LECȚIUNI DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
PUBLICATE SUB ÎNGRIJIREA D-LUI GHEORGHE BRATU,
PROFESOR DE ANALIZĂ MATEMATICĂ LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

VOLUMUL I.

LECȚIUNI
DE
CALCUL DIFERENȚIAL

REDACTATE DE

AUREL ANGELESCU,
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ.

MULȚIMI. — LIMITE. — SERII.
DERIVATE ȘI DIFERENȚIALE. — EXTREME.
SCHIMBĂRI DE VARIABILE.

CLUJ,
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL"
STR. MEMORANDULUI 22.
1927.

CURS

DE

ANALIZĂ MATEMATICĂ.

VOLUMUL I.

LECŢIUNI DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
PUBLICATE SUB ÎNGRIJIREA D-LUI GHEORGHE BRATU,
PROFESOR DE ANALIZĂ MATEMATICĂ LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

VOLUMUL I.

LECŢIUNI
DE
CALCUL DIFERENŢIAL

REDACTATE DE

AUREL ANGELESCU,
PROFESOR LA FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ.

MULŢIMI. — LIMITE. — SERII.
DERIVATE ŞI DIFERENŢIALE. — EXTREME.
SCHIMBĂRI DE VARIABILE.

CLUJ,
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL“
STR. MEMORANDULUI 22.
1927.

Dedicăm acest prim curs de Analiză Matematică tipărit în limba română, Domnului

Dimitrie Pompeiu

Profesor la Universitatea din București,
Organizatorul și directorul Seminarului de Matematici
dela Universitatea din Cluj,

în semn de admirație și dragoste colegială.

INȘTIINȚARE.

Ca profesor de Calcul diferențial și integral la Facultatea de Științe din Cluj, am avut ocazia să constat, în fiecare an, cât de mult se resimte — mai ales pentru studenții din noile provincii românești — lipsa unui tratat de ANALIZĂ MATEMATICĂ *în limba română.*

Pe de altă parte, din publicarea manualului meu de MATEMATICI GENERALE, *cunoscând sacrificiile de timp și de muncă, ce necesită redactarea unui astfel de curs, precum și greutatea cu care se tipărește la noi o carte de Matematici superioare și totuși pentru a asigurà apariția cât mai repede a acestor lecțiuni, m'am adresat la câțiva colegi de la Universitatea din Cluj, rugându-i să colaboreze la redactarea unui manual elementar de* ANALIZĂ MATEMATICĂ, *în care să fie tratate toate chestiunile, care se cer de obicei la examenul de Calcul diferențial și integral pentru licență în Matematici.*

Modalitatea la care ne-am oprit este aceea de a scoate cursul în mai multe volume, cu a căror coordonare și uniformizare mă voiu ocupà eu, așà ca toate volumele împreună să poată formà un tot.

Primul volum, întitulat: LECȚIUNI DE CALCUL DIFERENȚIAL, *e redactat de D-l* A. ANGELESCU, *profesor de Teoria Funcțiunilor la Universitatea din Cluj. Volumul al doilea* LECȚIUNI DE CALCUL INTEGRAL *va fi redactat de mine. Celelalte volume vor fi destinate aplicațiilor geometrice, ecuațiilor diferențiale și ecuațiilor cu derivate parțiale.*

Țin să exprim acì mulțumirile mele Ministerului Instrucțiunii, care a binevoit să ne înlesnească apariția acestui prim volum, precum și Institutului de Arte Grafice „Ardealul", care — cu toate sacrificiile legate de imprimarea unui curs de Analiză Matematică — și-a dat toată silința ca aceste lecțiuni să apară în condițiile cele mei ieftine și cele mai bune.

Cluj, 17 Noembrie 1926.

GHEORGHE BRATU.

PREFAȚĂ.

Titlul de Lecțiuni de Calcul Diferențial dat acestui volum este poate prea restrâns, căci primele trei capitole, adică aproape jumătate din cuprinsul acestor lecțiuni, sunt destinate chestiunilor întroductive: Mulțimi de numere, Limite, Funcțiuni și Serii.

Am căutat în expunerea făcută să fiu cât mai elementar, atingând numai, fără a intra în prea multe detalii, chestiunile mai delicate ce sunt desbătute în câteva din tratatele moderne de Analiză Metematică.

Pentru lămurirea și complectarea teoriilor expuse am crezut util să adaug după fiecare capitol un mic număr de exerciții, în parte noi, a căror soluție se găsește indicată în mod sumar.

Scopul lecțiunilor de față nu este altul de cât de a pune la îndemâna studenților noștri un manual didactic de Calcul Diferențial scris în românește.

Aurel Angelescu.

TABLA DE MATERII.

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL.

CAPITOLUL I.

MULȚIMI DE NUMERE. — LIMITE.

I. — NUMERE REALE. — MULȚIMI.

1. Numere raționale. NUMERE ÎNTREGI. Nu vom încerca să dăm o definițiune a numerelor întregi; vom considera această noțiune ca intuitivă. Nu ne oprim nici asupra operațiunilor cu aceste numere. Vom observa numai că ideia de *infinit* este cuprinsă în acea de număr întreg: *șirul numerelor întregi este nelimitat*, pentru că după fiecare număr întreg urmează un alt număr întreg diferit de el și de toate celelalte numere dinaintea lui.

NUMERE FRACȚIONARE. Măsura lungimilor a întrodus din timpurile cele mai vechi numerele *fracționare*. Putem considera o fracție $\frac{m}{n}$ (m și n numere întregi) ca o păreche de numere având roluri diferite. Definirea operațiunilor cu aceste numere trebue să fie astfel făcută, ca să nu conducă la contraziceri. Așa, de exemplu, definiția produsului a două fracții $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ trebue să ne conducă la definiția produsului a două numere întregi, atunci când m e divizibil prin n și p e divizibil prin q.

NUMERE NEGATIVE. Numerele negative s'au întrodus în algebră ca soluții false ale ecuațiilor. Din interpretarea acestor soluții s'a degajat treptat, treptat ideia de număr negativ și număr pozitiv. Considerarea numerelor precedate de semnul $+$ sau $-$ pentru a determina un punct pe o axă *dirijată* a fost un eveniment de cea mai mare importanță în evoluția științelor matematice.

NUMERE RAȚIONALE. Numărul *zero* împreună cu numerele întregi și fracționare, pozitive și negative, formează mulțimea numerelor *raționale*.

Din două numere raționale distincte a și b unul este *mai mare* de cât celălalt. Dacă a este mai mare decât b, scriem $a > b$ sau $b < a$.

Dacă între trei numere a, b, c avem $a > b$ și $b > c$, vom avea și $a > c$. Exprimăm aceste proprietăți zicând că mulțimea numerelor raționale este *ordonată*.

Mai reamintim că între două numere raționale diferite putem întotdeauna intercala altele mai mari de cât cel mai mic și mai mici de cât cel mai mare și astfel încât diferența dintre două numere consecutive se fie ori cât de mică vrem.

2. Numere iraționale. Noțiunea de tăetură [1]. Definirea numerelor *iraționale* o vom bază pe posibilitatea de a separă *totalitatea* numerelor raționale în două clase, o clasă inferioară A și o clasă superioară B astfel ca:

1) Orice număr rațional să facă parte sau din clasa A sau din clasa B.

2) Orice număr rațional a din clasa A să fie mai mic de cât orice număr rațional b din clasa B.

Când am obținut o astfel de separare zicem că am făcut o *tăetură în șirul numerelor raționale*. Vom vedea, mai departe, unele procedee simple, care ne conduc la tăeturi.

In privința claselor A și B trei cazuri sunt posibile:

1°. Clasa inferioară A conține un număr α mai mare decât *toate* celelalte numere din această clasă.

Prin urmare clasa A este formată din numărul α și din toate numerele raționale mai mici decât α; iar clasa B din toate numerele mai mari decât α. In acest caz observăm că din definiția claselor A și B reiese că *în clasa* B *nu putem avea nici un număr mai mic decât toate celelalte numere* din această clasă. (A) B este vorba tot de clasa B.

In adevăr, dacă un astfel de număr β ar exista, el ar fi mai mare decât α, căci este din clasa B și între α și β, diferite, ar exista alte numere raționale, care ar fi *toate* în afară de clasele A și B, ceeace este în contrazicere cu definiția acestor clase.

2°. Ipoteza precedentă ne fiind realizată, să presupunem că clasa superioară B ar conține un număr α mai mic decât toate celelalte numere din această clasă. Prin urmare clasa B este formată din numărul α și din toate numerele mai mari decât α, iar clasa A din toate numerele mai mici decât α. In acest caz, *în clasa* A, *nu putem avea nici un număr mai mare decât toate celelalte numere* din această clasă.

