EDITURĂ CASEI ȘCOALELOR

LECȚIUNI DE TEORIA FUNCȚIUNILOR

PARTEA I

CURS PROFESAT
LA FACULTATEA
DE ȘTIINȚE
DIN BUCUREȘTI

DE

DAVID EMMANUEL
Profesor la Facultatea de Științe din București

CVLTVRA
NAȚIONALĂ

PREFAŢĂ

Lecţiunile ce apar în această ediţiune au fost, în parte, autografiate, sub îngrijirea elevilor mei, pentru prima dată în anul 1904. Mai târziu, în 1909, ele au fost reeditate în mod mai complect, iar pentru a treia oară, cu puţine modificări în anul şcolar 1921—22.

Lecţiunile conţinute în acest volum sunt cele din ultima ediţiune, corectată, în care s'au făcut oarecari modificări şi puţine adaose. Ele constitue partea I a cursului ce predau la Facultatea noastră de Ştiinţe. Obiectul lor este studiul principiilor generale ale funcţiunilor de variabilă complexă.

Relativ la metoda ce am urmat, voiu menţionà ceeace urmează:

Primele lecţiuni consistă într'o revedere a câtorva proprietăţi fundamentale relative la funcţiunile de variabile reale, proprietăţi esenţiale în studiul funcţiunilor în genere. După o expunere foarte sumară a unor proprietăţi ale grămezilor de puncte, *urmează introducerea cantităţilor complexe şi propoziţiunile principale asupra seriilor şi produselor infinite de asemenea cantităţi.*

Partea fundamentală a lecţiunilor următoare o constitue seriile de puteri. *Pe baza teoriei acestor serii se introduce, după ideile lui* Weierstrass, *noţiunea de* funcţiune analitică monogenă *şi se desvoltă proprietăţile generale ale acestor funcţiuni. Aplicaţiunea teoriei se face la câteva funcţiuni elementare. Funcţiunea algebrică se consideră în cazul cel mai simplu, când funcţiunea este definită de o ecuaţiune binoamă şi se introduce* suprafaţa *lui* Riemann *corespunzătoare.*

Mai departe — aproximativ la a doua jumătate a cursului — se introduce noţiunea de funcţiune analitică după Cauchy. *Integrala de variabilă complexă şi teoremele fundamentale relative la asemenea integrale, creaţiunea celebrului autor, dau loc la numeroase aplicaţiuni. Plecând dela* integrala *lui Cauchy, dela care, ca primă consecinţă, se deduce că o funcţiune analitică, în condiţiuni generale date, se poate desvoltà într'o serie de puteri, se recunoaşte că ceeace caracterizează funcţiunea analitică, după Weierstrass, coincide cu condiţiunile lui Cauchy, precum şi reciproc.*

Identitatea funcţiunei analitice, definită de aceşti doui autori, fiind stabilită, se utilizează, în expunerea teoriei generale, când seriile de puteri *(W.), când* integrala de variabila complexă *(C.), după cum se găseşte că una sau cealaltă metodă conduce mai repede la rezultatul ce avem în vedere.*

Principiul transformării conforme *este deasemenea introdus în aceste lecţiuni; pe baza acestui principiu se stabilesc anume proprietăţi generale simple ale funcţiunilor analitice.*

Cred inutil de a intra în alte detalii; tabla de materie indică chestiunile tratate şi dispoziţiunea lor.

Fie-mi permis a exprimà aci recunoştinţa mea Casei Şcoalelor *pentru buna voinţă ce a avut de a dispune tipărirea acestor lecţiuni.*

Domnului conferenţiar universitar Octav Onicescu *exprim viile mele mulţumiri pentru ajutorul ce mi-a dat la revizuirea corecturilor şi pentru atenţiunea cu care a urmărit executarea lucrării, făcută cu atâta grijă de «Cultura Naţională».*

Mulţumesc deasemenea tinerilor ingineri E. Abason *şi* T. Tănăsescu *pentru desenarea figurilor.*

Urmează aici o listă de principalele tratate de cari m'am servit în deosebi, în alcătuirea cursului meu.

D. E.

Briot et *Bouquet*. Théorie des fonctions elliptiques.
Hermite. Cours (lith).
E. Picard. Traité d'Analyse.
E. Goursat. Cours d'Analyse mathématique.
E. Borel. { Leçons sur la théorie des fonctions. / Leçons sur les fonctions entières.
Weierstrass. Abhandlungen aus der Funktionenlehre.
O. Biermann. Theorie der analytischen Funktionen.
H. Burkhardt. Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen.
W. F. Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie.
Vivanti — A. Gutzmer. Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.
L. Bianchi. Lezioni sulla teoria delle Funzioni di variabile complessa.
S. Pincherle. Lezioni sulla teoria delle Funzioni analitiche. (Litogr.).
A. R. Forsyth. Theory of functions of a complex variable.
I. Harkness and *F. Mosley*. Introduction to the theory of analytic functions.

TABLA DE MATERIE

CAPITOLUL V

Serii de puteri

CAPITOLUL VI

Seria Taylor

CAPITOLUL VII

Funcțiuni analitice

CAPITOLUL VIII

Funcțiuni uniforme

CAPITOLUL IX

Funcțiuni analitice având o infinitate de puncte singulare

CAPITOLUL X

Studiul câtorva funcțiuni analitice elementare

CAPITOLUL XI

Funcțiuni algebrice definite de ecuațiuni binoame

CAPITOLUL XII

Inversiunea funcțiunilor e^x, $\operatorname{tg} x$, $\sin x$

CAPITOLUL XIII

Teoria funcțiunilor de variabilă complexă după Cauchy

CAPITOLUL XIV

Teoremele fundamentale ale lui Cauchy

CAPITOLUL I.

VARIABILE REALE.

I. — DEFINIŢIUNI ŞI PROPOZIŢIUNI FUNDAMENTALE.

1. *Limite.* Fie

$$(1) \qquad x_1, \ x_2, \ldots \ x_n, \ldots$$

un şir nelimitat de numere. Zicem că şirul tinde către o limită a, sau că are o limită a, dacă la un număr pozitiv ε, arbitrar de mic, corespunde un număr întreg pozitiv N astfel încât, pentru $n \geqq N$, să avem inegalitatea

$$| x_n - a | < \varepsilon;$$

se scrie $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$. In acest caz şirul (1) se zice convergent.

Dacă A fiind un număr pozitiv oricât de mare voim, există un număr întreg pozitiv N astfel încât pentru $n \geqslant N$ să avem inegalitatea

$$x_n > A,$$

zicem că x_n tinde către infinit ($\pm \infty$). In acest caz şirul (1) se zice divergent. Un al treilea caz posibil este acela când numerele (1) sunt cuprinse între două numere finite şi nu tind către nici o limită; se zice atunci că numerele şirului *oscilează* între cele două numere date. Exemplu: $x_n = (-1)^n$.

2. *Un şir de numere necontenit crescânde, este convergent sau divergent, nu oscilează niciodată.* Presupunem

$$(1) \qquad x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$$

Se poate întâmplà ca pentru N crescând, să avem

$$(2) \qquad x_n > A,$$

A fiind un număr pozitiv oricât de mare voim. In acest caz şirul este divergent.

Să presupunem acum că există un număr a, astfel că, oricât de mare ar fi n, avem

(3) $$x_n < a.$$

In acest caz, dacă există un număr întreg pozitiv N astfel ca pentru $n \geqslant N$ să avem inegalitățile

(4) $$x_n > \alpha, \quad x_n - \alpha < \varepsilon,$$

α fiind un număr convenabil, mai mic ca a, și ε un număr pozitiv, arbitrar de mic, rezultă $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \alpha$.

Să presupunem că a doua inegalitate (4) este imposibilă oricât de mare ar fi n; ceeace înseamnă că există un număr N astfel că, pentru $n \geqslant N$, avem

$$x_n > \alpha + \varepsilon = \alpha_1.$$

In virtutea aceleaș ipoteze, pentru $n_1 > n$ și destul de mare, vom avea

$$x_{n_1} > \alpha_1 + \varepsilon = \alpha_2,$$

căci altminteri ar rezultà $\lim x_{n_1} = \alpha_1$.

Pentru acelaș motiv, vom aveà pentru indici crescânzi și destul de mari

$$x_{n_2} > \alpha_2 + \varepsilon = \alpha_3, \ldots$$

De unde rezultă

(5) $$x_{n_p} > \alpha + (p+1)\,\varepsilon.$$

Membrul al doilea al acestei inegalități, pentru p destul de mare, poate deveni mai mare ca orice număr dat și prin urmare mai mare decât a: ceeace este în contrazicere cu inegalitatea (3). De unde rezultă că inegalitatea (3) trage după sine convergența șirului (1).

Cazul unui șir de numere necontenit descrescânde se reduce la cel precedent, dacă schimbăm semnele tuturor termenilor.

3. *Limită inferioară și limită superioară. Un șir nelimitat de numere*

(1) $$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

cuprinse între două numere date A, B, admite o limită inferioară și o limită superioară, adică există două numere a (limita inferioară) și b (limita superioară) satisfăcând condițiunile următoare:

1°. *Pentru orice valoare a lui n avem*

$$a \leqslant x_n \leqslant b.$$

2°. *Există cel puțin o valoare n' a lui n pentru care*

$$x_{n'} < a + \varepsilon$$

şi cel puţin o valoare n″ pentru care

$$x_{n''} > b - \varepsilon,$$

ε fiind număr pozitiv, arbitrar de mic.

Să demonstrăm existenţa limitei superioare b. Pentru aceasta, să considerăm două numere α şi β $(\alpha < \beta)$, astfel ca β să fie mai mare ca toate numerele şirului (1) şi ca α să fie mai mic ca unele numere ale acestui şir. Să divideni intervalul (α, β) în 10 părţi egale şi să considerăm numerele

$$(2) \qquad \alpha, \ \alpha + \frac{\beta - \alpha}{10}, \ \alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{10}, \ \ldots\ldots, \beta.$$

Unul cel puţin din numerele acestui şir este mai mare ca toate numerele (1). Fie β_1 cel dintâiu ce se întâlneşte dela stânga la dreapta care împlineşte această condiţiune şi să numim α_1 numărul care-l precede imediat; α_1 şi β_1 vor înlocuì numerele α şi β.

Operând asupra numerelor α_1 şi β_1 în acelaş mod ca asupra lui α şi β, vom obţine două numere α_2 şi β_2 astfel că β_2 este mai mare ca toate numerele (1) şi că printre aceste numere există unul sau mai multe mai mari ca α_2. Continuând în acelaş mod, obţinem două şiruri de numere (α_n), (β_n) satisfăcând condiţiunile:

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots\ldots \leqq \alpha_n \leqq \ldots. \\ \beta \geqq \beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots\ldots \geqq \beta_n \geqq \ldots. \end{cases}$$

$$(4) \qquad \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta - \alpha}{10^n}.$$

De unde rezultă că cele două şiruri (α_n), (β_n) au aceeaş limită, ce reprezentăm prin b: aceasta este limita superioară a şirului (1). In adevăr, avem

$$(5) \qquad \alpha_n < b < \beta_n.$$

De altă parte, între α_n şi β_n există numere ale şirului (1); fie x_m unul oarecare din aceste numere, adică

$$(6) \qquad \alpha_n < x_m < \beta_n.$$

De unde, punând $\frac{\beta - \alpha}{10^n} = \varepsilon$, avem

$$x_m > \beta_n - \varepsilon$$

şi *a fortiori*

$$(7) \qquad x_m > b - \varepsilon.$$

Rămâne să arătăm că $x_m < b$. Să presupunem contrariul: $x_m > b$; vom aveà, pentru n destul de mare,

$$\beta_n - b < x_m - b,$$

(căci $\beta_n - b$ poate deveni mai mic ca orice cantitate dată), adică

$$\beta_n < x_m,$$

ceeace este în contradicţiune cu (6). Aşa dar b este *limita superioară* a şirului (1).

In acelaş mod se stabileşte existenţa *limitei inferioare*.

Observare. Limitele a căror existenţă a fost stabilită pot sau nu face parte din şirul numerelor date. Exemplu: şirurile

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\ldots;$$

$$0,9, \; 0,99, \; 0,999 \ldots,$$

au, cel dintâiu ca limită inferioară zero, cel de-al doilea ca limită superioară 1, însă aceste numere nu se găsesc printre numerele şirului respectiv.

Dacă şirul atinge limita superioară sau inferioară se zice că are un *maximum* sau *minimum*.

4. Condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca un şir

$$(1) \qquad x_1, \; x_2, \ldots x_n, \ldots$$

să fie convergent, este ca să putem fixà un număr întreg pozitiv N astfel încât pentru $n \geqq N$, $n' \geqq N$ să avem

$$(2) \qquad |x_n - x_{n'}| < \varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.

1°. Condiţiunea este *necesară*, căci dacă şirul (1) are o limită a, putem scrie

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \; |x_{n'} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi prin urmare

$$|x_n - x_{n'}| \leqq |x_n - a| + |x_{n'} - a| < \varepsilon.$$

2°. Condiţiunea este *suficientă*. In adevăr, din inegalitatea (2) rezultă că pentru $n \geqq N$, numerele

$$(3) \qquad x_{n+1}, \; x_{n+2}, \ldots\ldots$$

sunt toate cuprinse între numerele $x_N - \varepsilon$, $x_N + \varepsilon$. De unde rezultă, în virtutea teoremei precedente, că şirul (3) are o limită inferioară şi una superioară cuprinse între aceste două numere, a căror diferenţă 2ε poate fi oricât de mică voim. Prin urmare aceste două limite coincid: valoarea lor comună este limita şirului [1]).

---

[1]) Fie pentru moment a limita inferioară, b limita superioară; avem $x_n - a < 2\varepsilon$, $b - x_n < 2\varepsilon$; de unde $b - a < 4\varepsilon$. Insă membrul al doilea poate fi oricât de mic voim, pe când membrul întâiu este fix, ceeace nu este compatibil decât cu condiţiunea $b - a = 0$.

II. — FUNCŢIUNI REALE DE O VARIABILĂ REALĂ.

5. Se zice despre o funcţiune reală de o variabilă reală că rămâne finită într'un interval dat (a, b), dacă există două numere între cari se cuprind toate valorile ce funcţiunea primeşte în acel interval. In cazul când funcţiunea primeşte valori mai mari ca un număr dat, oricât de mare ar fi, se zice că are limita superioară $+\infty$; deasemenea, dacă primeşte valori mai mici ca un număr dat, oricât de mic ar fi, se zice că are limita inferioară $-\infty$.

Teoremă. O funcţiune reală $f(x)$ de o variabilă reală, definită într'un interval dat (a, b), are o limită inferioară şi o limită superioară.

Aceste limite pot fi respectiv $\mp\infty$ conform definiţiunii de mai sus. Să presupunem că funcţiunea rămâne finită şi fie

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$$

un şir de numere intercalate între a şi b, oricât de apropiate între dânsele voim. Valorile

$$f(a), \ f(x_1), \ f(x_2), \ \ldots \ f(x_n), \ f(b)$$

fiind prin ipoteză cuprinse între două numere date, admit în virtutea § 3, o limită inferioară m şi o limită superioară M.

Diferenţa $M - m$ se numeşte *oscilaţiunea* funcţiunii în intervalul (a, b).

6. Figurând valorile lui x prin puncte pe o axă, vom numì *domeniul* (sau vecinătatea) unuì punct x, segmentul $x - \delta$, $x + \delta$ al axei, care cuprinde în interiorul său punctul x, δ fiind un număr pozitiv care poate devenì oricât de mic voim, dar a cărui limită inferioară este > 0. Segmentul considerat constitue intervalul $(x - \delta, x + \delta)$.

7. *Teoremă* (*Weierstrass*). *Dacă o funcţiune $f(x)$ este finită în intervalul (a, b), $a < b$, există cel puţin un punct $x = \xi$ în acest interval, astfel că în intervalul $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, limita superioară M a funcţiunii este aceeaş ca în intervalul primitiv.*

(Un enunţ analog şi pentru limita inferioară).

Să împărţim intervalul (a, b) în două părţi egale; este evident că în nici unul din aceste intervale limita superioară nu poate fi mai mare ca M şi că cel puţin în unul din ele ca este M. Din aceste două intervale să considerăm pe acela în care limita superioară este M, sau unul oarecare din ele, dacă ambele se bucură de această proprietate, şi fie a_1, b_1 extremităţile sale $(a_1 < b_1)$. Este evident că una din valorile a_1 ori b_1 coincide cu a sau b. Subdivizând acest nou interval (a_1, b_1) în două părţi egale şi raţionând în mod analog, obţinem un alt interval (a_2, b_2) în care limita superioară a funcţiunii este M. Continuând cu subdiviziunile, formăm un şir de intervale

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n), \ldots,$$

cuprinse fiecare în precedentul său, în care limita superioară este M şi astfel că

$$(1) \qquad \begin{cases} a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq b, \\ b \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots > a, \end{cases}$$

$$(2) \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

In virtutea condiţiunilor (1) şi (2) şirurile $a_1, a_2 \ldots, b_1, b_2, \ldots$ admit o limită comună, pe care o reprezentăm prin ξ.

Aceasta este valoarea căutată. Intr'adevăr, ξ fiind limita comună a celor două şiruri, la un număr pozitiv δ oricât de mic voim, corespunde un număr întreg pozitiv N, astfel că pentru $n \geqq N$ avem

$$a_n > \xi - \delta, \quad b_n < \xi + \delta.$$

Intervalul (a_n, b_n) este deci situat în interiorul intervalului $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. Insă în intervalul (a_n, b_n) limita superioară este M; M este aşadar limita superioară şi în intervalul $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

8. *Continuitate.* — O funcţiune $f(x)$ este *continuă* în domeniul unui punct x_0, dacă la un număr pozitiv dat ε, corespunde un număr pozitiv η, astfel ca să avem

$$(1) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

pentru toate valorile lui x satisfăcând inegalitatea

$$(2) \qquad |x - x_0| < \eta.$$

O funcţiune continuă în fiecare punct al unui interval dat se zice continuă în acel interval.

9. Proprietăţi. — I. *Dacă o funcţiune $f(x)$ este continuă în domeniul unui punct x_0, oscilaţiunea sa $M - m$, în domeniul acestui punct poate deveni mai mică ca ε, ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.*

In adevăr, funcţiunea $f(x)$ fiind continuă în domeniul lui x_0, putem scrie

$$(1) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$(2) \qquad |f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

x şi x' fiind două puncte oarecari în domeniul $|x - x_0| < \eta$ al lui x_0. De unde rezultă inegalitatea

$$(3) \qquad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De altă parte, putem presupune η destul de mic astfel încât să avem:

$$(4) \qquad M - f(x) < \frac{\varepsilon}{4},\ f(x') - m < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Adunând aceste două inegalităţi şi ţinând seamă de (3), obţinem

$$(5) \qquad M - m < \varepsilon.\ ^{1})$$

Reciproca este evidentă. Inegalitatea (5) trage după sine inegalitatea $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ şi poate prin urmare fi luată ca definiţiune a continuităţii.

Observare. Fie $x = x_0 + h$, $|h| < \eta$; inegalitatea

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

devine

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

inegalitate echivalentă, prin definiţiune, cu următoarea:

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

II. *O funcţiune continuă într'un interval* (a, b), *inclusiv limitele, este finită în acel interval.*

Să arătăm pentru aceasta că limita superioară M a funcţiunii nu poate fi infinită. In adevăr, dacă limita M ar fi infinită, ar exista, conform teoremei lui Weierstrass (§ 7), în intervalul (a, b), o valoare ξ, astfel ca în noul interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, oricât de mic ar fi δ, limita superioară să fie infinită. Oscilaţiunea funcţiunii în intervalul $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ ar fi dar infinită şi prin urmare funcţiunea n'ar fi continuă în vecinătatea punctului ξ, ceeace este contra ipotezei. Funcţiunea are deci o limită superioară finită. In mod analog se probează că limita inferioară nu poate fi $-\infty$.

Observare. Teorema presupune ca limitele fac parte din interval; în cazul contrar se poate întâmplà să nu fie adevărată. Astfel funcţiunea $f(x) = \dfrac{1}{x}$ în intervalul $0 < x \leq 1$ este continuă, dar limita sa superioară este ∞.

---

[1]) M şi m depind evident de x_0 şi de η.

III. *O funcţiune continuă într'un interval (a, b) inclusiv limitele, atinge limita sa superioară, precum şi cea inferioară, sau mai scurt, admite în acel interval un maximum şi un minimum.*

In virtutea teoremei lui Weierstrass (§ 7) există în intervalul (a, b) un punct ξ astfel că în intervalul $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, oricât de mic ar fi δ, limita superioară a funcţiunii este aceeaş ca în intervalul (a, b) aşà încât putem scrie

$$M - f(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru orice x cuprins în $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, ε fiind pozitiv şi arbitrar de mic. De altă parte, funcţiunea fiind continuă în punctul ξ, avem în acelaş interval

$$|f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De unde rezultă, în virtutea inegalităţilor precedente,

$$M - f(\xi) \leq (M - f(x)) + |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Diferenţa între cantităţile constante M şi $f(\xi)$ putând deveni mai mică decât orice cantitate dată, este riguros nulă. Deci avem

$$M = f(\xi),$$

adică există, în intervalul dat, un punct ξ în care funcţiunea este egală cu limita sa superioară.

In acelaş mod se demonstrează teorema relativ la limita inferioară.

IV. *O funcţiune continuă într'un interval dat, primeşte în acel interval orice valoare cuprinsă între minimul şi maximul ei.*

Fie A un număr oarecare cuprins între minimul m şi maximul M, a şi b valorile lui x pentru cari avem $f(a) = m$, $f(b) = M$. In virtutea continuităţii, în vecinătatea lui a, $f(x)$ diferă de m cu oricât de puţin voim. Există dar o valoare X în intervalul (a, b) astfel că pentru *toate* valorile lui x cuprinse între a şi X avem $f(x) < A$, pe când această inegalitate nu există pentru *toate* valorile lui x cuprinse între X şi b. Presupunând, de exemplu, $a < b$ valorile lui X, cari satisfac aceste condiţiuni admit o limită superioară ξ, căci ele cresc începând de la a şi sunt $< b$.

Numărul ξ este dar definit astfel că pentru *toate* valorile lui x cuprinse între a şi ξ, avem $f(x) < A$, că această proprietate nu mai aparţine numărului $\xi + \delta$, δ fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.

De unde rezultă egalitatea:

$$f(\xi) = A. \tag{1}$$

In adevăr, dacă am aveà $f(\xi) > A$, ar există în virtutea continuităţii funcţiunii $f(x)$, un $\delta > o$ astfel ca în intervalul $(\xi - \delta, \xi)$ să avem $f(x) > A$; iar dacă am presupune $f(\xi) < A$, ar urmà ca în intervalul $(\xi, \xi + \delta)$ şi prin urmare în tot intervalul $(a, \xi + \delta)$, să avem $f(x) < A$. Ambele aceste inegalităţi fiind contrare definiţiunii lui ξ, egalitatea (1) este justificată.

V. *Continuitate uniformă. O funcţiune continuă într'un interval închis (adică inclusiv limitele) este uniform continuă în acel interval.*

Noţiunea de continuitate uniformă se introduce în Analiză prin consideraţiunile următoare:

Dându-se o funcţiune continuă într'un interval (a, b), la fiecare valoare x cuprinsă în acest interval, corespunde, conform definiţiunii, un interval $(x - \delta, x + \delta)$ în care oscilaţiunea funcţiunii este mai mică ca un număr pozitiv ε, arbitrar de mic. Dacă x coincide cu a sau cu b, intervalul considerat trebuie înlocuit respectiv cu $(a, a + \delta)$ sau $(b - \delta, b)$. Cantitatea δ poate admite o infinitate de valori, căci dacă am fixat o valoare a ei, toate valorile mai mici vor satisface evident şi ele aceeaş condiţiune. Toate aceste valori admit o limită superioară Δ, care depinde de x şi de ε, aşà încât ε rămânând constant mărimea intervalelor variază împreună cu x. Se pune întrebarea: Se pot uniformizà aceste intervale, cu alte cuvinte, există o cantitate pozitivă η astfel ca în intervalul $(x - \eta, x + \eta)$ oscilaţiunea funcţiunii să fie mai mică dacât ε, *oricare ar fi x în intervalul (a, b)*?

In cazul unei funcţiuni continue aceasta este posibil; ceeace se enunţă zicând că o funcţiune continuă este *uniform continuă*.

Pentru a demonstrà această propoziţiune, vom arătà mai întâiu că $\Delta(x)$ este o funcţiune continuă de x în tot intervalul (a, b). In adevăr fie x' o valoare cuprinsă în intervalul $[x - \Delta(x), x + \Delta(x)]$ şi fie $\Delta' = \Delta(x')$. Intervalul $(x' - \Delta', x' + \Delta')$ al cărui centru este punctul x' se întinde evident cel puţin până la cea mai apropiată extremitate $x - \Delta$ sau $x + \Delta$. Avem aşa dar (Fig. 1):

Fig. 1

$$(1) \qquad \Delta' \geqq \Delta - (x' - x), \text{ dacă } x' > x,$$

sau

$$(2) \qquad \Delta' \geqq x' - (x - \Delta), \text{ dacă } x' < x$$

Insă putem presupune x' destul de aproape de x, pentru ca intervalul $(x' - \Delta', x' + \Delta')$ să cuprindă în interiorul său punctul x;

atunci printr'un raţionament analog cu cel precedent, permutând x cu x' şi Δ cu Δ', obţinem inegalităţile

$$(3) \qquad \Delta \geqq \Delta' - (x - x'), \quad x > x'$$

$$(4) \qquad \Delta \geqq x - (x' - \Delta'). \quad x < x'$$

Din inegalităţile (1) şi (4) rezultă:

$$-(x' - x) \leqq \Delta - \Delta' \leqq (x' - x).$$

Deasemenea inegalităţile (2) şi (3) reunite dau

$$-(x - x') \leqq \Delta' - \Delta \leqq x - x',$$

adică, în toate cazurile avem inegalitatea:

$$(5) \qquad |\Delta - \Delta'| \leqq |x - x'|;$$

ceeace demonstrează continuitatea funcţiunii $\Delta(x)$.

Această propoziţiune fiind stabilită, continuitatea uniformă rezultă imediat. In adevăr, cantitatea Δ fiind pozitivă şi continuă, admite o limită inferioară $\eta > o$ pe care o atinge pentru o valoare $x = \xi$ cuprinsă în intervalul (a, b).

Acest minimum este neapărat mai mare ca zero; căci $\eta = o$ însemnează că în domeniul punctului ξ oscilaţiunea funcţiunii nu poate deveni mai mică ca ε, adică funcţiunea n'ar fi continuă în acel punct; ceeace este contra ipotezei.

Minimul η satisface condiţiunea cerută şi prin urmare putem enunţà următorul rezultat:

Dacă o funcţiune este continuă într'un interval (a, b) există totdeauna un număr pozitiv η astfel că oricare ar fi valoarea lui x cuprinsă între a şi b, oscilaţiunea funcţiunii în intervalul $(x - \eta, x + \eta)$ este mai mică ca ε, ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.

III. — FUNCŢIUNI REALE DE DOUĂ VARIABILE REALE.

10. Să considerăm acum o funcţiune reală $f(x, y)$ de două variabile reale x, y definită pentru toate valorile

$$a \leqq x \leqq b,$$
$$c \leqq y \leqq d,$$

sau, conform reprezentaţiunilor geometrice, în interiorul şi pe periferia dreptunghiului ale cărui vârfuri sunt punctele

$$(a, c), \ (b, c), \ (a, d), \ (b, d)$$

situate într'un plan — planul (x, y) —, axele fiind rectangulare. Totalitatea punctelor (x, y) cărora corespund valori determinate pentru funcţiunea $f(x, y)$ constitue *câmpul* în care această funcţiune este definită.

Câmpul în loc de a fi un dreptunghiu, precum am presupus mai sus, poate fi o porţiune a planului, limitat de un contur închis format de o curbă unică oarecare sau de arce de curbe diferite.

Numim *domeniul* (sau vecinătatea) unui punct (ξ, η) totalitatea punctelor (x, y), cari satisfac condiţiunile:

$$|x-\xi| < \delta, \quad |y-\eta| < \delta,$$

δ fiind un număr pozitiv destul de mic. In locul pătratului astfel definit se poate considerà un cerc cu centrul în punctul (ξ, η) şi cu o rază r destul de mică.

Prin convenţiune (convenţiune justisficată prin transformarea $x = \frac{1}{x'}$, în cazul variabilei complexe) vom înţelege prin *domeniul punctului dela infinit* spaţiul din plan, exterior unui cerc descris din origină ca centru cu o rază oricât de mare voim. In teoria funcţiunilor punctul dela infinit este un punct unic căruia nu-i putem da nici o reprezentare în plan.

11. Teoremele asupra funcţiunilor de o variabilă independentă, demonstrate în paragrafele precedente, se aplică funcţiunilor de două şi de mai multe variabile, cu modificarea naturală, în ce priveşte funcţiunile de două variabile, ca să înlocuim pretutindeni cuvântul de interval cuprins între două numere, prin acela de *porţiune a planului, regiune sau arie* interioară unui dreptunghiu sau limitată de un contur închis de o formă oarecare. Cuvântul de domeniu al unui punct, în sensul restrâns de interval linear foarte mic care cuprinde acest punct, se va înlocui prin acela de domeniu în sensul mai general definit mai sus.

12. Să considerăm teoremele următoare:

Teorema I. *O funcţiune $f(x, y)$ definită într'o regiune dată, admite în aceà regiune o limită superioară şi o limită inferioară, cari pot fi finite sau respectiv* $\pm\infty$.

Căci dacă funcţiunea primeşte, în regiunea dată, valori mai mari ca un număr dat, oricât de mare ar fi, zicem că are limita superioară $+\infty$. Deasemenea, dacă primeşte valori mai mici ca un număr dat, oricât de mic, zicem că are limita inferioară $-\infty$. Dacă funcţiunea rămâne finită, valorile ce ea primeşte în puncte situate în regiunea dată şi foarte apropiate între ele pot fi ordonate într'un şir de numere cuprinse între două numere date. Ele admit dar o limită superioară şi o limită inferioară finite.

Teorema II. *Există cel puţin un punct $P(\xi, \eta)$ în interiorul regiunii date astfel că în pătratul al cărui centru este P şi latura $2\,\delta$,*

δ fiind un număr pozitiv oricât de mic voim, limita superioară (inferioară) a funcţiunii este aceeaş ca în regiunea primitivă.

Pentru a demonstrà această teoremă, să presupunem funcţiunea $f(x, y)$ definită într'un dreptunghiu d şi fie M limita sa superioară. Să împărţim dreptunghiul d în patru dreptunghiuri egale prin paralele cu laturile sale. In nici unul din aceste dreptunghiuri limita superioară nu este mai mare ca M şi în unul cel puţin, această limită este M. Fie d_1 dreptunghiul sau unul din dreptunghiurile în care limita superioară este M. Descompunem în acelaş mod dreptunghiul d_1 în patru părţi egale, etc. Formăm astfel un şir ilimitat de dreptunghiuri $d, d_1, d_2, \ldots d_n, \ldots$ în cari limita superioară a funcţiunii este M şi fiecare din ele este cuprins în interiorul celui precedent.

Să considerăm două axe paralele cu laturile dreptunghiului şi fie

$$a, a'; \; x_1, x'_1; \; \ldots; \; x_n, x'_n; \; \ldots,$$

abscisele vârfurilor dreptunghiurilor considerate. Şirurile de numere $a, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots; a', x'_1, x'_2, \ldots x'_n, \ldots$ satisfăcând condiţiunile

$$(1) \qquad \begin{cases} a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq \ldots, \\ a' \geqq x'_1 \geqq x'_2 \geqq \ldots \geqq x'_n \geqq \ldots, \end{cases}$$

$$(2) \qquad x'_n - x_n = \frac{a' - a,}{2^n},$$

admit o limită comună ξ.

In acelaş mod se arată că ordonatele y_n, y'_n ale vârfurilor aceloraşi dreptunghiuri au o limită comună η.

Din cele ce preced se vede imediat că există un număr pozitiv întreg N astfel că pentru $n \geqq N$, dreptunghiul d_n ale cărui laturi sunt $|x'_n - x_n|$ şi $|y'_n - y_n|$, este interior pătratului cu centrul în punctul $(\xi; \eta)$, având latura δ, oricât de mic ar fi δ. Ceeace demonstrează teorema.

13. O funcţiune $f(x, y)$ se zice *continuă în domeniul unui punct* (x_0, y_0) dacă, la un număr pozitiv ε arbitrar de mic, corespunde un număr pozitiv δ astfel încât să avem:

$$(1) \qquad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

cu condiţiunile

$$(2) \qquad |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta.$$

O funcţiune continuă în toate punctele unei regiuni date se numeşte *continuă în aceà regiune.*

Ca şi în cazul unei singure variabile, se demonstrează că oscilațiunea unei funcțiuni continue $f(x, y)$ în domeniul unui punct (x_0, y_0) poate deveni oricât de mică voim.

Să mai notăm egalitatea

$$\lim_{x=x_0,\, y=y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

echivalentă cu inegalitatea (1).

Proprietăți. a) *O funcțiune $f(x, y)$ continuă într'o regiune dată, inclusiv conturul ce o limitează, admite un maximum și un minimum în aceà regiune.*

b) *O funcțiune $f(x, y)$ continuă într'o regiune dată, este uniform continuă în aceà regiune, adică fiind dat un număr pozitiv ε oricât de mic voim, există un număr pozitiv δ, acelaș pentru toate punctele regiunii, astfel că oscilațiunea funcțiunii în domeniul corespunzător oricărui punct situat în interiorul regiunii este mai mică ca ε.*

Demonstrația acestor propozițiuni este identică cu aceea a unei funcțiuni de o singură variabilă.

14. *Observare.* O funcțiune $f(x, y)$ continuă în domeniul unui punct (x_0, y_0) este evident continuă în vecinătatea lui $x = x_0$, y fiind privit constant, situat în domeniul lui y_0; și viceversa, continuă în vecinătatea lui $y = y_0$, x fiind privit constant, situat în domeniul lui x_0. Reciproca poate să nu fie adevărată, precum se constată prin exemple.

Fie

$$f(x, y) = \frac{x\, y}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Această funcțiune n'are sens în punctul $x = y = o$. Să-i dăm valoarea zero în acest punct. Privită ca funcțiune de x, y fiind constant și diferit de zero, ea este evident continuă și se anulează împreună cu x; aceeaș concluziune în privința lui y, x fiind constant și diferit de zero. Să punem acum:

$$y = mx; \tag{2}$$

obținem

$$f(x, y) = \frac{m}{1 + m^2}. \tag{3}$$

Funcțiunea păstrează așadar o valoare constantă dealungul dreptei (2), ce trece prin origină și limita sa când punctul (x, y) se apropie de origină dealungul acestei drepte, nu mai este nulă, ci egală cu $\frac{m}{1 + m^2}$, cantitate care variază împreună cu m.

Iată un al doilea exemplu:

$$(4) \qquad f(x, y) = \frac{y^2}{x}.$$

Acceptând pentru această funcţiune valoarea zero în origină şi punând $y = mx$, funcţiunea devine:

$$(5) \qquad f(x, y) = m^2 x$$

şi tinde către zero când punctul (x, y) se apropie de origină după o direcţiune oarecare. Să facem acum ca punctul (x, y) să descrie parabola $y^2 = a\,x$, obţinem:

$$f(x, y) = a.$$

Prin urmare când punctul (x, y) se apropie de origină *dealungul acestei parabole*, limita funcţiunii nu mai este zero, ci a.

CAPITOLUL II.

NOŢIUNI SUMARE ASUPRA GRĂMEZILOR DE PUNCTE [1]).

15. In Analiză se numeşte *punct*, relativ la un sistem de una sau mai multe variabile reale, un grup de valori numerice determinate date acestor variabile.

Se zice despre *o grămadă de puncte* (ensemble, Punktmenge) că este dată sau bine definită, dacă dându-se un punct se poate recunoaşte că face parte sau nu din grămadă.

Grămada este *finită* sau *infinită* după cum numărul punctelor constitutive este limitat sau ilimitat. Numărul variabilelor cari determină un punct al grămezii se numeşte *dimensiunea* ei; în special când punctele sunt determinate de o singură variabilă, grămada se zice *liniară*. Punctele acestor grămezi figurate pe o axă (axa absciselor) reprezintă numere reale.

Ne vom mărgini a considera grămezile de puncte cu una şi cu două dimensiuni, adică grămezile de puncte situate pe o axă şi grămezile de puncte situate într'un plan.

Exemple: 1⁰. Şirurile $x = n$, $x = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$.

2⁰. Totalitatea numerelor raţionale sau a numerelor reale cuprinse între două limite date formează grămezi cu o dimensiune.

---

[1]) Teoria grămezilor a fost creată de *G. Cantor* şi cele mai multe propoziţiuni fundamentale ale acestei teorii sunt datorite acestui matematician. Pentru o teorie mai completă a se vedea *E. Borel*, Leçons sur la théorie des fonctions.

3°. Totalitatea punctelor interioare sau exterioare unui cerc dat, ale căror coordonate sunt numere raționale, formează grămezi cu două dimensiuni.

O grămadă A se zice conținută într'o grămadă B, dacă toate elementele lui A aparțin lui B.

16. *Punct de îngrămădire sau punct limită.* Un punct a se numește *punct de îngrămădire* sau *punct limită* al unei grămezi, dacă în domeniul [1]) său, oricât de mică ar fi întinderea acestui domeniu, se găsesc puncte ale grămezii diferite de a [2]). Punctele limite pot să aparțină sau nu grămezii. De exemplu grămada liniară

$$x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

are ca punct limită punctul $x = o$ și acest punct nu aparține grămezii.

Grămada punctelor cari reprezintă pe o axă numerele raționale cuprinse într'un interval dat, admite ca puncte limite totalitatea punctelor din acel interval, căci orice număr rațional sau irațional poate fi privit ca limita unui șir de numere raționale; aceà grămadă admite deci ca puncte limite pe lângă punctele grămezii și o altă grămadă de puncte străine (puncte reprezentând numerele iraționale).

Un punct care nu este punct limită se zice *punct izolat.*

17. Să considerăm în special o grămadă formată de un șir nelimitat de numere reale. Avem următoarea teoremă:

Teorema. Dacă limita superioară M a șirului nu face parte din șir, punctul $x = M$ este un punct limită al acestui șir, adică în intervalul $(M - \delta, M)$ oricât de mic ar fi $\delta > o$, se găsește o infinitate de elemente ale șirului. Caci dacă în acest interval s'ar aflà un număr mărginit de elemente, unul din ele ar fi cel mai mare și acela ar fi limita superioară. Ceeace este contrar ipotezei.

O propozițiune analoagă există relativ la limita inferioară.

18. Este evident că dacă un șir nemărginit de numere

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

admite mai multe valori limite, una din ele este cea mai mare și alta cea mai mică. Fie M și m respectiv cea mai mare și cea mai mică. Din definițiunea acestor numere rezultă proprietățile următoare:

---

[1]) Vezi definițiunea acestui cuvânt (11).

[2]) Numărul acestor puncte este neapărat infinit; căci dacă numărul lor ar fi mărginit, reprezentând prin δ distanța dela a la cel mai apropiat din ele, cercul cu centrul în a și cu raza $r < \delta$ n'ar conține nici un punct al grămezii.

1°. Elementele şirului pentru care avem inegalităţile

$$x_n > \mathrm{M} + \varepsilon, \quad x_n < m - \varepsilon$$

sunt în număr mărginit.

2°. Elementele ce satisfac inegalităţile

$$x_n > \mathrm{M} - \varepsilon, \quad x_n < m + \varepsilon$$

sunt în număr nemărginit, oricât de mic ar fi numărul $\varepsilon > o$.

19. Din cele ce preced şi din teorema (§ 17) rezultă că dacă limita superioară a unui şir nelimitat de numere reale (respectiv limita inferioară) nu aparţine şirului, ea coincide cu cea mai mare (resp. cea mai mică) dintre limite (în sensul de puncte limite).

20. *O grămadă infinită admite cel puţin un punct limită.*

Pentru a fixà ideile să considerăm cazul unei grămezi de două dimensiuni. Se pot întâmplà două cazuri: sau există un dreptunghiu de dimensiuni finite care să conţină toate punctele grămezii, sau nu există un asemenea dreptunghiu. Cazul din urmă revine a zice că oricât de mari ar fi dimensiunile dreptunghiului există în afară dintr'însul puncte ale grămezii, adică referindu-ne la definiţia domeniului punctului dela infinit, există în acest domeniu o infinitate de puncte. Punctul dela infinit este aşadar un punct limită şi teorema este demonstrată.

Să considerăm primul caz şi să împărţim dreptunghiul în patru părţi egale, prin paralele la laturile sale; este evident că în unul cel puţin din dreptunghiurile astfel obţinute se va găsì un număr ilimitat de puncte. Impărţim pe acesta în patru părţi egale şi considerăm pe acela în care numărul punctelor cuprinse este ilimitat. Continuând aşà mai departe, obţinem un şir nelimitat de dreptunghiuri

$$d_1, \; d_2, \; d_3, \; \ldots \; d_n, \; \ldots$$

conţinând fiecare un număr nelimitat de puncte şi cuprins fiecare în cel precedent.

Printr'un raţionament identic cu cel al teoremei II (§ 12), se demonstrează că există un punct P (ξ, η) care se bucură de proprietatea că la un număr pozitiv δ, oricât de mic voim, corespunde un număr întreg pozitiv N astfel că pentru $n \geqq \mathrm{N}$ dreptunghiul d_n este interior pătratului al cărui centru este în acest punct şi a cărui latură este δ. Punctul P (ξ, η) este deci un punct limită.

21. *O grămadă finită nu admite punct limită.*

In adevăr, punctul dela infinit nu este punct limită, căci putem descrie din origină ca centru un cerc cu o rază destul de mare care să cuprindă toate punctele grămezii situate la distanța finită. De altă parte, nici un punct la distanță finită nu poate fi punct limită, căci un cerc descris dintr'un asemenea punct ca centru, cu o rază mai mică decât distanța sa la punctul grămezii cel mai apropiat, nu va conține nici un alt punct al grămezii.

22. Un punct se zice *interior* unei grămezi, dacă un domeniu al acestui punct aparține cu totul grămezii, adică, dacă la orice punct A al grămezii corespunde un număr pozitiv δ astfel că toate punctele interioare cercului cu centrul în A și cu raza δ aparțin grămezii.

Un punct se zice *punct-frontieră* al unei grămezi, dacă orice domeniu al acestui punct conține puncte ale grămezii precum și puncte ce nu aparțin grămezii. Punctele frontiere sunt puncte limite ale grămezii.

Punctele grămezii cari nu sunt nici puncte interioare, nici puncte frontiere se zic puncte *exterioare.*

Există grămezi relativ la cari nu se poate vorbi de puncte interioare, nici de puncte exterioare. De exemplu: grămada de puncte ale căror coordonate sunt numere raționale.

23. *Derivata unei grămezi.* Grămada formată de punctele limite ale unei grămezi A se numește *derivata* grămezii A și se însemnă A'. Dacă grămada A' conține o infinitate de puncte, va admite și ea o derivată A'', zisă derivata doua a lui A, etc.

Oricare ar fi grămada infinită A, derivata a doua A'' este conținută în A'.

Se presupune, bine înțeles, că aceste derivate există.

In adevăr, fie P un punct al lui A''; într'un domeniu (r) al acestui punct se găsesc, în virtutea definițiunei, puncte ale lui A' diferite de P. Fie Q unul dintre acestea și (ϱ) domeniul său, ϱ fiind destul de mic pentru ca P să fie exterior cercului (ϱ). Insă Q fiind un punct al lui A', cercul (ϱ) conține puncte ale lui A; prin urmare în (r) se găsesc puncte ale lui A diferite de P, ceeace înseamnă că P este un punct limită al lui A și prin urmare aparține lui A'.

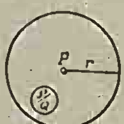

Fig. 2

24. Relativ la derivata sa, o grămadă poate fi de diferite feluri:

1°. *izolată,* dacă este formată din puncte izolate, adică n'are nici un punct comun cu derivata sa. Exemplu: șirul numerelor întregi a cărui derivată este punctul dela infinit. Numerele cuprinse în formula

$$x = m + \frac{1}{n+1},$$

m și n fiind numere întregi pozitive și $n \neq o$, formează o grămadă izolată; căci derivata acestei grămezi este grămada numerelor $y = m$, și între aceste două grămezi nu este nici un element comun.

2°. *închisă*, dacă conține derivata sa. Exemplu: numerele date de expresiunea

$$x = m + \frac{n}{p}, \ (p = 1, 2, \ldots, \infty)$$

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

a cărei derivată este grămada $y = m$. Această grămadă este evident cuprinsă în grămada dată, care mai conține puncte diferite de cele ale derivatei sale. Punctele frontieră fiind puncte limite ale grămezii, urmează că o grămadă închisă conține punctele frontierei sale.

3°. *densă*, într'un interval (a, b), dacă orice interval oricât de mic ar fi, cuprins în (a, b), conține puncte ale grămezii. De unde rezultă că toate punctele grămezii sunt puncte limite; prin urmare grămada este cuprinsă în derivata sa. Exemplu: grămada numerelor raționale, cuprinse într'un interval (a, b) este densă, căci ea este conținuta în derivata sa, care în afară de numerele raționale, conține toate numerele iraționale cuprinse în acel interval.

4°. *perfectă*, dacă coincide cu derivata sa. De exemplu, toate numerele cuprinse între o și 1, raționale și iraționale, inclusiv valorile extreme o și 1, formează o grămadă perfectă.

25. O grămadă se zice *conexă*, dacă fiind dat un număr pozitiv ε oricât de mic și două puncte arbitrare P și Q ale grămezii, se poate intercala între ele un număr limitat de puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ale grămezii astfel ca segmentele $PA_1, A_1A_2, \ldots, A_nQ$ să fie mai mici ca ε. O grămadă perfectă și conexă se numește *continuă*; se mai zice că formează un *continuum*. Continuul se zice că este cu una sau mai multe dimensiuni, după numărul variabilelor cari determină un punct al sistemului.

26. *O grămadă conexă este densă în toată întinderea sa.*

In adevăr, dacă grămada n'ar fi densă în toată întinderea sa, ea ar conține cel puțin un punct P care să nu fie punct limită. Un cerc cu centrul în acest punct având o rază ε destul de mică, nu ar conține alt punct al grămezii decât P. Prin urmare între acest punct și alt punct Q al grămezii nu am puteà realizà intercalarea unui număr limitat de puncte ale grămezii astfel ca segmentele cari unesc două puncte consecutive, să fie mai mică ca ε; grămada n'ar fi conexă.

27. In ordinea de idei care domină teoria grămezilor, o linie poate fi definită ca o grămadă de puncte conexă, închisă (adică punctele limite ale grămezii fac parte din grămadă) și fără puncte interioare: toate punctele cari formează linia, sunt numai puncte ale frontierei. O suprafață poate fi definită ca având pe lângă proprietățile precedente și puncte interioare; punctele frontiere pot fi considerate ca făcând parte sau nu din suprafață.

In teoria funcțiunilor nu vom aveà de considerat linii și suprafețe definite în așà grad de generalitate. Vom considerà liniile și suprafețele în sensul obicinuit, așà cum le consideră Geometria analitică. O asemenea linie zisă *regulată*, are în fiecare punct, exceptând unele puncte, o tangentă determinată și, dacă curba n'are ramuri infinite, ea se poate descompune într'un număr limitat de arce care să fie întâlnite de o linie dreaptă în cel mult două puncte; ceeace permite a distinge o parte concavă și o parte convexă a curbei.

O porțiune de suprafață este un continuum cu două dimensiuni, mărginit de una sau de mai multe linii regulate. Aceste linii formează conturul suprafeții. Prin definițiune dar, o suprafață (arie) are puncte interioare și este totdeauna posibil a unì două puncte oarecari ale ei printr'o linie ale cărei puncte sunt interioare suprafeții.

O arie se zice cu *conexiune simplă* dacă orice curbă închisă situată în interiorul ariei limitează complect o porțiune a ei. Ceeace caracterizează conexiunea simplă este faptul că orice curbă închisă situată în interiorul ariei se poate reduce, prin o deformațiune continuă, la un punct, fără a eșì din arie. Conturul care limitează o arie cu conexiune simplă se zice *contur simplu*. Un asemenea contur poate fi descris în totalitatea lui de un punct mobil care se mișcă în mod continuu fără a pătrunde în interiorul ariei.

Exemple: aria unui cerc, a unei elipse, a unui pătrat este cu conexiune simplă. Aria mărginită de două cercuri concentrice este cu conexiune *multiplă* (dublă); conturul acestei arii este format de cele două cercuri; un cerc concentric și cuprins între ele, nu poate, prin deformațiune continuă, să fie redus la un punct fără a eșì din aria considerată.

28. Două grămezi A şi B se zic *echivalente* sau *de aceeaş putere* şi se reprezintă prin simbolul:

$$A \sim B,$$

dacă între elementele lor se poate stabili o corespondenţă biunivocă, adică dacă se poate stabili o lege astfel că la fiecare element al unei grămezi să corespundă un element şi numai unul din cealaltă grămadă şi viceversa. De exemplu: grămada numerelor pare 2, 4, 6, ..., $2n$, ... şi a numerelor impare 1, 3, 5, ..., $2n-1$, ... sunt echivalente între ele şi fiecare este echivalentă cu şirul numerelor naturale 1, 2, 3, ... n, ...

Dacă grămezile sunt formate dintr'un număr limitat de elemente, este evident că echivalenţa lor cere ca numărul elementelor să fie acelaş în ambele grămezi.

Din definiţiune rezultă că două grămezi echivalente cu o a treia sunt echivalente între ele. Dacă avem

$$A \sim C, \quad B \sim C,$$

rezultă

$$A \sim B.$$

Se numeşte *sumă* a două grămezi A şi B, grămada C ale cărei elemente sunt elementele celor 2 grămezi şi se notează

$$C = A + B.$$

29. *Grămezi numărabile.* O grămadă se numeşte *numărabilă* dacă este echivalentă cu grămada numerelor întregi pozitive. O grămadă nelimitată de elemente a_n, reprezintate printr'o literă afectată de indicii 1, 2, ... n, ..., constitue o grămadă numărabilă, căci unui număr n din şirul numerelor naturale corespunde un singur element a_n (elementele sunt presupuse distincte) şi vice-versa.

Intr'un mod mai general, să considerăm o grămadă de elemente $a_{m,n}$ reprezentate printr'o literă afectată de doi indici întregi pozitivi m, n dintre care unul cel puţin primeşte o infinitate de valori întregi pozitive [1]).

Pentru a arătă că aceste elemente formează o grămadă numărabilă, să le dispunem în ordinea în care suma indicilor $m + n$ merge crescând şi elementele în care această sumă este constantă să fie dispuse în ordinea crescândă a primului indice m. Vom obţine şirul

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \ldots,$$

---

[1]) Nu este necesar să primească toate valorile întregi pozitive, este de ajuns să primească o infinitate deasemenea valori; de exemplu: valori pare, sau impare, sau...

care se poate scrie

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots,$$

dacă punem:

$$a_{11} = b_1, a_{12} = b_2, a_{21} = b_3, a_{13} = b_4, \ldots$$

Grămada propusă $(a_{m,n})$ fiind identică cu grămada numerelor (b_n) este numărabilă.

In acelaş mod se probează că grămada, ale cărei elemente sunt de forma:

$$a_{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n},$$

este numărabilă, indicii $a_1, a_2, \ldots a_n$, fiind numere întregi pozitive, dintre care unul cel puţin primeşte o infinitate de asemenea valori.

30. *O grămadă numărabilă G ale cărei elemente $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ sunt grămezi numărabile, este o grămadă numărabilă.*

In adevăr, A_m $(m = 1, 2, \ldots)$ fiind o grămadă numărabilă, putem reprezenta elementele sale prin $a_{m,n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Intrăm astfel în cazul în care elementele sunt de forma $a_{m,n}$ $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Corolar. Suma [1] *a două grămezi numărabile este o grămadă numărabilă.*

De unde rezultă: 1⁰. Grămada (a_n), în care n primeşte o infinitate de valori întregi pozitive şi negative, este numărabilă, căci ea se poate privì ca suma a două grămezi în cari n primeşte valori întregi respectiv pozitive şi negative: 2⁰. A şi B fiind două grămezi numărabile, avem

$$A + B \sim A \sim B.$$

Căci grămezile numărabile fiind, prin definiţiune, echivalente cu grămada numerelor întregi, sunt echivalente între ele.

31. *Grămada numerelor raţionale este numărabilă.*

Putem să ne mărginim la cele pozitive. Demonstrarea acestei teoreme este imediată, dacă observăm că un număr raţional pozitiv este de forma

$$a_{m,n} = \frac{m}{n},$$

în care m şi n primesc o infinitate de valori întregi pozitive.

32. *Totalitatea numerelor algebrice reale formează o grămadă numărabilă.*

---

[1]) Grămada formată din elementele celor două grămezi.

Se numeşte *număr algebric* orice număr care este rădăcina unei ecuaţiuni algebrice cu coeficienţi raţionali. Un număr algebric satisface o infinitate de ecuaţiuni algebrice, printre cari, făcând abstracţiune de un multiplicator constant, există *numai una* al cărei grad este cel mai mic (ecuaţiune ireductibilă). Gradul acestei ecuaţiuni se zice *gradul numărului algebric*. Un număr algebric de gradul n satisface dar o singură ecuaţiune ireductibilă de forma:

$$(1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

coeficienţii fiind numere întregi.

Considerăm numai numerele algebrice reale, adică rădăcinile reale ale ecuaţiunii (1) şi le notăm

$$x_{a_0, a_1, a_2, \ldots a_n; k}$$

k primind valori întregi pozitive $\leqq n$.

Aceste rădăcini variabile împreună cu indicii consideraţi, n rămânând constant, formează o grămadă numărabilă G_n (29). Grămada G, ale cărei elemente sunt grămezile G_n ($n = 1, 2, \ldots$), fiind numărabilă (30) teorema este demonstrată.

Această teoremă cuprinde evident pe cea relativă la numerele raţionale. Ecuaţiunile cari admit aceste numere ca rădăcini sunt de gradul întâiu; grămada G se reduce la Grămada G_1.

33. *Totalitatea numerelor reale cuprinse între două limite date formează o gramadă care nu este numărabilă.* Să considerăm intervalul (0,1) şi să demonstrăm că grămada numerelor reale cuprinse în acest interval nu este numărabilă. Pentru aceasta să demonstrăm întâiu propoziţiunea preliminară:

Orice număr cuprins în intervalul (0,1) *poate fi exprimat printr'o fracţiune zecimală de un număr nelimitat de cifre, cele ce încep dela un rang destul de depărtat nefiind toate nule.*

Propoziţiunea este evidentă pentru o fracţiune raţională ce se transformă într'o fracţiune zecimală periodică, simplă sau mixtă. Dacă fracţiunea ordinară se transformă exact în zecimală, este de ajuns să micşorăm ultima cifră semnificativă cu o unitate şi să adăugăm la dreapta numărului cifra 9 repetată de un număr infinit de ori.

Dacă numărul este incomensurabil, el se poate defini ca limita unui şir ilimitat de numere raţionale, de exemplu, de reduseie fracţiunei continue în care el se poate desvoltà. Reduseie fiind transformate în fracţiuni zecimale (cu câte un număr ilimitat de zecimale), numărul incomensurabil va fi definit de un şir ilimitat deasemenea fracţiuni, având fiecare un număr ilimitat de cifre.

Să revenim la teorema noastră. Să presupunem că grămada numerelor reale cuprinse în intervalul (0,1), este numărabilă. Vom puteà reprezintà elementele sale printr'un șir

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Insă, în virtutea propozițiunii preliminare, un număr oarecare a_n, din acest șir se poate reprezintà printr'o fracțiune zecimală nelimitată:

$$(2) \qquad a_n = 0, a_{n1} a_{n2} \ldots a_{np} \ldots,$$

în care cifrele dela un rang determinat nu sunt toate nule. La fiecare valoare a lui n, să facem să corespundă o cifră arbitrară

$$(3) \qquad \beta_n \neq a_{nn}$$

și să considerăm numărul

$$(4) \qquad b = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_n \ldots,$$

care evident este cuprins în intervalul (0,1) și care nu se găsește în șirul (1); căci b diferă de a_1, prin prima cifră zecimală β_1, de a_2 prin a doua cifră zecimală $\beta_2, \ldots$, de a_n prin a n^a cifră zecimală, etc. Prin urmare există numere reale în intervalul (0,1) cari nu fac parte din șirul (1), ceeace este în contradicțiune cu ipoteza după care acest șir ar conține toate numerele reale.

q. e. d.

Teorema precedentă se poate enunța geometric astfel:

Totalitatea punctelor segmentului de dreaptă (0—1) *formează o grămadă care nu este numărabilă.*

34. Putem înlocuì segmentul (0 — 1) printr'un segment de dreaptă oarecare. Căci între punctele a două segmente de dreaptă oarecari se poate stabilì o corespondență biunivocă. Să observăm că putem considerà segmentele situate pe aceeaș dreaptă, deoarece un segment de dreaptă și proiecțiunea sa ortogonală pe o axă, cu care face un unghiu diferit de un unghiu drept, se corespund punct cu punct.

Fie dar (a, b), (a', b') cele două segmente situate pe axa absciselor, x și x' abscisele a două puncte ce voim să se corespundă pe cele două segmente. Substituțiunea

$$(1) \qquad \frac{x'-a'}{b'-a'} = \frac{x-a}{b-a}$$

stabilește corespondența cerută. Cele două segmente considerate sunt dar echivalente

$$(2) \qquad (a, b) \sim (a', b').$$

Dacă unul din cele două segmente devine infinit, fie de exemplu $b' = \infty$, înlocuim substituţiunea precedentă prin cea următoare

$$(3) \qquad \frac{x'-a'}{x'} = \frac{x-a}{b-a}$$

Grămada punctelor situate pe un segment de dreaptă constituie ceeace se numeşte un continuum liniar sau un continuum cu o dimensiune. Putem dar zice că:

Două continuuri liniare oarecari sunt echivalente sau au aceeaş putere.

Intr'un mod mai general: *Două continuuri oarecari cu un acelaş număr de dimensiuni sunt echivalente.*

Numim *continuum cu n dimensiuni* o grămadă cu n dimensiuni ale cărei variabile primesc toate valorile reale cuprinse în intervale date.

Mărginindu-ne la continuuri cu două dimensiuni:

$$(4) \qquad \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d, \end{cases} \qquad \begin{cases} a' \leq x' \leq b', \\ c' \leq y' \leq d', \end{cases}$$

propoziţiunea rezultă din echivalenţele

$$(a,\ b) \sim (a',\ b'), \quad (c,\ d) \sim (c';\ d').$$

35. *Teoremă. Orice grămadă nenumărabilă conţine o grămadă numărabilă.*

In adevăr, oricâte elemente am scoate dintr'o grămadă infinită dată A, ea mai conţine alte elemente. Fie $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ elementele scoase din A; aceste elemente formează o grămadă numărabilă (a_n), $(n = 1, 2, \ldots)$.

36. *Teoremă. Dacă dintr'o grămadă nenumărabilă scoatem o grămadă numărabilă, diferenţa este o grămadă echivalentă cu grămada dată.*

Fie A o grămadă nenumărabilă şi B o grămadă numărabilă conţinută într'însa; diferenţa $A - B = C$, este o grămadă nenumărabilă, căci altfel A ar fi numărabilă (30).

Deasemenea, fie D o grămadă numărabilă conţinută în C, diferenţa $C - D = E$ este nenumărabilă. Să comparăm între ele egalităţile.

$$A = B + D + E, \quad C = D + E.$$

Grămezile D şi B + D fiind numărabile, sunt echivalente între ele; de unde rezultă echivalenţa între grămezile A şi C:

$$A \sim C.$$

Corolar. Grămada numerelor iraţionale dintr'un interval dat, este echivalentă cu aceea a tuturor numerelor reale din acelaş interval, căci diferenţa lor, adică grămada numerelor raţionale, este numărabilă.

Deasemenea, grămada numerelor transcendente (adică a numerelor cari nu sunt algebrice) dintr'un interval dat este echivalentă cu aceea a tuturor numerelor reale din acelaş interval, căci numerele algebrice formează o grămadă numărabilă.

Trecând dela grămezile cu o dimensiune la cele cu două dimensiuni, conchidem că grămada tuturor punctelor situate într'un dreptunghiu este echivalentă cu grămada punctelor aceluiaş dreptunghiu ale căror coordonate carteziane sunt numere iraţionale.

37. *Teoremă. Continuul cu o dimensiune este echivalent cu continuul cu două dimensiuni.*

Putem înlocui continuul liniar prin intervalul $(0, 1)$ şi continuul cu două dimensiuni, format dintr'un dreptunghiu oarecare, prin pătratul $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (34). De altă parte, în virtutea corolarului precedent, ne putem mărgini a considera în regiunile date, numai punctele ale căror coordonate sunt numere iraţionale.

Teorema de demonstrat revine dar a proba că unui număr iraţional z, cuprins în intervalul $(0, 1)$, corespunde un singur punct ale cărui coordonate x, y sunt două numere iraţionale cuprinse în acelaş interval şi viceversa.

Să presupunem numărul z desvoltat într'o fracţiune continuă

$$z = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} \tag{1}$$

în care $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sunt numere întregi pozitive determinate şi diferite de zero. Oricărui număr z din intervalul considerat corespunde un şir determinat deasemenea numere. Viceversa, unui şir dat de numere pozitive, printre care nici unul nu e nul, corespunde un număr unic z cuprins în intervalul $(0, 1)$.

Din şirul numerelor $a_1, a_2, \ldots$ cari determină numărul z să separăm numerele cu indicii impari de cele cu indicii pari şi să formăm expresiunile

$$(2) \quad x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_5 + \cdots}}}, \qquad y = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_6 + \cdots}}},$$

cari determină un punct unic (x, y). Aşadar unui punct z corespunde un punct unic (x, y). Viceversa, presupunând punctul (x, y) determinat de valorile precedente, să luăm pentru z expresiunea (1): punctului (x, y) corespunde un punct unic z. q. e. d.

Observare. Corespondenţa biunivocă între cele două grămezi de dimensiuni diferite nu poate fi continuă, adică punctelor infinit apropiate ale unei grămezi, nu corespund neapărat puncte infinit apropiate ale celeilalte grămezi.

Să presupunem contrariul şi să considerăm totalitatea paralelelor la axa absciselor duse în interiorul pătratului; fiecărei paralele trebuie să-i corespundă în virtutea continuităţii, un segment al axei absciselor. Aceste segmente, în virtutea corespondenţei biunivoce, n'au părţi comune. Din această cauză, totalitatea lor este evident numărabilă, pe când totalitatea paralelelor considerate este echivalentă cu totalitatea numerelor cuprinse în intervalul (0, 1) şi prin urmare, nu este numărabilă. Ipoteza corespondenţei continue este dar absurdă.

CAPITOLUL III.

CANTITĂŢI COMPLEXE. ŞIRURI. SERII ŞI PRODUSE CU TERMENI CONSTANŢI.

I. — CANTITĂŢI COMPLEXE.

38. Să introducem cantitatea complexă

$$a + ib, \tag{1}$$

în care a şi b sunt două numere pozitive sau negative iar i un simbol deocamdată nedeterminat şi să ne propunem a determină natura acestui simbol astfel încât calculul aritmetic să se aplice fără nici o deosebire acestei cantităţi. Aceasta înseamnă mai precis că, păstrând definiţiunile şi modurile de operaţiune din aritmetică, caracterele fundamentale ale acestor operaţiuni să se păstreze şi rezultatele obţinute din aceste operaţiuni să fie şi ele cantităţi de forma (1).

Să observăm înainte de toate că nu poate existà o relaţiune de forma

$$a + ib = o,$$

fără ca $a = b = o$, căci altmintrelea

$$i = -\frac{a}{b}$$

n'ar mai fi un număr distinct de numerele reale; ceeace noi nu presupunem. Să definim acum operaţiunile cu cantităţi complexe de forma (1) şi să vedem cum se particularizează simbolul i prin condiţiunile impuse mai sus.

39. *Adunarea* se va defini prin egalitatea

$$(2) \qquad (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b');$$

rezultatul este deci o cantitatea complexă. Această egalitate arată în acelaş timp că proprietatea fundamentală a adunării de a fi o operaţiune *comutativă* este păstrată; căci A şi B fiind două cantităţi complexe, avem în virtutea definiţiunii (2)

$$A + B = B + A.$$

40. *Scăderea* se va defini prin egalitatea

$$(3) \qquad (a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b');$$

rezultatul este deci o cantitate complexă. In acelaş timp vedem că scăderea este operaţiunea inversă adunării, adică

$$(A - B) + B = A.$$

Până acum n'am fost nevoiţi să facem nici o restricţiune asupra simbolului i. Oricare ar fi natura lui, operaţiunile de adunare şi scădere îşi păstrează proprietăţile lor caracteristice, iar rezultatele sunt cantităţi complexe.

41. *Inmulţirea.* Să considerăm produsul

$$(a + ib)\,(a' + ib')$$

şi să-l tratăm după cum arată semnele, ca un produs de două sume neefectuate. Obţinem astfel:

$$(4) \qquad (a + ib)(a' + ib') = aa' + i(ab' + ba') + i^2 bb'.$$

Produsul nu mai este de forma (1) deoarece conţine i^2. Pentru ca membrul al doilea să se poată reduce la forma (1) este necesar şi suficient ca i^2 să fie de forma

$$(5) \qquad i^2 = \alpha + i\beta,$$

α şi β fiind cantităţi reale. In acest caz vom avea

$$(6) \qquad (a + ib)(a' + ib') = aa' + bb'\alpha + i(ab' + ba' + bb'\beta).$$

Simbolul i este aşadar supus la restricţiunea de a verifica relaţiunea (5). Este de observat însă că α şi β nu sunt arbitrari ci trebuie să satisfacă inegalitatea

$$(7) \qquad \beta^2 + 4\alpha < o,$$

deoarece i privit ca rădăcină a ecuaţiunii (5), scrisă sub forma

$$(8) \qquad i^2 - \beta i - \alpha = 0,$$

nu este o cantitate reală.

Ne rămâne să cercetăm dacă, sub condiţiunile (5) şi (7), proprietăţile fundamentale ale înmulţirii se păstrează. Egalitatea (6) ne arată că dacă permutăm factorii între ei produsul nu se schimbă; prin urmare înmulţirea cantităţilor complexe este *comutativă*.

Să arătăm acum că un produs de doi factori nu se anulează decât împreună cu unul din factorii săi. Intr'adevăr, pentru ca membrul al doilea din (6) să fie nul, trebuie să avem

$$(9) \qquad aa' + \alpha bb' = 0, \quad ba' + (a + \beta b)b' = 0.$$

Dacă $a = b = 0$, ecuaţiunile precedente sunt satisfăcute; deci proprietatea este stabilită. Să presupunem acum că unul din aceste numere, de exemplu, $b \neq 0$. Determinantul

$$\begin{vmatrix} a & \alpha b \\ b & a + \beta b \end{vmatrix} = b^2\left(\frac{a^2}{b^2} + \beta\frac{a}{b} - \alpha\right)$$

nu se anulează niciodată în virtutea condiţiunii (7). Sistemul (9) nu admite deci în acest caz altă soluţiune decât

$$a' = b' = 0.$$

Proprietatea este aşadar stabilită în toate cazurile.

42. *Impărţirea.* Câtul

$$\frac{a + ib}{c + id},$$

a două cantităţi complexe $a + ib$, $c + id$, în care c şi d nu sunt nuli în acelaş timp, se va defini prin egalitatea:

$$(10) \qquad (a + ib) = (c + id)\,(x + iy)$$

sau, în virtutea egalităţii (5),

$$(11) \qquad (a + ib) = (cx + \alpha dy) + i\,(dx + (c + \beta d)\,y).$$

De unde rezultă ecuaţiunile

$$(12) \qquad cx + \alpha dy = a, \quad dx + (c + \beta d)\,y = b,$$

cari admit un sistem unic de valori pentru x şi y, deoarece determinantul

$$\begin{vmatrix} c & \alpha d \\ d & c + \beta d \end{vmatrix}$$

este diferit de zero, în virtutea condiţiunii (7).

Rezultatul împărţirii intră deci în acelaş tip ca şi termenii săi şi este unic.

In sfârşit, proprietatea caracteristică a împărţirii de a fi operaţiunea inversă îmmulţirii, rezultă din însăş definiţiunea pe care am dat-o.

In rezumat, putem spune că cele patru operaţiuni aritmetice se aplică în întregime cantităţilor de formă $a + ib$, i fiind o rădăcină a ecuaţiunii

(8) $$i^2 - \beta i - \alpha = 0.$$

în care α şi β sunt două numere reale supuse la condiţiunea

(7) $$\beta^2 + 4\alpha < 0.$$

Pentru a simplifică calculele şi a aveà o reprezentare geometrică interesantă, se ia

(13) $$\beta = 0, \ \alpha = -1.$$

Ecuaţiunea de condiţiune (8) devine

(14) $$i^2 + 1 = 0.$$

de unde rezultă: $i^3 = -i$, $i^4 = 1, \ldots$

Rezultatele îmmulţirii şi împărţirii se simplifică precum arată egalităţile

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba'),$$
$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Formula binomului lui *Newton*, care rezultă din proprietăţile îmmulţirii, se aplică evident cantităţilor complexe. De unde conchidem expresiunile

$$(a + ib)^m = A + iB, \quad (a - ib)^m = A - iB,$$

A şi B fiind cantităţi reale.

Cantităţile complexe $a + ib$ astfel definite, se mai numesc şi cantităţi *imaginare*; a se numeşte *partea reală*, iar ib partea *pur imaginară* a cantităţii complexe.

43. *Modul*. Cantitatea

$$+\sqrt{a^2 + b^2}$$

se numeşte *valoarea absolută* sau *modulul* cantităţii complexe $a + ib$. Avem, precum se verifică imediat, relaţiunile

$$\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} < \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2},$$
$$\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2} > \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a'^2 + b'^2},$$
$$\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2},$$

cari exprimă proprietăţile următoare:

1°. Modulul unei sume este mai mic sau egal cu suma modulelor termenilor;

2°. Modulul unei diferențe este mai mare sau egal cu diferența modulelor termenilor;

3°. Modulul unui produs este egal cu produsul modulelor factorilor.

44. *Reprezentarea geometrică a cantităților complexe.*

Cantitatea complexă $a + ib$ se reprezintă în plan printr'un punct M ale cărui coordonate rectangulare sunt a, b.

Punctul M se numește *afixul* cantității complexe $a + ib$. Introducând coordonatele polare (ϱ, θ) putem scrie

$$a + ib = \varrho (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Cantitatea pozitivă $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ este modulul cantității complexe date, ea este reprezentată prin distanța dela origină până la punctul (a, b). Unghiul θ, numit *argumentul* lui $a + ib$, este determinat, abstracțiune făcând de un multiplu de 2π.

Egalitatea

$$\varrho (\cos \theta + i \sin \theta) = \varrho' (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

trage dar după sine egalitățile

$$\varrho = \varrho', \quad \theta = \theta' + 2k\pi,$$

k fiind un număr întreg arbitrar.

Egalitățile următoare se verifică imediat:

$$\varrho (\cos \theta + i \sin \theta) \times \varrho' (\cos \theta' + i \sin \theta') = \varrho\varrho' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

$$\frac{\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)}{\varrho' (\cos \theta' + i \sin \theta')} = \frac{\varrho}{\varrho'} \left[\cos (\theta - \theta') + i \sin (\theta - \theta')\right],$$

$$[\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)]^m = \varrho^m (\cos m\theta + i \sin m\theta),$$

m fiind un număr întreg pozitiv. Ultima egalitate subsistă și pentru m întreg negativ, precum rezultă din transformările

$$\left[\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)\right]^{-m} = \frac{1}{[\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)]^m}$$

$$= \frac{1}{\varrho^m} (\cos m\theta - i \sin m\theta) = \varrho^{-m} \left[\cos (-m) \theta + i \sin (-m) \theta\right].$$

In fine, m fiind un număr întreg pozitiv, se recunoaște imediat că avem egalitatea

$$\sqrt[m]{\varrho (\cos \theta + i \sin \theta)} = \varrho^{\frac{1}{m}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{m}\right],$$

în care k este un număr întreg arbitrar. Obţinem m valori diferite dând lui k valorile: $0, 1, 2, \ldots m-1$.

II. — ŞIRURI ŞI SERII SIMPLE CU TERMENI CONSTANŢI.

45. Ca şi în cazul numerelor reale, se zice că un şir de cantităţi complexe

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (a_n = \alpha_n + i\beta_n)$$

este *convergent*, sau admite o limită $A + iB$, dacă la un număr pozitiv ε arbitrar de mic corespunde un număr pozitiv întreg N astfel încât pentru $n \geqq N$ să avem

$$(2) \qquad | a_n - (A + iB) | < \varepsilon.$$

46. *Teoremă. Pentru ca şirul* (1) *să admită o limită* $A + iB$, A *şi* B *fiind cantităţi reale, este necesar şi suficient ca şirurile* (α_n) *şi* (β_n) *să fie convergente şi să aibă respectiv ca limite* A *şi* B.

In adevăr, să presupunem şirul (1) convergent şi limita sa $A + iB$; vom aveà inegalitatea (2) sau

$$(3) \qquad \sqrt{(\alpha_n - A)^2 + (\beta_n - B)^2} < \varepsilon;$$

de unde rezultă inegalităţile

$$(4) \qquad | \alpha_n - A | \leqq \varepsilon, \qquad | \beta_n - B | \leqq \varepsilon.$$

Condiţiunea este deci *necesară*.

Viceversa. Să presupunem că avem $\lim. \alpha_n = A$, $\lim. \beta_n = B$; vom puteà scrie pentru $n \geqq N$, N fiind un număr întreg pozitiv destul de mare,

$$| \alpha_n - A | < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad | \beta_n - B | < \frac{\varepsilon}{2};$$

de unde rezultă inegalitatea

$$| \alpha_n + i\beta_n - (A + iB) | < \varepsilon.$$

Condiţiunea este deci *suficientă*.

47. *Teoremă. Pentru ca şirul* (1) *să fie convergent, este necesar şi suficient ca la un* ε *dat să corespundă un* N *astfel ca, pentru* $n \geqq N$, $n' \geqq N'$, *să avem*

$$| a_n - a_{n'} | < \varepsilon.$$

Această teoremă este o consecinţă a teoremei precedente şi a teoremei (§ 4) cu acelaş enunţ ca cel de sus, relativ la un şir de cantităţi reale.

48. Şirul (1) se numeşte *divergent* dacă la un număr pozitiv M,

oricât de mare voim, corespunde un număr întreg pozitiv N astfel că pentru $n \geq N$ avem

$$|a_n| > M.$$

Dacă șirul dat nu este nici convergent, nici divergent, se zice că *oscilează*.

49. *Serii.* O serie

(1) $$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

ai cărei termeni sunt cantități oarecari, reale sau complexe, se zice *convergentă*, *divergentă* sau că *oscilează* după cum șirul

(2) $$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \qquad (s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

este convergent, divergent sau oscilează.

In cazul de convergență, $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ se numește *suma seriei* (1).

Să enunțăm teorema următoare, consecință imediată a teoremei (46).

Teoremă. Pentru ca seria

$$\Sigma a_n, \ (a_n = \alpha_n + i\beta_n)$$

să fie convergentă este necesar și suficient ca seriile

$$\Sigma \alpha_n, \ \Sigma \beta_n$$

să fie convergente.

50. *Teoremă. Dacă seria modulelor unei serii date*

(1) $$\Sigma a_n \qquad (a_n = \alpha_n + i\beta_n)$$

este convergentă, seria este convergentă.

In adevăr, din inegalitățile

$$|\alpha_n| \leq |a_n|, \quad |\beta_n| \leq |a_n|,$$

rezultă că convergența seriei $\Sigma |a_n|$ trage după sine convergența seriilor $\Sigma \alpha_n$, $\Sigma \beta_n$ și prin urmare a seriei propuse.

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată, căci se poate întâmplà ca seria (1) să fie convergentă fără ca seria modulelor să fie convergentă.

Se zice că o serie este *absolut convergentă* dacă seria modulelor este convergentă și că este *semiconvergentă* în cazul când ea este convergentă, pe când seria modulelor este divergentă.

O serie ai cărei termeni sunt reali și de acelaș semn, este sau absolut convergentă sau divergentă, ea nu poate să fie semiconvergentă.

51. *Teoremă. Suma unei serii absolut convergente este independentă de ordinea termenilor.*

Este evident că schimbarea ordinei unui număr mărginit de termeni într'o serie convergentă oarecare nu poate modifică suma seriei. Este vorba să probăm aci că oricare ar fi *legea după care termenii seriei absolut convergente se succed, suma rămâne aceeaş.*

Fie

(1) $$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

o serie absolut convergentă, pe care s'o ordonăm într'un mod diferit oarecare, scriind-o sub forma

(2) $$a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n + \dots.$$

Termenii seriei (2) nu diferă de aceia ai seriei (1) decât prin rangul ce ocupă, astfel că orice termen al seriei (1) se găseşte în seria (2) şi viceversa, orice termen al seriei (2) se găseşte în seria (1). Să punem

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$
$$S'_n = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n.$$

Este evident că oricare ar fi valoarea numărului întreg n, putem să alegem pentru n' o valoare întreagă destul de mare pentru ca printre primii n' termeni ai seriei (2) să se găsească cei dintâi n termeni ai seriei (1). Vom puteà deci scrie

$$S'_{n'} - S_n = a_\alpha + a_\beta + \dots + a_\lambda,$$

indicii $\alpha, \beta, \dots \lambda$ fiind toţi superiori lui n; de unde

$$|S'_{n'} - S_n| \leqq |a_\alpha| + |a_\beta| + \dots + |a_\lambda|$$

şi *a fortiori*

$$|S'_{n'} - S_n| \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}|,$$

$n + p$ fiind cel mai mare dintre indicii $\alpha, \beta, \dots \lambda$. Insă seria propusă fiind absolut convergentă, putem presupune n destul de mare astfel ca membrul din urmă să fie mai mic ca $\frac{\varepsilon}{2}$ oricât de mic ar fi ε, şi oricât de mare ar fi p, adică să avem

$$|S'_{n'} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

precum şi

$$|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

S fiind suma seriei (1). De unde

$$|S - S'_{n'}| = |(S - S_n) + (S_n - S'_{n'})| \leqq |S - S_n| + |S_n - S'_{n'}|$$

adică

$$|S - S'_{n'}| < \varepsilon.$$

Această inegalitate demonstrează teorema.

52. *Serii semiconvergente. Intr'o serie semiconvergentă suma seriei poate varià când schimbăm ordinea termenilor.*

Această proprietate se constată lesne pe seria

$$(1)\qquad S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots,$$

dacă ordonăm termenii în diferite moduri.

1⁰. Să ordonăm termenii acestei serii astfel încât un termen pozitiv să fie urmat de doi termeni negativi şi să reprezentăm prin S' suma seriei astfel obţinută; vom aveà

$$(2)\qquad S' = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots$$

Însă

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} = \frac{1}{4n-2};$$

prin urmare putem scrie

$$S' = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

adică

$$(3)\qquad S' = \frac{1}{2} S.$$

2⁰. Să ordonăm aceeaş serie astfel încât doi termeni pozitivi să fie urmaţi de un termen negativ şi fie S'' suma corespunzătoare, adică

$$(4)\qquad S'' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Suma din parenteză se poate înlocuì prin suma

$$\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right);$$

ceeace permite să scriem

$$S'' = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

adică

$$(5)\qquad S'' = S + \frac{1}{2} S = \frac{3}{2} S.$$

Să demonstrăm teorema generală următoare:

53. *Teoremă (Riemann). — Intr'o serie semiconvergentă ai cărei termeni sunt reali, putem ordonà termenii în aşà fel ca suma seriei să fie egală cu o cantitate dată după voie.*

Fie

$$(1)\qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

o serie semiconvergentă cu termeni reali; aceşti termeni sunt prin urmare de semne diferite (50). Să reprezentăm prin α_n termenii pozitivi şi prin $-\beta_n$ termenii negativi ai seriei (1). Seriile

$$(2)\qquad \Sigma\alpha_n,\quad \Sigma\beta_n$$

sunt neapărat divergente; căci dacă amândouă ar fi convergente, seria (1) ar fi absolut convergentă, iar dacă una din ele ar fi convergentă şi cealaltă divergentă, seria propusă ar fi divergentă.

De unde rezultă că reprezentând prin σ o cantitate reală oarecare, putem determina două numere întregi $\mu \geqq 1$, $\nu \geqq 1$ astfel ca să avem inegalităţile

$$(3)\qquad \begin{cases} S_\mu \;\;\;\; = \alpha_1 + \dots + \alpha_\mu \;\;\; > \sigma, \\ S_{\mu-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{\mu-1} \leqq \sigma \end{cases}$$

şi

$$(4)\qquad \begin{cases} S_{\mu+\nu} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_\nu) \leqq \sigma, \\ S_{\mu+\nu-1} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_{\nu-1}) > \sigma. \end{cases}$$

Numerele μ şi ν fiind astfel determinate, putem pentru acelaş motiv (divergenţa seriilor (2)), să determinăm două numere întregi $\mu' \geqq 1$, $\nu' \geqq 1$ astfel ca să avem inegalităţile

$$(5)\qquad \begin{cases} S_{\mu+\nu+\mu'} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_\mu) - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu) + (\alpha_{\mu+1} \\ \qquad\qquad + \dots + \alpha_{\mu+\mu'}) > \sigma, \\ S_{\mu+\nu+\mu'-1} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_\nu) + (\alpha_{\mu+1} \\ \qquad\qquad + \dots + \alpha_{\mu+\mu'-1}) \leqq \sigma, \end{cases}$$

şi

$$(6)\qquad \begin{cases} S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'} = (\alpha_1 + \dots \alpha_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_\nu) + (\alpha_{\mu+1} \\ \qquad + \dots + \alpha_{\mu+\mu'}) - (\beta_{\nu+1} + \dots + \beta_{\nu+\nu'}) \leqq \sigma, \\ S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'-1} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_\mu) - (\beta_1 + \dots + \beta_\nu) \\ \quad + (\alpha_{\mu+1} + \dots + \alpha_{\mu+\mu'}) - (\beta_{\nu+1} + \dots + \beta_{\nu+\nu'-1}) > \sigma. \end{cases}$$

Continuând în acelaş mod obţinem şirurile

$$(7)\qquad \begin{cases} S_\mu, & S_{\mu+\nu-1}, & S_{\mu+\nu+\mu'}, & S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'-1}, \dots, \\ S_{\mu-1}, & S_{\mu+\nu}, & S_{\mu+\nu+\mu'-1}, & S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'}, \dots; \end{cases}$$

sumele din prima linie orizontală, fiind mai mari ca σ, cele din a doua linie mai mici, cel mult egale cu σ. Numărul σ se află aşadar cuprins între două sume situate pe aceeaş coloană

$$(S_\mu,\ S_{\mu-1}),\quad (S_{\mu+\nu-1},\quad S_{\mu+\nu}),\quad (S_{\mu+\nu+\mu'},\ S_{\mu+\nu+\mu'-1}),\ \dots$$

a căror diferenţă este respectiv

$$\alpha_\mu,\quad \beta_\nu,\quad \alpha_{\mu+\mu'},\quad \beta_{\nu+\nu'},\ \dots.$$

Insă termenii α_μ, $\alpha_{\mu+\mu'}, \dots$, β_ν, $\beta_{\nu+\nu'}, \dots$ devenind mai mici ca orice cantitate dată, când indicii lor sunt destul de mari, rezultă că printre numerele

$$(8) \qquad \mu, \quad \mu+\nu, \quad \mu+\nu+\mu', \quad \mu+\nu+\mu'+\nu', \ldots,$$

există un număr N astfel încât pentru orice număr n, cuprins printre ele şi satisfăcând inegalitatea $n \geqq N$, să avem

$$(9) \qquad |\sigma - S_n| < \varepsilon,$$

oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε.

Dacă n este cuprins între două numere ale şirului (8), S_n va fi cuprins între sumele corespunzătoare acestor numere şi inegalitatea (9) încă subsistă. q. e. d.

Corolar. Suma seriei semiconvergente cu termeni complexi

$$\Sigma(a_n + i\beta_n) = \Sigma a_n + i\Sigma\beta_n$$

poate deveni egală cu o cantitate $\sigma + i\sigma'$ în care una din cantităţile σ sau σ' este dată după voie.

Se poate întâmplà ca ambele serii Σa_n, $\Sigma\beta_n$ să fie semiconvergente, sau numai una din ele. Putem aşadar ordonà termenii seriei propuse $\Sigma(a_n + i\beta_n)$ astfel ca una din seriile Σa_n, $\Sigma\beta_n$ să aibă o sumă dată după voie. Ordinea termenilor celeilalte serii fiind cu modul acesta determinată, suma corespunzătoare nu poate fi arbitrară.

Din cele ce preced rezultă că o serie a cărei sumă este independentă de ordinea termenilor este absolut convergentă.

54. *Adiţiunea seriilor.* Fie

$$s = \sum_1^\infty a_n, \quad s' = \sum_1^\infty b_n$$

sumele a două serii convergente; vom aveà

$$\Sigma(a_n + b_n) = \Sigma a_n + \Sigma b_n.$$

In adevăr, punând

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad s'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$
$$S_n = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n);$$

avem

$$S_n = s_n + s'_n,$$

de unde

$$\lim S_n = s + s'.$$

Regula adiţiunii se aplică evident la un număr limitat oarecare de serii convergente.

Dacă seriile date sunt absolut convergente, seria $\Sigma(a_n + b_n)$ este absolut convergentă; iar dacă una este absolut şi cealaltă semiconvergentă, seria rezultantă este semiconvergentă.

Se poate întâmplà ca seriile Σa_n, Σb_n să fie semiconvergente sau chiar divergente şi seria $\Sigma(a_n + b_n)$ să fie absolut convergentă.

Astfel seriile

$$\Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad \Sigma \frac{(-1)^n}{2n}$$

sunt semiconvergente şi seriile

$$\Sigma \frac{1}{2n-1}, \quad \Sigma \frac{(-1)^n}{2n}$$

sunt divergente, pe când seriile

$$\Sigma (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right] = \frac{1}{2} \Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$$

$$\Sigma \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right] = \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{n(2n-1)},$$

sunt absolut convergente.

III. — ŞIRURI ŞI SERII DUBLE CU TERMENI CONSTANŢI.

55. Fie

$$a_{m,n} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

un număr real sau complex a cărui valoare se presupune determinată când se dau valorile indicilor m, n. Se zice că $a_{m,n}$ este termenul general al unui şir *de două ori infinit* sau *dublu* (relativ la indicii m, n). Termenii şirului dublu se aşează de obiceiu într'un tablou de formă dreptunghiulară

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdots & a_{0,n} & \cdots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & \cdots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,0} & a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

şi se reprezintă pentru prescurtare prin $(a_{m,n})$. Termenii în cari primul indice este constant se află pe aceeaş linie orizontală, aceia în cari al doilea indice este constant, se află pe aceeaş coloană şi în fine termenii în cari ambii indici sunt egali se zice că se află pe diagonala tabloului.

Termenii unui şir dublu pot fi consideraţi ca o grămadă numărabilă cu două dimensiuni; această grămadă fiind echivalentă cu grămada numerelor întregi pozitive, rezultă că un şir dublu se poate transformà într'un şir simplu, ordonând termenii lui într'un mod convenabil oarecare, de exemplu, în ordinea în care am ordonat elementele unei grămezi cu două dimensiuni pentru a o transformà într'o grămadă cu o dimensiune (§ 29).

56. Un şir $(a_{m,n})$ se zice *convergent* sau că admite o limită A, dacă la un ε dat corespund două numere pozitive întregi M, N astfel încât pentru $m \geqq M$, $n \geqq N$ să avem

$$|A - a_{m,n}| < \varepsilon.$$

In acest caz se scrie

$$\lim_{m=\infty, n=\infty} a_{m,n} = A.$$

Dacă P fiind un număr pozitiv oricât de mare voim, avem

$$|a_{m,n}| > P, \text{ pentru } m \geqq M, \ n \geqq N,$$

şirul se zice *divergent*. In fine dacă şirul nu este convergent, nici divergent, se zice că oscilează.

57. Avem teoremele:

1°. *Un şir nelimitat dublu $(a_{m,n})$ de numere reale, cuprinse între două numere date, admite o limită inferioară şi o limită superioară.*

2°. *Condiţiunea necesară şi suficientă ca şirul $(a_{m,n})$ să fie convergent este ca la un ε dat să corespundă două numere pozitive întregi M, N astfel ca pentru $\substack{m \\ m'} \geqq M$, $\substack{n \\ n'} \geqq N$ să avem*

$$|a_{m,n} - a_{m',n'}| < \varepsilon.$$

Aceeaş demonstraţiune ca în cazul şirurilor simple.

58. Convergenţa unui şir dublu $(a_{m,n})$ nu trage după sine convergenţa şirului simplu obţinut când unul din cei doi indici m sau n rămâne constant.

Exemplu:

$$a_{m,n} = (-1)^{m+n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right);$$

avem

$$\lim a_{m,n} = 0,$$

pe când

$$\lim_{m=\infty} a_{m,n} = \pm\frac{1}{n}, \quad \lim_{n=\infty} a_{m,n} = \pm\frac{1}{m}.$$

Să presupunem însă că şi aceste şiruri sunt convergente şi fie

$$\lim_{m=\infty} a_{m,n} = A_n, \ \lim_{n=\infty} a_{m,n} = B_m, \ \lim_{m=\infty,} a_{m,n} = A;$$

vom aveà

$$\lim_{n=\infty} A_n = \lim_{m=\infty} B_m = A.$$

In adevăr, putem scrie

$$|a_{m,n} - A_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } m \geqq M, \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

şi

$$|a_{m,n} - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } m \geqq M, \ n \geqq N.$$

De unde

$$|A - A_n| \leqq |A - a_{m,n}| + |a_{m,n} - A_n| < \varepsilon, \ m \geqq M, \ n \geqq N,$$

adică

$$\lim A_n = A.$$

In acelaş mod se probează că $\lim\limits_{m=\infty} B_m = A$.

59. Dacă $\lim A_n \neq \lim B_m$, A_n şi B_m având semnificările de mai sus, şirul $(a_{m,n})$ nu poate fi convergent. Dar, chiar în cazul când limitele precedente sunt egale, încă se poate întâmplà ca şirul dat să nu fie convergent, precum ne arată exemplul

$$a_{m,n} = \frac{1}{1 + (m-n)^2}.$$

Oricare ar fi valoarea lui m sau oricare ar fi valoarea lui n, avem

$$\lim_{n=\infty} a_{m,n} = 0, \ \lim_{m=\infty} a_{m,n} = 0,$$

pe când, dacă facem m şi n să tindă în acelaş timp către infinit, $m - n$ este nedeterminat şi $a_{m,n}$ nu tinde către nici o limită.

60. *Serii duble.* Numim serie dublă seria

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \quad a_{0,0} + a_{0,1} + a_{0,2} + \ldots + a_{0,n} + \ldots \\ + a_{1,0} + a_{1,1} + a_{1,2} + \ldots + a_{1,n} + \ldots \\ + a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{2,n} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{m,0} + a_{m,1} + a_{m,2} + \ldots + a_{m,n} + \ldots \end{array} \right.$$

dedusă din şirul dublu $(a_{m,n})$. Să punem

$$(2) \qquad S_{m,n} = \sum_{h=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{h,k}.$$

Seria (1) se zice convergentă, divergentă sau se zice că oscilează, după cum şirul dublu $(S_{m,n})$ este convergent, divergent sau oscilează. In cazul când seria este convergentă, lim $S_{m,n} = S$, pentru $m = \infty$ şi $n = \infty$ se numeşte suma seriei şi se reprezintă, pentru prescurtare, prin

$$S = \sum_{m=o}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m,n} a_{m,n}.$$

61. Din proprietăţile şirurilor duble rezultă:

1⁰. *O serie dublă poate fi convergentă fără ca seriile formate de liniile sau de coloanele de un rang limitat din tabloul* (1) *să fie convergente.*

2⁰. Fie A_m suma seriei formată de linia m^a, B_n suma seriei formată de coloana n^a; *chiar dacă avem*

$$\sum_{m}^{\infty} A_m = \sum_{n}^{\infty} B_n,$$

se poate ca seria (1) *să nu fie convergentă.*

62. *Dacă seria modulelor unei serii duble este convergentă, seria dată este convergentă.*

Fie $S'_{m,n}$ suma modulelor termenilor cari figurează în $S_{m,n}$. Prin ipoteză, $S'_{m,n}$ tinde către o limită pentru $m = \infty$, $n = \infty$; prin urmare la un ε dat corespund două numere pozitive întregi M, N astfel că pentru $m \geqq M$, $n \geqq N$ avem

$$S'_{m+p,\, n+q} - S'_{m,n} < \varepsilon,$$

p şi q fiind două numere pozitive întregi arbitrare. Insă membrul întâiu al acestei inegalităţi este suma modulelor termenilor cari figurează în diferenţa $S_{m+p,\, n+q} - S_{m,n}$, indicii având aceleaşi valori ca mai sus. Prin urmare

$$| S_{m+p,\, n+q} - S_{m,n} | \leqq S'_{m+p,\, n+q} - S'_{m,n};$$

de unde rezultă inegalitatea:

$$| S_{m+p,\, n+q} - S_{m,n} | < \varepsilon, \ (m \geqq M, n \geqq N),$$

care exprimă că şirul dublu $(S_{m,n})$ este convergent; prin urmare seria propusă este convergentă.

Ca şi în cazul seriilor simple, o serie dublă se zice *absolut convergentă* dacă seria modulelor termenilor este convergentă.

63. *Teoremă. Dacă seria* $\Sigma\Sigma a_{m,n} = S$ *este absolut convergentă,* conchidem:

1⁰. *Liniile şi coloanele* (1) *sunt serii absolut convergente.*

2⁰. *Punând*

$$\sigma_n = \sum_{m=o}^{\infty} a_{m,n}, \quad \sigma'_m = \sum_{n=o}^{\infty} a_{m,n}, \text{ vom avea}$$

$$\lim \sigma_n = S = \lim \sigma'_m .$$

Propozițiunea 1⁰ este evidentă căci $\Sigma \mid a_{m,n} \mid$, când unul din cei doi indici variază pe când celalt este fix, este mai mică ca $\Sigma\Sigma \mid a_{m,n} \mid$ în care ambii indici variază.

Propozițiunea 2⁰ este identică cu propozițiunea relativă la șiruri duble (58) în care am înlocuì A_n, B_m, A respectiv prin σ_n, σ'_m, S.

64. *Teoremă. Suma seriei duble $\Sigma\Sigma a_{m,n}$ absolut convergentă este independentă de ordinea termenilor.*

Demonstrațiune analoagă cu cea relativă la serii simple.

Din această teoremă rezultă că fiind dată o serie dublă absolut convergentă, putem, într'o infinitate de moduri, scrie termenii ei într'un șir și formà o serie simplă, a cărei valoare este independentă de ordinea termenilor. Dacă seria este semiconvergentă, suma ei nu este definită decât dacă se dă legea de succesiune a termenilor.

65. *Aplicațiuni:* 1⁰. Să considerăm seria dublă

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2)^a},$$

în care m și n primesc toate sistemele de valori întregi, pozitive și negative, afară de 0,0, a fiind un număr real și valoarea adoptată pentru numitor fiind reală și pozitivă. Să examinăm cum trebuie să fie numerele a pentru ca seria să fie convergentă.

Termenii seriei fiind toți pozitivi, seria nu poate fi decât absolut convergentă în cazul când ea este convergentă. Putem așadar ordonà termenii seriei după voie. Să procedăm în modul următor: Ordonăm termenii astfel ca reunindu-i în grupuri, grupul de gradul p să conțină termenii ai căror ambii indici primesc toate valorile dela $-p$ la $+p$, exceptând pe aceia ai căror indici sunt amândoi în valoare absolută mai mici decât p.

Astfel, valorile lui m și n din primul grup sunt cuprinse în tabloul

−1, −1	−1, 0	−1, 1
0, −1		0, 1
1, −1	1, 0	1, 1

Valorile indicilor din al doilea grup sunt date de tabloul

−2, 2	−2, −1	−2, 0	−2, 1	−2, 2
−1, −2				−1, 2
0, −2				0, 2
1, −2				1, 2
2, −2	2, −1	2, 0	2, 1	2, 2.

In general, grupul de rangul p va fi dat de tabloul

$$
\begin{array}{lccr}
-p,\ -p & -p,\ -(p-1)\ \ldots\ -p,\ 0 & -p,\ 1\ \ldots & -p,\ \ p \\
-(p-1),\ -p & & & -(p-1)\ \ p \\
\vdots & & & \vdots \\
-1,\ -p & & & -1,\ -p \\
0,\ -p & & & 0,\ \ p \\
1,\ -p & & & 1,\ \ p \\
\vdots & & & \vdots \\
p,\ -p & p,\ -(p-1)\ \ldots\ p,\ 0 & p,\ 1\ \ldots & p,\ \ p
\end{array}
$$

Acest tablou este compus din câte $2p+1$ termeni în liniile extreme şi din câte doi în cele $2p-1$ linii intermediare; el conţine deci

$$2(2p+1)+2(2p-1)=8p \text{ termeni.}$$

Fie S_p suma termenilor grupului p; seria propusă va fi convergentă sau divergentă în acelaş timp cu seria $\sum\limits_1^\infty S_p$.

Insă cel mai mare termen al grupului p fiind $\dfrac{1}{p^{2a}}$ şi cel mai mic $\dfrac{1}{2^a p^{2a}}$, avem

$$\frac{8}{2^a p^{2a}} < S_p < \frac{8}{p^{2a-1}}.$$

De unde rezultă că condiţiunea necesară şi suficientă ca seria ΣS_p şi prin urmare seria propusă să fie convergentă este ca să avem $2a-1>1$, adică

$$a>1.$$

2⁰. Seria

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{(am^2+2\,bmn+cn^2)^a}$$

în care a, b, c sunt numere reale satisfăcând inegalitatea

$$b^2-ac<0,$$

este convergentă sau divergentă în acelaş timp cu seria considerată mai sus, căci raportul

$$\left(\frac{am^2+2\,bmn+cn^2}{m^2+n^2}\right)^a$$

a doi termeni corespunzători din ambele serii rămâne cuprins între două numere finite şi de acelaş semn, oricare ar fi valorile lui m şi n, exceptând sistemul $m=n=o$, care este exclus.

66. *Produsul a două serii absolut convergente.* Fie

$$(1) \qquad s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad s' = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

două serii absolut convergente. Seria dublă, al cărei termen general este $c_{ik} = a_i b_k$, este absolut convergentă şi suma sa S este dată de egalitatea $S = ss'$.

Pentru a stabili această propoziţiune, să punem

$$s_m = \sum_{1}^{m} a_i, \quad s'_n = \sum_{1}^{n} b_k, \quad s_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_{ik}$$

$$\sigma_m = \sum_{1}^{m} |a_i|, \quad \sigma'_n = \sum_{1}^{n} |b_k|, \quad \lim_{m=\infty} \sigma_m = \sigma, \quad \lim_{n=\infty} \sigma'_n = \sigma'$$

şi fie R_m, R'_n resturile corespunzătoare ale celor două serii date.

Vom aveà

$$s = s_m + R_m, \quad s' = s'_n + R'_n, \quad s_{mn} = s_m s'_n;$$

de unde

$$(2) \qquad ss' - s_{mn} = s_m R'_n + s'_n R_m + R_m R_n.$$

Insă, în virtutea convergenţii absolute a seriilor (1), există două numere întregi pozitive M, N astfel încât pentru $m \geqq M$, $n \geqq N$, să avem

$$|R_m| < \varepsilon, \quad |R'_n| < \varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. De altă parte, ţinând seamă de inegalităţile

$$(3) \qquad S_m \leqq \sigma_m < \sigma, \quad S'_n \leqq \sigma'_n < \sigma,$$

egalitatea (2) ne dă

$$(4) \qquad |ss' - s_{mn}| < (\sigma + \sigma' + \varepsilon)\varepsilon, \quad (m \geqq M, \ n \geqq N).$$

Această inegalitate demonstrează teorema.

IV. — CONVERGENŢA UNUI PRODUS DE UN NUMĂR NELIMITAT DE FACTORI CONSTANŢI.

67. Fie

$$(1) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

un şir nelimitat de cantităţi oarecari reale sau complexe diferite de -1. Să considerăm produsul care are ca factori

$$1 + a_1, \ 1 + a_2, \ldots, 1 + a_n, \ldots$$

Fie

$$(2) \qquad p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$$

produsul celor dintâiu n factori. Se poate întâmplà ca făcând n să crească necontenit, p_n să tindă către o limită finită sau să nu tindă către nici o limită. In cazul întâiu, dacă limita este *diferită de zero*, vom zice că produsul este *convergent*. In orice alt caz vom zice că produsul este *divergent*.

Pentru ca produsul p_n să tindă către o limită, sau ceeace este tot una, pentru ca șirul

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

să fie convergent este necesar și suficient ca la un număr pozitiv ε dat ε, arbitrar de mic, să corespundă un număr pozitiv N astfel încât pentru $n \geqq N$ să avem

$$(3) \qquad | p_{n+m} - p_n | < \varepsilon,$$

m fiind un număr pozitiv oricât de mare voim.

Produsul p_n fiind prin ipoteză finit și diferit de zero, inegalitatea precedentă se poate înlocuì prin cea următoare

$$(4) \qquad \left| \frac{p_{n+m}}{p_n} - 1 \right| < |\varepsilon,$$

în care am scris ε în loc de $\dfrac{\varepsilon}{|p_n|}$.

Făcând $m = 1$ și dând lui n valori din ce în ce mai mari, conchidem că pentru convergența produsului dat este necesar, însă nu suficient, ca începând dela un rang destul de depărtat, termenii șirului (1) să descrească în valoare absolută și să tindă către zero.

68. Să considerăm mai întâiu cazul când termenii șirului sunt reali și pozitivi. Vom aveà

$$(5) \qquad p_n = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + (a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n) + \ldots + a_1a_2 \ldots a_n > 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$$

de unde rezultă că pentru ca p_n să tindă către o limită finită, când n tinde către infinit, limită neapărat pozitivă, este *necesar* ca suma $\sum_1^n a_n$ să tindă către o limită finită, adică ca seria

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

să fie convergentă.

Condițiunea este *suficientă*. In adevăr, termenii a_n fiind reali și pozitivi, avem inegalitățile

$$1 + a_1 < e^{a_1},\ 1 + a_2 < e^{a_2}, \ldots, 1 + a_n < e^{a_n};$$

de unde

$$(7) \qquad p_n < e^{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} < e^s,$$

s fiind suma seriei (4). Așadar produsul p_n, care crește împreună cu n, rămâne mai mic decât o cantitate finită, prin urmare p_n tinde către o limită finită p; vom scrie

$$\lim p_n = p = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

69. *Observări.* 1⁰. Inegalitatea (7) arată că dacă seria (6) este divergentă, produsul p_n tinde către infinit.

2⁰. Din convergenţa seriei (6) rezultă convergenţa seriilor $\Sigma a_{n-1}\, a_n$, $\Sigma a_{n-2}\, a_{n-1}\, a_n \ldots$, ai căror termeni sunt produsele termenilor şirului (1), luaţi doi câte doi, trei câte trei, ..., căci termenii acestor serii fiind pozitivi, dacă una din ele ar fi divergentă, p_n ar tinde către infinit, ceeace este în opoziţie cu ipoteza că produsul este convergent.

70. Să considerăm acum cazul când termenii şirului (1) sunt reali, negativi şi în valoare absolută mai mici ca 1. Punând semnul în evidenţă să scriem

$$p_n = (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n).$$

Acest produs pozitiv descreşte necontenit când n creşte, prin urmare admite o limită finită mai mare sau egală cu zero. Această limită este mai mare sau egală cu zero după cum seria Σa_n este convergentă sau divergentă.

In adevăr, să considerăm produsul

$$\frac{1}{p_n} = \frac{1}{1-a_1}\,\frac{1}{1-a_2}\cdots\frac{1}{1-a_n}$$

care se poate scrie

$$(7) \qquad \frac{1}{p_n} = \left(1 + \frac{a_1}{1-a_1}\right)\left(1 + \frac{a_2}{1-a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{a_n}{1-a_n}\right).$$

Termenii şirului

$$(8) \qquad \frac{a_1}{1-a_1},\ \frac{a_2}{1-a_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{1-a_n},\ \ldots$$

fiind toţi pozitivi, produsul (5) tinde către o limită finită sau tinde către infinit, după cum seria

$$\Sigma \frac{a_n}{1-a_n}.$$

este convergentă sau divergentă. Insă această serie este convergentă sau divergentă în acelaş timp cu seria Σa_n, căci raportul a doi termeni corespunzători

$$a_n : \frac{a_n}{1-a_n} = 1 - a_n$$

rămâne necontenit finit și diferit de zero. Prin urmare $\frac{1}{p_n}$ tinde către o limită finită sau tinde către infinit, după cum seria Σa_n este convergentă sau divergentă; de unde rezultă că în aceleași condițiuni, produsul p_n tinde respectiv către o limită diferită de zero sau tinde către zero.

Numai în cazul întâiu vom zice, conform definițiunii, că produsul $\Pi(1-a_n)$ este convergent.

Dacă termenii a_n sunt de acelaș semn începând dela un rang m, lăsând la o parte produsul celor dintâiu m factori, ne regăsim în cazurile examinate mai sus.

71. Să considerăm în fine cazul când cantitățile a_n sunt oricum, reale sau complexe, diferite de -1. Voim să arătăm că *dacă seria Σa_n este absolut convergentă, produsul p_n tinde către o limită finită și diferită de zero.*

Pentru aceasta să punem $|a_n| = \alpha_n$ și

$$q_n = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n);$$

vom aveà $|1+a_n| \leqq 1+\alpha_n$; prin urmare

$$|p_n| \leqq q_n.$$

De unde rezultă că dacă seria $\Sigma\alpha_n$ este convergentă, produsul p_n rămâne finit pentru orice valori ale lui n.

Să considerăm identitatea

$$(9) \qquad p_k = p_{k-1}(1+a_k) = p_{k-1} + p_{k-1}a_k;$$

de unde, dând lui k valorile 1, 2, ..., n și adunând, obținem

$$(10) \qquad p_n = 1 + a_1 + p_1 a_2 + p_2 a_3 + \ldots + p_{n-1} a_n.$$

Deasemenea, înlocuind n prin $n+m$, m fiind număr întreg pozitiv oarecare, avem

$$p_{n+m} = 1 + a_1 + p_1 a_2 + \ldots + p_{n+m-1} a_{n+m}.$$

Scăzând aceste două egalități una din alta, avem:

$$p_{n+m} - p_n = p_n a_{n+1} + p_{n+1} a_{n+2} + \ldots + p_{n+m-1} a_{n+m}.$$

De unde, reprezentând prin P o limită superioară a produselor $|p_n|$,

$$|p_{n+m} - p_n| \leqq \mathrm{P}(\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+m}).$$

Insă, în virtutea convergenței seriei $\Sigma\alpha_n$, există un număr pozitiv întreg N, astfel că pentru $n \geqq \mathrm{N}$, membrul al doilea al inegalității precedente este mai mic ca ε, oricât de mic ar fi ε și oricât de mare ar fi numărul întreg pozitiv m, adică

$$|p_{n+m} - p_n| < \varepsilon \qquad (n \geqq \mathrm{N}).$$

Ceeace este condiţiunea necesară şi suficientă ca produsul p_n să aibă o limită finită.

Pentru a arătà că această limită este diferită de zero, să observăm că începând dela un rang destul de depărtat ν, termenii seriei Σa_n fiind toţi mai mici ca unitatea avem:

$$|1 + a_n| \geqq 1 - a_n, \quad n \geqq \nu$$

de unde

$$\prod_{n=\nu}^{\infty} |1 + a_n| \geqq \prod_{n=\nu}^{\infty} (1 - a_n).$$

Insă membrul al doilea are, în ipoteza considerată, o limită mai mare ca zero; de unde rezultă justificarea propoziţiunii.

Produsul $\Pi (1 + a_n)$ pentru care seria Σa_n este absolut convergentă, se zice *produs absolut convergent.*

Din cele ce preced rezultă că un asemenea produs nu poate fi nul decât dacă unul din factorii săi este nul.

Observare. Egalitatea (40) scrisă sub forma

$$\text{(11)} \qquad \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{k-1}\, a_k \qquad (p_0 = 1)$$

ne arată că putem transformà un produs într'o serie. Produsul $\prod_{1}^{\infty} (1 + a_n)$ este convergent sau divergent în acelaş timp cu seria $\Sigma\, p_{n-1} a_n$, cu condiţiunea ca în cazul când seria este convergentă, suma ei să nu fie nulă.

Viceversa. O serie se poate transformà într'un produs. Căci din identitatea

$$\text{(12)} \qquad s_{k+1} = s_k \left(1 + \frac{a_{k+1}}{s_k}\right) \qquad (s_k = a_1 + \ldots + a_k)$$

deducem

$$\text{(13)} \qquad s_{n+1} = s_1 \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{a_{k+1}}{s_k}\right).$$

72. *Valoarea unui produs absolut convergent este independentă de ordinea factorilor.*

Să ne închipuim că scriem factorii într'o ordine diferită şi fie $p'_{n'}$ produsul celor dintâiu n' factori, în noul produs. Putem luà n' destul de mare pentru ca $p'_{n'}$ să cuprindă toţi factori lui p_n; vom aveà, servindu-ne de expresiunea (10) a lui p_n,

$$p'_{n'} - p_n = p_{\alpha-1}\, a_\alpha + p_{\beta-1}\, a_\beta + \cdots + p_{\lambda-1}\, a_\lambda\,,$$

indicii α, β, ..., λ fiind toţi diferiţi şi mai mari ca n.

Reprezintând prin $n+m$ cel mai mare din aceşti indici, vom aveà

$$|p'_{n'}-p_n| \leqq |p_n a_{n+1}| + |p_{n+1} a_{n+2}| + \ldots + |p_{n+m-1} a_{n+m}|.$$

De unde rezultă, precum am văzut (69), inegalitatea

$$|p'_{n'}-p_n| < \varepsilon,$$

dacă presupunem n destul de mare. Insă n' tinde către infinit în acelaş timp cu n; conchidem deci

$$\lim_{n'=\infty} p'_{n'} = \lim_{n=\infty} p_n.$$

73. Un produs $\prod_1^\infty (1+a_n)$ poate aveà o valoare finită şi diferită de zero, fără ca seria Σa_n să fie absolut convergentă. In acest caz produsul se zice *semiconvergent.*

De exemplu produsul

$$\prod_0^\infty \left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

este semiconvergent, căci are o valoare finită, diferită de zero şi seria $\Sigma \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ este semiconvergentă. Avem în adevăr

$$p_{2m+1} = \prod_0^{2m-1} \left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right) =$$

$$\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\ldots\left(\frac{2\,m}{2\,m-1}\cdot\frac{2\,m-1}{2\,m}\right)=1,\quad p_{2m}=1+\frac{1}{2\,m+1}$$

Valoarea produsului este aşa dar egală cu 1.

74. *Valoarea unui produs semiconvergent depinde de ordinea factorilor.*

In adevăr, din egalitatea

$$\Pi(1+a_n) = 1 + a_1 + p_1 a_2 + \ldots + p_{n-1} a_n + \ldots$$

rezultă că seria din membrul al doilea este semiconvergentă în acelaş timp cu produsul din membrul întâiu. Căci dacă această serie ar fi divergentă, produsul ar fi divergent şi dacă ar fi absolut convergentă, ar urmà că seria Σa_n să fie absolut convergentă, deoarece seria $\Sigma |p_n a_{n+1}|$, în care produsele parţiale p_n sunt finite şi diferite de zero, este convergentă împreună cu seria $\Sigma |a_n|$. Ceeace justifică propoziţiunea.

Să considerăm ca exemplu produsul de mai sus:

$$\prod_0^\infty \left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

a cărui valoare în ordinea dată a factorilor este egală cu 1.

