$ fiind o funcţiune întreagă, periodică cu perioada 1, se poate desvoltà în seria Fourier

$$(24) \qquad \Theta(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\, e^{2ni\pi\nu},$$

valabilă în tot planul (ν). Inlocuind ν prin $\nu+\tau$, avem

$$\Theta(\nu+\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\, q^{2n}\, e^{2ni\pi\nu};$$

prin urmare, în virtutea celei de a doua ecuaţiuni (23),

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\, q^{2n}\, e^{2ni\pi\nu} = q^{-m} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\, e^{2(n-m)i\pi\nu},$$

sau, înlocuind în membrul al doilea n prin $n+m$, ceeace nu schimbă valoarea acestei serii,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\, q^{2n} e^{2ni\pi\nu} = q^{-m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{n+m}\, e^{2ni\pi\nu}.$$

De unde formula recurentă

$$(25) \qquad A_{n+m} = A_n\, q^{2n+m},$$

care arată că numai m din coeficienţii A_n pot fi luaţi după voie. Se obţine o relaţiune mai simplă dacă punem

$$(26) \qquad A_n = B_n\, q^{\frac{n^2}{m}}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Formula (25) devine

$$(27) \qquad B_{n+m} = B_n\,.$$

Din această formulă rezultă egalităţile următoare

$$(28)\quad B_{km}=B_0,\ B_{km+1}=B_1,\ldots,\ B_{km+h}=B_h,\ldots,\ B_{km+m-1}=B_{m-1},$$

în cari k primeşte toate valorile întregi dela $-\infty$ $+\infty$. Seria (24) se poate dar scrie, reunind termenii cu acelaş coeficient B,

$$(29)\quad \Theta(\nu)=B_0\,\Theta_0(\nu)+B_1\,\Theta_1(\nu)+\ldots+B_h\Theta_h(\nu)+\ldots+B_{m-1}\Theta_{m-1}(\nu),$$

punând

$$(30)\quad \Theta_h(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(km+h)2}{m}}\, e^{2(km+h)i\pi\nu},\quad (h=0,1,\ldots,m-1).$$

Fiecare din funcţiunile $\Theta_h(\nu)$ satisface ecuaţiunile (23), căci anulând toţi coeficienţii B afară de B_h, avem $\Theta(\nu)=B_h\,\Theta_h(\nu)$.

Cele m funcţiuni sunt lineare independente între dânsele, adică nu există între ele o relaţiune lineară, omogenă cu coeficienţi constanţi nu toţi nuli; căci punând $e^{2i\pi\nu}=z$, seriile corespunzătoare nu conţin aceleaşi puteri ale lui z.

258. *Teoremă. Intre $m+1$ funcţiuni de ordinul m*

$$\Theta_1(\nu),\ \Theta_2(\nu),\ldots,\ \Theta_{m+1}(\nu)$$

având aceleaşi caracteristice există o relaţiune lineară, omogenă cu coeficienţi constanţi nu toţi nuli (Hermite).

Pentru a demonstrà această teoremă, să formăm expresiunea

$$(31)\quad f(\nu)=A_1\Theta_1(\nu)+A_2\Theta_2(\nu)+\ldots+A_m\Theta_m(\nu),$$

coeficienţii $A_1\ldots,A_m$ fiind constante arbitrare.

Funcţiunea $f(\nu)$ satisface ecuaţiunile (21); să presupunem că ea nu este identic nulă. Exprimând că această funcţiune se anulează în $m-1$ puncte $a_1, a_2,\ldots, a_{m-1}$, cari sunt zeruri ale funcţiunii $\Theta_{m+1}(\nu)$, obţinem sistemul de $m-1$ ecuaţiuni lineare, omogene cu m necunoscute

$$(32)\quad \begin{cases} A_1\,\Theta_1(a_1)+A_2\,\Theta_2(a_1)+\ldots+A_m\,\Theta_m(a_1)=0,\\ A_1\,\Theta_1(a_2)+A_2\,\Theta_2(a_2)+\ldots+A_m\,\Theta_m(a_2)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ A_1\,\Theta_1(a_{m-1})+A_2\,\Theta_2(a_{m-1})+\ldots+A_m\,\Theta_m(a_{m-1})=0, \end{cases}$$

cari determină raporturile necunoscutelor $A_1, A_2,\ldots, A_m$ către una din ele. Printre zerurile funcţiunii $\Theta_{m+1}(\nu)$ pot fi mai multe egale; unui zero multiplu de ordinul k vor corespunde k ecuaţiuni lineare între coeficienţii A, obţinute, anulând funcţiunea $f(\nu)$ şi cele dintâi $k-1$ derivate; numărul total al ecuaţiunilor este acelaş. Funcţiunea $f(\nu)$ astfel determinată având $m-1$ zeruri comune cu funcţiunea $\Theta_{m+1}(\nu)$ şi satisfăcând ecuaţiunile (21), este de forma

$f(v) = -A_{m+1}\,\Theta_{m+1}(v)$, A_{m+1} fiind o constantă. Avem aşàdar relaţiunea

$$\sum_{1}^{m+1} A_k\,\Theta_k\,(v) = 0. \tag{33}$$

Acest rezultat este independent de ipoteza că funcţiunea $f(v)$ este identic nulă. In acest caz, avem $A_{m+1} = 0$.

Corolar. Se poate construì o funcţiune $\Theta\,(v)$ de ordinul m care să admită $m-1$ zeruri date $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$; ea este de forma (31), coeficienţii satisfăcând ecuaţiunile (32). Această funcţiune este dar determinată, abstracţiune făcând de un factor arbitrar.

259. Să considerăm cazul când funcţiunile Θ_{g_1, g_3} sunt de ordinul întâi ($m = 1$). In acest caz, unui sistem dat de caracteristice (g_1, g_3) corespunde o singură funcţiune Θ, abstracţiune făcând de un factor constant arbitrar. O funcţiune Θ de ordinul întâi având un singur zero în paralelogramul $(1, \tau)$, acest zero va fi

$$v = \frac{1+\tau}{2} + \frac{1}{2}(g_1\tau - g_3), \quad \text{(formula 22)} \tag{34}$$

Dacă caracteristicile sunt numere întregi, avem patru sisteme

$$(1,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ 0),\ (0,\ 1);$$

căci relaţiunile (21) rămân neschimbate dacă mărim g_1 sau g_3 cu un număr par. Funcţiunile Θ_{g_1, g_3} corespunzătoare coincid cu funcţiunile $\vartheta_\alpha\,(v \mid \tau)$ ($\alpha = 1, 2, 3, 0$). Astfel, funcţiunea $\Theta_{00}\,(v \mid \tau)$ de ordinul întâi este dată de seria (30), în care facem $m = 1$, $h = 0$; avem

$$\Theta_{00}\,(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2ni\pi} = \vartheta_3\,(v). \tag{35}$$

Punctul în care această funcţiune se anulează în paralelogramul $(1, \tau)$ este determinat de expresiunea (34)

$$v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}. \tag{36}$$

Celelalte trei funcţiuni $\Theta_{11}\,(v)$, $\Theta_{1,0}\,(v)$, $\Theta_{0,1}\,(v)$ nu difer de funcţiunile $\vartheta_1\,(v)$, $\vartheta_2\,(v)$, $\vartheta_0\,(v)$ decât printr'un factor constant; ele au respectiv aceleaşi zeruri şi satisfac aceleaşi ecuaţiuni funcţionale (21), în cari înlocuim caracteristicele prin sistemele corespunzătoare.

260. Să presupunem $m > 1$ şi fie $\Theta_h\,(v)$ una din cele m funcţiuni Θ cuprinse în egalitatea (30), ale căror caracteristice sunt $(0, 0)$. Scriind această funcţiune sub forma

$$\Theta_h\,(v \mid \tau) = q^{\frac{h^2}{m}}\, e^{2hi\pi v} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2 i\pi\,(m\tau)}\, e^{2ni\pi\,(mv + h\tau)},$$

recunoaştem că seria din membrul al doilea coincide cu seria $\vartheta_3(u \mid \tau_1)$ în care $u = m\nu + h\tau$ şi $\tau_1 = m\tau$.

Avem aşà dar relaţiunea

$$(37) \qquad \Theta_h(\nu \mid \tau) = q^{\frac{h^2}{m}} e^{2hi\pi\nu}\, \vartheta_3(m\nu + h\tau \mid m\tau), \quad (h=0, 1, \ldots m-1).$$

Pentru $h = 0$, avem

$$(38) \qquad \Theta_0(\nu \mid \tau) = \vartheta_3(m\nu \mid m\tau).$$

Zerurile funcţiunilor Θ_h se deduc din zerurile cunoscute ale funcţiunii $\vartheta_3(\nu \mid \tau)$ (14) (§ 236). Aceste zeruri sunt date de formula

$$m\nu + h\tau = \mu + \frac{1}{2} + (\nu + \frac{1}{2})\, m\tau,$$

de unde

$$(39) \qquad \nu = \frac{1}{m}(\mu + \frac{1}{2}) + (\nu + \frac{1}{2} - \frac{h}{m})\,\tau,$$

μ şi ν fiind numere întregi cari primesc toate valorile dela $-\infty$ la $+\infty$. Această formulă arată că printre cele m funcţiuni Θ_h nu sunt două cari să aibă un zero comun. Toate zerurile sunt simple, căci zerurile funcţiunii $\vartheta_3(\nu)$ sunt simple.

261. *Aplicaţiuni ale teoremei lui Hermite.*

I. Pătratele funcţiunilor $\vartheta_\alpha(\nu)$, $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$, sunt de ordinul al doilea şi au aceleaşi caracteristice $(g_1 = g_3 = 0)$. Prin urmare, între trei oarecari din ele există o relaţiune lineară şi omogenă. Avem, de ex.:

$$\vartheta_2^2(\nu) = a\vartheta_0^2(\nu) + b\,\vartheta_1^2(\nu),$$
$$\vartheta_3^2(\nu) = a_1\,\vartheta_0^2(\nu) + b_1\,\vartheta_1^2(\nu).$$

Coeficienţii se determină făcând succesiv $\nu = 0$, $\nu = \frac{\tau}{2}$ şi ţinând seamă de formulele (4), (5) (§ 229); de unde obţinem

$$a = \left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_0(0)}\right)^2 = \frac{k}{k'}, \quad a_1 = \left(\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_0(0)}\right)^2 = \frac{1}{k'},$$

$$b = -\left(\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_0(0)}\right)^2 = -\frac{1}{k'}, \quad b_1 = -\left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_0(0)}\right)^2 = -\frac{k}{k'}.$$

Avem aşa dar relaţiunile

$$\vartheta_1^2(\nu) = k\,\vartheta_0^2(\nu) - k'\,\vartheta_2^2(\nu),$$
$$\vartheta_0^2(\nu) = k\,\vartheta_1^2(\nu) + k'\,\vartheta_3^2(\nu).$$

II. Funcţiunea

$$f(v)=\vartheta_0(v+a)\,\vartheta_0(v-a)$$

este o funcţiune $\Theta(v)$ de ordinul $m=2$ cu caracteristicele $(0, 0)$. De acelaş ordin cu aceleaşi caracteristice sunt funcţiunile $\vartheta_0^2(v)$, $\vartheta_1^2(v)$; prin urmare, putem scrie

$$(1)\qquad \vartheta_0(v+a)\,\vartheta_0(v-a)=b\vartheta_0^2(v)+c\,\vartheta_1^2(v).$$

Făcând $v=0$, avem $\vartheta_0^2(a)=b\vartheta_0^2(0)$. Pentru $v=\frac{\tau}{2}$, avem

$$\vartheta_0\left(a+\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_0\left(a-\frac{\tau}{2}\right)=c\,\vartheta_1^2\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

sau, ţinând seamă de formulele (5) (§ 229),

$$\vartheta_1^2(a)=-c\vartheta_0^2(0).$$

Prin urmare

$$(2)\qquad \vartheta_0(v+a)\,\vartheta_0(v-a)=\frac{\vartheta_0^2(a)\,\vartheta_0^2(v)-\vartheta_1^2(a)\,\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(0)}.$$

III. Funcţiunea

$$f(v)=\vartheta_1(v+a)\,\vartheta_0(v-a)$$

este o funcţiune $\Theta(v)$ de ordinul al doilea cu caracteristicele $(1, 0)$. Funcţiunile $\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v)$, $\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)$ sunt de acelaş ordin şi au aceleaşi caracteristice; prin urmare

$$(3)\qquad \vartheta_1(v+a)\,\vartheta_0(v-a)=b\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v)+c\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v).$$

Făcând succesiv $v=0$, $v=\frac{1}{2}$, obţinem valorile

$$c=\frac{\vartheta_1(a)\,\vartheta_0(a)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)},$$

$$b=\frac{\vartheta_1(a+\frac{1}{2})\,\vartheta_0(a-\frac{1}{2})}{\vartheta_1(\frac{1}{2})\,\vartheta_0(\frac{1}{2})}=\frac{\vartheta_2(a)\,\vartheta_3(a)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}.$$

Ducând aceste valori în ecuaţiunea (3), obţinem

$$(4)\qquad \vartheta_1(v+a)\,\vartheta_0(v-a)=\frac{\vartheta_2(a)\,\vartheta_3(a)\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v)+\vartheta_1(a)\,\vartheta_0(a)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}.$$

Din ecuaţiunile (2) şi (4) rezultă

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v+a)}=\left(\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\right)^2\frac{\vartheta_2(a)\,\vartheta_3(a)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v)+\vartheta_1(a)\,\vartheta_0(a)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_0^2(a)\,\vartheta_0^2(v)-\vartheta_1^2(a)\,\vartheta_1^2(v)}.$$

Divizând ambii termeni ai membrului al doilea cu $\vartheta_0^2(a)\vartheta_0^2(v)$; înlocuind după aceea a şi v prin $\frac{a}{2K}$, $\frac{v}{2K}$ şi ţinând seamă de formulele

$$\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k'}, \quad \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \text{ (§ 231)}$$

şi de formulele (21) (§ 238), egalitatea (5) devine

$$\text{(6)} \qquad sn\,(v+a) = \frac{snv\; cna\; dna + sna\; cnv\; dnv}{1-k^2\, sna\; snv}.$$

Ceeace este formula de adiţiune a funcţiunii snv.

CAPITOLUL XX.

DEGENERAREA FUNCŢIUNILOR ELIPTICE.

262. Funcţiunile eliptice au fost construite în ipoteza că semiperioadele ω_1, ω_3 sunt *finite* şi raportul lor *imaginar*. Vom conservà această din urmă ipoteză (de care depinde convergenţa absolută şi uniformă a seriilor şi a produselor ce definesc funcţiunile eliptice), dar vom presupune succesiv că una sau amândouă perioadele devin infinite. Seriile şi produsele funcţiunilor eliptice fiind absolut şi uniform convergente şi în aceste cazuri, limitele lor vor fi egale cu suma limitelor termenilor, respectiv cu produsul limitelor factorilor corespunzători. Funcţiunile considerate încetând de a fi eliptice, precum vom vedeà, zicem că ele *degenerează*.

Degenerarea funcţiunilor eliptice se mai poate introduce — considerând, de ex., funcţiunile lui Weierstrass — dacă presupunem că discriminantul $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$ tinde către zero, adică dacă două sau toate rădăcinile e_1, e_2, e_3 ale ecuaţiunii $4\,x^3 - g_2 x - g_3 = o$ devin egale. Vom considerà după rând ambele moduri de degenerare.

I. Perioadele devin infinite.

A) ω_1 *finit*, ω_3 *infinit*.

263. *Funcţiunea pu.* Seria care defineşte funcţiunea pu devine pentru $\omega_3 = \infty$,

$$\text{(1)} \qquad pu = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left[\frac{1}{(u - 2m\omega_1)^2} - \frac{1}{4m^2\omega_1^2} \right],$$

căci toţi termenii în cari $n \neq o$ se anulează. Această serie se scrie

$$\text{(2)} \qquad pu = -\frac{1}{2\omega_1^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-2m\omega_1)^2},$$

de oarece fiecare din seriile membrului al doilea este absolut convergentă.

Scriind seria din urmă sub forma

$$\frac{1}{4\,\omega_1^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{u}{2\omega_1}-m\right)^2}$$

și referindu-ne la egalitățile

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-m)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}, \qquad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

obținem, pentru $\lim p\,(u;\omega_1,\omega_3)$, expresiunea

$$(3) \qquad pu=-\frac{\pi^2}{12\,\omega_1{}^2}+\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega_1}}.$$

264. *Funcțiunea* ζu. Din seria care definește funcțiunea ζu, sau integrând egalitatea (3), deducem, pentru $\lim\limits_{\omega_3=\infty}\zeta\,(u\,|\,\omega_1,\omega_3)$, formula

$$(4) \qquad \zeta u=\frac{\pi^2 u}{12\omega_1{}^2}+\frac{\pi}{2\omega_1}\cot\frac{\pi u}{2\omega_1},$$

fără constantă, ζu fiind o funcțiune impară.

Făcând în această egalitate succesiv $u=\omega_1,\ \omega_3$, obținem, pentru $|\omega_3|=\infty$,

$$(5) \qquad \eta_1=\frac{\pi^2}{12\omega_1}, \qquad \eta_3=\infty.$$

Ultima cantitate se poate deduce din formula lui Legendre

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\,\omega_1=i\frac{\pi}{2};$$

de unde rezultă

$$(6) \qquad \lim\frac{\eta_3}{\omega_3}=\lim\frac{\eta_1}{\omega_1}=\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}.$$

265. *Funcțiunea* σu. Plecând dela produsul care definește funcțiunea σu, sau integrând egalitatea (4), obținem

$$\log\frac{\sigma u}{c}=\frac{\pi^2}{24\,\omega_1{}^2}u^2+\log\sin\frac{\pi u}{2\omega_1},$$

de unde, ținând seamă de egalitatea

$$\lim_{u=0}\frac{\sigma u}{u}=1,$$

avem, pentru limita funcțiunii σu, expresiunea

$$(7) \qquad \sigma u=\frac{2\omega_1}{\pi}\,e^{\frac{\pi^2}{24\omega_1{}^2}u^2}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1}.$$

265. *Limitele invarianților* g_2 *și* g_3 *și ale cantităților* e_1, e_2, e_3. Făcând în seriile

$$\frac{1}{60}g_2=\Sigma'\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_3)^4},\quad \frac{1}{140}g_3=\Sigma'\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_3)^6}$$

$\omega_3=\infty$, toți termenii se anulează exceptând termenii corespunzători lui $n=o$. Avem așa dar

$$\frac{1}{60}g_2=\frac{1}{2^3\omega_1^4}\sum_1^\infty\frac{1}{m^4}=\frac{1}{2^3\omega_1^4}\frac{\pi^4}{90},$$

$$\frac{1}{140}g_3=\frac{1}{2^5\omega_1^3}\sum_1^\infty\frac{1}{m^6}=\frac{1}{2^5\omega_1^6}\frac{\pi^6}{945};$$

de unde, pentru limitele celor doi invarianți,

$$(8)\qquad g_2=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega_1{}^2}\right)^2,\quad g_3=\frac{1}{3^3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega_1{}^2}\right)^3.$$

Valoarea limită a discriminantului este așà dar

$$(9)\qquad \Delta=g_2^3-27g_3^2=o.$$

Prin urmare două din rădăcinile e_1, e_2, e_3 ale ecuațiunii

$$4\,x^3-g_2\,x-g_3=o$$

devin egale. Se găsește rădăcina dublă

$$x_1=-\frac{3g_3}{2g_2};$$

de unde rezultă rădăcina simplă

$$x_2=-2x_1=\frac{3g_3}{g_2}.$$

Pentru a recunoaște cari din cele trei rădăcini e_1, e_2, e_3 devin egale între ele, observăm că semiperioada $\omega_2=-\omega_1-\omega_3$ devenind infinită împreună cu ω_3, rădăcinile cari devin egale între ele nu pot fi decât $e_2=p\omega_2$ și $e_3=p\omega_3$. Avem așà dar

$$(10)\qquad \begin{aligned} e_1&=\frac{3g_3}{g_2}=\frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega_1{}^2},\\ e_2&=e_3=-\frac{3g_3}{2g_2}=-\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega_1{}^2}.\end{aligned}$$

Aceste valori se mai pot obține înlocuind în formula (3) u respectiv prin ω_1, ω_2, ω_3 și observând că

$$\lim_{\omega_a=\infty}\left[\sin\frac{\pi u}{\omega_1}\right]_{u=\omega_a}=\infty,\quad (a=2,3).$$

266. *Funcţiunile* $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$. Scăzând din egalitatea (3) expresiunile e_1, e_2, e_3 date de formulele (10) şi ţinând seamă de relaţiunea

$$pu-e_a=\left(\frac{\sigma_a u}{\sigma u}\right)^2,$$

obţinem egalităţile

$$\left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2=\frac{\pi^2}{4\omega_1{}^2}cot^2\frac{\pi u}{2\omega_1},$$

$$\left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2=\left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2=\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\frac{1}{sin^2\frac{\pi u}{2\omega_1}}.$$

De unde, înlocuind σu prin expresiunea sa (7), extrăgând rădăcinile şi ţinând seamă că pentru $u=o$ cele trei cofuncţiuni sunt egale cu $+1$, avem pentru limitele lor, expresiunile

$$(11)\qquad \sigma_1 u=e^{\frac{\pi^2u^2}{24\omega_1^2}}cos\frac{\pi u}{2\omega_1},\qquad \sigma_2 u=\sigma_3 u=e^{\frac{\pi^2u^2}{24\omega_1^2}}.$$

267. *Funcţiunile lui Jacobi.* Ecuaţiunile (10) ne dau

$$(12)\qquad \sqrt{e_1-e_3}=\frac{\pi}{2\omega_1};$$

de unde rezultă, pentru argumentul $v=u\sqrt{e_1-e_3}$ şi pentru cantităţile $K=\omega_1\sqrt{e_1-e_3}$, $iK'=\omega_3\sqrt{e_1-e_3}$, valorile limite

$$(13)\qquad v=\frac{\pi u}{2\omega_1},\quad K=\frac{\pi}{2},\quad K'=\infty.$$

Valorile modulelor $k=\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}}$ şi $k'=\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}$ devin

$$(14)\qquad k=o,\quad k'=1.$$

Funcţiunile $sn(v, k)$, $cn(v, k)$, $dn(v, k)$ definite de formulele (3) (§ 194), se reduc la expresiunile

$$(15)\qquad sn\, v=sin\, v,\quad cn v=cos\, v,\quad dn\, v=1.$$

Pentru a obţine limitele funcţiunilor $\vartheta(v|\tau)$ să observăm că raportul $\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}$ tinzând către infinit şi coeficientul lui i rămânând, prin ipoteză, pozitiv, este necesar ca acest coeficient să tindă către $+\infty$[1]). De unde rezultă

$$(16)\qquad \lim_{\omega_3=\infty} q=lim\, e^{i\pi\tau}=o,\quad lim\, q_0=lim\prod_1^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)=1.$$

---

[1]) Fie $\tau=\alpha+i\beta=\alpha\left(1+i\frac{\beta}{\alpha}\right)$ una cel puţin din cantităţile α, β tinde către infinit; însă pentru ca $\frac{\beta}{\alpha}$ să nu se anuleze este necesar ca β să tindă către infinit.

Prin urmare [(2), § 225)]:

(17) $$\lim \vartheta_1(v|\tau) = \lim \vartheta_2(v|\tau) = o,$$

(18) $$\lim \vartheta_3(v|\tau) = \lim \vartheta_0(v|\tau) = 1,$$

(19) $$\lim q^{-\frac{1}{4}} \vartheta_1(v|\tau) = 2 \sin \pi v,$$

$$\lim q^{-\frac{1}{4}} \vartheta_2(v|\tau) = 2 \cos \pi v.$$

B) ω_1 *infinit*, ω_3 *finit.*

268. Funcţiunile $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$, $\zeta(u \mid \omega_1, \omega_3)$, $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3)$ fiind simetrice în raport cu cele două perioade, limitele către cari ele tind, când ω_1 tinde către infinit pe când ω_3 rămâne finit, sunt date de formulele (3), (4) şi (7) în cari înlocuim ω_1 prin ω_3. Limitele cantităţilor η şi ale invarianţilor vor fi date de egalităţile

(20) $$\eta_1 = \infty, \quad \eta_3 = \frac{\pi^2}{12\,\omega_3}, \quad \lim \frac{\eta_1}{\omega_1} = \lim \frac{\eta_3}{\omega_3} = \frac{\pi^2}{12\omega_3^2},$$

(21) $$g_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega_3^2}\right)^2, \quad g_3 = \frac{1}{3^3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega_3^2}\right)^2, \quad \Delta = o.$$

Rădăcinile cari devin egale sunt $e_1 = p\omega_1$ şi $e_2 = p\omega_2$. Avem

$$e_1 = e_2 = -\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega_3^2}, \quad e_3 = \frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega_3^2}.$$

269. Limitele cofuncţiunilor σ şi ale funcţiunilor lui Jacobi, din cauza disimetriei acestor funcţiuni în raport cu ω_1 şi ω_3, nu sunt cuprinse în formulele corespunzătoare cazului A) prin permutarea lui ω_1 cu ω_3. Reintrăm, însă, în cazul precedent, aplicând transformarea perioadelor

(22) $$\omega_1' = \omega_3, \quad \omega_3' = -\omega_1.$$

Fie e'_1, e'_2, e'_3, $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}_3$ rădăcinile şi cofuncţiunile σ corespunzătoare sistemului celui nou de perioade; vom aveà (§ 187)

(23) $$e_1' = e_3, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_1;$$
$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_3, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2, \quad \bar{\sigma}_3 = \sigma_1.$$

Semiperioada ω'_1 fiind finită şi $\omega'_3 = \infty$, ne regăsim în cazul A). Avem aşa dar valorile

(24) $$e'_1 = \frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega_1'^2}, \quad e'_2 = e'_3 = -\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega_1'^2},$$

şi expresiunile

(25) $$\bar{\sigma}_1 u = e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\,\omega_1'^2}} \cos \frac{\pi u}{2\omega'_1}, \quad \bar{\sigma}_2 u = \bar{\sigma}_3 u = e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\,\omega_1'^2}};$$

sau, în virtutea formulelor (22) şi (23)

$$e_3 = \frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega_3^2}, \quad e_1 = e_2 = -\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega_3{}^2},$$

valori deja găsite (21) şi

$$\text{(26)} \qquad \sigma_1 u = \sigma_2 u = e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_3^2}}, \quad \sigma_3 u = e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_3^2}} \cos\frac{\pi u}{2\omega_3}.$$

270. *Funcţiunile lui Jacobi.* Ecuaţiunile (24) dau

$$\sqrt{e'_1 - e'_3} = \frac{\pi}{2\omega'_1} = \frac{\pi}{2\omega_3}.$$

Insă (6) (§ 188):

$$\sqrt{e'_1 - e'_3} = \sqrt{e_3 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_3};$$

prin urmare

$$\text{(27)} \qquad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{i\pi}{2\omega_3},$$

$$\text{(28)} \qquad K = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3} = \infty, \quad K' = \frac{\omega_3}{i}\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2}.$$

Limitele modulelor k şi k' sunt

$$\text{(29)} \qquad k = 1, \; k' = o.$$

Limitele corespunzătoare ale celor trei funcţiuni rezultă din egalităţile:

$$\text{(30)} \qquad \begin{cases} sn(\nu, k) = -i\dfrac{sn(i\nu, k')}{cn(i\nu, k')}, \\ cn(\nu, k) = \dfrac{1}{cn(i\nu, k')}, \\ dn(\nu, k) = \dfrac{dn(i\nu, k')}{cn(i\nu, k')}, \end{cases} \qquad \text{(5) (§ 242)}$$

în cari facem $k = 1$ şi $k' = o$.

Ţinând seamă de formulele (15), obţinem

$$\text{(31)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{k=1} sn(\nu, k) = -i\dfrac{\sin i\nu}{\cos i\nu} = \dfrac{e^\nu - e^{-\nu}}{e^\nu + e^{-\nu}}, \\ \lim\limits_{k=1} cn(\nu, k) = \lim\limits_{k=1} dn(\nu, k) = \dfrac{1}{\cos i\nu} = \dfrac{2}{e^\nu + e^{-\nu}}. \end{cases}$$

C) ω_1 *infinit*, ω_3 *infinit*.

271. Ambele perioade tinzând către infinit astfel ca raportul lor să *nu* devie real, paralelogramul perioadelor acoperă la limită tot planul.

Făcând $\omega_1 = \infty$ în formulele găsite în cazul A), obținem expresiunile următoare:

$$p\,u = \frac{1}{u^2}, \quad \zeta\,u = \frac{1}{u}, \quad \sigma\,u = u; \tag{32}$$

$$g_2 = g_3 = o; \quad e_1 = e_2 = e_3 = o. \tag{33}$$

Din egalitatea $\zeta u = \frac{1}{u}$ rezultă valorile:

$$\eta_1 = \eta_3 = o; \tag{34}$$

prin urmare

$$\sigma_1\,u = \sigma_2\,u = \sigma_3\,u = 1. \tag{35}$$

Deasemenea obținem

$$\nu = o, \quad sn\,\nu = o, \quad cn\,\nu = dn\,\nu = 1. \tag{36}$$

II. Al doilea mod de degenerare: $\Delta = o$.

272. Dintre funcțiunile lui Weierstrass vom considerà numai funcțiunea pu, celelalte putându-se deduce din cea dintâiu.

Să considerăm integrala

$$u = \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3 - g_2 x - g_3}} = \frac{1}{2}\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \tag{1}$$

care definește funcțiunea $x = p\,(u, g_2, g_3)$. Discriminantul Δ fiind nul, două sau toate rădăcinile e_1, e_2, e_3 sunt egale.

1° Fie $e_2 = e_3$. Vom aveà

$$u = \frac{1}{2}\int_\infty^x \frac{dx}{(x-e_3)\sqrt{x-e_1}} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left[arctg\frac{\sqrt{x-e_1}}{\sqrt{e_1-e_3}} - \frac{\pi}{2}\right]; \tag{2}$$

de unde

$$x = e_1 + (e_1 - e_3)\; cot^2\, u\,\sqrt{e_1-e_3}, \tag{3}$$

sau

$$x = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{sin^2\, u\,\sqrt{e_1-e_3}}. \tag{4}$$

Pentru a găsì limitele către cari tind semiperioadele ω_1, ω_3 să considerăm formulele

$$\omega_1\sqrt{e_1-e_3} = \mathrm{K}, \qquad \omega_3\sqrt{e_1-e_3} = i\,\mathrm{K}'. \tag{5}$$

In cazul nostru $(e_2=e_3)$, avem $k=o$; prin urmare $K=\frac{\pi}{2}$, $K'=\infty$.

De unde

(6) $$\omega_1 \sqrt{e_1-e_3}=\frac{\pi}{2}, \quad \omega_3=\infty.$$

Cea dintâiu din aceste două egalităţi, împreună cu egalitatea

$$e_1+2\,e_2=o$$

la care se reduce relaţiunea $e_1+e_2+e_3=o$, dau valorile rădăcinilor

(7) $$e_1=\frac{\pi^2}{6\omega_1^2}, \quad e_2=e_3=-\frac{\pi^2}{12\,\omega_1^2}.$$

Ducând aceste valori în egalitatea (4), obţinem expresiunea funcţiunii pu

(8) $$x=-\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}+\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\frac{1}{sin^2\frac{\pi u}{2\omega_1}}$$

sub forma (3), § (264).

2°. Fie $e_2=e_1$.

Avem $k=1$, $k'=o$; cantităţile K şi K' permutându-se între ele, rezultă $K=\infty$, $K'=\frac{\pi}{2}$. Prin urmare $\omega_1=\infty$, $\omega_3\sqrt{e_1-e_3}=\frac{i\pi}{2}$. Expresiunea lui pu se deduce din egalităţile (4) şi (8), permutând e_1 cu e_3, sau ω_1 cu ω_3.

3°. Toate rădăcinile egale: $e_1=e_2=e_3=o$. In acest caz egalitatea (1) devine

(9) $$u=\frac{1}{2}\int_\infty^x \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}};$$

de unde

(10) $$x=\frac{1}{u^2}.$$

Funcţiunea fiind raţională, nu există perioade. De altmintrelea, limitele semiperioadelor ω_1, ω_3 sunt, în valoare absolută, limitele integralelor

(11) $$\omega_1=\int_\infty^{e_1}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}, \quad \omega_3=\int_\infty^{e_3}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2\,x-g_3}},$$

a căror limită comună, pentru $g_2=g_3=0$, este

(12) $$\frac{1}{2}\int_\infty^o \frac{dx}{\sqrt{x^3}}=\infty.$$

273. *Funcţiunile* $sn\,v$, $cn\,v$, $dn\,v$. Degenerarea acestor funcţiuni corespunde valorilor $k=o$, $k=1$. Făcând în integrala

(13) $$v=\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$k=o$, avem

$$v=\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc\sin x;$$

de unde

(14) $$x=sn\,v=\sin v$$

In virtutea relaţiunilor $cn\,v=\sqrt{1-sn^2\,v}$, $dn\,v=\sqrt{1-k^2\,sn^2\,v}$ rezultă

(15) $$cn\,v=\cos v,\quad dn\,v=1.$$

Făcând în integrala (13) $k^2=1$, obţinem

$$v=\int_o^x \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x};$$

de unde

(16) $$x=sn\,v=\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}},\quad cn\,v=dn\,v=\frac{2}{e^v+e^{-v}}.$$

CAPITOLUL XXI.

FUNCŢIUNEA *pu* CU INVARIANŢI REALI.

274. In aplicaţiunile funcţiunilor eliptice, cazul cel mai important este acela în care invarianţii g_2, g_3 sunt reali. Vom distinge două cazuri, după cum discriminantul

$$\Delta=g_2^3-27\,g_3^2$$

este pozitiv sau negativ.

I. $\Delta>o.$

Rădăcinile ecuaţiunii

(1) $$4\,x^3-g_2\,x-g_3=o.$$

sunt reale; le notăm în ordinea descrescândă

$$e_1>e_2>e_3.$$

Din relaţiunea $e_1+e_2+e_3=o$, rezultă $e_1>o$, $e_3<o$; e_2 poate fi pozitiv, negativ sau nul.

1°. *Valori u reale.* In domeniul $u = 0$, avem

$$pu = \frac{1}{u^2} + P(u^2), \tag{2}$$

$P(u^2)$ fiind o serie întreagă cu coeficienţi reali. De unde rezultă că funcţiunea pu este reală dealungul segmentului axei reale cuprins în interiorul cercului cu centrul în origină şi trecând prin cel mai apropiat pol al funcţiunii. Ea admite aşa dar o perioadă reală şi o perioadă pur imaginară (§ 134).

Fie, în valoare absolută, $2\omega_1$ cea mai mică perioadă reală şi $2\,\omega_3$ cea mai mică perioadă pur imaginară. Polurile reale ale funcţiunii pu sunt aşà dar toate cuprinse în expresiunea $u = 2m\omega_1$ şi cele pur imaginare în expresiunea $u = 2n\omega_3$, m şi n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$.

Funcţiunea considerată pu fiind reală pentru valori reale vecine cu $u=o$, rămâne reală pe axă reală, cel puţin până la cel mai apropiat pol [1]), adică până la punctul $u=2\omega_1$. Insă, oricărui punct al axei reale corespunde un punct congruent cuprins între o şi $2\omega_1$; de unde rezultă că funcţiunea pu este reală pe toată axa reală.

Aceleaşi concluziuni se aplică derivatei $p'u$, în virtutea ecuaţiunii

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + 2u\,P'(u^2), \tag{3}$$

dedusă din ecuaţiunea (2).

Putem presupune semiperioada ω_1 pozitivă; ω_1 este aşà dar cea mai mică valoare pozitivă a lui u pentru care derivata $p'u$ se anulează. De unde rezultă că în intervalul $(0, \omega_1)$, din care excludem valorile extreme, derivata $p'u$ păstrează un semn invariabil, care este *negativ*, precum ne arată termenul său principal $-\dfrac{2}{u^3}$. De aci rezultă că făcând să varieze u dela o până la ω_1, pu *descreşte necontenit* dela $+\infty$ (în virtutea termenului său principal $\dfrac{1}{u^2}$) până la valoarea $p\,\omega_1$, care, precum rezultă din ecuaţiunea

$$p'^2u = 4\,(pu - e_1)\,(pu - e_2)\,(pu - e_3), \tag{4}$$

este egală cu cea mai mare rădăcină, adică $p\omega_1 = e_1$.

Variaţiunea funcţiunii pu în intervalul $(\omega_1, 2\omega_1)$ se deduce din relaţiunea

$$p\,(\omega_1 + u) = p\,(\omega_1 - u). \tag{5}$$

---

[1]) I., pag. 305.

Funcţiunea trece dar în al doilea intervalul prin aceleaşi valori ca în cel dintâi, însă în ordinea inversă [1]). De unde rezultă că pe axa reală, pu poate primì orice valoare reală $\geq e_1$.

In intervalul $(0, \omega_1)$ derivata fiind negativă, vom scrie, punând semnul în evidenţă,

$$\frac{dx}{du}=-\sqrt{4x^3-g_2x-g_3};$$

de unde, în virtutea variaţiunii funcţiunii pu în acest interval,

$$(6)\qquad \omega_1=-\int_{\infty}^{e_1}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=\int_{e_1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

radicalul fiind pozitiv.

Derivata $p'u$ este, precum am văzut, negativă în intervalul $(0, \omega_1)$; din ecuaţiunea (4) rezultă că, în acest interval, ea variază necontenit în acelaş sens dela $-\infty$ la zero.

Din ecuaţiunea (5) rezultă

$$(7)\qquad p'(\omega_1+u)=-p'(\omega_1-u),$$

adică în intervalul $(\omega_1, 2\omega_1)$ derivata $p'u$ este pozitivă şi variază necontenit în acelaş sens dela 0 la $+\infty$.

In intervalul $(0, 2\omega_1)$ derivata trece aşà dar o singură dată prin orice valoare reală şi, prin urmare, pe axa reală, ea poate primì orice valoare reală cuprinsă între $-\infty$ şi $+\infty$.

2⁰. *Valori u pur imaginare $u=iv$, v real.* Avem (91 § 148)

$$(8)\qquad p(iv;\, g_2, g_3)=-p(v;\, g_2, -g_3),$$

$$(9)\qquad p'(iv;\, g_2, g_3)=ip'(v;\, g_2, -g_3).$$

Fie

$$(10)\qquad x=p(v;\, g_2, -g_3);$$

prin urmare

$$(11)\qquad \left(\frac{dx}{dv}\right)^2=4x^3-g_2x+g_3.$$

Rădăcinile ecuaţiunii

$$(12)\qquad 4x^3-g_2x+g_3=o$$

fiind egale şi de semne contrarii cu cele ale ecuaţiunii $4x^3-g_2x-g_3=o$, avem, în ordinea de mărime descrescândă,

$$-e_3>-e_2>-e_1.$$

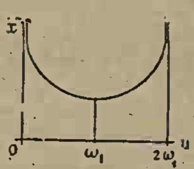

Fig. 51

[1]) Figurând funcţiunea $x=pu$ printr'o curbă raportată la două axe rectunghiulare (Ou, Ox), dreapta $u=\omega_1$ este o axă de simetrie a curbei şi dreptele paralele $u=o$, $u=2\omega_1$, sunt asimptote ale ei (fig. 51).

Perioada pur imaginară $2\omega_3$ fiind, precum am presupus mai sus, cea mai mică în valoare absolută, rezultă că ω_3 este, în valoare absolută, cea mai mică valoare pur imaginară pentru care $p'u$ se anulează și prin urmare valoarea $v = \frac{\omega_3}{i}$, pe care o putem presupune pozitivă, este cea mai mică valoare pozitivă a lui v pentru care avem

$$p'\left(\frac{\omega_3}{i}; g_2, -g_3\right) = 0.$$

Valoarea corespunzătoare a funcțiunii $p(v; g_2, -g_3)$ va fi așa dar egală cu cea mai mare rădăcină a ecuațiunii (12) adică

$$p\left(\frac{\omega_3}{i}; g_2, -g_3)\right) = -e_3. \tag{13}$$

Conchidem, ca și în cazul 1⁰, că făcând să varieze v dela 0 până la $\frac{\omega_3}{i}$, funcțiunea $p(v; g_2, -g_3)$ descrește necontenit dela ∞ până la $-e_3$; prin urmare, când u primește valori pur imaginare dela 0 până la ω_3, funcțiunea $p(u; g_2, g_3)$ crește necontenit dela $-\infty$ până la e_3. In intervalul $(\omega_3, 2\omega_3)$, funcțiunea trece prin aceleași valori, în ordinea inversă, în virtutea ecuațiunii $p(\omega_3 + u) = p(\omega_3 - u)$. Unui punct oarecare situat pe axa imaginară corespunde un punct congruent pe segmentul $(0, 2\omega_3)$; de unde rezultă că pe axa imaginară, funcțiunea pu este reală și poate primi orice valoare reală $\leq e_3$.

Din expresiunea (9) rezultă că, pe axa imaginară, derivata $p'u$ este de forma it, variabila t fiind reală și crescând dela $-\infty$ până la 0 când u descrie segmentul $(0, \omega_3)$ și dela 0 la $+\infty$, când u descrie segmentul $(\omega_3, 2\omega_3)$.

Pentru semiperioada ω_3 avem expresiunea

$$\frac{\omega_3}{i} = \int_{-e_3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}}, \tag{14}$$

analoagă cu aceea a lui ω_1, dată de formula (6), în care e_1 este înlocuit prin $-e_3$ și g_3 prin $-g_3$.

Cele două perioade considerate $(2\omega_1, 2\omega_3)$ *formează un sistem de perioade primitive.* Paralelogramul acestor perioade este un dreptunghiu. Este de ajuns a arătà că în acest dreptunghiu nu există nici un pol al funcțiunii, afară de vârfurile dreptunghiului, astfel că în dreptunghiul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ funcțiunea admite numărul minimum de poluri, anume polul dublu $u = o$. Aceasta este adevărat pe cele două laturi $(0, 2\omega_1)$, $(0, 2\omega_3)$ și prin urmare pe laturile respectiv paralele cu cele dintâi.

Fie $\alpha+i\beta$ un punct interior dreptunghiului

$$0<\alpha<2\omega_1, \quad 0<\beta<\frac{2\omega_3}{i}.$$

Să considerăm formula de adițiune

$$p(\alpha+i\beta)+p\alpha+pi\beta=\frac{1}{4}\left(\frac{p'\alpha-p'i\beta}{p\alpha-pi\beta}\right)^2.$$

Cantitățile $p\alpha$, $pi\beta$, $p'\alpha$, $p'i\beta$ au, precum am văzut mai sus, valori finite și numitorul membrului al doilea este diferit de zero, căci $p\alpha \geq e_1$ și $pi\beta \leq e_3$. Punctul $\alpha+i\beta$ nu poate dar fi pol al funcțiunii pu.

3⁰. *Valori* $u=\omega_3+v$, v *real.* Avem formula

$$(15) \qquad p(v+\omega_3)-e_3=\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{pv-e_3},$$

de unde

$$(16) \qquad p'(v+\omega_3)=-\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{(pv-e_3)^2}p'v.$$

Funcțiunile pv și $p'v$ din membrele de al doilea variază, precum s'a văzut în cazul 1⁰. De unde rezultă că făcând să varieze v dela 0 la ω_1, $p(v+\omega_3)$ crește necontenit dela e_3 la e_2. In acelaș interval, derivata $p'(v+\omega_3)$ este pozitivă, anulându-se pentru valorile extreme; ea admite deci un maximum în acest interval: un singur maximum. Căci dacă ea ar avea două maxime, ar avea și un minimum și reprezintând prin a un număr pozitiv mai mare decât minimul și mai mic decât cel mai mic din cele două maxime, ar urma ca ecuațiunea

$$p'(v+\omega_3)=a$$

să aibă patru rădăcini în intervalul $(0, \omega_1)$. Ceea ce este imposibil, funcțiunea $p'u$ fiind de ordinul al treilea.

Din variațiunea funcțiunii $p(v+\omega_3)$ în intervalul $(0, \omega_1)$ deducem o nouă expresiune a semiperioadei ω_1. Punând $x=p(v+\omega_3)$, avem

$$dv=\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

radicalul fiind pozitiv; căci, în intervalul considerat, derivata $p'(v+\omega_3)$ este pozitivă. De unde rezultă egalitatea

$$(17) \qquad \omega_1=\int_{e_3}^{e_2}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}.$$

4°. *Valori* $u=\omega_1+iv$, *v real.* Din formulele

$$p(\omega_1+iv)-e_1=\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{piv-e_1}$$

conchidem, în virtutea studiului făcut la cazul 2°, că, în intervalul $\left(0, \frac{\omega_3}{i}\right)$, $p(\omega_1+iv)$ este real şi descreşte necontenit dela e_1 la e_2. In acest interval, derivata $p'(\omega_1+iv)$ este de forma it, t primind valori reale, pozitive şi anulându-se la ambele extremităţi.

Din cele ce preced rezultă o nouă expresiune a semiperioadei ω_3. Fie

$$y=p(\omega_1+iv)=-p\left(\frac{\omega_1}{i}+v;\, g_2, -g_3\right)$$

şi

$$x=p\left(\frac{\omega_1}{i}+v;\, g_2, -g_3\right)=-y.$$

Prin urmare, când v variază dela 0 la $\frac{\omega_3}{i}$, x creşte dela $-e_1$ la $-e_2$ şi ecuaţiunea

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2=4x^3-g_2x+g_3$$

ne dă egalitatea

$$\frac{\omega_3}{i}=\int_{-e_1}^{-e_2}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x+g_3}}, \tag{18}$$

radicalul fiind pozitiv, căci x şi v cresc în acelaş timp. Această egalitate se poate deduce imediat din formula (17), observând că dacă înlocuim, în funcţiunea pu, semiperioadele ω_1, ω_3 respectiv prin $\frac{\omega_3}{i}$, $\pm i\omega_1$, g_2 nu se schimbă şi g_3 îşi schimbă semnul; ceeace are drept efect a schimbà rădăcinile e_1, e_2, e_3 respectiv în $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$.

Rezumând variaţiunea funcţiunii $x=p(u;g_2,g_3)$, în cazul $\Delta>0$, când u descrie dreptunghiul (ω_1, ω_3), începând dela $u=0$, în sensul pozitiv, vedem că această funcţiune primeşte valori reale şi variază într'un mod continuu, respectiv pe fiecare latură, dela $+\infty$ la e_1; dela e_1 la e_2; dela e_2 la e_3; dela e_3 la $-\infty$, trecând o singură dată prin fiecare valoare: *perimetrul dreptunghiului* (u) *se transformă punct cu punct în axa reală* (x).

Derivata $p'u$ este reală pe laturile $(0, \omega_1)$, $(\omega_3, \omega_1+\omega_3)$: dealungul celei dintâi, ea variază dela $-\infty$ la 0, trecând o singură dată prin fiecare valoare; dealungul celei de al doilea, ea este pozitivă variând dela 0 la 0 și admite un singur maximum. Pe celelalte două laturi, $p'u$ este de forma it, t primind valori reale pozitive dela 0 la 0 pe latura $(\omega_1, \omega_1 + \omega_3)$ și negative dela 0 la $-\infty$ pe latura a patra $(\omega_3, 0)$.

275. Cari sunt în tot planul (u) valorile variabilei pentru cari funcțiunea pu este reală? Fie a o valoare reală oarecare. Există pe conturul dreptunghiului (ω_1, ω_3) un punct v, *unul singur*, pentru care avem $pv = a$. Toate valorile lui u pentru cari $pu = pv$ fiind date de expresiunea

$$u = \pm v + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

rezultă că, abstracțiune făcând de multipli de perioade, singurele puncte u cărora corespund valori reale pentru pu sunt situate pe conturul dreptunghiului considerat și pe cel simetric cu acesta în raport cu origina $u = 0$. In interiorul fiecărui dreptunghiu pu este dar imaginar.

La valori imaginare conjugate ale lui u corespund, pentru pu, valori imaginare conjugate. Unui punct u situat în interiorul dreptunghiului (ω_1, ω_3) corespunde, pentru $x = pu$, un punct x situat *de desubtul* axei reale. In adevăr, fie a și b două cantități reale satisfăcând inegalitățile

$$0 < a < \omega_1, \qquad 0 < b < \frac{\omega_3}{i}$$

și fie

$$p(a + ib) = \mathrm{A} + i\mathrm{B}.$$

Formula de adițiune a funcțiunii $p(a + ib)$ dă pentru $i\mathrm{B}$ valoarea

$$i\mathrm{B} = -\frac{1}{2}\,\frac{p'a\; p'ib}{(pa - pib)^2};$$

însă $p'a < 0$, $p'ib = it$, $t < 0$. Așà dar B este real și negativ.

Rezultatul precedent se poate verificà considerând valoarea principală a lui $p(a + ib)$, a și b fiind numere pozitive foarte mici. Această valoare fiind $\frac{1}{(a+ib)^2}$, coeficientul lui i este $-\frac{2\,ab}{(a^2+b^2)^2}$; prin urmare într'un punct interior dreptunghiului (ω_1, ω_3), în vecinătatea originei, coeficientul B este < 0. Acest coeficient însă nu-și poate schimbà semnul fără a se anulà, adică fără ca u să treacă prin una din laturile dreptunghiului. Semnul lui B rămâne dar acelaş în tot interiorul dreptunghiului.

276. *Transformare conformă.* Din punctul $u = 0$ să ne închipuim descris un sfert de cerc $\alpha\beta$ cu o rază ϱ foarte mică, mărginit de direcţiunile ω_1, ω_3 (fig. 52) In domeniul acestui punct avem

$$x = pu = \frac{1}{u^2} + u^2 \, \mathrm{P}(u).$$

Fie A şi B punctele x corespunzătoare punctelor α, β (fig. 53). Când

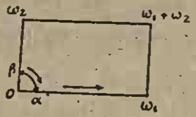

Fig. 52

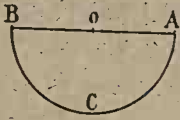

Fig. 53

u *descrie arcul* $\alpha\beta$, x descrie un arc ACB care diferă foarte puţin de arcul descris de punctul $y = \frac{1}{u^2}$, adică de un semicerc situat dedesubtul axei AB. Aceste două arce se corespund punct cu punct. De unde rezultă că conturul dreptunghiului (ω_1, ω_3) limitat de arcul $\alpha\beta$ se transformă punct cu punct, în virtutea ecuaţiunii $x = pu$, în conturul ACBA. Insă, în aria limitată de primul contur, funcţiunea pu este olomorfă; prin urmare cele două arii sunt transformate conforme, una a celeilalte. Făcând ϱ să tindă către zero, cele două arii devin respectiv dreptunghiul (ω_1, ω_3) şi semiplanul (x) situat de desubtul axei reale. De unde concluziunea: *Funcţiunea $x = pu$ realizează transformarea conformă a dreptunghiului (ω_1, ω_3) în semiplanul (x) situat dedesubtul axei reale.*

Dreptunghiul simetric cu cel dintâi, în raport cu axa reală, se transformă, în virtutea simetriei, într'un mod conform în semiplanul (x) situat deasupra axei reale. Se recunoaşte lesne că aria (u) limitată de cele două dreptunghiuri se transformă, într'un mod conform, în planul (x) limitat de tăietura $(e_1, -\infty)$. Deasemenea, aria formată de dreptunghiurile (ω_1, ω_3), $(-\omega_1, \omega_3)$, simetrice în raport cu axa imaginară, se transformă într'un mod conform în planul (x) limitat de tăietura $(e_3, +\infty)$. Ambele tăieturi sunt făcute dealungul axei reale [1]).

II. $\Delta < 0$.

276. Dintre cele trei rădăcini ale ecuaţiunii (1), una este reală; fie e_2 rădăcina reală şi e_1, e_3 rădăcinile imaginare conjugate.

---

[1]) A compară variaţiunea funcţiunii pu, studiată mai sus, cu variaţiunea integralei u (§ 109).

1°. *Valori u reale.* Ca și în cazul $\Delta > o$, funcțiunea pu și derivata sa $p'u$ sunt reale pentru valori reale ale lui u. De unde rezultă că funcțiunea pu admite o perioadă reală și una pur imaginară. Fie $2\tilde{\omega}_2$ cea mai mică perioadă reală pe care o presupunem pozitivă și $2\,\tilde{\omega}'_2$ cea mai mică, în valoare absolută, perioadă pur imaginară, $\frac{\tilde{\omega}'_2}{i}$ fiind deasemenea $> o$.

In intervalul $(0, \tilde{\omega}_2)$ $p'u$ este < 0; prin urmare când u variază dela 0 la $\tilde{\omega}_2$, pu descrește necontenit dela $+\infty$ până la valoarea $p\,\tilde{\omega}_2$, egală cu rădăcina reală e_2, adică $p\tilde{\omega}_2 = e_2$. De unde rezultă că în intervalul $(0, \tilde{\omega}_2)$ avem, pentru $x = pu$, ecuațiunea

$$(1)\qquad \frac{dx}{du} = -\sqrt{4\,x^3 - g_2\,x - g_3}$$

și, în virtutea variațiunii funcțiunii $x = pu$ în acest interval,

$$(2)\qquad \tilde{\omega}_2 = -\int_{\infty}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3 - g_2\,x - g_3}} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3 - g_2\,x - g_3}}$$

radicalul fiind pozitiv.

In intervalul $(\tilde{\omega}_2, 2\tilde{\omega}_2)$ pu trece, în ordinea inversă, prin aceleași valori prin cari trece în intervalul $(0, \tilde{\omega}_2)$, în virtutea ecuațiunii $p\,(\tilde{\omega}_2 + u) = p\,(\tilde{\omega}_2 - u)$. De unde rezultă că, pentru valori reale u, pu poate primi orice valoare reală $\geq e_2$.

2°. *Valori $u = iv$, v real.* Prin considerațiuni identice cu cele din $(2^0, \Delta > 0)$, ținând seamă că $-e_2$ este unica rădăcină reală a ecuațiunii (12) conchidem că $\frac{\tilde{\omega}'_2}{i}$ este cea mai mică valoare pozitivă pentru care derivata $p'(v; g_2, -g_3)$ se anulează; prin urmare

$$(3)\qquad p\left(\frac{\tilde{\omega}'_2}{i};\, g_2, -g_3\right) = -e_2.$$

De unde rezultă că în intervalul $\left(0, \frac{\tilde{\omega}'_2}{i}\right)$, funcțiunea $p(v;\, g_2 - g_3)$ descrește dela $+\infty$ până la $-e_2$; prin urmare dealungul segmentului $(0, \tilde{\omega}'_2)$ funcțiunea $p(u;\, g_2,\, g_3)$ crește dela $-\infty$ până la e_2 și pe segmentul $(\tilde{\omega}'_2, 2\tilde{\omega}'_2)$ ea descrește dela e_2 până la $-\infty$. Așa dar, dealungul axei imaginare, funcțiunea pu este reală și poate prin orice valoare reală $\leq e_2$. In punctul $u = \tilde{\omega}'_2$ pu are aceiaș valoare ca în punctul $u = \tilde{\omega}_2$

$$(4)\qquad p\,\tilde{\omega}'_2 = p\tilde{\omega}_2 = e_2.$$

Semiperioada $\tilde{\omega}'_2$ este dată de integrala

$$(5)\qquad \frac{\tilde{\omega}'_2}{i} = \int_{-e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3 - g_2\,x + g_3}}$$

corespunzătoare egalității (14) (pag. 305).