Aceste două cazuri sunt foarte ușor de realizat. Luăm un număr oarecare α; așezăm în clasa A toate numerele mai mici decât α și în clasa B toate numerele mai mari decât α. Dacă așezăm numărul α în

---

[1] Noțiune datorită lui Dedekind.

clasa A, avem cazul întâi, dacă îl aşezăm în clasa B, avem cazul al doilea. In ambele cazuri zicem că numărul α determină *tăetura* (A, B) şi că această tăetură este *raţională.*

3⁰. Se poate însă întâmpla să nu existe *nici în clasa* A *un număr mai mare decât toate, nici în clasa* B *un număr mai mic decât toate.*

Fie, de exemplu, β un număr raţional, pozitiv şi nu patrat perfect; vom aşeza în clasa A toate numerele raţionale negative şi numerele raţionale pozitive al căror patrat e mai mic decât β, iar în clasa B toate numerele raţionale pozitive al căror patrat e mai mare decât β.

Aşa fiind, în clasa A nu poate exista un număr mai mare decât toate celelalte. In adevăr, dacă a este un număr din clasa A, patratul lui e mai mic decât β şi calculând rădăcina patrată din β, cu un număr suficient de cifre zecimale, *prin lipsă*, putem găsi întotdeauna un număr raţional α, care să satisfacă neegalităţile $\alpha > a$ şi $\alpha^2 < \beta$.

In mod analog se arată că în clasa B nu poate fi nici un număr mai mic decât toate celelalte.

Când condiţiile cazului 3⁰ sunt îndeplinite, zicem că tăetura este *iraţională*. Tăetura (A, B) ne defineşte un *număr iraţional* prin condiţia ca acest număr să fie *mai mare decât toate numerele din clasa* A şi *mai mic de cât toate numerele din clasa* B. Vom însemna, de aci înainte, acest număr cu o literă.

EXEMPLE de numere iraţionale: $\sqrt{5}$, π, e, etc.

Totalitatea numerelor iraţionale corespunde la totalitatea tăeturilor de tipul 3⁰ posibile.

VALORI APROPIATE. Fie λ un număr iraţional definit prin tăetura (A, B) şi ε un număr raţional pozitiv ori cât de mic voim. Să considerăm progresia aritmetică

$$a,\ a+\varepsilon,\ a+2\varepsilon,\ a+3\varepsilon,\ldots \tag{1}$$

unde a este un număr din clasa A. Termenii acestei progresii crescând la infinit cu n, vom găsi în ea şi termeni din clasa B. Fie $a+n\varepsilon$ primul termen al progresiei (1), care aparţine clasei B; $a+(n-1)\varepsilon$ aparţine clasei A şi avem

$$a+(n-1)\varepsilon < \lambda < a+n\varepsilon.$$

Numerele raţionale $a+(n-1)\varepsilon$ şi $a+n\varepsilon$ se zic *valori apropiate de* λ *cu o aproximaţie mai mică de cât* ε, primul *prin lipsă*, al doilea *prin adaos.*

Prin urmare: Oricât de mic ar fi numărul raţional şi pozitiv ε, putem determina întotdeauna două numere raţionale a şi b, respectiv din clasele A şi B ale unui număr iraţional λ, aşa încât să avem $b-a=\varepsilon$.

Vom puteà găsi astfel:

$$
\begin{array}{llll}
\text{pentru } \varepsilon=\frac{1}{10} & \text{numerele } a_1,\ b_1 & \text{cu } b_1-a_1=\frac{1}{10} \\
\quad\text{»} \quad \varepsilon=\frac{1}{100} & \quad\text{»} \quad a_2,\ b_2 & \text{»} \quad b_2-a_2=\frac{1}{100} \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
\quad\text{»} \quad \varepsilon=\frac{1}{10^n} & \quad\text{»} \quad a_n,\ b_n & \text{»} \quad b_n-a_n=\frac{1}{10^n}
\end{array}
$$

şi vom avea

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \dots \leqq a_n \leqq \dots$$

$$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \dots \geqq b_n \geqq \dots$$

cu

$$a_n < \lambda < b_n$$

pentru orice valoare a lui n.

3. **Numerele reale.** Totalitatea numerelor *raţionale* şi *iraţionale* formează *mulţimea* numerelor *reale*.

Ordonarea numerelor reale implică determinarea relaţiilor de egalitate şi neegalitate dintre aceste numere.

Compararea unui număr *raţional* r cu un număr *iraţional* λ, determinat de tăetura (A, B), este imediată: dacă numărul r se găseşte în clasa A, este *mai mic* decât λ, iar dacă se găseşte în clasa B este *mai mare* decât λ.

Să comparăm acum două numere *iraţionale*. Fie λ un număr iraţional definit prin tăetura (A, B). Vom zice că alt număr iraţional λ' definit prin tăetura (A′, B′) este *egal* cu λ, atunci când orice număr din clasa A′ face parte din clasa A şi orice număr din clasa B′ face parte din clasa B. Vom zice că numărul raţional λ' este *mai mare* decât λ, sau că λ este *mai mic* decât λ', dacă un număr din clasa A′ se găseşte în clasa B.

Un număr real este *pozitiv*, dacă este mai mare decât un număr raţional pozitiv; este *negativ*, dacă este mai mic decât un număr raţional negativ. Prin urmare putem scrie şi pentru numerele iraţionale $\lambda>0$ pentru λ pozitiv, şi $\lambda<0$ pentru λ negativ.

Să arătăm acum că *între două numere reale diferite putem întotdeauna intercala un număr raţional* şi deci *o infinitate.*

In adevăr, dacă amândouă numerele sunt iraţionale, propoziţia se confundă cu definiţia pe care am dat-o neegalităţii a două numere iraţionale.

Să presupunem însă că numai unul din numere este iraţional, definit prin tăetura (A, B). Celălalt număr, fiind raţional, se va găsi în clasa A sau în clasa B, dar nu va fi nici cel mai mare din clasa A, nici cel mai mic din clasa B; prin urmare şi în acest caz propoziţia este adevărată.

In fine când ambele numere sunt raţionale, propoziţia este cunoscută din aritmetica elementară.

Simetricul unui număr raţional se numeşte acel număr *schimbat de semn.* Să extindem această definiţie la numerele iraţionale.

Fiind dat un număr real λ definit prin tăetura (A, B), vom însemna cu $-A$ şi $-B$ clasele ce se obţin respectiv din A şi B când, luăm simetricele numerelor ce le compun; este evident că în clasele $-A$ şi $-B$ impreună întră *totalitatea* numerelor raţionale şi că fiecare număr din clasa $-B$ este mai mic decât fiecare număr din clasa $-A$. Tăetura $(-B, -A)$ defineşte deci un număr *real*, pe care îl însemnăm cu $-\lambda$ şi vom zice că este *simetricul* lui λ.

Dacă un număr este pozitiv, simetricul său este negativ. Dintre numerele λ şi $-\lambda$ acel, care este *pozitiv*, se numeşte *valoarea absolută* a lui λ şi se notează cu $|\lambda|$.

Inversul unui număr raţional r este $\frac{1}{r}$. Fie λ un număr iraţional; putem considera acest număr ca o tăetură făcută în totalitatea numerelor raţionale *de acelaş semn* cu el şi fie (A, B) acea tăetură. Să însemnăm cu A^{-1} şi B^{-1} clasele formate respectiv de *inversele* numerelor din A şi din B. Cum orice număr raţional diferit de zero este inversul unui număr raţional, rezultă că tăetura (B^{-1}, A^{-1}) defineşte un număr iraţional de acelaş semn cu λ, pe care îl vom însemna cu $\frac{1}{\lambda}$ şi îl vom numi *inversul* lui λ.

4. Operaţiile cu numere reale. Adunarea. Fie λ şi λ' două numere *reale* şi a, b, a' b' patru numere *raţionale* aşa încât să avem

$$a < \lambda < b, \quad a' < \lambda' < b'.$$

Este evident că:

1⁰. toate numerele raţionale de forma $a + a'$ sunt mai mici decât numerele de forma $b + b'$;

2⁰. nici unul dintre numerele $a + a'$ nu e mai mare decât toate numerele de forma $a + a'$;

3⁰. nici unul dintre numerele $b + b'$ nu e mai mic decât toate numerele de forma $b + b'$.

Să arătăm că există un număr real λ'' şi numai unul, mai mare decât toate numerele $a + a'$ şi mai mic decât toate numerele $b + b'$.

In adevăr, punând în clasa A orice număr raţional care e mai mic decât toate numerele de forma $b+b'$ şi în clasa B toate celelalte numere raţionale, am format tăetura (A, B), care defineşte un număr real λ''. In particular, în clasa A sunt toate numerele de forma $a+a'$ şi în clasa B toate numerele de forma $b+b'$ şi cum nu există un număr, care să fie cel mai mare de forma $a+a'$ şi nici un număr cel mai mic de forma $b+b'$, trebue să avem

$$a+a' < \lambda'' < b+b'.$$

Numărul λ'' este *unic*. In adevăr, dacă ar fi două numere λ_1 şi λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) care să satisfacă la neegalitatea precedentă, am avea, pentru toate numerele a, a', b, b' considerate, neegalitatea

$$\lambda_2 - \lambda_1 < (b+b') - (a+a') = b - a + b' - a',$$

ceeace este imposibil, deoarece există numere a, b, a', b' pentru care diferenţele $b-a$ şi $b'-a'$ pot fi ori cât de mici, în particular mai mici decât $\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$. Numărul λ'' astfel definit se numeşte *suma* numerelor reale λ, λ'. Vom scrie dar

$$\lambda + \lambda' = \lambda''.$$

Din această difiniţie a adunării, care cuprinde ca un caz particular adunarea numerelor raţionale, reiese proprietatea *comutativă*

$$\lambda + \lambda' = \lambda' + \lambda.$$

In mod analog se defineşte suma a mai multor numere reale şi se verifică proprietatea *asociativă*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma.$$

Să verificăm că suma numerelor λ şi λ', unde λ' este *simetricul* lui λ, este *nulă*. Se vede imediat, în acest caz, că numerele de forma $a+a'$ sunt toate negative şi numerele de forma $b+b'$ sunt toate pozitive; deci $\lambda+\lambda'=0$.