1°. Să scriem factorii în ordinea următoare:

$$\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]\cdots\cdots$$

$$\cdots\left[\left(1+\frac{1}{4n-3}\right)\left(1+\frac{1}{4n-1}\right)\left(1-\frac{1}{2\,n}\right)\right]\cdots$$

a cărei lege de succesiune reiese imediat. Primul produs de trei factori este egal cu $\frac{3}{4}$ și fiecare din grupurile următoare este mai mare ca 1. Produsul corespunzător este așadar mai mare ca $\frac{4}{3}$.

2°. Scriind acelaș produs în ordinea următoare

$$\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\right]\cdots\cdots$$

$$\cdots\left[\left(1+\frac{1}{2\,n+1}\right)\left(1-\frac{1}{4\,n+2}\right)\left(1-\frac{1}{4\,n+4}\right)\right]\cdots$$

se recunoaște prin considerațiuni analoage că produsul este mai mic ca $\frac{3}{4}$.

Să observăm că produsele

$$\Pi\left(1+\frac{1}{2\,n+1}\right),\quad \Pi\left(1-\frac{1}{2\,n}\right)$$

sunt divergente: primul este infinit, al doilea nul.

75. Să considerăm produse nelimitate duble de forma

$$\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_{m,n}).$$

Putem într'o infinitate de moduri scrie factorii într'un rând și formă un produs simplu, precum o serie dublă se poate pune sub forma unei serii simple. Produsul $\prod\limits_{m,n}(1+a_{m,n})$ este așadar absolut convergent în acelaș timp cu seria dublă

$$\Sigma\,\Sigma\,a_{m,n}\,.$$

In acest caz, valoarea sa este independentă de ordinea factorilor.

76. *Produsul a două produse convergente se poate înlocuì printr'un produs unic.*

Fie

$$p=\prod_{1}^{\infty}(1+a_n),\quad q=\prod_{1}^{\infty}(1+b_n)$$

două produse convergente; p_m și q_m respectiv produsele primilor m factori; avem

$$p_m\,q_m=\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)(1+b_n).$$

Făcând m să tindă către infinit, rezultă egalitatea

$$p\,.\,q=\prod_{1}^{\infty}(1+a_n)(1+b_n).$$

77. Dacă produsul convergent

$$p = \Pi (1 + a_n)$$

n'are nici un factor nul, avem

$$\Pi \left(\frac{1}{1 + a_n}\right) = \frac{1}{p}.$$

In adevăr, putem pune produsul, ai cărui factori sunt $\frac{1}{1 + a_n}$, sub forma

$$\Pi \left(\frac{1}{1 + a_n}\right) = \Pi \left(1 - \frac{a_n}{1 + a_n}\right).$$

Acest produs este aşadar convergent în acelaş timp cu produsul dat; de unde rezultă

$$p\, \Pi \left(\frac{1}{1 + a_n}\right) = \Pi (1 + a_n) \frac{1}{1 + a_n} = 1.$$

Deasemenea, dacă

$$p = \prod_1^{\infty} (1 + a_n), \quad q = \prod_1^{\infty} (1 + b_n)$$

sunt două produse convergente, dintre cari cel de al doilea este diferit de zero, avem

$$\frac{p}{q} = \Pi \left(\frac{1 + a_n}{1 + b_n}\right),$$

căci

$$\frac{p}{q} q = \Pi \frac{1 + a_n}{1 + b_n} (1 + b_n) = p.$$

CAPITOLUL IV.

VARIABILĂ COMPLEXĂ. FUNCŢIUNI DE VARIABILĂ COMPLEXĂ. SERII ŞI PRODUSE DE FUNCŢIUNI.

I. — VARIABILĂ COMPLEXĂ ŞI FUNCŢIUNI DE VARIABILĂ COMPLEXĂ.

78. *Variabila complexă.* Cantitatea complexă $x = u + iv$ în care u şi v sunt două variabile reale se numeşte variabilă complexă. Ea este figurată printr'un punct raportat la două axe rectangulare Ou, Ov. Se dă de obiceiu lui x numele de *afix* al punctului figurativ. Dacă u şi v variază îndependent între ele, x [1]) se mişcă

[1]) Pentru prescurtare vom spune x sau punctul x în loc de punctul al cărui afix este x.

arbitrar în plan; stabilind însă o relațiune $f(u, v) = o$, x va descrie curba reprezintată prin această relațiune.

O curbă închisă, fară puncte multiple, desparte planul în două regiuni: internă și externă. Un punct se zice că descrie o curbă închisă în sensul pozitiv, dacă un observator identificat cu acest punct are la stânga sa aria interioară curbei. Sensul invers celui pozitiv se numește sens negativ.

Un punct se zice interior unei arii A, dacă un cerc descris din acel punct ca centru cu o rază destul de mică este cu totul în interiorul ariei A. Un punct se zice situat pe limita ariei, dacă cercul descris din acel punct ca centru cu o rază arbitrar de mică, conține puncte interioare și puncte exterioare ariei.

Punând $x = r\ (\cos\theta + i \sin\theta)$, fiecărui punct din plan, exceptând punctele $x = o$ și $x = \infty$, corespunde o valoare unică pentru r și o valoare determinată pentru θ, abstracțiune făcând de un multiple de 2π. In cele două puncte exceptate, avem respectiv $r = o$, $r = \infty$, însă argumentul θ este nedeterminat.

Dacă x descrie o curbă închisă revenind la punctul de plecare, r își reia valoarea inițială, nu totdeauna însă θ. Se recunoaște lesne că θ se reproduce dacă origina este exterioară curbei și că se mărește cu $\pm 2\pi$ dacă origina este în interiorul curbei (presupusă pentru mai multă claritate fără puncte multiple).

Modulul $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ și argumentul $\theta = \operatorname{arc} tg \dfrac{v}{u}$ sunt funcțiuni continue de u și v, excepțiune este pentru θ când x trece prin origină. In acest caz, valoarea lui θ se mărește într'un mod brusc cu $\pm \pi$.

Numim *domeniul* unui punct x_0 totalitatea punctelor x cari satisfac inegalitatea $|x - x_0| < r$, r fiind un număr pozitiv destul de mic.

79. *Simbolul* $x = \infty$. Iată cum suntem conduși a considera punctul dela infinit ca punct unic în plan.

Fie x și x' două variabile complexe reportate la două plane diferite (u, v), (u', v') și legate între ele prin relațiunea biunivocă și reciprocă

(1) $$x' = \frac{1}{x}.$$

Punând
$$x = r\ (\cos\theta + i \sin\theta),$$
avem
$$x' = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\right].$$

Aceste două expresiuni arată că dacă x descrie un cerc în sensul pozitiv având centrul în origina O ($x = 0$) și raza r, x' descrie în sensul negativ un cerc cu centrul în origina O′ ($x' = 0$) cu rază $\frac{1}{r}$. Oricărui punct exterior cercului cu centrul în O îi corespunde prin transformarea (1) un punct interior cercului cu centrul în O′ și reciproc. Când punctul x' tinde către zero intr'o direcțiune oarecare, zicem că x tinde către infinit. Punctului $x' = o$ îi corespunde astfel un punct unic, punctul $x = \infty$.

Pentru a păstrà analogia, vom numì *domeniu* al punctului $x = \infty$, totalitatea punctelor din planul (x) corespunzătoare domeniului punctului $x' = o$, adică toată întinderea planului exterioară unui cerc descris din O ca centru cu o rază arbitrar de mare.

80. *Reprezentarea variabilei complexe pe o sferă.*

In loc de a reprezinta variabila complexă pe un plan, se obișnuește de multe ori a o reprezintà pe o sferă, raportând punctele planului pe o sferă printr'o proecțiune stereografică cu polul pe sferă.

Să ne închipuim o sferă tangentă în origină la planul variabilei x, dedesubtul acestui plan și având un diametru egal cu unitatea. Fie O′ extremitatea diametrului dus prin O; să unim un punct oarecare M al planului variabilei x cu O′ printr'o linie dreaptă, care va străpunge sfera într'un punct X. Unui punct M din planul x îi corespunde pe sferă un punct unic X; viceversa, unind O′ cu un punct oarecare X al sferei, obținem în planul x un singur punct.

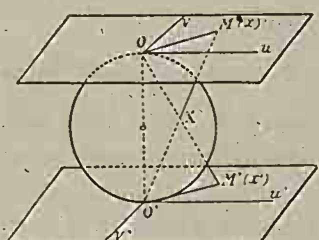

Fig. 3

Prin această construcțiune se stabilește între planul variabilei x și suprafața sferei o corespondență punctuală biunivocă, adică o corespondență punct cu punct a celor două suprafețe, excepțiune făcând de punctul O′ de pe sferă căruia nu corespunde nici un punct determinat pe plan. Noi zicem însă că punctul O′ corespunde punctului dela infinit în planul x. Această convențiune se justifică prin considerațiunile următoare: Să ducem în O′ un al doilea plan tangent la sferă și să considerăm în acest plan două axe perpendiculare O′u' și O′v' (fig. 3); prima O′u' fiind paralelă și de acelaș sens cu Ou, a doua O′v' paralelă și de sens invers lui Ov. Să unim punctul X de pe sferă cu O și fie M′ punctul unde dreapta OX taie planul O′$u'v'$.

Triunghiurile MOO', M'OO' fiind asemenea cu triunghiul OXO', rezultă egalitatea

$$\frac{\overline{OM}}{1} = \frac{1}{\overline{O'M}},$$

sau

$$(1) \qquad |x|\,|x'| = 1,$$

reprezintând prin x' afixul punctului M'. De altă parte, din dispoziţiunea axelor rezultă că avem

$$(2) \qquad \arg x' = -\arg x,$$

abstracţiune făcând de multiple de 2π. Prin urmare, punând

$$x = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

avem între x şi x' relaţiunea

$$(3) \qquad x' = \frac{1}{x}.$$

De unde rezultă că punctului $x' = o$ din planul (x') corespunde punctul $x = \infty$ din planul (x). Insă, în virtutea construcţiunii noastre, punctul $x' = o$ coincide cu punctul O' al sferei; conchidem dar că punctului O' al sferei corespunde punctul $x = \infty$.

Din cele ce preced rezultă că sfera poate servì a reprezintà variaţiunea totală a variabilei complexe, punctul zero şi punctul ∞ fiind figurate respectiv prin extremităţile diametrului OO' [1]).

31. *Funcţiune de variabilă complexă.* Prin analogie cu variabila reală, vom zice că o variabilă y este funcţiune de o variabilă complexă x, dacă la fiecare valoare a lui x, aparţinând unei regiuni date a planului, corespunde una sau mai multe valori determinate pentru y.

Vom da mai târziu o definiţiune a funcţiunii de variabilă complexă mai restrictivă decât cea precedentă, funcţiune ce poartă numele de *analitică* şi care singură va face obiectul cursului nostru. Păstrând deocamdată definiţiunea de mai sus, vom zice că o funcţiune este *uniformă* sau *multiformă* într'o regiune dată, după cum la o valoare lui x din aceà regiune corespunde una sau mai multe valori pentru y.

Punând $x = u + iv$, y poate fi privit ca o funcţiune de două variabile reale u şi v; îi se pot deci aplicà toate teoremele relative la funcţiunile de două variabile reale, în cari nu intervine realitatea

---

[1]) Trebuie să observăm că teoria funcţiunilor este stabilită independent de vreo reprezintare specială a variabilei. Reprezintarea geometrică rămânând un simplu auxiliar intuitiv, care poate uşurà vorbirea şi enunţarea teoremelor.

lui y. Nu este însă inutil a repetà câteva din acele definiţiuni şi proprietăţi al căror enunţ primeşte, în cazul actual, o formă mai simplă.

82. *Continuitate.* Vom zice că o funcţiune $y = f(x)$ este continuă în domeniul punctului x_0, dacă la un număr pozitiv ε oricât de mic ar fi, putem face să corespundă un număr pozitiv ϱ astfel încât să avem

$$(1) \qquad | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon,$$

pentru toate punctele x cari satisfac inegalitatea

$$(2) \qquad | x - x_0 | < \varrho.$$

Ca şi în cazul unei funcţiuni de variabilă reală se probează că inegalitatea (1) trage după sine inegalitatea

$$| f(x') - f(x'') | < \varepsilon' \ (\varepsilon' = 2\varepsilon)$$

x' şi x'' fiind două puncte oarecari situate în interiorul cercului $| x - x_0 | < \varrho$.

Să mai observăm că în virtutea definiţiunii cuvântului de limită, inegalitatea (1) este echivalentă cu egalitatea

$$(3) \qquad \lim_{x=x_0} f(x) = f(x_0),$$

când x se apropie de x_0 după *orice direcţiune.*

Dacă $f(x)$ este o funcţiune continuă în domeniul fiecărui punct dintr'o regiune dată a planului, $f(x)$ se zice continuă în aceà regiune.

83. *Modulul unei funcţiuni $f(x)$ continuă în domeniul unui punct $x = x_0$ este o funcţiune continuă în acelaş domeniu.*

In adevăr, din inegalitatea

$$| f(x) | - | f(x_0) | \leqq | f(x) - f(x_0) |$$

rezultă, presupunând inegalitatea (1) satisfăcută, că avem:

$$| f(x) | - | f(x_0) | < \varepsilon.$$

De acì rezultă că modulul unei funcţiuni continue de variabilă complexă, fiind o funcţiune reală de variabilele reale u şi v, continuă în regiunea considerată, atinge cel puţin într'un punct al regiunii de continuitate limitele sale superioară şi inferioară, adică există în această regiune cel puţin un punct în care $| f(x) |$ este maximum şi cel puţin un punct în care $| f(x) |$ este minimum.

84. *Continuitate uniformă. — O funcţiune $f(x)$ de variabilă complexă este uniform continuă în regiunea în care ea este continuă.*

Aceasta înseamnează că la un ε pozitiv arbitrar de mic, corespunde un număr pozitiv ϱ astfel că oricare ar fi punctul x_0 în regiunea considerată, avem inegalitatea

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

pentru toate punctele x', x'' situate în interiorul cercului $|x - x_0| < \varrho$.

Fie x_0 un punct în regiunea A în care $f(x)$ este continuă şi R maximul lui ϱ corespunzător lui x_0. Presupunând ε constant, R variază împreună cu x_0. Să arătăm că R este o funcţiune continuă de x. Pentru aceasta fie x_1 un punct în interiorul cercului

$$(1) \qquad |x - x_0| = R$$

şi R_1 valoarea corespunzătoare a lui R. Cercul

$$(2) \qquad |x - x_1| = R_1$$

taie cercul (1) sau cel puţin este tangent la acest cerc. Punând $\delta = |x_1 - x_0|$, vom aveà, prin urmare,

$$(3) \qquad R_1 \geqq R - \delta.$$

Să presupunem δ astfel ca x_0 să fie în interiorul cercului (2); vom aveà, pentru acelaş motiv,

$$(4) \qquad R \geqq R_1 - \delta.$$

Din inegalităţile (3) şi (4) rezultă inegalitatea

$$|R - R_1| \leqq \delta,$$

care probează că R este o funcţiune continuă de poziţiunea (u_0, v_0) a punctului $x_0 = u_0 + iv_0$. Această funcţiune admite deci într'un punct a din A un minimum $\varrho > o$. Căci dacă ϱ ar fi nul, aceasta ar însemnà că în domeniul lui a, inegalitatea

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

este imposibilă. Ceeace este contra ipotezei, după care funcţiunea $f(x)$ este continuă în toată aria A. q. e. d.

Proprietăţile relative la continuitatea unei sume, diferenţe, produs şi cât de funcţiuni continue de variabilă reală se aplică evident şi funcţiunilor de variabilă complexă.

II. — SERII ŞI PRODUSE DE FUNCŢIUNI.

85. *Serii de funcţiuni.* — Fie

$$(1) \qquad f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots$$

un şir nelimitat de funcţiuni de variabila x şi să considerăm seria

$$(2) \qquad \sum_1^\infty f_n(x).$$

Această serie poate fi convergentă pentru unele valori ale lui x şi divergentă pentru altele. Totalitatea punctelor x în care seria este convergentă constitue regiunea de convergenţă a seriei.

86. *Definiţiune.* Seria (2) se zice *uniform convergentă într'o aria A a regiunei sale de convergenţă, dacă la un număr pozitiv ε arbitrar de mic, corespunde un număr întreg pozitiv N, astfel încât pentru $n \geqq N$ să avem*

$$\left| \sum_{m=n}^{\infty} f_m(x) \right| < \varepsilon,$$

oricare ar fi poziţiunea punctului x în aria A.

Ceeace caracterizează convergenţa uniformă este faptul că numărul N, care în cazul unei serii convergente oarecare, depinde de x şi de ε, depinde în cazul considerat numai de ε.

Numărul N aşà considerat se poate privi ca limită superioară a valorilor lui n pentru cari inegalitatea

$$\left| \sum_{1}^{\infty} f_m(x) - \sum_{1}^{n} f_m(x) \right| < \varepsilon,$$

este satisfăcută, x fiind un punct oarecare în A. Dacă limita superioară a acestor numere este infinită, seria dată nu este uniform convergentă în aria A, deşi este convergentă în fiecare punct al ei.

Exemple: 1°. Seria

$$(3) \qquad 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

absolut convergentă în interiorul cercului $|x| = 1$, este uniform convergentă în acest cerc.

In adevăr, fie r_0 un număr pozitiv oricât de aproape voim de 1, însă mai mic ca 1 şi x un punct oarecare situat în interiorul cercului $|x| = r_0$:

$$|x| = r, \quad o < r < r_0 < 1.$$

Reprezintând prin $R_n(x)$ restul seriei (3):

$$R_n(x) = x^n + x^{n+1} + \dots = \frac{x^n}{1-x},$$

avem

$$|R_n(x)| \leqq \frac{r^n}{1-r} < \frac{r_0^n}{1-r_0}.$$

Este totdeauna posibil a satisface inegalitatea

$$\frac{r_0^n}{1-r_0} < \varepsilon,$$

pentru o valoare $n = N$. Luând logaritmii ambelor membre, obţinem

$$n > \frac{\log \varepsilon (1 - r_0)}{\log r_0}.$$

Este de ajuns să luăm N egal cu numărul întreg imediat superior membrului al doilea, adică

$$\frac{\log \varepsilon (1 - r_0)}{\log r_0} < N \leqq 1 + \frac{\log \varepsilon (1 - r_0)}{\log r_0},$$

pentru ca în interiorul cercului $|x| = r_0$, precum şi pe cercul însuş, să avem

$$|R_n| < \varepsilon, \quad n \geqq N.$$

2°. Să considerăm seria

(4) $$x + x(1 - x) + x(1 - x)^2 + \ldots,$$

care pentru valori reale ale lui x este convergentă pentru $o \leqq x < 2$, însă nu este uniform convergentă în vecinătatea lui $x = o$. In adevăr avem

$$R_n(x) = x(1 - x)^n + x(1 - x)^{n+1} + \ldots = (1 - x)^n.$$

Punând $|1 - x|^n < \varepsilon$, deducem

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |1 - x|}.$$

Când x tinde către zero, valoare pentru care seria este convergentă, având valoarea zero, membrul al doilea tinde către infinit. De unde rezultă că în intervalul considerat, seria nu este uniform convergentă.

87. O serie $\Sigma f_n(x)$ poate fi uniform convergentă fără a fi absolut convergentă. De exemplu seria

$$\Sigma \frac{1}{x + n},$$

în care n primeşte toate valorile pozitive şi negative, afară de zero, este uniform convergentă în cercul $|x| = 1$, însă nu absolut convergentă. In adevăr, presupunând termenii seriei dispuşi în ordinea valorilor crescânde ale lui $|n|$, avem

$$R_m = \frac{1}{x + m} + \frac{1}{x - m} + \frac{1}{x + m - 1} + \frac{1}{x - (m + 1)} + \ldots$$
$$= 2x \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}.$$

De unde, punând $|x| = r < r_0 < 1$, avem

$$|R_m| < 2r_0 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2 - r^2_0}.$$

Insă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - r^2_0}$, ai cărei termeni sunt pozitivi, fiind convergentă, există un număr N, astfel că pentru $m \geqq N$, membrul al doilea al inegalității precedente este mai mic ca ε. Așadar seria dată este uniform convergentă.

Această serie nu este absolut convergentă, căci seria modulelor $\sum \frac{1}{|x+n|}$ este divergentă.

88. In privința seriilor absolut și uniform convergente într'o arie dată, avem teorema următoare a lui *Weierstrass:*

Teoremă. Dacă există un șir de numere pozitive

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

astfel că oricare ar fi pozițiunea lui x in A, avem

$$|f_n(x)| \leqq a_n, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

și dacă seria

$$\Sigma a_n$$

este convergentă, seria

$$\sum_1^{\infty} f_n(x)$$

este absolut și uniform convergentă în interiorul lui A.

Convergența absolută a seriei este evidentă, căci fiecare termen al seriei este mai mic sau egal cu termenul corespunzător al unei serii convergente cu termeni pozitivi.

In ce privește convergența uniformă, să observăm că seria numerelor a_n fiind convergentă, la un ε dat corespunde un număr întreg N astfel încât

$$a_n + a_{n+1} + \ldots < \varepsilon,$$

pentru $n \geqq N$. Insă

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{m=n}^{\infty} f_m(x) \right| \leqq a_n + a_{n+1} + \ldots;$$

prin urmare avem pentru $n \geqq N$, inegalitatea

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

în toată aria considerată. q. e. d.

89. Fie x_0 un punct al regiunei de convergență a seriei

$$\Sigma f_n(x).$$

Să presupunem că există un număr pozitiv ϱ astfel ca seria să convergeze uniform pentru toate valorile lui x cari împlinesc condiţiunea

$$|x - x_0| \leq \varrho;$$

vom zice că seria convergează uniform în vecinătatea punctului x_0.

Fie R limita superioară a lui ϱ; aria cuprinsă în interiorul cercului $|x - x_0| = R$ se va numi relativ la seria dată, *domeniul* [1]) punctului x_0 şi R raza acestui domeniu.

Fie x_1 un punct oarecare în domeniul lui x_0. Este evident că seria convergează uniform în vecinătatea lui x_1. Să presupunem că domeniul acestui punct cuprinde puncte în afară din domeniul lui x_0 şi să considerăm un punct x_2 situat în domeniul său, etc. Totalitatea domeniilor astfel obţinute constitue o arie continuă (adică o arie astfel că putem uni două puncte oarecari ale ei, printr'o linie continuă situată în interiorul ariei), mărginită de una sau mai multe linii, de linii şi puncte sau chiar de puncte izolate. In aria astfel obţinută seria convergează uniform în domeniul fie cărui punct; ceeace rezultă din însăş formarea acestei arii.

90. *Viceversa. Dacă seria $\Sigma f_n(x)$ convergează uniform în vecinătatea oricărui punct situat într'o arie A şi pe conturul ei, ea convergează uniform în toată aria.*

Să observăm mai întâiu că dacă seria convergează uniform într'un număr limitat de porţiuni ale planului formând în totalitatea lor o regiune conexă, ea convergează uniform in toată regiunea; căci este deajuns a luă pentru numărul N, care figurează în definiţiunea convergenţii uniforme (86), cea mai mare din valorile corespunzătoare acestor porţiuni.

Fie x un punct situat în aria A şi R raza domeniului corespunzător acestui punct. Făcând să varieze x fără a eşi din A, raza R admite un minimum $R_0 > o$ [2]). De unde rezultă că dacă ducem drepte paralele la axele de coordonate, depărtate între ele cu distanţa $\frac{R_0}{2}$, descompunem aria A într'un număr limitat de porţiuni (pătrate şi părţi din pătrate mărginite de conturul lui A) astfel că distanţa a două puncte oarecari a fiecăreia din ele este mai mică ca R_0. Seria convergează dar uniform, în virtutea ipotezei, în fiecare din aceste porţiuni şi prin urmare, după observaţiunea de mai sus, ea convergează uniform în toată aria.

---

[1]) Acest cuvânt are deci în cazul considerat o semnificare mai precisă decât cea care rezultă din definiţiunea sa (18), unde raza cercului este nedeterminată.

[2]) Demonstraţia este identică cu cea relativă la continuitatea uniformă (84).

91. Se poate întâmplà să existe puncte în afară din aria obținută mai sus, în domeniul cărora seria dată să fie uniform convergentă; plecând dela unul din ele și procedând în acelaș mod, obținem o nouă arie continuă în care seria este uniform convergentă. Această a doua arrie nu va aveà nici un punct comun cu cea dintâiu, afară poate, unul sau mai multe puncte ale conturului; sau chiar, poate, conturul întreg.

Să considerăm, ca exemplu, seriile

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Cea d'intâiu este, precum am văzut, uniform convergentă în cercul $|x| = r_0 < 1$; sau, mai scurt, în interiorul cercului $|x| = 1$. Ea este divergentă în afară din acest cerc.

Cea de a doua serie este absolut și uniform convergentă atât interiorul cercului $|x| = 1$, cât și în tot planul exterior; ea este divergentă pe cerc. In adevăr, punctul x fiind în interiorul cercului, fie

$$|x| = r < r_0 < 1,$$

r_0 diferind de 1 cu oricât de puțin voim; avem

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| < \frac{r_0^n}{1-r_0^n}.$$

Insă seria al cărui termen general este $\frac{r_0^n}{1-r_0^n}$ este convergentă în acelaș timp cu seria al cărei termen general este r_0^n, căci raportul acestor doi termeni rămâne necontenit finit și diferit de zero. Așà dar seria (2) este absolut și uniform convergentă în interiorul cercului $|x| = 1$.

Să presupunem acum punctul x exterior cercului $|x| = 1$ și să punem $x = \frac{1}{x'}$; termenul general devine

$$\frac{x'^n}{1+x'^{2n}}.$$

Seria transformată fiind de aceaș formă ca seria propusă, este absolut și uniform convergentă în interiorul cercului $|x'| = 1$, și prin urmare seria (2) este absolut și uniform convergentă în tot planul exterior cercului $|x| = 1$.

In fine, x fiind un punct oarecare al cercului $|x| = 1$, avem

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \geq \frac{1}{2};$$

de unde rezultă că dealungul cercului seria este divergentă. Astfel, cele două regiuni de convergenţă uniformă ale seriei considerate n'au nici un punct comun între ele.

92. Fiind dată o serie convergentă

$$\sum^{\infty} f_n(x),$$

într'o arie A ai cărei termeni $f_n(x)$ sunt funcţiuni continue, se poate oare afirmă că suma ei

$$F(x) = \Sigma f_n(x),$$

a cărei valoare este determinată în fiecare punct al ariei A, este o funcţiune continuă în această arie? Răspunsul este negativ.

De exemplu, seria

$$F(x) = x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots,$$

convergentă pentru valorile reale ale lui x, $o \leq x < 2$, ai cărei termeni sunt funcţiuni continue, este egală cu 1 pentru $x \neq o$ şi prin urmare.

$$\lim_{x=o} F(x) = 1;$$

valoarea sa însă pentru $x = o$ este nulă. Ea este deci discontinuă pentru $x = o$.

93. O condiţiune suficientă, nu însă necesară [1]), pentru ca suma unei serii de funcţiuni continue să fie o funcţiune continuă este dată de teorema următoare:

Teoremă. Suma unei serii uniform convergente de funcţiuni continue într'o arie dată este o funcţiune continuă în acea arie.

In adevăr, fie $F(x) = \Sigma f_n(x)$ şi x, x_0 două puncte oarecari în regiunea dată. Să considerăm diferenţa $F(x) - F(x_0)$, pe care o putem scrie

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{n=1}^{m} [f_n(x) - f_n(x_0)] + \sum_{m+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{m+1}^{\infty} f_n(x_0).$$

---

[1]) Condiţiunea necesară şi suficientă este ca convergenţa să fie quasi uniformă, noţiune introdusă de Arzela (E. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles, pag. 41). O serie se zice că convergează *quasi-uniform* între două numere reale a, b: 1°. dacă este convergentă în intervalul (a, b); 2°. dacă la un ε dat şi la un număr întreg pozitiv N oricât de mare voim putem face să corespundă un număr finit $N' \geq N$, astfel ca pentru orice valoare a lui x cuprinsă în intervalul (a, b), să existe un număr întreg n_x cuprins între N şi N' şi astfel ca să avem

$$\left| \sum_{\mu=n_x}^{\infty} U_\mu(x) \right| < \varepsilon.$$

Seria dată fiind uniform convergentă, la un ε dat corespunde un număr întreg m, astfel că

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{m+1}^{\infty} f_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De altă parte, funcţiunile $f_n(x)$ fiind continue, suma unui număr limitat de termeni este o funcţiune continuă, şi prin urmare există, un număr pozitiv r, astfel că pentru $|x - x_0| < r$, avem

$$\left| \sum_{1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] \right| < \frac{\varepsilon}{3};$$

de unde rezultă

$$|F(x) - F(x_0)| <_0 \varepsilon,$$

pentru $|x - x_0| < r$.

q. e. d.

94. *Produse de funcţiuni.* — Noţiunea de convergenţă uniformă a produselor nelimitate de funcţiuni se introduce în acelaş mod ca pentru serii de funcţiuni.

Fie

(1) $$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \quad u_n = f_n(x),$$

un şir nelimitat de funcţiuni de variabila x; vom zice că produsul

(2) $$p = \prod_{1}^{\infty} (1 + u_n)$$

este uniform convergent într'o porţiune A a regiunei sale de convergenţă, dacă la un număr pozitiv ε, oricât de mic voim, corespunde un număr întreg N, astfel ca pentru $n \geqq N$, inegalitatea

$$\left| \prod_{1}^{\infty} (1 + u_m) - \prod_{1}^{n} (1 + u_m) \right| < \varepsilon$$

să fie satisfăcută, oricare ar fi poziţiunea punctului x în A.

Se mai poate zice că produsul dat este uniform convergent, dacă seria echivalentă

(3) $$1 + u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_n u_{n+1} + \ldots, \quad \left(p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k)\right)$$

este uniform convergentă.

95. *Teoremă. Dacă seria Σu_n este absolut şi uniform convergentă într'o regiune dată, produsul*

$$p = \prod_{1}^{\infty} (1 + u_n)$$

este absolut şi uniform convergent în aceeaş regiune [1]).

[1]) Factorii în cari $u_n = -1$ se presupun scoşi din produs.

Partea întâiu a propoziţiunii rezultă din definiţiunea convergenţei absolute a unui produs.

Pentru a demonstra partea a doua să înlocuim produsul (2) prin seria (3) şi să reprezintăm prin P_n şi P produsele corespunzătoare lui p_n şi p când înlocuim funcţiunile u_n prin modulele lor,

$$P_n = \prod_1^n (1 + |u_m|), \; P = \prod_1^\infty (1 + |u_m|);$$

vom aveà

$$|p_n| < P_n < P.$$

De unde rezultă, servindu-ne de seria (3) echivalentă produsului,

$$\left| \prod_1^\infty (1 + u_m) - \prod_1^n (1 + u_m) \right| \leqq P_n |u_{n+1}| + P_{n+1} |u_{n+2}| + \dots$$

$$< P[|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots].$$

Seria $\Sigma |u_n|$ fiind uniform convergentă, la un ε dat corespunde un număr pozitiv întreg N, astfel ca pentru $n \geqq N$, să avem

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots < \frac{\varepsilon}{P},$$

oricare ar fi poziţiunea punctului x în regiunea considerată. De unde rezultă inegalitatea

$$\left| \prod_1^\infty (1 + u_m) - \prod_1^n (1 + u_m) \right| < \varepsilon,$$

valabilă în aceeaş regiune îndată ce $n \geqq N$. q. e. d.

96. *Teoremă. Dacă funcţiunile $u_n = f_n(x)$ sunt continue într'o arie A, produsul*

$$p(x) = \prod_1^\infty (1 + u_n)$$

uniform convergent în A, defineşte o funcţiune continuă în această arie.

In adevăr, fie x şi x_0 două puncte situate în A, vom aveà pentru n destul de mare,

$$|p(x) - p_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |p(x_0) - p_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ε fiind arbitrar de mic. Insă $p_n(x)$ fiind un produs de un număr limitat de factori este o funcţiune continuă în acelaş timp cu factorii săi, prin urmare există un număr pozitiv r astfel că pentru $|x - x_0| < r$ avem

$$|p_n(x) - p_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Din aceste trei inegalități rezultă inegalitatea

$$| p(x) - p(x_0) | < \varepsilon,$$

pentru $| x - x_0 | < r$. Ceeace demonstrează teorema.

97. *Teoremă. Dacă seria* $\Sigma | a_n |$ *este convergentă, produsul*

$$\prod_1^\infty (1 + a_n x)$$

este absolut și uniform convergent pentru orice valoare finită a lui x *și se poate pune sub forma*

$$(4) \quad \prod_1^\infty (1 + a_n x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

coeficienții A_n *având valori finite.*

Convergența absolută și uniformă a produsului pentru orice valoare finită a lui x este o consecință imediată a teoremei (95).

Pentru a justifică desvoltarea (4), să considerăm produsul p_n al celor dintâi n factori și să efectuăm acest produs după puterile lui x:

$$p_n = 1 + (\Sigma a_1) x + (\Sigma a_1 a_2) x^2 + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n x^n.$$

Făcând n să tindă către infinit, sumele $\Sigma a_1 a_2$, $\Sigma a_1 a_2 a_3$, ... tind către valori finite în acelaș timp cu suma $\Sigma | a_n |$ [1]. De unde rezultă teorema enunțată.

CAPITOLUL V.

SERII DE PUTERI. PROPRIETĂȚI ALE SERIILOR INTREGI.

98. I. *Serii de puteri.* Printr'o serie de puteri de x înțelegem o serie de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n,$$

exponenții variabilei x fiind numere întregi pozitive și negative și coeficienții a_n cantități constante oarecari, reale sau complexe.

Vom consideră mai întâiu seriile de puteri în cari exponenții sunt numere pozitive, adică serii de forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

numite serii întregi și vom reprezentă o asemenea serie prin simbolul

$$\mathrm{P}(x).$$

---

[1] V. (§ 69).

Aceste serii joacă în Analiza matematică un rol preponderant. Vom demonstrà aci proprietăţile fundamentale ale acestor serii şi vom începe prin teorema datorită lui *Abel*, a cărei importanţă este capitală în Teoria funcţiunilor.

99. *Teorema lui Abel. — Fiind dată seria întreagă*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dacă pentru o valoare $x = x_0$ *a variabilei şi pentru toate valorile întregi pozitive ale lui* n, *avem*

$$|a_n x_0^n| < M,$$

M fiind un număr pozitiv oarecare dat, seria $P(x)$ *va fi absolut convergentă pentru toate valorile lui* x *cari satisfac inegalitatea*

$$|x| < |x_0|.$$

Fie

$$|x| = r, \quad |x_0| = r_0, \quad r < r_0;$$

avem prin ipoteză

$$|a_n| r_0^n < M,$$

de unde

$$\left| a_n x^n \right| < M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Insă seria

$$M \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

este convergentă, căci termenii ei formează o progresiune geometrică a cărei raţie este $\frac{r}{r_0} < 1$; prin urmare seria $P(x)$ este absolut convergentă în *interiorul* cercului descris din origină ca centru cu raza r_0. q. e. d.

Corolar. — Dacă seria $P(x)$ este convergentă pentru o valoare $x = x_0 \neq 0$, ea va fi absolut convergentă pentru valorile lui x cari satisfac inegalitatea $|x| < |x_0|$. In adevăr, în acest caz, termenii $|a_n x^n|$ tinzând către zero când n tinde către infinit, există un număr pozitiv M pentru care inegalitatea

$$|a_n x^n| < M$$

este satisfăcută pentru toate valorile întregi şi pozitive ale lui n.

100. Din cele ce preced rezultă că dacă o serie întreagă este divergentă pentru o valoare $x = x_0$, ea va fi divergentă pentru toate valorile lui x a căror module sunt mai mari ca $|x_0|$. Căci

dacă seria ar fi convergentă pentru o valoare $x = x_1$, $|x_1| > |x_0|$, ar urmà, în virtutea corolarului precedent, ca ea să fie convergentă pentru $x = x_0$; ceea ce este contrar ipotezei.

Așadar, dacă o serie întreagă este divergentă într'un punct x_0, ea va fi divergentă în tot planul variabilei situat în afară din cercul descris din origină ca centru cu raza $r = |x_0|$.

101. *Cercul de convergență.* Fiind dată o serie întreagă $P(x)$, se poate întâmplà ca ea să nu fie convergentă decât în punctul $x = o$.

De exemplu seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n ,$$

Se poate întâmplà din contra ca seria să fie convergentă oricare ar fi valoarea lui x; de exemplu seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Lăsând la o parte aceste două cazuri extreme, să presupunem că există o valoare x_0, diferită de zero, pentru care seria $P(x)$ este convergentă și o valoare x_1, finită, pentru care seria este divergentă. In acest caz există cercuri cu centrul în origină în interiorul cărora seria $P(x)$ este absolut convergentă, precum și cercuri concentrice astfel că în tot planul exterior lor seria $P(x)$ este divergentă. In prima categorie intră cercurile ale căror raze sunt *cel puțin* egale cu $|x_0|$ și în a doua categorie, cercurile ale căror raze sunt *cel mult* egale cu $|x_1|$.

Să ne închipuim acum toate numerele pozitive, împărțite în două clase: un număr R se va zice de clasa întâi, dacă în interiorul cercului $|x| = R$, seria $P(x)$ este absolut convergentă; numărul R se va zice de clasa doua, dacă în regiunea exterioară cercului $|x| = R$ seria $P(x)$ este divergentă. Există cel mult un număr, aparținând celor două clase. Voim să demonstrăm că un asemenea număr există.

Fie R' și R'' două numere respectiv din clasa I și din clasa II-a; avem $R' < R''$. Fie R_1 un număr cuprins între R' și R'', egal depărtat de fiecare din aceste numere:

$$R_1 = \frac{R' + R''}{2}.$$

Dacă R_1 aparține de odată ambelor clase, teorema este demonstrată. Dacă acest număr face parte din clasa I, îl vom substituì lui R'; iar dacă face parte din clasa II, îl vom substitui lui R''. Să reprezentăm, pentru uniformitatea notaţiunilor, prin R'_1 şi R''_1 două numere respectiv de clasa I şi II, pe cari le substituim astfel numerelor R' şi R''. Vom aveà

$$R''_1 - R'_1 = \frac{R'' - R'}{2}, \quad R'_1 \geqq R', \quad R''_1 \leqq R''.$$

In acelaş mod, vom substitui numerelor R'_1 şi R''_1 două numere R'_2, R''_2 satisfăcând condiţiunile

$$R''_2 - R'_2 = \frac{R''_1 - R'_1}{2} = \frac{R'' - R'}{2^2}, \quad R'_2 \geqq R'_1, \quad R''_2 \leqq R''_1.$$

Continuând în acelaş mod, obţinem două şiruri de numere

$$R', R'_1, R'_2, \ldots, R'_n, \ldots,$$
$$R'', R''_1, R''_2, \ldots, R''_n, \ldots,$$

în cari numerele primului şir nu descresc şi numerele celui de al doilea şir nu cresc şi astfel că diferenţa

$$R''_n - R'_n = \frac{R'' - R'}{2^n}$$

tinde către zero când n tinde către infinit. De unde rezultă că cele două şiruri admit o limită comună R. Acest număr R face parte din ambele clase considerate.

Cercul cu centrul în origină şi a cărui rază este numărul R, àşà determinat se numeşte *cercul de convergenţă* al seriei date. Acest cerc separă planul în două regiuni: în regiunea interioară cercului seria $P(x)$ este convergentă şi în tot planul exterior lui seria este divergentă. Pe cercul insuş este dubiu.

Se poate întâmplà ca seria să fie convergentă sau divergentă pe tot cercul. Se poate întâmplà să existe puncte pe cerc în care seria este convergentă şi altele în care ea este divergentă.

Astfel, seriile

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2}, \quad \sum_0^\infty x^n, \quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$$

au acelaş cerc de convergentă a cărui rază $R = 1$: cea dintâi este convergentă pe tot cercul şi chiar absolut convergentă; cea de a doua este divergentă pe tot cercul, căci modulele termenilor sunt egale cu *unitatea*, oricare ar fi punctul x pe cerc. Seria a treia este divergentă pentru $x = 1$ şi convergentă pentru $x = -1$. Se poate probà că această serie este convergentă pe tot cercul (nu absolut) exceptând punctul $x = 1$.

Să demonstrăm mai întâiu teorema următoare:

102. *Teoremă. — Dacă coeficienţii unei serii întregi $\Sigma a_n x^n$ sunt reali şi pozitivi şi dacă termenii*

$$a_n R^n,$$

R fiind raza cercului de convergenţă al seriei, descresc necontenit şi tind, începând dela un rang destul de depărtat, către zero, seria este convergentă pe tot cercul, exceptând poate punctul $x = R$.

Putem fără a restrânge generalitatea presupune $R = 1$; căci făcând substituţiunea

$$x = Ry,$$

seria propusă se transformă într'o serie întreagă de y:

$$\Sigma b_n y^n, \quad b_n = a_n R^n$$

şi raza de convergenţă a acestei serii este 1.

Vom presupune aşà dar coeficienţii a_n descrescând şi $\lim\limits_{n=\infty} a_n = o$. Să punem

$$x = \cos \theta + i \sin \theta;$$

vom aveà

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Voim să probăm că seriile

$$\Sigma a_n \cos n\theta, \quad \Sigma a_n \sin n\theta$$

sunt convergente pentru orice valoare a lui θ diferită de un multiplu de 2π.

Fie

$$S_n = a_0 + a_1 \cos\theta + \ldots + a_n \cos n\theta.$$

Multiplicând ambele membre cu $2 \sin \dfrac{\theta}{2}$ obţinem

$$(1) \quad 2\,S \sin\frac{\theta}{2} = a_0 \sin\frac{\theta}{2} + (a_0 - a_1)\sin\frac{\theta}{2} + (a_1 - a_2)\sin\frac{3\theta}{2} + \ldots$$
$$+ (a_{n-1} - a_n)\sin\frac{2n-1}{2}\theta + a_n \sin\frac{2n+1}{2}\theta.$$

Să considerăm seriile

$$(2) \quad (a_0 - a_1)\sin\frac{\theta}{2} + (a_1 - a_2)\sin\frac{3\theta}{2} + \ldots + (a_{n-1} - a_n)\sin\frac{2n-1}{2}\theta + \ldots,$$

$$(3) \quad (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + \ldots,$$

Seria din urmă este convergentă, căci reprezentând prin σ_n suma celor dintâiu n termeni ai ei, avem

$$\sigma_n = a_0 - a_n,$$

de unde

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = a_0.$$

Insă începând dela un rang destul de depărtat, termenii seriei (3) sunt pozitivi și aceia ai seriei (2) sunt în valoare absolută respectiv mai mici; prin urmare seria (2) este convergentă.

De aci rezultă că membrul al doilea al egalității (1) tinde către o limită finită când n tinde către ∞, căci această expresiune diferă de suma celor dintâiu n termeni ai seriei (2) printr'o sumă de doi termeni, unul constant $a_0 \sin \frac{\theta}{2}$ și celalt $a_n \sin \frac{2n+1}{2}\theta$ având ca limită zero. Prin urmare, dacă θ este diferit de un multiplu de 2π, S_n va tinde către o limită finită și deci seria $\Sigma a_n \cos n\theta$ este convergentă.

In acelaş mod se probează convergența seriei

$$\Sigma a_n \sin n\theta$$

pentru θ diferit de $2k\pi$. Această serie însă este evident convergentă și pentru $\theta = 2k\pi$.

De unde rezultă că seria propusă este convergentă pe tot cercul $|x| = 1$, exceptând poate punctul care corespunde lui $\theta = o$.

q. e. d.

103. *Aplicațiune.* Seria

$$(4) \qquad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n} + \ldots$$

este convergentă pe tot cercul $|x| = 1$ și este divergentă numai în punctul $x = 1$. Deasemenea seria

$$(5) \qquad 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

este convergentă pe acelaş cerc și divergentă numai în punctul $x = -1$, căci ea se reduce la seria (4) când înlocuim x prin $-x$.

Să considerăm într'un mod general seria

$$1 + \frac{x^m}{1} + \frac{x^{2m}}{2} + \ldots + \frac{x^{nm}}{n} + \ldots,$$

m fiind un număr întreg pozitiv. Făcând substituțiunea $x^m = x'$, seria transformată

$$1 + \frac{x'}{1} + \frac{x'^2}{2} + \ldots + \frac{x'^n}{n} + \ldots$$

este convergentă pe tot cercul $|x'| = 1$, exceptând punctul $x' = 1$; de unde rezultă că seria propusă este convergentă pe tot cercul $|x| = 1$, exceptând punctele

$$x = e^{\frac{2ki\pi}{m}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (m-1).$$

104. *O serie întreagă este uniform convergentă în interiorul cercului său de convergență.*

Fie R raza cercului de convergență și $R' < R$, însă oricât de aproape voim de R. In punctele $|x| \leqq R'$, avem

$$|a_n x^n| \leqq |a_n| R'^n.$$

Insă seria $\Sigma |a_n| R'^n$ este convergentă, prin urmare seria $\Sigma a_n x^n$ este uniform convergentă în toate punctele satisfăcând inegalitatea $|x| \leqq R'$, adică în interiorul cercului de convergență al seriei.

Din această teoremă rezultă că *o serie întreagă este o funcțiune continuă în interiorul cercului său de convergență.*

105. *Teorema II a lui Abel. O serie întreagă*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

convergentă într'un punct x_0 situat pe cercul său de convergență, este o funcțiune continuă dealungul razei care trece prin acest punct, inclusiv punctul extrem x_0.

Am văzut mai sus că seria este o funcțiune continuă în interiorul cercului său de convergență; aceà teoremă nu ne spune însă nimic în privința punctelor situate pe cercul de convergență, căci raționamentul care a servit la stabilirea ei, nu se aplică acestor puncte.

Putem, precum am mai văzut, presupune $R = 1$ și, fără a restrânge generalitatea, să luăm $x_0 = 1$. Este deajuns pentru aceasta a face substituțiunea

$$x = x_0 y$$

și a demonstrà că seria este uniform convergentă dealungul razei care trece prin punctul $y = 1$, inclusiv acest punct.

Așa dar, fie

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6}$$

o serie întreagă al cărei cerc de convergență are drept rază unitatea și să presupunem seria

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{7}$$

convergentă. Prin urmare la un număr pozitiv dat ε, oricât de mic voim, corespunde un număr întreg pozitiv m astfel că restul acestei serii, relativ la un rang n,

$$R_n(1) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu$$

satisface inegalitatea

$$(8) \qquad |R_n(1)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru toate valorile lui $n \geqq m$. Să punem

$$(9) \qquad \begin{aligned} a_{n+1} &= \sigma_1, \\ a_{n+1} + a_{n+2} &= \sigma_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} &= \sigma_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

De unde

$$\sigma_k = R_{n+k}(1) - R_n(1)$$

şi prin urmare

$$(10) \qquad |\sigma_k| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Egalităţile (9) ne dau

$$(11) \qquad a_{n+k} = \sigma_k - \sigma_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Să considerăm restul seriei (6) corespunzător rangului n:

$$R_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu x^\nu.$$

Inlocuind coeficienţii a_ν prin valorile lor date (11), obţinem

$$R_n(x) = x^{n+1}(\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)x + (\sigma_3 - \sigma_2)x^2 + \ldots).$$

Seria din parenteză este evident limita sumei

$$(1 - x)(\sigma_1 + \sigma_2 x + \ldots + \sigma_k x^k) + \sigma_{k+1} x^{k+1},$$

când facem k să tindă către infinit. Insă termenul din urmă tinde în acelaş timp către zero, ($|x| < 1$); prin urmare

$$R_n(x) = x^{n+1}(1 - x)(\sigma_1 + \sigma_2 x + \ldots).$$

Ţinând seamă de inegalităţile (10) şi presupunând $0 < x < 1$ avem

$$|R_n(x)| < \varepsilon x^{n+1}(1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots),$$

sau

$$(12) \qquad |R_n(x)| < \varepsilon x^{n+1} < \varepsilon, \ (n \geqq m, \quad 0 < x < 1).$$

Inegalitatea (8) care se poate înlocui prin cea următoare

$$(13) \qquad |R_n(1)| < \varepsilon, \ n \geqq m$$

şi inegalitatea (12) ne arată că la un ε dat corespunde un *acelaş număr* m, *pentru care*

$$| R_n(x) | < \varepsilon, \quad (n \geqq m, \quad 0 < x \leqq 1),$$

q. e. d.

106. In virtutea teoremei precedente putem scrie

$$\lim_{x=x_0} P(x) = P(x),$$

când punctul x situat în cercul de convergenţă se apropie de x_0, dealungul razei care trece prin acest punct. Cu alte cuvinte: *Valoarea către care tinde seria* P(x), *când variabila se apropie dealungul razei de un punct al cercului său de convergenţă în care ea este convergentă, este egală cu valoarea ce primeşte seria în acest punct.* In acest rezultat consistă importanţa teoremei precedente.

Aplicaţiune. Pentru valori reale ale lui x şi mai mici în valoare absolută decât 1, avem, precum se ştie, egalitatea

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x_3}{3} - \ldots = \log\,(1 + x)\,.$$

Insă seria din membrul întâiu fiind convergentă pentru $x = 1$, rezultă

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \log 2.$$

107. *Observare.* Seria P(x) fiind în interiorul cercului său de convergenţă absolut convergentă, limita către care tinde, când x se apropie de un punct x_0 al cercului, este independentă de ordinea termenilor. In adevăr, să reprezintăm prin Q(x) seria P(x) scrisă într'o ordine diferită oricare, vom aveà, în interiorul cercului şi oricât de aproape de cerc: P(x) = Q(x). Prin urmare dacă avem

$$\lim_{x=x_0} P(x) = A,$$

adică

$$| P(x) - A | < \varepsilon,$$

vom aveà şi

$$| Q(x) - A | < \varepsilon,$$

când x este destul de aproape de x_0 şi interior cercului de convergenţă, adică

$$\lim_{x=x_0} Q(x) = A.$$

Insă valoarea seriei P(x_0) în cazul când această serie este semiconvergentă depinde de ordinea termenilor. Prin urmare, pentru ca teorema lui Abel să fie adevărată, este necesar, precum rezultă din demonstrarea ei, ca seria să fie ordonată după puterile cresoânde ale lui x. Dacă n'am ţine seamă de cele zise aci, am puteà ajunge la rezultate falşe.

Să ordonăm, de exemplu, seria

$$P(x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

în modul următor

$$P(x) = \sum_1^\infty \left[\frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2(2n-1)}}{2(2n-1)} - \frac{x^{4n}}{4n} \right].$$

Ambele serii sunt egale cu $\log(1+x)$, ($|x|<1$), şi tind către $\log 2$, când x tinde către 1. Pe când, dacă înlocuim x prin 1 în aceste serii avem

$$\sum_1^\infty (-1)^n \frac{1}{n} = \log 2,$$

$$\sum_1^\infty \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} \right] = \tfrac{1}{2} \log 2.$$

Ultima egalitate se justifică imediat, dacă observăm că avem

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

108. *Teoremă asupra razei cercului de convergenţă (Cauchy-Hadamard).*

Fiind dată seria întreagă

$$(14) \quad P(x) = \Sigma a_n x^n ;$$

să considerăm şirul de numere pozitive

$$(15) \quad |a_1|, \left|\sqrt{a_2}\right|, \left|\sqrt[3]{a_3}\right|, \ldots, \left|\sqrt[n]{a_n}\right|, \ldots$$

Se poate întâmplà ca acest şir să conţină termeni cari trec peste orice limită, de exemplu, dacă

$$|a_n| = n^n,$$

sau ca toţi termenii să fie inferiori unui număr dat. In cazul întâiu seria (14) nu poate fi convergentă decât în punctul $x = o$. Căci pentru orice valoare $x \neq o$ avem, începând dela un rang destul de depărtat,

$$\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| > 1.$$

Să considerăm cazul al doilea şi să presupunem că toţi termenii şirului (15) sunt mai mici ca un număr pozitiv dat. In acest caz, cea mai mare dintre limitele şirului (15) este un număr finit λ, care se bucură de proprietăţile următoare (§ 18):

1°. Termenii şirului mai mari ca $\lambda+\varepsilon$ sunt în număr mărginit;

2°. Şirul conţine un număr nemărginit de termeni mai mari ca $\lambda-\varepsilon$, oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε.

Să demonstrăm acum teorema următoare a lui *Cauchy*, regăsită de d-l *J. Hadamard:*

Teoremă. Raza cercului de convergenţă al seriei P(x) *este egală cu* $\frac{1}{\lambda}$.

1°. Fie $|x|<\frac{1}{\lambda}$; putem pune:

$$|x| \leqq \frac{1}{\lambda+\delta},$$

δ fiind un număr pozitiv destul de mic. In virtutea proprietăţii 1° a lui λ, există un număr pozitiv întreg N astfel încât pentru $n \geqq$ N să avem

$$\left|\sqrt[n]{a_n}\right| < \lambda+\delta_1, \quad o<\delta_1<\delta;$$

prin urmare

$$\left|\sqrt[n]{a_n x^n}\right| < \frac{\lambda+\delta_1}{\lambda+\delta} < 1.$$

Aşa dar seria P(x) este convergentă pentru valorile lui x cari satisfac inegalitatea

$$|x| < \frac{1}{\lambda}.$$

2°. Fie $|x| > \frac{1}{\lambda}$; putem pune

$$|x| \geqq \frac{1}{\lambda-\delta},$$

δ având aceeaş semnificare ca mai sus. In virtutea proprietăţii (2°) a lui λ, avem, pentru o infinitate de valori ale lui n,

$$\left|\sqrt[n]{a_n}\right| > \lambda-\delta_1, \quad 0<\delta_1<\delta;$$

prin urmare

$$\left|\sqrt[n]{a_n x^n}\right| > \frac{\lambda-\delta_1}{\lambda-\delta} > 1,$$

adică seria P(x) este divergentă pentru valorile lui x cari satisfac inegalitatea

$$|x| > \frac{1}{\lambda},$$

căci o infinitate de termeni ai seriei cresc, în valoare absolută, peste orice limită.

Din cele ce preced rezultă că raza cercului de convergență nu poate fi mai mare ca $\frac{1}{\lambda}$; dar, privită mai mică, ea poate fi oricât de aproape voim de $\frac{1}{\lambda}$. Diferența $\frac{1}{\lambda} - R$ poate dar fi mai mică ca orice cantitate dată; însă fiind constantă, rezultă că ea este nulă. Avem așa dar

$$R = \frac{1}{\lambda}.$$

Corolar. Raza cercului de convergență a unei serii întregi depinde numai de modulele coeficienților seriei.

109. *Observări.* — 1°. Dacă șirul (15) este convergent, numărul λ coincide cu $\lim \left| \sqrt[n]{a_n} \right|$ și avem

$$(16) \qquad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}.$$

2°. Dacă șirul

$$(17) \qquad \left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \left|\frac{a_3}{a_2}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \ldots$$

este convergent, se știe că și șirul (15) este convergent și că limitele lor sunt egale[1]). In acest caz avem așa dar

$$(18) \qquad R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Reciproca nu este adevărată. Convergența șirului (15) nu trage după sine convergența șirului (17). Exemplu:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

Raportul a doi termeni consecutivi este când 2, când $\frac{1}{4}$; prin urmare șirul considerat nu este convergent, pe când lim $\sqrt[n]{}$ a termenului de rang n este $\frac{1}{2}$.

---

[1]) Fie $|a_n| = \alpha_n$ și $\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = P$. La un ε dat va corespunde un N astfel încât pentru $n \geqq N$ să avem $P - \varepsilon < \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < P + \varepsilon$. Făcând $n = N, N+1, \ldots, N+m-1$ și multiplicând inegalitățile între ele, obținem, extragând rădăcina n^a,

$$(P-\varepsilon)^{1-\frac{m}{n}} < \frac{\sqrt[n]{\alpha_n}}{\sqrt[n]{\alpha_N}} < (P+\varepsilon)^{1-\frac{m}{n}};$$

de unde

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = P.$$

110. Să considerăm seria

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \ldots + a_n x^{-n} + \ldots,$$

ordonată după puterile întregi şi negative ale lui x. O asemenea serie se bucură de proprietăţi analoage cu ale seriilor întregi de x, la care se reduce imediat prin substituţiunea

$$x = \frac{1}{x'}.$$

Punctul $x = \infty$ joacă în aceste serii rolul pe care-l joacă punctul $x = 0$ în seriile întregi. Astfel se poate întâmplà ca seria $P\left(\frac{1}{x}\right)$ să nu fie convergentă decât în punctul $x = \infty$, sau să fie convergentă în tot planul exceptând punctul $x = 0$.

Lăsând la o parte aceste cazuri extreme, există un număr pozitiv R, astfel că seria $P\left(\frac{1}{x}\right)$ este absolut şi uniform convergentă în toată întinderea planului (inclusiv punctul ∞) exterior cercului $|x| = R$ şi divergentă în interiorul acestui cerc. R va fi raza cercului de convergenţă al seriei $P\left(\frac{1}{x}\right)$.

111. *Seria Laurent.* Să considerăm într'un mod mai general seria

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n,$$

ordonată după puterile întregi pozitive şi negative ale lui x.

Să punem

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad P_1\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n};$$

de unde

$$Q(x) = P(x) + P_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Fie R şi R' razele cercurilor de convergenţă ale seriilor $P(x)$, $P_1\left(\frac{1}{x}\right)$. Dacă $R < R'$, nu există nici un punct în plan în care ambele serii să fie convergente; seria $Q(x)$ n'are sens. Dacă $R > R'$, cele două serii au ca regiune comună de convergenţă coroana cuprinsă între cercurile concentrice (R), (R'), având centrele în origină. In această coroană, seria $Q(x)$, zisă seria *Laurent*, este absolut şi uniform convergentă, căci fiecare din seriile $P(x)$, $P_1\left(\frac{1}{x}\right)$ se bucură de aceste proprietăţi.

In cazul $R = R'$, nu pot să existe decât puncte ale cercului $|x| = R$ în care seria $Q(x)$ să fie convergentă; se poate întâmplà ca această serie să fie convergentă dealungul cercului întreg, sau în nici un punct.

112. Tot ce s'a spus asupra seriilor întregi $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ se aplică seriilor de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

x_0 fiind un punct oarecare în planul variabilei x. In cazul când o asemenea serie este convergentă într'un punct diferit de x_0, ea va admite un cerc de convergență având centrul său în punctul x_0 și o rază finită sau infinit de mare. Ne vom servì de notațiunea

$$P(x - x_0) = \sum_{0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

și vom înțelege prin $P(x - x_0)$ o serie întreagă de $x - x_0$, convergentă în domeniul punctului x_0.

In cazul când $x_0 = \infty$, simbolul $P(x - \infty)$ va fi înlocuit prin $P\left(\frac{1}{x}\right)$, simbol care reprezintă, precum am văzut, o serie întreagă de $\frac{1}{x}$, convergentă în domeniul punctului $x = \infty$.

Dacă în seria Laurent înlocuim x prin $x - x_0$, obținem seria

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

convergentă într'o coroană de două cercuri concentrice cu centrul în x_0.

113. *Teoremă asupra coeficienților seriilor de puteri (Cauchy). Fie seria*

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n, \tag{1}$$

convergentă într'o coroană formată de două cercuri concentrice cu centrul în origină și având razele R, R' (R > R'). *Fie* ϱ *un număr pozitiv cuprins între* R *și* R' *și* M *o limită superioară a lui* $|Q(x)|$ *dealungul cercului descris din origină ca centru cu raza* ϱ. *Vom aveà*

$$|a_n| \leq \frac{M}{\varrho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2}$$

Pentru a demonstrà această teoremă să multiplicăm ambele membre ale egalității (1) cu x^{-m}, m fiind un număr întreg, pozitiv, negativ sau nul; vom obține

$$x^{-m} Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^{n-m}.$$

Făcând $x = \varrho\,[\cos\theta + i\sin\theta)$ și punând pentru prescurtare

$$(\cos m\theta - i\sin m\theta)\,Q(x) = F(\theta),$$

avem

$$\varrho^{-m}\,F(\theta) = \Sigma a_n \varrho^{n-m}\,[\cos(n-m)\,\theta + i\sin(n-m)\,\theta].$$

$F(\theta)$ este o funcțiune continuă de θ pentru toate valorile $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ și $|F(\theta)| \leqq M$. Multiplicând ambele membre cu $d\theta$ și integrând între o și 2π[1]), toate integralele din membrul al doilea vor fi nule, exceptând aceea pentru care $n = m$. Așa dar avem

$$\varrho^{-m}\int_0^{2\pi} F(\theta)\,d\theta = 2\pi\,a_m;$$

de unde

$$2\pi\,|a_m| \leqq \varrho^{-m}\,M\int_0^{2\pi} d\theta,$$

sau

(3) $$|a_m| \leqq \frac{M}{\varrho^m}.$$

114. *Alte inegalități pentru modulele coeficienților seriilor întregi.* Fie

(1) $$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o serie întreagă și R raza cercului său de convergență. Să punem

(2) $$x = \varrho e^{i\varphi}, \quad a_n = |a_n|\,e^{i\alpha_n};$$

vom puteà scrie

(3) $$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,\varrho^n e^{i(\alpha_n + n\varphi)} &= u(\varrho,\varphi) + iv(\varrho,\varphi), \\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,\varrho^n e^{-i(\alpha_n + n\varphi)} &= u(\varrho,\varphi) - iv(\varrho,\varphi), \end{aligned}$$

$u(\varrho, \varphi)$ și $v(\varrho, \varphi)$ fiind serii reale de variabilele reale ϱ și φ, convergente pentru valorile

$$\varrho < R, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

---

[1]) Pentru justificarea operațiunii de mai sus, să observăm că punând $a_n = r_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$, putem înlocuì membrul al doilea printr'o sumă $S(\theta) + iS_1(\theta)$, S și S_1 fiind două serii reale absolut și uniform convergente pentru ϱ constant și prin urmare integralele lor se obțin integrând fiecare termen în parte. Deasemenea $F(\theta)$ se poate pune sub forma $F_1(\theta) + iF_2(\theta)$, F_1 și F_2 fiind funcțiuni reale. In fine, prin definițiune, $\int(F_1 + iF_2)d\theta = \int F_1 d\theta + i\int F_2 d\theta$.

Adunând egalităţile (3) obţinem

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\varrho^n\left[e^{i(\alpha_n+n\varphi)}+e^{-i(\alpha_n+n\varphi)}\right]=u(\varrho,\varphi).$$

Multiplicând ambele membre cu $e^{-mi\varphi}$ şi integrând între o şi 2π, rezultă

$$(5)\qquad \pi a_m\varrho^m=\int_0^{2\pi}u(\varrho,\varphi)\,e^{-mi\varphi}d\varphi\qquad m>0$$

şi pentru $m=0$,

$$(6)\qquad 2\pi\,|a_0|\cos\alpha_0=\int_0^{2\pi}u(\varrho,\varphi)d\varphi.$$

Scăzând egalităţile (3) obţinem, procedând în acelaş mod,

$$(7)\qquad \pi a_m\varrho^m=i\int_0^{2\pi}v(\varrho,\varphi)e^{-mi\varphi}d\varphi\qquad m>0,$$

$$(8)\qquad 2\pi\,|a_0|\sin\alpha_0=\int_0^{2\pi}v(\varrho,\varphi)d\varphi.$$

Fie A maximul lui $|u(\varphi,\varrho)|$ şi B maximul lui $|v(\varrho,\varphi)|$, ϱ fiind privit constant; vom avea inegalităţile căutate

$$(9)\qquad |a_m|\leqq\frac{A}{\varrho^m},\quad |a_m|\leqq\frac{B}{\varrho^m}\qquad (m=1,2,\ldots).$$

II. — PROPRIETĂŢI ALE SERIILOR INTREGI.

115. *Teoremă. Fie*

$$(1)\qquad P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

o serie întreagă convergentă într'un cerc (R)[1]. *Dacă coeficientul* $a_0\neq 0$, *există un număr pozitiv* $r<R$ *astfel că pentru valorile lui* x *cari satisfac inegalitatea* $|x|<r$, *avem*

$$(2)\qquad |a_0|>|a_1x+a_2x^2+\ldots|.$$

Această inegalitate este o consecinţă imediată a continuităţii seriei (1) în interiorul cercului (R), căci pentru $|x|$ destul de mic membrul al doilea poate fi mai mic ca ε, oricât de mic ar fi ε. Teorema lui Cauchy asupra coefincienţilor seriilor de puteri ne conduce la un rezultat mai precis.

Să reprezintăm prin M modulul maximum al lui $P(x)-a_0$ dealungul unui cerc (ϱ), $\varrho<R$; vom avea

$$|a_n|\leqq\frac{M}{\varrho^n}\quad (n=1,2,3,)\ldots$$

[1]) Adică în cercul $|x|=R$.

Fie x un punct oarecare în interiorul cercului (ϱ) și $|x| = \varrho' < \varrho$; avem

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^n = M \frac{\varrho'}{\varrho - \varrho'}.$$

Să punem

$$\frac{M\varrho'}{\varrho - \varrho'} < |a_0|;$$

de unde

$$\varrho' < \frac{|a_0| \varrho}{M + |a_0|}.$$

Este deajuns să luăm

(3) $$r = \frac{|a_0| \varrho}{M + |a_0|},$$

pentru ca în interiorul cercului (r) inegalitatea (2) să fie satisfăcută.

Corolare. 1°. In interiorul cercului (r) seria $P(x)$ nu se poate anulà.

2°. Să presupunem $a_0 = 0$ și fie a_m primul coeficient al seriei, diferit de zero; vom aveà

$$P(x) = x^m (a_m + a_{m+1} x + \ldots) \quad a_m \neq 0$$

și vom zice că $x = 0$ este *un zero de ordinul m* al seriei $P(x)$[1].

Fie M maximul expresiunii

$$|a_{m+1} x + a_{m+2} x^2 + \ldots|$$

dealungul cercului (ϱ), $\varrho < R$ și

$$r = \frac{a_m \varrho}{M + |a_m|}.$$

Seria $P(x)$ nu se va anulà în interiorul cercului (r) pentru altă valoare a lui x decât $x = 0$.

116. *Teoremă. Dacă seria* $P(x)$ *se anulează într'o infinitate de puncte având ca punct limită punctul* $x = 0$, *toți coeficienții ei sunt nuli.*

In adevăr, dacă coeficienții seriei date n'ar fi toți nuli, ar urmà, în virtutea teoremei precedente, ca într'un cerc (r) destul de mic, seria să n'aibă nici un zero sau să nu aibă alt zero decât punctul $x = 0$; ceeace este incompatibil cu faptul că seria admite o infinitate de zeruri vecine cu punctul $x = 0$.

---

[1] Numim *zero* al unei funcțiuni $f(x)$, valoarea lui x care anulează funcțiunea.

Demonstraţiune directă. Fie

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

un şir nelimitat de zeruri ale seriei $P(x)$ având ca punct limită punctul $x = 0$. Din definiţiunea punctului limită rezultă că un cerc (r) descris din $x = 0$ ca centru cu o rază r oricât de mică voim, cuprinde în interiorul său puncte ale şirului (4). Fie ε un număr pozitiv arbitrar de mic căruia corespunde în virtutea continuităţii seriei $P(x)$, un număr pozitiv r, astfel că pentru orice punct x care satisface inegalitatea $|x| < r$, avem

$$|P(x) - P(0)| < \varepsilon.$$

Inlocuind x printr'unul din punctele şirului (4), situat în interiorul cercului (r), rezultă

$$|P(0)| < \varepsilon,$$

şi prin urmare

$$P(0) = 0;$$

De unde

$$a_0 = 0.$$

Fie

$$P(x) = x P_1(x),$$
$$P_1(x) = a_1 + a_2 x + \ldots$$

Seria $P_1(x)$ are acelaş cerc de convergenţă ca $P(x)$ şi abstracţiune făcând de punctul $x = 0$, are aceleaşi zeruri. De unde rezultă ca mai sus: $a_1 = 0$. Acelaş raţionament prelungit arată că toţi coeficienţii seriei sunt nuli.

Corolar. Dacă două serii întregi

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

sunt egale între ele într'o infinitate de puncte vecine cu $x = 0$, ele sunt identice. Căci, în virtutea ipotezei, seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$$

este nulă într'o infinitate de puncte având ca punct limită punctul $x = 0$.

117. Seriile de forma

$$P(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

se bucură, în domeniul punctului $x = x_0$, de proprietăţi identice cu ale seriilor $P(x)$ în domeniul punctului $x = 0$; căci punând $x - x_0 = x'$, avem

$$P(x - x_0) = P(x').$$

Să enunţăm aceste proprietăţi:

1°. Dacă seria $P(x-x_0)$ nu se anulează în punctul x_0, există un număr pozitiv r, astfel că în interiorul cercului $|x-x_0|=r$, $P(x-x_0)$ nu are nici un zero.

2°. Dacă $P(x-x_0)$ se anulează în punctul x_0, există un număr $r>0$, astfel că în cercul $|x-x_0|=r$, $P(x-x_0)$ nu are alt zero decât punctul x_0. Zicem că punctul x_0 este *izolat* de celelalte puncte în cari $P(x-x_0)$ se poate anulà.

3°. Dacă seria $P(x-x_0)$ se anulează într'o infinitate de puncte având x_0 ca punct limită, ea este identic nulă, adică toţi coeficienţii a_n sunt nuli. De unde rezultă că dacă $P(x-x_0)$ primeşte aceeaş valoare A într'o infinitate de puncte având x_0 ca punct limită, $P(x-x_0)$ se reduce la o constantă egală cu A.

4°. Dacă două serii $P(x-x_0)$, $P_1(x-x_0)$ sunt egale într'o infinitate de puncte $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ pentru cari x_0 este un punct limită, ele coincid.

118. *Sumă de serii de puteri (Weierstrass).*

O sumă de serii absolut convergente, în număr limitat, se poate înlocuì printr'o serie unică absolut convergentă.

Fie

$$u_0(x),\ u_1(x)\ \ldots,\ u_{m-1}(x)$$

m serii de puteri, convergente într'o coroană limitată de două cercuri concentrice (R), (R'), $R > R'$:

$$u_i(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{in}\, x^n \qquad (i = 0, 1, \ldots m-1).$$

Vom aveà, reunind într'un singur termen, puterile egale ale lui x,

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} u_i(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{0,n} + a_{1,n} + \ldots + a_{m-1,n})\, x^n .$$

Să considerăm acum cazul unui număr nelimitat de serii Laurent.

(1) $$u_0(x),\ u_1(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$$

convergente în aceeaş coroană. Operaţiunea precedentă nu se mai aplică totdeauna. Vom demonstrà teorema următoare a lui *Weierstrass*:

Teoremă. Dacă seria

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$$

este uniform convergentă dealungul unui cerc $|x| = \varrho$, ϱ *fiind un număr oarecare cuprins între* R *şi* R', $R > \varrho > R'$:

1⁰. *Seriile*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,n} \quad (n = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots)$$

sunt convergente.

2⁰. *Punând*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_{in} = A_n\,,$$

seria

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\, x^n$$

este convergentă în aceeaş coroană, prin urmare absolut convergentă.

3⁰. *Avem*

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\, x_n\,.$$

1⁰. In virtutea ipotezei, la un număr pozitiv dat ε oricât de mic voim, corespunde un număr întreg m, astfel că

$$\left| \sum_{i=m}^{\infty} u_i(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,; \tag{2}$$

de unde [1])

$$\left| \sum_{i=m}^{m+p} u_i(x) \right| < \varepsilon\,, \tag{3}$$

p fiind un număr întreg pozitiv oricât de mare voim. Membrul întâiu al acestei inegalităţi conţinând un număr limitat de serii absolut convergente, putem grupà termenii sumei după puterile lui x. Această inegalitate se va puteà dar scrie

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{m,n} + a_{m+1,n} + \ldots + a_{m+p,\,n})x^n \right| < \varepsilon\,. \tag{4}$$

Aplicând teorema lui *Cauchy* asupra coeficienţilor seriilor de puteri, coeficientul lui x^n va satisface inegalitatea

$$\left| a_{m,n} + a_{m+1,n} + \ldots + a_{m+p,n} \right| < \frac{\varepsilon}{\varrho^n}\,, \tag{5}$$

ceeace probează că seria $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,n}$ este convergentă.

Făcând p să tindă către infinit [2]), restul seriei oprită la rangul m, va satisface inegalitatea

$$\left| \sum_{i=m}^{\infty} a_{i,n} \right| < \frac{\varepsilon}{\varrho^n}\,, \tag{6}$$

n fiind constant şi având una din valorile $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

---

[1]) $\left| \sum\limits_{i=m}^{\infty} u_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\left| \sum\limits_{i=m+p}^{\infty} u_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}$; $\sum\limits_{i=m}^{i=m+p} u_i = \sum\limits_{i=m}^{\infty} u_i - \sum\limits_{i=m+p}^{\infty} u_i$; $\left| \sum\limits_{i=m}^{m+p} u_i(x) \right| < \varepsilon.$

[2]) Ceeace este permis, seria fiind convergentă.

2°. Pentru a demonstrà convergența seriei

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n,$$

s'o descompunem în două serii: una relativă la cele dintâi m serii (5) și cealaltă relativă la cele rămase.

Să punem

$$A'_n = \sum_{i=0}^{m-1} a_{in},$$

$$A''_n = \sum_{i=m}^{\infty} a_{in};$$

vom aveà

$$A_n = A'_n + A''_n,$$

$$(7) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A'_n x^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n'' x^n,$$

coeficienții A''_n satisfăcând inegalitatea

$$(8) \qquad \left| A''_n \right| < \frac{\varepsilon}{\varrho^n} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Prima serie din membrul al doilea (7) fiind egală cu suma celor dintâiu m serii (5), adică

$$(9) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A'_n x^n = \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x)$$

este absolut convergentă în coroana considerată. Să ne ocupăm de cea de a doua și să examinăm separat seriile

$$(10) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A''_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A''_{-n} x^{-n},$$

corespunzătoare valorilor pozitive și negative ale lui n.

Fie r și r' două numere cuprinse între R și R',

$$R > r > r' > R'.$$

Să înlocuim în (8) ϱ respectiv prin r și r' după cum $n \geq 0$ sau $n < 0$, ceeace este permis căci ϱ este un număr oarecare cuprins între R și R' [1]). Vom obține inegalitățile:

$$(11) \qquad |A''_n| < \frac{\varepsilon}{r^n}, \quad |A''_{-n}| < \varepsilon r'^n,$$

sau

$$(12) \qquad |A''_n| r^n < \varepsilon, \quad |A''_{-n}| r'^{-n} < \varepsilon,$$

cari, în virtutea primei teoreme a lui Abel, probează convergența

---

[1]) Este deajuns a luà pentru m cea mai mare din valorile sale corespunzătoare lui r și r'.

seriilor (15): cea dintâiu în interiorul cercului $|x| = r$ și cea de a doua în exteriorul cercului $|x| = r'$. Insă r poate fi presupus oricât de aproape de R și r' oricât de aproape de R'; prin urmare seria

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A''_n x^n$$

este convergentă în coroana limitată de cercurile (R) și (R'). De unde rezultă aceeaș concluziune pentru seria propusă

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n .$$

3⁰. Fie ϱ un număr cuprins între r și r',

$$r' < \varrho < r.$$

și x un punct oarecare pe cercul (ϱ); vom aveà, în virtutea inegalităților (11) și (12),

$$(13) \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} A''_n x^n \right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |A''_n| \varrho^n < \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n = \varepsilon \frac{r}{r-\varrho},$$

$$(14) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} A''_{-n} x^n \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |A''_{-n}| \varrho^{-n} < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r'}{\varrho}\right)^n = \varepsilon \frac{r'}{\varrho - r'}.$$

Să considerăm acum diferența

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n ,$$

care, în virtutea egalității (9), este egală cu diferența

$$\sum_{i=m}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A''_n x^n = \sum_{i=m}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=0}^{\infty} A''_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} A''_{-n} x^{-n};$$

prin urmare

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^n \right| \leqq \left| \sum_{i=m}^{\infty} u_i(x) \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} A''_n x^n \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} A''_{-n} x^{-n} \right|.$$

De unde, în virtutea inegalităților (2), (13), (14), rezultă inegalitatea

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^n \right| < \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{r-\varrho} + \frac{r'}{\varrho - r'} \right)$$

Insă membrul întâiu fiind independent de ε, rezultă că el este nul; de unde

$$(15) \quad \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n .$$

q. e. d.

119. Dacă seriile $u_i(x)$ se reduc la serii întregi $P_i(x)$, convergente în acelaş cerc (R) şi astfel ca suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i(x)$$

să fie uniform convergentă dealungul unui cerc (r), r fiind un număr pozitiv oarecare, mai mic ca R şi oricât aproape voim de acest din urmă număr, vom avea în *interiorul* cercului (R)

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

In ce priveşte raza cercului de convergenţă al sumei, este evident că dacă razele cercurilor seriilor date sunt inegale, ea este egală cu cea mai mică dintre raze; în cazul când toate razele sunt egale, raza cercului de convergenţă al sumei este egală cu raza comună, şi, în cazuri particulare, ea poate fi oricât de mare. Să considerăm ca exemplu două serii

$$P_1(x) = \sum_0^{\infty} x_n, \quad P_2(x) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - 1\right) x^n,$$

ale căror raze sunt egale cu 1 Suma

$$P_1 + P_2 = \sum \frac{x^n}{n!}$$

are raza $R = \infty$.

Observare. Dacă seria $\sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i(x)$ este uniform convergentă într'o coroană formată de două cercuri concentrice (R) şi (R'), ea este evident convergentă dealungul oricărui cerc (r), r fiind cuprins între R şi R'. Sub această formă se prezintă în genere, în aplicaţiuni, teorema lui *Weierstrass*.

120. *Consecinţe. I. Produsul a două serii întregi este o serie întreagă.*

Fie

$$P_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \quad P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

două serii întregi, R_1 şi R_2 razele cercurilor lor de convergenţă, $R_1 \geqq R_2$. Să considerăm produsul

$$P_1 P_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n x^n P_1(x)).$$

In membrul al doilea avem o sumă de un număr nelimitat de serii întregi

$$u_n(x) = b_n x^n \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

corespunzătoare valorilor $n = 0, 1, 2, \ldots$, convergente în cercul

(R_1). Suma acestor serii este uniform convergentă în cercul (R_2). In adevăr, fie M maximul lui $|P_1(x)|$ în cercul (R_1) [1]; la un ε dat putem face să corespundă un număr întreg n' astfel ca să avem

$$\left|\sum_{n=\nu}^{\infty} b_n x^n\right| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \nu \geq n',$$

oricare ar fi punctul x în interiorul cercului (R_2); prin urmare, oricare ar fi x în interiorul acestui cerc, avem inegalitatea

$$\left| P_1(x) \sum_{n=\nu}^{\infty} b_n x^n \right| < \varepsilon,$$

care probează convergenţa uniformă a seriei $\Sigma u_n(x)$ în cercul (R_2).

Putem dar aplicà teorema lui *Weierstrass*, care ne dă

$$P_1(x) P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n x^n \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) x^n.$$

Raza cercului de convergenţă al produsului este cel puţin egală cu cea mai mică dintre cele două raze R_1, R_2; dar poate fi egală cu cea mai mare, sau chiar mai mare decât aceasta. Exemple

1º
$$P_1(x) = \sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad R_1 = 1,$$

$$P_2(x) = (1-x) \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \qquad R_2 = 2.$$

$$P(x) = P_1(x) P_2(x) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \qquad R = R_2 = 2.$$

2º
$$P_1(x) = (1+x) \Sigma x^n, \qquad R_1 = 1$$

$$P_2(x) = (1-x) \{ \Sigma (-1)^n x^n \} \Sigma \frac{x^n}{n!}, \qquad R_2 = 1.$$

$$P(x) = P_1(x) P_2(x) = \Sigma \frac{x^n}{n!}. \qquad R = \infty.$$

Observare. Fie $R_1 = R_2 = 1$; vom avea pentru $|x| < 1$,

$$P_1(x) P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) x^n.$$

Dacă seriile $P_1(x)$, $P_2(x)$ precum şi seria din membrul al doilea sunt convergente în punctul $x = 1$, fără a fi absolut convergente, egalitatea precedentă va subsistà în acest punct, conform teoremei II a lui *Abel*; deci vom avea

$$(1) \quad \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0).$$

---

[1] Se va vedeà că maximul este atins pe cercul de convergenţă.

Se ştie că produsul a două serii Σa_n, Σb_n dintre cari una cel puţin este absolut convergentă este dat de formula precedentă [1]. In cazul când ambele serii sunt semiconvergente, această regulă poate să nu mai fie aplicabilă, căci se poate întâmplà ca seria din membrul al doilea să fie divergentă. Să considerăm, de exemplu, seriile

$$\Sigma a_n = \Sigma b_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

Seria al cărui termen general este

$$\pm c_n = \frac{1}{\sqrt{1n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n.1}},$$

este divergentă căci avem [2]

$$|c_n| > n \frac{1}{\frac{n+1}{2}} = \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Rezultatul obţinut mai sus ne arată că dacă seria din membrul al doilea (1) este convergentă, regula înmulţirii subsistă ca şi în cazul când una cel puţin din cele două serii date este absolut convergentă.

Corolar. P(x) fiind o serie întreagă convergentă într'un cerc (R), puterile sale $P^2(x)$, $P^3(x)$, ... sunt serii întregi convergente în acelaş cerc.

Aplicaţiune. Seria

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

convergentă în cercul cu raza 1, multiplicată cu ea însăşi, ne dă

$$P^2(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

Inmulţind ambele membre ale acestei egalităţi cu P(x) obţinem

$$P^3(x) = 1 + 3x \ldots 6x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2} x^{n-1} + \ldots$$

Continuând în acelaş mod, obţinem

$$P^m(x) = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} x^{n-1} + \ldots$$

Se recunoaşte uşor că formula fiind adevărată pentru un exponent m, este adevărată şi pentru $m+1$.

[1] *Goursat*, Cours d'Analyse, tome I, pag. 397, edit. I-a.

[2] In virtutea inegalităţii $a\,b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

De altă parte, avem

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x};$$

de unde conchidem egalitatea

$$\frac{1}{(1-x)^m}=1+mx+\ldots+\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{n!}x^{n-1}+\ldots,$$

valabilă în interiorul cercului $|x|=1$.

II. Fiind dat un număr limitat n de serii întregi

$$P_1(x),\quad P_2(x),\quad \ldots,\quad P_n(x),$$

convergente în acelaș cerc (R), o funcțiune rațională și întreagă de aceste serii

$$f(P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x))$$

este o serie întreagă de x, convergentă în cercul (R). Aceasta rezultă din I și din corolarul precedent.

III. Fie

$$f(y)=\sum_{n=o}^{\infty}a_n y^n,$$

o serie întreagă de variabila y, convergentă într'un cerc (R) și

$$y=\sum_{m=o}^{\infty}b_n x^m=P(x)$$

o serie întreagă de x, convergentă într'un cerc (R_1). Nu se poate afirmà a priori că $f(y)$ devine o serie întreagă de x, când înlocuim y prin valoarea sa $P(x)$. Să considerăm, ca exemplu seria

$$f(y)=y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\ldots+\frac{y_n}{n}+\ldots$$

al cărei cerc de convergență are raza $R=1$ și fie seria

$$y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots$$

având aceeaș rază pentru cercul său de convergență. Se recunoaște imediat că $f(y)$ nu se poate pune sub forma

$$f(y)=\sum_{n=o}^{\infty}c_n x^n,$$

căci avem, pentru coeficientul c_0, valoarea

$$c_0=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

Este evident înainte de toate că, pentru ca să putem avea o egalitate de forma

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n \, P^n(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n \, x^n,$$

este necesar ca seriile din ambele membre să aibă o regiune comună de convergență; prin urmare ca seria din membrul întâiu să fie convergentă în domeniul $(x = 0)$. Pentru aceasta este necesar ca punctelor x vecine cu punctul $x = 0$, să corespundă puncte y interioare cercului (R), căci altfel seria $\Sigma a_n y^n$ n'ar fi convergentă. In special valoarea lui y corespunzătoare lui $x = 0$, trebuie să fie în *valoare absolută* mai mică ca R, adică *trebuie* să avem

(1) $$|P(o)| < R \quad [1]$$

Această condițiune este *suficientă*. In adevăr, fie δ un număr pozitiv, destul de mic, pentru ca să avem

(2) $$|P(o)| < R - 2\delta;$$

de altă parte, $P(x)$ fiind funcțiune continuă în domeniul $x = o$, există un cerc (r), $r < R$, astfel că în interiorul lui avem

$$|P(x) - P(o)| < \delta$$

și a *fortiori*

$$|P(x)| - |P(o)| < \delta;$$

prin urmare

$$|P(x)| < R - \delta.$$

Insă, în virtutea ipotezei, seria $\Sigma a_n y^n$ fiind convergentă în cercul (R), seria

(5) $$\Sigma |a_n| (R - \delta)^n$$

este convergentă; prin urmare în interiorul cercului (r) seria

(6) $$\sum_{n=o}^{\infty} a_n \, P^n(x)$$

este uniform convergentă. Așa dar teorema lui Weierstrass se aplică acestei sume de serii, și în domeniul lui $x = o$, putem scrie

(7) $$\sum_{n=o}^{\infty} a_n \, y^n = \sum_{m=o}^{\infty} c_m x^m.$$

Valorile coeficienților c_m se pot obține înlocuind y prin $P(x)$ și identificând ambele membre. Avem, pentru coeficentul c_0, valoarea

$$c_o = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \, b_o^n.$$

---

[1]) In exemplul considerat mai sus, condițiunea $|P(0)| < R$ nefiind împlinită, căci $P(o) = 1$, substituțiunea este imposibilă, precum s'a recunoscut.

Până unde se întinde domeniul în care egalitatea (7) este valabilă? Acest domeniu, consistând în regiunea comună de convergenţă a ambelor membre, când înlocuim y prin $P(x)$, este un cerc cu centrul în $x = o$ — în ipoteza, bine înţeles, că $|P(0)| < R$ — şi trecând prin cel mai apropiat punct x, în care inegalitatea $|P(x)| < R$ nu mai este satisfăcută.

Observare. Este totdeauna posibil a transformà seria $f(y) = \Sigma a_n y^n$, prin ajutorul substituţiunii $y = P(x)$, într'o serie întreagă de x, dacă $P(o) = o$. Deasemenea transformarea este totdeauna posibilă, dacă seria $f(y)$ este convergentă în toată întinderea planului (y).

In fine să mai observăm că cercul de convergenţă al seriei $\Sigma c_n x^n$ poate să conţină puncte în cari seria $P(x)$ nu este convergentă. In aceste puncte, evident, egalitatea (7) nu este valabilă. Fie. de exemplu,

$$y = P(x) = x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x}$$

şi

$$f(y) = 1 - y + y^2 - \ldots = \frac{1}{1+y}$$

Rezultă $f(y) = 1 - x$.

IV. Fie

$$P_1(x), \quad P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$$

un şir nelimitat de serii convergente într'un cerc (R), cu condiţiunea

$$|P_n(x)| < 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

şi seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

absolut şi uniform convergentă. Fie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

un şir nelimitat de cantităţi constante, ale căror module sunt mai mici decât un număr pozitiv dat a; seria

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} [a_1 P_n(x) + a_2 P_n^2(x) + \ldots + a_k P_n^k(x) + \ldots]$$

se va exprimà printr'o serie întreagă de x, convergentă în cercul (R).

Este deajuns a probà că seria S este uniform convergentă în cercul (R). Fie, pentru prescurtare,

$$u_n = |P_n(x)|;$$

vom aveà

$$|S| < a\,\Sigma(u_n + u_n^2 + \ldots) = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1 - u_n}.$$

Insă seria

$$\Sigma \frac{u_n}{1-u_n}$$

este absolut şi uniform convergentă în acelaş timp cu seria Σu_n; de unde rezultă că seria S este absolut şi uniform convergentă în cercul (R).

V. — Fie

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0.$$

Punând

$$(8) \qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

şi reprezentând prin r un număr pozitiv, astfel ca pentru $|x| < r$ să avem $|y| < |a_0|$, vom puteà scrie, pentru aceste valori ale lui x,

$$(9) \qquad \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a_0 + y} = \frac{1}{a_0} \Sigma (-1)^m \left(\frac{y}{a_0}\right)^m.$$

Deoarece în virtutea ecuaţiunii (8), y se anulează împreună cu x, seria din urmă şi prin urmare $\frac{1}{P(x)}$ se poate exprimà totdeauna printr'o serie întreagă de x, convergentă în domeniul punctului $x = 0$. Vom aveà dar o egalitate de forma

$$(10) \qquad \frac{1}{P(x)} = P_1(x),$$

valabilă (III) într'un cerc cu centrul în origină şi trecând prin punctul cel mai apropiat, interior cercului de convergenţă al seriei $P(x)$, în care inegalitatea

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \ldots| < |a_0|$$

încetează de a fi satisfăcută, adică prin cel mai apropiat punct în care numitorul $P(x)$ se anulează.

Calculul seriei $P(x)$ se poate face astfel:

Punem

$$\frac{1}{P(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

de unde

$$1 = (a_0 + a_1 x + \ldots)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots)$$

şi identificăm ambele membre; obţinem ecuaţiunile

$$a_0 \alpha_0 = 1, \; a_0 \alpha_1 + a_1 \alpha_0 = 0, \; a_0 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_0 = 0, \ldots,$$

cari determină coeficienţii $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

121. Să considerăm două serii întregi $P(x)$, $P_1(x)$ convergente în acelaş cerc (R), cea dintâiu diferită de zero pentru $x = 0$; vom

aveà, în domeniul acestui punct, o desvoltare de forma

$$(11)\qquad \frac{P_1(x)}{P(x)} = P_1(x) \cdot \frac{1}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

valabilă, după cele ce am văzut mai sus, într'un cerc cu centrul în origină și trecând prin punctul cel mai apropiat interior cercului (R), în care numitorul $P(x)$ se anulează.

Dacă $P(o) = 0$, astfel că

$$P(x) = x^m P_2(x) \qquad P_2(o) \neq 0,$$

vom aveà, în domeniul lui $x = 0$,

$$\frac{P_1(x)}{P(x)} = \frac{1}{x^m} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{1}{x^m} P(x),$$

$P(x)$ fiind o serie întreagă. Expresiunea câtului este dar, în acest caz, de forma

$$(12)\qquad \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n x_n .$$

122. Teorema lui Weierstrass asupra seriilor de puteri de x, precum și consecințele ei, subsistă pentru seriile de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

convergente într'o coroană formată de două cercuri concentrice având centrul lor în punctul x_0.

Să considerăm, ca aplicațiune, o funcțiune rațională de x

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

$F(x)$ și $F_1(x)$ fiind polinoame de x fără factori comuni, de grade respectiv egale cu m și n. Fie x_0 un punct oarecare în plan; vom puteà scrie, precum se știe din Algebră,

$$(13)\qquad (f)(x) = \frac{A_0 + A_1(x-x_0) + \ldots + A_m(x-x_0)^m}{B_0 + B_1(x-x_0) + \ldots + B_n(x-x_0)^n}.$$

Dacă x_0 nu anulează numitorul $F(x)$, avem $B_0 = F(x_0) \neq 0$; de unde rezultă, în domeniul lui x_0, expresiunea

$$(14)\qquad f(x) = P(x - x_0).$$

Dacă x_0 este un zero al lui $F(x)$ de ordin k, avem

$$B_0 = B_1 \ldots = B_{k-1} = 0, \; B_k \neq 0;$$

expresiunea (13) devine

$$(15)\; f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^k} \cdot \frac{A_0 + A_1(x-x_0) + \ldots + A_m(x-x_0)^m}{B_k + B_{k+1}(x-x_0) + \ldots + B_n(x-x_0)^{n-k}};$$

de unde, în domeniul lui x_0, o expresiune de forma

$$(16)\qquad f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^k} P(x-x_0) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (x-x_0)^n .$$

Egalitățile (14) și (16) sunt, precum s'a văzut în paragraful precedent, valabile în cercul cu centrul în x_0 și trecând prin punctul cel mai apropiat de x_0 în care $F(x)$ se anulează.

123. Fie

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

un și nelimitat de funcțiuni raționale de x. Dacă seria $\Sigma f_n(x)$ este uniform convergentă într'o regiune dată, vom aveà în domeniul unui punct x_0 [1]), situat în aceà regiune,

$$\sum_1^{\infty} f_n(x) = P(x-x_0);$$

căci în domeniul lui x_0 avem $f_n(x) = P_n(x-x_0)$ și seria

$$\Sigma P_n(x-x_0) = \Sigma f_n(x)$$

este, în virtutea ipotezei, uniform convergentă într'un cerc $|x-x_0| = r$, situat în regiunea dată.

124. Seria Laurent intră în cazul precedent.

Fie

$$Q(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n = \sum_0^{\infty} a_n x^n + \sum_{+1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$$

și x_0 un punct în coroană; avem

$$a_n x^n = a_n (x_0 + x - x_0)^n = P_n^{(1)}(x-x_0),$$

$$a_{-n} x_{-n} = a_{-n} \frac{1}{(x_0 + x - x_0)^n} = P_n^{(2)} \quad (x-x_0);$$

prin urmare

$$Q(x) = P(x-x_0).$$

Fie

$$Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots,\ Q_n(x),\ \ldots$$

un șir nelimitat de serii Laurent și seria $\Sigma Q_n(x)$, uniform convergentă într'o coroană formată de două cercuri concentrice. Fie x_0 un punct în interiorul coroanei. Vom aveà, în domeniul lui x_0,

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) = P(x-x_0),$$

căci membrul întâiu se poate înlocuì, în virtutea teoremei lui *Weierstrass*, printr'o serie unică Laurent, $Q(x)$.

---

[1]) Punctele în cari vreuna din funcțiunile $f_n(x)$ devine infinită nu fac parte din regiunea de convergență.

CAPITOLUL VI.

SERIA TAYLOR. PRELUNGIREA ANALITICĂ A SERIEI TAYLOR.

I. — SERIA TAYLOR.

125. Fie

$$(1) \qquad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o serie întreagă și R raza cercului de convergență al ei. Fie x_0 un punct dat în interiorul cercului (R); punând

$$x = x_0 + h,$$

cu condițiunea ca punctul $(x_0 + h)$ să fie în interiorul cercului (R), vom aveà

$$P(x) = P(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0^n + n x_0^{n-1} h + \ldots + h^n).$$

Să examinăm dacă seria din membrul al doilea se poate înlocuì printr'o serie întreagă convergentă de h. Pentru aceasta, fie R' un număr pozitiv, mai mic ca R, însă oricât de aproape voim de R, și să privim h variabil, cu condițiunea

$$|x_0| + |h| \leq R'.$$

Raportând punctul figurat de h la x_0 ca origină, acest punct va fi situat în interiorul cercului sau pe cercul având centrul în x_0 și raza

$$\varrho = R' - |x_0|.$$

In aceste puncte h, avem

$$|a_n (x_0 + h)^n| \leq |a_n| R'^n ;$$

prin urmare seria ai cărei termeni sunt funcțiunile raționale și întregi de h

$$a_n (x_0 + h)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

este absolut și uniform convergentă și suma sa se poate reprezentà printr'o serie întreagă de h, convergentă în acest cerc. Insă R' fiind oricât de aproape voim de R, conchidem că seria $P(x_0 + h)$, ordonată după puterile lui h, este convergentă *în interiorul* cercului cu centrul în x_0 și cu raza

$$\varrho = R - |x_0|,$$

adică în interiorul cercului descris din x_0 ca centru și tangent interior cercului (R). In interiorul acestui cerc, putem dar scrie egalitatea

$$(2)\quad P(x_0+h)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1}h+\ldots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\ldots,$$

în care $P'(x_0)$, $P''(x_0)$, ..., $P^{(n)}(x_0)$ sunt serii întregi de x_0 și anume

$$(3)\quad \begin{cases} P'(x_0)=\sum\limits_{1}^{\infty} na_n x_0^{n-1}, \\ P''(x_0)=\sum\limits_{2}^{\infty} n(n-1)a_n x_0^{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P^{(n)}(x_0)=\sum\limits_{m} n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)a_n x_0^{n-m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ale căror valori sunt finite pe cât timp x_0 este situat în interiorul cercului (R); adică seriile $P'(x)$, $P''(x)$, ... sunt convergente în interiorul cercului (R).

In desvoltarea (2) consistă seria *Taylor*.

Dacă facem $x_0=0$ și înlocuim litera h prin x, obținem seria

$$P(x)=P(o)+\frac{P'(o)}{1}x+\ldots+\frac{P^{(n)}(o)}{n!}x^n+\ldots$$

zisă seria *Mac-Laurin*; ea coincide cu seria primitivă $\sum\limits_{o}^{\infty} a_n x^n$.

Seriile $P'(x)$, $P''(x)$, ... poartă numele de *derivatele* de ordinul 1-u, 2-lea, ..., ale seriei $P(x)$. Termenul $na_n x^{n-1}$ fiind derivata termenului al n-lea $a_n x$ al seriei $P(x)$, rezultă din prima egalitate (3) că derivata $P'(x)$ se obține făcând suma derivatelor termenilor seriei $P(x)$.

Egalitățile (3) arată că fiecare *serie derivată* se deduce din cea precedentă după aceeaş regulă după care $P'(x)$ se deduce din $P(x)$.

Pe egalitatea (2) scrisă sub forma

$$P(x_0+h)-P(x_0)=P'(x_0)h+\frac{P''(x_0)}{1\,.\,2}h^2+\ldots,$$

se verifică continuitatea seriei $P(x)$ în vecinătatea punctului x_0. Din această egalitate rezultă că avem

$$\lim_{h=o}\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}=P'(x_0),$$

oricare ar fi drumul după care h tinde către zero.

Punând $h=dx$, produsul $P'(x)dx$ se numește *diferențiala* lui $P(x)$ și dx diferențiala variabilei x. Se scrie

$$dP(x)=P'(x)dx,$$

de unde

$$P'(x) = \frac{d\,P(x)}{dx}.$$

Aplicând seriei $P'(x)$ formula (2), avem

$$P'(x_0 + h) = P'(x_0) + \frac{P''(x_0)}{1} h + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1} + \ldots;$$

de unde

$$\lim_{h=0} \frac{P'(x_0 + h) - P'(x_0)}{h} = P''(x_0).$$

Intr'un mod general, avem

$$\lim_{h=0} \frac{P^{(n)}(x_0 + h) - P^{(n)}(x_0)}{h} = P^{(n+1)}(x_0).$$

126. Din transformarea seriei $P(x)$ în seria Taylor a rezultat, cum am văzut, seriile derivate $P'(x)$, $P''(x)$, ..., cari sunt convergente în interiorul cercului (R). Convergența seriilor derivate în cercul (R) se poate stabili direct în modul următor: Fie R' un număr oarecare pozitiv mai mic ca R și M maximul lui $|P(x)|$ dealungul lui (R'); avem

$$|a_n| \leqq \frac{M}{R'^n}.$$

Fie x un punct situat în interiorul cercului (R'):

$$|x| = \varrho < R';$$

vom aveà inegalitățile

$$n\,|a_n\,x^{n-1}| \leqq n \frac{M}{R'} \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{n-1},$$

din cari rezultă că seria

$$P'(x) = \Sigma\, n\, a_n\, x^{n-1}$$

este convergentă în interiorul cercului (R'), prin urmare și în interiorul cercului (R), căci putem presupune R' oricât de aproape voim de R.

Se poate probà că cercul de convergență al seriei derivate $P'(x)$ coincide cu cercul de convergență al seriei $P(x)$. Este deajuns a arătà ca raza cercului său de convergență nu poate fi mai mare ca R. Această propozițiune rezultă imediat din comparațiunea seriilor

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + x(a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots), \\ P'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots; \end{aligned}$$

căci, seria din parenteză

$$\sum_1^\infty a_n\, x^{n-1}$$

are evident acelaş cerc de convergenţă ca seria $P(x)$ şi începând dela $n = 2$, avem

$$n\,|\,a_n\,x^{n-1}\,| > |\,a_n\,x^{n-1}\,|.$$

Aşadar seria derivată $P'(x)$ are acelaş cerc de convergenţă ca şi seria primitivă $P(x)$.

In acelaş mod se conchide că seria $P''(x)$ are acelaş cerc de convergenţă ca $P'(x)$, prin urmare ca $P(x)$, etc. Aşadar toate seriile derivate au acelaş cerc de convergenţă ca seria primitivă $P(x)$.

Să observăm că într'un punct situat *pe cercul* de convergenţă seria $P(x)$ poate fi convergentă şi derivata sa $P'(x)$ divergentă. Astfel, de exemplu, seria $\sum\limits_1^\infty \frac{x^n}{n}$ este convergentă pe tot cercul $|\,x\,| = 1$, exceptând punctul $x = 1$, pe când derivata sa $\sum\limits_1^\infty x^{n-1}$ este divergentă pe tot cercul.

127. Să înlocuim în (2) $x_0 + h$ prin x şi h prin $x - x_0$, vom avea

$$(4)\quad P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1}(x - x_0) + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) + \ldots$$

Cercul de convergenţă al seriei din membrul al doilea al cărui centru este x_0, este cel puţin tangent interior cercului primitiv (R), adică raza sa este cel puţin egală cu $R - |\,x_0\,|$. Reprezentând această serie prin $P(x - x_0)$, avem egalitatea

$$(5)\qquad P(x) = P_1(x - x_0),$$

valabilă în toate punctele x situate în interiorul cercului descris din x_0 ca centru cu raza $R - |\,x_0\,|$. Seria $P_1(x - x_0)$ poate fi privită ca transformata seriei $P(x) = \sum a_n x^n$, în care înlocuim x prin $x_0 + (x - x_0)$ şi punem

$$\sum_0^\infty a_n\,[x_0 + (x - x_0)]^n = \sum_0^\infty \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = P_1(x - x_0).$$

128. Referindu-ne la proprietatea 2^0 a seriilor $P(x - x_0)$ (§117) conchidem, în virtutea egalităţii (5), propoziţiunea următoare:

Dacă o serie întreagă $P(x)$ se anulează într'un punct oarecare x_0, situat în cercul său de convergenţă, există un cerc cu centrul în x_0 având o rază $r > o$, astfel că, în interiorul său, $P(x)$ n'are alt zero decât x_0: adică zerurile lui $P(x)$ în interiorul cercului său de convergenţă sunt *puncte izolate.*

II. — PRELUNGIREA ANALITICĂ A SERIEI TAYLOR.

Serii deduse dintr'o serie de forma $P(x-x_0)$ sau continuarea seriilor.

129. Să considerăm seria

$$P(x-x_0) = \sum_{o}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

al cărei cerc de convergență să-l reprezentăm prin (R), R fiind raza acestui cerc. Fie x_1 un punct situat în (R); vom avea în domeniul lui x_1, înlocuind x_1 prin $x_1 + (x-x_1)$,

$$P(x-x_0) = P[x_1-x_0+(x-x_1)] = \sum_{o}^{\infty} \frac{P^{(n)}(x_1-x_0)}{n!}(x-x_1)^n,$$

formulă care se deduce din egalitatea

$$P(x_0+h) = \Sigma \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} h^n,$$

dacă înlocuim x_0 prin x_1-x_0 și h prin $x-x_1$. Se reprezintă seria din membrul al doilea prin

$$P(x-x_0, x_1)\ ^{1}).$$

Acest simbol va defini o serie întreagă de $x-x_1$, provenită din seria $P(x-x_0)$ în modul determinat mai sus. Avem așadar egalitatea

$$(2) \qquad P(x-x_0) = P(x-x_0, x_1),$$

valabilă în interiorul cercului descris din x_1 ca centru și tangent interior cercului (R).

Se poate întâmplă ca cercul de convergență (C_1) al seriei $P(x-x_0, x_1)$ să se întindă în afară din cercul (R); prin urmare reprezentând prin R_1 raza cercului (C_1) și punând $d = |x_1-x_0|$, avem

$$R_1 \geqq R - d.$$

Vom vedea mai departe că în cazul $R_1 > R-d$, egalitatea (2) subsistă nu numai în regiunea considerată mai sus, ci în toată aria comună cercurilor (R) și (C_1).

Fie x_2 un punct situat în interiorul cercului (C_1). Inlocuind x prin $x_2+(x-x_2)$ în seria $P(x-x_0, x_1)$, obținem o nouă serie ordonată după puterile lui $x - x_2$, pe care o reprezentăm prin

$$P(x-x_0, x_1, x_2).$$

---

[1]) Dacă seria inițială este $P(x)$, seria dedusă relativ la punctul x_0 se notează $P(x, x_0)$.

Conchidem, ca mai sus, că în interiorul cercului descris din x_2 ca centru și tangent interior cercului (C_1), avem egalitatea

$$P(x-x_0, x_1) = P(x-x_0, x_1, x_2).$$

Fie R_2 raza cercului de convergență (C_1) al seriei din membrul al doilea și $d_1 = |x_2 - x_1|$, vom avea

$$R_2 \geqq R_1 - d_1.$$

Continuând în acelaș mod, obținem seriile

$$P(x-x_0, x_1, x_2, x_3), \ldots, P(x-x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

punctul x_3 fiind situat în interiorul cercului de convergență (C_2) al seriei $P(x-x_0, x_1, x_2), \ldots$, punctul x_n în cercul (C_{n-1}) al seriei $P(x-x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$.

Seriile

$$P(x-x_0, x_1), P(x-x_0, x_1, x_2), \ldots, P(x-x_0, x_1, x_2, \ldots x_n),$$

deduse, precum am văzut, constitue *continuarea* sau *prelungirea analitică* a seriei primitive $P(x-x_0)$, cea d'intâiu este continuarea imediată a ei, cele următoare o continuă prin intermediul punctelor $x_1, x_2, \ldots$ Dealtmintrelea, fiecare din aceste serii este o continuare a celei care o precede imediat.

130. Fie x_1 un punct în interiorul cercului (R); să reprezentăm prin (Γ_1) cercul cu centrul în x_1 și tangent interior cercului (R). Fie x_2 un punct oarecare în (Γ_1) și $P(x-x_0, x_1, x_2)$ seria dedusă din $P(x-x_0, x_1)$. Punctul x_2 fiind în interiorul cercului (R), putem din seria primitivă $P(x-x_0)$ să deducem direct seria $P(x-x_0, x_2)$.

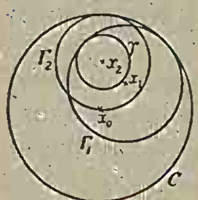

Fig. 4

Voim să probăm că seriile $P(x-x_0, x_1, x_2)$ și $P(x-x_0, x_2)$ coincid.

In adevăr, în interiorul cercului (γ) (fig. 4) descris din x_2 ca centru și tangent interior cercului (Γ_1), seria $P(x-x_0, x_1)$ este egală, în virtutea egalității (2), în acelaș timp cu seria $P(x-x_0)$ dela care provine și cu seria $P(x-x_0, x_1, x_2)$ la care dă naștere. Prin urmare, în interiorul cercului (γ), avem

$$P(x-x_0), = P(x-x_0, x_1, x_2).$$

De altă parte, reprezentând prin (Γ_2) cercul descris din x_2 ca centru și tangent interior cercului (R), avem în interiorul lui (Γ_2),

$$P(x-x_0) = P(x-x_0, x_2).$$

Insă (Γ_2) cuprinzând în interiorul său cercul (γ), rezultă că, în interiorul acestui din urmă cerc, avem

$$P(x-x_0, x_1, x_2) = P(x-x_0, x_2).$$

Aceste două serii fiind ordonate în *acelaş mod* după puterile lui $x-x_0$ şi egale între ele într'o infinitate de puncte vecine cu x_2 sunt identice.

Din identitatea celor două serii rezultă că cercul de convergenţă al seriei $P(x-x_0, x_1, x_2)$ se întinde în afară din cercul (Γ_1), căci este cel puţin egal cu (Γ_2). Vedem astfel posibilitatea ca cercul de convergentă al unei serii deduse dintr'o serie dată de forma $P(x-x_0)$ să se întindă în afară din cercul de convergenţă al acelei serii.

In acelaş mod se recunoaşte că seria

$$P(x-x_0, x_1, x_2, x_3),$$

x_3 fiind un punct oarecare în interiorul lui (Γ_2), este identică cu seria $P(x-x_0, x_3)$, dedusă direct din $P(x-x_0)$. Intr'un mod general, x_i fiind un punct interior în acelaş timp cercurilor (R) şi (Γ_{i-1}), cel din urmă tangent interior celui d'intâiu, $(i=1, 2, 3, \ldots n)$, avem identitatea

$$P(x-x_0, x_1, \ldots x_i) \equiv P(x-x_0, x_i).$$

Dacă $x_n = x_0$, rezultă

$$P(x-x_0, x_1, \ldots x_{n-1} x_0) \equiv P(x-x_0).$$

Observare. In cele ce preced putem evident înlocui cercurile (Γ_i) prin cercurile de convergenţă (C_i) ale seriilor deduse $P(x-x_0, x_1, \ldots x_i)$, cu condiţiunea ca punctele x_i să fie toate interioare cercului (R).

131. *Teoremă. — Dacă dintr'o serie $P(x-x_0)$ deducem direct o serie $P(x-x_0, a)$, vice-versa, din cea de a doua putem deduce pe cea d'intâiu.*

Se poate întâmplà ca punctul x_0, centrul cercului de convergenţă (R) al seriei $P(x-x_0)$, să fie cuprins în cercul de convergenţă (C) al seriei $P(x-x_0, a)$, sau să fie exterior acestui cerc. In cazul întâiu, din seria $P(x-x_0, a)$ deducem imediat seria $P(x-x_0, a, x_0)$ care este identică cu $P(x-x_0)$.

Să presupunem că x_0 nu se găseşte în interiorul cercului (C). Pe raza care uneşte x_0 şi a să luăm între ele un punct x_1, interior cercului (C), şi din seria $P(x-x_0, a)$ să deducem $P(x-x_0, a, x_1)$ serie identică cu seria $P(x-x_0, x_1)$, dedusă direct din seria primitivă. Prin urmare raza cercului de convergenţă (C_1) al seriei $P(x-x_0, a, x_1)$ este mai mare sau cel puţin egală cu $R-|x_0-x_1|$.

Dacă (C_1) conţine punctul x_0, deducem din ultima serie pe cea următoare

$$P(x-x_0, a, x_1, x_0)$$

care coincide cu seria $P(x-x_0)$. In cazul contrar, fie x_2, un punct situat pe aceiaşi rază între x_0 şi x_1, interior lui (C_1). Din $P(x-x_0, a, x_1)$ deducem seria $P(x-x_0, a, x_1, x_2)$, identică cu seria $P(x-x_0, x_2)$, dedusă direct din $P(x-x_0)$; prin urmare raza cercului de convergenţă (C_2) este mai mare sau cel puţin egală cu $R-|x_0-x_2|$.

Se pune întrebarea dacă, continuând în acelaş mod, vom ajunge ca, prin intermediul unui număr *limitat* de puncte intercalate

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

să obţinem o serie $P(x-x_0, a, x_1, \ldots x_n)$ al cărei cerc de convergenţă să conţină punctul x_0? In caz afirmativ, seria $P(x-x_0, a, x_1, \ldots x_n, x_0)$ dedusă dintr'însa este identică cu seria primitivă $P(x-x_0)$.

Rămâne dar de demonstrat că numărul operaţiunilor menţionate este *limitat*. Vom presupune toate cercurile C tangente interior cercului (R). Dacă propoziţiunea este adevărată în acest caz, ea va fi cu atât mai mult adevărată în cazul când C taie cercul (R).