Cele două perioade $2\tilde{\omega}_2$, $2\tilde{\omega}'_2$ — cea mai mică perioadă reală și cea mai mică perioadă pur imaginară, în valoare absolută — nu formează un sistem primitiv; căci, pe lângă polurile cari coincid cu vârfurile dreptunghiului acestor perioade, funcțiunea pu admite, în interiorul dreptunghiului, polul $\tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}'_2$, precum rezultă din formula

$$p\,(u+\tilde{\omega}_2)-e_2=\frac{(e_2-e_1)\,(e_2-e_3)}{pu-e_2},$$

în care numitorul din membrul al doilea se anulează pentru $u=\tilde{\omega}'_2$. Acest punct este singurul pol în interiorul dreptunghiului considerat. In adevăr, fie $\alpha + i\beta$ un punct interior dreptunghiului, diferit de $\tilde{\omega}_2+\tilde{\omega}'_2$; prin urmare *nu* avem în acelaș timp $\alpha = \tilde{\omega}_2$, $i\beta = \tilde{\omega}'_2$. Să considerăm formula de adițiune

$$p(\alpha+i\beta)+p\alpha+pi\beta=\frac{1}{4}\left(\frac{p'\alpha-p'i\beta}{p\alpha-pi\beta}\right)^2.$$

Pentru valorile considerate ale cantităților α și β, termenii $p\alpha$, $pi\beta$, $p'\alpha$, $p'i\beta$ au valori finite și $p\alpha$ este diferit de $pi\beta$; de unde rezultă că $p\,(\alpha + i\beta)$ este finit în interiorul dreptunghiului, exceptând punctul $\tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}'_2$.

Punctul $\tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}'_2$, fiind un pol al funcțiunii pu, este un punct perioadă al acestei funcțiuni; căci polurile funcțiunii pu coincid cu vârfurile rețelei de paralelograme, construite pe un sistem oarecare de două perioade primitive. Punctul $\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}'_2$, simetric cu punctul $\tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}'_2$ în raport cu axa reală, este, de asemenea, un punct perioadă.

Din cele ce preced rezultă că cantitățile

(6) $$2\omega_1 = \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}'_2, \quad 2\omega_3 = \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}'_2$$

formează un sistem de perioade primitive; paralelogramul corespunzător este un romb. Să punem

(7) $\tilde{\omega}_2 = -\,\omega_2$, $\tilde{\omega}'_2 = -\,\omega'_2$;

egalitățile precedente devin

$2\omega_1 = -\omega_2+\omega'_2$, $2\omega_3 = -\omega_2-\omega'_2$,

de unde relațiunea $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$.

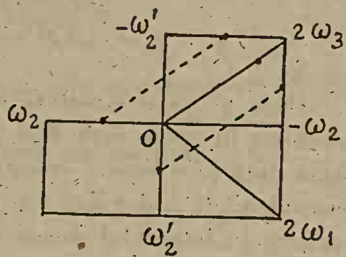

Fig. 54

Să observăm că punctele $u \pm \omega_2$ sunt congruente cu punctele $u \pm \omega'_2$, oricare ar fi valoarea lui u. In particular, considerând dreptunghiul $(-\,\omega_2, -\,\omega'_2)$ și simetricul său (ω_2, ω'_2), în raport cu origina, (fig. 54), punctele laturilor $(0, \omega'_2)$, $(0, \omega_2)$ sunt respectiv congruente cu punctele laturilor $(2\omega_3, -\omega_2)$, $(2\omega_3, -\,\omega'_2)$; prin urmare, dealungul laturilor

$(-\omega_2, 2\omega_3)$, $(-\omega_2', 2\omega_3)$, funcţiunea pu variază respectiv dela e_2 la $-\infty$ şi dela e_2 la $+\infty$.

Din cele ce preced conchidem că singurile valori u, abstracţiune făcând de multipli de perioade, pentru cari pu este real, sunt valorile reale şi valorile pur imaginare.

In puncte simetrice cu axa reală, $u = a \pm i\,b$, a şi b satisfăcând inegalităţile $0 < a < -\omega_2$, $0 < b < -\frac{\omega_2'}{i}$, avem

$$p\,(a \pm i\,b) = \mathrm{A} \mp i\,\mathrm{B},$$

semnele superioare şi inferioare corespunzându-se, A şi B fiind cantităţi reale şi $\mathrm{B} > 0$. De unde rezultă că cele două rădăcini imaginare conjugate

$$e_1 = p\omega_1 = p\left(-\frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_2'}{2}\right), \quad e_3 = p\omega_3 = p\left(-\frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega_2'}{2}\right),$$

ale ecuaţiunii (1) au coeficientul lui i respectiv $\gtrless 0$:

$$e_1 = \alpha + i\beta, \quad e_3 = \alpha - i\beta, \quad \beta > 0.$$

Din variaţiunea funcţiunii $x = pu$, dealungul dreptunghiului $(-\omega_2, -\omega_2')$, rezultă că dacă punctul u descrie conturul evitând vârfurile prin câte un cadran de cerc infinit mic cu centrul în vârf, situat în interiorul dreptunghiului, punctul x descrie de două ori conturul format din axa reală şi un semicerc foarte mare cu centrul în origine, situat dedesubtul axei reale. Dreptunghiului considerat (u) corespunde dar de două ori semiplanul (x) situat dedesubtul axei reale. Punctul $x = e_3$ corespunzător punctului $u = \omega_3$ este punct de ramificaţiune al suprafeţii lui Riemann ($x = pu$, $y = p'u$).

277. Să complectăm studiul variaţiunii derivatei $p'u$ pentru valori reale u. Punând $x = pu$, $y = p'u$, avem

$$y' = p''u = 6\,x^2 - \frac{1}{2}\,g_2, \quad y'' = p'''u = 12\,xy.$$

Dacă y' nu se anulează în intervalul $(0, -\omega_2)$, y variază necontenit în acelaş sens dela $-\infty$ la 0 şi, prin urmare, trece o singură dată prin fiecare valoare negativă. Pentru ca y să nu varieze necontenit în acelaş sens este necesar şi suficient ca y' să-şi schimbe semnul în intervalul considerat şi, deoarece această derivată rămâne finită, trebuie ca $6\,x^2 - \frac{1}{2}\,g_2$ să se anuleze pentru o valoare reală a lui x; prin urmare trebuie ca

$$g_2 > 0.$$

Această condițiune nu este suficientă. In adevăr, valorile extreme ale lui $p'u$ în intervalul considerat fiind $-\infty$ și 0, existența unui maximum trage după sine existența unui minimum. Insă, în acest interval, $x > e_2$; prin urmare este necesar ca cele două rădăcini ale ecuațiunii $6x^2 - \frac{1}{2} g_2 = 0$ să fie amândouă mai mari ca e_2. De unde rezultă că e_2 trebuie să fie negativ și prin urmare g_3, al cărui semn este acelaș ca al lui e_2, trebuie să fie negativ. Așadar, în cazul

$$g_2 > 0, \quad g_3 < 0$$

și numai în acest caz, $p'u$ admite în interiorul $(0, -\omega_2)$ un maximum și un minimum.

In intervalul $(0, \omega_2)$ $p'u$ trece prin aceleași valori cu semnele schimbate.

278. *Funcțiunile* σu, ζu; *funcțiunile* $sn\nu$, $cn\nu$, $dn\nu$, $(\Delta > 0)$.

Funcțiunea σu este reală pentru valori reale ale lui u, căci factorii produsului $\Pi' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$ sunt imaginari conjugați doi câte doi. Această funcțiune anulându-se pentru valorile reale $u = 2m\omega_1$, cari sunt zeruri simple, își schimbă semnul când u trece prin una din aceste valori și păstrează un semn invariabil în fiecare interval $(2m\omega_1, 2(m+1)\omega_1)$. Pentru valori pozitive ale lui u și destul de mici, derivata $\sigma' u$ fiind pozitivă, căci $\sigma'(0) = 1$, funcțiunea σu crește împreună cu u, când u pleacă dela 0; prin urmare, în intervalul $(0, 2\omega_1)$, σu este pozitiv și $\sigma\omega_1$ este o cantitate reală și pozitivă.

Pentru valori pur imaginare $u = i\nu$, ν real, rezultă, în virtutea formulei de omogenitate

$$(1) \qquad \sigma(i\nu \mid \omega_1, \omega_3) = i\sigma\left(\nu \mid \frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right),$$

că $\frac{\sigma i\nu}{i}$ este real și pozitiv când ν este cuprins în intervalul $\left(0, \frac{2\omega_3}{i}\right)$ și își schimbă semnul când ν trece printr'un multiplu al lui $\frac{2\omega_3}{i}$. Cantitatea $\frac{\sigma\omega_3}{i}$ este așà dar pozitivă.

Derivând ambele membre ale formulei (1), avem

$$(2) \qquad \sigma'(i\nu \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma'\left(\nu \mid \frac{\omega_3}{i}, i\omega_1\right).$$

Derivata $\sigma' u$ este așà dar reală pentru valori pur imaginare ale lui

u. De unde rezultă că funcţiunea

$$(3) \qquad \zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$$

este reală pentru valori reale ale lui u şi pur imaginară pentru valori pur imaginare. Prin urmare η_1 şi $\frac{\eta_3}{i}$ sunt cantităţi reale [1]).

279. *Funcţiunile* $\sigma_\alpha u$. Funcţiunile pare $\sigma_\alpha u$ sunt reale pentru u real precum şi pentru u pur imaginar. Aceasta rezultă din expresiunile

$$(4) \qquad \sigma_\alpha u = \sigma u \sqrt{pu - e_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Căci pentru u real, avem $pu > e_1$ şi pentru u pur imaginar avem $pu < e_3$, astfel că ambii factori din membrul al doilea sunt pur imaginari în acelaş timp. Pentru $u=0$, cele trei funcţiuni sunt egale cu 1. Funcţiunea $\sigma_1 u$ anulându-se pentru valorile reale, $u = (2m+1)\,\omega_1$ este pozitivă în intervalul $(-\omega_1, +\omega_1)$, negativă în intervalul $(\omega_1, 3\omega_1)$, etc.; celelalte două funcţiuni $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, neavând zeruri reale, rămân pozitive pentru toate valorile reale ale lui u.

Dealungul axei imaginare, funcţiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$ neavând nici un zero, rămân totdeauna pozitive, pe când funcţiunea $\sigma_3 u$, care se anulează în punctele $u=(2m+1)\omega_3$, este pozitivă în intervalul $(-\omega_3, +\omega_3)$, negativă în intervalul $(\omega_3, 3\omega_3)$, etc.

280. Din cele ce preced rezultă că radicalele reale

$$(5) \qquad \sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma \omega_1}, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3 \omega_1}{\sigma \omega_1}$$

sunt pozitive şi radicalul pur imaginar

$$(6) \qquad \sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\sigma_2 \omega_3}{\sigma \omega_3}$$

are coeficientul lui i negativ. Prin urmare radicalul

$$(7) \qquad \sqrt{e_2 - e_3} = -i\sqrt{e_3 - e_2} \qquad (6)\ (\S\ 188)$$

este un număr negativ. De unde rezultă că, în cazul considerat

---

[1]) Rezultat care se deduce şi din formulele (14), 15) (§ 215). Se poate presupune — printr'o schimbare de perioade echivalente, dacă este nevoie — $\left|\frac{\omega_3}{\omega_1}\right| \geq 1$; de unde $|q| = \left|e^{i\pi\tau}\right| \leq e^{-\pi}$. Din expresiunea (14) se poate astfel conchide $\eta_1 > o$ şi, prin urmare, din (15), $\frac{\eta_3}{i} < o$.

($\Delta > 0$), modulele funcţiunilor eliptice

$$(8)\qquad k=\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}},\quad k'=\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}$$

sunt numere reale, pozitive şi mai mici decât 1. [1]).

De asemenea sunt reale şi pozitive cantităţile

$$(9)\qquad \mathrm{K}=\omega_1\sqrt{e_1-e_3},\quad \mathrm{K}'=\frac{\omega_3}{i}\sqrt{e_1-e_3}.$$

280. *Funcţiunile eliptice ale lui Jacobi* ($\Delta>0$):

$$snv=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u},\quad cnv=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u},\quad dnv=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u},\quad v=u\sqrt{e_1-e_3}.$$

Radicalul $\sqrt{e_1-e_3}$ fiind real şi pozitiv, rezultă că variabilele v şi u sunt în acelaş timp reale şi de acelaş semn.

1°. *Valori reale.* Funcţiunile σ fiind reale pentru valori reale u, rezultă că cele trei funcţiuni ale lui Jacobi sunt reale pentru valori reale ale variabilei v. Funcţiunea dnv este totdeauna pozitivă; funcţiunile snv, cnv sunt pozitive respectiv în intervalul (0, 2K), (0, K). De unde rezultă, în virtutea egalităţii,

$$\frac{d}{dv}\,snv=cnv\;dnv,$$

că funcţiunea snv creşte necontenit dela 0 la $sn\,\mathrm{K}=1$, (§ 200), când v creşte dela 0 la K. Variaţiunea acestei funcţiuni în intervalul (K, 2K) se deduce din formula

$$sn\,(2\mathrm{K}-v)=snv;$$

că descreşte dar în acest interval dela 1 la 0. Din egalitatea $sn\,(-v) = -\,snv$, rezultă că în intervalul (0,—2K), snv trece prin valori egale şi de semne contrarii cu cele prin cari trece în intervalul (0,2K). De altă parte, la orice valoare reală v corespunde relativ la perioada 4K, o valoare congruentă, reală, cuprinsă între —2K şi +2K; prin urmare funcţiunea snv nu primeşte, pe axa reală, alte valori decât cele cuprinse între —1 şi +1, inclusiv aceste valori.

Variaţiunea funcţiunilor cnv, dnv rezultă din formulele

$$(1)\qquad cnv=\sqrt{1-sn^2v},\qquad dnv=\sqrt{1-k^2sn^2v},$$

radicalele fiind egale cu 1 pentru $v=0$.

Aceste două funcţiuni descresc necontenit în intervalul (0,K); cea dintâi descreşte dela 1 la 0, cea de a doua dela 1 la $\sqrt{1-k^2}=k'$.

[1]) Rezultat care se deduce şi din formulele (1) (§ 219).

Din egalităţile

(2) $$cn\,(2K-v)=-cnv, \quad dn\,(2K-v)=dnv,$$

rezultă că în intervalul (K, 2K) funcţiunea cnv variază dela 0 la -1 şi funcţiunea dnv dela k' la 1; amândouă funcţiunile fiind pare, se reproduc când schimbăm semnul lui v. Aceste două funcţiuni primesc dar, pentru valori reale v, numai valori cuprinse respectiv în intervalele $(-1,+1)$, $(1, k')$. Avem aşà dar tabloul de valori:

(3)

v	0	K	2K
snv	0	1	0
cnv	1	0	-1
dnv	1	k'	1

2°. *Valori pur imaginare.* Avem, formula (6) (§ 242)

(4) $$sn\,(iv,k)=i\,\frac{sn\,(v,k')}{cn\,(v,k')},$$

Din permutarea modulelor k şi k' rezultând permutarea cantităţilor K şi K′ (14) (§ 203), conchidem că dacă v creşte dela 0 la K′, numărătorul creşte dela 0 la 1 şi numitorul descreşte dela 1 la 0; prin urmare, în acest interval, egalitatea (4) este de forma

(5 $$sniv=it$$

t fiind o variabilă pozitivă care creşte dela 0 la ∞. In intervalul $(0,-K')$, funcţiunea $sniv$ trece prin aceleaşi valori cu semnul schimbat. Aşà dar când v creşte dela $-K'$ la $+K'$, $\frac{sniv}{i}$ creşte necontenit dela $-\infty$ la $+\infty$; prin aceleaşi valori trece în intervalele (K′, 3 K′), etc.

Variaţiunea funcţiunilor $cniv$, $dniv$ rezultă din formulele

(6) $$cn\,(iv,k)=\frac{1}{cn\,(v,k')}, \quad dn\,(iv,k)=\frac{dn\,(v,k')}{cn\,(v,k')}.$$

In intervalul (0, K′) ambele funcţiuni sunt reale şi cresc necontenit dela 1 la ∞; în intervalul (K′, 2K′) ele cresc dela $-\infty$ la -1.

Variaţiunea acestor trei funcţiuni se poate reprezintà prin tabloul

(7)

v	0	K′	2 K′,
$\frac{1}{i}\,sniv$	0	$\pm\infty$	0
$cniv$	1	$\pm\infty$	-1,
$dniv$	1	$\pm\infty$	-1.

3°. $v = iK' + w$. Avem, (7) (§ 199),

$$(8)\quad \begin{aligned} sn(iK'+w) &= \frac{1}{k\, sn\, w}, \\ cn(iK'+w) &= -i\frac{dn w}{k sn w}, \\ dn(iK'+w) &= -i\frac{cn w}{sn w}. \end{aligned}$$

De unde, substituind valorile (3), deducem tabloul de valori:

(9)

w	0	K	2K
$sn(iK'+w)$	∞	$\frac{1}{k}$	∞
$\frac{1}{i}cn(iK'+w)$	$-\infty$	$-\frac{k'}{k}$	$-\infty$
$\frac{1}{i}dn(iK+w)$	$-\infty$	0	$+\infty$

4°. $v = K + iw$. Avem, (6) (§ 199),

$$(10)\quad \begin{aligned} sn(K+iw) &= \frac{cn\, iw}{dn\, iw}, \\ cn(K+iw) &= -k'\frac{sn\, iw}{dn\, iw}, \\ dn(K+iw) &= k'\frac{1}{dn\, iw}, \end{aligned}$$

sau, în virtutea formulelor (6) (§ 242),

$$(11)\quad \begin{aligned} sn(K+iw) &= \frac{1}{dn(w,k')}, \\ cn(K+iw) &= -ik'\frac{sn(w,k')}{dn(w,k')}, \\ dn(K+iw) &= k'\frac{cn(w,k')}{dn(w,k')}. \end{aligned}$$

De unde, înlocuind funcțiunile din membrele de al doilea prin valorile lor, cari rezultă din tabloul (3) prin permutarea cantităților K cu K' și a modulelor k cu k', deducem tabloul de valori

(12)

w.	0	K'	2 K'
$sn(K+iw)$	1	$\frac{1}{k}$	1
$\frac{1}{i}cn(K+iw)$	0	$-\frac{k'}{k}$	0
$dn(K+iw)$	k'	0	$-k'$

Transformare conformă.

281. *Funcţiunea* $x=sn\nu$. Din variaţiunea funcţiunii $sn\nu$ dealungul dreptunghiului (K, iK'), putem conchide că funcţiunea $x=sn\nu$ transformă, în mod conform, aria acestui dreptunghiu în cadranul planului (x), mărginit de semiaxele de coordonate pozitive. In adevăr, în interiorul dreptunghiului, funcţiunea $x = sn\nu$ este olomorfă şi derivata $\frac{dx}{d\nu}$ este diferită de zero. Excepţiune există pentru vârfurile $\nu = K$ şi $\nu = K+iK'$, în cari derivata se anulează şi vârful $\nu = iK'$ care este un pol al funcţiunii. Rămâne să arătăm că unui punct $\nu=a+ib$, $0<a<K$, $0<b<K'$, corespunde un punct $x = \xi + i\eta$, $\xi > 0, \eta > 0$. Aceasta rezultă imediat din formula de adiţiune

$$sn\,(a+ib)=\frac{sna\; cnib\; dnib+snib\; cna\; dna}{1-k^2sn^2a\; sn^2ib},$$

în virtutea valorilor cuprinse în tablourile (3) şi (7).

Din corespondenţa conformă dintre cele două arii, deducem consecinţele următoare:

1°. Latura (0, iK') a dreptunghiului şi semiaxa imaginară pozitivă (x) corespunzându-se punct cu punct, conchidem, în virtutea simetriei în raport cu aceste linii, că dreptunghiul II$_\nu$ simetricul dreptunghiului

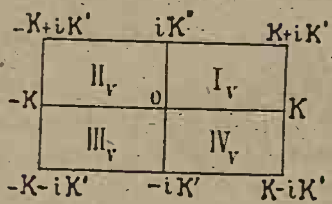

Fig. 55

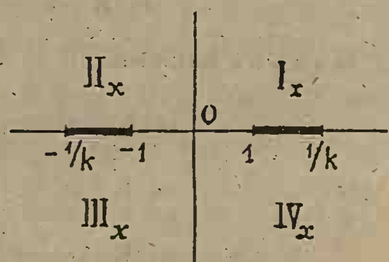

Fig. 56

I$_\nu$ (fig. 55) şi cadranul II$_x$ simetricul lui I$_x$ (fig. 56) se corespund în mod conform. Segmentele $(0,-1)$ $\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$, $\left(-\frac{1}{k},-\infty\right)$ corespund respectiv laturilor $(0,-K)$, $(-K,-K+iK')$, $(-K+iK',iK')$.

2°. Latura (0, K) şi segmentul (0, 1) corespunzându-se punct cu punct, conchidem corespondenţa conformă între dreptunghiul IV$_\nu$ (K, $-i$K') şi cadranul IV$_x$. Segmentele $\left(1,\frac{1}{k}\right)$, $\left(\frac{1}{k},\infty\right)$ corespund respectiv laturilor $(K, K-iK')$, $(K-iK', -iK')$.

3°. Pentru motive analoage de simetrie considerând latura $(0,-iK')$ și semiaxa imaginară negativă (x), conchidem corespondența conformă dintre dreptunghiul III_ν simetric cu dreptunghiul IV_ν și cadranul III_x simetricul cadranului IV_x. Segmentele $\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$, $\left(-\frac{1}{k},-\infty\right)$ corespund laturilor $(-K,-K-iK')$, $(-K-iK',-iK')$.

Să observăm că segmentul $\left(\frac{1}{k},\infty\right)$ corespunde laturilor opuse $(-iK', K-iK')$, $(iK', K+iK')$, echivalente relativ la perioada $2iK'$. Pentru acelaș motiv segmentul $\left(-\frac{1}{k},-\infty\right)$ corespunde laturilor opuse $(-iK', -K-iK')$, $(iK', -K+iK')$. In fine să observăm că segmentul $\left(1,\frac{1}{k}\right)$ corespunde atât laturii $(K, K+iK')$ cât și laturii $(K, K-iK')$; de asemenea, segmentul $\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$ corespunde laturilor $(-K,-K-iK')$, $(-K,-K+iK')$. Efectuând două tăieturi dealungul acestor segmente, țărmurile superioare ale lor corespund respectiv laturilor situate deasupra axei reale și țărmurile inferioare corespund laturilor simetrice cu cele dintâi.

Din cele ce preced rezultă că dreptunghiul ale cărui vârfuri sunt punctele

$$-K-iK',\ K-iK',\ K+iK',\ -K+iK',$$

din care excludem una din cele două laturi paralele echivalente, se transformă în mod conform în tot planul (x), limitat de tăieturile $\left(1,\frac{1}{k}\right)$ $\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$. Acest dreptunghiu constitue un *domeniu fundamental*[1] al funcțiunii $x = sn\nu$.

282. *Funcțiunea* $y = cn\nu$. Din variațiunea funcțiunii $cn\nu$ dealungul dreptunghiului I_ν (K, iK'), conchidem prin considerațiuni

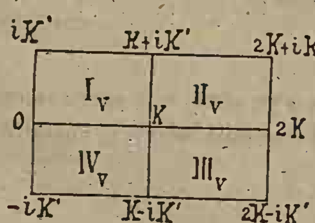

Fig. 57

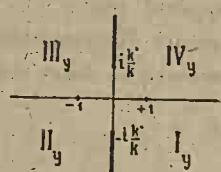

Fig. 58

[1] Vezi I, pag. 157.

analoage cu cele din cazul funcţiunii $sn\nu$, că funcţiunea $y = cn\nu$ transformă, intr'un mod conform, acest dreptunghiu în cadranul I_y, mărginit de semiaxa reală pozitivă şi de semiaxa imaginară negativă. De unde deducem, prin simetrie, corespondenţa conformă între dreptunghiurile II_ν, III_ν, IV_ν cu cadranele II_y, III_y, IV_y. Este de observat că, în virtutea egalităţilor

$$cn\,(-\nu) = cn\nu, \quad cn\,(2K + i\nu) = cn\,(2K - i\nu),$$

segmentul $(1, \infty)$ corespunde laturilor $(0, iK')$, $(0, -iK')$ şi segmentul $(-1, -\infty)$ corespunde laturilor

$$(2K, 2K + iK'), \ (2K, 2K - iK'),$$

două câte două simetrice în raport cu axa reală (ν).

De asemenea, în virtutea egalităţilor

$$cn\,(K+iK'+\nu) = cn\,(K+iK'-\nu), \quad cn\,(K-iK'+\nu) = cn\,(K-iK'-\nu),$$

segmentul $\left(-i\frac{k'}{k}, -i\infty\right)$ corespunde laturilor

$$(K + iK', iK'), \ (K+iK', 2K + iK'),$$

şi segmentul $\left(i\frac{k'}{k}, i\,\infty\right)$ corespunde laturilor

$$(K + iK', -iK'), \ (K - iK', 2K - iK').$$

Din cele ce preced rezultă că dreptunghiul ale cărui vârfuri sunt punctele

$$-iK', \ 2K-iK', \ 2K+iK', \ iK'$$

şi planul (y) limitat de tăieturile

$$(1, \infty), \ (-1, -\infty), \ \left(i\frac{k'}{k}, i\infty\right), \ \left(-i\frac{k'}{k}, -i\infty\right)$$

se corespund punct cu punct.

Observare. Reprezentând variabila y pe sferă, cele patru tăieturi se pot considerà ca două tăieturi, una între punctele ± 1, cealaltă între punctele $\pm i\frac{k'}{k}$.

283. *Funcţiunea* $z = dn\nu$. Din variaţiunea funcţiunii $dn\nu$ dealungul dreptunghiului (K, iK'), conchidem corespondenţa conformă dintre dreptunghiul ale cărui vârfuri sunt punctele

$$0, 2K, 2K+2iK', 2iK',$$

şi planul (z), în care introducem tăieturile $(1,k')$, $(-1, -k')$, cea dintâiu corespunzând laturilor $(0, K)$, $(K, 2K)$ şi cea de a doua laturilor paralele $(2iK', K+2iK')$, $(K+2iK', 2K+2iK')$. Fig. 59 şi 60 arată regiunile cari se corespund.

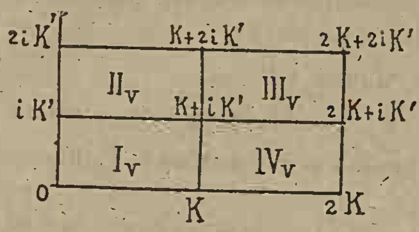

Fig. 59

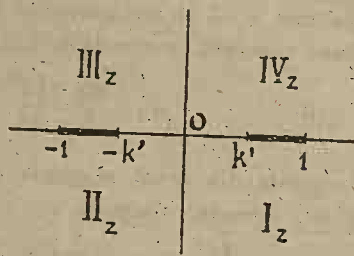

Fig. 60

III. ***Funcţiunile** pu, ζu, σu, **în cazul când unul din invarianţi este nul.***

284. Vom considera succesiv cazul când unul sau celalt din cei doi invarianţi este nul.

I. $g_3=0$.

Să facem, în formula de omogenitate

$$(1) \qquad p\left(\lambda u; \frac{g_2}{\lambda^4}, 0\right) = \frac{1}{\lambda^2} p\,(u; g_2, 0),$$

substituţiunile

$$(2) \qquad \lambda u = v, \quad \lambda^2 = \frac{\sqrt{g_2}}{2};$$

obţinem formula

$$(3) \qquad p\,(u; g_2, 0) = \frac{1}{2}\sqrt{g_2}\, p\,(v; 4, 0).$$ [1]

Funcţiunea

$$(4) \qquad y = p(v; 4, 0)$$

---

[1]) Membrul al doilea păstrează aceiaş valoare oricare ar fi determinaţiunea radicalului

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sqrt{g_2}}{2}}.$$

Fie λ_0 una din determinaţiunile acestui radical şi $\lambda_0 u = v_0$; avem

$$\lambda = \lambda_0 \varepsilon, \quad v = v_0 \varepsilon, \quad (\varepsilon^4 = 1).$$

Membrul al doilea (4) devine

$$\lambda^2 \varepsilon^2 p\,(v_0 \varepsilon; 4,0) = \lambda_0^2 p\,(v_0; 4, 0)$$

adică

$$\lambda^2 p\,(v; 4, 0) = \lambda^2_0 p\,(v_0; 4, 0).$$

intră în cazul invarianţilor reali cu discriminantul $\Delta>0$. Avem

$$(5) \qquad \left(\frac{dy}{dv}\right)^2=4y\,(y^2-1), \quad e_1=1,\ e_2=0,\ e_3=-1.$$

Reprezintând prin ω'_1, ω'_3 respectiv semiperioada reală pozitivă cea mai mică şi semiperioada pur imaginară cea mai mică, în valoare absolută, avem (17) (§ 274)

$$(6) \qquad \omega'_1=\frac{\omega'_3}{i}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{dy}{\sqrt{y^3-y}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{y-y^3}}.$$

Integrala din urmă se poate exprimà prin funcţiunea Γ. Punând $y^2=t$, această integrală se scrie

$$\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}.$$

De altă parte, avem

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\pi\sqrt{2}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};$$

prin urmare

$$(7) \qquad \omega'_1=\frac{\omega'_3}{i}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

Semiperioadele corespunzătoare ω_1, ω_3 ale funcţiunii $p\,(u;\,g_2,\,0)$ sunt aşà dar, în virtutea substituţiunilor (3),

$$(8) \qquad \omega_1=\frac{\omega_3}{i}=\frac{1}{4\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right), \quad \lambda=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{g_2}}.$$

Paralelogramul acestor perioade este un pătrat.

Viceversa. Relaţiunea $\omega_3=i\omega_1$ *trage după sine valoarea* $g_3=0$ In adevăr, grupând în egalitatea

$$\frac{1}{140}g_3=\frac{1}{2^6\omega_1{}^6}\Sigma'\frac{1}{(m+ni)^6},$$

termenii sumei doi câte doi în modul următor:

$$\frac{1}{(m+ni)^6}+\frac{1}{(n-mi)^6}$$

şi observând că $(n-mi)^6=-(m+ni)^6$, rezultă $g_3=0$. Această valoare rezultă şi din formula

$$p\,(iu|\omega_1,\omega_3)=-p\left(u\left|\frac{\omega_3}{i},\,i\omega_1\right.\right)=-p\,(u|\omega_1,\,\omega_3),$$

în care făcând $u=\omega_1$, obţinem $e_3=-e_1$; prin urmare $e_2=0$. De unde $g_3=0$.

285 Formulele de omogenitate ale funcţiunilor ζu şi σu

$$\zeta(iu|i\omega_1, i\omega_3) = -i\zeta(u|\omega_1, \omega_3),$$
$$\sigma(iu|i\omega_1, i\omega_3) = i\sigma(u|\omega_1, \omega_3)$$

devin, în virtutea egalităţii $\omega_3 = i\omega_1$,

$$(9) \qquad \begin{cases} \zeta(iu|\omega_1, \omega_3) = -i\zeta(u|\omega_1, \omega_3), \\ \sigma(iu|\omega_1, \omega_3) = i\sigma(u|\omega_1, \omega_3); \end{cases}$$

de unde, făcând $u = \omega_1$,

$$(10) \qquad \eta_3 = -i\eta_1, \quad \sigma\omega_3 = i\sigma\omega_1.$$

Relaţiunea $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}$ devine aşà dar

$$(11) \qquad \eta_1\omega_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Funcţiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ fiind omogene şi de ordinul zero, avem

$$\sigma_1(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_1\left(u\middle|\frac{\omega_1}{i}, \frac{\omega_3}{i}\right) = \sigma_1(u|-\omega_3, \omega_1),$$

$$(12) \qquad \sigma_2(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_2\left(u\middle|\frac{\omega_1}{i}, \frac{\omega_3}{i}\right) = \sigma_2(u|-\omega_3, \omega_1),$$

$$\sigma_3(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_3\left(u\middle|\frac{\omega_1}{i}, \frac{\omega_3}{i}\right) = \sigma_3(u|-\omega_3, \omega_1).$$

De altă parte, înlocuirea perioadelor $(2\omega_1, 2\omega_3)$ prin perioadele echivalente $(-2\omega_3, 2\omega_1)$ are drept efect a permutà funcţiunile $\sigma_1 u$, $\sigma_3 u$ şi a lăsà funcţiunea $\sigma_2 u$ neschimbată (§ 187). Avem aşà dar formulele

$$(13) \qquad \begin{cases} \sigma_1(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_3(u|\omega_1, \omega_3), \\ \sigma_2(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_2(u|\omega_1, \omega_3), \\ \sigma_3(iu|\omega_1, \omega_3) = \sigma_1(u|\omega_1, \omega_3). \end{cases}$$

II. $g_2 = 0$.

286. Să facem în formula de omogenitate

$$(1) \qquad p\left(\lambda u; 0, \frac{g_3}{\lambda^6}\right) = \frac{1}{\lambda^2} p(u; 0, g_3)$$

substituţiunile

$$(2) \qquad \lambda u = v, \quad \lambda = \sqrt[6]{\frac{g_3}{4}};$$

obţinem formula

$$(3) \qquad p(u;0,g_3)=\sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}\,p\,(v;\,0,4).\text{[1]}$$

Funcţiunea

$$(4) \qquad y=p\,(v;\,0,4)$$

intră în cazul invarianţilor reali, ($\Delta<0$.) Avem

$$(5) \quad \left(\frac{dy}{dv}\right)^2=4\,(y^3-1),\quad e_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ e_2=1;\ e_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Funcţiunea eliptică y are dar două perioade primitive imaginare conjugate. Reprezintând prin $-\omega_2$, $-\omega'_2$ respectiv partea reală şi partea pur imaginară ale acestor perioade, avem (2) (5) (§ 276)

$$(6) \qquad -\omega_2=\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{dy}{\sqrt{y^3-1}},\quad -\frac{\omega'_2}{i}=\frac{1}{2}\int_{-1}^\infty\frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}.$$

287. *Teoremă. Dacă funcţiunea* $p\,(u;\ 0,g_3)$ *admite perioada* ω, *ea admite şi perioada* $\varepsilon\omega$, ε *fiind o rădăcină cubică sau o rădăcină a şasea a unităţii.* In adevăr, să facem $\lambda=\varepsilon$ în formula de omogenitate (1) şi să punem $\varepsilon u=v$; avem

$$(7) \qquad p\,(v;\,0,g_3)=\frac{1}{\varepsilon^2}p\,(u;\,0,g_3).$$

Inlocuind u prin $u+\omega$, obţinem

$$(8) \qquad p\,(v+\varepsilon\omega;\,0,g_3)=\frac{1}{\varepsilon^2}p\,(u+\omega;\,0,g_3)=\frac{1}{\varepsilon^2}p\,(u;\,0,g_3).$$

Din (7) şi (8) rezultă egalitatea

$$(9) \qquad p\,(v+\varepsilon\omega;\,0,g_3)=p\,(v;\,0,g_3),$$

oricare ar fi valoarea lui v.

Paralelogramul perioadelor este un romb ale cărui laturi fac între ele un unghiu de 120^0 sau de 60^0, după cum ε este rădăcina a treia sau a şasea a unităţii.

Cantităţile ω şi $\varepsilon\omega$ fiind perioade, rezultă că $\varepsilon^k\omega$ este o perioadă, k fiind un număr întreg oarecare. Toate aceste perioade se reduc la cele dintâi două, în virtutea egalităţii

$$\varepsilon^2=-1-\varepsilon,\quad \text{dacă } \varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

---

[1]) Membrul al doilea păstrează aceeaş valoare, oricare ar fi determinaţiunea radicalului

$$\lambda=\sqrt[6]{\frac{g_3}{4}}.$$ V. (§ 284) Nota.

sau, în virtutea egalităților

$$\varepsilon^2=-1+\varepsilon,\quad \varepsilon^3=-1,\quad \varepsilon^4=-\varepsilon,\quad \varepsilon^5=1-\varepsilon,\quad \text{dacă } \varepsilon=e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Viceversa. Dacă raportul a două perioade are una din valorile $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ *sau* $e^{\frac{i\pi}{3}}$, *invariantul* g_2 *este nul.* Fie $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Să grupăm trei câte trei termenii sumei

$$\frac{1}{60}\,g_2=\frac{1}{2^4\omega_1^4}\,\Sigma'\frac{1}{(m+n\varepsilon)^4},$$

corespunzători sistemelor de numere (m, n), (m', n'), (m'', n''), legate între ele prin condițiunile

$$(10)\qquad \begin{cases} m'+n'\varepsilon=\varepsilon\,(m+n\varepsilon)=-n+(m-n)\,\varepsilon, \\ m''+n''\varepsilon=\varepsilon^2\,(m+n\varepsilon)=(n-m)-m\varepsilon; \end{cases}$$

de unde rezultă egalitățile

$$(11)\qquad m'=-n,\ n'=m-n,\ m''=n-m,\ n''=-m.$$

Cele trei sisteme de numere sunt distincte, căci expresiunile

$$m+n\varepsilon,\ \varepsilon\,(m+n\varepsilon),\ \varepsilon^2\,(m+n\varepsilon)$$

sunt diferite. Suma celor trei termeni astfel grupați fiind nulă, rezultă $g_2=0$.

Cazul $\varepsilon=e^{\frac{i\pi}{3}}$ se reduce la cel precedent, dacă înlocuim semi-perioadele ω_1, $\omega_3=\varepsilon\omega_1$ prin sistemul echivalent

$$\omega'_1=\omega_1,\quad \omega'_3=\varepsilon^2\,\omega_1=-\omega_1+\omega_3;$$

de unde

$$\frac{\omega'_3}{\omega'_1}=-1+e^{\frac{i\pi}{3}}=e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

288. Plecând dela $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, avem

$$(12)\qquad \begin{cases} p\,(\varepsilon u;\,0,\,g_3)=\varepsilon\,p(u;\,0,\,g_3), \\ p'\,(\varepsilon u;\,0,\,g_3)=p'\,(u;\,0,\,g_3), \\ \sigma\,\varepsilon u=\varepsilon\sigma u,\quad \zeta\,\varepsilon u=\varepsilon^2\,\zeta u. \end{cases}$$

Din ultima formulă rezultă

$$(13)\qquad \eta_3=\varepsilon^2\,\eta_1;$$

prin urmare, în virtutea relațiunii

$$\eta_1\,\omega_3-\eta_3\,\omega_1=\eta_1\,\omega_1\,(\varepsilon-\varepsilon^2)=\frac{i\pi}{2}$$

avem

$$(14)\qquad \eta_1\,\omega_1=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

289. *Zerurile funcțiunii* $p\,(u;\,0,\,g_3)$. Se poate găsi expresiunea generală a zerurilor funcțiunii pu în cazul când $g_2=0$. Să presupunem

$\varepsilon^3=1$; avem, în virtutea formulei de omogenitate,

(15) $$p(\varepsilon u; 0, g_3)=\varepsilon p(u; 0, g_3).$$

De unde rezultă că dacă u_0 este un zero al funcţiunii, punctele εu_0, $\varepsilon^2 u_0$ vor fi zeruri. Insă funcţiunea pu neavând mai mult decât două zeruri incongruente, urmează că cel puţin două din zerurile $u_0, \varepsilon u_0, \varepsilon^2 u_0$ sunt congruente. Să presupunem, de ex., verificată congruenţa $\varepsilon u_0 \equiv u_0$, adică

$$\varepsilon u_0 = u_0 + 2m\omega_1 + 2n\varepsilon\omega_1.$$

Multiplicând ambele membre cu ε şi observând că ω_1 şi $\varepsilon\omega_1$ fiind semiperioade, $\varepsilon^2\omega_1=-\omega_1-\varepsilon\omega_1$ este de asemenea o semiperioadă, obţinem congruenţele

$$\varepsilon^2 u_0 \equiv \varepsilon u_0 \equiv u_0.$$

La aceeaş concluziune ajungem dacă plecăm dela congruenţa $\varepsilon^2 u_0 \equiv u_0$. Cele trei zeruri considerate sunt aşà dar congruente.

Viceversa, valorile $u \not\equiv 0$, cari satisfac congruenţa

$$\varepsilon u \equiv u,$$

sunt zeruri ale funcţiunii $p(u; 0, g_3)$; căci altminteri ar urmà, în virtutea acestei, congruenţe să avem $p\varepsilon u = pu$: ceeace este în contrazicere cu egalitatea (15).

Vom obţine dar toate zerurile distincte căutând valorile incongruente ale lui $u \not\equiv 0$, cari satisfac egalitatea

$$u=\varepsilon u+2(m+n\varepsilon)\omega_1;$$

de unde

(16) $$u=\frac{2(m+n\varepsilon)}{1-\varepsilon}\omega_1,$$

sau, în virtutea identităţii

$$\frac{1}{1-\varepsilon}=\frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)}=\frac{2+\varepsilon}{3},$$

zerurile vor fi date de egalitatea

(17) $$u=\frac{2(2+\varepsilon)}{3}(m+n\varepsilon)\omega,$$

Este deajuns, pentru a obţine două zeruri incongruente, a face $m=0$, $n=\pm 1$. Aceste zeruri sunt date de formula

(18) $$u=\pm\frac{2(1-\varepsilon)}{3}\omega_1.$$

Aceeaş formulă se aplică şi în cazul $\varepsilon=e^{\frac{i\pi}{3}}$; căci făcând substituţiunea

$$\omega'_1=\omega_1, \quad \omega'_3=-\omega_1+\omega_3$$

avem

$$\omega'_3=e^{\frac{2i\pi}{3}}\omega_1.$$

CAPITOLUL XXII.

PROBLEMA INVERSIUNII. INTEGRALE ELIPTICE.

I. *Problema inversiunii.*

290. Am văzut (§ 181) că o funcţiune eliptică de ordinul al doilea $x = f(u)$ satisface o ecuaţiune diferenţială de forma

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \mathrm{X},$$

X fiind un polinom de x de gradul 3 sau 4, după cum funcţiunea are în paralelogramul perioadelor un pol dublu sau două poluri simple.

Funcţiunea eliptică $f(u)$ fiind dată, putem determinà polinomul X. Pentru aceasta este deajuns, dacă $f(u)$ are două poluri simple, să punem

$$\mathrm{X} = f'^2(u) = \mathrm{A}f^4(u) + \mathrm{A}_1 f^3(u) + \mathrm{A}_2 f^2(u) + \mathrm{A}_3 f(u) + \mathrm{A}_4$$

şi să desvoltăm ambele membre în domeniul unui pol. Prin identificare, deducem valorile coeficienţilor A.

Viceversa, fiind dat un polinom X de gradul 3 sau 4, fără factori multipli, limita superioară a integralei de speţa I

$$(2) \qquad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}$$

este (§ 107) o funcţiune eliptică de u, având ca perioade două module de periodicitate distincte ale integralei. Determinarea acestei funcţiuni, de unde rezultă şi aceea a derivatei sale $\frac{dx}{du} = \sqrt{\mathrm{X}}$, constitue *problema inversiunii*. Rezolvirea acestei probleme conduce dar a exprimà x şi $\sqrt{\mathrm{X}}$ prin funcţiuni eliptice de un acelaş argument, având aceleaşi perioade; precum, dacă X este un polinom de x de gradul 1 sau 2, exprimăm x şi $\sqrt{\mathrm{X}}$ respectiv prin funcţiuni raţionale sau exponenţiale de un acelaş parametru.

291. Să considerăm întâiu cazul când X este un polinom de gradul 3 şi fie

$$(3) \qquad \mathrm{X} = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3.$$

Să aplicăm substituţiunea

$$(4) \qquad x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{4}{a_0} y;$$

ecuaţiunea (1) devine, după ce dividem ambele membre cu $\left(\frac{4}{a_0}\right)^2$,

$$(5) \qquad \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

coeficienţii g_2 şi g_3 având valorile

$$(6)\qquad g_2=\frac{3}{4}(a_1^2-a_0a_2),\qquad g_3=\frac{1}{16}(3\,a_0a_1a_2-a_0^2a_3-2\,a_1^3).$$

Soluţiunea ecuaţiunii (5), care devine infinită pentru $u=o$, fiind $y=p\,(u;\,g_2,g_3)$, rezultă, pentru x şi pentru $\sqrt{X}$, expresiunile

$$(7)\qquad \begin{cases} x=-\dfrac{a_1}{a_0}+\dfrac{4}{a_0}pu,\\[2ex] \sqrt{X}=\dfrac{dx}{du}=\dfrac{4}{a_0}p'u, \end{cases}$$

argumentul u fiind dat de integrala

$$(8)\qquad u=\int_\infty^x\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

292. Să considerăm acum cazul când X este un polinom de gradul 4:

$$(9)\qquad X=f\,(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4.$$

Fie a o rădăcină a ecuaţiunii $X=o$. Făcând substituţiunea

$$(10)\qquad x=a+\frac{1}{y},$$

ecuaţiunea (1) ia forma

$$(11)\qquad \left(\frac{dy}{du}\right)^2=Y,$$

în care Y este un polinom de gradul 3:

$$(12)\qquad Y=f'\,(a)\,y^3+\frac{1}{2}f''\,(a)\,y^2+\frac{1}{3!}f'''\,(a)\,y+a_0.$$

De unde rezultă (7) soluţiunea

$$(13)\qquad y=-\frac{f''(a)}{6f'(a)}+\frac{4}{f'\,(a)}pu.$$

Avem dar expresiunile

$$(14)\qquad \begin{cases} x=a+\dfrac{\frac{1}{4}f'\,(a)}{pu-\frac{1}{24}f''(a)},\\[3ex] \sqrt{X}=\dfrac{dx}{du}=-\dfrac{\frac{1}{4}f'\,(a)}{[pu-\frac{1}{24}f''(a)]^2}p'\,u,\\[3ex] u=\displaystyle\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{X}}. \end{cases}$$

Invarianţii g_2 şi g_3 ai funcţiunii pu, cari figurează în egalităţile precedente, se pot calculà cu ajutorul formulelor (6), în cari înlocuim coeficienţii a_0, a_1, a_2, a_3 respectiv prin

$$f'(a), \quad \frac{1}{3!}f''(a); \quad \frac{1}{3.3!}f'''(a), \ a_0.$$

Obţinem

$$(15) \quad \begin{cases} g_2=\dfrac{1}{48}\left[f''^2(a)-2f'(a)f'''(a)\right], \\ g_3=\dfrac{1}{24^2}\left[f'(a)f''(a)f'''(a)-\dfrac{1}{3}f''^3(a)\right]-\dfrac{a_0}{16}f'^2(a). \end{cases}$$

Efectuând calculele, găsim

$$(16) \quad \begin{cases} g_2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2, \\ g_3=a_0a_2a_4-a_0a_3^2-a_1^2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3. \end{cases}$$

Aceste două expresiuni coincid cu cei doi invarianţi S şi T ai *formei bicuadratice*

$$a_0x_1^4+4a_1x_1^3x_2+6a_2x_1^2x_2^2+4a_3x_1x_2^3+a_4x_2^4 \text{ [1]}).$$

sau, cum se mai obişnueşte a se zice, cu invarianţii polinomului X; căci ele rămân neschimbate dacă înlocuim în acest polinom x prin $x+h$, h fiind o constantă arbitrară.

Observare. Punând

$$(17) \qquad z=pu, \quad Z=4z^3-g_2z-g_3,$$

avem, în virtutea formulelor (14),

$$(18) \qquad x=a+\frac{\dfrac{1}{4}f'(a)}{z-\dfrac{1}{24}f''(a)},$$

$$(19) \qquad \int_a^x\frac{dx}{\sqrt{X}}=\int_\infty^z\frac{dz}{\sqrt{Z}}=\frac{1}{2}\int_\infty^z\frac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Funcţiunea x, inversa integralei

$$u=\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

---

[1]) $\quad S=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2, \qquad T=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$

Egalităţile $g_2=S$, $g_3=T$ se verifică imediat, dacă privim polinomul $4x^3-g_2x-g_3$ ca de gradul 4 cu coeficientul $a_0=0$ şi facem în S şi T

$$a_0=a_2=0, \quad a_1=1, \ a_3=-\frac{g_2}{4}, \ a_4=-g_3.$$

în care limita inferioară este un zero al polinomului X, este de forma (6) (§ 106)

$$x = a + \mathrm{P}\,(u^2),$$

prin urmare funcţiune pară de u: ceeace explică relaţiunea de gradul întâi între funcţiunile eliptice x şi $z = pu$, amândouă fiind pare şi de ordinul al doilea (§ 177). Formula (18) este cuprinsă printre substituţiunile lineare cari transformă integrala dată în integrala normală a lui Weierstrass (§ 94).

293. *Altă metodă.* Metoda precedentă pentru a efectuà inversiunea integralei de speţa I, în cazul când X este un polinom de gradul 4, cere să cunoaştem o rădăcină a ecuaţiunii $X = o$. Se poate efectuà această inversiune fără a cunoaşte niciuna din rădăcinile acelei ecuaţiuni. Ceva mai mult, din formulele de inversiune obţinute prin această metodă vom puteà deduce rădăcinile ecuaţiunii.

Să considerăm funcţiunea eliptică

$$(1) \qquad y = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

în care u este argumentul variabil şi v o constantă oarecare. Această funcţiune este de ordinul al doilea, având polurile $u = o$ şi $u = -v$; prin urmare ea satisface o ecuaţiune diferenţială de forma

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \mathrm{Y},$$

Y fiind un polinom de gradul 4. Să căutăm acest polinom.

In virtutea substituţiunii (1), formulele de adiţiune

$$p\,(u+v) - pu = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

$$p\,(u+v) - pv = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dv}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \frac{1}{2}\,\frac{p''v}{pu - pv} - \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{(pu - pv)^2}\,p'v$$

se scriu respectiv

$$(2) \qquad p\,(u+v) - pu = -\frac{dy}{du},$$

$$(3) \qquad 2\,[p\,(u+v) - pv]\;[pu - pv] = p''v - 2y\,p'v.$$

De asemenea formula de adiţiune

$$p\,(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2$$

devine

$$(4) \qquad p\,(u+v) + pu + pv = y^2;$$

de unde

(5) $$[p(u+v)-pv]+[pu-pv]=y^2-3\,pv.$$

Să ridicăm această egalitate la pătrat şi să scădem egalitatea (3) multiplicată cu 2, obţinem

(6) $$[p\,(u+v)-pu]^2=(y^2-3\,pv)^2+4\,y\,p'v-2p''v.$$

Prin urmare, în virtutea ecuaţiunii (2) şi ţinând seamă de relaţiunea $p''v=6p^2v-\frac{1}{2}\,g_2$, avem ecuaţiunea diferenţială

(7) $$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=y^4-6\,pv\,y^2+4p'v\,y+g_2-3\,p^2v.$$

Polinomul căutat Y este aşa dar

(8) $$Y=y^4-6\,pv\,y^2+4\,p'v\,y+(g_2-3\,p^2v).$$

Din cele ce preced rezultă că fiind dat acest polinom Y, avem, pentru a efectuà inversiunea integralei

(9) $$u=\int_x^y\frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

formulele (1) şi (2), adică

(10) $$y=\frac{1}{2}\,\frac{p'u-p'v}{pu-pv}, \qquad \sqrt{Y}=pu-p\,(u+v).$$

294. Polinomul considerat Y este un polinom *particular*, însă, precum vom vedeà, cazul general se poate aduce la cel precedent.

Fie mai-întâiu

(11) $$Y=y^4+6a_2\,y^2+4a_3\,y+a_4$$

un polinom de gradul 4 fără termen de gradul al treilea. Să identificăm acest polinom cu polinomul (8); vom obţine valorile

(12) $$pv=-a_2,\quad p'v=a_3,\quad g_2=3\,p^2v+a_4=3a_2{}^2+a_4.$$

Invariantul g_3 se deduce din ecuaţiunea

$$p'^2v=4\,p^3v-g_2\,pv-g_3$$

care dă

(13) $$g_3=-4a_2{}^3+g_2a_2-a_3{}^2=a_2\,a_4-a_2{}^3-a_3{}^2.$$

Cunoscând astfel invarianţii g_2 şi g_3, funcţiunea $p\,(u;\,g_2,g_3)$ este definită şi relaţiunile

$$pv=-a_2,\quad p'v=a_3,$$

compatibile, în virtutea relaţiunii care ne-a dat g_3, determină argumentul v.

295. Să considerăm acum un polinom de gradul al patrulea oarecare

(14) $$X=a_0 x^4+4a_1 x^3+6a_2 x^2+4a_3 x+a_4$$

şi să facem substituţiunea

(15) $$x=-\frac{a_1}{a_0}+\frac{1}{\sqrt{a_0}}y.$$

Ecuaţiunea

(16) $$\left(\frac{dx}{du}\right)^2=X$$

va luà forma

(17) $$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=y^4+6\alpha_2 y^2+4\alpha_3 y+\alpha_4,$$

coeficienţii α_2, α_3, α_4 fiind determinaţi de ecuaţiunile

(18) $$\begin{cases} \alpha_2=\dfrac{a_0a_2-a_1^2}{a_0}, \quad \alpha_3=\dfrac{a_0^2 a_3-3a_0 a_1 a_2+2a_1^3}{a_0\sqrt{a_0}}, \\ \alpha_4=\dfrac{a_0^3a_4-4a_0^2a_1 a_3+6a_0a_1^2a_2-3a_1^4}{a_0^2}. \end{cases}$$

Suntem astfel conduşi la cazul precedent şi avem

(19) $$y=\frac{1}{2}\frac{p'u-p'v}{pu-pv}, \quad \frac{dy}{du}=pu-p(u+v).$$

Invarianţii g_2 şi g_3 precum şi valorile pv şi $p'v$ se calculează conform formulelor (12) şi (13). Efectuând calculele, regăsim pentru g_2 şi g_3 valorile (16), (§ 292).

(20) $$\begin{cases} g_2=a_0 a_4-4a_1 a_3+3a_2^2, \\ g_3=a_0 a_2 a_4+2a_1 a_2 a_3-a_0 a_3^2-a_2^3-a_1^2 a_4; \end{cases}$$

iar pentru pv şi $p'v$ avem expresiunile

(21) $$\begin{cases} pv=\dfrac{a_1^2-a_0 a_2}{a_0}, \\ p'v=\dfrac{a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3}{a_0\sqrt{a_0}} \text{ [1])} \end{cases}$$

Revenind la variabila x, avem

(22) $$x=-\frac{a_1}{a_0}+\frac{1}{2\sqrt{a_0}}\frac{p'u-p'v}{pu-pv},$$

(23) $$\sqrt{X}=\frac{dx}{du}=\frac{1}{\sqrt{a_0}}[pu-p(u+v)]=\frac{1}{\sqrt{a_0}}\left[2pu+pv-\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2\right].$$

---

1) Dacă $a_1=a_3=0$, avem $p'v=0$, prin urmare v este o semiperioadă.