Scăderea. Pentru a scădea un număr λ din numărul μ, vom adăuga numărului μ pe λ', simetricul lui λ; rezultatul d al scăderei îl numim *diferenţă*, deci

$$d = \mu + \lambda'.$$ $\lambda = -\lambda'$

Se vede imediat că, dacă adunăm pe λ cu d, căpătăm pe μ, conform definiţiei obişnuite a scăderei, deoarece

$$d + \lambda = (\mu + \lambda') + \lambda = \mu + (\lambda' + \lambda) = \mu.$$

Se mai poate scrie

$$d = \mu - \lambda.$$

ÎNMULŢIREA. λ şi λ' fiind două numere reale pozitive, să considerăm toate numerele raţionale şi *pozitive* a, b, a', b', care verifică negalităţile

$$a < \lambda < b \quad , \quad a' < \lambda' < b'.$$

Produsele de forma $a\,a'$ sunt mai mici decât cele de forma $b\,b'$ şi cum există diferenţe de formele $b - a$ şi $b' - a'$, care să fie ori cât de mici voim, rezultă că sunt şi diferenţe de forma $b\,b' - a\,a'$ oricât de mici am voi. Raţionând atunci ca în cazul adunării, vedem că există un număr real şi pozitiv λ'', şi numai unul, mai mare decât toate produsele de forma $a\,a'$ şi mai mic decât cele de forma $b\,b'$. Acest număr se numeşte *produsul* numerelor λ şi λ'.

Vom scrie dar

$$\lambda\,.\,\lambda' = \lambda''.$$

Regula semnelor se extinde imediat în cazul când unul sau ambele numere λ, λ' ar fi negative.

Proprietăţile *comutative*, *asociative* şi *distributive* reprezentate prin egalităţile

$$\alpha\beta = \beta\alpha \quad , \quad \alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma \quad , \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$

se verifică imediat.

Un produs de mai mulţi factori nu poate fi *nul*, decât dacă unul din factori este nul.

Se mai verifică uşor că produsul unui număr prin inversul său este egal cu 1.

ÎMPĂRŢIREA. Pentru a împărţi un număr λ printr'un număr μ, vom înmulţi pe λ prin μ_1, inversul lui μ. Rezultatul c al acestei operaţii se numeşte *cât*. Se verifică imediat că $\mu\,c = \lambda$.

Mai putem scrie

$$\frac{\lambda}{\mu} = c.$$

PUTERI RAŢIONALE. Dacă n este un număr întreg şi pozitiv, *ridicarea la puterea* n a unui număr λ este o consecinţă imediată a definiţiei înmulţirii.

Să definim rădăcina aritmetică de ordinul n a unui număr pozitiv λ. Vom separa totalitatea numerelor raţionale *pozitive* în două clase A şi B: în clasa A vom pune acele numere raţionale, care ridicate la puterea n-a ne dau numere mai mici decât λ, iar în clasa B vom pune celelalte numere raţionale pozitive. Am format astfel o tăetură (A, B), care ne defineşte un număr numit *rădăcina de ordinul* n din λ şi pe care îl însemnăm prin $\sqrt[n]{\lambda}$.

Se vede imediat că numărul $\sqrt[n]{\lambda}$ astfel definit este iraţional, afară de cazul când λ ar fi puterea a n-a a unui număr raţional.

Prin definiţie avem apoi

$$\lambda^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\lambda^m} \quad , \quad \lambda^0 = 1 \quad , \quad \lambda^{-r} = \frac{1}{\lambda^r}$$

unde m şi n sunt numere întregi pozitive şi r un număr raţional.

Aceste definiţii sunt suficiente pentru a stabili, fără nici o dificultate, regulele de calcul cu exponenţi raţionali pozitivi sau negativi.

Egalităţi şi neegalităţi. Se poate arăta uşor că regulele elementare cunoscute de transformare şi de combinare a egalităţilor şi neegalităţilor subzistă şi pentru numerele astfel generalizate.

5. **Corespondenţa între mărimi şi numere.** Numerele reale se întrebuinţează pentru a exprimà măsura mărimilor concrete. Se admite, ca un postulat, că, dacă unitatea de măsură a fost aleasă, la fiecare *cantitate* dintr'o mărime corespunde un *număr* şi reciproc.

Să considerăm o dreaptă nesfârşită pe care vom lua:

1⁰. un punct O ca *origine*;

2⁰. un *sens pozitiv*, de exemplu dela O spre dreapta;

3⁰. un segment *unitate* OA în sensul pozitiv.

Vom zice că punctele O şi A corespund respectiv numerelor 0 şi 1.

La orice *punct* P depe dreaptă va corespunde un *număr real* $a = OP$ bine determinat, pozitiv dacă punctul P se găseşte de aceeaş parte cu A faţă de O, negativ în caz contrar; şi reciproc, la oricare număr real a corespunde un punct $P(a = OP)$. Ţinând seama de această reprezentare geometrică, vom puteà zice, de aci înainte, în loc de numărul a, punctul a şi invers.

6. **Marginile unei mulţimi de numere.** Când avem un număr finit sau infinit de numere, care se bucură toate de o proprietate comună, zicem că avem o *mulţime* de numere.

Spre exemplu, putem considerà mulţimea numerelor raţionale, mulţimea numerelor cuprinse între 0 şi 1, mulţimea numerelor întregi şi pozitive mai mici decât 100, etc.

Dacă mulţimea este formată dintr'un număr *finit* de numere, atunci unul din numerele mulţimii este mai mare decât celelalte. Când mulţimea cuprinde un număr *infinit* de numere, nu mai putem afirmà acelaş lucru; aşa, de exemplu, în mulţimea numerelor *negative* nu există nici un număr mai mare decât toate celelalte. Aceste constatări ne conduc la noţiunile de *margini* ale unei mulţimi.

O mulţime este *mărginită superior* sau *la dreapta*[1], dacă putem determina un număr A mai mare decât toate numerele mulţimii; este *mărginită inferior* sau *la stânga*, dacă putem determina un număr a mai mic de cât toate numerele mulţimii. Dacă mulţimea este mărginită şi superior şi inferior, zicem că este *mărginită*.

MARGINE SUPERIOARĂ. Fie (μ) o mulţime de numere mărginită superior. Faţă de această mulţime putem despărţi *toate* numerele *reale* în două clase A şi B. Vom zice că un număr n este din clasa A, dacă există cel puţin un număr, din mulţimea (μ), mai mare de cât n; în caz contrar n este din clasa B. Cum am presupus mulţimea (μ) mărginită superior, este evident că avem numere din ambele clase şi că orice număr din clasa A este mai mic decât orice număr din clasa B.

Să arătăm că există un număr M, care desparte aceste două clase; adică orice număr mai mic decât M este în clasa A şi orice număr mai mare decât M este în clasa B. In adevăr, zic că numărul M este numărul definit prin tăetura $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ făcută în modul următor în totalitatea numerelor raţionale: luăm în clasa inferioară $\mathfrak{A}$ toate numerele *raţionale* cuprinse în A şi în clasa superioară $\mathfrak{B}$ toate numerele *raţionale* cuprinse în B. Aşa fiind, orice număr raţional mai mare decât M este în clasa B şi orice număr raţional mai mic decât M este în clasa A. Un număr *iraţional* mai mare decât M, este mai mare decât o infinitate de numere *raţionale* mai mari decât M, adică din clasa B, deci şi acel număr iraţional este în clasa B; tot astfel se vede că orice număr iraţional mai mic decât M este în clasa A.

Acest număr M se bucură de următoarele două proprietăţi:

1⁰. *Nici un număr din mulţimea* (μ) *nu este mai mare decât* M.

2⁰. *Oricât de mic ar fi numărul pozitiv* ε, *există întotdeauna, în mulţimea* (μ), *un număr mai mare decât* $M-\varepsilon$.

In adevăr, dacă ar exista în mulţimea (μ) un număr de forma $M+h$, $(h>0)$, atunci numărul $M+\frac{h}{2}$ ar fi în clasa A, ceeace este absurd. Proprietatea 2⁰ este şi ea o consecinţă imediată a definiţiei numărului M: numărul $M-\varepsilon$ face parte din clasa A, deci avem în mulţimea (μ) cel puţin un număr mai mare decât $M-\varepsilon$.