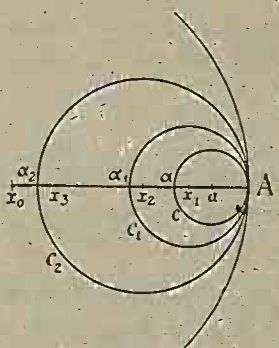

Fig. 5

Fie dar $r, r_1, r_2, \ldots r_n$, razele cercurilor $C, C_1, C_2, \ldots C_n$ şi $d, d_1, d_2, \ldots, d_n$ distanţele respective ale punctului x_0 de centrele lor $a, x_1, x_2, \ldots x_n$. Să figurăm prin $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ punctele de intersecţiune ale acestor cercuri cu raza x_0A a cercului (R), care trece prin punctul a, situat între x_0 şi centrele lor, şi fie $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$, distanţele respective dintre x_0 şi aceste puncte. Avem (fig. 5) egalităţile

$$(3) \begin{cases} r = R - d, \; r_1 = R - d_1, \; r_2 = R - d_2, \ldots \\ \delta = d - r, \; \delta_1 = d_1 - r_1, \; \delta_2 = d_2 - r_2, \ldots \end{cases}$$

Teorema va fi demonstrată dacă arătăm că dela un rang încolo, cantităţile $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$, încep a fi negative. Să presupunem punctele $x_1, x_2, \ldots$ luate astfel ca distanţele

$$x_1 a = x_2 a_1 = \ldots = \varepsilon < \frac{r}{2}.$$

Vom avea (fig 5).

$$\overline{x_1 \alpha_1} = \overline{x_1 A} = r_1 > r + \frac{r}{2}, \text{ de unde } \overline{\alpha\, \alpha_1} > r;$$

prin urmare

$$(4) \qquad \delta_1 = \delta - \overline{\alpha\, \alpha_1} < d - 2\, r.$$

Deasemenea

$$\overline{x_2 a_2} = \overline{x_2 A} = r_2 > 2 r_1 - \frac{r}{2} > 2 r + \frac{r}{2}\text{; de unde } \overline{a_1 a_2} > 2 r$$

şi prin urmare

$$(5) \qquad \delta_2 = \delta_1 - \overline{a_1 a_2} < d - 4 r.$$

In acelaş mod

$$\overline{x_3 a_3} = \overline{x_3 A} = r_3 > 2r_2 - \frac{r}{2} > 4r + \frac{r}{2};$$

de unde

$$\overline{a_2 a_3} > 4 r$$

şi prin urmare

$$(6) \qquad \delta_3 = \delta_2 - \overline{a_2 a_3} < d - 8 r.$$

Continuând astfel, găsim

$$(7) \qquad \begin{array}{l} \delta_4 < d - 2^4 r, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \delta_n < d - 2^n r. \end{array}$$

Aceste inegalităţi justifică propoziţiunea noastră.

132. *Observare.* Fie $x_1, x_2, \ldots x_n$ punctele prin intermediul cărora trecem dela seria $P(x-x_0)$ la seria $P(x-x_0, x_1, x_2, \ldots x_n)$. Dacă alegem aceste puncte astfel ca fiecare să fie nu numai în interiorul cercului al cărui centru este punctul care-l precede, ceeace este necesar ca una oarecare din seriile succesive să fie prelungirea imediată a celei ce o precede, ci încă să se găsească în interiorul cercului al cărui centru este punctul următor, atunci aceleaşi puncte pot servi ca puncte intermediare pentru trecerea în sens invers dela $P(x-x_0, x_1, \ldots x_n)$ la $P(x-x_0)$. Numind R_i raza cercului de convergenţă al seriei $P(x-x_0, x_1, \ldots x_i)$, avem în condiţiunile date

$$\left| x_{i+1} - x_i \right| < \frac{R_i}{2}.$$

133. *Teoremă. — Dacă cercurile de convergenţă a două serii $P(x-a)$, $P_1(x-b)$ au o regiune comună şi dacă în vecinătatea unui punct c din această regiune seriile sunt egale într'o infinitate de puncte: 1°. aceste două serii sunt egale în toată regiunea comună; 2°. ele se pot deduce una din alta prin metoda prelungirii analitice.*

1°. Din seriile $P(x-a)$, $P_1(x-b)$ să deducem respectiv seriile $P(x-a, c)$, $P_1(x-b, c)$; vom aveà, într'un cerc (C) descris din c ca centru şi cuprins în regiunea comună, egalităţile

$$P(x-a) = P(x-a, c), \quad P_1(x-b) = P_1(x-b, c).$$

Însă seriile din membrul întâiu fiind, prin ipoteză, egale între ele într'o infinitate de puncte vecine cu c, rezultă că seriile din membrul al doilea, ordonate amândouă după puterile lui $x-c$, sunt identice

$$(8) \qquad P(x-a,\, c) \equiv P_1(x-b,\, c).$$

Prin urmare pentru *toate* punctele x situate în cercul (C) avem egalitatea

$$P(x-a) = P_1(x-b).$$

Fie x_1 un punct oarecare în interiorul cercului (C). Din x_1 ca centru să descriem un cerc (C_1) cât se poate de mare, dar care să rămână în interiorul regiunei comune de convergenţă a seriilor date. Cele două serii date fiind egale într'o infinitate de puncte vecine cu x_1, vom conchide, ca mai sus, că ele sunt egale în tot cercul (C_1). Continuând astfel din aproape în aproape, rezultă că seriile $P(x-a)$, $P_1(x-b)$ sunt egale între ele în toată regiunea comună de convergenţă.

2°. Partea a doua a teoremei rezultă imediat din identitatea (8), obţinută mai sus. Căci seria $P_1(x-b)$ putând fi dedusă din seria $P_1(x-b,\, c)$, se poate consideră ca o prelungire a seriei identice $P(x-a,\, c)$ şi prin urmare ca este o prelungire a seriei $P(x-a)$. Viceversa, seria $P(x-a)$ se poate privì ca o prelungire a seriei $P_1(x-b)$.

Corolar. Dacă cercul de convergenţă al seriei $P(x-x_0,\, x_1)$ se întinde în afară din cercul de convergenţă al seriei $P(x-x_0)$, vom aveà egalitatea

$$P(x-x_0) = P(x-x_0,\, x_1),$$

pentru toate valorile lui x cuprinse în regiunea comună celor două cercuri. Aceasta rezultă din propoziţiunea 1°.

134. *Consecinţe.* 1°. Dacă o serie întreagă $P(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ se anulează într'o infinitate de puncte, situate în interiorul cercului său de convergenţă, ea este identic nulă, adică toţi coeficienţii a_n sunt nuli.

În adevăr, fie x_0 un punct limită al grămezii punctelor considerate şi $P_1(x-x_0)$ seria dedusă din $P(x)$; seria $P_1(x-x_0)$ este, în virtutea ipotezei, nulă într'o infinitate de puncte vecine cu x_0 şi prin urmare identic nulă. De unde rezultă că şi seria $P(x)$ este nulă în toată regiunea comună celor două cercuri de convergenţă.

Fie x_1 un punct situat în această regiune, cât mai aproape de punctul $x=o$; seria $P(x)$ va fi nulă în regiunea comună cercului său de convergenţă şi cercului de convergenţă al seriei $P_1(x-x_0,\, x_1)$.

Continuând în acelaş mod, ajungem, prin intermediul unui număr limitat de puncte, să deducem o serie al cărei cerc să conţină punctul $x = o$, în domeniul căruia seria $P(x)$ este nulă şi prin urmare identic nulă.

Intr'un mod general, dacă seria $P(x)$ este egală cu o constantă oarecare A într'un număr nelimitat de puncte interioare cercului său de convergenţă, vom avea $P(x) = A$ în tot cercul. Căci seria $P(x) - A$ se anulează în acele puncte şi prin urmare este identic nulă.

2^0. Dacă două serii $P(x)$, $P_1(x)$ sunt egale într'o infinitate de puncte, interioare regiunei comune de convergenţă ele coincid.

3^0. Dacă derivatele de orice ordin ale seriei $P(x)$ sunt nule într'un punct x_0, situat în cercul său de convergenţă, seria se reduce la o constantă. Căci din egalitatea

$$P(x) = \sum_0^\infty \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

rezultă că în domeniul punctului x_0 avem egalitatea

$$P(x) = P(x_0)$$

şi prin urmare, în virtutea celor ce am văzut mai sus, această egalitate subsistă în tot cercul de convergenţă al seriei $P(x)$.

135. *Limite între cari este cuprinsă raza cercului de convergenţă al seriei $P(x - x_0, x_1)$ dedusă din seria $P(x - x_0)$.*

Fie R raza cercului de convergenţă al seriei primitive $P(x - x_0)$ şi $d = |x_1 - x_0|$; avem

$$R_1 \geqq R - d.$$

Voim să arătăm că limita superioară a lui R_1 este $R + d$, adică

$$R_1 \leqq R + d.$$

Dacă $d < \frac{R}{2}$, seria $P(x - x_0)$ se deduce direct din $P(x - x_0, x_1)$; putem aşadar permuta R_1 cu R, ceace dă

$$R \geqq R_1 - d,$$

de unde

$$R_1 \leqq R + d.$$

Inegalitatea subsistă şi în cazul $d > \frac{R}{2}$. In adevăr, să presupunem $R_1 > R + d$. In acest caz cercul de convergenţă al seriei $P(x - x_0, x_1)$ conţinând punctul x_0, avem $R \geqq R_1 - d$; ceeace este în contrazicere cu ipoteza.

Aşa dar în toate cazurile, avem

$$R_1 \leqq R + d.$$

Iată o demonstraţiune directă a acestei inegalităţi:

Să presupunem $d > \frac{R}{2}$. Nu se mai poate afirma că seria $P(x-x_0)$ se deduce direct din $P(x-x_0, x_1)$, însă ea se va puteà totdeauna deduce prin intermediul unui număr limitat de puncte $x_2, x_3, \ldots$, intercalate între x_0 şi x_1, pe raza care uneşte aceste două puncte. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că trecerea se face prin intermediul a două puncte x_2 şi x_3 (fig 6).

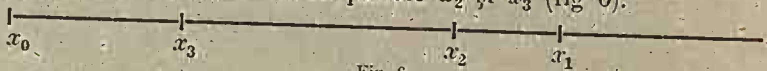

Fig. 6

Să punem:

$$d = x_1 - x_0, \quad d_1 = x_1 - x_2, \quad d_2 = x_2 - x_3, \quad d_3 = x_3 - x_0;$$

vom aveà

$$d = d_1 + d_2 + d_3. \tag{9}$$

Fie R_2 şi R_3 razele cercurilor de convergenţă ale seriilor deduse succesiv din $P(x-x_0, x_1)$; vom aveà

$$R_2 \geqq R_1 - d_1, \quad R_3 \geqq R_2 - d_2. \tag{10}$$

Din seria $P(x-x_0, x_1, x_2, x_3)$ se deduce prin ipoteză seria primitivă $P(x-x_0)$, astfel că trebuie să avem

$$R \geqq R_3 - d_3. \tag{11}$$

Adunând egalităţile (10) şi (11) şi ţinând seamă de relatiunea (9), obţinem $R \geqq R_1 - d$. De unde

$$R_1 \leqq R + d. \tag{12}$$

q. e. d.

Prin urmare în toate cazurile avem

$$R - d \leqq R_1 \leqq R + d. \tag{13}$$

Aşadar limitele căutate sunt

$$R - d, \quad R + d.$$

Limita superioară a lui d, când x variază, fiind R, rezultă

$$0 \leqq R_1 \leqq 2R.$$

Se recunoaşte lesne că R_1 este o funcţiune continuă de poziţiunea punctului x_1. In adevăr, fie x_1' un punct vecin cu x_1 şi interior cercului (R), R_1' raza cercului de convergenţă al seriei $P(x-x_0, x_1')$. Această serie fiind identică cu seria $P(x-x_0, x_1, x'_1)$, vom aveà, în virtutea inegalităţii (13), punând $|x'_1 - x_1| = \delta$,

$$|R'_1 - R_1| < \delta;$$

ceeace justifică aserţiunea noastră.

136. Din proprietatea continuităţii, rezultă că R_1 admite un minimum. Voim să probăm că *minimul său este zero*. Este evident că acest minimum nu poate corespunde unui punct x, situat în interiorul cercului (R), ci acest punct va trebui să fie pe cercul (R).

Să luăm, pentru a simplificà scrierea, punctul x_0 ca origină şi să considerăm seria

$$P(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$$

al cărei cerc de convergenţă va fi reprezentat prin (R). Fie x_0 un punct situat în interiorul cercului (R); avem

$$P(x) = P(x; x_0) = \sum_0^\infty \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

pentru toate valorile lui x cari satisfac inegalitatea

$$|x - x_0| + |x_0| < R.$$

Să presupunem că minimul razei cercului de convergenţă al seriei $P(x, x_0)$, când punctul x_0 se mişcă în interiorul cercului (R), este un număr pozitiv r. Vom probà că raza cercului de convergenţă al seriei primitive $P(x)$ este $R + r$.

Prin ipoteză, seria $P(x, x_0)$ este convergentă într'un cerc cu centrul în x_0 şi cu raza r, x_0 fiind în interiorul cercului (R). Fie ϱ un număr pozitiv mai mic ca r şi M maximul lui $|P(x, x_0)|$ când x descrie cercul

$$|x - x_0| = \varrho;$$

vom aveà (113)

$$\frac{|P^{(n)}(x)|}{n!} \leq \frac{M}{\varrho^n}.$$

De altă parte, avem

$$P^{(n)}(x) = \sum_{m=n}^\infty m(m-1) \ldots (m-n+1) a_m x^{m-n};$$

prin urmare

$$\left| \sum_{m=n}^\infty \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{n!} a_m x_0^{m-n} \right| \leq \frac{M}{\varrho^n}.$$

Fie $\mathcal{M}$ cea mai mare dintre valorile pe cari le primeşte M, când x_0 descrie cercul

$$|x| = R', \qquad R' < R.$$

Vom aveà

$$\frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{n!} |a_m| \leq \frac{\mathcal{M}}{\varrho_n} \cdot \frac{1}{R'^{m-n}}.$$

sau

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\,|a_m|\,R'^m\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \leq \mathcal{M}\left(\frac{R'}{R}\right)^n.$$

Făcând $n = o, 1, 2, \ldots m$ și adunând toate aceste inegalități, obținem

$$|a_m|\,R'^m\left(1+\frac{\varrho}{R}\right)^m \leq \mathcal{M}\,\frac{1-\left(\frac{R'}{R}\right)^{m+1}}{1-\frac{R'}{R}} < \mathcal{M}\,\frac{R}{R-R'}.$$

Expresiunea $|a_m|\,R'^m\left(1+\frac{\varrho}{R}\right)^n$ rămânând mai mică decât o cantitate constantă, oricât de mare ar fi m, rezultă că seria

$$P(x) = \sum_{0}^{\infty} a_m\,x^m$$

este convergentă pentru toate valorile lui x, cari satisfac inegalitatea

$$|x| < R'\left(1+\frac{\varrho}{R}\right).$$

Insă R' poate fi oricât de aproape de R și ϱ de r, prin urmare raza cercului de convergență al seriei $P(x)$ diferă oricât de puțin voim de $R + r$. De altă parte, raza cercului de convergență fiind o cantitate constantă, nu poate diferi de $R + r$ cu oricât de puțin voim, fără să coincidă cu această cantitate. Așadar raza cercului de convergență al seriei $P(x)$ este $R + r$. q. e. d.

137. Din teorema precedentă rezultă că dacă R este raza cercului de convergență al unei serii de forma $P(x)$ sau $P(x-x_0)$, razele cercurilor de convergență ale seriilor deduse din ele, prin metoda prelungirii analitice, au ca limită inferioară zero.

Așadar pe cercul (R) există *cel puțin* un punct a astfel că raza cercului de convergență al seriei $P(x-x_0, x')$, x' fiind în interiorul cercului (R), tinde către zero când x' se apropie de a. Un asemenea punct se numește *punct singular*.

138. *Teoremă. — Dealungul razei care trece printr'un punct singular a, seria $P(x-x_0)$ nu se poate continuà în afară din cercul său de convergență (R).*

Această propozițiune este cuprinsă în cea următoare:

Oricare ar fi punctul x' interior cercului (R), cercul de convergență C al seriei $P(x-x_0, x')$ nu conține în interiorul său punctul a.

Să presupunem că teorema nu este adevărată și că ar există un punct x' interior cercului (R) astfel că cercul de convergență

C al seriei $P(x-x_0, x')$ să conţină în interiorul său punctul a. Fie δ distanţa cea mai scurtă dintre a şi cercul C şi x'' un punct interior regiunii comune cercurilor (R) şi C, situat între punctele x' şi a pe dreapta ce uneşte aceste două puncte. Raza R'' a cercului de convergenţă al seriei $P(x-x_0, x', x'')$ dedusă din seria $P(x-x_0, x')$, este mai mare ca δ. Insă această serie este identică cu seria $P(x-x_0, x'')$ dedusă direct din cea primitivă. Aşadar raza cercului de convergenţă al acestei serii este mai mare ca δ şi prin urmare nu poate tinde către zero când x'' se apropie de a; ceeace este contra ipotezei. Prin urmare cercul de convergenţă al seriei $P(x-x_0, x')$ nu poate cuprinde în interiorul său punctul a. q. e. d.

Corolar. Nu există serie de forma $P_1(x-a)$ al cărei cerc de convergenţă să conţină punctul a şi care în regiunea comună cu cercul (R) să fie egală cu seria $P(x-x_0)$. Căci atunci dacă x_1 este un punct interior regiunei comune, seriile respectiv deduse $P_1(x-a, x_1)$, $P(x-x_0, x_1)$ ar fi identice. Presupunând punctul x_1 destul de aproape de a, cercul de convergenţă al seriei $P_1(x-a, x_1)$ şi prin urmare acela al seriei $P(x-x_0, x_1)$ ar conţine punctul a; ceeace este contrar teoremei precedente.

139. *Teoremă. — Dacă seria*

$$P(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n,$$

cu cercul de convergenţă (R), are toţi coeficienţii săi reali şi pozitivi, punctul $x = R$ este un punct singular.

Pentru a stabili această teoremă, să considerăm două puncte $x = a$, $x = x_0$ situate la aceeaş distanţă de origină, cel dintâiu pe axa reală între origină şi punctul $x = R$, cel de al doilea având o poziţiune oarecare pe cercul $|x| = a$. Fie

$$P(x, a) = \sum_{0}^{\infty} P^{(n)}(a) \frac{(x-a)^m}{m!}, \quad P(x, x_0) = \sum_{0}^{\infty} \overset{(m)}{P}(x_0) \frac{(x-x_0)^m}{m!}$$

seriile deduse din $P(x)$. Din expresiunea

$$P^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)\, a^n x^{n-m}$$

rezultă, în virtutea ipotezei, că coeficienţii seriei $P(x, a)$ sunt toţi reali şi pozitivi. In acelaş timp, în virtutea egalităţii $|x_0| = a$, avem

$$|P^{(m)}(x_0)| \leq P^{(m)}(a) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

De aci rezultă că raza cercului de convergenţă al seriei $P(x, a)$

este *mai mică*, sau *cel mult egală* cu aceea a cercului de convergenţă al seriei $P(x, x_0)$, oricare ar fi punctul x_0 pe cercul $|x_0| = a$. De unde conchidem că prelungirea seriei $P(x)$, în afară din cercul (R), nu se poate face dealungul razei care trece prin punctul $x = R$. De unde rezultă că acest punct este un punct singular.

De exemplu, seriile $\Sigma \frac{x^n}{n}$, $\Sigma \frac{x^n}{n^2}$ au punctul $x = 1$, ca punct singular.

Corolare. I. — Dacă înlocuind x prin $-x$, coeficienţii seriei, presupuşi reali, devin toţi pozitivi, punctul $x = -R$ este un punct singular.

II. — Dacă coeficienţii fiind toţi reali şi pozitivi, seria nu se schimbă când înlocuim x prin $-x$, punctele $x = \pm R$ sunt puncte singulare. Intr'un mod mai general, dacă coeficienţii fiind toţi reali şi pozitivi, seria conţine *numai* puteri de x ai căror exponenţi sunt multipli ai unui număr întreg pozitiv m, punctele

$$x = Re^{\frac{2ki\pi}{m}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots m-1)$$

sunt puncte singulare. Căci seria dată rămâne neschimbată când înlocuim x prin

$$xe^{\frac{2ki\pi}{m}}.$$

140. *Observări asupra punctelor singulare.*

I. — Fie $x = a$ un punct *ordinar* (adică nu singular) pe cercul de convergenţă (R) al seriei $P(x)$ şi x_0 un punct situat pe raza care trece prin punctul c, interior cercului. Presupunând x_0 destul de aproape de a, cercul de convergenţă C al seriei deduse $P(x-x_0)$ va conţine în interiorul său punctul a; prin urmare $P(a-x_0)$ va aveà o valoare *finită* şi, în virtutea continuităţii, vom aveà

$$\lim_{x=a} P(x, x_0) = P(a, x_0).$$

Insă în regiunea comună cercurilor (R) şi C, seriile $P(x)$ şi $P(x, x_0)$ fiind egale, rezultă

$$\lim_{x=a} P(x) = \lim_{x=a} P(x, x_0) = P(a, x_0),$$

când x tinde către a dealungul razei. Aşadar conchidem că dacă *x tinde către un punct ordinar al cercului (R), dealungul razei care trece prin acest punct, seria $P(x)$ tinde către o limită finită.*

II. — De aci nu rezultă convergenţa seriei într'un punct ordinar al cercului (R). Contrariul poate aveà loc. Aceasta se poate verificà lesne pe seria

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

din care deducem seria

$$P(x,x_0) = \frac{1}{1-x_0-(x-x_0)} = \frac{1}{1-x_0}\left[1+\frac{x-x_0}{1-x_0}+\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^2+\ldots\right],$$

al cărei cerc de convergenţă C are centrul său în x_0 şi trece prin punctul $x = 1$. Acest cerc taie cercul (R) dacă x_0 nu este real şi pozitiv. De unde rezultă că prelungirea analitică a seriei $P(x)$, în afară din cercul de convergenţă, se poate face după orice rază, exceptând raza care trece prin punctul $x = 1$. Aşadar unicul punct singular este punctul $x = 1$, pe când seria este divergentă pe tot cercul.

III. — Din cele zise mai sus (I), rezultă că dacă suma seriei $P(x)$ tinde către infinit când x se apropie de un punct a al cercului (R), dealungul razei care trece prin acest punct, a este un punct singular.

Reciproca nu este adevărată. Un punct a pe (R) poate fi *singular* şi limita către care tinde $P(x)$, când x se apropie de a, să fie *finită.* Se poate chiar ca seria să fie convergentă în acel punct, ceeace trage după sine [teorema II a lui *Abel* (105)] ca $P(x)$ să tindă către o limită finită. Astfel seria

$$1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

este convergentă pe tot cercul său de convergenţă, deşi are pe acest cerc cel puţin un punct singular, anume punctul $x = 1$. Vom vedeà mai târziu că punctul $x = 1$ este unicul punct singular pe cercul considerat.

IV. Se poate întâmplà ca toate punctele cercului de convergenţă al seriei să fie puncte singulare.

1°. Astfel este seria

$$P(x) = \sum_1^\infty x^{n!} \tag{1}$$

al cărei cerc de convergenţă are ca rază 1.

Să observăm mai întâiu că în virtutea teoremei (139) punctul $x = 1$ este un punct singular [1]. Al doilea, să considerăm un punct interior cercului $|x| = 1$ şi reprezentat prin expresiunea

$$x = \varrho e^{2i\pi\frac{q}{p}} \quad \varrho < 1, \tag{2}$$

q şi p fiind două numere întregi pozitive satisfăcând inegalitatea

$$0 \leqq \frac{q}{p} < 1. \tag{3}$$

---

[1]) Aceasta rezultă şi din observarea III.

Pentru aceste valori ale lui x, seria se poate serie

$$(4) \qquad P(x) = \sum_{n=1}^{p-1} x^{n!} + \sum_{n=p}^{\infty} \varrho^{n!}.$$

Seria $P(x)$ nu diferă deci de seria

$$(5) \qquad \sum_{n=p}^{\infty} \varrho^{n!}$$

decât printr'o sumă de un număr mărginit de termeni. Insă $\varrho = 1$ este un punct singular al seriei (5); prin urmare punctul

$$(6) \qquad a = e^{2i\pi \frac{q}{p}},$$

către care tinde punctul (2), când ϱ tinde către 1, este un punct singular al seriei $P(x)$.

Dând lui p și q toate valorile pozitive satisfăcând inegalitatea (3), obținem o infinitate de puncte singulare a, formând o *grămadă densă* pe cercul $|x| = 1$; căci, precum se știe, totalitatea numerelor raționale cuprinse într'un interval dat, constitue o grămadă densă. De unde rezultă că *nu numai grămada* (a), *ci și grămada derivată a ei, adică toate punctele cercului* $|x| = 1$, *sunt puncte singulare ale seriei* $P(x)$. In adevăr, fie β un punct oarecare al cercului, diferit de un punct a: β este un punct limită. Dacă β n'ar fi punct singular al seriei, ar exista un punct x_0 interior cercului și un număr $\varrho > 0$, astfel încât cercul $|x - x_0| = \varrho$ să conție punctul β și în care seria $P(x, x_0)$ dedusă din $P(x)$ să fie convergentă. Ceeace este imposibil, căci un cerc care conține în interiorul său punctul β conține și puncte a. q. e. d.

2⁰. Iată un al doilea exemplu: Seria

$$(1) \qquad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^{b^n},$$

în care a este o cantitate finită oarecare și b un număr întreg mai mare ca 1, nu se prelungește în afară din cercul său de convergență. Să căutăm raza cercului de convergență al acestei serii. Pentru aceasta observăm că șirul $\left| a^{\frac{n}{b^n}} \right|$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, este convergent și

$$\lim_{n=\infty} \left| a^{\frac{n}{b^n}} \right| = 1. \text{ [1]}$$

---

[1] $\frac{n}{b^n}$ descrește necontenit începând dela $n = 2$ și limita sa, pentru $n = \infty$, este zero.

De unde rezultă, în virtutea teoremei Cauchy-Hadamard (108) că raza căutată este egală cu 1.

Dacă avem $|a| < 1$, seria este convergentă pe tot cercul; în orice caz însă toate punctele cercului sunt puncte singulare. In adevăr, seria având cel puţin un punct singular pe cerc, fie α acest punct şi β un alt punct pe acelaş cerc, legat de cel dintâiu prin relaţiunea

$$\beta = \alpha e^{2i\pi \frac{q}{b^p}}$$

p şi q fiind două numere întregi pozitive, dintre cari q poate primì valorile 0, 1, 2, ... $b^p - 1$. Inlocuind x prin $\frac{\beta}{\alpha} x$, obţinem

$$(3) \qquad P\left(\frac{\beta}{\alpha} x\right) = \sum_{n=0}^{p-1} a^n \left(\frac{\beta}{\alpha} x\right)^{b^n} + \sum_{n=p}^{\infty} a^n x^{b^n}.$$

Insă orice punct singular al seriei $P(x)$ este evident un punct singular al seriei

$$\sum_{p}^{\infty} a^n x^{b^n}$$

şi prin urmare, în virtutea egalităţii (3), un asemenea punct este punct singular şi al seriei $P\left(\frac{\beta}{\alpha} x\right)$. Aşadar $x = \alpha$ este un punct singular al acestei serii; ceeace revine a zice că $x = \beta$ este un punct singular al seriei $P(x)$.

Se recunoaşte uşor că dând lui p valorile întregi 1, 2, ... ∞ şi lui q valorile 0, 1, 2, ... $b^p - 1$, numerele $\frac{q}{b^p}$ formează o grămadă densă în intervalul (0, ... 1). De unde rezultă, ca şi în exemplul precedent, că toate punctele cercului de convergenţă sunt puncte singulare.

3⁰. Exemplele precedente sunt cuprinse într'o clasă mai generală de serii

$$(4) \qquad P(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^{b_n},$$

în cari exponenţii b_n au pentru $n \geqq m$, m fiind un număr întreg pozitiv, un divizor comun care tinde către infinit împreună cu m.

In adevăr, servindu-ne de notaţiunile de mai sus, avem, în acest caz,

$$P\left(\frac{\beta}{\alpha} x\right) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n \left(\frac{\beta}{\alpha} x\right)^{b_n} + \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^{b_n}.$$

De unde tragem aceeaş concluziune ca în exemplu 2⁰.

141. *Weierstrass* este cel dintâiu care a pus în evidenţă faptul că există serii întregi cari nu se pot continuà în afară din cercul lor de convergenţă. Primul exemplu ce a considerat este seria

$$\sum_1^\infty x^{n^2},$$

care se prezintă în teoria funcţiunilor eliptice (Werke, t. II, pag. 226). Demonstraţiunea dată de Weierstrass se bazează pe formule stabilite în această teorie.

Seriile ce nu se pot continuà în afară din cercul lor de convergenţă au fost considerate la început ca excepţiuni. Astăzi însă s'a recunoscut că *tocmai* aceste serii constitue cazul general [1]), pe când acele ce se pot prelungì sunt excepţiuni. Iată în ce mod *Pringsheim* (M. A., t. 44, pag. 50) justifică această aserţiune:

Fiind dată o serie întreagă

$$P(x) = \Sigma a_n x^n,$$

putem, într'o infinitate de moduri, să extragem dintr'însa o serie întreagă

$$\varphi(x) = \Sigma a_{p_n} x^{p_n},$$

care nu se prelungeşte. Este de ajuns, de exemplu, să luăm (2^0, 140) $p_n = b^n$, b fiind un număr întreg oarecare mai mare ca 1. Seria aşà obţinută admite cercul de convergenţă ca linie singulară [2]). Să reprezentăm prin

$$\psi(x) = \Sigma a_{q_n} x^{q_n}$$

seria formată cu termenii rămaşi; vom aveà

$$P(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Pentru ca $P(x)$ să se poată prelungì în afară din cercul (R), este evident necesar ca, cel puţin, dealungul unui arc al cercului, toate punctele să fie puncte singulare ale seriei $\psi(x)$, în aşà mod încât aceste singularităţi să se compenseze cu acelea ale seriei $\varphi(x)$ şi să dispară în suma lor; ceeace nu poate aveà loc decât dacă există relaţiuni speciale între coeficenţii a_{p_n}, a_{q_n}, adică dacă există relaţiuni speciale între coeficenţii a_n ai seriei date. De unde rezultă că dacă între coeficienţii a_n nu există nici o relaţiune particulară seria nu se poate prelungì în afară din cercul său de convergenţă.

---

1) O serie Taylor se zice *generală*, dacă valoarea coeficientului de un rang oarecare este independentă de valorile coeficienţilor precedenţi (*Borel*, Leçons sur les séries divergentes, p. 147).

2) Iată un exemplu foarte simplu: seria $P(x) = \Sigma x^n$ se prelungeşte în afară din cercul său de convergenţă prin toate punctele, exceptând punctul $x = 1$, pe când seria $P(x) = \Sigma x^{2^n}$, extrasă dintr'însa, nu se prelungeşte după nici o direcţiune (3^0, § 140).

142. *Derivata unei serii de puteri.* Derivata unei serii de puteri negative $P\left(\frac{1}{x}\right)$ se reduce la derivata unei serii de puteri pozitive prin substituţiunea $x = \frac{1}{x'}$. De unde rezultă

$$\frac{d}{dx} P\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} P'\left(\frac{1}{x}\right),$$

şi se conchide că derivata seriei se obţine făcând suma derivatelor termenilor săi. Aceeaş concluziune pentru o serie de puteri întregi pozitive şi negative.

143. *Teoremă. Derivata unei sume nelimitate de serii de puteri se obţine făcând suma derivatelor seriilor.*

Fie în mod general

$$Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots,\ Q_n(x),\ \ldots$$

un şir nelimitat de serii *Laurent*, convergente într'o coroană şi astfel ca suma $\sum_1^\infty Q_n(x)$ să fie uniform convergentă în aceeaş coroană. Vom puteà scrie egalităţile

$$Q_n(x) = P_n(x - x_0),$$

$$\sum_1^\infty a_n(x) = \sum_1^\infty P_n(x - x_0) = P(x - x_0),$$

x_0 fiind un punct interior coroanei. Pentru a simplificà puţin scrierea, să presupunem origina transportată în punctul x_0; vom aveà

$$\sum_1^\infty P_n(x) = P(x).$$

Să ordonăm seriile cari figurează în ambele membre după puterile lui $x - x_1$, x_1 fiind un punct interior cercului comun de convergenţă; vom aveà identitatea

$$\sum_{m=0}^\infty \left[\sum_{n=1}^\infty P_n^{(m)}(x_1)\right] \frac{(x-x_1)^m}{m!} = \sum_{m=0}^\infty P^{(m)}(x_1) \frac{(x-x_1)^m}{m!};$$

de unde rezultă, dacă egalăm coeficienţii aceloraşi puteri ale lui $x - x_1$ din ambele membre şi dacă înlocuim x_1 prin x

$$P^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^\infty P_n^{(m)}(x), \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

q. e. d.

144. *Dacă seria* $P(x, x_0)$ *este prelungirea seriei* $P(x)$, *derivata sa* $P'(x, x_0)$ *va fi prelungirea derivatei* $P'(x)$.

Să reprezentăm prin $P^{(1)}(x, x_0)$ prelungirea seriei $P'(x)$; vom aveà, în domeniul punctului x_0,

$$P(x) = P(x, x_0), \quad P'(x) = P^{(1)}(x, x_0).$$

Insă cea dintâiu din aceste egalităţi dă $P'(x) = P'(x, x_0)$; prin urmare

$$P^{(1)}(x, x_0) = P'(x, x_0).$$

Ambele serii ale acestei egalităţi fiind egale în domeniul lui x_0, sunt identice. q. e. d.

CAPITOLUL VII.

FUNCŢIUNI ANALITICE. FUNCŢIUNI ANALITICE UNIFORME ŞI MULTIFORME.

I. — FUNCŢIUNI ANALITICE.

145. Fiind dată seria

$$P(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{1}$$

al cărei cerc de convergenţă C are o rază finită şi diferită de zero, să presupunem că eà se poate prelungì în afară din C şi fie $P(x-x_0, x_1)$ *continuarea* ei prin intermediul punctului x_1 şi C_1 cercul de convergenţă al acestei serii. Dacă $P(x-x_0, x_1)$ se poate prelungì, fie $P(x-x_0, x_1, x_2)$ continuarea ei şi C_2 cercul de convergenţă corespunzător, etc.

Toate seriile

$$P(x-x_0),\ P(x-x_0, x_1), \ldots,\ P(x-x_0, x_1, \ldots, x_n) \ldots \tag{2}$$

sunt legate între ele în aşà mod, că plecând dela una din ele obţinem pe toate celelalte.

Totalitatea seriilor (2) *constituie, ceeace Weierstrass numeşte funcţiune analitică monogenă* [1]) *de variabila x.*

Una oarecare din aceste serii se numeşte un *element* al funcţiunii. Funcţiunea este complect definită dacă se cunoaşte un element al ei, căci din el putem deduce pe toate celelalte.

Printre elementele unei funcţiuni analitice monogene trebuie să considerăm şi seria $P\left(\frac{1}{x}\right)$, care ţine locul seriei $P(x-\infty)$, dacă această serie se poate dedu e dintr'un element al funcţiunii.

[1]) Semnificarea epitetului de *monogenă* va reieşi mai departe când vom vorbi despre expresiuni analitice.

Pe cercul de convergenţă al fiecărui element se află cel puţin un punct singular, care poate fi comun mai multor cercuri. Punctele singulare ale elementelor se zic puncte singulare ale funcţiunii. De unde rezultă că o funcţiune analitică admite cel puţin un punct singular.

Fie $P(x)$ o serie întreagă, convergentă în toată întinderea planului. Orice serie $P(x-x_0)$ dedusă din cea dintâiu va da aceleaşi valori ca ea însăş. Funcţiunea ce această serie defineşte a primit numele de *funcţiune analitică întreagă.* In special se zice funcţiune *întreagă raţională,* sau funcţiune *întreagă transcendentă,* după cum numărul termenilor lui $P(x)$ este limitat sau nelimitat.

O funcţiune întreagă (raţională sau transcendentă) nu poate avea alt punct singular decât punctul ∞. Vom vedea că acest punct este punct singular.

146. Se poate întâmplà ca seria dată $P(x-x_0)$ să nu se prelungească în afară din cercul său de convergenţă după nici o direcţiune. In acest caz seria reprezintă prin sine însăş o funcţiune analitică a cărei *regiune de existenţă* constă în aria interioară cercului de convergenţă. Cercul poartă numele de *limita naturală* a funcţiunii.

147. In cazul când seriile se pot prelungì, cercurile lor de convergenţă acoperă o porţiune de plan, mai mult sau mai puţin mare, sau acoperă tot planul.

Funcţiunea fiind definită în fiecare cerc, regiunea de existenţă a ei este formată din aria acoperită de toate cercurile de convergenţă din cari putem suprimà arcele interioare. Arcele rămase din cari unele sau toate se pot reduce la puncte în număr limitat sau nelimitat, constituesc *limita regiunii de existenţă* a funcţiunii.

Regiunea aşà limitată este evident *conexă* (adică putem unì două puncte oarecari ale ei printr'o linie cu totul cuprinsă în interiorul regiunii); ea este formată dintr'o porţiune limitată sau nelimitată a planului.

Din cele ce preced rezultă că o funcţiune analitică poate admite un număr limitat sau nelimitat de puncte singulare. Punctele situate în regiunea de existenţă a funcţiunii şi cari nu sunt singulare, se numesc puncte *ordinare.*

148. Să reprezentăm prin simbolul $f(x)$ o funcţiune analitică şi fie $P(x-a)$ elementul primitiv care i-a dat naştere. Valoarea funcţiunii într'un punct ordinar x_0, interior cercului de convergenţă al lui $P(x-a)$, este valoarea ce primeşte acest element în punctul x_0.

Dacă punctul x_0 nu se găsește în interiorul cercului de convergență considerat, putem, pentru a obține valoarea funcțiunii în acest punct, procedă în modul următor: unim punctul a cu punctul x_0 printr'o linie arbitrară care să nu treacă prin nici un punct singular și intercalăm pe această linie, între punctele extreme, un număr suficient de puncte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, prin intermediul cărora formăm lanțul de elemente:

$$P(x-a, a_1),\ P(x-a, a_1, a_2), \ldots\ P(x-a, a_1, \ldots, a_n),$$

astfel ca ultimul element să conțină în interiorul cercului său punctul x_0. Valoarea acestui element pentru $x = x_0$ este valoarea corespunzătoare a funcțiunii. Din elementul din urmă putem deduce seria

$$P(x-a, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_0)$$

pe care o vom reprezentă prin $P(x-x_0)$ și care poate fi privită ca element al funcțiunii, astfel că în toate punctele interioare cercului de convergență al acestui element, avem

$$f(x) = P(x-x_0).$$

Valoarea funcțiunii în x_0 este termenul independent de $(x-x_0)$ al seriei $P(x-x_0)$.

Se vede în acelaș timp că în domeniul unui punct ordinar x_0 o funcțiune analitică se pune sub forma unei serii întregi de $x-x_0$, al cărei cerc de convergență are ca centru punctul x_0 și ca rază distanța δ dela acest punct până la punctul singular cel mai apropiat. Căci, dacă raza ar fi mai mare ca δ, cercul de convergență ar conține în interiorul său un punct singular și dacă ar fi mai mică ca δ, n'ar există nici un punct singular pe periferia cercului.

Seriile de forma $P(x-x_0)$ fiind funcțiuni continue în cercul lor de convergență, rezultă că o funcțiune analitică este continuă în domeniul oricărui punct ordinar. De unde rezultă că putem scrie

$$f(x_0) = \lim_{x=x_0} f(x).$$

149. Din proprietățile seriilor $P(x-x_0)$ rezultă imediat următoarele proprietăți ale funcțiunilor analitice:

1°. Dacă o funcțiune analitică [1]) primește aceeaș valoare într'o infinitate de puncte, având ca punct limită un punct oarecare x_0, *interior* regiunii sale de existență, funcțiunea este o constantă.

De unde rezultă că punctele ordinare ale funcțiunii $f(x)$, în cari ea primește aceeaș valoare, sunt puncte *izolate*, adică, dacă avem $f(x_0) = A$, există un număr pozitiv r astfel că în cercul $|x-x_0| = r$, funcțiunea $f(x) - A$ n'are alt zero decât punctul x_0.

[1]) Vom presupune totdeauna că funcțiunea este *monogenă*.

2^0. Dacă două funcțiuni analitice, având o regiune comună de existență, sunt egale între ele într'o infinitate de puncte având ca limită un punct x_0 *interior* regiunii, ele sunt identice.

Proprietățile precedente pot să nu fie adevărate dacă punctul x_0 considerat face parte din limita regiunii de existență a funcțiunii, adică dacă x_0 este un punct singular al funcțiunii.

Din cele ce preced rezultă că dacă, în vecinătatea unui punct, o funcțiune analitică primește aceeaș valoare de o infinitate de ori, fără a fi constantă, acel punct este neapărat un punct singular.

150. *Grămada punctelor singulare ale unei funcțiuni analitice este închisă* [1]).

In adevăr, dacă un punct limită a al grămezii punctelor singulare, n'ar fi singular, ar urmă să existe un $r > 0$, astfel ca în cercul $|x-a| = r$ să avem $f(x) = P(x-a)$, ceeace este imposibil, căci oricât de mic ar fi r, există puncte singulare ale funcțiunii în interiorul cercului.

II. FUNCȚIUNI ANALITICE UNIFORME ȘI MULTIFORME

151. Fie $P(x-a)$ un element al funcțiunii analitice $f(x)$ și x_0 un punct ordinar oarecare. Să unim punctele a și x_0 printr'o linie oarecare L de o formă arbitrară situată în regiunea de existență a funcțiunii și care să nu treacă prin nici un punct singular. Pe linia L să intercalăm, între punctele extreme, un număr suficient de puncte prin intermediul cărora să formăm șirul de elemente corespunzătoare care conduc la elementul $P(x-x_0)$ relativ la punctul x_0. Vom exprimă această operațiune zicând că elementele *se continuă dealungul liniei* L.

Se mai poate zice că, dacă, luând ca valoare inițială a funcțiunii, valoarea corespunzătoare elementului primitiv, ajungem la valoarea sa finală în punctul x_0, făcând ca variabila x să descrie linia dată dela a la x_0. Insă între a și x_0 putem imaginà o infinitate de drumuri, situate în regiunea de existență a funcțiunii și nimic nu ne permite a afirmà că după toate aceste drumuri vom obține în x_0 acelaș element.

Se zice că o funcțiune analitică este *uniformă* în regiunea sa de existență, dacă elementul inițial rămânând acelaș, elementul corespunzător unui punct ordinar x_0 oarecare este independent de drumul considerat L. In cazul contrar funcțiunea se zice *multiformă* cu un număr limitat sau nelimitat de *ramuri*, după cum elementele corespunzătoare unui punct ordinar oarecare sunt în număr limitat sau nelimitat.

[1]) Grămadă care conține derivata sa (2^0. § 12).

Făcând să coincidă punctul final x_0 cu punctul inițial a, rezultă, din definițiune, că dacă $f(x)$ este o funcțiune analitică uniformă, elementul său final este identic cu cel inițial.

Din definițiune rezultă că o funcțiune analitică uniformă admite o valoare *unică* în fiecare punct ordinar.

152. *Câteva considerațiuni asupra funcțiunilor analitice multiforme.* Dacă funcțiunea analitică este multiformă, se poate întâmplà ca în unele puncte ale regiunii sale de existență, două sau mai multe elemente să primească valori egale; vom zice atunci că atâtea valori ale funcțiunii sunt egale între ele în aceste puncte.

Să observăm că două elemente $P_\alpha(x-x_0)$ și $P_\beta(x-x_0)$ nu pot fi egale între ele într'o infinitate de puncte în domeniul unui punct ordinar x_0, căci atunci ar coincide.

153. *O funcțiune analitică multiformă se comportă ca o funcțiune uniformă în orice porțiune a regiunii sale de existență, în care nu există puncte singulare și care este limitată de un contur simplu.*

Voim să înțelegem prin aceasta, că, plecând dela un punct $x=a$, situat într'o asemenea regiune, cu un element dat $P(x-a)$ al funcțiunii, vom obține într'un punct oarecare x_0, un element final, independent de drumul urmat de variabilă, pe cât timp acest drum rămâne în interiorul regiunii considerate.

Propozițiunea este evidentă dacă regiunea considerată constă din cercul de convergență al elementului dat.

Să considerăm, pentru a fixà ideile, o porțiune a planului formată de cercul de convergență C al elementului dat și de cercurile C_1, C_2 ale elementelor prelungite $P(x-a, a_1)$, $P(x-a, a_1, a_2)$, din care suprimăm arcele interioare ariei. In această regiune *ramura* corespunzătoare elementelor precedente n'are nici un punct singular.

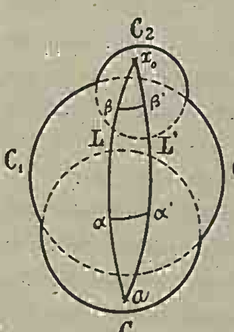

Fig. 7

Fie L și L' două linii situate în interiorul acestei arii și unind între ele punctele a și x_0. (Fig. 7). Să le presupunem destul de apropiate una de alta pentru ca fixând pe fiecare din ele câte două puncte α, β; α', β', arcele

$$a\alpha,\ a\alpha';\ \alpha\beta,\ \alpha'\beta';\ \beta x_0,\ \beta' x_0$$

să fie cuprinse respectiv în cercurile C, C_1, C_2, astfel ca punctele α, α'; β, β', să fie, cele dintâiu două în regiunea comună cercurilor C, C_1 și cele două din urmă în regiunea comună cercurilor

C_1, C_2. Să unim respectiv punctele a şi a'; β şi β' prin câte o linie situată fiecare în regiunea comună în care se află punctele extreme. In virtutea acestei construcţiuni, ariile

$$aaa',\ a'a\beta\beta',\ \beta'\beta x_0$$

sunt cuprinse fiecare respectiv în interiorul cercurilor C, C_1, C_2; prin urmare elementul $P(x-a)$ prelungit dealungul arcului aa sau dealungul drumului $aa'a$ conduce la acelaş element final $P_1(x-a)$. Plecând din punctul a cu acest element, vom obţine după arcul $a\beta$, precum şi după drumul $aa'\beta'\beta$, acelaş element final $P_2(x-\beta)$. In fine, acest element va da după drumurile βx_0 sau $\beta\beta' x_0$ acelaş element final $P(x-x_0)$.

Reunind la un loc de o parte drumurile aa, $a\beta$, βx_0 şi de cealaltă parte celelalte drumuri considerate şi observând că liniile aa', $\beta\beta'$ fiind percurse de două ori după rând în sens invers, pot fi suprimate, rezultă că liniile L şi L' conduc, dacă plecăm din punctul a cu elementul $P(x-a)$, la acelaş element final în punctul x_0. Vom zice pentru acest motiv că liniile L şi L' sunt *echivalente*.

Considerând între punctele a şi x_0 un şir de linii L, L', L'', ... astfel ca două consecutive oarecari să fie destul de apropiate una de alta, prin urmare echivalente, conchidem că toate liniile cari unesc două puncte oarecari şi sunt situate cu totul în regiunea considerată, sunt echivalente. Ceeace demonstră teorema.

Se recunoaşte lesne că două drumuri L, L', cari unesc aceleaşi puncte şi cari nu trec prin nici un punct singular, sunt echivalente sau nu, după cum elementul final obţinut când descriem curba închisă formată de cele două drumuri — punctul de plecare fiind acelaş — coincide sau nu cu elementul iniţial.

154. Din teorema precedentă rezultă că dacă variabila x descrie o curbă închisă, situată într'o regiune limitată de un contur simplu şi în care nu se găseşte nici un punct singular, elementul cu care plecăm dintr'un punct oarecare al curbei se va reproduce. Cu alte cuvinte, dacă un element $P(x-a)$ se poate prelungì după un drum oarecare în interiorul unei arii A, limitată de un contur simplu, toate prelungirile formează o funcţiune uniformă în A. Nu este tot aşà dacă aria este cu contur multiplu. De exemplu, seria

$$P(x-1) = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \ldots,$$

care, precum vom vedeà, dă naştere funcţiunii $\log x$, se poate prelungì în toate direcţiunile in interiorul unei coroane limitată de două cercuri concentrice cu centrul în origină, pe când funcţiunea $\log x$ nu este uniformă în această coroană.

Reciproca nu este adevărată.

Se poate întâmplà ca în interiorul ariei limitată de un contur simplu să existe puncte singulare şi elementul final să coincidă cu cel iniţial.

Observare. Intr'o regiune în care o ramură de funcţiune analitică multiformă n'are puncte singulare, se pot găsì puncte singulare ale altor ramuri; prin urmare, în interiorul cercului de convergenţă al unui element al său, o asemenea funcţiune poate aveà puncte singulare.

CAPITOLUL VIII.

FUNCŢIUNI UNIFORME.

I. — GENERALITĂŢI ASUPRA FUNCŢIUNILOR ANALITICE UNIFORME

155. *Dacă două elemente ale unei funcţiuni analitice uniforme au o regiune comună de convergenţă, ele primesc valori egale în toate punctele acelei regiuni.* Căci în regiunea comună funcţiunea fiind reprezintată, prin definiţiune, de unul sau celalt element şi având o valoare unică în fiecare punct, rezultă că cele două elemente sunt egale în fiecare punct al regiunii.

Deaci urmează că o funcţiune analitică uniformă nu poate aveà puncte singulare în interiorul cercului de convergenţă al unuia din elementele sale. Căci dacă un punct singular a situat pe cercul de convergenţă al unui element $P(x-a)$ ar fi în interiorul cercului de convergenţă al unui alt element $P_1(x-b)$, cele două cercuri ar aveà o regiune comună în care elementele corespunzătoare ar fi egale; ceeace este imposibil.

Din cele ce preced conchidem că punctele singulare ale unei funcţiuni analitice uniforme nu pot formà o *arie*, oricât de mică ar fi; prin urmare în domeniul unui punct singular oarecare se găsesc puncte ordinare ale funcţiunii.

156. Se zice despre o funcţiune analitică uniformă, care n'are puncte singulare într'o regiune dată, că este *olomorfă* în aceà regiune.

Fie $f(x)$ o funcţiune analitică uniformă într'o regiune dată şi x_0 un punct ordinar oarecare *interior* acelei regiuni. In domeniul lui

x_0 funcţiunea $f(x)$ este olomorfă şi se poate pune sub forma

(1) $$f(x) = P(x - x_0),$$

membrul al doilea fiind o serie întreagă de $(x-x_0)$, convergentă în cercul cu centrul în x_0 şi trecând prin punctul singular al lui $f(x)$, cel mai apropiat de x_0, adică de punctul cel mai apropiat de x_0 în care funcţiunea încetează de a fi olomorfă. Căci, *primo*, cercul de convergenţă al lui $P(x-x_0)$ nu poate conţine în interiorul său puncte singulare ale funcţiunii (155); *secundo*, dacă punctele singulare ale lui $f(x)$ ar fi *toate* exterioare cercului, acest cerc n'ar fi adevăratul cerc de convergenţă, care conţine pe periferia sa cel puţin un punct singular al funcţiunii. Egalitatea (1) este valabilă în interiorul cercului de convergenţă al elementului $P(x-x_0)$, căci $f(x)$ se confundă cu elementul său în cercul de convergenţă corespunzător.

Dacă funcţiunea este olomorfă în domeniul punctului ∞ $(x_0 = \infty)$, egalitatea (1) trebuie înlocuită prin cea următoare

(2) $$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right);$$

căci punând $x = \frac{1}{x'}$, funcţiunea $f\left(\frac{1}{x'}\right)$ este, în virtutea ipotezei, olomorfă în domeniul punctului $x' = 0$, de unde rezultă forma

$$f\left(\frac{1}{x'}\right) = P(x')$$

şi prin urmare forma (2).

157. *Teoremă (Weierstrass). O serie de funcţiuni olomorfe, uniform convergentă într'o regiune dată, defineşte o funcţiune olomorfă în aceeaş regiune.*

Demonstraţiunea acestei teoreme este identică cu cea dată (§ 123) în care funcţiunile considerate sunt raţionale.

158. Fie

(1) $$y = f(x), \quad z = F(y),$$

două funcţiuni analitice olomorfe, cea dintâiu într'o regiune (A) în planul variabilei x, cea de a doua într'o regiune (B) în planul variabilei y. Dacă unui punct x_0 din (A) corespunde un punct y_0 din (B), z devine, prin substituţiunea $y = f(x)$, o funcţiune analitică de x, olomorfă în domeniul punctului x_0. In adevăr, în virtutea ipotezei, putem scrie respectiv în domeniile punctelor x_0, y_0,

(2) $$y - y_0 = (x - x_0)\, P(x - x_0),$$

(3) $$z = P_1(y - y_0).$$

Seria (2), care reprezintă funcţiunea $y-y_0$, anulându-se în acelaş timp cu $x-x_0$, rezultă că membrul al doilea din (3) devine, prin substituţiunea (2), o serie întreagă de $x-x_0$,

$$z = P_2(x-x_0),$$

convergentă în domeniul punctului x_0. q. e. d.

159. *Puncte singulare.* Fie $f(x)$ o funcţiune analitică uniformă şi a un punct singular. In domeniul acestui punct, funcţiunea nu se poate pune sub forma

$$f(x) = P(x-a).$$

Se poate însă întâmplà ca produsul funcţiunii printr'o putere convenabilă $(x-a)^m$, m fiind un întreg pozitiv, să se poată pune sub forma

$$(x-a)^m f(x) = P(x-a),$$

sau ca o asemenea expresiune să fie imposibilă. In cazul întâiu, punctul a se zice *pol*; în cazul al doilea [1]) acest punct a primit numele de *punct singular esenţial*. Polurile şi punctele singulare esenţiale sunt *puncte de discontinuitate* ale funcţiunii.

160. Fie a un pol al funcţiunii $f(x)$. Dacă m este cel mai mic număr întreg pozitiv, astfel ca în domeniul polului să avem

$$(1) \qquad (x-a)^m f(x) = P(x-a) = \sum_0^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

coeficientul a_0 va fi diferit de zero. Numărul m aşà determinat se zice *ordinul* polului a.

Ecuaţiunea (1) se poate scrie

$$(2) \qquad f(x) = (x-a)^{-m} P(x-a),$$

sau

$$(3) \quad f(x) = \frac{a_0}{(x-a)^m} + \frac{a_1}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{x-a} + P_1(x-a), \quad a_0 \neq 0.$$

Suma termenilor din membrul al doilea, în care figurează $(x-a)$ la numitor, se zice *partea principală* a desvoltării funcţiunii în domeniul polului a. Expresiunile precedente ale lui $f(x)$ ne arată că multiplicând funcţiunea $f(x)$ cu $(x-a)^m$, sau scăzând din $f(x)$ partea sa principală relativ la polul a, rezultatele obţinute

$$(x-a)^m f(x), \quad f(x) - \left[\frac{a_0}{(x-a)^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{x-a}\right]$$

sunt funcţiuni olomorfe în domeniul acestui punct.

[1]) Este vorba esenţialmente de funcţiuni uniforme.

161. Dacă în domeniul unui punct a funcţiunea $f(x)$ se poate pune sub forma

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x-a}\right) + P_1(x-a),$$

în care

$$P\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots,$$

punctul a este un pol sau un punct singular esenţial, după cum

$$P\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

are un număr limitat sau nelimitat de termeni. Căci în cazul din urmă *nu* există număr pozitiv m pentru care forma (1) să poată fi satisfăcută.

162. Polurile funcţiunii analitice uniforme sunt *izolate* de zerurile funcţiunii. In adevăr, presupunând că punctul a este un pol de ordinul m, avem expresiunea (2) în care $P(x-a)$ este diferit de zero în punctul $x = a$. Insă, în acest caz, există un număr pozitiv r, astfel că pentru toate valorile lui x interioare cercului $|x - a| = r$, $P(x-a)$ nu se anulează; aşa dar în interiorul acestui cerc, $f(x)$ nu se poate anulà.

Aceeaş expresiune (2) arată ca polurile sunt *puncte izolate* între ele; căci, în cercul de convergenţă al seriei $P(x-a)$, funcţiunea $f(x)$ n'are alt pol decât punctul a.

163. Din cele ce preced rezultă că dacă o funcţiune analitică uniformă are în domeniul unui punt a o infinitate de zeruri sau de poluri, acel punct este *punct singular esenţial*. Căci un asemenea punct nu poate fi nici punct ordinar, nici pol.

Reciproca nu este adevărată. In domeniul unui punct singular esenţial o funcţiune uniformă poate să n'aibă nici un zero şi nici un pol. De exemplu, funcţiunea $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, pe care o vom studià mai târziu, pentru care $x = o$ este punct singular esenţial.

164. Se zice despre o funcţiune analitică uniformă, care n'are nici un punct singular esenţial într'o regiune dată că este *meromorfă* în aceà regiune. Zerurile şi polurile unei funcţiuni meromorfe într'o regiune dată sunt, în virtutea celor zise mai sus, în număr limitat. Dacă dar o funcţiune analitică uniformă admite o infinitate de zeruri sau de poluri, ea are cel puţin un punct singular esenţial, situat la distanţă finită sau la infinit.

165. Fie a un pol de ordinul m şi r raza cercului cu centrul în acest punct în interiorul căruia $f(x)$ nu se anulează şi nu are alt punct singular decât a. Punând $f(x)$ sub forma (2) (§ 160), $|P(x-a)|$ va admite în cercul considerat un minimum $\mu > o$. Vom aveà

$$|f(x)| = \frac{|P(x-a)|}{|(x-a)|^m} \geqq \frac{\mu}{\varrho^m},$$

pentru toate valorile lui x cari satisfac condiţiunea

$$|x-a| \leqq \varrho p < r.$$

De unde rezultă că $|f(x)|$ poate deveni mai mare ca orice număr pozitiv M, când x se apropie de a, *după orice direcţiune voim*. Este deajuns a luà

$$\varrho \leqq \sqrt[m]{\frac{\mu}{M}}.$$

166. Seria $P(x-a)$, considerată mai sus, fiind diferită de zero în interiorul cercului $|x-a| = r$, vom puteà scrie, în domeniul punctului a,

$$\frac{1}{P(x-a)} = \mathcal{P}(x-a);$$

de unde

$$\frac{1}{f(x)} = (x-a)^m \mathcal{P}(x-a).$$

Aşa dar, în domeniul unui pol a de ordinul m, inversa funcţiunii, $\frac{1}{f(x)}$, este o funcţiune olomorfă, pentru care punctul a este un zero de acelaş ordin. Viceversa, dacă a este un zero de ordinul m al funcţiunii $f(x)$, a va fi un pol de acelaş ordin al funcţiunii inverse $\frac{1}{f(x)}$.

167. *Un punct singular esenţial al unei funcţiuni analitice uniforme $f(x)$ este punct singular esenţial şi pentru funcţiunea inversă $\frac{1}{f(x)}$.*

Fie a un punct singular esenţial al funcţiunii $f(x)$. Dacă a ar fi pol al funcţiunii $\frac{1}{f(x)}$, ar urmà, după cele văzute mai sus, ca în domeniul acestui punct, inversa sa, $f(x)$, să fie olomorfă, admiţând punctul a ca zero.

Dacă a ar fi un punct ordinar al funcţiunii $\frac{1}{f(x)}$, inversa sa, $f(x)$, ar admite acest punct ca pol sau ca punct ordinar, după cum a ar fi un zero sau nu al lui $\frac{1}{f(x)}$. Ambele rezultate însă fiind contrare ipotezei, punctul a nu poate fi decât un punct singular esențial al funcțiunii $\frac{1}{f(x)}$.

168. Tot ce s'a zis despre o funcțiune analitică uniformă în domeniul unui punct a, ordinar, pol sau punct singular esențial, subsistă și când $a = \infty$, cu singura modificare că în acest caz înlocuim $(x - a)$ prin $\frac{1}{x}$.

Astfel, dacă $x = \infty$ este un punct ordinar, avem, precum am văzut, în domeniul acestui punct

$$f(x) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dacă punctul ∞ este un pol de ordinul m, expresiunea (2) (160) se va înlocui prin cea următoare

$$f(x) = x^m \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \left\{\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}_{x=\infty} \neq 0.$$

a cărui formă desvoltată este

$$f(x) = \mathrm{A}x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1}\, x + \mathrm{A}_m + \mathrm{A}_{m+1}\frac{1}{x} + \ldots,$$
$$\mathrm{A} \neq 0.$$

Putem face să dispară polul ∞, multiplicând $f(x)$ prin x^{-m}, sau scăzând din $f(x)$ partea sa principală relativă la acest pol, care aci este polinomul

$$\mathrm{A}x^m + \ldots + \mathrm{A}_{m-1}\, x.$$

In fine, punctul ∞ va fi punct singular esențial dacă nu există număr întreg pozitiv m, astfel ca $x^{-m}\, f(x)$ să se poată pune sub forma

$$x^{-m}\, f(x) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

169. *Teoremă (Liouville). O funcțiune analitică uniformă are cel puțin un punct singular situat la distanță finită sau la infinit.*

Să presupunem că funcțiunea nu are nici un punct singular la distanță finită, adică este o funcțiune întreagă. In acest caz, ea se reprezintă printr'o serie întreagă

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n,$$

egalitatea fiind valabilă în cercul $|x| = \mathrm{R}$, R având o valoare arbitrar de mare. Să presupunem că $|f(x)|$ ar admite pe toată sfera (tot planul x inclusiv punctul ∞), o limită superioară finită

M. Dealungul cercului $|x| = R$ vom aveà aşadar $|f(x)| \leqq M$ şi prin urmare coeficienţii a_n ai egalităţii (1) vor satisface inegalităţile

$$(2) \qquad |a_n| \leqq \frac{M}{R^n}.$$

Coeficienţii a_n fiind cantităţi constante, iar membrul al doilea tinzând către zero, când R tinde către infinit, rezultă că coeficienţii seriei, afară de coeficientul a_0, sunt *toţi nuli*. Funcţiunea $f(x)$ se reduce la o constantă.

Corolar. O funcţiune olomorfă pe toată sfera este o constantă.

170. *Teoremă. Permanenţa relaţiunilor analitice. Fie*

$$(1) \qquad y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x), \ldots, \quad y_n = f_n(x),$$

n funcţiuni analitice uniforme, având o regiune comună de existenţă. Dacă între elementele lor corespunzătoare unui punct ordinar x_0

$$(2) \qquad P_1(x-x_0),\ P_2(x-x_0), \ldots,\ P_n(x-x_0),$$

convergente în acelaş cerc C, există o relaţiune raţională şi întreagă

$$(3) \qquad F[P_1(x-x_0), \ldots, P_n(x-x_0)] = 0,$$

pentru toate valorile lui x interioare acestui cerc, relaţiunea va subsistà între funcţiunile date în toată regiunea comună de existenţă.

Este de ajuns a probà că relaţiunea subsistă pentru prelungirile elementelor (2). Pentru aceasta, să observăm că înlocuind elementele (2) prin expresiunile lor desvoltate, membrul întâiu al egalităţii (3) se reduce la o serie $\mathcal{P}(x - x_0)$, convergentă în cercul C, identic nulă în interiorul acestui cerc. Fie x_1 un punct interior cercului C şi

$$P_1(x-x_0, x_1), \ldots, P_n(x-x_0, x_1),$$

elementele prelungite corespunzătoare. Să presupunem că ele sunt convergente într'un cerc C_1, care taie cercul C. Să substituim fiecărui element dat, elementul prelungit; membrul întâiu din (3) se transformă în o serie $\mathcal{P}_1(x-x_1)$, convergentă în C_1. Insă, în regiunea comună celor două cercuri, elementele

$$P_i(x-x_0),\ P_i(x-x_0, x_1),\ (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

fiind egale, seria $\mathcal{P}_1(x-x_1)$ va fi egală cu seria $\mathcal{P}(x-x_0)$, adică nulă; prin urmare ea va fi nulă în tot cercul C_1. q. e. d.

In virtutea acestei teoreme, relaţiunea (3) se poate înlocuì prin relaţiunea

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$

valabilă în toată regiunea de existenţă a funcţiunilor y.

171. *Teoremă. In domeniul unui punct ordinar modulul unei funcțiuni analitice uniforme nu admite maximum.*

Fie x_0 un punct situat în acel domeniu și să presupunem că $|f(x_0)|$ este maximum, adică $|f(x_0)| > |f(x)|$ în domeniul considerat. In cercul $|x - x_0| = r$ cuprins în acest domeniu, avem

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_0 = f(x_0).$$

Reprezentând prin M maximul lui $|f(x)|$ pe cerc, avem inegalitățile

$$|a_n| < \frac{M}{r^n}\,{}^{1)};$$

de unde în special

$$|a_0| = |f(x_0)| < M,$$

inegalitate care exclude ipoteza că $|f(x)_0|$ este maximum.

Cea mai mare valoare a modulului funcțiunii $f(x)$ nu poate dar aveà loc decât pe cerc.

De unde rezultă că dacă dăm lui r valori crescânde fără ca cercul să întâlnească un punct singular al funcțiunii, cea mai mare valoare a modulului $|f(x)|$ crește împreună cu r.

---

1) Coeficienții seriei sunt dați de egalitățile

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(x_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Pentru ca să avem egalitatea

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |e^{-ni\theta} f(x_0 + re^{i\theta})|\, d\theta,$$

este necesar ca argumentul funcțiunii sub semnul $\int$ să fie constant în intervalul $(0, 2\pi)$, căci modulul unei sume nu poate fi egal cu suma modulelor, decât dacă toți termenii au acelaș argument; prin urmare, este necesar să avem

$$\arg f(x_0 + re^{i\theta}) = n\theta + \omega, \quad (\omega = \text{const}).$$

De unde expresiunea

$$f(x_0 + re^{i\theta}) = |f(x_0 + re^{i\theta})|\, e^{i(n\theta + \omega)}$$

Fie M maximul lui $|f(x)|$ pe cercul (r); pentru ca egalitatea $|a_n| = \frac{M}{r^n}$ să fie posibilă, este necesar să avem

$$f(x_0 + re^{i\theta}) = Me^{i(n\theta + \omega)}$$

și prin urmare pentru ca egalitatea

$$|a_0| = M$$

să fie posibilă este necesar să avem

$$f(x_0 + re^{i\theta}) = Me^{i\omega},$$

adică funcțiunea $f(x)$ este constantă dealungul cercului și prin urmare ea se reduce la o constantă, după cum știm (1°., § 149).

Corolar. Dacă $f(x_0) \neq 0$, $|f(x)|$ nu admite minimum în domeniul lui x_0 şi cea mai mică valoare ce poate primì modulul $|f(x)|$ într'un cerc cu centrul în x_0, situat în domeniul acestui punct, are loc pe cerc. Este deajuns, pentru a justificà această propoziţiune, să considerăm funcţiunea $\frac{1}{f(x)}$, pentru care punctul x_0 este un punct ordinar.

172. Fie $x = \xi + i\eta$, $f(x) = P(\xi, \eta) + iQ(\xi, \eta)$, P şi Q funcţiuni reale de variabilele reale ξ şi η. Teorema precedentă subsistă pentru funcţiunile P şi Q în domeniul considerat. In adevăr, reprezintând prin A maximul lui $|P|$ şi prin B maximul lui $|Q|$ pe cercul $|x - x_0| = r$, avem (114) inegalităţile

$$|a_n| < \frac{A}{r^n}, \quad |a_n| < \frac{B}{r^n}$$ [1]

şi, în special,

$$|a_0| = |f(x_0)| = |P(\xi_0\eta_0) + iQ(\xi_0, \eta_0)| < \begin{cases} A, \\ B, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{aligned} |P(\xi_0, \eta_0)| &< A, \\ |Q(\xi_0, \eta_0)| &< B. \end{aligned}$$

173. *Derivata*. Fie seria

$$P(x - x_0) = \sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n$$

şi derivata sa

$$P'(x - x_0) = \sum_0^\infty n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Se ştie că aceste două serii au acelaş cerc de convergenţă C; punctele singulare ale seriei derivate sunt deci situate pe acest cerc. Voim să demonstrăm că *punctele singulare ale celor două serii coincid*.

In adevăr, dacă a este un punct ordinar al seriei $P(x - x_0)$, situat pe cercul C, există un punct x_1 interior acestui cerc astfel că cercul de convergenţă C_1 al seriei prelungite $P(x - x_0, x_1)$, prin urmare şi al seriei derivate $P'(x - x_0, x_1)$, să conţină punctul a.

Deci punctul a este un punct ordinar al derivatei $P'(x - x_0)$, a cărei prelungire analitică, prin intermediul punctului x_1, coincide cu derivata seriei prelungite.

Reciproc. Un punct ordinar al derivatei $P'(x - x_0)$, situat pe cercul de convergenţă C, este punct ordinar al seriei propuse $P(x - x_0)$

[1] Egalităţile nu pot aveà loc decât în aceleaşi condiţiuni ca mai sus (nota).

Raționamentul este acelaș. De unde rezultă propozițiunea enunțată.

174. Din cele ce preced rezultă că derivata $P'(x-a)$ definește o funcțiune analitică monogenă având *aceeaș regiune de existență* ca funcțiunea născută din elementul primitiv $P(x-a)$. Reprezintând această funcțiune prin $f(x)$ și cea născută din $P'(x-a)$ prin $f'(x)$, vom zice că $f'(x)$ este *derivata* lui $f(x)$ și $f(x)$ funcțiunea *primitivă* sau *integrala* lui $f'(x)$.

Funcțiunea $f(x)$ și derivata sa $f'(x)$ au, în virtutea propozițiunii din paragraful precedent, aceleași puncte singulare situate la distanță finită. Punctul $x=\infty$, nefiind în interiorul nici unuia din cercurile de convergență nici pe vreunul din aceste cercuri (punctul inițial fiind presupus la distanță finită), cere a fi examinat deosebit.

Să presupunem că funcțiunea $f(x)$ este olomorfă în domeniul punctului $x=\infty$, adică

$$f(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots;$$

vom aveà

$$f'(x)=-\frac{a_1}{x^2}-\frac{2a_2}{x^3}-\ldots$$

Prin urmare derivata este o funcțiune olomorfă în domeniul acestui punct.

Reciproca nu este adevărată. Fie, de exemplu, funcțiunea

$$f(x)=x+P\left(\frac{1}{x}\right),$$

pentru care punctul $x=\infty$ este un pol, pe când derivata

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}P'\left(\frac{1}{x}\right)$$

este olomorfă în domeniul acestui punct.

175. Fie $f(x)$ o funcțiune olomorfă în domeniul unui punct x_0, adică

(1) $$f(x)=P(x-x_0);$$

vom aveà, în virtutea definițiunii derivatei,

(2) $$f'(x)=P'(x-x_0),$$

în domeniul aceluiaș punct. De aci rezultă egalitatea

(3) $$f'(x)=\lim_{x=x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

oricare ar fi drumul după care x se apropie de x_0, x fiind presupus situat în domeniul lui x_0. De unde conchidem că regulile după cari se obține derivata unei funcțiuni analitice sunt cele date de calculul diferențial; căci acele reguli rezultă din formula (3) ce satisface derivata funcțiunii într'un punct ordinar oarecare x_0.

180. *Interpretare geometrică. Transformare conformă.* Existența unei limite finite a expresiunii

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

când x se apropie de x_0 după orice direcțiune voim, se traduce printr'o proprietate geometrică interesantă.

Să considerăm variabilele x și y raportate la două sisteme de axe rectangulare (ξ, η), (u, v), situate în două plane diferite. Relațiunea $y = f(x)$ stabilește o corespondență între punctele x și y ale celor două plane, sau cum se mai zice, o reprezintare a planului x pe planul y. Dacă punctul x descrie o curbă $\varphi(\xi, \eta) = 0$, punctul y va descrie o curbă $\psi(u, v) = 0$. Iată proprietatea geometrică ce caracterizează o funcțiune analitică în regiunea ei de existență.

Dacă $y = f(x)$ este o funcțiune analitică, unghiul sub care se taie două curbe (x) într'un punct x_0, în care derivata $f'(x_0)$ este finită și diferită de zero, este egal cu unghiul sub care se taie curbele corespunzătoare (y).

In adevăr, fie x_1 și x_2, două puncte vecine cu x_0 și nu în linie dreaptă cu el; y_0, y_1, y_2 valorile lui y corespunzătoare valorilor x_0, x_1, x_2. Vom avea

$$(1) \qquad \lim_{x_1=x_0} \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \lim_{x_2=x_0} \frac{y_2-y_0}{x_2-x_0} = f'(x_0),$$

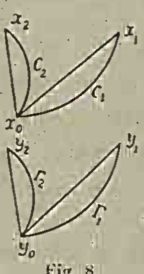

Fig. 8

Să punem

$$x_1 - x_0 = r_1 e^{i\theta_1}, \; x_2 - x_0 = r_2 e^{i\theta_2},$$
$$y_1 - y_0 = \varrho_1 e^{i\omega_1}, \; y_2 - y_0 = \varrho_0 e_2^{i\omega_2}$$

Egalitatea (1) devine

$$\lim_{r_1=0} \frac{\varrho_1}{r_1} e^{i(\omega_1-\theta_1)} = \lim_{r_2=0} \frac{\varrho_2}{r_2} e^{i(\omega_2-\theta_2)};$$

de unde egalitățile

$$(2) \qquad \lim \frac{\varrho_1}{r_1} = \lim \frac{\varrho_2}{r_2}, \; \lim(\omega_1-\theta_1) = \lim(\omega_2-\theta_2).$$

Ultima egalitate scrisă sub forma

$$(3) \qquad \lim(\omega_2-\omega_1) = \lim(\theta_2-\theta_1)$$

demonstrează proprietatea enunțată mai sus; căci limita către care tinde diferenţa $\theta_2 - \theta_1$, când x_1 şi x_2 se apropie de x_0 după două curbe oarecari C_1, C_2 trecând prin acest punct, este tocmai unghiul sub care cele două curbe se taie; aceiaş semnificare o are lim $(\omega_2 - \omega_1)$ relativ la curbele corespunzătoare Γ_1, Γ_2 descrise de y_1 şi y_2.

Neglijând cantităţi infinit mici, avem egalităţile

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \omega_2 - \omega_1 = \theta_2 - \theta_1,$$

cari arată că triunghiurile infinitezimale (x_0, x_1, x_2) şi (y_0, y_1, y_2) sunt asemenea.

O reprezintare care conservă unghiurile, în virtutea căreia, precum vedem, elementele infinitezimale sunt asemenea, se numeşte *o reprezintare conformă*. Prin urmare o reprezintare dată de o funcţiune analitică este conformă.

Să observăm că egalitatea (3) exprimă nu numai că unghiurile considerate se conservă, dar şi că sensul în care se mişcă razele vectoare, cari coincid cu tangentele în x_0 şi y_0 la curbele C_1, Γ_1 până să coincidă cu tangentele la C_2 şi Γ_2, este acelaş.

Se obicinueşte a se zice că *sensul rotaţiunei unghiurilor se conservă.*

Propoziţiunea conservării unghiurilor presupune că derivata $f'(x_0)$ este diferită de zero. In cazul când această derivată este nulă, avem

$$\lim \frac{\varrho_1}{r_1} = \lim \frac{\varrho_2}{r_2} = 0;$$

o comparare de triunghiuri asemenea devine imposibilă. Propoziţiunea în acest caz nu mai este adevărată.

Fie, de exemplu, funcţiunea

$$y = x^m, \quad m \text{ întreg} > 1.$$

Dacă variaţiunea argumentului lui x este θ, variaţiunea argumentului lui y este $m\theta$; de unde rezultă că dacă două curbe (x) se taie în origină sub un unghiu ω, unghiul format de curbele corespunzătoare (y) este $m\omega$.

181. Fie

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

un şir nelimitat de funcţiuni olomorfe într'o regiune dată A. Dacă seria

$$\sum_1^\infty f_n(x)$$

este uniform convergentă în A, ea reprezintă (§ 157) o funcţiune olomorfă în această regiune.

Punând

$$F(x) = \Sigma f_n(x),$$

vom aveà

$$F'(x) = \Sigma f'_n(x).$$

Această proprietate rezultă din proprietatea corespunzătoare a seriilor de puteri (143).

182. Derivatele de *ordin superior* ale funcţiunii $f'(x)$ se introduc în acelaş mod ca derivata de ordinul intâiu $f'(x)$. Astfel derivata lui $f'(x)$, reprezintată prin $f''(x)$, se zice derivata de ordinul al doilea a funcţiunii $f(x)$; etc.

Derivata $f''(x)$ având aceiaş regiune de existenţă ca $f'(x)$, prin urmare ca $f(x)$, conchidem că toate derivatele unei funcţiuni analitice $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ sunt funcţiuni analitice având aceiaş regiune de existenţă, prin urmare aceleaşi puncte singulare, situate la distanţă finită ca funcţiunea primitivă dată.

Fie $y = f(x)$ o funcţiune analitică şi y', y'', y''', ... $y^{(n)}$ derivatele sale până la un ordin dat n. Dacă între elementele funcţiunei şi ale acestor derivate există o relaţiune raţională şi întreagă $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ în domeniul unui punct ordinar oarecare, relaţiunea va subzista, în virtutea *permanenţii relaţiunilor analitice*, între funcţiunea dată şi derivatele sale în toată regiunea de existenţă a funcţiunei (170).

183. Fie în domeniul unui punct x_0

$$(1) \qquad f(x) = P(x-x_0) = \sum_0^\infty a_n (x-x_0)^n \; ;$$

vom aveà

$$(2) \qquad f^{(n)}(x) = n!\, a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

de unde rezultă pentru $f(x)$ expresiunea

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n ,$$

valabilă ca şi egalitatea (1) în cercul al cărui centru este x_0 şi a cărui rază este distanţa dela acest punct până la punctul singular cel mai apropiat.

Membrul al doilea din egalitatea (3) fiind un element al funcţiunii analitice $f(x)$, rezultă că o asemenea funcţiune este complect determinată dacă cunoaştem valoarea sa şi valorile derivatelor sale de orice ordin într'un punct ordinar x_0 dat. Dacă derivatele de toate ordinile sunt nule în x_0, funcţiunea $f(x)$ se reduce la o constantă. Această propoziţiune este echivalentă cu propoziţiunea 1°. (§ 149).

De unde rezultă că dacă două funcţiuni analitice sunt egale, precum şi derivatele lor de orice ordin, într'un punct ordinar x_0, ele coincid în toată regiunea lor de existenţă.

184. Să presupunem

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(m)}(x_0) \neq 0;$$

expresiunea (3) va deveni

$$f(x) = (x-x_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-m}.$$

Punctul x_0 se zice un *zero* al funcţiunii de ordinul m. In domeniul unui zero de ordinul m, funcţiunea este aşa dar de forma

$$f(x) = (x-x_0)^m \mathrm{P}(x-x_0), \quad \Big[\mathrm{P}(x-x_0)\Big]_{x=x_0} \neq 0.$$

185. Fie

$$\mathrm{P}(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

un element de funcţiune analitică $f(x)$, olomorfă în domeniul punctului x_0; integrala corespunzătoare este

$$\mathcal{P}(x-x_0) = \mathrm{C} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1},$$

C fiind o constantă arbitrară. Valoarea acestui element în punctul x_0 este egală cu C şi prin urmare poate fi dată după voie. Presupunând valoarea constantei determinată, elementul $\mathcal{P}(x-x_0)$ va da naştere unei funcţiuni analitice monogenă, care, după cele zise în paragrafele precedente, are aceiaş regiune de existenţă că funcţiunea propusă $f(x)$: punctele sale singulare la distanţă finită sunt aceleaşi ca ale lui $f(x)$. Punctul $x = \infty$ poate fi pentru funcţiunea integrală un punct singular, fără a fi punct singular al funcţiunii date.

186. Derivata unei funcţiuni analitice uniforme este o funcţiune analitică *uniformă*, precum rezultă din expresiunea

$$f(x) = \mathrm{P}(x-x_0) + \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{x-x_0}\right),$$

a cărei derivată este

$$f'(x) = \mathrm{P}'(x-x_0) - \frac{1}{(x-x_0)^2}\mathrm{P}'_1\left(\frac{1}{x-x_0}\right).$$

Integrala unei funcţiuni uniforme însă poate să nu fie o funcţiune uniformă. Exemplul cel mai simplu ni-l dă funcţiunea

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

a cărei integrală o vom vedeà mai departe.

II. — FUNCŢIUNI RAŢIONALE.

Printre funcţiunile analitice uniforme, cele mai simple sunt funcţiunile raţionale, întregi şi fracţionare.

187. *O funcţiune raţională întreagă*, sau un polinom de x, este o expresiune de forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

numărul termenilor din membrul al doilea fiind mărginit. Această expresiune poate fi privită ca un element al cărui cerc de convergenţă are o rază infinit de mare; ea defineşte dar o funcţiune analitică uniformă în tot planul neavând alt punct singular decât punctul dela infinit. Acest punct este un *pol de un ordin egal cu gradul polinomului*; ceeace rezultă din forma

$$f(x) = x^m \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right) = x^m \left(a_m + a_{m-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0 \frac{1}{x^m}\right),\ a_0 \neq 0.$$

188. *O funcţiune analitică raţională fracţionară*

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n},$$

adică câtul a două polinoame de x, este o funcţiune analitică monogenă uniformă în tot planul.

In adevăr, x_0 fiind o valoare oarecare a lui x diferită de un zero al numitorului, avem, în domeniul acestui punct, expresiunea

$$(2) \qquad f(x) = \mathrm{P}(x - x_0).$$

Aşadar $f(x)$ este o funcţiune analitică olomorfă în orice porţiune a planului, care nu conţine un zero al numitorului.

Dacă x_0 este un zero al numitorului de ordinul k, avem, în domeniul acestui punct,

$$(3) \qquad f(x) = \frac{1}{(x - x_0)^k}\, \mathrm{P}(x - x),\ \Big[\mathrm{P}(x - x_0)\Big]_{x = x_0} \neq 0.$$

Un zero al numitorului de ordinul k este aşa dar un *pol* de acelaş ordin al funcţiunii.

Funcțiunea $f(x)$ n'are așa dar la distanță finită alte singularități decât poluri în număr limitat.

Să observăm că egalitățile (2) și (3) sunt valabile în cercul cu centrul în punctul x_0 și trecând prin polul cel mai apropiat de acest punct.

Pentru a examina cum se comportă $f(x)$ în domeniul punctului dela infinit să facem substituțiunea $x = \frac{1}{x'}$; obținem

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x'}\right) = x'^{n-m} \frac{a_m + a_{m-1}x' + \ldots + a_0 x'^m}{b_n + b_{n-1}x' + \ldots + b_0 x'^n}.$$

Coeficienții a_m, b_n fiind diferiți de zero, rezultă că fracțiunea din membrul al doilea se poate pune sub forma unei serii întregi $P(x')$, care nu se anulează în punctul $x' = o$. Avem așadar în domeniul punctului ∞, expresiunea

$$(4) \qquad f(x) = x^{m-n} P\left(\frac{1}{x}\right), \quad \left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{x=\infty} \neq o.$$

Punctul $x = \infty$ este deci un punct ordinar sau un pol, după cum avem $m \leqq n$ sau $m > n$. In cazul $m < n$, punctul $x = \infty$ este un zero al funcțiunii de ordinul $n - m$ și în cazul $m > n$, acest punct este un pol de ordinul $m - n$.

O funcțiune rațională n'are așadar în tot planul, inclusiv punctul infinit, alte singularități decât poluri în număr limitat. Ea este monogenă (în sensul lui Weierstrass), căci orice element $P(x-x_0)$, care reprezintă funcțiunea în cercul său de convergență, poate fi prelungit analiticește în afară din cerc, astfel că totalitatea elementelor prin cari funcțiunea $f(x)$ este reprezintată în tot planul, se poate deduce dintr'unul din ele.

In fine, funcțiunea rațională este evident uniformă.

In rezumat: O funcțiune rațională este o funcțiune analitică uniformă pe toată sfera, neavând alte singularități decât un număr limitat de poluri; în special, dacă funcțiunea este întreagă, unicul ei pol este punctul dela infinit.

Aceste proprietăți sunt caracteristice, precum rezultă din cele ce urmează.

189. *Teoremă. — O funcțiune analitică $f(x)$ uniformă în tot planul, pentru care punctul infinit este unicul punct singular și anume un pol de ordinul m, este o funcțiune rațională întreagă de gradul m.*

In adevăr, $f(x)$ fiind o funcțiune olomorfă în tot planul, se poate reprezinta în toată întinderea planului printr'o serie întreagă

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^n + \ldots$$

Insă punctul infinit fiind un pol de ordinul m, rezultă că în domeniul acestui punct $f(x)$ trebuie să fie de forma

$$f(x) = x^m \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x=\infty}{\neq} 0 .$$

De unde rezultă $a_m \neq o$ şi toţi coeficienţii următori $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = o$. Avem aşadar

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m .$$

190. Teorema precedentă se poate înlocui prin cea următoare: Fie

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o funcţiune întreagă. *Dacă există un număr întreg pozitiv m şi un număr $A > o$, astfel încât să avem*

$$(2) \qquad | x^{-m} f(x) | \leqq \mathrm{A},$$

pentru toate valorile $|x| > \mathrm{R}$, R fiind un număr pozitiv *arbitrar de mare, funcţiunea $f(x)$ este un polinom de un grad $\leqq m$; gradul este m, dacă*

$$\left| x^{-m} f(x) \right| \underset{x=\infty}{\neq} 0 .$$

Pentru a stabili această propoziţiune, să scriem egalitatea (1) sub forma

$$x^{-m} f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^{k-m} + \sum_{k=m}^{\infty} a_k x^{k-m}$$

Prima sumă din membrul al doilea tinde către zero când $|x|$ tinde către infinit, prin urmare, în virtutea inegalităţii (2), modulul sumei a doua rămâne finit pe toată sfera. Această sumă este aşa dar o constantă a cărei valoare este nulă sau diferită de zero după cum $| x^{-m} f(x) |_{x=\infty}$ este nul, sau diferit de zero.

191. *Teoremă. — O funcţiune analitică uniformă, care, pe toată sfera, n'are alte singularităţi decât un număr limitat de poluri, este o funcţiune raţională.*

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_m$ polurile funcţiunii $f(x)$ situate la distanţă finită, de ordine respectiv egale cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Punând

$$\mathrm{F}(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \ldots (x-a_m)^{\alpha_m},$$

produsul $\mathrm{F}_1(x) = f(x)\, \mathrm{F}(x)$ este o funcţiune întreagă, având punctul infinit ca pol sau ca punct ordinar şi prin urmare este un polinom sau o cantitate constantă. De unde rezultă că

$$f(x) = \frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{F}(x)}$$

este o funcţiune raţională.

192. Teorema precedentă se mai poate stabili în modul următor: Fie a unul din polurile funcțiunii $f(x)$ la distanță finită și m ordinul său; avem în domeniul acestui punct

$$f(x) = \frac{A_0}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + P(x-a).$$

Să punem

$$\varphi(x) = \Sigma\left[\frac{A_0}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a}\right],$$

simbolul Σ referindu-se la toate polurile situate la distanță finită. Diferența $f(x) - \varphi(x)$ este o funcțiune întreagă $F(x)$ pentru care punctul infinit este, prin ipoteză, un pol sau un punct ordinar. $F(x)$ este așà dar un polinom de x, sau o constantă.

Funcțiunea

$$f(x) = F(x + \Sigma\left[\frac{A_0}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{A^{m-1}}{x-a}\right]$$

este așà dar o funcțiune rațională.

193. *Teorema fundamentală a Algebrei: O funcțiune rațională întreagă $f(x)$ are cel puțin un zero.*

In adevăr, dacă $f(x)$ nu s'ar anula în nici un punct în plan, inversa sa $\frac{1}{f(x)}$ ar fi olomorfă în tot planul; însă punctul infinit fiind pol al lui $f(x)$ este punct ordinar pentru $\frac{1}{f(x)}$ și prin urmare $\frac{1}{f(x)}$ ar fi olomorfă pe toată sfera; ceeace nu se poate.

III. — Două teoreme generale asupra funcțiunilor întregi.

194. Prin definițiune, o funcțiune întreagă este o funcțiune analitică definită de o serie întreagă $P(x)$ al cărei cerc de convergență are o rază arbitrar de mare. Punctul $x = \infty$ este unicul punct, singular, pol sau punct singular esențial, după cum funcțiunea este rațională sau transcendentă, adică după cum numărul termenilor seriei este limitat sau nelimitat.

Teorema I. Fie R și M două numere pozitive date; există valori x satisfăcând inegalitatea $|x| > R$ pentru cari avem $|f(x)| > M$, oricât de mare ar fi numărul M (Liouville).

Căci modulul unei funcțiuni analitice uniforme nu poate avea pe toată sfera o limita superioară finită, fără a se reduce la o constantă (169).

Această teoremă exprimă o proprietate comună funcțiunilor întregi raționale și transcendente. Teorema următoare se referă numai la funcțiunile transcendente.

Teorema II. Fie ε un număr pozitiv arbitrar de mic şi R un număr pozitiv oricât de mare voim; există valori x satisfăcând inegalitatea $|x| > R$, pentru cari avem $|f(x)| < \varepsilon$.

Dacă în domeniul punctului $x = \infty$, $f(x)$ are o infinitate de zeruri, teorema este evidentă. Să presupunem că nu este aşà, atunci putem să ne închipuim R destul de mare, astfel ca pentru $|x| > R$, $f(x)$ să nu aibă nici un zero, exceptând poate punctul $x = \infty$. Zerurile lui $f(x)$ situate în interiorul cercului $|x| = R$ fiind puncte izolate, numărul lor este limitat.

Să considerăm funcţiunea inversă $\frac{1}{f(x)}$ ale cărei poluri sunt zerurile lui $f(x)$. Fie a unul din aceste zeruri; vom avea, în domeniul acestui punct, o expresiune de forma

$$(1) \qquad \frac{1}{f(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + P(x-a).$$

Să punem

$$(2) \qquad \varphi(x) = \Sigma\left[\frac{A_0}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a}\right],$$

suma din membrul al doilea cuprinzând părţile principale relative la toate polurile lui $\frac{1}{f(x)}$, situate în cercul $|x| = R$; $\varphi(x)$ este o funcţiune raţională.

Diferenţa

$$(3) \qquad f_1(x) = \frac{1}{f(x)} - \varphi(x)$$

este aşadar o funcţiune analitică uniformă neavând nici un punct singular în cercul considerat. Insă R fiind arbitrar de mare, rezultă că $f_1(x)$ este o *funcţiune întreagă*. Această funcţiune nu se poate reduce la o constantă, căci altfel, din expresiunea (3) ar rezultà că $f(x)$ este o funcţiune raţională. Prin urmare, în virtutea teoremei I, există puncte x exterioare cercului $|x| = R$, în care avem $|f_1(x)| > M$, oricât de mare ar fi M. De altă parte, în asemenea puncte, modulul lui $\varphi(x)$ poate deveni mai mic decât o cantitate oricât de mică, dacă luăm R destul de mare. Prin urmare în aceste puncte avem

$$|f(x)| < \varepsilon. \qquad \text{q. e. d.}$$

195. *Corolar.* Fie A o constantă dată oarecare; în virtutea teoremei precedente există, în domeniul punctului ∞, puncte x în cari avem

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

adică, în domeniul punctului infinit, o funcţiune întreagă transcendentă se poate apropia de orice cantitate dată, oricât de mult voim.

196. Această teoremă ne arată deosebirea fundamentală ce există, în domeniul punctului infinit, între o funcţiune raţională întreagă şi o funcţiune întreagă transcendentă. Pecând cea dintâi nu poate primi, pentru valori x al căror modul este mai mare decât un număr pozitiv R, destul de mare, decât *valori al căror modul este mai mare decât* M, M fiind cu atât mai mare cu cât R este mai mare şi prin urmare tinde către infinit în acelaş timp cu x, *după orice direcţiune voim*, funcţiunea întreagă transcendentă poate, pentru aceleiaşi valori ale lui $|x|$, să se apropie de orice cantitate voim şi prin urmare este cu totul *nedeterminată*, când x tinde către infinit.

CAPITOLUL IX.

FUNCŢIUNI ANALITICE AVÂND O INFINITATE DE PUNCTE SINGULARE.

197. Fie

(1) $$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots,$$

un şir nelimitat de funcţiuni raţionale. Dacă seria $\Sigma f_n(x)$ este uniform convergentă într'o regiune *conexă* (A), ea reprezintă în acea regiune o funcţiune analitică monogenă $F(x)$. Căci precum s'a văzut (§ 123), în domeniul unui punct oarecare x_0, situat în regiunea dată, avem

(2) $$\Sigma f_n(x) = P(x-x_0).$$

De altă parte, aria fiind conexă, orice punct interior, $x=\xi$, poate fi unit cu x_0 printr'o linie situată în interiorul ei; prin urmare seria corespunzătoare $\mathcal{P}(x-\xi)$, pentru care avem

$$\Sigma f_n(x) = \mathcal{P}(x-\xi),$$

este o prelungire a elementului $P(x-x_0)$. Ceeace justifică monogeneitatea funcţiunii în aria considerată.

Egalitatea (2) este valabilă într'un cerc cu centrul în x_0 şi cu o rază cel puţin egală cu distanţa dela centru până la cel mai apropiat din polurile funcţiunilor $f_n(x)$; căci, *într'un asemenea cerc* toţi termenii seriei sunt de forma $P_n(x-x_0)$ şi suma $\Sigma P_n(x-x_0)$, este, în virtutea ipotezei, uniform convergentă în interiorul acestui cerc.

198. Să presupunem diferite între ele [1]) polurile funcţiunilor $f_n(x)$ şi fie R distanţa dela x_0 până la cel mai apropiat dintre ele; *raza cercului de convergenţă al seriei* $P(x-x_0)$ *este* R. In adevăr, să presupunem mai întâi că polurile cari se află la distanţa R de x_0, sunt în număr limitat şi fie $f_1(x), \ldots, f_\lambda(x)$ funcţiunile având asemenea poluri. Să punem

$$F_1(x) = f_1(x) + \ldots + f_\lambda(x)$$

şi să reprezentăm prin $F_2(x)$ suma $\Sigma' f_n(x)$, în care n primeşte toate valorile întregi de la 1 la ∞, exceptând valorile $1, \ldots \lambda$; vom avea

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

şi putem serie

$$F_1(x) = P_1(x-x_0), \quad F_2(x) = P_2(x-x_0).$$

Insă polurile termenilor Σ' fiind toate exterioare cercului C descris din x_0 ca centru cu raza R, pecând $F_1(x)$ este o funcţiune raţională ale cărei poluri sunt toate pe acest cerc, raza cercului de convergenţă al seriei $P_1(x-x_0)$ nu poate fi diferită de R. De unde rezultă că raza cercului de convergenţă al seriei

$$P(x-x_0) = P_1 + P_2$$

este R.

Să presupunem acum că polurile funcţiunilor $f_n(x)$, cari se află la distanţa cea mai mică R de x_0, sunt în număr nelimitat. Fie C cercul descris din x_0 ca centru cu raza R. Voim să arătăm că şi în acest caz cercul de convergenţă al seriei $P(x-x_0)$ este C. In adevăr, să presupunem că seria $P(x-x_0)$ este convergentă într'un cerc C', cu centrul în x_0 şi cu o rază $R' > R$. Fie a unul din polurile cari se află pe cercul C şi x_1 un punct interior pe raza care trece prin a, la o distanţă de acest punct mai mică ca R. Punctul a va fi aşà dar unicul pol a cărui distanţă de x_1 este cea mai mică şi prin urmare cercul de convergenta al seriei

$$F(x) = \mathcal{P}(x-x_1),$$

cu centrul în x_1 este tangent în a la cercul C. Insă seria $\mathcal{P}(x-x_1)$ fiind identică cu seria $P(x-x_0, x_1)$ dedusă din $P(x-x_0)$, cercul său de convergenţă trebuie să fie cel puţin tangent interior cercului C'. De unde rezultă că cercul C' coincide cu C. q. e. d.

---

[1]) Adică un pol al unei funcţiuni $f_n(x)$ nu aparţine nici uneia din celelalte funcţiuni $f_m(x)$, $m \pm n$ Dacă mai multe funcţiuni ar aveà un pol comun, acest pol ar puteà dispare în sumă

Exemplu:

$$f_1(x) = \frac{2x}{x^2-1},\ f_2(x) = \frac{-1}{x-1};\ f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Polul $x = 1$ a dispărut

199. *Aplicaţiune.* Fie

$$f_n(x) = \frac{c_n}{x - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ fiind puncte în număr nelimitat situate în plan într'un mod oarecare şi $c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ cantităţi constante, în număr deasemenea nelimitat, supuse la unica condiţiune ca seria $\Sigma \mid c_n \mid$ să fie convergentă. *Seria*

$$F(x) = \sum_1^\infty \frac{c_n}{x - a_n}$$

este absolut şi uniform convergentă în orice regiune a planului care nu conţine punctele a_n. In adevăr, să scriem termenul general sub forma

$$\frac{c_n}{x - a_n} = -\frac{c_n}{a_n - x_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x - x_0}{a_n - x_0}},$$

x_0 fiind un punct oarecare diferit de punctele a_n şi fie a_k unul din punctele a_n a cărui distanţă de x_0 este cea mai mică. Fie $\mid a_k - x_0 \mid = R$; vom avea $\mid a_n - x_0 \mid \geq R$ pentru $n \neq k$. Să considerăm cercul C descris din x_0 ca centru cu raza R şi fie x un punct oarecare în interiorul cercului; de unde $\mid x - x_0 \mid < R$. Fie r un număr pozitiv cuprins între $\mid x - x_0 \mid$ şi R; vom avea

$$\left| \frac{c_n}{x - a_n} \right| < \frac{\mid c_n \mid}{R} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{r}{R}}.$$

De unde

$$\Sigma \left| \frac{c_n}{x - a_n} \right| < \frac{1}{R - r} \Sigma \mid c_n \mid.$$

Aşadar seria propusă este absolut şi uniform convergentă în *interiorul* cercului C; prin urmare în toată întinderea planului, exceptând punctele a_n.

Din cele ce preced rezultă că în domeniul unui punct oarecare x_0 diferit de punctele a_n, avem

$$F(x) = P(x - x_0),$$

cercul de convergenţă al seriei $P(x - x_0)$ trecând prin punctul a^k care este cel mai apropiat de x_0. Prin urmare seria

$$F(x) = \sum_1^\infty f_n(x)$$

reprezintă o funcţiune analitică *monogenă* în tot planul pentru care punctele a_n sunt puncte singulare.

200. *Linii singulare. Spaţiuri lacunare.* Fie L o linie închisă sau nu; să presupunem că pe această linie se află o infinitate de puncte formând o grămadă numărabilă (a_n), densă pe toată linia. Seria

$$F(x) = \Sigma \frac{c_n}{x - a_n},$$

considerată în paragraful precedent, reprezintă o funcţiune analitică în tot planul pentru care linia L este o linie de puncte singulare; vom zice că linia L este o *linie singulară* a funcţiunii. Dacă această linie este închisă, separând planul în două regiuni, $F(x)$ va defini două funcţiuni analitice în cele două regiuni separate de L; nici una din aceste funcţiuni nu poate fi prelungită în afară din regiunea corespunzătoare. Linia L se numeşte *limită naturală* pentru fiecare din ele.

Regiunea interioară liniei L se zice *spaţiu lacunar* pentru funcţiunea a cărei regiune de existenţă este *exterioară* acestei linii; şi vice versa.

201. *Exemple de funcţiuni având linii singulare.* Fie α, β afixele a două puncte date; punctele reprezintate prin expresiunea

$$a_{m,n} = \frac{m\alpha + n\beta}{m + n},$$

în care m şi n primesc toate valorile întregi pozitive, exceptând valorile simultane $m = n = o$, sunt situate pe segmentul de dreaptă $\alpha\beta$ şi formează o grămadă densă pe toată această dreaptă [1]). Fie în acelaş timp seria $\Sigma c_{m,n}$ absolut convergentă. Seria

$$\Sigma \frac{c_{m,n}}{x - a_{m,n}}$$

cu doi indici (m, n) care poate fi ordonată într'o serie cu un singur

---

[1]) 1°. Punctul $a_{m,n}$ este pe dreapta $\alpha\beta$ în virtutea ecuaţiunii

$$\frac{a_{m,n} - \beta}{\alpha - a_{m,n}} = \frac{m}{n}.$$

2°. Grămada este densă. Orice punct $a_{m,n}$ este limită unui număr infinit de puncte ale dreptei. In adevăr, fie

$$x_0 = \frac{m_0\alpha + n_0\beta}{m_0 + n_0}, \quad x = \frac{m\alpha + n\beta}{m + n} \qquad (x_0 \neq \alpha, \beta);$$

avem

$$x - x_0 = \frac{mn_0 - nm_0}{(m + n)(m_0 + n_0)} (\alpha - \beta).$$

Să punem

$$m = km_0 \pm 1, \; n = kn_0;$$

indice, reprezintă, în virtutea celor văzute în paragraful precedent, o funcţiune analitică având dreapta $\alpha\beta$ ca linie singulară.

Fie, de exemplu, $c_{m,n} = e^{-m-n}$ şi să considerăm seria

$$(1) \qquad \sum_{m,n=o}^{+\infty} e^{-m-n}\left(\frac{1}{mx-n}+\frac{1}{mx+n}\right),$$

exceptând $m = n = o$.

Această serie este absolut şi uniform convergentă în ambele semiplane (x) separate de axa reală. In fiecare semiplan, seria reprezintă aşà dar o funcţiune analitică monogenă, fără ca aceste funcţiuni să fie una prelungirea analitică a celeilalte. Axa reală este o *linie singulară* a acestor două funcţiuni.

Să facem schimbarea de variabilă

$$(2) \qquad x = i\frac{y+1}{y-1},$$

prin care axa reală din planul (x) se transformă în cercul $|y| = 1$, din planul (y). Corespondenţa între aceste două plane este astfel că punctelor x, situate în semiplanul inferior, corespund punctele y interioare cercului $|y| = 1$, iar punctelor x situate în semiplanul superior corespund punctele y exterioare cercului. Făcând substituţiunea, obţinem seria

$$(3) \qquad 2i(1-y^2)\,\Sigma\,\frac{me^{-m-n}}{m^2(y+1)^2+n^2(y-1)^2}.$$

Această serie defineşte dar două funcţiuni analitice monogene, una în interiorul cercului $|y| = 1$, şi cealaltă în afară din acest cerc, având cercul ca linie singulară. Fiecare din ele nu poate fi aşà dar prelungirea analitică a celeilalte.

202. Se pune întrebarea dacă funcţiunile analitice definite astfel de una şi aceiaş serie de funcţiuni raţionale, uniform conver-

---

avem

$$x - x_0 = \frac{\pm n_0(\alpha-\beta)}{[\pm 1 + k(m_0+n_0)]\,(m_0+n_0)}.$$

Dând lui k valori întregi pozitive din ce în ce mai mari, rezultă $|x - x_0| < \varepsilon_k$, ε_k tinzând către zero când k tinde către infinit.

Dacă $x_0 = \alpha$, sau $= \beta$, avem respectiv

$$x - \alpha = \frac{n(\beta-\alpha)}{m+n},$$

$$x - \beta = \frac{m(\alpha-\beta)}{m+n}.$$

In primul caz facem să crească m, în cazul al doilea să crească n. Ajungem la aceiaş concluziune.

q. e. d.

gente în diferite regiuni ale planului, au vreo legatură între ele, adică, dacă din proprietăţile uneia se pot deduce proprietăţile celeilalte.

Să reprezintăm prin $f(x)$ funcţiunea definită de seria (1) când x este deasupra axei reale şi prin $f_1(x)$ funcţiunea definită de aceiaş serie, când x este dedesubtul acestei axe.

Avem egalitatea

$$f_1(x) = f(-x) = -f(x). \tag{4}$$

Deasemenea, reprezintând prin $\varphi(y)$ şi $\varphi_1(y)$ funcţiunile definite de seria (3), corespunzătoare punctelor y interioare sau exterioare cercului $|y| = 1$, rezultă

$$\varphi_1(y) = \varphi\left(\frac{1}{y}\right) = -\varphi(y). \tag{5}$$

Funcţiunile definite de seria (1), precum şi cele definite de seria (3) nu sunt aşà dar independente între ele [1]). *Nu este însă totdeauna astfel.*

Weierstrass a arătat, în adevăr, că funcţiunile definite de o serie de funcţiuni raţionale, uniform convergente în diferite regiuni ale planului, pot să nu aibă nici o relaţiune între ele; căci se pot formà asemenea serii cari să coincidă în regiunile de convergenţă corespunzătoare cu funcţiuni analitice date după voie.

Pentru aceasta, să considerăm mai întâiu seria dată de *Jules Tannery*, cu ajutorul căreia se pot construì lesne serii având proprietăţile menţionate [2]).

203. *Seria Tannery.* Această serie este

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x}\right) \tag{1}$$
$$+ \left(\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1-x^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}}\right) + \dots,$$
$$= \frac{1}{1-x} + \sum_1^\infty \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}.$$

Reprezentând prin $\varphi_n(x)$ suma celor dintâiu n termeni ai seriei (1), avem

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{1-x^{2^n}};$$

---

[1]) Legătura dintre funcţiunile φ_1 şi φ este evident o consecinţă a legăturii dintre funcţiunile f şi f_1.

[2]) Seria auxiliară de care s'a servit Weierstrass la început are o formă mai complicată. (*Weierstrass*, Zur Funktionenlehre, p. 81).

prin urmare

$$\lim \varphi_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } |x| < 1, \\ 0 \quad \text{»} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Seria $\varphi(x)$ este așà dar convergentă în interiorul cercului descris din origină ca centru cu o rază egală cu 1, precum și în toată întinderea planului exterioară acestui cerc. In ambele regiuni ea este uniform convergentă. In adevăr, fie $R_n(x)$ restul seriei corespunzător unui rang n; avem

$$(2) \qquad R_n(x) = 1 - \frac{1}{1-x^{2^n}} = -\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^n}},$$

sau

$$(3) \qquad R_n(x) = \frac{1}{x^{2^n}-1},$$

după cum $|x| < 1$. In cazul întâiu, fie r un număr pozitiv mai mic ca 1, oricât de aproape voim de 1 și fie $0 < \varrho < r$. Pentru $|x| = \varrho$, avem

$$(4) \qquad |R_n(x)| < \frac{\varrho^{2^n}}{1-\varrho^{2^n}} < \frac{r^{2^n}}{1-r^{2^n}}.$$

In cazul al doilea, fie $r > 1$, oricât de aproape de 1 și $\varrho > r$; avem, pentru $|x| = \varrho$,

$$(5) \qquad |R_n(x)| < \frac{1}{\varrho^{2^n}-1} < \frac{1}{r^{2^n}-1}.$$

Expresiunile (4) și (5) justifică propozițiunea, căci în ambele cazuri avem, pentru n destul de mare

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε.

Așà dar, seria $\varphi(x)$ se poate pune sub forma $P(x)$ sau $P\left(\frac{1}{x}\right)$, după cum $|x| < 1$; și, în virtutea celor ce preced, valorile acestor două serii sunt respectiv egale cu 1 și 0. Ceeace se poate verifică direct, desvoltând termenii expresiunii

$$(6) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{1-x} + \sum_1^\infty \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}$$

în serii de puteri de x.

Pe cercul $|x| = 1$, $\varphi(x)$ n'are sens.

Fie acum $f_1(x)$, $f_2(x)$ două funcțiuni analitice uniforme în tot planul, având unnumăr limitat sau nelimitat de singularități izolate.

Expresiunea

$$(7) \qquad F(x) = f_2(x) + \varphi(x)\,[f_1(x) - f_2(x)],$$

care, precum se va vedea (teorema lui Mittag-Leffler), se poate pune sub forma unei sume de fracţiuni raţionale, coincide cu funcţiunea $f_1(x)$ în interiorul cercului $|x| = 1$ şi cu funcţiunea $f_2(x)$ în tot planul exterior acestui cerc. Ea reprezintă deci în fiecare din aceste două regiuni câte o porţiune din funcţiunile analitice, $f_1(x)$, $f_2(x)$ date după voie.

Din expresiunea (7) rezultă că dacă x_0 este un punct al cercului $|x| = 1$, avem

$$\lim_{x=x_0} F(x) = \begin{cases} f_1(x_0), \\ f_2(x_0), \end{cases}$$

după cum x, apropiindu-se de x_0, dealungul unei raze ce trece prin acest punct, vine din interiorul cercului sau din exteriorul lui. In punctul x_0, $F(x)$ n'are sens.

Să observăm că funcţiunile $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ fiind presupuse monogene, fiecare din ele se prelungeşte în afară din regiunile considerate; însă prelungirea lui $f_1(x)$ nu coincide cu $f_2(x)$ şi viceversa.

204. Fie de exemplu $f_1(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x-1}$; vom aveà, înlocuind în (7) $\varphi(x)$ prin desvoltarea sa din membrul al doilea al egalităţii (1)

$$(8) \qquad F(x) = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2}{x^4-1} + \ldots + \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1} + \ldots,$$

expresiune respectiv egală cu $\dfrac{x}{x-1}$ sau cu $\dfrac{1}{x-1}$ după cum $|x| < 1$.

Acest rezultat se verifică direct, observând că avem

$$(9) \qquad \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1} = \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^{n-1}}-1} - \frac{x^{2^n}}{x^{2^n}-1}, \text{ etc.}$$

Din faptul că expresiunea (8) coincide cu două funcţiuni analitice diferite, după cum x este în interiorul cercului $|x| = 1$ sau în afară din acest cerc, rezultă că prelungirea analitică a lui $F(x)$ nu se poate face dintr'una din aceste regiuni în cealaltă. Căci dacă $F(x)$ s'ar puteà, de exemplu, prelungì din interiorul cercului în afară, prelungirea sa ar coincide cu aceia a lui $\dfrac{x}{x-1}$, pe când în afară din cerc avem $F(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

205. Fie

$$x = \frac{a\,x' + b}{c\,x' + d}$$

o substituțiune lineară care transformă cercul $|x| = 1$ într'o linie dreaptă dată în planul (x'). Seria Tannery

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{a\,x' + b}{c\,x' + d}\right)$$

devine o serie de funcțiuni raționale de x', absolut și uniform convergentă în fiecare din semiplanele separate de dreapta considerată. Valoarea acestei serii este egală cu 1 în semiplanul corespunzător interiorului cercului $|x| = 1$ și egală cu zero în celalt semiplan. Pe dreapta însăși seria n'are sens.

Să considerăm, de exemplu, substituțiunea

$$x = \frac{1 - x'}{1 + x'},$$

care transformă cercul $|x| = 1$ în axa imaginară (x'), astfel ca interiorul cercului să corespundă semiplanului în care partea reală a lui x' este pozitivă $\mathcal{R}(x') > o$. Obținem, suprimând accentul, seria

$$\varphi\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) = \frac{1 + x}{2\,x} + \Sigma \frac{(1 - x^2)^{2^{n-1}}}{(1 - x^2)^{2^n} - (1 + x)^{2^n}} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

după cum partea reală a lui x este pozitivă sau negativă.

Expresiunea

$$f_2(x) + \varphi\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)\left[f_1(x) - f_2(x)\right]$$

va coincide dar cu $f_1(x)$ în semiplanul situat la dreapta axei imaginare și cu $f_2(x)$ în semiplanul situat la stânga acestei axe.

206. Fie într'un mod general $C_1, C_2, \ldots, C_n$, n cercuri exterioare între dânsele; ele descompun planul în $n + 1$ regiuni. Se știe că se poate determinà, o substitațiune liniară

$$y = \frac{a_k\,x + b_k}{c_k\,x + d_k},$$

care să transforme cercul C_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ într'un cerc dat oarecare, astfel ca ariile interioare cercurilor să se corespundă.

Fie $|y| = 1$ cercul în care transformăm cercul C_k; vom aveà, $\varphi(x)$ fiind seria Tannery,

$$\varphi\left(\frac{a_k\,x + b_k}{c_k\,x + d_k}\right) = 1 \text{ sau } 0$$

după cum punctul x se găsește în interiorul cercului C_k, sau în afară din acest cerc.

Fie acum $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$, $n+1$ funcțiuni analitice uniforme în toată întinderea planului; expresiunea

$$F(x) = f_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{a_k x + b_k}{c_k x + d_k}\right)\left[f_k(x) - f_{n+1}(x)\right]$$

coincide respectiv cu fiecare din funcțiunile considerate, după cum punctul x se găsește în interiorul cercurilor C_1, C_2, ... C_n, sau undeva în afară din toate aceste cercuri.

Astfel dar, propozițiunea lui Weierstrass este complect justificată.

207. Prin exemple de natura celor precedente se pune în evidență, după Weierstrass, distincțiunea dintre noțiunile de *expresiune analitică și de funcțiune analitică monogenă.*

O expresiune analitică constă din orice expresiune a cărei valoare, fiind dată valoarea variabilei, se poate calculà cu ajutorul operațiunilor aritmetice, în număr limitat sau nelimitat (exemplu serii și produse nelimitate), precum și din tot felul de operațiuni analitice cunoscute: treceri la limită, integrațiuni definite sau nedefinite, etc. [1]). O expresiune analitică, poate reprezintà, precum am văzut mai sus, diferite funcțiuni analitice în diferite regiuni ale planului.