Aceste expresiuni în cari toate elementele sunt determinate, în virtutea formulelor (20) și (21), efectuează inversiunea integralei

$$(24) \qquad u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

X fiind polinomul (14). Funcțiunea x este de ordinul al doilea având două poluri simple: $u \equiv o, -v$ și $\sqrt{X}$ o funcțiune eliptică de u de ordinul al patrulea, având aceleași poluri ca x, fiecare însă de ordinul al doilea.

Expresiunea (22) este o soluțiune particulară a integralei ecuațiunii diferențiale

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = X;$$

ea corespunde valorilor $u = o$, $x = \infty$. Soluțiunea generală se obține înlocuind în (22) u prin $u + C$, C fiind o constantă arbitrară; căci prin această înlocuire, ecuațiunea diferențială nu se schimbă.

296. Să punem

$$(25) \quad z = p(u; g_2, g_3), \sqrt{Z} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} = p'u, \; z_0 = pv, \; \sqrt{Z_0} = p'v;$$

formulele (22) și (23) devin

$$(26) \quad \begin{aligned} x &= -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{\sqrt{Z} - \sqrt{Z_0}}{z - z_0}, \\ \sqrt{X} &= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left[2z + z_0 - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{Z} - \sqrt{Z_0}}{z - z_0}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Problema inversiunii revine dar, sub formă algebrică, a exprimă x printr'o funcțiune rațională convenabilă de $(z, \sqrt{Z})$ astfel ca să avem egalitatea

$$(27) \qquad \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

De unde rezultă (26) că și $\sqrt{X}$ este funcțiune rațională de aceleași elemente.

Relațiunea dintre x și z devine lineară, dacă în ecuațiunea diferențială (1) facem să se corespundă valoarea $u = o$ și unul din zerurile polinomului X; căci numai în acest caz x este funcțiune pară de u.

Viceversa. Variabila z și radicalul $\sqrt{Z}$ sunt funcțiuni raționale de $(x, \sqrt{X})$.

Aceasta rezultă din ecuaţiunile (26), cari dau

$$(28)\quad \begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\left[-z_0 + a_0\left(x+\frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \sqrt{a_0}\sqrt{X}\right], \\ \sqrt{Z} &= \sqrt{Z_0} + \sqrt{a_0}\left[-3z_0 + a_0\left(x+\frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \sqrt{a_0}\sqrt{X}\right]. \end{aligned}$$

297. Formulele precedente dau loc la interpretări geometrice interesante. Să punem

$$(29)\quad \begin{cases} y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4, \\ \eta^2 = 4z^3 - g_2z - g_3, \end{cases}$$

şi să privim (x, y), (z, η) ca coordonate carteziane.

I. Formulele (22), (23), (25) arată că aceste coordonate se exprimă prin funcţiuni eliptice de un acelaş parametru u, precum coordonatele unui punct oarecare al unei curbe unicursale se exprimă prin funcţiuni raţionale de un parametru.

II. Curbele (29) se pot deduce una din alta prin *transformări biraţionale*, adică coordonatele (x, y) sunt funcţiuni raţionale de coordonatele (z, η) şi viceversa, coordonatele (z, η) sunt funcţiuni raţionale de (x, y). Această proprietate rezultă din formulele (26) şi (28) în cari înlocuim $\sqrt{X}$ prin y, $\sqrt{Z}$ prin η.

298. *Rezoluţiunea ecuaţiunii de gradul al patrulea.* Formula (22) permite a exprimà rădăcinile ecuaţiunii

$$X = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = o$$

cu ajutorul funcţiunilor eliptice. Este de ajuns, în virtutea egalităţii (23), a înlocuì, în această formulă, u prin valorile incongruente pentru cari avem

$$(30)\qquad p(u+v) - pu = o.$$

Aceste valori sunt date de egalitatea

$$u + v = \pm u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3.$$

Semnul superior nu convine, căci atunci v ar fi egal cu o perioadă şi pv ar fi infinit; ceeace este imposibil precum ne arată formula (21). Avem dar expresiunea

$$(31)\qquad u = -\frac{v}{2} + m\omega_1 + n\omega_3,$$

în care este de ajuns a da lui m şi n valorile 0 şi 1. Cele patru rădăcini sunt aşa dar cuprinse în formula

$$(32)\qquad x = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{2\sqrt{a_0}}\,\frac{p'\left(\frac{v}{2} + m\omega_1 + n\omega_3\right) + p'v}{p\left(\frac{v}{2} + m\omega_1 + n\omega_3\right) - pv}.$$

Membrul al doilea se poate pune sub o formă mai simplă. Pentru aceasta să considerăm identitatea

$$(33)\qquad \frac{p'u-p'v}{pu-pv}=\frac{p'v+p'(u+v)}{pv-p(u+v)},$$

care nu este altceva decât formula de adițiune (7), (§ 162), în care înlocuim v prin valoarea sa $-(u+v)$, sau care se verifică direct [1]. Făcând $u=v$, identitatea precedentă devine

$$(34)\qquad \frac{p'v+p'2v}{pv-p2v}=\frac{p''v}{p'v}.$$

Să aplicăm această formulă membrului al doilea (32), după ce vom fi înlocuit în pv și în $p'v$, v prin $v+2m\omega_1+2n\omega_3$ ceeace nu schimbă rezultatul. Vom avea, pentru cele patru rădăcini căutate, expresiunea

$$(35)\qquad x=-\frac{a_1}{a_0}-\frac{1}{2\sqrt{a_0}}\frac{p''\left(\frac{v}{2}+m\omega_1+n\omega_3\right)}{p'\left(\frac{v}{2}+m\omega_1+n\omega_3\right)},\qquad (m,n=0,1.)$$

II. *Integrale eliptice.*

299. Fie

$$(1)\qquad \mathrm{I}=\int f(x,\sqrt{\mathrm{X}})\,dx$$

o integrală eliptică oarecare, polinomul X fiind de forma normală

$$\mathrm{X}=4x^3-g_2x-g_3.$$

Să punem $x=pu$, $\sqrt{\mathrm{X}}=-p'u$; ceeace revine a luà ca variabilă independentă integrala normală de speța I

$$(2)\qquad u=\int_\infty^x\frac{-dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}.$$

Prin această substituțiune, integrala (1) ia forma

$$(3)\qquad \mathrm{I}=\int \mathrm{F}\,(pu,\,p'u)\,du,$$

F fiind o funcțiune rațională de pu și $p'u$. Suntem astfel conduși la o problemă studiată (§ 171).

---

[1]) Ambele membre au aceleași poluri cu aceleași reziduuri și partea principală în domeniul lui $u=o$ este aceiaș.

300. Fie

$$(3)\quad F(pu, p'u)=A_0+\sum_{k=1}^{n}\Big[A_k\zeta(u-a_k)+A_{k,1}\,p(u-a_k)-\frac{A_{k,2}}{2}p'(u-a_k)+\dots$$
$$\dots+(-1)^{\alpha_k-1}\frac{A_{k,k}}{\alpha_k!}p^{\alpha_k-1}(u-a_k)\Big]$$

funcţiunea $F(pu, p'u)$ descompusă în elemente simple (§ 167).

Integrând, obţinem un rezultat de forma

$$(4)\quad I=A_0u+\sum_{k=1}^{n}A_k\log\sigma(u-a_k)-\sum_{k=1}^{n}A_{k,1}\,\zeta(u-a_k)+\varphi(pu, p'u),$$

φ fiind o funcţiune raţională de pu şi $p'u$. Membrul al doilea se poate pune sub altă formă. Pentru aceasta, să aplicăm funcţiunilor $\zeta(u-a_k)$ formula de adiţiune

$$\zeta(u-a_k)=\zeta u-\zeta a_k+\frac{1}{2}\,\frac{p'u+p'a_k}{pu-pa_k}$$

şi să observăm că, în virtutea egalităţii $\sum\limits_{1}^{n}A_k=0$ (§ 127), putem scrie

$$\sum_{1}^{n}A_k\log\sigma(u-a_k)=\sum_{1}^{n}A_k\log\frac{\sigma(u-a_k)}{\sigma u}.$$

Făcând înlocuirile, egalitatea (4) ia forma

$$(5)\quad I=\psi(pu, p'u)+A_0u-\zeta u\sum_{1}^{n}A_{k,1}+\sum A_k\log\frac{\sigma(u-a_k)}{\sigma u},$$

$\psi(pu, p'u)$ fiind o funcţiune raţională prin urmare o funcţiune raţională de x şi $\sqrt{X}$.

Elementele prin cari se exprimă o integrală eliptică oarecare sunt aşà dar: o funcţiune raţională de $(x, \sqrt{X})$, integrala u de speţa I, funcţiunea ζu şi un număr mărginit de funcţiuni de forma $\log\dfrac{\sigma(u-a)}{\sigma u}$.

Integrala u este finită pentru orice valoare a lui x.

Funcţiunea ζu, considerată ca funcţiune de x, este exprimată prin integrala de speţa II

$$(6)\qquad \zeta u=\int -pu\,du=\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Această integrală este finită pentru orice valoare finită a lui x şi devine infinită pentru $x=\infty$. Acest punct este un pol de ordinul întâi al integralei, precum rezultă din desvoltarea ei în domeniul acestui punct. Avem

$$\frac{1}{\sqrt{X}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{g_2}{8}x^{-2}+\frac{g_3}{8}x^{-3}+\dots\right);$$

$$(7)\qquad \int\frac{xdx}{\sqrt{X}}=\sqrt{x}\left(1-\frac{g_2}{24}x^{-2}-\frac{g_3}{40}x^{-3}+\dots\right).$$

Se consideră ca integrală *normală de speţa II* integrala definită de membrul al doilea al egalităţii

$$(8)\qquad \int\frac{xdx}{\sqrt{X}}=\zeta u,$$

care corespunde desvoltării (7) în domeniul punctului $x=\infty$.

Dacă mărim integrala u cu $2\omega_1$ sau $2\omega_3$, funcţiunea ζu mărindu-se respectiv cu $2\eta_1$, $2\eta_3$, se zice că aceste cantităţi sunt perioadele integralei normale de speţa II, corespunzătoare perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ ale integralei normale de speţa I. Intre aceste perioade există relaţiunea cunoscută

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{i\pi}{2}.$$

301. Printre elementele egalităţii (5) mai avem de considerat cele de forma

$$\log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u}.$$

Pentru a introduce variabila x în această funcţiune, să revenim la expresiunea

$$\zeta(u-a)=\zeta u-\zeta a+\frac{1}{2}\frac{p'u+p'a}{pu-pa};$$

de unde, prin integraţiune,

$$(9)\qquad \log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u}=\frac{1}{2}\int\frac{p'u+p'a}{pu-pa}du-u\,\zeta a+C.$$

Să punem $pa=x_0$, $p'a=-\sqrt{X_0}$; vom avea

$$\log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u}=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{X}+\sqrt{X_0}}{x-x_0}\frac{dx}{\sqrt{X}}-u\,\zeta a+C.$$

Integrala

$$(10)\qquad I(x,x_0)=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{X}+\sqrt{X_0}}{x-x_0}\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

este o integrală de speţa III, care devine infinită în punctele critice logaritmice $x=x_0$, $x=\infty$, corespunzătoare punctelor $u\equiv a$, $u\equiv 0$ (*mod* $2\omega_1$, $2\omega_3$).

Să determinăm constanta arbitrară C astfel ca desvoltările ambelor membre (9) în domeniul $u = o$ să fie identice. Avem, în domeniul $u=o$,

$$\frac{1}{2}\frac{p'u+p'a}{pu-pa}=-\frac{1}{u}\frac{1-\frac{u^3}{2}p'a-\frac{g_2}{20}u^4-\dots}{1-u^2pa+\frac{g_2}{20}u^4+\dots}$$

$$=-\frac{1}{u}-u\,pa+\frac{u^2}{2}p'a+\dots,$$

de unde

$$I(x, x_0)=-\log u-\frac{u^2}{2}pa+\frac{u^3}{6}p'a+\dots$$

De altă parte

$$\sigma(u-a)=-\sigma(a-u)=-\sigma a+u\sigma' a-\frac{u^2}{2}\sigma'' a+\dots$$

$$\sigma u=u-Au^5-\dots\text{[1]}$$

$$\frac{\sigma(a-u)}{\sigma u}=\frac{\sigma a}{u}\left(1-u\frac{\sigma' a}{\sigma a}+\frac{u^2}{2}\frac{\sigma'' a}{\sigma a}+\dots\right);$$

de unde

$$\log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u}=\log(-1)+\log \sigma a-\log u-u\zeta a-\frac{u^2}{2}pa+\dots$$

Substituind aceste desvoltări în egalitatea (9), obţinem

$$C=-\log(-1)+\log \sigma a.$$

Pentru această valoare a lui C, avem

$$(10)\qquad I(x, x_0)=\log\frac{\sigma(a-u)}{\sigma a\,\sigma u}+u\,\zeta a.$$

Integrala astfel definită se numeşte *integrala normală de speţa III*. Dacă permutăm în membrul al doilea argumentul u cu parametrul a, prin urmare, în membrul întâi, argumentul x cu parametrul x_0, obţinem, prin scădere, egalitatea

$$(11)\qquad I(x, x_0)-I(x_0, x)=u\zeta a-a\zeta u+(2k+1)i\pi,$$

k fiind un număr întreg. In această egalitate consistă ceeace se numeşte *teorema asupra permutării argumentului cu parametrul* în integrala eliptică de speţa III.

---

[1] $$A=\frac{g_2}{2^4.3.5}$$

Perioadele integralei. Dacă mărim u cu $2\omega_1$ sau $2\omega_3$, membrul al doilea al egalităţii (10) se reproduce mărit respectiv cu cantităţile

(12) $$2\,\Omega_1 = 2\omega_1\,\zeta a - 2a\eta_1, \quad 2\,\Omega_3 = 2\omega_3\,\zeta a - 2a\eta_3.$$

Aceste cantităţi se numesc *perioade ale integralei de speţa III* $I(x, x_0)$, corespunzătoare perioadelor $2\omega_1$, $2\omega_3$ ale integralei u de speţa I. Din egalităţile (12) rezultă relaţiunea

$$\omega_1\,\Omega_3 - \omega_3\,\Omega_1 = a\,(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1) = \frac{i\pi a}{2},$$

între perioadele celor două speţe de integrale.

Pe lângă perioadele $2\,\Omega_1$, $2\Omega_3$, integrala normală de speţa III mai admite perioada polară $2i\pi$ [1]), căci, dacă u descrie o curbă închisă în jurul punctului $u = a$, căreia corespunde, în planul (x), o curbă închisă în jurul punctului $x = x_0$, integrala se măreşte cu $\pm 2i\pi$. Totalitatea valorilor de care integrala este susceptibilă într'un punct $(x, \sqrt{X})$ este dată de expresiunea

$$I\,(x, \sqrt{X}\,; x_0, \sqrt{X_0}) = I_0 + 2m\,\Omega_1 + 2n\Omega_3 + 2ki\pi,$$

I_0 *fiind una din acele valori* şi m, n, k fiind numere întregi oarecari.

302. *Observare.* In notaţiunea lui Legendre şi Jacobi se consideră ca integrale de speţa I, II, III respectiv integralele

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}}, \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}}, \int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}},$$

a fiind diferit de punctele critice ale radicalului

In notaţiunea lui Riemann, cele trei speţe de integrale sunt reprezintate prin expresiunile

$$\int\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \quad \int\frac{xdx}{2\sqrt{R(x)}}, \quad \int\frac{\sqrt{R(x_0)}}{\sqrt{R(x)}}\,\frac{dx}{x-x_0},$$

în cari $R(x) = x\,(1-x)\,(1-k^2x)$ şi x_0 este diferit de $0, 1, \frac{1}{k^2}$.

Oricare ar fi notaţiunea, caracterele analitice ale celor trei tipuri sunt următoarele:

Ele sunt funcţiuni analitice multiforme, având module de periodicitate.

Integralele de speţa I sunt finite în tot planul variabilei, inclusiv punctul ∞.

---

[1]) Se numeşte perioadă polară a unei integrale $\int f(x)\,dx$, cantitatea cu care se măreşte integrala, când variabila x face o rotaţiune în jurul unui pol al funcţiunii. Perioada polară este egală cu $2i\pi$ multiplicat cu reziduul corespunzător.

Integralele de speţa II sunt finite în tot planul exceptând punctul $x = \infty$, care este un pol de ordinul întâiu.

Integralele de speţa III sunt finite în tot planul exceptând două puncte singulare logaritmice, reziduurile logaritmice corespunzătoare [1]) fiind egale şi de semne contrarii.

In notaţiunile lui Weierstrass şi Riemann aceste reziduuri sunt egale cu ± 1.

CAPITOLUL XXIII.

TRANSFORMAREA FUNCŢIUNILOR ELIPTICE.

303. Problema de care ne ocupăm aici are origina sa în problema următoare:

Fiind dată ecuaţiunea diferenţială

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f_1(y)}},$$

$f(x)$ şi $f_1(y)$ fiind polinoame de gradul 3 sau 4, se caută condiţiunile ce trebuie să împlinească coeficienţii lor pentru ca această ecuaţiune să admită o integrală algebrică $F(x, y) = 0$ şi găsirea acestei integrale. Pe cale algebrică problema este foarte complicată [2]); ea devine foarte simplă pe cale transcendentă, prin ajutorul funcţiunilor eliptice.

Fie u o nouă variabilă şi să punem

$$du = \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f_1(y)}};$$

de unde

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{f_1(y)}},$$

limitele inferioare x_0, y_0 fiind două constante oarecari. In virtutea acestor ecuaţiuni, variabilele x şi y sunt funcţiuni eliptice de u:

$$x = \varphi(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad y = \psi(u \mid \omega'_1, \omega'_3),$$

cu perioade bine determinate.

---

[1]) Fie, în domeniul unui punct x_0, $f(x) = A \log (x - x_0) + P(x - x_0)$; coeficientul A, reziduul derivatei $f'(x)$, relativ la polul $x = x_0$ al acestei derivate, se numeşte *reziduul logaritmic* al funcţiuinii $f(x)$ relativ la acest pol.

[2]) *Abel, Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, *Oeuvles complètes* p. 518.

Jacobi. Fundamenta nova. Band. I. p. 49.

Sub această formă, problema se reduce la căutarea condițiunilor dintre perioadele celor două funcțiuni eliptice, pentru ca să existe o ecuațiune algebrică

$$F(\varphi(u), \psi(u))=0.$$

Pentru aceasta, este necesar și suficient ca cele două funcțiuni să admită un sistem comun de perioade (§ 175—6). Presupunând această condițiune împlinită, să vedem cum se poate găsi ecuațiunea.

304. Putem presupune diferențialele aduse la forma normală a lui Weierstrass

$$du=\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g'_2y-g'_3}}.$$

Luând $x_0=\infty$, avem

$$x=p(u\,|\,\omega_1, \omega_3).$$

De altă parte, u_0 fiind una din valorile integralei

$$u=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g'_2y-g'_3}},$$

avem

$$y=p(u+u_0\,|\,\omega_1', \omega'_3).$$

Funcțiunea $p(u+u_0|\,\omega_1', \omega'_3)$ fiind, în virtutea formulei de adițiune, o funcțiune algebrică de $p(u\,|\,\omega'_1, \omega'_3)$, problema se reduce la găsirea ecuațiunii

$$F[(p(u\,|\,\omega_1, \omega_3), p(u\,|\,\omega'_1, \omega'_3)]=0,$$

în ipoteza că cele două funcțiuni $p(u\,|\omega_1, \omega_3)$ și $p(u\,|\,\omega'_1, \omega'_3)$ admit un sistem comun de perioade.

305. Fie $(2\,\Omega_1, 2\,\Omega_3)$ un sistem de perioade distincte comune celor două funcțiuni. Aceste perioade sunt vârfuri comune rețelelor construite pe perioadele $(2\,\omega_1, 2\omega_3)$, $(2\omega'_1, 2\omega'_3)$; le presupunem alese astfel ca $2\,\Omega_1$ să fie vârful cel mai apropiat de punctul $u=0$ și $2\,\Omega_3$ să fie la stânga vectorului $(0, 2\,\Omega_1)$ și ca distanța sa de acest vector să fie cea mai mică posibilă. Cu modul acesta satisfacem două condițiuni:

1°. Nici un vârf comun celor două rețele nu se găsește în interiorul paralelogramului $(2\,\Omega_1, 2\,\Omega_3)$, nici pe laturile sale, exceptând vârfurile acestui paralelogram.

2°. Punând $\dfrac{\Omega_3}{\Omega_1}=A+iB$, avem $B>0$; căci argumentul raportului considerat este cuprins între 0 și π.

Exprimând că punctele $2\,\Omega_1$, $2\,\Omega_3$ sunt vârfuri comune celor două reţele, avem egalităţi de forma

$$(1) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3 = a'\omega'_1 + b'\omega'_3, \\ \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3 = c'\omega'_1 + d'\omega'_3, \end{cases}$$

coeficienţii a, b, c, d; a', b', c', d', fiind numere întregi şi determinanţii

$$ad - bc = n, \qquad a'd' - b'c' = n'$$

diferiţi de zero. Aceşti determinanţi pot fi consideraţi pozitivi. In adevăr, punând

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \alpha + i\beta, \quad \beta > 0,$$

avem

$$\frac{\Omega_3}{\Omega_1} = \mathrm{A} + i\mathrm{B} = \frac{a + b(\alpha + i\beta)}{c + d(\alpha + i\beta)};$$

de unde

$$\mathrm{B} = \beta \frac{ad - bc}{(c + d\alpha)^2 + d^2\beta^2} = \frac{\beta n}{(c + d\alpha)^2 + d^2\beta^2}.$$

Coeficienţii B şi β fiind de acelaş semn (2^0), rezultă că numărul n este > 0. In acelaş mod se conchide că n' este pozitiv.

Funcţiunile $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$, $p(u \mid \omega'_1, \omega'_3)$ admiţând perioadele $2\,\Omega_1$, $2\,\Omega_3$ şi fiind pare se pot exprimà într'un mod raţional cu ajutorul funcţiunii $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$:

$$(2) \qquad \begin{cases} p(u \mid \omega_1, \omega_3) = \mathrm{R}\,[p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)], \\ p(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = \mathrm{R}_1\,[p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)]. \end{cases}$$

Eliminând între aceste două ecuaţiuni funcţiunea intermediară $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$, obţinem ecuaţiunea algebrică căutată între cele două funcţiuni eliptice date.

306. Problema transformării algebrice a funcţiunii $p(u \mid \omega_1\, \omega_3)$ se poate prezintà astfel:

Să se găsească relaţiunea dintre această funcţiune şi funcţiunea în care ea se transformă, când substituim perioadelor $2\,\omega_1$, $2\,\omega_3$ *alte două perioade* $2\,\omega'_1$, $2\,\omega'_3$, *legate de cele dintâi prin relaţiunile* (1). Această problemă se reduce, precum am văzut mai sus, la determinarea expresiunilor (2), adică la problema mai simplă, aceea a *transformării raţionale.*

307. *Transformarea raţională a funcţiunii* $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$.

Fie

$$(3) \qquad x = p(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad z = p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$$

şi egalităţile

$$(4) \qquad \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \quad \Omega_3 = c\omega_3 + d\omega_3,$$

coeficienţii a, b, c, d fiind numere întregi şi determinantul

$$ad-bc=n>0.$$

Aceste egalităţi exprimă că vârfurile reţelei cu perioadele $2\Omega_1$, $2\Omega_3$, sunt vârfuri ale reţelei construită cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_3$, adică perioadele funcţiunii z sunt perioade ale funcţiunii x. Reciproca ar fi adevărată *numai* dacă determinantul n al transformării ar fi egal cu 1. In acest caz cele două sisteme de perioade sunt echivalente şi avem

$$p(u|\omega_1,\omega_3)=p(u|\Omega_1,\Omega_3).$$

308. Fie, pentru $n>1$, relaţiunea raţională

$$x=\mathrm{R}(z).$$

Voim să arătăm că gradul funcţiunii $\mathrm{R}(z)$ este egal cu determinantul $ad-bc=n$, numit, pentru acest motiv, gradul transformării (4). Demonstrarea acestei teoreme, precum şi studiul transformării raţionale, se simplifică dacă înlocuim perioadele primitive $2\omega_1$, $2\omega_3$ prin două perioade echivalente $2\tilde{\omega}_1$, $2\tilde{\omega}_3$, astfel ca substituţiunea (4) să ia forma

$$\Omega_1=a_1\tilde{\omega}_1, \quad \Omega_3=c_1\tilde{\omega}_1+d_1\tilde{\omega}_3.$$

Să punem

$$\tilde{\omega}_1=\alpha\omega_1+\beta\omega_3, \quad \tilde{\omega}_3=\gamma\omega_1+\delta\omega_3 \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Formulele (4) devin:

$$(5)\qquad \begin{cases} \Omega_1=(a\alpha+b\gamma)\tilde{\omega}_1+(a\beta+b\delta)\tilde{\omega}_3, \\ \Omega_3=(c\alpha+d\gamma)\tilde{\omega}_1+(c\beta+d\delta)\tilde{\omega}_3. \end{cases}$$

Dacă coeficientul $a=0$, este deajuns a luà $\alpha=\delta=0, \beta=-\gamma=1$; egalităţile (5) iau forma căutată

$$\Omega_1=-b\tilde{\omega}_1, \quad \Omega_3=-d\tilde{\omega}_1+c\tilde{\omega}_3.$$

Să presupunem $a\neq 0$. Fie σ, cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, şi fie

$$(6)\qquad a=\sigma\delta, \quad b=-\sigma\beta;$$

de unde rezultă

$$(7)\qquad a\beta+b\delta=0, \quad (c\beta+d\delta)\sigma=n.$$

Numerele β şi δ fiind prime între ele, putem satisface ecuaţiunea $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, printr'o infinitate de valori întregi α, γ. Cu modul acesta, sistemul $(2\omega_1, 2\omega_3)$ este echivalent cu sistemul $(2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_3)$ şi substituţiunea (5) ia forma căutată,

$$(8)\qquad \Omega_1=\sigma\tilde{\omega}_1, \quad \Omega_3=(c\alpha+d\gamma)\tilde{\omega}_1+\frac{n}{\sigma}\tilde{\omega}_3,$$

numită *forma normală* a transformării perioadelor. Sub această formă, semiperioada Ω_1 are o valoare determinată, pe când semiperioadei Ω_3 putem da diferite valori, căci coeficientul $ca + d\gamma$ poate avea o infinitate de valori.

Fie $a=\sigma_0$, $\gamma=\gamma_0$, un sistem particular de valori întregi satisfăcând ecuaţiunea $a\delta-\beta\gamma=1$; avem

$$a=\sigma_0+k\beta,\quad \gamma=\gamma_0+k\delta,$$

k fiind un număr întreg arbitrar. De unde

$$ca+d\gamma_0=ca_0+d\gamma_0+k(c\beta+d\delta)=c\sigma_0+d\gamma_0+k\frac{n}{\sigma}$$

Reprezintând membrul întâi prin ϱ şi suprimând accentele, avem transformarea normală

$$\Omega_1=\sigma\omega_1,\quad \Omega_3=\varrho\omega_1+\frac{n}{\sigma}\omega_3, \tag{9}$$

în care ϱ este un număr întreg determinat, abstracţiune făcând de un multiplu al numărului întreg $\frac{n}{\sigma}$. Două transformări normale în cari ϱ primeşte valori întregi diferind printr'un multiplu al lui $\frac{n}{\sigma}$ sunt echivalente, în virtutea egalităţii

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ \varrho & \frac{n}{\sigma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ \varrho+k\frac{n}{\sigma} & \frac{n}{\sigma}\end{pmatrix}[1],$$

k fiind un număr întreg arbitrar; ele transformă funcţiunea primitivă în aceeaş funcţiune raţională. Este dar de ajuns, pentru acelaş σ, a considerà transformările în cari ϱ este egal cu unul din numerele $0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{\sigma}-1$.

309. Gradul funcţiunii $R(z)$, sau numărul valorilor lui z corespunzătoare unei valori x, rezultă foarte lesne din cele ce preced.

Unei valori $x = p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ corespunde pentru u o infinitate de valori cuprinse în expresiunea

$$\pm u+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3,$$

λ şi μ fiind numere întregi arbitrare. Acestor valori corespund funcţiunii $z = p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$ valorile

$$z=p(\pm u+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3 \mid \Omega_1, \Omega_3).$$

---

[1]) V. pentru produsul celor două substituţiuni (§ 124).

Funcţiunea pu fiind pară; aceste valori sunt date de unica expresiune

$$z=p(u+2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3|\Omega_1,\Omega_3)$$

sau, în virtutea formulelor (9),

$$(10)\qquad z=p\left(u+\frac{2}{\sigma}(\lambda-\frac{\mu}{\nu}\varrho)\Omega_1+2\frac{\mu}{\nu}\Omega_3|\Omega_1,\Omega_3\right),\quad \nu=\frac{n}{\sigma}.$$

Membrul al doilea al acestei expresiuni, în care u are o valoare oarecare, se reproduce numai atunci când dăm lui λ valori congruente (*mod* σ) şi lui μ valori congruente (*mod* $\frac{n}{\sigma}$), căci acestor valori, şi numai acestora, corespund lui u puncte congruente (*modd* $2\Omega_1$, $2\Omega_3$). Valorile diferite ale lui z, corespunzătoare aceleiaş valori x, sunt dar date de formula (10) în care λ şi μ primesc, independent între ele, respectiv valorile

$$\lambda=0,1,2,\ldots\sigma-1;\quad \mu=0,1,2,\ldots,\frac{n}{\sigma}-1.$$

Numărul total al acestor valori este

$$N=\sigma.\frac{n}{\sigma}=n\,^{1})$$

q. e. d.

310. Dacă considerăm funcţiunea $y=p(u|\omega'_1,\omega'_3)$ conchidem, ca şi mai sus, în virtutea formulelor

$$\Omega_1=a'\omega'_1+b'\omega'_3,\quad \Omega_3=c'\omega'_1+d'\omega'_3,\qquad a'd'-b'c'=n',$$

că funcţiunea $y=R_1(z)$ este de gradul n' în raport cu z. Ecuaţiunea $F(x,y)=0$ care rezultă din eliminarea lui z între ecuaţiunile $x=R(z)$, $y=R_1(z)$ este aşà dar de gradul n' în raport cu x şi de gradul n în raport cu y.

Acest rezultat se poate recunoaşte în modul următor, fără a recurge la teoria algebrică a eliminaţiunii.

Unui punct u oarecare din plan corespund, în paralelogramul $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$, n puncte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ congruente (*modd* $2\omega_1$, $2\omega_3$), nu însă, în acelaş timp, congruente (*modd* $2\omega'_1$, $2\omega'_3$), exceptând vârfurile paralelogramului $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$ (§ 305); acestor puncte corespund dar, pentru y, n valori diferite. Punctul $-u$ dă respectiv aceleaşi valori ca punctul u. Aşà dar unei valori x corespund n

[1]) Concluziunea de mai sus rezultă direct din formulele (9) dacă observăm că paralelogramul $(2\Omega_1\, 2\Omega_3)$ cuprinde $\sigma\frac{n}{\sigma}$ paralelograme echivalente cu paralelogramul $(2\omega_1, 2\omega_3)$; ceeace se recunoaşte foarte lesne.

valori diferite pentru y. Deasemenea, unei valori y corespund n' valori diferite pentru x.

310 Să revenim la transformarea raţională şi să vedem câte transformări raţionale diferite obţinem când σ şi ϱ primesc diferite valori: σ fiind un divizor al gradului n şi ϱ unul din numerile 0, 1, $2,\ldots, \frac{n}{\sigma} - 1$.

Fie σ' şi ϱ' două numere având aceleaşi semnificări ca σ şi ϱ; să punem

$$(11) \qquad \Omega_1 = \sigma'\omega'_1, \quad \Omega_3 = \varrho'\,\omega'_1 + \frac{n}{\sigma'}\,\omega'_3.$$

Pentru ca să avem egalitatea

$$p\,(u\,|\,\omega'_1, \omega'_3) = p\,(u\,|\,\omega_1, \omega_3)$$

este necesar şi suficient ca cele două sisteme de perioade să fie echivalente, adică

$$\omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \qquad \omega'_3 = \gamma\omega_1 + \delta\,\omega_3, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Substituind aceste valori în egalităţile (11), în cari înlocuim Ω_1, Ω_3 prin valorile lor (9), rezultă

$$\begin{cases} \sigma'\,(\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_3) = \sigma\omega_1, \\ \varrho'(\alpha\omega_1 + \beta\omega_3) + \dfrac{n}{\sigma'}\,(\gamma\,\omega_1 + \delta\omega_3) = \varrho\,\omega_1 + \dfrac{n}{\sigma}\,\omega_3. \end{cases}$$

Prima egalitate dă

$$\sigma'\alpha = \sigma, \quad \beta = 0;$$

prin urmare $\alpha = \delta = 1$; de unde a doua egalitate conduce la

$$\varrho' + \gamma\,\frac{n}{\sigma} = \varrho,$$

γ întreg arbitrar.

Aşà dar, *două transformări raţionale sunt diferite dacă divizorul σ este diferit în cele două transformări, sau fiind acelaş, valorile lui ϱ sunt diferite* $\left(mod\,\dfrac{n}{\sigma}\right)$.

Transformările diferite corespunzătoare numărului σ se obţin dând lui ϱ valorile 0, 1, $2,\ldots, \frac{n}{\sigma} - 1$. Toate transformările de gradul n, în cari σ este acelaş şi ϱ primeşte valori congruente $\left(mod\,\dfrac{n}{\sigma}\right)$ sunt echivalente; se zice că ele fac parte din aceeaş *clasă*.

Fie

$$1;\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ldots,\ \sigma_k,\ n$$

toți divizorii lui n. Acestor divizori corespund lui ϱ respectiv valorile

$$0, 1, 2,\ldots, n-1;\ 0, 1,\ldots, \frac{n}{\sigma_1}-1;\ldots;\ 0, 1,\ldots \frac{n}{\sigma_k}-1;\ 1.$$

Numărul total al claselor diferite, corespunzătoare aceluiaș grad n, este

$$\text{(10)} \qquad N = n + \frac{n}{\sigma_1} + \ldots + \frac{n}{\sigma_k} + 1,$$

adică egal cu *suma divizorilor lui n.*

Dacă n este un număr prim, numărul claselor diferite este $n+1$. Transformările normale corespunzătoare se reduc la formele

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varrho & n \end{pmatrix},^{1)} \qquad \varrho=0,\ 1,\ldots\ n-1.$$

311. Transformarea perioadelor, în cazul când gradul n este un număr compus, se poate înlocuì printr'o succesiune de transformări de grade numere prime. Este deajuns să arătăm că transformarea relativă la un produs de doi factori se poate obține prin două transformări succesive corespunzătoare celor doi factori.

Fie

$$\text{(11)} \qquad \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3,\ \ \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,\ \ ad - bc = n,$$

$$\text{(12)} \qquad \Omega'_1 = a'\Omega_1 + b'\Omega_3,\ \ \Omega'_3 = c'\Omega_1 + d'\Omega_3,\ \ a'd' - b'c' = n',$$

două sisteme de transformări de perioade având respectiv gradele n, n' și fie

$$\text{(13)} \quad x = p\,(u \mid \omega_1, \omega_3),\ \ y = p\,(u \mid \Omega_1, \Omega_3),\ \ z = p\,(u \mid \Omega'_1, \Omega'_3),$$

funcțiunile eliptice corespunzătoare celor trei sisteme de perioade primitive $(2\omega_1, 2\omega_3)$, $(2\,\Omega_1, 2\,\Omega_3)$, $(2\,\Omega'_1, 2\,\Omega'_3)$. In virtutea egalităților (11) și (12) avem respectiv relațiunile

$$x = \mathrm{R}\,(y),\ \ y = \mathrm{R}_1\,(z),$$

$\mathrm{R}\,(y)$ și $\mathrm{R}_1\,(z)$ fiind funcțiuni raționale, cea dintâi de gradul n, cea de a doua de gradul n'. De unde rezultă, prin eliminarea lui y, relațiunea rațională

$$x = \mathrm{R}_2\,(z),$$

de gradul nn'.

---

[1]) Numărul ϱ fiind determinat $\left(mod\,\frac{n}{\sigma}\right)$ este indiferent a scrie $-\varrho$ în loc de ϱ.

De altă parte, din egalitățile (11) și (12) rezultă relațiunile dintre perioadele $(2\omega_1, 2\omega_3)$ și $(2\Omega'_1, 2\Omega_3')$

$$\Omega'_1 = (aa' + cb')\,\omega_1 + (ba' + db')\,\omega_3,$$
$$\Omega'_3 = (ac' + cd')\,\omega_1 + (bc' + dd')\,\omega_3,$$

al căror determinant

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} aa' + cb' & ba' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} = nn',$$

este egal cu produsul gradelor celor două transformări date.

Transformarea perioadelor se poate dar reduce la transformări de gradul al doilea și la transformări de grade numere impare.

Ne vom mărgini la gradul $n = 2$.

312. *Transformarea de gradul al doilea* $(n = 2)$.

Avem trei transformări normale corespunzătoare substituțiunilor

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aceste transformări sunt

$$(1)\ \Omega_1 = 2\omega_1, \quad \Omega_3 = \omega_3; \quad \omega_1 = \frac{\Omega_1}{2}, \quad \omega_3 = \Omega_3,$$

$$(2)\ \Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_3 = 2\omega_3; \quad \omega_1 = \Omega_1, \quad \omega_3 = \frac{\Omega_3}{2},$$

$$(3)\ \Omega_1 = \omega_1,\ \Omega_3 = -\omega_1 + 2\omega_3;\ \omega_1 = \Omega_1,\ \omega_3 = \frac{\Omega_1 + \Omega_3}{2} = -\frac{\Omega_2}{2}.$$

Pentru a exprimà funcțiunea dată $p\,(u \mid \omega_1, \omega_3)$ în funcțiune rațională de $p\,(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$, trebuie să cunoaștem polurile incongruente ale celei dintâi relativ la perioadele $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ ale celei de al doilea și părțile principale corespunzătoare acestor poluri.

In cazul transformării (1), funcțiunea

$$p\,(u \mid \omega_1, \omega_3) = p\left(u \,\middle|\, \frac{\Omega_1}{2}, \Omega_3\right)$$

admite în paralelogramul $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$ polurile $u=0$, $u=\Omega_1$ de ordinul al doilea, cu termenii principali

$$\frac{1}{u^2}, \qquad \frac{1}{(u-\Omega_1)^2}.$$

Aplicând formula de descompunere a funcţiunilor eliptice în elemente simple, avem

$$p\left(u \,\middle|\, \frac{\Omega_1}{2}, \Omega_3\right) = p\,(u \mid \Omega_1, \Omega_3) + p\,(u - \Omega_1 \mid \Omega_1, \Omega_3) + C.$$

Comparând desvoltările ambelor membre în domeniul $u=0$, obţinem valoarea constantei $C = -p\Omega_1$.

Avem aşà dar, scriind ω_α în loc de Ω_α, expresiunea raţională de gradul al doilea

$$(4)\qquad \begin{aligned} p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right) &= pu + p\,(u-\omega_1) - p\omega_1 \\ &= pu + \frac{(e_1-e_2)\,(e_1-e_3)}{pu-e_1}. \end{aligned}$$

Permutând indicii (1, 3) şi (1, 2), obţinem expresiunile corespunzătoare celorlalte două cazuri:

$$(5)\qquad \begin{aligned} p\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) &= pu + p\,(u-\omega_3) - p\omega_3 \\ &= pu + \frac{(e_3-e_2)\,(e_3-e_1)}{pu-e_3}, \end{aligned}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} p\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right) &= pu + p\,(u-\omega_2) - p\omega_2 \\ &= pu + \frac{(e_2-e_1)\,(e_2-e_3)}{pu-e_2}. \end{aligned}$$

313. Să considerăm transformarea (4)

$$(1)\qquad \bar{p}\,u = p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right) = pu + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pu-e_1},$$

numită transformarea lui *Landen* [1]). Punând

$$(2)\qquad \bar{p}\frac{\omega_1}{2} = \bar{e}_1, \quad \bar{p}\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_3\right) = \bar{e}_2, \quad \bar{p}\omega_3 = \bar{e}_3$$

avem ecuaţiunea

$$(3)\qquad \bar{p}'^2 u = 4\,(\bar{p}u-\bar{e}_1)\,(\bar{p}u-\bar{e}_2)\,(\bar{p}u-\bar{e}_3).$$

Derivând ecuaţiunea (1) obţinem

$$(4)\qquad \bar{p}'u = \frac{p'u}{(pu-e_1)^2}\left[(pu-e_1)^2 - (e_1-e_2)\,(e_1-e_3)\right].$$

Membrul întâi se anulează dacă anulăm unul din cei doi factori ai membrului al doilea. Să considerăm întâi ecuaţiunea

$$p'u = 0,$$

[1]) Matematician englez din secolul al 18-lea.

căreia corespund valorile $pu=e_1, e_2, e_3$. Pentru $pu=e_1$, ambele membre (4) devin infinite. Vom considerà numai celelalte două: $pu=e_2$, $pu=e_3$ şi vom căutà valorile corespunzătoare ale lui $\overline{p}u$.

Inlocuind în ecuaţiunea (1) pu respectiv prin e_2 şi e_3, obţinem valorile

$$(5) \qquad \begin{cases} \overline{p}\omega_2=e_2-(e_1-e_3)=-2e_1, \\ \overline{p}\omega_3=e_3-(e_1-e_2)=-2e_1. \end{cases}$$

Egalitatea $\overline{p}\omega_2=\overline{p}\omega_3$ se explică prin aceea că punctele ω_2, ω_3 sunt congruente pentru funcţiunea $\overline{p}u$, relativ la perioadele ω_1, $2\omega_3$ ale acestui funcţiuni:

$$\omega_2\equiv\omega_3 \ (mo\partial\partial\ \omega_1,\ 2\omega_3).$$

Valoarea $\bar{e}_3=-2\bar{e}_1$ a funcţiunii transformate $\overline{p}u$ corespunde semiperioadei primitive ω_3. Ecuaţiunea $p'u=0$ ne-a servit dar numai pentru a determinà valoarea $\bar{e}_3$. Dacă anulăm al doilea factor din (4), avem ecuaţiunea

$$(6) \qquad (pu-e_1)^2-(e_1-e_2)(e_1-e_3)=0;$$

de unde

$$pu=e_1\pm\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}.$$

Ducând aceste valori în ecuaţiunea (1), obţinem pentru $\overline{p}u$ valorile corespunzătoare semiperioadelor sale $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_1}{2}+\omega_3$, adică $\bar{e}_1$ şi $\bar{e}_2$; avem astfel

$$(7) \qquad \begin{cases} \bar{e}_1=e_1+2\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}, \text{ [1]} \\ \bar{e}_2=e_1-2\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}, \\ \bar{e}_3=-2e_1. \end{cases}$$

Dacă cantităţile e_1, e_2, e_3 sunt reale şi dispuse în ordinea $e_1>e_2>e_3$, valorile $\bar{e}_\alpha$ sunt de asemenea reale şi satisfac inegalităţile $\bar{e}_1>\bar{e}_2>\bar{e}_3$.

Invarianţii funcţiunii transformate se pot deduce din formula (1), dacă desvoltăm ambele membre în domeniul $u=0$ şi identificăm coeficienţii termenilor lui u^2 şi u^4. Reprezentând aceşti in-

---

[1] Semnele celor două radicale sunt determinate de consideraţiunea următoare: Dacă luăm radicalul astfel ca partea sa reală să fie pozitivă, trebuie luat $\overline{p}\frac{\omega_1}{2}$ cu acelaş radical, căci în cazul când ω_1 şi $\frac{\omega_3}{i}$ sunt reale, avem $\overline{p}\frac{\omega_1}{2}>\overline{p}\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_3\right)$.

varianţi prin $\overline{g}_2$, $\overline{g}_3$, găsim

$$(8)\qquad \begin{cases} \overline{g}_2=g_2+20(e_1-e_2)(e_1-e_3)=g_2+10\,p''\omega_1, \\ \overline{g}_3=g_3+28(e_1-e_2)(e_1-e_3)=g_3+\dfrac{7}{6}\,p^{\mathrm{IV}}\omega_1. \end{cases}$$

314. Transformarea (5) (§ 312)

$$(9)\qquad p_1u=p\left(u\,|\,\omega_1,\frac{\omega_3}{2}\right)=pu+\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{pu-e_3}$$

poartă numele de transformarea lui *Gauss*. Ea nu diferă de cea precedentă decât prin permutarea semiperioadelor ω_1 şi ω_3 căreia corespunde permutarea cantităţilor e_1 şi e_3.

Să punem

$$(10)\qquad p_1\omega_1=\bar{e}_1,\quad p_1\left(\omega_1+\frac{\omega_3}{2}\right)=\bar{e}_2,\quad p_1\frac{\omega_3}{2}=\bar{e}_3.$$

Derivând ecuaţiunea (9) şi procedând ca în cazul de mai sus, găsim, pentru aceste cantităţi, expresiunile

$$(11)\qquad \begin{cases} \bar{e}_1=-2e_3 \\ \bar{e}_2=e_3+2\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}, \\ \bar{e}_3=e_3-2\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}. \end{cases}$$

Dacă cantităţile e_α sunt reale şi dispuse în ordinea $e_1>e_2>e_3$, cantităţile $\bar{e}_\alpha$ sunt reale şi dispuse în aceeaş ordine.

Să observăm egalitatea $p_1\omega_1=p_1\omega_2$, punctele ω_1 şi ω_2 fiind congruente relativ la perioadele $2\omega_1$, ω_3 ale funcţiunii transformate p_1u.

Valorile transformate ale invarianţilor se deduc din formulele (8), permutând ω_1 şi ω_3:

$$(12)\qquad \begin{cases} \overline{g}_2=g_2+10\,p''\omega_3, \\ \overline{g}_3=g_3+\dfrac{7}{6}\,p^{\mathrm{IV}}\omega_3. \end{cases}$$

315. Să considerăm a treia transformare

$$(13)\qquad p_2u=p\left(u\,|\,\omega_1,\frac{\omega_2}{2}\right)=pu+\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{pu-e_2}\,.$$

Un calcul analog cu cele precedente, derivând ambele membre (13), ne dă valorile

$$(14)\qquad \begin{cases} p_2\,\omega_1=\bar{e}_1=-2e_2, \\ p_2\,\dfrac{\omega_2}{2}=\bar{e}_2=e_2+2\sqrt{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}, \\ p_2\left(\omega_1+\dfrac{\omega_2}{2}\right)=\bar{e}_3=e_2-2\sqrt{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}. \end{cases}$$

Dacă semiperioadele $\omega_1 = \alpha - i\beta$, $\omega_3 = \alpha + i\beta$ sunt imaginare conjugate, rădăcina e_2 este reală şi celelalte două e_1, e_3 sunt imaginare conjugate. Formulele (14) ne arată că toate rădăcinile $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sunt reale. Acest rezultat se justifică *a priori*, observând că semiperioadele primitive, $\omega_1 = \alpha - i\beta$, $\frac{\omega_2}{2} = -\alpha$, ale funcţiunii transformate p_2u sunt echivalente cu semiperioadele

$$\Omega_1 = \omega_1 + \frac{\omega_2}{2} = -i\beta, \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{2},$$

cea dintâi pur imaginară şi cea de a doua reală: celei dintâi corespunde rădăcina reală cea mai mică şi celei de a doua rădăcina reală cea mai mare; de unde rezultă inegalităţile

$$\bar{e}_3 < \bar{e}_1 < \bar{e}_2.$$

Putem aplicà transformarea considerată în cazul când invarianţii funcţiunii pu sunt reali iar discriminantul negativ. Funcţiunea pu transformată are, în virtutea celor ce preced, discriminantul său pozitiv.

Putem dar totdeauna reduce studiul variaţiunii funcţiunilor pu, σu, $\sigma_\alpha u$, $\vartheta(v)$ în cazul discriminantului negativ la cazul discriminantului pozitiv.

316. *Transformarea lui Landen aplicată funcţiunii $sn(v, k)$.*

1°. *Transformarea modulului k şi a modulului complimentar k', definite de ecuaţiunile*

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}. \tag{1}$$

Să punem

$$k_1^2 = \frac{\bar{e}_2 - \bar{e}_3}{\bar{e}_1 - \bar{e}_3}, \quad k_1'^2 = \frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_2}{\bar{e}_1 - \bar{e}_3}. \tag{2}$$

Formulele (7) (§ 313) ne dau

$$\left\{\begin{aligned} \bar{e}_1 - \bar{e}_3 &= 3e_1 + 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \\ &= (\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_1 - e_2})^2 = (e_1 - e_3)(1 + k')^2 \\ \bar{e}_2 - \bar{e}_3 &= 3e_1 - 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \\ &= (\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2})^2 = (e_1 - e_3)(1 - k')^2 \\ \bar{e}_1 - \bar{e}_2 &= 4\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = 4(e_1 - e_3)k' \end{aligned}\right. \tag{3}$$

De unde rezultă ecuaţiunile

$$k_1^2 = \left(\frac{1 - k'}{1 + k'}\right)^2, \quad k_1'^2 = 4\,\frac{k'}{(1 + k')^2}. \tag{4}$$

Presupunem părţile reale ale lui k şi k' pozitive şi $|k| < 1$, $|k'| < 1$. Extrăgând rădăcinile pătrate ale egalităţilor (4), alegem semnele astfel ca părțile reale ale modulelor k_1 și k'_1 să fie deasemenea pozitive; avem astfel ecuațiunile

$$(5) \quad \begin{cases} k_1 = \dfrac{1-k'}{1+k'} = \dfrac{1-k'^2}{(1+k')^2} = \dfrac{k^2}{(1+k')^2}, \text{[1]} \\ k'_1 = \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}. \end{cases}$$

Eliminând modulul complementar k' intre ecuațiunile

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad k_1 = \frac{k^2}{(1+k')^2},$$

obținem ecuațiunea

$$(\,) \qquad k^2 k_1^2 + 2(k^2-2)k_1 + k^2 = 0,$$

care leagă intre ele modulul transformat k_1 cu modulul k. Această ecuațiune se numește *ecuațiunea modulară a modulului* k.

Din egalitățile (5), ținând seamă de ipotezele de mai sus, relative la modulele k și k', rezultă inegalitățile

$$(6) \qquad \begin{cases} |k_1| < |k^2| < |k|, \\ |k'_1| > |\sqrt{k'}| > |k'| \end{cases}$$

2°. Să examinăm acum transformarea funcțiunii

$$(7) \qquad sn\,(v,k) = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{pu-e_3}}, \qquad v = u\sqrt{e_1-e_3}.$$

Avem (3)

$$\bar{v} = u\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3} = u\sqrt{e_1-e_3}\,(1+k') = v\,(1+k');$$

prin urmare

$$(8) \quad sn\,(\bar{v},\, k_1) = sn\left[v\,(1+k'),\, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}}{\sqrt{\bar{p}u-\bar{e}_3}} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}\,(1+k')}{\sqrt{\bar{p}u-\bar{e}_3}}.$$

Referindu-ne la formula (4) (§ 312)

$$\bar{p}u = p\left(u \mid \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right) = pu + p\,(u-\omega_1) - e_1$$

și ținând seamă de valoarea $\bar{e}_3 = -2e_1$ (7) (§ 313), rezultă egalitatea

$$\bar{p}u - \bar{e}_3 = pu + p\,(u+\omega_1) + e_1 \text{[1]}.$$

Membrul al doilea se anulează pentru $u=\omega_3$ și $u=\omega_2$; prin urmare egalitatea precedentă se poate pune sub forma

$$\bar{p}u - \bar{e}_3 = C\,(pu-e_3)\,[p(u+\omega_1)-e_3].$$

Constanta C se deduce din desvoltarea ambelor membre în

[1] $p\,(u-\omega_1) = p\,(u+\omega_1)$.

domeniul $u=0$; găsim

$$C=\frac{1}{e_1-e_3}.$$

Avem aşà dar egalitatea

$$(9)\qquad \overline{p}u-\bar{e}_3=\frac{1}{e_1-e_3}(pu-e_3)\left[p(u+\omega_1)-e_3\right]=\frac{(pu-e_3)(pu-e_2)}{pu-e_1};$$

de unde, în virtutea formulelor

$$sn^2\nu=\frac{e_1-e_3}{pu-e_3},\quad cn^2\nu=\frac{pu-e_1}{pu-e_3},\quad dn^2\nu=\frac{pu-e_2}{pu-e_3},$$

$$(10)\qquad \overline{p}u-\bar{e}_3=\frac{(e_1-e_3)}{sn^2\nu}\frac{dn^2\nu}{cn^2\nu}.$$

Prin urmare, egalitatea (8) se scrie

$$(11)\qquad sn(\overline{\nu},k_1)=sn\left[\nu(1+k'),\frac{1-k'}{1+k'}\right]=(1+k')\frac{sn\nu.\ cn\nu.}{dn\nu.}.$$

In această formulă consistă *transformarea lui Landen* pentru funcţiunea $sn(\nu, k)$.

317. Să introducem în egalitatea (11) notaţiunile

$$(12)\qquad sn(\nu,k)=x,\quad sn(\nu(1+k'),k_1)=y;$$

vom aveà

$$(13)\qquad y=(1+k')\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

împreună cu egalităţile

$$(14)\qquad \begin{cases}\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=d\nu,\\[2ex] \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=(1+k')\,d\nu=\dfrac{2}{1+k_1}d\nu.^{1)}\end{cases}$$

De unde, ţinând seamă că, în virtutea egalităţii (13), x şi y se anulează în acelaş timp, avem egalitatea

$$(15)\qquad \int_o^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1+k_1}{2}\int_o^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}.$$

---

[1]) Prima egalitate $k^2=\frac{1-k'}{1+k'}$ ((5) (§ 316)), dă $1+k'=\frac{2}{1+k_1}$

In această egalitate consistă transformarea lui Landen pentru integrala normală a lui Legendre. *Ea reduce calculul integralei al cărei modul k este în valoare absolută mai mic decât 1 la o integrală de aceeaş speţă, având un modul k_1 a cărei valoare absolută este mai mică decât $|k|$.*

318. *Transformarea lui Landen aplicată constantelor*

$$(16)\qquad K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad iK'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

şi integralei

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

modulele k şi k' fiind presupuse reale şi cuprinse între 0 şi 1.

I. Fie K_1 şi iK'_1 transformatele constantelor

$$K=\omega_1\sqrt{e_1-e_3},\quad iK'=\omega_3\sqrt{e_1-e_3};$$

ele sunt date de egalităţile

$$(17)\qquad \begin{cases} K_1=\dfrac{\omega_1}{2}\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}=\dfrac{\omega_1}{2}\sqrt{e_1-e_3}\,(1+k')=\dfrac{1+k'}{2}K=\dfrac{1}{1+k_1}K, \\ iK_1'=\omega_3\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}=\omega_3\sqrt{e_1-e_3}\,(1+k')=i(1+k')\,K'=\dfrac{2i}{1+k_1}K'. \end{cases}$$

De unde

$$(18)\qquad \begin{cases} K=(1+k_1)\,K_1=(1+k_1)\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}}, \\ K'=\dfrac{1+k_1}{2}K'_1=\dfrac{1+k_1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2_1x^2)}}, \end{cases}$$

modulele k_1 şi k'_1 fiind determinate de formulele (5) (§ 316).