Numărul M astfel definit se numeşte *marginea superioară* a mulţimii (μ); el poate face parte sau nu din mulţimea (μ).

EXEMPLE. In mulţimea de numere *fracţionare*

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

[1] Având în vedere reprezentarea geometrică a numerelor.

avem $M=1$ şi acest număr nu aparţine mulţimii, pentru că nu este fracţionar. Dar în mulţimea numerelor al căror patrat nu este mai mare decât 2, avem $M=\sqrt{2}$ şi el aparţine mulţimii considerate.

OBSERVĂRI. I. Se vede imediat că nu putem avea decât un singur număr, care să se bucure de proprietăţile caracteristice ale numărului M.

II. Dacă M nu face parte din mulţimea (μ), atunci în această mulţime există o *infinitate* de numere mai mari decât $M-\varepsilon$. Căci dacă nu ar exista decât un număr *finit*, atunci cel mai mare dintre aceste numere ar avea toate proprietăţile numărului M, ceeace este imposibil.

MARGINE INFERIOARĂ. In mod analog se arată că, dacă o mulţime (μ) este mărginită inferior, există un număr m, numit *margine inferioară* a mulţimii şi care se bucură de următoarele două proprietăţi:

1⁰. *Nici un număr din mulţimea* (μ) *nu este mai mic decât* m.

2⁰. *Ori cât de mic ar fi numărul pozitiv* ε, *există întotdeauna un număr din mulţimea* (μ) *mai mic decât* $m+\varepsilon$.

7. Punct limită. Unei mulţimi de numere îi corespunde o mulţime de *puncte* pe o dreaptă dirijată, numită *mulţime liniară.* Punctele unei mulţimi mărginite sunt toate pe un segment de lungime finită.

Fiind dată o mulţime liniară, un punct p este numit *punct limită* sau punct de *îngrămădire*, atunci când există o *infinitate* de puncte de ale mulţimii în vecinătatea lui p, sau, mai precis, atunci când există o infinitate de puncte de ale mulţimii între $p-\varepsilon$ şi $p+\varepsilon$, ε fiind un număr pozitiv arbitrar, oricât de mic.

Să arătăm că: *o mulţime liniară* (μ), *mărginită, care cuprinde o infinitate de puncte, are cel puţin un punct limită.*

In adevăr, fie a şi b extremităţile intervalului $a\,b$, care conţine toate punctele mulţimei (μ); să-l împărţim în două părţi egale prin punctul c. Dintre intervalele $a\,c$ şi $c\,b$ unul cel puţin va conţine o infinitate de puncte de ale mulţimii (μ). Fie $a_1\,b_1$ acel interval. Operând asupra intervalului $a_1\,b_1$, cum am operat asupra lui $a\,b$, şi aşa mai departe, obţinem segmentele $a\,b$, $a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$, ..., fiecare fiind jumătatea celui dinaintea lui şi în fiecare găsindu-se o infinitate de puncte de-ale mulţimii (μ). Cum avem $a_n\,b_n=\frac{a\,b}{2^n}$, vedem că după un număr destul de mare de operaţiuni, segmentul $a_n\,b_n$, care continuă a conţine un număr infinit de puncte de-ale mulţimii, poate fi făcut mai mic decât un număr pozitiv dat 2ε, oricât de mic ar fi el.

Fie p limita comună către care tind numerele $a_n\,b_n$, când n creşte la infinit. Punctul p e un *punct limită* al mulţimii (μ).

Un punct limită al unei mulţimi poate aparţine sau nu acelei mulţimi.

EXEMPLE. Dacă considerăm mulţimea de puncte

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

atunci zero, adică originea, este un punct limită şi el nu aparţine mulţimii. Din contra în mulţimea de puncte

$$1, 1-\frac{1}{2}, \ldots, 1-\frac{1}{n}, \ldots$$

1 este punct limită şi el aparţine acestei mulţimi.

O mulţime de puncte poate avea mai multe puncte limită, sau chiar o infinitate. Este evident însă că, dacă o mulţime este formată dintr'un număr finit de puncte, nu are nici un punct limită.

8. **Cea mai mare limită.** Dacă o mulţime mărginită (μ) are mai multe puncte limită, atunci marginea superioară L a mulţimii formată de aceste puncte limită, se cheamă *cea mai mare limită,* iar marginea inferioară l *cea mai mică limită.*

Din această definiţie şi din cele ce ştim asupra punctului limită reiese că:

1°. *In mulţimea* (μ) *avem o infinitate de numere care sunt mai mari decât* $L-\varepsilon$ *şi mai mici decât* $L+\varepsilon$ *şi o infinitate de numere care sunt mai mici decât* $l+\varepsilon$ *şi mai mari decât* $l-\varepsilon$.

2°. *Nu putem avea* în mulţimea considerată *decât un număr finit de puncte la stânga punctului* $l-\varepsilon$ *sau la dreapta punctului* $L+\varepsilon$.

EXEMPLU. In mulţimea în care primele 4 numere sunt

$$u_1=3,\ u_2=\frac{3}{2},\ u_3=\frac{8}{9},\ u_4=\frac{17}{16},$$

iar toate celelalte numere, în număr infinit, se calculează după legea următoare:

$$\begin{aligned} u_n &= 2+\frac{1}{n} && \text{pentru } n=m4+1,\\ u_n &= 2-\frac{1}{n} && \quad ,, \quad n=m4+2,\\ u_n &= 1-\frac{1}{n^2} && \quad ,, \quad n=m4+3,\\ u_n &= 1+\frac{1}{n^2} && \quad ,, \quad n=m4, \end{aligned}$$

cea mai mare limită a mulţimii este 2, iar cea mai mică limită este 1; marginea superioară a mulţimii este 3, iar marginea inferioară $\frac{8}{9}$.

Dacă mulţimea (μ) are numai un singur punct limită, L şi l coincid cu acest punct.

Se poate întâmpla ca numerele L şi l să coincidă respectiv cu *marginile* superioară şi inferioară ale mulţimii (μ).

II. — VARIABILE REALE. — LIMITE.

9. **Variabila reală.** O cantitate x care trece printr'o *infinitate* de valori reale, se numeşte o *variabilă reală.* Zicem că x variază în inter-

valul (a, b), când x poate lua toate valorile cuprinse între a şi b, împreună cu aceste valori extreme. Vom presupune, când nu vom specifica contrariul, $a < b$. Deci în acest caz a este marginea inferioară şi b marginea superioară a intervalului (a, b), ambele accesibile pentru valorile lui x; intervalul (a, b) este zis *închis*.

Dacă x nu poate lua valoarea a, sau valoarea b, sau ambele valori a şi b, zicem că intervalul este *deschis* şi că marginile nu sunt accesibile; în acest caz vom însemna intervalul în care variază x prin $(a+0, b)$, sau $(a, b-0)$, sau înfine $(a+0, b-0)$.

10. Limita unei variabile. Fie o variabilă x, care trece *succesiv* printr'o infinitate de valori, aşezate unele după altele după o anumită lege. Zicem că x *tinde către o limită* a dacă, ori cât de mic ar fi numărul ε pozitiv, putem găsi o valoare x_0 a lui x, astfel ca, pentru toate valorile pe care le ia x după x_0, să avem neegalitatea

(1) $$|x-a| < \varepsilon.$$

In acest caz scriem: $\lim x = a$.

OBSERVARE. Condiţia (1) se mai poate scrie

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon.$$

Din această definiţie reiese că o variabilă nu poate tinde în acelaş timp către două limite diferite a şi b, căci cantităţile $|x-a|$ şi $|x-b|$ devenind mai mici decât ε, din $|x-a| < \varepsilon$, $|x-b| < \varepsilon$, deducem $|b-a| < 2\varepsilon$, ceeace este imposibil de oarece ε poate fi luat ori cât de mic voim.

Dacă x creşte şi devine mai mare decât orice număr A, oricât de mare, zicem că x tinde către $+\infty$ şi scriem: $\lim x = +\infty$.

Tot astfel dacă x descreşte şi devine mai mic decât orice număr negativ dat, zicem că x tinde către $-\infty$ şi scriem: $\lim x = -\infty$.

11. Principiile teoriei limitelor. I. *Dacă variabila x creşte necontenit, rămânând însă mai mică decât un număr fix A, x are o limită şi această limită este mai mică sau cel mult egală cu A.*

$\lim x = A$
$x \to A$

In adevăr, mulţimea valorilor ce le poate lua x fiind mărginită superior, avem o *margine superioară* a acestei mulţimi, pe care să o notăm cu M. Variabila x nu poate deveni mai mare decât M, dar ajunge mai mare decât $M-\varepsilon$ (6); odată această valoare ajunsă, variabila x fiind crescătoare, se va apropia necontenit şi mai mult de M. Deci M, evident mai mic sau egal cu A, este limita variabilei x.