208. *Exemplu de funcțiune lacunară.* Fie α, β, γ afixele a trei puncte nu în linie dreaptă; să considerăm triunghiul având aceste puncte ca vârfuri. Punctele date de expresiunea

$$(1) \qquad x_{m,n,p} = \frac{m\alpha + n\beta + p\gamma}{m + n + p},$$

în care m, n, p primesc toate valorile întregi pozitive, exceptând combinațiunea $m = n = p = o$, formează o grămadă densă în acest triunghiu [2]).

---

[1]) *E. Borel*, Leçons sur la théorie des fonctions.

[2]) Putem scrie

$$x_{m,n,p} = \frac{(m+n)\, x_{m,n,o} + p\gamma}{(m+n) + p}.$$

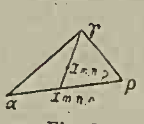

Fig. 9

Insă punctul $x_{m,n,o}$ este pe latura $\alpha\beta$; prin urmare punctul $x_{m,n,p}$ este pe dreapta care unește acest punct cu punctul γ, cuprins între ele. De unde rezultă densitatea grămezii acestor puncte (201, nota).

Seria

$$(2) \qquad \sum_{m,n,p=o}^{\infty} \frac{e^{-m-n-p}}{x - x_{m,n,p}}, \text{ (exceptând } m = n = p = o)$$

este absolut şi uniform convergentă în tot planul exterior triunghiului şi nu are sens în interiorul triunghiului. Această serie defineşte dar o funcţiune analitică monogenă în tot planul exterior triunghiului, având interiorul triunghiului ca *spaţiu lacunar.*

CAPITOLUL X.

STUDIUL CÂTORVA FUNCŢIUNI ANALITICE ELEMENTARE.

I.

I. — FUNCŢIUNEA EXPONENŢIALĂ e^x FUNCŢIUNILE $\sin x$, $\cos x$.

209. Să considerăm seria

$$(1) \qquad P(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

al cărei cerc de convergenţă are o rază infinită. Această serie defineşte o funcţiune întreagă transcendentă $f(x)$.

Derivând ambele membre ale egalităţii (1), obţinem

$$P'(x) = P(x);$$

prin urmare derivatele de orice ordin coincid cu funcţiunea. Aplicând seria Taylor, avem

$$P(x) = P(x_0 + x - x_0) = P(x_0) \left[1 + \frac{x - x_0}{1} + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \ldots \right]$$

$$= P(x_0)\, P(x - x_0),$$

sau

$$(2) \qquad f(x) = f(x_0)\, f(x - x_0),$$

x_0 fiind o valoare oarecare a lui x. Această egalitate exprimă că $f(x)$ nu se poate anulà pentru nici o valoare finită x_0, căci altfel $f(x)$ s'ar anulà pentru orice valoare a lui x; ceeace este absurd

Punând $x = x_0 + x_1$, egalitatea (2) devine

$$(3) \qquad f(x_0)\, f(x_1) = f(x_0 + x_1).$$

Această egalitate funcţională se poate obţine din egalitatea (1), dacă înlocuim x succesiv prin x_0 şi x_1 şi facem produsul seriilor corespunzătoare. Obţinem în virtutea regulii multiplicaţiunii

$$P(x_0)\,P(x_1) = \sum_0^\infty \frac{(x_0 + x_1)^n}{n!} = P(x_0 + x_1).$$

Funcţiunea aşà definită poartă numele de *funcţiune exponenţială* şi se reprezintă prin simbolul e^x, în care e este un număr real şi pozitiv definit de seria

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

ale cărei proprietăţi sunt studiate în Algebră.

Avem în rezumat

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}, \tag{4}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \tag{5}$$

$$e^{x_1} \,.\, e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}. \tag{6}$$

210. *Definiţiune.* Fie $f(x)$ o funcţiune uniformă într'o regiune dată şi x_1, x_2 două puncte oarecari în aceà regiune. Dacă între valorile

$$u = f(x_1),\quad v = f(x_2),\quad w = f(x_1 + x_2),$$

există o ecuaţiune de forma

$$F(u,\ v,\ w) = o,$$

F fiind o funcţiune raţională întreagă de u, v, w cu coeficienţi independenţi de x_1 şi x_2, se zice că funcţiunea $f(x)$ admite o *teoremă de adiţiune algebrică.*

Funcţiunea exponenţială admite o teoremă de adiţiune algebrică raţională, căci în virtutea proprietăţii (4), avem

$$uv = w.$$

Se recunoaşte lesne că o funcţiune raţională oarecare $f(x)$, precum şi o funcţiune raţională $f(e^{ax})$ de exponenţiala e^{ax}, a fiind o constantă arbitrară, admite o teoremă de adiţiune algebrică căci putem eliminà x_1, x_2 între ecuaţiunile

$$u = f(x_1),\quad v = f(x_2),\quad w = f(x_1 + x_2)$$

deasemenea e^{ax_1}, e^{ax_2} între ecuaţiunile

$$u = f(e^{ax_1}),\quad v = f(e^{ax_2}),\quad w = f(e^{a(x_1+x_2)}),$$

şi obţinem, în ambele cazuri, o ecuaţiune algebrică $F(u, v, w) = o$ cu coeficienţi constanţi.

211. Este interesant de notat că între o funcţiune raţională $u = f(x)$ şi derivata sa $\frac{du}{dx} = f'(x)$ există o ecuaţiune algebrică

$$F\left(u\,\frac{du}{dx}\right) = 0,$$

cu coeficienţi constanţi, care se obţine eliminând x între ecuaţiunile $u = f(x)$ şi $\frac{du}{dx} = f'(x)$.

La un rezultat analog ajungem dacă $u = f(e^{ax})$ este o funcţiune raţională de e^{ax}.

212. Făcând în (4) $x = 0$ şi în (6) $x_2 = -x_1 = x$ obţinem

$$e^0 = 1, \qquad e^x \,.\, e^{-x} = 1;$$

de unde

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

In virtutea ecuaţiunii (6) avem

$$e^{x_1},\ e^{x_2} \ldots e^{x_n} = e^{x_1+x_2+\ldots+x_n}$$

şi făcând $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$,

(7) $$(e^x)^n = e^{nx}.$$

Această egalitate subsistă şi pentru n întreg negativ, căci prin definiţiune, avem

$$(e^x)^{-n} = \frac{1}{(e^x)^n};$$

prin urmare

$$(e^x)^{-n} = \frac{1}{(e^x)^n} = \frac{1}{e^{xn}} = e^{-nx}.$$

213. Din seria

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

rezultă că dacă x este real şi creşte dela zero la infinit, e^x creşte necontenit dela 1 la infinit. Pentru x real şi negativ, considerând ecuaţiunea $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$, conchidem că dacă x variază dela 0 la $-\infty$, e^x descreşte necontenit dela 1 la 0. De unde rezultă că pentru x real, avem

$$|e^x| = e^x,$$

şi dacă a este un număr pozitiv, ecuaţiunea

$$e^x - a = 0$$

admite o soluţiune reală, *unică*.

214. *Funcțiunile* $\sin x$, $\cos x$. Să considerăm seriile

$$(8)\qquad \begin{aligned} & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \\ & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots, \end{aligned}$$

convergente în tot planul, cari definesc două funcțiuni întregi transcendente. Aceste funcțiuni se reprezintă respectiv prin simbolurile $\sin x$, $\cos x$. Se recunoaște că avem

$$(9)\qquad \begin{aligned} & \sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \\ & \frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \end{aligned}$$

$$(10)\qquad e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

i fiind unitatea imaginară. Ultimele două egalități poartă numele de relațiunile lui *Euler*. Din ele deducem expresiunile

$$(11)\qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

care ridicate la pătrat și adunate dau relațiunea

$$(12)\qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

215. Punând $x = \xi + i\eta$, avem

$$(13)\qquad e^x = e^\xi . e^{i\eta} = e^\xi(\cos\eta + i\sin\eta).$$

Presupunând ξ și η variabile reale, e^ξ și η sunt respectiv *modulul* și *argumentul* lui e^x. Făcând $\xi = 0$ și dând lui η respectiv valorile $\pm 2\pi$, $\pm\pi$, $\pm\frac{\pi}{2}$, obținem valorile

$$(14)\qquad e^{\pm 2i\pi} = 1, \quad e^{\pm i\pi} = -1, \quad e^{\pm\frac{i\pi}{2}} = \pm i.$$

De unde rezultă egalitățile

$$(15)\qquad e^{x\pm 2i\pi} = e^x, \quad e^{x\pm i\pi} = -e^x, \quad e^{x\pm\frac{i\pi}{2}} = \pm ie^x.$$

216. Funcțiunile $\sin x$ și $\cos x$, fiind funcțiuni raționale de e^{ix}, admit (§ 210) o teoremă de adițiune algebrică.

Din ecuațiunile (10) deducem

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y),$$

$$e^{ix} . e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)$$

$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\sin x\cos y + \sin y\cos x);$$

de unde rezultă

$$\cos(x+y)+i\sin(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \\ +i(\sin x\cos y+\sin y\cos x).$$

Schimbând i în $-i$, avem

$$\cos(x+y)-i\sin(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \\ -i(\sin x\cos y+\cos x\sin y).$$

Din aceste două egalităţi deducem, prin adunare şi scădere,

$$(16)\qquad \begin{cases}\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,\\ \sin(x+y=\sin x\cos y+\sin y\cos x.\end{cases}$$

Aceste formule de adiţiune arată că $\cos(x+y)$ este o funcţiune raţională de $\cos x$, $\cos y$ şi de derivatele lor; deasemenea $\sin(x+y)$ este o funcţiune raţională de $\sin x$, $\sin y$ şi de derivatele lor. Pentru a obţine ecuaţiunea algebrică între $\cos(x+y)$, $\cos x$, $\cos y$ putem eliminà $\sin x$, $\sin y$ între prima ecuaţiune (16) şi identităţile $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sin^2 y+\cos^2 y=1$.

Intr'un mod analog obţinem o ecuaţiune algebrică între $\sin(x+y)$, $\sin x$, $\sin y$.

217. *Periodicitatea funcţiunii* e^x. O funcţiune uniformă $f(x)$ se zice *periodică*, dacă există o constantă a, astfel că, oricare ar fi x, avem

$$f(x+a)=f(x);$$

a se numeşte *perioada* funcţiunii. Este evident că egalitatea precedentă trage după sine pe cea următoare

$$f(x+na)=f(x),$$

n fiind un număr întreg oarecare, pozitiv sau negativ; prin urmare a fiind o perioadă, orice multiplu na va fi o perioadă. Dacă a este o perioadă fără a fi multiplu al unei alte perioade, a se zice *perioadă primitivă*. Dacă funcţiunea admite o singură perioadă primitivă, se zice că este *simplu periodică*.

Funcţiunea e^x este periodică, având perioada $2i\pi$; căci avem

$$e^{x+2i\pi}=e^x.$$

Vom vedeà mai departe că e^x este simplu periodică şi că $2i\pi$ este o perioadă primitivă.

218. Expresiunile (11) ale funcţiunilor $\sin x$, $\cos x$ arată că aceste funcţiuni sunt periodice, având perioada 2π.

Aceleaşi expresiuni dau, ţinând seamă de egalităţile (15),

$$\sin(x+\pi) = -\sin x,\ \cos(x+\pi) = -\cos x,$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x,\ \cos(\pi - x) = -\cos x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

219. *Reprezentarea geometrică a periodicităţii funcţiunii* e^x. Să punem

$$y = e^x,\ x = \xi + i\eta.$$

In virtutea periodicităţii, funcţiunea y primeşte aceeaş valoare în toate punctele date de expresiunea

$$x_0 + 2ni\pi,$$

n fiind un număr întreg arbitrar. Vom zice despre aceste puncte că sunt *congruente* cu punctul x_0.

Să ducem pe axa $O\eta$, dela origină, de o parte şi de alta, distanţe egale cu 2π şi prin punctele de diviziune să ducem paralele cu axa $O\xi$. Impărţim astfel planul (x) într'un număr nelimitat de fâşii paralele. Punctele congruente unui punct x_0, interior unei fâşii, se găsesc în fâşii diferite, câte unul în fiecare, pe când punctele situate pe liniile paralele, cari limitează fiecare fâşie sunt două câte două congruente. Convenim, pentru uniformitatea enunţurilor, a privì una din aceste paralele ca aparţinând unei fâşii, iar cealaltă fâşiei vecine.

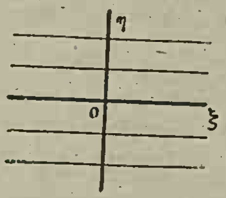

Fig. 10

Este de ajuns a studià variaţiunea funcţiunii $y = e^x$ într'o fâşie; fie fâşia întâia deasupra axei $O\xi$.

Lăsând η constant şi făcând ξ să varieze dela $-\infty$ la $+\infty$, x descrie o paralelă la $O\xi$ şi

$$y = e^{\xi} . e^{i\eta}$$

descrie o rază vectoare $0,\infty$ în direcţiunea al cărei argument este η.

Lăsând ξ constant şi făcând să varieze η dela O la 2π, ceeace revine a face ca x să descrie o porţiune de paralelă cu $O\eta$, limitată de laturile fâşiei, y descrie în sensul pozitiv, cercul $|y| = e^{\xi}$.

De acì rezultă nu numai că unui punct x corespunde un singur punct y ci şi viceversa, unui punct y corespunde un singur punct x, situat în fâşie. Trebuie să exceptăm punctul $y = 0$, căruia nu corespunde nici o valoare finită a lui x. Exceptând acest punct, fâşia considerată (x) şi planul (y) se corespund aşa dar *punct cu punct*. Reprezintarea acestei fâşii pe planul y este o reprezintare conformă, căci derivata $\frac{dy}{dx} = e^x$ nu se anulează în nici un punct al fâşiei. Oricare altă fâşie se transformă pe planul y în acelaş mod ca cea dintâiu.

Funcţiunea e^x neprimind aceeaş valoare într'o fâşie decât o singură dată, rezultă că ea nu admite nici o perioadă distinctă de $2i\pi$ sau care să fie un submultiplu al lui $2i\pi$. Aşadar e^x este o funcţiune simplu periodică şi $2i\pi$ este o perioadă primitivă.

220. *Definiţiune. Numim, după Felix Klein, domeniu fundamental al unei funcţiuni analitice uniforme, o regiune conexă, limitată sau nelimitată, în care funcţiunea primeşte toate valorile sale, o singură dată fiecare.* Fâşia considerată, precum şi oricare altă fâşie congruentă, constituie dar un domeniu fundamental al funcţiunii e^x. Forma acestui domeniu poate fi diferită. Astfel, fâşia cuprinsă între două drepte paralele duse prin punctele x_0, $x_0 + 2i\pi$, x_0 fiind un punct oarecare, constituie un domeniu fundamental.

Corolar. Funcţiunea

$$e^{\frac{2i\pi x}{\omega}},$$

ω fiind o constantă dată, este simplu periodică având perioada primitivă ω. O fâşie limitată de două drepte paralele duse prin punctele x_0, $x_0 + \omega$ într'o direcţiune diferită de ω, formează un domeniu fundamental al funcţiunii.

221. Să vedem cum se comportă funcţiunea e^x în domeniul punctului ∞, care este un punct singular esenţial. Pentru aceasta să facem substituţiunea $x = \frac{1}{x'}$ şi să studiem funcţiunea $e^{\frac{1}{x'}}$ în domeniul punctului $x' = 0$.

Fie a o cantitate oarecare diferită de zero şi $\alpha + i\beta$ unul din punctele planului (x') pentru care avem

$$a = e^{\alpha + i\beta}.$$

Să considerăm ecuaţiunea

$$e^{\frac{1}{x'}} = a,$$

sau, punând $x' = \xi' + i\eta'$,

$$e^{\frac{1}{\xi' + i\eta'}} = e^{\alpha + i\beta}:$$

de unde rezultă ecuaţiunea

$$\frac{1}{\xi' + i\eta'} = a + i(\beta + 2n\pi),$$

care se descompune în

$$\xi' = \frac{a}{a^2 + (\beta + 2n\pi)^2}, \; \eta' = -\frac{\beta + 2n\pi}{a^2 + (\beta + 2n\pi)^2}.$$

Dând lui n valori întregi din ce în ce mai mari, obţinem puncte în număr infinit de mare a căror limită este punctul $x' = 0$ şi în care avem $e^{\frac{1}{x'}} = a$, adică, în domeniul punctului $x' = 0$, funcţiunea $e^{\frac{1}{x'}}$ *primeşte de o infinitate de ori aceeaş valoare* $a \neq 0$.

222. Propoziţiunea precedentă se mai poate stabilì prin reprezintarea geometrică următoare: Punând

$$x = \xi + i\eta, \; x' = \xi' + i\eta'$$

substituţiunea

$$x' = \frac{1}{x} \tag{17}$$

face sǎ corespundă unei paralele $\eta = b$ la axa reală din planul (x), un cerc în planul (x') tangent în origina O' la axa $\eta' = 0$ (v. fig. 0); căci ecuaţiunea (17) dă

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \; \eta' = \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2}; \tag{18}$$

de unde

$$b(\xi'^2 + \eta'^2) + \eta' = 0. \tag{19}$$

Când x descrie dreapta $\eta = b$ dela $\xi = -\infty$ la $\xi = +\infty$, x' descrie cercul (19) întreg, precum arată formulele (18). Dând lui b respectiv valorile $2k\pi$, $2(k+1)\pi$, k fiind un număr întreg, fâşia din planul (x) astfel determinată se va transformà în mod *biunivoc* în spaţiul cuprins între cele două cercuri corespunzătoare descrise de variabila x'. Prin urmare planul variabilei

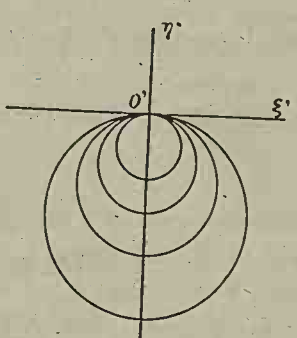

Fig. 11

$$y = e^x = e^{\frac{1}{x'}}$$

şi spaţiul cuprins între cele două cercuri se transformă unul într'altul, punct cu punct, dacă exceptăm punctul $y = 0$. Insă dând lui k valori întregi din ce în ce mai mari, obţinem o infinitate de cercuri (19) ale căror raze tind către zero. De unde conchidem că în domeniul punctului $x' = 0$, funcţiunea $e^{\frac{1}{x'}}$ primeşte o infinitate de ori o valoare arbitrară diferită de zero.

Figura alăturată corespunde lui $k > 0$. Dacă $k < 0$, cercurile sunt situate deasupra axei $0\xi'$.

223. *Observare.* Fie $u = P(x)$ o serie întreagă convergentă într'un cerc $|x| = R$; funcţiunea exponenţială

$$y = e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots$$

se va exprimà printr'o serie întreagă $P(x)$, convergentă în cercul (R), în care ea nu se anulează deoarece e^u nu se anulează pentru nici o valoare finită a lui u.

Dacă u este o funcţiune întreagă, $u = G(x)$, funcţiunea

$$e^{G(x)}$$

va fi o funcţiune întreagă $G_1(x)$, *neavând nici un zero în toată întinderea planului.* Fie a o constantă arbitrară; funcţiunea

$$G_1(x) + a$$

este o funcţiune întreagă, care nu poate devenì egală cu a pentru nici o valoare finită a lui x.

D-l *E. Picard* a demonstrat că nu există două cantităţi a, b, $a \neq b$, pe cari o funcţiune întreagă să nu le poată primì fără a se reduce la o constantă (*Picard,* Analyse, tome II).

224. Fie $G(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ o funcţiune întreagă. Să punem

$$x = \xi + i\eta, \quad a_n = \alpha_n + i\beta_n,$$

ξ, η, α, β fiind cantităţi reale, $(n = 0, 1, \ldots)$; vom aveà

$$G(x) = P(\xi, \eta) + iP_1(\xi, \eta),$$

P şi P_1 fiind serii reale de forma

$$\sum \gamma_{m,n} \xi^m \eta^n,$$

absolut convergente pentru orice sistem de valori finite (ξ, η). Aceste serii definesc două funcţiuni $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ reale, finite şi univoce în tot planul variabilei x.

Dacă una din funcţiunile φ sau ψ păstrează un semn invariabil în tot planul, $G(x)$ se reduce la o constantă. Să presupunem, de exemplu,

$$\varphi(\xi, \eta) > 0,$$

în tot planul. Considerăm expresiunea

$$e^{-G(x)} = e^{-\varphi(\xi,\eta)}e^{-i\psi(\xi,\eta)},$$

care reprezintă o funcţiune întreagă al cărei modul $e^{-\varphi} < 1$ în tot planul; de unde rezultă că această funcţiune se reduce la o constantă şi prin urmare $G(x)$ este o constantă.

Dacă $\psi(\xi, \eta)$ este de un semn invariabil, considerăm expresiunea

$$e^{\pm iG(x)},$$

după cum $\psi \gtreqless 0$.

La aceleaşi concluziuni ajungem dacă una din funcţiunile φ sau ψ este identic nulă: ceeace însemnează că o funcţiune întreagă nu poate fi în tot planul numai reală sau numai pur imaginară.

225. *Reprezintarea geometrică a periodicităţii funcţiunilor* $\sin x$, $\cos x$.

Să ducem pe axa reală în amândouă sensurile, începând dela origină, lungimi egale cu 2π; prin punctele de diviziune să ducem paralele la axa 0η; împărţim astfel planul într'o infinitate de fâşii. In toate punctele congruente

$$x_0 + 2n\pi,$$

n fiind un număr întreg arbitrar, funcţiunile $\sin x$, $\cos x$ au respectiv aceeaş valoare ca în punctul x_0. Este dar de ajuns a studià variaţiunea acestor funcţiuni într'o singură fâşie.

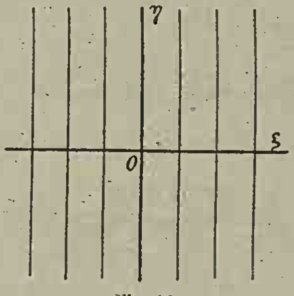

Fig. 12

Să considerăm, de ex., funcţiunea

$$y = \sin x$$

şi să vedem de câte ori această funcţiune primeşte, într'o fâşie, o valoare arbitrară a.

Pentru aceasta, punem

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = a;$$

de unde ecuaţiunea

$$(20) \qquad e^{2ix} - 2aie^{ix} - 1 = 0,$$

care dă pentru e^{ix} două valori finite şi diferite de zero. Insă fâşiile considerate figurează şi periodicitatea funcţiunii e^{ix}, care, după cum am văzut, primeşte în fiecare din ele, o singură dată o valoare diferită de zero. De unde rezultă că într'o fâşie, funcţiunea $\sin x$

trece de două ori prin orice valoare finită[1]) voim. Fie x' şi x'' cele două valori ale lui x, cărora corespunde aceeaş valoare a pentru $\sin x$; vom aveà

$$e^{ix'} \cdot e^{ix''} = -1,$$

sau

$$e^{i(x'+x'')} = -1;$$

de unde

$$x' + x'' = (2k+1)\pi, \tag{21}$$

k fiind un număr întreg. Se vede că punctele x', x'' sunt simetrice în raport cu punctul $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, căci ecuaţiunea (21) este satisfăcută pentru valorile

$$x' = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + x_0, \; x'' = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - x_0,$$

x_0 fiind un punct oarecare. In fâşia $(0, 2\pi)$ de exemplu, punctele $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ sunt centre de simetrie ale funcţiunii $y = \sin x$. De unde rezultă că, dacă prin punctele $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ducem paralele la axa $O\eta$, fâşiile $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ vor da aceleaşi valori; deasemenea vor da aceleaşi valori fâşiile $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Ultima fiind congruentă cu fâşia $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ conchidem că în fâşia determinată de paralelele $\xi = \pm\frac{\pi}{2}$, inclusiv aceste paralele, funcţiunea $y = \sin x$, primeşte orice valoare finită voim: anume, *o singură dată* fiecare din acelea cari corespund punctelor *interioare* fâşiei şi de *două ori* fiecare valoare corespunzătoare punctelor situate pe cele două paralele. Căci punctele $x = \frac{\pi}{2} \pm i\beta$ dau aceeaş valoare reală

$$y = \cos i\beta = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} > 1;$$

deasemenea punctele $x = -\frac{\pi}{2} \pm i\beta$ dau aceeaş valoare reală

$$y = -\cos i\beta < -1.$$

Acestor semidrepte corespund respectiv axa reală η dela 1 la $+\infty$

---

[1]) a nu poate fi infinit, căci altfel ecuaţiunea (20) ar da lui e^{ix} o valoare nulă şi alta infinită, ambele inadmisibile pentru valori finite ale lui x.

şi dela -1 la $-\infty$. Fâşia considerată, din care suprimăm, de exemplu, semidreptele $\pm\frac{\pi}{2}-i\beta$, β variind dela 0 la $+\infty$, constituie un domeniu fundamental al funcţiunii $y=\sin x$. Acest domeniu, din care excludem punctele $x=\pm\frac{\pi}{2}$ şi planul $\eta=\sin x$ se corespund într'un mod conform, căci, în toată întinderea domeniului, derivata funcţiunii $\sin x$ este finită şi diferită de zero.

226. Un studiu analog, aplicat funcţiunii $\cos x$, ne conduce la concluziunile următoare:

In fâşia $(0, 2\pi)$ $\cos x$ primeşte de două ori o valoare arbitrară oarecare; valorile x', x'', nu congruente, cărora corespunde aceeaş valoare a funcţiunii, satisfac relaţiunea

$$x'+x''=2k\pi.$$

In fine, în fâşia mărginită de dreptele $\xi=0$, $\xi=\pi$, inclusiv aceste drepte, $\cos x$ poate primì orice valoare finită voim: *o singură dată* fiecare din acelea cari corespund punctelor *interioare, de două ori* fiecare valoare corespunzătoare punctelor situate pe cele două drepte extreme.

227. Din cele ce preced se conchide că funcţiunile $\sin x$, $\cos x$ sunt simplu periodice şi că perioada lor primitivă este 2π. Căci de o parte, în virtutea relaţiunii $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, rezultă că $\sin x$ şi $\cos x$ au aceleaşi perioade; iar, de altă parte, două puncte situate în fâşia $(0, 2\pi)$, în care $\sin x$ are aceeaş valoare, dau lui $\cos x$ valori egale şi de semne contrarii [1]).

228. *Zerurile funcţiunilor* $\sin x$, $\cos x$. Ecuaţiunile

$$e^{ix}-e^{-ix}=0, \quad e^{ix}+e^{-ix}=0,$$

sau

$$e^{2ix}-1=0, \quad e^{2ix}+1=0,$$

dau respectiv drept zeruri pentru $\sin x$, $\cos x$ punctele

$$x=k\pi, \quad x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

k fiind un întreg oarecare.

229. Să menţionăm funcţiunile

$$\sin hx, \quad \cos hx,$$

[1]) Altfel: O cantitate a perioadă a funcţiunilor $\sin x$, $\cos x$, este perioadă a funcţiunii e^{ix}; de unde rezultă $e^{ia}=1$, deci $a=2k\pi$, a cărei valoare absolută minimă corespunde lui $k=1$.

definite de relaţiunile

$$\text{(22)} \qquad \sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cari se citesc siniperbolic x, cosiperbolic x. Cea dintâiŭ este o funcţiune impară, cea de a doua o funcţiune pară; ele satisfac identitatea

$$\text{(23)} \qquad \cos^2 hx - \sin^2 hx = 1.$$

Derivând formulele (22), obţinem

$$\text{(24)} \qquad \frac{d}{dx}\sin hx = \cos hx, \quad \frac{d}{dx}\cos hx = \sin hx.$$

Funcţiunile $\sin hx$, $\cos hx$ sunt reale pentru valori reale ale lui x; ele cresc necontenit, cea dintâiu dela 0 la ∞, cea de a doua dela 1 la ∞, când x creşte dela 0 la ∞.

Formulele lui Euler, în cari punem $x = iy$, dau

$$\text{(25)} \qquad \sin iy = i \sin hy, \quad \cos iy = \cos hy.$$

De unde rezultă formulele

$$\text{(26)} \qquad \begin{cases} \sin(\xi + i\eta) = \sin\xi \cos h\eta + i \cos\xi \sin h\eta, \\ \cos(\xi + i\eta) = \cos\xi \cos h\eta - i \sin\xi \sin h\eta. \end{cases}$$

Aceste formule dau mijlocul de a calculà funcţiunile $\sin x$, $\cos x$ pentru valori complexe $x = \xi + i\eta$.

Făcând η să tindă către $\pm\infty$ obţinem

$$\text{(27)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\eta = \pm\infty} |\sin(\xi + i\eta)| = \infty, \\ \lim\limits_{\eta = \pm\infty} |\cos(\xi + i\eta)| = \infty. \end{cases}$$

230. *Reprezintarea conformă a funcţiunii* $y = \sin x$ *pe domeniul fundamental limitat de dreptele* $\xi = \mp \frac{\pi}{2}$.

Pentru a ne da seamă de corespondenţa între punctele domeniului fundamental limitat de dreptele $\xi = \mp\frac{\pi}{2}$ din planul (x) şi punctele planului (y), să examinăm ce fel de linii (y) corespund liniilor (x), paralele respectiv cu axele $O\xi$, $O\eta$ (fig. 12).

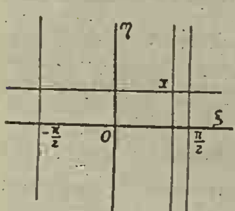

Fig. 13

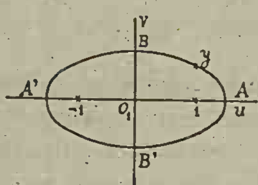

Fig. 14

Să punem

$$x = \xi + i\eta, \quad y = u + iv, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \xi \leqq \frac{\pi'}{2};$$

obţinem

$$u + iv = \sin \xi \cos h\eta + i \cos \xi \sin h\eta.$$

De unde

$$(1) \qquad \begin{cases} u = \sin \xi \cos h\eta, \\ v = \cos \xi \sin h\eta. \end{cases}$$

Privind η constant şi eliminând ξ, obţinem elipsa

$$(2) \qquad \frac{u^2}{\cos^2 h\eta} + \frac{v^2}{\sin^2 h\eta} = 1,$$

ale cărei focare sunt punctele ($u = \pm 1$, $v = 0$).

Dacă facem să crească ξ dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, punctul y descrie, în virtutea ecuaţiunilor (1), necontenit în acelaş sens, semielipsa A'BA sau simetrica ei A'B'A (fig. 13), în raport cu axa reală, după cum $\eta \gtreqless 0$. Dacă $\eta = 0$, y descrie necontenit în acelaş sens segmentul $(-1 + 1)$ cuprins între cele două focare.

Dând lui η toate valorile posibile dela $-\infty$ la $+\infty$, obţinem o succesiune de semielipse, situate în semiplanul negativ şi în semiplanul pozitiv corespunzătoare valorilor $\eta < 0$, cari acopăr tot planul (y).

Să presupunem acum ξ constant şi să eliminăm η între ecuaţiunile (1); obţinem iperbola

$$(3) \qquad \frac{u^2}{\sin^2 \xi} - \frac{v^2}{\cos^2 \xi} = 1,$$

omofocală cu familia de elipse (2). Dacă η creşte dela $-\infty$ la $+\infty$, punctul y descrie, necontenit în acelaş sens, ramura infinită M_1AM, sau ramura simetrică (fig. 14) $M'_1A'M'$, în raport cu axa imaginară, după cum $\xi < 0$. Dacă $\xi = 0$, cele două ramuri se confundă cu axa imaginară şi y descrie această axă necontenit în acelaş sens dela $-\infty$ la $+\infty$. Dacă $\xi = \pm\frac{\pi}{2}$, cele două ramuri se confundă respectiv cu segmentele nelimitate ale axei reale cuprinse între punctele $(1, +\infty)$, $(-1, -\infty)$.

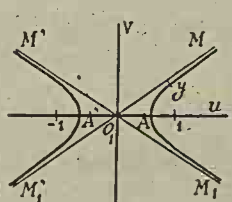

Fig. 15

Să ne închipuim că facem câte o tăietură în planul (y) dealungul acestor segmente nelimitate şi să considerăm fiecare din ele ca având două ţărmuri: ţărmul superior (pozitiv) şi ţărmul inferior (negativ), după cum ţărmul este de partea ordonatelor pozitive sau negative. Dreptele $\xi = \pm\frac{\pi}{2}$ corespund punct cu punct respectiv tăieturilor

$(1, +\infty)$, $(-1, -\infty)$ şi anume, ţărmurilor superioare sau inferioare după cum $\eta < 0$.

Derivata $\frac{dy}{dx}$ fiind diferită de zero în domeniul fundamental considerat, din care excludem punctele $x = \pm \frac{\pi}{2}$, rezultă că acest *domeniu şi planul* (y) *limitat de cele două tăieturi, se corespund într'un mod conform.*

231. Reprezintarea funcţiunii $y = \sin x$ se aplică, vorbă cu vorbă, funcţiunii $y = \cos x$, dacă înlocuim domeniul fundamental considerat prin domeniul mărginit de dreptele $\xi = 0$, $\xi = \pi$, în virtutea relaţiunii

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

232. *Funcţiunea* $\operatorname{tg} x$. Această funcţiune este definită de relaţiunea

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}},$$

care exprimă că $\operatorname{tg} x$ este o funcţiune analitică uniformă, simplu periodică, având perioada π. Zerurile funcţiunilor $\sin x$, $\cos x$ sunt respectiv zeruri şi poluri de ordinul întâiu ale funcţiunii $\operatorname{tg} x$. Această funcţiune nu admite la distanţă finită alte singularităţi decât polurile menţionate.

Punctul $x = \infty$ este un punct singular esenţial în domeniul căruia $\operatorname{tg} x$ are o infinitate de zeruri şi de poluri. Acest fapt se pune în evidenţă dacă facem substituţiunea $x = \frac{1}{x'}$ şi observăm că zerurile funcţiunilor $\sin \frac{1}{x'}$ şi $\cos \frac{1}{x'}$ sunt date de expresiunile

$$x' = \frac{1}{n\pi}, \quad x' = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}.$$

Aceste puncte formează o grămadă infinită având ca punct limită punctul $x' = 0$.

Aplicând regula derivării unui cât de două funcţiuni analitice, obţinem

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Periodicitatea funcţiunii $\operatorname{tg} x$ se poate figură prin fâşii limitate de axa imaginară şi de paralele la această axă, duse prin punctele $x = n\pi$, n fiind un număr întreg care primeşte toate valorile dela

$-\infty$ la $+\infty$. In fâşia $(0, \pi)$, precum şi în oricare alta congruentă cu aceasta, funcţiunea $\operatorname{tg} x$ poate primì o singură dată orice valoare voim, diferită de $\pm i$. In adevăr, punând

$$\operatorname{tg} x = \frac{e^{2ix}-1}{i(e^{2ix}+1)} = a,$$

avem

$$e^{2ix} = \frac{1+ia}{1-ia}.$$

Insă fâşia considerată este un domeniu fundamental al funcţiunii e^{2ix}; prin urmare, în această fâşie, egalitatea precedentă este posibilă într'un singur punct x, oricare ar fi valoarea lui a diferită de $\pm i$, pentru care membrul al doilea devine respectiv nul sau infinit.

Valorile $\pm i$ sunt valori limite către cari tinde $\operatorname{tg} x$ când x tinde către infinit fără a ieşì din fâşie. Căci avem egalitatea

$$\operatorname{tg}(\xi + i\eta) = i\,\frac{1 - e^{-2\eta}\,e^{2i\xi}}{1 + e^{-2\eta}\,e^{2i\xi}};$$

de unde rezultă

$$\lim_{\eta = \pm\infty} \operatorname{tg}(\xi + i\eta) = \pm i.$$

233. *Reprezintarea conformă a funcţiunii* $y = \operatorname{tg} x$ *pe domeniul fundamental limitat de dreptele* $\xi = \pm\frac{\pi}{2}$ [1].

Să examinăm mai întâiu reprezintările particulare următoare:

1^0. $x = \xi$. Făcând să crească ξ dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, y creşte necontenit dela $-\infty$ la $+\infty$.

2^0. $x = i\eta$; avem

$$y = i\,\frac{\sin h\eta}{\cos h\eta}.$$

Făcând η să crească dela $-\infty$ la $+\infty$, punctul y se mişcă pe axa imaginară, necontenit în acelaş sens, dela punctul $-i$ la punctul $+i$.

3^0. $x = \frac{\pi}{2} + i\eta$; avem

$$y = i\,\frac{\cos h\eta}{\sin h\eta}$$

[1]) In virtutea periodicităţii funcţiunii tgx, fâşia limitată de dreptele $\xi = \pm\frac{\pi}{2}$ este un domeniu fundamental ca şi fâşia limitată de dreptele $\xi = 0$, $\xi = \pi$.

şi tabloul de variaţiune

$$\begin{array}{c|l} \eta & -\infty - - \quad 0 + \quad + \quad +\infty, \\ \dfrac{y}{i} & -1 \text{ descr } \mp\infty \text{ descr } +1, \end{array}$$

adică, pe când x descrie semidreptele

$$\left[\xi = \frac{\pi}{2}, \eta \begin{pmatrix} -\infty \ldots 0 \\ +\infty \ldots 0 \end{pmatrix}\right],$$

y se mişcă pe axa imaginară respectiv dela $-i$ la $-i\infty$, sau dela i la $+i\infty$.

Să examinăm acum cazul când x descrie o paralelă oarecare la una din axele de coordonate 0ξ, 0η, $-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}$.

Egalitatea

$$y = u + iv = i\frac{1-e^{2ix}}{1+e^{2ix}}$$

dă

$$u = \frac{2\lambda \sin 2\xi}{1+2\lambda\cos 2\xi + \lambda^2}, \quad v = \frac{1-\lambda^2}{1+2\lambda\cos 2\xi+\lambda^2} \quad \left(\lambda = e^{-2\eta}\right).$$

1⁰. Presupunând η constant şi făcând să crească ξ dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, punctul y descrie necontenit în acelaş sens un cerc complect, a cărui ecuaţiune este

$$(1-\lambda^2)(u^2+v+1) - 2(1+\lambda^2)v^2 = 0.$$

Acest cerc este situat deasupra sau dedesubtul axei reale după cum $\lambda \gtrless 1$, adică după cum $\eta \gtrless 0$. La valori η egale şi de semne contrarii, corespund două cercuri simetrice în raport cu axa reală, având raza

$$r = \frac{2\lambda}{|1-\lambda^2|}.$$

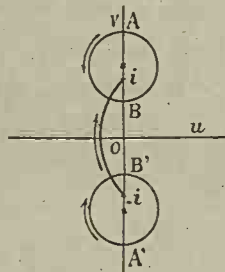

Fig. 16.

Aceste cercuri conţin în interiorul lor respectiv punctele $+i$, $-i$ şi sunt descrise, ξ crescând dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, cel de deasupra în sensul pozitiv, cel dedesubt în sensul negativ (v. fig.).

2⁰. Să presupunem ξ constant şi să facem să crească η dela $-\infty$ la $+\infty$, punctul y va descrie un arc de cerc[1]) dela punctul $-i$

[1]) Ecuaţiunea acestui cerc este

$$u^2 + v^2 + 2u \cot 2\xi = 1.$$

la punctul $+i$, situat la stânga sau la dreapta axei imaginare, după cum avem $-\frac{\pi}{2} < \xi < 0$ sau $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$. La valori ξ egale şi de semne contrarii corespund arce simetrice în raport cu axa imaginară, având drept rază

$$r = \frac{1}{|\sin 2\xi|}.$$

234. *Funcţiunile* $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, sunt definite de expresiunile

$$(1) \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Să considerăm în special funcţiunea $\cot x$, care are aceeaş perioadă ca $\operatorname{tg} x$ şi a cărei reprezintare conformă rezultă imediat din relaţiunea

$$(2) \qquad \cot x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Polurile funcţiunii $\cot x$ sunt zerurile lui $\sin x$. In domeniul $x = 0$, avem

$$(3) \qquad \cot x = \frac{1}{x} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \dots,$$

adică o desvoltare de forma

$$(4) \qquad \cot x = \frac{1}{x} + P(x),$$

$P(x)$ fiind o serie întreagă, convergentă în cercul $|x| = \pi$.

In domeniul unui pol $x = n\pi$, avem, punând $x = n\pi + x'$,

$$\cot x = \cot x' = \frac{1}{x'} + P(x')$$

sau

$$(5) \qquad \cot x = \frac{1}{x - n\pi} + P(x - n\pi).$$

Fie a o constantă oarecare, funcţiunea $\cot(x-a)$ admite punctul a ca pol de ordinul întâiu, în domeniul căruia avem desvoltarea

$$(6) \qquad \cot(x-a) = \frac{1}{x-a} + P(x-a).$$

Punând $x = \xi + i\eta$, avem

$$(7) \qquad \lim_{\eta=\pm\infty} \cot(\xi + i\eta) = \frac{1}{\lim_{\eta=\pm\infty} \operatorname{tg}(\xi + i\eta)} = \mp i.$$

235. *Aplicațiune.* Să considerăm o funcțiune rațională de sin x, cos x

$$(1) \qquad f(\sin x, \cos x) = \frac{F_1(\sin x, \cos x)}{F(\sin x, \cos x)},$$

F și F_1 fiind polinoame de sin x, cos x. Dacă gradul numărătorului în raport cu (sin x, cos x) întrece gradul numitorului, putem aduce funcțiunea dată la forma

$$(2) \quad f(\sin x, \cos x) = P(\sin x, \cos x) + \frac{\varphi(\sin x, \cos x)}{\psi(\sin x, \cos x)},$$

în care P, φ și ψ sunt polinoame de (sin x, cos x), gradul numărătorului φ fiind cel mult egal cu al numitorului ψ. In adevăr, ordonând polinoamele F_1 și F după puterile lui cos x, de exemplu, și înlocuind $\cos^2 x$ prin $1-\sin^2 x$, vom puteà scrie

$$(3) \quad f(\sin x \cos x) = \frac{\varphi_1(\sin x) + \cos x\, \varphi_1(\sin x)}{\psi_1(\sin x) + \cos x\, \psi_2(\sin x)},$$

φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 fiind polinoame de sin x.

Multiplicând ambii termeni ai fracțiunii cu

$$\psi_1(\sin x) - \cos x \psi_2(\sin x)$$

și înlocuind $\cos^2 x$ prin $1-\sin^2 x$, funcțiunea dată va luà forma

$$(4) \qquad f(\sin x, \cos x) = \frac{\Phi_1(\sin x) + \cos x\, \Phi_2(\sin x)}{\Phi(\sin x)},$$

Φ, Φ_1, Φ_2 fiind polinoame de sin x. Efectuând diviziunile $\frac{\Phi_1}{\Phi}$, $\frac{\Phi_2}{\Phi}$, obținem expresiuni de forma

$$\frac{\Phi_1(\sin x)}{\Phi(\sin x)} = P_1(\sin x) + \frac{R_1(\sin x)}{\Phi(\sin x)},$$

$$\frac{\Phi_2(\sin x)}{\Phi(\sin x)} = P_2(\sin x) + \frac{R_2(\sin x)}{\Phi(\sin x)};$$

prin urmare

$$f(\sin x, \cos x) = P_1(\sin x) + \cos x\, P_2(\sin x)$$
$$+ \frac{R_1(\sin x) + \cos x\, R_2(\sin x)}{\Phi(\sin x)},$$

P_1, P_2, R_1, R_2 fiind polinoame de sin x și gradele celor două din urmă fiind mai mici decât gradul numitorului Φ. Ceeace justifică aserțiunea (2).

Vom presupune, în cel ce urmează, că gradul numărătorului $F_1(\sin x, \cos x)$ este cel mult egal cu gradul numitorului $F(\sin x, \cos x)$.

In acest caz, punând $x = \xi + i\eta$ şi ţinând seamă de egalitatea

$$\lim_{\eta=\pm\infty} \left| \frac{\sin(\xi+i\eta)}{\cos(\xi+i\eta)} \right| = 1,$$

vedem că funcţiunea $f(\sin x, \cos x)$ tinde către o valoare finită când η tinde către $\pm\infty$, oricare ar fi valoarea lui ξ. Această funcţiune n'are dar, într'una oarecare din fâşiile mărginite de dreptele paralele $\xi = 2k\pi$, $\xi = 2(k+1)\pi$, alte singularităţi decât poluri în număr limitat.

Să considerăm fâşia $(0, 2\pi)$ şi fie a unul din polurile funcţiunii şi $\alpha+1$ ordinul său de multiplicitate. Vom avea, în domeniul acestui pol, o expresiune de forma

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{A}{x-a} + A_1 D \frac{1}{x-a} + \dots$$

$$\dots + A_\alpha D^{(\alpha)} \frac{1}{x-a} + P(x-a),$$

$D^{(k)}$ fiind simbolul derivatei de ordinul k şi $P(x-a)$ o serie întreagă.

De altă parte, avem [(6) § 234],

$$\cot \frac{x-a}{2} = \frac{2}{x-a} + P_1(x-a);$$

de unde, prin derivări succesive,

$$D \cot \frac{x-a}{2} = 2D \frac{1}{x-a} + P'_1(x-a),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$D^{(\alpha)} \cot \frac{x-a}{2} = 2D^{(\alpha)} \frac{1}{x-a} + P_1^{(\alpha)}(x-a).$$

Din aceste desvoltări rezultă că diferenţa

$$f(\sin x, \cos x) - \frac{1}{2}\Big[A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 D \cot \frac{x-a}{2}$$

$$+ \dots + A_\alpha D^{(\alpha)} \cot \frac{x-a}{2}\Big]$$

este o funcţiune olomorfă de x în domeniul punctului $x = a$.

Consideraţiuni analoage se aplică celorlalte poluri.

Prin urmare diferenţa

$$f(\sin x, \cos x) - \frac{1}{2}\Sigma\Big[A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 D \cot \frac{x-a}{2}$$

$$+ \dots + A_\alpha D^{(\alpha)} \cot \frac{x-a}{2}\Big],$$

în care simbolul Σ se referă la toate polurile situate în fâşia considerată, este olomorfă în această fâșie, rămânând finită când x tinde către infinit fără a ieși din fâșie. Insă toți termenii acestei expresiuni se reproduc când înlocuim x prin $x+2\pi$; prin urmare, această expresiune este olomorfă în toate fâșiile, adică ea este olomorfă în tot planul inclusiv punctul $x=\infty$. Expresiunea se reduce deci la o constantă, de unde rezultă expresiunea

$$f(\sin x, \cos x) = C + \frac{1}{2}\Sigma\left[A \cot\frac{x-a}{2}\right.$$

$$\left. + A_1 D \cot\frac{x-a}{2} + \ldots + A_\alpha D^{(\alpha)} \cot\frac{x-a}{2}\right].$$

Această formulă este datorită lui *Hermite*.

Determinarea constantei C. Reprezintând prin C_1 și C_2 valorile către care tinde funcțiunea $f(\sin x, \cos x)$ când punând $x=\xi+i\eta$, facem respectiv $\eta=\pm\infty$ și ținând seamă de formula (7) (234) și de faptul că derivatele $D^{(k)}\cot\frac{x-a}{2}$ tind către zero în acelaș timp, obținem

$$C_1 = C - \frac{i}{2}\Sigma A, \quad C_2 = C + \frac{i}{2}\Sigma A,$$

de unde

$$C = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

Observare. Calculul coeficienților A_1, A_2, ... se poate face în modul următor: punem $x-a=t$ și desvoltăm funcțiunile $\sin(a+t)$, $\cos(a+t)$ după puterile lui t; funcțiunea $\frac{F_1(\sin x, \cos x)}{F(\sin x, \cos x)}$ ia forma

$$\frac{1}{t^{\alpha+1}}\frac{a_0 + a_1 t + \ldots}{b_0 + b_1 t + \ldots}, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0,$$

Divizând seria dela numărător prin seria dela numitor, ne oprim la termenul t^α. Fie

$$C_0 + C_1 t + \ldots + C_\alpha t^\alpha$$

câtul astfel obținut; vom avea

$$A = C_\alpha,$$
$$A_1 = -C_{\alpha-1},$$
$$A_2 = \frac{C_{\alpha-2}}{2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_\alpha = \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}C_0.$$

CAPITOLUL XI.

FUNCŢIUNI ALGEBRICE DEFINITE DE ECUAŢIUNI BINOAME. SUPRAFEŢELE LUI RIEMANN.

I. — FUNCŢIUNI ALGEBRICE DEFINITE DE ECUAŢIUNI BINOAME.

236. Să considerăm egalitatea

$$(1) \qquad y^p = x,$$

în care p este un număr întreg şi pozitiv. La orice valoare $x \neq 0$, corespund lui y p valori distincte. In adevăr, punând

$$x = re^{i\theta}, \quad y = \varrho e^{i\varphi},$$

egalitatea (1) se poate scrie

$$\varrho^p e^{ip\varphi} = re^{i(\theta+2k\pi)},$$

k fiind un număr întreg arbitrar. Această egalitate ne dă

$$\varrho^p = r, \quad p\varphi = \theta + 2k\pi;$$

de unde

$$\varrho = r^{\frac{1}{p}}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{p},$$

$r^{\frac{1}{p}}$ având semnificarea aritmetică. Pentru a obţine toate valorile de cari y este susceptibil, este deajuns a da lui k p valori întregi consecutive, de exemplu, 0, 1, 2, ... $p-1$. Expresiunea generală a rădăcinilor ecuaţiunii va fi aşa dar

$$(2) \qquad y_k = r^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{p}} \quad (k = 0, 1, 3, \ldots p-1),$$

Le vom reprezintà în totalitatea lor prin $\sqrt[p]{x}$ sau $x^{\frac{1}{p}}$; ele se anulează împreună cu x.

Făcând să varieze x, fiecare rădăcină (2) variază evident într'un mod continuu. Voim să arătăm că fiecare din ele este o funcţiune analitică de x, olomorfă în orice regiune care nu conţine punctul $x = 0$.

Fie x_0 o valoare oarecare a lui x, diferită de zero şi y_k una din cele p rădăcini corespunzătoare. Se recunoaşte imediat că egalitatea (1) poate fi satisfăcută printr'o serie întreagă de $x - x_0$:

$$(3) \qquad y = y_k + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots;$$

căci scriind-o sub forma

$$y^p = x_0 + x - x_0$$

și substituind în locul lui y seria precedentă obținem, prin identificarea ambelor membre, valori finite și bine determinate pentru coeficienții a_n. Rămâne să probăm că seria așà determinată este convergentă în domeniul lui x_0.

Să derivăm ecuațiunea (1); obținem

$$py^{p-1}\frac{dy}{dx} = 1,$$

sau, în virtutea aceleiaș ecuațiuni,

$$(4) \qquad px\frac{dy}{dx} = 1.$$

Să înlocuim y prin seria (3) și să identificăm ambele membre; obținem relațiunea

$$npx_0 a_n = (1 + p - np)a_{n-1}.$$

De unde deducem, punând pentru prescurtare $\frac{1}{p} = m$,

$$a_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\cdot\frac{y_k}{x_0^n}.$$

Prin urmare seria (3) ia forma

$$(5) \qquad y - y_k = y_k \sum_1^\infty \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n,$$

serie evident convergentă în domeniul lui x_0, având $|x_0|$ ca rază a cercului său de convergență.

237. Fiecare element (5) ($k = 0, 1, \ldots p$) dă naștere unei funcțiuni analitice olomorfă în orice regiune care nu conține punctul $x = 0$ și care, în virtutea teoremei asupra permanenții relațiunilor analitice, satisface ecuațiunea (2) în toată regiunea sa de existență. Această regiune consistă, precum se va vedeà mai jos, în toată întinderea planului. Aceste funcțiuni însă nu sunt fără legătură între dânsele. In adevăr, expresiunea (2) arată că dacă mărim argumentul θ cu 2π, adică dacă x se învârtește odată în sensul pozitiv în jurul punctului $x = 0$, rădăcina y_0 se schimbă în y_1, aceasta se schimbă în $y_2 \ldots$ și cea din urmă y_{p-1} se schimbă în y_0. Cele p rădăcini formează așa dar un *sistem circular*. Deaci rezultă că cele p elemente cuprinse în ecuațiunea (5) dau naștere unei aceleași funcțiuni analitice *monogene, multiforme* cu p ramuri. Pentru toate aceste ramuri, punctul $x = 0$ este un punct singular. In adevăr,

în domeniul acestui punct, nici o ramură nu se poate reprezintà printr'o serie întreagă $P(x)$, căci altmintrelea ea s'ar reproduce când x ar descrie o curbă închisă în jurul lui $x = 0$. Acest punct este unicul punct singular al funcţiunii y, situat la distanţă finită; căci punctul x_0 considerat mai sus, nu a fost supus la altă condiţiune decât de a fi diferit de zero. De unde rezultă că regiunea de existenţă a funcţiunii y este tot planul variabilei x.

Punctul singular $x = 0$ caracterizat prin aceea că ramurile funcţiunii se permută în jurul lui, a primit numele de *punct de ramificaţiune* sau *punct critic*.

Punctul ∞. In punctul $x = \infty$, cele p ramuri devin infinite şi se permută în jurul acestui punct; ceeace se recunoaşte imediat, făcând substituţiunile $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{1}{y'}$.

Funcţiunea y definită de ecuaţiunea (1) se numeşte funcţiune *algebrică* de x; ea este cea mai simplă din clasa acestor funcţiuni [1]).

238. Ecuaţiunea

$$y^p = x^q,$$

în care p şi q sunt numere întregi pozitive, prime între ele, conduc la rezultate identice cu cele de mai sus. Să notăm expresiunea rădăcinilor corespunzătoare unei valori $x = re^{i\theta}$, diferită de zero

$$y = r^{\frac{q}{p}} e^{i\frac{q}{p}(\theta+2k\pi)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots p-1).$$

Punând $\frac{q}{p} = m$, elementele celor p ramuri corespunzătoare unui punct x_0 diferit de 0, vor fi cuprinse în formula (5).

239. Să considerăm ecuaţiunea

$$y^p = (1 + x)^q;$$

p şi q fiind, ca mai sus, numere întregi, pozitive şi prime între ele. Punctul de ramificaţiune a celor p ramuri este $x = -1$ şi elementele corespunzătoare lui $x = 0$ sunt date de

$$y - y_k = y_k \sum_1^\infty \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad m = \frac{q}{p}.$$

Ecuaţiunea $y^p = A(x+a)^q$ se reduce la tipul precedent, scriind-o sub forma

$$y^p = Aa^q\left(1 + \frac{x}{a}\right)^q.$$

---

[1]) Este vorba de funcţiunile algebrice neraţionale.

240. *Observare.* Fie

$$u = re^{i\theta}, \quad v = \varrho e^{i\varphi},$$

două cantități variabile oarecari și

$$u^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{m}}, \quad v^{\frac{1}{m}} = \varrho^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\varphi+2k'\pi}{m}}$$

două determinațiuni, luate după voie, ale rădăcinilor $\sqrt[m]{u}$, $\sqrt[m]{v}$; de unde

$$u^{\frac{1}{m}} \cdot v^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} \varrho^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\theta+\varphi+2(k+k')\pi}{m}}.$$

De asemenea o determinațiune oarecare a radicalului $\sqrt[m]{uv}$ este dată de expresiunea

$$(uv)^{\frac{1}{m}} = (r\varrho)^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\theta+\varphi+2k''\pi}{m}};$$

prin urmare, luând $k'' = k + k'$, adică alegând această determinațiune într'un mod convenabil, putem scrie

$$\sqrt[m]{u.v} = \sqrt[m]{u} \cdot \sqrt[m]{v}.$$

De asemenea, fiind date determinațiunile $\sqrt[m]{u}$, $\sqrt[m]{v}$, există o determinațiune $\sqrt[m]{\frac{u}{v}}$, astfel încât să avem egalitatea

$$\sqrt[m]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[m]{u}}{\sqrt[m]{v}}.$$

241. Să considerăm ecuațiunea

(1) $$y^m = R(x),$$

în care m este un număr întreg pozitiv și $R(x)$ o funcțiune rațională. Presupunem ecuațiunea ireductibilă, adică $R(x)$ nu este un produs de factori raționali.

Fie x_0 un punct diferit de un zero și de un pol al lui $R(x)$. In domeniul acestui punct, putem scrie

(2) $$y^m = R(x_0)\left[1 + (x - x_0) P(x - x_0)\right].$$

Să punem

(3) $$u = (x - x_0) P(x - x_0);$$

ecuațiunea transformată

$$y^m = R(x_0)(1 + u)$$

va da, în domeniul lui $u = 0$, m soluţiuni cuprinse în expresiunea

$$\frac{y}{\sqrt[m]{R(x_0)}} = (1+u)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}u + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)u^2}{1.2} + \dots,$$

în care se dă radicalului $\sqrt[m]{R(x_0)}$ cele m valori ale sale. Inlocuind u prin valoarea sa (3), membrul al doilea devine o serie întreagă de $(x-x_0)$, $P(x-x_0)$. In domeniul punctului $x = x_0$, avem aşa dar

(4) $$y = P(x-x_0)\sqrt[m]{R(x_0)}, \quad [P(x-x_0)]_{x=x_0} = 1.$$

Cele m valori y cari satisfac ecuaţiunea (1) sunt aşa dar funcţiuni olomorfe de x în domeniul oricărui punct diferit de un zero sau pol al lui $R(x)$.

Să examinăm cum se comportă aceste valori în domeniul unui zero sau unui pol al lui $R(x)$.

Fie $x = a$ un zero de ordinul n al funcţiunii $R(x)$. In domeniul acestui punct avem

(5) $$y^m = (x-a)^n P(x-a), \quad [P(x-a)]_{x=a} \neq 0.$$

Fie p c. m. m. c. d. al exponenţilor m şi n:

(6) $$m = p\mu, \quad n = p\nu.$$

Să punem

(7) $$y^\mu = z;$$

ecuaţiunea (5) devine

(8) $$z^p = (x-a)^{p\nu} P(x-a).$$

Valorile radicalului $\sqrt[p]{P(x-a)}$ sunt olomorfe în domeniul lui $x = a$; reprezintând prin $P_1(x-a)$ una din ele, ecuaţiunea precedentă defineşte, în acelaş domeniu, p ramuri olomorfe z pe cari le putem reprezintă prin ecuaţiunea

(9) $$z_k = (x-a)^\nu P_1(x-a)\, e^{\frac{2ki\pi}{p}} \quad (k = 0, 1, \dots p-1).$$

Fiecăreia din aceste ramuri corespund, în virtutea ecuaţiunii (7), μ ramuri y, cuprinse în expresiunea

(10) $$y_k = (x-a)^{\frac{\nu}{\mu}} P_2(x-a)\, e^{\frac{2ki\pi}{m}} \quad (k = 0, 1, \dots p-1),$$

$P_2(x-a)$ fiind una din valorile radicalului $\sqrt[\mu]{P_1(x-a)}$ şi $(x-a)^{\frac{\nu}{\mu}}$ primind cele μ valori diferite ale sale pentru $x \neq a$.

Aceste ramuri formează aşadar un sistem circular relativ la punctul $x=a$, adică, dacă x se învârteşte în sensul pozitiv în jurul punctului a, ramurile y_k dispuse în ordinea argumentelor lor crescânde — cari formează o progresiune aritmetică cu raţiunea $\frac{2\nu\pi}{\mu}$ — se permută între ele în aceeaş ordine, cea din urmă schimbându-se în cea dintâi. După μ învârtituri în acelaş sens, fiecare ramură se reproduce.

Cele m ramuri y definite de ecuaţiunea (1) se grupează dar, în domeniul punctului $x=a$, în p sisteme circulare, compuse fiecare din μ ramuri. Se zice că punctul $x=a$ este un punct critic sau de ramificaţiune de ordinul $\mu-1$ pentru fiecare sistem circular. Dacă $\mu=1$, punctul a încetează de a fi punct critic, toate ramurile fiind olomorfe în domeniul acestui punct.

Dacă $x=a$ este un pol de ordinul n al funcţiunii $R(x)$, avem, în domeniul acestui punct,

$$(11) \qquad y^m = (x-a)^{-n}\, P(x-a) \quad [P(x-a)]_{x=a} \neq 0.$$

Presupunând că numerele m şi n satisfac ecuaţiunile (6) şi punând

$$(12) \qquad y^\mu = \frac{1}{z},$$

obţinem, raţionând ca mai sus, pentru cele m ramuri y, expresiunile

$$(13) \qquad y_k = (x-a)^{-\frac{\nu}{\mu}}\, P_2(x-a)\, e^{\frac{2ki\pi}{m}} \quad (k=0,1,\dots p-1).$$

Toate ramurile devin infinite în punctul $x=a$ şi se grupează în domeniul acestui punct, în p sisteme circulare, compuse fiecare din μ ramuri. Dacă $\mu=1$, toate ramurile y sunt funcţiuni uniforme în domeniul punctului a.

Punctul ∞. Făcând $x=\frac{1}{x'}$, $R(x)$ se schimbă într'o funcţiune raţională $R_1(x')$ şi ecuaţiunea (1) devine

$$(14) \qquad y^m = R_1(x').$$

Problema revine la studiul ramurilor y în domeniul punctului $x'=0$. Vom zice că *punctul $x=\infty$ este sau nu punct critic al ramurilor y definite de ecuaţiunea* (1), *după cum punctul $x'=0$ este sau nu punct critic al ramurilor y satisfăcând ecuaţiunea* (14). Dacă ramurile y ale ecuaţiunii (14) se grupează, în domeniul punctului $x'=0$, în sisteme circulare de un ordin oarecare, vom zice că ramurile corespunzătoare (1) se grupează în domeniul punctului ∞, în sisteme circulare de acelaş ordin.

242. *Drumuri echivalente; contururi elementare.* Fie x_0 un punct ordinar oarecare; dela acest punct privit ca origină să descriem o curbă închisă fără puncte duble, care să nu treacă prin nici un punct critic şi care să conţie în interior k puncte critice (pe figură $k = 2$). Dela aceeaş origină să descriem k curbe analoage, interioare celei dintâiu, cari să n'aibă cu aceasta şi nici între ele alt punct comun decât origina şi astfel ca fiecare din ele să conţie în interior un singur punct critic. Voim să arătăm ca drumul exterior $x_0\text{AB}x_0$, descris în sensul pozitiv şi drumurile interioare $x_0a \ldots x_0$, $x_0b \ldots x_0$ descrise succesiv în acelaş sens, sunt *echivalente*, adică plecând cu aceeaş rădăcină y ca valoare iniţială, obţinem în ambele cazuri aceeaş valoare finală. Pentru aceasta, să unim câte un punct al fiecărei curbe interioare cu câte un punct al curbei exterioare prin linii cari să nu se taie între ele. Fie liniile aA, bB, astfel introduse. Reprezentând prin (AB) variaţiunea funcţiunii considerate, când variabila x descrie drumul care duce dela punctul A la punctul B, vom avea egalităţile

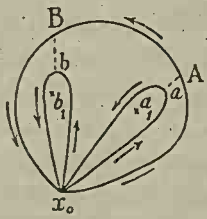

Fig. 17

$$(x_0\text{A}) = (x_0a) + (a\text{A}),$$
$$(\text{AB}) = (\text{A}a) + (ax_0) + (x_0b) + (b\text{B}),$$
$$(\text{B}x_0) = (\text{B}b) + (bx_0).$$

Adunând aceste egalităţi şi observând că liniile auxiliare aA, bB sunt descrise fiecare succesiv, în două sensuri opuse, prin urmare variaţiunea totală după fiecare din ele este nulă, obţinem egalitatea

$$(x_0\text{AB} \ldots x_0) = (x_0ax_0) + (x_0bx_0) + \ldots$$

q. e. d.

Curba închisă (x_0ax_0) relativ la un punct critic interior se înlocueşte de obiceiu printr'un drum format dintr'un cerc foarte mic descris în jurul acestui punct ca centru şi din o linie dreaptă care uneşte punctul x_0 cu un punct a al acestui cerc. Un asemenea drum se numeşte *contur elementar.* Linia x_0a (dreaptă sau curbă) se consideră ca având două ţărmuri, provenite din două linii cari s'au apropiat infinit de mult una de alta.

Fig. 18

243. *Tăieturi (coupures).* — Printr'un artificiu simplu se poate face ca ramurile unei funcţiuni algebrice să fie funcţiuni uniforme în tot planul variabilei, *limitat într'un mod convenabil.*

Exemple. — 1°. Fie ecuațiunea

$$y^n = x.$$

Să ne închipuim o secțiune făcută în plan dealungul unei semidrepte dusă într'o direcțiune oarecare dela $x = 0$ la $x = \infty$ și să privim această secțiune ca o limită a planului pe care variabila să nu o străbată. In planul așà limitat, variabila x nu descrie nici odată o curbă închisă în jurul punctului critic $x = 0$; prin urmare în acest plan ramurile funcțiunii sunt olomorfe. Insă, în două puncte x', x'' infinit vecine situate de o parte și de alta a secțiunii, valorile unei ramuri nu sunt infinit vecine, așà că prin artificiul introdus se rupe continuitatea ramurilor.

In adevăr, pentru a trece dela punctul x' la punctul x'', trebuie să înconjurăm punctul $x = o$; dacă presupunem punctele x', x'' infinit apropiate, valoarea unei ramure în punctul x'' va fi egală cu valoarea ei în punctul x' multiplicată cu $e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

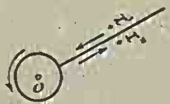

Fig. 19

2°. Fie $$y^p = (x-a_1) \ldots (x-a_n).$$

Realizăm uniformitatea ramurilor, dacă dela fiecare punct de ramificațiune ducem semidrepte cari să nu se întâlnească și facem secțiuni în plan dealungul acestor drepte.

244. Modul precedent de a limita planul, cu scopul de a face ramurile uniforme, nu este unic. Fie, pentru a fixa ideile, ecuațiunea

$$y^2 = (x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_n).$$

Dacă n este un număr par, $n = 2m$, unind punctele de ramificațiune două câte două, de exemplu a_1 cu a_2, a_3 cu a_4, ..., a_{2m-1} cu a_{2m}, prin linii cari să nu se taie între ele și făcând secțiuni dealungul acestor linii, obținem un plan limitat care satisface condițiunile cerute. Căci variabila în mișcarea sa în plan nu poate înconjurà un punct critic, fără a înconjurà un număr par deasemenea puncte; ceeace face ca fiecare ramură să reia aceiași valoare în acelaș punct.

Dacă $n = 2m + 1$, operăm ca mai sus și introducem o nouă secțiune dela punctul a_{2m+1} la infinit. Secțiunile nu sunt supuse la altă condițiune decât de a nu se întâlnì, forma lor putând fi oricum.

245. Să studiem variațiunea funcțiunii

(1) $$y = \sqrt{1-x^2}$$

pentru valori reale ale lui x.

Avem punctele critice $x = \pm 1$, în jurul cărora cele două ramuri ale funcţiunii se permută. Să facem două tăieturi dealungul axei reale respectiv dela $+1$ la $+\infty$ şi dela -1 la $-\infty$. In planul limitat de aceste tăieturi y este funcţiune uniformă. Să considerăm ramura care se reduce la $+1$ pentru $x = 0$. Când x variază dela 0 la 1, y este real pozitiv şi variază dela 1 la 0. Putem scrie

$$y = \sqrt{1+x}.\ \sqrt{1-x},$$

adoptând pentru ambele radicale valoarea $+1$ pentru $x = 0$. Să evităm punctul $x = +1$ (fig. 1) printr'un semicerc

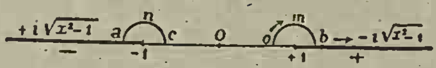

Fig. 20

omb, descris din acest punct ca centru cu o rază ϱ foarte mică şi situat deasupra axei reale. Pentru aceasta, punem

$$x - 1 = \varrho e^{it}, \tag{2}$$

făcând t să varieze dela π la 0. De unde, dealungul acestui semicerc,

$$\sqrt{1-x} = -i\varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{t}{2}}. \tag{3}$$

Semnul — din membrul al doilea rezultă din faptul că în punctul $a(t = \pi)$, $\sqrt{1-x}$ este real şi pozitiv. In punctul $b(t = 0)$, avem $x - 1 = \varrho$ şi (3) devine

$$\sqrt{1-x} = -i\varrho^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{x-1}\ ^{1)}; \tag{4}$$

prin urmare, în acest punct, avem

$$\sqrt{1-x^2} = -i\ \sqrt{x^2-1}, \tag{5}$$

radicalul din membrul al doilea fiind real şi pozitiv pentru x real şi mai mare ca 1.

Dând lui x valori reale negative, ramura considerată este reală şi pozitivă în intervalul $(0, -1)$. Pentru a evità punctul

---

[1]) Iată cum se mai poate obţine acest rezultat. Punând $z = 1 - x$, cercul $|x - 1| = \varrho$, se transformă în cercul $|z| = \varrho$. Construind punctele z cari corespund punctelor x ale semicercului *omb*, vedem că acest semicerc se transformă într'un semicerc (z) mărginit de axa reală şi situat dedesubtul acestei axe, adică argumentul z variază dela 0 la $-\pi$, prin urmare arg $\sqrt{1-x}$ variază dela 0 la $-\frac{\pi}{2}$. Aşa dar pentru x real şi > 1 avem

$$\sqrt{1-x} = \left|\sqrt{1-x}\right| e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i\ \sqrt{x-1}.$$

$x = -1$ printr'un semicerc *and*, descris din acest punct ca centru cu raza ϱ şi situat deasupra axei reale, punem

$$x + 1 = \varrho e^{it}, \tag{6}$$

t variind dela 0 la π. De unde

$$\sqrt{1+x} = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{t}{2}}; \tag{7}$$

căci în punctul $c(t = 0)$, $\sqrt{1+x}$ este real şi pozitiv. In punctul $d(t = \pi)$, egalitatea (6) dă $x + 1 = -\varrho$ şi egalitatea (7) devine

$$\sqrt{1+x} = i\varrho^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{-(x+1)}; \tag{8}$$

prin urmare, în acest punct, avem

$$\sqrt{1-x^2} = i\sqrt{x^2-1},$$

radicalul din urmă fiind real şi pozitiv pentru x real şi mai mic ca -1.

Observare. Dacă am fi evitat punctele critice prin semicercuri situate dedesubtul axei reale, radicalele din membrul al doilea ale formulelor precedente ar fi avut semne contrarii.

246. Să mai considerăm funcţiunea

$$y = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \tag{10}$$

pentru valori reale ale lui x, k fiind real şi cuprins între 0 şi 1.

Avem patru puncte critice: $x = \pm 1$, $x = \pm\frac{1}{k}$. Funcţiunea y devine o funcţiune uniformă dacă limităm planul prin două tăieturi făcute respectiv între punctele $+1, +\frac{1}{k}$ şi $-1, -\frac{1}{k}$.

Să considerăm ramura egală cu $+1$ pentru $x = o$; această ramură este reală şi pozitivă în intervalul $(-1, +1)$. Putem scrie

$$y = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2},$$

ambele radicale fiind egale cu 1 la origină.

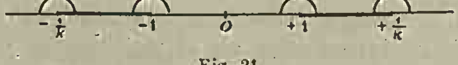

Fig. 21

Evitând punctele critice prin semicercuri foarte mici, având aceste puncte ca centre şi situate deasupra axei reale, obţinem, în virtutea celor văzute în exemplul precedent, rezultatele următoare:

I. Dealungul segmentelor $\left(+1, +\frac{1}{k}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{k}\right)$ avem respectiv

$$(11)\quad y = -i\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2} = -i\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)},$$

$$(12)\quad y = i\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2} = i\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}.$$

II. Pentru $x > \frac{1}{k}$ sau pentru $x < -\frac{1}{k}$, radicalul $\sqrt{1-k^2x^2}$ devine respectiv $-i\sqrt{k^2x^2-1}$, $+i\sqrt{k^2x^2-1}$; prin urmare pe axa reală cuprinsă între $+\frac{1}{k}$ şi $+\infty$ şi între $-\frac{1}{k}$ şi $-\infty$ avem

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = -\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)},$$

radicalele din membrul al doilea în toate aceste formule fiind pozitive.

II. — SUPRAFEŢELE LUI RIEMANN

247. In sistemul de reprezintare a variabilei independente x pe un plan (sau pe o sferă), corespondenţa între poziţiunea punctului x şi a valorii funcţiunii y nu este *biunivocă*. *Riemann* realizează o asemenea corespondenţă înlocuind planul (sau sfera) prin suprafeţe formate din mai multe foi suprapuse şi infinit apropiate între ele. Vom considerà câteva exemple.

248. *Suprafaţa lui Riemann pentru funcţiunea y definită de ecuaţiunea*

$$(1)\qquad y^2 = x.$$

Fiecărei valori a lui x, diferită de zero, corespund două ramuri egale şi de semne contrarii pe cari le repretintăm prin y_1 şi $y_2 = -y_1$; aceste ramuri se permută între ele în jurul lui $x = o$. Să efectuăm dealungul axei reale, în direcţiunea pozitivă, o tăietură în plan pe care variabila x să nu o străbată. Cu modul acesta variabila nu va descrie nici o dată o curbă închisă în jurul lui $x = 0$, aşà că plecând dela un punct arbitrar $x_0 \neq 0$ cu una din ramurile funcţiunii, vom regăsì în acest punct aceiaş ramură. In acest mod însă nu obţinem decât o singură ramură a funcţiunii. Pentru a obţine ambele ramuri, să introducem un al doilea plan suprapus peste cel dintâiu şi să facem o tăietură în ambele plane dealungul direcţiunii pozitive a axei reale. Să numim P_1 primul plan şi P_2 planul suprapus. Fiecărei valori a lui x să facem să corespundă două puncte, unul în P_1 şi celalt în P_2 situate pe aceeaş perpendiculară la aceste două plane și să reprezintăm prin y_1 și y_2 ramurile corespunzătoare. Ramura y_1 este uniformă în planul P_1 și ramura y_2 în planul P_2. Aceste două plane le privim ca neavând alte puncte comune decât punctele de ramificațiune $x = 0$, $x = \infty$, în cari ramurile coincid. Mai convenim a privi fiecare tăietură ca având două țărmuri: țărmul stâng sau pozitiv situat de aceeaș parte cu semiaxa imaginară pozitivă și țărmul drept sau negativ, țărmul opus celui dintâiu.

Rămâne să stabilim o trecere dela o ramură la alta fără a rupe continuitatea funcțiunii definită de ecuațiunea (1).

Pentru aceasta, să examinăm relațiunea dintre valorile celor două ramuri în două puncte situate față în față pe cele două țărmuri din P_1 și în punctele corespunzătoare din P_2. Argumentele a două puncte x situate față în față pe cele două țărmuri ale tăieturii din acelaș plan, diferind între ele prin $\pm 2\pi$, rezultă că în aceste puncte avem în planul P_1 valorile y_1 și $-\eta_1$ iar în planul P_2 valorile y_2 și $-y_2$. Insă $y_2 = -y_1$; prin urmare într'un punct situat pe țărmul stâng al tăieturii în P_2 funcțiunea y are aceiaș valoare ca în punctul corespunzător situat pe țărmul drept al tăieturii în P_1; viceversa, în două puncte corespunzătoare, unul pe țărmul drept al tăieturii în P_2 și celalt pe țărmul stâng în P_1, funcțiunea are aceeaș valoare.

Să ne închipuim că facem să devieze puțin din forma lor, în vecinătatea liniei $(0 \ldots + \infty)$, planele P_1 și P_2 străbătându-se dealungul acestei linii, în așà mod ca țărmul drept din P_1 să se unească cu țărmul stâng din P_2 și ca țărmul drept din P_2 să se unească ca țărmul stâng din P_1. Linia $(0 \ldots + \infty)$ devine astfel o *linie de trecere* dela un plan la celalt. Un punct mobil x care în mișcarea sa într'unul din planele P_1, P_2 atinge linia de trecere, va putea trece în celalt plan, adică o ramură se va continuà prin cealaltă ramură, fără ca continuitatea funcțiunii y să fie ruptă. Suprafața formată de cele două plane, sau *foi*, în modul descris mai sus, constituie *suprafața lui Riemann*, pentru funcțiunea y definită de ecuațiunea (1).

Pe această suprafață funcțiunea y este uniformă. Dacă figurăm valorile funcțiunii y pe un plan — planul y —, acest plan și suprafața considerată a lui Riemann se corespund punct cu punct: planului P_1 corespunde semiplanul y pozitiv și planului P_2 semiplanul y negativ. O îndoială, în ce privește corespondența a două puncte x și y, nu poate fi decât pe linia de trecere; această îndoială însă dispare dacă se îndică planul și țărmul liniei pe care punctul x este considerat ca situat. De unde rezultă consecințele următoare:

1°. Dacă un punct mobil x plecând dela un punct al liniei de trecere, situat într'unul din cele două plane pe un țărm dat, se mișcă în jurul originii până ce atinge țărmul opus celui dat, drumul urmat *nu se privește că este închis.* Pentru ca un drum descris necontenit în acelaș sens, în jurul originii, când punctul inițial este un punct al liniei de trecere, să fie închis, este necesar ca punctul final să fie situat în acelaș plan și pe acelaș țărm ca punctul inițial; prin urmare este necesar ca origina să fie înconjurată de două ori, sau în genere un număr par de ori.

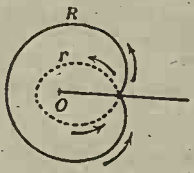
Fig. 22

Figura alăturată reprezintă un drum care înconjoară origina de două ori, linia plină fiind situată într'un plan și linia punctată în celalt plan.

2°. Două curbe, cari trec prin acelaș punct al liniei de trecere, se vor privì ca întâlnindu-se sau nu, după cum punctele acestor curbe din vecinătatea liniei de trecere și de aceeaș parte a ei se vor aflà pe acelaș plan sau nu.

Să observăm că alegerea ce am făcut, ca linia de trecere dela un plan la celalt să fie semiaxa reală pozitivă, nu este un fapt esențial. Putem luà drept linie de trecere raza infinită îndreptată într'o direcțiune oarecare, sau chiar o linie curbă care merge dela $x = 0$ la $x = \infty$ și care nu se taie pe sine însăș. Ceeace rămâne neschimbat sunt punctele de ramificațiune $x = 0$, $x = \infty$.

In fine, precum în altă parte, am înlocuit planul variabilei complexe printr'o sferă, putem, efectuând în acelaș mod o proiecțiune stereografică, să înlocuim suprafața lui Riemann considerată printr'o suprafață formată din două sfere concentrice suprapuse, având comuni numai cei doi poli, corespunzători punctelor $x = 0$, $x = \infty$. Liniei de trecere din suprafața plană, va corespunde pe sferă un semimeridian, sau orice altă linie sferică dusă între cei doi poli și care nu se taie pe sine însăș, după cum prima linie de trecere este o linie dreaptă sau o linie curbă.

Observare. Două puncte suprapuse ale suprafeții lui Riemann rămân suprapuse, prin urmare în două foi diferite, oricare ar fi linia de trecere, pe când două puncte cari nu sunt suprapuse, din două foi diferite pot, după o schimbare a liniei de trecere, ajunge a aparține aceleiaș foi. Expresiunea că două valori ale funcțiunii aparțin la aceiaș ramură sau la două ramuri diferite are dar un sens precis numai relativ la tăietura efectuată însuprafața considerată.

249. *Suprafața lui Riemann pentru funcțiunea y definită de ecuațiunea*

$$(2) \qquad y^2 = (x-a)(x-b), \qquad a \neq b.$$

Fiecărei valori x diferită de a și de b corespund pentru y două valori egale și de semne contrarii y_1, $y_2 = -y_1$. Când x descrie o curbă închisă în jurul unuia din punctele a sau b, fără a trece prin nici unul din ele, cele două ramuri se permută între dânsele; iar dacă x descrie o curbă închisă în jurul ambelor puncte a și b, valoarea finală a lui y coincide cu valoarea sa inițială. Punctele a și b sunt puncte de ramificațiune ale funcțiunii. Pentru a obține suprafața lui Riemann corespunzătoare funcțiunii y este dar de ajuns a suprapune un plan peste planul primitiv al variabilei x, a privì cele două plane ca neavând alte puncte comune decât punctele de ramificațiune, a efectuà în ele o tăietură după dreapta care unește aceste puncte și a face să coincidă, două câte două, cele patru țărmuri ale tăieturilor suprapuse în acelaș mod ca în exemplul precedent, adică țărmul drept din primul plan cu țărmul stâng din al doilea plan și țărmul drept din al doilea plan cu țărmul stâng din primul plan. Linia de trecere $(a \ldots b)$ poate aveà o formă oarecare, cu condițiunea de a nu se tăia pe sine însăș.

In fine, suprafața plană a lui Riemann poate fi înlocuită printr'o suprafață sferică cu două foi, proiecțiune stereografică convenabilă a suprafețelor plane.

Un punct mobil care descrie o curbă închisă în jurul ambelor puncte de ramificațiune, rămâne necontenit pe aceiaș foaie; din contra, dacă se invârtește în jurul unuia din punctele a sau b, punctul mobil nu poate revenì la poziția inițială fără a trece dela o foaie la alta și a înconjurà acest punct de două ori.

Punctul $x = \infty$ este distinct pe fiecare foaie și dă respectiv ramurile

$$y_1 = x - \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{8} \cdot \frac{1}{x} + \ldots,$$

$$y_2 = -x + \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2}{8} \cdot \frac{1}{x} - \ldots,$$

egale și de semne contrarii.

250. Funcțiunea y definită de ecuațiunea

$$(3) \qquad y^2 = \frac{x-a}{x-b}$$

admite aceiaș suprafață a lui Riemann ca funcțiunea din exemplul precedent. Este interesant de observat că între aceste două funcţiuni există o relaţiune biliniară, coeficienţii relaţiunii fiind funcţiuni raţionale de x. Căci din ecuaţiunile

$$y^2 = \frac{x-a}{x-b}, \quad z^2 = (x-a)(x-b),$$

deducem relaţiunea

$$z = (x-b)\, y,$$

care pune în evidenţă faptul că funcţiunile y şi z sunt ramificate în acelaş mod, adică au aceleaşi puncte de ramificaţiune. Se mai zice că aceste funcţiuni *aparţin aceleaş clase.*

Intr'un mod general se zice că două funcţiuni algebrice *aparţin aceleaş clase,* dacă admit aceiaş suprafaţă a lui Riemann.

251. Să considerăm ecuaţiunea

$$(4) \qquad y^2 = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m).$$

Când x descrie o curbă închisă în jurul unui număr par de puncte $a_1, a_2, \ldots$, fără a trece prin nici unul din ele, fiecare din cele două ramuri ale funcţiunii y se reproduce; iar dacă curba închisă cuprinde în interiorul său un număr impar din aceste puncte, cele două ramuri se permută între ele. De unde rezultă construcţiunea suprafeţii lui Riemann corespunzătoare funcţiunii y. Distingem două cazuri: $m = 2n$; $m = 2n-1$.

In cazul $m = 2n$, singurele puncte de ramificaţiune sunt punctele $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$; în cazul $m = 2n - 1$, punctele de ramificaţiune sunt $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}, \infty$. Construirea suprafeţelor lui Riemann corespunzătoare celor două cazuri, rezultă din cele ce preced şi se poate efectuà în modul următor: Considerăm un plan suprapus peste planul variabilei x, convenind ca ele să n'aibă alte puncte comune decât punctele de ramificaţiune. Stabilim, în modul obişnuit, între aceste plane, liniile de trecere (a_1-a_2), (a_3-a_4) ..., $(a_{2n-1}-a_{2n})$ în primul caz; în cazul al doilea linia $(a_{2n-1}-a_{2n})$ este înlocuită prin linia $(a_{2n-1}-\infty)$. Liniile de trecere pot aveà forme oarecari fără a se tăia între ele.

Dacă x descrie o curbă închisă în jurul a două puncte critice, această curbă este situată pe aceiaş foaie sau străbate două linii de trecere, după cum cele două puncte sunt extremităţile unei linii de trecere, sau nu.

252. Să considerăm ecuaţiunea

$$(5) \qquad y^m = x \quad (m \text{ întreg} > 2).$$

Punctele $x = 0$, $x = \infty$ sunt punctele de ramificaţiune, în jurul cărora se permută cele m ramuri ale funcţiunii y. Pentru a construì suprafaţa lui Riemann a acestei funcţiuni, adică o suprafaţă care să se bucure de proprietatea ca unui punct al ei să corespundă o singură valoare a funcţiunii, putem procede în modul următor: Peste planul pe care figurăm valorile variabilei x, plan reprezintat prin P_1, să suprapunem $m-1$ plane $P_2, \ldots P_m$ şi să privim toate aceste plane ca neavând alte puncte comune decât punctele $x=0$, $x=\infty$. Dealungul direcţiunii pozitive a axei reale să facem în toate aceste plane o tăietură peste care punctul mobil să nu treacă. Fiecărei valori a lui x, diferită de 0 şi ∞, să facem să corespundă m puncte suprapuse, câte unul în fiecare plan şi să reprezintăm prin

$$y_1, y_2, \ldots y_m$$

valorile ramurilor lui y corespunzătoare aceleaş valori x, figurată prin punctele situate respectiv în planele $P_1, P_2, \ldots P_m$. Fiecare ramură este o funcţiune uniformă în planul respectiv. Aceste ramuri sunt legate între ele prin egalităţile

$$y_1\omega = y_2,\ y_2\omega = y_3, \ldots, y_{m-1}\,\omega = y_m \quad \left(\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}\right).$$

Ceeace ne conduce, pentru a realizà trecerea dela ramura y_k la ramura y_{k+1}, fără a rupe continuitatea, să stabilim lagăturile următoare între cele m plane sau foi: facem să coincidă ţărmul drept d_1 al tăieturii din P_1 cu ţărmul stâng s_2 din P_2; ţărmul drept d_2 al tăieturii din P_2 cu ţărmul stâng s_3 din P_3, etc., ţărmul drept d_m al tăieturii din P_m cu ţărmul stâng s_1 al tăieturii din P_1 [1]). Tăieturile făcute în cele m plane devin *linii de trecere* între două din aceste plane, legate între ele în modul convenit mai sus. De exemplu, un punct mobil din planul P_1 nu poate trece decât în planul P_2 sau P_m, după cum acest punct atinge în mişcarea sa ţărmul drept sau cel stâng al tăieturii.

Este esenţial de notat că planul P_m, care străbate toate planele situate dedesubtul său, este considerat ca neavând legături decât cu planul P_{m-1} şi cu planul P_1, astfel precum s'a precizat mai sus.

Fig. 23

Suprafaţa astfel construită este suprafaţa lui Riemann pentru funcţiunea y, definită de ecuaţiunea (5). Pe această suprafaţă, funcţiunea y este uniformă.

Să ne închipuim că în planul variabilei y, ducem m raze vectorii, dela $y=0$ la $y=\infty$, având argumentele $\frac{2k\pi}{m}$ $(k=0, 1, 2, \ldots m-1)$.

[1]) (In fig. $m = 4$).

Descompunem astfel acest plan în m sectoare nelimitate cu unghiurile dela vârf egale. Fiecare din aceste sectoare corespunde unuia din planele suprafeţii lui Riemann. Astfel sectorul ale cărui raze extreme au argumentele $\frac{2k\pi}{m}$, $\frac{2(k+1)\pi}{m}$ şi planul P_{k+1} se corespund punct cu punct: cea dintâi din aceste raze corespunde ţărmului stâng şi cea de a doua ţărmului drept al tăieturii planului. In rezumat, planul variabilei y şi suprafaţa corespunzătoare a lui Riemann se corespund punct cu punct; orice porţiune a suprafeţii lui Riemann, care nu conţine punctul $x = 0$, se transformă într'un mod conform în partea corespunzătoare a planului y.

Să menţionăm observarea dejà făcută în exemplele precedente, că tăietura $(0-\infty)$ poate avea o direcţiune şi o formă oarecare, cu condiţiunea de a nu se tăià pe sine însăş. Este evident că modificând tăietura, se modifică şi forma regiunilor y corespunzătoare foilor suprapuse.

In fine, putem înlocuì suprafaţa plană a lui Riemann printr'o suprafaţă sferică cu m foi suprapuse.

CAPITOLUL XII.

INVERSIUNEA FUNCŢIUNILOR e^x, tg$x$, sin$x$: *log$x$, arctg$x$, arcsin$x$.*

I. — FUNCŢIUNEA LOGx

253. Să considerăm ecuaţiunea

$$(1) \qquad 1 + x = e^y;$$

de unde

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

Funcţiunea $\frac{1}{1+x}$ fiind raţională având polul unic $x = -1$, rezultă că integrala acestei funcţiuni defineşte o infinitate de funcţiuni analitice, cari difer între ele prin câte o constantă şi cari la distanţă finită n'au alt punct singular decât punctul $x = -1$.

Vom vedeà mai departe că plecând dela una din aceste funcţiuni obţinem prin continuitate pe toate celelalte, astfel că y este o funcţiune analitică monogenă cu o infinitate de ramuri. Funcţiunea astfel definită se reprezintă prin simbolul $\log(1+x)$.

Să considerăm ramura care se anulează împreună cu x; ea este reprezintată în domeniul punctului $x = 0$ prin seria

$$(3) \qquad y = \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

care rezultă din integrarea seriei (2) şi al cărei cerc de convergenţă trece prin punctul $x = -1$.

Inlocuind x prin $(x-1)$ ecuaţiunile (1) şi (3) devin respectiv

$$(4) \qquad x = e^y,$$

$$(5) \qquad y = \log x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots$$

Seria din membrul al doilea al ultimei ecuaţiuni reprezintă elementul funcţiunii $\log x$ corespunzător punctului $x = 1$ care se anulează în acest pnuct şi al cărui cerc de convergenţă trece prin origină. Acest punct este unicul punct singular, situat la distanţă finită, al funcţiunii $\log x$.

Proprietăţile funcţiunii $\log x$ rezultă din acelea ale funcţiunii exponenţiale. Astfel, din periodicitatea funcţiunii e^y, exprimată prin egalitatea

$$x = e^{y+2ki\pi},$$

rezultă că funcţiunea $\log x$ este *multiformă*, având în orice punct $x_0 \neq 0$ o infinitate de valori, cuprinse în expresiunea $y_0 + 2ki\pi$, k fiind un număr întreg arbitrar şi y_0 una din valorile funcţiunii corespunzătoare lui x_0. Deasemenea, din studiul variaţiunii lui e^y rezultă că dacă x este real şi pozitiv, există, printre ramurile în număr nelimitat ale funcţiunii $\log x$, una care este reală şi care creşte necontenit dela $-\infty$ la $+\infty$ când x creşte dela 0 la $+\infty$. Acest logaritm îl vom numì *logaritm aritmetic*; el are o valoare unică pentru fiecare valoare pozitivă a variabilei.

Rezutatele precedente se mai pot stabili în modul următor: Punând

$$x = re^{i\theta}, \; y = u + iv,$$

ecuaţiunea (4) devine

$$re^{i\theta} = e^u \, e^{iv};$$

de unde

$$r = e^u, \; v = \theta + 2k\pi,$$
$$y = \log r + i(\theta + 2k\pi),$$

$\log r$ fiind logaritmul artimetic. Dacă x este real şi pozitiv, putem luà $\theta = 0$ şi formula precedentă dă

$$\log x = \log r + 2ki\pi.$$

Ramura $\log x$ corespunzătoare lui $k = 0$ este reală şi coincide cu logaritmul aritmetic al lui $|x|$. Dacă x este real și negativ, luând $\theta = \pi$, avem expresiunea

$$\log x = \log r + (2k + 1)\, i\pi,$$

care arată că logaritmul unui număr negativ nu admite nici o ramură reală.

254. Fie $x_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ un punct dat oarecare, diferit de $x = 0$ și fie

$$(6) \qquad y = \log r + i\theta,$$

ramura care se reduce la $y_0 = \log x_0 + i\theta_0$ pentru $x = x_0$. Dacă x, plecând dela x_0, descrie o curbă închisă care nu conține punctul $x = 0$, argumentul θ plecând dela θ_0 se reproduce și prin urmare y își reia valoarea inițială y_0. Acest fapt ne erà cunoscut, căci $x = 0$ fiind unicul punct singular la distanță finită, funcțiunea $\log x$ se comportă ca o funcțiune olomorfă în orice regiune a planului în care nu se cuprinde acest punct.

Să presupunem că curba închisă descrisă de x conține punctul $x = 0$, argumentul θ se va mărì cu $\pm 2\pi$ și y va devenì

$$y = y_0 \pm 2i\pi.$$

Descriind de k ori în acelaș sens un drum închis în jurul lui $x = 0$, vom aveà

$$y = y_0 + 2ki\pi,$$

k fiind un număr întreg, pozitiv sau negativ. Punctul singular $x = 0$ se numește relativ la funcțiunea $\log x$, *punct singular logaritmic.*

255. Așa dar, ramurile în număr nelimitat ale funcțiunii $\log x$ sunt legate între ele astfel că putem trece dela una la alta, făcând ca variabila x să descrie drumuri convenabile. Pentru acest motiv, funcțiunea $\log x$, deși se compune dintr'o infinitate de ramuri, este o funcțiune monogenă. Oricare ar fi ramura considerată, ecuațiunea (1) ne dă derivata

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x},$$

olomorfă și diferită de zero pentru orice valoare finită a lui $x \neq 0$.

De unde rezultă că funcțiunea $y = \log x$ transformă, în mod conform, orice regiune a planului (x), care nu conține punctul $x = 0$, în regiunea corespunzătoare a planului (y).

256. Vom numì *valoare principală* sau *ramură principală* a

funcțiunii $\log x$, ramura acestei funcțiuni pentru care coeficientul θ al lui i din expresiunea (6) satisface condițiunea

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

Dând, de exemplu, lui x valorile 1, -1, i, $-i$, vom aveà valorile principale corespunzătoare ale funcțiunii $\log x$: 0, $i\pi$, $i\frac{\pi}{2}$, $-i\frac{\pi}{2}$. Ramura principală a funcțiunii $\log(1+x)$ e reprezintată, în domeniul lui $x=0$, prin seria (3), căci trebuie să se anuleze împreună cu x.

257. Proprietatea funcțiunii exponențiale exprimată prin egalitatea

$$e^{y_1} . e^{y_2} = e^{y_1+y_2},$$

trage după sine relațiunea:

$$\log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2,$$

abstracțiune făcând de un multiplu de $2i\pi$.

De asemenea avem, abstracțiune făcând de un multiplu de $2i\pi$,

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log x_1 - \log x_2,$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x.$$

Ultima relațiune arată că punctul $x=\infty$ este un punct singular de aceiaș speță ca punctul $x=0$.

258. *Observare.* Dacă ne mărginim la valorile principale ale funcțiunii $\log x$, egalitățile considerate mai sus pot să nu fie adevărate; căci membrele de al doilea determină una din ramurile logaritmului, și se poate întâmplà ca ramura așà determinată să nu fie o ramură principală. De exemplu, scriind

$$\log(-1)^2 = 2\log(-1)$$

și luând valorile principale ale lui $\log 1$ și $\log(-1)$, membrul întâiu và fi nul și al doilea egal cu $2i\pi$.

259. *Aplicațiune.* Fie x un punct situat în interiorul cercului $|x|=1$ sau pe acest cerc, însă diferit de ± 1; argumentul său fiind presupus cuprins între $-\pi$ și $+\pi$, argumentele expresiunilor

$$1+x, \quad 1-x, \quad \frac{1+x}{1-x},$$

sunt în valoare absolută mai mici sau cel mult egale cu $\frac{\pi}{2}$. Aceasta se constată pe figurile alăturate, în cari A și B sunt punctele de intersecțiune ale fiecărui cerc cu axa reală [1]).

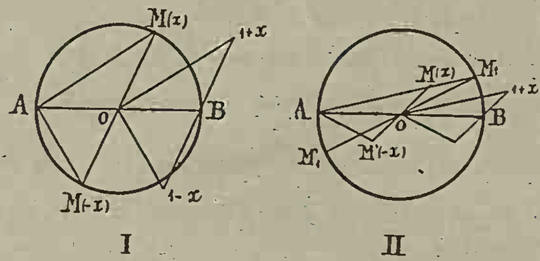

Fig. 24

De aci rezultă că între ramurile principale ale logaritmilor acestor expresiuni, avem egalitatea

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x).$$

Insă ramurile principale ale logaritmilor din membrul al doilea sunt date, în domeniul punctului $x=0$, de seriile

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots;$$

prin urmare

$$(7)\qquad \log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{5} + \ldots\right),$$

x fiind în interiorul cercului $|x| = 1$ sau pe acest cerc, însă diferit de ± 1.

Punând $x = e^{i\theta}$, cu condițiunea

$$(8)\qquad 0 < \theta < \pi \text{ sau } 0 > \theta > -\pi,$$

formula (7) devine

$$(9)\qquad \log\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \log\left(i\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right) = 2\left(e^{i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta} + \ldots\right).$$

---

[1]) In figura I punctul x este pe cerc și avem

$$\arg(1+x) = \widehat{OAM},\ \arg(1-x) = -\widehat{OAM'},$$

$$\arg\frac{1+x}{1-x} = \widehat{MAM'} = \frac{\pi}{2}.$$

In figura II punctul x este interior. Prelungind dreapta AM până în M_1, unde întâlnește cercul, avem

$$\arg(1+x) = \widehat{OAM_1},\ \arg(1-x) = -\widehat{OAM'}$$

$$\arg\frac{1+x}{1-x} = \widehat{MAM'} < \widehat{M_1AM'} = \frac{\pi}{2}\quad (\widehat{OAM'} < \widehat{OAM'_1}).$$

Insă, în valoare principală, avem

$$\log\left(i \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right) = \begin{cases} \log \operatorname{cotg}\dfrac{\theta}{2} + i\dfrac{\pi}{2} \\ \log \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - i\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

după cum θ satisface cea dintâiu sau cea de a doua din condițiunile (8). De unde rezultă egalitățile

$$\log \operatorname{cotg}\left(\pm\frac{\theta}{2}\right) = 2\left[\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta + \dots\right],$$

$$\pm\frac{\pi}{4} = \sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \dots,$$

în cari luăm semnul $+$ dacă avem $0 < \theta < \pi$ și semnul $-$ dacă avem $0 > \theta > -\pi$.

260. *Reprezintarea geometrică a ramurilor funcțiunii $y = \log x$.* Reprezintarea planului (x) pe planul (y) se deduce imediat din egalitatea

$$y = \log r + i\theta \quad (x = re^{i\theta}).$$

Raportând y la două axe rectangulare $0u$, $0v$ $(y = u + iv)$, avem

$$\log r = u, \ \theta = v.$$

Dacă dăm lui θ o valoare constantă θ_0 și facem ca r să varieze dela 0 la $+\infty$, y descrie dela $-\infty$ la $+\infty$, necontenit în acelaș sens, dreapta $v = \theta_0$, paralelă la axa reală; iar dacă r este constant având o valoare pozitivă r_0 și θ variază dela $-\infty$ la $+\infty$, y descrie necontenit în acelaș sens, dela $-\infty$ la $+\infty$, dreapta $u = \log r_0$, paralelă la axa imaginară.

Să ne închipuim că descompunem planul y în fâșii prin drepte paralele cu axa reală, având ordonatele $v = (2k + 1)\pi$, k primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, și privim o linie care desparte două fâșii ca aparținând fâșiei inferioare. Conchidem din variațiunile de mai sus:

1°. Unui punct x diferit de zero corespunde un singur punct y în fiecare fâșie și că la două puncte diferite x corespund în aceiaș fâșie două puncte diferite y. Cu alte cuvinte, fiecare fâșie y și planul (x) limitat de semiaxa reală negativă se corespund punct cu punct.

2°. Când x străbate axa reală negativă, punctul corespunzător y trece dintr'o fâșie în fâșia vecină și anume în cea superioară sau în cea inferioară, după cum x trece dela semiplanul pozitiv la cel negativ, sau viceversa.

De unde rezultă că fiecare fâşie reprezintă o ramură diferită a funcţiunii. Să reprezintăm prin y ramura corespunzătoare valorilor θ satisfăcând inegalităţile

$$(2k-1)\pi < \theta \leq (2k+1)\pi.$$

Din această reprezintare rezultă că dacă x străbate axa reală negativă, ramura y_k se prelungeşte prin ramura y_{k+1} [1]) sau viceversa; ramura y_{k+1} se prelungeşte prin ramura y_k, după cum x trece dela semiplanul pozitiv la cel negativ sau dela cel negativ la cel pozitiv.

261. *Suprafaţa lui Riemann pentru funcţiunea logx.* Consideraţiunile precedente ne conduc la construcţiunea suprafeţii lui Riemann pentru funcţiunea log$x$.

Să ne închipuim o infinitate de plane P_k, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, puse deasupra şi dedesubtul planului P_0 al variabilei x; aceleiaş valori x vor corespunde o infinitate de puncte suprapuse, câte unul în fiecare plan.

Să privim aceste plane ca neavând între ele alt punct comun decât punctul $x = 0$ şi să efectuăm dealungul axei reale negative o tăietură, căreia să dăm în fiecare plan P_k două ţărmuri: ţărmul pozitiv caracterizat prin argumentul $\theta = (2k+1)\pi$ şi ţărmul negativ prin argumentul $\theta = (2k-1)\pi$. Din această construcţiune rezultă că fâşia din planul (y), determinată de inegalităţile

$$(2k-1)\pi < \theta < (2k+1)\pi,$$

corespunde punct cu punct cu planul P_k, limitat de tăietura considerată; căci, de o parte unui punct x din planul P_0 corespunde câte un punct în fiecare plan şi, de altă parte, precum am văzut mai sus, toate fâşiile din planul (y) şi planul P_0, limitat de tăietura sa, se corespund punct cu punct. Am văzut deasemenea că ramura y_k se prelungeşte prin ramura y_{k+1} când x străbate axa reală negativă trecând dela semiplanul pozitiv la cel negativ. Dacă dar ne închipuim că facem să coincidă ţărmul pozitiv al tăieturii din planul P_k cu ţărmul negativ al tăieturii din planul P_{k+1}, se va realiză o trecere, fără rupere de continuitate, dela primul plan la cel de al doilea şi viceversa, astfel ca ramurile y_k şi y_{k+1} să se prelungească una prin cealaltă în acelaş timp când x trece dela unul la celalt din planele respective P_k, P_{k+1}.

Planele sau foile P_k astfel legate între ele formează o suprafaţă conexă între punctele căreia şi acelea ale planului $y = \log x$ există

[1]) Adică trece într'un mod continuu dela cea dintâiu la cea de a doua.

o corespondență biunivocă. Suprafața astfel construită este suprafața lui Riemann pentru funcțiunea $y = \log x$. Fiecărui punct al acestei suprafețe, diferit de punctele $x = 0$, $x = \infty$ corespunde o valoare determinată pentru $\log x$.

262. Funcțiunea $\log (x-a)$, a fiind o constantă oarecare, admite punctul $x = a$ ca punct singular logaritmic, precum se recunoaște făcând $x - a = x'$. Ea este olomorfă în orice regiune a planului care nu conține punctul $x = a$ și se mărește cu $\pm 2i\pi$ când x înconjoară odată acest punct, în sensul pozitiv sau negativ.

Fie x_0 un punct oarecare diferit de a; putem scrie

$$\begin{aligned}\log (x-a) &= \log (x_0 - a + x - x_0) \\ &= \log (x_0 - a) + \log \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0-a}\right).\end{aligned}$$

Luând pentru $\log \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0-a}\right)$ ramura care se anulează pentru $x = x_0$, vom avea desvoltarea

$$\log (x-a) = \log (x_0-a) + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x-x_0}{x_0-a}\right)^n,$$

valabilă într'un cerc cu centrul în x_0 și trecând prin punctul a.

263. Fie $f(x)$ o funcțiune uniformă într'o regiune dată și x_0 un punct ordinar; avem

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \dots$$

Presupunând $f(x_0) \neq 0$, putem scrie

$$f(x) = f(x_0) \, [1 + (x-x_0) \, P(x-x_0)]$$

$$\log f(x) = \log f(x_0) + \log [1 + (x-x_0) \, P(x-x_0)].$$

Punând

$$u = (x-x_0) \, P(x-x_0),$$

avem, pentru toate valorile u cari satisfac inegalitatea $|u| < 1$,

$$\log (1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \dots$$

și revenind la variabila x, obținem logaritmul din urmă exprimat, în domeniul lui x_0, printr'o serie întreagă de $x - x_0$ și prin urmare, în domeniul acestui punct avem

$$\log f(x) = P(x-x_0).$$

Așa dar într'o regiune a planului în care $f(x)$ este olomorfă, fără a se anulà, orice ramură a funcțiunii $\log f(x)$ este o funcțiune olomorfă.

Dacă x_0 este un zero de ordinul m al funcţiunii $f(x)$, putem scrie

$$f(x) = (x-x_0)^m \, P(x-x) \quad [P(x-x_9)]_{x=x_0} \neq 0;$$

de unde

$$\log f(x) = m \log (x-x_0) + \log P(x-x_0).$$

Prin urmare, în virtutea celor ce preced, avem, în domeniul lui x_0,

$$\log f(x) = m \log (x-x_0) + P(x-x_0),$$

expresiune care arată că dacă x înconjoară odată punctul x_0 în sensul pozitiv sau negativ, $\log f(x)$ se reproduce mărit cu $\pm 2mi\pi$.

Dacă x_0 este un pol de ordinul m adică dacă avem

$$f(x) = (x-x_0)^{-m} \, P(x-x_0) \qquad [P(x-x_0)]_{x=x_0} \neq 0,$$

rezultă

$$\log f(x) = -m \log (x-x_0) + P(x-x_0).$$

In rezumat, ramurile funcţiunii $\log f(x)$, $f(x)$ fiind o funcţiune analitică uniformă, sunt funcţiuni analitice olomorfe în orice regiune în care $f(x)$ este olomorfă, fără o aveà nici un zero; zerurile şi polurile lui $f(x)$ sunt puncte singulare logaritmice ale tuturor ramurilor.

264. *Observare.* Din teorema generală (139) s'a conchis că seria $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$ al cărei cerc de convergenţă este cercul $|x| = 1$, are punctul $x = 1$ ca punct singular. Acest fapt se verifică cu ajutorul egalităţii

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = -\log (1-x).$$

care ne arată în acelaş timp că punctul $x = 1$, este unicul punct singular al seriei pe cercul său de convergenţă.

Iată un al doilea exemplu de serie întreagă convergentă pe tot cercul său de convergenţă, ($|x| = 1$), şi care în virtutea teoremei menţionate are punctul $x = 1$ ca punct singular:

$$P(x) = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \dots + \frac{x^n}{n(n-1)} + \dots$$

Inlocuind $\frac{1}{n(n-1)}$ prin $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, seria precedentă se poate scrie

$$\begin{aligned} P(x) &= x \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^\infty \frac{x^n}{n} \\ &= -x \log (1-x) + x + \log (1-x) \\ &= x + (1-x) \log (1-x), \end{aligned}$$

expresiune, care pune în evidenţă că punctul $x = 1$ este un punct singular al seriei, deşi seria este absolut convergentă în acest punct.

265. *Funcţiunea* a^x, a fiind o constantă oarecare diferită de zero. Prin definiţiune, luăm

$$(1) \qquad a^x = e^{x \log a} = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{2} + \dots;$$

de unde

$$(2) \qquad \frac{d\,a^x}{d\,x} = a^x \log a\,.$$

Seria din membrul al doilea din (1) va fi determinată, prin urmare şi funcţiunea a^x, îndată ce fixăm valoarea lui $\log a$ şi este evident că în formulele (1) şi (2) acest logaritm este unul şi acelaş.

266. *Funcţiunea* x^m, m fiind o constantă oarecare. Presupunând $x \neq 0$, vom luà, ca definiţiune,

$$(1) \qquad x^m = e^{m \log x}.$$

Această funcţiune nu poate aveà alt punct singular la distanţă finită decât punctul $x = 0$. Fie (x^m) una din valorile ei, de exemplu, aceea care corespunde la valoarea principală a funcţiunii $\log x$; vom aveà

$$x^m = (x^m)\, e^{2kmi\pi},$$

k fiind un număr întreg oarecare. Toate aceste valori se pot obţine, precum arată formula (1), plecând dela una din ele şi făcând ca variabila x să se învârtească în jurul originii de un număr oarecare de ori.

1°. Dacă m este un număr întreg diferit de zero, $e^{2kmi\pi} = 1$ funcţiunea este uniformă în tot planul.

2°. Fie $m = \frac{q}{p}$, p şi q fiind două numere întregi prime între ele. Dând lui k valorile $0, 1, 2, \dots p-1$, obţinem p valori diferite formând un sistem circular, la cari se reduc toate valorile lui x^m. Regăsim astfel rezultate cunoscute.

3°. Dacă m este un număr incomensurabil sau complex, x^m admite o infinitate de valori în fiecare punct x: la valori diferite ale lui k corespund valori diferite pentru x^m; căci altfel ar urmà să avem

$$e^{2(k-k')mi\pi} = 1,$$

egalitate imposibilă pentru $k \neq k'$.

Din formula (1) rezultă egalitatea

$$x^m \cdot x'^m = e^{m(\log x + \log x')}$$

şi dacă luăm determinaţiunile logaritmilor astfel ca $\log x + \log x' = \log x, x'$, avem

$$x^m \,.\, x'^m = (xx')^m \,.$$

267. *Desvoltarea în serii.* Fiecărei ramuri a funcţiunii $\log x$ corespunde funcţiunii x^m, în domeniul unui punct $x_0 \neq 0$, o serie întreagă de $(x - x_0)$. Să considerăm mai întâiu funcţiunea

$$(1 + x)^m = e^{m \log (1+x)}$$

şi să căutăm desvoltarea ei în domeniul lui $x = 0$. Pentru

$$u = m \log (1 + x),$$

vom aveà

$$(1) \qquad (1 + x)^m = e^u = \sum_0^\infty \frac{u^n}{n!}.$$

De altă parte, luând pentru $\log (1 + x)$ ramura care se anulează împreună cu x, avem seria

$$(2) \qquad u = m \log (1 + x) = m \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} x^\mu,$$

care substituită în (1) ne dă o desvoltare de forma

$$(3) \qquad (1 + x)^m = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Seria (1) fiind convergentă în tot planul variabilei u, pe când seria (2) este convergentă în cercul $|x| = 1$, rezultă că seria (3) este convergentă în acelaş cerc.

Coeficienţii fiind daţi de expresiunile

$$a_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} (1 + x)^m \right]_{x=0} = \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{n!},$$

ramura considerată a funcţiunii $(1 + x)^m$, care se reduce la 1 pentru $x = 0$, va fi reprezintată în cercul $|x| = 1$ prin seria

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} x^2 + \ldots$$

Inlocuind în egalitatea precedentă pe x prin $x - 1$, obţinem seria

$$x^m = \sum_{n=0}^\infty \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{n!} (x-1)^n,$$

care reprezintă, în cercul $|x| = 1$, ramura funcţiunii x^m care se reduce la 1 pentru $x = 1$. De asemenea putem scrie

$$x^m = (x_0 + x - x_0)^m = x_0^m \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^m$$

$$= x_0^m \sum_0^\infty \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{n!} \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n,$$

egalitate valabilă în cercul $|x - x_0| = |x_0|$.

Din cele ce preced rezultă că x^m este o funcțiune analitică monogenă în toată întinderea planului, având o infinitate de ramuri cari, precum am văzut, se pot deduce dintr'una din ele.

Oricare ar fi ramura considerată, formula [(1) § 266] dă

$$\frac{d}{dx}x^m = \frac{m}{x}e^{m \log x} = mx^{m-1},$$

cu condițiunea, evident justificată, ca $\log x$ care intră în definițiunea funcțiunilor x^m și x^{m-1} să fie acelaș.