Să ne închipuim că aplicăm transformarea lui Landen constantelor K_1, K'_1 şi să reprezintăm prin k_2, k'_2 modulele transformate ale lui k_1 şi k'_1 şi prin K_2, K_2', transformatele lui K_1 şi K'_1; vom aveà egalităţile

$$k_2=\frac{k_1^2}{(1+k'_1)^2},\quad k'_2=\frac{2\sqrt{k'_1}}{1+k'_1},$$

$$K_1=(1+k_2)\,K_2,\quad K'_1=\frac{1+k_2}{2}K'_2,$$

$$K=(1+k_1)(1+k_2)\,K_2,\quad K'=\frac{1}{2^2}(1+k_1)(1+k_2)\,K'_2$$

şi inegalităţile

$$k_2 < k_1 < k, \qquad k'_2 > k'_1 > k'.$$

Continuând în acelaş mod, rezultă

$$(19) \qquad \begin{cases} \mathrm{K} = (1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)\,\mathrm{K}_n \\ \mathrm{K}' = \dfrac{1}{2^n}(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)\,\mathrm{K}'_n, \end{cases}$$

$$k > k_1 > k_2 > \ldots > k_n.$$

Modulele k_n sunt pozitive şi descresc necontenit; ele tind către zero când n tinde către infinit. In adevăr, din egalitatea

$$k_{n+1} = \frac{k_n^2}{(1+k'_n)^2}$$

rezultă $k_{n+1} < k_n^2 < k_{n-1}^4 < k_{n-2}^8 \ldots < k^{2^n}$; prin urmare, pentru $n=\infty$,

$$(20) \qquad \lim_{n=\infty} k_n = 0.$$

De unde, în virtutea egalităţii $k_n^2 + k_n'^2 = 1$,

$$(21) \qquad \lim_{n=\infty} k'_n = 1.$$

Considerând expresiunile

$$(22) \qquad \mathrm{K}_n = \int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_n^2x^2)}}, \qquad \mathrm{K}'_n = \int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_n'^2x^2)}},$$

conchidem valorile

$$(23) \qquad \lim_{n=\infty} \mathrm{K}_n = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{n=\infty} \mathrm{K}'_n = \infty.$$

II. In acelaş mod, plecând dela egalitatea (15), obţinem

$$(24) \quad \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)}{2^n} \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_n^2x^2)}}.$$

Modulul k_n devenind destul de mic, seria

$$(25) \quad \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_n^2x^2)}} = \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k_n^2 \int_o^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}k_n^4 \int_o^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots,$$

sau, punând $x = sin\varphi$, seria transformată

$$(26) \quad \int_o^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2\,sin^2\varphi}} = \varphi + \frac{1}{2}k_n^2 \int_o^\varphi sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{1.3}{2.4}k_n^4 \int_o^\varphi sin^4\varphi\, d\varphi + \ldots$$

convergează foarte repede.

319. *Transformarea lui Gauss* poate de asemenea servì la calculul constantelor K şi K′ şi a integralei de speţa I. Din formulele (11) (§ 314) deducem valorile

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{e}_1-\bar{e}_2=-3e_3-2\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}=(\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_2-e_3})^2=(e_1-e_3)(1-k)^2, \\ \bar{e}_1-\bar{e}_3=-3e_3+2\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}=(\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_2-e_3})^2=(e_1-e_3)(1+k)^2, \\ \bar{e}_2-\bar{e}_3=4\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}. \end{cases}$$

De unde rezultă, pentru modulele k_1 şi k'_1, transformatele modulelor k şi k', expresiunile

$$(2)\quad \begin{cases} k_1=\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}, \\ k'_1=\dfrac{1-k}{1+k}=\dfrac{1-k^2}{(1+k)^2}=\dfrac{k'^2}{(1+k)^2}, \end{cases}$$

cari diferă de formulele (5) (§ 316) prin permutarea lui k cu k' şi în acelaş timp a lui k_1 cu k'_1. De unde se deduce ecuaţiunea modulară

$$(\beta)\qquad k_1^2=\frac{4k}{(1+k)^2},$$

care diferă de ecuaţiunea (α), din acel paragraf, prin permutarea modulelor k şi k_1.

Din formulele (2), ipotezele fiind aceleaşi ca în transformarea lui Landen, rezultă inegalităţile

$$k_1>k,\quad k'_1<k_1.$$

Se conchide, ca şi în cazul precedent, că modulele $k_1, k_2, \ldots$ cresc şi tind către 1, pe când modulele complimentare $k'_1, k'_2, \ldots$ descresc şi tind către zero.

Procedând ca în cazul transformării lui Landen, obţinem egalitatea

$$(3)\qquad pu-\bar{e}_1=\frac{(pu-e_1)(pu-e_2)}{pu-e_3},$$

care nu diferă de formula (9) (§ 316) decât prin permutarea lui e_1 cu e_3 şi înlocuirea lui $\bar{e}_3$ prin $\bar{e}_1$.

Cu ajutorul acestei egalităţi putem obţine formula de transformare a funcţiunii $sn(v, k)$. Egalitatea (3) scrisă sub forma

$$pu-\bar{e}_3=\bar{e}_1-\bar{e}_3+\frac{(pu-e_1)(pu-e_2)}{pu-e_3}$$

devine, ţinând seamă de a doua formulă (1),

$$\frac{pu-\bar{e}_3}{\bar{e}_1-\bar{e}_3}=1+\frac{1}{(1+k)^2}\,\frac{pu-e_3}{e_1-e_3}\,\frac{pu-e_1}{pu-e_3}\,\frac{pu-e_2}{pu-e_3}.$$

Introducând funcţiunile lui Jacobi, această egalitate ia forma

$$\frac{1}{sn^2 \overline{\nu}} = 1 + \frac{cn^2\nu\, dn\, \nu^2}{(1+k)^2\, sn^2\nu} = \frac{(1+k)^2\, sn^2\nu + (1-sn^2\nu)(1-k^2 sn^2\nu)}{(1+k)^2\, sn^2\nu}$$

$$= \frac{(1+k\, sn^2\nu)^2}{(1+k)^2\, sn^2\nu}.$$

Formula de transformare a funcţiunii $sn\,(\nu, k)$ este aşà dar

$$(4) \qquad sn(\overline{\nu}, k_1) = sn\left[(1+k)\nu, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{(1+k)\, sn\nu}{1+k\, sn^2\nu},$$

$$\overline{\nu} = u\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3} = (1+k)\, u\sqrt{e_1 - e_3} = (1+k)\nu;$$

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

320. Să punem

$$sn\,(\nu, k) = x, \quad sn\,(\overline{\nu}, k_1) = y;$$

formula (4) se transformă în expresiunea raţională

$$(5) \qquad y = \frac{(1+k)\, x}{1+k\, x^2},$$

de gradul al doilea, în virtutea căreia avem egalitatea

$$(6) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{1+k}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}.$$

Transformatele constantelor K şi K′ sunt date, în cazul considerat (Gauss), de egalităţile

$$(7) \quad \begin{cases} \mathrm{K}_1 = \omega_1\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3} = (1+k)\,\omega_1\sqrt{e_1 - e_3} = (1+k)\,\mathrm{K}, \\ i\mathrm{K}'_1 = \dfrac{\omega_3}{2}\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3} = \dfrac{1+k}{2}\,\omega_3\sqrt{e_1 - e_3} = \dfrac{1+k}{2}\, i\,\mathrm{K}'. \end{cases}$$

De unde

$$(8) \quad \begin{cases} \mathrm{K} = \dfrac{1}{1+k}\mathrm{K}_1 = \dfrac{1+k'_1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}}, \\ \mathrm{K}' = \dfrac{2}{1+k}\mathrm{K}'_1 = (1+k'_1)\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1'^2x^2)}}, \end{cases}$$

modulele k_1 şi k'_1 fiind determinate de formulele (2) (§ 319).

Aplicând de n ori succesiv transformarea lui Gauss, obţinem expresiuni de aceeaş formă ca în cazul transformării lui Landen, permutând în toate desvoltările modulele k_n şi k'_n şi în acelaş timp

K_n cu K'_n, $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$(9) \quad \begin{cases} K = \frac{1}{2^n}(1 + k'_1)(1 + k'_2)\ldots(1 + k'_n) K_n, \\ K' = (1 + k'_1)(1 + k'_2)\ldots(1 + k'_n) K'_n. \end{cases}$$

Seriile convergează mai repede în cazul întâi dacă $k < k'$ și mai repede în cazul al doilea dacă $k' < k$. De unde conchidem că este preferabil a ne servì de prima sau a doua transformare după cum $k \lesseqgtr k'$.

CAPITOLUL XXIV.

PROBLEMA DIVIZIUNEI.

I. *Diviziunea argumentului funcțiunii* pu.

321. Problema diviziunei argumentului printr'un număr întreg pozitiv n consistă în a calculà valoarea lui $p\frac{u}{n}$ în funcțiune de pu. Ecuațiunea care leagă $p\frac{u}{n}$ de pu este dată de ecuațiunea multiplicațiunei lui pnu în care înlocuim u prin $\frac{u}{n}$ (13) (§ 174); ea primește forma

$$(1) \qquad P\left(p\frac{u}{n}\right) - pu\, P_1\left(p\frac{u}{n}\right) = 0,$$

P și P_1 fiind polinoame de $p\frac{u}{n}$, cel dintâi de gradul n^2 și cel de al doilea de gradul $n^2 - 1$. Coeficienții acestor polinoame sunt polinoame de $\frac{-1}{2}g_2$ și g_3 cu coeficienți numere întregi. Unei valori pu corespund dar n^2 valori pentru $p\frac{u}{n}$. Acest rezultat se mai poate deduce din considerațiunea următoare:

Fiind dată valoarea $pu = pu_0$, avem

$$u = \pm u_0 + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3,$$

λ și μ fiind numere întregi arbitrare; de unde rezultă egalitatea

$$p\frac{u}{n} = p\left(\pm\frac{u_0}{n} + \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right).$$

Insă $p\frac{u}{n}$ fiind funcțiune pară, această egalitate nu se schimbă dacă schimbăm semnul lui u_0 și în acelaş timp semnele coeficienților

λ şi μ. Toate rădăcinile sunt dar cuprinse în expresiunea

$$(2) \qquad y_{\lambda,\,\mu} = p\left(\frac{u_0}{n} + \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right),$$

pentru valorile $\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n-1$.

Rădăcinile sunt în genere distincte; căci pentru ca două rădăcini

$$p\left(\frac{u_0}{n} + \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right), \quad p\left(\frac{u_0}{n} + \frac{2\lambda'\omega_1 + 2\mu'\omega_3}{n}\right)$$

să fie egale, este necesar ca diferenţa argumentelor

$$\frac{2(\lambda - \lambda')\,\omega_1 + 2(\mu - \mu')\omega_3}{n},$$

sau, suma lor

$$\frac{2\,u_0}{n} + \frac{2(\lambda + \lambda')\,\omega_1 + 2(\mu + \mu')\,\omega_3}{n}$$

să fie o perioadă (nu neapărat primitivă). Diferenţa argumentelor nu poate fi perioadă, căci diferenţele $\lambda-\lambda'$, $\mu-\mu'$ sunt mai mici decât n şi nu sunt nule în acelaş timp. Suma nu poate fi perioadă decât dacă u_0 ar fi o semiperioadă [1]).

Ecuaţiunea (1) este ireductibilă, adică membrul întâi nu este divizibil cu un polinom de $p\left(\frac{u}{n}\right)$ de grad mai mic, ai cărui coeficienţi să fie funcţiuni raţionale de pu. In adevăr, să presupunem că ar exista un polinom

$$(3) \qquad y^m + P_1(pu)\,y^{m-1} + \ldots + P_m(pu) = 0, \qquad m < n^2$$

ai cărui coeficienţi să fie funcţiuni raţionale de pu. Aceşti coeficienţi rămânând neschimbaţi când mărim u cu un multiplu de perioade $2\lambda\,\omega_1 + 2\mu\,\omega_3$, *oricare ar fi valoarea lui u*, rezultă că dacă $y_{00} = p\,\frac{u}{n}$ este una din rădăcinile ecuaţiunei (3), valorile

$$(4) \qquad y_{\lambda,\mu} = p\left(\frac{u}{n} + \frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n}\right)$$

vor satisface şi ele această ecuaţiune, adică rădăcinile ecuaţiunilor

---

[1]) Din egalitatea

$$\frac{2u_0 + 2(\lambda+\lambda')\,\omega_1 + 2(\mu+\mu')\,\omega_3}{n} = \Omega,$$

Ω fiind o perioadă, rezultă $2u_0$=perioadă.

(1) şi (3) vor coincide: ceeace probează ireductibilitatea ecuaţiunei (1).

Cele n^2 valori (4) sunt, în virtutea formulei de adiţiune, funcţiuni raţionale de cantităţile

$$p\frac{u}{n},\ p'\frac{u}{n},\ p\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n},\ p'\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n}.$$

De altă parte, dacă, pe lângă pu, presupunem dată valoarea

$$p'u=\sqrt{4p^3u-g_2pu-g_3},$$

recunoaştem că $p'\frac{u}{n}$ este funcţiune raţională de $p\frac{u}{n}$ şi de $p'u$. Căci derivând ecuaţiunea (1), pusă sub forma $pu=\mathscr{R}\left(p\frac{u}{n}\right)$, $\mathscr{R}$ funcţiune raţională, avem

$$p'\frac{u}{n}=\frac{np'u}{\mathscr{R}'\left(p\frac{u}{n}\right)}.$$

Aşà dar, toate rădăcinile ecuaţiunei (1) sunt funcţiuni raţionale de rădăcina $y_{0\cdot 0}=p\frac{u}{n}$, ai căror coeficienţi sunt funcţiuni raţionale de g_2, g_3 şi de cantităţile

$$p\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n},\ p'\frac{2\lambda\,\omega_1+2\mu\,\omega_3}{n}.$$

Cele două din urmă sunt, în virtutea formulelor de adiţiune şi de multiplicaţiune, funcţiuni raţionale de $p\frac{2\omega_1}{n}$, $p\frac{2\omega_3}{n}$ şi de derivatele $p'\frac{2\omega_1}{n}$, $p'\frac{2\omega_3}{n}$, cari se calculează prin două extrageri de rădăcini pătrate.

Se demonstrează că ecuaţiunea diviziunei argumentului funcţiunii pu intră în clasa ecuaţiunilor numite *Abeliane*. Aceste ecuaţiuni se rezolvă algebriceşte prin radicale [1]).

§ 322 Diviziunea argumentului funcţiunii pu printr'un număr compus n se poate reduce la diviziuni succesive, divizorii fiind factorii primi ai lui n.

---

[1]) Durège-Maurer *Th. der elliptischen Functionen* p. 325.

Vom efectuà calculele în cazul cel mai simplu, $n = 2$. Ecuaţiunea corespunzătoare este (V. egalităţile (3), (15), (16), (§ 174).

$$(5) \qquad p\frac{u}{2} - pu = \frac{3\,p^4\frac{u}{2} - \frac{3}{2}g_2\,p\frac{u}{2} - 3\,g_3 p\frac{u}{2} - \frac{1}{16}g_2^2}{4\,p^3\frac{u}{2} - g_2\,p\frac{u}{2} - g_3}.$$

Soluţiunea problemei pe cale algebrică, adică rezoluţiunea acestei ecuaţiuni de gradul al patrulea, este, precum se vede, destul de anevoioasă. Ajungem însă foarte lesne la soluţiunea căutată, dacă comparăm membrul întâiu $p\frac{u}{2} - pu$ al ecuaţiunei precedente cu funcţiunea

$$(6) \qquad \varphi(u) = \frac{\sigma_1 u \sigma_2 u}{\sigma^2 u} + \frac{\sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma^2 u} + \frac{\sigma_3 u \sigma_1 u}{\sigma^2 u}.$$

Amândouă aceste funcţiuni sunt funcţiuni eliptice, având aceleaşi perioade primitive $4\,\omega_1$, $4\omega_3$, aceleaşi poluri duble

$$u = 0,\ 2\omega_1,\ \ 2\omega_3,\ \ 2\,(\omega_1 + \omega_3) = -\,2\omega_2,$$

reziduurile nule şi aceleaşi părţi principale corespunzătoare polurilor. Astfel, în domeniul polului $u = 0$, partea principală în ambele membre este

$$\frac{3}{u^2};$$

în domeniul celorlalte poluri părţile principale sunt

$$\frac{1}{(u-2\omega_1)^2},\ \frac{1}{(u-2\omega_3)^2},\ \frac{1}{(u+2\omega_2)^2}.$$

De unde rezultă egalitatea

$$(7) \qquad p\frac{u}{2} - pu = \frac{\sigma_1 u \sigma_2 u}{\sigma^2 u} + \frac{\sigma_2 u \sigma_3 u}{\sigma^2 u} + \frac{\sigma_3 u \sigma_1 u}{\sigma^2 u},$$

Mărind u cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, obţinem egalităţile

$$(8) \qquad \begin{cases} p\left(\frac{u}{2} + \omega_1\right) - pu = -\frac{\sigma_1 u \sigma_2 u}{\sigma^2 u} + \frac{\sigma_2 u \sigma_3 u}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma_3 u \sigma_1 u}{\sigma^2 u}, \\ p\left(\frac{u}{2} + \omega_2\right) - pu = -\frac{\sigma_1 u \sigma_2 u}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma_2 u \sigma_3 u}{\sigma^2 u} + \frac{\sigma_3 u \sigma_1 u}{\sigma^2 u}, \\ p\left(\frac{u}{2} + \omega_3\right) - pu = \frac{\sigma_1 u \sigma_2 u}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma_2 u \sigma_3 u}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma_3 u \sigma_1 u}{\sigma^2 u}. \end{cases}$$

De unde, în virtutea formulei

$$\frac{\sigma_a u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_a} ,$$

avem, pentru cele patru rădăcini, expresiunile:

$$(9)\quad \begin{cases} p\frac{u}{2} = pu + \sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2} + \sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3} + \sqrt{pu-e_3}\sqrt{pu-e_1}, \\ p\left(\frac{u}{2}+\omega_1\right) = pu - \sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2} + \sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3} - \sqrt{pu-e_3}\sqrt{pu-e_1}, \\ p\left(\frac{u}{2}+\omega_2\right) = pu - \sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2} - \sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3} + \sqrt{pu-e_3}\sqrt{pu-e_1}, \\ p\left(\frac{u}{2}+\omega_3\right) = pu + \sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2} - \sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3} - \sqrt{pu-e_3}\sqrt{pu-e_1}. \end{cases}$$

Aceste valori sunt în genere inegale (§ 321). Dacă $u=\omega_a$, $(a=1, 2,3)$, două câte două din ele devin egale. Astfel avem

$$(10)\quad \begin{cases} p\frac{\omega_1}{2} = p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_1\right) = e_1 + \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}. \\ p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_3\right) = p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_2\right) = e_1 - \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}. \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} p\frac{\omega_2}{2} = p\left(\frac{\omega_2}{2}+\omega_2\right) = e_2 + \sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_2-e_1}, \\ p\left(\frac{\omega_2}{2}+\omega_1\right) = p\left(\frac{\omega_2}{2}+\omega_3\right) = e_2 - \sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_2-e_1}, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} p\frac{\omega_3}{2} = p\left(\frac{\omega_3}{2}+\omega_3\right) = e_3 + \sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}, \\ p\left(\frac{\omega_3}{2}+\omega_1\right) = p\left(\frac{\omega_3}{2}+\omega_2\right) = e_3 - \sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}. \end{cases}$$

Cele şase valori cuprinse în prima coloană a egalităţilor precedente sunt rădăcinile ecuaţiunei

$$\Pi\left(pu - p\frac{2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{4}\right) = 0,$$

în care λ şi μ primesc valorile (10) (§ 174), corespunzătoare lui $n = 4$:

$$(\lambda=1,\ \mu=0,\ 2),\ (\lambda=1,\ \mu=\pm 1),\ (\lambda=0,\ 2,\ \mu=1).$$

II. *Diviziunea perioadelor funcţiunii* pu.

323. In legătură cu problema diviziunei argumentului funcţiunii pu, avem problema mai specială a diviziunei perioadelor acestei

funcţiuni; un exemplu am avut mai sus, unde am obţinut valorile $p\frac{\omega_1}{2}$, $p\frac{\omega_2}{2}$, $p\frac{\omega_3}{2}$ în acelaş timp cu valorile diferite

$$p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_2\right),\ p\left(\frac{\omega_2}{2}+\omega_3\right),\ p\left(\frac{\omega_3}{2}+\omega_1\right).$$

Ecuaţiunea corespunzătoare acestei probleme, numită *ecuaţiunea diviziunei perioadelor*, se deduce din ecuaţiunea (1), în care înlocuim u printr'o perioadă, prin urmare făcând $pu=\infty$. Se obţine ecuaţiunea

$$\text{(13)} \qquad P_1\left(p\frac{u}{n}\right)=0,$$

ale cărei rădăcini sunt valorile ce primeşte $y_{\lambda,\mu}$ din formula (2) pentru $u_0=0$. Aceste valori sunt

$$\text{(14)} \qquad y_{\lambda.\mu}=p\,\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_3}{n},$$

$$\lambda,\ \mu=0,\ 1,\ldots,\ n-1,\ \text{exceptând}\ \lambda=\mu=0.$$

Dacă n este un număr compus, este de ajuns a aplică operaţiunea diviziunei succesiv factorilor primi ai acestui număr. Pentru $n=2$, avem valorile $p\,\omega_a=e_a$, $a=1, 2, 3$.

Putem dar consideră n număr prim impar. In acest caz, avem, în virtutea egalităţii

$$y_{-\lambda,-\mu}=y_{\lambda,\mu},$$

$\frac{n^2-1}{2}$ valori distincte pentru $y_{\lambda,\mu}$. Polinomul $P_1\left(p\frac{u}{n}\right)$ este pătratul polinomului de gradul $\frac{n^2-1}{2}$ reprezintat (2) (§ 174) prin $\varphi(u)$, înlocuind u prin $\left(\frac{u}{n}\right)$. Valorile $y_{\lambda,\mu}$ sunt aşa dar rădăcinile ecuaţiunei $\varphi_n\left(\frac{u}{n}\right)=0$. Astfel, pentru $n=3$, această ecuaţiune coincide cu ecuaţiunea ((16), § 174):

$$\text{(15)} \qquad 3y^4-\frac{3}{2}g_2\,y^2-3g_3\,y-\frac{1}{16}g_2^2=0,$$

ale cărei rădăcini sunt

$$p\frac{2\omega_1}{3},\ p\frac{2\omega_3}{3},\ p\frac{2\omega_1\pm2\omega_3}{3},$$

corespunzătoare valorilor $\lambda=1,\ \mu=0;\ \lambda=0,\ \mu=1;\ \lambda=1,\ \mu=\pm1.$

Ecuațiunea diviziunei perioadelor nu este, în cazul general, rezolubilă prin radicale[1])

324. *Diviziunea prin 2 a argumentului funcțiunilor snv, cnv, dnv.* Din formula de multiplicațiune ((9), § 211)

$$(1) \qquad sn2v = 2\frac{snv\, cnv\, dnv}{1-k^2 sn^4 v},$$

în care înlocuim v prin $\frac{v}{2}$ și ridicăm la pătrat, rezultă ecuațiunea de gradul al optulea în $sn\frac{v}{2}$

$$(2) \qquad sn^2 v = 4\frac{sn^2\frac{v}{2}\left(1-sn^2\frac{v}{2}\right)\left(1-k^2 sn^2\frac{v}{2}\right)}{\left(1-k^2 sn^4\frac{v}{2}\right)^2};$$

ale cărei rădăcini sunt două câte două egale și de semne contrarii. Acest rezultat se poate justifică *a priori*:

1⁰. La valoarea dată $snv = snv_0$ corespunde, pentru v, dubla serie de valori

$$v = \begin{cases} v_0 + 4\lambda K + 2\mu i K', \\ 2K - v_0 + 4\lambda K + 2\mu i K'; \end{cases}$$

de unde, pentru $sn\frac{v}{2}$,

$$(3) \qquad sn\frac{v}{2} = \begin{cases} sn\left(\frac{v_0}{2} + 2\lambda K + \mu i K'\right), \\ sn\left(K - \frac{v_0}{2} + 2\lambda K + \mu i K'\right) \end{cases} \qquad \lambda = 0,1;\ \mu = 0,1.$$

2⁰. Din relațiunea

$$sn(u + 2K + \mu i K') = -sn(u + \mu i K'),$$

în care dăm lui μ valorile 0 și 1 și înlocuim u succesiv prin $\frac{v}{2}$ și prin $K - \frac{v}{2}$, rezultă că patru din valorile lui $sn\frac{v}{2}$ sunt respectiv egale și de semne contrarii cu celelalte patru.

---

[1]) Bianchi. *Lezioni sulla Teoria delle Funzioni di variabile complessa e delle Funzioni ellitiche.* (p. 309).

O altă proprietate a ecuaţiunei (2) rezultă din prima formulă (7), (§ 199),

$$\sqrt{k}\, sn(v + iK') = \frac{1}{\sqrt{k}\; snv}.$$

Dacă dar punem $x = \sqrt{k}\, sn\frac{v}{2}$, ecuaţiunea (2) se transformă în ecuaţiunea reciprocă

$$k^2\, sn^2 v\, (1 - x^4)^2 - 4x^2 (k - x^2)(1 - kx^2) = 0,$$

care se rezolvă prin rădăcini pătrate suprapuse.

325. Se obţine o formulă mai simplă pentru $sn\frac{v}{2}$, precum şi pentru $cn\frac{v}{2}$, $dn\frac{v}{2}$, dacă le exprimăm în funcţiune de cnv, dnv.

Din formulele de multiplicaţiune (9) (§ 211)

$$cnv = \frac{cn^2\frac{v}{2} - sn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2\, sn^4\frac{v}{2}}, \quad dnv = \frac{dn^2\frac{v}{2} - k^2 sn^2\frac{v}{2}\, cn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}},$$

deducem egalităţile

$$1 + cnv = \frac{2cn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2\, sn^4\frac{v}{2}}, \quad 1 + dnv = \frac{2dn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2\, sn^4\frac{v}{2}}.$$

$$1 - cnv = \frac{2sn^2\frac{v}{2}\, dn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}}, \quad 1 - dnv = \frac{2k^2 sn^2\frac{v}{2}\, cn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2\, sn^4\frac{v}{2}},$$

$$cnv + dnv = \frac{2cn^2\frac{v}{2}\, dn^2\frac{v}{2}}{1 - k^2 sn^4\frac{v}{2}};$$

din cari rezultă expresiunile

$$(5) \qquad \begin{cases} sn\dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cnv}{1 + dnv}} = \dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{1 - dnv}{1 + cnv}}, \\[2ex] cn\dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{cnv + dnv}{1 + dnv}}, \quad dn\dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{cnv + dnv}{1 + cnv.}} \end{cases}$$

Se justifică lesne *a priori* că fiind date valorile funcţiunilor cnv, dnv, avem pentru funcţiunile $sn\frac{v}{2}, cn\frac{v}{2}, dn\frac{v}{2}$ câte două valori egale şi de semne contrarii.

Din formulele (5) rezultă valorile

$$(6)\quad \begin{cases} sn\frac{K}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+k'}}, & sn\frac{K+iK'}{2}=\sqrt{\frac{k+ik'}{k}},\\ cn\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, & cn\frac{K+iK'}{2}=\sqrt{\frac{-ik'}{k}},\\ dn\frac{K}{2}=\sqrt{k'}, & dn\frac{K+iK'}{2}=\sqrt{\frac{-ik'}{k-ik'}}. \end{cases}$$

Pentru a obţine valoarea $sn\frac{iK'}{2}$ să facem $v=-\frac{iK'}{2}$ în egalitatea $sn(v+iK')=\frac{1}{ksnv}$; de unde rezultă $sn^2\frac{iK'}{2}=-\frac{1}{k}$ şi prin urmare $cn^2\frac{iK'}{2}=1+\frac{1}{k}$, $dn^2\frac{iK'}{2}=1+k$. Avem aşà dar valorile

$$(7)\quad sn\frac{iK'}{2}=\frac{i}{\sqrt{k}},\; cn\frac{iK'}{2}=\sqrt{\frac{1+k}{k}},\; dn\frac{iK'}{2}=\sqrt{1+k}.$$

Radicalele sunt reale şi pozitive dacă k este real şi cuprins între 0 şi 1.

CAPITOLUL XXV.

CALCULUL NUMERIC AL FUNCŢIUNILOR ELIPTICE.

326. Formulele deduse din seriile ϑ dau mijlocul practic de a calculà funcţiunile eliptice, definite printr'un sistem de perioade, sau prin invarianţi. Pentru ca seriile, de cari ne servim, să convergeze cât mai repede este necesar ca valoarea absolută a cantităţii $q=e^{i\pi\tau}$ să fie cât mai *mică* posibilă; pentru aceasta trebuie ca partea reală a raportului $\frac{\tau}{i}=\frac{\omega_3}{i\omega_1}$, care este presupusă *pozitivă*, să fie cât mai *mare* posibilă.

Acest rezultat este atins dacă valoarea absolută a perioadei $2\omega_1$, este cea mai mică posibilă. In adevăr, fie

$$2\omega_1=a+ib,\quad 2\omega_3=c+id;$$

avem

$$\tau=\frac{c+id}{a+ib}.$$

De unde, punând $\tau = \alpha + i\beta$,

$$\beta = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} = \frac{S}{|2\,\omega_1|^2};$$

S reprezintând aria paralelogramului $(2\omega_1, 2\omega_3)$. Această arie având aceeaş valoare, pentru toate sistemele de perioade echivalente, propoziţiunea este justificată.

327. Fiind dat un sistem de două perioade primitive $(2\omega, 2\omega')$, să ne închipuim construită reţeaua de paralelograme corespunzătoare, având origina ca unul din vârfuri. Punctele perioade (vârfurile paralelogramelor) fiind aceleaşi oricare ar fi sistemul echivalent cu cel dintâi, să considerăm punctul perioadă a cărui distanţă de origină este cea mai mică.

Nu există de cât cel mult două asemenea puncte, căci puncte perioade nu pot fi decât vârfuri ale reţelei. Fie $2\omega_1$ acest punct, sau unul din cele două şi fie $2\omega'_1$ una din perioadele, care împreună cu $2\omega_1$ formează un paralelogram elementar, astfel ca unghiul format de aceste două perioade să fie cuprins între 0 şi π. Toate punctele perioade, cari împreună cu $2\omega_1$ formează paralelograme elementare, sunt date de expresiunea

$$2\omega'_1 + 2k\omega_1,$$

k fiind un număr întreg oarecare. Printre aceste puncte există unul, cel mult două, a cărui distanţă de origină este cea mai mică. Acest punct sau unul din ele, îl notăm $2\omega_3$. Sistemul de perioade primitive astfel determinat se numeşte *sistem principal.*

Dacă facem abstracţiune de sistemele formate din aceleaşi perioade cu semnele schimbate, avem un singur sistem principal, sau excepţional două, având perioada comună $2\omega_1$, celelalte două fiind egale în valoare absolută. Nu facem, în genere, deosebire între aceste două sisteme.

Din definiţiunea sistemului principal, rezultă inegalităţile

$$(1) \quad |\omega_3| \geqslant |\omega_1|, \quad |\omega_3 + \omega_1| \geqslant |\omega_3|, \quad |\omega_3 - \omega_1| \geqslant \omega_3;$$

căci paralelogramele $(2\omega_1, 2\omega_3)$, $(\pm 2\omega_1 + 2\omega_3, 2\omega_3)$ sunt echivalente şi, în virtutea determinării punctului $2\omega_3$, distanţa acestui punct de origină este mai mică, cel mult egală cu distanţa de origină a unuia din punctele $2\omega_3 \pm 2\omega_1$.

De unde

$$\left|\frac{\omega_3}{\omega_1}\right| \geqslant 1, \quad \left|\frac{\omega_3 \pm \omega_1}{\omega_3}\right| \geqslant 1,$$

sau

$$(2) \qquad |\tau| \geqslant 1, \quad |\tau \pm 1| \geqslant |\tau|.$$

Interpretare geometrică. Să considerăm cercul $|\tau| = 1$ şi două drepte perpendiculare pe axa reală duse prin punctele $\tau = \pm\frac{1}{2}$ (fig. 61). Prima inegalitate (2) exprimă că punctul τ este exterior cercului sau pe cerc. Inegalitatea $|\tau| \leqq |\tau - 1|$ exprimă că distanţa punctului τ de origină este mai mică sau cel mult egală cu distanţa sa de punctul $\tau = 1$; prin urmare punctul τ se găseşte la stânga perpendicularei dusă prin $\tau = \frac{1}{2}$ sau pe această perpendiculară. In fine, în virtutea inegalităţii $|\tau| \leqslant |\tau + 1|$, punctul τ se găseşte la dreapta perpendicularei dusă prin punctul $\tau = -\frac{1}{2}$. De unde rezultă că *punctul τ este situat în aria exterioară cercului $|\tau| = 1$, limitată de arcul AB al cercului şi de cele două perpendiculare, sau pe una din aceste trei linii.*

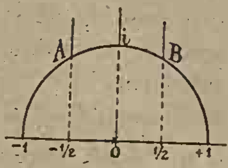

Fig. 61

Afixele punctelor A, B fiind respectiv $\mp\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă că dacă punem $\tau = \alpha + i\beta$, avem

$$-\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}, \quad \beta \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

328. Din desvoltările precedente rezultă, pentru valoarea absolută a cantităţii $q = e^{i\pi\tau}$, o limită superioară, dată de inegalitatea

$$|q| = e^{-\pi\beta} \leqslant e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}} < \frac{1}{9}.$$

Dacă ω_1 şi $\frac{\omega_3}{i}$ sunt reale, obţinem pentru q o limită superioară mai mică. Căci, presupunând aceste cantităţi pozitive, ceeace este posibil, raportul $\frac{\tau}{i}$ este real şi satisface inegalitatea

$$\frac{\tau}{i} \geqq 1.$$

In acest caz, cantitatea q este reală, pozitivă şi avem

$$q \leqq e^{-\pi} < \frac{1}{23}.$$

329. Fiind date perioadele $(2\omega_1, 2\omega_3)$ deducem valoarea raportului τ, de unde aceea a cantităţilor q şi $q^{\frac{1}{4}}$ cu ajutorul cărora se

construesc seriile $\vartheta(v, q)$. Rămâne să examinăm între ce limite putem face să fie cuprins termenul

$$q^{n^2} z^{2n}, \quad (z = e^{i\pi v}),$$

care poate fi privit ca termenul general al seriilor $\vartheta(v, q)$. Pentru aceasta, observăm că orice valoare a cantităţii v se poate pune sub forma

$$v = a + b\tau,$$

a şi b fiind numere reale. In virtutea formulelor de transformare a funcţiunilor $\vartheta(v)$ (§ 229), putem, în calculul acestor funcţiuni să considerăm valorile a şi b, cuprinse între $-\frac{1}{2}$ şi $+\frac{1}{2}$. Valoarea absolută a cantităţii $z = e^{i\pi v}$ fiind

$$|e^{bi\pi\tau}| = |q^b|,$$

rezultă că pentru $|b| \leqq \frac{1}{2}$, această valoare este cuprinsă între $\left|q^{\frac{1}{2}}\right|$ şi $\left|q^{-\frac{1}{2}}\right|$. Prin urmare valoarea absolută a termenului $q^{n^2} z^{2n}$ este cuprinsă între $\left|q^{n^2+n}\right|$ şi $\left|q^{n^2-n}\right|$.

Seriile astfel construite convergează aşa dar foarte repede.

330. Seriile $\vartheta(v)$ fiind calculate, putem obţine valorile elementelor cari se prezintă în funcţiunile lui Weierstrass, precum şi valorile acestor funcţiuni, în virtutea relaţiunilor ce leagă funcţiunile lui Weierstrass cu cele ale lui Jacobi. Astfel formulele (18) (§ 232) ne dau cantităţile e_1, e_2, e_3, de unde rezultă valorile invarianţilor g_2, g_3, a discriminantului Δ şi a invariantului absolut J. Cantitatea η_1 este dată de formula (13) (§ 235)

$$(1) \qquad \eta_1\omega_1 = -\frac{1}{12}\,\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta'_1(0)} = \frac{\pi^2}{12}\,\frac{1 - 3^3.q^{1.2} + 5^3.q^{2.3} - \ldots}{1 - 3q^{1.2} + 5.q^{2.3} - \ldots}$$

şi valoarea lui η_3 rezultă din egalitatea

$$(2) \qquad \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}.$$

331. Să presupunem că funcţiunea eliptică ce voim să calculăm este definită de invarianţii g_2 şi g_3. Cunoştinţa acestor invarianţi trage după sine cunoştinţa rădăcinilor e_1, e_2, e_3 ale ecuaţiunii

$$(1) \qquad 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0.$$

Să presupunem rădăcinile dispuse astfel ca să avem inegalităţile

$$(2) \qquad |e_1 - e_3| \geqq \begin{cases} |e_1 - e_2| \\ |e_2 - e_3| \end{cases}$$

Punând

$$(3) \qquad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}\,; \quad k'^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}\,,$$

avem, în virtutea inegalităților (2).

$$|k^2|\leqq 1, \quad |k'^2|\leqq 1.$$

Dacă punctele e_1, e_2, e_3 sunt în linie dreaptă, e_2 fiind situat între e_1 și e_3, k^2 și k'^2 sunt reale și pozitive.

In cazul general, când cele trei puncte formează un triunghiu, latura $\overline{e_1 e_3}$ fiind cea mai mare, sau, cel puțin, nefiind mai mică ca nici una din celelalte două, unghiurile ce ea formează cu acestea sunt unghiuri ascuțite. Aceste unghiuri fiind respectiv egale cu cea mai mică valoare absolută a fiecărui argument al raporturilor

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}\,, \quad \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}\,,$$

rezultă că aceste argumente sunt cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$ [1]). De unde rezultă că cel mai mic argument în valoare absolută al modulelor k și k' este cuprins între $-\frac{\pi}{4}$ și $+\frac{\pi}{4}$ și cel corespunzător al radicalelor $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ este cuprins între $-\frac{\pi}{8}$ și $+\frac{\pi}{8}$. Prin urmare putem totdeauna luà radicalele

$$\sqrt{k}=\sqrt[4]{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}\,, \quad \sqrt{k'}=\sqrt[4]{\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}\,,$$

astfel ca partea reală a fiecăruia să fie pozitivă [2]). Dacă rădăcinile e_1, e_2, e_3 sunt reale, dispuse în ordinea $e_1>e_2>e_3$ radicalele $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ sunt reale, pozitive și mai mici decât 1.

---

[1]) Considerând figurile 62 și 63; avem (fig. 62)

$$\arg\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\hat{\alpha}_3, \quad \arg\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}=-\hat{\alpha}_1$$

Fig. 62

și (fig 63)

$$\arg\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=-\hat{\alpha}_3, \quad \arg\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}=\hat{\alpha}_1$$

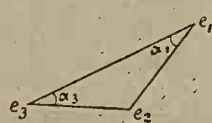

Fig. 63

[2]) Rezultat care concordă cu definițiunea modulelor k, k' și a radicalelor acestor module (§ 196).

332. *Calculul lui q*. Radicalele $\sqrt{k}$ şi $\sqrt{k'}$ fiind astfel determinate, putem, aplicând una din formulele (10) (11) sau (14) (§ 231), să calculăm cantitatea q. Cea dintâi din aceste trei formule

$$(4) \qquad \sqrt{k}=\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}=2\frac{q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+q^{\frac{49}{4}}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots},$$

în care punem

$$(5) \qquad \frac{\sqrt{k}}{2}=g, \quad q^{\frac{1}{4}}=h,$$

devine

$$(6) \qquad g=h\frac{1+h^8+h^{24}+h^{48}+\ldots}{1+2h^4+2h^{16}+2h^{36}+\ldots}.$$

Seria $\vartheta_3(0, q)$, absolut şi uniform convergentă pentru $|q|<1$, nu se anulează în interiorul cercului $|q|=1$, precum ne arată expresiunea sa sub formă de produs (3) (§ 226)

$$\vartheta_3(0,q)=\Pi(1-q^{2n})\,(1+q^{2n-1})^2$$

De unde rezultă că numitorul fracţiunii din urmă nu se anulează în interiorul cercului $|h|=1$ şi, prin urmare, membrul al doilea (6) se desvoltă într'o serie întreagă de h, convergentă în acest cerc, ai cărei primi termeni sunt

$$(7) \qquad g=h(1-2h^4+5h^8-10h^{12}+18h^{16}+\ldots).$$

Din această desvoltare rezultă, prin inversiune pentru h, o serie de forma

$$(8) \qquad h=g(1+a_1g^4+a_2g^8+\ldots)\,^{1)}.$$

Calculând coeficienţii, precum se ştie, şi înlocuind g şi h prin valorile lor (5), obţinem

$$(9) \qquad q^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{k}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^5+15\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^9+\ldots$$

De unde, ridicând ambele membre la puterea a patra,

$$(10) \qquad q=\frac{1}{16}k^2+\frac{1}{32}k^4+\frac{21}{1024}k^6+\ldots$$

---

[1]) Dacă în ecuaţiunea (7) multiplicăm h cu i, g se reproduce multiplicat cu i; rezultă, viceversa, în virtutea transformării conforme, că, înlocuind g prin ig, h trebue să se reproducă multiplicat cu i.

Seriile (9) şi (10) convergează în domeniul punctului $k=0$. Se poate proba că ele convergează în interiorul cercului $|k|=1$. Pentru aceasta, să ne referim la formula (23) (§ 203)

$$K' = \frac{2}{\pi} K \log \frac{4}{k} - P(k^2),$$

din care se deduce egalitatea

$$-\pi \frac{K'}{K} = \log \frac{k^2}{16} + \pi \frac{P(k^2)}{K}.$$

Ambii termeni ai fracțiunii din membrul al doilea fiind funcțiuni olomorfe de k^2 în cercul $|k|=1$ şi numitorul neanulându-se în interiorul acestui cerc (observare § 203), rezultă că ultimul termen din membrul al doilea se poate desvoltà într'o serie întreagă $\mathcal{F}(k^2)$ convergentă în interiorul cercului $|k|=1$. Putem dar scrie

$$-\pi \frac{K'}{K} = \log \frac{k^2}{16} + \mathcal{F}(k^2);$$

de unde

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} = e^{\log \frac{k^2}{16}} e^{\frac{k^2}{2} + \dots}$$

$$= \frac{k^2}{16}\left(1 + \frac{k^2}{2} + c_1 k^4 + \dots\right).$$

333. Putem obţine pentru q o serie mai convergentă decât seria (10), plecând dela egalitatea (14) (§ 231), în care reprezintăm membrul dintâi prin l:

$$l = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{\vartheta_3(0)-\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)+\vartheta_0(0)} = 2\,\frac{q+q^9+q^{25}+\dots}{1+2q^4+2q^{16}+\dots}. \tag{11}$$

Membrul din urmă al acestei egalități nu diferă de membrul al doilea al egalității (4) decât prin înlocuirea lui $q^{\frac{1}{4}}$ prin q; prin urmare, înlocuind în egalitatea (9) $q^{\frac{1}{4}}$ prin q şi $\sqrt{k}$ prin l, avem seria

$$q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + \dots \tag{12}$$

Să căutăm o limită superioară a valorii absolute a cantității

$$l = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}.$$

Partea reală a radicalului $\sqrt{k'}$ fiind pozitivă, valoarea absolută a lui l este mai mică decât 1 şi cu atât mai mică cu cât k' este mai aproape de 1.

Să presupunem $|k| \leqq |k'| < 1$. In acest caz avem inegalitățile

$$|e_2 - e_3| \leqq |e_1 - e_2| \leqq |e_1 - e_3|.$$

Latura $\overline{e_2 e_3}$ a triunghiului (e_1, e_2, e_3) fiind mai mică decât celelalte două sau cel mult egală cu una din ele, sau cu amândouă (triunghiul echilateral) rezultă, pentru unghiul $\hat{e}_1$ cu vârful în punctul e_1, inegalitatea

$$\hat{e}_1 \leqq \frac{\pi}{3}.$$

Acest unghiu fiind egal cu valoarea absolută a celui mai mic argument al lui k'^2 (§ 331), rezultă inegalitățile

$$-\frac{\pi}{3} \leqq |\arg k'^2| \leqq \frac{\pi}{3};$$

prin urmare, punând, pentru prescurtare, $k'^2 = \lambda$, avem

$$|\lambda| \cos e_1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Punctul λ este așa dar situat în porțiunea planului cuprinsă în interiorul cercului $|\lambda| = 1$, limitată de dreapta perpendiculară pe axa reală trecând prin punctul $\lambda = \frac{1}{2}$ (fig. 64). In această regiune, cantitatea

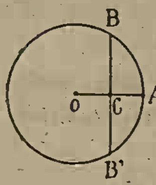

Fig. 64

$$(13) \qquad l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{1 - \sqrt[4]{\lambda}}{1 + \sqrt[4]{\lambda}}$$

este o funcțiune olomorfă de λ; valoarea absolută a acestei funcțiuni atinge dar limita sa superioară pe conturul regiunii formată din arcul $B'AB$ și din coarda $B'B$. Insă, l fiind real pentru valori reale ale lui λ, primește valori imaginare conjugate în puncte simetrice cu axa reală. Este dar de ajuns a considera numai arcul AB și semicoarda CB (fig. 64).

1°. Pe arcul AB, avem

$$(14) \qquad \lambda = e^{i\theta};$$

prin urmare

$$l = \frac{1 - e^{i\frac{\theta}{4}}}{1 + e^{i\frac{\theta}{4}}} = -i \operatorname{tg} \frac{\theta}{8}.$$

Valoarea absolută

$$|l| = \operatorname{tg} \frac{\theta}{8}$$

creşte când θ variază dela 0 la $\frac{\pi}{3}$; de unde, pentru limita superioară

$$|l| = tg\frac{\pi}{24} < \frac{2}{15} < 0{,}13.$$

2°. Pe dreapta CB, avem

$$\lambda = \frac{1}{2\cos\theta}e^{i\theta} = \frac{1}{2}(1 + itg\theta), \qquad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}. \tag{15}$$

Pentru a examinà cum variază $|l|$, vom examinà cum variază logaritmul lui $|l|$. Pentru aceasta, să luăm derivata logaritmică a ambelor membre (13); obţinem

$$\frac{1}{l}\frac{dl}{d\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-\frac{3}{4}}}{1-\sqrt{\lambda}}\frac{d\lambda}{d\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-\frac{3}{4}} + \lambda^{-\frac{1}{4}}}{1-\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta}.$$

Din egalitatea (13) scoatem expresiunile

$$1-\lambda = \frac{1}{2cos\theta}e^{-i\theta}, \quad \frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{i}{2cos^2\theta};$$

prin urmare

$$\frac{1}{l}\frac{dl}{d\theta} = -\frac{i}{2cos\theta}\left(\lambda^{-\frac{3}{4}} + \lambda^{-\frac{1}{4}}\right)e^{i\theta} = -i\left(\lambda^{-\frac{3}{4}} + \lambda^{-\frac{1}{4}}\right)\lambda = -i\left(\lambda^{\frac{1}{4}} + \lambda^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= -i\left[(2cos\theta)^{-\frac{1}{4}}\left(cos\frac{\theta}{4} + i\sin\frac{\theta}{4}\right) + (2cos\theta)^{-\frac{3}{4}}\left(cos\frac{3\theta}{4} + i\sin\frac{3\theta}{4}\right)\right].$$

De unde, pentru partea reală a membrului întâi, expresiunea

$$R\left(\frac{1}{l}\frac{dl}{d\theta}\right) = \sin\frac{\theta}{4}(2cos\theta)^{-\frac{1}{4}} + \sin\frac{3\theta}{4}(2cos\theta)^{-\frac{3}{4}}, \tag{16}$$

care este pozitivă în intervalul considerat. Ţinând seamă că partea reală a logaritmului unei cantităţi este egală cu logaritmul valorii sale absolute, conchidem că logaritmul lui $|l|$, prin urmare $|l|$ creşte când θ variază dela 0 la $\frac{\pi}{3}$. Inlocuind, în egalitatea (13), λ prin valorile sale extreme, $\frac{1}{2}$, $e^{\frac{i\pi}{3}}$, conchidem că valoarea absolută $|l|$ creşte dela

$$\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1} < \frac{19}{218} < 0{,}09$$

până la valoarea limită

$$(17) \qquad |l| = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{1+\cos\frac{\pi}{12}}} = tg\frac{\pi}{24},$$

obţinută mai sus.

334. Cantitatea q fiind cunoscută, obţinem semiperioada K cu ajutorul seriei (12) (§ 231):

$$(15) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0,q) = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots,$$

sau, cu ajutorul seriei mai convergente (13)

$$(16) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \frac{2}{1+\sqrt{k'}}(1+2q^4+2q^{16}+\ldots).$$

A doua semiperioada iK' este determinată de egalitatea

$$\frac{iK'}{K} = \tau;$$

de unde

$$(17) \qquad K' = -\frac{K}{\pi} \log q.$$

Valorile de cari logaritmul este susceptibil pentru aceeaş valoare a lui q, diferind între ele prin multipli de $2i\pi$, rezultă, pentru iK', o infinitate de valori cuprinse în expresiunea

$$K' = K'_0 - 2niK,$$

K'_0 fiind una din ele. Insă, oricare ar fi valoarea întreagă a lui n, sistemele $(2\,K,\ 2iK'_0)$, $(2\,K,\ 2iK')$ sunt echivalente. Dispunem de numărul n astfel ca valoarea absolută a lui K' să fie cea mai mică.

335. S'a presupus $|k| \leqq |k'|$. Dacă $|k| > |k'|$, adică

$$|e_2 - e_3| > |e_1 - e_2|;$$

aplicăm formulele de transformare prin substituţiunea

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

care permută între ele cantităţile e_1, e_3; de unde rezultă permutarea radicalelor $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$. Avem în acest caz (11) (§ 231):

$$\sqrt{k} = \frac{1-2q_1+2q_1^4-2q_1^9+\ldots}{1+2q_1+2q_1^4+\ldots\ldots}$$

şi valorile

$$q_1 = e^{i\pi\tau_1} = e^{-\frac{i\pi}{\tau}},$$

$$l_1 = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}};$$

de unde

$$q_1 = \frac{l_1}{2} + 2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_1}{2}\right)^9 + \dots$$

Semiperioada K′ este dată de una din seriile

$$\sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = \vartheta_3(0, q_1) = 1 + 2q_1 + 2q_1^4 + \dots$$

sau

$$\sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = \frac{2}{1+\sqrt{k}}(1 + 2q_1^4 + 2q_1^{16} + \dots).$$

Semiperioada K se deduce din egalitatea

$$K = \frac{K'}{\pi} \log \frac{1}{q_1}.$$

In rezumat, deosebirea dintre cazul din urmă şi cel precedent este că mai întâi calculăm semiperioada K′ şi apoi semiperioada K. In ambele cazuri semiperioadele primitive ale lui Weierstrass sunt determinate de egalităţile

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega_3 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

336. *Calculul numeric al integralei de speţa I:*

$$(1) \qquad u = \int_\infty^x \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}.$$

Integrala u este susceptibilă de o infinitate de valori, cari depind de drumul urmat de limita superioară x; ele sunt cuprinse în expresiunea

$$u = \pm u_0 + \text{multiplu de perioade.}$$

Dacă drumul de integraţiune nu trece prin nici unul din punctele critice şi determinaţiunea iniţială a radicalului este dată, valoarea integralei este determinată.

Pentru a obţine valoarea numerică a integralei este mai comod a o aduce la forma normală a lui Legendre. Pentru aceasta, putem aplica substituţiuni diferite pe cari le alegem astfel ca seriile, analoage cu cele ce am întâlnit la calculul perioadelor (§ 203), să fie cât mai convergente.

Să presupunem

$$|e_1 - e_3| \geqslant |e_1 - e_2| \geqslant |e_2 - e_3|,$$

prin urmare

(2) $$|k| \leqq |k'| \leqq 1.$$

Să aplicăm substituţiunea

(3) $$\frac{x-e_1}{x-e_2} = y^2,$$

care transformă expresiunea (1) în cea următoare

$$u = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

(4) $$= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \left[-\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \right]$$

$$= -\omega_1 + \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Dacă pe tot drumul de integraţiune avem inegalitatea

(5) $$|k^2y^2| < 1,$$

putem desvoltà binomul $(1-k^2y^2)^{-\frac{1}{2}}$ în serie şi integra termen cu termen, precum s'a procedat la calculul semiperioadelor K şi K' (§ 203). Metoda însă nu este aplicabilă dacă inegalitatea (5) încetează de a fi satisfăcută. In acest caz, permutăm e_1 cu e_3 punând

(6) $$\frac{x-e_3}{x-e_2} = y^2.$$

Integrala devine

(7) $$u = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = -\omega_3 + \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Lăsând la o parte factorul constant din membrul din urmă, să considerăm integrala

(8) $$v = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Este important de observat că pentru a calculà integrala (8) este de ajuns a ne mărginì la un semiplan (y) situat de o parte sau de alta a unei drepte nelimitate care trece prin origina $y = 0$; căci pe drumuri simetrice în raport cu origina, v trece prin valori egale şi de semne contrarii. Dacă dar aplicăm variabilei o substituţiune lineară, care să transforme acea dreaptă într'un cerc cu centrul în origină, astfel ca semiplanul în care se mişcă y să se transforme în *interiorul* cercului, variabila cea nouă nu va ieşi din acel cerc.

Fie $2a$ argumentul cel mai mic în valoare absolută a lui $\frac{1}{k'}$; avem (§ 331)

$$-\frac{\pi}{4} < 2a < \frac{\pi}{4}.$$

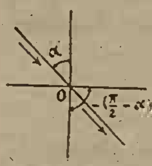

Fig. 65

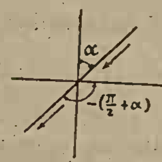

Fig. 66

Fie D dreapta care trece prin origină şi face cu direcţiunea pozitivă a axei imaginare un unghiu egal cu a, acest unghiu fiind privit pozitiv (fig. 65) sau negativ (fig. 66), după cum semidreapta D situată deasupra axei reale este la stânga sau la dreapta axei imaginare. Reprezintând prin $\left|\frac{1}{l}\right|$ raza cercului ce voim să introducem, substituţiunea care transformă semiplanul (y), situat la dreapta liniei D, în interiorul cercului

$$(9) \qquad |z| = \frac{1}{|l|},$$

este de forma

$$(10) \qquad y = a e^{ia} \frac{1 - lz}{1 + lz} \text{ [1]}$$

a fiind un număr pozitiv.