In mod analog se arată că: *dacă variabila x descreşte necontenit dar rămâne mai mare decât un număr B, atunci x are o limită şi această limită este mai mare sau cel puţin egală cu B.*

$\lim x = \alpha \quad x \to \alpha$
$\lim y = \beta \quad y \to \beta$

II. *Fie* x *şi* y *două variabile având ca limite pe* α *şi* β, *vom avea*

$$\lim(x \pm y) = \alpha \pm \beta \quad , \quad \lim(xy) = \alpha\beta \quad , \quad \lim\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\alpha}{\beta},$$

dacă în ultima egalitate presupunem pe β *diferit de zero.* $\neq 0$

Primele două egalităţi sunt aproape evidente. Vom demonstra pe cea din urmă. Să punem $x = \alpha + h$ şi $y = \beta + k$, unde h şi k sunt variabile având ca limită pe zero (fiindcă $|h| = |x - \alpha| < \varepsilon$). Vom avea

$$\frac{x}{y} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + h}{\beta + k} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta h - \alpha k}{\beta(\beta + k)}.$$

Cum β este diferit de zero, putem face ca această ultimă fracţie să fie mai mică, în valoare absolută, decât orice număr pozitiv. Deci $\frac{x}{y}$ are ca limită pe $\frac{\alpha}{\beta}$.

Propoziţia precedentă se poate enunţa sub o formă mai generală considerând sume şi produse de mai multe variabile, *dar în număr finit*.

Mai general:

III. *Fie* R $(x, y, z, \ldots)$ *o expresie raţională de un număr finit de variabile* $x, y, z, \ldots$, *adică o expresie al cărei calcul nu cere decât cele patru operaţiuni fundamentale; dacă variabilele* $x, y, z, \ldots$ *au respectiv ca limită pe* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *atunci* R $(x, y, z, \ldots)$ *va avea ca limită expresiunea* R $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.

Pentru valabilitatea acestei propoziţiuni se cere, ca în cazul când în expresiunea R avem operaţiuni de împărţire, împărţitorul să nu aibă o limită nulă.

IV. *O variabilă a cărei valoare rămâne cuprinsă necontenit între valorile corespunzătoare ale altor două variabile, care au aceeaş limită finită, tinde către această limită.*

In adevăr, dacă x rămâne cuprins între variabilele u şi v, care tind amândouă către acelaş număr finit a, $x - a$ va fi cuprins între diferenţele $u - a$ şi $v - a$, care tind către zero. Prin urmare $x - a$ tinde către zero; deci x are ca limită pe a.

12. Când am obţinut o relaţie între mai multe variabile, care subzistă pentru o infinitate de valori ale variabilelor, bazându-ne pe principiile precedente, putem înlocui în acea relaţie variabilele prin valorile lor limite. Această operaţiune se numeşte *trecere la limită*.

Să dăm câteva exemple de trecere la limită.

1°. Fie un număr fix $a > 1$ şi m un număr întreg şi pozitiv.

Vom avea $a^m > 1$. Din identitatea $a^{m+p} = a^m a^p$, unde p este un întreg pozitiv, deducem că a^m creşte în acelaş timp cu m.

Să arătăm că a^m tinde către $+\infty$ când m creşte necontenit.

In adevăr, din identitatea

$$a^m - 1 = (a-1)(1 + a + \ldots + a^{m-1})$$

deducem, ţinând seama că $a > 1$,

$$a^m - 1 > m(a-1)$$

sau, făcând $a = 1 + h$, cu $h > 0$, avem

$$(1+h)^m > 1 + mh.$$

Este deci suficient să arătăm că putem alege un număr întreg m aşa încât să avem, ori cât de mare ar fi numărul dat A,

$$1 + mh > A.$$

Această neegalitate este satisfăcută, dacă luăm numărul întreg m mai mare decât $\frac{A-1}{h}$.

Dacă a este un număr pozitiv mai mic decât 1, el va fi inversul unui număr pozitiv $b > 1$. Deci $a^m = \frac{1}{b^m}$. De aci rezultă că în acest caz puterile succesive ale numărului a merg descrescând şi tind către zero când m tinde către $+\infty$.

Să trecem acum la exponenţii fracţionari. Să arătăm mai întâi că rădăcinile succesive ale numărului $a > 1$, descresc când indicele creşte şi au ca limită unitatea, când indicele tinde către $+\infty$. In adevăr, se verifică imediat că

$$\sqrt[m+1]{a} < \sqrt[m]{a}.$$

Pentru a stabili şi partea a doua este suficient să arătăm că putem alege pe m destul de mare, aşa încât, ori cât de mică ar fi cantitatea pozitivă ε, să avem

$$\sqrt[m]{a} - 1 < \varepsilon$$

sau, neegalitatea echivalentă,

$$a < (1 + \varepsilon)^m.$$

Pentru aceasta e deajuns să luăm pe m aşa încât $a < 1 + m\varepsilon$.

Se arată tot astfel, că dacă numărul pozitiv a este mai mic decât unitatea, rădăcinile sale succesive cresc şi au ca limită unitatea.

Dacă fracţia raţională $\frac{m}{p}$ tinde către zero, $a^{\frac{m}{p}}$ are ca limită unitatea.

In adevăr, dacă n este partea întreagă a fracţiei $\frac{m}{p}$, avem

$$\frac{1}{n+1} < \frac{m}{p} < \frac{1}{n};$$

deci a fiind presupus pozitiv, după cele ce preced $a^{\frac{m}{p}}$ e cuprins între $\sqrt[n]{a}$ şi $\sqrt[n+1]{a}$; cum $\frac{m}{p}$ tinde către zero, n va creşte nemărginit şi prin urmare (11, IV) $a^{\frac{m}{p}}$ are ca limită unitatea.

Tot astfel se vede uşor că puterile fracţionare pozitive ale lui a merg crescând, când exponentul creşte, dacă $a > 1$, şi merg descrescând dacă $0 < a < 1$.

2°. Dacă variabila x tinde către $+\infty$ este evident că

$$\lim x^n = +\infty \quad \text{şi} \quad \lim \frac{1}{x^n} = 0,$$

oricare ar fi întregul pozitiv n.

Să ne folosim de acest rezultat pentru a găsi limita raportului a două polinoame întregi în x,

$$\frac{cx^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n}{dx^m + d_1 x^{m-1} + \ldots + d_m}$$

când variabila x tinde către $+\infty$. Impărţind numărătorul şi numitorul cu x^n şi trecând apoi la limită, vedem că limita raportului considerat este: *infinită*, dacă $n > m$; *zero*, dacă $n < m$; $\frac{c}{d}$, dacă $n = m$.

3°. Să căutăm limita raportului $\frac{\sin x}{x}$ când x tinde către zero. Se ştie din trigonometrie că, pentru arcele x din primul cadran, avem

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \therefore \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Făcând pe x să tindă către zero prin valori pozitive, cum $\frac{x}{\sin x}$ rămâne cuprins între două cantităţi care au ca limită 1, vom avea (11, IV)

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pentru x negativ, putem scrie

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

şi raportul are tot limita 1.

4°. Să arătăm că expresiunea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ are o limită bine determinată, când numărul întreg n creşte nemărginit. Din identitatea

$$1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})$$

deducem, a fiind pozitiv şi mai mic decât unitatea,

$$1-a^n<n(1-a).$$

$\frac{n-1}{2n}$

Făcând pe $a=1-\frac{1}{n^2}$, căpătăm

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n};$$

de unde, împărţind cu $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ ambii membri, suntem conduşi la neegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

care ne arată că expresia $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ creşte cu numărul întreg n. Pentru a putea arăta existenţa limitei cerute, este deci suficient să arătăm că mulţimea valorilor ce ia $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e mărginită (**11**, I). Pentru aceea vom folosi neegalitatea

$$(1)\qquad (1-a)^n>1-na+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3$$

unde $0<a<1$, iar n un întreg mai mare ca 3. Neegalitatea (1) se verifică imediat pentru $n=4$. Presupunând această neegalitate adevărată pentru n, vedem uşor, înmulţind ambii membri cu $1-a$, că subzistă pentru $n+1$. Ea este deci adevărată pentru orice număr întreg $n>3$.

Făcând, în (1) $a=\frac{1}{n}$, vom avea

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{n}\right)\right],$$

sau

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}>\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}>\frac{1}{3}.$$

Cum însă

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}},$$

deducem că

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<3.$$

Mulţimea valorilor ce ia $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este deci mărginită.

Limita expresiei $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, a cărei existenţă am demonstrat-o, se însemnează cu e. Din cele arătate vedem că e este cuprins între 2 şi 3. Vom indica în altă parte mijlocul de a determina numărul e cu mai multă preciziune. Valoarea sa apropiată este 2,7 1828 1828.

5°. Dacă b_n creşte şi devine infinit odată cu n şi dacă raportul

$$(1) \qquad \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

are o limită pentru n infinit, atunci şi raportul $\frac{a_n}{b_n}$ are aceeaş limită.