268. Să considerăm expresiunea

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

și să căutăm către ce limită tinde ramura principală (aceea care se reduce la 1 pentru $x = 0$), când m tinde către infinit, într'un mod oarecare. Avem

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^{m \log\left(1+\frac{x}{m}\right)} = e^{x+x\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{m}\right)^n}.$$

Fie R un număr pozitiv oricât de mare voim și x un punct al planului situat în interiorul cercului descris din origină ca centru cu raza R. Privind m ca variabil, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{m}\right)^n$$

întreagă în raport cu $\frac{1}{m}$ este absolut și uniform convergentă pentru toate valorile lui m cari satisfac inegalitatea $|m| > R$ și se anulează împreună cu $\frac{1}{m}$. Prin urmare, oricare ar fi valoarea finită a lui x, avem pentru ramura considerată

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

II. — FUNCȚIUNEA ARCTGX

269. Resolvind în raport cu y ecuațiunea

$$x = tg\, y = i\,\frac{1-e^{2iy}}{1+e^{2iy}}, \tag{1}$$

obținem expresiunea

$$y = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{2i}\left[\log(1+ix) - \log(1-ix) + 2ki\pi\right] \tag{2}$$

care se mai poate scrie

$$y = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}\left[\log(x-i) - \log(x+i) + 2ki\pi\right], \tag{3}$$

k fiind un număr întreg arbitrar. Funcţiunea y pe care o reprezintăm prin simbolul

$$y = \operatorname{arctg} x,$$

este aşa dar o funcţiune analitică monogenă cu o infinitate de ramuri, neavând alte singularităţi decât punctele singulare logaritmice $x = \pm i$. Formula (3) arată că dacă punctul x se mişcă odată, în sensul pozitiv, în jurul unuia din punctele singulare, fiecare ramură se reproduce mărită respectiv cu $\pm\pi$, după cum x se mişcă în jurul punctului $x = i$ sau în jurul punctului $x = -i$; prin urmare fiecare ramură se reproduce dacă x descrie o curbă închisă în jurul ambelor acestor puncte. Reprezintând prin (y) valoarea unei ramuri într'un punct ordinar oarecare x, valoarea oricărei alte ramuri corespunzătoare aceluiaş punct va fi cuprinsă în expresiunea

$$y = (y) + k\pi.$$

Toate ramurile au aceiaş derivată

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

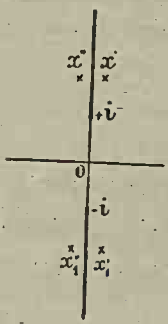

Fig. 25

Să ne închipuim două secţiuni făcute în planul (x), dealungul axei imaginare, respectiv dela $+i$ la $+i\infty$ şi dela $-i$ la $-i\infty$. Se recunoaşte lesne că în două puncte infinit apropiate situate de o parte şi de alta a uneia din ele, valorile unei ramuri oarecari, vor diferi între dânsele prin $\pm\pi$. Astfel, după figură, avem

$$\lim_{x'=x''} [\operatorname{arctg} x' - \operatorname{arctg} x''] = \pi,$$

$$\lim_{x'_1=x''_1} [\operatorname{arctg} x'_1 - \operatorname{arctg} x''_1] = \pi.$$

Din reprezintarea planului (y) pe planul (x), variabilele x, y fiind legate între ele prin relaţiunea $x = \operatorname{tg} y$, rezultă că planul (x) limitat de cele două secţiuni considerate, se transformă punct cu punct în fâşia din planul (y) limitată de dreptele $y = \pm\frac{\pi}{2}$ dintre cari una trebuie exclusă.

270. Să numim ramură *principală* a funcţiunii $\operatorname{arctg} x$ aceea care corespunde ramurii principale a funcţiunii $\log\frac{1+ix}{1-ix}$, şi fie

$$\frac{1+ix}{1-ix} = \varrho e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi;$$

de unde

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \varrho + \frac{\varphi}{2},$$

Prin urmare, dacă separând partea reală de cea imaginară, scriem

$$\operatorname{arctg} x = u + iv$$

vom aveà, pentru ramura principală,

$$-\frac{\pi}{2} < u \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Obţinem elementul acestei ramuri în domeniul lui $x = 0$, aplicând formula (7) (§ 259), care ne dă:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots,$$

pentru toate valorile lui x cari satisfac condiţiunea $|x| \leqq 1$, exceptând valorile $x = \pm i$.

Punctul $x = \infty$ este un punct ordinar pentru toate ramurile funcţiunii. Considerând, de exemplu, ramura principală, avem în domeniul punctului ∞,

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\left[\log(-1) + \log \frac{1 - \frac{i}{x}}{1 + \frac{i}{x}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots$$

III. — FUNCŢIUNEA ARCSINX

271. Ecuaţiunea

$$x = \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{1}$$

ne dă

$$e^{2iy} - 2ixe^{iy} - 1 = 0,$$

de unde

$$y = \frac{1}{i} \log\left(ix \pm \sqrt{1 - x^2}\right). \tag{2}$$

Funcţiunea y, pe care o reprezintăm prin arc $\sin x$, este aşà dar o funcţiune analitică în tot planul, având o dublă serie infinită de ramuri, ramurile aceleaş serii diferind între ele prin multiple de 2π, corespunzătoare valorilor în număr infinit ale logaritmului.

Fie

$$y_1 = \frac{1}{i}\log\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right),$$

$$y_2 = \frac{1}{i}\log\left(ix - \sqrt{1-x^2}\right),$$

câte o ramură din fiecare serie; vom aveà, făcând suma lor,

$$(3)\qquad y_1 + y_2 = \frac{1}{i}\log(-1) = (2k+1)\pi, \quad k \text{ întreg.}$$

Prin urmare, reprezintând prin (y) una din ramurile funcţiunii arc $\sin x$, cele două serii de ramuri corespunzătoare aceleiaş valori a lui x, vor fi cuprinse în expresiunile

$$y = \begin{cases} (y) + 2k\pi, \\ \pi - (y) + 2k\pi, \end{cases}$$

k fiind un număr întreg oarecare.

Vom arătà că toate ramurile se pot deduce dintr'una din ele, făcând ca x să descrie drumuri convenabile. Să observăm mai întâi că funcţiunea de sub semnul logaritm nu se anulează pentru nici o valoare finită a lui x; căci ecuaţiunea

$$ix \pm \sqrt{1-x^2} = 0,$$

făcută raţională, dă $1 = 0$. De unde rezultă că funcţiunea arc $\sin x$ nu poate aveà puncte singulare diferite de punctele de ramificaţiune $x = \pm 1$ ale radicalului $\sqrt{1-x^2}$ şi de punctul $x = \infty$.

272. Să examinăm efectul produs asupra unei ramuri când x se învârteşte în jurul unuia din punctele de ramificaţiune. Să considerăm, pentru a fixà ideile, cele două ramuri cari se reduc respectiv la 0 şi la π pentru $x = 0$. Aceste două ramuri sunt legate între ele prin ecuaţiunea (3), în care facem $k = 0$; în punctul $x = 1$ ele sunt egale cu $\frac{\pi}{2}$. Dacă x descrie odată o curbă închisă în jurul punctului $x = 1$, pe când punctul $x = -1$ este exterior curbei, radicalul $\sqrt{1-x^2}$ îşi schimbă semnul; cele două ramuri considerate se permută între ele [1]).

Deasemenea se permută între ele, în jurul punctului $x = 1$, două ramuri cari pentru $x = 0$ sunt egale respectiv cu $2k\pi$ şi $(2k+1)\pi$, k fiind un număr întreg oarecare.

Concluziuni analoage se aplică punctului $x = -1$. In acest

---

[1]) Permutarea nu se poate face decât între cele două ramuri cari devin egale în punctul de ramificaţiune, căci fiind continue ele trebuie să difere infinit de puţin în vecinătatea punctului de ramificaţiune.

punct coincid ramurile cari pentru $x = 0$ se reduc respectiv la $2k\pi$ şi la $(2k - 1)\pi$; aceste ramuri se permută între ele, când x se învârteşte în jurul punctului $x = -1$.

Din cele ce preced rezultă că dacă x descrie succesiv contururile elementare relative la cele două puncte critice $(0, 1)$, $(0, -1)$, ramura iniţială se măreşte cu $\pm 2\pi$. Cu alte cuvinte, dacă x descrie o curbă închisă în interiorul căreia se găsesc ambele puncte critice, funcţiunea $\arcsin x$ se măreşte cu $\pm 2\pi$. Acest rezultat se mai poate obţine făcând ca x să descrie un cerc cu centrul în origină cu o rază mai mare ca 1. Când x descrie un asemenea cerc, radicalul se reproduce, nu însă şi funcţiunea $\arcsin x$. In adevăr, pentru $|x| > 1$ avem expresiunile

$$ix \pm \sqrt{1 - x^2} = ix\left[1 \pm (1 - x^{-2})^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= ix\left[1 \pm \left(1 - \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{2.4}x^{-4} - \ldots\right)\right],$$

a căror formă, punând $x = \frac{1}{x'}$, este respectiv

$$\frac{1}{x'}\,\mathrm{P}(x'),\quad x'\,\mathrm{P}_1(x'),$$

P şi P_1 fiind serii întregi convergente în interiorul cercului $|x'| = 1$ şi cari nu se anulează în acest cerc.

De altă parte, cercului descris de x în sensul pozitiv, în jurul originei ca centru cu o rază mai mare ca 1, corespunde un cerc descris de x' în sensul negativ, în jurul lui $x' = 0$ cu o rază mai mică ca 1.

Insă când x' descrie un astfel de cerc, funcţiunile

$$\log x'^{-1}\,\mathrm{P}(x'),\quad \log x'\,\mathrm{P}_1(x')$$

se reproduc mărite respectiv cu $\pm 2i\pi$; prin urmare ramurile corespunzătoare ale funcţiunii $\arcsin x$ se vor reproduce mărite cu $\pm 2\pi$.

Din cele ce preced rezultă că toate ramurile funcţiunii $\arcsin x$ se pot deduce, plecând dela una din ele şi făcând ca x să descrie drumuri convenabile. Funcţiunea considerată este aşa dar o funcţiune monogenă în tot planul.

273. Derivând ambele membre ale ecuaţiunii $x = \sin y$, obţinem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{6}$$

radicalul fiind determinat de $\cos y$. Referindu-ne la cele două serii de ramuri cuprinse în egalitatea (2), vedem că toate ramurile aceleaş serii au aceiaş derivată.

Avem, în interiorul cercului $|x| = 1$,

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots,$$

de unde întegrând, obţinem, pentru ramura care se anulează împreună cu x,

$$y = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$$

In fine, observăm că punctul $x = \infty$, este punct singular logaritmic pentru toate ramurile funcţiunii; căci în domeniul acestui punct avem, pentru cele două serii de ramuri, respectiv

$$i \operatorname{arc} \sin x = \begin{cases} \log \left[x \mathrm{P} \left(\frac{1}{x} \right) \right] & \text{sau} \\ \log \left[\frac{1}{x} \mathrm{P}_1 \left(\frac{1}{x} \right) \right]. \end{cases}$$

Acest rezultat se mai poate pune în evidenţă desvoltând radicalul

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{i}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

după puterile lui $\frac{1}{x}$ şi întegrând. De unde

$$y = \mathrm{C} \pm i \left[\log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \dots \right].$$

CAPITOLUL XIII.

TEORIA FUNCŢIUNILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ DUPĂ CAUCHY.

I. — FUNCŢIUNI ANALITICE.

274. *Definiţiune.* Fie x, y două variabile reale independente şi $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{Q}(x, y)$ două funcţiuni reale, continue, având derivate parţiale de primul ordin $\frac{\delta \mathrm{P}}{\delta x}, \frac{\delta \mathrm{P}}{\delta y}, \frac{\delta \mathrm{Q}}{\delta x}, \frac{\delta \mathrm{Q}}{\delta y}$.

Expresiunea

$$u = \mathrm{P} + i\mathrm{Q} \tag{1}$$

este o funcţiune de variabilele x şi y.

Să examinăm în ce caz *Cauchy* zice că u este o funcțiune de variabilă complexă $z = x + iy$. [1])

Fie Δx, Δy două creșteri date variabilelor x, y și ΔP creșterea corespunzătoare a lui $P(x, y)$; putem scrie

$$\begin{aligned} \Delta P &= [P(x + \Delta x, y + \Delta y) - P(x, y + \Delta y)] \\ &\quad + [P(x, y + \Delta y) - P(x, y)] \\ &= \Delta x\, P'_x (x + \theta\Delta x, y + \Delta y) + \Delta y P'_y (x, y + \theta_1\Delta y), \end{aligned}$$

θ și θ_1 fiind două cantități pozitive mai mici decât 1. Să presupunem că derivatele parțiale considerate mai sus sunt *continue* într'o regiune dată (R), și prin urmare uniform continue; urmează că la un număr pozitiv ε dat corespunde un număr pozitiv η astfel că, oricare ar fi punctul (x, y) în regiunea (R), avem

$$|P'_x (x + \theta\Delta x, y + \Delta y) - P'_x (x,y)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left| P'_y (x, y + \theta_1 \Delta y) - P'_y (x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

cu condițiunea $|\Delta x| < \eta$, $|\Delta y| < \eta$. Prin urmare putem scrie

$$\Delta P = \frac{\delta P}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta P}{\delta y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

$$|\varepsilon_1| < \frac{\varepsilon}{4}, \ |\varepsilon_2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De asemenea avem

$$\Delta Q = \frac{\delta Q}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta Q}{\delta y}\Delta y + \varepsilon'_1 \Delta x + \varepsilon'_2 \Delta y,$$

$$|\varepsilon'_1| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |\varepsilon'_2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Așa dar

$$\Delta u = \Delta P + i\Delta Q = \left(\frac{\delta P}{\delta x} + i\frac{\delta Q}{\delta x}\right)\Delta x + \left(\frac{\delta P}{\delta y} + i\frac{\delta Q}{\delta y}\right)\Delta y + \delta u,$$

punând

$$\begin{aligned} \delta u &= (\varepsilon_1 + i\varepsilon'_1)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon'_2)\Delta y \\ &= \left[(\varepsilon_1 + i\varepsilon'_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon'_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right]\Delta z. \end{aligned}$$

Insă

$$|\varepsilon_1 + i\varepsilon'_1| \leqq |\varepsilon_1| + |\varepsilon'_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\varepsilon_2 + i\varepsilon'_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

[1]) Pentru claritatea noțiunilor ce se introduc, se presupune că funcțiunile P și Q sunt univoce și prin urmare că u primește o valoare determinată în fiecare din punctele considerate.

și din $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ rezultă

$$|\Delta x| \leqq |\Delta z|, \quad |\Delta y| \leqq |\Delta z|.$$

Prin urmare scriind

$$(2) \qquad \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\delta P}{\delta x} + i\frac{\delta Q}{\delta x}\right)\Delta x + \left(\frac{\delta P}{\delta y} + i\frac{\delta Q}{\delta y}\right)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \varrho,$$

avem, în toată regiunea (R), $|\varrho| < \varepsilon$, dacă $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ sunt mai mici ca η. Făcând ca Δx, și Δy să tindă către zero, avem $\lim \varrho = 0$, pe când fracțiunea din membrul al doilea tinde către o valoare care, în genere, depinde de $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, adică de drumul ce urmează punctul $z + \Delta z$ când se apropie de z. Pentru ca valoarea acestei fracțiuni să fie independentă de $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ și prin urmare pentru ca $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ să tindă către o limită determinată, în orice mod Δz ar tinde către zero, este necesar și suficient să avem ecuațiunea

$$(3) \qquad \frac{\delta P}{\delta x} + i\frac{\delta Q}{\delta y} = \frac{1}{i}\left(\frac{\delta P}{\delta y} + i\frac{\delta Q}{\delta y}\right),$$

care trage după sine ecuațiunile

$$(4) \qquad \frac{\delta P}{\delta x} = \frac{\delta Q}{\delta y}, \quad \frac{\delta P}{\delta y} = -\frac{\delta Q}{\delta x}.$$

Dacă aceste ecuațiuni sunt satisfăcute, oricare ar fi punctul $z = x + iy$ într'o regiune dată, *Cauchy* zice că

$$u = P(x, y) + iQ(x, y)$$

este în aceà regiune o *funcțiune monogenă* de z; $\lim \frac{\Delta u}{\Delta z}$, care în virtutea acestor ecuațiuni, are o valoare unică, este *derivata* funcțiunii u în punctul z.

Să observăm că funcțiunea monogenă $u = P + iQ$ conține variabilele x, y numai în combinațiunea $z = x + iy$; căci determinantul funcțional

$$\frac{D(u,z)}{D(x,y)} = i\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}$$

este nul în virtutea ecuațiunii (3). Putem dar scrie $u = f(z)$.

Riemann suprimă epitetul monogenă și zice în acelaș condițiuni (4) că u este o funcțiune de variabilă complexă z.

Astăzi se întrebuințează cuvântul de *funcțiune analitică*. Vom vedea mai departe că funcțiunea analitică astfel definită coincide cu funcțiunea analitică după *Weierstrass* (145).

275. S'a presupus că funcțiunile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ au în regiunea considerată o valoare unică în fiecare punct (x, y) și prin urmare funcțiunea $f(z) = P + iQ$ are o valoare unică în fiecare punct z. Se păstrează numele de funcțiune analitică și în cazul când $f(z)$ este susceptibil de mai multe valori, dacă fiecare din aceste valori, variând într'un mod continuu cu z, admite o derivată corespunzătoare. In cazul când funcțiunea admite o valoare unică în fiecare punct, se zice că este *uniformă* în regiunea considerată; în cazul contrar, funcțiunea se zice *multiformă*.

O funcțiune analitică se zice *olomorfă* într'o regiune dată, dacă este *uniformă* și *continuă* în accà regiune.

276. Pentru a stabilì condițiunile (4) ale lui Cauchy, s'a presupus că derivatele parțiale $\frac{\delta P}{\delta x}, \frac{\delta P}{\delta y}, \frac{\delta Q}{\delta x}, \frac{\delta Q}{\delta y}$ sunt funcțiuni continue de variabilele x, y. De unde rezultă că derivata funcțiunii $u = f(z)$ care, în virtutea acelor condițiuni, este dată de expresiunile

$$f'(z) = \frac{\delta P}{\delta x} + i\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta Q}{\delta y} - i\frac{\delta P}{\delta y}, \tag{5}$$

este în acelaș timp o funcțiune continuă de z.

Viceversa, dacă derivata $f'(z)$ este o funcțiune continuă de z într'o regiune dată, derivatele parțiale considerate sunt funcțiuni continue de x, y în aceiaș regiune. In adevăr, fie $z_0 = x_0 + iy_0$ și $\left(\frac{\delta P}{\delta x}\right)_0$, $\left(\frac{\delta Q}{\delta x}\right)_0$, $\left(\frac{\delta P}{\delta y}\right)_0$, $\left(\frac{\delta Q}{\delta y}\right)_0$ valorile acestor derivate în punctul (x_0, y_0); avem

$$\begin{aligned} f'(z) - f'(z_0) &= \frac{\delta P}{\delta x} - \left(\frac{\delta P}{\delta x}\right)_0 + i\left[\frac{\delta Q}{\delta x} - \left(\frac{\delta Q}{\delta x}\right)_0\right] \\ &= \frac{\delta Q}{\delta y} - \left(\frac{\delta Q}{\delta y}\right)_0 - i\left[\frac{\delta P}{\delta y} - \left(\frac{\delta P}{\delta y}\right)_0\right], \end{aligned}$$

de unde inegalitățile

$$|f'(z) - f'(z_0)| \geqq \begin{cases} \left|\frac{\delta P}{\delta x} - \left(\frac{\delta P}{\delta x}\right)_0\right|, \left|\frac{\delta Q}{\delta y} - \left(\frac{\delta Q}{\delta y}\right)_0\right|, \\[2ex] \left|\frac{\delta Q}{\delta x} - \left(\frac{\delta Q}{\delta x}\right)_0\right|, \left|\frac{\delta P}{\delta y} - \left(\frac{\delta P}{\delta y}\right)_0\right| \end{cases}$$

cari justifică aserțiunea noastră; căci membrul întâi fiind prin ipoteză $< \varepsilon$, rezultă că fiecare din expresiunile din membrul al doilea este $< \varepsilon$.

277. Se va vedeà mai târziu (Integrala lui Cauchy) că derivata unei funcțiuni analitice $f(z)$ într'o regiune dată este o funcțiune

analitică în aceiaş regiune; de unde rezultă că $f'(z)$ admite o derivată continuă $f''(z)$ şi prin urmare că funcţiunile P şi Q admit derivate parţiale continue de ordinul al doilea, între cari există relaţiuni ce se pot deduce derivând succesiv ecuaţiunile (4). De asemenea $f''(z)$ admite o derivată $f'''(z)$, etc.

278. Să facem abstracţiune de teorema lui Cauchy, la care am făcut aluziune mai sus, să presupunem numai că funcţiunile P şi Q admit derivate parţiale de ordinul al doilea, continue. Derivând ecuaţiunile (4) în raport cu x şi y obţinem expresiunile

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}, & \dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Să punem

$$(7) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = P_1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = Q_1;$$

vom aveà

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{\partial P_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial P_1}{\partial y}, & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x}; \end{cases}$$

de unde, în virtutea egalităţilor (6),

$$(9) \qquad \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

Aceste ecuaţiuni exprimă că derivata

$$f'(z) = P_1(x,y) + i\, Q_1(x,y)$$

este o funcţiune analitică de z.

279. Din ecuaţiunile (6) deducem

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y} = 0.$$

De unde rezultă că pentru ca $u = P + iQ$ să fie funcţiune analitică, nici una din funcţiunile P şi Q nu poate fi luată într'un mod arbitrar; ambele trebuie să fie soluţiuni ale ecuaţiunii

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

numită ecuaţiunea lui *Laplace*. O soluţiune a acestei ecuaţiuni se numeşte *funcţiune armonică*. Prin urmare funcţiunile P şi Q, cari constituie funcţiunea analitica $u = P + iQ$, trebuie să fie funcţiuni armonice. Nu este însă de ajuns a luà două funcţiuni armonice oarecari pentru a formà o funcţiune analitică [1]; ci luând una din ele oarecare, cealalta este, în virtutea ecuaţiunilor (4), determinată, abstracţiune făcând de o constantă arbitrară.

In adevăr, să presupunem dată funcţiunea P; pentru a determinà funcţiunea Q, considerăm diferenţiala

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy$$

care, în virtutea ecuaţiunilor (4), devine

$$dQ = -\frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial P}{\partial x} dy;$$

de unde, observând că membrul al doilea este o diferenţială exactă (10), deducem

$$Q = \int\left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial P}{\partial x} dy\right) + C. \tag{12}$$

279. *Observări.* 1°. *O funcţiune analitică nu poate fi numai reală sau numai pur imaginară în tot planul variabilei independente; într'un mod mai general, o funcţiune analitică nu poate aveà partea sa reală sau partea sa imaginară constantă în tot planul fără a se reduce la o constantă.* Căci, presupunând, de exemplu, P constant, avem şi pentru Q o valoare constantă precum rezultă din egalitatea (12).

Deasemenea $|f(z)| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ nu poate fi constant în tot planul. In adevăr, fie $P^2 + Q^2 = C$. Derivând în raport cu x şi y şi ţinând seamă de ecuaţiunile (4), avem

$$P\frac{\partial P}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad Q\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

De unde rezultă ecuaţiunea

$$P^2 + Q^2 = 0;$$

sau, dacă determinantul este diferit de zero, avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0;$$

prin urmare şi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

In toate cazurile rezultă că P şi Q sunt constante; prin urmare funcţiunea $f(z)$ se reduce la o constantă.

---

[1] Exemplu: funcţiunile $P(x, y) = x^2 - y^2$, $Q(x, y) = xy$ sunt funcţiuni armonice, însă $x^2 - y^2 - ixy$ nu este funcţiune analitică.

2^0. Propoziţiunea precedentă este cuprinsă în cea următoare, care este mai generală: *Dacă punctul $z(x, y)$ se mişcă într'un mod arbitrar în plan, este imposibil ca punctul $u = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ să descrie o curbă* (în înţelesul obişnuit al cuvântului).

In adevăr, fie

$$X = P(x, y), \quad Y = Q(x, y) \tag{13}$$

şi să presupunem că ar putea să existe între X şi Y o ecuaţiune

$$\varphi(X, Y) = 0. \tag{14}$$

Ar rezultà ca, eliminând X şi Y între ecuaţiunile (13) şi (14), să avem între x şi y o ecuaţiune

$$\psi(x, y) = 0;$$

eeeace este contrar ipotezii, după care z se mişcă într'un mod arbitrar în plan.

280. Studiul funcţiunilor analitice se poate face studiind proprietăţile funcţiunilor de două variabile cari satisfac ecuaţiunea lui Laplace. Această metodă a fost introdusă de *Riemann* [1]) şi poartă numele lui.

Noi vom urmà în aceste lecţiuni metoda lui *Cauchy*, pe care o vom alăturà la aceea a lui *Weierstrass*.

II. — INTEGRALE DEFINITE.

281. Fie $f(z)$ o funcţiune continuă de variabila complexă z, dealungul unui arc de curbă L şi z_0, Z punctele extreme ale acestui arc. Pe linia L să fixăm n puncte intermediare: $z_1, z_2, \ldots z_n$ şi să considerăm suma

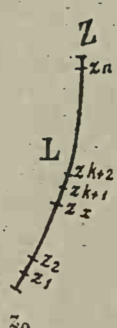

Fig. 26

$$S = \sum_{k=o}^{n} (z_{k+1} - z_k)\, f(\zeta_k), \tag{1}$$

în care ζ_k este un punct oarecare al arcului cuprins între z_k şi z_{k+1}, iar $z_{n+1} = Z$. Voim să arătăm că această sumă tinde către o limită finită când n tinde către infinit, astfel ca în acelaş timp diferenţele $(z_{k+1} - z_k)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$, să tindă către zero. Această limită este independentă de alegerea punctelor z_k.

Funcţiunea $f(z)$ fiind continuă, prin urmare uniform continuă, putem face ca la un număr ε pozitiv, arbitrar de

[1]) Inaugural Dissertation.

mic să corespundă un număr δ, astfel ca să avem

$$(2)\qquad | f(z) - f(\zeta_k) | < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad | z_{k+1} - z_k | < \delta \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Să subdividem fiecare din intervalele [1]) obţinute prin operaţiunea precedentă (ce vom numi *prima* operaţiune) în intervale mai mici, intercalând între două puncte extreme un număr oarecare de puncte (z') şi să formăm suma S' analoagă cu suma S, corespunzătoare tuturor punctelor de diviziune ale liniei L.

Pentru a calculà suma S', să efectuăm mai întâiu sumele parţiale s_k, corespunzătoare punctelor intercalate în fiecare din intervalele (z_k, z_{k+1}) şi apoi să adunăm toate aceste rezultate. Dacă însemnăm prin $z'_1, z'_2, \ldots z'_h$ punctele intercalate între z_k şi z_{k+1}, suma parţială din S', corespunzătoare punctelor z_k, $z'_1, z'_2, \ldots z'_h$, z'_{h+1} este

$$s_k = \sum_{k'=o}^{k'=h} (z'_{k'+1} - z'_{k'}) f(\zeta'_{k'}),$$

unde $z'_0 = z_k$, $z'_{h+1} = z_{k+1}$ şi $\zeta'_{k'}$ este un punct oarecare al arcului cuprins între z'_k şi $z'_{k'+1}$.

Scriind

$$f(\zeta'_{k'}) = f(\zeta_k) + \varepsilon_{k'}, \ (k' = 0, 1, \ldots h),$$

avem, în virtutea inegalităţii (2), $| \varepsilon_{k'} | < \varepsilon$, de oarece punctele $\zeta'_{k'}$ sunt cuprinse în intervalul (z_k, z_{k+1}).

Expresiunea s_k devine astfel

$$(3)\qquad s_k = (z_{k+1} - z_k) f(\zeta_k) + R_k,$$

punând

$$R_k = \sum_{k'=o}^{k'=h} \varepsilon_{k'} (z'_{k'+1} - z'_{k'}).$$

Insă

$$| R_k | < \sum_{k'=o}^{h} | \varepsilon_{k'} | | z'_{k'+1} - z'_{k'} | < \varepsilon \sum_{k'=o}^{h} | z'_{k'+1} - z'_{k'} |$$

şi observând că $| z'_{k'+1} - z'_{k'} |$ reprezintă lungimea dreptei care uneşte punctele $z'_{k'}$, $z'_{k'+1}$, rezultă că avem

$$(4)\qquad | R_k | < \varepsilon p_k,$$

p_k fiind egal cu perimetrul liniei poligonale ale cărei vărfuri sunt punctele $z'_{k'}$, ($k' = 0, 1, \ldots, h$).

---

[1]) Un interval (z_k, z_{k+1}) consistă în totalitatea punctelor situate pe L şi cuprinse între punctele extreme, inclusiv aceste puncte.

Procedând în acelaş mod pentru fiecare sumă parţială şi adunând aceste sumé, obţinem

(5) $$S' = \sum_{k=o}^{n} (z_{k+1} - z_k) f(\zeta_k) + \sum_{k=o}^{n} R_k ;$$

de unde

(6) $$S' - S = \Sigma R_k , \quad | S' - S | \leq \Sigma | R_k | .$$

Insă, în virtutea inegalităţii (4), care este adevărată oricare ar fi intervalul (z_k , z_{k+1}), avem

(7) $$\Sigma | R_k | < \varepsilon \Sigma p_k < \varepsilon l,$$

l fiind lungimea arcului L. De unde rezultă inegalitatea fundamentală

(8) $$| S' - S | < \varepsilon l.$$

Această inegalitate este, precum arată raţionamentul nostru, independentă de numărul punctelor intercalate (z') şi de modul cum aceste puncte sunt alese. Dacă dar subdividem intervalele $(z'_{k'}, z'_{k+1})$ din a doua operaţiune, intercalând în fiecare din ele un număr oarecare de puncte (z'') şi efectuăm suma relativă la totalitatea punctelor (z, z', z''), obţinem o sumă S'' pe care o putem substitui sumei S' din (8), aşà încât să avem

(9) $$| S'' - S | < \varepsilon l.$$

Subdivizând succesiv intervalele obţinute astfel şi formând sumele corespunzătoare, analoage cu suma (1), obţinem un şir de sume

(9) $$S', S'', \ldots S^{(n)}, \ldots$$

satisfăcând inegalitatea

(10) $$| S^{(n)} - S | < \varepsilon l \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Fie acum ε' un număr pozitiv mai mic ca ε; putem presupune punctele (z') alese în a doua intercalare suficient de apropiate pentru ca z' şi ζ' fiind două puncte în unul oarecare din intervalele corespunzătoare, să avem

(11) $$| f(z') - f(\zeta') | < \varepsilon' .$$

Insă S'' este faţă de S' ceeace S'' este faţă de S, rezultă că putem scrie

$$| S'' - S' | < \varepsilon' l$$

şi prin urmare, raţionând ca mai sus,

$$| S^{(n)} - S' | < \varepsilon' l .$$

Reprezintând prin ε'' un număr pozitiv mai mic ca ε, vom aveà, printr'un raționament analog cu cel precedent,

$$| S^{(n)} - S'' | < \varepsilon' l.$$

In rezumat, fiind dat un șir de numere pozitive

$$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots, \varepsilon^{(n)}, \ldots,$$

necontenit descrescânde și având ca limită zero, există un număr pozitiv întreg N astfel încât pentru $n \geqq N$, $p \geqq N$ să avem inegalitatea

$$| S^{(n)} - S^{(p)} | < \varepsilon^{(p)} l,$$

$S^{(n)}$ și $S^{(p)}$ făcând parte din șirul (9). Ceeace este tocmai condițiunea necesară și suficientă ca șirul

$$S, S', \ldots S^{(n)}, \ldots$$

să aibă o limită finită.

Rămâne acum să arătăm că limita obținută este independentă de sistemul de subdiviziuni ale arcului L. Să intercalăm, pentru aceasta, pe curbă, între punctele z_0, Z un număr n' destul de mare de puncte

$$z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, \ldots,$$

situate oricum, însă supuse la singura condițiune ca

$$| z'_{k+1} - z'_k | < \delta, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n),$$

$\delta > o$ arbitrar de mic, și fie S_1 suma analoagă cu S. Să considerăm toate punctele (z), (z') din ambele sisteme de intercalare, cari dau respectiv sumele S, S_1, și să formăm suma analoagă S_2, corespunzătoare acestor puncte.

Să comparăm suma S_2 cu fiecare din sumele S, S_1. După modul cum a fost formată, suma S_2 poate fi luată drept suma S' considerată mai sus, căci ea se poate deduce din S subdivizând intervalele relative la prima subdiviziune.

Prin urmare avem

$$| S - S_2 | < \varepsilon l.$$

Insă S_2 se poate, pentru acelaș motiv, deduce din S_1, așà că avem

$$| S_1 - S_2 | < \varepsilon l.$$

De unde, ținând seamă de inegalitatea

$$| S - S_1 | \leqq | S - S_2 | + | S_2 - S_1 |,$$

rezultă că avem

$$| S - S_1 | < 2\varepsilon l,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. De unde conchidem că sumele S și S_1 au aceiaș limită, când numărul punctelor de diviziune din ambele sisteme tinde către infinit, astfel ca în acelaș timp amplitudinea tuturor intervalelor să tindă către zero.

Această limită se numește *integrala definită* a funcțiunii $f(z)$, luată dela punctul z_0 la punctul Z, dealungul liniei L și se reprezintă prin simbolul

$$\int_{z_0 LZ} f(z)dz,$$

sau, mai pe scurt, prin

$$\int_{L} f(z)dz,$$

dacă nu este ambiguitate în privința sensului în care variabila de integrațiune z descrie linia L.

282. Din definițiunea integralei definite rezultă consecințele următoare:

1°. Dacă linia L se compune din liniile L_1, L_2, ... L_n, avem

$$\int_{L} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz + \ldots + \int_{L_n} f(z)dz,$$

sensul în care z descrie diferitele linii fiind acelaș în ambele membre.

2°. Dacă variabila z descrie linia L în sensuri opuse, obținem rezultate egale și de semne contrarii

$$\int_{z_0 LZ} f(z)dz = -\int_{ZLz_0} f(z)dz,$$

căci toți termenii celor două sume sunt doi câte doi egali și de semne contrarii.

3°. Dacă linia L este o curbă închisă și dacă $f(z)$ are o valoare unică în fiecare punct al curbei, integrala $\int_{L} f(z)dz$ este independentă de punctul de plecare, însă își schimbă semnul când z descrie curba în sens invers.

283. Cunoscând maximul modulului funcțiunii $f(z)$ dealungul liniei L, putem găsi o limită superioară a modulului integralei corespunzătoare. In adevăr, avem

$$\left|\Sigma(z_{k+1}-z_k)f(\zeta_k)\right| \leqq \Sigma\left|z_{k+1}-z_k\right|\left|f(\zeta_k)\right| < M\Sigma\left|z_{k+1}-z_k\right|,$$

reprezintând prin M maximul lui $|f(z)|$ dealungul liniei L. De unde rezultă inegalitatea căutată

$$(1) \qquad \left|\int_{z_0 LZ} f(z)dz\right| \leqq Ml.$$

284. Definiţiunea integralei de o variabilă complexă se reduce la aceea a integralei curbilinii de variabile reale.

Fie

$$z = x + iy\,,\; z_k = x_k + iy_k\,;\; \zeta_k = \xi_k + i\eta_k\,,$$
$$f(z) = \mathrm{P}(x\,,\,y) + i\mathrm{Q}(x\,,\,y)\,,$$

variabilele x, y şi ξ, η fiind reale şi ξ_k, η_k fiind cuprinse respectiv în intervalele $(x_k\,,\; x_{k+1})\,,\;(y_k\,,\; y_{k+1})$.

Vom avea

$$\begin{aligned} &\Sigma(z_{k+1} - z_k)\, f(\zeta_k) \\ &= \Sigma(x_{k+1} - x_k)\;\mathrm{P}(\xi_k, \eta_k) - \Sigma(y_{k+1} - y_k)\;\mathrm{Q}(\xi_k, \eta_k) \\ &+ i\left[\Sigma(x_{k+1} - x_k)\;\mathrm{Q}(\xi_k, \eta_k) + \Sigma(y_{k+1} - y_k)\;\mathrm{P}(\xi_k, \eta_k)\right]. \end{aligned}$$

Funcţiunile $\mathrm{P}(x, y)$ şi $\mathrm{Q}(x, y)$ fiind continue, se stabileşte, precum se ştie, că sumele din membrul al doilea au limite finite când diferenţele $(x_{k+1} - x_k)\,,(y_{k+1} - y_k)$ tind către zero. Aceste limite, numite integrale curbilinii, se reprezintă prin simbolurile

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{P}(x,\, y)\, dx\,, \int_{\mathrm{L}} \mathrm{Q}(x,\, y)\, dy\,,$$

adăugându-se sensul în care punctul (x, y) descrie linia L.

Avem aşa dar

$$\int_{\mathrm{L}} f(z) dz = \int_{\mathrm{L}} \mathrm{P}dx - \mathrm{Q}dy + i \int_{\mathrm{L}} \mathrm{Q}dx + \mathrm{P}dy$$

linia de integraţiune fiind descrisă în acelaş sens în ambele membre.

285. Să presupunem curba de integraţiune L reprezintată prin ecuaţiunile

$$x = \varphi(t),\; y = \psi(t),$$

$\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ fiind funcţiuni continue de variabila reală t, având derivate continue de ordinul întâi. Fie t_0 şi T valorile lui t cărora le corespund punctele z_0, Z extremităţile arcului L. Precum se ştie din teoria schimbării de variabile în integrale definite, avem

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{P}dx - \mathrm{Q}dy = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} [\mathrm{P}\varphi'(t) - \mathrm{Q}\psi'(t)]\, dt\,;$$

prin urmare

$$\int_{\mathrm{L}} f(z) dz = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} [\mathrm{P}\varphi'(t) - \mathrm{Q}\psi'(t)]\, dt + i \int_{t_0}^{\mathrm{T}} [\mathrm{Q}\varphi'(t) + \mathrm{P}\psi'(t)]\, dt.$$

286. *Valoarea medie a integralei.* Se ştie că dacă $f(x)$ este o

funcţiune continuă de variabila reală x, într'un interval (a, b), avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi),$$

ξ fiind o valoare convenabilă a lui x, cuprinsă în intervalul (a, b). Există o formulă analoagă şi în cazul variabilei complexe.

Să considerăm integrala

$$\int_{z_0 LZ} f(z)dz,$$

şi fie

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),$$

ecuaţiunile liniei de integraţiune L, variabila independentă fiind lungimea arcului s al acestei linii, cuprins între punctul fix z_0 şi un punct variabil z. Avem

$$(2)\qquad \left|\int f(z)\,dz\right| \leqq \int \left|f(z)\right|\left|dz\right|.$$

Insă $f(z)$ fiind o funcţiune continuă, modulul său

$$\left|f(z)\right| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

este o funcţiune continuă de (x, y) şi prin urmare de variabila s, în acelaş timp cu funcţiunile $\varphi(s)$ şi $\psi(s)$. Reprezintând această funcţiune prin $F(s)$ şi prin l lungimea arcului L, inegalitatea (2) va da

$$(3)\qquad \left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqq \int_0^l F(s)\,ds.$$

Să aplicăm integralei din membrul al doilea formula mediei; vom avea, reprezintând prin σ o valoare convenabilă a lui s, cuprinsă între 0 şi l,

$$\int_0^l F(s)\,ds = l\,F(\sigma).$$

Fie ζ valoarea lui z corespunzătoare lui $s = \sigma$ şi θ un număr pozitiv mai mic ca 1; rezultă din cele ce preced că putem scrie

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| = \theta l \left|f(\zeta)\right|.$$

Fie R valoarea comună a ambelor membre, α argumentul integralei $\int_L f(z)\,dz$, β argumentul lui $f(\zeta)$; vom avea

$$\int_L f(z)dz = \mathrm{R}e^{i\alpha},\ \theta l f(\zeta) = \mathrm{R}e^{i\beta}.$$

De unde, punând $\lambda = \theta e^{i(\alpha-\beta)}$, avem

$$(4) \qquad \int_L f(z)dz = \lambda\, l\, f(\zeta)\,.$$

In această egalitate, în care λ este o cantitate complexă al cărei modul este < 1, consistă formula ce am voit să obţinem. Ea a fost dată de *G. Darboux*.

287. *Schimbarea variabilei independente.* Fie

$$z = \varphi(z')$$

o funcţiune de z' olomorfă într'o arie dată şi L′ un arc de curbă de o lungime finită l', situat în această arie. Să reprezintăm prin L arcul de curbă corespunzătoare descrisă de z. Voim să arătăm că L are o lungime finită.

Fie z'_k, z'_{k+1}, două puncte vecine pe arcul L′ şi z_k, z_{k+1} punctele corespunzătoare pe arcul L; putem scrie

$$z_{k+1} - z_k = (z'_{k+1} - z'_k)\,[\varphi'(z'_k) + \varepsilon_k]\,,$$

ε_k tinzând către zero în acelaş timp cu diferenţa $z'_{k+1} - z'_k$ în tot lungul arcului L′, de oarece avem

$$\lim_{z'_{k+1}-z'_k=0} \frac{z_{k+1} - z_k}{z'_{k+1} - z'_k} = \varphi'(z'_k)$$

La un ε pozitiv arbitrar de mic, corespunde deci un număr pozitiv δ, astfel încât, pentru $|z'_{k+1} - z'_k| < \delta$, să avem $|\varepsilon_k| < \varepsilon$. De unde rezultă

$$\Sigma\,|z_{k+1} - z_k| < \Sigma\,|z'_{k+1} - z'_k|\,|\varphi'(z'_k)| + \varepsilon\,\Sigma\,|z'_{k+1} - z'_{k'}|$$

şi prin urmare, reprezintând prin l lungimea arcului L, avem

$$l < \int_0^{l'} |\varphi'(z')|\,ds + \varepsilon l'.$$

q. e. d.

Fie acum $f(z)$ o funcţiune olomorfă într'o arie dată A a planului (z) şi $z = \varphi(z')$ o funcţiune olomorfă într'o arie dată (A′) a planului (z'). Fie L′ un arc de curbă situată în (A′); dacă arcul L corespunzător lui L′ este cuprins în (A), vom aveà

$$(1) \qquad \int_L f(z)\,dz = \int_{L'} f[\varphi(z')]\,\varphi'(z')\,dz'.$$

In adevăr, păstrând notaţiunile de mai sus, avem

$$(z_{k+1} - z_k)\,f(z_k) = (z'_{k+1} - z'_k)\;[\varphi'(z'_k) + \varepsilon_k]\,f[\varphi(z'_k)]\,,\ |\varepsilon_k| < \varepsilon.$$

$$\Sigma\,(z_{k+1} - z_k)\,f(z_k) = \Sigma\,(z'_{k+1} - z'_k)\,f[\varphi'(z'_k)] + \Sigma\,\varepsilon_k(z'_{k+1} - z'_k)\,f[\varphi(z'_k)]\,;$$

de unde, punând

$$S = \Sigma(z_{k+1} - z_k)\, f(z_k), \quad S' = \Sigma(z'_{k+1} - z'_k)\, f[\varphi(z'_k)]\, \varphi'(z'_k),$$

rezultă

$$\left| S - S' \right| < \varepsilon \left| \int_{L'} f[\varphi(z')]\, dz' \right| < \varepsilon Ml',$$

M fiind limita superioară a lui $|f[\varphi(z')]|$ dealungul lui L', sau, ceeace este tot una, a lui $|f(z)|$ dealungul lui L. Membrul întâi fiind constant, rezultă egalitatea $S - S' = 0$. De unde conchidem egalitatea (1) scrisă mai sus.

CAPITOLUL XIV.

TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE LUI CAUCHY.

288. *Teorema I. Dacă $f(z)$ este o funcţiune olomorfă într'o regiune dată şi C este o curbă închisă situată în aceà regiune, integrala*

$$\int_C f(z) dz,$$

luată dealungul curbei este nulă.

In adevăr, fie

$$(1) \qquad f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

$P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ fiind funcţiuni continue, univoce, având derivate parţiale continue în interiorul curbei C şi pe curbă. Vom aveà

$$(2) \qquad \int_C f(z)\, dz = \int_C P\, dx - Q\, dy + i \int_C Q\, dx + P\, dy.$$

Insă, dacă $U(x, y)$ şi $V(x, y)$ sunt două funcţiuni continue, univoce, având derivate parţiale continue într'o regiune dată şi C este o curbă închisă situată în aceà regiune, avem după formula lui *Green* [1])

$$(3) \qquad \int_C U\, dx + V\, dy = \iint_A \left(\frac{\delta V}{\delta x} - \frac{\delta U}{\delta y}\right) dx\, dy,$$

integrala dublă referindu-se la aria A interioară curbei C şi integrala simplă la conturul C descris în sensul pozitiv. In virtutea acestei formule, egalitatea (2) se poate scrie

$$(4) \quad \int_C f(z)\, dz = -\iint_A \left(\frac{\delta Q}{\delta x} + \frac{\delta P}{\delta y}\right) dx\, dy + i \iint_A \left(\frac{\delta P}{\delta x} - \frac{\delta Q}{\delta y}\right) dx\, dy.$$

---

[1]) Vezi, de ex. *Goursat*, Cours d'Analyse, t. I.

Insă între derivatele parțiale ale funcțiunilor P și Q există relațiunile:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y};$$

prin urmare funcțiunile ce figurează sub integralele duble (4) sunt nule în toată întinderea ariei considerate; de unde rezultă egalitatea fundamentală

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \tag{5}$$

q. e. d.

289. Teorema lui Cauchy, așà de simplă în enunțul ei, este o sorginte a celor mai frumoase și importante propozițiuni din teoria funcțiunilor și a numeroase aplicațiuni analitice.

Demonstrația precedentă a acestei teoreme a fost dată de Riemann. D-l *Goursat* a dat o demonstrațiune a teoremei lui Cauchy (Cours d'Analyse, t. II), fără a pune $f(z)$ sub forma (1) și fără a presupune continuitatea derivatei $f'(z)$, pe când demonstrațiunea lui Riemann, fiind bazată pe formula lui Green, presupune continuitatea dezivatelor parțiale ale funcțiunilor P și Q și prin urmare a derivatei $f'(z)$.

290. *Demonstrațiunea teoremei lui Cauchy de către D-l Goursat.* Fie $f(z)$ o funcțiune de z, despre care se presupune că este continuă într'o regiune dată și că admite o derivată în fiecare punct al acestei regiuni. Ceeace însemnează că fiind dat un punct oarecare ζ situat în aceà regiune și un ε pozitiv, arbitrar de mic, există un ϱ pozitiv astfel că în domeniul $|z-\zeta| \leq \varrho$, avem inegalitatea

$$\left| \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Fie C o curbă închisă, rectificabilă, situată în aceà regiune considerată și A aria interioară acestei curbe. Voim să arătăm că este posibil a descompune A prin linii transversale în compartimente σ_i astfel că fiind dat ε, există în fiecare σ_i un punct z_i, interior sau pe contur, pentru care avem

$$\left| \frac{f(z)-f(z_i)}{z-z_i} - f'(z_i) \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

când z descrie conturul lui σ_i.

Pentru mai multă claritate să presupunem că transversalele sunt linii drepte paralele cu axele de coordonate și egal depărtate între ele. Obținem astfel două feluri de compartimente: pătrate şi compartimente cuprinse în pătrate, având conturul lor format din segmente de laturi ale unui pătrat şi din câte un arc al curbei C. Dacă în fiecare compartiment σ_i există un punct z_i pentru care inegalitatea (2) este satisfăcută, z fiind un punct oarecare al conturului respectiv, teorema este demonstrată. Dacă sunt compartimente cari nu împlinesc această condiţiune, le subdividem în compartimente mai mici unind mijloacele laturilor opuse, pe când compartimentele cari înplinesc condiţiunea rămân neatinse. Dacă compartimentele subdivizate împlinesc condiţiunea (2), ne oprim acì; în cazul contrar, subdividem pe cele ce nu împlinesc condiţiunea. Continuân dîn acelaş mod, ajungem, după un număr limitat de operaţiuni, ca toate compartimentele să împlinească conditiunea (2).

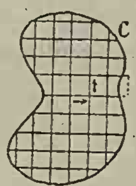

Fig. 27

In adevăr, să presupunem că nu este aşà şi fie σ unul din compartimentele iniţiale ce nu împlinesc condiţiunea (2); s_1 unul din compartimentele lui subdivizate, care deasemenea nu împlineşte aceà condiţiune. Fie s_2 un compartiment subdivizat al lui s_1, care de asemenea nu înplineşte condiţiunea cerută, etc. Prin aceste subdiviziuni obţinem un şir de compartimente

$$s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots,$$

fiecare cuprins în cel precedent fără să atingem unul care să împlinească condiţiunea (2). Aceste compartimente ale căror dimensiuni tind către zero, determină un punct limita ζ, interior tuturor acestor compartimente sau pe periferia lor, în domeniul căruia, prin urmare, este imposibilă inegalitatea (2), în care $z_i = \zeta$. Ceeace este în contradicţiune cu inegalitatea (1). Teorema este aşadar demonstrată.

Descompunerea ariei A fiind astfel realizată, să considerăm integrala $\int f(z)\,dz$ dealungul conturului fiecărui compartiment, în sensul pozitiv. Suma tuturor integralelor astfel obţinute este egală cu integrala $\int f(z)dz$ luată în acelaş sens dealungul conturului C. Căci latura unui compartiment, care nu aparţine conturului C, fiind comună la două compartimente vecine, este descrisă de două ori în sensuri inverse şi prin urmare integralele corespunzătoare se distrug. Nu rămân dar decât acele integrale cari sunt luate dealungul ariilor aparţinând conturului şi a căror sumă constituie conturul C.

Reprezintând prin c_i conturul compartimentului σ_i, avem

$$\int_C f(z)dz = \Sigma \int_{c_i} f(z)dz. \tag{3}$$

Chestiunea revine a evaluà suma din membrul al doilea. Pentru aceasta, să ne referim la inegalitatea (2) care se poate scrie

$$(4) \qquad f(z) = [f(z_i) - z_i f'(z_i)] + z f'(z_i) + \varepsilon_i (z - z_i), \; |\varepsilon_i| < \varepsilon;$$

de unde

$$(5) \qquad \int_{c_i} f(z) dz = [f(z_i) - z_i f'(z_i)] \int_{c_i} dz + f'(z'_i) \int_{c_i} z dz + \int_{c_i} \varepsilon_i (z - z_i) dz.$$

Insă integralele

$$\int dz, \quad \int z dz,$$

luate după o curbă închisă c oarecare sunt nule. In adevăr, fie $z_0, z_1, \ldots z_n, z_{n+1}, (z_{n+1} = z_0)$, $n+1$ puncte ale curbei, n fiind un număr întreg destul de mare și punctele destul de apropiate între ele, pentru ca $|z_{i+1} - z_i| < \delta$, δ fiind un număr pozitiv dat, a cărui limită este zero pentru $n = \infty$. Avem, în virtutea definițiunii,

$$\int_C dz = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n} (z_{i+1} - z_i) = z_0 - z_0 = 0.$$

De asemenea avem

$$\int_C z dz = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n} \zeta_i (z_{i+1} - z_i),$$

ζ_i fiind un punct al curbei cuprins între z_i și z_{i+1}, inclusiv aceste puncte. Dând lui ζ succesiv valorile z_i, z_{i+1}, avem

$$\int_C z dz = \lim \sum_{i=0}^{n} z_i (z_{i+1} - z_i) = \lim \sum_{i=0}^{n} z_{i+1} (z_{i+1} - z_i),$$

sau, făcând suma membrelor din urmă,

$$\int_C z dz = \tfrac{1}{2} \lim \sum_{i=0}^{n} (z_{i+1} + z_i)(z_{i+1} - z_i)$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim \sum_{i=0}^{n} (z^2_{i+1} - z^2_i) = z^2_0 - z^2_0 = 0.$$

Egalitatea (5) se reduce dar la cea următoare:

$$(6) \qquad \int_{c_i} f(z) dz = \int_{c_i} \varepsilon_i (z - z_i) dz.$$

Reprezentând prin l_i lungimea conturului c_i și prin λ_i maximul lui $|z - z_i|$ când z descrie acest contur, avem, în virtutea inegalității (2) și a inegalității (1) (§ 283),

$$(7) \qquad \left| \int_{c_i} f(z) dz \right| < \varepsilon l_i \lambda_i .$$

Dacă σ_i este un pătrat cu latura δ_i, avem $l_i = 4\delta_i$, $\lambda_i = \delta_i \sqrt{2}$ și inegalitatea (7) devine

$$(8) \qquad \left| \int_{c_i} f(z) dz \right| < 4\varepsilon \sqrt{2}\, \delta_i^2 = 4 \sqrt{2}\, \varepsilon\, \omega_i\,, (\omega_i = \delta^2_i)\,.$$

Fie σ_k un compartiment limitat de conturul c_k, având pe periferia sa un arc de lungime γ_k al conturului C și cuprins într'un pătrat cu latura δ'_k ; avem, reprezentând prin l'_k și λ'_k cantitățile analoage cu l_i și λ_i,

$$l'_k < 4\delta'_k + \gamma_k\,, \quad \lambda'_k \leqq \delta'_k \sqrt{2}$$

și prin urmare

$$(9) \qquad \left| \int_{c_k} f(z) dz \right| < \varepsilon \sqrt{2} (4\omega'_k + \gamma_k \delta'_k)\,,$$

ω'_k fiind suprafața pătratului care cuprinde compartimentul σ'_k.

Reprezentând prin δ cel mai mare dintre laturile δ_i, δ_k și prin l lungimea curbei C, avem, *a fortiori*, pentru integrala totală:

$$(10) \qquad \left| \int_{C} f(z) dz \right| < \varepsilon \sqrt{2}\, [4\, (\Sigma\omega_i + \Sigma\omega_k) + \delta l].$$

Reprezentând prin A aria unui poligon care conține în interiorul lui toate pătratele (δ_i), (δ'_k), putem scrie

$$(11) \qquad \int_{C} f(z) dz < \varepsilon \sqrt{2}\, (4A + \delta l)\,.$$

Membrul întâiu al acestei inegalități având o valoare constantă și membrul al doilea fiind produsul cantității $4A + \delta l$, a cărei valoare este finită, printr'un factor care poate deveni mai mic ca orice cantitate dată, când facem ca laturile pătratelor să tindă către zero, rezultă că membrul întâi este nul. De unde egalitatea:

$$\int_{C} f(z) dz = 0\,.$$

q. e. d.

291. *Observare.* Teorema lui Cauchy nu încetează de a fi adevărată dacă nu impunem funcțiunii $f(z)$ condițiunea de a fi olomorfă *și pe contur*, ci numai de a fi olomorfă în interiorul ariei și *continuă* pe conturul care limitează aria.

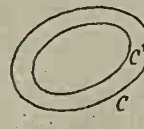

Fig. 28

In adevăr, să presupunem că o rază vectoare dusă dintr'un punct interior al ariei, întâlnește conturul C într'un singur punct. Luând punctul interior ca origină, să facem substituțiunea

$$z' = (1 - \varrho) z,$$

ϱ fiind un număr pozitiv mai mic decât 1. Curbei închise C descrisă de z va corespunde astfel o curbă închisă C′ interioară lui C. Să considerăm diferenţa

$$\Delta = \int_C f(z)dz - \int_{C'} f(z)dz = \int_C \Big[f(z) - (1-\varrho) f\left[(1-\varrho)z\right]\Big] dz$$

$$= \int_C \Big[f(z) - f\left[(1-\varrho)z\right]\Big] dz + \varrho \int_C f\left[(1-\varrho)z\right] dz.$$

Însă, în virtutea continuităţii uniforme a funcţiunii $f(z)$ în interiorul ariei şi pe contur, rezultă că la un ε pozitiv arbitrar de mic corespunde o valoare pozitivă pentru ϱ, care tinde către zero în acelaş timp cu z, astfel că

$$|f(z) - f[(1-\varrho)z]| < \varepsilon,$$

oricare ar fi punctul z pe curba C. Avem aşa dar

$$|\Delta| < \varepsilon l + \varrho l \mathrm{M},$$

M fiind maximul lui $|f(z)|$ pe curba C şi l lungimea acestei curbe. Membrul întâi al acestei inegalităţi fiind constant şi membrul al doilea putând fi oricât de mic voim, rezultă că Δ este nul. De altă parte, integrala

$$\int_{C'} f(z)dz$$

fiind nulă, în virtutea teoremei lui Cauchy, conchidem că şi integrala propusă este nulă, adică

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Dacă raza vectoară întâlneşte conturul în mai multe puncte, descompunem prin transversale convenabile aria dată în arii parţiale astfel ca conturul fiecăreia să împlinească condiţiunea precedentă. Transversalele fiind descrise în sensuri opuse, integralele luate dealungul lor se distrug două câte două, astfel că integrala luată după conturul primitiv este nulă.

292. Teorema lui Cauchy subsistă şi în cazul unei arii cu contur multiplu. Trebuie înţeles în acest caz că variabila z descrie toate curbele, cari formează conturul în *acelaş sens în raport cu aria ce ele limitează.*

Să considerăm, de exemplu, aria limitată de un contur dublu, format de curbele C şi C′, cea de a doua fiind interioară celei dintâiu. Unind printr'o linie ab un punct a al curbei C cu un punct b al curbei C′, luate amândouă după voie, transformăm aria dată într'o arie al cărui contur simplu este $aCabC'ba$ (fig. 29). Teorema lui Cauchy aplicându-se acestui contur, putem scrie

$$(aCa) + (ab) + (bC'b) + (ba) = 0,$$

parentezele reprezintând valorile integralei $\int f(z)dz$ luată după drumurile respective și în sensul indicat de ordinea literilor.

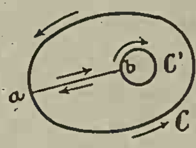

Fig. 29

Insă $f(z)$ fiind o funcțiune olomorfă în interiorul ariei mărginită de curbele C și C′, valorile ce primește această funcțiune dealungul liniei ab sunt aceleași, *înainte și după ce* z descrie curba interioară C′; deci

$$(ab) + (ba) = 0,$$

și prin urmare

$$(aCa) + (bC'b) = 0,$$

sau

$$(6) \qquad \int_C f(z)dz + \int_{C'} f(z)dz = 0.$$

Teorema lui Cauchy se justifică în acelaș mod, oricare ar fi ordinul de multiplicitate al conturului; căci putem transformà aria dată într'o arie cu contur simplu, introducând linii auxiliare ca în exemplul de mai sus.

Aceste linii fiind descrise de două ori în sens invers, integralele dealungul lor se distrug și rămân numai integralele luate după curbele închise cari formează conturul primitiv dat.

Reprezentând, de aci înainte, prin $\int_{C'}$, integrala luată în sensul pozitiv în raport cu aria ce curba C′ cuprinde în *interiorul* său, egalitatea (6) se va scrie

$$(7) \qquad \int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz.$$

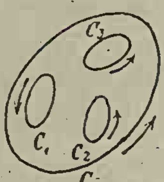

Fig. 30

In cazul unui contur multiplu format de n curbe închise $C_1, C_2, \ldots C_n$, exterioare între ele și de o curbă închisă C care le conține pe toate în interiorul său, avem egalitatea

$$(8) \quad \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \ldots + \int_{C_n} f(z)dz,$$

curbele de integrațiune fiind descrise toate în acelaș sens în raport cu aria ce fiecare cuprinde în interiorul său (fig. 30).

Rezultatul exprimat prin egalitatea (8) se enunţă în modul următor:

Dacă $f(z)$ este o funcţiune olomorfă într'o arie cu conexiune multiplă, continuă pe conturul care limitează aria şi care este format de un număr dat de curbe închise, una din ele conţinând pe toate celelalte, cari sunt exterioare între dânsele, integrala luată după curba exterioară este egală ca suma integralelor după curbele interioare, luate în acelaş sens în raport cu aria ce fiecare cuprinde în interiorul său.

293. *Consecinţă.* Din teorema lui Cauchy, rezultă următoarea consecinţă de o importanţă fundamentală:

Fie $f(z)$ o funcţiune olomorfă într'o arie dată (A) cu *conexiune simplă*, z_0 şi Z două puncte oarecari situate în această arie; integrala

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz,$$

luată dela punctul z_0 la punctul Z, este independentă de drumul care uneşte aceste două puncte, pe cât timp acest drum este cuprins în interiorul lui (A).

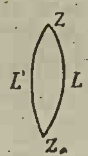

Fig. 31

In adevăr, fie L şi L′ două linii situate în aria (A) şi unind între ele punctele z_0 şi Z. Presupunând că aceste linii nu se taie, avem

$$\int_{z_0LZ} f(z)dz + \int_{ZL'z_0} f(z)dz = o\,;$$

de unde

$$\int_{L} f(z)dz = \int_{L'} f(z)dz\,, \tag{9}$$

integralele fiind luate în ambele membre dela z_0 la Z.

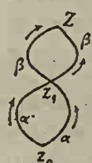

Fig. 32

Egalitatea (9) subsistă şi în cazul când liniile L şi L′ se taie într'un număr oarecare de puncte. Să presupunem că ele se taie într'un punct z_1; avem (fig. 32).

$$(z_0\alpha z_1) = (z_0\alpha' z_1),$$
$$(z_1\beta Z) = (z_1\beta' Z)\,;$$

de unde, făcând suma acestor egalităţi,

$$(z_0\alpha z_1\beta Z) = (z_0\alpha' z_1\beta' Z)\,.$$

Propoziţiunea exprimată de egalitatea (9) se poate enunţà în modul următor: integrala $\int_L f(z)\,dz$ *rămâne neschimbată dacă* *linia L, ale cărei extremităţi rămân fixe, se deformează într'un mod oarecare fără a întâlnì un punct în care $f(z)$ încetează de a fi olomorfă.*

294. *Teoremă. Dacă $f(z)$ este o funcţiune olomorfă într'o regiune dată, integrala*

$$(10) \qquad F(z) = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz,$$

în care limita superioară este variabilă şi drumul de integraţiune nu iese din regiunea considerată, este o funcţiune continuă având ca derivată $f(z)$.

In adevăr, $Z+h$ fiind un punct situat în regiunea dată, avem

$$(11) \qquad F(Z+h) - F(Z) = \int_{Z}^{Z+h} f(z)dz.$$

Fie M modulul maximum al lui $f(z)$ dealungul arcului de integraţiune, care uneşte punctele Z şi $Z+h$, şi l lungimea acestui arc; vom avea inegalitatea

$$(12) \qquad |F(Z+h) - F(Z)| < Ml,$$

care exprimă că funcţiunea F(Z) este continuă în regiunea considerată.

Pentru a arătà că avem

$$F'(Z) = f(Z),$$

să scriem, conform definiţiunii integralei definite,

$$\int_{Z}^{Z+h} f(z)dz = \lim \Sigma (z_{k+1} - z_k) f(\zeta_k).$$

Insă, presupunând $|h|$ destul de mic, putem scrie

$$f(\zeta_k) = f(Z) + \varepsilon_k, \quad |\varepsilon_k| < \varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic. Aşa dar

$$\int_{Z}^{Z+h} f(z)dz = f(Z) \lim \Sigma (z_{k+1} - z_k) + \lim \Sigma \varepsilon_k (z_{k+1} - z_k).$$

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că drumul de integraţiune este o linie dreaptă, căci în aria considerată, valoarea integralei este independentă de forma acestui drum. Egalitatea precedentă se va scrie

$$\int_{Z}^{Z+h} f(z)dz = hf(Z) + R,$$

unde

$$|R| = \lim |\Sigma \varepsilon_k (z_{k+1} - z_k)| < \varepsilon |h|.$$

Reprezentând prin λ o cantitate complexă convenabilă, având un modul mai mic ca unitatea, putem scrie

$$R = \lambda \varepsilon h .$$

Aşa dar avem

$$F(Z+h) - F(Z) = h[f(Z) + \lambda\varepsilon] ;$$

de unde

$$\lim_{h=0} \frac{F(Z+h)-F(Z)}{h} = f(Z) . \tag{13}$$

q. e. d.

Funcţiunea $F(z)$ se zice funcţiunea *primitivă* a funcţiunii $f(z)$. Expresiunea sa generală este

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz + C ,$$

C fiind o constantă arbitrară. De unde $C = F(z_0)$ şi

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz = F(Z) - F(z_0) .$$

Corolar. Dacă aria în care se mişcă punctul z este cu *conexiune simplă*, $F(z)$ este o funcţiune olomorfă în aceà regiune. Este de ajuns a arătà că $F(z)$ are o valoare unică în fiecare punct, adică este o funcţiune uniformă. Această proprietate rezultă imediat din faptul că toate drumurile, cari unesc un punct fix arbitrar cu un punct variabil Z, dau aceiaş valoare pentru integrala

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz .$$

Nu este însă tot aşà dacă aria este cu *conexiune multiplă*. Căci, într'o asemenea regiune, două linii L şi L', cari unesc aceleaşi puncte z_0, Z, pot cuprinde între ele o arie în care funcţiunea $f(z)$ nu este olomorfă, aşà încât integrala să primească diferite valori după cele două drumuri.

295. Integrala

$$\int_{C} f(z)\, dz ,$$

luată după o curbă închisă C, poate fi nulă şi în cazul când $f(z)$ ar devenì discontinuă într'unul sau mai multe puncte situate în *interiorul* acestei curbe. Este de ajuns ca funcţiunea primitivă $F(z)$ să fie uniformă în aria limitată de curba C; căci, în acest caz, valoarea finală a integralei este egală cu valoarea sa inițială. Astfel avem

$$\int_C \frac{d\,f(z)}{dz}\,dz = 0,$$

$f(z)$ fiind o funcțiune uniformă în interiorul curbei C și continuă dealungul acestei curbe.

Aplicațiune. Integrala

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n},$$

luată după curba închisă C, în interiorul căreia se află punctul a este nulă, dacă n este un număr întreg mai mare ca 1.

Nu este tot așà dacă $n = 1$. In acest caz, din punctul a ca centru să descriem un cerc (r) cu o rază r destul de mică, pentru ca el să fie cuprins în interiorul curbei C. Vom aveà

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{(r)} \frac{dz}{z-a}.$$

Pentru evaluarea integralei din membrul al doilea, să facem schimbarea de variabilă

$$z - a = re^{it}.$$

Făcând t să varieze dela 0 la 2π, z descrie cercul (r) în sensul pozitiv. Așadar

$$\int_{(r)} \frac{dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} dt = 2i\pi;$$

prin urmare

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2i\pi.$$

296. *Integrala lui Cauchy. — Teoremă: Fie $f(z)$ o funcțiune olomorfă în interiorul unei curbe închise C și continuă pe această curbă. Dacă x este un punct oarecare în interiorul curbei C, avem*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz, \tag{1}$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv.

In adevăr, din punctul x ca centru să descriem un cerc (r) interior curbei C. Funcțiunea

$$\frac{f(z)}{z-x}$$

fiind olomorfă în aria mărginită de curba C și de cercul (r), avem egalitatea

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \int_{(r)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

care se poate scrie

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \int_{(r)} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,dz + f(x)\int_{(r)} \frac{dz}{z-x}.$$

Insă putem presupune r destul de mic pentru ca, ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic, să avem

$$|f(z)-f(x)| < \varepsilon;$$

prin urmare

$$\left|\int_{(r)} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{r}\,2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

Membrul întâi fiind independent de r [1]) și prin urmare independent de ε, rezultă că este riguros nul.

Avem așadar

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = f(x)\int_{(r)} \frac{dz}{z-x} = 2i\pi\, f(x);$$

de unde, *formula fundamentală a lui Cauchy:*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(x)}{z-x}\,dz.$$

q. e. d.

298. Integrala

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

poartă numele de *integrala lui Cauchy.* Egalitatea (1) ne arată că valoarea funcțiunii olomorfe $f(x)$ este determinată *în orice punct x interior curbei C*, dacă cunoaștem valorile sale dealungul curbei. Dacă $f(z)$ păstrează o valoare constantă A pe contur, avem în interiorul ariei $f(x) = A$, adică funcțiunea se reduce la o constantă, având aceiaș valoare ca pe contur.

---

[1]) Cercul (r) fiind interior curbei C, integrala nu variază împreună cu r, căci avem

$$\int_r = \int_C$$

Consecinţă. Fie $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, x, y variabile reale şi u, v funcţiuni reale de aceste variabile. Ipoteza de mai sus asupra lui $f(z)$ fiind aceiaş, urmează că valoarea acestei funcţiuni în orice punct interior curbei C este determinată, dacă cunoaştem valorile funcţiunilor u şi v dealungul acestei curbe. Insă, dacă una din aceste două funcţiuni este dată, cealaltă este determinată, abstracţiune făcând de o constantă. Prin urmare, este de ajuns a cunoaşte una din aceste două funcţiuni dealungul conturului şi valoarea celeilalte într'un punct al acestui contur, pentru ca funcţiunea $f(z)$ să fie determinată în orice punct interior.

299. *O funcţiune olomorfă într'o regiune dată admite derivate de orice ordin în aceà regiune.*

Prin definiţiune, funcţiunea admite o derivată de ordinul întâi. Să calculăm această derivată, considerând funcţiunea $f(x)$ exprimată cu ajutorul integralei lui Cauchy,

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z - x}\,dz,$$

x fiind în interiorul curbei C. Inlocuind x prin $x + h$, $|h|$ fiind destul de mic, avem

$$(2) \qquad f(x+h) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z - x - h}\,dz.$$

Scăzând aceste două egalităţi una din alta, şi divizând cu h, obţinem

$$(3) \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z - x)(z - x - h)}\,dz.$$

Insă, avem identitatea

$$\frac{1}{(z-x)(z-x-h)} = \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(z-x)^2(z-x-h)};$$

prin urmare egalitatea (3) se poate scrie

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(x)}{(z-x)^2}\,dz + \frac{h}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^2(z-x-h)}.$$

Integralele din membrul al doilea sunt evident finite pe cât timp punctele x, $x + h$ sunt în interiorul curbei de integraţiune, a cărei lungime este, prin ipoteză, finită. De unde rezultă, făcând $h = 0$,

$$(4) \qquad f'(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z - x)^2}\,dz.$$

Derivata se obţine, după cum se vede, derivând în raport cu x funcţiunea de sub semnul $\int$.

Aplicând egalităţii precedente operaţiuni analoage cu cele ce am aplicat egalităţii (1), recunoaştem că $f'(x)$ admite, în interiorul curbei C, o derivată ce se obţine după aceiaş regulă, anume

$$(5) \qquad f''(x) = \frac{1.2}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-x)^3}\,dz.$$

De unde, rezultă că derivata $f'(x)$ este, în interiorul curbei C, o funcţiune continuă de x. Dacă ţinem seamă că teorema fundamentală a lui Cauchy a fost stabilită pe baza că funcţiunea de variabilă complexă $f(z)$ admite o derivată, fără a presupune continuitatea acestei derivate, vedem, plecând dela integrala lui Cauchy, care este o consecinţă a acelei teoreme, că existenţa derivatei funcţiunii $f(z)$ implică şi continuitatea ei. Acest rezultat micşorează numărul condiţiunilor necesare ca o funcţiune de variabilă complexă, în sensul general, să fie o funcţiune monogenă, după Cauchy. Este de ajuns, pentru aceasta, ca funcţiunea să fie continuă, în regiunea considerată, şi să admită o derivată.

Integrala din membrul al doilea (4) având o valoare unică în fiecare punct x interior curbei C, rezultă că derivata $f'(x)$ este olomorfă în interiorul acestei curbe.

Se demonstră în acelaş mod existenţa derivatelor de orice ordin ale funcţiunii $f(z)$ cari se obţin derivând sub semnul $\int$. Avem formula generală

$$(6) \qquad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\,dz,$$

n fiind un număr întreg pozitiv oarecare. Aşa dar, *o funcţiune olomorfă într'o regiune dată admite derivate de orice ordin, funcţiuni olomorfe în aceiaş regiune.*

300. *Consecinţă.* Din formula (6) rezultă că avem

$$(7) \qquad \left| f^{(n)}(x) \right| = \frac{n!}{2i\pi}\left| \int_C \frac{f(x)}{(x-x)^{n+1}}\,dz \right|.$$

Dacă curba de integraţiune C este un cerc cu raza r având centrul în x şi M este maximul lui $|f(z)|$ dealungul acestui cerc, rezultă inegalitatea

$$(8) \qquad \left| f^{(n)}(x) \right| \leqq \frac{n!}{r^n}\,\mathrm{M}.$$

301. *Teoremă (Riemann). Fie $f(z)$ o funcţiune olomorfă într'o arie A, limitată de un contur C, pusă sub forma*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (z = x + iy),$$

u şi v fiind funcţiuni reale de variabilele reale x, y; avem inegalitatea

$$\int_C u dv > 0,$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv.

In adevăr, aplicând formula lui Green, avem

$$\int_C u dv = \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\, dy,$$

egalitate, care în virtutea ecuaţiunilor lui Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

devine

$$\int_C u dv = \iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

De unde rezultă că integrala din membrul întâiu nu poate fi negativă. Ea n'ar puteà fi nulă decât dacă am aveà

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

şi prin urmare, în virtutea ecuaţiunilor de mai sus ale lui Cauchy, ar rezultà

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

adică funcţiunile u şi v ar fi constante în toată aria A. Integrala considerată este aşa dar pozitivă. q. e. d.

302. Să dăm aci o teoremă datorită matematicianului italian *Morera*, care poate fi privită ca reciproca primei teoreme a lui Cauchy.

Teoremă. Fie $f(z)$ o funcţiune de variabila complexă z, continuă într'o arie dată (A) şi C o curbă închisă arbitrară, de lungime finită, situată în această arie; dacă avem

$$\int_C f(z) dz = 0,$$

funcţiunea $f(z)$ este olomorfă în (A).

Fie x_0 un punct fix şi x un punct variabil în (A). In virtutea ipotezei, integrala

$$(1) \qquad \int_{x_0 L x} f(z)dz,$$

luată dela x_0 la x după un drum oarecare L situat în (A), este independentă de acest drum; căci oricare alt drum, care uneşte acele puncte, formează cu cel dintâi o curbă închisă dealungul căreia integrala $\int f(z)dz$ este nulă. Integrala (1) este aşa dar o funcţiune determinată de x; s'o reprezentăm prin $F(x)$:

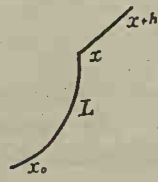

Fig. 33

$$(2) \qquad F(x) = \int_{x_0 L x} f(z)dz.$$

Fie acum $x + h$ un punct vecin cu x, cuprins în (A) şi să considerăm diferenţa

$$(3) \qquad \Delta F(x) = F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(z)dz,$$

în care putem presupune că drumul de integraţiune $(x, \ldots x+h)$ este în linie dreaptă. Să punem

$$f(z) = f(x) + \varrho.$$

In virtutea continuităţii lui $f(z)$, la un ε pozitiv, arbitrar de mic, corespunde un număr δ pozitiv, astfel ca să avem

$$|\varrho| < \varepsilon \text{ pentru } |h| < \delta.$$

Egalitatea (3) devine

$$\Delta F(x) = hf(x) + \int_x^{x+h} \varrho dz;$$

prin urmare

$$|\Delta F(x) - hf(x)| < \varepsilon |h|.$$

De unde

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta F(x)}{h} = f(x),$$

adică funcţiunea $F(x)$ admite o derivată determinată în fiecare punct al ariei şi anume

$$(4) \qquad F'(x) = f(x).$$

Funcţiunea $F(x)$ este aşà dar olomorfă în aria (A) şi prin urmare derivata sa, adică $f(x)$, este olomorfă în aceiaş arie. q. e. d.

303. *Aplicațiune. Altă demonstrațiune a teoremei lui Weierstrass* (§ 157). Fie

$$f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$$

un șir nelimitat de funcțiuni olomorfe într'o arie cu conexiune simplă (A); *dacă seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{5}$$

este uniform convergentă, ea reprezintă o funcțiune olomorfă în (*A*).

In adevăr, seria (5), fiind uniform convergentă, definește o funcțiune $f(x)$ continuă în (A) (93). Să considerăm seria

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z)dz, \tag{6}$$

C fiind o curbă închisă oarecare, situată în (A). Integralele din membrul al doilea fiind toate nule, avem

$$\int_C f(x)dz = 0.$$

De unde conchidem, în virtutea teoremei precedente, că $f(x)$ este o funcțiune olomorfă în (A).

304. *Teoremă asupra seriei Taylor* (*Cauchy*). *Dacă* $f(x)$ *este o funcțiune olomorfă într'o regiune* (*A*) *și* x_0 *un punct oarecare interior acestei regiuni, funcțiunea* $f(x)$ *se desvoltă într'o serie întreagă de* $(x-x_0)$, *convergentă în cel mai mare cerc cu centrul în* x_0, *situat în interiorul lui* (*A*).

In adevăr, fie (R) un cerc cu centrul în x_0, situat în regiunea considerată și x un punct oarecare interior acestui cerc; vom avea expresiunea lui $f(x)$ dată de integrala lui Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x} dz. \tag{1}$$

Punctul z fiind pe cerc, rezultă inegalitatea

$$\frac{x-x_0}{z-x_0} < 1 \tag{2}$$

și putem scrie

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-x_0-(x-x_0)} = \tag{3}$$

$$\frac{1}{z-x_0} + \frac{x-x_0}{(z-x_0)^2} + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{(z-x_0)^{n+1}} + \ldots$$

Multiplicând ambele membre cu $\frac{1}{2i\pi} f(z)dz$ și integrând dealungul cercului (R) în sensul pozitiv [1]), obţinem. în virtutea egalităţii (1), seria

$$(4)\quad f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots,$$

ai cărei coeficienţi sunt daţi de integralele finite şi determinate

$$(5)\qquad a_n = \frac{1}{2i\mathrm{R}}\int_{(\mathrm{R})} \frac{f(z)}{(z-x_0)^{n+1}}\,dz,$$

sau încă de expresiunile

$$a_n = \frac{f_n(x_0)}{n!}\quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Teorema lui Cauchy este deci demonstrată.

Această teoremă se mai poate enunţà sub forma următoare:

O funcţiune $f(x)$ olomorfă în domeniul unui punct x_0 se desvoltă într'o serie întreagă de $(x-x_0)$, convergentă în cercul cu centrul în x_0 şi trecând prin cel mai apropiat punct în care funcţiunea $f(x)$ încetează de a fi olomorfă.

Un punct în care o funcţiune analitică $f(x)$ încetează de a fi olomorfă se numeşte punct *singular* al funcţiunii.

305. Dacă $x_0 = 0$, seria (4) devine

$$(7)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

şi valorile coeficienţilor sunt date de expresiunile

$$(8)\qquad a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\mathrm{R})} \frac{f(z)^0}{z^{n+1}}\,dz = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Egalitatea (7) este valabilă în interiorul cercului cu centrul în punctul $x_0 = 0$ şi trecând prin cel mai apropiat punct în care $f(x)$ încetează de a fi olomorfă. In ce priveşte cercul de integraţiune (R), dealungul căruia se determină integralele (8), el este concentric şi interior celui precedent.

306. *Identitatea celor două definiţiuni ale funcţiunii analitice, după Cauchy şi Weierstrass.*

O funcţiune analitică $f(x)$ în sensul lui Weierstrass este, în domeniul oricărui punct ordinar, o funcţiune continuă de x şi admite o derivată $f'(x)$ continuă în acelaş domeniu; ea împlineşte deci condiţiunile unei funcţiuni monogene, după Cauchy.

Viceversa. Funcţiunea monogenă definită de Cauchy se poate reprezintà, precum am văzut mai sus, printr'o serie $\mathrm{P}(x-x_0)$

[1]) Integraţiunea unei serii uniform convergente se obţine integrând termenii seriei. Aceeaş demonstraţiune ca în cazul variabilei reale.

în domeniul oricărui punct x_0, diferit de un punct singular, convergentă într'un cerc având acest punct ca centru şi o rază diferită de zero, prin urmare, ea intră în clasa funcţiunilor analitice, după Weierstrass.

Aşà dar, deşi punctele de plecare în definiţiunea funcţiunii analitice, după Cauchy şi Weierstrass, sunt cu totul diferite, funcţiunea analitică este aceiaş în ambele cazuri. Putem dar zice că *cele două definiţiuni sunt identice.*

307. Să revenim la formula

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(x)}{z-x}\,dz,$$

care dă expresiunea funcţiunii $f(x)$, olomorfă în interiorul curbei C şi continuă pe contur, cu ajutorul unei integrale (integrala lui Cauchy). Din această formulă rezultă, precum am mai văzut, că valoarea funcţiunii $f(x)$ într'un punct interior x oarecare este determinată, dacă valorile sale sunt date pe contur. Să observăm însă că valorile funcţiunii dealungul conturului nu pot fi date în mod arbitrar. In adevăr, funcţiunea $f(x)$ fiind continuă în interiorul curbei şi pe curbă, rezultă că dacă un punct interior x tinde către un punct z_0 al lui C, dealungul unui drum care nu întâlneşte curba decât în punctul z_0, avem egalitatea

$$\lim_{x=z_0} f(x) = f(z_0),$$

adică valoarea funcţiunii $f(z)$ în punctul z_0 este cantitatea determinată (nu arbitrară) către care tinde $f(x)$ când x descrie drumul considerat. Ceeace justifică aserţiunea noastră.

308. Să presupunem definită funcţiunea $f(z)$ dealungul curbei C, continuă pe această curbă. Ce se poate spune despre integrala

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

luată în sensul pozitiv, x fiind un punct oarecare în planul lui z?..

Această integrală are în fiecare punct x, care nu se află pe C, o valoare evident bine determinată. Să punem

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz;$$

avem derivata

$$F'(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-x)^2}\,dz,$$

deasemenea bine determinată. Funcţiunea $F(x)$ este deci o funcţiune olomorfă în interiorul curbei C, diferită însă, în genere, de $f(x)$, precum vom vedea mai târziu, dacă $f(z)$ nu este olomorfă în interiorul acestei curbe [1]. In tot planul exterior curbei C, $F(x)$ reprezintă deasemenea o funcţiune olomorfă, care nu coincide cu cea corespunzătoare ariei interioare curbei [2].

Pe curbă integrala n'are sens. Avem astfel o expresiune analitică care, în două domenii diferite, reprezintă două funcţiuni olomorfe diferite.

Dacă funcţiunea $f(z)$ este olomorfă în interiorul curbei C, avem $F(x) = f(x)$, pentru x interior şi $F(x) = 0$ pentru x exterior curbei.

309. Să considerăm, după *Hermite*, un exemplu mai general.

Fie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ n curbe închise exterioare între ele şi $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x)$ n funcţiuni olomorfe respectiv în interiorul acestor curbe şi continue pe contururile corespunzătoare. Expresiunea

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_1} \frac{f_1(z)}{z-x}dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_2} \frac{f_2(z)}{z-x}dz + \ldots + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} \frac{f_n(z)}{z-x}dz$$

coincide respectiv cu funcţiunile considerate după cum x este în interiorul curbelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$ şi este egala cu zero dacă x este exterior tuturor acestor curbe.

Avem astfel un exemplu de *expresiune analitică*, care în diferite regiuni ale planului reprezintă diferite funcţiuni olomorfe independente între ele. Integralele lui Cauchy joacă aci rolul pe care seriile de funcţiuni raţionale îl joacă, în chestiuni analoage, în teoria lui Weierstrass.

CAPITOLUL XV.

FUNCŢIUNI ARMONICE.

Câteva proprietăţi ale funcţiunilor armonice deduse din proprietăţile funcţiunilor de variabilă complexă.

310. Fie $f(z)$ o funcţiune olomorfă într'o regiune (A), pusă sub forma

(1) $$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy),$$

u şi v fiind funcţiuni reale de variabilele reale x, y. Prin definiţiune,

---

[1], [2] Teorema reziduurilor.

funcţiunile $u(x, y)$, $v(x, y)$ sunt continue în (A) şi au derivate parţiale de ordinul întâi, finite satisfăcând ecuáţiunile diferenţiale ale lui Cauchy.

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Aceste proprietăţi ale funcţiunilor u şi v sunt suficiente pentru ca din ele să decurgă: 1^0. continuitatea derivatelor de ordinul întâiu şi 2^0 existenţa în (A) a derivatelor de orice ordin.

In adevăr, continuitatea derivatelor de ordinul întâi rezultă din continuitatea derivatei $f'(z)$ a cărei expresiune este

$$(3) \qquad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Pentru a arătà că funcţiunile u şi v admit derivate parţiale de ordinul al doilea, să punem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v_1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_2;$$

prin urmare

$$f'(z) = u_1 + iv_1 = \frac{1}{i}(u_2 + iv_2).$$

Insă $f'(z)$ fiind o funcţiune olomorfă în (A), rezultă că funcţiunile asociate u_1 şi v_1, u_2 şi v_2 au derivate parţiale de ordinul întâi continue satisfăcând ecuaţiunile diferenţiale ale lui Cauchy. Prin urmare, funcţiunile u şi v admit derivate parţiale de ordinul al doilea continue şi ecuaţiunea lui Laplace

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0$$

este satisfăcută de aceste funcţiuni.

Intr'un mod analog, din faptul că $f''(z)$ este olomorfă în (A), se conchide că funcţiunile u şi v au derivate parţiale de ordinul al treilea, continue, etc.

311. Fie acum $u(x, y)$ o funcţiune armonică oarecare, continuă într'o arie (A), adică o funcţiune de două variabile reale, univocă, având derivate parţiale de ordinul întâi şi de ordinul al doilea şi satisfăcând ecuaţiunea lui Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Să asociăm lui u funcţiunea v(x, y) dată de formula

$$\mathrm{v} = \int -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

în care drumul de integraţiune este oarecare situat în (A). Funcţiunile u şi v satisfac dar ecuaţiunile diferenţiale ale lui Cauchy şi prin urmare expresiunea $u + iv$ defineşte o funcţiune analitică de $z = x + iy$, olomorfă în A. De unde rezultă, în virtutea celor văzute în paragraful precedent, că funcţiunea u, adică *o funcţiune armonică oarecare, continuă într'o regiune dată, admite în aceà regiune derivate parţiale de orice ordin.*

312. *Teoremă. O funcţiune armonică u, continuă într'o arie dată şi egală cu o cantitate constantă A dealungul conturului ce limitează aria, este egală cu A în toată aria.*

Fie v o funcţiune *asociată* a lui u, expresiunea $u + iv = f(z)$ este o funcţiune analitică de $z = x + iy$, olomorfă în aria considerată. Insă funcţiunea v fiind constantă, în acelaş timp cu u, fie $\mathrm{v} = \mathrm{B}$; de unde

$$f(z) = \mathrm{A} + i\mathrm{B}$$

dealungul conturului. Prin urmare, avem în toată aria (§ 298)

$$f(z) = \mathrm{A} + i\mathrm{B}, \quad u = \mathrm{A},\ v = \mathrm{B}.$$

Corolar. Două funcţiuni armonice u şi v, continue într'o arie dată precum şi pe contur, egale între ele în toate punctele conturului, sunt egale între ele în toată aria. Căci diferenţa $u - \mathrm{v}$ este o funcţiune armonică în aceiaş arie, nulă dealungul conturului.

313. *Teoremă. Fie u o funcţiune armonică continuă într'o arie (A) şi $z_0 = x_0 + iy_0$ un punct interior ariei. Valoarea funcţiunii în punctul z_0 este egală cu media valorilor sale dealungul unui cerc $|z - z_0| = r$, situat în interiorul ariei (A).*

Pentru a demonstrà această teoremă să asociăm lui u o funcţiune v astfel ca $u + iv = f(z)$ să fie o funcţiune de $z = x + iy$. Această funcţiune, în virtutea ipotezei, este olomorfă în (A). Aplicând formula lui Cauchy, drumul de integraţiune fiind cercul $|z - z_0| = r$, obţinem, punând $z - z_0 = re^{it}$,

$$u_0 + iv_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u + i\mathrm{v})dt \quad (u_0 = u(x_0, y_0),\ v_0 = \mathrm{v}(x_0, y_0));$$

de unde

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u dt = \frac{1}{2\pi r}\int_{(r)} u ds\,,[1] \quad (ds = r dt).$$

q. e. d.

314. *Teoremă. O funcţiune armonică u, continuă într'o arie (A) şi pe conturul ce limitează această arie nu poate atinge valoarea sa maximă saŭ minimă în nici un punct interior lui (A).*

Să presupunem că u atinge valoarea sa maximă M într'un punct interior z_0. Din acest punct ca centru să descriem un cerc situat în interiorul lui (A). Vom aveà dealungul acestui cerc $u \leq$ M. Insă valorile $u <$ M sunt incompatibile cu teorema precedentă, căci am aveà în acest caz $u_0 <$ M; contrar ipotezei. Avem aşà dar dealungul cercului $u =$ M. De unde rezultă că această egalitate subsistă în toată aria cercului. Fie acum z'_0 un punct interior acestui cerc şi destul de aproape de periferie pentru ca un cerc având acest punct ca centru să taie cercul precedent şi să fie interior ariei (A); vom aveà $u =$ M şi în interiorul acestui de al doilea cerc. Continuând în acelaş mod, conchidem că egalitatea subsistă în toată aria (A).

Funcţiunea u ar fi aşa dar o constantă. Ceeace demonstră teorema.

Aceiaş demonstraţiune, înlocuind maximul M prin minimul m, probează că funcţiunea u nu poate atinge valoarea m în nici un punct interior lui (A), dacă ea nu este constantă şi egală cu m.

Se ştie însă, că o funcţiune $u(x, y)$ continuă într'o regiune dată atinge cel puţin odată valoarea sa maximă şi valoarea sa minimă, în câte un punct din aceà regiune. Conchidem că acele puncte nu pot fi situate decât pe conturul ce limitează regiunea.

315. *Corolar.* Fie $f(z)$ o funcţiune analitică olomorfă într'o arie (A) în care ea nu se anulează. Funcţiunea log $| f(z) |$, partea reală o funcţiunii log $f(z)$, fiind armonică şi continuă, maximul precum şi minimul ei în (A) nu este atins decât pe conturul lui (A). Aceiaş concluziune se aplică funcţiunii $| f(z) |$.

---

[1]) Să presupunem un cerc cu raza r împărţit în n părţi egale şi fie $u_1, u_2, \ldots, u_n$ valorile ce funcţiunea $u(x, y)$ primeşte în aceste puncte; media acestor valori este

$$\frac{\sum_1^n u_i}{n} = \frac{\sum_1^n u_i dt}{n dt},$$

care pentru $n = \infty$ devine $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u dt$. Dacă $r \neq 1$, punând $r dt = ds$, această medie se poate scrie

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{(r)} u ds.$$

Propozițiunea subsistă, în ce privește *maximul* lui $|f(z)|$, și în cazul când $f(z)$ se anulează în (A). Căci dacă excludem zerurile funcțiunii prin cercuri foarte mici, maximul cel mai mare, (maximum maximorum) al lui $|f(z)|$, în aria rămasă, este atins pe conturul multiplu astfel format. Insă pe cercurile introduse, $f(z)$ tinde prin ipoteză către zero împreună cu razele acestor cercuri; rezultă că $|f(z)|$ atinge maximul său pe conturul lui (A).

316. *Consecință importantă. Teorema fundamentală a Algebrei. O funcțiune rațională întreagă $f(x)$ admite cel puțin un zero.*

In adevăr, dacă $f(x)$ nu s'ar anula în nici un punct la distanță finită, ar rezultà, în virtutea corolarului precedent, ca în cercul $|x| = R$, R fiind oricât de mare voim, cea mai mică valoare ce poate primì $|f(z)|$ să corespundă unui punct situat pe cerc; ceeace este absurd, căci $|f(x)|$ tinde către infinit împreună cu R.

317. *Integrala lui Poisson.* Fie

$$(1) \qquad f(r) = \sum_0^\infty a_n x^n$$

o serie întreagă convergentă în cercul $|x| = R$. Să punem

$$x = re^{i\theta}, \; f(x) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \; (r < R),$$

u și v fiind funcțiuni reale de r, θ. Fie $\varrho < R$ un număr pozitiv oricât de aproape voim de R, $r < \varrho < R$; vom aveà (5) (§ 114) pentru coeficienții a_n, expresiunea

$$a_n = \frac{1}{\pi\varrho^n}\int_0^{2\pi} u(\varrho,\varphi)e^{-ni\varphi}\,d\varphi, \; (n = 1, 2, \ldots)$$

sau, punând $z = \varrho e^{i\varphi}$,

$$(2) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(\varrho,\varphi)}{z^n}\,d\varphi\,.$$

Coeficientul a_0 nu intră în această formulă; avem însă (8) (§ 305):

$$(3) \quad a_0 = \frac{1}{2i\pi}\int_\varrho \frac{f(z)}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[u(\varrho,\varphi) + iv(\varrho,\varphi)\Big]\,d\varphi\ ^{1)}.$$

Punctul x fiind în interiorul cercului $|x| = \varrho$, seria (1) se va puteà scrie

$$u(r,\theta) + iv(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u + vi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\varrho,\varphi)\sum_1^\infty\left(\frac{x}{z}\right)^n d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(\varrho,\varphi) + iv(\varrho,\varphi)]\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{z - x}\,u(\varrho,\varphi)d\varphi,$$

1) Expresiune care rezultă și din formulele (6) și (8) (§ 114).

sau

$$(4)\quad u(r,\theta) + iv(r,\theta) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\varrho,\varphi)d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z+x}{z-x}u(\varrho,\varphi)d\varphi.$$

De unde rezultă că funcţiunea $u(r, \theta)$ este egală cu partea reală a integralei

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z+x}{z-x}u(\varrho,\varphi)d\varphi,$$

în care trebuie să înlocuim x şi z respectiv cu $re^{i\theta}$, $\varrho e^{i\varphi}$.

Făcând această înlocuire, avem

$$\frac{z+x}{z-x} = \frac{\varrho e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{\varrho e^{i\varphi} - re^{i\theta}},$$

sau, multiplicând ambii termeni ai membrului al doilea cu conjugata numitorului, $\varrho e^{-i\varphi} - re^{-i\theta}$, obţinem

$$\frac{z+x}{z-x} = \frac{\varrho^2 - 2ir\varrho\sin(\varphi-\theta) - r^2}{\varrho^2 - 2r\varrho\cos(\varphi-\theta) + r^2}.$$

Prin urmare

$$(5)\qquad u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\varrho^2 - r^2)u(\varrho,\varphi)}{\varrho^2 - 2r\varrho\cos(\varphi-\theta) + r^2}d\varphi.$$

Integrala din membrul al doilea poartă numele de integrala lui *Poisson*.

Formula precedentă ne dă valoarea funcţiunii armonice $u(r, \theta)$ într'un punct (r, θ), interior cercului $|x| = \varrho$, dacă cunoaştem valorile ce această funcţiune primeşte dealungul cercului.

CAPITOLUL XVI.

TEOREME ŞI DESVOLTĂRI IN SERII, CONSECINŢE ALE INTEGRALEI LUI CAUCHY.

318. *Teorema lui Laurent. O funcţiune $f(x)$ olomorfă într'o coroană cuprinsă între două cercuri concentrice cu centrul în origină, se poate pune, în această regiune, sub forma*

$$P(x) + P_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

P şi P_1 fiind serii întregi respectiv de x şi $\frac{1}{x}$.

Putem presupune funcţiunea continuă pe cele două cercuri; în cazul contrar le înlocuim prin două cercuri concentrice cu cele dintâi şi infinit de apropiate de ele: unul interior celui mai mare şi celalt cuprinzând pe cel mai mic. Fie aşa dar R şi R′ razele celor două cercuri (R), (R′), $R' < R$ şi x un punct oarecare în interiorul coroanei. In jurul punctului x ca centru să descriem un cerc (r) cu o rază r destul de mică pentru ca el să fie cu totul cuprins în interiorul coroanei. Vom aveà egalitatea

$$(1) \qquad \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \int_{(R')} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \int_{(r)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

integralele fiind luate în sensul pozitiv în raport cu ariile interioare celor trei cercuri. Insă funcţiunea $f(z)$ fiind olomorfă în interiorul cercului (r), avem

$$\int_{(r)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = 2i\pi f(x);$$

prin urmare, egalitatea (1) ne dă

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{(R')} \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

Să calculăm integralele din membrul al doilea. In prima integrală avem

$$\left|\frac{x}{z}\right| < 1,$$

prin urmare putem scrie

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{(R)} \frac{f(z}{z}\,dz + \ldots + \frac{x^n}{2i\pi}\int_{(R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \ldots$$

Să punem

$$(3) \qquad a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz, \quad (n = 0, 1. 2, \ldots);$$

vom aveà

$$(4) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = P(x).$$

In a doua integrală avem inegalitatea

$$\left|\frac{z}{x}\right| < 1,$$

care permite a serie

$$\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{x-z} = -\left[\frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{x^n} + \dots\right],$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{(R')} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{x^{-1}}{2i\pi}\int_{(R')} f(z)\,dz + \dots + \frac{x^{n-}}{2i\pi}\int_{(R')} z^{n-1} f(z)\,dz + \dots$$

Punând

$$(5) \qquad b_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(R')} z^{n-1} f(z)\,dz \quad (n = 0, 1, 2. \dots),$$

avem

$$(6) \qquad -\frac{1}{2i\pi}\int_{(R')} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x^{-n} = P_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Inlocuind în (2) integralele prin valorile lor date de egalitățile (4) și (6), obținem rezultatul enunțat

$$(7) \qquad f(x) = P(x) + P_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

q. e. d.

319. *Observare.* Funcțiunea $f(z)$ fiind olomorfă în interiorul coroanei, integralele (3) și (5) cari determină coeficienții a_n și b_n ai seriilor P și P_1 se pot înlocuì respectiv prin

$$\int_{(R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz, \quad \int_{(R)} z^{n-1} f(z)\,dz,$$

luate în acelaș sens, după acelaș cerc (R) concentric cu cercurile primitive și având o rază R cuprinsă între R și R'. Insă aceste integrale se deduc una din alta, dacă înlocuim n prin $-n$; prin urmare reprezentând pe b_n prin a_{-n}, avem, pentru coeficienții seriilor P și P_1, expresiunea unică

$$(8) \qquad a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

și egalitatea (7) se poate înlocuì prin cea următoare

$$(9) \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n.$$

320. Dacă centrul celor două cercuri, cari formează coroana în care funcțiunea $f(x)$ este olomorfă, se găsește într'un punct oarecare x_0, avem în interiorul coroanei

$$(10) \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

valorile coeficienţilor fiind date de integralele

$$(11)\qquad a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(R)} \frac{f(z)}{(z-x_0)^{n+1}}\,dz \quad (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

321. Metoda care ne-a servit mai sus pentru a stabilì teorema lui *Laurent*, conduce la un rezultat mai general. Fie $f(x)$ o funcţiune olomorfă într'o regiune limitată de un cerc având centrul într'un punct $x = a$ şi de mai multe cercuri $C_1, C_2, \ldots, C_n$ interioare celui dintâi şi exterioare între ele, având respectiv centrele în punctele $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Fie x un punct în regiunea considerată şi (r) un cerc cu centrul în x, interior cercului C şi exterior celorlalte cercuri. Exprimând că integrala

$$\int \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

luată după cercul exterior C, este egală cu suma valorilor sale după cercurile interioare, obţinem egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz - \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-x}\,dz - \ldots - \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x}\,dz\right].$$

Observând că în prima integrală din membrul al doilea avem

$$\left|\frac{x-a}{z-a}\right| < 1,$$

iar în celelalte

$$\left|\frac{z-a_k}{x-a_k}\right| < 1, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

deducem desvoltările

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)dz}{z-a-(x-a)}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_C \left[\frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots\right]dz;$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} \frac{f(x)dz}{z-a_k-(x-a_k)}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} \left[\frac{1}{x-a_k} + \frac{z-a_k}{(x-a_k)^2} + \ldots\right]dz;$$

adică

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = P(x-a),$$

$$-\frac{1}{2\,i\pi}\int_{C_k} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = P_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right).$$

Prin urmare avem în regiunea considerată

$$f(x) = \mathrm{P}(x-a) + \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right) + \ldots + \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{(x-a_n)}\right).$$

322. Fie $f(x)$ o funcţiune uniformă şi $x = a$ un punct singular izolat al ei; din acest punct ca centru să descriem un cerc cu o rază R, în interiorul căruia $f(x)$ să nu aibă altă singularitate decât punctul $x = a$. Fie $r < \mathrm{R}$ raza unui al doilea cerc concentric cu cel dintâi; în coroana mărginită de aceste două cercuri, vom aveà

$$f(x) = \mathrm{P}(x-a) + \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

Insă în cazul nostru, r putând fi oricât de mic voim, seria P_1 va fi convergentă în tot planul exceptând punctul a; reprezentând-o prin $\mathrm{G}\left(\frac{1}{(x-a)}\right)$, funcţiunea se va puteà pune, în vecinătatea punctului a, sub forma

$$f(x) = \mathrm{P}(x-a) + \mathrm{G}\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

Seria G caracterizează singularitatea a; acest punct este un *pol* sau un punct singular *esenţial*, după cum numărul termenilor seriei este limitat sau nelimitat.

323. *In domeniul unui punct singular esenţial izolat o funcţiune analitică se poate apropia de o valoare arbitrară, oricât de mult voim.*

Să considerăm mai întâiu funcţiunea $\mathrm{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ întreagă de $\frac{1}{x-a}$. Făcând substituţiunea

$$x - a = \frac{1}{y},$$

prin ajutorul căreia valorilor lui x, vecine cu a, corespund pentru y valori înfinit de mari, obţinem funcţiunea întreagă $\mathrm{G}(y)$. Insă în domeniul punctului $y = \infty$, există valori y pentru cari avem $|\,\mathrm{G}(y)\,| > \mathrm{M}$, M fiind un număr pozitiv oricât de mare voim, precum şi valori pentru cari $\mathrm{G}(y)$ se poate apropià infinit de mult de o cantitate arbitrară dată. Aceleaşi concluziuni rezultă pentru funcţiunea propusă în domeniul punctului $x = a$.

Fie acum $f(x)$ o funcţiune uniformă având punctul $x = a$ ca punct singular esenţial, în vecinătatea căruia nu se găseşte un alt punct singular (pol sau punct singular esenţial). Vom aveà, în domeniul acestui punct

$$f(x) = \mathrm{G}\left(\frac{1}{x-a}\right) + \mathrm{P}(x-a).$$

Insă, precum am văzut, există puncte în vecinătatea lui a în cari $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ poate diferì de o cantitate arbitrară oricât de puţin voim, pe când seria $P(x-a)$ diferă în aceste puncte infinit puţin de valoarea ce are în punctul a; de unde rezultă că în aceleaşi puncte $f(x)$ poate diferì de o cantitate arbitrară oricât de puţin voim.

Demonstraţiunea precedentă nu se aplică dacă punctul a este un punct limită al unui număr nelimitat de poluri. Se poate procedà în modul următor, aplicabil şi cazului considerat mai sus [1]). Fie A o constantă arbitrară şi să considerăm diferenţa

$$f(x)-A.$$

Se poate întâmplà ca această diferenţă să aibă în domeniul (a) un număr nelimitat de zeruri. In aceste puncte vom aveà exact $f(x)=A$. Să presupunem că nu este aşà; prin urmare există un număr pozitiv r destul de mic, astfel că în interiorul cercului $|x-a|=r$, diferenţa considerată n'are nici un zero. In acest caz, raportul

$$\frac{1}{f(x)-A},$$

pentru care punctul $x=a$ este deasemenea punct singular esenţial, nu are în interiorul cercului $|x-a|=r$ alt punct singular decât $x=a$. Prin urmare, în interiorul acestui cerc putem scrie

$$\frac{1}{f(x)-A}=G\left(\frac{1}{x-a}\right)+P(x-a).$$

Insă în vecinătatea lui a există puncte în cari $\left|G\left(\frac{1}{x-a}\right)\right|$ poate fi mai mare ca orice cantitate dată, pe când seria $P(x-a)$ are valori finite; de unde rezultă că în aceste puncte avem

$$\frac{1}{|f(x)-A|}>\frac{1}{\varepsilon},$$

adică

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

oricât de mic ar fi ε. Aşa dar, *în domeniul unui punct singular esenţial izolat* [2]), *o funcţiune analitică uniformă se poate apropià oricât voim de orice cantitate dată finită sau infinită.* Acest rezultat este datorit lui Weierstrass.

D-l E. Picard [3]) a demonstrat că în vecinătatea unui punct

---

[1]) *E. Picard.*

[2]) Izolat relativ la puncte singulare esenţiale.

[3]) Traité d'Analyse, t. III, 2-e édition, pag. 355.

singular esențial izolat, ecuațiunea $f(x) = A$ admite o infinitate de soluțiuni, exceptând cel mult două valori ale lui A, printre cari se poate cuprinde valoarea $A = \infty$.

Astfel funcțiunea $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, pentru care $x = 0$ este un punct singular esențial, poate primì în vecinătatea acestui punct, orice valoare de o infinitate de ori, exceptând valorile 0 și ∞. Funcțiunea $\sin\frac{1}{x}$ poate primì în vecinătatea lui $x = 0$, orice valoare de o infinitate de ori, exceptând valoarea ∞. Funcțiuuea $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ poate primì, în domeniul $x = 0$, orice valoare o infinitate de ori, exceptând valorile $\pm i$.

324. *Seria Fourier.* Plecând dela seria Laurent putem, printr'o schimbare de variabilă convenabilă, să obținem seria lui *Fourier*. Din studiul funcțiunii exponențiale rezultă că, prin substituțiunea

$$(1) \qquad x = e^{it},$$

un dreptunghiu (t), ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate, latura paralelă cu axa reală fiind egală cu 2π, se transformă punct cu punct într'o coroană (x) cuprinsă între două cercuri concentrice, cu centrul în origină.

Dreptunghiul considerat (t) putem să-l înlocuim printr'un altul, a cărui laturе ce voim a face să corespundă laturii egale cu 2π, să aibă o lungime și o direcțiune dată. Fie l lungimea și a unghiul ce această latură face cu axa reală. Să punem

$$(2) \qquad \omega = le^{ia};$$

substituțiunea

$$(3) \qquad t = \frac{2\pi z}{\omega}$$

realizează transformarea dorită. In adevăr, din această substituțiune deducem

$$(4) \qquad t - t_0 = 2\pi\frac{z - z_0}{\omega},$$

t_0 și z_0 fiind două puncte cari se corespund în virtutea substituțiunii. De unde rezultă egalitatea

$$(5) \qquad arg(t - t_0) = arg\frac{z - z_0}{\omega},$$

care arată că unei drepte descrisă de variabila t și trecând prin punctul t_0, paralelă cu axa reală, corespunde pentru z o dreaptă trecând prin punctul z_0, paralelă cu direcțiunea lui ω și că unei drepte perpendiculare pe axa reală în planul (t) corespunde o dreaptă perpendiculară pe direcţiunea lui ω în planul (z). Infine, valoarei

$$|t - t_0| = 2\pi,$$

corespunde valoarea

$$|z - z_0| = |\omega| = l.$$

q. e. d.

Fie acum $f(x)$ o funcţiune olomorfă în coroana limitată de două cercuri concentrice cu centrele în origină. Această funcţiune se poate reprezentà printr'o serie Laurent

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n,$$

în care avem

$$(7) \qquad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(R)} \frac{f(x)}{x^{n+1}} dz \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ..),$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv dealungul unui cerc cu centrul în origină şi a cărui rază R este cuprinsă între razele celor două cercuri cari limitează coroana. De altă parte, substituţiunea

$$(8) \qquad x = e^{\frac{2i\pi z}{\omega}},$$

care rezultă din substituţiunile (1) şi (3), transformă coroana într'un dreptunghiu Δ a cărui una din laturi este paralelă cu direcţiunea lui ω şi egală cu $|\omega|$. Să punem

$$(9) \qquad f(x) = f\left(e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}\right) = F(z).$$

$F(z)$ este în dreptunghiul Δ o funcţiune olomorfă de z şi în virtutea egalităţii (6), avem, în interiorul acestui dreptunghiu,

$$(10) \qquad F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}}.$$

Această egalitate este valabilă nu numai în interiorul dreptunghiului considerat, ci în fâşia nelimitată cuprinsă între cele două laturi paralele cu ω şi prelungite la infinit de o parte şi de alta. In adevăr, de o parte, funcţiunea $f(x)$ reluându-şi valoarea când argumentul lui x se măreşte cu 2π, funcţiunea transformată $F(z)$ se reproduce când înlocuim z prin $z + \omega$; iar de altă parte, toţi termenii din membrul al doilea (10) se reproduc în acelaş timp.

325. *Viceversa: O funcţiune $F(z)$, olomorfă în interiorul unei fâşii, formată de două drepte paralele, periodică, având ca perioadă*

o cantitate ω al cărui argument este egal cu acela al paralelelor fâşiei (unghiul paralelelor cu axa reală) se desvoltă în această fâşie într'o serie de forma (10).

In adevăr, prin substituţiunea (8), fâşia din planul (z) se transformă într'o coroană cuprinsă între două cercuri concentrice cu centrele în origină. Să punem

$$F(z) = f(x).$$

Funcţiunea $f(x)$ este olomorfă în coroana considerată şi prin urmare îi se aplică desvoltarea (6); de unde rezultă expresiunea (10). In această desvoltare consistă seria *Fourier*.

Dacă funcţiunea $F(z)$ este întreagă expresiunea (10) este valabilă în tot planul.

Observare. Derivata unei serii Fourier se obţine derivând fiecare termen în parte. Aceasta rezultă din aceiaş proprietate a seriei Laurent.

326. *Expresiunea coeficienţilor seriei cu ajutorul variabilei z.* Fie z_0 un punct oarecare în interiorul fâşiei; expresiunea (7) a coeficienţilor devine

$$a_n = \frac{1}{\omega}\int_{z_0}^{z_0+\omega} F(z)\, e^{-\frac{2ni\pi z}{\omega}}\, dz, \tag{11}$$

integrala fiind rectilinie. Dacă origina $z = 0$ se găseşte în interiorul fâşiei, putem luà

$$a_n = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\omega} F(z)\, e^{-\frac{2ni\pi z}{\omega}}\, dz. \tag{12}$$

In cazul contrar, făcând substituţiunea $z = z_0 + t$, fâşia dată se transformă în alta paralelă, în interiorul căreia se află origina $t = 0$. De unde expresiunea

$$F(z_0 + t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{\frac{2ni\pi t}{\omega}}, \tag{13}$$

în care

$$a_n = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\omega} F(z + t)\, e^{-\frac{2ni\pi t}{\omega}}\, dt. \tag{14}$$

327. *Desvoltarea unei funcţiuni analitice continue de alungul axei reale (H. Poincaré).* Fie $f(x)$ o funcţiune analitică continuă dealungul axei reale. Să presupunem că există o fâşie limitată de două drepte paralele cu axa reală, situată de o parte şi de alta

a ei, la o distanţă egală cu un număr pozitiv dat a, în care funcţiunea este olomorfă şi să facem substituţiunea

$$z = \frac{1 - e^{\frac{\pi x}{2a}}}{1 + e^{\frac{\pi x}{2a}}}.$$

Fâşia considerată se transformă punct cu punct într'un cerc cu centrul în $z = 0$ şi cu raza 1. Aceasta se poate recunoaşte, de exemplu, introducând substituţiunea auxiliară

$$t = e^{\frac{\pi x}{2a}},$$

care transformă fâşia (x) în semiplanul (t) situat la dreapta axei imaginare; obţinem substituţiunea

$$z = \frac{1 - t}{1 + t},$$

care transformă acel semiplan într'un cerc cu centrul în $z = 0$ şi cu raza 1. Funcţiunea $f(x)$ se va transformà astfel într'o funcţiune F(z), olomorfă în cercul considerat; prin urmare avem, în interiorul acestui cerc,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{n}(0)}{n!} z^n.$$

Revenind la variabila x, obţinem

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{1 - e^{\frac{\pi x}{2a}}}{1 + e^{\frac{\pi x}{2a}}} \right)^n,$$

valabilă dealungul axei reale, dela $x = -\infty$ la $x = +\infty$.

328. *Serii de funcţiuni raţionale convergente în arii limitate de arce de cercuri* (*Appell*) [1]).

Să considerăm trei cercuri având centrele lor în trei puncte $x = a, b, c$ şi tăindu-se între ele două câte două, astfel încât să formeze un triunghiu circular ABC cu convexitatea spre interiorul triunghiului (fig. 35). Fie $f(x)$ o funcţiune olomorfă în aria (A) interioară triunghiului şi continuă pe laturile lui. Vom aveà, x fiind un punct în interiorul triunghiului ABC,

$$2i\pi f(x) = \int_{(ABCA)} \frac{f(z)}{z - x} dz = \int_{(BC)} + \int_{(CA)} + \int_{(AB)}.$$

1) Acta mathematica, t. I, pag. 145. *Hermite*, Cours lith., pag. 107.