Punctul $y = \frac{1}{k'}$ fiind situat la dreapta liniei D ca şi punctul $y = +1$, punctele transformate corespunzătoare vor fi în interiorul cercului (9). Să dispunem de constantele a şi l astfel ca punctele $y = +1$, $y = \frac{1}{k'}$ să se transforme în punctele $z = 1$, $z = -1$. Obţinem egalităţile

$$1 = a e^{ia} \frac{1 - l}{1 + l}, \qquad \frac{1}{k'} = a e^{ia} \frac{1 + l}{1 - l};$$

---

[1] Punând $lz = e^{i\theta}$, $y = te^{i\beta}$, $\beta = -\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, avem $t = a\, tg\frac{\theta}{2}$. Când θ variază dela $-\pi$ la O, punctul y descrie semidreapta D, situată deasupra axei reale, dela ∞ la O şi când θ variază dela O la π, y descrie a doua jumătate a acestei drepte dela O la ∞. Semiplanul (y), limitat de dreapta D descrisă în sensul indicat, se găseşte dar la stânga frontierei ca şi interiorul cercului descris în sensul pozitiv. Ceeace justifică transformarea conformă a celor două arii.

de unde, făcând produsul lor:

$$\frac{1}{k'}=a^2 e^{2ia};$$

prin urmare,

$$a e^{ia}=\frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Substituind această valoare în egalitatea (10), avem formula

$$(11)\qquad y=\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\frac{1-lz}{1+lz},$$

care nu conţine altă cantitate nedeterminată decât cantitatea l. In această formulă să facem să se corespundă punctele $y=-1$ şi $z=\frac{1}{l^2}$; rezultă egalitatea

$$(12)\qquad l=\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}.$$

Cantitatea l determinată de această egalitate coincide cu expresiunea (13) (§ 333) a cărei limită superioară în valoare absolută este dată de inegalitatea

$$|l|\leqq\frac{2}{15}.$$

Inlocuind în egalitatea (11) y prin $-\frac{1}{k'}$, rezultă

$$z=-\frac{1}{l^2}.$$

In rezumat, avem tabloul următor de corespondenţe

$$(13)\qquad \begin{array}{c|cccc} y & 1 & \frac{1}{k'} & -1 & -\frac{1}{k'}, \\ z & 1 & -1 & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2}. \end{array}$$

Să aplicăm integralei (7) substituţiunea (11). Avem

$$1-y^2=1-\frac{1}{k'}\left(\frac{1-lz}{1+lz}\right)^2=\frac{4l}{(1-l)^2}\,\frac{(z-1)(1-l^2z)}{(1+lz)^2},$$

$$1-k'^2y^2=\frac{4l}{(1+l)^2}\,\frac{(1+z)(1+l^2z)}{(1+lz)^2},$$

$$\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}=\frac{4l}{1-l^2}\,\frac{\sqrt{(z^2-1)(1-l^4z^2)}}{(1+lz)^2},$$

$$dy=-\frac{2l}{\sqrt{k'}}\,\frac{dz}{(1+lz)^2}.$$

De unde

$$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}} = -\frac{2}{(1+\sqrt{k'})}\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-l^4z^2)}}$$

şi prin urmare

$$u = \frac{2}{\sqrt{e_1-e_3}\,(1+\sqrt{k'})^2}\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-l^4z^2)}}. \tag{14}$$

In integrala din urmă, punctul z neeşind din cercul $|z| = \frac{1}{|l|}$, avem

$$|lz| < 1;$$

prin urmare, valoarea absolută a lui l fiind mai mică decât 1, avem $|l^2z| < 1$ şi cu atât mai mult

$$|l^4z^2| < 1.$$

Putem aşa dar desvoltà binomul $(1-l^4z^2)^{-\frac{1}{2}}$ în serie şi integrà termen cu termen. Calculele de efectuat sunt aceleaşi ca pentru semiperioada K; obţinem (11) § 203 desvoltarea

$$\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-l^4z^2)}} = \mathcal{A}\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - z\sqrt{1-z^2}\left[c_1 + \frac{2}{3}c_2z^2 + \frac{2.4}{3.5}c_3z^4 + \ldots\right].$$

în care

$$\mathcal{A} = 1 + \sum_1^\infty \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 l^{4n},$$

$$c_n = \sum_{m=n}^\infty \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 l^{4m}.$$

337. S'a presupus $|e_2-e_3| \leqq |e_1-e_2|$. In cazul inegalităţii $|e_2-e_3| > |e_1-e_2|$, care trage după sine inegalitatea $|k| > |k'|$, aplicăm transformarea (3). Obţinem aceleaşi desvoltări, în cari k' este înlocuit prin k şi prin urmare

$$l = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}.$$

CAPITOLUL XXVI.

APLICAŢIUNI GEOMETRICE.

Cubica plană.

338. Orice curbă ireductibilă de gradul al treilea fără punct dublu se poate aduce, printr'o transformare omografică, la forma normală a lui Weierstrass

$$(1) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

g_2 şi g_3 fiind două constante reale, dacă coeficienţii curbei sùnt reali.

Să observăm mai întâiu că cubica (1) admite un punct de inflexiune la infinit, cu tangenta în acest punct paralelă la axa Oy. Putem pune acest fapt în evidenţă aplicând, de ex., transformarea

$$(2) \qquad x = \frac{x'}{y'}, \quad y = \frac{1}{y'};$$

ecuaţiunea (1) devine

$$(3) \qquad y' = 4x'^3 - g_2 x' y'^2 - g_3 y'^3.$$

Punctul $x' = o$, $y' = o$ este un punct de inflexiune al curbei transformate şi $y' = o$ este tangenta în acest punct, căruia corespunde punctul $(x = \infty,\ y = \infty)$ în direcţiunea $\left(\frac{y}{x}\right)_{x=\infty} = \infty$.

Pentru a aduce ecuaţiunea unei cubice la forma normală, va fi dar necesar să aplicăm ecuaţiunii o transformare omografică astfel încât unul din punctele sale de inflexiune împreună cu tangenta în acest punct să fie aruncate la infinit, într'o direcţiune convenabilă.

Fie

$$(1) \qquad f(x, y) = o$$

ecuaţiunea unei cubice ireductibile şi

$$(2) \qquad ax + by + c = o,$$

ecuaţiunea tangentei într'unul din punctele sale de inflexiune. Ecuaţiunea (1) se va puteà pune sub forma

$$(3) \qquad (ax + by + c)\,\varphi(x, y) + A\,(a'x + b'y + c')^3 = 0,$$

$\varphi(x, y)$ fiind o funcţiune de gradul al doilea şi coeficientul A diferit de zero, căci dacă $A = o$, curba s'ar descompune într'o dreaptă şi o conică. Punctul de inflexiune este punctul de intersecţiune al dreptelor

$$(4) \qquad ax + by + c = o, \qquad a'x + b'y + c' = o.$$

Să punem

$$(5) \qquad y' = ax + by + c, \qquad x' = a'x + b'y + c'$$

și să substituim variabilele x', y' în locul variabilelor x, y. Ecuațiunea (3) ia forma

$$(6) \qquad y'\varphi_1(x', y') + Ax'^3 = o,$$

în care $\varphi_1(0, 0) \neq 0$, căci cubica este, prin ipoteză, fără punct dublu.

Făcând în această ecuațiune substituțiunea

$$(7) \qquad x' = \frac{X}{Y}, \quad y' = \frac{1}{Y},$$

obținem o ecuațiune de forma

$$(8) \qquad (Y+B_1X+B_2)^2+AX^3+A_1X^2+A_2X+A_3=0.$$

Aplicând, în fine, transformarea

$$(9) \qquad \xi = mX + n, \qquad \eta = Y + B_1X + B_2$$

și dispunând de parametrele m și n astfel ca termenul în ξ^2 să dispară și ca coeficientul lui ξ^3 să fie 4, ecuațiunea (8) ia forma normală

$$(10) \qquad \eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3,$$

g_2 și g_3 având valori determinate în funcțiune de coeficienții ecuațiunii propuse.

Din ecuațiunile (5), (7) și (9) rezultă că între coordonatele primitive (x, y) și cele finale (ξ, η) avem relațiuni de forma

$$(11) \qquad x = \frac{\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}, \quad y = \frac{\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}.$$

Aceste formule constitue transformarea omografică prin care ecuațiunea (1) este adusă la forma (10)[1])

339. Teoremă. *Coordonatele carteziane ale unui punct oarecare al unei cubice plane se pot exprimă într'un mod rațional cu ajutorul a două funcțiuni eliptice având aceleași perioade și acelaș argument,*

---

[1]) Transformarea omografică pentru a aduce ecuațiunea generală a cubicei la forma normală revine la o proiecțiune stereografică pe un plan convenabil. Vârful conului proiectant fiind în afară din planul figurii, se ia drept plan de perspectivă un plan paralel cu planul care conține vârful și tangenta la cubică în unul din punctele sale de inflexiune. Curba proiectată variând împreună cu vârful ales și cu planul de perspectivă, rezultă că transformarea considerată se poate efectuă într'o infinitate de moduri.

precum coordonatele unei curbe unicursale, se exprimă într'un mod raţional în funcţiune de un acelaş parametru.

In adevăr, ecuaţiunea normală (10) se reduce la identitate dacă punem

$$(12) \qquad \xi = p\,(u;\ g_2,\ g_3), \quad \eta = p'(u;\ g_2, g_3).$$

Ducând aceste valori în formulele (11), obţinem, pentru coordonatele (x, y) ale cubicei (1) expresiunile

$$(13) \quad x = \frac{\alpha_1\, pu + \beta_1\, p'u + \gamma_1}{\alpha\, pu + \beta\, p'u + \gamma}, \quad y = \frac{\alpha_2\, pu + \beta_2\, p'u + \gamma_2}{\alpha\, pu + \beta\, p'u + \gamma}.$$

Viceversa. Ecuaţiunea (13) reprezintă o cubică plană, căci eliminând pu şi $p'u$ între aceste ecuaţiuni şi ecuaţiunea

$$p'^2 u = 4\,p^3 u - g_2\, pu - g_3,$$

obţinem o ecuaţiune de gradul al treilea în x, y.

In cazul $\beta = \beta_1 = \beta_2 = 0$, ecuaţiunea (13) reprezintă o linie dreaptă.

340. Teorema precedentă se mai poate stabilì în modul următor, fără a reduce ecuaţiunea cubicei la forma normală.

Printr'un punct al cubicei luat ca origine să ducem o secantă

$$y = tx,$$

care taie cubica în două puncte mobile ale căror abscise sunt determinate de o ecuaţiune de forma

$$\mathrm{A}x^2 + 2\,\mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0,$$

A, B, C fiind polinoame de t de grade respectiv egale cu 3, 2 şi 1. De unde

$$x = \frac{-\,\mathrm{B} \pm \sqrt{\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}}}{\mathrm{A}}, \quad y = tx.$$

Expresiunea de sub radical este un polinom $\mathrm{R}(t)$ de gradul 3 sau 4, fără factori multipli. Căci dacă $\mathrm{R}(t)$ ar fi de un grad mai mic, sau dacă ar aveà un factor multiplu, x şi prin urmare y s'ar puteà exprimà în funcţiune raţională de un parametru şi cubica ar fi unicursală, caz ce presupunem exclus.

La o valoare a lui t, la care asociăm una din determinaţiunile radicalului $\sqrt{\mathrm{R}(t)}$, corespunde un punct al cubicei; şi reciproc, unui punct (x, y) al cubicei corespunde o valoare pentru $t = \dfrac{y}{x}$ şi o singură valoare pentru $\sqrt{\mathrm{R}(t)}$, căci la două valori diferite ale radicalului corespund două puncte diferite. Putem dar scrie, fără a specifică cele două puncte corespunzătoare aceluiaş t,

$$(14) \qquad x = \frac{-B + \sqrt{R(t)}}{A}, \qquad y = tx.$$

Introducând variabila

$$(15) \qquad u = \int_{\infty}^{t} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

putem exprimà variabila t şi radicalul $\sqrt{R(t)}$ prin funcţiuni raţionale de pu şi $p'u$ [Problema inversiunii]. Ceeace demonstră teorema.

341. *Observare.* Zerurile polinomului $R(t)$ au o semnificare geometrică interesantă. Fiecăruia din ele, corespund, pentru x şi, prin urmare pentru y, două valori egale; secanta corespunzătoare devine dar tangentă şi valoarea considerată a lui t reprezintă coeficientul unghiular al tangentei dusă din origine la curbă. *Polinomul $R(t)$ este de gradul 3 sau 4, după cum origina este sau nu un punct de inflexiune* [1]).

342. *Transformările omografice lăsând neschimbate proprietăţile proiective,* vom considerà, pentru a studià aceste proprietăţi ale cubicei, forma normală

$$(1) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

coeficienţii g_2 şi g_3 fiind reali. Această ecuaţiune este identic satisfăcută de expresiunile

$$(2) \qquad x = p(u; g_2, g_3) \qquad y = p'(u; g_2, g_3).$$

Fiecărei valori a lui u corespunde un punct al cubicei şi viceversa, fiecărui punct (x, y) al cubicei corespunde o singură valoare pentru u, abstracţiune făcând de multipli de perioade. Avem astfel ceeace se numeşte o *reprezentaţiune parametrică perfectă.* Valorile congruente ale lui u dau acelaş punct, prin urmare, pentru a obţine cubica întreagă, este de ajuns a da lui u toate valorile, cuprinse în paralelogramul perioadelor, pentru cari pu şi $p'u$ au valori reale.

Să examinăm mai întâiu proprietăţile cubicei cari sunt independente de semnul discriminantului $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$.

343. *Condiţiunea ca trei puncte ale cubicei să fie în linie dreaptă.* O funcţiune lineară

$$Ax + By + C$$

de coordonatele unui punct $(x = pu,\ y = p'u)$ al cubicei este o

[1]) V. mai departe (§ 349).

funcţiune eliptică de u, de ordinul al treilea, având $u = o$ ca pol triplu; suma zerurilor acestei funcţiuni este aşa dar congruentă cu zero. Reprezentând prin u_1, u_2, u_3 argumentele punctelor de intersecţiune ale cubicei cu dreapta

$$Ax + By + C = 0,$$

vom aveà condiţiunea

$$(3) \qquad u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0.$$

Această condiţiune este suficientă. Căci, dacă prin cele două puncte ale căror argumente sunt u_1, u_2 ducem o dreaptă şi numim ν argumentul punctului al treilea de intersecţiune al cubicei cu această dreaptă, avem

$$u_1 + u_2 + \nu = 0.$$

prin urmare $u_3 \equiv \nu$ şi punctul corespunzător lui u_3 coincide cu cel ce corespunde lui ν.

Dacă ecuaţiunea dreptei este $x - a = 0$, unul din punctele de intersecţiune este la infinit şi valoarea corespunzătoare a lui u este $\equiv 0$; ecuaţiunea de condiţiune (3) se reduce la $u_1 + u_2 \equiv 0$.

344. *Formula de adiţiune a funcţiunii pu* se poate deduce din consideraţiunile precedente. Fie

$$x_1 = pu_1, \quad x_2 = pu_2, \quad x_3 = pu_3,$$

abscisele punctelor de intersecţiune ale cubicei cu dreapta

$$y = ax + b.$$

Vom aveà, de o parte, pentru a determinà aceste abscise, ecuaţiunea

$$4x^3 - g_2 x - g_3 - (ax + b)^2 = 0,$$

de unde

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a^2}{4};$$

şi, de altă parte, avem ecuaţiunea de condiţiune (3). Insă a fiind coeficientul unghiular al dreptei, avem

$$a = \frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2};$$

prin urmare

$$pu_1 + pu_2 + pu_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}\right)^2.$$

sau, în virtutea condiţiunii (3),

$$p(u_1+u_2)+pu_1+pu_2=\frac{1}{4}\left(\frac{p'u_1-p'u_2}{pu_1-pu_2}\right)^2,$$

ceeace este formula de adiţiune a funcţiunii pu.

345. Fie, într'un mod mai general, $f(x, y)$ o funcţiune raţională întreagă de gradul n în care nu lipseşte termenul în y^n. Această funcţiune devine, pe cubică, o funcţiune eliptică $f(pu, p'u)$ de ordinul $3n$, având în paralelogramul perioadelor unicul pol $u=0$ de ordinul $3n$. Să reprezentăm prin u_i $(i=1, 2, \ldots, 3n)$ zerurile acestei funcţiuni, adică argumentele punctelor de intersecţiune ale cubicei cu curba $f(x, y)=0$; vom aveà condiţiunea

$$\sum_{i=1}^{3n} u_i=0. \tag{4}$$

De exemplu, făcând $n=2$, obţinem condiţiunea ca şase puncte ale cubicei să fie pe o conică:

$$\sum_{i=1}^{6} u_i=0. \tag{5}$$

Dacă conica este tangentă la cubică în trei puncte, ale căror argumente sunt u_1, u_2, u_3, condiţiunea precedentă devine, socotind ca dublu fiecare din aceste puncte,

$$2(u_1+u_2+u_3)=2m\omega_1+2n\omega_3\,{}^{1});$$

de unde

$$u_1+u_2+u_3\equiv\begin{cases}\omega_1\\ \omega_2\,.\\ \omega_3\end{cases} \tag{6}$$

Avem aşa dar trei familii de conice de trei ori tangente la cubică. Două din punctele de contact ale unei conice dintr'o familie sunt arbitrare, al treilea este determinat de ecuaţiunea corespunzătoare (6) a familiei.

346. Prin punctele de contact ale căror argumente sunt u_1, u_2, u_3, ce satisfac, de ex., condiţiunea

$$u_1+u_2+u_3\equiv\omega_1, \tag{7}$$

să facem să treacă o conică, care va tăià cubica în alte trei puncte cu argumentele u_4, u_5, u_6. Intre aceste şase argumente există relaţiunea (5), care în virtutea condiţiunii (7), devine

$$u_4+u_5+u_6\equiv\omega_1, \tag{8}$$

[1]) Luând $m=n=o$, cele trei puncte sunt în linie dreaptă: conica se reduce la o dreaptă dublă.

adică cele din urmă trei puncte sunt şi ele puncte de contact ale unei conice de trei ori tangentă la cubică şi aparţinând aceleiaş familii (7).

347. *Tangente duse dela un punct al cubicei.* Fie v argumentul unui punct al cubicei dela care ducem tangente la cubică; fie u argumentul punctului de contact al unei din ele. Acest punct trebuind să fie socotit ca două puncte, condiţiunea (3) va fi

$$(9) \qquad 2u+v=2m\omega_1+2n\omega_3;$$

de unde argumentele punctelor de contact

$$(10) \qquad u=-\frac{v}{2}+m\omega_1+n\omega_3 \quad (m,n=0, 1).$$

Prin urmare dintr'un punct al cubicei se pot duce patru tangente, diferite de tangenta în punctul considerat (v).

Corolar. Conica care trece prin cele patru puncte (10) şi prin punctul v este tangentă la cubică în acest punct. In adevăr, fie v_1 argumentul celui de al şaselea punct de intersecţiune al cubicei cu conica considerată, avem (5)

$$v+v_1-2v+2\omega_1+2\omega_3\equiv 0;$$

de unde $v_1\equiv v$, adică al şaselea punct de intersecţiune coincide cu punctul (v).

348. *Puncte de inflexiune.* Un punct de inflexiune fiind socotit ca trei puncte comune ale cubicei cu tangenta dusă în acest punct, avem (3), reprezentând prin u argumentul punctului de inflexiune,

$$(11) \qquad 3u=2m\omega_1+2n\omega_3;$$

de unde

$$(12) \qquad u=\frac{2m\omega_1+2n\omega_3}{3}, \quad (m, n=0, 1, 2).$$

Avem dar nouă puncte de inflexiune, ale căror argumente sunt respectiv

$$(13) \qquad \begin{array}{ccc} 0, & \dfrac{2\omega_1}{3}, & \dfrac{4\omega_1}{3}, \\ \dfrac{2\omega_3}{3}, & \dfrac{2(\omega_1+\omega_3)}{3}, & \dfrac{4\omega_1+2\omega_3}{3}. \\ \dfrac{4\omega_3}{3}, & \dfrac{2\omega_1+4\omega_3}{3}, & \dfrac{4(\omega_1+\omega_3)}{3}. \end{array}$$

Punctele figurate de fiecare linie orizontală, cele figurate de fiecare coloană, şi, în fine, cele figurate de diagonalele tabloului precedent, sunt respectiv în linie dreaptă.

Punctul $u=0$ $(x=\infty, y=\infty)$ este la infinit în direcţiunea axei Oy, căci

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{u=o}=\left(\frac{p''u}{p'u}\right)_{u=o}=\infty.$$

349. *Dintr'un punct de inflexiune se pot duce numai trei tangente la cubică.* In adevăr, fie ν argumentul punctului de inflexiune dela care ducem tangentele; avem

$$\nu=\frac{2m\omega_1+2n\omega_3}{3} \tag{14}$$

Argumentele punctelor de contact fiind

$$-\frac{\nu}{2},\ -\frac{\nu}{2}+\omega_1,\ -\frac{\nu}{2}+\omega_3,\ -\frac{\nu}{2}+\omega_1+\omega_3, \tag{15}$$

unul din ele este congruent cu ν, precum se recunoaşte uşor; prin urmare unul din cele patru puncte de contact coincide cu punctul iniţial.

350. *Punctele de contact ale tangentelor duse dintr'un punct de inflexiune sunt în linie dreaptă.* In adevăr, fie s suma argumentelor (15):

$$s=-2\nu+2(\omega_1+\omega_3);$$

unul din aceste argumente fiind congruent cu ν, suma celorlalte trei satisface congruenţa

$$s-\nu=-3\,\nu+2\,(\omega_1+\omega_3)\equiv o,$$

care exprimă condiţiunea ca cele trei puncte să fie în linie dreaptă (3) (§ 343). Această dreaptă se numeşte *polara armonică*[1]) a punctului de inflexiune (ν). Fiecărui punct de inflexiune corespunde o polară armonică.

350. Teoremă. *Raportul anarmonic a patru tangente duse la cubică dintr'un punct P al ei este independent de poziţiunea lui P.* (Salmon).

Fie P (x_0, y_0, u_0) punctul dela care se duc tangentele şi

A (x_1, y_1, u_1), B (x_2, y_2, u_2), C (x_3, y_3, u_3), D (x_4, y_4, u_4)

punctele de contact. Să considerăm raportul anarmonic

$$\mathrm{R}=\frac{\sin \mathrm{CPA}}{\sin \mathrm{CPB}}:\frac{\sin \mathrm{DPA}}{\sin \mathrm{DPB}}, \tag{1}$$

care se poate scrie

$$\mathrm{R}=\frac{s_1}{s_2}:\frac{s_3}{s_4}, \tag{2}$$

---

[1]) Acest nume este justificat prin aceea, că o secantă oarecare dusă prin punctul de inflexiune taie polara considerată într'un punct armonic conjugat cu el relativ la cele două puncte de intersecţiune cu cubica.

s_1, s_2, s_3, s_4 reprezentând suprafețele triunghiurilor CPA, CPB, DPA, DPB.

Exprimând aceste suprafețe prin determinanți în funcțiune de coordonatele vârfurilor triunghiurilor, și ținând seamă de identitatea [form. (10). § 166] în care facem $n=2$,

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \\ 1 & pv & p'v \\ 1 & pw & p'w \end{vmatrix} = 2\,\frac{\sigma(u+v+w)\;\sigma(u-v)\;\sigma(v-w)\;\sigma(w-u)}{(\sigma u\;\sigma v\;\sigma w)^3},$$

obținem

$$(4)\quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{\sigma(u_0-u_1)\;\sigma(u_1-u_3)\;\sigma(u_0+u_1+u_3)}{\sigma(u_0-u_2)\;\sigma(u_2-u_3)\;\sigma(u_0+u_2+u_3)}\left(\frac{\sigma u_2}{\sigma u_1}\right)^3,$$

$$(5)\quad \frac{s_3}{s_4} = \frac{\sigma(u_0-u_1)\;\sigma(u_1-u_4)\;\sigma(u_0+u_1+u_4)}{\sigma(u_0-u_2)\;\sigma(u_2-u_4)\;\sigma(u_0+u_2+u_4)}\left(\frac{\sigma u_2}{\sigma u_1}\right)^3;$$

de unde

$$(6)\quad \mathrm{R} = \frac{\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_2-u_4)\,\sigma(u_0+u_1+u_3)\,\sigma(u_0+u_2+u_4)}{\sigma(u_2-u_3)\,\sigma(u_1-u_4)\,\sigma(u_0+u_1+u_4)\,\sigma(u_0+u_2+u_3)}.$$

Argumentele punctelor de contact fiind congruente cu expresiunile

$$u_1 = -\frac{u_0}{2},\quad u_2 = -\frac{u_0}{2}+\omega_\alpha,\quad u_3 = -\frac{u_0}{2}+\omega_\beta,\quad u_4 = -\frac{u_0}{2}+\omega_\gamma,$$

avem, făcând substituțiunile

$$(7)\quad \mathrm{R} = \frac{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\gamma)\;\sigma(\omega_\alpha+\omega_\gamma)}{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)\;\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}\left(\frac{\sigma\omega_\beta}{\sigma\omega_\alpha}\right)^2.$$

Insă

$$\frac{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\gamma)\;\sigma(\omega_\alpha+\omega_\gamma)}{\sigma^2\,\omega_\alpha\quad\sigma^2\,\omega_\gamma} = p\omega_\gamma - p\omega_\alpha = e_\gamma - e_\alpha,$$

$$\frac{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)\;\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma^2\,\omega_\alpha\quad\sigma^2\,\omega_\beta} = p\omega_\beta - p\omega_\alpha = e_\beta - e_\alpha;$$

prin urmare

$$(8)\quad \mathrm{R} = \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\alpha - e_\beta},$$

α, β, γ fiind numerele 1, 2, 3 într'o ordine oarecare. Ceace demonstrează teorema.

Făcând între numerele 1, 2, 3 toate permutările posibile, expresiunea (8) primește 6 valori diferite. Reprezentând prin ϱ una din ele, cele 6 valori vor fi

$$\varrho, \frac{1}{\varrho}; 1-\varrho, \frac{1}{1-\varrho}; \frac{\varrho-1}{\varrho}, \frac{\varrho}{\varrho-1};$$

două câte două inverse una alteia. Acestea sunt valorile de cari este susceptibil raportul anarmonic al unui fascicol de patru drepte.

351. *Distincţiunea cazurilor după semnul lui Δ.*

I. $\Delta > 0$. Avem cu notaţiunea obicinuită: ω_1 şi $\frac{\omega_3}{i}$ reale şi pozitive; $e_1 > e_2 > e_3$. Referindu-ne la variaţiunea funcţiunilor pu şi $p'u$, recunoaştem că, în cazul considerat, obţinem cubica întreagă, dând lui u cele două serii de valori următoare:

1°. u real şi variând dela $-\omega_1$ la $+\omega_1$,

2°. $u = \omega_3 + v$, v real şi variând în acelaş interval.

Axa Ox este o axă de simetrie; valorilor reale ale lui u corespunde o ramură infinită şi, anume, intervalul $(0, +\omega_1)$ dă ramura situată dedesubtul axei şi intervalul $(0, -\omega_1)$ dă ramura simetrică. A doua serie de valori ale lui u dă un oval: valorilor v cuprinse în intervalul $(0, +\omega_1)$ corespunde ramura situată deasupra axei Ox, şi valorilor intervalului $(0, -\omega_1)$ corespunde ramura simetrică. Punctele de intersecţiune ale cubicei cu axa Ox sunt date de $u = \omega_1$, $\omega_1 + \omega_3$, ω_3 cărora corespund abscisele $x = e_1$, e_2, e_3. In aceste puncte tangentele sunt paralele cu Oy, căci avem

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_a = p'\omega_a = 0, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_a = \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_a = p''\omega_a \neq 0 \text{ }^{1)}, \quad (a=1, 2, 3).$$

Puncte de inflexiune reale sunt trei, date de valorile

$$u=0, \frac{2\omega_1}{3}, \frac{4\omega_1}{3} \equiv -\frac{2\omega_1}{3};$$

punctul corespunzător lui $u = 0$ este la infinit şi celelalte două sunt simetrice în raport cu axa Ox, situate pe ramura infinită.

Tangente duse dintr'un punct (u_0) al cubicei. Coordonatele punctelor de contact sunt date de valorile

$$u = -\frac{u_0}{2} + m\omega_1 + n\omega_3, \quad (m, n = 0, 1).$$

---

1) $p''\omega_a$ nu poate fi nul, căci altmintrelea ω_a ar fi un zero dublu al funcţiunii $p'u$, care ar avea în paralelogramul perioadelor cel puţin patru zeruri: ceeace este imposibil.

1°. u_0 *real.* Două argumente $-\frac{u_0}{2}$, $-\frac{u_0}{2}+\omega_1$ sunt reale: punctele de contact corespunzătoare sunt pe ramura infinită, unul deasupra şi celalt dedesubtul axei Ox. Celelalte două argumente fiind de forma $\omega_3+\nu_1$, $\omega_3+\nu_2$ (ν_1, ν_2 reale), punctele de contact corespunzătoare sunt pe oval, unul deasupra şi celalalt dedesubtul axei Ox.

2°. $u_0=\omega_3+\nu$, ν *real.* Argumentele punctelor de contact nu sunt nici reale, nici de forma $\omega_3+\nu$. Aşa dar dintr'un punct al ovalului nu putem duce la cubică nici o tangentă reală, diferită de tangenta în punctul dat.

Tangente paralele cu Ox. In intervalul (o, $+\omega_1$) ca şi în intervalul simetric (o, $-\omega_1$) $p'u$ variând necontenit în acelaş sens, urmează că pe ramura infinită nu există tangentă paralelă cu Ox; pe când pe oval există două asemenea tangente în puncte simetrice cu axa. Aceste puncte sunt date de valorile lui u pentru cari $p'u$ este maximum (§ 274, 3°).

Forma cubicei poate fi reprezentată prin (fig. 67).

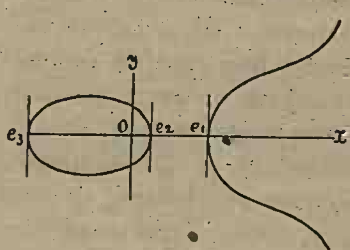

Fig. 67

II. $\Delta<$ o: $-2\omega_2$ cea mai mică perioadă reală, $e_2=p\omega_2$.

Există numai ramura infinită, căci pu şi $p'u$ nu sunt reale în acelaş timp decât pentru valori reale ale lui u, abstracţiune făcând de multipli de perioade.

Avem trei puncte de inflexiune reale, date de valorile

$$u=o, -\frac{2\omega_2}{3}, -\frac{4\omega_2}{3}\equiv\frac{2\omega_2}{3}.$$

Dintr'un punct al cărui argument este u_0, putem duce două tangente reale, punctele de contact corespunzătoare având argumentele

$$-\frac{u_0}{2}, -\frac{u_0}{2}-\omega_2.$$

Tangente paralele cu Ox. Din studiul derivatei $p'u$ (§ 277) rezultă că dacă $g_2<$o, sau dacă $g_2>$o şi $g_3>$o, nu există tangentă paralelă cu Ox: curba are aceeaş formă ca ramura infinită din cazul I.

Dacă însă avem

$$g_2 > 0, \quad g_3 < 0,$$

de unde $e_2 < 0$, curba are patru tangente paralele cu Ox în puncte două câte două simetrice în raport cu această axă. Abscisele acestor puncte sunt rădăcinile ecuaţiunii

$$6x^2 - \frac{1}{2} g_2 = 0.$$

Forma cubicei, în acest caz, este reprezentată de (fig 68)

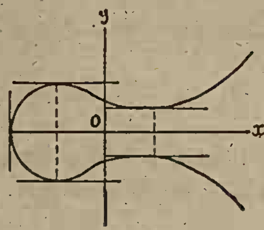

Fig. 68

II. *Lemniscata.*

352. Fie

(1) $$\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

ecuaţiunea lemniscatei; avem, reprezintând prin u lungimea unui arc,

(2) $$du^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2 = a^2 \frac{d\theta^2}{1 - 2\sin^2\theta}.$$

Făcând schimbarea de variabilă

(3) $$\sqrt{2} \sin\theta = \sin\varphi,$$

avem, pentru lungimea unui arc mai mic decât sfertul lemniscatei, luat dela extremitatea axei,

(4) $$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Membrul al doilea este o integrală eliptică de speţa I, cu modulul $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Lungimea sfertului lemniscatei este

(5) $$l = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \mathrm{K},$$

K fiind sfertul celei mai mici perioade reale, adică

$$\mathrm{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1 - \frac{1}{2}t^2)}}, \quad (t = \sin\varphi)$$

Din egalitatea (4) rezultă relaţiunile

(6) $$\varphi = am\frac{u\sqrt{2}}{a}, \quad \sin\varphi = sn\left(\frac{u\sqrt{2}}{a}\right), \quad \varrho = a\cos\varphi = acn\left(\frac{u\sqrt{2}}{a}\right).$$

353. Să introducem raza vectoare ϱ ca variabilă independentă; formula (2) devine

$$du^2 = a^2 \frac{d\varrho^2}{a^4 - \varrho^4}. \tag{7}$$

Luând punctul dublu ca origina arcelor, avem

$$u = a^2 \int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{a^4 - \varrho^4}}. \tag{8}$$

Pentru a aduce integrala din membrul al doilea la forma normală a lui Weierstrass, să punem

$$\frac{a^2}{\varrho^2} = z; \tag{9}$$

rezultă

$$u = a \int_{\infty}^{z} \frac{-dz}{\sqrt{4(z^3 - z)}}. \tag{10}$$

$$z = p\left(\frac{u}{a} \,\middle|\, 4, 0\right). \tag{11}$$

Rădăcinile ecuaţiunii $z^3 - z = 0$ fiind $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $e_3 = -1$, avem pentru semiperioadele primitive ω_1, ω_3 expresiunile [(6), § 284]

$$\omega_1 = \frac{\omega_3}{i} = \int_1^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4(z^3 - z)}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z - z^3}}. \tag{12}$$

Lungimea jumătăţii unei bucle este dată de egalitatea (10) corespunzătoare limitei superioare $z = 1$ ($\varrho = a$); prin urmare lungimea unei bucle este

$$l = 2a\omega_1. \tag{13}$$

354. Să luăm, pentru simplificarea formulelor, lungimea semiaxei $a = 1$; vom aveà

$$\left\{\begin{aligned} &\varrho^2 = \cos 2\theta \\ &z = \frac{1}{\varrho^2} = p\,(u|4, 0) \\ &l = 2\omega_1. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Pentru funcţiunile $\cos\theta$, $\sin\theta$ rezultă expresiunile eliptice următoare:

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\varrho^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{pu+1}}{\sqrt{pu}}, \\ &\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{pu-1}}{\sqrt{pu}}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Coordonatele rectunghiulare $x=\varrho\cos\theta$, $y=\varrho\sin\theta$ vor fi dar exprimate prin formulele

$$(16)\qquad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{pu+1}}{pu},\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{pu-1}}{pu};$$

sau, ţinând seamă de relaţiunile

$$\sqrt{pu-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u},\quad (\alpha=1,2.3),$$

cari, în cazul considerat, sunt

$$\sqrt{pu-1}=\frac{\sigma_1 u}{\sigma u};\quad \sqrt{pu}=\frac{\sigma_2 u}{\sigma u},\quad \sqrt{pu+1}=\frac{\sigma_3 u}{\sigma u};$$

avem

$$(17)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u}\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u}\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}. \end{cases}$$

Funcţiunea σu este pozitivă în intervalul $(0,2\omega_1)$ şi negativă în intervalul $(2\omega_1, 4\omega_1)$; funcţiunea $\sigma_1 u$ este pozitivă în intervalele $(0, \omega_1)$, $(3\omega_1, 4\omega_1)$ şi negativă în intervalul $(\omega_1, 3\omega_1)$; funcţiunile $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ sunt pozitive pentru orice valoare reală u (§ 278). De unde concluziunea: Când u variază dela 0 la $2\omega_1$, punctul (x,y) descrie, în sensul negativ, bucla din dreapta axei ordonatelor, iar când u variază dela $2\omega_1$ la $4\omega_1$, punctul (x, y) descrie, în sensul pozitiv, bucla din stânga axei.

355. *Diviziunea lemniscatei în părţi egale.* Să presupunem una din buclele lemniscatei împărţită în n părţi egale; lungimea acestei bucle fiind egală cu cea mai mică semiperioadă reală pozitivă $2\omega_1$, rezultă, pentru inversele pătratelor razelor vectorii corespunzătoare, punctelor de diviziune, valorile

$$(18)\qquad \frac{1}{\varrho^2}=p\left(\frac{2\lambda\omega_1}{n}\right)\quad (\lambda=1,2,\ldots, n-1).$$

Problema diviziunii buclei în n părţi egale revine dar la determinarea valorii

$$p\left(\frac{2\omega_1}{n}\right);$$

căci, în virtutea formulelor de multiplicaţiune, $p\left(\frac{2\lambda\omega_1}{n}\right)$ se exprimă în funcţiune raţională de $p\left(\frac{2\omega_1}{n}\right)$.

Am văzut (§ 174) că pnu se exprimă în funcţiune de pu prin egalitatea

$$(19)\qquad pnu = \frac{g_{n^2}(pu)}{\bar{g}_{n^2-1}(pu)},$$

numărătorul fiind un polinom de gradul n^2 şi numitorul de gradul n^2-1. Dacă n este impar, numitorul este pătratul unui polinom de gradul $\frac{1}{2}(n^2-1)$ şi dacă n este par, numitorul este de forma $p'^2u\ G^2(pu)$, G fiind un polinom de gradul $\frac{1}{2}(n^2-4)$.

Dacă înlocuim u prin $\frac{2\omega_1}{n}$, membrul întâi al ecuaţiunii (19) devine infinit, prin urmare $p\frac{2\omega_1}{n}$ este una din rădăcinile reale ale ecuaţiunii

$$(20)\qquad \bar{g}_{n^2-1}(pu)=0.$$

Pentru $n=2$, ecuaţiunea (20) nu există. Punctul de diviziune coincide cu vârful buclei.

Să considerăm, în particular, valorile $n=3$ şi $n=4$.

1°. $n=3$. In acest caz, ecuaţiunea diviziunii este de gradul $\frac{n^2-1}{2}=4$, dată de a doua egalitate (16) (§ 174):

$$3\,p^4u - \frac{3}{2}\,g_2\,pu - 3g_3\,pu - \frac{1}{16}\,g_2^2 = 0$$

Făcând $g_2=4$, $g_3=0$ ea se reduce la ecuaţiunea bipătrată

$$3\,p^4u - 6\,p^2u - 1 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt

$$p\,\frac{2\omega_1}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{27}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$p\,\frac{2\omega_3}{3} = p\,\frac{2i\omega_1}{3} = -p\frac{2\omega_1}{3},$$

$$p\,\frac{2(1\pm i)\,\omega_1}{3} = \mp\frac{i}{3}\sqrt[4]{27}\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$$

In ultima egalitate semnele superioare şi cele inferioare se corespund; ele sunt determinate în virtutea formulei de adiţiune. Razele vectorii corespunzătoare punctelor de diviziune sunt determinate de valorile $p\frac{2\omega_1}{3}$ şi $p\,\frac{4\omega_1}{3} = p\,\frac{2\omega_1}{3}$. Ele sunt aşa dar egale şi cele două puncte de diviziune sunt punctele de intersecţiune ale lemniscatei cu cercul având centrul în punctul dublu şi raza

$$\varrho=\frac{1}{\sqrt{\frac{p2\omega_1}{3}}}.$$

2°. $n=4$. Ecuaţiunea este dată de a treia egalitate (16) a paragrafului menţionat mai sus, în care facem $g_2=4$, $g_3=0$:

$$x^6-5x^4-5x^2+1=(x^4-6x^2+1)(x^2+1),\quad (x=pu)$$

Rădăcinile acestei ecuaţiuni sunt

$$p\frac{\omega_1}{2}=1+\sqrt{2},\quad p\frac{\omega_3}{2}=p\frac{i\omega_1}{2}=-1-\sqrt{2}$$

$$p\left(\omega_1+\frac{\omega_3}{2}\right)=-1+\sqrt{2},\ p\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_3\right)=1-\sqrt{2}$$

$$p\frac{\omega_1\pm\omega_3}{2}=\mp i.$$

Razele vectorii sunt determinate de valorile

$$p\frac{\omega_1}{2},\quad p\omega_1,\quad p\frac{3\omega_1}{2}=p\frac{\omega_1}{2}.$$

Unul din aceste trei puncte de diviziune este vârful buclei ($p\omega_1=1$) şi celelalte două sunt punctele de intersecţiune ale lemniscatei cu cercul având centrul în punctul dublu şi raza

$$\varrho=\frac{1}{\sqrt{p\frac{\omega_1}{2}}}.$$

III. TEOREMA LUI PONCELET.

356. *Fiind date două conici, nu există, în general, poligon închis într'una din ele şi circumscris celeilalte; dacă există unul, există o infinitate având acelaş număr de laturi.*

Teoreme preliminare. I. *Coordonatele cartezitne x, y ale unei conici oarecari se pot pune sub forma*

$$(1)\qquad x=\frac{a_1\,p^2u+b_1\,pu+c_1}{ap^2u+b\,pu+c},\ y=\frac{a_2p^2u+b_2\,pu+c_2}{ap^2u+b\,pu+c},$$

invarianţii g_2, g_3 ai funcţiunii pu fiind determinaţi în mod convenabil.

Pentru a stabili această teoremă să plecăm dela ecuaţiunile

$$(2)\qquad x=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{at^2+bt+c},\quad y=\frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{at^2+bt+c},$$

cari exprimă coordonatele unui punct (x,y) al conicei prin funcţiuni raţionale de un parametru t. In virtutea acestor ecuaţiuni, unei valori t corespunde un singur punct (x,y) şi, viceversa, unui punct

(x,y) corespunde o singură valoare a lui t; căci eliminând t^2 între cele două ecuaţiuni, obţinem o ecuaţiune de gradul întâiu în t cu coeficienţi raţionali în (x,y) [1]).

Fie t_0, t_1, t_2, t_3 valorile parametrului t corespunzătoare la patru puncte date oarecari ale conicei şi fie

$$(3) \qquad f(t)=(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3).$$

Să introducem acum funcţiunea $p(u \mid g_2, g_3)$, coeficienţii g_2 şi g_3 fiind invarianţii polinomului $f(t)$ şi să punem

$$(4) \qquad u=\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\sqrt{f(t)}}.$$

Vom aveà (14) (§ 292)

$$(5) \qquad \begin{cases} t=t_0+\dfrac{1}{4}\dfrac{f'(t_0)}{pu-\dfrac{1}{24}f''(t_0)}, \\[2ex] \sqrt{f(t)}=\dfrac{dt}{du}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{f'(t_0)}{\left[pu-\dfrac{1}{24}f''(t_0)\right]^2}p'u. \end{cases}$$

In virtutea acestor egalităţi, lui $u=0$ corespunde valoarea t_0 şi semiperioadelor ω_1, ω_2, ω_3, corespund valorile t_k $(k=1, 2, 3)$; viceversa, valorilor t_0, t_1, t_2, t_3, corespund, abstracţiune făcând de multiplii de perioade, valorile $u=0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Inlocuind în egalităţile (2), t prin valoarea sa (5), obţinem, pentru coordonatele (x,y) expresiuni de forma (1). Ceeace demonstră teorema.

II. *Infăşurătoarea unei drepte mobile trecând prin două puncte ale conicei, ale căror argumente au o sumă constantă, este o conică care trece prin cele patru puncte fixe corespunzătoare argumentelor* $u=0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Fie c suma constantă şi u argumentul unuia din cele două puncte, $c-u$ va fi argumentul celuilalt punct. Referindu-ne la formulele (1), vedem că coordonatele celor două puncte sunt funcţiuni algebrice de parametrul pu; căci, în virtutea formulei de adiţiune, $p(c-u)$ este funcţiune algebrică de pu. De unde rezultă că înfăşurătoarea căutată este o curbă algebrică. Se poate determinà gradul acestei înfăşurătoare. Pentru aceasta, să observăm că printr'un punct al conicei trec două şi numai două drepte ale familiei considerate, căci argumentele u şi $-u$ dau acelaş punct pe conică şi acestor două argumente corespund argumentele $c-u$, $c+u$, cari dau puncte distincte, afară de cazul când constanta c

[1]) Dacă prin eliminarea lui t^2 ar dispare şi t, ecuaţiunile (2) ar reprezentà o linie dreaptă.

este o semiperioadă [1]). Prin urmare printr'un punct oarecare al conicei date nu se pot duce decât două tangente la înfăşurătoarea căutată. Aceasta este aşà dar o conică.

357. *Punctele de intersecţiune ale celor două conici.* Fie ν argumentul unui punct de intersecţiune ale celor două conici; tangentele duse din acest punct la înfăşurătoare coincidând, rezultă congruenţa

$$c+\nu \equiv \pm (c-\nu) \ (mod 2\omega_1, 2\omega_3).$$

Luând semnul superior [2]), avem, abstracţiune de multipli de perioade, valorile

$$\nu=0, \omega_1, \omega_2, \omega_3,$$

---

[1]) In virtutea egalităţii $p(\omega_\alpha-u)=p(\omega_\alpha+u)$, rezultă că din orice punct al conicei nu se poate duce decât o singură tangentă la înfăşurătoare. Aceasta se reduce dar la un singur punct, situat la distanţă finită sau la infinit.

[2]) Semnul inferior dă pentru c o valoare egală cu o semiperioadă, căreia nu corespunde nici o înfăşurătoare, precum am văzut mai sus. Să considerăm, ca exemplu, elipsa

$$x=a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y=2b\frac{t}{1+t^2}$$

şi fie valorile $t_0=\infty$, $t_1=1$, $t_2=o$, $t_3=-1$, cari determină vârfurile axelor elipsei. Acestor valori corespund invarianţii $g_2=4$, $g_3=0$; prin urmare avem

$$t=p(u; 4, o)$$

$$e_1=1, \quad e_2=o, \quad e_3=-1,$$

$$u_0=o, \quad u_1=\omega_1, \quad u_2=\omega_2, \quad u_3=\omega_3.$$

Să considerăm întâi cazul $c=\omega_2$ şi fie (x_0, y_0), (x_1, y_1) două puncte ale elipsei, cel dintâi arbitrar având argumentul $u=\nu$ şi cel de al doilea argumentul $\omega_2-\nu\equiv\omega_2+\nu$. Fie θ_0, θ_1 valorile lui t cari determină cele două puncte; avem

$$\theta_0=pu, \quad \theta_1=p(\nu+\omega_2)=-\frac{1}{\theta_0},$$

$$x_0=a\frac{1-\theta_0^2}{1+\theta_0^2}, \quad y_0=2b\frac{\theta_0}{1+\theta_0^2},$$

$$x_1=a\frac{1-\theta_1^2}{1+\theta_1^2}=a\frac{\theta_0^2-1}{\theta_0^2+1}=-x_0,$$

$$y_1=2b\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}=-2b\frac{\theta_0}{1+\theta_0^2}=-y_0,$$

adică dreapta care uneşte cele două puncte trece prin centrul elipsei.

2°. Fie $c=\omega_1$; θ_0 şi θ_1 având aceiaş semnificare ca mai sus; găsim, în virtutea formulei $p(\nu+\omega_1)-e_1=\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p\nu-e_1}$,

$$(\theta_1-1)(\theta_0-1)=2.$$

De unde rezultă $\quad x_1=-2a\frac{\theta_0}{1+\theta_0^2}, \quad y_1=b\frac{\theta_0^2-1}{1+\theta_0^2};$

prin urmare $\quad \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{b}{a}.$

Dreapta considerată păstrează dar o direcţiune constantă, oricare ar fi argumentul ν.

3°. La acelaş rezultat se ajunge, dacă luăm $c=\omega_3$.

cărora corespund pe conica dată patru puncte fixe, independente de valoarea lui c. *Făcând să varieze c, obţinem o infinitate de conici trecând prin aceleaşi patru puncte ale conicei date.*

Să observăm că obţinem aceiaş conică înfăşurătoare dacă înlocuim condiţiunea ca suma argumentelor să fie egală cu c, prin aceea ca diferenţa lor să fie egală cu aceiaş constantă c; căci punctele ale căror argumente sunt $-c\pm u$ coincid respectiv cu punctele având argumentele $c\mp u$.

Viceversa. Prin patru puncte ale conicei C, pe cari în virtutea teoremei I le putem considerà determinate de argumentele $u=0$, ω_1, ω_2, ω_3, să facem să treacă diferite conici: fiecare din ele este *înfăşurătoarea unei drepte mobile care uneşte două puncte ale lui C, ale căror argumente au o sumă sau o diferenţă constantă.*

In adevăr, fie C′ una din aceste conici; să ducem în punctul al cărui argument este $u=0$ o tangentă la C′ şi fie c argumentul punctului în care această tangentă taie conica C. Infăşurătoarea dreptei mobile, corespunzătoare constantei c, este o conică care trece prin aceleaşi patru puncte ca C′, având aceeaş tangentă în punctul $u=0$; prin urmare coincide cu C′.

358. *Demonstraţiunea teoremei lui Poncelet.*

Fie C şi C′ conici date oarecari. Precum am văzut, putem privì C′ ca înfăşurătoarea unei drepte care uneşte două puncte ale lui C având argumente a căror sumă sau diferenţă este o constantă convenabilă c. Dintr'un punct oarecare al lui C, al cărui argument fie u_0, să ducem o tangentă la C′; punctul de intersecţiune al acestei tangente cu C va aveà argumentul $u_1=u_0+c$. Din punctul (u_1) să ducem o a doua tangentă la C′; ea va tăia conica C într'un al treilea punct al cărui argument va fi

$$u_2=u_1+c=u_0+2c.$$

Continuând în acelaş mod, obţinem pe conica C, puncte ale căror argumente sunt

$$u_0,\ u_0+c,\ u_0+2c, \ldots, u_0+nc,$$

formând vârfurile unei linii poligonale ale cărei laturi sunt tangente la C′. Pentru ca linia să se închidă cu n laturi, este necesar ca vârful al $n+1^{lea}$ să coincidă cu cel iniţial, adică să avem

$$(6) \qquad u_0+nc\equiv\pm u_0.$$

Luând semnul superior, avem

$$(7) \qquad nc\equiv 0,$$

relaţiune independentă de punctul iniţial u_0. Dacă această condiţiune este împlinită, linia poligonală se va închide oricare ar fi punctul iniţial. *Prin urmare, sau nu există poligon de n laturi înscris în C şi circumscris lui C′ (cazul general), sau, dacă există un asemenea poligon, există o infinitate cu acelaş număr de laturi.*

Dacă în egalitatea (6) am lua semnul inferior, am obţine o linie poligonală ale cărei vârfuri se suprapun două câte două: întâiul cu al $n+1^{lea}$, al doilea cu al n^{lea}, etc. Căci din congruenţa

$$u_0+nc \equiv -u_0,$$

rezultă congruenţele

$$u_0+(n-h)c \equiv -(u_0+hc), \quad h=1, 2, \ldots, n;$$

de unde

$$p\left[u+(n-h)c\right]=p\,(u_0+hc).$$

Prin urmare, revenim la punctul de plecare, descriind laturile poligonului în sens invers.

CAPITOLUL XXVII.

FUNCŢIUNI MODULARE.

I. *Perioadele integralei eliptice de speţa I considerate ca funcţiuni de modulul integralei.*

359. Să considerăm integrala eliptică de speţa I sub forma generală

$$(1) \qquad u=\int\frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad X=a_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$$

şi fie ω, ω' două semiperioade determinate de integralele

$$(2) \qquad \omega=\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \omega'=\int_{a_2}^{a_3}\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Aplicând variabilei x o transformare lineară

$$(3) \qquad x=\frac{ay+b}{cy+d}, \quad \Delta=ad-bc\neq 0$$

şi reprezintând prin α_1, α_2, α_3, α_4 valorile lui y corespunzătoare valorilor a_1, a_2, a_3, a_4 ale lui x, prin

$$\mathrm{Y}=\alpha_0\,(y-\alpha_1)\,(y-\alpha_2)\,(y-\alpha_3)\,(y-\alpha_4)$$

polinomul transformat al polinomului X şi prin ω_1, ω'_1 semiperioadele corespunzătoare ale integralei transformate, avem egalităţile

$$(4) \qquad u=\Delta\int\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}, \quad \omega_1=\Delta\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}, \quad \omega'_1=\Delta\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}.$$

Relativ la substituţiunea (1), integrala u este un *covariant* şi perioadele sunt *invarianţi relativi* (transcendenţi) ai polinomului X. Prin urmare raportul perioadelor $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ este un invariant absolut (transcendent). Acest raport rămâne aşa dar neschimbat când aplicăm lui x o transformare lineară oarecare. De altă parte, reprezentând prin λ una din valorile raportului anarmonic a celor patru zeruri ale polinomului X, raport, de asemenea invariant relativ la substituţiunea (3) prin care zerurile polinoamelor X şi Y se corespund [1]) (§ 99), rezultă că τ depinde *numai* de λ. Avem aşa dar teorema:

Raportul τ al perioadelor este funcţiune de λ şi, viceversa, λ este funcţiune de τ.

Această teoremă se mai poate stabili, aducând integrala u la forma normală a lui Riemann

$$u = \int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}, \tag{5}$$

în care λ are semnificarea menţionată mai sus, şi luând ca semiperioade (§ 105) integralele

$$\omega = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}, \quad \omega' = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}, \tag{6}$$

dealungul liniilor drepte $(0, 1)$ şi $(1, \frac{1}{\lambda})$.

Pentru ca integralele (6) să fie bine determinate este necesar ca, în prima integrală, x să nu treacă prin punctul $\frac{1}{\lambda}$ şi, în a doua integrală, x să nu treacă prin punctul 0. Luând drumurile de integraţiune rectilinii şi făcând dealungul axei reale două tăieturi,

$$(1, +\infty), \ (0, -\infty),$$

va fi necesar ca, în expresiunea lui ω, punctul λ să nu străbată tăietura $(1, +\infty)$ şi, în expresiunea lui ω', să nu străbată tăietura $(0, -\infty)$. Dacă λ este real şi respectiv mai mare ca 1 sau mai mic ca zero, vom privi punctul λ situat pe unul sau celalt ţărm al tăieturii respective şi îl vom evità într'un mod convenabil. Cu modul acesta, luând $arg\lambda = 0$ când λ este real şi cuprins în intervalul $(0,1)$, $arg\lambda$ va fi totdeauna cuprins între 0 şi π, sau între 0 şi $-\pi$, după cum λ va fi deasupra sau dedesubtul axei reale.

---

[1]) Dacă unul din polinoame este de gradul 3, cel de al patrulea zero se înlocueşte prin ∞.

360. *Teoremă. Funcţiunile* $\omega(\lambda)$, $\omega'(\lambda)$ *sunt olomorfe în domeniul oricărui punct* λ *situat la distanţă finită şi diferit de* 0 *şi* 1.