In adevăr, fie λ limita raportului (1). Din definiţia limitei unei cantităţi variabile, reiese că putem determina un număr întreg N aşa că, pentru toate valorile lui $n \geqslant N$, să avem

$$\lambda-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<\lambda+\varepsilon,$$

ε fiind un număr pozitiv oricât de mic voim. Ceeace se mai poate scrie ţinând seama că $b_{n+1}-b_n$ este pozitiv,

$$(\lambda-\varepsilon)\,(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(\lambda+\varepsilon)\,(b_{n+1}-b_n).$$

Făcând în aceste neegalităţi pe n succesiv egal cu N, $N+1, \ldots,$ $N+p-1$ şi adunând neegalităţile obţinute membru cu membru, avem

$$(\lambda-\varepsilon)\,(b_{N+p}-b_N)<a_{N+p}-a_N<(\lambda+\varepsilon)\,(b_{N+p}-b_N)$$

Ceeace se mai poate scrie

$$(2) \qquad \frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}=\lambda+\varepsilon_1,$$

unde $|\varepsilon_1|<\varepsilon$ şi $n>N$.

Pentru a stabili propoziţia noastră să formăm diferenţa

$$d=\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n\,b_N-a_N\,b_n}{b_n\,(b_n-b_N)},$$

sau, înlocuind pe a_n prin valoarea sa scoasă din (2), vom avea

$$d=\frac{(\lambda+\varepsilon_1)\,b_N-a_N}{b_n}.$$

Trecând la limită, adică făcând pe n să tindă către ∞, vedem că $\lim d=0$, căci a_N şi b_N sunt numere determinate pe când b_n, prin ipoteză, devine infinit cu n.

Deci

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=\lim\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}=\lambda,$$

conform egalităţii (2).

EXERCIȚII.

1. Când x crește nemărginit, să se precizeze dacă fracția

$$\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

tinde către unitate prin valori supraunitare sau subunitare.

R. Impărțind numărătorul și numitorul cu x^3 se vede imediat că:

1⁰) dacă $a>\alpha$ fracția se apropie de limită prin valori >1; 2⁰) dacă $a<\alpha$ fracția este subunitară pentru x destul de mare. Dacă $a=\alpha$, vom împărți numărătorul și numitorul fracției date cu x, în loc de x^2, etc.

2. $R(u)$, $S(u)$, $T(u)$ fiind trei polinoame întregi în u respectiv de gradele r, s și $r+s$, să se determine limita expresiunei

$$\frac{R(x)\,S(y)}{T(x+y)}$$

când x și y cresc nemărginit, așa fel încât $\lim\frac{x}{y}=\alpha$.

R. Expresia dată se mai poate scrie

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^r\left(\frac{y}{x+y}\right)^s\frac{R(x)}{x^r}\times\frac{S(y)}{y^s}\times\frac{(x+y)^{r+s}}{T(x+y)}$$

Luând limita fiecărui factor, găsim că limita expresiunii date este

$$\frac{\rho\,\sigma}{\tau}\cdot\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^r\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^s$$

unde ρ, σ și τ sunt coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt în polinoamele R, S, T.

3. Dacă a_n are ca limită α când n crește nemărginit, să se arate că

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n=e^\alpha.$$

R. Din cele ce se vor vedea la nr. 14, rezultă că

$$\lim\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^\alpha=e^\alpha;$$

Ținând seama și de neegalitățile

$$1+\frac{\alpha-\epsilon}{n}<1+\frac{a_n}{n}<1+\frac{\alpha+\epsilon}{n}$$

deducem limita cerută.

4. Să se arate că avem

$$\lim_{n=\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

p fiind un număr întreg pozitiv.

R. Se va folosi propoziţia 5⁰ dela nr. 12, punând

$$a_n = 1^p + 2^p + \ldots + n^p \quad \text{şi} \quad b_n = n^{p+1}.$$

5. Să se arate că expresiunea,

$$E(n) = \frac{(n+a+1)\,(n+a+2)\ldots(2n+a)}{(n+1)\,(n+2)\ldots 2n}$$

unde a este un număr pozitiv, are o limită, când n creşte nemărginit.

R. Se va arăta mai întâi că

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n > E(n) > \left(1+\frac{a}{2n}\right)^n$$

de unde rezultă (Exerciţiul 3) că mulţimea valorilor pe care le ia $E(n)$ este mărginită. Se va forma apoi raportul $\frac{E(n+1)}{E(n)}$ şi, ţinând seama de exerciţiul 1, se va putea preciza dacă $E(n)$ creşte sau descreşte, când n creşte.

6. Se consideră şirul de egalităţi

$$u_1 = \sqrt{a},\ u_2 = \sqrt{a+u_1},\ \ldots,\ u_n = \sqrt{a+u_{n-1}},\ \ldots,$$

unde a este un număr pozitiv. Să se arate că u_n are o limită pentru n infinit şi să se calculeze acea limită.

R. Se va arăta că u_n creşte cu n rămânând mai mic decât un număr fix; deci (11, 1) u_n are o limită.

Dacă x este acea limită, vom avea $x^2 = a + x$. Cum x trebue să fie pozitiv, deducem că $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

7. Fie p şi q două numere pozitive, $p > q$ şi

$$p_1 = \frac{p+q}{2} \qquad q_1 = \sqrt{pq}$$

$$p_2 = \frac{p_1+q_1}{2} \qquad q_2 = \sqrt{p_1 q_1}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$p_{n+1} = \frac{p_n+q_n}{2} \qquad q_{n+1} = \sqrt{p_n q_n}.$$

$q_2 = \sqrt{\frac{p+q}{2}\cdot\sqrt{pq}}$

Să se arate că p_n şi q_n au aceleaşi limite pentru n infinit.

R. Se va considera şirurile

(1) $p, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

(2) $q, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$

Se va arăta că: p_n descreşte când n creşte, dar $p_n > q$; q_n creşte cu n, dar $q_n > p$.

Pe de altă parte se vede că

$$p_1 - q_1 < \frac{p-q}{2},\ p_2 - q_2 < \frac{p_1-q_1}{2} < \frac{p-q}{2^2}, \ldots$$

deci

$$p_n - q_n < \frac{p-q}{2^n}.$$

CAPITOLUL II.

FUNCŢIUNI.

I. — FUNCŢIUNI DE O VARIABILĂ.

13. Generalităţi. Zicem că două variabile x şi y sunt funcţiuni una de alta, atunci când există o *dependenţă* (o legătură) între valorile ce li se pot atribui. Se consideră, în general, una din variabile, de exemplu x, ca independentă. Valorilor arbitrar alese pentru x, corespund valori determinate pentru y. In acest caz se zice că y este *funcţie* de x şi această dependenţă se exprimă prin

$$y = f(x).$$

Funcţiunea $f(x)$ este *definită* în intervalul (a, b), atunci când la orice valoare dată lui x, în intervalul (a, b), corespunde o valoare determinată pentru $f(x)$. Vezi p. 8

Funcţiunea $f(x)$ definită în intervalul (a, b) este *crescătoare* în acest interval, dacă pentru orice valori $x_1 < x_2$ din acest interval avem $f(x_1) \leqq f(x_2)$. Funcţiunea e *descrescătoare* în intervalul (a, b), dacă pentru orice valori $x_1 \cancel{>} x_2$ din acest interval avem $f(x_1) \geqq f(x_2)$.

Fie (μ) mulţimea valorilor unei funcţiuni $f(x)$ definită în intervalul (a, b); dacă mulţimea (μ) este mărginită, zicem că funcţiunea $f(x)$ este *mărginită* în acest interval. Marginile superioară M şi inferioară m ale mulţimii (μ) sunt *marginile superioară şi inferioară* ale funcţiunii $f(x)$. Diferenţa $M - m$ se numeşte *oscilaţia* funcţiunii în intervalul (a, b).

OBSERVĂRI. Pentru ca o funcţie să fie mărginită într'un interval (a, b) nu-i deajuns să aibă valori finite pentru toate valorile lui x din acest interval.

De exemplu, să definim funcţia $f(x)$ în intervalul $(0,1)$ în felul următor:

$$f(0) = 0 \text{ şi } f(x) = \frac{1}{x} \text{ pentru } 0 < x < 1;$$

$f(x)$ are deci o valoare finită pentru orice valoare a lui x din intervalul $(0,1)$ şi cu toate acestea nu este mărginită în sensul pe care l-am dat acestui cuvânt; căci oricât de mare ar fi numărul A, avem $f(x) > A$ pentru $0 < x < \frac{1}{A}$.

2°. Se poate ca o funcţie mărginită într'un interval (a, b) să nu ia, pentru nici o valoare a variabilei, valoarea M sau m.

De exemplu, funcţia $f(x)$ definită în intervalul $(0,1)$ prin condiţiile

$$f(0)=0 \quad \text{şi} \quad f(x)=1-x \quad \text{pentru } 0<x\leqq 1,$$

are marginile $m=0$ şi $M=1$; marginea inferioară este atinsă de $f(x)$ pentru $x=0$ şi $x=1$; marginea superioară nu este atinsă pentru nici o valoare a lui x.