Insă, când z descrie cercul (BC), avem

$$\left|\frac{z-a}{x-a}\right| < 1,$$

şi putem în acest caz înlocuì $\dfrac{1}{z-x}$ prin seria absolut convergentă

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a-(x-a)}$$

$$= -\left[\frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} + \ldots\right];$$

de unde

$$(1) \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{(BC)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a)^n}, \quad A_n = -\frac{1}{2i\pi}\int_{(BC)} (z-a)^{n-1} dz.$$

De asemenea, obţinem egalităţile

$$(2) \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{(CA)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(x-b)^n}, \quad B_n = -\frac{1}{2i\pi}\int_{(CA)} (z-b)^{n-1} f(z)\,dz,$$

$$(3) \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{(AB)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(x-c)^n}, \quad C_n = -\frac{1}{2i\pi}\int_{(AB)} (z-c)^{n-1} f(z)\,dz.$$

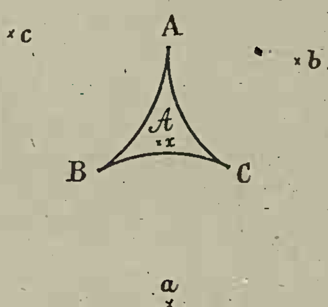

Fig. 35

Adunând aceste trei egalităţi şi grupând împreună termenii cari corespund la aceiaş valoare a lui n avem

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n}\right] = f(x).$$

Să presupunem acum punctul x situat în aria nelimitată A' exterioară triunghiului ABC şi în acelaş timp exterioară tuturor cercurilor; egalităţile (1), (2) şi (3) subsistă, dar integrala $\displaystyle\int_{(ABCA)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$ fiind nulă, avem

$$(5) \quad \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n}\right] = 0.$$

Prin urmare

$$(6) \quad F(x) = \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n}\right] = \begin{cases} f(x), \\ \text{sau} \\ 0, \end{cases}$$

adică aceiaş serie, convergentă în tot planul exterior celor trei cercuri date, reprezintă două funcţiuni analitice cari coincid respectiv cu f(x) sau cu zero, după cum x este situat în interiorul triunghiului ABC sau în afară din acest triunghiu (adică în aria (A) sau în aria (A′). In punctele interioare cercurilor precum şi pe fiecare cerc, seria F(x) este divergentă.

329. *Aplicaţiune.* Fie $f(x) = 1$, şi a, β, γ afixele punctelor A, B, C; vom avea

$$2i\pi\, A_n = -\int_{\beta\gamma} (z-a)^{n-1} dz = \frac{(\beta-a)^n - (\gamma-a)^n}{n},$$

$$2i\pi\, B_n = \frac{(\gamma-b)^n - (a-b)^n}{n}, \quad 2i\pi\, C_n = \frac{(a-c)^n - (\beta-c)^n}{n}.$$

Prin urmare, în virtutea egalităţii (6), avem

$$(7) \qquad \frac{1}{2i\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left[\frac{(\beta-a)^n-(\gamma-a)^n}{(x-a)^n}+\frac{(\gamma-b)^n-(a-b)^n}{(x-b)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{(a-c)^n-(\beta-c)^n}{(x-c)^n}\right] = \begin{cases} 1, \\ \text{sau} \\ 0 \end{cases}$$

după cum x este în aria (A) sau în aria (A′).

Acest rezultat se poate verifică direct făcând suma seriei cu ajutorul formulei

$$(8) \qquad -\log(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^n}{n} + \ldots,$$

în care punem succesiv

$$u = \frac{\beta-a}{x-a}, \ \frac{\gamma-a}{x-a}, \ \frac{\gamma-b}{x-b}, \ \frac{a-b}{x-b}, \ \frac{a-c}{x-c}, \ \frac{\beta-c}{x-c}.$$

Avem

$$-\log\left(1-\frac{\beta-a}{x-a}\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{\beta-a}{x-a}\right)^n,$$

$$-\log\left(1-\frac{\gamma-a}{x-a}\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{\gamma-a}{x-a}\right)^n;$$

de unde

$$(9) \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{n}\,\frac{(\beta-a)^n-(\gamma-a)^n}{(x-a)^n} = \log\frac{x-\gamma}{x-\beta},$$

determinaţiunea logaritmului fiind aceea care se anulează pentru $x = \infty$, căci determinaţiunea logaritmului din (8) se anulează împreună cu u. Deasemenea, avem

$$(10) \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{n}\,\frac{(\gamma-b)^n-(a-b)^n}{(x-b)^n} = \log\frac{x-a}{x-\gamma},$$

$$(11) \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{n}\,\frac{(a-c)^n-(\beta-c)^n}{(x-c)^n} = \log\frac{x-\beta}{x-a}.$$

Adunând aceste trei relaţiuni din urmă şi reprezentând membrul întâiu prin $2i\pi\,\mathrm{F}(x)$, obţinem

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2i\pi} \log 1, \tag{12}$$

adică, în toate regiunea de convergenţă, funcţiunea $\mathrm{F}(x)$ este constantă. Insă, regiunea de convergenţă fiind compusă din două arii cari n'au nici un punct comun între ele, constanta poate să nu aibă aceiaş valoare în amândouă; ceeace este uşor de constatat. Logaritmii cari figurează în egalităţile precedente fiind nuli pentru $x = \infty$, rezultă că în aria (A′) care cuprinde punctul $x = \infty$, trebuie să luăm $\log 1 = 0$.

Pentru a evaluà seria în aria (A), să punem

$$\frac{x-\gamma}{x-\beta} = \varrho e^{i\theta},$$

de unde

$$\log \frac{x-\gamma}{x-\beta} = \log \varrho + i\,\theta. \tag{13}$$

Membrul întâi fiind olomorf în tot planul exterior cercului al cărui centru este punctul a şi anulându-se pentru $x = \infty$, rezultă că argumentul θ este egal cu unghiul $\widehat{\beta x \gamma}$ (fig. 36); căci orice alt argument care diferă de acesta printr'un multiplu de 2π, nu poate tinde într'un mod continuu către zero, când x tinde către infinit. In acelaş timp, ϱ tinde către 1. Deasemenea se recunoaşte că punând

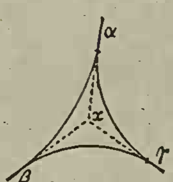

Fig. 36

$$\left\{\begin{aligned} \log \frac{x-a}{x-\gamma} &= \log \varrho' + i\,\theta', \\ \log \frac{x-\beta}{x-a} &= \log \varrho'' + i\,\theta'', \end{aligned}\right. \tag{14}$$

argumentele θ', θ'' sunt respectiv egale cu unghiurile $\widehat{\gamma x a}$ şi $\widehat{a x \beta}$. De unde rezultă că dacă x este interior triunghiului curbiliniu $a\beta\gamma$, avem

$$\theta + \theta' + \theta'' = 2\pi$$

şi prin urmare, suma celor trei logaritmi este egală cu $2i\pi$; adică, în cazul considerat, $\log 1 = 2i\pi$. Ceeace verifică rezultatul obţinut mai sus.

330. Să considerăm un triunghiu circular ABC (fig. 37) a cărui una din laturi, BC, are concavitatea sa spre interiorul triunghiului. Fie x un punct în interiorul triunghiului şi a centrul cercului corespunzător. Procedând ca pentru desvoltarea unei funcţiuni olomorfe în seria Taylor (304), vom obţine

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(BC)} \frac{f(x)}{z-x}\,dz = P(x-a).$$

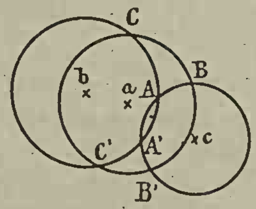

Fig. 37

Dacă b şi c sunt centrele cercurilor cu convexitatea spre interiorul triunghiului, seriile corespunzătoare sunt, ((2), (3), § 328), de forma

$$P_1\left(\frac{1}{x-b}\right),\quad P_2\left(\frac{1}{x-c}\right).$$

In interiorul triunghului ABC avem aşa dar

$$P(x-a) + P_1\left(\frac{1}{x-b}\right) + P_2\left(\frac{1}{x-c}\right) = f(x).$$

Dacă cele trei cercuri se taie astfel încât să formeze un al doilea triunghiu A'B'C', în raport cu care arcele aceloraşi cercuri să aibă aceiaş dispoziţiune ca în cel dintâi, aria interioară acestui triunghiu va fi o regiune de convergenţă a celor trei serii; însă în această regiune suma lor este nulă, căci integrala $\int \frac{z-x}{f(z)}\,dx$ este luată după conturul ABCA şi punctul x este exterior acestui contur.

331. Să considerăm în mod mai general un poligon format din arce de cercuri într'un număr finit oarecare, având convexitatea lor spre interiorul poligonului. Fie a_1, a_2, ... a_n centrele acestor cercuri. Un raţionament analog cu cel făcut în cazul triunghiului ne conduce la concluziunea următoare: *Funcţiunea $f(x)$ olomorfă în interiorul poligonului şi continuă pe contur se poate exprimă printr'o serie de fracţiuni raţionale de forma*

$$(1)\qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_n^{(1)}}{(x-a_1)^n} + \frac{A_n^{(2)}}{(x-a_2)^n} + \dots + \frac{A_n^{(m)}}{(x-a_m)^n}\right],$$

absolut şi uniform convergentă în interiorul poligonului, coeficienţii $A_n^{(k)}$ fiind determinaţi de egalităţile

$$A_n^{(k)} = -\int_{C_k} (z-a_k)^{n-1} f(z)\,dz,$$

C_k fiind arcul cercului cu centrul în a_k. *In tot planul exterior cercurilor date, seria din membrul al doilea este nulă.*

Dacă una sau mai multe din laturile poligonului au concavitatea spre interiorul poligonului, integralele luate după aceste laturi dau naştere la serii întregi de forma $P_k(x-a_k)$. Expresiunea funcţinii $f(x)$ în interiorul poligonului este, în acest caz, de forma

$$(2) \qquad f(x) = \sum_1^{\mu} P_k(x-a_k) + \sum_{\mu+1}^{m} P_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right),$$

dacă $a_1, \ldots a_\mu$ sunt centrele cercurilor din care fac parte laturile cu concavitatea spre interior şi $a_{\mu+1}, \ldots a_m$ centrele celorlalte cercuri.

332. *Desvoltarea unei funcţiuni olomorfe în serii de polinoame.* Din desvoltările precedente, D-l Appell a dedus desvoltarea unei funcţiuni olomorfe într'o serie de polinoame [1]).

Pentru a stabilì această propoziţiune, să considerăm una din seriile cari figurează în membrul al doilea al egalităţii (1) (§ 331)

$$\sum_1^{\infty} \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

şi să arătăm că se poate determinà — într'o infinitate de moduri — un polinom $\mathscr{P}(x)$ astfel ca diferenţa dintre acest polinom şi seria să fie în valoare absolută oricât de mică voim.

Fie α un punct, ales după voie, în interiorul poligonului; centrul a fiind exterior acestui poligon, avem

$$(1) \qquad \left|\frac{x-\alpha}{a-\alpha}\right| < 1,$$

x fiind un punct oarecare în interiorul aceluiaş poligon. De unde rezultă că putem scrie

$$\sum_1^{\infty} \frac{A_n}{(x-a)^n} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n A_n}{[a-\alpha-(x-\alpha)]^n} = P(x-\alpha),$$

$$(2) \qquad P(x-\alpha) = b_0 + b_1(x-\alpha) + \ldots + b_\nu(x-\alpha)^\nu + \ldots.$$

Să reprezentăm prin $p_\nu(x)$ suma celor dintâiu $\nu+1$ termeni ai membrului al doilea; există un număr întreg pozitiv N astfel ca pentru $\nu \geqq N$ să avem inegalitatea

$$(3) \qquad \left|P(x-\alpha) - p_\nu(x)\right| < \frac{\varepsilon_\nu}{m},$$

ε_ν fiind un număr pozitiv arbitrar de mic.

[1]) Math. Annalen, Bd. XXI, 1883, pag. 118.

Să aplicăm acest rezultat fiecăreia din seriile membrului al doilea din (1) (331). Reprezentând prin $P_k(x-a)$, $p_{\nu,k}(x)$ respectiv seria şi polinomul corespunzătoare seriei $P(x-a)$ şi polinomului $p_\nu(x)$, când înlocuim a prin a_k, avem

$$(4) \qquad \left| P_k(x-a) - p_{\nu,k}(x) \right| < \frac{\varepsilon_\nu}{m}, \quad \nu \geqq N\text{ [1]}$$

De unde rezultă inegalitatea

$$(5) \qquad \left| \sum_{k=1}^{m} \left(P_k(x-a) - p_{\nu,k}(x) \right) \right| < \varepsilon_\nu ;$$

sau, punând

$$(6) \qquad Q_\nu(x) = \sum_{k=1}^{m} p_{\nu,k}(x),$$

avem inegalitatea fundamentală

$$(7) \qquad | f(x) - Q_\nu(x) | < \varepsilon_\nu .$$

Această inegalitate exprimă că funcţiunea $f(x)$ *este o limită către care tinde polinomul* $Q_\nu(x)$ *când* ν *tinde către infinit.*

Punctul a fiind supus la unica condiţiune de a fi în interiorul poligonului, rezultă că există o infinitate de polinoame $Q_\nu(x)$ satisfăcând inegalitatea (7).

Pentru a obţine seria de polinoame prin care se exprimă funcţiunea $f(x)$, să punem

$$(8) \qquad \mathscr{P}_1(x) = Q_1(x),\ \mathscr{P}_2(x) = Q_2(x) - Q_1(x), \ldots,$$
$$\mathscr{P}_n(x) = Q_n(x) - Q_{n-1}(x) \ldots$$

Scriind

$$\mathscr{P}_n(x) = Q_n(x) - f(x) + f(x) - Q_{n-1}(x),$$

rezultă, în virtutea inegalităţii (7), că avem inegalitatea

$$(9) \qquad | \mathscr{P}_n(x) | < \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} .$$

Numerele pozitive ε_n fiind arbitrare, să le alegem astfel ca seria $\Sigma\varepsilon_n$ să fie convergentă; ceeace determină convergenţa absolută şi uniformă a seriei

$$\mathscr{P}_1(x) + \mathscr{P}_2(x) + \ldots + \mathscr{P}_n(x) + \ldots$$

---

[1]) Numărul ε_ν fiind luat acelaş pentru toate cele m serii, putem fixà numărul N ca să fie acelaş; este deajuns a luà pe cel mai mare dintre numerele N corespunzătoare celor m serii.

Suma primilor n termeni fiind, în virtutea egalităţilor (8), egală cu $Q_n(x)$, rezultă, ţinând seama de inegalitatea (7), că avem egalitatea

$$f(x) = \mathscr{P}_1(x) + \mathscr{P}_2(x) + \ldots + \mathscr{P}_n(x) + \ldots,$$

care este expresiunea căutată [1]).

CAPITOLUL XVII.

REZIDUURI (CAUCHY). APLICAŢIUNI.

I. — DEFINIŢIUNI ŞI CALCULUL REZIDUURILOR.

333. Funcţiunea $f(x)$ fiind analitică şi uniformă într'o regiune dată şi a un punct singular izolat al funcţiunii, avem, în domeniul acestui punct (teorema Laurent)

$$(1) \qquad f(x) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{x-a}\right) + \mathrm{P}_1(x-a),$$

seria $\mathrm{P}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ fiind de forma

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{x-a}\right) = \mathrm{A}_1(x-a)^{-1} + \mathrm{A}_2(x-a)^{-2} + \ldots$$

Coeficientul A_1 al termenului $(x-a)^{-1}$ se numeşte *reziduul* funcţiunii $f(x)$ relativ la discontinuitatea a (Cauchy).

Importanţa acestui coeficient provine din faptul că avem

$$(2) \qquad \int_{(a)} f(x)dx = 2i\pi\mathrm{A}_1,$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv după o curbă închisă în interiorul căreia nu se găseşte altă discontinuitate a funcţiunii decât punctul a. Egalitatea precedentă se justifică observând că avem

$$\int_{(a)} \mathrm{P}_1(x-a)\,dz = 0,$$

precum şi

$$\int_{(a)} \frac{dx}{(x-a)^m} = 0 \quad \text{pentru } m > 1.$$

Să presupunem că funcţiunea uniformă $f(x)$, continuă dealungul unei curbe închise C, are în interiorul acestei curbe un număr limitat

---

[1]) *P. Montel*, Leçons sur les séries de polinomes à une variable complexe

de puncte singulare $a_1, a_2, \ldots a_n$. Descriind în jurul acestor puncte, ca centre, cercuri foarte mici, cari să nu se taie între ele şi cari să fie situate în interiorul curbei C, obţinem o arie cu contur multiplu în interiorul căreia funcţiunea $f(x)$ este olomorfă. Aplicând teorema lui Cauchy şi numind $A_1, \ldots, A_n$, reziduurile funcţiunii în raport cu punctele $a_1, a_2, \ldots a_n$, vom aveà

$$\int_{(C)} f(x)dx = 2i\pi(A_1 + A_2 + \ldots + A_n), \tag{3}$$

adică: *integrala* $\int f(x)dx$ *luată dealungul curbei C în sensul pozitiv este egală cu* $2i\pi$ *înmulţit cu suma reziduurilor relative la discontinuităţile funcţiunii* $f(x)$, *cuprinse în interiorul acestei curbe.*

334. *Definiţiunea reziduului relativ la punctul* ∞. Să presupunem funcţiunea $f(x)$ uniformă în domeniul punctului infinit şi acest punct să-l presupunem a fi punct ordinar sau punct singular izolat. Vom puteà descrie din origină ca centru un cerc cu o rază R destul de mare, astfel ca, în afară din cerc, $f(x)$ să n'aibă nici un punct singular, exceptând punctul ∞. Vom numì, prin analogie, *reziduu* al lui $f(x)$, relativ la punctul ∞, valoarea integralei

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(R)} f(x)dx,$$

luată în sensul pozitiv în raport cu punctul ∞, ceeace revine la sensul negativ în raport cu centrul cercului. Să presupunem că avem, în domeniul punctului ∞,

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + P_1(x),$$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = A_1x^{-1} + A_2x^{-2} + \ldots$$

Reziduul corespunzător va fi $-A_1$, adică coeficientul lui x^{-1} din desvoltarea funcţiunei $f(x)$, cu semnul schimbat.

Precum vedem, reziduul relativ la punctul ∞ poate fi diferit de zero, chiar când punctul ∞ este un punct ordinar; ceeace nu are loc pentru un punct ordinar la distanţă finită.

Să presupunem $f(x)$ o funcţiune raţională

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

$F(x)$ şi $F_1(x)$ fiind două polinoame de x, astfel ca gradul numărătorului să fie mai mic ca gradul numitorului cu cel puţin două unităţi. Reziduul lui $f(x)$ în raport cu punctul ∞ va fi nul; căci desvoltarea fracţiunii date după puterile crescânde ale lui x, fiind de forma

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A}{x^2} + \frac{A_1}{x^3} + \dots$$

termenul în $\frac{1}{x}$ lipseşte.

335. *Teoremă. Suma reziduurilor unei funcţiuni raţionale este nulă.*

Fie (R) un cerc descris din origină ca centru cu o rază destul de mare încât să conţie în interiorul său toate polurile funcţiunii raţionale $f(x)$, situate la distanţa finită. Integrala

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(R)} f(x)dx,$$

luată în sensul pozitiv reprezintă suma reziduurilor lui $f(x)$ relative la toate polurile situate în interiorul cercului; aceiaş integrală, luată în sensul negativ, este egală cu reziduul relativ la punctul ∞. De unde rezultă propoziţiunea enunţată.

Teorema subsistă evident pentru o funcţiune uniformă pe toată sfera, având un număr limitat de singularităţi.

336. *Calculul reziduurilor relative la poluri.* Să presupunem funcţiunea $f(x)$ pusă sub forma

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

$F_1(x)$ şi $F(x)$ fiind funcţiuni olomorfe în domeniul unui punct a, care este un zero de ordinul n al numitorului, fără a anulà numărătorul. Acest punct este un pol de ordinul n al funcţiunii $f(x)$. In domeniul punctului a, desvoltarea după seria Taylor dă

$$F_1(x) = F_1(a) + (x-a)\,F'_1(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,\overset{(n-1)}{F_1}(x) + \dots$$

$$F(x) = (x-a)^n\left[\frac{F^n(a)}{n!} + (x-a)\,\frac{\overset{(n+1)}{F}(a)}{(n+1)!} + \dots\right];$$

de unde pentru $f(x)$ o expresiune de forma

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}\left[n!\,\frac{F_1(a)}{F^{(n)}(a)} + A_1(x-a) + \dots + A_{n-1}(x-a)^{n-1} + \dots\right].$$

Reziduul căutat este coeficentul A_{n-1}.

Din desvoltarea precedentă rezultă imediat că avem

$$A_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-a)^n f(x)\right]_{x=a}.$$

Să presupunem $f(x)$ pus sub forma

$$f(x) = \varphi(x).\ \psi(x),$$

$\varphi(x)$ și $\psi(x)$ fiind două funcțiuni uniforme și să presupunem că $x = a$ este un pol de ordinul n al funcțiunii $\varphi(x)$ și punct ordinar pentru funcțiunea $\psi(x)$. In domeniul punctului a, vom aveà

$$\varphi(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + P(x-a),$$

$$\psi(x) = \psi(a) + (x-a)\,\psi'(a) + \ldots + (x-a)^{n-1}\frac{\psi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \cdots$$

De unde conchidem reziduul lui $f(x)$, relativ la polul a,

$$\underset{x=a}{\mathcal{R}} f(x) = A_1\psi(a) + A_2\psi'(a) + \ldots + A_n\frac{\psi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

337. *Exemple:*

1°. $$\underset{x=0}{\mathcal{R}} \cot x = \underset{x=0}{\mathcal{R}} \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

$$\underset{x=n\pi}{\mathcal{R}} \cot x = [(x - n\pi)\cot x]_{x=n\pi} = 1.$$

2°. Avem în domeniul lui $x = 0$

$$\cot x = \frac{1}{x}\,\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \ldots} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 \ldots\right);$$

de unde rezultă că reziduurile funcțiunilor

$$\frac{\cot x}{x},\ \frac{\cot x}{x^2},\ \frac{\cot x}{x^3},\ \frac{\cot x}{x^4},\ \ldots$$

relativ la $x = 0$ sunt respectiv

$$0,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{1}{45},\ \ldots$$

Se recunoaște că reziduul relativ la $x = 0$ al funcțiunii $\frac{\cot x}{x^{2n+1}}$, n fiind un număr întreg pozitiv este nul; căci această funcțiune fiind pară, desvoltarea sa în domeniul lui $x = 0$ conține numai puteri pare ale lui x.

Pentru a calculà reziduul funcțiunii $\frac{\cot x}{x^k}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, relativ la polul simplu $x = n\pi$, $n \neq 0$, observăm că avem

$$\underset{x=n\pi}{\mathcal{R}} \frac{\cot x}{x^k} = \underset{x=0}{\mathcal{R}} \frac{\cot (x + n\pi)}{(x + n\pi)^k} = \underset{x=0}{\mathcal{R}} \frac{\cot x}{(x + n\pi)^k}.$$

Insă, în domeniul lui $x = 0$, avem

$$\frac{1}{(x + n\pi)^k} = \frac{1}{(n\pi)^k} - \frac{kx}{(n\pi)^{k+1}} + \ldots,$$

de unde rezultă

$$\underset{x=n\pi}{\mathcal{R}} \frac{\cot x}{x^k} = \frac{1}{(n\pi)^k}.$$

3⁰. $$\underset{x=n}{\mathcal{R}} \frac{1}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi \cos n\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi}.$$

4⁰. Fie

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{(x + i)^n} \cdot \frac{1}{(x - i)^n}.$$

Pentru a calculă reziduul acestei funcţiuni în raport cu polul $x = i$, să punem $x = i + h$ şi să desvoltăm expresiunea

$$f(i + h) = \frac{1}{(2hi)^n} \left(1 - \frac{hi}{2}\right)^{-n}$$

după puterile lui h. Reziduul căutat va fi coeficientul lui $\frac{1}{h}$, adică

$$-\frac{i}{2^{2n-1}} \frac{n(n + 1) \ldots (2n - 2)}{(n - 1)!}.$$

Reziduul funcţiunei considerate, relativ la polul $x = -i$, este acelaş cu semnul schimbat; căci suma celor două reziduuri trebue să fie nulă.

5⁰. Fie $F(x)$, $F_1(x)$ două funcţiuni raţionale întregi; să considerăm expresiunea

$$\frac{F_1(x)}{(z - x) F(x)},$$

în care z reprezintă un punct oarecare în plan. Polurile acestei funcţiuni raţionale situate la distanţă finită sunt zerurile lui $F(x)$

şi punctul $x = z$. Relativ la acest din urmă punct avem

$$\underset{x=z}{\mathcal{R}} \frac{F_1(x)}{(z-x)F(x)} = -\frac{F_1(z)}{F(z)}.$$

Fie $x = a$ un zero de ordinul α al lui $F(x)$; vom aveà, în domeniul acestui punct, o expresiune de forma

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a} + P(x-a), \quad A_1 \neq 0.$$

De altă parte, putem scrie, în acelaş domeniu,

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a-(x-a)} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots;$$

prin urmare

$$\underset{x=a}{\mathcal{R}} \frac{F_1(x)}{(z-x)\,F(x)} = \frac{A_1}{(z-a)^\alpha} + \ldots + \frac{A_\alpha}{z-a}.$$

In fine, să calculăm reziduul relativ la punctul $x = \infty$. Dacă gradul lui $F_1(x)$ este mai mic decât acela al lui $F(x)$, reziduul funcţiunii considerate va fi nul; căci, în acest caz, gradul numărătorului fracţiunii este mai mic decât acela al numitorului cu cel puţin două unităţi. Să considerăm cazul general şi fie, în domeniul punctului ∞,

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = Bx^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m + B_{m+1}\frac{1}{x} + \ldots$$

In acelaş domeniu avem

$$-\frac{1}{z-x} = \frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \ldots + \frac{z^m}{x^{m+1}} + \ldots$$

Prin urmare

$$\underset{x=\infty}{\mathcal{R}} \frac{1}{z-x}\frac{F_1(x)}{F(x)} = Bz^m + B_1z^{m-1} + \ldots + B_m.$$

Exprimând că suma tuturor reziduurilor este nulă, obţinem (înlocuind litera z prin litera x) egalitatea

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = Bx^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m + \Sigma\left(\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a}\right),$$

în care simbolul Σ se referă la toate zerurile numitorului $F(x)$. Această formulă reprezintă expresiunea unei fracţiuni raţionale printr'o sumă de fracţiuni simple.

II. — APLICAŢIUNI

338. Numeroase sunt aplicaţiunile teoremei asupra reziduurilor, exprimată prin egalitatea fundamentală

$$\int_C f(z)dz = 2i\pi\, \Sigma \text{ reziduurilor lui } f(x),$$

în care funcţiunea $f(x)$ este presupusă uniformă în aria limitată de curba C şi continuă de alungul acestei curbe şi simbolul Σ se referă la toate singularităţile, presupuse izolate, situate în interiorul curbei. Să mai observăm că conturul C poate fi format din linii de forme oarecari.

339. *Determinarea câtorva integrale definite de variabilă reală. Propoziţiuni preliminare.*

Propoziţiunile următoare sunt adesea ori utile în evaluarea integralelor definite:

1⁰. *Dacă o funcţiune analitică* $f(x)$ *devine infinită într'un punct* a, *astfel încât produsul* $|(x-a)f(x)|$ *să tindă către zero împreună cu* $|x-a|$, *integrala*

$$\int_{(\varrho)} f(x)dx,$$

luată după un cerc descris din a *ca centru, cu o rază* ϱ, *tinde către zero împreună cu* ϱ.

In adevăr, în virtutea ipotezei, la un număr pozitiv dat ε oricât de mic voim, corespunde un număr pozitiv ϱ, astfel că pentru toate punctele situate pe cercul $|x-a| = \varrho$, avem

$$|(x-a)f(x)| < \varepsilon;$$

de unde

$$\left|\int_{(\varrho)} f(x)dx,\right| \leqq \int_{(\varrho)} |f(x)|\,|dx| < \frac{\varepsilon}{\varrho}\int_{(\varrho)} |dx| = 2\pi\varepsilon.$$

Prin urmare avem

$$\lim_{\varrho=0} \int_{(\varrho)} f(x)dx = 0,$$

căci ε tinde către zero împreună cu ϱ.

Concluziunea precedentă subsistă evident dacă în loc de a luà integrala dealungul cercului întreg (ϱ) se ia dealungul unui arc al acelui cerc.

Observare. Funcţiunea $f(x)$ considerată mai sus nu poate fi uniformă în domeniul punctului a. In adevăr, dacă $f(x)$ ar fi uniformă, punctul a în care această funcţiune devine infinită ar fi un pol sau un punct singular esenţial. In cazul întâiu, produsul $(x-a)f(x)$ tinde către infinit sau către o valoare finită şi diferită de zero, după cum ordinul polului este mai mare sau egal cu 1. In cazul al doilea, produsul considerat este absolut nedeterminat.

Exemple: [a]. $f(x)=(x-a)^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$.

[b]. Funcţiunea $f(x)=\log x$ se bucură de aceiaş proprietate în domeniul punctului $x=0$. In adevăr, punând $x=re^{i\theta}$, de unde $\log x=\log r+i\theta$, rezultă

$$|x\log x|=r\,|\log r+i\theta|\leqq r\,|\log r|+r\,|\theta|;$$

prin urmare

$$\lim_{x=0}|x\log x|=0\,.$$

căci, precum se ştie,

$$\lim_{r=0} r\log r=0.$$

2°. Fie $f(x)$ o funcţiune analitică uniformă sau multiformă şi să presupunem că *produsul* $xf(x)$ *tinde către zero când* x *tinde către infinit, în orice direcţiune ar fi; integrala*

$$\int_{(R)} f(x)dx\,,$$

luată după un cerc (R) *cu centrul în origină şi cu raza* R, *tinde către zero când* R *tinde către infinit.* Căci pentru R destul de mare avem

$$|xf(x)|<\varepsilon\,,$$

ε fiind un număr pozitiv care tinde către zero împreună cu $\frac{1}{R}$. De unde

$$\left|\int_{(R)} f(x)\,dz\right|<\varepsilon\int\left|\frac{dx}{x}\right|=2\pi\varepsilon;$$

prin urmare

$$\lim_{R=\infty}\int_{(R)} f(x)\,dx=0\,.$$

3°. Dacă $xf(x)$ tinde către zero când x tinde către infinit în interiorul unui unghiu AOB (fig. 38), integrala

$$\int_{(AB)} f(x)\,dx\,,$$

luată după arcul (AB) tinde către zero, când punctele A şi B tindcătre infinit pe laturile unghiului (OA, OB). Acelaş raţionament ca mai sus.

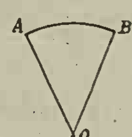

Fig. 38

Exemple : [a]. — $f(x) = e^{ix}$, $x = re^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$.

[b]. — $f(x) = e^{ix^2}$, $x = re^{i\theta}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

4⁰. Dacă $f(x)$ este o funcţiune pară, integrala

$$\int_{(R)} f(x)\, dx,$$

luată dealungul cercului $|x| = R$, este nulă. Cercul poate fi înlocuit printr'o curbă (C) având origina ca centru. In adevăr, fie C_1 şi C_2 arcele cari împreună formează curba C, simetrice în raport cu origina. Avem

$$\int_C f(x)\, dx = \int_{C_1} f(x)\, dx + \int_{C_2} f(x)\, dx.$$

Insă, în virtutea ipotezei, avem

$$\int_{C_2} f(x)\, dx = \int_{C_1} f(-x)\, d(-x) = -\int_{C_1} f(x)\, dx;$$

căci $f(-x) = f(x)$ şi pe când x descrie arcul C_2 în sensul pozitiv, $-x$ descrie în acelaş sens arcul C_1. De unde rezultă

$$\int_C f(x)\, dx = 0.$$

5⁰. Dacă $f(z)$ este o funcţiune impară, astfel că $\frac{f(z)}{z}$ tinde uniform către zero, când z tinde către infinit, avem

$$\lim_{R=\infty} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x}\, dz = 0,$$

x fiind un punct oarecare la distanţă finită. In adevăr, putem scrie

$$\int_{(R)} \frac{f(z)}{z-x} dz = \int_{(R)} \frac{f(z)}{z}\, dz + x \int_{(R)} \frac{f(z)}{z(z-x)}\, dz.$$

Prima integrală din membrul al doilea este nulă (4⁰.); iar pentru cea de a doua, avem inegalitatea

$$\left| \int_{(R)} \frac{f(z)}{z(z-x)}\, dz \right| < \varepsilon \int_{(R)} \frac{dz}{z-x} = 2\pi\varepsilon,$$

ε tinzând, în virtutea ipotezei, către zero când R tinde către infinit.

340. Să procedăm acum la determinarea câtorva integrale definite.

1°. Fie

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

o funcţiune raţională care nu devine infinită pentru nici o valoare reală a lui x şi al cărei numărător este de un grad mai mic ca numitorul cu cel puţin două unităţi. In aceste condiţiuni, integrala

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

luată după axa reală are o valoare finită. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zerurile lui $F(x)$, situate deasupra axei reale şi $R_1, R_2, \ldots, R_n$ reziduurile corespunzătoare ale lui $f(x)$; vom aveà

$$I = 2i\pi \sum_1^n R_k.$$

In adevăr, din origină ca centru să descriem un semicerc (ACB) (fig. 39), situat deasupra axei reale, cu o rază destul de mare, pentru ca să conţie în interiorul său toate zerurile $a_1, a_2, \ldots a_n$. Luând drept contur de integraţiune semicercul (ACB) şi diametrul $\overline{BA}$, vom aveà

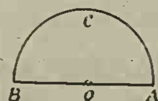

Fig. 39

$$(ACB) + (BA) = 2i\pi \sum_{k=1}^n R_k.$$

Insă, în virtutea ipotezei, produsul $xf(x)$ tinde către zero când x tinde către infinit, în orice direcţiune voim; prin urmare integrala dealungul semicercului tinde către zero, când raza cercului tinde către infinit şi astfel obţinem rezultatul enunţat.

Exemple. Aplicând formula de mai sus, avem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{2n}}.$$

2°. Fie $f(\sin x, \cos x)$ o funcţiune raţională de $\sin x$, $\cos x$ care nu devine infinită pentru nici o valoare reală a lui x. Integrala

$$J = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(\sin x, \cos x)\, dx,$$

în care x_0 este real şi care este luată după axa reală, are o valoare finită, independentă de x_0. Această integrală se poate calculà în felul următor: Inlocuim $\sin x$, $\cos x$ prin expresiunile lor în funcţiune de exponenţială şi punem $e^{ix} = t$; avem

$$\sin x = i\,\frac{1-t^2}{2t}\,,\quad \cos x = \frac{1+t^2}{2t}\,,\quad dx = -i\,\frac{dt}{t}\,.$$

De altă parte, când x creşte dela x_0 până la $x_0 + 2\pi$, sau, ceeace este tot una, dela 0 la 2π, t descrie în sensul pozitiv un cerc cu centrul în origină şi a cărui rază este 1. Integrala propusă se reduce aşa dar la integrala unei funcţiuni raţionale de t, $F(t)$, luată în sensul pozitiv, dealungul acestui cerc. Reprezintând prin S suma reziduurilor funcţiunii $F(t)$ relativ la polurile sale situate în interiorul acestui cerc, vom aveà

$$J = 2i\pi S.$$

3⁰. Să considerăm funcţiunea e^{-z^2} olomorfă în tot planul $z = x + iy$ şi să luăm integrala

$$\int e^{-z^2}\,dz$$

dealungul dreptunghiului OACB (fig. 40), ale cărui două laturi $OA = a$, $OB = b$ sunt situate respectiv pe axele de coordonate Ox, Oy. Integrala dealungul conturului fiind nulă, avem egalitatea

$$(1)\qquad (OA) + (AC) + (CB) + (BO) = 0,$$

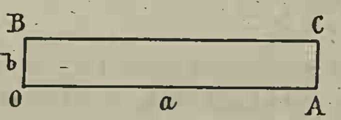

Fig. 40

în care

$$(OA) = \int_0^a e^{-x^2}\,dx\,,$$

$$(AC) = i\int_0^b e^{-(a+iy)^2}\,dy = ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2-2iay}dy\,,$$

$$(CB) = -\int_0^a e^{-(x+ib)^2}\,dx = -\,e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}(\cos 2bx - i\sin 2bx)dx\,,$$

$$(BO) = -\,i\int_0^b e^{y^2}\,dy\,.$$

Să ducem aceste valori în egalitatea (1) şi să facem $a = \infty$; integrala (AC) se anulează şi ţinând seamă de valoarea cunoscută

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

obţinem integrala

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-b^2}.$$

4⁰. Funcţiunea $f(x) = \frac{e^{ix}}{x}$ admite $x = 0$ ca pol de ordinul întâi şi reziduul corespunzător este 1. Din acest punct ca centru cu două raze diferite $OA = r$, $OB = R$ (fig. 41) să descriem două semicercuri situate, cel dintâiu sub axa reală, cel de al doilea deasupra acestei axe. Valoarea integralei

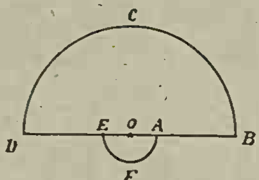

Fig. 41

$$\int \frac{e^{ix}}{x}\, dx,$$

luată după conturul ABCDEFA, va fi egală cu $2i\pi$:

$$(1) \qquad (AB) + (BCD) + (DE) + (EFA) = 2i\pi.$$

Integrala (BCD) tinde către zero când R tinde către infinit. In adevăr, punând $x = Re^{it}$, produsul $|xf(x)|$ tinde către zero împreună cu $\frac{1}{R}$, pentru $\alpha \leq t \leq \pi - \alpha$, α fiind un număr pozitiv oricât de mic voim; prin urmare integrala transformată luată între limitele $t = \alpha$, $t = \pi - \alpha$ tinde către zero în acelaş timp. De altă parte, integralele

$$\int_0^\alpha e^{iR\,(\cos t + i \sin t)}\, dt, \quad \int_{\pi-\alpha}^{\pi} e^{iR\,(\cos t + i \sin t)}\, dt$$

au module mai mici ca α. De unde rezultă justificarea propoziţiunii. Pentru a evaluà integrala (EFA) să punem $x = re^{it}$; vom aveà

$$(EFA) = i\int_{-\pi}^{0} e^{ir\,(\cos t + i \sin t)}\, dt.$$

Făcând ca r să tindă către zero, această integrală tinde către $i\pi$. Prin urmare făcând să tindă în acelaş timp R către infinit şi r către zero, egalitatea (1) devine

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = i\pi.$$

Schimbând în integrala a doua x în $-x$, egalitatea precedentă devine

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{x}\, dx = i\pi,$$

sau

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

5⁰. Fie

$$f(x)=\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}.$$

a fiind o constantă reală, pozitivă şi mai mică ca 1; sau, dacă este complexă, partea sa reală se presupune cuprinsă între 0 şi 1. Să considerăm un dreptunghiu ABCD, având una din laturi AB situată pe axa reală, latura opusă CD la o distanţă de cea dintâiu egală cu 2π şi celelalte două laturi simetrice în raport cu axa imaginară (fig. 42). In interiorul acestui dreptunghiu, $f(x)$ are un singur pol $x=i\pi$ şi reziduul corespunzător este $-e^{ia\pi}$. Fie AB $=2a$; vom aveà

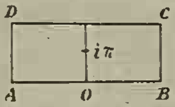

Fig. 42

$$(\mathrm{AB})+(\mathrm{CD})=(1-e^{2ia\pi})\int_{-a}^{+a}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx,$$

$$(\mathrm{BC})=i\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{a(a+ix)}}{1+e^{a+ix}}\,dx,\quad (\mathrm{DA})=-i\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{a(-a+ix)}}{1+e^{-a+ix}}\,dx,$$

Făcând a să tindă către infinit, ultimile două integrale tind către zero, în virtutea ipotezei făcute asupra lui a. Aplicând teorema reziduurilor, obţinem

$$(1-e^{2ia\pi})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx=-2i\pi\,e^{ia\pi};$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx=-\frac{2i\pi}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}},$$

sau

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Făcând substituţiunea $e^{x}=t$, egalitatea precedentă devine

$$\int_{0}^{\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

partea reală a lui a fiind cuprinsă între 0 şi 1.

6⁰. Să calculăm direct integrala

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx,\quad 0<a<1.$$

Funcţiunea $\frac{z^{a-1}}{1+z}$ nu este uniformă în domeniul lui $z = 0$. Pentru a aplicà teorema lui Cauchy este necesar ca funcţiunea să fie uniformă în aria limitată de conturul de integraţiune. Pentru a obţine o asemenea arie, să facem în planul (z) o tăietură dealungul axei reale pozitive şi să descriem cercurile concentrice $|z| = r$, $|z| = R$; r fiind oricât de mic şi R oricât de mare voim. In aria limitată de aceste cercuri şi de tăietura considerată, funcţiunea dată este uniformă, având polul $z = -1$.

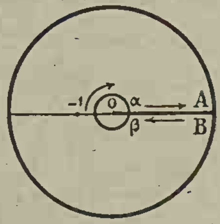

Fig. 43

Fie a, β două puncte ale cercului (r), cel dintâi pe ţărmul pozitiv şi cel de al doilea pe ţărmul negativ al tăieturii (fig. 43); deasemenea fie A, B două puncte ale cercului (R) situate în mod analog. Să considerăm integrala

$$\int_{aA(R)B\beta(r)} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz = (aA) + (R) + (B\beta) + (r),$$

luată dealungul conturului în sensul pozitiv.

Dealungul lui aA să luăm $\arg z = 0$, prin urmare, dealungul ţărmului (+) al tăieturii, z^{a-1} este egal cu valoarea sa aritmetică şi scriem

$$z^{a-1} = x^{a-1}.$$

Pe ţărmul (—), $\arg z = 2\pi$; de unde rezultă, pe acest ţărm, expresiunea

$$z^{a-1} = x^{a-1} \,.\, e^{2i\pi(a-1)} = x^{a-1} \,.\, e^{2i\pi a}.$$

Pentru a calculà reziduul relativ la polul $x = -1$, observăm că pe axa reală negativă avem $\arg z = \pi$; prin urmare, pe această axă

$$z^{a-1} = x^{a-1} \,.\, e^{i\pi(a-1)} = -\, x^{a-1}\, e^{i\pi a}.$$

Reziduul căutat se obţine înlocuind în expresiunea precedentă x prin 1:

$$\underset{z=-1}{\mathcal{R}} \frac{z^{a-1}}{1+z} = -\, e^{i\pi a}.$$

Să facem R să tindă către infinit şi r către zero; integralele dealungul acestor cercuri tinzând către zero, rezultă egalitatea

$$(1 - e^{2i\pi a}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = -\, 2i\pi\, e^{i\pi a};$$

de unde

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

7°. *Integrala lui Fresnel.* Să considerăm integrala

$$\int e^{-z^2}\,dz,$$

luată după sectorul circular OABO a cărei una din raze este îndreptată după axa reală în sensul pozitiv şi a doua face cu cea dintâi un unghiu de 45°. Avem

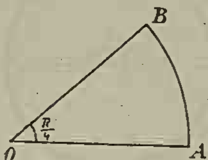

Fig. 44

$$(1)\quad (OA)+(AB)+(BO)=0,\ (OA)=\int_0^R e^{-x^2}dx.$$

Integrala

$$(BO)=-\int_0^{Re^{i\frac{\pi}{4}}} e^{-z^2}dz$$

se poate transformă astfel ca variabila de integraţiune să fie reală. Este deajuns a face substituţiunea

$$(2)\qquad z=xe^{\frac{i\pi}{4}},$$

în care x este real şi variază dela 0 la R. Ultima integrală se poate dar scrie

$$(3)\quad (BO)=-e^{\frac{i\pi}{4}}\int_0^R e^{-ix^2}dx=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R(\cos x^2-i\sin x^2)\,dx.$$

Făcând R să tindă către infinit, integrala (AB) tinde către zero [1]) şi egalitatea (1) devine

$$(4)\quad \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty(\cos x^2-i\sin x^2)\,dx=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

de unde rezultă

$$(5)\qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx=\int_0^\infty \sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

---

[1]) Punând $z=Re^{i\frac{t}{2}}$, avem

$$|(AB)|<\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos t}\,R\,dt=\int_0^\alpha+\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Prima integrală din membrul al doilea tinde evident către zero când R tinde către infinit; în privinţa celei din urmă avem

$$\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos t}\,R\,dt<\frac{1}{R\sin\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos t}\,R^2\sin t=\frac{1}{R\sin\alpha}\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Limita acestei integrale, pentru $R=\infty$, este dar egală cu zero.

8⁰. Să considerăm funcțiunea

$$f(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}},$$

care admite punctele ± 1, ca puncte de ramificațiune. Să limităm planul variabilei printr'o tăietură făcută dealungul axei reale și cuprinsă între cele două puncte de ramificațiune; funcțiunea dată va fi uniformă în tot planul așà limitat. Integrala

$$\int \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

luată după o curbă închisă oarecare în interiorul căreia se găsește tăietura are aceiaș valoare, căci în aria cuprinsă între două asemenea curbe, funcțiunea de sub semnul $\int$ este olomorfă. Să luăm drept una din aceste curbe drumul $abcb'a'c'a$ format din două semicercuri $a'c'a$, bcb' având centrele lor în punctele de ramificațiune și o rază ϱ foarte mică și din cele două țărmuri ab, $a'b'$ ale tăieturii; drept a doua curbă să luăm un cerc cu centrul în origină și cu o rază R foarte mare (fig. 45). Vom aveà

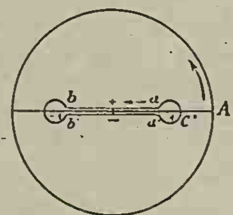

Fig. 45

$$(1) \qquad (ab) + (bcb') + (b'a') + (a'c'a) = \int_{(R)} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Să facem ϱ să tindă către zero; integralele după cele două cercuri vor tinde către zero. De altă parte, pe cele două țărmuri ale tăieturii, $f(x)$ având valori egale și de semne contrarii, rezultă

$$(b'a') = -(ba) = (ab);$$

prin urmare la limită, pentru $\varrho = 0$, egalitatea (1) devine

$$(2) \qquad 2\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_{(R)} \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrala din membrul întâiu este luată dealungul axei reale pe țărmul (+) al tăieturii și integrala din membrul al doilea dealungul cercului (R) în sensul pozitiv în raport cu origina.

Să luăm, pentru a fixà ideile, ramura $\sqrt{1-x^2}$ care se reduce la $+1$, în punctul $x = 0$, privit ca situat pe țărmul (+) al tăieturii. In acest caz, radicalul din membrul întâi al egalității precedente este real și pozitiv. Să căutăm valoarea integralei din membrul al doilea. Pentru $|x| > 1$, avem

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{i}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\frac{i}{x}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{1}{x^{2n}}+\ldots\right).$$

Pentru a vedeà ce semn corespunde ramurei noastre, să ne referim la studiul radicalului $\sqrt{1-x^2}$. S'a văzut (245) că această ramură este, pentru x real și mai mare ca 1, reprezentată prin

$$-i\sqrt{x^2-1},$$

radicalul fiind pozitiv. De unde rezultă că în desvoltarea precedentă trebuie să luăm semnul — în membrul al doilea. Avem deci

$$(3)\qquad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{i}{x}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{1}{x^{2n}}+\ldots\right].$$

Această expresiune este valabilă în toată întinderea planului exterioară cercului descris din origină ca centru cu raza 1, căci în această regiune fiecare ramură este olomorfă. De unde rezultă că reziduul funcțiunii $f(x)$ corespunzător punctului infinit este

$$+i\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n};$$

prin urmare egalitatea (2) devine

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\pi.$$

De unde

$$(5)\qquad \int_{0}^{1}\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}.$$

In cazul $n=0$, formula (2) dă

$$(6)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi:$$

de unde

$$(7)\qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

9⁰. Să considerăm integrala

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}},$$

a fiind (pentru ca integrala să aibă un sens) o cantitate oarecare, necuprinsă între -1 şi $+1$. Funcţiunea de sub semnul $\int$ este uniformă în tot planul limitat de tăietura $(-1, +1)$, având punctul $x=a$ ca pol, reziduul corespunzător fiind $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$. Să luăm drept contur de integraţiune pe cel considerat în exemplul precedent şi să presupunem R destul de mare pentru ca punctul a să fie în interiorul cercului (R); vom aveà

$$\int_{(R)} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -2I + \frac{2i\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

Făcând (R) să tindă către infinit, integrala dealungul cercului (R) tinde către zero; de unde

$$(1)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{i\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

radicalul din membrul al doilea având valoarea ce primeşte în punctul a ramura $\sqrt{1-x^2}$ care figurează sub semnul $\int$.

Pentru a preciză această valoare, să punem

$$x = a + i\beta,\ \sqrt{1-x^2} = A + iB$$

Este evident că A nu poate fi nul decât pentru x real şi în valoare absolută mai mare decât 1. De unde rezultă că A, care variază într'un mod continuu împreună cu x, păstrează un semn invariabil în fiecare din cele două semiplane separate prin axa reală. Insă, ramura considerată fiind egală cu 1, în punctul $x=0$ situat pe ţărmul (+) al tăieturii $(-1, +1)$, rezultă că în vecinătatea originii, A este respectiv pozitiv sau negativ, după cum x este deasupra sau dedesubtul axei reale; de unde rezultă că A este de acelaş semn cu β.

Printr'un raţionament analog deducem semnul lui B. In adevăr, B nu se anulează decât pentru valori ale lui x de forma $x = i\beta$. Facem abstracţiune de valorile reale ale lui x cuprinse între -1 şi $+1$, căci x nu străbate acest segment. Aşa dar B nu-şi schimbă semnul decât atunci când x străbate axa imaginară. Insă, precum am văzut în studiul radicalului $\sqrt{1-x^2}$, pentru x real şi în valoare absolută mai mare ca 1, $B \lesseqgtr 0$ după cum x este pozitiv sau negativ. De unde conchidem că B este de semn contrar cu α. Acest rezultat se poate verificà cu ajutorul egalităţii $\sqrt{1-(\alpha+i\beta)^2} = A + iB$, care dă $AB = -\alpha\beta$.

Să presupunem a real şi mai mare ca 1 şi să înlocuim în (1) $\sqrt{1-a^2}$ prin $-i\sqrt{a^2-1}$; vom aveà

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

radicalul din membrul al doilea fiind pozitiv.

10^0. Să căutăm, ca ultim exemplu, valoarea integralei

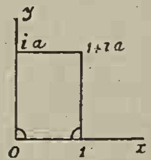

Fig. 46

$$I = \int_0^1 \log \sin \pi x \, dx.$$

Să considerăm, pentru aceasta, integrala

$$\int \log \sin \pi z dz,$$

dealungul dreptunghiului având ca bază segmentul (0... 1) al axe reale şi o înălţime ce reprezintăm prin a. Din acest dreptunghiu, să excludem vârfurile $z = 0$ şi $z = 1$ prin câte un cadran având centrele în aceste puncte şi o rază foarte mică. Integralele dealungul acestor cadrane tinzând către zero împreună cu raza, rezultă egalitatea

$$(1) \quad \int_0^1 \log \sin \pi x dx = i \int_0^a \Big[\log \sin \pi i y - \log \sin \pi(1+iy)\Big] dy$$
$$+ \int_0^1 \log \sin \pi (x + ia) \, dx.$$

Pentru a calculà valoarea expresiunii

$$\log \sin \pi i y - \log \sin \pi(1+iy);$$

să căutăm variaţiunea funcţiunii

$$\log \sin \pi(x+iy),$$

când x variază dela 0 la 1. Valoarea absolută a lui $\sin \pi(x+iy)$

fiind aceiaş pentru $x=0$ şi $x=1$, este deajuns a cunoaşte variaţiunea unghiului $\theta(x) = \arg \sin \pi(x+iy)$. Avem

$$\sin \pi(x+iy) = \sin \pi x \cos h\pi y + i \cos \pi x \sin h\pi y,$$

prin urmare

$$\theta(x) = \operatorname{arctg}\left(\cot \pi x \frac{\sin h\pi y}{\cos h\pi y}\right), \quad y > 0.$$

Funcţiunea $\theta(x)$ variază într'un mod continuu când x variază dela 0 la 1; dacă dar luăm $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, obţinem $\theta(1) = -\frac{\pi}{2}$. De unde rezultă

$$\log \sin \pi iy - \log \sin \pi(1+iy) = i\pi.$$

Ducând această valoare în egalitatea (1), avem

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{I} = -\pi a + \int_0^1 \log \sin \pi(x+ia)dx.$$

De altă parte avem

$$\sin \pi(x+ia) = \tfrac{1}{2}\, ie^{\pi a - i\pi x}\left(1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x}\right);$$

de unde

$$\log \sin \pi(x+ia) = -\log 2 + \frac{i\pi}{2} + \pi a - i\pi x + \log\left(1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x}\right),$$

$$\int_0^1 \log \sin \pi(x+ia)dx = -\log 2 + \pi a + \int_0^1 \log\left(1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x}\right)dx.$$

Ducând această valoare în egalitatea (2), obţinem

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{I} = -\log 2 + \int_0^1 \log\left(1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x}\right)dx.$$

Insă $\log\left(1 - e^{-2\pi a + 2i\pi x}\right)$ tinde către zero când a tinde către $+\infty$, pe când membrul întâiu este independent de a; rezultă

$$\text{(4)} \qquad \int_0^1 \log \sin \pi x dx = -\log 2.$$

Observare. Integrala din membrul al doilea (3) este nulă pentru orice valoare a lui $a > 0$. In adevăr, punând $e^{-2\pi a} = \alpha$, avem $\alpha < 1$, prin urmare

$$\log\left(1 - \alpha e^{2i\pi x}\right) = -\sum_1^\infty \alpha^n \frac{e^{2in\pi x}}{n},$$

$$\int_0 \log\left(1 - \alpha e^{2i\pi x}\right)dx = \frac{i}{2\pi}\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{n^2}\left(e^{2ni\pi x}\right)_0^1 = 0.$$

III. — ALTE APLICAŢIUNI.

341. *Desvoltarea unei funcţiuni meromorfe într'o serie de fracţiuni raţionale.* Fie $f(x)$ o funcţiune meromorfă în tot planul, adică o funcţiune uniformă, care în toată întinderea planului n'are alte singularităţi decât poluri. Ne mărginim la un caz particular, anume, presupunem că există contururi C_1, C_2, ... C_n din ce în ce mai depărtate de origină, întinzându-se spre infinit în toate sensurile, pe cari modulul funcţiunii $f(x)$ rămâne inferior unui număr fix M. Reprezintând prin C_n conturul ale cărui puncte se depărtează la infinit când n tinde către infinit, presupunem că avem

$$\lim_{n=\infty} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z} dz = 2i\pi A,$$

A fiind o constantă determinată[1]).

Să aplicăm teorema lui Cauchy, integralei

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

x fiind un punct în interiorul conturului C_n, diferit de un pol al funcţiunii $f(z)$.

Reziduul funcţiunii $\dfrac{f(z)}{z-x}$ relativ la polul x este $f(x)$.

Fie a un pol de ordinul m al funcţiunii $f(z)$, în interiorul aceluiaş contur; avem, în domeniul punctului a,

$$f(z) = \frac{A_m}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{A_1}{z-a} + P(z-a)$$

şi

$$\frac{1}{z-x} = \frac{-1}{x-a-(z-a)} = -\left[\frac{1}{x-a} + \ldots + \frac{(z-a)^{m-1}}{(x-a)^m} + \ldots\right];$$

de unde conchidem

$$\mathscr{R}_{z=a} \frac{f(z)}{z-x} = -\left[\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m}\right].$$

Avem aşa dar egalitatea

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x} dz = f(x) - \Sigma \left[\frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m}\right],$$

[1]) Pentru un caz mai general a se vedeà. *E. Picard*, Traité d'Analyse, t. II, pag. 172. Deuxième édition.

Cazul cel mai general de descompunere al unei funcţiuni analitice într'o serie de fracţiuni raţionale, se va tratà mai departe prin teorema lui *Mittag-Leffler*.

sau

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \Sigma\left[\frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_m}{x-a^m}\right];$$

suma din urmă se referă la toate polurile funcţiunii $f(x)$ cuprinse în interiorul curbei C_n.

Să căutăm limita integralei când n tinde către infinit. Putem scrie

$$\int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \int_{C_n} \frac{f(z)}{z}\,dz + x\int_{C_n} \frac{f(z)}{z(z-x)}\,dz.$$

Voim să arătăm că ultima integrală tinde către zero. In adevăr, în virtutea ipotezei, $|f(z)| < M$; prin urmare

$$\left|\int_{C_n} \frac{f(z)}{z(z-x)}\,dz\right| < M\left|\int_{C_n} \frac{dz}{z(z-x)}\right|.$$

Reprezentând prin r_n distanţa cea mai mică dela origină la conturul C_n, putem presupune conturul (cerc, dreptunghiu, poligon, . . .) astfel ca raportul $\frac{C_n}{r_n}$ să rămână inferior unui număr fix k; prin urmare

$$\left|\int_{C_n} \frac{dz}{z(z-x)}\right| < \frac{C_n}{r_n}\,\frac{1}{r_n - |x|} < \frac{k}{r_n - |x|}.$$

Membrul din urmă tinzând către zero când n tinde către infinit, propoziţiunea este justificată. Avem aşa dar

$$\lim_{n=\infty}\int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \lim_{n=\infty}\int_{C_n} \frac{f(z)}{z}\,dz = 2i\pi A.$$

Prin urmare făcând $n = \infty$, obţinem desvoltarea căutată

$$(2) \qquad f(x) = A + \lim_{n=\infty}\sum_{C_n}\left[\frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m}\right].$$

Observare. Termenii seriei trebuie consideraţi prin grupuri, un grup fiind suma termenilor relativi la acelaş pol; apoi, ordinea termenilor este determinată de ordinea contururilor $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$, adică termenii seriei sunt dispuşi în ordinea modulelor crescânde ale polurilor funcţiunii.

342. Să aplicăm cele ce preced funcţiunii

$$f(x) = \cot \pi x.$$

Această funcţiune are polurile simple $x = n$, n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. reziduurile corespunzătoare sunt toate egale cu $\frac{1}{\pi}$. Să luăm drept contur C_n un dreptunghiu ABCD (fig. 47), ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate şi simetrice în raport cu aceste axe, latura AB, perpendiculară pe axa reală, trecând prin punctul $x = n + \frac{1}{2}$. Reprezentând prin z un punct oarecare al conturului, să punem

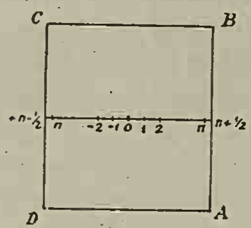

Fig. 47

$$\pi z = \alpha + i\beta.$$

Avem

$$\cot \pi z = \frac{\cos \alpha \cos h\beta - i \sin \alpha \sin h\beta}{\sin \alpha \cos h\beta + i \cos \alpha \sin h\beta};$$

de unde

$$|\cot \pi z|^2 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2 h\beta}{\sin^2\alpha + \sin^2 h\beta}.$$

Dealungul laturilor AB, CD membrul al doilea se reduce la

$$\frac{\sin^2 h\beta}{1 + \sin^2 h\beta} < 1;$$

iar dealungul laturilor BC, DA făcând β să tindă către $\pm\infty$, el tinde către 1.

Aşa dar prima condiţiune, anume ca modulul funcţiunii $f(z)$ dealungul contururilor considerate, să nu treacă peste un număr fix este împlinită.

In ce priveşte a doua condiţiune, avem, dealungul tuturor acestor dreptunghiuri,

$$\int_{C_n} \frac{\cot \pi z}{z} dz = 0,$$

funcţiunea $\frac{\cot \pi z}{z}$ fiind pară (4^0, § 339).

Din cele ce preced rezultă pentru funcţiunea $\cot \pi x$, în virtutea formulei (2), desvoltarea următoare

$$(3) \qquad \pi \cot \pi x = \lim_{m=\infty} \sum_{n=-m}^{+m} \frac{1}{x-n} = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right).$$

343. Funcţiunea

$$f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$$

are aceleaşi poluri ca funcţiunea $\cot \pi x$, reziduul relativ la polul $x = n$ fiind egal cu $\frac{(-1)^n}{\pi}$. Consideraţiuni analoage cu cele de mai sus conduc la concluziunile următoare: Dealungul contururilor considerate avem

$$\left| \frac{1}{\sin \pi z} \right| \leq 1$$

și integrala

$$\int_{C_n} \frac{dz}{z \sin \pi z} = 0.$$

De unde rezultă desvoltarea

$$(4) \qquad \pi \sin \pi x = \lim_{m=\infty} \sum_{n=-m}^{+m} (-1)^n \frac{1}{x - n\pi} =$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right).$$

344. *Expresiunea sumei*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2k}},$$

în care n primește toate valorile întregi dela 1 la ∞ și k este un număr întreg pozitiv oarecare.

Pentru a obține această expresiune să considerăm integrala

$$\int_{C_n} \frac{\cot \pi x}{x^{2k}} dx,$$

dealungul dreptunghiurilor considerate în exemplele precedente. Funcțiunea

$$\frac{\cot \pi x}{x^{2k}}$$

are polul $x = 0$ multiplu de ordinul $2k + 1$ și polurile simple $x = n \neq 0$ cu reziduurile corespunzătoare $\frac{1}{\pi n^{2k}}$. Avem așa dar egalitatea

$$(1) \qquad \int_{C_n} \frac{\cot \pi x}{x^{2k}} dx = 2i \sum_{n=-m}^{+m}{}' \frac{1}{n^{2k}} + 2i\pi \mathscr{R}_{x=0} \frac{\cot \pi x}{x^{2k}},$$

în care simbolul Σ' exprimă că valoarea $n = 0$ este exclusă. Se recunoaște ușor că integrala din membrul întâiu tinde către zero când n tinde către infinit. De unde rezultă expresiunea

$$(2) \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2} \mathscr{R}_{x=0} \frac{\cot \pi x}{x^{2k}}.$$

Făcând succesiv $k = 1, 2, 3, \ldots$, obținem sumele

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \ldots$$

344 bis. *Integrarea ecuaţiunilor diferenţiale lineare omogene cu coeficienţi constanţi.* Fie

$$(1) \qquad F(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = 0$$

o asemenea ecuaţiune şi

$$(2) \qquad f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n$$

polinomul caracteristic corespunzător. Fie $z = r$ un zero al polinomului $f(z)$ şi $P(z)$ o funcţiune olomorfă oarecare în interiorul unui cerc cu centrul în punctul r. Expresiunea

$$(3) \qquad y = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} dz = \mathcal{R}_{z=r} e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)}$$

este o integrală particulară a ecuaţiunii (1). Căci, derivând integrala în raport cu x, avem

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} z e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} dz, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} z^2 e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} dz, \ldots,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} z^n e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)} dz$$

şi ducând aceste expresiuni în ecuaţiunea (1), rezultă egalitatea

$$(5) \qquad F(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r)} e^{zx} P(z) dx = 0;$$

adică funcţiunea reprezintată prin integrala (3) satisface ecuaţiunea propusă.

Exemplu. Fie $f(z) = (z - r)^\alpha f_1(z)$, $f_1(r) \neq 0$. Avem, în domeniul punctului $z = r$, desvoltări de forma

$$\frac{P(z)}{f_1(z)} = A_0 + A_1(z - r) + A_2(z - r)^2 + \ldots + A_{\alpha-1}(z - r)^{\alpha-1} + \ldots,$$

$$e^{zx} = e^{x(r+z-r)}$$

$$= e^{rx}\left[1 + \frac{x}{1}(z-r) + \ldots + \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}(z-r)^{\alpha-1} + \ldots\right];$$

de unde integrala

$$y = \mathcal{R}_{z=r} e^{zx} \frac{P(z)}{f(z)}$$

$$= e^{rx}\left[A_0 \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + A_1 \frac{x^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} + \ldots + A_{\alpha-1}\right],$$

în care coeficienţii $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ sunt arbitrari.

Soluţiunea generală a ecuaţiunii (1) va fi dată de suma integralelor particulare relative la toate zerurile polinomului $f(z)$, sau de integrala

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C e^{zx}\frac{P(z)}{f(z)}\,dz,$$

luată după o curbă închisă C, care conţine acele zeruri şi în care funcţiunea P(z) este olomorfă.

345. *Calculul sumei (Gauss)*

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}k^2}$$

k primind valori întregi şi n fiind un număr întreg pozitiv.

Considerăm integrala

$$\int_C \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}z^2}}{e^{2i\pi z}-1}\,dz,$$

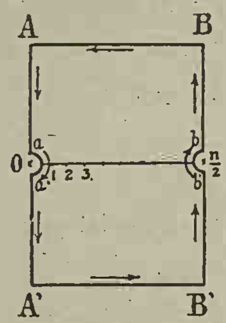

Fig. 48

luată după conturul alăturat pe care îl reprezintăm prin C (fig. 48):

$$C = Aa + aa' + a'A' + A'B' + B'b' + b'b + bB + BA,$$

$$\overline{Aa} = \overline{a'A'} = \overline{B'b'} = \overline{bB}$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = \frac{n}{2};$$

arcele aa' şi bb' sunt semicercuri cu centrele în punctele $z=0$, $z=\frac{n}{2}$ având o rază foarte mică r. Laturile AA′, BB′ sunt perpendiculare pe axa reală, cea dintâi trecând prin punctul $z=0$, cea de a doua prin punctul $z=\frac{n}{2}$. In interiorul acestui contur funcţiunea

$$f(z) = \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}z^2}}{e^{2i\pi z}-1}$$

n'are alte singularităţi decât polurile simple $z=k$ cu reziduurile

$$\frac{1}{2i\pi}e^{\frac{2i\pi}{n}k^2}, \quad k = \begin{cases} 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}, & (n \text{ impar}), \\ 1, 2, \ldots \frac{n}{2}-1, & (n \text{ par}). \end{cases}$$

Acestor valori corespund egalităţile

$$(1) \qquad \int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{2i\pi}{n}k^2} \quad (n \text{ impar}),$$

$$(2) \qquad \int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{2i\pi}{n}k^2} \quad (n \text{ par}).$$

Ele se pot înlocuì, în virtutea egalității

$$(3)\qquad e^{\frac{2i\pi}{n}k^2} = e^{\frac{2i\pi}{n}(n-k)^2},$$

prin cele următoare

$$(4)\qquad \int_C f(z)dz = \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}k^2} \quad (n \text{ impar}),$$

$$(5)\qquad \int_C f(z)dz = \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}k^2} - \frac{1}{2}e^{\frac{2i\pi}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^2} \quad (n \text{ par}).$$

Să calculăm integrala din membrul întâi. In domeniul punctului $z = 0$, avem

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\cdot\frac{1}{z} + P(z);$$

de unde

$$(6)\qquad \lim_{r=0}\int_{aa'} f(z)dz = -\frac{1}{2}.$$

In domeniul punctului $z = \frac{n}{2}$, funcțiunea este olomorfă, sau de forma

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\frac{e^{\frac{2i\pi}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^2}}{z-\frac{n}{2}} + P\left(z-\frac{n}{2}\right),$$

după cum n este impar sau par. Avem dar respectiv

$$(7)\qquad \lim_{r=0}\int_{b'b} f(z)dz = \begin{cases} 0 & (n \text{ impar}), \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{2i\pi}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^2} & (n \text{ par}). \end{cases}$$

Dealungul laturei care trece prin origină avem $z = iy$. Punând $\overline{OA} = \overline{OA'} = p$, obținem

$$(8)\quad \begin{cases} (Aa + a'A') = i\displaystyle\int_p \frac{e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}}{e^{-2\pi y}-1}dy + i\int_{-r}^{-p}\frac{e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}}{e^{-2\pi y}-1}dy \\ \qquad = -i\displaystyle\int_r^p e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}\left(\frac{1}{e^{-2\pi y}-1} + \frac{1}{e^{2\pi y}-1}\right)dy \\ \qquad = i\displaystyle\int_r^p e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}dy. \end{cases}$$

Dealungul laturei care trece prin punctul $z=\frac{n}{2}$, punem $z=\frac{n}{2}+iy$; prin urmare avem

$$(9)\left\{\begin{aligned}(\mathrm{B}'b'+b\mathrm{B}) &= i\int_r^p\left[\frac{e^{\frac{2i\pi}{n}\left(\frac{n}{2}+iy\right)^2}}{e^{ni\pi-2\pi y}-1}+\frac{e^{\frac{2i\pi}{n}\left(\frac{n}{2}-iy\right)^2}}{e^{ni\pi+2\pi y}-1}\right]dy\\ &= i^{1-n}\int_r^p e^{-\frac{2i\pi}{n}y^2}\,dy.\end{aligned}\right.$$

Integralele dealungul laturilor paralele cu axa reală tind către zero, când aceste laturi se depărtează la infinit. In adevăr, dealungul laturii AB, avem $z=x+ip$; prin urmare modulul integralei (AB) satisface inegalitatea

$$|(\mathrm{AB})|<\int_0^{\frac{n}{2}}\frac{e^{-\frac{4\pi}{n}px}}{1-e^{-2\pi p}}\,dx.$$

Să descompunem intervalul $\left(0,\frac{n}{2}\right)$ în două intervale $(0,\varepsilon)$, $\left(\varepsilon,\frac{n}{2}\right)$, ε fiind pozitiv şi oricât de mic voim. In intervalul $\left(\varepsilon,\frac{n}{2}\right)$ funcţiunea de sub semnul $\int$ tinde către zero când p tinde către $+\infty$, prin urmare şi integrala tinde către zero. Relativ la primul interval, avem inegalitatea

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{e^{-\frac{4\pi}{n}px}}{1-e^{-2\pi p}}\,dx<\frac{\varepsilon}{1-e^{-2\pi p}},$$

în care membrul al doilea tinde către zero împreună cu ε. Aşa dar integrala (AB) tinde către zero când p tinde către $+\infty$. Să considerăm integrala (A'B'). Dealungul acestei laturi punem $z=x-ip$; de unde

$$(\mathrm{A'B'})<\int_0^{\frac{n}{2}}\frac{e^{\frac{4\pi}{n}px}}{e^{2\pi p}-1}\,dx.$$

Să facem substituţiunea

$$x=\frac{n}{2}-x';$$

obţinem, suprimând accentul,

$$\int_0^{\frac{n}{2}} \frac{e^{\frac{4\pi}{n} px}}{e^{2\pi p}-1}\, dx = \int_0^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-\frac{4\pi}{n} px}}{1-e^{-2\pi p}}\, dx.$$

Integrala din membrul al doilea coincide cu cea relativ la latura AB; prin urmare tinde în acelaş timp către zero.

Aşa dar, făcând suma integralelor dealungul conturului considerat, în care facem r să tindă către zero şi p către infinit, găsim, în virtutea egalităţilor (6), (7), (8), (9),

$$(10) \qquad (i+i^{1-n}) \int_0^{\infty} e^{-\frac{2i\pi}{n} x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n} k^2},$$

n fiind un număr întreg pozitiv par sau impar. Integrala din membrul întâi se calculează făcând în egalitatea cunoscută

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dn = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

substituţiunea

$$\sqrt{\frac{2i\pi}{n}}\, x = t$$

obţinem

$$(11) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\frac{2i\pi}{n} x^2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{n}\, e^{-\frac{i\pi}{4}} = \tfrac{1}{4}(1-i)\sqrt{n}.$$

Substituind această valoare în egalitatea (10), obţinem, pentru suma lui *Gauss*, expresiunea

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n} k^2} = \frac{i+i^{1-n}}{1+i} \sqrt{n} = \tfrac{1}{2}(1+i)(1+i^{-n})\sqrt{n}.$$

Această expresiune se simplifică dacă punem în evidenţă valorile resturilor diviziunii lui n prin 4. Astfel, reprezintând suma din membrul întâiu prin S_n, avem formulele

$$\begin{aligned} S_n &= (1+i)\sqrt{n}, && \text{pentru } n = 4m, \\ S_n &= \sqrt{n} && \text{»} \quad n = 4m+1, \\ S_n &= 0 && \text{»} \quad n = 4m+2, \\ S_n &= i\sqrt{n} && \text{»} \quad n = 4m+3. \end{aligned}$$

Suma lui *Gauss* se prezintă în problema *diviziunii cercului în părţi egale.*

346. *Numărul zerurilor şi al polurilor cuprinse într'o regiune dată.* Fie $f(x)$ o funcţiune uniformă fără puncte singulare esenţiale într'o regiune dată şi să considerăm derivata sa logaritmică $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Un punct ordinar $x = a$ al funcţiunii $f(x)$, în care această funcţiune nu se anulează, este un punct ordinar al derivatei sale logaritmicei Să presupunem că a este un zero sau un pol al lui $f(x)$ de un ordin m. Vom aveà, respectiv, în domeniul acestui punct, expresiuni de forma

$$f(x) = (x-a)^m \, \mathrm{P}(x-a), \quad f(x) = (x-a)^{-m} \, \mathrm{P}(x-a),$$

seriile $\mathrm{P}(x-a)$ fiind diferite de zero în punctul a. De unde rezultă respectiv

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \mathscr{P}(x-a),$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-m}{x-a} + \mathscr{P}(x-a).$$

Aşa dar în ambele cazuri, punctul a este un pol de ordinul întâi, al derivatei logaritmice şi reziduul corespunzător este m sau $-m$, după cum acest punct este pentru $f(x)$ un zero sau un pol de ordinul m. De aci rezultă că dacă reprezintăm prin μ şi ν respectiv numărul zerurilor şi al polurilor funcţiunii $f(x)$ cuprinse în interiorul unei curbe închise C, situată în regiunea considerată, fiecare zero sau pol fiind socotit de atâtea ori câte unităţi sunt în ordinul său de multiplicitate, vom aveà, aplicând teorema reziduurilor, pentru diferenţa dintre numărul zerurilor şi al polurilor, expresiunea

$$\mu-\nu = \frac{1}{2\,i\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx, \tag{1}$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv.

Egalitatea precedentă se mai poate scrie

$$\mu-\nu = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} d\log f(x). \tag{2}$$

Punând $f(x) = \varrho e^{i\theta}$, ea devine

$$\mu-\nu = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} d\log\varrho + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}} d\theta. \tag{3}$$

Prima integrală din membrul al doilea este nulă, căci $\log\varrho$ îşi reià valoarea iniţială când x descrie o curbă închisă. Numind θ_0 şi θ_1 valorile iniţială şi finală a argumentului θ, vom aveà

$$\mu-\nu = \frac{1}{2\pi}(\theta_1-\theta_0), \tag{4}$$

$$\theta_1-\theta_0 = 2\pi(\mu-\nu), \tag{5}$$

adică *variațiunea argumentului unei funcțiuni uniforme, când variabila descrie o curbă închisă în sens direct, este egală cu 2π înmulțit cu diferența dintre numărul zerurilor și al polurilor funcțiunii, cuprinse în interiorul curbei.*

Dacă funcțiunea $f(x)$ este olomorfă în interiorul curbei C, avem $r = 0$ și numărul zerurilor sale cuprinse în interiorul acestei curbe este dat de integrala

$$(6) \qquad \mu = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{1}{2i\pi}\int_C d\log f(x)dx\,,$$

sau de expresiunea

$$(7) \qquad \mu = \frac{1}{2\pi}(\theta_1 - \theta_0).$$

θ_1 și θ_0 având semnificările de mai sus.

347. Dacă $f(x)$ este o funcțiune rațională, derivata sa logaritmică este de asemenea o funcțiune rațională. Exprimând că suma reziduurilor funcțiunii $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, pe toată sfera, este nulă, rezultă că *o funcțiune rațională are atâtea zeruri câte poluri.* De aci rezultă imediat teorema fundamentală a algebrei: *o funcțiune rațională intreagă de gradul m, are m zeruri.* Căci o asemenea funcțiune admite punctul ∞ ca pol unic de ordinul m.

348. *Teoremă. Fie $f(x)$ și $\varphi(x)$ două funcțiuni olomorfe într'o regiune dată și C o curbă închisă situată în aceà regiune. Dacă dealungul lui C avem*

$$|\varphi(x)| < |f(x)|,$$

funcțiunile $f(x)$ și $f(x)+\varphi(x)$ vor aveà acelaș număr de zeruri în interiorul acestei curbe.

Să reprezintăm prin m și n numărul zerurilor fiecăreia din aceste funcțiuni cuprinse în interiorul curbei C; vom aveà, în virtutea formulei (6),

$$n - m = \frac{1}{2i\pi}\int_C d\log\left[f(x)+\varphi(x)\right] - \frac{1}{2i\pi}\int_C d\log f(x),$$

sau

$$n - m = \frac{1}{2i\pi}\int d\log\left[1 + \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right].$$

Pentru evaluarea acestei integrale să punem

$$z = \frac{\varphi(x)}{f(x)};$$

z este o funcţiune uniformă de x în regiunea considerată: curbei C îi va corespunde aşa dar pentru z o curbă închisă Γ şi vom aveà

$$\int_C d \log\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right] = \int_\Gamma d \log(1 + z)\,.$$

Insă, în virtutea ipotezei, dealungul curbei Γ avem $|z| < 1$; punctul $z = -1$ este aşa dar exterior acestei curbe. Prin urmare, în interiorul lui Γ precum şi pe Γ, $\log(1+z)$ este o funcţiune olomorfă. De unde rezultă egalitatea

$$\int_\Gamma d \log(1 + z) = 0\,;$$

prin urmare $n = m$.

Este evident că teorema subsistă, dacă $\varphi(x)$ se reduce la o constantă A, a cărei valoare absolută este mai mică decât cea mai mică valoare ce primeşte $|f(x)|$ dealungul curbei C.

349. *Expresiunea unui zero sau al unui pol cu ajutorul unei integrale.* Fie $f(x)$ o funcţiune meromorfă într'o regiune dată şi a un zero de ordinul m; reziduul funcţiunii

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}$$

în raport cu punctul a, care este un pol al acestei funcţiuni, este ma. Prin urmare avem

$$(1) \qquad a = \frac{1}{2mi\pi}\int_{(a)} \frac{xf'(x)}{f(x)}\,dx\,,$$

integrala fiind luată dealungul unei curbe închise în interiorul căreia $f(x)$ n'are nici un pol şi nici alt zero decât a. Dacă punctul a este un pol de ordinul m, este deajuns a înlocuì în formula precedentă m prin $-m$.

350. Fie C o curbă închisă care nu trece prin nici un pol sau niciun zero al funcţiunii $f(x)$. Să reprezintăm prin Σa, Σb suma zerurilor şi a polurilor funcţiunii $f(x)$, cuprinse în interiorul curbei C, fiecare zero sau pol fiind repetat de atâtea ori câte unităţi sunt în ordinul său de multiplicitate; vom aveà, în virtutea celor precedente,

$$\Sigma a - \Sigma b = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{xf'(x)}{f(x)}\,dx\,.$$

Intr'un mod mai general, fie $F(x)$ o funcțiune olomorfă; vom aveà egalitatea

$$\Sigma F(a) - \Sigma F b = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(x)f'(x)}{f(x)}\,dx\,,$$

în care $\Sigma F(a)$, $\Sigma F(b)$ reprezintă suma valorilor ce primește $F(x)$ în toate zerurile a și în toate polurile b ale funcțiunii $f(x)$. Intr'un zero sau pol multiplu, termenul $F(a)$, respectiv $F(b)$ este repetat de atâtea ori câte unități sunt în ordinul de multiplicitate al acelui zero sau al acelui pol. Această egalitate se justifică, observând că $F(a)$ este reziduul funcțiunii $\frac{F(x)f'(x)}{f(x)}$ relativ la un zero simplu al lui $f(x)$, etc.

Să presupunem funcțiunea $f(x)$ olomorfă în interiorul lui C și fie $F(x) = x^k$, k fiind un număr întreg pozitiv; vom aveà

$$\Sigma a^k = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{x^k f'(x)}{f(x)}\,dx\,.$$

CAPITOLUL XVIII.

INVERSIUNEA SERIILOR INTREGI. TRANSFORMAREA CONFORMĂ. PRELUNGIREA ANALITICĂ.

351. Fie

$$(1) \qquad y = P(x) = a_n x^n + a_{n+1}\, x^{n+1} + \ldots\,, \qquad a_n \neq 0,$$

o serie întreagă convergentă într'un cerc (R) având punctul $x = 0$ ca zero de ordinul n. Există un număr pozitiv $r < R$ astfel ca, în interiorul cercului $|x| = r$, $P(x)$ să nu aibă alt zero decât punctul $x = 0$ și să nu anuleze dealungul acestui cerc. Fie m valoarea minimă ce primește $|P(x)|$ când x descrie cercul (r); m este mai mare ca zero. Din punctul $y = 0$ ca centru să descriem un cerc cu o rază $\varrho \leq m$ și fie y_1 un punct situat în interiorul acestui cerc. Ecuațiunea

$$P(x) - y_1 = 0$$

va aveà în interiorul cercului $|x| = r$ acelaș număr de zeruri ca ecuațiunea $P(x) = 0$, adică n zeruri (348).

352. Să considerăm întâi cazul $n = 1$. Fie

$$y = P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad a_1 \neq 0.$$

In acest caz, unui punct y_1 situat în interiorul cercului $|y| = \varrho$, corespunde un singur punct x_1, în interiorul cercului $|x| = r$, astfel ca ecuaţiunea

$$P(x_1) = y_1$$

să fie satisfăcută. Voim să arătăm că x_1 se poate reprezintă printr'o serie întreagă de y_1, convergentă în interiorul cercului (ϱ). Suprimând indicii, scriind x, y în loc de x_1, y_1 şi reprezintând prin z variabila de integraţiune, soluţiunea considerată x se poate exprimă prin integrala

$$x = \frac{1}{2i\pi}\int_{(r)} \frac{zP'(z)}{P(z)-y}\,dz, \tag{2}$$

luată în sensul pozitiv. In virtutea ipotezei, avem $|y| < |P|(z)$ pentru toate valorile lui z cari satisfac condiţiunea $|z| = r$; prin urmare putem scrie

$$\frac{1}{P(z)-y} = \frac{1}{P(z)} + \frac{y}{P^2(z)} + \ldots + \frac{y^n}{P^{n+1}(z)} + \ldots \tag{3}$$

Să punem

$$b_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(r)} \frac{zP'(z)}{P^{n+1}(z)}\,dz, \tag{4}$$

sau, integrând prin părţi,

$$b_n = \frac{1}{2ni\pi}\int_{(r)} \frac{dz}{P^n(z)}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Observând că $b_0 = 0$, integrala (3) ne dă, pentru x, seria

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b^n y^n + \ldots, \tag{6}$$

valabilă în interiorul cercului $|y| = \varrho$.

Operaţiunea de a deduce seria (6) din seria (1) constitue ceeace se numeşte *inversiunea* seriei (1).

Determinarea coeficienţilor b_n se poate face înlocuind în ecuaţiunea $P(x) = y$, x prin desvoltarea sa (6) şi identificând ambele membre. Obţinem astfel un sistem de ecuaţiuni liniare

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 b_1, \\ 0 &= a_1 b_1 + a_2 b_1^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

care determină într'un mod unic necunoscutele $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$

Coeficienţii b_n se mai pot obţine, observând că avem

$$b_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n x}{dy^n}\right)_0$$

şi că derivatele $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, ..., se pot calculà cu ajutorul derivatelor $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., date de ecuaţiunea (1).

353. Să considerăm seria

(7) $$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots, \quad a_1 \neq 0,$$

convergentă într'un cerc cu centrul în punctul x_0. In virtutea celor ce preced, putem enunţà teorema următoare:

Există un număr pozitiv ϱ, astfel că pentru toate valorile lui y, cari satisfac condiţiunea $|y - y_0| < \varrho$, ecuaţiunea (7) *se poate reduce la identitate luând pentru x o serie de forma*

(8) $$x - x_0 = b_1(y - y_0) + b_2(y - y_0)^2 + \dots$$

354. Fie acum

(1) $$y = f(x)$$

o funcţiune olomorfă într'o arie dată (A) şi x_0 un punct al acestei arii, în care derivata $f'(x)$ este diferită de zero. Reprezentând prin y_0 valoarea lui $f(x)$ în punctul x_0, rezultă din teorema precedentă că există o serie de forma

(2) $$x = x_0 + b_1(y - y_0) + b_2(y - y_0)^2 + \dots,$$

convergentă în domeniul punctului y_0, care reduce la identitate ecuaţiunea (2).

Această serie dă naştere unei funcţiuni analitice $x = \varphi(y)$, numită *funcţiune inversă* a funcţiunii considerate. In virtutea teoremei asupra permanenţei analitice, elementele deduse, prin prelungire analitică din elementul primitiv (2), substituite în locul lui x, vor reduce ecuaţiunea dată (1) la identitate.

Din teoria precedentă rezultă că punctele singulare ale funcţiunii $\varphi(y)$ nu se pot cuprinde decât printre acele puncte y corespunzătoare punctelor x, în cari derivata $f'(x)$ se anulează sau în care funcţiunea $f(x)$ încetează de a fi olomorfă.

355. Să considerăm acum cazul $n > 1$. Fie

(1) $$y = P(x) = ax^n + a_1x^{n+1} + \dots, \quad a \neq 0$$

şi $x_1, x_2, \dots x_n$ cele n valori ale lui x, vecine cu $x = 0$, corespunzătoare punctului y vecin cu $y = 0$, pentru cari funcţiunea $P(x) - y$ se anulează. Aceste valori ale lui x se pot obţine explicit în modul următor:

Extrăgând rădăcina n^a a ambelor membre ale ecuaţiunii (1) şi punând

(2) $$u = \frac{a_1}{a}x + \frac{a_2}{a}x^2 + \dots,$$

avem

$$y^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} x(1+u)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} x\left(1 + \frac{1}{n}u + \dots\right).$$

Inlocuind în membrul din urmă u prin desvoltarea sa (2), obținem un rezultat de forma

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = x + b_1x^2 + b_2x^3 + \dots$$

De unde, prin inversiune,

$$x = a^{-\frac{1}{n}}\left(y^{\frac{1}{n}} + c_1 y^{\frac{2}{n}} + \dots\right), \tag{3}$$

serie care reprezintă cele n valori $x_1, x_2, \dots x_n$, dacă înlocuim $y^{\frac{1}{n}}$ succesiv prin cele n valori de cari este susceptibil. Soluțiunile $x_1, x_2, \dots x_n$ sunt așa dar n ramuri ale unui funcțiuni analitice multiforme, având punctul $y = 0$ ca punct de ramificațiune, în jurul căruia ele se permută între dânsele.

356. *Teoremă. O funcțiune rațională întreagă și simetrică de cele n ramuri considerate $x_1, x_2, \dots, x_n$, este o funcțiune olomorfă de y în domeniul lui $y = 0$.*

Este deajuns a demonstrà teorema pentru sume de forma

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Fie k un număr întreg, pozitiv; avem

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = \frac{1}{2i\pi}\int_{(r)} \frac{x^k P'(x)}{P(x) - y}\,dx, \tag{4}$$

integrala fiind luată în sensul pozitiv dealungul cercului (r) considerat mai sus. Insă, precum am văzut, membrul al doilea se desvoltă într'o serie întreagă, convergentă în domeniul lui $y = 0$, așà că putem scrie

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = \sum_{m=1}^{\infty} b_m y^m, \tag{5}$$

coeficienții b_m fiind dați de integralele

$$b_m = \frac{1}{2i\pi}\int_{(r)} \frac{x^k P'(x)}{[P(x)]^{m+1}}\,dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{6}$$

Observare. Funcțiunea de sub semnul sumă din (6) fiind de forma

$$\frac{1}{x^{mn+1-k}} P(x), \quad P(0) \neq 0,$$

rezultă că coeficienţii b_m sunt nuli pentru toate valorile lui m cari satisfac inegalitatea

$$mn + 1 - k \leqq 0.$$

357. *Aplicaţiune. Seria Lagrange.* Fie $f(x)$ o funcţiune olomorfă într'o regiune dată şi a un punct situat în această regiune. Funcţiunea

$$(1) \qquad F(x) = x - a - \alpha f(x)$$

în care α este un parametru variabil se anulează în punctul a pentru $\alpha = 0$. De unde rezultă că dacă α satisface inegalitatea

$$(2) \qquad | \alpha f(x) | < | x - a |,$$

dealungul unui cerc $| x - a | = r$, situat în regiunea dată, funcţiunea $F(x)$ va aveà în interiorul acestui cerc un singur zero care coincide cu a pentru $\alpha = 0$ (348). Variabila x privită ca funcţiune de α, definită de ecuaţiunea

$$(3) \qquad x - a - \alpha f(x) = 0,$$

este funcţiune olomorfă de α în domeniul $\alpha = 0$. In adevăr, scriind această ecuaţiune sub forma

$$(4) \qquad \alpha = \frac{x-a}{f(x)} = \varphi(x)$$

şi observând că $f(a) \neq 0$, căci altmintrelea ecuaţiunea (3) ar conţine $x - a$ ca factor, găsim

$$\varphi'_{(a)} = \frac{1}{f(a)} \neq 0.$$

Aşa dar avem (354) pentru x o desvoltare de forma

$$(5) \qquad x = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n \alpha^n + \ldots$$

Pentru a obţine această desvoltare, să ne servim de expresiunea (2) (§ 352) care dă

$$(6) \qquad x = \frac{1}{2i\pi}\int_{r)} \frac{zF'(z)}{F(z)}\, dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{r)} \frac{z[1-\alpha f'(z)]}{z-a-\alpha f(z)}\, dz .$$

Să evaluăm integrala din membrul al doilea.

Desvoltând după puterile lui α, avem

$$\frac{1-\alpha f'(z)}{z-a-\alpha f(z)} = \frac{1}{z-a} + \sum_1^\infty \alpha^n \left[\frac{f^n(z)}{(z-a)^{n+1}} - \frac{f^{n-1}(z)f'(z)}{(z-a)^n} \right];$$

de unde, pentru coeficientul a_n, expresiunea

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{(r)} \frac{zf^n(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz - \int_{(r)} \frac{zf^{n-1}(z)f'(z)}{(z-a)^n}\, dz\right] \\ &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{da^n}\Big(af^n(a)\Big) - \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\Big(af^{n-1}(a)f'(a)\Big) \\ &= \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{d}{da}\Big(af^n(a)\Big) - naf^{n-1}(a)f'(a)\right]; \end{aligned}$$

adică

$$(7) \qquad a_n = \frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}f^n(a)}{da^{n-1}}.$$

Avem aşa dar desvoltarea

$$(8) \qquad x = a + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}f^n(a)}{da^{n-1}},$$

care constitue seria lui *Lagrange*.

Determinarea razei de convergenţă a seriei. Pentru a determină raza cercului de convergenţă al seriei (8), alegem mai întâi un număr pozitiv r astfel ca în cercul $|x-a| = r$, precum şi pe cerc, funcţiunea $f(x)$ să fie olomorfă. Reprezintând prin $M(r)$ cea mai mare valoare a modulului lui $f(x)$ dealungul acestui cerc, trebuie, în virtutea inegalităţii (2), să avem

$$(9) \qquad |\alpha| < \frac{r}{M(r)}.$$

Fie ρ cea mai mare valoare a membrului al doilea, seria (8) va fi convergentă pentru toate valorile lui α satisfăcând inegalitatea $|\alpha| < \rho$.

Să considerăm, ca aplicaţiune, *ecuaţiunea lui Kepler*

$$(10) \qquad x = a + \alpha \sin x\,[1])$$

în care a este un număr real.

Formula (8) ne dă, pentru rădăcina x, care devine egală cu a când α se anulează, desvoltarea

$$(11) \qquad x = a + \sum \frac{\alpha^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}\sin^n a}{da^{n-1}}.$$

Să căutăm, conform celor zise mai sus, maximul modulului funcţiunii $\sin x$, când x descrie cercul $|x-a| = r$. Punem

$$x = a + re^{i\theta} = a + r\cos\theta + ir\sin\theta;$$

de unde

$$|\sin(a + r\cos\theta + ir\sin\theta)|^2 =$$

$$|\sin(a + r\cos\theta + ir\sin\theta)|\,|\sin(a + r\cos\theta - ir\sin\theta)|$$

$$= \cos^2(ir\sin\theta) - \cos^2(a + r\cos\theta)$$

$$= \left(\frac{e^{r\sin\theta} + e^{-r\sin\theta}}{2}\right)^2 - \cos^2(a + r\cos\theta)$$

$$\leq \left(\frac{e^{r\sin\theta} + e^{-r\sin\theta}}{2}\right)^2.$$

---

[1]) a = anomalia medie, x = anomalia excentrică, α = excentricitatea elipsei.

Maximul membrului al doilea corespunde lui $\theta = \frac{\pi}{2}$. Avem așa dar

$$M(r) = \max. |\sin| = \frac{e^r + e^{-r}}{2},$$

când x descrie cercul $|x - a| = r$. Rămâne să căutăm maximul raportului

$$\frac{r}{M(r)} = 2 \frac{r}{e^r + e^{-r}}.$$

Anulând derivata membrului al doilea, obținem ecuațiunea

$$e^r + e^{-r} - r(e^r - e^{-r}) = 0,$$

sau

$$e^{2r}(r-1) - (r+1) = 0.$$

Se recunoaște lesne că această ecuațiune admite o rădăcină cuprinsă între 1 și 2; anume

$$r = 1{,}19967\ldots$$

Prin urmare, pentru raza cercului de convergență al seriei (11), avem

$$\rho = \frac{2r}{e^r + e^{-r}} = 0{,}6627\ldots$$

II. — TRANSFORMARE CONFORMĂ.

358. Inversiunea funcțiunilor olomorfe ne permite a complecta noțiunea de transformare conformă.

Fie $y = f(x)$ o funcțiune olomorfă într'o regiune dată a planului (x), (C) o curbă închisă fără puncte multiple, situată în aceà regiune.

Să reprezintăm prin $x = \varphi(y)$ funcțiunea inversă și prin (Γ) transformata curbei (C) în planul (y). Când x descrie curba (C) și revine la punctul de plecare, y descrie deasemenea curba (Γ) și revine la punctul de plecare corespunzător.

Dacă dealungul lui (C) funcțiunea $y = f(x)$ nu trece de două ori prin aceeaș valoare, funcțiunea $x = \varphi(y)$ nu va trece nici ea de două ori prin aceeaș valoare; căci altfel ar rezultà că pe curba (C) să existe cel puțin un punct x căruia să corespundă pe (Γ) două sau mai multe puncte y, ceeace este imposibil, $f(x)$ fiind o funcțiune olomorfă în regiunea considerată [1]).

[1]) Analogie cu cazul unei funcțiuni de variabilă reală, care variază necontenit în acelaș sens, când variabila, cuprinsă într'un interval dat, crește dela o extremitate la alta a acelui interval.

In ipoteza dar că dealungul curbei (C) funcţiunea $f(x)$ nu trece decât o singură dată prin fiecare valoare, curbele (C) şi (Γ) se corespund punct cu punct şi curba (Γ) limitează o porţiune de arie în planul (y), precum curba (C) limitează una în planul (x).

Voim să probăm că ariile interioare acestor curbe se corespund punct cu punct şi că fiecare din ele este transformata conformă a celeilalte.

Fie y_0 un punct în interiorul lui (Γ). Dacă y descrie odată curba (Γ) în sensul pozitiv, argumentul lui $(y-y_0)$ se măreşte cu 2π şi prin urmare argumentul funcţiunii de x, $f(x)-y_0$, se măreşte cu aceeaş cantitate când punctul corespunzător x descrie curba (C). Sensul în care acest punct descrie curba (C) este neapărat pozitiv, căci altfel ar urmà ca funcţiunea $f(x)-y_0$, adică $f(x)$, să aibă un pol în interiorul curbei (C); ceeace este contrar ipotezei.

De unde rezultă că funcţiunea $f(x)-y_0$ admite un zero simplu x_0 în interiorul curbei (C), astfel avem egalitatea

$$f(x_0)=y_0$$

şi inegalitatea

$$f'(x_0)\neq 0\,.$$

Aşa dar unui punct y_0, interior curbei (Γ), corespunde un singur punct x_0, interior curbei C şi deoarece $f'(x_0)\neq 0$, rezultă că în domeniul lui y_0, avem

$$x-x_0=\mathrm{P}(y-y_0)\,.$$

Funcţiunea inversă $x=\varphi(y)$ este aşà dar olomorfă în domeniul oricărui punct interior ariei limitată de conturul simplu (Γ), prin urmare olomorfă în interiorul lui (Γ), precum $y=f(x)$ este olomorfă în interiorul lui (C). Cele două arii considerate se corespund punct cu punct şi transformarea lor una într'alta este o transformare conformă, în virtutea inegalităţii $f'(x)\neq 0$ pentru toate punctele interioare curbei (C).

III. — PRELUNGIRE ANALITICĂ.

359. S'a definit în altă parte, după Weierstrass, noţiunea de *prelungire analitică*. Problema prelungirii analitice se mai poate prezintà sub forma următoare: Fie $f(x)$ o funcţiune analitică olomorfă într'o arie A, limitată de un contur (C). Se zice că $f(x)$ se prelungeşte în afară din A dincolo de un arc σ al conturului, dacă există o funcţiune analitică $\mathrm{F}(x)$ definită de o parte şi de alta a lui σ, coincidând cu $f(x)$ într'o porţiune a lui A din a cărei frontieră face parte arcul σ şi olomorfă dealungul acestui arc. Nu poate exista decât o funcţiune unică egală cu $f(x)$ într'o porţiune a lui A şi olomorfă dealungul

lui σ, căci două funcţiuni olomorfe egale într'o infinitate de puncte coincid în regiunea lor comună de existenţă (149, 2°).

O condiţiune necesară, dar nu suficientă, pentru ca prelungirea dincolo de σ să fie posibilă este ca $f(x)$ să tindă către o valoare finită când punctul x interior ariei A tinde către un punct ξ al lui σ.

360. *Teorema I. Dacă $f(x)$ tinde către o valoare finită $f(\xi)$ când punctul x interior ariei A tinde către un punct ξ al lui σ, după un drum oarecare, $f(\xi)$ este o funcţiune continuă dealungul lui σ.*

In adevăr, prin ipoteză, la un $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic, corespunde un $r > 0$, astfel că x fiind în interiorul lui A, avem inegalităţile

$$\left| f(x)-f(\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| f(x)-f(\xi') \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ξ şi ξ' fiind două puncte oarecari ale lui σ, satisfăcând inegalităţile

$$| x-\xi | < r, \quad | x-\xi' | < r;$$

de unde rezultă inegalitatea

$$| f(\xi) - f(\xi') | < \varepsilon.$$

q. e. d.

361. *Teorema II. O funcţiune $f(x)$ olomorfă în două arii A, A' separate între ele printr'o linie fără puncte multiple AB, dealungul căreia ea este continuă, este olomorfă şi dealungul lui AB.*

In adevăr, fie x un punct interior ariei A, avem (fig. 49).

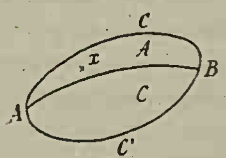

Fig. 49

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{ABCA} \frac{f(z)}{z-x}\, dz,$$

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{BAC'B} \frac{f(x)}{z-x}\, dz.$$

Adunând aceste două egalităţi şi ţinând seamă că linia AB este descrisă odată într'un sens şi odată în sens invers, obţinem egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{BCAC'B} \frac{f(z)}{z-x}\, dz,$$

care exprimă că funcţiunea $f(x)$ este olomorfă în toată aria $(A + A')$, limitată de conturul exterior BCAC'B, care cuprinde în interiorul său linia AB.

Corolar. Fie A și A_1 (fig. 50), două arii exterioare între ele, având o porțiune de frontieră comună σ, fără puncte multiple, și $f(x)$, $f_1(x_1)$ două funcțiuni respectiv olomorfe în A și A_1, tinzând către o valoare comună $f(\xi) = f_1(\xi)$, când x și x_1 tind către un punct ξ al lui σ. *Funcțiunea $F(x)$ egală cu $f(x)$ în A și cu $f_1(x_1)$ în A_1, având dealungul lui σ valorile comune acestor două funcțiuni, este olomorfă în toată aria $(A + A_1)$, formată de cele două arii A și A_1.* Căci funcțiunea $F(x)$ astfel definită este olomorfă în A și A_1 și continuă dealungul lui σ, care separă aceste două arii (§ 360). Se zice că funcțiunea $f_1(x_1)$ *prelungește* funcțiunea $f(x)$ dincolo de linia σ și viceversa.

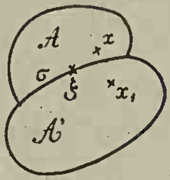

Fig. 50

362. Din cele ce preced rezultă că pentru ca o funcțiune olomorfă $f(x)$ definită de o parte a unei linii L, dealungul căreia ea este continuă, să se poată prelungi dincolo de această linie, este necesar și suficient să existe o funcțiune olomorfă $f_1(x)$, definită de cealaltă parte a lui L, care să primească aceleași valori ca $f(x)$ în fiecare punct al acestei linii.

363. *Teorema III. O funcțiune $f(x)$ olomorfă într'o arie A din al cărei contur face parte un segment l al axei reale, dealungul căruia ea primește valori reale, se prelungește dincolo de acest segment și funcțiunea care o prelungește este definită de egalitatea*

$$f_1(\bar{x}) = \bar{f}(x),$$

în care $\bar{x}$ și $\bar{f}(x)$ reprezintă respectiv valorile imaginare conjugate cu x și $f(x)$.

1°. Să observăm mai întâi că ξ fiind un punct al segmentului l, $f(\xi)$ este o funcțiune continuă de ξ dealungul acestui segment. In adevăr, fie x un punct interior lui A și r distanța sa de axa reală (fig. 51); avem, în interiorul cercului $|z - x| = r$, expresiunea

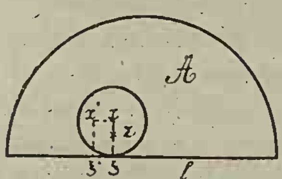

Fig. 51

$$f(z) = P(z - x).$$

Făcând ca z să tindă către punctul de contact ξ al cercului cu axa reală, dealungul razei care trece prin acest punct, avem, în virtutea teoremei lui Abel (105), egalitatea

$$\lim_{z=\xi} P(z-x) = P(\xi - x) = f(\xi),$$

sau

$$\lim_{x=\xi} f(x) = f(\xi).$$

Prin urmare, pentru r destul de mic şi x pe raza care trece prin ξ, putem scrie

$$(1) \qquad \left| f(x)-f(\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie x' un punct interior cercului $|x-\xi|=r$, situat la aceeaş distanţă r de axa reală şi ξ' piciorul perpendicularei dusă din x' pe axa reală; avem, pentru acelaş motiv ca mai sus,

$$(2) \qquad \left| f(x')-f(\xi') \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

In fine, presupunând r destul de mic, putem deasemenea scrie

$$(3) \qquad \left| f(x)-f(x') \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Din aceste trei inegalităţi rezultă următoarea inegalitate

$$|f(\xi)-f(\xi')| < \varepsilon, \quad |\xi-\xi'| < r,$$

care justifică continuitatea funcţiunii $f(\xi)$.

2⁰. Fie

$$x = u + iv, \quad \overline{x} = u - iv;$$

punctele x şi $\overline{x}$ sunt simetrice două câte două în raport cu axa reală; prin urmare ariei $A(x)$, situată de o parte a axei reale, corespunde o arie $A_1(x)$ simetrică în raport cu această axă. Punând

$$f(x) = \mathrm{P}(u, v) + i\mathrm{Q}(u, v),$$

şi

$$f_1(\overline{x}) = \overline{f}(x),$$

avem

$$f_1(\overline{x}) = \mathrm{P}(u, v) - i\mathrm{Q}(u, v).$$

Funcţiunea $f(\overline{x})$ este aşà dar olomorfă în aria A_1. Această funcţiune fiind imaginară conjugată cu funcţiunea $f(x)$, care este reală dealungul segmentului l, rezultă că ambele aceste funcţiuni sunt egale între ele dealungul acestui segment. De unde rezultă, în virtutea paragrafului precedent, că $f_1(\overline{x})$ este prelungirea lui $f(x)$, de cealaltă parte a segmentului l. q. e. d.

Observare. — Teorema precedentă subsistă dacă înlocuim axa reală printr'o linie dreaptă oarecare şi, într'un mod mai general, dacă unui segment de linie dreaptă D, descris de variabila x, corespunde un segment de linie dreaptă Δ pentru funcţiunea $y=f(x)$; adică punctelor x simetrice în raport cu D corespund puncte y simetrice în raport cu Δ.

In adevăr, fie x_0 punctul în care D întâlneşte axa reală (x) şi y_0 punctul în care Δ întâlneşte axa reală (y). Fie α şi β unghiurile ce aceste drepte fac cu direcţiunile pozitive ale axelor reale corespunzătoare. Ecuaţiunile

$$x = x_0 + te^{i\alpha}, \quad y = y_0 + ue^{i\beta},$$

în cari t şi u sunt variabile reale, reprezintă cele două drepte date. Făcând substituţiunile, funcţiunea olomorfă $y = f(x)$ se transformă într'o funcţiune

$$u = \varphi(t),$$

olomorfă dealungul segmentului axei reale (t), corespunzător segmentului considerat pe dreapta D, şi reală, în virtutea ipotezei, dealungul acestui segment. Teorema precedentă se aplică acestei funcţiuni, adică, valorilor imaginare conjugate t corespund valori imaginare conjugate u; însă acestor valori corespund respectiv puncte simetrice x şi y în raport cu dreptele D şi Δ.

q. e. d.

364. *Teoremă (H. A. Schwarz).*

Teorema precedentă se poate generaliză înlocuind linia dreaptă printr'o curbă analitică.

Se numeşte *curbă analitică* o curbă ale cărei coordonate x, y se pot exprimà prin funcţiuni analitice de un parametru t. Fie

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \; y = \psi(t),$$

ecuaţiunile curbei, $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ fiind funcţiuni analitice, reale pentru valori reale ale variabilei t. Prin definiţiune, (x_0, y_0) fiind un punct al curbei, corespunzător valorii reale t_0 a parametrului t, avem în domeniul lui t_0, expresiuni de forma

$$x - x_0 = \mathrm{P}(t - t_0), \; y - y_0 = \mathrm{P}_1(t - t_0),$$

coeficienţii seriilor P şi P_1 fiind reali.

Să considerăm un arc L al acestei curbe (fig. 52) şi fie $t=a$, $t=b$ valorile reale ale lui t, cărora corespund extremităţile lui L. Să presupunem că în intervalul (a, b) derivatele $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ nu se anulează

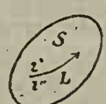

Fig. 52

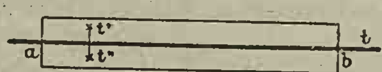

Fig. 53

în acelaş timp, ceeace are drept consecinţă că dealungul lui L curba are o tangentă unică în fiecare punct [1]).

In virtutea proprietăţilor funcţiunilor $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ dealungul segmentului (a, b) al axei reale t, rezultă că există o fâşie formată

[1]) O curbă analitică se zice că este *regulată*, dacă are o tangentă unică în orice punct al său.

de două paralele cu acest segment (fig. 53), situate de o parte și de alta a lui, destul de apropiate între ele, astfel că în interiorul acestei fâșii, funcțiunea

$$(2) \qquad z = \varphi(t) + i\psi(t) = \chi(t)$$

este olomorfă și derivata $\chi'(t)$ nu se anulează în nici un punct al ei. Acestei fâșii corespunde dar, într'un mod *conform*. o porțiune mărginită S a planului (z), care se întinde de o parte și de alta a arcului L (fig. 52). La două valori imagi- nare conjugate ale lui t din această fâșie corespund două puncte z situate de o parte și de alta a lui L, interioare lui S.

Două puncte z', z'', situate de o parte și de alta a liniei L, corespunzătoare la două valori imaginare conjugate t', t'', se zic *simetrice* în raport cu această linie [1]).

Fie acum $f(z)$ o funcțiune olomorfă într'o arie S din conturul căreia face parte arcul L considerat mai sus și care primește *valori reale* dealungul acestui arc. De unde rezultă, în virtutea substituțiunii (2), că funcțiunea de t

$$f(z) = f(\chi(t)) = \mathrm{F}(t)$$

este olomorfă în aria transformată a ariei S, adică într'o arie A din al cărei contur face parte un segment l al axei reale t, dealungul căruia *ea este reală* (fig. 54). Funcțiunea $\mathrm{F}(t)$ se prelungește dar dincolo de segmentul $\bar{l}$ (§ 363) în aria A, simetrică cu A în raport cu axa reală, cu ajutorul funcțiunii

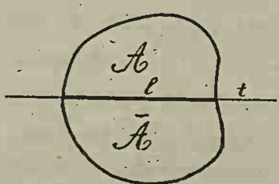

Fig. 54

$$\mathrm{F}_1(\bar{t}) = \bar{\mathrm{F}}(t).$$

Prin urmare, *funcțiunea* $f(z)$ *se prelungește dincolo de* L, *astfel că în puncte simetrice* [2]) *în raport cu* L, *ea primește valori imaginare conjugate.*

q. e. d.

365. Să considerăm, în particular, cazul unui arc de cerc. Presupunând centrul în origină și raza r, ecuațiunile cercului sunt

$$x = r\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = 2r\,\frac{t}{1+t^2};$$

de unde

$$z = x + iy = r\,\frac{1+it}{1-it}.$$

[1]) Unei linii perpendiculare pe axa reală t, corespunde în planul (z) o linie ortogonală la arcul L, care în vecinătatea acestui arc se confundă cu normala în punctul de intersecțiune.

[2]) Cuvântul simetric are sensul definit mai sus.

In punctele $t_1 = \alpha + i\beta$, $t_2 = \alpha - i\beta$, avem respectiv

$$z_1 = r\frac{1+it_1}{1-it_1} = r\frac{1-\beta+i\alpha}{1+\beta-i\alpha},$$

$$z_2 = r\frac{1+\beta+i\alpha}{1-\beta-i\alpha}, \quad \bar{z}_2 = r\frac{1+\beta-i\alpha}{1-\beta+i\alpha};$$

de unde egalitatea

$$z_1\bar{z}_2 = r^2,$$

care arată că punctele z_1 şi z_2 sunt imaginile reciproce în raport cu cercul, adică unul este transformatul celuilalt prin raze vectorii reciproce [1]).

366. Teorema lui Schwarz, foarte importantă în probleme de transformare conformă, se mai enunţă astfel: O funcţiune olomorfă într'o arie din al cărei contur face parte o linie analitică regulată, dacă este *reală dealungul liniei*, primeşte valori imaginare conjugate în puncte simetrice în raport cu acea linie. Acest rezultat se poate obţine direct, plecând dela faptul stabilit mai sus, că, în condiţiunile date, funcţiunea este olomorfă dealungul liniei. Este de ajuns a ne mărginì la cazul când linia este un segment al axei reale, dela care decurge, precum s'a văzut, cazul general al unei linii analitice regulate oarecari.

Fie dar x_0 un punct al segmentului considerat în domeniul căruia funcţiunea $f(x)$ este olomorfă şi fie

(1) $$f(x) = P(x-x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots$$

In virtutea ipotezei, $f(x_0) = a_0$ este real, prin urmare expresiunea

$$\frac{f(x)-a_0}{x-x_0}$$

este reală pentru x real şi cuprins în intervalul considerat; de unde rezultă că

$$\lim_{x=x_0}\frac{f(x)-a_0}{x-x_0} = a_1,$$

este o cantitate reală. De asemenea cantitatea

$$\left[\frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)}{(x-x_0)^2}\right]_{x=x_0} = a_2,$$

este reală; etc. Intr'un cuvânt, toţi coeficienţii seriei (1) sunt reali. De unde concluziunea următoare: *dacă o funcţiune olomorfă este reală dealungul unui segment al axei reale, derivatele sale de orice ordin sunt reale în acelaş timp.*

---

[1]) Fie $z_1 = \varrho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = \varrho_2 e^{i\theta_2}$; avem $\bar{z}_2 = \varrho_2 e^{-i\theta_2}$. Egalitatea $z_1\bar{z}_2 = r^2$ devine $\varrho_1\varrho_2 e^{i(\theta_1-\theta_2)} = r^2$, de unde $\theta_2 = \theta_1$ şi $\varrho_1\varrho_2 = r^2$. Prin urmare $z_2 = \frac{r^2}{\varrho_1}e^{i\theta_1}$.

Fie acum

$$x = x_0 + i\eta$$

un punct situat în interiorul cercului de convergenţă al seriei (1), x_0 şi η fiind reali. Vom aveà

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(x_0 + i\eta) = a_0 - a_2\eta^2 + a_4\eta^4 - \dots \\ + i\eta(a_1 - a_3\eta^3 + \dots), \end{aligned}$$

coeficienţii a_n fiind toţi reali. De unde rezultă că expresiunile

$$f(x_0 + i\eta), \quad f(x_0 - i\eta)$$

au valori imaginare conjugate. Derivând ambele membre ale egalităţii (2), conchidem că derivatele

$$f^{(n)}(x_0 + i\eta), \; f^{(n)}(x_0 - i\eta) \; (n = 0, 1, 2 \dots)$$

se bucură de aceiaş proprietate.