Să considerăm funcţiunea $\omega(\lambda)$ şi fie λ_0 un punct diferit de 0 şi 1, nu situat pe axa reală în intervalul $(1, +\infty)$. Există atunci un număr real $r > 0$ destul de mic, astfel ca să avem $r < |1 - \lambda_0 x|$, oricare ar fi valoarea lui x în intervalul $(0, 1)$.

In interiorul cercului $|\lambda - \lambda_0| = r$, expresiunea

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_0 x}}\left(1-\frac{(\lambda-\lambda_0)x}{1-\lambda_0 x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

se desvoltă într'o serie $P(\lambda - \lambda_0)$, ai cărei coeficienţi au valori finite când x variază dela 0 la 1. De unde rezultă, pentru integrala lui ω, o expresiune de forma

$$\omega = \mathcal{P}(\lambda - \lambda_0),$$

$\mathcal{P}(\lambda - \lambda_0)$ fiind o serie întreagă convergentă în cercul $|\lambda - \lambda_0| = r$.

Să considerăm acum funcţiunea $\omega'(\lambda)$ şi să facem substituţiunea

$$(7) \qquad \lambda x + (1-\lambda)z = 1;$$

obţinem

$$(8) \qquad \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = \pm i \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-(1-\lambda)z)}}.$$

Integrala din membrul al doilea, lăsând la o parte factorul $\pm i$, este de aceeaş formă ca aceea a lui ω, în care λ este înlocuit prin $1 - \lambda$. De unde conchidem că $\omega'(\lambda)$ este o funcţiune olomorfă în domeniul oricărui punct λ_0, care nu este situat pe axa reală în intervalul $(0, -\infty)$.

Dacă λ_0 este real > 1, sau < 0, vom privi punctul λ_0 situat pe ţărmul superior sau pe ţărmul inferior al tăieturii coreapunzătoare şi modificând puţin drumul de integraţiune, astfel ca drumul modificat să fie echivalent cu cel primitiv, conchidem ca mai sus că $\omega(\lambda)$ şi $\omega'(\lambda)$ sunt olomorfe în domeniul acelui punct. Teorema este aşa dar demonstrată.

361. Să examinăm cum se comportă funcţiunile $\omega(\lambda)$, $\omega'(\lambda)$ în domeniul fiecăruia din punctele $\lambda = 0$, $\lambda = 1$. Pentru aceasta, să observăm că dacă în integrala lui Legendre

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

punem $x^2 = y$, $k^2 = \lambda$, această integrală se schimbă în integrala lui

Riemann; de unde, pentru perioadele ω, ω', valorile

$$(9) \qquad \omega = 2\,K, \quad \omega' = 2iK'.$$

Dacă dar ne referim la desvoltările semiperioadelor K, iK' (§ 203) şi facem înlocuirile corespunzătoare, avem, în virtutea formulelor (12) şi (23) în domeniul $\lambda = 0$,

$$(10) \qquad \omega = \pi\,\mathcal{A}(\lambda), \quad \frac{\omega'}{i} = \mathcal{A}(\lambda)\,log\frac{16}{\lambda} + P(\lambda),$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \lambda^n\right], \quad P(0) = 0.$$

Deasemenea, în virtutea formulelor (25) şi (16) din acelaş paragraf avem, în domeniul punctului $\lambda = 1$,

$$(11) \qquad \omega = \mathcal{A}(1-\lambda)\,log\frac{16}{1-\lambda} + P(1-\lambda),$$

$$\frac{\omega'}{i} = \pi\,\mathcal{A}(1-\lambda), \quad P(1) = 0.$$

In formulele (10) seriile sunt convergente pentru $|\lambda| < 1$ şi, în formulele (11), ele sunt convergente pentru $|1-\lambda| < 1$. Punctul $\lambda = 0$ este un punct ordinar pentru funcţiunea $\omega(\lambda)$ şi punct singular logaritmic pentru funcţiunea $\omega'(\lambda)$; contrariul are loc relativ la punctul $\lambda = 1$.

Din desvoltările precedente rezultă că dacă λ descrie în, sensul pozitiv, cercul $|\lambda| = r < 1$, funcţiunea $\omega(\lambda)$ se reproduce, pe când $\omega'(\lambda)$ devine

$$(12) \qquad \omega'(\lambda) + 2\pi\,\mathcal{A}(\lambda) = \omega' + 2\omega.$$

Deasemenea, dacă λ descrie, în sensul negativ, cercul $|1-\lambda| = r < 1$, $\omega'(\lambda)$ se reproduce, iar $\omega(\lambda)$ devine

$$(13) \qquad \omega(\lambda) + 2i\pi\,\mathcal{A}(1-\lambda) = \omega + 2\omega'.$$

Să presupunem, într'un mod general, că λ plecând dela un punct oarecare λ_0, diferit de 0 şi 1, descrie un drum închis care să conţină punctul $\lambda = 0$, nu însă punctul $\lambda = 1$, drum ce putem înlocui printr'un contur elementar corespunzător şi fie ω_1, ω'_1 valorile finale; conchidem, scriind ω_1 în loc de $\omega_1(\lambda_0), \ldots$, egalităţile

$$(14) \qquad \omega_1 = \omega, \quad \omega'_1 = \pm 2\omega + \omega'.$$

Deasemenea, dacă curba închisă conţine punctul $\lambda = 1$, fără a conţine punctul $\lambda = 0$, avem

$$(15) \qquad \omega_1 = \omega \pm 2\omega', \quad \omega'_1 = \omega'.$$

Semnele $\pm$ depind de sensul în care curbele sunt descrise.

Din cele ce preced se conchide că dacă λ descrie un drum închis, care înconjoară ambele puncte critice, fiecare din ele un număr oarecare de ori, valorile finale ale semiperioadelor vor fi date de egalitățile

(16) $\Omega = \alpha\,\omega + \beta\,\omega', \quad \Omega' = \gamma\,\omega + \delta\,\omega',$

α și δ fiind numere întregi *impare*, β și γ numere întregi *pare*, satisfăcând relațiunea

(17) $\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$

Transformarea considerată a perioadelor, care rezultă din drumurile diferite ale lui λ, constitue o transformare lineară, ai cărei coeficienți satisfac congruențele

(18) $\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}.$

Aceste congruențe sunt tocmai cele ce corespund permutărilor dintre punctele critice ale radicalului $\sqrt{X}$, cari nu schimbă raportul anarmonic λ [1]).

II. ***Raportul perioadelor privit ca funcțiune de modulul λ și, vice-versa, λ privit ca funcțiune de raportul perioadelor.***

362. Raportul $$\tau(\lambda) = \frac{\omega'(\lambda)}{\omega(\lambda)}$$

fiind imaginar pentru orice valoare finită λ diferită de 0 și 1, rezultă că funcțiunile $\omega(\lambda)$, $\omega'(\lambda)$ nu se anulează pentru nici o valoare finită $\lambda \neq 0$ și 1. De unde rezultă, în virtutea teoremei (§ 360), că $\tau(\lambda)$ *este o funcțiune olomorfă în domeniul oricărui punct λ, care nu coincide nici cu punctul zero nici cu punctul* 1. Voim să studiăm corespondența ce există între planul (τ) și planul (λ), mărginit de cele două tăieturi $(1, +\infty)$ și $(0, -\infty)$. Pentru aceasta, vom examina mai întâi cum variază funcțiunile $\omega(\lambda)$ și $\omega'(\lambda)$ când λ descrie axa reală, evitând punctele $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ prin semicercuri, situate deasupra acestei axe, și un semicerc cu o rază foarte mare R, având centrul în origine și situat de asemenea în semiplanul pozitiv. In aria limitată de conturul simplu astfel format, funcțiunile $\omega(\lambda)$, $\omega'(\lambda)$, $\tau(\lambda)$ sunt olomorfe [2]).

---

[1]) Intre semiperioadele ω_1, ω_3 ale funcțiunii $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ și semiperioadele (6), avem (10, § 105)

$$\omega = \omega_1 . \sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \omega' = \omega_3 \sqrt{e_1 - e_3}.$$

Prin urmare, reprezintând prin ω_1', ω_3' semiperioadele corespunzătoare lui Ω și Ω_3', avem egalitățile

$$\omega'_1 = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_3, \quad \omega'_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3,$$

cari în virtutea congruențelor (18), reproduc valorile e_1, e_2, e_3, și prin urmare lasă λ neschimbat.

[2]) O funcțiune olomorfă în domeniul oricărui punct situat într'o arie, limitată de un contur simplu, este olomorfă în toată aria (I, § 154).

1°. $0 < \lambda < 1$. Integrala

$$(1) \qquad \omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}},$$

în care luăm $\arg x = \arg(1-x) = \arg(1-\lambda x) = 0$ şi radicalul pozitiv creşte necontenit dela

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$$

până la $+\infty$, când λ variază dela 0 la 1.

Pentru a doua perioadă ω', avem

$$(3) \qquad \omega' = \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = i\int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(1-\lambda x)}},$$

radicalul din urmă fiind real şi pozitiv. Această integrală, ale cărei limite sunt punctele critice 1 şi $\frac{1}{\lambda}$, se poate înlocuì prin integrala ale cărei limite sunt celelalte două puncte critice (§ 77), anume punctul 0 şi punctul infinit, care, în cazul nostru este $-\infty$, căci linia $(-\infty, 0)$ n'are punct comun cu linia $\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$. Avem aşa dar egalitatea

$$(4) \qquad \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(1-\lambda x)}} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x(1-x)(1-\lambda x)}},\ ^{1)}$$

radicalul din membrul al doilea fiind real şi pozitiv ca şi cel din membrul întâi.

Schimbând în ultima integrală semnul lui x, avem

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x(1-x)(1-\lambda x)}} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1+\lambda x)}};$$

prin urmare

$$(5) \qquad \omega' = i\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1+\lambda x)}}.$$

Făcând λ să crească dela 0 la 1, integrala descreşte necontenit dela $+\infty$ până la valoarea

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$$

---

1) Substituţiunea $\lambda x = \frac{1-\lambda z}{1-z}$ realizează aceiaş transformare.

Din cele ce preced rezultă, pentru raportul $\frac{\omega'}{\omega}$, o expresiune de forma

$$(6) \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega} = it,$$

t fiind funcţiunea reală de λ, care, pe când λ creşte dela 0 la 1, descreşte necontenit dela $+\infty$ la 0.

Aşà dar: *Când λ descrie segmentul $(0\ldots1)$, τ descrie, necontenit în acelaş sens, axa imaginară de la $+i\infty$ până la* 0, valorile extreme fiind

$$\lim_{\lambda=+0} \tau(\lambda) = +i\infty, \qquad \lim_{\lambda=+0} \tau(1-\lambda) = 0.$$

2°. $\lambda > 1$. Punctul λ trecând dela $1-\varepsilon$ la $1+\varepsilon$ după un semicerc situat deasupra axei reale, punctul $\frac{1}{\lambda}$ descrie un arc care diferă foarte puţin de un semicerc având acelaş centru şi situat dedesubtul axei reale. Când λ descrie axa reală dela 1 la $+\infty$, pe ţărmul superior, $\frac{1}{\lambda}$ descrie segmentul $(1\ldots0)$ pe ţărmul inferior; de unde rezultă drumurile care determină perioadele ω, ω'.

Pentru ω, drumul este format din segmentul $\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$ şi din ţărmul superior al segmentului $\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$; pentru ω', drumul este format din ţărmul inferior al segmentului $\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$[1], sau, ceeace este tot una, din ţărmul superior al segmentului $\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$ (fig. 69). Avem aşà dar, pentru $\varepsilon = 0$,

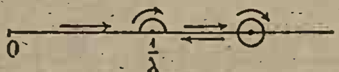

Fig. 69

$$(7) \quad \begin{cases} \omega = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} + i\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}, \\[2ex] \omega' = i\displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}, \end{cases}$$

radicalele fiind reale şi pozitive.

---

[1]) După ce punctul $\lambda=1$ a fost înconjurat.

Să înlocuim aceste integrale prin altele ale căror limite să fie independente de λ. Consideraţiuni analoage cu cele din cazul precedent ne conduc a înlocuì drumul $\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, care uneşte punctele critice 0 şi $\frac{1}{\lambda}$, prin drumul $(1 \ldots \infty)$, care uneşte celelalte două puncte critice; iar drumul $\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$ prin drumul $(-\infty, 0)$. Avem aşadar egalităţile

$$(8) \qquad \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(\lambda x-1)}},$$

$$(9) \qquad \int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x(1-x)(1-\lambda x)}} \overset{1)}{=} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1+\lambda x)}}.$$

Să punem

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(\lambda x-1)}}, \\ \beta &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1+\lambda x)}}, \end{aligned} \right.$$

şi să facem substituţiunile

$$(11) \qquad x = \frac{1}{z}, \quad \lambda = \frac{1}{\lambda_1};$$

obţinem egalităţile

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\lambda_1} \int_0^{1} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda_1 z)}}, \\ \beta &= \sqrt{\lambda_1} \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z(1+z)(1+\lambda_1 z)}}, \end{aligned} \right.$$

în cari λ_1 este cuprins între 0 şi 1.

Integralele din aceste două egalităţi coincid respectiv cu integralele (1) şi (5); prin urmare, făcând λ să crească dela 1 la $+\infty$

---

[1]) Substituirea $x = \frac{1-z}{1-\lambda z}$ realizează aceeaş transformare.

sau λ_1 să descrească dela 1 la 0, raportul $\frac{\beta}{\alpha}$ creşte necontenit dela 0 la $+\infty$. De unde, în virtutea egalităţilor (7),

$$(13)\qquad \tau=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{i\beta}{\alpha+i\beta}=\frac{it}{1+it},$$

t fiind o variabilă reală care creşte dela 0 la ∞, când λ creşte dela 1 la ∞. Acestei variaţiuni a lui t, corespunde, pentru τ, un semicerc cu centrul în punctul $\tau=\frac{1}{2}$, şi raza $\frac{1}{2}$, situat deasupra axei reale, precum rezultă din egalitatea

$$\left|\tau-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{it-1}{it+1}\right|=\frac{1}{2}.$$

Aşadar: *Când punctul λ descrie ţărmul superior* $(1, +\infty)$, *punctul τ descrie necontenit în acelaş sens un semicerc dela punctul* $\tau=0$ *până la punctul* $\tau=1$, *situat deasupra axei reale.* Valorile extreme sunt

$$\lim_{\lambda=+0}\tau\,(1+\lambda)=0,\qquad \lim_{\lambda=-\infty}\tau\,(\lambda)=1$$

3°. $\lambda<0$. Punctul λ fiind situat pe ţărmul superior al tăieturii $(0, -\infty)$, punctul $\frac{1}{\lambda}$ este situat pe ţărmul inferior al acestei tăieturi; expresiunea lui ω rămâne dar aceaş ca în cazul 1°, iar expresiunea lui ω' este

$$\omega'=\int_1^0\frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}}+\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}}.$$

In prima integrală avem (fig. 70)

$$\arg\,(1-x)=-2\pi,$$
$$\arg x=\arg\,(1-\lambda x)=0;$$

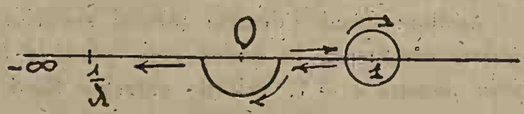

Fig. 70

iar în a doua

$$\arg\,(1-x)=-2\pi,\quad \arg x=-\pi,\ \arg\,(1-\lambda x)=0.$$

Avem aşa dar egalităţile

$$(14)\qquad \begin{cases}\omega=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}},\\[2ex] \omega'=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}}+i\int_{\frac{1}{\lambda}}^0\frac{dx}{\sqrt{-x\,(1-x)\,(1-\lambda x)}}.\end{cases}$$

Ultima integrală se poate înlocuì printr'alta ale cărei limite sunt 1 şi $+\infty$. Găsim, ca şi în cazul 2⁰, egalitatea

$$(15)\qquad \int_{\frac{1}{\lambda}}^{o}\frac{dx}{\sqrt{-x(1-x)(1-\lambda x)}}=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(1-\lambda x)}}.$$

Punând

$$(16)\qquad \alpha=\int_{o}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}},\ \beta=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(1-\lambda x)}},$$

avem egalitatea

$$(17)\qquad \tau=\frac{\alpha+i\beta}{\alpha}=1+it,\quad t>0.$$

Pentru a vedeà cum variază t când λ creşte dela $-\infty$ la 0, să facem substituţiunile

$$(18)\qquad x=1-z,\quad \lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1};$$

obţinem

$$(19)\qquad \begin{cases} \alpha=\sqrt{1-\lambda_1}\displaystyle\int_{o}^{1}\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda_1 z)}}, \\ \beta=\sqrt{1-\lambda_1}\displaystyle\int_{-\infty}^{o}\frac{dz}{\sqrt{-z(1-z)(1-\lambda_1 z)}}=\sqrt{1-\lambda_1}\int_{o}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z(1+z)(1+\lambda_1 z)}}. \end{cases}$$

Când λ variază dela $-\infty$ la 0, λ_1 variază dela 1 la 0; prin urmare integralele (19) coincid respectiv cu integralele (12) şi $t=\dfrac{\beta}{\alpha}$ creşte necontenit dela 0 la ∞.

Aşadar: Când λ descrie ţărmul superior $(-\infty, 0)$, *punctul* τ *descrie necontenit, în acelaş sens, paralela la axa imaginară dusă prin punctul* $\tau=1$, valorile extreme fiind

$$\lim_{\lambda=-\infty}\tau(\lambda)=1,\ \lim_{\lambda=-o}\tau(\lambda)=1+i\infty.$$

363. Să complectăm studiul de mai sus, examinând în ce se transformă semicercul superior $|\lambda|=R$, R foarte mare, precum şi semicercurile $|\lambda-1|=r$, $|\lambda|=r$, r foarte mic (fig. 71).

Relativ la semicercul (R), observăm că punctelor $\lambda=\pm R$ corespund două puncte τ_0, τ_1, foarte apropiate de punctul $\tau=1$, situate respectiv pe semicercul $\left|\tau-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ şi pe paralela la axa imaginară dusă prin punctul $\tau=1$. (fig. 72) Dealungul semicercului (R), funcţiunea $\tau(\lambda)$, fiind continuă, rezultă că pe când λ descrie acest semicerc în sensul pozitiv, $\tau(\lambda)$ descrie în sensul negativ un arc foarte mic care uneşte punctele τ_0 şi τ_1. (fig. 72).

Deasemenea, semicercului $|\lambda - 1| = r$, r foarte mic, descris în sensul negativ, corespunde pentru τ un arc foarte mic, descris în acelaş sens, care uneşte cele două puncte β, γ corespunzătoare valorilor $\lambda = 1 \mp r$, cel dintâiu fiind situat pe axa imaginară, cel de al doilea pe semicercul $\left|\tau - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ (fig. 72).

In fine, pentru a vedeà care este drumul (τ) corespunzător semicercului $|\lambda| = r$, să ne referim la desvoltările celor două perioade în domeniul lui $\lambda = 0$ (10) (§ 361):

$$(20) \qquad \omega = \pi \mathscr{A}(\lambda), \quad \omega' = i\left\{\mathscr{A}(\lambda) \log \frac{16}{\lambda} + \mathrm{P}(\lambda)\right\};$$

de unde, punând $\lambda = r e^{i\theta}$, rezultă egalitatea

$$(21) \qquad \tau = \frac{1}{\pi}\left[\theta + i \log \frac{1}{r}(1 + \varepsilon)\right],$$

în care ε tinde către zero împreună cu r. Pentru $\theta = \pi$ şi $\theta = 0$, egalitatea ia respectiv forma

$$\tau = 1 + it, \quad \tau = it,$$

t fiind pozitiv, tinzând către infinit împreună cu $\frac{1}{r}$. Dacă dar θ variază dela π la 0, τ descrie, în sensul negativ, un arc ($\alpha_0 \alpha$) care diferă cu atât mai puţin de un segment de linie dreaptă paralelă cu axa reală, cuprins între axa imaginară şi paralela ei dusă prin punctul $\tau = 1$, cu cât r este mai mic.

Din cele ce preced rezultă că dacă λ descrie, în sensul săgeţilor, conturul $a\, b\, c\, \mathrm{R}(-\mathrm{R})\, a_0 a$, reprezintat prin figura 71, semicercul cel mare având raza R şi semicercurile cele mici având raza r, τ descrie, necontenit în acelaş sens, conturul $\alpha\beta\gamma\tau_0\tau_1\alpha_0\alpha$ reprezintat prin fig. 72, plecând dela punctul α corespunzător punctului a. De unde rezultă, τ (λ) fiind funcţiune olomorfă în aria limitată de conturul (fig. 71), că λ este funcţiune olomorfă de τ în aria limitată de conturul (fig. 72) (I. Transformare conformă, § 358). Făcând R să tindă către infinit şi r către zero, avem, de o parte, semiplanul $\lambda > 0$ şi, de altă parte, aria limitată de semicercul $\left|\tau - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, de axa imaginară şi de paralela ei dusă prin punctul $\tau = 1$. Conturul acestei arii poate fi privit

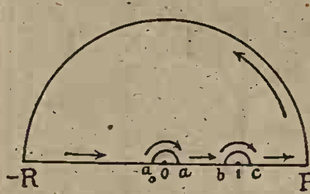

Fig. 71

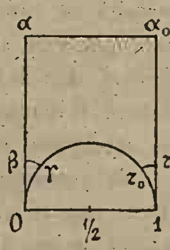

Fig. 72

ca un triunghiu având vârfurile $\tau = 0$, $\tau = 1$, $\tau = i\infty$ și unghiurile nule. Reprezintând acest triunghiu prin T (fig. 73), conchidem:

Funcțiunea $\lambda(\tau)$ este olomorfă în triunghiul T; unui punct τ interior sau pe laturile triunghiului, corespnunde un punct λ în semiplanul pozitiv λ. Viceversa, unui punct λ, situat în acest semiplan, corespunde un singur punct τ în triunghiul T. Axa imaginară (τ) corespunde segmentului $\lambda(0\ldots1)$; latura circulară și paralela la axa imaginară corespund respectiv țărmurilor superioare ale tăieturilor $(1, +\infty)$, $(-\infty, 0)$

Corolar. Din corespondența biunivocă dintre ariile (λ) și (τ), reprezintate prin figurile 71 și 72, și din corespondența analoagă dintre semicercul $\lambda = re^{i\theta}$, $\theta(0\ldots\pi)$ și linia $\sigma_0\ a$, care se depărtează la infinit când r tinde către zero, rezultă că $|\lambda|$ tinde către zero când τ tinde către infinit dealungul unei paralele la axa imaginară, cuprinsă între această axă și paralela ei dusă prin punctul $\tau = 1$.

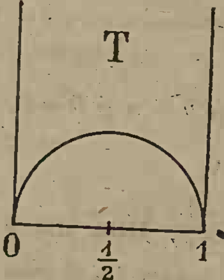

Fig. 73

364. Din proprietățile funcțiunii $\lambda(\tau)$, de a fi olomorfă în triunghiul T (fig. 73) precum și ca laturile acestui triunghiu și axa reală (λ) să se corespundă punct cu punct, rezultă că funcțiunea $\lambda(\tau)$ se prelungește în afară din triunghiu prin fiecare din laturile sale, astfel ca la două puncte simetrice în raport cu una din aceste laturi să corespundă puncte simetrice în raport cu axa reală (I, § 364). De unde rezultă că funcțiunea $\lambda(\tau)$ este olomorfă în triunghiurile simetrice cu T, în raport cu fiecare din laturile sale, și că fiecare din aceste triunghiuri și semiplanul inferior (λ) se corespund punct cu punct.

Să considerăm triunghiul T′ simetric cu T în raport cu axa imaginară; laturile acestui triunghiu sunt semiaxa imaginară $(\tau = it, t>0)$, semicercul $\left|\tau+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ situat deasupra axei reale, și paralela la axa imaginară $(\tau = -1 + it, t>0)$. Acest triunghiu și semiplanul negativ se corespund punct cu punct. Triunghiurile T și T′ din care suprimăm latura comună, semiaxa imaginară, formează un patrulater circular (fig. 74). Funcțiunea $\lambda(\tau)$ este olomorfă în acest

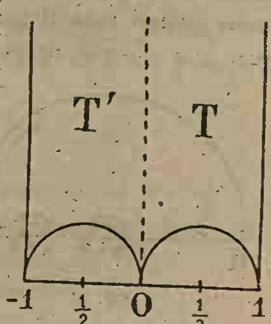

Fig. 74

patrulater; ea tinde către infinit când λ, fiind pe contur sau în interiorul patrulaterului, se apropie de vârfurile $\tau = \pm 1$. In acest patrulater, inclusiv conturul, $\lambda(\tau)$ poate primì orice valoare voim, fiecare o *singură* dată; exceptând valorile corespunzătoare conturului pe care le primeşte de *două ori*: anume, orice valoare reală $\lambda < 0$ corespunde la două puncte $\tau = \pm 1 + it$; orice valoare reală $\lambda > 1$ corespunde la două puncte situate pe laturile circulare, simetrice în raport cu axa imaginară.

365 Corespondenţa biunivocă între semiplanul inferior (λ) şi triunghiul T′ se mai poate obţine în acelaş mod ca între semiplanul superior şi triunghiul T. Este de ajuns, pentru aceasta, a face ca λ să descrie axa reală, evitând punctele critice 0 şi 1 prin semicercuri situate *dedesubtul* axei reale, adică segmentul λ (0...1) care este privit comun celor două semiplane şi ţărmurile inferioare ale tăieturilor $(1, +\infty)$, $(-\infty, 0)$. Este dar de ajuns a considerà valorile $\lambda > 1$ şi $\lambda < 0$.

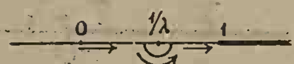

Fig. 75

1°. $\lambda > 1$. Punctul λ fiind situat pe ţărmul inferior, punctul $\frac{1}{\lambda}$ este situat pe ţărmul superior între 0 şi 1. Vom aveà, în locul formulelor (7) pe cele două următoare:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} - i \int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}, \\ \omega' &= i \int_{\frac{1}{\lambda}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}; \end{aligned} \right.$$

coeficientul lui i în ω' este de semn contrar cu cel din ω, căci în integrala

$$\omega' = -i \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(\lambda x-1)}}$$

nu se înconjoară punctul $x = 1$ (fig. 75).

2^0. $\lambda < 0$. In locul formulelor (14) avem egalităţile

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \omega &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}, \\ \omega' &= -\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} + i\int_{\frac{1}{\lambda}}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x(1-x)(1-\lambda x)}}; \end{aligned}\right.$$

căci în evaluarea lui ω' se evită numai punctul $x=0$ printr'un semicerc superior (fig. 76). Radicalele sunt pretutindeni reale şi pozitive.

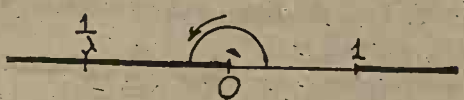

Fig. 76

366. Comparând formulele (7) şi (22), vedem că în două puncte λ', λ'' situate faţă în faţă respectiv pe ţărmul superior şi pe ţărmul inferior, avem

$$(24)\quad \begin{aligned} \omega(\lambda') &= \omega(\lambda'') + 2\omega', \\ \omega'(\lambda') &= \omega'(\lambda''). \end{aligned}$$

Deasemenea din comparaţiunea formulelor (14) şi (23), rezultă egalităţile

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \omega(\lambda') &= \omega(\lambda''), \\ \omega'(\lambda') &= \omega'(\lambda'') + 2\omega. \end{aligned}\right.$$

Ceeace revine a zice că dacă λ străbate tăietura $(1, +\infty)$, ω' nu se schimbă, iar ω se schimbă în

$$\omega \pm 2\omega',$$

după cum λ trece din semiplanul inferior în cel superior, sau în sens invers. Dacă însă λ străbate tăietura $(-\infty, 0)$, ω rămâne neschimbat şi ω' se schimbă în

$$\omega' \pm 2\omega,$$

semnele fiind determinate în acelaş mod ca relativ la tăietura $(1, +\infty)$. Regăsim astfel formulele de transformare (14) şi (15) (§ 361).

367. Să considerăm formulele generale

$$(1)\quad \Omega = \alpha\omega + \beta\omega', \quad \Omega' = \gamma\omega + \delta\omega',$$

cari cuprind toate valorile ce pot primi perioadele integralei

$$u = \int \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}},$$

pentru aceeaş valoare oarecare λ, formule deduse din perioadele iniţiale ω, ω', când punctul λ străbate cele două tăieturi un număr oarecare de ori (16) (§ 361).

In aceste formule, coeficienţii sunt numere întregi satisfăcând egalitatea

$$(2) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

şi congruenţele

$$(3) \qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \quad (mod\, 2).$$

De unde rezultă că între funcţiunile

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}, \quad \tau' = \frac{\Omega'}{\Omega},$$

există relaţiunea

$$(4) \qquad \tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}.$$

Toate punctele τ, legate între ele prin această relaţiune, sunt situate în acelaş semiplan cu τ. Căci, punând

$$\tau = \xi + i\eta, \quad \tau' = \xi' + i\eta',$$

avem

$$\eta' = \frac{\eta}{(\alpha + \beta\xi)^2 + \beta^2\eta^2};$$

η' este aşà dar de acelaş semn cu η.

368. Formula (4) cuprinde totalitatea valorilor lui τ corespunzătoare aceleaşi valori oarecari a lui λ. De unde rezultă că $\tau(\lambda)$ este o funcţiune analitică multiformă cu o infinitate de ramuri, cari se deduc din cea dintâu, în virtutea relaţiunii (4). Una din aceste ramuri, cea studiată mai sus, este reprezintată geometriceşte prin patrulaterul D(T, T'), care constitue *domeniul* acestei ramuri.

Dacă λ descrie o curbă închisă fără a străbate nici una din cele două tăieturi, adică fără a înconjurà nici unul din punctele 0 sau 1, punctul τ descrie o curbă închisă situată toată în domeniul D.

III. *Substituţiuni modulare. Grup modular.*

369. *Substituţiunile* (4) *formează un grup.* In adevăr, fie

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}, \quad \tau'' = \frac{\gamma' + \delta'\tau'}{\alpha' + \beta'\tau'},$$

două substituţiuni ai căror coeficienţi satisfac condiţiunile (2) şi (3). Subtituind în a doua formulă valoarea lui τ', obţinem egalitatea

$$\tau'' = \frac{\gamma_1 + \delta_1 \tau}{\alpha_1 + \beta_1 \tau},$$

în care avem egalităţile

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha\alpha' + \gamma\beta', & \beta_1 = \beta\alpha' + \delta\beta', \\ \gamma_1 = \alpha\gamma' + \gamma\delta', & \delta_1 = \beta\gamma' + \delta\delta', \end{cases}$$

ai căror coeficienţi α_1, β_1, γ_1, δ_1 satisfac condiţiunile (2) şi (3); prin urmare, aplicând două oarecari din substituţiunile (4), sau făcând, după expresiunea obicinuită, *produsul* a două din ele, obţinem o substituţiune cuprinsă printre substituţiunile (4). Printre aceste substituţiuni se găseşte şi substituţiunea *identică*, adică aceea care dă $\tau' = \tau$. Ceeace demonstră teorema.

Substituţiunile (4) se numesc *substituţiuni modulare* şi grupul, pe care îl reprezintăm prin G, se numeşte *grup modular*. Două substituţiuni modulare

$$V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

se zic *congruente* (*mod* 2), dacă avem congruenţele

$$\alpha' \equiv \alpha, \quad \beta' \equiv \beta, \quad \gamma' \equiv \gamma, \quad \delta' \equiv \delta \ (mod\ 2).$$

Două puncte τ, τ' se numesc *echivalente*, relativ la grupul G, dacă sunt legate între ele prin relaţiunea (4). Două arii se numesc *echivalente*, dacă toate punctele lor sunt echivalente două câte două.

Două puncte echivalente nu pot coincide decât pentru valori particulare ale lui τ. Să facem în (4) $\tau' = \tau$; obţinem ecuaţiunea

$$\beta\tau^2 + (\alpha - \delta)\tau - \gamma = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt, în virtutea relaţiunii (2),

$$\tau = \frac{\delta - \alpha \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2\beta}.$$

Punctele astfel determinate sunt punctele *fixe* ale substituţiunii. Toate aceste puncte sunt situate pe axa reală [1]).

370. Am văzut mai sus că punctul τ fiind situat în domeniul D rămâne în acelaş domeniu cât timp punctul λ nu străbate nici una din cele două tăieturi. Ce se întâmplă când λ străbate una din aceste tăieturi?

---

[1]) Egalitatea $\alpha + \delta = 0$ este incompatibilă cu condiţiunile (2) şi (3); căci, în virtutea acestor condiţiuni, punând $\alpha = 2k + 1$, $\beta\gamma = 4h$, ar rezulta egalitatea imposibilă

$$2(k^2 + k + h) = -1.$$

Să presupunem că λ descrie o curbă închisă străbătând o dată tăietura $(0,-\infty)$, adică se învârteşte o dată în jurul punctului $\lambda=0$, punctul $\lambda=1$ fiind exterior curbei. Prin această mişcare, ω se reproduce iar ω' devine (14) (§ 361) $\omega' \pm 2\omega$; de unde

$$\tau'=\tau \pm 2, \tag{5}$$

după cum rotaţiunea se face în sensul pozitiv sau negativ.

O rotaţiune în jurul punctului $\lambda = 1$, reproducând ω' şi schimbând ω în $\omega \pm 2\omega'$, conduce la substituţiunea

$$\tau' = \frac{\omega'}{\omega \pm 2\omega'} = \frac{\tau}{1 \pm 2\tau}, \tag{6}$$

după cum rotaţiunea se face în sensul negativ sau pozitiv. Formulele (5) şi (6) sunt cuprinse în formula generală (4), cea dintâi pentru valorile

$$\alpha=\delta=1, \quad \beta=0, \quad \gamma=\pm 2;$$

cea de a doua pentru valorile

$$\alpha=\delta=1, \quad \beta=\pm 2, \quad \gamma=0.$$

Domeniul ramurilor transformate (5) rezultă dintr'o translaţiune a lui D spre dreapta sau spre stânga cu o distanţă egală cu 2.

371. Să considerăm domeniul uneia din ramurile transformate (6), de ex., aceea care corespunde substituţiunii

$$\tau' = \frac{\tau}{1+2\tau}.$$

Pentru a obţine transformările triunghiurilor T, T′ să facem observarea generală următoare:

O substituţiune lineară transformând cercurile şi liniile drepte în cercuri (cari se pot reduce la linii drepte), T şi T′ se vor transformà în triunghiuri ale căror laturi sunt rectilinii sau circulare, având o latură comună corespunzătoare semiaxei imaginare. Laturile acestor tri-

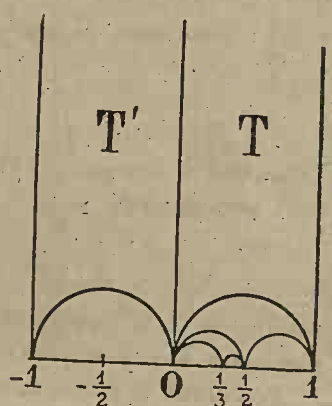

Fig. 77

unghiuri fiind perpendiculare pe axa reală, care se reproduce prin substituţiunile (4), rezultă, în virtutea conservării unghiurilor, că cercurile în cari ele se transformă au centrele lor pe această axă. Prin urmare, pentru a obţine transformata unei laturi este de ajuns a cunoaşte transformatele a două din punctele laturii.

Să considerăm triunghiul transformat al lui T.

1⁰. Punctele $\tau = 0$, $\tau = i\infty$ ale semiaxei imaginare se transformă respectiv în punctele

$$\tau' = 0, \quad \tau' = \frac{1}{2};$$

linia transformată este dar semicercul

$$\left|\tau' - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4},$$

care trece prin punctele 0 şi $\frac{1}{2}$.

2⁰. Semiparalela la axa imaginară $\tau = 1 + it$, $(t > 0)$, se transformă în semicercul

$$\left|\tau' - \frac{5}{12}\right| = \frac{1}{12},$$

care trece prin punctele $\tau' = \frac{1}{3}$, $\tau' = \frac{1}{2}$ corespunzătoare punctelor $\tau = 1$ şi $\tau = 1 + i\infty$.

3⁰. Semicercul $\left|\tau - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ având punctul $\tau = 0$ comun cu axa imaginară şi punctul $\tau = 1$, comun cu paralela $\tau = 1 + it$, se transformă într'un semicerc trecând prin punctele $\tau = 0$ şi $\tau = \frac{1}{3}$; ecuaţiunea acestui semicerc este

$$\left|\tau - \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}.$$

Triunghiul T este aşà dar transformat în triunghiul ale cărui laturi sunt semicercurile

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}, 0\right),$$

notaţiunea (a, b) reprezintând semicercul care trece prin punctele $\tau = a$, $\tau = b$, situate pe axa reală.

Procedând în acelaş mod, găsim că triunghiul T′ se transformă în triunghiul ale cărui laturi sunt

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad (1, 0)$$

corespunzătoare respectiv axei imaginare, paralelei la această axă trecând prin punctul $\tau = -1$ şi semicercului $\left|\tau + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Dacă din cele două triunghiuri transformate suprimăm latura comună $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, obținem patrulaterul transformat al lui D, format de semicercurile $\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $(1,0)$ (fig. 77). Acest patrulater este așà dar echivalent cu D, relativ la grupul G; el corespunde punct cu punct cu planul λ, mărginit de cele două tăieturi și constitue domeniul ramurii transformate.

372. In mod general, unui sistem de valori $(\alpha, \beta,\gamma,\delta)$ sau aceluiaș sistem în care schimbăm semnele tuturor coeficienților, corespunde o ramură a funcțiunii $\tau(\lambda)$; fiecare ramură posedă un domeniu în semiplanul $\tau > 0$. Acest domeniu se obține transformând domeniul (T, T') cu ajutorul substituțiunii corespunzătoare.

Metoda de transformare prin simetrie sau inversiune (transformare prin raze vectorii reciproce).

373. Să aplicăm triunghiului T inversiunea în raport cu fiecare din laturile sale, reprezentând prin A semiaxa imaginară, paralela ei prin B și semicercul prin C. In raport cu latura A avem triunghiul T′, considerat mai sus; în raport cu latura B avem triunghiul T_1, simetric cu T, ale cărui laturi sunt latura B comună, latura paralelă trecând prin punctul $\tau = 2$ și semicercul

$$\left|\tau - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Triunghiul simetric în raport cu latura C este format din această latură care rămâne neschimbată și din semicercurile $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$, inversele laturilor A și B (fig. 78).

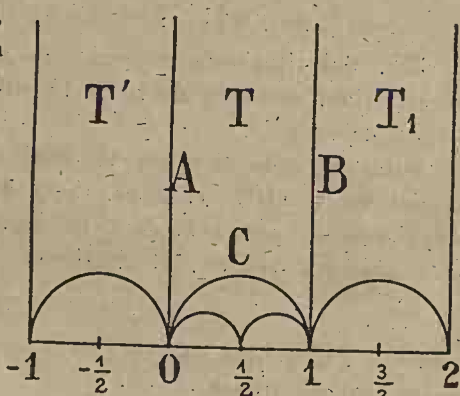

Fig. 78

374. *Expresiunea analitică a celor trei simetrii.* Fie

$$\tau=\xi+i\eta, \quad \overline{\tau}=\xi-i\eta,$$

două puncte simetrice în raport cu axa reală; punctele τ și $-\overline{\tau}$ vor fi simetrice în raport cu axa imaginară. De aci rezultă, pentru simetria în raport cu laturile A şi B, respectiv expresiunile

(1) $$\tau' = -\overline{\tau},$$

(2) $$\tau' = -\overline{\tau} + 2,$$ [1]

τ fiind un punct interior triunghiului T. Simetria în raport cu latura C rezultă din egalitatea

$$\left(\overline{\tau} - \frac{1}{2}\right)\left(\tau' - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$ [2];

de unde

(3) $$\tau' = \frac{\overline{\tau}}{2\overline{\tau}-1}.$$

Expresiunile (1), (2), (3) sunt cuprinse într'o formulă generală care se obţine înlocuind în substituţiunea modulară

(4) $$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau},$$

τ prin $-\overline{\tau}$; de unde

(5) $$\tau' = \frac{\gamma - \delta\overline{\tau}}{\alpha - \beta\overline{\tau}}.$$

Această formulă cuprinde pe cele dintâi trei, dacă pe lângă egalitatea $\alpha = \delta = 1$, facem respectiv

$$\beta = \gamma = 0; \quad \beta = 0, \gamma = 2; \quad \beta = -2, \gamma = 0.$$

375. Substituţiunile reprezintate prin formula (5) se numesc substituţiuni modulare de speţa II, substituţiunile (4) fiind considerate de speţa I.

Substituţiunile de speţa II ca şi cele de speţa I, transformă semiplanul $\tau > 0$ în el însuş. Cercurile se transformă în cercuri, unghiurile se conservă, însă în ordinea inversă. Propoziţiunea este evidentă pentru substituţiunea

$$\tau_1 = -\overline{\tau},$$

punctele τ şi τ_1 fiind simetrice în raport cu axa imaginară. De altă parte, substituţiunea

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau_1}{\alpha + \beta\tau_1},$$

---

[1] $\tau = \xi + i\eta, \quad \tau' = \xi' + i\eta, \quad \xi + \xi' = 2 \qquad \tau' = 2 - (\xi - i\eta) = 2 - \overline{\tau}$

[2] Din relaţiunea $\tau - \frac{1}{2} = \varrho e^{i\theta}$, rezultă $\overline{\tau} - \frac{1}{2} = \varrho e^{-i\theta}$; prin urmare, punând $\tau' - \frac{1}{2} = \varrho' e^{-i\theta}$, rezultă $\left(\tau' - \frac{1}{2}\right)\left(\overline{\tau} - \frac{1}{2}\right) = \varrho\varrho' = \frac{1}{2^2}$.

transformând semiplanul $\tau_1 > 0$ în el însuş, conservă unghiurile cu rotaţiunea în sens direct. Ceeace justifică propoziţiunea pentru substituţiunea generală (5).

376. *Produsul a două substituţiuni de speţa II este o substituţiune de speţa I şi produsul a două substituţiuni de speţe diferite este o substituţiune de speţa II.*

1°. Fie

$$\tau_1=\frac{\gamma-\delta\overline{\tau}}{\alpha-\beta\overline{\tau}},\quad \tau_2=\frac{\gamma_1-\delta_1\overline{\tau}_1}{\alpha_1-\beta_1\overline{\tau}_1},$$

două substituţiuni de speţa II. Din cea dintâi rezultă valoarea

$$\overline{\tau}_1=\frac{\gamma-\delta\tau}{\alpha-\beta\tau}.$$

Ducând această valoare în substituţiunea a doua, obţinem produsul

$$\tau_2=\frac{\gamma_2+\delta_2\tau}{\alpha_2+\beta_2\tau},$$

în care avem egalităţile

$$\begin{cases} \alpha_2=\alpha\alpha_1-\gamma\beta_1, & \beta_2=\delta\beta_1-\beta\alpha_1, \\ \gamma_2=\alpha\gamma_1-\gamma\delta_1, & \delta_2=\delta\delta_1-\beta\gamma_1, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}=1,\quad \alpha_2\equiv\delta_2\equiv1,\quad \beta_2\equiv\gamma_2\equiv0 \quad (mod.\ 2).$$

Produsul celor două substituţiuni este aşa dar o substituţiune de speţa I.

2°. Să considerăm substituţiunile

$$\tau_1=\frac{\gamma-\delta\overline{\tau}}{\alpha-\beta\overline{\tau}},\quad \tau_2=\frac{\gamma_1+\delta_1\tau_1}{\alpha_1+\beta_1\tau_1},$$

cea dintâi de speţa II şi cea de a doua de speţa I. Eliminând τ_1 între cele două substituţiuni, obţinem produsul

$$\tau_2=\frac{(\alpha\gamma_1+\gamma\delta_1)-(\beta\gamma_1+\delta\delta_1)\overline{\tau}}{(\alpha\alpha_1+\gamma\beta_1)-(\beta\alpha_1+\delta\beta_1)\overline{\tau}},$$

al cărui determinant este

$$\begin{vmatrix} \alpha\alpha_1+\gamma\beta_1 & \beta\alpha_1+\delta\beta_1 \\ \alpha\gamma_1+\gamma\delta_1 & \beta\gamma_1+\delta\delta_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix}=1$$

şi ai cărui coeficienţi satisfac aceleaşi congruenţe ca în cazul 1°. Produsul celor două substituţiuni este aşa dar o substituţiune de speţa II.

In acelaş mod se recunoaşte că intervertind ordinea factorilor, produsul este o substituţiune de speţa II.

Din cele ce preced rezultă că substituţiunile modulare de speţa I şi de speţa II, luate împreună, formează un grup, pe care îl numim *grup modular amplificat* şi îl notăm $\overline{G}$. Grupul G este un subgrup al grupului amplificat $\overline{G}$.

Două puncte τ, τ' sunt *echivalente*, relativ la grupul $\overline{G}$, dacă sunt legate între ele printr'o substituţiune a acestui grup, substituţiune de speţa I sau de speţa II. Două arii se zic relativ echivalente, dacă toate punctele lor sunt relativ echivalente, două câte două.

Substituţiunile modulare de speţa II, periodice de ordinul al doilea.

377. Se zice despre o substituţiune oarecare că este *periodică* de un ordin n, dacă aplicând-o de n ori succesiv, se obţine substituţiunea identică sau dacă puterea a n^a a substituţiunii este egală cu unitatea.

Printre substituţiunile modulare de speţa II sunt cu deosebire importante cele a căror perioadă este 2. Pentru ca substituţiunea

$$\tau' = \frac{\gamma - \delta\overline{\tau}}{\alpha - \beta\overline{\tau}} \tag{1}$$

să fie periodică de ordinul al doilea este necesar şi suficient ca pătratul ei să fie egal cu 1, sau ceeace este tot una, ca substituţiunea τ' şi inversa ei să fie egale între ele. Din (1) rezultă egalitatea

$$\overline{\tau} = \frac{\gamma - \alpha\tau'}{\delta - \beta\tau'}.$$

Luând în această egalitate valorile conjugate în ambele membre, şi scriind τ' în loc de τ şi viceversa, avem, pentru inversa substituţiunii (1), formula

$$\tau' = \frac{\gamma - \alpha\overline{\tau}}{\delta - \beta\overline{\tau}}, \tag{2}$$

de asemenea de speţa II. Egalând substituţiunile (1) şi (2), rezultă egalitatea

$$\delta = \alpha. \tag{3}$$

Substituţiunile de speţa II periodice de ordinul al doilea sunt aşa dar date de expresiunea

$$\tau' = \frac{\gamma - \alpha\overline{\tau}}{\alpha - \beta\overline{\tau}}, \tag{4}$$

cu condiţiunile

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 1, \quad \alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \quad (mod\ 2). \tag{5}$$

378. Substituţiunile (4) au o semnificare geometrică interesantă. Să căutăm punctele ce una oarecare din aceste substituţiuni lasă neschimbate. Pentru aceasta, să facem în (4) $\tau'=\tau$; obţinem egalitatea

$$\beta\tau\bar{\tau}-\alpha(\tau+\bar{\tau})+\gamma=0. \tag{6}$$

Să punem $\tau=\xi+i\eta$; ecuaţiunea precedentă devine

$$\beta(\xi^2+\eta^2)-2\alpha\xi+\gamma=0. \tag{7}$$

1°. Dacă $\beta=0$, avem, în virtutea primei egalităţi (5), $\alpha=\pm1$ şi punând $\gamma=2n$, conform congruenţii $\gamma\equiv0 \ (mod\ 2)$, ecuaţiunea (7) se reduce la

$$\xi=n, \tag{8}$$

n fiind un număr întreg oarecare. Ecuaţiunea (4) ia forma

$$\tau'=2n-\bar{\tau}. \tag{9}$$

Substituţiunile reprezentate prin această ecuaţiune lasă dar neschimbate punctele $\tau=\xi+i\eta$ situate pe liniile (8), perpendiculare pe axa reală, n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$; ele exprimă că punctele τ şi τ' sunt simetrice în raport cu aceste linii, numite, pentru acest motiv, *linii de simetrie* [1]).

2°. Fie $\beta\neq0$. In virtutea primei ecuaţiuni (5), ecuaţiunea (7) se poate scrie

$$\left(\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\eta^2=\frac{1}{\beta^2}. \tag{10}$$

Această ecuaţiune reprezintă o familie de cercuri reale, având centrele lor pe axa reală în punctele $\xi=\frac{\alpha}{\beta}$ şi razele corespunzătoare egale cu $\frac{1}{\beta}$, β fiind un număr par. Aceste cercuri se reproduc prin substituţiunile (4); raza cea mai mare a acestor cercuri este $\frac{1}{2}$ corespunzătoare lui $\beta=2$. Acestei valori a razei corespund sistemele

$$\begin{array}{c|lll} \alpha & \pm1, & \pm3, & \pm5,\dots \\ \hline \gamma & 0, & 4, & 12,\dots \end{array}$$

Centrele cercurilor a căror rază este $\frac{1}{2}$ au dar abscisele

$$\frac{\alpha}{\beta}=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2},\dots$$

---

1). Fie $\tau=\xi+i\eta$, $\tau'=\xi'+i\eta$; avem în virtutea ecuaţiunii (9), $\xi+\xi'=2n$.

379. *Transformarea (4) este o inversiune (transformare prin raze vectorii reciproce) în raport cu cercul ce această transformare lasă invariabil.*

Pentru a demonstrà această teoremă, să punem

$$\tau = \frac{\alpha}{\beta} + \varrho e^{i\theta},$$

de unde

$$\bar{\tau} = \frac{\alpha}{\beta} + \varrho e^{-i\theta}.$$

Să punem deasemenea

$$\tau' = \frac{\alpha}{\beta} + \varrho' e^{i\theta'}.$$

Substituind aceste valori în (4), obţinem ecuaţiunea

$$\varrho\varrho' e^{i(\theta'-\theta)} = \frac{1}{\beta^2},$$

care nu este posibilă decât dacă $\theta' - \theta \equiv 0$, abstracţiune făcând de un multiplu de 2π.

q. e. d.

Două puncte τ, τ' inverse unul altuia, se zic *simetrice* în raport cu cercul corespunzător, numit *cerc de simetrie*, prin analogie cu cazul când, cercul reducându-se la o linie-dreaptă, cele două puncte sunt simetrice în sensul obicinuit al cuvântului de simetrie.

Liniile (8) şi cercurile (10) se numesc *linii de simetrie* ale grupului amplificat $\overline{G}$.

380. *Teoremă. Orice substituţiune a grupului amplificat $\overline{G}$ transformă un cerc de simetrie într'un cerc de simetrie (cercurile se pot reduce la linii drepte).*

In adevăr, fie C un cerc de simetrie şi V o substituţiune a lui $\overline{G}$, de speţa I sau de speţa II, care transformă cercul C în cercul C_1. Substituţiunea inversă V^{-1} transformă C_1 în C. Fie V_1 inversiunea care lasă cercul C neschimbat; produsul $V^{-1}\,V_1$ este o substituţiune care ca şi V^{-1}, schimbă C_1 în C şi produsul $V^{-1}\,V_1\,V$ va transformà C în C_1; prin urmare substituţiunea $V_2 = V^{-1}\,V_1\,V$ reproduce cercul C_1; acest cerc este aşà dar un cerc de simetrie.

Observare. Substituţiunea V_2 este de speţa II sau de speţa I, după cum V este de speţa I sau de speţa II, căci V_1 este de speţa II.

381. *Nici o dreaptă sau cerc de simetrie a grupului $\overline{G}$ nu străbate triunghiul T.* Aceasta rezultă din poziţiunea în plan a acestor linii:

dreptele de simetrie sunt date de ecuaţiunile $\xi = n$ şi cercurile de simetrie au centrele lor în punctele $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$, cu raza $\frac{1}{\beta}$, β fiind un număr par; prin urmare nici una din aceste linii nu pătrunde în interiorul lui T.

382. Prin metoda inversiunii putem acoperi tot semiplanul pozitiv (τ) printr'o reţea de triunghiuri echivalente relativ la grupul $\overline{G}$. Pentru aceasta, să inversăm triunghiul T pe semicercul C(0,1). Această latură rămâne neschimbată, iar axa imaginară şi paralela ei se transformă respectiv în semicercurile $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, pe cari le reprezintăm prin c_1, c_2. Triunghiul transformat t are vârfurile sale pe axa reală în punctele $0, \frac{1}{2}, 1$; unghiurile sunt toate nule. (fig. 79).

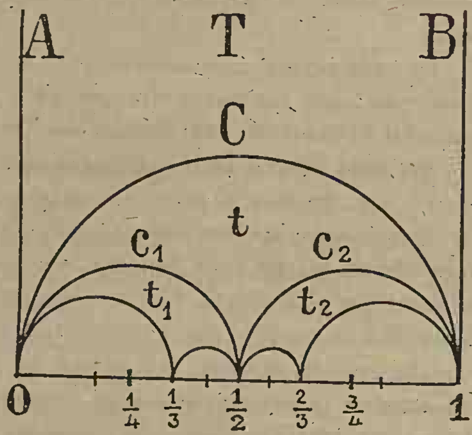

Fig. 79

Aplicând triunghiului t inversiunea în raport cu fiecare din laturile inferioare c_1, c_2, obţinem două triunghiuri t_1, t_2 simetrice în raport cu dreapta $\xi = \frac{1}{2}$, având vârfurile lor pe axa reală. Inversiunea pe semicercul c_1 lăsând această latură neschimbată, două din vârfurile triunghiului t_1 sunt punctele 0 şi $\frac{1}{2}$; al treilea vârf, transformatul punctului $\tau = 1$ este, în virtutea inversiunii, punctul $\tau = \frac{1}{3}$. Inversul t_2 al triunghiului t în raport cu semicercul c_2 fiind simetric cu triunghiul t_1 în raport cu dreapta $\xi = \frac{1}{2}$, are vârfurile sale în punctele $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$. Laturile inferioare, al căror număr este 4, formează un lanţ continuu între punctele extreme 0,1.

Inversând fiecare din cele două din urmă triunghiuri t_1, t_2 pe laturile sale inferioare, obţinem un număr îndoit de triunghiuri, două câte două simetrice în raport cu dreapta $\xi = \frac{1}{2}$, anume, inversele triunghiului t_1 pe laturile $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ sunt triunghiurile

$\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$; cele ale triunghiului t_2 sunt triunghiurile simetrice $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$, etc.

După n operaţiuni analoage, numărul laturilor inferioare este 2^n, formând un lanţ continuu între punctele $\tau = 0, \tau = 1$.

Triunghiurile cari se succed prin aceste inversiuni, sunt exterioare unele altora, două triunghiuri vecine neavând alte puncte comune decât un vârf situat pe axa reală, sau o latură care le desparte.

De unde rezultă că totalitatea $(T, t, t_1, t_2, \ldots)$ a acestor triunghiuri constitue o arie continuă, care, pentru $n = \infty$, acoperă toată partea planului limitată de axa reală şi de laturile A, B.