14. Funcţiuni elementare. Funcţia exponenţială. Definiţia funcţiei exponenţiale λ^x va rezulta din cele ce ştim asupra exponenţilor fracţionari. Am văzut (4) ce se înţelege prin λ^x, când λ este un număr pozitiv oarecare şi x un număr fracţionar. Să definim acum operaţia λ^x, când x este un număr *iraţional* pozitiv definit prin tăetura (A, B). Vom folosi şirurile de numere

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots$$
$$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \ldots$$

definite anterior (3) aşa ca

$$a_n < \lambda < b_n \quad \text{şi} \quad b_n - a_n = \frac{1}{10^n} = \varepsilon.$$

Vom arătà că numerele λ^{a_n} şi λ^{b_n} au aceeaş limită când n creşte nemărginit; această limită, prin definiţie, este valoarea lui λ^x.

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, $\lambda > 1$; în acest caz λ^{a_n} merge crescând cu n, dar rămâne mai mic decât λ^b (b fiind un număr oarecare din clasa B). Deci λ^{a_n} are o limită L. Să considerăm diferenţa

$$\lambda^{b_n} - \lambda^{a_n} = \lambda^{a_n}(\lambda^\varepsilon - 1).$$

Când n creşte nemărginit, ε tinde către zero şi deci (12, 1°) λ^ε tinde către 1. Prin urmare

$$\lim \lambda^{b_n} = \lim \lambda^{a_n} = L.$$

Proprietăţile

$$\lambda^x \lambda^y = \lambda^{x+y}, \quad (\lambda^x)^m = \lambda^{mx}, \quad \lambda^{-x} = \frac{1}{\lambda^x}$$

se extind uşor la cazul când exponenţii sunt iraţionali.

Observare. Funcţiunea a^x unde $a > 1$ creşte dela 0 la ∞, când x creşte dela $-\infty$ la $+\infty$ (12, 1°).

FUNCŢIA LOGARITMICĂ. Fie $a > 1$. Logaritmul unui număr pozitiv x, în sistemul de logaritmi cu baza a, este puterea y la care trebue să ridicăm pe a, ca să căpătăm pe x, adică să avem

$$a^y = x.$$

Orice număr pozitiv are un logaritm şi numai unul, după cum reiese din observarea precedentă. Corespondenţa între numărul x şi logaritmul său y se însemnează prin

$$y = \log_a x.$$

Din proprietăţile funcţiei exponenţiale rezultă proprietăţile funcţiei logaritmice:

$$\log_a u\,v = \log_a u + \log_a v, \quad \log_a (u^v) = v \log_a u, \quad \log_a x \log_b a = \log_b x.$$

Logaritmii naturali au ca bază uumărul e, pe care l-am definit (12, 4⁰), dar căruia putem să-i dăm acum o definiţie mai largă. Să arătăm că dacă numărul α tinde către zero, într'un mod arbitrar, vom avea

$$\lim_{\alpha=0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

In adevăr, dacă α este pozitiv, $\frac{1}{\alpha}$ este cuprins între două numere întregi consecutive n şi $n+1$, care cresc nemărginit când α tinde către 0. Avem deci

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Prin urmare cantitatea $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ fiind cuprinsă între două cantităţi, care au aceeaş limită e, va avea ca limită e. Dacă α este negativ, punând

$$1+\alpha = \frac{1}{1+\beta},$$

β tinde către zero prin valori pozitive, şi avem

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\beta)\,(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}},$$

aşa că suntem conduşi la cazul precedent $\alpha > 0$.

FUNCŢIUNI TRIGONOMETRICE. Din cele şease funcţiuni trigonometrice, $\sin x$, $\cos x$ şi $\operatorname{tg} x$ sunt cele mai întrebuinţate în Analiza Matematică.

Presupunem cunoscute din trigonometrie, proprietăţile elementare ale acestor funcţiuni. Va trebui să ţinem seama însă că de câte ori vom întâlni aceste funcţiuni, variabila x înseamnă măsura unghiului în *radiani*(¹).

FUNCŢIUNI TRIGONOMETRICE INVERSE. 1⁰. Intre un arc y şi linia trigonometrică sinus corespunzătoare avem o dependenţă, pe care o notăm $x = \sin y$, dacă considerăm pe x ca funcţie de y; sau $y = \arcsin x$, zisă funcţiunea *inversă a sinusului*, dacă considerăm pe y ca funcţie de x. Când y creşte de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, x ia o singură dată toate valorile cuprinse între -1 şi $+1$. Numim *valoarea principală* a funcţiei $\arcsin x$, valoarea cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ şi $+\frac{\pi}{2}$; pe aceasta o vom considera-o întotdeauna, când nu vom preciza contrariul. Este uşor de văzut că pentru o valoare dată lui x, avem, în afară de valoarea principală corespunzătoare a lui y, o infinitate de alte valori cuprinse în formulele

$$y = \arcsin x + 2k\pi, \quad y = (\pi - \arcsin x) + 2k\pi$$

unde k este un întreg pozitiv sau negativ, iar $\arcsin x$ are valoarea sa principală.

2⁰. Funcţia $y = \arccos x$ va avea *valoarea principală* cuprinsă între 0 şi π când x descreşte dela $+1$ la -1. Celelalte valori sunt

$$y = 2k\pi + \arccos x \ , \ y = 2k\pi - \arccos x.$$

OBSERVARE. Funcţiunile $\arcsin x$ şi $\arccos x$ n'au sens, în domeniul real în care rămânem, decât pentru x cuprins în intervalul $(-1, +1)$.

3⁰. Funcţia $y = \operatorname{arc\,tg} x$ are o *valoare principală* cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$, când x creşte dela $-\infty$ la $+\infty$. Celelalte valori sunt date de formula unică

$$y = \operatorname{arc\,tg} x + k\pi,$$

unde k este un întreg pozitiv sau negativ.

15. Definiţii. FUNCŢIUNI UNIFORME ŞI MULTIFORME. O funcţie $f(x)$ este zisă *uniformă* sau cu *determinare simplă*, atunci când pentru fiecare valoare a variabilei, funcţiunea are o valoare unică.

EXEMPLE. Funcţiunile a^x, $\sin x$, ... sunt uniforme.

Dacă însă la o valoare dată variabilei corespund mai multe valori pentru funcţiune, atunci zicem că funcţiunea este *multiformă* sau cu *determinări multiple*.

(¹) Radianul e unghiul la centru, care corespunde la un arc egal cu raza.

EXEMPLE. Funcţiunile $\sqrt{x}$, arc sin x, sunt multiforme, prima având două determinări de semne contrarii, iar cea de a doua o dublă infinitate de determinări, după cum am văzut.

FUNCŢIUNI EXPLICITE ŞI IMPLICITE. Dacă între variabilele x şi y avem o relaţie de forma $y = f(x)$, adică relaţia între x şi y este dată printr'o ecuaţie rezolvată în raport cu y, zicem că y este *funcţie explicită* de x. In caz contrar zicem că funcţiunea este *implicită* şi se notează $F(x, y) = 0$.

Când relaţia dintre x şi y poate fi exprimată printr'o ecuaţie ai cărei membrii sunt polinoame întregi în x şi y, zicem că funcţiunea este *algebrică*; în caz contrar funcţiunea este zisă *transcendentă*.

EXEMPLE: Funcţiunea implicită $x^2 + y^2 = x^3$ este algebrică, iar funcţiunea explicită $y = a^x$ este transcendentă.

O funcţie algebrică este *raţională*, atunci când ecuaţia care leagă pe y de x este de gradul întâi în y; în caz contrar, y privit ca funcţie de x, este iraţională. Funcţia raţională generală este deci câtul a două polinoame în x.

FUNCŢIUNI INVERSE. Când y este o funcţie explicită de x, $y = f(x)$, de aşa natură încât să putem scoate din ecuaţia ce leagă pe y de x pe x în funcţie de y, $x = \varphi(y)$, funcţiunea $\varphi(y)$ se numeşte *funcţiunea inversă* a funcţiei $f(x)$.

EXEMPLE. Funcţiunile x^m, a^x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ au respectiv ca inverse $x^{\frac{1}{m}}$, $\log_a x$, arc sin x, arc tg x.

16. Reprezentarea funcţiunilor. O funcţie se reprezintă geometriceşte utilizând principiile geometriei analitice. Ecuaţia $y = f(x)$ reprezintă faţă de două axe dreptunghiulare Ox, Oy o curbă, care este reprezentarea grafică a funcţiunii.

OBSERVARE. Se poate întâmpla ca y să fie astfel definit în funcţie de x, încât să nu avem o curbă, în sensul obişnuit al cuvântului, care să reprezinte funcţiunea. Aşa, de exemplu, să definim în felul următor pe y în funcţie de x: y este nul pentru *toate valorile raţionale* ale lui x şi este egal cu unitatea pentru *toate valorile iraţionale* ale lui x. In acest caz punctele (x, y) ale funcţiunei se găsesc toate pe axa x-ilor şi pe paralela dusă prin $(0,1)$ la această axă; dar pe aceste drepte se găsesc şi puncte care nu aparţin funcţiunii şi care ar trebui excluse.