Ne mai rămâne să probăm că această proprietate subsistă şi în afară din cercul de convergenţă considerat. Pentru aceasta să arătăm mai întâi că dacă elementul $P(x - x_0)$ se prelungeşte deasupra axei reale, el se va prelungì şi *dedesubt* într'o regiune simetrică în raport cu această axă.

In adevăr, fie x_1 şi x'_1 două puncte simetrice în raport cu axa reală, situate în interiorul cercului de convergentă al elementului primitiv; vom aveà pentru prelungirile acestui element, seriile

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} P(x - x_0, x_1) &= f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1}(x - x_1) + \dots, \\ P(x - x_0, x'_1) &= f(x'_1) + \frac{f'(x'_1)}{1}(x - x'_1) + \dots \end{aligned} \right.$$

Coeficienţii acestor serii fiind imaginari conjugaţi au module egale şi prin urmare (teorema Cauchy-Hadamard) (108) razele cercurilor lor de convergenţă sunt egale. Ceeace justifică aserţiunea de mai sus.

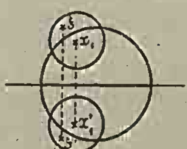

Fig. 55

Fie acum $x = \xi$ un punct oarecare situat în interiorul cercului de convergenţă cu centrul în x_1 şi ξ' simetricul său în raport cu axa reală (fig. 55). Valorile ce primesc cele două elemente prelungite în punctele ξ, ξ'

$$P(\xi - x_0, x_1), \; P(\xi' - x_0, x'_1),$$

având, în virtutea desvoltărilor (3), termenii lor respectiv conjugaţi, doi câte doi, sunt cantităţi imaginare conjugate.

q. e. d.

367. Viceversa. Dacă o funcţiune $f(x)$ olomorfă într'o regiune care cuprinde un segment al axei reale, primeşte valori imaginare conjugate în puncte simetrice $\xi + i\eta$, $\xi - i\eta$, situate în această regiune, ea este reală pe segmentul considerat. In adevăr, prin ipoteză, putem scrie

$$f(\xi + i\eta) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta),$$
$$f(\xi - i\eta) = \varphi(\xi, \eta) - i\psi(\xi, \eta),$$

φ şi ψ fiind funcţiuni reale şi continue de variabilele reale ξ, η. Insă, în virtutea continuităţii, avem

$$\lim_{\eta=0} f(\xi + i\eta) = \lim_{\eta=0} f(\xi - i\eta);$$

de unde rezultă că funcţiunea $\psi(\xi, \eta)$ este nulă dealungul segmentului considerat, ceeace justifică propoziţiunea enunţată.

368. *Observare.* Extremităţile segmentului axei reale, dealungul căruia funcţiunea $f(x)$ este reală şi în cari ea încetează de a fi reală, sunt puncte singulare ale acestei funcţiuni.

In adevăr, fie a una din cele două extremităţi şi x_0 un punct al segmentului, oricât de aproape voim de a; avem, în domeniul punctului x_0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

coeficienţii a_n fiind reali. Dacă punctul a ar fi un punct ordinar al funcţiunii $f(x)$, cercul de convergenţă al seriei precedente ar conţine acest punct în interiorul său şi $f(x)$ ar fi real pentru x real dincolo de punctul a; ceeace este contrar ipotezei.

Dacă dar o funcţiune analitică olomorfă este reală dealungul unui segment al axei reale, ea va fi reală dealungul axei până la cel dintâi punct singular situat pe axă.

CAPITOLUL XIX.

FUNCŢIUNI ANALITICE REPREZINTATE PRIN INTEGRALE DEFINITE.

I. — INTEGRALE DEFINITE CONSIDERATE CA FUNCŢIUNI DE UNA DIN CELE DOUĂ LIMITE.

369. Fie $f(x)$ o funcţiune analitică olomorfă într'o arie cu contur simplu şi x_0 un punct situat în această arie. Am văzut (294) că integrala

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

luată după o linie oarecare cuprinsă în interiorul regiunii date, este o funcţiune analitică olomorfă în aceiaş regiune.

370. Să presupunem acum că $f(x)$ este o funcţiune analitică uniformă având într'o regiune dată puncte singulare izolate, poluri sau puncte singulare esenţiale. Fie x_0 un punct arbitrar fix, diferit de un punct singular şi L_0, L două linii cari unesc acest punct cu un punct variabil x situat în regiunea dată. Vom presupune totdeauna că liniile de integraţiune nu trec prin puncte singulare. Să reprezintăm prin u_0 şi u valorile integralei corespunzătoare acestor drumuri (dela x_0 la x) şi să vedem ce relaţiune există între

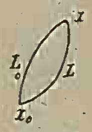

Fig. 56

$$u_0 = \int_{L_0} f(x)dx \text{ şi } u = \int_{L} f(x)dx.$$

Să observăm că liniile L_0 şi L formează împreună o curbă închisă pe care o reprezintăm prin C şi că integrala $\int_L f(x)dx$ se poate evident înlocuì prin integrala $\int_C f(x)dx$ urmată de integrala $\int_{L_0} f(x)dx$. De unde rezultă relaţiunea

$$(1) \qquad u = u_0 + \int_C f(x)dx,$$

integrala fiind luată după curba C în sensul determinat de succesiunea L, L_0. Însă curba C poate aveà o formă astfel ca un punct mobil, descriind această curbă să se învârtească în jurul unui punct singular de un număr oarecare de ori într'un sens sau în altul. Prin urmare, reprezintând prin $A_1, A_2, \ldots A_n$ reziduurile funcţiunii $f(x)$, corespunzătoare punctelor singulare situate în interiorul curbei C, relaţiunea (1) va luà forma

$$(2) \qquad u = u_0 + 2i\pi(m_1A_1 + \ldots + m_nA_n),$$

$m_1, m_2, \ldots m_n$ fiind numere întregi oarecari pozitive sau negative. Cantităţile

$$2i\pi A_1\ 2i\pi A_2, \ldots, 2i\pi A_n$$

poartă numele de *module de periodicitate*, sau de *perioade* ale integralei. Fiecărui punct singular corespunde câte o perioadă a integralei, care este nulă dacă reziduul corespunzător este nul.

371. Din cele ce preced rezultă că dacă $f(x)$ este o funcţiune uniformă în tot planul, neavând decât singularităţi izolate, integrala

$$(3) \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

reprezintă o funcţiune analitică în tot planul, multiformă cu o infinitate de ramuri. Toate ramurile se pot deduce din una din ele, dacă variabila descrie drumuri convenabile; prin urmare funcţiunea astfel definită este monogenă în sensul lui Weierstrass.

In domeniul unui punct ordinar $x = a$, o ramură oarecare este o funcţiune olomorfă de x. In adevăr, fie x_1 un punct pe drumul de integraţiune situat în domeniul punctului a; putem scrie

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x} f(x)dx. \tag{4}$$

Prima integrală din membrul al doilea fiind o constantă în acelaş timp cu x_1, este de ajuns a proba că ultima integrală este o funcţiune olomorfă de x, în domeniul lui a. Insă în acest domeniu avem $f(x) = P(x - a)$ şi integrala seriei este o serie de aceiaş formă. De unde rezultă proprietatea enunţată.

Fie acum a un punct singular; avem în domeniul acestui punct

$$f(x) = P(x-a) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^{-n};$$

de unde, pentru ultima integrală (4), expresiunea

$$\int_{x_1}^{x} f(x)dx = \int_{x_1}^{x} P(x-a)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x} a_n (x-a)^{-n}dx.$$

Prin urmare forma analitică a integralei propuse, în domeniul punctului $x = a$, este

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \mathscr{P}(x-a) + a_1 \log(x-a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-1}(x-a)^{-n+1}.$$

In cazul când reziduul a_1 este nul, integrala este uniformă în domeniul punctului a, pe care îl admite ca pol sau ca punct singular esenţial, după cum acest punct este pol sau punct singular esenţial al funcţiunii $f(x)$.

Pentru ca integrala $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ să fie o funcţiune uniformă în tot planul, presupunând că $f(x)$ este o asemenea funcţiune, este evident necesar şi suficient ca toate reziduurile funcţiunii $f(x)$ să fie nule.

De exemplu, funcţiunile

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}, \quad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sin x}$$

admit în fiecare punct o infinitate de valori, cuprinse în expresiunea

$$u = u_0 + 2ki\pi,$$

k fiind un număr întreg pozitiv sau negativ; pe când funcţiunile

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2}, \quad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

sunt uniforme în tot planul. Aceste două funcţiuni din-urmă admit, cea dintâiu un pol unic $x = 0$, cea de a doua o infinitate de poluri $x = k\pi$.

Rezultatele precedente se verifică imediat prin integraţiune directă.

372. *Tăieturi* (*coupures*). Printr'un artificiu de care ne-am mai servit, putem face ca fiecare ramură a funcţiunii (3) să fie uniformă în tot planul variabilei x, limitat de tăieturi cari nu se întâlnesc între ele.

In genere, tăieturile sunt făcute în plan după linii drepte plecând dela fiecare punct singular spre infinit. In două puncte infinit vecine x', x'' situate de o parte şi de alta a unei tăieturi, valorile integralei $F(x)$ nu sunt în genere infinit apropiate între ele; însă limita către care tinde diferenţa acestor valori este constantă în tot lungul tăieturii. In adevăr, fie x' şi x'' (fig. 57) două puncte situate faţă în faţă, de o parte şi de alta a tăieturii ($a \ldots \infty$), α şi β două puncte în acelaş mod situate în vecinătatea punctului a, cel dintâi în aceiaşi parte a tăieturii ca punctul x', cel de al doilea în partea în care se găseşte x''. Pentru a trece dela punctul x' la punctul x'', putem urmà drumul $x'\alpha$, $\beta x''$ şi cercul $\alpha\gamma\beta$ având centrul în a. De unde rezultă egalitatea

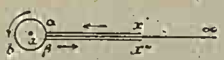

Fig. 57

$$F(x'') = F(x') + \int_{x'}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha\gamma\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{x''} f(x)dx.$$

Insă funcţiunea $f(x)$ fiind uniformă, integralele

$$\int_{x}^{\alpha} f(x)\,dx, \quad \int_{\beta}^{x''} f(x)dx$$

sunt egale şi de semne contrarii; prin urmare avem egalitatea [1])

$$\lim_{x'=x''} \left[F(x'') - F(x') \right] = 2i\pi A,$$

A fiind reziduul funcţiunii $f(x)$ relativ la punctul a.

[1]) Cele două ţărmuri ale tăieturii se consideră confundate cu tăietura însăş.

Din cele ce preced rezultă că tăieturile pot fi privite ca linii *de discontinuitate* ale integralei. Permițând variabilei să străbată tăietura relativă la punctul a, trebuie să adăugăm integralei $\pm 2i\pi A$, după sensul în care se face trecerea.

Dacă $A = 0$, tăietura poate fi suprimată.

373. Să considerăm, ca aplicațiune, integrala

$$\int_1^x \frac{dx}{x},$$

de unde putem deduce proprietățile funcțiunii $\log x$, dejà studiate.

Fie dar integrala

$$u = f(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}, \tag{1}$$

luată după un drum oarecare, ce nu trece prin punctul $x = 0$. Funcțiunea $\frac{1}{x}$ având un pol unic $x = 0$ cu reziduul $+1$, $f(x)$ este o funcțiune analitică multiformă având o infinitate de ramuri cuprinse în expresiunea

$$f(x) = \left[f(x)\right] + 2ki\pi, \tag{2}$$

$[f(x)]$ reprezintând una din ele. Să considerăm una din ramurile funcțiunii, anume aceea care se anulează pentru $x = 1$. Când x variază dela 1 la ∞ prin valori réale, integrala este reală, crește neconteni dela 0 la ∞, căci derivata $\frac{du}{dx}$, în acest interval, este reală și pozitivă. Făcând substituțiunea $x = \frac{1}{x'}$, avem

$$f(x') = -f(x); \tag{3}$$

prin urmare, când x descrește dela 1 la 0, integrala descreștene contenit dela 0 la $-\infty$. Așa dar semiaxa reală și pozitivă (x) se transformă punct cu punct în toată axa reală (u).

Să facem acum ca x să descrie un arc de cerc cu centrul în origină, cu raza r (fig. 58). Punând $x = re^{i\theta}$, putem scrie

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_r^x \frac{dx}{x}, \tag{4}$$

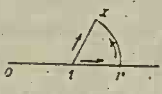

Fig. 58

prima integrală din membrul al doilea fiind rectilinie și cea de a doua fiind luată după arcul de cerc considerat; de unde egalitatea

$$u = f(r) + i\theta, \tag{5}$$

care arată că arcului $\widehat{rx}$, corespunzător unghiului θ, descris de x, corespunde pentru u un segment de dreaptă perpendiculară pe axa reală în punctul $u = f(r)$, având lungimea θ.

Să considerăm conturul format de două cercuri concentrice cu centrul în origină, având razele $r, \frac{1}{r}$, inverse una alteia şi de porţiunea pozitivă a axei reale care va fi privită ca o tăietură (fig. 59). In aria astfel limitată, fiecare ramură a funcţiunii $u(x)$ este olomorfă.

Din formulele (3) şi (4) rezultă că drumul *abcbada*, descris de punctul x în sensul săgeţilor, se transformă în drumul format de perimetrul dreptunghiului ABCDA (fig. 60); latura AB este

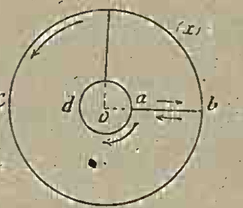

Fig. 59

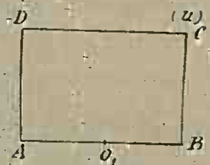

Fig. 60

situată pe axa reală şi împărţită în două părţi egale de origina $u = 0$ şi latura paralelă CD la o distanţă egală cu 2π. Laturile AB şi CD corespund respectiv ţărmului superior şi inferior al tăieturii *ab*.

De altă parte, dealungul conturului considerat (x), u nu trece de două ori prin aceiaşi valoare, prin urmare ariile limitate de contururile respective se corespund punct cu punct şi fiecare din ele este transformata conformă a celeilalte. Făcând r să tindă către zero, obţinem, de o parte, tot planul (x), limitat de tăietura $(0, +\infty)$, şi, de altă parte, o fâşie nemărginită în planul (u), cuprinsă între axa reală şi o paralelă la aceasta, situată la o distanţă egală cu 2π. Ţărmul stâng al tăieturii $(\theta = 0)$ se transformă în axa reală şi ţărmul drept $(\theta = 2\pi)$ în paralela sa.

Identitatea funcţiunii considerate $u = \int_1^x \frac{dx}{x}$ cu funcţiunea $\log x$, rezultă din aceea că derivatele lor sunt identice şi că în punctul $x = 1$, amândouă funcţiunile au câte o ramură care se anulează; prin urmare elementele acestor ramuri coincid în domeniul punctului $x = 1$.

374. *Formula de adiţiune a logaritmilor.* Fie x_1 şi x_2 două puncte oarecari situate în planul variabilei x şi L_1, L_2 două drumuri luate după voie între aceste puncte şi punctul $x = 1$, fără însă a trece

prin origină. Să reprezintăm prin x şi x' două puncte mobile situate respectiv pe liniile L_1 şi L_2 şi fie

$$y = x . x'. \tag{6}$$

Când x şi x' descriu liniile L_1, L_2 punctul y pe care îl figurăm pe acelaş plan sau pe alt plan, descrie un drum determinat L, cuprins între punctul $y = 1$ şi punctul $y_1 = x_1 x_2$. Diferenţiând egalitatea (6), obţinem

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'};$$

de unde

$$\int_1^{y_1} \frac{dy}{y} = \int_1^{x_1} \frac{dx}{x} + \int_1^{x_2} \frac{dx'}{x'}, \tag{7}$$

integralele fiind luate respectiv după liniile L, L_1, L_2. Aceste egalităţi echivalează cu cea următoare

$$\log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2, \tag{8}$$

determinaţiunile logaritmilor din ambele membre fiind date de integralele corespunzătoare.

375. Integrala

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-a}, \quad x_0 \neq a,$$

se reduce la cea considerată mai sus; căci punând $x - a = x'$, avem

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-a} = \int_{x_0-a}^{x-a} \frac{dx'}{x'} = \int_{1}^{x-a} \frac{dx'}{x'} - \int_{1}^{x_0-a} \frac{dx'}{x'},$$

sau

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-a} = \log (x-a) - \log (x_0 - a).$$

Corolar. Integrala unei funcţiuni raţionale de x este de forma

$$R(x) + \Sigma A_n \log (x - a_n),$$

$R(x)$ fiind o funcţiune raţională de x; ceea ce se recunoaşte, descompunând funcţiunea raţională în fracţiuni simple.

376. Să considerăm, ca a doua aplicaţiune, integrala

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Funcţiunea $\frac{1}{1+x^2}$ neavând alte singularităţi decât polurile simple $x = \pm i$, cu reziduurile corespunzătoare $\mp \frac{i}{2}$, rezultă că u este o funcţiune analitică având o infinitate de ramuri cuprinse în expresiunea

$$u = (u) + k\pi,$$

(u) fiind una din ele şi k un număr întreg arbitrar.

Să introducem tăieturile după axa imaginară dela $+i$ la $+i\infty$ şi dela $-i$ la $-i\infty$. In planul aşâ limitat, fiecare ramură este o funcţiune olomorfă. Diferenţa valorilor unei ramuri în două puncte infinit apropiate între ele, situate de o parte şi de alta a uneia din aceste tăieturi, este egală cu $\pm\pi$.

Să examinăm cum se transformă planul (x) în planul (u), mărginindu-ne la ramura care se anulează împreună cu x. Pentru aceasta, să considerăm conturul OABCDO (fig. 61), format de axa reală îndreptată în sensul pozitiv, de un cadran de cerc descris din origină ca centru cu o rază R foarte mare, de axa imaginară cuprinsă între cerc şi un punct C a cărui distanţă r de punctul i

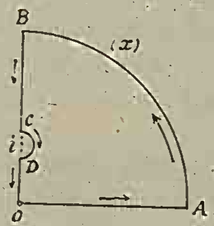

Fig. 61

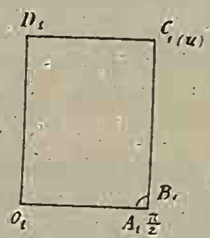

Fig. 62

este foarte mică, de un semicerc CD cu centrul în i şi de segmentul DO al axei imaginare. Să facem ca x să descrie acest contur în sensul pozitiv, plecând dela punctul 0. Se obţine rezultatul următor: Pentru x real, u este real; raza OA se transformă punct cu punct într'un segment de axă reală, O_1A_1 (fig. 62), a cărui extremitate diferă foarte puţin de punctul $u = \frac{\pi}{2}$. Când x descrie cadranul AB, u descrie un drum A_1B_1 care diferă foarte puţin de un cadran de cerc cu centrul în punctul $u = \frac{\pi}{2}$ şi a cărui rază e foarte mică [1]).

---

[1]) Dealungul lui AB, integralele

$$\int_A^x \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_A^x \frac{dx}{x^2}$$

difer foarte puţin între ele şi diferenţa lor tinde către zero când R tinde către infinit.

Abscisa punctului B_1 este $\frac{\pi}{2}$. Aceasta rezultă din cele ce urmează: Când x se mişcă pe axa imaginară dela B la C, punând $x = it$ (t variând dela R la $1 + r$), vedem că u se mişcă dela B_1 la C_1, depărtându-se la infinit când r tinde către zero. Poziţiunea acestei drepte este evident independentă de mărimea lui R; însă pentru $R = \infty$, dreapta trece prin punctul $u = \frac{\pi}{2}$, prin urmare ea trece prin acest punct oricare ar fi valoarea lui R şi deci B_1 are abscisa $\frac{\pi}{2}$. Ceea ce justifica aserţiunea de mai sus. Când x descrie semicercul CD, u descrie un drum C_1D_1 care diferă de dreapta paralelă cu axa reală descrisă în acelaş timp de integrala $\frac{1}{2i}\int\frac{dx}{x-i}$ cu atât mai puţin cu cât r este mai mic.

In fine, când x descrie segmentul DO, u descrie necontenit în acelaş sens dreapta D_1O_1 situată pe axa imaginară (u). Cele două contururi descrise de punctele x şi u, se corespund dar punct cu punct. De unde rezultă că aria limitată de conturul (u) este transformata conformă a ariei limitată de conturul (x).

La puncte simetrice în raport cu axa imaginară (x) corespund puncte simetrice în raport cu axa imaginară (u). In adevăr, dealungul axei imaginare (x) din care excludem punctul i, u este de forma $u = iv$, v real; prin urmare, în puncte simetrice în raport cu axa imaginară (x), v primeşte valori imaginare conjugate $\alpha \pm i\beta$; de unde pentru u, în aceleaşi puncte, valori de forma $i\alpha \mp \beta$.

Făcând $R = \infty$ şi $r = 0$, conchidem că semiplanul (x) situat deasupra axei reale şi limitat de tăietura $(i, i\infty)$ se transformă, în mod conform, într'o fâşie a planului (u), cuprinsă între axa reală şi două semidrepte perpendiculare pe această axă, situate deasupra ei şi duse prin punctele $\pm\frac{\pi}{2}$.

Semiplanul (x) situat dedesubtul axei reale se transformă în acelaş mod în fâşia simetrică cu cea dintâiu în raport cu axa reală (u), căci pentru x real, u este real.

Intr'un cuvânt, tot planul (x) limitat de cele două tăieturi considerate, se transformă în mod conform în fâşia (u) cuprinsă între paralelele la axa imaginară duse prin punctele $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = +\frac{\pi}{2}$.

Din desvoltarea

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

valabilă în domeniul punctului $x = 0$, rezultă că ramura funcţiunii $u(x)$, care se anulează în acest punct, este reprezintată, în acest domeniu, prin seria

$$u = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

care coincide cu ramura principală a funcţiunii arctg x (§ 270). De unde rezultă identitatea celor două funcţiuni.

II. — INTEGRALE DE FUNCŢIUNI ALGEBRICE.

377. Să considerăm cazul particular când funcţiunea $f(x)$ este definită de o ecuaţiune de forma

$$f(x) = \sqrt{R(x)},$$

$R(x)$ fiind o funcţiune raţională de x, şi fie a un punct de ramificaţiune al funcţiunii. Integrala

$$\int_C f(x)dx,$$

luată după o curbă închisă C, care nu conţine în interiorul său alt punct critic decât a, depinde de punctul iniţial al curbei. In adevăr, fie A şi B două puncte ale curbei (fig. 59); putem scrie

$$(ABMA) = (AB) + (BMAB) + (BA).$$

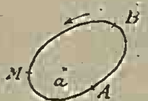

Fig. 63

Insă integralele extreme din membrul al doilea nu se distrug, căci după ce x descrie odată curba C, ramura $f(x)$ se schimbă în $-f(x)$, astfel că $(AB) = (BA)$. Avem prin urmare

$$(ABMA) = 2(AB) + (BMAB).$$

Fie, de exemplu, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ şi $x_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ punctul iniţial; avem

$$\int_C \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x}\right)_C = -4r_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_0}{2}}.$$

Integrala $\int_C f(x)dx$ considerată mai sus nu depinde de sensul în care x descrie curba C. In adevăr, să reprezintăm prin I şi I' valorile integralei luate, cea dintâi în sensul pozitiv, cea de a doua în sensul negativ, punctul iniţial x_0 şi valoarea corespunzătoare $f(x_0)$ a lui $f(x)$ fiind aceleaşi. Să presupunem că x descrie curba C succesiv de două ori, mai intâi în sensul pozitiv şi apoi în sensul negativ; suma celor două integrale astfel obţinute este evident nulă. Insă, după prima descriere a curbei C, valoarea finală a lui $f(x)$ este $-f(x_0)$; prin urmare a doua integrală, fiind descrisă în sensul negativ cu valoarea iniţială $-f(x_0)$ a funcţiunii, va fi egală cu $-\mathrm{I}'$. De unde rezultă $\mathrm{I}-\mathrm{I}'=0$.

Dacă punctul critic a nu este pol, integrala luată după curba C descrisă de două ori în acelaş sens, sau, ceeace este tot una, după o curbă care înconjoară punctul a de două ori [1]) este evident nulă.

378. Fie x_0 un punct ordinar şi a un punct de ramificaţiune al lui $f(x)$. Să considerăm conturul elementar (x_0, a) şi fie C o curbă închisă care trece prin x_0 şi care nu conţine în interiorul său alt punct singular decât punctul a (fig. 65). Integrala

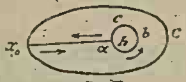

Fig. 65

$$\int_C f(x)dx,$$

luată dela punctul x_0 după C sau după (x_0, a) are aceiaş valoare, determinaţiunea iniţială a lui $f(x)$ fiind aceiaş; căci în aria cuprinsă între aceste două drumuri, funcţiunea $f(x)$ este olomorfă. Avem aşa dar

$$\int_C f(x)dx=\int_{x_0a} f(x)dx+\int_{abca} f(x)dx+\int_{ax_0} f(x)dx,$$

integralele fiind luate în sensul săgeţilor. Insă, după ce x descrie cercul (a), $f(x)$ îşi schimbă semnul şi integrala din urmă a membrului al doilea este egală cu cea dintâi; prin urmare

$$\int_C f(x)dx = 2\int_{x_0a} f(x)dx + (abca).$$

Dacă integrala $(abca)$ tinde către zero când raza cercului (a) se anulează, obţinem egalitatea

$$\int_C f(x)dx = 2\int_{x_0a} f(x)dx.$$

379. Fie integrala

$$u=\int_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

[1]) O asemenea curbă C' se taie neapărat pe sine însăş (fig. 64).

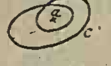

Fig. 64

luată după un drum L oarecare. Oricare ar fi forma liniei L, ea se poate înlocuì, în ce priveşte valoarea integralei, printr'un drum determinat L_0 — căruia să-i zicem drum *direct* — care uneşte punctul x_0 cu x, precedat de un număr convenabil de contururi elementare. De unde rezultă că, în genere, integrala u este o funcţiune analitică având o infinitate de ramuri.

380. Se poate întâmpla ca integrala să aibă un număr limitat de ramuri. De exemplu, integrala

$$u = \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se recunoaşte că avem

$$\int_0^{-x} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

integralele fiind luate după două drumuri simetrice în raport cu origina. Să reprezintăm prin ω valoarea integralei după contururile elementare (0, 1) şi (0, — 1) (fig. 66), determinaţiunea radicalului fiind aceiaş. Integrala luată după amândouă aceste contururi descrise succesiv este nulă; căci, după primul contur, radicalul schimbându-şi semnul, valoarea integralei după conturul al doilea este $-\omega$. De unde rezultă că integrala propusă nu este susceptibilă decât de două ramuri, date de expresiunea

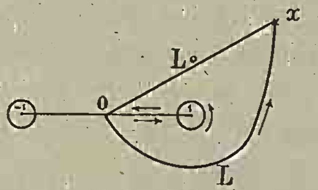

Fig. 66

$$u = \begin{cases} (u), \\ \omega - (u), \end{cases}$$

(u) fiind ramura obţinută după drumul direct $0x$.

Rezultatul precedent se verifică prin integraţiune directă; avem, luând $+1$ drept valoare iniţială a radicalului,

$$u = \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \sqrt{1-x^2};$$

de unde $\omega = 2$ şi

$$u = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x^2}, \\ 1 + \sqrt{1+x^2}. \end{cases}$$

Integrala considerată este aşa dar o funcţiune algebrică, având aceleaşi puncte de ramificaţiune ca şi radicalul de sub semnul $\int$; ea satisface ecuaţiunea

$$u^2 - 2u + x^2 = 0.$$

381. Să studiăm integrala

$$(1)\qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Avem $u(-x) = -u(x)$, integralele fiind luate după două drumuri simetrice în raport cu origina $x = 0$, determinațiunea inițială a radicalului fiind aceiaș. Luând această valoare egală cu $+1$, valorile integralei după contururile elementare $(0, 1)$, $(0, -1)$ sunt respectiv π, $-\pi$.

Fie u_0 valoarea integralei luată după drumul direct L_0 și u valoarea ei după un drum L. Dacă între cele două drumuri nu se află nici unul din punctele critice ± 1, integralele au aceiaș valoare.

Să presupunem că între L_0 și L se găsește unul sau amândouă punctele critice. Pentru a obține valoarea integralei după drumul L, observăm că acest drum este echivalent cu drumul format de unul din contururile elementare sau de amândouă, descrise într'o ordine convenabilă, de un număr convenabil de ori, urmat de drumul L_0. Valoarea integralei, luată după drumul L, va fi dar dată de contururile elementare corespunzătoare, la care se adaugă valoarea ei după drumul L_0, descris cu valoarea inițială ± 1 a radicalului, după cum contururile elementare, cari au precedat, sunt în număr par sau impar. Din cele ce preced se deduce relațiunea dintre valorile integralei după cele două drumuri.

Să presupunem mai intâi că L_0 este precedat de unul din cele două contururi elementare $(0, 1)$ sau $(0, -1)$ (fig. 66); valorile corespunzătoare ale lui u vor fi respectiv

$$(2)\qquad u = \pi - u_0, \quad u = -\pi - u_0.$$

Să presupunem acum L_0 precedat de ambele contururi elementare, descrise succesiv, o singură dată (fig. 67); valoarea finală a integralei va fi

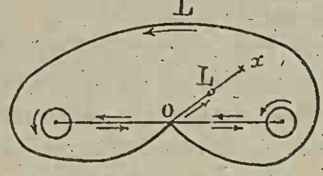

Fig. 67.

$$(3)\qquad u = \pm 2\pi + u_0,$$

după cum conturul $(0, 1)$ precede conturul $(0, -1)$, sau viceversa.

Dacă L_0 este precedat de contururile $(0, 1)$, $(0, -1)$ descrise succesiv de n ori, avem

$$(4)\qquad u = 2n\pi + u_0.$$

Din cele ce preced rezultă că integrala (1) admite, pentru aceiaş valoare a limitei superioare x, o infinitate de valori cuprinse în egalităţile

$$(5) \qquad u = \begin{cases} 2n\pi + u_0, \\ (2n+1)\pi - u_0, \end{cases}$$

u_0 fiind una din valorile integralei şi n un număr intreg oarecare, pozitiv, negativ sau nul.

Forma analitică a funcţiunii $u(x)$ reprezintată prin integrala (1) într'un punct oarecare al planului, se obţine desvoltând funcţiunea $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ în serie în domeniul acelui punct şi integrând. Fie a diferit de ± 1; avem pentru una sau alta din cele două ramuri, cari nu difer decât prin semn,

$$(6) \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

Fie $u(a)$ una din valorile integralei în punctul $x = a$; vom avea, în domeniul acestui punct,

$$(7) \quad u(x) - u(a) = a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \dots$$

Dacă $a = 1$, avem, în domeniul acestui punct,

$$(8) \quad \begin{aligned} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(1 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots). \end{aligned}$$

Luând valoarea integralei, în punctul $x = 1$, egală cu $\frac{\pi}{2}$, avem desvoltarea

$$(9) \qquad u - \frac{\pi}{2} = i\sqrt{2}\,(x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{P}(x-1).$$

Punctele $x = \pm 1$ sunt aşa dar puncte de ramificaţiune ale funcţiunei $u(x)$.

Din desvoltările precedente rezultă că integrala $u(x)$ este o funcţiune analitică multiformă cu o infinitate de ramuri, cari se deduc dintr'una din ele, dacă facem să varieze drumul de integraţiune într'un mod convenabil, conform celor văzute mai sus.

Punctul $x = \infty$ este un punct singular logaritmic pentru toate ramurile, precum se recunoaşte, dacă ţinem seama de desvoltarea

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{i}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{i}{x}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n}\frac{1}{x^{2n}} + \dots\right),$$

valabilă în tot planul exterior cercului $|x| = 1$.

382. *Transformarea planului* (x) *în planul* (u). Să limităm planul (x) prin două tăieturi făcute dealungul axei reale dela punctul $+1$ la $+\infty$ și dela punctul -1 la $-\infty$ și, fie u ramura care se anulează împreună cu x. Din origină ca centru să descriem un semicerc cu o rază R foarte mare și din punctele $+1$ și -1 ca centre, două semicercuri cu o rază r foarte mică, toate situate deasupra axei reale (fig. 68). Să considerăm conturul $OambAMBb'm'a'O$ format din axa reală și din cele trei semicercuri. Se recunoaște lesne, raportându-ne la variațiunea radicalului $\sqrt{1-x^2}$, că liniile

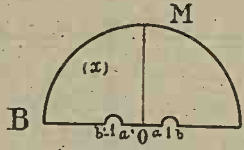

Fig. 68

$$Oa,\ amb,\ bA,\ AMB,\ Bb',\ b'm'a',\ a'O$$

din planul (x) se transformă respectiv în liniile

$$O_1a_1,\ a_1b_1,\ b_1A_1,\ A_1B_1,\ B_1b'_1,\ b'_1a'_1,\ a'_1O_1$$

din planul (u) (fig. 69) în care: O_1a_1 este un segment de axă reală a cărui lungime este $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ tinzând către zero împreună cu r; arcul a_1b_1 diferă de un cadran de cerc cu centrul în punctul $u=\frac{\pi}{2}$, cu atât mai puțin cu cât r este mai mic; b_1A_1 este un segment de linie dreaptă perpendiculară pe axa reală, având abscisa $\frac{\pi}{2}$ [1]; linia A_1B_1, ale cărei extremități au abscisele $\pm\frac{\pi}{2}$, diferă de un segment de dreaptă paralelă cu axa reală, cu atât mai puțin, cu cât R este mai mare și se depărtează la infinit când R tinde către infinit; în fine, celelalte linii sunt simetrice cu cele dintâi în raport cu axa imaginară. Integrala u fiind funcțiune olomorfă de x în aria limitată de conturul considerat al lui x și conturile celor două variabile corespunzându-se punct cu punct, u descriind conturul său în acelaș sens cu x, rezultă că transformarea celor două arii este o transformare conformă (§ 358).

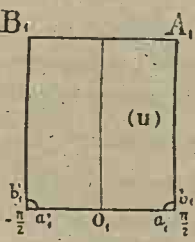

Fig. 69

Un contur (x) simetric cu cel dintâi în raport cu axa reală, dă pentru u, în raport cu axa sa reală, un contur simetric cu cel obținut mai sus. Țărmurile pozitive ale celor două tăieturi (x) corespund celor două semidrepte pozitive ale fâșiei (u) și țărmurile negative corespund semidreptelor simetrice în raport cu axa reală. Făcând $r=0$, $R=\infty$, rezultă că planul (x), mărginit de cele două tăieturi

[1]) Căci, când x descrie dreapta bA, punctul u se mișcă pe o perpendiculară pe axa sa reală, a cărei pozițiune este independentă de mărimea lui r și pentru $r=0$, avem $u=\frac{\pi}{2}$.

$(-1, -\infty)$, $(+1, +\infty)$ (fig. 70), se transformă într'un mod conform, în fâşia nelimitată din planul (u), cuprinsă între două drepte paralele cu axa imaginară şi trecând prin punctele $u = \pm \frac{\pi}{2}$ (fig. 71). Axele imaginare se corespund; de unde rezultă că punctelor simetrice în raport cu axa imaginară (x) corespund puncte simetrice în raport cu axa imaginară (u) (Observare, § 363).

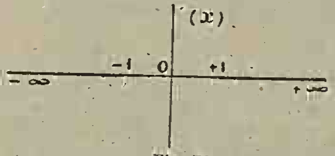

Fig. 70

Din desvoltarea

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \dots,$$

valabilă în cercul $|x| = 1$, rezultă seria

$$u = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots,$$

convergentă în acelaş cerc şi care se anulează în punctul $x = 0$. Ramura $u(x)$ care se anulează în punctul $x = 0$ coincidând cu elementul funcţiunii arcsin$x$, care se anulează în acelaş timp, conchidem că funcţiunea $u(x)$ este identică cu funcţiunea arcsin$x$.

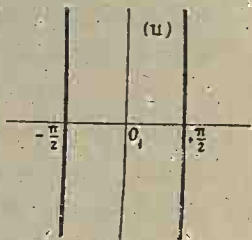

Fig. 71

383. *Inversiunea integralei*

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{1}$$

Să privim limita superioară x a integralei ca funcţiune de u şi fie $x = f(u)$. Din reprezintarea conformă a planului (x) mărginit de cele două tăieturi $(1, +\infty)$, $(-1, -\infty)$ pe fâşia din planul (u) cuprinsă, precum s'a văzut mai sus, între cele două linii drepte perpendiculare pe axa reală, trecând prin punctele $u = \pm \frac{\pi}{2}$, corespunzătoare punctelor $x = \pm 1$, rezultă că $x = f(u)$ este o funcţiune olomorfă în această fâşie (§ 358). Voim să arătăm că $f(u)$ este o funcţiune olomorfă în tot planul. Pentru aceasta, să observăm că funcţiunea $f(u)$, olomorfă în interiorul fâşiei considerate, fiind reală dealungul celor două linii cari o mărginesc se prelungeşte în afară din această fâşie şi primeşte valori imaginare conjugate în puncte simetrice în raport cu aceste linii (§ 363).

Reprezintând prin (D, D′) fâşia iniţială, limitată de dreptele D, D′, cari trec prin punctele $u = \pm \frac{\pi}{2}$ şi sunt perpendiculare pe axa reală, să considerăm fâşia paralelă (D, D_1) având cu dânsa latura comună D şi a cărei a doua latură D_1 trece prin punctul $u = \frac{3\pi}{2}$ (fig. 72). In această fâşie funcţiunea $f(u)$ este aşa dar olomorfă ca şi în cea dintâiu (363. Observare).

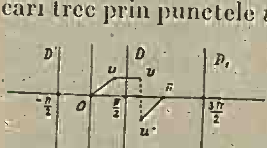

Fig. 72

In privința valorilor ce $f(u)$ primește în această fâșie, observăm că dacă u este un punct în fâșia (D', D), $\pi - u$ este un punct situat în fâșia (D, D_1) astfel că avem egalitatea

$$(2) \qquad f(\pi - u) = f(u),$$

precum rezultă din a doua egalitate (5) (§ 381), în care facem $n = 0$. Această egalitate se mai deduce din considerațiunile următoare:

Fie $u = \alpha + i\beta$ un punct din prima fâșie, punctul $u' = \pi - \alpha + i\beta$ este simetric cu u în raport cu dreapta D și cu punctul $u'' = \pi - u$ în raport cu axa reală. Valoarea funcțiunii $f(u)$ în punctul u' este așà dar imaginară conjugată cu valorile $f(u)$, $f(u'')$. De unde rezultă egalitatea (2).

Prin considerațiuni de simetrie analoage cu cele precedente se recunoaște că funcțiunea $f(u)$ este olomorfă în tot planul (u). Referindu-ne la formula (5) (§ 381), care dă expresiunea tuturor valorilor integralei u corespunzătoare la aceiaș valoare a lui x, conchidem că funcțiunea $f(u)$ satisface egalitățile

$$(3) \qquad \begin{cases} f(u + 2k\pi) = f(u), \\ f[(2k + 1)\pi - u] = f(u), \end{cases}$$

k fiind un număr întreg arbitrar.

Funcțiunea $x = f(u)$ este așa dar o funcțiune întreagă, simplu periodică, având perioada 2π. Din reprezintarea conformă a planului (x) și a fâșiei $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ din planul (u), precum și din relațiunea $f(\pi - u) = f(u)$, rezultă că funcțiunea $f(u)$ nu admite perioadă în valoare absolută mai mică decât 2π.

Din relațiunea $u(-x) = -u(x)$, rezultă, viceversa, relațiunea

$$(4) \qquad f(-u) = -f(u);$$

căci $f(u)$ primește o valoare unică pentru fiecare valoare a lui u. De unde rezultă

$$(5) \qquad f(0) = 0$$

și prin urmare, în virtutea egalităților (3),

$$(6) \qquad f(k\pi) = 0.$$

Zerurile funcțiunii $f(u)$ sunt așa dar date de expresiunea $u = k\pi$, k fiind un număr întreg arbitrar.

384. Se poate, fără ajutorul prelungirii analitice și a transformării conforme, proba foarte lesne că funcțiunea inversă $f(u)$ a integralei (1) este o funcțiune întreagă, efectuând inversiunea seriei (2) (§ 381), prin care se recunoaște identitatea ei cu funcțiunea

$\sin u$. Pentru aceasta să calculăm coeficienţii seriei inverse. Derivând ecuaţiunea

$$\frac{dx}{du} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

avem

$$\frac{d^2x}{du^2} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{du} = -x;$$

de unde rezultă, într'un mod general, egalităţile

$$\frac{d^{2n}x}{du^{2n}} = (-1)^n x,$$

$$\frac{d^{2n+1}x}{du^{2n+1}} = (-1)^n (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Făcând $u = 0$, valoare căreia corespunde $x = 0$, avem

$$\left(\frac{d^{2n}x}{du^{2n}}\right)_0 = 0, \left(\frac{d^{2n+1}x}{du^{2n+1}}\right)_0 = (-1)^n;$$

de unde seria

$$x = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \ldots = \sin u.$$

III. — INTEGRALA ELIPTICĂ DE SPEŢA I.

385. Să considerăm integrala eliptică de speţa I

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{1}$$

$f(x)$ fiind un polinom de gradul 3 sau 4 [1]).

---

[1]) Printr'o substituţiune liniară se poate trece dela un caz la celalt. Astfel dacă $f(x)$ este un polinom de gradul 4 şi a un zero simplu al acestui polinom, punând

$$x - a = \frac{1}{t}, \tag{1}$$

obţinem egalitatea

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = -\frac{dt}{\sqrt{f_1(t)}}, \tag{2}$$

în care $f_1(t)$ este un polinom de gradul 3.

Viceversa. Dacă $f(x)$ este un polinom de gradul 3 şi a un număr diferit de zerurile sale, aplicând substituţiunea (1) obţinem egalitatea (2), în care avem

$$f_1(t) = t\left[f(a)t^3 + f'(a)t^2 + \frac{f''(a)}{2!}t + \frac{f'''(a)}{3!}\right], \quad f(a) \neq 0.$$

Prin substituţiunea (1), fiecărui zero al lui $f(x)$ diferit de a corespunde câte un zero al lui $f_1(t)$, iar punctului $x = a$ corespunde punctul $t = \infty$. Unul din punctele critice ale radicatului $\sqrt{f_1(t)}$ este aşa dar punctul ∞.

Să presupunem $f(x)$ de gradul 4 şi fie

$$(2)\qquad f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4),$$

a_1, a_2, a_3, a_4 fiind patru puncte distincte. Să presupunem punctul x_0, origina integralei, diferit de aceste puncte. In punctul x_0 radicalul are două valori distincte, egale şi de semne contrarii. Adoptând una din ele ca valoare iniţială, pe care o reprezintăm prin $\sqrt{f(x_0)}$, radicalul va fi bine determinat dealungul unei curbe oarecari, ce nu trece prin puncte critice.

Să presupunem punctele a_1, a_2, a_3, a_4, numerotate în ordinea în care ele sunt întâlnite de o rază vectoare, care se învârteşte în jurul lui x_0 în sensul pozitiv şi să introducem contururile elementare (x_0, a_1), (x_0, a_2), (x_0, a_3), (x_0, a_4) (fig. 73).

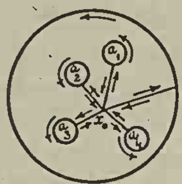

Fig. 73

Fie

$$2A_1,\ 2A_2,\ 2A_3,\ 2A_4,$$

valorile integralei (1) luate după aceste contururi, valoarea iniţială a radicalului fiind $\sqrt{f(x_0)}$. Integrala după cercurile descrise în jurul punctelor de ramificaţiune tinde către zero împreună cu raza acestor cercuri, căci produsul

$$\left| (x-a_k)\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \right| \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

tinde către zero când $|x-a_k|$ tinde către zero. De unde rezultă că avem

$$A_1 = \int_{x_0}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},\ A_2 = \int_{x_0}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},\ A_3 = \int_{x_0}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{(fx)}},\ A_4 = \int_{x_0}^{a_4} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Aceste patru integrale nu sunt independente între ele. In adevăr, din x_0 ca centru cu o rază R destul de mare să descrim un cerc (R) care să cuprindă toate punctele critice. Să considerăm, de o parte, drumul format de cele patru contururi elementare descrise în ordinea indicilor şi, de altă parte, drumul format de raza x_0A, de cercul (R) urmat de raza Ax_0. Integralele luate după cele două drumuri, în sensul pozitiv, sunt egale, căci în aria cuprinsă între aceste două drumuri funcţiunea de sub semnul $\int$ este olomorfă. Insă integralele (x_0A) şi (Ax_0) se distrug, radicalul $\sqrt{f(x)}$ trecând prin aceleaşi valori în ambele sensuri şi integrala după cerc tinde către zero, când raza cercului tinde către infinit, căci produsul $x\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ tinde către zero în acelaş timp. Valoarea integralei după cercul (R) fiind independentă de mărimea razei R [1]), rezultă că această integrală este nulă. De unde rezultă, suprimând factorul 2, relaţiunea căutată

$$(3) \qquad A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = 0.$$

Semnele alternative cari figurează în această egalitate provin din faptul că după ce se descrie un contur elementar, radicalul îşi schimbă semnul, astfel că conturul următor este descris cu o valoare iniţială egală şi de semn contrar.

Să punem

$$A_2 - A_1 = \omega, \; A_3 - A_2 = \omega';$$

de unde, în virtutea relaţiunii precedente,

$$A_3 - A_4 = \omega.$$

Aceste egalităţi ne dau valorile constantelor $A_1, \ldots A_4$, în funcţiune de una din ele, de exemplu A_1 şi de ω şi ω'; avem

$$(4) \qquad A_2 = A_1 + \omega, \; A_3 = A_1 + \omega + \omega', \; A_4 = A_1 + \omega'.$$

Să observăm că ω şi ω' sunt independente de punctul x_0, ales ca origină a contururilor elementare. Astfel cantitatea

$$2\omega = 2(A_2 - A_1)$$

este egală cu valoarea integralei (1) luată după o curbă închisă, descrisă în sensul negativ, care trece prin x_0 şi nu conţine în interiorul său alte puncte critice decât punctele a_1 şi a_2. Această curbă însă se poate înlocui, precum se recunoaşte lesne, prin conturul $\alpha(a_2)\beta\gamma(a_1)\delta\alpha$ (fig. 74). Făcând să tindă către zero razele celor două cercuri, ale căror centre sunt punctele a_1 şi a_2, şi ţinând seamă că la limită integrala după $\beta\gamma$ este egală şi de acelaş semn cu integrala după $\delta\alpha$, rezultă egalitatea

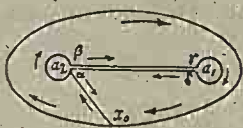

Fig. 74.

$$(5) \qquad \omega = \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

integrala fiind luată după dreapta care uneşte a_1 cu a_2 pe ţărmul care se află de aceiaş parte a dreptei ca punctul x_0. In acelaş mod obţinem

$$(6) \qquad \omega' = \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

[1]) Ea este egală cu valoarea integralei după contururile elementare.

Cantităţile 2ω, $2\omega'$ se numesc *perioadele* integralei eliptice date. Vom vedeà mai departe că raportul lor este imaginar.

Cu ajutorul formulelor (4) se recunoaşte că integrala eliptică luată după o curbă închisă, care conţine în interiorul său două puncte critice oarecari, este egală cu o perioadă sau cu o sumă de perioade; căci expresiunea unei asemenea integrale este de forma

$$2(A_\alpha - A_\beta),\ (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)\quad \alpha \neq \beta.$$

De unde rezultă că asociând punctele critice două câte două, în diferite moduri, pentru a formà un sistem de două perioade, orice sistem de perioade se exprimă printr'o sumă de multiple a celor dintâi.

Din cele ce preced conchidem că integrala eliptică de speţa I este finită în tot planul (x), inclusiv punctul $x = \infty$, având în fiecare punct o infinitate de valori. Să reprezintăm prin u_0 valoarea integralei (1) luată după un drum determinat (drumul direct), care duce dela x_0 la x. Orice alt drum, care uneşte aceleaşi puncte, poate fi înlocuit prin drumul direct, precedat de contururi elementare descrise într'o ordine convenabilă. Două cazuri se pot prezintà, după cum numărul acestor contururi elementare este par sau impar. In cazul întâi, valoarea radicalului, după ce x descrie toate contururile, este egală cu valoarea iniţială $\sqrt{f(x_0)}$; prin urmare

$$u = u_0 + 2m\omega + 2n\omega',$$

m şi n fiind numere întregi. In cazul al doilea, valoarea integralei, după descrierea contururilor elementare, este $2m\omega + 2n\omega' + 2A_1$ şi în acelaş timp radicalul devine $-\sqrt{f(x_0)}$. Cu acest radical, ca valoare iniţială, obţinem, dealungul drumului direct, pentru integrală, valoarea $-u_0$; prin urmare valoarea integralei u după drumul total este

$$u = 2A_1 - u_0 + 2m\omega + 2n\omega'.$$

In rezumat, totalitatea valorilor de cari integrala (1) este susceptibilă într'un punct x, este dată de expresiunile

$$(7)\qquad u = \begin{cases} u_0 + 2m\omega + 2n\omega', \\ 2A_1 - u_0 + 2m\omega + 2n\omega'. \end{cases}$$

Dacă origina x_0 coincide cu punctul critic a_1, avem $A_1 = 0$ şi formulele de mai sus se înlocuesc prin următoarele

$$u = \pm u_0 + 2m\omega + 2n\omega'.$$

Forma analitică a integralei în domeniul unui punct oarecare, situat la distanţă finită sau la infinit, se obţine, desvoltând funcţiunea de sub semnul $\int$, în domeniul considerat şi integrând, precum am văzut (§ 381). Din aceste desvoltări se conchide, ţinând seamă de egalităţile (7), că integrala $u(x)$ este o funcţiune analitică multiformă având o infinitate de ramuri, cari se deduc dintr'una din ele, modificând drumul de integraţiune într'un mod convenabil.

386. Să presupunem polinomul de gradul al treilea şi fie

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3).$$

Reprezintând prin 2ω, $2\omega'$ perioadele relative la punctele critice (a_1, a_2), (a_2, a_3), avem

$$\omega = \int_{a_2}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}, \quad \omega' = \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}.$$

Toate perioadele ce se pot obţine luând integrala între două puncte critice oarecari, inclusiv punctul $x = \infty$, se reduc la cele dintâi două. Astfel avem

$$\int_{a_1}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}$$

$$+ \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}} = \omega + \omega'.$$

Să evaluăm şi integrala luată între punctul ∞ şi unul din celelalte puncte critice, de exemplu a_1, după o linie care să nu taie dreapta $(a_2\, a_3)$. Pentru aceasta să descriem un cerc (R) din origină ca centru cu o rază R foarte mare, care să cuprindă în interiorul său punctele a_1, a_2, a_3 şi să considerăm conturul

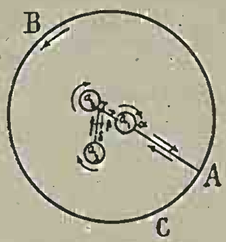

Fig. 75

$$A\alpha\beta\gamma\delta(a_3)\delta\gamma(a_2)\gamma\,\beta\varepsilon\alpha ABCA,$$

A, B, C fiind pe cercul (R) (fig. 70). Integrala luată după acest contur este nulă. Insă în punctul A, după ce x descrie cercul (R), radicalul îşi schimbă semnul, pe când pe linia $\beta\gamma$ radicalul trece prin aceleaşi valori la ducere şi la întoarcere. De unde rezultă

$$(\beta\gamma) + (\gamma\beta) = 0, \quad (A\alpha) + (\alpha A) = 2(A\alpha).$$

Trecând la limită ($R = \infty$), obţinem

$$2\int_{a_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\omega'.$$

In mod analog, se obțin egalitățile

$$\int_{a_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{a_1}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad \int_{a_3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

387. *Raportul perioadelor* $\frac{\omega'}{\omega}$ *este imaginar.*

Observare preliminară. Suma a două cantități complexe OA, OB, fiind reprezintată prin diagonala paralelogramului construit pe laturile OA, OB, punctul care figurează suma este situat în interiorul unghiului AOB. De unde rezultă că fiind dat un număr oarecare de cantități complexe, dacă punctele cari figurează aceste cantități sunt situate în interiorul unghiului al cărui vârf este punctul 0, suma lor va fi reprezintată printr'un punct situat în interiorul aceluiaș unghiu și prin urmare argumentul său va fi cuprins între cel mai mic și cel mai mare din argumentele termenilor. Rezultatul se aplică evident unui număr nelimitat de termeni formând o serie convergentă și prin urmare unei integrale difinite.

Să venim acum la teorema enunțată mai sus și să presupunem, ceeace este totdeauna posibil, integrala adusă la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3}},$$

în care polinomul de sub radical este de gradul al treilea. Fie a_1, a_2 două din rădăcinile acestui polinom; substituțiunea

$$x = a_1 + (a_2 - a_1)t$$

transformă integrala propusă într'o integrală care, abstracțiune făcând de un factor constant și înlocuind t prin x, este de forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}},$$

a fiind o constantă diferită de 0 și 1.

Vom considerà dar integrala sub forma precedentă și fie

$$(1) \quad \omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}}, \quad \omega' = \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}},$$

jumătățile a două din perioadele sale, integralele fiind rectilinii. Pentru ca aceste integrale să fie bine determinate este necesar a fixà valoarea inițială a fiecăreia din cele două radicale și ca pe drumurile de integrațiune să nu se găsească nici un punct critic. Ultima condițiune va fi împlinită dacă a este diferit de un număr real mai mic ca 1. Să facem o tăietură dealungul axei reale, cuprinsă între punctele $x = 1$ și $x = -\infty$, tăietură prin care a privit ca punct variabil să nu treacă. Adoptând pentru argumentul lui a valoarea zero când a este real și pozitiv, acest argument va fi cuprins între $-\pi$ și $+\pi$.

Vom determină radicalul în prima integrală luând argumentele lui x și $(1-x)$ egale cu 0 și valoarea inițială a argumentului lui $(a-x)$ egală cu arg a. Pentru ca să trecem dela ω la ω' vom evită punctul $x = 1$, printr'un arc de cerc infinit mic având centrul în acest punct și descris în sensul negativ în raport cu aria interioară acestui cerc. Cu modul acesta, valoarea inițială a argumentului în a doua integrală va fi complect determinată.

Dacă a este real și mai mare ca 1, teorema ce voim să demonstrăm este evidentă; căci avem expresiuni de forma

$$\omega = A, \ \omega' = iB, \tag{2}$$

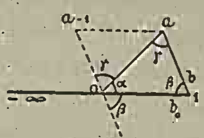

Fig. 76

A și B fiind cantități reale și pozitive.

I. Să presupunem punctul a situat deasupra axei reale și fie α argumentul lui. Să considerăm triunghiul $(01a)$ ale cărui vârfuri sunt 0, 1 și a și fie β și γ unghiurile $\widehat{01a}$, $\widehat{1a0}$ (fig. 76).

Valoarea argumentului diferențialei

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}}$$

la începutul laturei (0, 1) este egală cu valoarea inițială a argumentului factorului $\frac{1}{\sqrt{a-x}}$, adică $-\frac{\alpha}{2}$. Când x descrie segmentul (0, 1) argumentele lui x, $(1-x)$ și dx rămând constante și egale cu zero, pe când argumentul lui $(a-x)$ crește cu unghiul γ [1]; prin urmare avem

$$\arg\left[\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\right]_{x=1} = -\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

De unde rezultă (Observarea preliminară) că argumentul lui ω este cuprins între $-\frac{\alpha}{2}$ și $-\frac{\alpha}{2}-\frac{\gamma}{2}$. Putem dar scrie

$$\arg\omega = -\frac{\alpha}{2} - \theta\frac{\gamma}{2}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{3}$$

[1]) Punctul $(a-x)$ descrie segmentul $(a, a-1)$ egal paralel și de sens invers cu segmentul (0, 1).

Să calculăm argumentul lui ω'. Când x descrie arcul $b_0 b$, punctul $x' = 1 - x$ descrie, în sensul negativ, un arc egal, având centrul în 0; prin urmare, în punctul b, $\arg(1 - x) = -\beta$; de unde, în acelas punct,

$$\arg \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\beta}{2}.$$

Dealungul arcului considerat argumentele lui x şi $(a - x)$ variază infinit de puţin şi la limită variaţiunea lor este nulă. De altă parte, dealungul laturii $(1, a)$ argumentul lui dx fiind constant şi egal cu $\arg(a-1) = \pi - \beta$, rezultă că la începutul laturei $(1, a)$ avem

$$\arg \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = -\frac{\alpha+\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + \pi - \beta$$
$$= \pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Dealungul laturii $(1, a)$ $\arg x$ variază dela 0 la α; prin urmare $\arg \frac{1}{\sqrt{x}}$ creşte cu $-\frac{\alpha}{2}$. Celelalte argumente rămânând constante dealungul acestei laturi, avem în punctul a

$$\arg \left[\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\right]_{x=a} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Prin urmare $\arg \omega'$ este cuprins între $\frac{\pi - \alpha}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$ şi putem scrie

(4) $$\arg \omega' = \frac{\pi-\alpha}{2} + \theta_1 \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Scăzând una din alta egalităţile (3) şi (4) obţinem

(5) $$\arg \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\theta_1 \alpha + \theta \gamma).$$

Insă $0 < \alpha + \gamma < \pi$, prin urmare

(6) $$\frac{\pi}{2} < \arg \frac{\omega'}{\omega} < \pi.$$

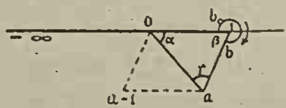

Fig. 77

II. Să presupunem punctul a dedesubtul axei reale (fig. 77); avem

$$\arg a = -\alpha, \quad \arg \left(\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Dealungul segmentului $(0, 1)$ argumentul lui $(a - x)$ variază dela

$-\alpha$ până la $\arg(a-1) = -(\pi-\beta)$; prin urmare, x variând dela 0 la 1, avem

$$\arg\left(\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\,(a-x)}}\right)_{x=1} = \frac{\pi-\beta}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

De unde rezultă

$$(7) \qquad \arg\omega = \frac{\alpha}{2} + \theta\frac{\gamma}{2},\ 0<\theta<1.$$

Pentru determinarea perioadei ω', evităm punctul $x=1$, conform convențiunii de mai sus, printr'un arc b_0b exterior unghiului $\widehat{01a} = \beta$; argumentul lui $1-x$ în punctul b este așà dar $-(2\pi-\beta)$. Prin urmare în acest punct avem

$$\arg\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \pi - \frac{\beta}{2}.$$

Pe latura $(1, a)$ argumentul diferențialei dx este constant

$$= \arg(a-1) = -(\pi-\beta);$$

prin urmare în punctul $x=1$, considerat pe *această latură*, avem

$$\arg\left(\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\,(a-x)}}\right)_1 = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\pi-\beta}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Când x descrie latura considerată, argumentul său variază dela zero la $-\alpha$; avem dar, în punctul $x=a$,

$$\arg\left(\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\,(a-x)}}\right)_a = \frac{\pi+\alpha}{2}.$$

De unde conchidem egalitatea

$$(8) \qquad \arg\omega' = \frac{\pi}{2} + \theta_1\frac{\alpha}{2}.$$

Din egalitățile (7) și (8) rezultă dubla inegalitate

$$(9) \qquad 0 < \arg\frac{\omega'}{\omega} < \frac{\pi}{2}.$$

III. Am presupus punctul a în afară de tăietura $(1, -\infty)$. Dacă a se găsește într'un punct oarecare al tăieturii diferit de 0 și 1, convenim a-l privì situat pe țărmul pozitiv sau negativ. Valorile corespunzătoare ale lui ω și ω' sunt limitele către cari tind integralele (1), când a fiind deasupra axei reale tinde către țărmul pozitiv, sau fiind dedesubtul acestei axe tinde către țărmul negativ; $\arg\frac{\omega'}{\omega}$ rămâne respectiv cuprins între limitele (6) și (9).

388. Rezultatul din urmă se poate obține direct; este de ajuns să evităm într'un mod convenabil punctele critice cari se află pe drumul de integrațiune ale integralelor (1). Este interesant să facem acest calcul.

1°. Să presupunem mai întâi $0 < a < 1$. Vom evità, în calculul lui ω, punctul a printr'un semicerc cu o rază a cărei limită este zero, situat dedesubtul axei reale sau deasupra axei, după cum privim acest punct ca fiind pe țărmul pozitiv sau negativ al segmentului $(0, 1)$. De unde rezultă că dacă argumentul lui $(a - x)$ este nul în intervalul $(0, a)$, el và fi respectiv egal cu $\pm\pi$ în intervalul $(a, 1)$ (fig. 78, fig. 79); prin urmare, în acest interval, vom aveà respectiv $\sqrt{a-x} = \pm i\sqrt{x-a}$, după cum a este pe țărmul pozitiv sau negativ.

Să considerăm argumentul lui $(1 - x)$. Acest argument este luat, ca și argumentul lui x, egal cu zero în expresiunea lui ω; el va fi dar, în expresiunea lui ω', egal cu zero sau cu -2π, după cum punctul a este pe țărmul pozitiv sau negativ (fig. 2);

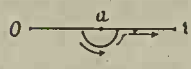

Fig. 78

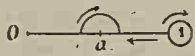

Fig. 79

căci, conform convențiunei pentru determinarea lui ω', în cazul întâi x descrie segmentul $(1, a)$ fără a înconjurà punctul 1 (fig. 78), iar în cazul al doilea x descrie acest segment după ce a înconjurat punctul 1 în sensul negativ (fig. 79): rezultat ce concordă cu formulele din cazurile I și II în cari facem $\beta = 0$.

Din cele ce preced rezultă tabloul următor:

1°. a pe țărmul $+$ și $a < x < 1$ (fig. 78)

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\omega &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} \\
&\qquad - i\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = \mathrm{A} - i\mathrm{B}, \\
\omega' &= \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = -i\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} \\
&= i\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = i\mathrm{B};
\end{aligned}
\right.
$$

2°. a pe țărmul $-$ și $a < x < 1$ (fig. 79); $\arg\sqrt{1-x} = -\pi$

în expresiunea lui ω',

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} + i\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = A + iB,\\ &\omega' = i\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = iB. \end{aligned}\right.$$

Radicalele din membrele din urmă fiind toate reale şi pozitive, rezultă că A şi B sunt cantităţi reale şi pozitive. Coeficientul lui i în raportul $\frac{\omega'}{\omega}$ este, în ambele sisteme, egal cu cantitatea pozitivă

$$\frac{AB}{A^2 + B^2}.$$

Să presupunem $a < 0$. In acest caz, argumentul lui $(a - x)$ rămâne invariabil şi egal cu argumentul lui a, adică egal, ca şi în cazul precedent, cu $\pm \pi$, după cum a este pe ţărmul pozitiv sau negativ. Argumentul lui x fiind pentru $x > 0$ egal cu zero, va fi, în intervalul $(0, a)$ egal cu argumentul lui a; căci punctul critic $x = 0$ este ocolit printr'un semicerc situat deasupra sau dedesubtul axei reale, după cum punctul a este deasupra sau dedesubtul acestei axe (fig. 80, fig. 81). Dealungul segmentului $(0, a)$ vom avea dar respectiv

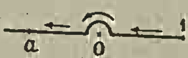

Fig. 80

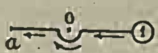

Fig. 81

$$\sqrt{x} = \pm i\sqrt{-x},$$

radicalul din membrul al doilea fiind real şi pozitiv.

In fine, arg $(1 - x)$ este nul în expresiunea lui ω; iar în expresiunea lui ω', acest argument este nul sau egal cu -2π, după cum arg $a = \pm\pi$, pentru acelaş motiv ca mai sus.

De unde rezultă tabloul următor:

3^0. arg $a = \pi$,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = -i\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = -iA,\\ &\omega' = \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = -i\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}}\\ &\quad - \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = i\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}}\\ &\quad + \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = iA + B. \end{aligned}\right.$$

4⁰. $\arg a = -\pi$,

$$
(13)\quad \begin{cases} \omega = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = i\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = i\,\mathrm{A}, \\[2ex] \omega' = \displaystyle\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = i\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} \\[2ex] \qquad - \displaystyle\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a-x)}} = i\mathrm{A} - \mathrm{B}. \end{cases}
$$

Cantităţile A şi B fiind reale şi pozitive, coeficientul lui i în raportul $\dfrac{\omega'}{\omega}$ este cantitatea pozitivă

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

389. In rezumat, din toate cele ce preced, rezultă că oricare ar fi valoarea lui x, diferită de zero, 1 sau infinit, coeficientul lui i în raportul lui $\dfrac{\omega'}{\omega}$ este diferit de zero. Ceva mai mult, dacă perioadele sunt determinate în modul cum s'a zis mai sus, coeficientul considerat este totdeauna pozitiv.

390. Să studiăm, în mod special, integrala eliptică sub forma normală a lui Legendre

$$(1)\qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

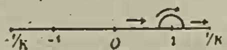

Fig. 82

în cazul când *modulul* k este real şi mai mic ca 1. Putem să-l presupunem pozitiv, căci figurează sub radical numai prin pătratul său. Punctele critice sunt toate situate pe axa reală. Să le dispunem în ordinea

$$a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = \frac{1}{k},\ a_4 = -\frac{1}{k}.$$

Să luăm valoarea iniţială a radicalului, în punctul $x = 0$, egală cu $+1$ şi să notăm cu $2\mathrm{K}$, $i\mathrm{K}'$ semiperioadele reprezintate mai sus prin ω şi ω'. Vom avea

$$(2)\quad \omega = 2\mathrm{K} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$(3)\quad \omega' = i\mathrm{K}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}};$$

radicalul din urmă este pozitiv ca şi cel iniţial, căci presupunem punctul critic $x = 1$ evitat printr'un semicerc situat deasupra axei reale. Constantele

$$(4) \qquad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

şi

$$(5) \qquad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

sunt aşà dar reale şi pozitive şi raportul $\frac{\omega'}{\omega} = i\frac{K'}{K}$ este pur imaginar, având coeficientul lui i pozitiv.

Să introducem modulul *complementar* k', definit de egalitatea

$$(6) \qquad k^2 + k'^2 = 1$$

şi să facem în integrala din urmă o schimbare de variabilă, punând

$$(7) \qquad k^2x^2 + k'^2x'^2 = 1;$$

Efectuând calculele, obţinem expresiunea

$$(8) \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

care nu se deosebeşte de expresiunea (4) a lui K decât prin aceea că modulul k este inlocuit prin complementarul său k'

Cu notaţiunile precedente, valorile integralei u într'un punct x vor fi date (formulele (7), § 385) de expresiunile

$$(9) \qquad u = \begin{cases} u_0 + 4mK + 2niK', \\ 2K - u_0 + 4mK + 2niK', \end{cases}$$

u_0 fiind una din valorile integralei în acel punct

Este interesant de observat analogia ce există între expresiunile precedente, relative la perioada $4K$ şi acelea relative la perioada 2π cari dau valorile lui arc sin x. De altmintrelea, pentru $k = 0$, avem $K = \frac{\pi}{2}$ şi integrala eliptică considerată coincide cu funcţiunea arcsin$x$.

391. *Transformarea planului* (x) *în planul* (u). Să limităm planul variabilei (x) prin două tăieturi făcute dealungul axei reale, una dela $+1$ la $+\infty$, cealaltă dela -1 la $-\infty$. In acest plan fiecare

ramură a integralei

$$(1) \qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \begin{pmatrix} k \text{ real} \\ 0<k<1 \end{pmatrix}$$

este o funcțiune olomorfă. Vom considerà ramura care se anulează pentru $x = 0$. Avem pentru această ramură, egalitatea

$$(2) \qquad u(-x) = -u(x).$$

Din origină ca centru cu o rază foarte mare R, precum și din punctele critice ca centre cu o rază foarte mică r, să descriem semicercuri, toate situate deasupra axei reale (fig. 82). Să considerăm conturul format din aceste semicercuri și din segmentele axei reale cuprinse între ele. Avem

$$\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= -\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\mathrm{K}.$$

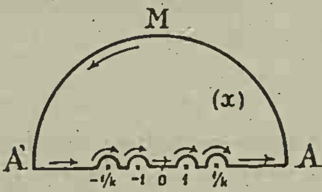

Fig. 83

Dealungul segmentelor $\left(1, \frac{1}{k}\right), \left(-1, -\frac{1}{k}\right)$ avem respectiv expresiunile

$$(3) \qquad \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = \mp i\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)},$$

iar dacă x se găsește pe unul din segmentele $\left(\frac{1}{k}, \infty\right)$ sau $\left(-\frac{1}{k}, -\infty\right)$ avem în ambele cazuri

$$(4) \qquad \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = -\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)},$$

radicalele din membrul al doilea fiind reale și pozitive.

De unde rezultă

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_{1}^{+\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = i\mathrm{K}',$$

$$\int_{-\frac{1}{k}}^{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

radicalele fiind determinate conform egalităților (3) și (4).

Integrala propusă, luată în sensul pozitiv dealungul conturului complect, se reduce aşa dar, pentru $r = 0$ şi $R = \infty$, la

$$2K - 2\int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}.$$

Insă în aria limitată de acest contur funcţiunea de integrat fiind olomorfă, integrala totală este nulă; de unde rezultă egalitatea

$$(\alpha) \qquad \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = K.$$

Rezultatul precedent se mai poate obţine făcând schimbarea de variabilă

$$kx = \frac{1}{z};$$

de unde se deduce imediat egalitatea

$$\int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Să notăm valoarea integralei u luată dealungul axei reale dela $x = 0$ până la $x = +\infty$, evitând punctele critice prin semicercurile infinit mici cari fac parte din conturul considerat. Cele trei segmente rectilinii $(0, 1)$, $\left(1, \frac{1}{k}\right)$, $\left(\frac{1}{k}, \infty\right)$ dând respectiv valorile K, iK', $-K$, avem

$$(6) \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = iK'.$$

Este de observat că putem înlocui drumul de integraţiune precedent prin o rază nelimitată oarecare dusă din origină şi situată în semiplanul superior, fără a schimba valoarea integralei. Căci în sectorul format de o asemenea rază şi de drumul primitiv, radicalul este olomorf şi integrala, dealungul unui arc al cercului (R), tinde către zero când R tinde către infinit.

Cu ajutorul rezultatelor precedente obţinem conturul ce descrie u când x descrie conturul considerat. Dealungul segmentelor $(0, 1)$, $\left(1, \frac{1}{k}\right)$, $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ integrala u este respectiv de forma

$$t, \; K + it, \; K + iK' - t,$$

t fiind o variabilă reală, care variază necontenit în acelaş sens, în primul interval dela 0 la K, în al doilea de la 0 la K' şi în al treilea dela 0 la — K.

Axei reale negative (x) corespund pentru u valori simetrice cu cele precedente în raport cu axa sa imaginară. De unde rezultă că făcând $R = \infty$, axa reală (x) din care se exclud punctele critice prin semicercuri infinit mici, situate deasupra acestei axe, se transformă punct cu punct într'un dreptunghiu ale cărui vârfuri sunt punctele $u = \pm K$, $u = \pm K + iK'$.

Nu este inutil a ne da seamă în ce se transformă semicercurile relative la punctele critice, înainte de a se reduce la zero, precum şi în ce se transformă semicercul (R) înainte ca R să devie infinit.

Fie a unul din cele patru puncte critice; avem, în domeniul acestui punct

$$(7) \quad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = (x-a)^{-\frac{1}{2}}\left[A_0 + A_1(x-a) + \ldots\right], \quad A_0 \neq o.$$

Prin urmare, reprezintând prin u_0 valoarea lui u în punctul $x = a$, drumul descris de u va diferì infinit puţin de drumul dat de expresiunea

$$(8) \qquad u - u_0 = 2A_0(x-a)^{\frac{1}{2}},$$

care reprezintă, când x descrie semicercul relativ la punctul $x = a$, un cadran cu centrul în u_0 descris în acelaş sens şi situat în interiorul dreptunghiului obţinut mai sus. Raza acestui cerc tinde către zero, împreună cu $|x - a|$.

In domeniul punctului $x = \infty$, ramura considerată este reprezintată prin desvoltarea

$$(9) \qquad \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = -\frac{1}{k}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x^4} + \ldots\right];$$

de unde rezultă că drumul descris de u, când x descrie semicercul (R), diferă infinit puţin de drumul dat de expresiunea

$$(10) \qquad u - iK' = \frac{1}{kx},$$

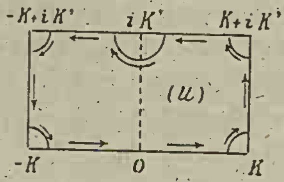

Fig. 84

adică de un semicerc descris în sens invers, având centrul în punctul $u = iK'$ şi situat în interiorul dreptunghiului. Acest semicerc se reduce la centrul său, când R tinde către infinit. (Fig. 84).

Figura reprezintă conturul integralei u în care se transformă conturul considerat al lui x. In aria limitată de conturul (x), u fiind funcţiune olomorfă de x [1]) şi contururile acestor variabile corespunzându-se punct cu punct, rezultă că ariile ce ele limitează sunt transformate într'un mod conform una în cealaltă. Făcând $r = o$, $R = \infty$, conchidem că semiplanul situat deasupra axei reale (x) se transformă într'un mod conform în dreptunghiul (u).

Axa reală a variabilei (x), din care excludem punctele critice prin semicercuri infinit mici situate dedesubtul ei, se transformă punct cu punct în perimetrul unui dreptunghiu simetric cu cel dintâi în raport cu axa reală (u). Conchidem că semiplanul (x), situat dedesubtul axei reale (x), se transformă în mod conform într'un dreptunghiu simetric cu cel dintâi în raport cu axa reală a variabilei u.

Intr'un cuvânt, tot planul (x) limitat de cele două tăieturi $(-1, -\infty)$ şi $(+1, +\infty)$ se transformă într'un mod conform în dreptunghiul (fig. 84) ale cărui vârfuri sunt

$$u = -K \pm iK', \quad u = K \pm iK'.$$

Dimensiunile acestui dreptunghiu sunt $2K$, $2K'$.

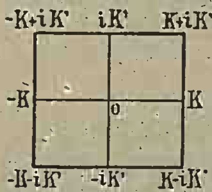

Fig. 85

392. *Inversiunea integralei*

$$(1) \qquad u = \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Să considerăm în planul (u) dreptunghiul (fig. 84) având vârfurile $\pm K$, $\pm K + iK'$, din care excludem aceste vârfuri precum şi punctul $u = iK'$. Din reprezintarea conformă a ariei astfel limitată şi a ariei (x) corespunzătoare, (fig. 83) în interiorul căreia u este o funcţiune olomorfă, rezultă, viceversa (§ 358), că $x = \varphi(u)$ este o funcţiune olomorfă în interiorul dreptunghiului (u). Această funcţiune tinde către ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ când u tinde într'un mod oarecare către vârfurile corespunzătoare ale dreptunghiului. Când u tinde către punctul iK', x tinde către infinit. Punctul $u = iK'$ este un pol de ordinul întâi al funcţiunii $x = \varphi(u)$. In adevăr, integrând ambele membre (9), din paragraful precedent, obţinem, în domeniul

---

[1]) $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ fiind funcţiune olomorfă în interiorul conturului simplu, rezultă că integrala este funcţiune olomorfă în acest contur (§ 294).

lui $x=\infty$, desvoltarea

$$(2)\qquad u-i\mathrm{K}'=\frac{1}{kx}\left[1+\frac{\mathrm{A}}{3x^2}+\dots\right];$$

de unde, prin inversiune,

$$(3)\qquad \frac{1}{kx}=u-i\mathrm{K}'+a_1(u-i\mathrm{K}')^3+a_2(u-i\mathrm{K}')^5+\dots{}^{1)}.$$

Prin urmare, în domeniul punctului $u=i\mathrm{K}'$, avem seria

$$(4)\qquad x=\frac{1}{k(u-i\mathrm{K}')}+\mathrm{P}(u-i\mathrm{K}'),$$

care arată că punctul $u=i\mathrm{K}'$ este un pol de ordinul întâi și reziduul corespunzător $\frac{1}{k}$.

Funcțiunea $\varphi(u)$, olomorfă în interiorul dreptunghiului considerat (u) din al cărui contur se exclude polul $u=i\mathrm{K}'$, fiind reală dealungul laturilor dreptunghiului, se prelungește în afară, primind valori imaginare conjugate în puncte simetrice în raport cu fiecare din aceste laturi. De unde rezultă că funcțiunea $x=\varphi(u)$ este uniformă în dreptunghiurile egale cu cel dintâi, având cu el o latură comună; în fiecare din aceste dreptunghiuri $\varphi(u)$ n'are alt punct singular decât un pol corespunzător polului $i\mathrm{K}'$ și, prin urmare, această funcțiune este uniformă în dublul dreptunghiu format din cel dintâi și unul oarecare din celelalte patru.

Să considerăm, de exemplu, dreptunghiul din fig. 85. In acest dreptunghiu funcțiunea este uniformă și primește orice valoare o singură dată, exceptând punctele situate pe laturile paralele cu axa reală: pe aceste laturi, în punctele simetrice în raport cu axa reală, ea primește valori egale; căci pe latura superioară valorile sale sunt reale și pe latura inferioară ele sunt respectiv imaginare conjugate cu cele dintâi.

Pentru motive identice de simetrie, dreptunghiul cu vârfurile $(\pm\mathrm{K}_1\pm\mathrm{K}+2i\mathrm{K}')$ (fig. 86) satisface aceleași condițiuni. Să numim Δ acest dreptunghiu. Fie

$$u=\alpha+i\beta$$

un punct situat în acest din urmă dreptunghiu; punctele simetrice cu u respectiv cu axa reală și cu latura $(\mathrm{K},\mathrm{K}+2i\mathrm{K}')$ sunt respectiv

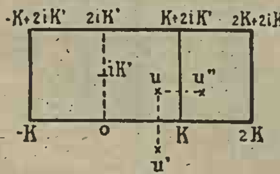

Fig. 86

$$u'=\alpha-i\beta,\quad u''=2\mathrm{K}-\alpha+i\beta=2\mathrm{K}-u'.$$

In aceste două puncte funcţiunea $\varphi(u)$ având valori imaginare conjugate cu valorile sale în punctul u, rezultă $\varphi(u'') = \varphi(u')$, adică egalitatea

$$\varphi(2\mathrm{K}-u) = \varphi(u). \tag{5}$$

In virtutea acestei egalităţi, semidreptunghiul din Δ situat la stânga axei imaginare şi dreptunghiul egal

$$(\mathrm{K},\ 2\mathrm{K},\ \mathrm{K}+2i\mathrm{K}'\ 2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}')\ (\text{fig. } 85)$$

sunt *echivalente*, adică unui punct u al unuia corespunde un punct v al celuilalt, legate între ele prin relaţiunea

$$u + v = 2\mathrm{K}, \tag{6}$$

astfel că avem egalitatea

$$\varphi(u) = \varphi(v). \tag{7}$$

De unde rezultă că dreptunghiul D, ale cărui laturi sunt segmentul $(0,2\mathrm{K})$ al axei reale şi segmentul $(0,2i\mathrm{K}')$ al axei imaginare (fig. 87), constitue ca şi Δ un domeniu fundamental al funcţiunei $x = \varphi(u)$.

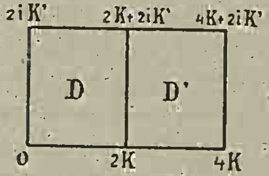

Fig. 87

Un al doilea dreptunghiu D', având cu el latura comună $(2\mathrm{K},\ 2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}')$, constitue de asemenea, în virtutea simetriei şi a prelungirei analitice, un domeniu fundamental al funcţiunei $\varphi(u)$.

Să considerăm dreptunghiul $D = D + D'$, format din ambele dreptunghiuri D, D'. In acest dreptunghiu (fig. 87) ale cărui vârfuri sunt punctele 0, $4\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$, $4\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'$, funcţiunea $x = \varphi(u)$ este uniformă şi trece de două ori prin aceiaşi valoare. Punctele u, v ale acestui dreptunghiu, în care funcţiunea are aceiaşi valoare, sunt legate între ele prin relaţiunea (6).

Pe laturile opuse ale dreptunghiului, în puncte situate pe aceiaşi paralelă la celelalte laturi, funcţiunea are valori egale.

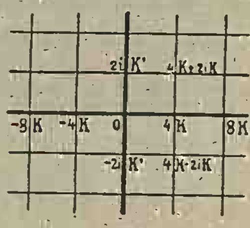

Fig. 88

Să ne închipuim că ducem paralele la laturile dreptunghiului D prin punctele $u = 4m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'$, m şi n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$. Vom acoperì astfel, într'un mod complect, planul (u) printr'o reţea de dreptunghiuri egale în cari funcţiunea $x = \varphi(u)$ se comportă ca în cel dintâiu (fig. 88).

Funcţiunea $x = \varphi(u)$ este aşà dar o funcţiune uniformă în tot planul (u), satisfăcând ecuaţiunile

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi(u + 4m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}') = \varphi(u), \\ \varphi(-u + (4m + 2)\,\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}') = \varphi(u). \end{cases}$$

Aceste ecuaţiuni corespund formulelor (9) (§ 390), cari dau toate valorile u corespunzătoare aceleiaş valori x.

Funcţiunea $\varphi(u)$ este, precum rezultă din ecuaţiunea (2) (§ 391), o funcţiune impară

$$(9) \qquad \varphi(-u) = -\varphi(u).$$

Această funcţiune fiind nulă pentru $u = o$, rezultă din ecuaţiunile (8) că zerurile acestei funcţiuni sunt date de egalitatea

$$(10) \qquad u = 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'.$$

De asemenea punctul $u = i\mathrm{K}'$ fiind un pol al funcţiunei, rezultă din aceleaşi ecuaţiuni că toate polurile sunt cuprinse în formula

$$(11) \qquad u = 2m\,\mathrm{K} + (2n + 1)\,i\mathrm{K}'.$$

Funcţiunea $\varphi(u)$ este aşa dar o funcţiune analitică uniformă neavând în tot planul alte singularităţi decât un număr infinit de poluri. Ea este dublu periodică, având perioadele $4\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$.

Vom întâlnì această funcţiune, pe altă cale, în partea a doua a cursului.

CAPITOLUL XX.

FUNCŢIUNI ANALITICE REPREZINTATE PRIN INTEGRALE DEFINITE ALE CĂROR LIMITE SUNT CONSTANTE.

393. Să reprezintăm prin x şi z două variabile complexe independente între ele, figurate în acelaş plan sau în plane diferite şi fie $f(x, z)$ o funcţiune analitică de x, olomorfă într'o regiune (A), pe când z descrie o linie dată L, continuă în raport cu z, oricare ar fi poziţiunea lui x în (A). Integrala

$$\int_{\mathrm{L}} f(x,z)dx\,,$$

a cărei valoare variază în genere cu x, definește o funcțiune $F(x)$, olomorfă în aria (A).

In adevăr, fie x_0 un punct oarecare situat în interiorul lui (A) și z un punct oarecare pe linia L. Există, prin ipoteză, un număr $r > 0$ astfel încât în interiorul cercului $| x - x_0 | = r$ să avem

$$(1)\quad f(x,z) = f(x_0,z_0) + (x - x_0)\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\left(\frac{\delta^n f}{\delta x^n}\right)_0 + \ldots$$

De unde, integrând ambele membre dealungul liniei L, obținem egalitatea

$$(2)\qquad \int_L f(x,z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

coeficienții a_n având valorile

$$(3)\qquad a_n = \frac{1}{n!}\int_L \left(\frac{\delta^n f}{\delta x^n}\right)_{x_0} dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dacă cercul $| x - x_0 | = r$ nu acoperă toată aria (A), seria din membrul al doilea se va prelungì neapărat în afară din acest cerc; căci neprelungirea acestei serii ar trage după sine imposibilitatea prelungirii seriei (1), ceeace este contra ipotezei. Această serie dă așa dar naștere unei funcțiuni analitice monogene $F(x)$ în interiorul lui (A). Funcțiunea $F(x)$ este olomorfă în (A); căci pe cât timp x nu iese din această arie, coeficiènții a_n ai seriei (2) au, în virtutea egalităților (3), în fiecare punct x_0, valori determinate, independente de drumul ce urmează x când se apropie de x_0. Teorema este așa dar demonstrată.

394. Integrala considerată

$$\int_L f(x,z)dz$$

constituie o expresiune analitică, care, în diferite regiuni (A), (A'), ... ale planului (x), poate coincide cu diferite funcțiuni analitice. Integrala lui Cauchy

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

luată după o curbă închisă C, ne oferă, precum am văzut, un asemenea exemplu.

395. *Derivata integralei.* Din egalitatea (2) rezultă

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_{x_0} = a_1 = \int_L \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_{x_0} dz,$$

sau, înlocuind x_0 prin x,

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \int_L \frac{\delta f}{\delta x}\, dz;$$

adică derivata integralei se obține derivând funcțiunea de sub semnul $\int$ în raport cu x.

396. Să presupunem acum că x în mișcarea lui în planul nelimitat, întâlnește un punct x_0 în care funcțiunea $f(x, z)$ încetează de a fi olomorfă, z fiind un punct oarecare pe linia de integrațiune L. Integrala corespunzătoare

$$\int_L f(x_0, z)\, dz$$

ar puteà să nu mai aibă sens, sau să devie nedeterminată. De aci însă nu se poate conchide că punctul $x = x_0$ este un punct singular al funcțiunii $F(x)$, precum din faptul că o serie întreagă $P(x)$ este divergentă într'un punct al cercului de convergență nu rezultă că acest punct este un punct singular al funcțiunii analitice corespunzătoare. Nu se poate afirmà nimic, într'un mod general.

397. Să considerăm ca exemplu integrala

$$(1) \qquad F(x) = \int_a^b \frac{dz}{z - x},$$

$z = a$, $z = b$ fiind două puncte date și integrala fiind rectilinie. Integrala încetează de a aveà sens când x se află pe segmentul ab. Să considerăm două puncte x', x'' infinit apropiate între ele și situate de o parte și de alta a acestui segment: x' la stânga și x'' la dreapta (fig. 88), sensul mișcării fiind ab. Să luăm pe segment două puncte α, β, foarte apropiate de punctele x', x'' și să le unim printr'un arc $am\beta$, astfel ca punctul x'' să fie interior ariei formată de segment și de acest

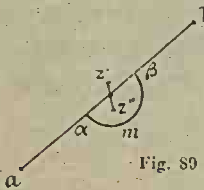

Fig. 89

arc, pe când punctul x' să fie exterior acestei arii. De unde rezultă egalităţile

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x'} = \int_{(aam\beta b)} \frac{dz}{z-x''},$$

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x''} = \int_{(aam\beta b)} \frac{dz}{z-x''} - 2i\pi,$$

căci diferenţa între valorile integralei

$$\int \frac{dz}{z-x},$$

luată respectiv după segmentul ab şi după drumul $aam\beta b$ este egală cu valoarea acestei integrale luată după curba închisă $a\beta ma$, descrisă în ordinea literilor [1]).

Scăzând aceste egalităţi una din alta avem

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x'} - \int_a^b \frac{dz}{z-x''} = 2i\pi + \int_{(aam\beta b)} \left(\frac{1}{z-x'} - \frac{1}{z-x''}\right) dz.$$

Făcând x' şi x'' să se apropie infinit de mult între ele, integrala din membrul al doilea nu încetează de a aveà sens şi limita sa este nulă. De unde rezultă

$$\text{(2)} \qquad \lim_{x'=x''} \left[\int_a^b \frac{dz}{z-x'} - \int_a^b \frac{dz}{z-x''}\right] = 2i\pi.$$

Toate punctele segmentului ab sunt aşa dar puncte de discontinuitate ale integralei. Nu este tot aşà în ce priveşte funcţiunea $F(x)$ definită de această integrală. In adevăr, dacă x se apropie de un punct x_0 al segmentului, diferit de punctele extreme a şi b, putem deformà drumul de integraţiune astfel ca el să nu treacă prin x_0. Prin această deformare a drumului valoarea integralei nu se schimbă; de unde se vede că funcţiunea $F(x)$ este continuă în domeniul punctului x_0.

Modificarea ce se introduce în funcţiunea $F(x)$ când x străbate drumul de integraţiune, atinge numai expresiunea sa analitică cu ajutorul integralei; căci aceasta din urmă îşi rupe continuitatea. Astfel, dacă $F(x')$ reprezintă valoarea integralei

$$\int_a^b \frac{dz}{z-x'},$$

---

[1]) Funcţiunea de sub semnul $\int$ fiind uniformă, avem
$(aam\beta b) = (aa) + (am\beta a) + (ab) = (ab) + (am\beta a)$.

când x' se află, de exemplu, pe țărmul stâng al segmentului, valoarea aceleaș integrale într'un punct x'' infinit vecin, situat pe țărmul drept, este

$$(3) \qquad \int_a^b \frac{dz}{z-x''} = \mathrm{F}(x'') - 2i\pi.$$

De unde rezultă că prelungirea funcțiunii $\mathrm{F}(x)$, când x străbate drumul de integrațiune dela țărmul stâng la cel drept, se reprezintă prin expresiunea

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^b \frac{dz}{z-x} + 2i\pi.$$

Ca verificare a acestui rezultat, să observăm că din egalitatea

$$\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(x'') = \int_a^b \frac{dz}{z-x'} - \int_a^b \frac{dz}{z-x''} - 2i\pi,$$

rezultă, în virtutea egalității (2),

$$\lim_{x'=x''} [\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(x'')] = 0$$

398. Raționamentul de mai sus nu se aplică dacă x_0 coincide cu unul din punctele extreme, a sau b. Să examinăm ce devine funcțiunea $\mathrm{F}(x)$, când x plecând dela un punct x' revine la acelaș punct, după ce înconjoară unul din punctele a sau b, de exemplu, punctul a. Putem presupune, fără ca funcțiunea să fie schimbată, că drumul de integrațiune primitiv este înlocuit printr'un drum L având aceleași puncte extreme a, b și trecând infinit aproape de punctul x', astfel ca acest punct să fie exterior ariei formată de cele două drumuri (Fig. 89).

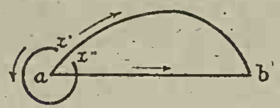

Fig. 90

Să ne închipuim că facem o tăietură în plan, dealungul drumului de integrațiune L, prin care variabila să nu treacă. In tot planul așà limitat, integrala dată este o funcțiune olomorfă și reprezintă aceiaș funcțiune $\mathrm{F}(x)$. De unde rezultă că dacă x'' este un punct infinit vecin cu x', situat pe țărmul opus al tăieturii, vom aveà, în virtutea formulei (2),

$$\mathrm{F}(x'') = \mathrm{F}(x') - 2i\pi,$$

x' fiind presupus situat pe țărmul stâng al tăieturii. Punctul x'

fiind un punct oarecare, putem zice că dacă x descrie o curbă închisă în jurul unuia din punctele a sau b, în sensul pozitiv în raport cu a sau în sensul negativ în raport cu b, funcţiunea $F(x)$ se măreşte cu $-2i\pi$. O rotaţiune în sens invers măreşte funcţiunea cu $+2i\pi$. De unde rezultă că dacă x descrie o curbă închisă în jurul ambelor puncte a şi b, funcţiunea $F(x)$ se reproduce; ceeace trebuià să aibă loc, căci $F(x)$ este olomorfă în planul limitat de o linie oarecare ce uneşte punctele a şi b.

Toate aceste rezultate sunt confirmate, dacă observăm că $F(x)$ coincide cu o ramură a funcţiunii

$$\log(b-x)-\log(a-x).$$

399. Să considerăm integrala mai generală

$$F(x)=\int_a^b \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

$f(x)$ fiind o funcţiune olomorfă în tot planul (x). Procedând ca în exemplul de mai sus, recunoaştem că în două puncte infinit vecine situate de o parte şi de alta a drumului de integraţiune, figurate prin acelaş punct geometric x, valorile integralei difer între ele prin $\pm 2i\pi f(x)$. Punctele extreme a şi b sunt singurele puncte singulare ale funcţiunii $F(x)$, definită de integrală. Când x plecând dela un punct x_0 revine la acelaş punct, după ce înconjoară unul din punctele a sau b, $F(x)$ se reproduce mărit cu $\pm 2i\pi f(x_0)$.

400. Să considerăm, ca exemplu de un caracter mai general, integrala

$$F(x)=\int_a^b \frac{G_1(x,z)}{G(x,z)}\,dz, \tag{1}$$

în care G, G_1 sunt două funcţiuni olomorfe de variabilele independente x şi z, integrala fiind luată după segmentul de dreaptă ce uneşte punctele a şi b (*Hermite*, Cours..., *Goursat*, Cours, t. II). Integrala încetează de a avea sens în punctele x cari satisfac ecuaţiunea

$$G(x,z)=0, \tag{2}$$

z fiind un punct oarecare al segmentului ab. Să presupunem că pe când z descrie segmentul ab (fig. 90), una din rădăcinile x ale ecuaţiunii precedente descrie o linie L (fig. 91) astfel ca ab şi L să se corespundă punct cu punct; ceeace revine a presupune, precum vom vedeà mai târziu [1]), că unui punct z oarecare al segmentului ab corespunde pe L o rădăcină simplă a ecuațiunii și viceversa, într'un punct oarecare x pe L, ecuațiunea are pe segmentul ab o rădăcină simplă z. Fie $z = \zeta$ un punct al segmentului ab și $x = \xi$ punctul corespunzător pe L. Se va vedeà de asemenea că, în ipoteza noastră, rădăcina x care se reduce la ξ pentru $z = \zeta$, este o funcțiune olomorfă de z în domeniul lui ζ și viceversa. De unde rezultă că la două puncte x' și x'' infinit vecine cu ξ, situate de o parte și de alta a liniei L, ecuațiunea (2) face să corespundă două puncte z' și z'' infinit vecine cu ζ, situate de o parte și de alta a segmentului ab. Această propozițiune fiind admisă, să căutăm limita către care tinde diferența

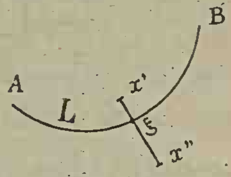

Fig. 91

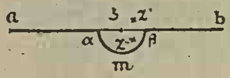

Fig. 92

$$\int_a^b \frac{G_1(x',z)}{G(x',z)}\,dz - \int_a^b \frac{G_1(x'',z)}{G(x'',z)}\,dz,$$

când x' și x'' tind către ξ.

Din punctul ζ ca centru să descriem un semicerc $am\beta$ (fig. 92) mărginit de segmentul ab și conținând în interiorul său punctul z''. Acest punct fiind infinit apropiat de ζ, putem presupune raza cercului destul de mică pentru ca funcțiunea $G(x'', z)$ să nu aibă în interiorul semicercului alt zero decât punctul z'', care, în virtutea ipotezei, este un zero simplu [2]). Să introducem drumul de integrațiune $aam\beta b$. Acest drum echivalează, funcțiunea de sub semnul $\int$ fiind uniformă, cu drumul format de segmentul ab și de curba închisă $am\beta a$ descrisă în sensul pozitiv în raport cu z''. De aci rezultă că avem egalitățile

$$(3) \qquad \int_a^b \frac{G_1(x',z)}{G(x',z)}\,dz = \int_{aam\beta b} \frac{G_1(x',z)}{G(x',z)}\,dz,$$

$$(4) \qquad \int_a^b \frac{G_1(x'',z)}{G(x'',z)}\,dz = \int_{aam\beta b} \frac{G_1(x'',z)}{G(x'',z)}\,dz - 2i\pi \operatorname*{\mathcal{R}ez}_{z'=z''} \frac{G_1(x'',z)}{G(x'',z)}.$$

---

[1]) Funcțiuni implicite.

[2]) In virtutea ipotezei, $G'_\xi(\xi, \zeta) \neq 0$; de unde rezultă că dacă z'' este destul de aproape de ζ, ξ fiind privit constant, $G'_{z''}(\xi, z'') \neq 0$. Privind, în funcțiunea din urmă, z'' const., x'' este cu atât mai aproape de ξ cu cât z'' este mai aproape de ζ; de unde rezultă $G'_{z''}(x'', z'') \neq 0$.

Scăzând aceste egalităţi una din alta şi trecând la limită: $x'=x''=\xi$, $z'=z''=\zeta$, obţinem rezultatul căutat

$$(5) \qquad \lim_{x'=x''=\xi} \left[\int_a^b \frac{G_1(x',z)}{G(x',z)} dz - \int_a^b \frac{G_1(x'',z)}{G(x'',z)} dz \right] = 2i\pi \frac{G_1(\xi,\zeta)}{G'_\zeta(\xi,\zeta)}.$$

Aşa dar trecerea variabilei x dintr'o parte în cealaltă a liniei L are drept efect a mărì integrala propusă cu $\pm 2i\pi \frac{G_1(\xi,\zeta)}{G'_\zeta(\xi,\zeta)}$, ξ fiind punctul pe L prin care trece x şi ζ fiind punctul corespunzător pe segmentul ab. Semnul depinde de sensul în care se face trecerea. Din demonstraţiune rezultă că trebuie să luăm semnul $+$ dacă trecerea se face dela x' la x'', punctul x' fiind situat în aceà parte a liniei L ca punctul z', care îi corespunde, să se găsească pe ţărmul stâng al segmentului ab. Toate punctele liniei L sunt prin urmare puncte de discontinuitate ale integralei propuse. O asemenea integrală admite un număr limitat sau nelimitat de linii de discontinuitate, după cum funcţiunea $G(x, z)$ este în raport cu x o funcţiune raţională sau transcendentă.

Să observăm, precum am mai văzut în primul exemplu, că punctele de discontinuitate ale integralei nu sunt neapărat puncte singulare ale funcţiunii $F(x)$, definită de această integrală. Iń adevăr, dacă x se apropie de un punct ξ al liniei L, diferit de punctele extreme, putem deformà, în mod convenabil drumul de integraţiune şi funcţiunea $F(x)$ va fi reprezintată, în domeniul acestui punct, prin integrala luată după drumul cel nou, a cărei valoare este egală cu aceea a integralei primitive. Astfel, dacă x se apropie de ξ, venind din partea lui x', putem, în virtutea egalităţii (3), reprezintà funcţiunea $F(x)$ prin integrala

$$\int_{(aam\beta b)} \frac{G_1(x,z)}{G(x,z)} dz.$$

Mai putem încă, în acelaş caz, considerà ca *element de prelungire* a lui $F(x)$, când x străbate linia L, expresiunea

$$\int_a^b \frac{G_1(x,z)}{G(x,z)} dz \pm 2i\pi \frac{G_1(\xi,\zeta)}{G'_\zeta(\xi,\zeta)},$$

în care semnul trebuie ales, conform celor zise mai sus.

402. *Funcţiunea $\Gamma(x)$.* — Funcţiunea definită de integrala

$$(1) \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz,$$

luată dealungul semiaxei reale şi pozitive, are o valoare finită dacă x este real şi pozitiv. Această proprietate subsistă şi dacă $x = \xi + i\eta$ este o cantitate complexă, cu condiţiunea $\xi > 0$; căci din egalitatea

$$|z^{x-1} e^{-z}| = z^{\xi-1} e^{-z},$$

rezultă inegalitatea

$$\left|\int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz\right| \leqq \int_0^\infty z^{\xi-1} e^{-z} dz.$$

Proprietatea enunţată fiind adevărată pentru integrala din membrul al doilea, este adevărată şi pentru membrul întâi.

Variabila z fiind presupusă reală şi pozitivă, funcţiunea

$$z^{x-1} e^{-z} = e^{(x-1)\log z - z}$$

este olomorfă în raport cu x în tot planul acestei variabile şi continuă în raport cu z; prin urmare integrala (1) este o funcţiune olomorfă de x în regiunea în care ea este finită, adică în semiplanul $\xi > 0$.

Efectuând integraţiunea prin părţi, obţinem relaţiunea

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

Inlocuind x prin $x + 1$, rezultă

$$\Gamma(x + 2) = (x + 1)\,\Gamma(x + 1) = x(x + 1)\,\Gamma(x);$$

de unde, în general, relaţiunea

$$(2) \quad \Gamma(x + n) = x(x + 1)\,(x + 2) \ldots (x + n - 1)\,\Gamma(x).$$

Membrul întâi al acestei egalităţi este, în virtutea celor zise mai sus, o funcţiune olomorfă de x în toată regiunea în care $\xi > -n$; prin urmare, în această regiune, funcţiunea $\Gamma(x)$ este uniformă neavând alte singularităţi decât polurile $n = 0, -1, -2, \ldots, -n$.

Voim să arătăm că funcţiunea $\Gamma(x)$, definită de integrala (1) în semiplanul $\xi > 0$, este uniformă în tot planul (x), neavând alte singularităţi decât polurile de ordinul întâi $x = -1, -2, \ldots, -\infty$. Această proprietate se pune în evidenţă, plecând dela expresiunea lui $\Gamma(x)$ sub forma dată de *Euler* şi *Gauss* şi care se poate stabili în modul următor.

Să considerăm egalitatea

$$\int_0^1 z^{x-1}\,dz = \frac{1}{x},$$

în care să schimbăm x în $x + 1$ şi să scădem cele două egalităţi una din alta; obţinem egalitatea

$$\int_0^1 z^{x-1}(1-z)dz = \frac{1}{x(x+1)}.$$

In această egalitate să înlocuim x prin $x+1$ şi să scădem cele două egalităţi una din alta; rezultă

$$\int_0^1 z^{x-1}(1-z)^2 dz = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}.$$

Continuând în acelaş mod, obţinem expresiunea generală

$$(3) \qquad \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^n dz = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Să înlocuim z prin $\frac{z}{n}$; egalitatea precedentă devine

$$\int_0^n z^{x-1}\left(1-\frac{z}{n}\right)^n dz = \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

$$= \frac{n^x}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

Făcând n să tindă către infinit, rezultă

$$(4) \quad \int_0^\infty z^{x-1}e^{-z}dz = \Gamma(x) = \frac{1}{x}\lim_{n=\infty}\frac{n^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)},$$

expresiunea lui $\Gamma(x)$ sub forma căutată.

Pentru a ne servi de această expresiune, este necesar să arătăm că membrul al doilea are o limită finită pentru orice valoare a lui x diferită de un număr întreg negativ. Pentru aceasta, să considerăm inversul produsului din membrul al doilea, care se poate scrie

$$\prod_1^\infty\left(1+\frac{x}{n}\right)n^{-x} = \prod_1^x\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x\log n}$$

$$(5) \qquad = \prod_1^\infty\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}e^{x\left(\frac{1}{n}-\log n\right)}\right]$$

$$= e^{x\sum_1^x\left(\frac{1}{n}-\log n\right)}\prod_1^\infty\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} = e^{Cx}\prod_1^\infty\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},$$

C fiind constanta lui Euler[1]). Rămâne să probăm convergenţa produsului din urmă. Avem

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3+\ldots\right)=1+u_n,$$

punând

$$u_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{1.3}\left(\frac{x}{n}\right)^3-\frac{1}{2.4}\left(\frac{x}{n}\right)^4+\frac{1}{3.5}\left(\frac{x}{n}\right)^5-\ldots;$$

de unde

$$\left|u_n\right|<\left|\frac{x}{n}\right|^2\left[1+\left|\frac{x}{n}\right|+\left|\frac{x}{n}\right|^2+\left|\frac{x}{n}\right|^3+\ldots\right].$$

Fie m un număr întreg pozitiv şi $|x|<m$; vom aveà, pentru $n>m$, inegalitatea

$$\left|u_n\right|<\left|\frac{x}{n}\right|^2\frac{1}{1-\left|\frac{x}{n}\right|}=\left|\frac{x}{n}\right|^2(1+\varepsilon_n),$$

în care ε_n tinde către zero când n tinde către infinit. Seria Σu_n este aşà dar absolut convergentă pentru toate valorile $|x|<m$, prin urmare şi produsul (5). Însă m poate fi presupus oricât de mare voim; conchidem că produsul considerat este absolut şi uniform convergent pentru orice valoare finită a lui x.

Egalitatea (4) se poate aşà dar scrie sub forma

$$\text{(6)}\qquad \frac{1}{\Gamma(x)}=e^{Cx}\,x\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},$$

care arată că funcţiunea

$$\frac{1}{\Gamma(x)}$$

este o funcţiune întreagă, având ca zeruri numerele întregi $x=-n$, $(x=-1,-2,\ldots,-\infty)$. De unde rezultă că $\Gamma(x)$ este o funcţiune uniformă în tot planul (x), neavând alte singularităţi decât polurile $x=-n$.

q. e. d.

Observare. Funcţiunea $\Gamma(x)$ nu se anulează în nici un punct al planului, căci punctele în cari această funcţiune s'ar anula, ar fi poluri ale funcţiunei inverse $\frac{1}{\Gamma(x)}$; ceeace este absurd.

---

[1]) $C=0{,}5772\ldots$

CAPITOLUL XXI.

FUNCŢIUNI INTREGI.

I. — EXPRESIUNEA FUNCŢIUNILOR INTREGI SUB FORMĂ DE PRODUSE DE FACTORI.

403. *Teoremă. Fie*

$$P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots$$

un şir nelimitat de serii întregi convergente într'un cerc comun $|x| = R$; *dacă seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

este absolut şi uniform convergentă în cercul (R), *produsul*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + P_n(x)\right]$$

se poate pune sub forma unei serii întregi, convergentă în acest cerc.

In adevăr, există un număr întreg m astfel că pentru $n \geqslant m$, avem $|P_n(x)| < 1$ în interiorul cercului (R) şi pentru aceste valori ale lui n, putem scrie,

$$1 + P_n(x) = e^{\log(1+P_n)} = e^{P_n - \frac{1}{2}P_n^2 + \frac{1}{3}P_n^3 - \ldots};$$

prin urmare

$$\prod_{n=m+1}^{\infty}(1 + P_n) = e^{\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}\left(P_n - \frac{1}{2}P_n^2 + \frac{1}{3}P_n^3 - \ldots\right)}.$$

Insă seria dela exponent se poate exprimà printr'o serie întreagă $P(x)$ convergentă în cercul (R) (§ 120, IV); prin urmare produsul

$$\prod_{n=m+1}^{\infty}(1 + P_n) = e^{P(x)}$$

se exprimă printr'o serie analoagă convergentă în acelaş cerc. De altă parte, produsul

$$\prod_{1}^{m}(1 + P_n),$$

a unui număr limitat de factori, se exprimă evident printr'o serie întreagă convergentă în (R); de unde rezultă teorema de demonstrat.

Corolar. Produsul $\prod_{1}^{\infty} [1 + P_n(x)]$ defineşte o funcţiune analitică.

404. *Construcţiunea unei funcţiuni întregi având zeruri date.* Există funcţiuni întregi cari nu se anulează pentru nici o valoare a variabilei, de exemplu funcţiunea e^x şi, într'un mod mai general, funcţiunile de forma $e^{g(x)}$, $g(x)$ fiind o funcţiune întreagă.

Viceversa, orice funcţiune întreagă $f(x)$, care n'are nici un zero în tot planul, se poate pune sub forma

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

In adevăr, dacă $f(x)$ este o funcţiune întreagă care nu se anulează pentru nici o valoare finită a lui x, funcţiunea

$$\log f(x)$$

este olomorfă în tot planul (x), adică este o funcţiune întreagă $g(x)$:

$$\log f(x) = g(x);$$

de unde

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

Consecinţă. Raportul a două funcţiuni întregi $f(x)$, $F(x)$ cari admit aceleaşi zeruri, fiecare de acelaş ordin de multiplicitate, satisfac egalitatea

$$\frac{f(x)}{F(x)} = e^{g(x)};$$

căci acest raport este o funcţiune întreagă neavând nici un zero în tot planul.

405. Să construim acum o funcţiune întreagă având un număr nelimitat de zeruri date

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

Pentru ca aceste puncte să poată fi zerurile unei funcţiuni întregi, este necesar ca ele să fie izolate, neavând alt punct limită decât punctul infinit. Aşa dar, presupunând zerurile (1) dispuse în ordinea modulelor crescânde

$$(2) \qquad |a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots \leqq |a_n| \leqq \ldots,$$

vom aveà

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty.$$

Dacă printre aceste zeruri sunt mai multe de acelaş modul, ordinea lor va fi oarecare.

Să considerăm cazul cel mai simplu, când seria

$$(3) \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{a_n}, \quad (a_1 \neq o)$$

formată cu inversele cantităţilor (1) este absolut convergentă. In acest caz produsul

$$(4) \qquad \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

este absolut şi uniform convergent în toată întinderea planului şi reprezintă o funcţiune analitică întreagă. Insă un produs absolut şi uniform convergent nu se anulează decât împreună cu unul din factorii săi; prin urmare produsul (4) reprezintă o funcţiune întreagă care admite zerurile date şi numai aceste zeruri. Expresiunea cea mai generală a unei funcţiuni întregi care pe lângă zerurile (1) admite origina ca zero de ordinul m, este

$$e^{g(x)}\, x^m \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{a_n}\right),$$

$g(x)$ fiind o funcţiune întreagă oarecare.

Exemplu: O funcţiune întreagă ale carei zeruri de ordinul întâi sunt punctele $x = 0, 1^2, 2^2, \ldots n^2, \ldots$ este reprezintată prin produsul

$$e^{g(x)}\, x \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{n^2}\right).$$

406. *Teorema lui Weierstrass.* Weierstrass a dat soluţiunea problemei care ne ocupă în cazul general, când $\Sigma \frac{1}{|a_n|}$ este divergentă.

Să stabilim mai întâiu următoarea lemă:

Lemă. Fiind dat şirul nelimitat (1) *dispus în ordinea* (2), *cu condiţiunile* $|a_1| > 0$, *şi* $\lim |a_n| = \infty$, *se poate totdeauna găsì un şir de numere întregi pozitive nu descrescânde*

$$(5) \qquad \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n, \ldots$$

astfel ca seria

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{x}{a_n}\right|^{\varrho_n+1}$$

să fie convergentă pentru orice valoare finită a lui x.

Este de ajuns, fără a fi necesar, a luà, cum face Weierstrass

$$\varrho_n = n - 1,$$

căci reprezintând prin u_n termenul general al seriei (6), avem

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \left|\frac{x}{a_n}\right| = o,$$

oricare ar fi valoarea finită a lui x. Să stabilim acum teorema lui Weierstrass.

Numerele ϱ_n fiind astfel determinate, să considerăm expresiunea

$$\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\frac{x}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{\varrho_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{\varrho_n}},$$

care se anulează în singurul punct a_n și nu are alt punct singular decât punctul ∞. O asemenea expresiune se numește *factor prim.*

Punând, pentru prescurtare,

$$(7)\qquad g_n(x)=\frac{x}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{\varrho_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{\varrho_n},$$

să considerăm produsul

$$(8)\qquad \Pi(x)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{g_n(x)}.$$

Voim să demonstrăm că acest produs este o funcțiune întreagă de x.

Fie R un număr pozitiv oricât de mare voim și a_{m+1} cea dintâi cantitate din șirul (1) pentru care

$$|a_{m+1}|>\mathrm{R}.$$

Să presupunem punctul x situat în interiorul cercului $|x|=\mathrm{R}$; vom avea, pentru $n\geqslant m+1$, $\left|\frac{x}{a_n}\right|<1$ și prin urmare, pentru astfel de valori ale lui n, putem scrie

$$\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{g_n(x)}=e^{\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right)+g_n(x)}$$

$$=e^{-\left[\frac{1}{\varrho_n+1}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{\varrho_n+1}+\frac{1}{\varrho_n+2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{\varrho_n+2}+\ldots\right]}$$

$$\prod_{m+1}^\infty\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{g_n(x)}=e^{\sum\limits_{m+1}^{\infty}\left[\frac{1}{\varrho_n+1}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{\varrho_n+1}+\frac{1}{\varrho_n+2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{\varrho_n+2}+\ldots\right]}$$

Prin ipoteză, seria $\Sigma\left(\frac{x}{a_n}\right)^{\varrho_n+1}$ este absolut și uniform convergentă în cercul (R), prin urmare seria dela exponent din membrul al doilea se reduce la o serie întreagă $\mathrm{P}_m(x)$ convergentă în acest cerc. Avem așa dar, în interiorul cercului (R), expresiunea

$$(9)\qquad \Pi(x)=e^{\mathrm{P}_m(x)}\prod_1^m\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{g_n(x)}.$$

Fiecare factor prim putând fi înlocuit printr'o serie întreagă convergentă în tot planul, produsul celor dintâiu m factori primi poate fi reprezintat printr'o serie întreagă convergentă în tot planul și $H(x)$ printr'o serie întreagă convergentă în interiorul cercului (R). Această serie se anulează în interiorul cercului în punctele $a_1, a_2, \ldots a_m$ și numai în aceste puncte. Insă R poate fi presupus oricât de mare voim; dacă dar facem R să crească peste orice limită, ceeace revine a face m să tindă către infinit și observăm că $|P_m(x)|$ tinde în acelaș timp către zero [1]), conchidem că produsul nelimitat

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)}$$

poate fi reprezintat printr'o serie întreagă convergentă în tot planul; prin urmare acest produs reprezintă o funcțiune întreagă, care se anulează în punctele date de șirul (1) și numai în aceste puncte.