Aplicând acestei fâşii o translaţiune, exprimată prin egalitatea $\tau' = \tau + n$, în care n primeşte toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, acoperim tot semiplanul pozitiv (τ) cu o reţea de triunghiuri echivalente, relativ la $\overline{G}$, laturile acestor triunghiuri fiind linii de simetrie ale grupului $\overline{G}$. Nici una din aceste linii nu străbate vreun triunghiu al reţelei; căci altfel, aplicând transformarea prin simetrie în ordinea inversă, am obţine un cerc de simetrie (cercurile de simetrie transformându-se în cercuri de simetrie), care ar străbate triunghiul T, ceeace este imposibil (§ 381).

Orice punct din jumătatea planului pozitiv (τ) este interior sau situat pe o latură a unui triunghiu al reţelei. Unui punct τ din triunghiul T corespunde un singur punct în fiecare triunghiu al reţelei şi, viceversa, unui punct dintr'un triunghiu corespunde un singur punct în T. Pentru acest motiv se zice că triunghiul T este un *domeniu fundamental* al grupului $\overline{G}$. Această numire se poate aplicà oricărui triunghiu al reţelei.

383. Reunind două triunghiuri cari au o latură comună şi suprimând această latură, obţinem un patrulater curbiliniu, echivalent, relativ la grupul G, cu patrulaterul D(T, T′), format din triunghiul T şi simetricul lui T′ în raport cu axa imaginară.

Orice punct din semiplanul $\tau > 0$ este relativ echivalent cu un punct al lui D şi numai cu unul, afară dacă acest punct cade pe una din laturile conturului; în acest caz el este relativ echivalent şi cu punctul simetric în raport cu axa imaginară. Vom considerà ca făcând parte din conturul patrulaterului cele două laturi din stânga, iar celelalte două laturi ca aparţinând respectiv patrulaterelor vecine. Patrulaterul D constitue un *domeniu fundamental al grupului* G; el corespunde, punct cu punct, cu planul (λ) mărginit de cele două tăieturi $(1, +\infty)$, $(0, -\infty)$: triunghiul T corespunde semiplanului (λ) pozitiv şi triunghiul T' semiplanului (λ) negativ (§ 364).

384. ***Funcţiunea modulară*** λ (τ). Funcţiunea $\lambda(\tau)$ olomorfă în dreptunghiul D (T, T') (§ 368) este, în virtutea prelungirii sale analitice, olomorfă în dreptunghiurile cari au câte o latură comună cu D şi prin urmare olomorfă în tot semiplanul pozitiv (τ). Funcţiunea $\lambda(\tau)$ reia aceeaş valoare în toate punctele echivalente, relativ la grupul G, adică avem

$$\lambda\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)=\lambda(\tau)$$

cu condiţiunile

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1,\ \alpha\equiv\delta\equiv1,\ \beta\equiv\gamma\equiv0\ (mod\ 2).$$

Această funcţiune intră dar în clasa funcţiunilor automorfe[1]; ea a primit numele de *funcţiune modulară*, λ fiind modulul funcţiunii eliptice $sn(v, \lambda)$. Din corespondenţa biunivocă dintre planul (λ) mărginit de cele două tăieturi şi patrulaterele echivalente ale grupului G, rezultă că, în fiecare din aceste patrulatere, $\lambda(\tau)$ trece o *singură dată* prin orice valoare, convenindu-se, precum s'a văzut în paragraful precedent, ca dintre laturile echivalente, două câte două, să se considere ca făcând parte din patrulater numai cele două din stânga. Fiecare patrulater al reţelei grupului G constitue un domeniu fundamental al funcţiunii $\lambda(\tau)$. Funcţiunea $\lambda(\tau)$ nu se prelungeşte dincolo de axa reală din planul (τ). Căci patrulaterele reţelei tinzând către zero când punctul τ se apropie de axa reală, rezultă că domeniul unui punct τ_0, în care egalitatea

$$\lambda-\lambda_0=P(\tau-\tau_0)$$

este posibilă, tinde către zero, când punctul τ_0 tinde către un punct oarecare al axei reale. Axa reală este aşà dar o limită naturală a funcţiunii $\lambda(\tau)$.

385. Să menţionăm expresiunea analitică a funcţiunii $\lambda(\tau)$ (§ 231)

$$\lambda=k^2=\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4=16q\left(\frac{1+q^2+q^6+\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots}\right)^4.$$

Seriile $\vartheta(0, q)$ fiind absolut şi uniform convergente în cercul $|q|=1$, fără a se anulà în interiorul cercului, precum rezultă din expresiunea lor sub formă de produse ((3), § 226), rezultă că $\lambda(q)$ este o funcţiune olomorfă în interiorul acestui cerc. Cercul $|q|=1$ transformatul axei reale (τ) este o frontieră naturală a funcţiunii $\lambda(q)$.

---

[1]) O funcţiune uniformă $f(z)$ se numeşte *automorfă*, dacă se reproduce când aplicăm variabilei transformările lineare ale unui grup.

Avem, pentru primi termeni ai desvoltării

$$\lambda = 16q\,(1 - 8q + 44q^2 - \ldots);$$

de unde, înlocuind q prin $e^{i\pi\tau}$,

$$\lambda = 16e^{i\pi\tau}\,(1 - 8e^{i\pi\tau} + 44e^{2i\pi\tau} - \ldots).$$

386. Este interesant a arătà că plecând dela expresiunea

$$(1) \qquad \lambda = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{p\omega_2 - p\omega_3}{p\omega_1 - p\omega_3},$$

se poate probà că $\lambda(\tau)$ este o funcţiune automorfă şi a găsì grupul acestei funcţiuni.

Termenii membrului din urmă fiind funcţiuni omogene de ordinul -2 în raport cu semiperioadele ω_1, ω_2, ω_3 ale funcţiunii pu, rezultă că λ este o funcţiune de raporturile $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1 - \frac{\omega_3}{\omega_1}$; prin urmare λ este o funcţiune de raportul $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$. Făcând să varieze semiperioadele ω_1, ω_3 astfel ca raportul lor să nu înceteze de a fi imaginar, cantităţile $p\omega_\alpha$ variază în mod continuu şi rămân diferite între ele. Funcţiunea $\lambda(\tau)$ se prezintă dar sub forma unui raport a două funcţiuni analitice uniforme, continue, cari nu se anulează şi nu devin egale între ele. De unde rezultă că $\lambda(\tau)$ este o funcţiune analitică uniformă care rămâne finită, variând într'un mod continuu fără a trece prin valorile 0 şi 1. Aceste valori nu pot fi atinse, precum şi valoarea ∞, decât în cazul când discriminantul $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ tinde către zero; căci, în acest caz două din rădăcinile e_1, e_2, e_3 devenind egale, raportul (1) poate primì una din valorile excepţionale menţionate $0, 1, \infty$.

387. Să căutăm condiţiunile ce trebuie să împlinească două puncte τ, τ' pentru ca să avem egalitatea

$$(1) \qquad \lambda(\tau') = \lambda(\tau).$$

Să considerăm două funcţiuni

$$p\,(u|\omega_1, \omega_3) = p\,(u;\, g_2, g_3),$$
$$p\,(u|\omega_1', \omega_3') = p\,(u;\, g_2', g_3'),$$

cu perioade diferite. Fie

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad \tau' = \frac{\omega_3'}{\omega_1'}$$

şi e_1, e_2, e_3; e'_1, e'_2, e'_3 rădăcinile respective ale ecuaţiunilor

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 0, \quad 4x^3 - g'_2x - g'_3 = 0.$$

Avem, prin definiţiune,

$$\lambda(\tau)=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=-\frac{e_1+2e_3}{e_1-e_3},$$

$$\lambda(\tau')=\frac{e_2'-e_3'}{e_1'-e_3'}=-\frac{e_1'+2e_3'}{e_1'-e_3'}.$$

Pentru ca egalitatea (1) să fie satisfăcută, trebuie să avem

$$\frac{\dfrac{e_1}{e_3}+2}{\dfrac{e_1}{e_3}-1}=\frac{\dfrac{e_1'}{e_3'}+2}{\dfrac{e_1'}{e_3'}-1};$$

de unde

$$\frac{e_1'}{e_3'}=\frac{e_1}{e_3},$$

sau, punând $\dfrac{e_1'}{e_1}=k$, avem egalităţile

(2) $$\frac{e_1'}{e_1}=\frac{e_3'}{e_3}=\frac{e_2'}{e_2}=k.$$

De unde, între invarianţii celor două funcţiuni, relaţiunile

(3) $$g_2'=k^2g_2, \quad g_3'=k^2g_3.$$

Să construim o a treia funcţiune

$$p(u|\omega_1'', \omega_3'')=p(u; g_2, g_3)$$

ale cărei perioade să fie determinate de ecuaţiunile

$$\left(\frac{\omega_1''}{\omega_1'}\right)^2=k, \quad \frac{\omega_3''}{\omega_1''}=\tau'.$$

De unde rezultă valorile invarianţilor

(4) $$\left\{\begin{aligned} g_2''&=\frac{15}{4\omega_1''^4}\Sigma'\frac{1}{(m+n\tau)^4}=\left(\frac{\omega_1'}{\omega_1''}\right)^4 g_2'=\frac{1}{k^2}g_1'=g_2,\\ g_3''&=\frac{35}{16\omega_1''^6}\Sigma'\frac{1}{(m+n\tau)^6}=\left(\frac{\omega_1'}{\omega_1''}\right)^6 g_3'=\frac{1}{k^3}g_3'=g_3.\end{aligned}\right.$$

Funcţiunea $p\,(u|\omega_1'', \omega_3'')$ având aceeaşi invarianţi ca funcţiunea iniţială $p\,(u|\omega_1, \omega_3)$, este *necesar, ca sistemele* (ω_1'', ω_3''), (ω_1, ω_3) *să fie echivalente*, adică

(5) $$\omega_1''=\alpha\omega_1+\beta\omega_3, \quad \omega_3''=\gamma\omega_1+\delta\omega_3, \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1;$$

de unde substituţiunea modulară

(6) $$\tau'=\frac{\omega_3'}{\omega_1'}=\frac{\omega_3''}{\omega_1''}=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}.$$

De altă parte, în virtutea egalităţii invarianţilor $g_2''=g_2$, $g_3''=g_3$, rezultă că rădăcinile e_1'', e_2'', e_3'' coincid, în *totalitatea* lor, cu rădăcinile e_1, e_2, e_3 şi sunt respectiv egale *numai* pentru valorile cari satisfac condiţiunile

(7) $$\alpha\delta-\beta\gamma=1,\quad \alpha\equiv\delta\equiv 1,\quad \beta\equiv\gamma\equiv 0 \pmod 2).$$

Aşadar, *egalitatea* $\lambda(\tau')=\lambda(\tau)$ *este posibilă pentru toate substituţiunile grupului* G.

Din analiza precedentă rezultă dar că pentru *toate valorile* $\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\alpha+i\beta$, *satisfăcând condiţiunea ca coeficientul lui i să nu se anuleze, adică într'unul din cele două semiplane* (τ) ~ *în cazul nostru, semiplanul pozitiv, β fiind presupus* >0 ~ $\lambda(\tau)$ *este o funcţiune automorfă aparţinând grupului G.* q. e. d.

388. Să considerăm un sistem complect de substituţiuni ale grupului G, mărginind valorile pare ale coeficienţilor la 0 şi cele impare la ± 1; alăturând valorile corespunzătoare ale semiperioadelor şi ale rădăcinelor e_α, avem tabloul

(1)

α	β	γ	δ	ω_1'	ω_2'	ω_3'	e_1'	e_2'	e_3'
1	0	0	1	ω_1	ω_2	ω_3	e_1	e_2	e_3
1	0	1	1	ω_1	ω_3	ω_2	e_1	e_3	e_2
1	1	0	1	ω_2	ω_1	ω_3	e_2	e_1	e_3
1	1	-1	0	ω_2	ω_3	ω_1	e_2	e_3	e_1
0	1	-1	0	ω_3	ω_2	ω_1	e_3	e_2	e_1
0	-1	1	1	ω_3	ω_1	ω_2	e_3	e_1	e_2

Acestui tablou corespunde tabloul următor, care cuprinde, în prima coloană, valorile $\tau'=\frac{\omega_3'}{\omega_1'}$ şi, în a doua coloană, valorile corespunzătoare $\lambda'=\lambda(\tau')$:

(2)

	τ'	λ'
1°	τ	λ
2°	$1+\tau$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$.
3°	$\frac{\tau}{1+\tau}$	$\frac{1}{\lambda}$.
4°	$-\frac{1}{1+\tau}$	$\frac{1}{1-\lambda}$.
5°	$-\frac{1}{\tau}$	$1-\lambda$.
6°	$-\frac{1+\tau}{\tau}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Să considerăm, pe lângă cele şease substituţiuni din coloana întâi, substituţiunile în cari ele se tranformă prin simetrie în raport cu axa imaginară. Funcţiunea $\lambda(\tau)$ fiind reală pe axa imaginară (τ), valorile transformate ale lui λ sunt respectiv imaginar conjugate cu cele dintâi. Reprezintând prin $\overline{\lambda}$ valoarea conjugată cu λ, avem tabloul de transformări corespunzătoare tabloului (2):

$$(3)\qquad \begin{array}{lcc} & \tau' & \lambda' \\ \hline 1^0 & -\overline{\tau} & \overline{\lambda} \\ 2^0 & -1-\overline{\tau} & \dfrac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}-1} \\ 3^0 & -\dfrac{\overline{\tau}}{1+\overline{\tau}} & \dfrac{1}{\overline{\lambda}} \\ 4^0 & \dfrac{1}{1+\overline{\tau}} & \dfrac{1}{1-\overline{\lambda}} \\ 5^0 & \dfrac{1}{\overline{\tau}} & 1-\overline{\lambda} \\ 6^0 & \dfrac{1+\overline{\tau}}{\overline{\tau}} & \dfrac{\overline{\lambda}-1}{\overline{\lambda}} \end{array}$$

Substituţiunile 1^0, 2^0, 3^0, 5^0 sunt inversiuni pentru ambele variabile τ şi λ. Punând

$$\tau=\xi+i\eta\,,\qquad \lambda=x+iy$$

şi făcând $\tau'=\tau$, $\lambda'=\lambda$, obţinem liniile de simetrie corespunzătoare

$$(4)\qquad \begin{array}{c|c} \xi=0 & y=0 \\ 2\xi+1=0 & x^2+y^2-2x=0 \\ \xi^2+\eta^2+2\xi=0 & x^2+y^2-1=0 \\ \xi^2+\eta^2-1=0 & 2x-1=0 \end{array}$$

389. Tabloul (7) ne permite a determinà valorile ce primeşte λ în punctele următoare

$$\tau=i,\ \frac{-1+i}{2},\ \frac{\pm 1+i\sqrt{3}}{2},\ 1+i\equiv -1+i\quad (mod\ 2)$$

1^0. Transformarea $\tau'=\dfrac{-1}{\tau}$ admite punctul fix $\tau=i$, căruia corespunde egalitatea $\lambda=1-\lambda$; de unde

$$(1)\qquad \lambda(i)=\frac{1}{2}.$$

2⁰. Substituţiunea $\tau' = \dfrac{-1}{1+\tau}$ transformă λ în $\dfrac{1}{1-\lambda}$ şi pentru $\tau = i$, avem $\tau' = \dfrac{-1}{1+i} = \dfrac{-1+i}{2}$; prin urmare

$$\lambda\left(\frac{-1+i}{2}\right) = \frac{1}{1-\lambda(i)} = 2. \tag{2}$$

3⁰. Acceaş substituţiune admite punctul fix $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; acestui punct corespunde dar egalitatea $\lambda = \dfrac{1}{1-\lambda}$, sau ecuaţiunea

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt $\lambda = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Soluţiunea admisibilă este

$$\lambda\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \tag{3}$$

căci punctul $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ fiind situat în triunghiul T', punctul corespunzător λ este situat în semiplanul negativ.

Punctul $\tau = e^{\frac{i\pi}{3}} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ fiind simetric cu punctul $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, în raport cu axa imaginară, valorile corespunzătoare ale lui λ sunt conjugate; avem aşà dar

$$\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}. \tag{4}$$

Valorile (3) şi (4) ale lui λ se pot deduce plecând dela substituţiunea $\tau' = -\dfrac{1+\tau}{\tau}$ care admite acelaş punct fix $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ şi căreia corespunde transformarea

$$\lambda' = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

4⁰. Avem (2⁰)

$$\lambda(1+\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau) - 1};$$

de unde, în virtutea egalităţii (1) şi ţinând seamă de echivalenţa punctelor $\pm 1 + i$, avem

$$\lambda(-1+i) = \lambda(1+i) = \frac{\lambda(i)}{\lambda(i) - 1} = -1. \tag{5}$$

IV. *Grupul modular* $\Gamma(\tau)$. — *Funcțiunea modulară* $J(\tau)$

390. Substituțiunile grupului G sunt cuprinse printre substituțiunile modulare

(1) $$\tau' = \frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau},$$

ai cărei coeficienți sunt numere întregi, satisfăcând *unica condițiune*

(2) $$\alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Grupul modular format de aceste substituțiuni se notează Γ. Două puncte τ, τ' se numesc *echivalente*, relativ la grupul Γ, dacă sunt legate între ele prin egalitatea (1). Ele sunt toate situate în acelaș semiplan cu τ. Punctele fixe ale substituțiunii sunt rădăcinile ecuațiunii ce se obține făcând $\tau'=\tau$; ele sunt date de ecuațiunea

(3) $$\tau=\frac{\delta-\alpha\pm\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4}}{2\beta}.$$

Substituțiunea considerată este *eliptică*, *parabolică*, sau *iperbolică* după cum avem

$$|\alpha+\delta|<2, \quad |\alpha+\delta|=2, \quad |\alpha+\delta|>2.$$

§ 391. *Grupul* G. *este un subgrup invariant al grupului* Γ.

Pentru a demonstra această teoremă să reamintim noțiunile următoare din teoria generală a grupurilor.

I. Fie

(1) $$g_0=1, g_2, g_3, \ldots, g_n, \ldots$$

un șir de substituțiuni in număr limitat sau nelimitat, formând un grup G și fie h o substituțiune oarecare. Substituțiunea reprezintată prin produsul

(2) $$g'_\lambda = h^{-1}g_\lambda h, \quad (\lambda=0, 1, 2, \ldots)$$

se numește *transformata* substituțiunei g_λ' prin substituțiunea h. De unde, vice-versa,

(3) $$g_\lambda=hg'_\lambda h^{-1},$$

adică substituțiunea g_λ este transformata substituțiunei g'_λ prin substituțiunea inversă h^{-1}.

Făcând produsul a două substituțiuni de forma (2), obținem egalitatea

(4) $$g'_\lambda g'_\mu = \left(h^{-1}g_\lambda h\right)\left(h^{-1}g_\mu h\right) = h^{-1}\left(g_\lambda g_\mu\right) h,$$

care exprimă că produsul $g'_\lambda g'_\mu$, a două substituţiuni transformate, este substituţiunea transformată a produsului $g_\lambda g_\mu$, prin aceiaş substituţiune h; de unde rezultă că substituţiunile transformate ale tuturor substituţiunilor lui G, printr'o aceiaş substituţiune h, formează un grup G′, numit grupul *transformat* al lui G. Se notează

$$(5) \qquad G' = h^{-1}\, G\, h.$$

Fiecărei substituţiuni a lui G corespunde o substituţiune a lui G′ şi viceversa, fiecărei substituţiuni a lui G′ corespunde o substituţiune a lui G. Se zice că cele două grupuri sunt *izomorfe*. Dacă substituţiunea h aparţine grupului G, substituţiunile transformate reproduc substituţiunile iniţiale, într'o ordine diferită oarecare: grupul G′ coincide cu grupul G.

II. *Subgrupuri.* Dacă o parte din substituţiunile unui grup G, pe cari le reprezintăm prin

$$(1) \qquad S_0 = 1, \quad S_1, \quad S_2, \ldots$$

al căror număr poate fi limitat sau nelimitat, formează un grup H, se zice că H este un *subgrup* al lui G. Fie T_1 o substituţiune a lui G care nu aparţine lui H, substituţiunile

$$(2) \qquad T_1, \quad S_1T_1, \quad S_2T_1, \ldots$$

sunt diferite între ele, ceeace este evident; ele sunt diferite şi de substituţiunile (1). Căci, dacă am avea $S_\lambda T_1 = S_\mu$ ar urma să avem $T_1 = S_\lambda^{-1} S_\mu$, adică T_1 ar face parte din substituţiunile (1): contra ipotezei.

Dacă G conţine substituţiuni diferite de cele din (1) şi (2), fie T_2 una din ele. Substituţiunile

$$(3) \qquad T_2, \quad S_1T_2, \quad S_2T_2, \ldots$$

sunt dar diferite între ele şi de substituţiunile (1). Ele sunt diferite şi de substituţiunile (2); căci din $S_\lambda T_2 = S_\mu T_1$ rezultă $T_2 = S_\lambda^{-1} S_\mu T_1$, adică T_2 ar face parte din substituţiunile (2): contra ipotezei.

Continuând în acelaş mod, formăm un tablou

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} 1, & S_1, & S_2, & \ldots \\ T_1, & S_1T_1, & S_2T_1, & \ldots \\ T_2, & S_1T_2, & S_2T_2, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right.$$

compus dintr'un număr limitat sau nelimitat de linii, care conţine toate substituţiunile lui G, fiecare o singură dată. Prima linie constitue grupul H; celelalte linii neconţinând substituţiunea 1, nu formează grupuri.

Dacă liniile (4) sunt în număr limitat, fie m acest număr, se zice că m este *indicele* subgrupului H.

Transformarea subgrupului H prin substituţiunile lui G. Toate substituţiunile unei linii a tabloului (4) transformă H într'un acelaş grup, precum rezultă din egalitatea

$$(S_i T_k)^{-1} H (S_i T_k) = T_k^{-1} (S_i^{-1} H S_i) T_k = T_k^{-1} H T_k.$$

Substituţiunile din linii diferite transformă H în grupuri în genere diferite. In cazul indicelui limitat m, avem aşa dar cel mult m subgrupuri transformate,

$$H_1, \quad H_2, \ldots, \quad H_m$$

printre cari unul coincide cu H. Se zice că aceste subgrupuri sunt *conjugate* în grupul G. Dacă subgrupurile conjugate sunt identice, prin urmare grupul H se reproduce, oricare ar fi substituţiunea lui G prin care îl transformăm, se zice că H este un subgrup *invariant* al lui G.

Demonstrarea teoremei enunţată la începutul paragrafului rezultă imediat. Fie

$$v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

o substituţiune oarecare a lui G, şi

$$V = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

o substituţiune oarecare a lui Γ, neaparţinând lui G. Avem

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} -\delta' & \beta' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix}$$

$$V^{-1}v = \begin{pmatrix} -\delta' & \beta' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\delta' + \beta\gamma' & \alpha\beta' - \beta\alpha' \\ -\gamma\delta' + \delta\gamma' & \gamma\beta' - \delta\alpha' \end{pmatrix}$$

$$V^{-1}vV = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix},$$

coeficienţii $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ fiind determinaţi de ecuaţiunile

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha'(-\alpha\delta' + \beta\gamma') + \beta'(-\gamma\delta' + \delta\gamma') \equiv -\alpha + (\alpha+\delta)\beta'\gamma' \equiv -\alpha \equiv 1, \\ \beta_1 &= \alpha'(\alpha\beta' - \beta\alpha') + \beta'(\gamma\beta' - \delta\alpha') \equiv (\alpha-\delta)\alpha'\beta' \equiv 0, \\ \gamma_1 &= \gamma'(-\alpha\delta' + \beta\gamma') + \delta'(-\gamma\delta' + \delta\gamma') \equiv (\delta-\alpha)\gamma'\delta' \equiv 0. \\ \delta_1 &= \gamma'(\alpha\beta' - \beta\alpha') + \delta'(\gamma\beta' - \delta\alpha') \equiv \alpha - (\alpha+\delta)\alpha'\delta' \equiv 1 \end{aligned}\right\} (mod\ 2)$$

Coeficienţii substituţiunei transformate satisfac dar aceleaşi congruenţe ca coeficienţii substituţiunilor grupului G., prin urmare grupul transformat coincide cu grupul iniţial: $V^{-1}GV=G$.

q. e. d.

392. *Toate substituţiunile grupului Γ se pot exprimà printr'un produs de puteri pozitive şi negative ale substituţiunilor elementare:*

$$S(\tau)=\tau+1, \quad T(\tau)=-\frac{1}{\tau}, \tag{4}$$

precum rezultă din teorema (§ 125), relativă la orice transformare liniară omogenă

$$\omega'_1=\alpha\omega_1+\beta\omega_3, \quad \omega'_3=\gamma\omega_1+\delta\omega_3;$$

de unde se deduce substituţiunea (1) a raportului $\frac{\omega_3}{\omega_1}=\tau$.

Substituţiunile S şi T pot fi dar considerate ca substituţiunile *generatoare* ale grupului modular Γ. Cea dintâi este parabolică având punctul fix $\tau=\infty$; aplicând această substituţiune de n ori, avem $S^n=\tau+n$. Cea de a doua este eliptică având ca punct fix $\tau=i$. Ea este periodică de ordinul al doilea:

$$T^2=1.$$

Pe lângă substituţiunile S şi T să notăm substituţiunea reprezentată prin simbolul U, corespunzătoare valorilor

$$\alpha=0, \quad \beta=-1, \quad \gamma=\delta=1:$$

$$U=\tau'=-\frac{1+\tau}{\tau}. \tag{5}$$

Pătratul acestei substituţiuni este

$$U^2=-\frac{1}{1+\tau}=U^{-1}; \tag{6}$$

de unde

$$U^3=1. \tag{7}$$

Substituţiunea U este aşà dar periodică de ordinul al treilea; punctul fix al acestei substituţiuni este

$$\tau=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Intre substituţiunile S, T şi U există relaţiunea

$$ST=U, \tag{8}$$

de unde, în virtutea egalităţii (7),

$$ST\ ST\ ST=1. \tag{9}$$

Substituţiunile fundamentale S şi T nu sunt dar independente.

393. Toate substituţiunile lui Γ se pot grupà în *şase clase* satisfăcând congruenţele reprezintate prin primele patru coloane ale tabloului (1) (§ 388) pe cari le reproducem aici:

(10)

	$\alpha\equiv$	$\beta\equiv$	$\gamma\equiv$	$\delta\equiv$
1°	1	0	0	1
2°	1	0	1	1
3°	1	1	0	1
4°	1	1	1	0
5°	0	1	1	0
6°	0	1	1	1

(mod 2)

Substituţiunile din aceeaş clasă sunt congruente între ele; două substituţiuni din clase diferite sunt incongruente (*mod* 2). Substituţiunile din clasa 1° formează grupul G, care se mai notează Γ_6. Substituţiunile din celelalte clase nu formează grupuri.

Putem ordonà toate substituţiunile lui Γ în şase clase conform tabloului precedent. Fie

$$(11) \qquad v_1 = 1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$$

substituţiunile lui Γ_6 şi

$$(12) \qquad V_1 = 1, V_2, V_3, \ldots, V_6,$$

şase substituţiuni ale lui Γ aparţinând respectiv claselor (10). Grupul Γ se va puteà reprezintà prin tabloul

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} v_1, & v_2, & v_3, & \ldots, & v_n, \ldots \\ V_2, & V_2v_2, & V_2v_3, & \ldots, & V_2v_n, \ldots \\ V_3, & V_3v_2, & V_3v_3, & \ldots, & V_3v_n, \ldots \\ V_4, & V_4v_2, & V_4v_3, & \ldots, & V_4v_n, \ldots \\ V_5, & V_5v_2, & V_5v_3, & \ldots, & V_5v_n, \ldots \\ V_6, & V_6v_2, & V_6v_3, & \ldots, & V_6v_n, \ldots \end{array} \right.$$

Substituţiunile fiecărei linii ale acestui tablou aparţin clasei din care face parte primul element al liniei; prin urmare, elementele din două linii diferite sunt diferite. Cele din aceeaş linie sunt de asemenea diferite între ele; căci din egalitatea

$$Vv_i = Vv_k$$

ar urma $v_i = v_k$. In fine, orice substituţiune a lui Γ, trebuind să aparţină uneia din cele şase clase, este cuprinsă în tabloul (13). Numărul liniilor orizontale fiind şase, se zice că sub grupul G are, relativ la grupul Γ, *indicele* 6; de unde vine notaţiunea Γ_6 pentru acest subgrup.

Observare. Se verifică uşor că dacă în locul celor şase substituţiuni V_i, cu ajutorul cărora am format tabloul precedent, am alege alte şase incongruente (*mod* 2), am obţine aceleaşi substituţiuni ale lui Γ; ceeace se modifică este ordinea liniilor şi aceea a substituţiunilor cuprinse în aceste linii.

Să ne închipuim, de ex., că am înlocuì substituţiunea V_2 prin substituţiunea $V_3 v_k$, linia a doua a tabloului ar deveni

$$V_3 v_k, \; V_3 v_k v_2, \; V_3 v_k v_3, \ldots, \; V_3 v_k v_n, \ldots$$

Insă substituţiunile

$$v_k, \; v_k v_2, \; v_k v_3, \ldots$$

nu difer de substituţiunile (11) decât prin ordinea lor. Linia a doua ar fi înlocuită prin a treia şi, în această linie, substituţiunile ar fi dispuse într'o ordine diferită decât în cea dintâi.

394. *Amplificarea grupului Γ.* Este util, pentru împărţirea semiplanului pozitiv (τ) în domenii fundamentale, de a amplificà grupul Γ, precum am amplificat grupul G, introducând substituţiunile modulare de speţa II

$$(1) \qquad \tau' = \frac{\gamma - \delta\bar{\tau}}{\alpha - \beta\bar{\tau}}.$$

Produsul a două substituţiuni de speţa II fiind o substituţiune de speţa I şi produsul a două substituţiuni de speţe diferite fiind o substituţiune de speţa II, totalitatea acestor substituţiuni formează grupul modular amplificat $\bar{\Gamma}$.

Printre substituţiunile (1) să considerăm cele periodice de ordinul al doilea

$$(2) \qquad \tau' = \frac{\gamma - \alpha\bar{\tau}}{\alpha - \beta\bar{\tau}},$$

caracterizate prin egalitatea $\delta = \alpha$ (3) (§ 377). Relaţiunea dintre coeficienţi se reduce la

$$(3) \qquad \alpha^2 - \beta\gamma = 1.$$

Propoziţiunile (§§ 379, 380) relative la grupul amplificat $\bar{G}$ subsistă şi în cazul grupului amplificat $\bar{\Gamma}$, anume:

1.° Substituţiunile periodice de ordinul al doilea (2) sunt inversiuni; substituţiunea (2) lasă neschimbată linia a cărei ecuaţiune este

$$(4) \qquad \beta(\xi^2 + \eta^2) - 2\alpha\xi + \gamma = 0, \quad \tau = \xi + i\eta.$$

2.° Orice substituţiune a grupului $\bar{\Gamma}$ transformă un cerc într'un cerc.

Dacă $\beta = 0$, avem, în virtutea ecuaţiunii (3), $\alpha = \pm 1$; ecuaţiunea (4) se reduce la

$$(5) \qquad 2\xi = \gamma$$

γ număr întreg arbitrar. Substituţiunea corespunzătoare (2) ia forma

$$\tau' = \gamma - \bar{\tau}. \tag{6}$$

Punctele τ şi τ' legate prin această ecuaţiune sunt simetrice în raport cu dreapta (5).

Dacă $\beta \neq 0$, liniile, ce substituţiunea (2) lasă neschimbate, sunt cercurile

$$\left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \eta^2 = \frac{1}{\beta^2}, \tag{7}$$

ale căror centre sunt pe axa reală în punctele $\xi = \frac{\alpha}{\beta}\cdot$ Numărul întreg β poate fi presupus pozitiv, căci putem schimbà semnele tuturor coeficienţilor substituţiunii. Pentru $\beta = 1$, α poate primì orice valoare întreagă, valoarea corespunzătoare a lui γ, în virtutea relaţiunii (3), va fi $\gamma = \alpha^2 - 1$. Obţinem astfel tabloul

$$\begin{array}{c|l} \alpha & 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \ldots, \\ \gamma & -1, \quad 0, \quad 3, \quad 8, \ldots; \end{array}$$

abscisele centrelor cercurilor sunt date de valorile lui α.

Făcând $\beta = 2$, raza cercurilor este $\frac{1}{2}\cdot$ Valorile lui γ fiind date de ecuaţiunea $2\gamma = \alpha^2 - 1$, rezultă că α primeşte numai valori impare. Avem tabloul de valori

$$\begin{array}{c|l} \alpha & \pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm 5, \ldots, \\ \gamma & 0, \quad 4, \quad 12, \ldots; \end{array}$$

centrele cercurilor corespunzătoare sunt determinate de abscisele

$$\pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{3}{2}, \quad \pm\frac{5}{2}, \ldots$$

Pentru $\beta = 3$, valorile lui γ sunt date de ecuaţiunea $3\gamma = \alpha^2 - 1$; avem tabloul

$$\begin{array}{c|l} \alpha & \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \pm 5, \ldots \\ \gamma & 0, \quad 1, \quad 5, \quad 8, \ldots \end{array}$$

Raza cercurilor este $\frac{1}{3}$ şi abscisele sunt

$$\pm\frac{1}{3}, \quad \pm\frac{2}{3}, \quad \pm\frac{5}{3} \ldots$$

395. Să ne închipuim trase toate liniile de simetrie; obţinem astfel triunghiuri ale căror laturi sunt arce de cercuri. Să considerăm liniile de simetrie următoare: axa imaginară, paralela ei dusă prin punctul $\tau = -\frac{1}{2}$ şi cercul $|\tau| = 1$. Figura 80 formată de cele două drepte nelimitate *exterioare* cercului şi de arcul cuprins între ele poate fi privit ca un triunghiu ale cărui vârfuri sunt punctele

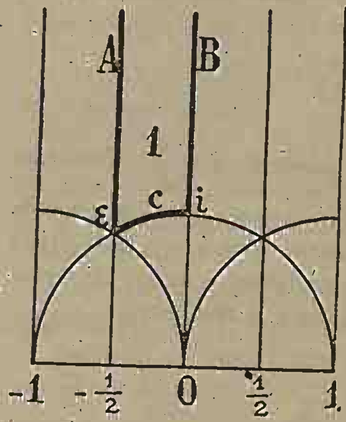

Fig. 80

$$\tau = e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \qquad \tau = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \varepsilon, \qquad \tau = i\infty$$

şi unghiurile corespunzătoare $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0. Să reprezintăm acest triunghiu prin 1.

Proprietăţi. I. *Nici o dreaptă sau cerc de simetrie nu străbate triunghiul* 1. Aceeaş demonstraţiune, ca pentru triunghiul T al grupului G (§ 381). Unicul cerc de simetrie, care are cu triunghiul 1 un singur punct comun punctul ε, este cercul cu centrul în punctul $\tau = -1$ cu raza 1.

II. *Nu există substituţiune modulară de speţa I sau de speţa II diferită de substituţiunea identică* ($\tau' = \tau$) *care să transforme triunghiul* 1 *în el însuşi*. In adevăr, în virtutea acestor substituţiuni, unghiurile se conservă; aceste unghiuri fiind inegale $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0\right)$, urmează ca vârfurile să rămână fixe. Insă, dacă substituţiunea este de speţa I, ea nu poate admite mai mult decât două puncte fixe, fără a se reduce la identitate [1]); prin urmare este imposibil ca toate vârfurile să se reproducă. Dacă substituţiunea este de speţa II, ea lasă o latură neschimbată, iar pe celelalte două le transformă în linii simetrice în raport cu cea fixă. Triunghiul nu se poate dar reproduce.

III. *Nu există în triunghiul* 1 *două puncte echivalente relativ la grupul* Γ. Această propoziţiune rezultă din consideraţiunile următoare:

1°. Dacă ar exista, în interiorul triunghiului 1, două puncte P_1, P_2 echivalente, substituţiunea V care ar transformă P_1 în P_2, ar transformă punctele vecine cu P_1 în punctele vecine cu P_2 (în

---

[1]) Punctele fixe sunt rădăcinile ecuaţiunii

$$\beta\tau^2 + (\delta - \alpha)\,\tau - \gamma = 0.$$

virtutea continuității), prin urmare triunghiul 1 în el însuș: ceeace este imposibil (II).

2°. Dacă P_1 este pe contur, substituțiunea V care ar transformà P_1 în P_2, ar transformà latura pe care se află P_1, adică o linie de simetrie, într'o linie de simetrie (§ 394) trecând prin P_2; triunghiul 1 ar fi străbătut de o linie de simetrie: ceeace este imposibil (I).

3°. Dacă P_1 și P_2 sunt pe contur, substituțiunea V care ar transformà P_1 în P_2, ar transformà un punct vecin cu P_1, *interior* triunghiului 1, într'un punct *exterior* acestui triunghiu, căci două puncte interioare nu pot fi echivalente (1°); prin urmare substituțiunea V transformă triunghiul 1 într'un triunghiu adiacent, având cu 1 latura comună pe care se află punctul P_2. Substituțiunea V lăsând latura comună neschimbată, transformă punctul P_1 într'un punct simetric cu el, în raport cu această latură. V nu poate dar transformà P_1 în P_2. q. e. d.

396. *Expresiunea analitică a simetriei în raport cu laturile triunghiului* 1. Fie τ un punct în triunghiul 1 și fie τ' punctul simetric cu τ în raport cu axa imaginară, sau în raport cu paralela la această axă, sau în raport cu cercul. Acestor simetrii corespund, respectiv substituțiunile, pe cari le reprezintăm prin aceleași litere A, B, C ca ale laturilor triunghiului

$$A=\tau'=-\overline{\tau}$$
$$B=\tau'=-1-\overline{\tau},$$
$$C=\tau'=\frac{1}{\overline{\tau}}.$$

Aceste formule sunt cuprinse în formula generală (2) (§ 394), în care facem respectiv

$$\beta=\gamma=0;\quad \beta=0,\ \gamma=-1,\ \alpha=1;\quad \beta=1,\ \gamma=-1,\ \alpha=0.$$

Se verifică imediat egalitățile

$$A^2=B^2=C^2=1$$

$$AB=-1+\tau,\quad BA=1+\tau,\quad AC=CA=-\frac{1}{\tau},$$

$$BC=-\frac{1}{1+\tau},\quad CB=-\frac{1+\tau}{\tau}.$$

Produsele BA și AC=CA coincid respectiv cu substituțiunile generatoare

$$S=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

ale grupului Γ (4) (§ 392). Celelalte produse se exprimă cu ajutorul acestora. Avem

$$BA=S,\quad AB=S^{-1},\quad BC=ST=U,\quad CB=(ST)^2=U^2.$$

Substituţiunea $T=AC=CA=-\dfrac{1}{\tau}$ reprezintă dar simetria A, urmată sau precedată de simetria C.

Toate substituţiunile grupului $\overline{\Gamma}$ se pot exprima cu ajutorul simetriilor elementare A, B, C. Căci $\overline{\Gamma}$ este format din Γ şi din produsul substituţiunilor lui Γ printr'o substituţiune de speţa II, de ex., prin substituţiunea A; iar substituţiunile lui Γ se exprimă prin produsele formate cu puteri întregi pozitive şi negative ale substituţiunilor $S=BA$ şi $T=AC$ (§ 392).

397. *Construcţiunea reţelei de triunghiuri ale grupului $\overline{\Gamma}$.* Să inversăm triunghiul 1 pe fiecare din laturile sale; vom obţine trei triunghiuri având cu 1 latura de simetrie comună. Se obişnueşte a se nota triunghiurile transformate prin aceleaşi simboale cu cari se efectuează inversiunile. Avem astfel triunghiurile A, B, C: cele dintâiu două fiind simetrice în raport cu axa imaginară şi cu paralela ei, cel de al treilea fiind simetric cu cercul $|\tau|=1$.

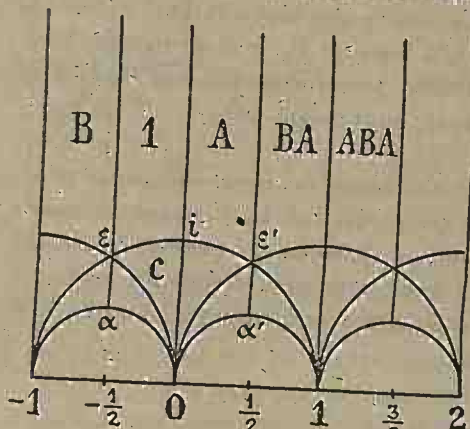

Fig. 81

Vârfurile triunghiului A sunt punctele $i, \varepsilon'=e^{\frac{i\pi}{3}}$, $i\infty$; cele ale triunghiului B sunt punctele $-1+i$, ε, $-\dfrac{1}{2}+i\infty$ şi ale triunghiului C sunt punctele i, ε, 0. Unghiurile în aceste vârfuri sunt $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{3}$, 0. (fig. 81) [1])

Inversând triunghiurile A, B, C pe laturile lor libere şi aplicând aceiaş operaţiune triunghiurilor transformate, etc., acoperim semiplanul pozitiv (τ) printr'o infinitate de triunghiuri echivalente cu triunghiul 1, ale căror laturi sunt liniile de simetrie în cari se

---

[1]) Pentru a obţine simetricul unui triunghiu, în raport cu una din laturile sale, este de ajuns a găsi simetricul vârfului care nu se găseşte pe acea latură. Astfel simetricul vârfului ∞ al triunghiului 1, în raport cu latura C, este punctul $\tau=o$; de unde rezultă triunghiul C cu vârfurile o, i, ε. Vârful i al acestui triunghiu se transformă, în raport cu latura $O\varepsilon$, într'un punct a determinat de intersecţia liniilor de simetrie în cari se transformă semiaxa imaginară şi arcul $i\varepsilon$.

Aceste linii sunt semicercul $(0,-1)$ şi dreapta $\xi=-\dfrac{1}{2}$; etc.

transformă laturile triunghiului 1 prin substituțiunile formate de produsele substituțiunilor A, B, C, adică prin toate substituțiunile grupului $\overline{\Gamma}$ (§ 396).

In particular, domeniul fundamental D (T, T') al grupului G (Fig. 74), căruia aparține funcțiunea $\lambda(\tau)$, este acoperit de 12 triunghiuri, determinate de intersecțiunile liniilor de simetrie (fig. 81).

$$|\tau|=1,\quad |\tau\pm 1|=1,\quad |\tau\pm\tfrac{1}{2}|=\tfrac{1}{2},\quad \xi=0,\quad \xi=\pm 1,\quad \xi=\pm\tfrac{1}{2}.$$

§ 398 Nici unul din triunghiurile rețelei lui $\overline{\Gamma}$ nu este străbătut de linii de simetrie și nu conține două puncte echivalente între ele; căci altmintrelea, triunghiul inițial 1 ar fi străbătut de asemenea linii și ar conține două puncte echivalente. Ceeace nu este (§ 395).

Totalitatea acestor triunghiuri constitue *rețeaua grupului modular* $\overline{\Gamma}$. Două triunghiuri vecine ale rețelei n'au alte puncte comune decât latura comună în raport cu care ele sunt simetrice. Vârfurile pot aparține mai multor triunghiuri. Astfel vârful i aparține la patru triunghiuri, vârful ε la șase triunghiuri și vârful ∞ la o infinitate de triunghiuri. Vârfurile echivalente cu cele precedente aparțin respectiv aceluiaș număr de triunghiuri.

Orice număr rațional fiind echivalent cu punctul ∞ [1]), rezultă că fiecare punct rațional al axei reale (τ) este vârf al unui număr infinit de triunghiuri ale rețelei lui $\overline{\Gamma}$.

Triunghiul 1, precum și oricare triunghiu echivalent, relativ la grupul $\overline{\Gamma}$, este un domeniu fundamental al acestui grup.

399. Fie $\tau'=V(\tau)$ substituțiunea de speța I sau de speța II care transformă triunghiul (1) într'un triunghiu V al rețelei [2]). Când punctul τ descrie triunghiul 1, punctul τ' descrie triunghiul V și când τ străbate latura A, devenind $\tau_1=-\overline{\tau}$ (τ fiind interior triunghiului 1), τ' străbate latura echivalentă și devine $\tau'=V_1(\tau)=V(-\overline{\tau})$. Triunghiul V_1, adiacent cu V prin latura echivalentă cu latura A, este dar transformatul lui 1 prin $V(-\overline{\tau})$, însă când τ descrie triunghiul 1, $-\overline{\tau}$ descrie triunghiul A. Așà dar triunghiul V_1 se obține transformând triunghiul 1 în A și aplicând lui A transformarea $V(\tau)$. Această substituțiune este așà dar egală cu produsul $AV(\tau)$ și triunghiul V_1 este reprezentat prin simbolul AV.

---

1) $\tau'=\left(\dfrac{\gamma-\delta\overline{\tau}}{\alpha-\beta\overline{\tau}}\right)_{\tau=\infty}=\dfrac{\delta}{\beta}$

2) Precum s'a văzut mai sus, triunghiul transformat al triunghiului (1) se reprezintă prin acelaș simbol prin care se efectuează transformarea.

Deasemenea, dacă punctul τ străbate latura B sau latura C a triunghiului 1, τ' va străbate latura respectiv echivalentă cu cea dintâi sau cu cea de a doua şi triunghiul în care V se transformă va fi reprezintat prin BV sau CV. Aşà dar dacă V reprezintă un triunghiu al reţelei lui $\overline{\Gamma}$, cele trei triunghiuri adiacente vor fi reprezintate prin AV, BV, CV. Din cele ce preced rezultă că se poate lesne determinà simbolul corespunzător fiecărui triunghiu al reţelei.

400. Ca aplicaţiune, să determinăm simboalele celor 12 triunghiuri cari compun patrulaterul D (T, T'). Pentru aceasta, să observăm că plecând dela triunghiul iniţial 1 şi făcând o rotaţiune, în sensul pozitiv, în jurul punctului $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, care este un vârf comun al celor şease triunghiuri cari compun triunghiul T', obţinem succesiv simboalele acestor triunghiuri; iar pentru a obţine simboalele triunghiurilor cari compun triunghiul T, simetric cu T' în raport cu axa imaginară, este de ajuns, a multiplicà pe cele dintâiu cu factorul A $(\tau' = -\overline{\tau})$. Obţinem tabloul

T'	τ'	T	τ'
1	τ	A	$-\overline{\tau}$
B	$-1-\overline{\tau}$	BA	$1+\tau$
CB	$-\frac{1+\tau}{\tau}$	CBA	$\frac{1+\overline{\tau}}{\overline{\tau}}$
BCB	$-\frac{\overline{\tau}}{1+\overline{\tau}}$	BCBA	$\frac{\tau}{1+\tau}$
CBCB	$-\frac{1}{1+\tau}$	CBCBA	$\frac{1}{1+\overline{\tau}}$
BCBCB = C	$\frac{1}{\overline{\tau}}$	CA	$-\frac{1}{\tau}$ [1])

[1]) Din $B = -1-\overline{\tau}$, $C = \frac{1}{\overline{\tau}}$ rezultă expresiunea lui CB:

$$\tau_1 = \frac{1}{\overline{\tau}}, \quad \tau' = -1-\overline{\tau}_1 = -1-\frac{1}{\tau} = -\frac{1+\tau}{\tau};$$

mai departe, BCB

$$\text{B)} \quad \tau_1 = -1-\overline{\tau}$$

$$\text{BCB)} \quad \tau' = -\frac{1+\tau_1}{\tau_1} = -\frac{\overline{\tau}}{1+\overline{\tau}}, \text{ etc.}$$

Din $B = -1-\overline{\tau}$, $A = -\overline{\tau}$ rezultă expresiunea lui BA:

$$\tau_1 = -1-\overline{\tau}, \quad \tau' = -\overline{\tau}_1 = 1+\tau, \text{ etc.}$$

Să mai observăm că din expresiunile lui B şi C, rezultă egalitatea BCB = CBC, de unde CBCB = BC, CBCBA = BCA.

Primele două coloane reprezintă triunghiurile lui T′ în ordinea rotaţiunei şi substituţiunile cari transformă respectiv triunghiul 1 în aceste triunghiuri. Coloana a treia conţine triunghiurile simetrice cu cele dintâi şi coloana a patra conţine substituţiunile cari transformă respectiv triunghiul 1 în triunghiurile coloanei a treia; ele se mai pot obţine făcând rotaţiunea triunghiului A în sensul negativ în jurul punctului $\tau=e^{\frac{i\pi}{3}}$, vàrful comun al celor 6 triunghiuri cari compun triunghiul T.

Substituţiunile deduse din substituţiunea identică $\tau'=\tau$ printr'un număr par de simetrii sunt de clasa I, cele deduse printr'un număr impar sunt de clasa II; ceeace este conform cu teorema (§ 376).

401. ***Reţeaua grupului** Γ (reţeaua modulară).* Din reţeaua grupului amplificat $\overline{\Gamma}$ se deducė reţeaua modulară a grupului Γ. Reunind triunghiul 1 cu triunghiul A formăm un dublu triunghiu $\varDelta$, limitat de cele două paralele cu axa imaginară, cari trec prin punctele $\tau=\pm\frac{1}{2}$, exterioare cercului $|\tau|=1$. Unghiurile acestui triunghiu sunt $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, 0. In acest triunghiu nu sunt două puncte echivalente relativ la grupul Γ, exceptând punctele simetrice în raport cu axa imaginară, situate pe conturul lui. Pentru a justificà această propoziţiune să observăm că două puncte echivalente în grupul Γ sunt *a fortiori* echivalente în grupul amplificat $\overline{\Gamma}$; prin urmare în nici una din jumătăţile acestui triunghiu nu pot fi două puncte echivalente în Γ. Pentru ca două puncte situate, unul în triunghiul 1 şi celălalt în triunghiul A să fie echivalente în Γ, trebuie să fie simetrice în raport cu axa imaginară (echivalente relativ la $\overline{\Gamma}$); prin urmare, ele nu pot fi echivalente în Γ, decât dacă sunt legate prin una din substituţiunile

$$\tau'=\tau\pm1,\ \tau'=-\frac{1}{\tau},$$

ale grupului Γ. In cazul celor d'intâi două, punctele sunt situate pe laturile paralele, în cazul din urmă, pe cercul $|\tau|=1$, simetrice în ambele cazuri în raport cu axa imaginară

Convenim a privì ca făcând parte din conturul dublului triunghiu $\varDelta$ latura din stânga axei imaginare şi arcul cercului situat de aceiaş parte, iar laturile respectiv simetrice, ca făcând parte din triunghiurile alăturate. Triunghiul $\varDelta$ constitue un *domeniu fundamental* al grupului Γ.

Reunind două câte două triunghiurile rețelei, cari au o latură comună, formăm o rețea de triunghiuri având unghiurile $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$. Aceste triunghiuri acoperă tot semiplanul pozitiv; ele formează *rețeaua modulară* a grupului Γ.

Prin analogie cu notațiunea rețelei lui $\overline{\Gamma}$, un triunghiu al rețelei Γ se notează prin simbolul care transformă triunghiul Δ în acel triunghiu. De unde rezultă, pentru triunghiurile alăturate de Δ, notațiunile S, S^{-1}, T și dacă V este o substituțiune care transformă triunghiul Δ în triunghiul V, cele trei triunghiuri alăturate se vor notà respectiv

$$SV, \quad S^{-1}V, \quad TV.$$

în care $S = AB, \quad S^{-1} = BA, \quad T = AC = CA.$

Corolar. Dacă $\tau = \xi + i\eta$ este un punct oarecare situat în triunghiul Δ, avem

$$-\frac{1}{2} \leqq \xi < \frac{1}{2}, \quad \eta \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De unde rezultă că putem înlocuì un sistem de perioade $2\omega_1$, $2\omega_3$ printr'un sistem echivalent, astfel ca coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau$ să fie $\geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Acestor perioade corespunde inegalitatea

$$|q| = |e^{i\pi\tau}| \leqq e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

care asigură convergența cea mai repede a seriilor $\vartheta(v, q)$ (§ 225).

402. FUNCȚIUNEA MODULARĂ J(τ).

402. *Se numește, într'un mod general, funcțiune modulară, o funcțiune analitică de o variabilă, care se reproduce dacă aplicăm variabilei o substituțiune oarecare a grupului modular Γ, sau a unui subgrup al lui Γ, și se schimbă pentru orice altă substituțiune lineară.*

Funcțiunea $\lambda(\tau)$ este cea dintâiu funcțiune modulară considerată, care a condus la funcțiuni analitice având *frontiere naturale*. Este evident că orice funcțiune rațională de λ este o funcțiune modulară, aparținând grupului lui λ, sau unui grup modular conținând pe cel dintâiu ca subgrup.

Să considerăm invariantul absolut

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}, \tag{1}$$

a cărui expresiune în funcţiune de λ este (11) (§ 100)

$$J = \frac{4}{27}\,\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}. \tag{2}$$

Membrul al doilea fiind o funcţiune raţională şi simetrică, de gradul 6, în raport cu cele şase valori ce λ (τ) primeşte prin toate substituţiunile lui Γ, se reproduce când aplicăm lui τ o substituţiune oarecare a grupului Γ şi *numai* pentru acestea; căci funcţiunea fiind de gradul 6 nu poate relua aceiaşi valoare decât pentru şase valori λ.

Funcţiunea J (τ) nu se poate dar reproduce decât în puncte echivalente; prin urmare în triunghiul **1**, precum şi pe contur ea nu poate primì aceiaşi valoare decât o singură dată. In acest triunghiu, λ fiind diferit de 1 şi tinzând către zero numai când τ tinde către infinit dealungul unei paralele la axa imaginară (Corolar, § 363) rezultă, în virtutea egalităţii (2), că funcţiunea J (τ) este olomorfă în triunghiul **1** şi tinde către infinit în acelaş timp cu τ.

§ 403 Să examinăm variaţiunea funcţiunii dealungul conturului triunghiului **1**. Dealungul axei imaginare, λ fiind real şi cuprins între 0 şi 1, rezultă că, pe această axă, funcţiunea J (τ) este reală şi prin urmare, în puncte simetrice în raport cu această axă, ea primeşte valori conjugate. De unde rezultă că pe paralelele la axa imaginară, duse prin punctele $\tau = \pm\frac{1}{2}$, J(τ) primeşte valori conjugate; însă punctele acestor paralele, simetrice în raport cu axa imaginară, sunt echivalente, în virtutea substituţiunilor $\tau' = \tau \pm 1$, prin urmare, în aceste puncte, valorile lui J (τ) sunt egale: ele nu pot fi dar decât reale.

Deasemenea, punctele cercului $|\tau| = 1$, cuprinse între punctele $\left(i, e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$ şi $\left(i, e^{\frac{i\pi}{3}}\right)$, simetrice în raport cu axa imaginară, fiind echivalente, în virtutea substituţiunii $\tau' = -\frac{1}{\tau}$, rezultă că J (τ) este real dealungul acestor arce. Funcţiunea J (τ) este aşà dar reală dealungul conturului triunghiului **1**.

Pentru a determinà variaţiunea acestei funcţiuni dealungul conturului, este de ajuns să cunoaştem valorile ei în vârfurile triunghiului: i, $i\,\infty$, ε; căci, punctele acestui contur nefiind echivalente, între două puncte ale conturului, funcţiunea variază necontenit în acelaş sens.

Referindu-ne la valoarea $\lambda\,(i\,\infty) = 0$ şi la valorile

$$\lambda\,(i) = \frac{1}{2}, \quad \lambda\,(\varepsilon) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

[formulele (1), (3)] (§ 389), deducem, din egalitatea (2) tabloul de valori cari se corespund:

$$(3)\qquad \begin{array}{c|ccc} \tau & i\infty & i & \varepsilon \\ \hline \mathrm{J} & \infty & 1 & 0 \end{array}.$$

De unde concluziunea: *dealungul laturii* $(i, i\infty)$, *funcţiunea* J *creşte necontenit dela* 1 *la* ∞ *şi dealungul arcului* (ε, i) *ea creşte necontenit dela* 0 *la* 1. Pe a doua latură rectilinie J este negativ, căci este real şi nu trece prin nici una din valorile ce primeşte pe celelalte două laturi. Aşà dar, când τ variază pe această laturi dela ε la $\varepsilon + i\infty$, J descreşte necontenit dela 0 la $-\infty$.

404. Din variaţiunea funcţiunii J (τ) dealungul triunghiului 1, rezultă că transformarea dintre acest triunghiu şi semiplanul pozitiv (J) este o *transformare conformă*. De asemenea, în virtutea simetriei, triunghiul A, simetric cu triunghiul 1 în raport cu axa imaginară, şi semiplanul negativ (J) se corespund punct cu punct şi transformarea dintre ele este o transformare conformă. Dublul triunghiului Δ, format din cele două triunghiuri considerate [domeniu fundamental al grupului Γ, (§ 401)] este un domeniu fundamental al funcţiunii J (τ) [1]. Aceleaşi concluziuni dacă înlocuim domeniul fundamental iniţial prin oricare altul. Axa reală (τ) este o *frontieră naturală* a funcţiunii J (τ) ca şi pentru funcţiunea $\lambda(\tau)$. Toate punctele acestei axe sunt puncte singulare ale funcţiunii.

405. Punctele $\tau = i$, $\tau = \varepsilon$ sunt puncte multiple ale funcţiunii J (τ). Cel dintâiu este punct dublu, fiind vârf comun a două triunghiuri ale reţelei lui Γ, cel de al doilea este punct triplu fiind vârf comun a trei triunghiuri. Punctele echivalente τ şi $\tau' = -\dfrac{1}{\tau}$ coincid în punctul $\tau = i$. In domeniul acestui punct, avem dar forma

$$(4)\qquad \mathrm{J}(\tau) - 1 = (\tau - 1)^2 \mathrm{P}(\tau - 1), \qquad \mathrm{P}(i) \neq 0.$$

Punctele

$$\tau, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau+1}, \quad \tau'' = -\frac{\tau+1}{\tau},$$

echivalente cu τ coincid în punctul $\tau = \varepsilon$. In domeniul acestui

[1]) Domeniu fundamental al grupului este o regiune conexă astfel că la orice punct al semiplanului pozitiv (τ) corespunde un punct echivalent în aceà regiune şi numai unul. Domeniu fundamental al funcţiunii este o regiune conexă în care funcţiunea primeşte orice valoare posibilă, fiecare o singură dată.

punct, avem forma

$$(5) \qquad J(\tau)=(\tau-\varepsilon)^3 P(\tau-\varepsilon), \quad P(\varepsilon)\neq 0.$$

Punctul ∞. Acest punct este echivalent cu orice punct real raţional, precum rezultă din expresiunea

$$\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)_{\tau=\infty}=\frac{\delta}{\beta},$$

care poate reprezintà orice număr raţional. Punctul ∞ este aşà dar punct singular esenţial. Când τ tinde către ∞ dealungul axei imaginare, J tinde către $+\infty$; iar dealungul ordonatelor $\xi=\mp\frac{1}{2}$, J tinde, precum am văzut mai sus, către $-\infty$.

406. Reprezintând prin λ una din rădăcinile ecuaţiunii (2), (§ 402): cele şase rădăcini sunt determinate de substituţiunile (2) (§ 388); ele corespund celor şase clase de substituţiuni ale grupului modular Γ şi formează un grup de şase substituţiuni lineare cari reproduc funcţiunea J, privită ca funcţiune de λ. Se poate descompune planul (λ) în şase regiuni astfel ca fiecare din ele şi planul (J) să se corespundă punct cu punct. Acest rezultat se poate obţine, de ex., determinând regiunile din planul (λ) corespunzătoare celor şase triunghiuri (τ) echivalente, relativ la grupul Γ, conţinute în patrulaterul D (domeniul fundamental al grupului Γ_6), căci fiecare din aceste triunghiuri şi planul (J) se corespund punct cu punct (§ 404). Se ajunge lesne la acest rezultat, dacă considerăm cele 12 triunghiuri cari compun patrulaterul D, echivalente, relativ la grupul amplificat $\overline{\Gamma}$, cari reunite două câte două formează cele şase triunghiuri menţionate ale grupului Γ. Acestor 12 triunghiuri (τ) ale căror laturi sunt porţiuni din liniile de simetrie

$$(1) \quad \xi=0, \quad 2\xi+1=0, \quad \xi^2+\eta^2+2\xi=0, \quad \xi^2+\eta^2-1=0$$

corespund, în planul (λ), 12 triunghiuri determinate de liniile de simetrie

$$(2) \quad y=0, \quad x^2+y^2-2x=0, \quad x^2+y^2-1=0, \quad 2x-1=0 \ (4)\ (\S\ 388).$$

Cele dintâi împart triunghiul T′ (jumătatea din stânga patrulaterului D) în şease triunghiuri echivalente relativ la grupul amplificat $\overline{\Gamma}$ (§ 400) şi cele din urmă împart, în acelaş număr de triunghiuri, *semiplanul negativ* (λ), care corespunde triunghiului T într'un mod conform (§ 364). Laturile triunghiurilor sunt porţiuni din liniile de simetrie considerate, cuprinse între punctele de intersecţiune ale acestor linii; unghiurile sub cari ele se taie sunt

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$$ [1].

Triunghiului I din planul (τ) (fig. 82), limitat de liniile

$$\xi=0, \quad \xi=-\frac{1}{2}, \quad \xi^2+\eta^2=1,$$

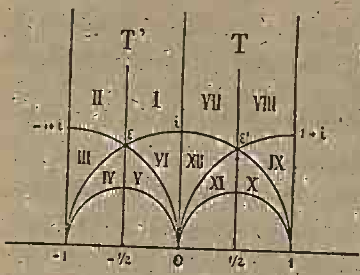

Fig. 82

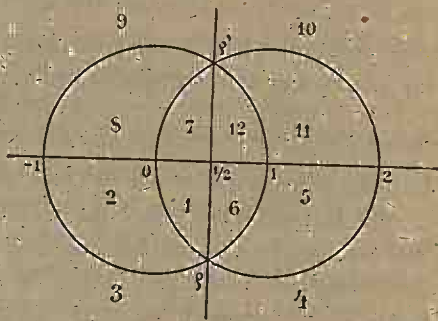

Fig. 83

corespunde, triunghiul limitat de liniile

$$y=0, \quad x^2+y^2-2x=0, \quad 2x=1 \text{ (fig. 83)}$$

Corespondenţa este biunivocă. Vârfurile acestui triunghiu sunt (§ 389).

$$\lambda(i\infty)=0, \quad \lambda(i)=\frac{1}{2}, \quad \varrho=\lambda(\varepsilon)=\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \quad \varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Triunghiului II simetric cu triunghiul I, în raport cu dreapta $\xi=-\frac{1}{2}$, corespunde triunghiul (2) simetric în raport cu latura $(0, \varrho)$, situată pe cercul $x^2+y^2-2x=0$; al treilea vârf este punctul $\lambda(-1+i)=-1$ (§ 389).

Triunghiului III simetric cu triunghiul II, în raport cu latura $(\varepsilon, -1+i)$, corespunde triunghiul simetric în raport cu latura $(\varrho, -1)$, situată pe cercul $x^2+y^2-1=0$; al treilea vârf este $\lambda(-1+it)_{t=\infty}=\infty$. Acest triunghiu se întinde la infinit, având laturile $(\varrho, -1)$, $(-1, -\infty)$, $(\varrho, -i\infty)$.

---

[1] Unghiurile triunghiurilor din reţeaua Γ sunt $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, o. Vârfurile, cărora corespund cele dintâi două, sunt puncte ordinare; acestor unghiuri corespund, în planul (λ), unghiuri respectiv egale. Al treilea vârf fiind punct singular esenţial al funcţiunii $\lambda(\tau)$, corespondenţa încetează de a fi conformă în domeniul acestui punct: unghiului o corespunde unghiul $\frac{\pi}{2}$.

Celorlalte trei triunghiuri IV, V, VI ale lui T′ corespund triunghiurile (4), (5), (6) respectiv simetrice cu triunghiurile (3), (2), (1), în raport cu dreapta $2x=1$.

Din cele ce preced, ţinând seamă de corespondenţa biunivocă dintre semiplanul pozitiv (J) şi fiecare din triunghiurile I, III, V, precum şi a semiplanului negativ cu triunghiurile II, IV, VI, rezultă aceiaş corespondenţă, dacă înlocuim triunghiurile (τ) cu triunghiurile corespunzătoare (λ).

Celor şease triunghiuri cuprinse în triunghiul T respectiv simetrice cu triunghiurile din T′, în raport cu axa imaginară, corespund, în semiplanul pozitiv (λ), şease triunghiuri simetrice, în raport cu axa reală, cu cele şease triunghiuri din semiplanul negativ.

Reunind două câte două triunghiurile (λ), simetrice în raport cu axa reală, obţinem planul (λ) descompus în şease regiuni continue, astfel că fiecare din ele şi planul (J) se corespund într'un mod conform. Fiecare din aceste regiuni cuprinde dar una şi numai una din rădăcinile ecuaţiunii (2) (§ 402). Dacă una din aceste rădăcini este dată, se deduce, în virtutea corespondenţii dintre τ şi λ [(2), (3), (§ 308)] regiunea în care se găseşte fiecare din celelalte rădăcini.

407. Funcţiunea J (τ) fiind reală pe liniile de simetrie ale grupului Γ şi numai pe acelea, rezultă, în virtutea corespondenţii biunivoce dintre aceste linii şi liniile de simetrie (λ), că funcţiunea $J(\lambda)$ este reală, în planul (λ), numai pe aceste linii. Vârfurile triunghiurlor

$$-1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \infty,\ \varrho,\ \varrho'$$

sunt puncte multiple ale funcţiunii $J(\lambda)$, anume: punctele -1, $\frac{1}{2}$, 2 sunt zeruri duble ale diferenţei $J-1$; punctele 0 şi ∞ sunt poluri duble; punctele ϱ, ϱ' sunt zeruri triple ale lui $J(\lambda)$. De unde rezultă expresiunea

$$J(\lambda)-1=A\,\frac{(\lambda+1)^2\,(2\lambda-1)^2\,(\lambda-2)^2}{\lambda^2\,(1-\lambda)^2}.$$

Coeficientul A se deduce comparând părţile principale ale lui $J(\lambda)$, în domeniul $\lambda=\infty$, în această egalitate şi în egalitatea (2) (§ 402). Se obţine $A=\frac{1}{27}$. Avem aşă dar egalitatea

$$J-1=\frac{1}{27}\,\frac{(\lambda+1)^2\,(2\lambda-1)^2\,(\lambda-2)^2}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

408. ***Funcţiunea inversă*** τ (J). Din proprietăţile funcţiunii $J(\tau)$ rezultă proprietăţile următoare ale funcţiunii inverse τ (J):

1°. Unui punct dat J corespunde lui τ o infinitate de valori echivalente, reprezintate prin substituţiunea modulară

$$(1) \qquad \tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau},$$

căci J nu se reproduce decât în puncte echivalente.

2°. Fie J_0 o valoare finită a lui J, diferită de 0 şi 1 şi fie τ_0 una din valorile corespunzătoare a lui τ; avem, în domeniul lui J_0, forma

$$(2) \qquad \tau - \tau_0 = P(J - J_0),$$

în care $P(J_0) \neq 0$, în virtutea corespondenţei biunivoce dintre domeniile corespunzătoare (τ_0) şi (J_0).

3°. Dacă $J_0 = 1$, τ_0 este un vârf echivalent cu punctul $\tau = i$; avem

$$(3) \qquad \tau - \tau_0 = (J-1)^{\frac{1}{2}} P(J-1), \quad P(1) \neq 0,$$

căci vârfurile echivalente cu $\tau = i$ sunt puncte duble.

4°. Dacă $J_0 = 0$, τ_0 este un vârf echivalent cu punctul

$$\tau = \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

avem expresiunea

$$(4) \qquad \tau - \tau_0 = J^{\frac{1}{3}} P(J), \quad P(0) \neq 0,$$

punctele echivalente sunt puncte triple.

409. Să facem în planul (J), dealungul axei reale, tăietura $(1, -\infty)$. Planul astfel limitat este o suprafaţă simplu conexă în care funcţiunea τ (J), dedusă din egalitatea (2) prin prelungire analitică, nu are nici un punct singular, afară de punctul $J = \infty$. Această funcţiune este aşà dar o ramură de funcţiune analitică olomorfă în tot planul (J) limitat de această tăietură.

Considerând triunghiul iniţial al grupului Γ, recunoaştem că laturile acestui triunghiu, situate la stânga axei imaginare, corespund ţărmului superior al tăieturii şi laturile din dreapta corespund ţărmului inferior. Căci, unei rotaţiuni de 180° în jurul punctului $J = 1$, făcută în sensul pozitiv sau negativ, corespunde, în jurul punctului $\tau = i$, în virtutea egalităţii (3), o rotaţiune de 90°, în acelaş sens. Unei rotaţiuni de 180°, în jurul punctului $J = 0$, corespunde în virtutea egalităţii (4), în jurul punctului $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, o rotaţiune de 60°, amândouă rotaţiunile fiind în acelaş sens. Această corespondență se aplică laturilor triunghiurilor echivalente cu cele ale triunghiului inițial. Punctul J rămâne în acelaş triunghiu al rețelei Γ, pe cât timp τ nu străbate tăietura şi trece dintr'un triunghiu într'un triunghiu vecin, în cazul contrar.

Funcțiunea $\tau(\mathrm{J})$ este aşà dar o funcțiune analitică multiformă cu o infinitate de ramuri, cari se deduc dintr'una din ele prin prelungire analitică, când punctul J străbate tăietura, într'un sens sau altul, un număr oarecare de ori. Fiecărei ramure corespunde un triunghiu determinat în rețeaua grupului Γ.

CAPITOLUL XXVIII.

TEOREMELE D-LUI PICARD.

410. *Teorema I. O funcțiune întreagă transcendentă primeşte orice valoare finită dată, exceptând poate una singură.*

Să presupunem că există două valori finite a, b pe cari funcțiunea întreagă $f(x)$ nu le poate primì. Putem dispune ca aceste constante să fie 0 şi 1, aplicând transformarea

$$\mathrm{F}(x)=\frac{f(x)-a}{b-a}.$$

Vom presupune dar că funcțiunea $f(x)$ nu poate devenì egală nici cu 0, nici cu 1. Să introducem funcțiunea modulară $\mathrm{J}(\tau)$, punând

$$\mathrm{J}(\tau)=f(x) \tag{1}$$

şi să studiăm funcțiunea de x, definită de ecuațiunea

$$\varphi(x)=\tau(f(x)). \tag{2}$$

Pentru a fixà într'un mod complect această funcțiune, să ne închipuim că printre valorile în număr nelimitat ale lui τ, corespunzătoare unei valori x_0 a lui x, alegem una din ele; fie τ_0 acea valoare. Cu modul acesta, fixăm o ramură a funcțiunii $\tau(f(x))$, olomorfă în domeniul oricărui punct x în care $f(x)$ este diferit de 0 şi 1 (§ 409). Prin ipoteză, funcțiunea $f(x)$ împlineşte aceste condițiuni în tot planul (x), fără excepțiune; funcțiunea $\tau(f(x))$ este aşàdar o funcțiune întreagă de x. De altă parte, din proprietățile funcțiunii $\tau(\mathrm{J})$, rezultă că punând

$$x=u+iv, \quad \varphi(x)=\mathrm{X}(u, v)+i\,\mathrm{Y}(u, v)$$

u şi v fiind variabile reale, Y păstrează un semn invariabil în tot planul (x). Presupunând $Y > 0$, avem

$$\left|e^{i\varphi(x)}\right| = e^{-Y} < 1,$$

oricare ar fi valoarea lui x; ceeace nu este posibil decât dacă funcţiunea $\varphi(x)$ este constantă. La acelaş rezultat ajungem, dacă $Y < 0$; căci, în acest caz avem

$$\left|e^{-i\varphi(x)}\right| = e^{Y} < 1.$$

In ambele cazuri dar, $\varphi(x)$ fiind constantă, rezultă

$$f(x) = \text{constantă}. \qquad \text{q. e. d.}$$

411. *Teorema II. O funcţiune uniformă având un număr oarecare de poluri şi un singur punct singular esenţial $x=\infty$, primeşte orice valoare finită sau infinită, exceptând cel mult două valori finite.*

Să presupunem că funcţiunea meromorfă $f(x)$, cu unicul punct singular esenţial $x=\infty$, nu devine egală cu nici una din cantităţile finite şi distincte a, b, c; funcţiunea

$$F(x) = \frac{1}{f(x)-a}$$

are acelaş punct singular esenţial $x=\infty$ şi nu are poluri. $F(x)$ este aşà dar o funcţiune întreagă care nu primeşte valorile distincte

$$\frac{1}{b-a}, \quad \frac{1}{c-a}$$

şi prin urmare, în virtutea teoremei precedente, se reduce la o constantă. De unde aceiaş concluziune pentru $f(x)$.

Observare. Cele două teoreme precedente pot intrà una într'alta, prin enunţul următor: O funcţiune uniformă având punctul ∞ ca unicul punct singular esenţial, primeşte orice valoare, exceptând cel mult două valori, dintre cari una poate fi infinită. Dacă funcţiunea este întreagă, una din valorile pe care ea nu o poate primì fiind ∞, rămâne cel mult o valoare finită *excepţională*. Funcţiunea e^x nu devine infinită, nici nulă. Funcţiunea $\sin x$ nu devine infinită. Funcţiunea tgx nu primeşte valorile $\pm i$.

412. *Teorema III. (Teorema generală). O funcţiune uniformă $f(x)$, care admite un punct singular esenţial izolat x_0, primeşte, în domeniul acestui punct, o infinitate de ori, orice valoare, exceptând cel mult două valori, printre cari una poate fi ∞* [1].

Să presupunem că $f(x)$ nu primeşte, în domeniul lui x_0, trei valori distincte a, b, c. Putem dispune ca aceste valori să fie 0, 1,

[1]) E. Picard. *Traité d'Analyse, t. III, deuxième édition, p. 365.*

∞. Dacă, de ex., $c=\infty$, funcţiunea

$$F(x)=\frac{f(x)-a}{b-a}$$

nu primeşte valorile 0, 1, ∞. Dacă cele trei valori sunt finite, funcţiunea

$$F(x)=\frac{c-a}{c-b}\,\frac{f(x)-b}{f(x)-a}$$

admite aceleaşi valori excepţionale. In ambele cazuri, funcţiunea transformată $F(x)$ are acelaş punct singular esenţial x_0.

Vom presupune dar că funcţiunea uniformă $f(x)$ are un punct singular esenţial izolat a şi că nu primeşte într'un cerc cu centrul în punctul a, nici una din valorile 0, 1, ∞.

Să introducem, ca şi în (§ 410), funcţiunea modulară $J(\tau)$ şi să punem

$$J(\tau)=f(x). \tag{1}$$

Funcţiunea inversă $\tau=F(J)$ devine o funcţiune de x

$$\tau=F(J)=F(f(x))=\varphi(x); \tag{2}$$

pe care o vom studià în domeniul punctului a.

Când x descrie o curbă închisă în jurul lui a, fără a ieşì din domeniul acestui punct, $f(x)$ se reproduce; prin urmare şi funcţiunea $J(\tau)$. De unde rezultă (§ 408) că funcţiunea $\tau=\varphi(x)$ sau se reproduce, sau se schimbă într'una din substituţiunile modulare

$$\tau'=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}, \tag{3}$$

care poate fi *iperbolică*, *eliptică* sau *parabolică*. Vom examinà, în fiecare din aceste cazuri, forma analitică a funcţiunii (2).

1°. *Substituţiunea iperbolică*: $(\alpha+\delta)^2>4$.

Substituţiunea (3) are două puncte fixe reale p, q şi se poate pune sub forma

$$\frac{\tau'-p}{\tau'-q}=\mu\,\frac{\tau-p}{\tau-q}, \tag{4}$$

coeficientul μ fiind real, pozitiv şi diferit de 1 [1]). Raportul

$$\frac{\tau-p}{\tau-q}=\frac{\varphi(x)-p}{\varphi(x)-q}$$

reproducându-se multiplicat cu factorul μ, când x se învârteşte

[1]) I, p. 401.

în jurul lui a, se poate reprezintà prin expresiunea analitică

$$(5)\qquad \frac{\tau-p}{\tau-q}=(x-a)^{\lambda}\,\psi(x), \qquad e^{2i\pi\lambda}=\mu$$

$\psi(x)$ fiind funcţiune uniformă în domeniul (a). Această funcţiune nu are în domeniul considerat nici pol, nici nu se anulează; căci, dacă s'ar anulà, sau dacă ar aveà un pol, ar urmà ca, în aceste puncte, să avem respectiv $\tau = p$, $\tau = q$. Aceste egalităţi însă sunt imposibile; căci funcţiunea $f(x) = J(\tau)$ fiind, prin ipoteză, diferită de 0, 1, ∞, partea reală a lui $\frac{\tau}{i}$ este pozitivă. Funcţiunea $\psi(x)$ este aşà dar olomorfă într'o coroană cuprinsă între două cercuri concentrice cu centrul în a, raza cercului interior fiind oricât de mică voim, şi nu se anulează în această coroană. In virtutea acestei proprietăţi, ea se poate pune sub forma [1])

$$(6)\qquad \psi(x)=e^{Q(x)},$$

$Q(x)$ fiind o funcţiune uniformă în domeniul (a) neavând, în acest domeniu, alt punct singular posibil decât punctul a. Putem dar scrie

$$(7)\qquad \frac{\tau-p}{\tau-q}=e^{\lambda\log(x-a)+Q(x)}=e^{U+iV},$$

U şi V fiind funcţiuni reale de ξ, η, $(x = \xi + i\eta)$. Coeficientul lui i în membrul întâiu având un semn invariabil, urmează ca V să fie cuprins între doi multipli consecutivi ai lui π, prin urmare între două limite finite. Punând în egalitatea precedentă

$$(8)\qquad 2i\pi\lambda=\mu=k,$$

logaritmul având valoarea sa aritmetică, rezultă egalitatea

$$e^{\log(x-a)+\frac{2i\pi}{k}Q(x)}=e^{-\frac{2\pi}{k}V+\frac{2i\pi}{k}U},$$

sau

$$(9)\qquad (x-a)\,e^{\frac{2i\pi}{k}Q(x)}=e^{-\frac{2\pi}{k}V}\cdot e^{\frac{2i\pi}{k}U}.$$

Această egalitate este imposibilă, căci membrul întâi tinde către zero când x tinde către a într'un mod oarecare, pe când valoarea absolută $e^{-\frac{2\pi}{k}V}$ a membrului al doilea este cuprinsă între două limite determinate diferite de zero. De unde rezultă că substituţiunea (3) *nu poate fi iperbolică.*

2º. *Substituţiunea eliptică:* $(\alpha+\delta)^2 < 4$.

[1]) I, p. 353.

Punctul fix al substituţiunii (3), situat în semiplanul pozitiv, este echivalent cu unul din punctele multiple $\tau=i$, $\tau=\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ale funcţiunii J (τ) (§ 405). Printr'o substituţiune modulară convenabilă putem face ca acel punct fix să coincidă respectiv cu $\tau=i$ sau cu $\tau=\varepsilon$.

In domeniul lui $\tau=i$, avem (§ 408)

$$\tau-i=(J-1)^{\frac{1}{2}}P(J-1), \quad P(o)\neq 0;$$

prin urmare

$$(10) \qquad \tau-i=[f(x)-1]^{\frac{1}{2}}P[f(x)-1].$$

Funcţiunea $f(x)$ fiind uniformă în domeniul (a), putem scrie

$$(11) \qquad [f(x)-1]^{\frac{1}{2}}P[f(x)-1]=(x-a^{\frac{1}{2}})\psi(x),$$

$\psi(x)$ fiind funcţiune uniformă. Această egalitate este imposibilă, căci nici unul din factorii membrului întâi nu se anulează în domeniul (a) ~ primul factor, în virtutea ipotezei $f(x)\neq 1$, cel de al doilea, în virtutea inegalităţii P $(0)\neq 0$ ~ pe când membrul al doilea tinde către zero, când x se apropie de a, într'un mod oarecare.

In domeniul $\tau=\varepsilon$, avem (§ 408)

$$(12) \qquad \tau-\varepsilon=J^{\frac{1}{3}}P(J), \quad P(0)\neq 0;$$

prin urmare

$$(13) \qquad \tau-\varepsilon=[f(x)]^{\frac{1}{3}}P[f(x)]=(x-a)^{\frac{1}{3}}\psi(x),$$

$\psi(x)$ funcţiune uniformă în domeniul (a). Pentru un motiv analog cu cel din cazul $\tau=i$, egalitatea (13) este imposibilă. Conchidem că substituţiunea (3) *nu poate fi eliptică*.

3°. *Substituţiunea parabolică*: $(\alpha+\delta)^2=4$.

Aplicând lui τ o substituţiune modulară convenabilă, putem aduce substituţiunea dată la forma

$$(14) \qquad \tau'=\tau+1.$$

Pentru ca funcţiunea

$$\tau=F(J)=F[f(x)]=\varphi(x)$$

să se schimbe în $\tau+1$ când x descrie un cerc în jurul lui a, fără a ieşi din domeniul acestui punct, este necesar ca $\varphi(x)$ să fie de forma

$$(15) \qquad \tau(x)=\varphi(x)=\frac{1}{2i\pi}\log(x-a)+\psi(x),$$

$\psi(x)$ funcţiune uniformă în domeniul (a); de unde

$$(16) \qquad e^{2i\pi\tau(x)}=(x-a)\,e^{2i\pi\psi(x)}$$

Această egalitate arată că $\psi(x)$ este funcţiune olomorfă în domeniul (a); căci un punct singular al lui $\psi(x)$ este punct singular esenţial pentru funcţiunea exponenţială, prin urmare valoarea absolută a membrului al doilea ar puteà deveni oricât de mare voim, pe când valoarea absolută a membrului întâi este mai mică decât 1.

Fie $x - a = r e^{i\theta}$; de unde

$$\frac{1}{2i\pi} \log(x-a) = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{i}{2\pi} \log \frac{1}{r}.$$

Ducând această expresiune în egalitatea (15), avem

$$(17) \qquad \tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{i}{2\pi} \log \frac{1}{r} + \psi(x).$$

Coeficientul lui i din membrul al doilea tinzând către $+\infty$, când r tinde către zero, iar funcţiunea $\psi(x)$ rămânând finită în vecinătatea punctului a, rezultă că partea reală a lui $\frac{\tau}{i}$ tinde către $+\infty$ când x se apropie de a într'un mod oarecare. In acest caz, J tinde către infinit; prin urmare $f(x)$ tinde către infinit când x se apropie de a, într'un mod oarecare. Punctul *a ar fi dar un pol al funcţiunii $f(x)$ şi nu punct singular-esenţial*; ceeace este contra ipotezei.

4⁰. *Substituţiunea identică*: $\tau' = \tau$.

In acest caz, funcţiunea

$$(17) \qquad \tau(x) = \mathrm{F}(\mathrm{J}) = \mathrm{F}[f(x)] = \varphi(x)$$

este uniformă în domeniul (a); ea este olomorfă. In adevăr, dacă a ar fi punct singular esenţial, $\varphi(x)$ s'ar puteà apropià, în acest domeniu, de orice valoare voim, ceeace este incompatibil cu membrul întâiu în care coeficientul lui i este pozitiv. Dacă a ar fi pol de un ordin n

$$\varphi(x) = (x-a)^{-n} \mathrm{P}(x-a),$$

coeficientul lui i nu ar păstrà un semn invariabil când x fiind destul de aproape de a se învârteşte în jurul acestui punct: aceiaş incompatibilitate. Aşà dar funcţiunea $\varphi(x)$ tinde către o valoare finită $\varphi(a)$, având coeficientul lui i pozitiv. Acestei valori corespunde, pentru funcţiunea

$$\mathrm{J}(\tau) = f(x),$$

o valoare determinată, oricare ar fi drumul urmat de x, când se apropie de a. *Punctul $x = a$ ar fi dar punct ordinar al funcţiunii* $f(x)$; ceeace este contra ipotezei.

Din toate incompatibilitățile constatate mai sus, rezultă că, dacă a este un punct singular esențial izolat al funcțiunii $f(x)$, este imposibil ca această funcțiune să nu primească, în domeniul (a), cel puțin una din valorile $0, 1, \infty$. In mod general, este imposibil ca, în acest domeniu, ea să nu poată devenì, o *infinitate de ori* egală cu o constantă oarecare C, exceptând cel mult două valori ale constantei. Căci, dacă rădăcinile ecuațiunii $f(x) = C$ ar fi în număr limitat, ar existà un număr $r > 0$, astfel ca, în domeniul $|x - a| < r$, $f(x)$ să nu poată primì valoarea C, diferită de una din valorile excepționale posibile. Punctul a n'ar fi punct singular esențial.

q. e. d.

413. *Exemple.* 1°. Ecuațiunea

$$e^{\frac{1}{x}} - a = 0$$

are, în domeniul punctului $x = 0$, o infinitate de rădăcini pentru orice valoare a lui a, exceptând $a = o$, $a = \infty$. Aceste rădăcini sunt date de egalitatea

$$x = \frac{1}{\log a + 2 n i \pi},$$

în care n primește valori întregi pozitive și negative arbitrar de mari, $\log a$ fiind *una* din valorile logaritmului lui a.

Valorile excepționale $a = 0$, $a = \infty$ sunt *valori limite* către cari tinde funcțiunea când x, fiind pe axa reală, se apropie de zero respectiv din partea pozitivă sau negativă.

2°. Ecuațiunea

$$tg \frac{1}{x} = i \frac{1 - e^{\frac{2i}{x}}}{1 + e^{\frac{2i}{x}}} = a$$

are, în domeniul aceluiaș punct $x = 0$, o infinitate de rădăcini, pentru orice valoare a, exceptând valorile $a = \pm i$. Aceste valori sunt valori limite ale funcțiunii când x, fiind pe axa imaginară, se apropie de zero respectiv pe semiaxa negativă sau pozitivă.

NOTA I.

DESPRE FUNCŢIUNILE UNIFORME CARI ADMIT O TEOREMĂ DE ADIŢIUNE ALGEBRICĂ.

Funcţiunile uniforme de o variabilă u despre cari ştim că posedă o teoremă de adiţiune algebrică sunt: funcţiunile raţionale de u; funcţiunile raţionale de exponenţiala e^{au}, a fiind o constantă oarecare; funcţiunile eliptice.

Acestea sunt singurile funcţiuni uniforme de o variabilă cari posedă o teoremă de adiţiune algebrică. Această teoremă, datorită lui Weierstrass, este cuprinsă într'o teoremă mai generală, în care se consideră funcţiuni analitice multiforme [1]).

Fie $f(u)$ o funcţiune analitică uniformă satisfăcând o ecuaţiune algebrică

$$(1) \qquad F\left[f(u),\ f(v),\ f(u+v)\right]=o,$$

oricare ar fi valorile argumentelor u şi v. *In virtutea acestei ecuaţiuni, funcţiunea $f(u)$ nu poate admite punct singular esenţial la distanţă finită.* In adevăr, să presupunem că $f(u)$ are, la distanţă finită, un punct singular esenţial a, izolat sau limită a unui număr infinit de puncte singulare esenţiale. Funcţiunea $f(u)$ s'ar apropià în domeniul acestui punct, oricât de mult voim, de o infinitate de valori date; valorile corespunzătoare ale funcţiunii $f(u+v)$, *privită ca rădăcină a ecuaţiunii* (1), ar diferì dar, în vecinătatea lui $u=a$, oricât de puţin voim (în virtutea continuităţii rădăcinilor unei ecuaţiuni algebrice în funcţiune de coeficienţii ecuaţiunii) de o infinitate de valori date, oricare ar fi valoarea lui v. Sau, ceeace este tot una, funcţiunea analitică uniformă $f(u)$ ar primi, în domeniul punctului $u=a+v$, valori diferind, oricât de puţin voim, de o infinitate de valori date, oricare ar fi poziţiunea punctului v în plan, adică în tot planul. Ceeace este absurd. Aşà dar, funcţiunea

---

[1]) Phragmen. *Acta Mathematica*, t. VII, p. 35. Bianchi. *Lezioni sulla Teoria delle Funzioni di variabile complessa*, p. 292.

$f(u)$ nu poate admite alt punct singular esenţial, dacă admite unul, decât punctul $u = \infty$.

Să trecem acum la demonstrarea teoremei.

1°. Dacă $u = \infty$ nu este punct singular esenţial, funcţiunea $f(u)$, neavând în tot planul, inclusiv punctul ∞, nici un punct singular esenţial, este o funcţiune raţională.

2°. Să presupunem că punctul $u = \infty$ este singular esenţial. Vom demonstrà că $f(u)$ este funcţiune periodică.

In adevăr, în virtutea teoremei generale a d-lui Picard, funcţiunea $f(u)$ primeşte, în domeniul punctului singular esenţial $u = \infty$, o infinitate de ori, aceeaş valoare oarecare, exceptând cel mult două valori. Există dar în planul (u) o infinitate de puncte în cari $f(u)$ primeşte aceeaş valoare. Fie m gradul ecuaţiunii (1) în raport cu $f(u+v)$ şi

$$(2) \qquad v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$$

$m+1$ puncte în care $f(u)$ reia aceeaş valoare pe care o reprezintăm prin a. Ecuaţiunea (1) în care înlocuim v prin valorile (2) şi punem $x = f(u+v)$, adică ecuaţiunea

$$(3) \qquad F[f(u), a, x] = o$$

va admite dar, pentru x, rădăcinile

$$(4) \qquad x = f(u+v_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, m+1),$$

oricare ar fi valoarea lui u; prin urmare două cel puţin din aceste rădăcini sunt egale, *oricare ar fi punctul* u. Fie

$$f(u+v_1) = f(u+v_2);$$

de unde punând $v_1 - v_2 = 2\omega$, avem egalitatea

$$(5) \qquad f(u+2\omega) = f(u),$$

oricare ar fi punctul u. *Funcţiunea* $f(u)$ *este aşà dar periodică, având perioada* 2ω.

Presupunând că 2ω este o perioadă primitivă a funcţiunii $f(u)$ — în cazul contrar înlocuim perioada 2ω prin cel mai mic submultiplu al său —, să punem

$$(6) \qquad x = e^{\frac{i\pi u}{\omega}}$$

şi fie

$$(7) \qquad f(u) = \varphi(x).$$

Funcţiunea $\varphi(x)$ este o funcţiune analitică uniformă în tot planul (x), care nu poate aveà alte singularităţi esenţiale decât punctele cari corespund lui $u = \infty$, adică, în virtutea substituţiunii (6),

$x = o$ şi $x = \infty$. Dacă aceste puncte nu sunt puncte singulare esenţiale, funcţiunea $\varphi(x)$ este raţională şi prin urmare

$$(8) \qquad f(x) = f^{ne} \text{ raţ. } (e^{\frac{i\pi u}{\omega}}).$$

3°. Să presupunem că punctele $x = o$ şi $x = \infty$ sunt puncte singulare esenţiale ale funcţiunii $\varphi(x)$ şi fie

$$(9) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$$

$m + 1$ puncte distincte în cari $\varphi(x)$ reia aceeaş valoare. Acestor puncte corespund, în virtutea substituţiunii (6), $m + 1$ puncte

$$(10) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_{m+1}$$

incongruente în raport cu 2ω, în cari funcţiunea $f(u)$ reia aceeaş valoare. De unde se conchide, ca şi în cazul 2°, că printre punctele (10) există cel puţin două a căror diferenţă este o perioadă $2\omega'$. Această perioadă este, în virtutea incongruenţii (mod. 2ω) a punctelor (10), diferită de un multiplu al lui 2ω şi prin urmare, 2ω fiind o perioadă primitivă, raportul său către 2ω este imaginar (§ 116). Funcţiunea $f(u)$ având două perioade distincte şi neavând punct singular esenţial la distanţă finită, este o funcţiune eliptică de u.

q. e. d.

NOTA II.

DESPRE TRANSFORMAREA FUNCŢIUNII MODULARE J(τ) PRINTR'O SUBSTITUŢIUNE DE UN GRAD > 1.

Să presupunem că, în loc de o transformare de gradul întâiu, aplicăm perioadelor $(2\,\omega_1, 2\,\omega_3)$ o transformare de gradul n, ceeace revine a aplica raportului $\tau = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ o transformare de forma

$$(1) \qquad t = \frac{c+d\tau}{a+b\tau},$$

a, b, c, d fiind numere întregi al căror determinant

$$(2) \qquad ad - bc = n > 1.$$

Se pune întrebarea: ce relaţiune poate exista între funcţiunile $J(t)$ şi $J(\tau)$?

Pentru a răspunde la această întrebare, să examinăm de câte valori este susceptibilă funcţiunea $J(t)$, când aplicăm lui τ o substituţiune modulară

$$(3) \qquad \tau' = \frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

adică o substituţiune prin care $J(\tau)$ se reproduce.

Fie

$$(4) \qquad t' = \frac{c' + d'\tau}{a' + b'\tau}, \qquad a'd' - b'c' = n$$

o transformare de acelaş ordin ca transformarea (1).

Pentru a avea egalitatea

$$J(t') = J(t)$$

este necesar şi suficient ca punctele t şi t' să fie echivalente relativ la grupul Γ, adică să avem

$$(5) \qquad t' = \frac{\gamma + \delta t}{\alpha + \beta t}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Putem presupune transformarea perioadelor adusă la forma normală (9) (§ 308)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & o \\ \varrho & \frac{n}{\sigma} \end{pmatrix}$$

şi să ne mărginim la cazul când n este un număr prim (§ 311).

Să considerăm dar funcţiunea

$$(6) \qquad J' = J\left(\frac{\varrho + \frac{n}{\sigma}\tau}{\sigma}\right),$$

ϱ fiind un număr întreg oarecare. Această funcţiune se reproduce dacă mărim ϱ cu un multiplu pozitiv sau negativ al lui σ; este dar de ajuns a da lui ϱ valorile $o, 1, \ldots, \sigma - 1$.

Numărul n fiind prim, valorile lui σ pot fi 1 şi n. Lui $\sigma = 1$ corespunde valoarea unică $J(n\tau)$.

Lui $\sigma = n$ corespund valorile $J\left(\frac{\varrho + \tau}{n}\right)$, $\varrho = o, 1, \ldots, n - 1$.

Unei valori $J(\tau)$ corespund dar $n + 1$ valori pentru $J(t)$:

$$(7) \qquad J\left(n\tau\right), J\left(\frac{\tau}{n}\right), J\left(\frac{\tau + 1}{n}\right), \ldots, J\left(\frac{\tau + n - 1}{n}\right).$$

Aceste valori sunt în genere distincte. In adevăr, pentru ca egalitatea

$$J\left(n\tau\right) = J\left(\frac{\tau + \varrho}{n}\right), \qquad o \leq \varrho < n$$

să fie posibilă trebuie ca punctele $n\tau$ şi $\frac{\tau + \varrho}{n}$ să fie echivalente, adică să avem

$$(8) \qquad \frac{\tau+\varrho}{n}=\frac{\gamma+\delta(n\tau)}{\alpha+\beta(n\tau)}.$$

Pentru ca această egalitate să poată exista este necesar ca β să fie nul, prin urmare $\alpha=\delta=1$; aşà dar

$$\frac{\tau+\varrho}{n}=\gamma+n\tau,$$

egalitate imposibilă pentru $n>1$. In acelaş mod se recunoaşte imposibilitatea egalităţii

$$J\left(\frac{\tau+\varrho}{n}\right)=J\left(\frac{\tau+\varrho'}{n}\right), \quad \varrho\neq\varrho' \text{ (mod. } n).$$

Cele $n+1$ valori (7) se reproduc, în totalitatea lor, dacă aplicăm lui τ o substituţiune modulară oarecare.

Să aplicăm substituţiunile generatoare S şi T.

Substituţiunea S) $\tau'=\tau+1$ reproduce funcţiunea $J(n\tau)$ şi permută pe cele n următoare.

Substituţiunea T) $\tau'=-\dfrac{1}{\tau}$ dă transformările

$$J(n\tau)=J\left(-\frac{n}{\tau}\right)=J\left(\frac{\tau}{n}\right),$$

$$J\left(\frac{\tau}{n}\right)=J\left(-\frac{1}{n\tau}\right)=J(n\tau).$$

Această substituţiune permută dar între ele valorile $J(n\tau)$, $J\left(\dfrac{\tau}{n}\right)$. Aplicând lui $J(n\tau)$ substituţiunea T, urmată de o putere S^k a substituţiunei S, obţinem valoarea $J\left(\dfrac{\tau+k}{n}\right)$. O substituţiune modulară oarecare fiind un produs al substituţiunilor S şi T (§ 392), propoziţiunea enunţată mai sus este justificată.

Din cele ce preced rezultă că funcţiunea $J'(\tau)=J\left(\dfrac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$, *transformata lui $J(\tau)$, printr'o substituţiune de gradul n, n fiind un număr prim, are $n+1$ valori diferite corespunzătoare unei valori* $J(\tau)$. Aceste valori nu pot decât să se permute între ele când J descrie o curbă închisă în planul său; căci unui drum închis descris de J corespunde o substituţiune modulară pentru τ şi prin urmare o permutare între valorile (7). Funcţiunea $J(\tau)$ fiind uniformă în semiplanul pozitiv (τ) şi nedevenind infinită decât în punctul $\tau=\infty$ şi în punctele echivalente, cari corespund valorilor reale raţionale ale lui τ (§ 405), aceleaşi proprietăţi aparţin funcţiunii $J'(\tau)$.

Din cele ce preced rezultă că J', privit ca funcţiune de J, este o funcţiune analitică multiformă cu un număr limitat de ramuri, care nu devine infinită decât în punctul $J = \infty$. De unde se conchide că J' satisface o ecuaţiune algebrică de forma

$$J'^{n+1} + A_1 J'^{n} + \ldots + A_n = o, \tag{9}$$

ai cărei coeficienţi sunt funcţiuni raţionale şi întregi de J (§ 31, 32). Această ecuaţiune se numeşte *ecuaţiunea modulară* a funcţiunii $J(\tau)$. Nu ne ocupăm aci de formarea acestei ecuaţiuni [1]).

NOTA III.

MULTIPLICAŢIUNEA COMPLEXĂ.

Dacă m este un număr întreg, avem

$$p(m u \mid \omega_1, \omega_3) = R[p(u \mid \omega_1, \omega_3)], \tag{1}$$

membrul al doilea fiind o funcţiune raţională de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$, oricari ar fi perioadele primitive $2\omega_1$, $2\omega_3$. Se pune întrebarea dacă există o asemenea relaţiune când multiplicatorul m nu este întreg.

Relaţiunea (1) se poate scrie

$$\frac{1}{m^2} p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{m}, \frac{\omega_3}{m}\right) = R\left(p(u \mid \omega_1, \omega_3)\right). \tag{2}$$

Pentru ca $p\left(u \mid \frac{\omega_1}{m}, \frac{\omega_3}{m}\right)$ să fie funcţiune raţională de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ este, conform teoriei transformării raţionale (§ 305), necesar şi suficient ca între perioadele acestor două funcţiuni să avem egalităţile

$$\omega_1 = \alpha \frac{\omega_1}{m} + \beta \frac{\omega_3}{m}, \quad \omega_3 = \gamma \frac{\omega_1}{m} + \delta \frac{\omega_3}{m},$$

sau

$$m\omega_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \quad m\omega_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3, \tag{3}$$

α, β, γ, δ fiind numere întregi, al căror determinant $n = \alpha\delta - \beta\gamma$

---

[1]) Se poate vedea L. Bianchi. *Lezioni sulla Teoria delle Fuzioni di variabile complessa e delle Funzioni ellitiche*, p. 440.

reprezintă gradul transformării, adică gradul funcţiunii raţionale este n. Ne putem mărginì la cazul când n este un număr prim (§ 311).

Două cazuri sunt de considerat:

I. Ecuaţiunile (3) sunt satisfăcute oricari ar fi ω_1, ω_3; de unde

$$a = \delta = m, \quad \beta = \gamma = o.$$

Multiplicatorul m este un număr întreg; ceeace este cazul multiplicaţiunii ordinare.

II. Ecuaţiunile (3) nu sunt identităţi. Punând $\omega_3 = \omega_1 \tau$, avem ecuaţiunile

$$(4) \qquad m = a + \beta \tau, \quad m \tau = \gamma + \delta \tau.$$

Eliminând m între aceste ecuaţiuni, obţinem

$$(5) \qquad \beta \tau^2 + (a - \delta) \tau - \gamma = 0.$$

Raportul τ al perioadelor fiind imaginar, trebuie să avem inegalitatea

$$(6) \qquad (a - \delta)^2 + 4 \beta \gamma < 0.$$

Dintre cele două rădăcini ale ecuaţiunii (5) luăm, pentru τ, valoarea a cărei parte imaginară este pozitivă. Acestei valori corespund, pentru m, expresiunile

$$(7) \qquad m = a + \beta \tau = \delta + \frac{\gamma}{\tau},$$

din cari rezultă că numerele β şi γ trebuie să fie diferite de zero. Aşà dar, dacă multiplicatorul m nu este întreg, relaţiunea (1) nu poate existà decât dacă m este un număr complex. Se zice, în acest caz, că pu admite o *multiplicaţiune complexă*.

Din cele ce preced conchidem că *pu nu poate admite o multiplicaţiune complexă decât dacă τ este rădăcina unei ecuaţiuni de gradul al doilea cu coeficienţi întregi având rădăcinile imaginare.*

Viceversa. Să presupunem că τ satisface o ecuaţiune de gradul al doilea cu coeficienţi întregi

$$(8) \qquad a \tau^2 + 2 b \tau + c = 0,$$

al cărei discriminant satisface inegalitatea

$$(9) \qquad D = a c - b^2 > 0.$$

Coeficienţii a şi c, fiind de acelaş semn, pot fi presupuşi pozitivi şi a, b, c fără divizor comun.

Pentru a determinà multiplicaţiunile complexe ce $p\,u$ poate admite, trebuie să identificăm ecuaţiunea (8) cu ecuaţiunea (5). Vom considerà două speţe de ecuaţiuni (8): de speţa I sau de speţa II, după cum numerele a, $2\,b$, c sunt prime între ele, sau au ca divizor comun numărul 2. In acest din urmă caz, a şi c sunt numere pare şi b număr impar; de unde rezultă, pentru discriminantul (9), forma

$$(10) \qquad \mathrm{D} = 4\,k - 1, \quad k \text{ număr întreg} > 0.$$

Dacă ecuaţiunea (8) este de speţa I, punem

$$(11) \quad \beta = a\,\varrho, \quad \alpha - \delta = 2b\varrho, \quad -\gamma = c\varrho, \quad \alpha + \delta = 2\varrho';$$

de unde

$$(12) \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \varrho' + b\,\varrho, \quad \delta = \varrho' - b\,\varrho, \\ n = \alpha\delta - \beta\gamma = \varrho'^2 + \mathrm{D}\,\varrho^2, \\ \tau = \dfrac{-b + i\sqrt{\mathrm{D}}}{a}, \quad m = \alpha + \beta\tau = \varrho' + i\,\varrho\sqrt{\mathrm{D}} \end{array}\right.$$

Numerele $a, 2\,b$ şi c fiind prime între el, pentru ca $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ să fie numere întregi, trebuie ca ϱ şi ϱ' să fie întregi.

Dacă ecuaţiunea (8) este de speţa II (a şi c pare, b impar), punem

$$(13) \quad \beta = \frac{a}{2}\varrho, \quad \alpha - \delta = b\,\varrho, \quad -\gamma = c\,\varrho, \quad \alpha + \delta = 2\,\varrho'$$

unde

$$(14) \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \tfrac{1}{2}\,(\varrho' + b\,\varrho), \quad \delta = \tfrac{1}{2}\,(\varrho' - b\,\varrho), \\ \qquad 4\,n = \varrho'^2 + \mathrm{D}\,\varrho^2 \\ \tau = \dfrac{-b + i\sqrt{\mathrm{D}}}{a}, \quad m = \alpha + \beta\tau = \dfrac{\varrho' + i\varrho\sqrt{\mathrm{D}}}{2}. \end{array}\right.$$

Numerele α, β, γ, δ vor fi întregi dacă ϱ şi ϱ' sunt numere întregi şi de aceeaş paritate.

Aşà dar, condiţiunea enunţată mai sus ca necesară pentru ca pu să admită o multiplicaţiune complexă este şi suficientă.

Numerele ϱ şi ϱ' putând primì orice valori întregi, cu restricţiunea de a fi de aceeaş paritate în cazul formulelor (13) şi (14), rezultă că dacă funcţiunea $p\,u$ admite o multiplicaţiune complexă, ea admite o infinitate de multiplicatori complexi. Nu se presupune $\varrho = 0$; căci lui $\varrho = 0$ corespund, în virtutea egalităţilor (11) şi (12), valorile $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = \delta = \varrho' = m$: cazul multiplicaţiunei ordinare.

Dintre valorile lui m, cea mai mică în valoare absolută, pe care o reprezintăm prin μ, se obţine, în cazul când ecuaţiunea (8) este de speţa I, făcând $\varrho' = 0$, $\varrho = \pm 1$; iar dacă această ecuaţiune este de speţa II, făcând $\varrho = \pm 1$, $\varrho' = \pm 1$. Ducând aceste valori în egalităţile (12) şi (14), obţinem respectiv

$$(15) \qquad n = D, \quad \mu = i\sqrt{n}$$

$$(16) \qquad 4n = D + 1^{1)}, \quad \mu = \frac{\pm 1 + i\sqrt{4n-1}}{2}\,^{2)}$$

Expresiunea generală a multiplicatorului complex m este dar în ambele cazuri $m = \varrho' + \varrho\mu$.

Să considerăm cazul $n = 1$. Dacă ecuaţiunea (8) este de speţa I, avem

$$\mu = i,$$

$$ac - b^2 = 1; \quad a = c = 1, \quad b = 0,$$

$$\tau^2 + 1 = 0, \quad \tau = i.$$

Dacă ecuaţiunea (8) este de speţa II, avem

$$\mu = \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon, \ \varepsilon^2; \qquad \varepsilon = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$ac - b^2 = 3; \quad a = c = 2, \quad b = \pm 1,$$

$$2\tau^2 \mp 2\tau + 2 = 0, \quad \tau = \varepsilon, \ \varepsilon^2.$$

Valorilor $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = i$, ε (sau ε^2) corespund respectiv valorile invarianţilor $g_3 = 0$. $g_2 = 0$ (§ 284, 286). Regăsim transformările

$$p(iu;\ g_2,\ 0) = -p(u;\ g_2,\ 0),$$

$$p(\varepsilon u;\ 0,\ g_3) = \frac{1}{\varepsilon^2}\, p(u;\ 0,\ g_3).$$

NOTA IV.

Seria $\sum\limits_{0}^{\infty} x^{n^2}$ *nu se prelungeşte în afară din cercul său de convergenţă* $|x| = 1$.

---

[1]) D este în cauzul considerat de forma $4k-1$ (formula 10).

[2]) Este inutil de considerat, pentru μ, valori egale şi de semne contrarii, în virtutea egalităţii $p(\pm\mu u) = p(\mu u)$.

Această serie coincide cu funcţiunea ((3), § 225)

$$\frac{1}{2}\left(1 + \vartheta_3\,(0,\,q)\right),$$

în care înlocuim q prin x. Ea a fost primul exemplu, dat de Weierstrass, al unei serii care nu se prelungeşte în afară din cercul său de convergenţă [1]). Avem ((7), § 231).

$$(1)\qquad \sqrt{\frac{2\,\omega_1}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_3} = \vartheta_3\,(0,q) = 1 + 2\sum_1^{\infty}\left(1+q^{n^2}\right),\quad q=e^{i\pi\tau}$$

Dacă aplicăm perioadelor $(2\,\omega_1,\ 2\,\omega_3)$ transformarea lineară

$$(2)\qquad \omega'_1=\alpha\,\omega_1+\beta\,\omega_3,\quad \omega'_3=\gamma\,\omega_1+\delta\,\omega_3,\quad \alpha\,\delta-\beta\gamma=1$$

ai cărei coeficienţi satisfac congruenţele

$$(3)\qquad \alpha\equiv\delta\equiv 1,\qquad \beta\equiv\gamma\equiv 0\ (\text{mod. } 2),$$

cantităţile e_1 şi e_3 nu se schimbă şi putem scrie

$$(4)\qquad \sqrt{\frac{2\,\omega_1'}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}=\vartheta_3\,(0,q'),\quad q'=e^{i\pi\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}}.$$

De unde

$$(5)\qquad \vartheta_3\,(0,\,q')=\sqrt{\frac{\omega_1'}{\omega_1}}\,\vartheta_3\,(0,q)=\sqrt{\alpha+\beta\tau}\,\vartheta_3\,(0,q).$$

Să punem $\tau = it$ şi să facem $t = +\infty$; rezultă

$$(6)\qquad \lim_{t=+\infty} q = 0,\qquad \lim_{t=+\infty} q' = e^{i\pi\frac{\delta}{\beta}}.$$

Ducând aceste valori în egalitatea (5), în care punem $q' = x$, conchidem că suma

$$\left|1+2\sum_1^{\infty} x^{n^2}\right|$$

tinde către $+\infty$ când x, a cărui valoare absolută este < 1, tinde către punctul

$$e^{i\pi\frac{\delta}{\beta}}.$$

Acest punct este aşa dar un punct singular [2]). Insă oricare, ar fi punctul

$$x_0 = e^{i\theta},\quad 0\leq\theta<2\pi$$

---

[1]) K. Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre* pag. 95; Mathematische Werke, II Bd, pag. 221.

[2]) I. p. 111.

pe cercul $|x| = 1$, putem determinà numerele α, β, γ, δ astfel ca inegalitatea

$$\left|\theta - \pi\frac{\delta}{\beta}\right| < \varepsilon$$

să fie satisfăcută, ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. In domeniul oricărui punct al cercului, oricât de mic ar fi acel domeniu, se găsesc dar puncte singulare: *tot cercul este aşà dar o linie de puncte singulare şi seria nu se poate prelungì în afară din acest cerc.*

q. e. d.