Dacă printre zerurile date sunt mai multe egale între dânsele, de exemplu, dacă μ zeruri sunt egale cu a_ν, factorii primi corespunzători sunt egali și produsul lor va fi

$$\left[\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{g_\nu(x)}\right]^\mu.$$

S'a presupus că origina nu se află printre punctele șirului (1). Dacă $x = 0$ este un zero de ordinul m de multiplicitate, vom introduce factorul x^m și produsul

$$x^m \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)},$$

în care fiecare factor prim este repetat de atâtea ori câte unități sunt în ordinul său de multiplicitate, satisface condițiunile cerute.

In fine, expresiunea cea mai generală a unei funcțiuni întregi

---

[1]) Punând $\left|\frac{x}{a_n}\right| = U_n < 1$, avem

$$|P_m(x)| < \Sigma\left(U_n^{\varrho_n+1} + U_n^{\varrho_n+2} + \ldots\right) < \Sigma \frac{U_n^{\varrho_n+1}}{1 - U_n},$$

Fie λ o limită superioară a fracțiunilor $\frac{1}{1 - U_n}$, $n > m$; vom avea

$$|P_m(x)| < \lambda \sum_{m+1}^\infty U_n^{\varrho_n+1}.$$

Seria $\Sigma U_n^{\varrho_n+1}$ fiind convergentă, rezultă că pentru m, destul de mare, avem $|P_m(x)| < \varepsilon$, oricât de mic ar fi ε.

$f(x)$ care admite aceleași zeruri este

$$(10) \qquad f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)},$$

$g(x)$ fiind o funcțiune întreagă arbitrară.

Astfel dar, fiind dat șirul nelimitat de puncte (1), cari nu sunt supuse la altă condițiune decât a fi izolate, (adică nu există punct la distanță finită în domeniul căruia să se găsească o infinitate de puncte ale șirului), *este tot deauna posibil a construi o funcțiune întreagă care să admită ca zeruri aceste puncte* și care să fie reprezintată prin expresiunea (10). In acest rezultat consistă teorema lui Weierstrass.

407. *Observare.* Funcțiunile exponențiale cari figurează în factorii primi ai produsului nu sunt determinate într'un mod unic. Aceasta rezultă din faptul că gradele polinoamelor

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{\varrho_n} \frac{x^k}{k a_n^k}$$

nu sunt supuse la altă condițiune decât ca seria

$$\sum \left| \frac{x}{a_n} \right|^{\varrho_n}$$

să fie convergentă. Presupunând că am determinat un șir de numere ϱ_n cari să îndeplinească condițiunea precedentă, le putem mări cu numere întregi arbitrare, fără ca produsul nelimitat să înceteze de a fi absolut convergent. Pentru ca valoarea funcțiunii $f(x)$ să nu se schimbe, este evident necesar ca termenii adăugați polinoamelor $g_n(x)$ să-i scădem din exponentul $g(x)$ al factorului exponențial $e^{g(x)}$.

Astfel, reprezintând prin ϱ'_n un număr întreg mai mare ca ϱ_n și prin $g'_n(x)$ funcțiunea corespunzătoare (7), avem

$$g_n(x) = g'_n(x) - \sum_{k=\varrho_n+1}^{\varrho'_n} \frac{x^k}{k a_n^k};$$

prin urmare

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g'_n(x)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\sum_{k=\varrho_n+1}^{\varrho'_n} \frac{x^k}{k a_n^k}}$$

$$= e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\varrho_n+1}^{\varrho'_n} \frac{x^k}{k a_n^k}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g'_n(x)}.$$

Formula (10) devine așa dar

$$(10 \text{ bis}) \qquad f(x) = x^m e^{g(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k a_n^k}^{\varrho'_n} \frac{x^k}{k a_n^k}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g'_n(x)}.$$

408. Se poate întâmplà ca să existe un număr întreg p astfel ca seria

$$(11)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

să fie convergentă. In acest caz seria

$$\Sigma \left| \frac{x}{a_n} \right|^{p+1}$$

este convergentă şi prin urmare este de ajuns a luà toţi exponenţii ϱ_n egali cu p; vom aveà atunci

$$(12)\qquad g_n(x) = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p.$$

Dacă p este cel mai mic număr întreg pentru care seria (11) este convergentă, se zice că produsul

$$\prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)}$$

este de *rangul p*.

In cazul când seria (11) nu este convergentă pentru nici o valoare finită a lui p [1]) şi când prin urmare gradele ϱ_n ale polinoamelor g_n cresc peste orice limită, se zice că produsul corespunzător este de un *rang infinit*.

Dacă produsul

$$\prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)}$$

este de un rang limitat, există un număr ϱ satisfăcând dubla inegalitate

$$p \leqq \varrho \leqq p+1,$$

pentru care seria $\Sigma \dfrac{1}{|a_n|^{\varrho-\varepsilon}}$ este divergentă, pe când seria $\Sigma \dfrac{1}{|a_n|^{\varrho+\varepsilon}}$ este convergentă, oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε. In privinţa seriei $\Sigma \dfrac{1}{a_n{}^{\varrho}}$ nu se poate afirma nimic, într'un mod general, seria poate fi convergentă sau divergentă [2]). Dacă $\varrho = p$, seria este divergentă, dacă $\varrho = p + 1$, seria este convergentă. Numărul ϱ astfel

---

[1]) De exemplu: seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\log n)^m}$ este divergentă oricât de mare ar fi exponentul m. In adevăr, comparând această serie cu seria armonică $\Sigma \dfrac{1}{n}$, raportul a doi termeni corespunzători este $\dfrac{(\log n)^m}{n} = \left(\dfrac{\log n}{n^{\frac{1}{m}}}\right)^m$, a cărui limită, pentru $n = \infty$, este zero. Prin urmare termenii seriei considerate sunt, începând dela un rang destul de depărtat, infinit de mari în raport cu cei corespunzători ai seriei armonice.

[2]) Analogie cu cercul de convergenţă al unei serii întregi.

definit se numește *exponentul de convergență* [1]), al șirului (a_n) sau și al funcțiunii corespunzătoare $\Pi(x)$.

409. Fie $F(x)$ o funcțiune întreagă dată și

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

zerurile ei, dispuse în ordinea modulelor crescânde, fiecare fiind repetat de atâtea ori câte unități sunt în ordinul său de multiplicitate. Teorema lui Weierstrass ne învață să construim un produs de factori primi, $\Pi(x)$, având aceste puncte ca zeruri. Expresiunea lui $F(x)$ este

$$(13) \qquad F(x) = e^{g(x)}\,\Pi(x),$$

$g(x)$ fiind o funcțiune întreagă care trebuie determinată pentru fiecare funcțiune dată $F(x)$.

Ne vom mărgini la acele funcțiuni $F(x)$ al căror rang (rangul produsului $\Pi(x)$) este un număr limitat și funcțiunea $g(x)$ un polinom de x. Funcțiunile obișnuite ce se consideră în analiză intră în această categorie.

Fie p rangul funcțiunii și q gradul polinomului $g(x)$; cel mai mare dintre aceste două numere se numește *genul* funcțiunii $F(x)$ [2]). In cazul când exponentul $g(x)$ se reduce la o constantă, funcțiunea se zice *simplă* (*canonique, primitive*).

410. Să considerăm produsul

$$(14) \quad \Pi(x) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p},$$

de rangul p. Luând derivata logaritmică [3]), avem

$$\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{x-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \ldots + \frac{x^{p-1}}{a_n^p}\right],$$

---

[1]) *Ordre réel* (Borel). *Grenzexponent.*

[2]) *Genre*, după Laguerre.

[3]) Această derivată se obține după aceeaș regulă ca și cum numărul factorilor ar fi limitat. In adevăr, fie ν un număr întreg astfel încât, pentru $n \geqslant \nu$, să avem $\left|\frac{x}{a_n}\right| < 1$; vom puteà scrie

$$\Pi(x) = \prod_1^{\nu-1} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)}\, e^{\sum_\nu^{\infty} P_n(x)},$$

unde $P_n(x) = \log\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) + g_n(x)$ este o serie întreagă de x, convergentă în interiorul cercului $|x| = |a_\nu|$ și $\sum_\nu^{\infty} P_n(x)$ absolut și uniform convergentă în acelaș cerc. De unde derivata logaritmică:

$$\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = \sum_1^{\nu-1} \frac{d}{dx} \log\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)} + \sum_\nu^{\infty} P'_n(x) = \sum_1^{\infty} \frac{d}{dx} \log\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)}.$$

sau

$$(15)\qquad \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = x^p \sum_1^\infty \frac{1}{a_n^p(x-a_n)}.$$

Seria din membrul al doilea este absolut şi uniform convergentă în toată întinderea planului, exceptând punctele a_n. In adevăr, fie x un punct oarecare diferit de punctele a_n şi n destul de mare pentru ca $|x| < |a_n|$; putem scrie

$$\frac{1}{|a_n^p(x-a_n)|} = \frac{1}{|a_n^{p+1}|}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{a_n}\right|} < \frac{1}{|a_n^{p+1}|}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_n}\right|}.$$

Propoziţiunea este justificată în virtutea convergenţii seriei

$$\Sigma\frac{1}{|a_n^{p+1}|}.$$

411. Din propoziţiunea precedentă rezultă că funcţiunea

$$\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)}$$

este continuă şi rămâne finită dealungul unui cerc (r) descris din origină ca centru şi care nu trece prin nici unul din punctele a_n. Există o infinitate de valori r oricât de mari voim, cari împlinesc această condiţiune. In adevăr, punctele a_n fiind puncte izolate, numerele $r_n = |a_n|$, mai mici ca un număr pozitiv arbitrar R, sunt în număr limitat. Figurând pe axa reală aceste numere, obţinem un şir de puncte izolate, al căror punct limită unic este punctul ∞. Orice număr pozitiv r, care nu aparţine acestui şir şi care, prin urmare, poate fi mai mare ca orice număr dat, satisface condiţiunea cerută. In coroana limitată de două cercuri concentrice, având centrele în origină şi trecând prin două din aceste puncte consecutive, $\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)}$ este funcţiune olomorfă.

Fie acum $f(x)$ o funcţiune întreagă pusă sub forma

$$f(x) = e^{g(x)}\, x^m\, \Pi(x),$$

avem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + \frac{m}{x} + \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)}.$$

De unde rezultă că funcţiunea $\frac{f'(x)}{f(x)}$ este olomorfă în aceiaş coroană ca funcţiunea $\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)}$.

412. *Teoremă. Dacă seria*

$$(1)\qquad \sum_1^\infty \frac{1}{|a_n|^\lambda},\qquad \lambda > 0$$

este convergentă, suma

$$(2) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)}$$

tinde către zero când x tinde către infinit fără a trece prin punctele a_n.

In adevăr, în virtutea ipotezei, seria (2) este absolut și uniform convergentă în tot planul (x) din care excludem punctele a_n. Să descompunem această serie în două părți

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)} = \sum_{1}^{m} \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\lambda-1}(x-a_n)}$$

și să presupunem numărul întreg pozitiv m destul de mare pentru ca

$$\sum \frac{1}{|a_n^{\lambda-1}(x-a_n)|} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$\varepsilon > 0$ arbitrar de mic. De altă parte, există un număr pozitiv R astfel ca pentru $|x| > \mathrm{R}$, punctele a_n fiind excluse, să avem

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{|a_n^{\lambda-1}(x-a_n)|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De unde rezultă că pentru $|x| > \mathrm{R}$ și R destul de mare, avem

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n^{\lambda-1}(x-a_n)|} < \varepsilon.$$

Corolar. Fie $\Pi(x)$ un produs de factori primi de rangul p, adică p este cel mai mic număr întreg pozitiv pentru care seria $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ este convergentă; avem (§ 410)

$$\frac{\Pi'(x)}{x^p \Pi(x)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a_n^p(x-a_n)}.$$

Aplicând teorema precedentă pentru $\lambda = p+1$, conchidem că există un număr pozitiv R destul de mare, astfel că pentru $|x| > \mathrm{R}$, avem

$$\left| \frac{\Pi'(x)}{x^p \Pi(x)} \right| < \varepsilon,$$

oricât de mic ar fi $\varepsilon > 0$.

413. *Teoremă. Dacă*

$$(1) \qquad f(x) = e^{g(x)}\, x^m\, \Pi(x)$$

este o funcțiune întreagă de genul p, expresiunea

$$(2) \qquad \frac{f'(x)}{x^p f(x)}$$

tinde către zero când x tinde către ∞, fără a trece prin zerurile funcțiunii $f(x)$.

In adevăr, din (1) deducem

$$(3) \qquad \frac{f'(x)}{x^p f(x)} = \frac{g'(x)}{x^p} + \frac{m}{x^{p+1}} + \frac{\Pi'(x)}{x^p \Pi(x)}.$$

Funcțiunea $f(x)$ fiind de genul p, rangul său și gradul polinomului $g(x)$ nu trec peste numărul p, însă unul cel puțin din aceste două numere este egal cu p. Din expresiunea (3) rezultă, ținând seamă de corolarul teoremei precedente, că toți termenii membrului al doilea tind către zero când x tinde către infinit, fără a trece prin punctele a_n. De unde conchidem teorema enunțată.

414. *Teoremă. Dacă seria*

$$\Sigma \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

este convergentă și expresiunea (2) *tinde către zero când x tinde către infinit, fără a trece prin zerurile funcțiunii $f(x)$, și dacă p este cel mai mic număr întreg $\geqq 0$ pentru care cele două condițiuni sunt împlinite, funcțiunea $f(x)$ este de genul p.*

In adevăr, în virtutea acestor condițiuni, membrul întâi precum și cei doi din urmă termeni din membrul al doilea al egalității (3) tind către zero când x tinde către ∞; prin urmare termenul

$$\left| \frac{g'(x)}{x^p} \right|$$

tinde în acelaş timp către zero. De unde rezultă că numărătorul $g'(x)$ este un polinom de un grad $\leqq p - 1$ și prin urmare $g(x)$ este un polinom al cărui grad este cel mult egal cu p. Ceeace demonstrează teorema.

415. Fiind dată o funcțiune întreagă $f(x)$, dacă cunoaștem zerurile sale precum și rangul său, formăm, precum am văzut, produsul $\Pi(x)$ al factorilor săi primi. Pentru a obține expresiunea completă a funcțiunii sub formă de produs, avem nevoie de a cunoaște factorul exponențial $e^{g(x)}$, adică funcțiunea $g(x)$. Dacă această funcțiune este un polinom este ușor să-l determinăm. Pentru aceasta, fie p cel mai mic număr întreg $\geqq 0$, mai mare sau cel puțin egal cu rangul funcțiunii, pentru care avem

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{x^p f(x)} = 0;$$

acest număr este în virtutea teoremei precedente, genul funcțiunii $f(x)$ și prin urmare gradul polinomului $g(x)$ este cel mult egal cu p.

Punem

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_p x^p$$

și aplicând egalitatea

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + \frac{m}{x} + \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)},$$

desvoltăm ambele membre în domeniul punctului $x = 0$; de unde prin identificare, deducem valorile coeficienților $b_1, b_2, \dots b_p$. Făcând apoi $x = 0$ în egalitatea

$$\frac{f(x)}{x^m} = e^{g(x)}\,\Pi(x),$$

obținem valoarea coeficientului e^{b_0}.

416. *Aplicațiuni.* Fie funcțiunea

$$f(x) = \sin \pi x,$$

ale cărei zeruri sunt numerele $x = n$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Seria $\Sigma \frac{1}{n^2}$ fiind convergentă, produsul factorilor primi corespunzători este de rangul întâi și avem

$$\Pi(x) = x\,\Pi'\left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}},$$

Π' reprezintând produsul factorilor corespunzători la toate valorile întregi pozitive și negative ale lui n, exceptând $n = 0$. Prin urmare avem

$$(1) \qquad \sin \pi x = e^{g(x)}\, x\Pi'\left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}.$$

Luând derivata logaritmică a ambelor membre, avem

$$(2) \qquad \pi \cot \pi x = g'(x) + \frac{1}{x} + \Sigma'\left(\frac{1}{x - n} + \frac{1}{n}\right).$$

Se recunoaște lesne că $\frac{\cot \pi x}{x}$ tinde către zero când x tinde către infinit, fără a deveni egal cu un număr întreg. Așa dar $g(x)$ este un polinom al cărui grad nu trece peste 1. Fie

$$g(x) = ax + b.$$

Substituind în (2) această valoare și identificând ambele membre, găsim $a = 0$.[1]) De altă parte făcând $x = 0$ în egalitatea (1) după ce am împărțit ambele membre cu x, obținem $e^{b_0} = \pi$. De unde expresiunea lui $\sin \pi x$, descompus în factori primi,

$$(3) \qquad \sin \pi x = \pi x \, \Pi' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}.$$

Să notăm expresiunea

$$(4) \qquad \pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \Sigma' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right),$$

care rezultă din egalitatea (2).

417. *Observare asupra produsului* $\Pi' \left(1 - \frac{x}{n}\right)$. Acest produs este semi convergent și valoarea sa depinde de legea după care se succed factorii. In adevăr, să grupăm factorii în modul următor: fiecare grup să fie format din k factori consecutivi corespunzători la valori pozitive și h factori consecutivi corespunzători la valori negative ale lui n. Așâ, de exemplu, grupul de rangul m va fi

$$\left[1 - \frac{x}{(m-1)k+1}\right] \cdots \left(1 - \frac{x}{mk}\right) \left[1 + \frac{x}{(m-1)h+1}\right] \cdots \left(1 + \frac{x}{mh}\right);$$

Să reprezintăm prin Π_m produsul celor dintâi m grupuri de factori ai produsului $\Pi' \left(1 - \frac{x}{n}\right)$ și fie

$$\mathrm{P} = \Pi' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}.$$

Luând în acest din urmă produs factorii cari corespund la aceleași valori ale lui n, cari determină Π_m, obținem un produs egal cu

$$e^{x(\mathrm{S}_{mk} - \mathrm{S}_{mh})} \, \Pi_m,$$

în care scriem

$$\mathrm{S}_i = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{i}.$$

---

[1]) Această valoare se poate obține imediat, observând că grupând doi câte doi factorii cari corespund la valori ale lui n egale și de semne contrarii, avem

$$\Pi' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Expresiunea $\frac{\sin \pi x}{x}$ și produsul considerat rămânând neschimbate când înlocuim x prin $-x$, rezultă că funcțiunea e^{ax+b} nu se schimbă în acelaș timp: de unde $a = 0$.

Produsul P fiind absolut convergent, putem scrie, pentru m destul de mare,

$$(5)\qquad e^{x(S_{mk}-S_{mh})}\,\Pi_m = P + \varepsilon_m,\qquad \lim_{m=\infty}\varepsilon_m = 0.$$

Insă

$$\lim_{m=\infty}(S_{mk}-S_{mh}) = \lim_{m=\infty}\log\frac{mk}{mh} = \log\frac{k}{h};$$

prin urmare, făcând m să tindă către infinit, egalitatea (5) devine

$$\lim_{m=\infty}\Pi_m = P\left(\frac{h}{k}\right)^x.$$

Așà dar $\lim\limits_{m=\infty}\Pi_m$ depinde de raportul $\frac{h}{k}$; valoarea sa nu este egală cu P decât dacă $h = k$. In acest caz putem scrie

$$(6)\qquad \sin\pi x = \pi x \lim_{m=\infty}\prod_{-m}^{+m}\left(1-\frac{x}{n}\right),\quad n\neq 0.$$

418. *Aplicațiuni.* I. Expresiunea precedentă pune în evidență periodicitateà funcțiunii $\sin x$. In adevăr, dacă în polinomul

$$\varphi_m(x) = \pi x\prod_{-m}^{+m}\left(1-\frac{x}{n}\right),\quad n\neq 0,$$

care se poate pune sub forma

$$\varphi_m(x) = Ax(1-x)\,(2-x)\ldots(m-x)\times(1+x)\,(2+x)\ldots(m+x),$$

înlocuim x prin $x+1$, avem

$$\varphi_m(x+1) = -\varphi_m(x)\,\frac{m+1+x}{m-x}.$$

De unde, făcând $m=\infty$,

$$\sin\pi(x+1) = -\sin\pi x,$$

sau, punând $\pi x = z$,

$$\sin(z+\pi) = -\sin z;$$

prin urmare

$$\sin(z+2\pi) = \sin z.$$

II. Făcând în (6) $x = \frac{1}{2}$, obținem

$$(7)\qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{m=\infty}\prod_{-m}^{+m}\frac{2n}{2n-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}\cdots,$$

formula cunoscută a lui *Wallis*.

419. Să înlocuim în egalitatea (3) x prin $\frac{x-a}{\omega}$, a și ω fiind

două constante arbitrare, și a diferit de un multiple al lui ω; vom avea

$$(8)\qquad \sin\frac{\pi(x-a)}{\omega}=\frac{\pi(x-a)}{\omega}\Pi'\left(1-\frac{x-a}{\omega}\right)e^{\frac{x-a}{n\omega}}.$$

De altă parte, aplicând direct teorema lui Weierstrass funcțiunii $\sin\frac{\pi(x-a)}{\omega}$, ale cărei zeruri sunt date de expresiunea

$$a+n\omega,$$

în care n primește toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$ și ținând seamă că această funcțiune este de rangul întâi și de genul întâi, avem

$$(9)\qquad \sin\frac{\pi(x-a)}{\omega}=e^{\alpha x+\beta}\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{a+n\omega}\right)e^{\frac{x}{a+n\omega}}.$$

Luând derivata logaritmică a ambelor membre și făcând $x=0$, obținem

$$\alpha=-\frac{\pi}{\omega}\cot\frac{\pi a}{\omega}.$$

Făcând în (9) $x=0$, rezultă

$$e^{\beta}=-\sin\frac{\pi a}{\omega}.$$

Prin urmare

$$(10)\qquad \sin\frac{\pi(x-a)}{\omega}=-\sin\frac{\pi a}{\omega}e^{-\frac{\pi x}{\omega}\cot\frac{\pi a}{\omega}}\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{a+n\omega}\right)e^{\frac{x}{a+n\omega}}.$$

Formulele (8) și (10) diferite între ele se pot reduce una la alta. Plecând dela formula (8), avem

$$1-\frac{x-a}{n\omega}=\left(1+\frac{a}{n\omega}\right)\left(1-\frac{x}{a+n\omega}\right),$$

$$\left(1-\frac{x-a}{n\omega}\right)e^{\frac{x-a}{n\omega}}=\left(1+\frac{a}{n\omega}\right)e^{-\frac{a}{n\omega}}\left(1-\frac{x}{a+n\omega}\right)e^{\frac{x}{n\omega}};$$

de unde

$$\Pi'\left(1-\frac{x-a}{n\omega}\right)e^{\frac{x-a}{n\omega}}=\Pi'\left(1+\frac{a}{n\omega}\right)e^{-\frac{a}{n\omega}}.\ \Pi'\left(1-\frac{x}{a+n\omega}\right)e^{\frac{x}{n\omega}},$$

descompunere legitimă, căci produsele din membrul al doilea sunt absolut convergente. Însă primul produs din membrul al doilea este egal cu

$$\frac{\omega}{\pi a}\sin\frac{\pi a}{\omega};$$

prin urmare

$$\sin\frac{\pi(x-a)}{\omega}=-\sin\frac{\pi a}{\omega}\left(1-\frac{x}{a}\right)\Pi'\left(1-\frac{x}{a+n\omega}\right)e^{\frac{x}{n\omega}},$$

sau, ţinând seamă de identitatea

$$\frac{x}{n\omega}=\frac{x}{a+n\omega}+\frac{ax}{n\omega(a+n\omega)},$$

şi făcând să intre factorul $\left(1-\frac{x}{a}\right)$ sub simbolul Π, avem

(11)
$$\sin\frac{\pi(x-a)}{\omega}=-\sin\frac{\pi a}{\omega}\prod_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(1-\frac{x}{a+n\omega}\right)e^{\frac{x}{a+n\omega}}\right]e^{-\frac{x}{a}}\,\Pi' e^{\frac{ax}{n\omega(a+n\omega)}}.$$

Insă

$$e^{-\frac{x}{a}}\,\Pi' e^{\frac{ax}{n\omega(a+n\omega)}}=e^{x\left[-\frac{1}{a}+\Sigma'\left(\frac{1}{n\omega}-\frac{1}{a+n\omega}\right)\right]},$$

iar parenteza de la exponent este egală cu $-\frac{\pi}{\omega}\cot\frac{\pi a}{\omega}$, precum se recunoaşte făcând în formula (4) $x=-\frac{a}{\omega}$. De unde rezultă formula (10).

420. Făcând în (10) $\omega=1$, $a=-\frac{1}{2}$, obţinem

(12) $$\cos\pi x=\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n-\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{x}{n-\frac{1}{2}}}.$$

Acest rezultat se mai poate deduce din formula

$$\cos\pi x=\frac{\sin 2\pi x}{2\sin\pi x}.$$

In adevăr, avem

$$\sin 2\pi x=2\pi x\,\Pi'\left(1-\frac{2x}{n}\right)e^{\frac{2x}{n}};$$

sau, reunind de o parte factorii în cari n este par şi de alta pe aceia în cari n este impar, putem scrie

$$\sin 2\pi x=2\pi x\,\Pi'\left(1-\frac{2x}{2n}\right)e^{\frac{2x}{2n}}\,\Pi\left(1-\frac{2x}{2n-1}\right)e^{\frac{2x}{2n-1}}$$

$$=2\sin\pi x\,\Pi\left(1-\frac{x}{n-\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{x}{n-\frac{1}{2}}}.$$

De unde conchidem formula (12).

Luând derivata logaritmică a ambelor membre din (12), obţinem

$$(13) \qquad -\pi \operatorname{tg} \pi x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{x-(n-\frac{1}{2})} + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right].$$

421. *Relaţiune între funcţiunea $\Gamma(x)$ şi $\sin \pi x$.* Am găsit, pentru funcţiunea întreagă $\frac{1}{\Gamma(x)}$, expresiunea ((5). § 402)

$$(1) \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx}\, x \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

Zerurile acestei funcţiuni sunt zeruri ale funcţiunei $\sin \pi x$, care se mai anulează pentru aceleaşi numere cu semnele schimbate. Aceste din urmă zeruri anulează funcţiunea $\frac{1}{\Gamma(1-x)}$. Să formăm produsul corespunzător acestei funcţiuni, înlocuind în egalitatea (1) x prin $1-x$; obţinem

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = e^{C(1-x)}(1-x)\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{1-x}{n}\right) e^{\frac{x-1}{n}}$$

$$(2) \qquad = e^{C(1-x)}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}\,(1-x)\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n+1}\right) e^{\frac{x}{n}}$$

$$= e^{C(1-x)}\prod\left(1+\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}};$$

Însă, făcând în egalitatea (1) $x=1$, avem

$$e^{C}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1;$$

prin urmare, egalitatea (2) devine

$$(3) \qquad \frac{1}{\Gamma(x-1)} = e^{-Cx}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}.$$

Din egalităţile (1) şi (3) rezultă relaţiunea căutată

$$(4) \qquad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod{}'\left(1-\frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} = \frac{\sin \pi x}{\pi},$$

sau

$$(5) \qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Făcând în această egalitate $x=\frac{1}{2}$, obţinem $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$; de unde

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

valoarea radicalului fiind pozitivă.

422. *Funcţiunea* σx. Această funcţiune întreagă introdusă de Weierstrass joacă un rol important în teoria funcţiunilor eliptice. Fie ω şi ω' două cantităţi al căror raport este imaginar. Weierstrass reprezintă prin σx funcţiunea întreagă simplă [1]) care se anulează în punctele

$$x = 2m\omega + 2n\omega',$$

m şi n fiind numere cari primesc toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, independente între ele.

Să căutăm cea mai mică valoare întreagă p pentru care seria

$$\Sigma' \frac{1}{|\, m\omega + n\omega' \,|^{p+1}}$$

este convergentă. Punând $\omega = a + ib$, $\omega' = a' + ib'$, avem

$$\begin{aligned} |\, m\omega + n\omega' \,|^2 &= (am + a'n)^2 + (bm + b'n)^2 \\ &= (a^2 + b^2)\, m^2 + 2(aa' + bb')\, mn + (a'^2 + b'^2)\, n^2. \end{aligned}$$

Membrul al doilea este o formă quadratică definită (pozitivă), căci avem expresiunea

$$(a^2 + b^2)\,(a'^2 + b'^2) - (aa' + bb')^2 = (ab' - ba')^2 > 0,$$

$ab' - ba' \neq 0$, în virtutea ipotezei că raportul $\frac{\omega'}{\omega}$ este imaginar.

Aşà dar seria

$$\Sigma' \frac{1}{|\, m\omega + n\omega' \,|^{p+1}} = \Sigma' \frac{1}{\left[(am + a'n)^2 + (bm + b'n)^2\right]^{\frac{p+1}{2}}}$$

va fi convergentă pentru $\frac{p+1}{2} > 1$ şi deoarece p este un număr întreg, valoarea cea mai mică pentru care seria propusă este convergentă este $p = 2$. Funcţiunea ce voim să construim este de rangul 2.

Conform teoremei lui Weierstrass, un factor prim general fiind

$$\left(1 - \frac{x}{\mathrm{w}}\right) e^{\frac{x}{\mathrm{w}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\mathrm{w}^2}},$$

în care s'a pus pentru prescurtare

$$\mathrm{w} = 2m\omega + 2n\omega',$$

expresiunea funcţiunii σx sub formă de produs este

$$\sigma x = x\,\Pi' \left(1 - \frac{x}{\mathrm{w}}\right) e^{\frac{x}{\mathrm{w}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\mathrm{w}^2}},$$

m şi n primind toate valorile întregi dela $-\infty$ la $+\infty$, exceptând sistemul de valori $m = n = 0$.

[1]) In care factorul exponenţial $e^{G(x)} = 1$.

II. — CÂTEVA PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIUNILOR ÎNTREGI TRANSCENDENTE.

423. Funcţiunile întregi transcendente se bucură de unele proprietăţi comune polinoamelor. Astfel:

Dacă o funcţiune întreagă

$$f(x) = \Sigma a_n x^n$$

are toţi coeficienţii săi reali, zerurile sale complexe sunt conjugate două câte două.

In adevăr, fie $x = a + i\beta$ un zero al funcţiunii. Inlocuind x prin această expresiune şi separând termenii reali de cei imaginari, avem

$$0 = \Sigma a_n (a + i\beta)^n = \mathrm{P}(a, \beta) + i\mathrm{P}_1(a, \beta),$$

P şi P_1 fiind două serii întregi de a şi β cu coeficienţi reali, convergente pentru orice sistem de valori finite ale acestor cantităţi. De unde rezultă egalităţile

$$\mathrm{P} = 0, \ \mathrm{P}_1 = 0.$$

Inlocuind x prin $a - i\beta$, rezultatul substituţiunii va fi

$$\mathrm{P}(a, \beta) - i\mathrm{P}_1(a, \beta) = 0;$$

prin urmare

$$f(a - i\beta) = 0.$$

424. Viceversa. Dacă o funcţiune întreagă simplă (adică fără multiplicatorul $e^{g(x)}$ de un rang limitat are zerurile sale reale, sau imaginare conjugate, coeficienţii săi sunt reali [1]). Căci grupând doi câte doi factorii primi cari corespund zerurilor imaginare conjugate, obţinem produse cu coeficienţi reali.

Teorema subsistă şi în cazul unei funcţiuni simple de un rang nelimitat, dacă presupunem că gradele ϱ_n ale polinoamelor $g_n(x)$, corespunzătoare zerurilor conjugate, sunt egale: ceeace se poate totdeauna presupune, căci aceste grade depind numai de modulele zerurilor.

425. Teorema lui Rolle se aplică funcţiunilor întregi transcendente ai căror coeficienţi sunt reali: între două zeruri reale consecutive ale funcţiunii se cuprinde un număr impar de zeruri reale ale derivatei.

In adevăr, fie a, b două zeruri consecutive ($a < b$) ale funcţiunii $f(x)$, cel dintâiu multiplu de ordinul α, cel de al doilea de ordinul β. Putem scrie

$$f(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x), \quad \varphi(a) \neq 0,$$
$$f(x) = (x-b)^\beta \psi(x), \quad \psi(b) \neq 0,$$

---

[1]) Prin coeficienţii funcţiunii înţelegem coeficienţii seriei întregi $\Sigma a_n x^n$ prin care funcţiunea poate fi reprezintată.

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ fiind funcţiuni întregi cu coeficienţi reali. De unde, prin derivare,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta}{x-b} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

Din aceste egalităţi rezultă că raporturile

$$\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)}, \quad \frac{f'(b-\varepsilon)}{f(b-\varepsilon)},$$

în cari ε este un număr pozitiv arbitrar de mic, sunt de semne contrarii, cel dintâi pozitiv, iar cel de al doilea negativ. Insă în intervalul $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ funcţiunea $f(x)$ păstrând un semn invariabil, rezultă că între $a+\varepsilon$ şi $b-\varepsilon$, prin urmare între a şi b, derivata $f(x)$ se anulează de un număr impar de ori.

426. Deşi teorema lui Rolle se aplică ecuaţiunilor transcendente ca şi ecuaţiunilor algebrice, nu este însă tot aşà cu consecinţele acestei teoreme. Astfel, propoziţiunile următoare nu sunt în genere aplicabile funcţiunilor transcendente, anume:

1⁰. Dacă rădăcinile unei ecuaţiuni algebrice sunt *toate* reale, rădăcinile derivatei sunt *toate* reale.

2⁰. Dacă rădăcinile unei ecuaţiuni algebrice sunt *toate* reale, între două rădăcini consecutive ale ecuaţiunii se găseşte o singură rădăcină a derivatei.

Pentru a justificà aserţiunea noastră în ce priveşte propoziţiunea 1⁰, este de ajuns să considerăm un exemplu. Fie funcţiunea întreagă

$$f(x) = e^{x^2}(x^2 + 2x - 1),$$

ale cărei rădăcini sunt toate reale, pe când derivata sa

$$f'(x) = 2e^{x^2}(x^3 + 2x^2 + 1)$$

are două rădăcini imaginare.

In ce priveşte propoziţiunea 2⁰, fie $f(x)$ o funcţiune întreagă de un rang $p > 1$, fără multiplicator exponenţial şi care nu se anulează pentru $x = 0$. Forma sa este

$$f(x) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p}.$$

Luând derivata logaritmică, avem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{x-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \dots + \frac{x}{a_n{}^p}\right]$$

$$= x^p \sum_1^\infty \left(\frac{1}{a_n{}^{p+1}} + \frac{x}{a_n{}^{p+2}} + \dots\right);$$

de unde rezultă că derivata $f'(x)$ se poate scrie

$$f'(x) = x^p \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ fiind o funcţiune întreagă.

Presupunând că toate zerurile lui $f(x)$ sunt reale, vedem că între cea mai mică rădăcină negativă în valoare absolută, şi cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiunii $f(x) = 0$, ecuaţiunea $f'(x)$ admite $x = 0$ ca rădăcină multiplă de ordinul $p > 1$.

427. Consecinţele teoremei lui Rolle, menţionate în paragraful precedent, subsistă dacă funcţiunea este de genul zero, precum şi în cazul când fiind de genul întâi şi având un multiplicator exponenţial e^{ax+b}, coeficientul a este real.

Să considerăm cazul din urmă şi făcând abstracţiune de multiplicatorul e^b, să presupunem că avem

$$(1) \qquad f(x) = e^{ax} x^m \Pi \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n}};$$

de unde

$$(2) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = a + \frac{m}{x} + \Sigma \left(\frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Să presupunem că $f'(x) = 0$ ar admite o rădăcină imaginară $\alpha + i\beta$; va rezultà egalitatea

$$a + \frac{m}{\alpha + i\beta} + \Sigma\left(\frac{1}{\alpha + i\beta - a_n} + \frac{1}{a_n}\right) = 0,$$

sau

$$a + \frac{m(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \Sigma \left[\frac{\alpha - a_n - i\beta}{(\alpha - a_n)^2 + \beta^2} + \frac{1}{a_n}\right] = 0.$$

Coeficientul lui i în această expresiune este

$$-\beta \left[\frac{m}{\alpha^2 + \beta^2} + \Sigma \frac{1}{(\alpha - a_n)^2 + \beta^2}\right],$$

care nu se anulează decât pentru $\beta = 0$. De unde rezultă că ecuaţiunea $f'(x)$ nu admite rădăcini imaginare.

Rămâne să arătăm că între două rădăcini consecutive ale ecuaţiunii $f(x) = 0$, ecuaţiunea $f'(x) = 0$ are o singură rădăcină. Pentru aceasta, să derivăm ambele membre ale ecuaţiunii (2),

$$\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{f(x)} = -\left[\frac{m}{x^2} + \Sigma \frac{1}{(x - a_n)^2}\right].$$

Membrul al doilea fiind, pentru x real, esenţialmente negativ, funcţiunea $f'(x)$ descreşte necontenit între două zeruri consecutive oarecari ale funcţiunii $f(x)$, prin urmare nu se poate anulà decât o singură dată în fiecare interval (a_n, a_{n+1}). q. e. d.

CAPITOLUL XXII.

FUNCŢIUNI ANALITICE UNIFORME NU INTREGI.

Ne propunem să găsim expresiuni analitice cari să reprezinte funcţiuni analitice uniforme având singularităţi date.

428. Să considerăm mai întâi cazul particular când funcţiunea ce voim să construim n'are alte singularităţi decât un număr nelimitat de poluri cu un singur punct limită, care este neapărat un punct singular esenţial. Să presupunem că acest punct coincide cu punctul $x = \infty$ şi fie

$$(1) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

polurile date dispuse în ordinea modulelor crescânde; prin urmare

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty.$$

In virtutea teoremei lui Weierstrass, putem totdeauna să construim o funcţiune întreagă $G(x)$, care să aibă punctele (1) ca zeruri şi numai aceste puncte.

Să reprezintăm prin $G_1(x)$ o funcţiune întreagă arbitrară, care să nu aibă nici un zero comun cu $G(x)$. Funcţiunea

$$(2) \qquad \frac{G_1(x)}{G(x)}$$

împlineşte condiţiunea cerută, căci ea reprezintă o funcţiune uniformă în tot planul, neavând alte singularităţi decât punctele (1) cari sunt poluri.

Cazul când punctul limită este un punct a situat la distanţă finită se reduce printr'o schimbare de variabilă la cel precedent. Să ne închipuim, în acest caz, polurile (1) dispuse astfel ca $\lim\limits_{n=\infty} |a - a_n| = 0$ şi să facem substituţiunea

$$(3) \qquad x' = \frac{1}{x - a}.$$

Punctele

$$(4) \qquad a'_n = \frac{1}{a_n - a}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots \infty)$$

vor fi dispuse în ordinea modulelor crescânde şi

$$\lim_{n=\infty} |a'_n| = \infty.$$

Expresiunea $\dfrac{G_1(x')}{G(x')}$, în care funcţiunile G şi G_1 au relativ la punctele (4) semnificări analoage cu cele considerate în cazul întâi, nu are alte singularităţi decât aceste puncte ca poluri.

Prin urmare expresiunea

$$\frac{G_1\left(\frac{1}{x-a}\right)}{G\left(\frac{1}{x-a}\right)}$$

împlineşte condiţiunea cerută.

429. Să trecem acum la cazul general când singularităţile sunt, fără distincţiune, poluri sau puncte singulare esenţiale. Soluţiunea acestei probleme se datoreşte matematicianului suedez *Mittag-Leffler* şi este cuprinsă în teorema următoare:

Teorema lui Mittag-Leffler.

Fie

$$(1) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

un şir nelimitat de puncte izolate şi

$$(2) \qquad G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots, G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right), \ldots$$

un şir de funcţiuni analitice uniforme, asociate respectiv punctelor şirului (1), fiecare din ele având ca punct singular unic punctul la care este asociată şi anulându-se pentru $x = \infty$. Una oarecare din aceste funcţiuni este de forma

$$(3) \qquad G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right) = \frac{A_1^{(i)}}{x-a_i} + \frac{A_2^{(i)}}{(x-a_i)^2} + \ldots,$$

coeficienţii fiind cantităţi constante date şi numărul termenilor limitat sau nelimitat.

Teorema lui Mittag-Leffler constă în aceasta: *Este totdeauna posibil a construi o funcţiune analitică uniformă $F(x)$ care să nu aibă alte singularităţi decât punctele date* (1) *şi astfel ca diferenţa*

$$F(x) - G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

să fie olomorfă în domeniul punctului a_i.

Funcţiunile $G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right)$ caracterizează aşà dar singularităţile funcţiunii ce voim să construim.

Şirul (1) fiind dispus în ordinea modulelor crescânde, să presupunem $|a_1| > 0$. Să facem să corespundă punctelor (1) un şir de numere pozitive

$$(4) \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots,$$

supuse la singura condiţiune ca seria $\Sigma\varepsilon_n$ să fie convergentă. Fie R un număr pozitiv dat oricât de mare voim şi n cel mai mic număr pozitiv pentru care

$$|a_n| > R.$$

Din origină ca centru cu raza R să descriem un cerc şi fie x un punct interior acestui cerc. Punctul a_n fiind exterior cercului, funcţiunea $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$, care n'are altă singularitate decât acest punct, este olomorfă în interiorul cercului precum şi pe cerc; prin urmare ea se poate reprezintà printr'o serie întreagă de x,

$$(5)\qquad G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{(n)} x^\nu.$$

convergentă în acest cerc şi pe cerc.

La aceiaş concluziune ajungem, dacă desvoltăm în serii întregi termenii membrului al doilea din (3), pentru $i = n$, şi facem suma acestor serii, conform teoremei lui Weierstrass, asupra sumei de serii.

Seria din membrul al doilea din egalitatea (5) fiind convergentă pentru $|x| = R$, rezultă că există un număr întreg m_n astfel ca inegalitatea

$$\sum_{\nu=m_n}^{\infty}\left|B_\nu^{(n)}\right| R^\nu < \varepsilon_n$$

să fie satisfăcută. Cu atât mai mult vom aveà în interiorul cercului (R)

$$(6)\qquad \left|\sum_{\nu=m_n}^{\infty} B_\nu^{(n)} x^\nu\right| < \varepsilon_n \text{ [1]}.$$

[1] Iată cum se poate calculà o valoare a lui m_n pentru valori ale lui x al căror modul este mai mic ca R. Fie M_n o limită superioară a lui $\left|G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)\right|$ dealungul cercului (R); vom aveà

$$\left|B_\nu^{(n)}\right| < \frac{M_n}{R^\nu};$$

de unde, pentru valori x al căror modul $r < R$,

$$\left|\sum_{\nu=m_n}^{\infty} B_\nu^{(n)} x^\nu\right| < M_n \sum_{m_n}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^\nu = M_n\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^{m_n}}{1-\frac{r}{R}}.$$

Este de ajuns a pune

$$M_n\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^{m_n}}{1-\frac{r}{R}} < \varepsilon_n,$$

sau

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{m_n} < \frac{\varepsilon_n(R-r)}{M_n R}$$

şi a luà cea mai mică valoare întreagă m_n care satisface această inegalitate.

Să punem

$$(7) \qquad F_n(x) = \sum_{\nu=m_n}^{\infty} B_\nu^{(n)} x^\nu$$

și

$$(8) \qquad P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{m_n-1} B_\nu^{(n)} x^\nu;$$

vom avea

$$(9) \qquad F_n(x) = G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - P_n(x).$$

Funcțiunea $F_n(x)$ are singularitatea a_n a funcțiunii caracteristice corespunzătoare G_n și punctul $x = \infty$ ca pol din cauza polinomului $P_n(x)$. In virtutea inegalității (6) avem

$$(10) \qquad |F_n(x)| < \varepsilon_n.$$

In acelaș mod construim funcțiunile

$$F_{n+1}(x), \quad F_{n+2}(x), \ldots,$$

supuse la condițiunile

$$|F_{n+1}(x)| < \varepsilon_{n+1}, \; |F_{n+2}(x)| < \varepsilon_{n+2}, \ldots,$$

pentru $|x| < R$. De unde urmează că în interiorul cercului (R), seria

$$(11) \qquad \sum_{i=n}^{\infty} F_i(x)$$

este absolut și uniform convergentă.

Să aplicăm aceleași transformări funcțiunilor

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \ldots, G_{n-1}\left(\frac{1}{x-a_{n-1}}\right),$$

pentru valori ale lui x, ale căror module sunt respectiv mai mici decât $|a_1|, \ldots, |a_n|$. Vom obține funcțiunile

$$F_i(x) = G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right) - P_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

uniforme, neavând fiecare altă singularitate decât punctul respectiv a_i, care este un punct singular caracterizat de funcțiunea corespunzătoare G_i și mai având fiecare ca pol punctul $x = \infty$. Suma

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_i(x),$$

având o valoare finită pentru toate valorile lui x diferite de a_1, $a_2, \ldots a_{n-1}$, rezultă că adunând-o cu seria (11), obținem seria

$$(12) \qquad \sum_{1}^{\infty} F_i(x) = \sum_{1}^{\infty}\left[G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right) - P_i(x)\right],$$

absolut şi uniform convergentă în interiorul cercului (R), exceptând punctele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$. Insă, luând n destul de mare, putem presupune R oricât de mare voim; de unde urmează că seria (12) este absolut şi uniform convergentă în toată întinderea planului, din care excludem punctele

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Funcţiunea

$$(13) \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - P_n(x)\right]$$

împlineşte condiţiunile cerute. In adevăr, în orice regiune în care nu se găseşte nici unul din punctele (1), ea este olomorfă [1]). De altă parte, aceste puncte fiind izolate, putem considerà un număr pozitiv ρ destul de mic, astfel ca în cercul descris dintr'un punct a_i ca centru cu raza ρ, să nu se găsească alt punct al şirului (1) decât punctul a_i. In interiorul acestui cerc diferenţa

$$F(x) - G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right) = F(x) - F_i(x) - P_i(x).$$

este evident olomorfă. q. e. d.

S'a presupus $|a_1| > 0$. Dacă $x = 0$ este un punct singular al funcţiunii ce voim să construim şi dacă reprezintăm prin

$$(14) \qquad G_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{A_1^{(o)}}{x} + \frac{A_2^{(o)}}{x^2} + \ldots,$$

funcţiunea caracteristică corespunzătoare, va fi de ajuns să scriem

$$(15) \qquad F(x) = G_0\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - P_n(x)\right],$$

pentru ca $F(x)$ să împlinească condiţiunile cerute. Putem face să intre $G_0\left(\frac{1}{x}\right)$ în suma generală, privind $P_0(x) = 0$ şi să scriem

$$(16) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - P_n(x)\right].$$

---

[1]) Fie $x_0 \neq a_n$. Intr'un cerc (r) descris din x_0 ca centru cu o rază r destul de mică, astfel ca în (r) să nu fie nici unul din punctele a_n, putem scrie

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - P_n(x) = p_n(x-x_0),$$

$p_n(x-x_0)$ fiind serie întreagă de $x-x_0$, convergentă în (r). Insă

$$\sum_{1}^{\infty} p_n(x-x_0)$$

este uniform convergentă în (r), prin urmare această serie se poate înlocuì prin o serie întreagă $p(x-x_0)$, convergentă în (r).

Expresiunea cea mai generală a unei funcţiuni uniforme care satisface aceleaşi condiţiuni se va obţine adăugând rezultatului precedent o funcţiune întreagă $G(x)$:

$$(17) \qquad F(x) = \Sigma \left[G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x) \right] + G(x).$$

430. Să observăm că trebuie să privim ca termen al seriei din membrul al doilea expresiunea

$$G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x)$$

şi că nu este permis a separà polinomul $P_n(x)$ de funcţiunea $G_n(x)$. Prezenţa acestor polinoame în compunerea termenilor seriei face ca această serie să fie absolut convergentă, precum rezultă din demonstraţiunea teoremei.

431. Se poate întâmplà — şi aceasta se prezintă în genere în aplicaţiuni — ca să existe o valoare constantă a gradului polinoamelor $P_n(x)$ astfel ca seria din membrul al doilea (17) să fie absolut convergentă. In acest caz, luăm drept grad comun al acestor polinoame cel mai mic număr întreg care împlineşte condiţiunea precedentă.

432. *Viceversa. Fiind dată o funcţiune analitică $f(x)$ având un număr oarecare de singularităţi izolate, polare sau esenţiale, o putem pune sub forma* (17).

Pentru aceasta trebuie să începem prin a calcula funcţiunile $G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right)$, caracteristice singularităţilor funcţiunii $f(x)$.

Caracterul acestor funcţiuni, s'o reamintim, consistă în aceea că în domeniul unui punct singular a_n, diferenţa

$$f(x) - G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right)$$

trebuie să fie olomorfă. Aceste funcţiuni odată determinate, deducem din ele polinoamele $P_n(x)$, conform teoremei lui Mittag-Leffler. Fie

$$F(x) = \Sigma \left[G_n \left(\frac{1}{x-a_n} \right) - P_n(x) \right].$$

Diferenţa

$$f(x) - F(x)$$

este o funcţiune analitică uniformă neavând în tot planul nici un punct singular, prin urmare se reduce la o funcțiune întreagă și avem expresiunea

$$f(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(x),$$

în care rămâne a determina funcțiunea $\mathrm{G}(x)$.

433. *Aplicațiuni.* 1°. Fie

$$f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}. \tag{1}$$

Această funcțiune n'are alte singularități la distanță finită decât poluri de ordinul întâi date de

$$a_n = n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

prin urmare funcțiunile $\mathrm{G}_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$ se reduc la câte un singur termen de forma

$$\frac{\mathrm{A}}{x - a_n}.$$

Determinarea funcțiunilor G_n. In domeniul punctului $x = 0$, avem

$$\frac{1}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi x} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \ldots}$$

$$= \frac{1}{\pi x} + \frac{\pi x}{3!} + \ldots.$$

Așa dar

$$\mathrm{G}_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\pi x}. \tag{2}$$

Fie n un număr întreg oarecare; punând $x = n + x'$, avem

$$\sin \pi x = (-1)^n \sin \pi x'.$$

Prin urmare, în domeniul punctului $x = n$,

$$\frac{1}{\sin \pi x} = (-1)^n \left[\frac{1}{\pi(x-n)} + \frac{\pi}{3!}(x-n) + \ldots\right];$$

de unde se conchide

$$\mathrm{G}_n\left(\frac{1}{x-n}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi(x-n)}. \tag{3}$$

Determinarea polinoamelor $P_n(x)$. Conform teoriei generale, polinomul $\mathrm{P}_n(x)$ se obține dacă, presupunând $|x| < |a_n|$, se desvoltă $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ în serie întreagă de x, din care se ia, începând dela cel dintâi, un număr de termeni suficient pentru ca seria

$$\Sigma\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)-P_n(x)\right]$$

să fie absolut convergentă.

Avem

$$\frac{(-1)^n}{\pi(x-n)}=-\frac{(-1)^n}{\pi(n-x)}=-\frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{n}+\frac{x}{n^2}+\ldots\right).$$

Este de ajuns a luà

$$P_n(x)=-\frac{(-1)^n}{n\pi},$$

căci seria al cărei termen general este

$$(-1)^n\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n(x-n)},$$

este absolut convergentă în tot planul din care excludem punctele $x=n$.

Vom avea așà dar

$$(4)\qquad \frac{\pi}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}+\Sigma'(-1)^n\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{n}\right)+G(x),$$

suma Σ' referindu-se la toate valorile întregi ale lui n, pozitive și negative, exceptând $n=0$. Rămâne a determina funcțiunea $G(x)$.

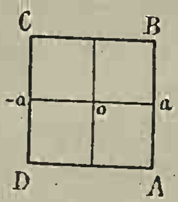

Fig. 93

Pentru aceasta să considerăm pătratul ABCD ale cărui laturi sunt respectiv paralele și simetrice cu axa reală și axa imaginară (fig. 93), depărtate de aceste axe cu cantitatea $a=m+\frac{1}{2}$, m fiind un număr întreg pozitiv. Dealungul laturei AB, avem $x=a+it$, t variând dela $-a$ la $+a$; prin urmare

$$\sin\pi x=\sin\pi(m+\tfrac{1}{2}+it)=(-1)^m\cos h\pi t.$$

Când t variază dela 0 la $\pm a$, $\cos h\pi t$ crește necontenit dela 1 la ∞. Dealungul laturei AB, ca și dealungul laturei paralele CD, avem $|\sin\pi x|\geqq 1$. Dealungul laturei BC, avem $x=t+ia$, $t(-a\ldots+a)$; prin urmare

$$\sin\pi x=\sin\pi(t+ia)=\sin\pi t\cos h\pi a+i\cos\pi t\sin h\pi a,$$

$$|\sin\pi x|^2=\sin^2\pi t\cos^2 h\pi a+\cos^2\pi t\sin^2 h\pi a$$
$$=\sin^2\pi t+\sin^2 h\pi a.$$

Dealungul laturilor BC, AD, modulul funcțiunei $\sin \pi x$ crește dar împreună cu a, adică cu numărul întreg m și tinde către infinit când m tinde către ∞.

Din cele ce preced rezultă că dealungul pătratului considerat, modulul funcțiunii $\frac{1}{\sin \pi x}$ este mai mic, sau cel mult egal cu 1. De altă parte, dealungul aceluiaș pătrat, seria Σ' nu trece peste o cantitate fixă, căci ea este absolut convergentă în tot planul din care exceptăm punctele $x =$ număr întreg. Așà dar modulul funcțiunei $G(x)$, care figurează în ecuațiunea (4), rămâne mai mic decât o cantitate finită, dealungul pătratului, oricât de mare ar fi latura lui. De unde rezultă că $G(x)$ este o constantă. Făcând în (4) $x = 0$, Găsim $G(x) = 0$. Așà dar avem

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \Sigma' (-1)^n \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right).$$

434. Grupând doi câte doi termenii cari corespund la $\pm n$, formula precedentă se poate scrie

$$(5) \qquad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \lim_{m=\infty} \sum_{n=-m}^{+m} \frac{(-1)^n}{x-n}.$$

Pe această formulă se citește imediat periodicitatea funcțiunii $\sin x$; căci înlocuind x prin $x + 1$, seria din membrul al doilea se reproduce cu semnul schimbat, etc.

435. In expresiunea (3) să înlocuim succesiv x prin a și prin $x + a$ și să scădem rezultatele; obținem

$$(6) \quad \frac{\pi}{\sin \pi(x+a)} - \frac{\pi}{\sin \pi a} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{x+a-n} - \frac{1}{a-n}\right].$$

Făcând $a = \frac{1}{2}$, formula devine

$$(7) \qquad \frac{\pi}{\cos \pi x} = \pi + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{x-(n-\frac{1}{2})} + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right].$$

436. 2⁰. Fie

$$(9) \qquad f(x) = \cot \pi x.$$

Această funcțiune n'are în tot planul alte singularități decât poluri cari sunt aceleași ca ale funcțiunii $\frac{1}{\sin \pi x}$. In domeniul $x = 0$, avem

$$\cot \pi x = \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi x} \frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{1.2} + \dots}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{1.2.3} + \dots}$$

$$= \frac{1}{\pi x} - \frac{\pi x}{3} + \dots$$

şi în domeniul punctului $x = n$,

$$\cot \pi x = \frac{1}{\pi (x-n)} - \frac{\pi}{3}(x-n) + \dots$$

Aşà dar oricare ar fi numărul întreg n, avem

$$(10) \qquad G_n\left(\frac{1}{x-n}\right) = \frac{1}{\pi(x-n)}.$$

Prin consideraţiuni analoage cu cele din exemplul 1⁰, conchidem

$$(11) \qquad \pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \Sigma' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right).$$

Inlocuind x prin a şi prin $x + a$ şi scăzând rezultatele, obţinem

$$(12) \quad \pi\left[\cot \pi(x+a) - \cot \pi x\right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{x+a-n} - \frac{1}{a-n}\right].$$

Făcând $a = \frac{1}{2}$, formula devine

$$(13) \qquad \pi \operatorname{tg} \pi x = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{x-(n-\frac{1}{2})} + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right].$$

437. 3⁰. Expresiunea unei funcţiuni întregi sub formă de produs de factori se poate deduce din teorema lui Mittag-Leffler. Fie $f(x)$ o funcţiune întreagă având un număr nelimitat de zeruri simple

$$(14) \qquad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (|a_1| > 0),$$

dispuse în ordinea modulelor crescânde. Derivata logaritmică $\frac{f'(x)}{f(x)}$ nu va avea alte singularităţi decât punctele (14), cari sunt poluri de ordinul întâi şi partea principală relativă la polul a_n este $\frac{1}{x-a_n}$; prin urmare funcţiunea caracteristică corespunzătoare este

$$(15) \qquad G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = \frac{1}{x-a_n}.$$

Desvoltând membrul al doilea după puterile crescânde ale lui x (luăm $|x| < |a_n|$), avem

$$\frac{1}{x-a_n} = -\left[\frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \dots + \frac{x_n^{\varrho-1}}{a_n^{\varrho_n}} + \dots\right].$$

Punând

$$(16) \qquad P_n(x) = \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \dots + \frac{x^{\varrho_n - 1}}{a_n^{\varrho_n}}$$

şi aplicând funcţiunii $\frac{f'(x)}{f(x)}$ teorema lui Mittag-Leffler, obţinem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + \sum_1^\infty \left[\frac{1}{x-a_n} + P_n(x)\right],$$

reprezintând prin $g'(x)$ derivata unei funcţiuni întregi $g(x)$.

Integrând ambele membre între 0 şi x după un drum care nu trece prin nici unul din punctele a_n şi punând

$$g_n(x) = \int_0^x P_n(x)\,dx = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{\varrho_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{\varrho_n},$$

avem

$$\log\frac{f(x)}{f(o)} = g(x) - g(o) + \Sigma\left[\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right) + g_n(x)\right].$$

De unde, trecând dela logaritmi la numere, scriind $g(x)$ în loc de $g(x) - g(o) + \log f(o)$, obţinem expresiunea

$$f(x) = e^{g(x)}\ \Pi\left(1-\frac{x}{a_n}\right) e^{g_n(x)},$$

sub forma dată de Weierstrass. Dacă $f(x)$ are zeruri multiple, repetăm în expresiunea precedentă factorii primi corespunzători de atâtea ori câte unităţi sunt în ordinele lor de multiplicitate. Aplicând consideraţiunile de mai sus funcţiunii

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \Sigma'\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right),$$

obţinem, integrând ambele membre,

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \Pi'\left(1-\frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}.$$

438. 4^0. *Funcţiunea* $\Gamma(x)$. Această funcţiune n'are în tot planul alte singularităţi decât polurile $x = -n$, $(n = 0, 1, 2, \dots\infty)$. Reziduurile corespunzătoare se deduc imediat din formula (5) (§ 421). Astfel, reziduul relativ la polul $x = -n$ este dat de expresiunea

$$\lim_{x=-n} \left[(x+n)\,\Gamma(x)\right] = \pi\left(\frac{x+n}{\sin \pi x}\right)_{x=-n} \frac{1}{\Gamma(n+1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Funcţiunea caracteristică corespunzătoare este aşà dar

$$G_n\left(\frac{1}{x+n}\right)=\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{x+n}.$$

Seria $\sum\limits_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{x+n}$ fiind absolut convergentă în tot planul, din care excludem polurile, rezultă, pentru $\Gamma(x)$, expresiunea

$$\Gamma(x)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{x+n}+G(x),$$

$G(x)$ fiind o funcţiune întreagă.

Seria din membrul al doilea coincide, precum se recunoaşte imediat, cu integrala

$$\int_0^1 z^{x-1}\,e^{-z}\,dz=\int_0^1 z^{x-1}\left(1-z+\frac{z^2}{1.2}-\ldots+\frac{(-1)^n z^n}{n!}+\ldots\right)dz.$$

Dacă dar ne referim la definiţiunea funcţiunei $\Gamma(x)$ cu ajutorul integralei

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty z^{x-1}\,e^{-z}\,dz=\int_0^1 z^{x-1}\,e^{-z}\,dz+\int_1^\infty z^{x-1}\,e^{-z}\,dz,$$

conchidem, pentru funcţiunea $G(x)$, expresiunea sub formă de integrală

$$G(x)=\int_1^\infty z^{x-1}\,e^{-z}\,dz.$$

Observare. Se recunoaşte, independent de desvoltarea de mai sus, că integrala

$$\int_1^\infty z^{x-1}\,e^{-z}\,dz$$

este o funcţiune olomorfă în tot planul (x), căci funcţiunea $z^{x-1}\,e^{-z}$ este, pentru $z>0$, olomorfă în tot planul (x) şi integrala este finită oricare ar fi punctul x.

CAPITOLUL XXIII.

SUBSTITUŢIUNI LINEARE

439. Fie x, y două variabile complexe, raportate la acelaş plan sau la plane diferite, legate între ele prin relaţiunea

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \tag{1}$$

a, b, c, d fiind coeficienţi reali sau imaginari, supuşi la singura condiţiune ca determinantul

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

să fie diferit de zero. Relaţiunea (1) stabileşte o corespondenţă biunivocă între punctele x figurate pe planul (x) şi punctele y figurate pe planul (y); ea constitue dar o *transformare biunivocă* a celor două plane unul într'altul.

Operaţiunea reprezintată prin relaţiunea (1) se numeşte *substituţiune lineară* şi determinantul (2) se numeşte *determinantul* substituţiunii.

Rezolvind ecuaţiunea (1) în raport cu x, obţinem relaţiunea

$$(3) \qquad x = \frac{-dy + b}{cy - a},$$

care transformă planul (y) în planul (x). Substituţiunea (3) se numeşte substituţiunea *inversă* a substituţiunii (1).

Se obişnueşte a se notà substituţiunea (1) prin

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

şi substituţiunea inversă prin

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Determinantul substituţiunilor S şi S^{-1} este acelaş.

440. *Grupul linear.* Fie

$$S) \qquad x' = \frac{ax + b}{cx + d},$$

$$S') \qquad x'' = \frac{a'x' + b'}{c'x' + d'},$$

două substituţiuni lineare, cea dintâiu transformând planul (x) în planul (x') şi cea de a doua transformând planul (x') într'un plan (x''), acelaş sau diferit. Inlocuind în S') x' prin valoarea sa din S), obţinem substituţiunea lineară

$$x'' = \frac{(aa' + cb')\,x + (ba' + dc')}{(ac' + cd')\,x + (bc' + dd')},$$

care transformă planul (x) în planul (x'') şi al cărei determinant

$$\begin{vmatrix} aa' + cb' & ba' + dc' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

este produsul determinanţilor celor două substituţiuni. Această substituţiune se notează SS′ şi se numeşte *produsul* substituţiunilor S, S′.

Se recunoaşte imediat că dacă substituţiunea S′ este egală cu S^{-1}, variabila x'' coincide cu x; produsul SS^{-1} nu efectuează nici o transformare. Această substituţiune se zice că este identică cu unitatea.

Din cele ce preced rezultă că produsul a două substituţiuni lineare oarecari este o substituţiune lineară, printre cari se cuprinde şi substituţiunea identică cu unitatea. Substituţiunile lineare formează dar un grup: *grupul linear.*

441. *Transformare conformă.* Derivata funcţiunei (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

fiind finită şi diferită de zero în orice porţiune a planului care nu conţine polul $x_0 = -\frac{d}{c}$, rezultă că orice arie (x), în interiorul căreia nu se află acest punct, se transformă într'un mod conform în aria corespunzătoare (y) şi când una din variabilele x, y descrie, într'un sens dat, conturul care limitează aria sa, cealaltă variabilă descrie conturul său în acelaş sens.

Fie C o curbă închisă descrisă de x şi Γ curba închisă corespunzătoare descrisă de y. Dacă în interiorul curbei C se găseşte polul funcţiunii y, aria interioară acestei curbe şi toată întinderea planului (y) exterioară curbei Γ se corespund într'un mod conform; viceversa, între aria interioară curbei Γ şi toată întinderea planului (x) exterioară curbei C, există corespondenţă conformă. Când x descrie curba C într'un sens dat, în raport cu aria *interioară*, y descrie curba Γ în acelaş sens în raport cu aria *exterioară,* prin urmare în sens invers în raport cu aria interioară.

442. *Nu există altă substituţiune decât cea lineară care să transforme într'un mod conform planele* (x), (y) *între ele.*

Fie $y = f(x)$ o funcţiune care transformă într'un mod conform cele două plane între ele; $f(x)$ este neapărat o funcţiune uniformă care primeşte orice valoare numai o singură dată. Funcţiunea inversă $x = \varphi(y)$ se bucură de aceleaşi proprietăţi. Funcţiunea $f(x)$ devine neapărat infinită într'un singur punct, situat la distanţă finită sau la infinit. Acest punct nu poate fi punct singular esenţial. In adevăr, fie $x = \xi$ punctul în care x devine infinit; dacă ξ ar fi punct singular esenţial, ar urmà ca, în vecinătatea lui,

$f(x)$ să primească valori oricât de apropiate voim de o cantitate dată oarecare (§ 323). Fie x_0 un punct diferit de ξ şi $y_0 = f(x_0)$ valoarea corespunzătoare a lui y. Fie, de altă parte, ξ_1 un punct destul de apropiat de ξ, în care y primeşte o valoare y_1 oricât de apropiată voim de y_0; însă lui y_1 trebuie să corespundă o valoare x_1 vecină cu x_0. Funcţiunea $f(x)$ ar primi dar aceeaş valoare y_1 în două puncte diferite, x_1 şi ξ_1: ceeace este în contrazicere cu proprietatea funcţiunii de a primi orice valoare numai o singură dată.

Punctul $x = \xi$ este aşadar un pol, al cărui ordin nu poate fi mai mare ca 1. Căci, dacă m este ordinul acestui pol, avem, în domeniul lui, desvoltarea

$$y = (x - \xi)^{-m} [a_0 + a_1 (x - \xi) \ldots];$$

de unde, prin inversiune,

$$x - \xi = a_0^{\frac{1}{m}} y^{-\frac{1}{m}} + b_1 y^{-\frac{2}{m}} + \ldots$$

Dacă dar $m > 1$, funcţiunea inversă $x = \varphi(y)$ n'ar fi uniformă în domeniul lui $y = \infty$.

Din cele ce preced rezultă că $f(x)$ este o funcţiune raţională de gradul întâiu. Această funcţiune este fracţionară sau întreagă, după cum polul este la distanţă finită sau la infinit.

443. *Teoremă fundamentală. O substituţiune lineară transformă un cerc într'un cerc, dacă privim linia dreaptă ca un cerc al cărui centru este la infinit.*

Pentru a demonstrà această teoremă, vom considerà succesiv substituţiuni particulare cuprinse în formula

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}. \tag{1}$$

I. $c = o$. Expresiunea (1) se reduce la o funcţiune lineară întreagă, care cuprinde formele particulare:

$$y = x + b, \quad y = ax, \quad y = ax + b. \tag{2}$$

1°. Substituţiunea $y = x + b$ exprimă că punctul y se obţine aplicând punctului x o translaţiune egală, paralelă cu segmentul b şi în direcţiunea dată de argumentul acestui segment; prin urmare orice figură (y) rezultă din aceeaş translaţiune a figurei corespunzătoare (x).

2°. Să considerăm forma $y = ax$ şi fie

$$a = re^{i\omega}, \quad x = \varrho e^{i\theta}, \quad y = \varrho_1 e^{i\theta_1};$$

avem

$$\varrho_1 = a\varrho, \quad \theta_1 = \theta + \omega.$$

Orice figură compusă din puncte x şi figura transformată (y) sunt aşa dar figuri asemenea. Să presupunem variabilele x, y figurate pe acelaş plan. Transformarea considerată lasă fixe punctele $x = o$ şi $x = \infty$. Unei raze vectorii (x) corespunde o rază vectoară (y) făcând cu cea dintâiu unghiul ω. Dacă $\omega = o$, figura transformată este omotetică cu cea dintâiu.

Fie x_0 şi y_0 două puncte corespunzătoare; cercului $|x - x_0| = R$ corespunde cercul $|y - y_0| = rR$, centrele acestor cercuri fiind punctele x_0, y_0 cari se corespund. Dacă $x_0 = o$, cercurile sunt concentrice. Dacă a este real şi pozitiv, orice rază vectoară se reproduce: substituţiunea se numeşte *iperbolică*.

Dacă $|a| = r = 1$ şi $o < \omega < 2\pi$, cercul cu centrul în origină se reproduce: substituţiunea se numeşte *eliptică*.

In cazul $|a| \neq 1$ şi $o < \omega < 2\pi$, punctul y corespunzător unui punct x nu se găseşte nici pe aceeaş rază vectoară, nici pe acelaş cerc cu centrul în origină. Există însă o infinitate de spirale logaritmice, dependente de r şi de ω, cari se reproduc prin substituţiunea considerată. In adevăr, fie

$$\rho = Ae^{k\theta}$$

o spirală logaritmică, A fiind un parametru pozitiv arbitrar. Exprimând că x descrie această spirală, avem ecuaţiunile

$$x = Ae^{k\theta} . e^{i\theta}, \quad y = Are^{k\theta} . e^{i(\theta+\omega)} = Ae^{\log r + k\theta} . e^{i(\theta+\omega)} .$$

Pentru ca expresiunea lui y să fie cuprinsă în expresiunea lui x, în care înlocuim θ prin $\theta + \omega$, este de ajuns să luăm pentru k valoarea $k = \frac{\log r}{\omega}$; avem astfel

$$x = Ae^{\frac{\log r}{\omega}} . e^{i\theta}, \quad y = Ae^{\frac{\log r}{\omega}} . e^{i\theta'}, \quad \theta' = \theta + \omega.$$

Substituţiunea în acest caz se numeşte *loxodromică* [1]).

3°. Substituţiunea lineară întreagă generală $y = ax + b$ produce acelaş efect ca substituţiunea $x' = ax$, urmată de substituţiunea $y = x' + b$. De unde rezultă similitudinea figurii transfomate cu cea primitivă. Substituţiunea lineară întreagă transformă

---

[1]) Dacă din punctul O' al sferei (§ 80) proiectăm pe sferă planul tangent în O, razele vectorii se proiectează după meridiane, iar unghiul a două curbe din plan se conservă pe sferă. De unde rezultă că spirala logaritmică cu polul O, situată în planul tangent, se proiectează după o curbă care face cu meridianele un unghiu constant, căci unghiul spiralei cu razele sale vectorii este constant. O asemenea linie se numeşte *loxodromie*.

dar, *fără excepţiune*, un cerc într'un cerc şi o linie dreaptă într'o linie dreaptă. Punctul.

$$x_0 = \frac{b}{1 - a}, \quad a \neq 1,$$

se reproduce pe sine însuş.

Raportată la acest punct fix ca origină, substituţiunea considerată se scrie

$$(3) \qquad y - y_0 = a(x - x_0);$$

ea este, relativ la punctul fix, de forma considerată mai sus (2°): *iperbolică*, *eliptică*, sau *loxodromică*, în aceleaşi condiţiuni.

In virtutea similitudinei figurilor (x), (y) rezultă, precum se recunoaşte lesne, că două puncte simetrice în raport cu o dreaptă (x) se transformă în puncte simetrice în raport cu dreapta (y). Deasemenea, două puncte armonic conjugate în raport cu un cerc (x) se transformă în raport cu cercul (y) în puncte de acelaş fel.

II. $c \neq o$. — 1°. Să considerăm mai întâiu cazul

$$(4) \qquad y = \frac{1}{x}.$$

Să punem $x = \xi + i\eta$, $y = u + iv$; prin urmare

$$u = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad v = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

şi, viceversa,

$$\xi = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \eta = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Să presupunem că x descrie cercul

$$(5) \qquad a(\xi^2 + \eta^2) + b\xi + c\eta + d = o;$$

vom aveà, pentru y, ecuaţiunea

$$(6) \qquad d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = o.$$

Unui cerc oarecare (x) corespunde dar un cerc (y). Dacă cercul (x) trece prin origină $(d = o)$, ecuaţiunea (6) se reduce la linia dreaptă

$$(7) \qquad bu - cv + a = o.$$

Viceversa, unei drepte $a\xi + b\eta + c = o$, care nu trece prin origină $(c \neq o)$, corespunde cercul

$$(8) \qquad c(u^2 + v^2) + au - bv = o,$$

care trece prin origină. De unde rezultă că un triunghiu format din arce de cercuri, cari trec prin origină, se transformă într'un triunghiu rectiliniu. Viceversa, un triunghiu rectiliniu se transformă, în virtutea substituţiunii (4), într'un triunghiu format din arce de cercuri cari trec prin origină.

Unei familii de drepte paralele corespund cercuri trecând prin origină având în acest punct aceeaş tangentă

$$au - bv = o.$$

Viceversa, cercurile trecând prin origină, cu aceeaş tangentă în acest punct, se transformă în linii drepte paralele şi aria cuprinsă între două cercuri se transformă în fâşia infinită limitată de paralelele corespunzătoare.

2°. Substituţiunea

$$y = \frac{a}{x}$$

se poate înlocui prin substituţiunea $x' = \frac{1}{x}$, urmată de substituţiunea $y = ax'$. De unde rezultă că ea transformă cercurile în cercuri.

3°. In fine, substituţiunea generală (1) se poate reduce la o succesiune de substituţiuni de speţa celor considerate mai sus. Este de ajuns, pentru aceasta, a efectuà diviziunea membrului al doilea şi a scrie.

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}.$$

Introducând substituţiunile $x' = cx + d$, $x'' = \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{x'}$, avem

$$y = \frac{a}{c} + x''.$$

Substituţiunea generală (1) se obţine aşa dar substituind x' lui x, x'' lui x' şi, în fine, y lui x''. Toate aceste substituţiuni fiind de speţa celor considerate mai sus, rezultă că *substituţiunea* (1) *transformă cercuri în cercuri, liniile drepte fiind considerate ca cercuri cu centrul la infinit.* q. e. d.

Observare. Pentru ca substituţiunea generală (1) să transforme un cerc într'o linie dreaptă este necesar şi suficient ca să existe pe cerc un punct căruia să corespundă $y = \infty$; prin urmare trebuie luat un punct oarecare x_0 al cercului ca pol $x_0 = -\frac{d}{c}$ al funcţiunii y.

454. Transformarea

$$(1) \qquad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

depinde de trei parametre, raporturile a trei coeficienţi către al patrulea, de cari putem dispune astfel ca trei puncte date x_1, x_2, x_3, să se transforme în trei puncte y_1, y_2, y_3 date după voie.

Din (1) rezultă egalitatea.

$$(2) \qquad \frac{y-y_1}{y-y_2} : \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} = \frac{x-x_1}{x-x_2} : \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2},$$

care arată că transformarea este unică şi determinată dacă punctele x_1, x_2, x_3 precum şi punctele y_1, y_2, x_3 sunt distincte. Este evident că coeficienţii substituţiunii se schimbă împreună cu punctele corespunzătoare date, aşà că un cerc dat poate fi transformat într'alt cerc dat printr'o infinitate de substituţiuni lineare.

Putem determină substituţiunea astfel ca ariile interioare cercurilor (x), (y) să se corespundă. Este deajuns, pentru aceasta, ca punctelor x_1, x_2, x_3 dispuse în sensul pozitiv să corespundă punctelor y_1, y_2, y_3 dispuse în acelaş sens. In această dispoziţiune rezultă, în virtutea corespondenţii biunivoce, că y descrie cercul său în sensul pozitiv în acelaş timp cu x; căci y nu poate trece de două ori prin acelaş punct. De aici rezultă că ariile interioare se corespund. Fie, în adevăr, y_0 un punct interior cercului (y) şi fie x_0 punctul corespunzător în planul (x); avem

$$(3) \qquad y-y_0 = \frac{ad-bc}{cx_0+d} \cdot \frac{x-x_0}{cx+d}.$$

Dacă y descrie cercul său în sensul pozitiv, argumentul membrului întâiu se măreşte cu 2π. Pentru ca şi argumentul membrului al doilea să se mărească cu 2π, este necesar ca punctul x_0 să fie în interiorul cercului (x) şi ca numitorul să nu se anuleze decât în exteriorul cercului. Ceeace justifică corespondenţa interioară celor două cercuri şi prin urmare, în acelaş timp, corespondenţa exterioară.

455. Pentru a determină o substituţiune lineară care să transforme un cerc dat (x) într'o linie dreaptă (y), este suficient a face ca la trei puncte ale cercului să corespundă trei puncte ale liniei drepte. Prin dispoziţiunea punctelor y corespunzătoare punctelor x, determinăm direcţiunea în care y descrie dreapta dată, când x descrie cercul dat. Considerând ca pozitivă direcţiunea dreptei care corespunde direcţiunii pozitive a cercului, conchidem că interiorul cercului se transformă în semiplanul situat la stânga acestei drepte când ea este descrisă în sensul pozitiv.

456. *Aplicaţiuni.* — 1°. *Să se transforme cercul* $|x| = 1$ *în axa imaginară* (y) *astfel ca punctelor* $x = 1, i, -1$ *să corespundă punctele* $y = o, -i, \infty$.

Corespondența punctelor extreme ne dă imediat ecuațiunea

$$y = a\,\frac{x - 1}{x + 1}.$$

Corespondența celorlalte două puncte dă valoarea $a = -1$. Substituțiunea căutată este așa dar

$$y = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Interiorul cercului este transformat, într'un mod conform, în semiplanul (y) situat la dreapta axei imaginare. Ca verificare, constatăm că centrului $x = o$ corespunde punctul $y = +1$.

Dacă permutăm între ele punctele $x = \pm 1$, păstrând ordinea punctelor y, obținem substituțiunea

$$y = \frac{x + 1}{x - 1},$$

care transformă interiorul cercului $|x| = 1$ în semiplanul situat la stânga axei imaginare.

2⁰. *Să se transforme cercul* $|x| = 1$ *în axa reală, făcând să se corespundă punctele* $x = 1, i, -1$ *cu punctele* $y = o, 1, \infty$.

Substituțiunea căutată este

$$y = i\,\frac{1 - x}{1 + x};$$

ca transformă interiorul cercului în semiplanul situat deasupra axei reale.

Dacă cercul este $|x| = R$ și corespondența punctelor $x = R$, iR, $-R$, $y = o$, R, ∞, substituțiunea devine

$$y = iR\,\frac{R - x}{R + x},$$

Observare. O substituțiune lineară cu coeficienții reali nu poate stabilì corespondență într'un cerc și axa reală; căci, într'o asemenea substituțiune, unei valori reale a uneia din variabile corespunde o valoare reală a celeilalte variabile: corespondență imposibilă între punctele cercului și axa reală.

457. *Dacă o substituțiune lineară S transformă un cerc într'o linie dreaptă D, două puncte armonic conjugate în raport cu cercul se transformă în puncte simetrice în raport cu D.*

Substituțiunea S poate fi înlocuită printr'un produs de două substituțiuni S′, S″ astfel ca S′ să transforme cercul în axa reală şi S'' — lineară întreagă — să transforme axa reală în dreapta D. Substituţiunea S'' transformând două puncte simetrice în raport cu axa reală în două puncte simetrice în raport cu dreapta D, este deajuns a demonstrà teorema pentru substituţiunea S'.

Să luăm centrul cercului ca origină, avem ecuaţiunile

$$|x| = \mathrm{R}, \qquad \mathrm{S}') \quad y = i\mathrm{R}\frac{\mathrm{R} - x}{\mathrm{R} + x}.$$

Fie $\alpha = re^{i\varphi}$, $\beta = \frac{\mathrm{R}^2}{r} e^{i\beta}$, două puncte armonic conjugate în raport cu cercul. Ducând aceste valori în expresiunea S'), avem pentru y valorile corespunzătoare

$$y_\alpha = i\mathrm{R}\frac{\mathrm{R} - \rho e^{i\varphi}}{\mathrm{R} + \rho e^{i\varphi}}, \quad y_\beta = -i\mathrm{R}\frac{\mathrm{R} - \rho e^{-i\varphi}}{\mathrm{R} + \rho e^{-i\varphi}},$$

cari nu diferă între ele decât prin semnul lui i.

Reciproca teoremei este evidentă.

Corolar. Două puncte armonic conjugate în raport cu un cerc se transformă în puncte armonic conjugate în raport cu cercul transformat.

Fie S substituţiunea care transformă un cerc (C) într'un cerc (C'). Putem înlocui S printr'un produs S = S' S'', astfel ca S' să transforme cercul (C) într'o dreaptă (D) şi S'' să transforme dreapta (D) în cercul (C'). Aplicarea acestor două substituţiuni justifică propoziţiunea enunţată.

458. *Puncte duble (fixe).* Presupunând variabilele x, y figurate pe acelaş plan şi raportate la aceeaş origină, există cel mult două puncte pe cari substituţiunea lineară

$$(1) \qquad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

le lasă neschimbate. Acest puncte se obţin făcând în (1) $y = x$; de unde ecuaţiunea

$$(2) \qquad cx^2 + (d - a)x - b = o.$$

Dacă $c = o$ şi $d \neq a$, un punct fix este la distanţă finită şi cel de al doilea este punctul $x = \infty$.

Dacă $c = o$ şi $d = a$, substituţiunea este de forma

$$y = x + \frac{b}{a};$$

unicul punct care se reproduce este punctul $x = \infty$.

Punctele ce se reproduc, adică punctele *fixe*, se numesc *puncte duble ale transformării.*

Presupunând $c \neq o$, rădăcinile ecuaţiunei (2) pot fi inegale, sau egale.

1⁰. Să presupunem rădăcinile inegale şi fie α, β aceste rădăcini. Avem

$$\alpha = \frac{a\alpha + \beta}{c\alpha + d}, \quad \beta = \frac{a\beta + b}{c\beta + d},$$

$$y - \alpha = \frac{(ad - bc)(x - \alpha)}{(c\alpha + d)(cx + d)}, \quad y - \beta = \frac{(ad - bc)(x - \beta)}{(c\beta + d)(cx + d)};$$

de unde, pentru substituţiunea considerată, expresiunea

$$(3) \qquad \frac{y - \beta}{y - \alpha} = k\frac{x - \beta}{x - \alpha},$$

în care

$$(4) \qquad k = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}.$$

Dacă introducem substituţiunile

$$(5) \qquad X = \frac{x - \beta}{x - \alpha}, \quad Y = \frac{y - \beta}{y - \alpha},$$

egalitatea (3) devine substituţiunea

$$(6) \qquad Y = kX,$$

care transformă între ele, într'un mod conform, punctele X, Y, corespunzătoare punctelor x, y. Conservând calificativele substituţiunilor de forma (6) (§ 443), vom zice că substituţiunea (1) este *iperbolică*, *eliptică*, *loxodromică*, după cum coeficientul k este real şi pozitiv, sau de forma $k = e^{i\omega}$, sau de forma $|k|e^{i\omega}$, $|k| \neq 1$, $o < \omega < 2\pi$.

2⁰. Ecuaţiunea (2) are o rădăcină dublă $\alpha = \frac{a - d}{2c}$. Punând în egalitatea (3) $\beta = \alpha + h$, avem

$$1 - \frac{h}{y - \alpha} = \left(1 - \frac{h}{x - \alpha}\right)\left(1 - \frac{ch}{c\alpha + d + h}\right);$$

făcând $h = o$, obţinem, pentru substituţiunea (1), expresiunea

$$(7) \qquad \frac{1}{y - \alpha} = \frac{1}{x - \alpha} + \gamma; \quad \gamma = \frac{2c}{a + d}.$$

In acest caz, substituţiunea (1) se numeşte *parabolică*.

459. *Interpretare geometrică.* Ecuaţiunile (3) şi (7) dau loc la interpretări geometrice simple. Să considerăm mai întâiu ecuaţiunea (3) şi să punem

$$(8)\qquad \frac{x-\beta}{x-\alpha}=\varrho e^{i\theta},\quad \frac{y-\beta}{y-\alpha}=\varrho' e^{i\theta'},\quad k=\nu e^{i\omega};$$

obţinem ecuaţiunile

$$(9)\qquad \varrho'=r\varrho,\quad \theta'=\theta+\omega$$

1°. Ecuaţiunea $\varrho=$ const. şi θ variabil exprimă că punctul x descrie un cerc al cărui centru O se află pe dreapta care uneşte punctele α, β şi care determină pe această dreaptă două puncte A, B armonic conjugate cu punctele α, β

$$\frac{\overline{A\beta}}{\overline{A\alpha}}=\frac{\overline{B\beta}}{\overline{B\alpha}}=\varrho.$$

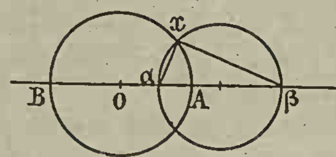

Fig. 94

Raza R a cercului este dată de egalitatea

$$R^2=\overline{O\alpha}.\ \overline{O\beta}.$$

Cercul conţine în interiorul său punctul α (fig. 94), sau punctul β (fig. 95), după cum $\varrho \gtrless 1$. Dacă $\varrho=1$, cercul degenerează într'o linie dreaptă perpendiculară pe dreapta $\overline{\alpha\beta}$, la egală distanţă de aceste puncte.

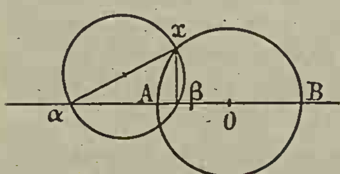

Fig. 95

Cercului $\varrho=$ const. al lui x corespunde cercul $\varrho'=$ const. al lui y, al cărui centru se află pe aceeaş dreaptă $\alpha\beta$. Dacă substituţiunea este eliptică ($\varrho'=\varrho$), cele două cercuri coincid.

2°. Ecuaţiunea $\theta=$ const. şi ϱ variabil exprimă că x descrie un cerc care trece prin punctele α, β; acestui cerc corespunde pentru y cercul determinat de $\theta'=\theta+\omega$, care trece prin aceleaşi puncte. Dacă substituţiunea este iperbolică ($\theta'=\theta$), cele două cercuri coincid.

Cercurile din familia $\varrho=$ const. taie sub un unghiu drept cercurile din familia $\theta=$ const., precum rezultă din egalitatea

$$(\overline{Ox})^2=\overline{O\alpha}.\ \overline{O\beta},$$

care exprimă că raza cercului $\varrho=$ const., în punctul de intersecţiune cu cercul $\theta=$ const., este tangentă la acest cerc.

460. Proprietăţile geometrice considerate mai sus se pot recunoaşte lesne, dacă înlocuim ecuaţiunea (3) cu ecuaţiunea transformată (6) şi raportăm punctele X, Y la acelaş plan (X).

1°. Ecuaţiunea $|X| = \varrho$ (const.) exprimă că punctul X descrie un cerc cu centrul în punctul $X = o$ cu raza ϱ; acestui cerc corespunde cercul concentric $|Y| = |k|\varrho$. Extremităţile diametrelor acestor cercuri sunt puncte armonic conjugate cu centrul $X = o$ şi cu punctul ∞.

În virtutea substituţiunilor (5), cercurile (X), (Y) se transformă în cercuri (x), (y) şi toate diametrele lor se transformă în dreapta care trece prin punctele fixe α, β corespunzătoare punctelor $X = o$, $X = \infty$. Extremităţile acestor diametre se transformă dar în punctele de intersecţiune ale cercurilor (x), (y) cu dreapta $\overline{\alpha\beta}$: cele dintâi fiind conjugate cu punctele $X = o$, $X = \infty$, rezultă că cele din urmă sunt conjugate cu punctele α, β (§ 457, corolar).

Dacă $|k| = 1$, cercurile (X), (Y) coincid, prin urmare şi cercurile (x), (y).

2°. Ecuaţiunea arg $X = \theta$ (constant) exprimă că punctul X descrie o rază vectoară făcând unghiul θ cu axa reală; de unde rezultă, în virtutea conservării unghiurilor, că cercurile $\varrho =$ const. şi $\theta =$ const. sunt ortogonale; deasemenea şi cercurile transformate, corespunzătoare cercurilor $\varrho' = |k|\varrho$, $\theta' = \theta + \omega$. Dacă $\omega = o$, razele vectoare (X), (Y) coincid, prin urmare şi cercurile (x), (y).

461. Să considerăm ecuaţiunea (7) (§ 458)

$$(10) \qquad \frac{1}{y-a} = \frac{1}{x-a} + \gamma,$$

care este, precum am văzut, limita către care tinde ecuaţiunea (3), când β tinde către α după o direcţiune oarecare. Cercurile $\theta =$ const., $\theta' =$ const. cari trec prin punctele α, β devin cercuri tangente în punctul α la direcţiunea lim. $\overline{\alpha\beta}$. Cercurile ϱ=const precum şi cercurile ϱ'=const., având centrele lor pe această dreaptă $(\overline{\alpha\beta})$ pe care o taie în două puncte armonic conjugate cu punctele α, β, vor trece, la limită, prin punctul α. Aceste cercuri au dar, la limită, centrele lor pe tangenta comună în α la cercurile $\theta =$ const.; de unde rezultă că ambele familii $\varrho =$ const., $\theta =$ const. sunt ortogonale în acest punct.

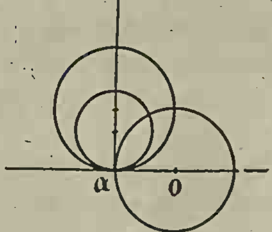

Fig. 96

462. Proprietăţile precedente se mai pot recunoaşte în modul următor:

Să punem $x - \alpha = X$, $y - \alpha = Y$; ecuaţiunea considerată devine

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{X} + \gamma. \tag{11}$$

Dacă punctul X descrie cercuri având aceeaş tangentă în punctul $X = o$, punctul $\frac{1}{X}$ descrie linii drepte paralele (§ 443, II). Punctul $\frac{1}{Y}$ descrie, în virtutea ecuaţiunii (11), drepte paralele cu cele precedente; prin urmare Y descrie cercuri având la origină aceeaş tangentă ca cercurile (X). De unde rezultă că cercurile (x) tangente la aceeaş dreaptă în punctul α, se transformă, în virtutea ecuaţiunii (10), în cercuri cari se bucură de aceeaş proprietate.

Pentru ca un cerc (x) din cele considerate mai sus să coincidă cu cercul transformat (y), este evident necesar şi suficient ca dreptele corespunzătoare $\left(\frac{1}{X}\right)$, $\left(\frac{1}{Y}\right)$ să coincidă. Pentru aceasta este necesar, precum arată ecuaţiunea (11), ca dreptele $\left(\frac{1}{X}\right)$ să fie paralele cu direcţiunea γ. In acest caz, fiecare cerc (x) al sistemului considerat se reproduce prin ecuaţiunea (10).

463. *Aplicaţiune. Două cercuri excentrice C, C′ fiind date, se poate determină o substituţiune lineară care să le transforme în două cercuri concentrice.* Fie A, B; A′, B′ punctele de intersecţiune ale acestor cercuri cu linia care trece prin centrele lor. Fie α, β două puncte, situate pe această dreaptă, armonic conjugate în raport cu ambele cercuri [1]). Substituţiunea

$$y = k\frac{x - \beta}{x - \alpha},$$

în care k este o constantă oarecare, realizează transformarea cerută. In adevăr, ea transformă toate cercurile cari trec prin punctele α, β într'un fascicul de drepte trecând prin punctul $y = o$ şi cercurile C, C′ (ortogonale la toate cercurile cari trec prin α, β) în cercuri C_1, C'_1 ortogonale la acest fascicul de drepte, prin urmare *concentrice, având centrul* $y = o$.

Exemplu. — Scriind substituţiunea considerată sub forma

$$Z = k\frac{z - \beta}{z - \alpha}, \quad z = x + iy, \; Z = X + iY, \tag{1}$$

[1]) Există un asemenea sistem de două puncte şi numai unul.

k fiind o constantă reală, să considerăm cercurile

(2) $$x^2 + y^2 = r^2, \quad (x - a)^2 + y^2 = r_1^2.$$

Condițiunea ca punctele $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ să fie armonic conjugate în raport cu primul cerc este

(3) $$\alpha\beta = r^2$$

și, în raport cu cel de al doilea, această condițiune este

$$(\alpha - a)(\beta - a) = r_1^2,$$

sau, în virtutea condițiunii (3),

(4) $$a(\alpha + \beta) = r^2 - r_1^2 + a^2.$$

Din substituțiunea (1) scoatem expresiunile

(5) $$x = \frac{\alpha[(X-k)^2 + Y^2] + k(\alpha - \beta)(X-k)}{(X-k)^2 + Y^2},$$

$$y = k\frac{(\beta - \alpha)Y}{(X-k)^2 + Y^2}.$$

Ducând aceste valori în prima ecuațiune (2) și ținând seamă de condițiunea (3), obținem ecuațiunea

(6) $$(r^2 - \alpha^2)(X^2 + Y^2) = k^2(\beta^2 - r^2).$$

Aceleași valori (5) duse în ecuațiunea cercului de al doilea și ținând seamă de condițiunea (3) și înlocuind r_1 prin valoarea sa din (4), obținem ecuațiunea

(7) $$[r^2 + a(\alpha - \beta) - \alpha^2](X^2 + Y^2) = k^2[a(\alpha - \beta) + \beta^2 - r^2]$$

Cercurile (6) și (7) sunt cercurile transformate ale cercurilor date. Dând lui k diferite valori reale, obținem atâtea sisteme de cercuri concentrice.

464. *Teorema fundamentală a transformării, prin substituțiuni lineare, a cercurilor în cercuri se mai poate demonstrà în modul următor:*

Un cerc raportat la două axe rectunghiulare $(0\xi, 0\eta)$ poate fi reprezintat prin ecuațiunea

(1) $$Ax\bar{x} + Bx + \bar{B}\bar{x} + C = 0,$$

în care $x = \xi + i\eta$, $\bar{x} = \xi - i\eta$, A și C sunt două constante reale, B și $\bar{B}$ două constante imaginare conjugate [1]. Ceeace se verifică imediat.

---

[1]) Se obișnuește a se notà $\bar{u}$ cantitatea imaginară conjugată cu cantitatea u.

Dacă $A = o$, ecuaţiunea reprezintă o linie dreaptă.

Fie, pentru a demonstrà teorema,

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

o substituţiune lineară oarecare. Inlocuind în această egalitate i prin $-i$, avem

$$\overline{y} = \frac{\overline{a}\,\overline{x} + \overline{b}}{\overline{c}\,\overline{x} + \overline{d}}.$$

Inversele acestor două substituţiuni sunt respectiv

$$x = \frac{-dy + b}{cy - a}, \quad \overline{x} = \frac{-\overline{d}\,\overline{y} + \overline{b}}{\overline{c}\,\overline{y} - \overline{a}}.$$

Substituind aceste valori în ecuaţiunea (1) şi efectuând calculele, obţinem o ecuaţiune de forma

$$A_1 y\overline{y} + B_1 y + \overline{B}_1 \overline{y} + C_1 = 0,$$

în care A_1 şi C_1 sunt cantităţi reale, B_1 şi $\overline{B}_1$ cantităţi imaginare conjugate. Ecuaţiunea transformată reprezintă dar un cerc sau o linie dreaptă, după cum avem $A_1 \neq o$, sau $A_1 = o$.

q. e. d.

465. *Transformarea prin raze vectorii reciproce.* Operaţiunea numită *transformarea prin raze vectorii reciproce* este o modificare a operaţiunii reprezintată prin substituţiunea lineară $y = \frac{a}{x}$, în care a este un număr real şi pozitiv, dacă înlocuim variabila $x = \xi + i\eta$ prin conjugata ei $\overline{x} = \xi - i\eta$.

1⁰. Fie mai întâiu $a = 1$ şi să considerăm substituţiunile

$$y = \frac{1}{x}, \quad \overline{y} = \frac{1}{\overline{x}}, \quad x = re^{i\theta};$$

avem

$$y = \frac{1}{r} e^{-i\theta}, \quad \overline{y} = \frac{1}{r} e^{i\theta}.$$

Punctul x şi punctul transformat $\overline{y}$ sunt pe aceeaş rază vectoară, la distanţe de origină inversă una alteia, iar punctele y şi $\overline{y}$ sunt simetrice în raport cu axa reală. Punctul $\overline{y}$ se zice *transformatul lui x prin raze vectorii reciproce*, sau *inversul* lui x în raport cu cercul $|x| = 1$. Operaţiunea considerată se mai zice *inversiunea* în raport cu origina.

Transformarea este *involutivă*, căci relaţiunea $x\overline{y} = e^{2i\theta}$ nu se schimbă dacă permutăm x cu $\overline{y}$.

Proprietăţile inversiunii rezultă din proprietăţile substituţiunii $y = \frac{1}{x}$ şi din simetria punctelor y şi $\bar{y}$ în raport cu axa reală.

Se conchide că, prin inversiune, cercurile se transformă în cercuri şi unghiurile se conservă. Dacă cercul trece prin origină (*polul* transformării), el se transformă într'o linie dreaptă; viceversa, unei linii drepte corespunde un cerc trecând prin origină. O rază vectoară se transformă în ea însăş.

2°. Fie acum $a = R^2$, $R \neq 1$. Punctul $x = re^{i\theta}$ şi punctul $\bar{y} = \frac{R^2}{x} = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}$ sunt inverse unul altuia în raport cu cercul $|x| = R$. Aceste puncte sunt pe aceeaş rază vectoară şi distanţele lor r, r_1 de origină satisfac egalitatea $rr_1 = R^2$. De unde rezultă că două puncte inverse în raport cu un cerc sunt armonic conjugate în raport cu acest cerc [1]). Viceversa, două puncte armonic conjugate în raport cu un cerc sunt inverse în raport cu cercul. De altă parte, sistemul format dintr'un cerc şi două puncte armonic conjugate în raport cu cercul se transformă, în virtutea substituţiunii $y = \frac{R^2}{x}$, într'un sistem analog; conchidem că sistemul $(\bar{y})$ invers sistem... (x) se bucură de aceeaş proprietate şi, prin urmare, inversi...ea transformă un cerc şi două puncte inverse, în raport cu cercul, într'un sistem de acelaş fel.

O rază vectoară reproducându-se prin inversiune, rezultă, în virtutea conservării unghiurilor, că centrele a două cercuri inverse sunt pe aceeaş rază vectoară; centrele lor însă nu se corespund.

Fie, de ex., C şi C′ centrele a două cercuri inverse în raport cu origina O; aceste trei puncte se află dar pe aceeaş linie dreaptă. Fie A, B extremităţile diametrului cercului (C) situate pe linia centrelor; punctele A′, B′ respectiv inverse punctelor A şi B vor fi extremităţile diametrului cercului (C′). Fie D punctul invers

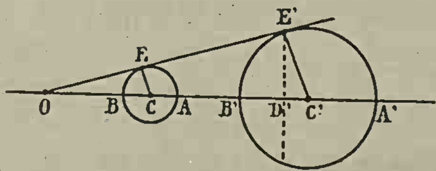

Fig. 97

centrului C (fig. 97); avem egalităţile

$$OC.\ OD = OA.\ OA' = OB.\ OB' = a.$$

De unde

$$\frac{1}{OA'} = \frac{OA}{a}, \frac{1}{OB'} = \frac{OB}{a}; \quad \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{OA + OB}{a} = \frac{2\,OC}{a} = \frac{2}{OD}.$$

[1]) Adică în raport cu extremităţile diametrului care trece prin cele două puncte.

Punctul D, inversul lui C, este aşa dar punctul armonic conjugat cu origina în raport cu extremităţile A′, B′ ale diametrului cercului (C′); prin urmare diferit de centrul C′.

465. *Transformarea în el însuş a semiplanului situat de o parte sau de alta a axei reale.*

Pentru ca un semiplan să se reproducă, sau să se schimbe unul într'altul, este necesar ca axa reală să se reproducă, prin urmare, la valori reale x să corespundă valori reale y. De unde rezultă că coeficienţii substituţiunii

$$(1) \qquad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

trebuie să fie reali. Punând $x = \xi + i\eta$, $y = u + iv$, găsim, pentru v, expresiunea

$$v = \frac{(ad - bc)\,\eta}{(c\xi + d)^2 + c^2\eta^2},$$

care arată că punctele x şi y se găsesc în acelaş semiplan, sau în semiplane diferite, după cum determinantul substituţiunii este pozitiv sau negativ.

Să presupunem determinantul pozitiv; putem să-l facem a fi egal cu 1, multiplicând toţi coeficienţii cu un factor convenabil. Vom presupune dar

$$(2) \qquad ad - bc = 1.$$

Punctele fixe ale substituţiunii (1) fiind rădăcinile ecuaţiunii

$$cx^2 + (d - a)\,x - b = o$$

sunt reale sau imaginare conjugate. Fie α şi β aceste rădăcini, avem egalitatea (§ 458)

$$\frac{y - \beta}{y - \alpha} = k\,\frac{x - \beta}{x - \alpha},$$

în care

$$k = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}},$$

sau, în virtutea ecuaţiunii (2),

$$(3) \qquad k = \frac{a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{a + d + \sqrt{(a + d)^2 - 4}}.$$

Dacă $|a + d| > 2$, ambii termeni ai fracţiunii sunt reali şi de acelaş semn; k este dar real şi pozitiv: substituţiunea este *iperbolică*.

Dacă $|a + d| < 2$, ambii termeni sunt imaginari conjugaţi prin urmare k este de forma $k = e^{i\varphi}$, $o < \varphi < 2\pi$: substituţiunea este *eliptică*. Dacă $|a+d|=2$, rădăcinile sunt egale: substituţiunea este *parabolică*.

Substituţiunea *loxodromică* nu se prezintă în cazul coeficienţilor reali.

467. *Transformarea unui cerc în el însuş.*

Să considerăm cercul $|x|=1$ cu centrul în origină şi cu raza 1 [1]. O substituţiunea lineară care transformă acest cerc în el însuş se poate obţine formând produsul a două substituţiuni S_1, S_2: cea dintâiu care să transforme cercul în axa reală şi cea de a doua transformând axa reală în acest cerc, corespondenţa între punctele celor două linii fiind diferită în cele două substituţiuni, căci altmintrelea produsul s'ar reduce la substituţiunea identică.

1°. Să luăm drept S_1, substituţiunea

$$y = i\,\frac{1-x}{1+x}, \tag{1}$$

care transformă cercul $|x|=1$ în axa reală, astfel că semiplanul $y>o$ corespunde interiorului acestui cerc.

2°. Fie, pentru S_2, substituţiunea

$$z = \frac{ay+b}{cy+d},$$

pe care o determinăm astfel ca axa reală y să se transforme în cercul $|z|=1$, adică astfel ca pentru toate valorile reale y să avem

$$\left|\frac{ay+b}{cy+d}\right| = 1.$$

Pentru aceasta este necesar ca ambii termeni ai fracţiunii să fie imaginari conjugaţi; de unde rezultă condiţiunile

$$c=\bar{a}, \quad d=\bar{b}.$$

Substituţiunea

$$z = \frac{ay+b}{\bar{a}y+\bar{b}} \tag{3}$$

transformă dar axa reală y în cercul $|z|=1$. Inlocuind în această expresiune y prin valoarea sa (1), obţinem substituţiunea

$$z = \frac{(b-ia)\,x+(b+ia)}{(\bar{b}-i\bar{a})\,x+(\bar{b}+i\bar{a})}, \tag{4}$$

care transformă cercul $|x|=1$ în el însuş. Verificarea este imediată,

[1] Orice alt caz se poate aduce la acesta.

căci punând $x = e^{i\theta}$, ambii termeni ai membrului al doilea sunt imaginari conjugați.

Punând $b - ia = \alpha$, $b + ia = \beta$, avem $\bar{b} - i\bar{a} = \bar{\beta}$, $\bar{b} + i\bar{a} = \bar{\alpha}$; prin urmare, scriind a, b în loc de α, β și y în loc de z, substituțiunea (4) se va scrie

$$y = \frac{ax + b}{\bar{b}x + \bar{a}}. \tag{5}$$

Această substituțiune transformă cercul $|x| = 1$ în el însuș. Punctul y_0 corespunzător centrului $x = o$ este dat de egalitatea

$$y_0 = \frac{b}{\bar{a}}. \tag{6}$$

Pentru ca acest punct să fie interior cercului, prin urmare pentru ca punctele interioare cercului $|x| = 1$ să se corespundă, trebuie să avem inegalitatea $\left|\frac{b}{\bar{a}}\right| < 1$; de unde, în virtutea egalității $\left|\frac{b}{\bar{a}}\right| = \left|\frac{\bar{b}}{a}\right|$, rezultă condițiunea

$$a\bar{a} - b\bar{b} > o. \tag{7}$$

Punctele fixe x_1, x_2 ale substituțiunii (5) satisfăcând egalitatea $x_1 x_2 = -\frac{b}{\bar{b}}$, avem între ele relațiunea

$$|x_1 x_2| = 1. \tag{8}$$

Printr'o transformare convenabilă putem face ca centrul $x = o$ să fie unul din punctele fixe ale substituțiunii; atunci celalt punct fix va fi la infinit și substituțiunea va avea forma $y = e^{i\omega} x$, $o < \omega < 2\pi$.

Pentru a obține această substituțiune, să reprezintăm prin c extremitatea razei care trece prin punctul y_0 și să considerăm expresiunea

$$\frac{z - c}{z + c} = \frac{c + y_0}{c - y_0} \cdot \frac{y - c}{y + c}, \tag{9}$$

care transformă punctul y_0 în punctul $z = o$. Intre y_0 și c avem relațiunea

$$y_0 = c r_0, \quad r_0 = |y_0|. \tag{10}$$

Inlocuind în (9) y prin valoarea sa (5), avem

$$\frac{z - c}{z + c} = \frac{1 + r_0}{1 - r_0} \, \frac{ax + b - c(\bar{b}x + \bar{a})}{ax + b + c(\bar{b}x + \bar{a})}. \tag{11}$$

Dacă punem $a = re^{i\alpha}$, avem $\bar{a} = re^{-i\alpha}$. Relațiunea (6) ne dă

$b = y_0 \bar{a} = c\rho\rho_0 e^{-ia}$; de unde $\bar{b} = \frac{1}{c}\rho\rho_0 e^{ia}$. Ducând acest valori în egalitatea (11), obținem

$$\frac{z-c}{z+c} = \frac{e^{2ia}x - c}{e^{2ia}x + c}.$$

De unde substituțiunea căutată

(12) $$z = e^{2ia}.x.$$

Observare: Dacă a este real ($a = o$, sau π), substituțiunea (12) se reduce la identitate. Acest rezultat se justifică direct, dacă arătăm că substituțiunea dintre x și z, care are punctele fixe $0, \infty$ are, în cazul considerat, și punctele fixe $\pm c$; având astfel mai mult decât două puncte fixe, ea se reduce la identitate.

Punctele $\pm c$ fiind fixe pentru substituțiunea (9) dintre y și z, este deajuns a probà că ele sunt fixe pentru substituțiunea (5) dintre x și y.

Coeficientul a fiind real, avem $\bar{a} = a$ și substituțiunea (5) devine

(5') $$y = \frac{ax + b}{\bar{b}x + a}.$$

Punctele fixe ale acestei substituțiuni sunt date de ecuațiunea $\bar{b}x^2 = b$. Punând $b = |b|e^{i\beta}$, rezultă, pentru aceste puncte, valorile x_1, $x_2 = \pm e^{i\beta}$.

Presupunând $a > o$ [1]), avem, în virtutea egalității (6), $\arg y_0 = \beta$. De altă parte, relațiunea (10) ne dă $\arg y_0 = \arg c$; prin urmare $c = e^{i\beta}$. Punctele x_1, x_2 coincid dar cu punctele $\pm c$.

468. *Nu există altă substituțiune decât cea lineară, care să transforme, într'un mod conform, un cerc în el însuș.*

Această propozițiune se poate demonstrà cu ajutorul teoremei următoare a lui *H. Schwarz* [2]).

I. — *Teoremă. Dacă $f(x)$ este o funcțiune de forma*

(1) $$f(x) = xP(x),$$

$P(x)$ fiind o serie întreagă convergentă în cercul $|x| = 1$ și satisface, în acest cerc, inegalitatea

(2) $$|f(x)| \leq 1,$$

avem pentru toate punctele $o < |x| < 1$, inegalitatea

$$|f(x)| \leq |x|.$$

---

[1]) Dacă $a < o$, schimbăm semnele amb lor termeni ai fracțiunii.

[2]) *Das Schwarzsche Lemma.* Bieberbach. *Einführung in die konforme Abbildung.*

Semnul = corespunde numai cazului $f(x) = e^{i\alpha}x$.

1^0. Fie ϱ un număr pozitiv < 1; modulul $|P(x)|$ nu poate atinge maximul său în cercul $|x| = \varrho$ decât pe periferie. Insă pe această periferie avem

$$|P(x)| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{|f(x)|}{\varrho};$$

prin urmare, în virtutea inegalităţii (2), avem

$$|P(x)| \leq \frac{1}{\varrho}.$$

Membrul întâi este independent de r. za ϱ, care poate primi orice valoare pozitivă având limita superioară egală cu 1. Pentru $\varrho = 1$ şi $|x| < 1$, avem aşa dar

(3) $$|P(x)| \leq 1.$$

De unde rezultă inegalitatea

(4) $$|f(x)| \leq |x|.$$

2^0. Dacă $P(x)$ nu este o constantă, nu există nici un punct în interiorul cercului $|x| = 1$, în care să avem $|P(x)| = 1$. In adevăr, fie x_0 un punct în interiorul cercului astfel ca $|P(x_0)| = 1$ şi $|x - x_0| = r$ un cerc interior cercului $|x| = 1$. Pe periferia acestui cerc există cel puţin un punct x astfel ca $|P(x)| > |P(x_0)|$; prin urmare în acest punct avem $|P(x)| > 1$: ceeace este contrar inegalităţii (3).

Dacă dar există în interiorul cercului un singur punct x astfel că $|P(x)| = 1$, sau $|f(x)| = |x|$, $P(x)$ este neapărat o constantă, având modulul 1 şi prin urmare

$$f(x) = e^{i\alpha}x.$$

Aşa dar, în afară de acest caz, avem în interiorul cercului inegalitatea

(5) $$|f(x)| < |x|.$$

II. — Să demonstrăm acum că *nu există altă substituţiune decât*

$$y = e^{i\alpha}x,$$

care să transforme, într'un mod conform, cercul $|x| = 1$ *în el însuş.*

In adevăr, fie $y = f(x)$ o substituţiune care transformă, într'un mod conform, cercul $|x| = 1$ în el însuş. Centrul cercului transformat fiind acelaş $(x = o)$ cu al cercului primitiv şi punctul y trebuind, în virtutea ipotezei, să fie interior acestui cerc, rezultă inegalitatea

(6) $$|y| < 1,$$

pentru toate punctele x interioare cercului $|x| = 1$. De unde conchidem, în virtutea teoremei lui Schwarz, inegalitatea

$$(7) \qquad |y| < |x|,$$

valabilă în acelaş cerc.

Procedând în sens invers, adică privind x ca funcţiune de y, conchidem deasemenea, în virtutea transformării conforme, inegalitatea

$$(8) \qquad |x| < |y|.$$

Din contradicţiunea inegalităţilor (7) şi (8) rezultă egalitatea

$$(9) \qquad y = e^{i\alpha}x. \qquad \text{q. e. d.}$$

ERRATA

Pag. 142. Nota; linia a doua:

Să se cetească: $m \neq n$ în loc de: $m \pm n$.

Pag. 244, (8):

Să se cetească: a_n în loc de: a^n.

Pag. 321, penultima linie:

Să se cetească: inversiunea seriei integralei u din pag. 320 în loc de: inversiunea seriei (2) (§ 381).

Pag. 51, rîndul 17 de sus: a se citi nedeterminat în loc de neterminat.

TIPARUL CVLTVRA NAȚIONALĂ 1924