17. Continuitate. Fie $y = f(x)$ o funcţie definită în intervalul (a, b) şi u un punct din acest interval. Zicem că funcţiunea $f(x)$ este *continuă* în punctul u, dacă la oricare număr pozitiv ε corespunde un număr pozitiv η aşa încât să avem

$$|f(u+h) - f(u)| < \varepsilon$$

pentru toate valorile lui h, care satisfac la neegalitatea $|h| < \eta$ şi pentru care punctul $u+h$ aparţine intervalului (a, b).

Cu alte cuvinte zicem că $f(x)$ *este continuă în punctul* u, *dacă* $f(u+h)$ *are ca limită pe* $f(u)$, *când* h *tinde către zero* după o lege oarecare; ceea ce putem scrie

$$\lim_{x=u} f(x) = f(u).$$

Funcţiunea $f(x)$ este *continuă în intervalul* (a, b), dacă este continuă pentru toate valorile lui x din acel interval şi dacă diferenţele $f(a+h)-f(a)$ şi $f(b-h)-f(b)$ tind către zero, când h tinde către zero prin valori *pozitive*.

EXEMPLU. Funcţia $\sin x$ este continuă pentru orice valoare a variabilei, căci

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot h.$$

Ţinând seama că primii doi factori din ultimul produs sunt mai mici ca unitatea avem

$$|\sin(x+h) - \sin x| < |h|,$$

ceeace probează continuitatea funcţiei $\sin x$.

OBSERVARE. Condiţia precedentă de continuitate în punctul u, mai poate fi enunţată şi astfel: oricărui număr pozitiv ε putem face să-i corespundă un număr η, aşa încât să avem

$$f(u) - \varepsilon < f(x) < f(u) + \varepsilon$$

pentru toate valorile lui x din intervalul $(u-\eta, u+\eta)$.

Sub această formă se vede imediat că dacă $f(u)$ este continuă şi diferită de zero în punctul u, putem totdeauna găsi un interval $(u-\eta, u+\eta)$ în interiorul căruia $f(x)$ *să păstreze acelaş semn* cu $f(u)$. Va fi deajuns să alegem numărul arbitrar ε mai mic decât valoarea absolută a lui $f(u)$, căci în acest caz cantităţile $f(u)-\varepsilon$ şi $f(u)+\varepsilon$ vor avea acelaş semn cu $f(u)$.

18. Funcţiuni compuse. 1°. Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţiuni continue în acelaş interval. Funcţiunile reprezentate prin suma $f(x)+g(x)$ şi produsul $f(x)\,g(x)$ sunt şi ele continue în acest interval. Funcţiunea $\frac{f(x)}{g(x)}$ este continuă în toate punctele intervalului, afară de acelea în care $g(x)$ se anulează.

Cele enunţate rezultă imediat din teoria limitelor (11). Să luăm, de exemplu, cazul raportului, u fiind un punct în care $g(x)$ nu se anulează. Când x tinde către u, $f(x)$ şi $g(x)$ tind respectiv către $f(u)$ şi $g(u)$, aşa că limita raportului $\frac{f(x)}{g(x)}$ este $\frac{f(u)}{g(u)}$.

Rezultă, în particular, că inversa $\frac{1}{f(x)}$ a unei funcţiuni $f(x)$ continuă în intervalul (a, b), este o funcţie continuă în toate punctele acelui interval în care $f(x)$ nu se anulează. Cu alte cuvinte, dacă funcţia inversă a unei funcţiuni continue $f(x)$ nu este continuă într'un punct c, din intervalul (a, b), atunci $f(c) = 0$.

2⁰. Fie $u = f(x)$ şi $y = F(u)$; dacă $f(x)$ este continuă pentru $x = \alpha$ şi $F(u)$ este continuă pentru $u = f(\alpha)$, atunci y este o funcţie continuă de x în punctul α.

In adevăr, când x tinde către α, avem

$$\lim F[f(x)] = F[\lim f(x)] = F[f(\alpha)].$$

19. Proprietăţile funcţiilor continue. I. *Fie $f(x)$ o funcţie continuă în intervalul închis (a, b) şi ε un număr pozitiv arbitrar. Putem întotdeauna împărţi intervalul (a, b) într'un anumit număr de intervale parţiale, aşafel încât u şi v fiind două valori oarecare ale variabilei luate în a c e l a ş interval parţial, să avem*

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

pentru toate intervalele parţiale.

Vom relua un raţionament făcut anterior. Să presupunem că ne este imposibil a realiza împărţirea intervalului aşa cum cere enunţul propoziţiei. Impărţim intervalul (a, b) în două intervale egale. Imposibilitatea va subzista cel puţin pentru unul din aceste două intervale parţiale, căci în caz contrar propoziţia ar fi adevărată. Fie (a_1, b_1) jumătatea intervalului (a, b) în care imposibilitatea subzistă, sau jumătatea din stânga, dacă imposibilitatea subzistă în ambele jumătăţi. Vom împărţi tot astfel intervalul (a_1, b_1) în două părţi egale şi vom însemna cu (a_2, b_2) jumătatea acestui interval în care subzistă imposibilitatea, sau jumătatea din stânga în caz de ambiguitate.

Formăm astfel şirul de intervale (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), ... fiecare fiind jumătatea intervalului precedent şi ajungem la rezultatul că, oricât de mare ar fi n, putem întotdeauna găsi în intervalul (a_n, b_n) două puncte u şi v pentru care să avem

$$(1) \qquad |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Să arătăm că acest rezultat este în contrazicere cu ipoteza făcută: funcţiunea $f(x)$ *continuă* în intervalul (a, b). In adevăr, numerele a_1, a_2, a_3, ... formează un şir crescător şi cum toate sunt inferioare lui b, a_n tinde către o limită λ. Tot astfel vedem că şirul b_1, b_2, ... este descrescător şi b_n tinde către o limită λ'.

Cum însă

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

rezultă, făcând pe n să crească nemărginit, că $\lambda = \lambda'$.

Punctul λ aparține unui interval (a_n, b_n) cuprins în (a, b); funcțiunea $f(x)$ fiind continuă pentru $x = \lambda$, putem găsi un număr pozitiv η așa încât să avem

$$(2) \qquad |f(x) - f(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru $\lambda - \eta < x < \lambda + \eta$. Să luăm acum pe n destul de mare, așa ca numerele a_n și b_n să difere de λ cu mai puțin decât η și deci ca intervalul (a_n, b_n) să fie cuprins în intervalul $(\lambda - \eta, \lambda + \eta)$. Așa fiind, dacă u și v sunt două numere *oarecare* din intervalul (a_n, b_n), vom avea, conform neegalității (2),

$$|f(u) - f(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(v) - f(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și deci $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$, ceeace este în contrazicere cu neegalitatea (1). Prin urmare teorema enunțată este exactă.

II. *Orice funcție continuă într'un interval (a, b), este mărginită în acest interval.*

Această propoziție este o consecință a celei precedente. In adevăr, fie $(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b)$ o împărțire a intervalului (a, b) în $n+1$ intervale parțiale prin punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, așa încât enunțul I să fie satisfăcut. Vom putea deci scrie, făcând să coincidă pe u și v cu extremitățile intervalelor în primele p intervale $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{p-1}, x_p)$ și luând în intervalul (x_p, x_{p+1}) pe u în x_p și pe v într'un punct oarecare x al acestui interval,

$$\begin{aligned}
f(a) - \varepsilon &< f(x_1) < f(a) + \varepsilon \\
f(x_1) - \varepsilon &< f(x_2) < f(x_1) + \varepsilon \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f(x_{p-1}) - \varepsilon &< f(x_p) < f(x_{p-1}) + \varepsilon \\
f(x_p) - \varepsilon &< f(x) < f(x_p) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste neegalități deducem

$$f(a) - (p+1)\varepsilon < f(x) < f(a) + (p+1)\varepsilon.$$

Ceeace ne arată că oricare ar fi x în intervalul (a, b), $f(x)$ rămâne cuprins între $f(a) - (n+1)\varepsilon$ și $f(a) + (n+1)\varepsilon$ și deci că această funcție este mărginită în acel interval.

III. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă în intervalul (a, b), putem face să corespundă oricărui număr pozitiv ε, un număr η aşa încât, dacă u şi v sunt două numere din intervalul (a, b) să avem $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$ atunci când $|u-v|<\eta$* (Cantor).

Vom demonstra această propoziţie cu ajutorul propoziţiei I. Fie (a, x), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) intervalele parţiale, în care am descompus intervalul (a, b), aşa încât să avem

$$|f(u)-f(v)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

u şi v fiind două valori arbitrare luate într'unul, oricare, din intervalele parţiale. Fie η un număr mai mic decât toate diferenţele (x_1-a), (x_2-x_1), ..., $(b-x_n)$. După felul cum am ales numărul η, reiese că pentru a avea $|u-v|<\eta$ va trebui ca: u şi v să fie în acelaş interval parţial, sau, u şi v să cadă în două intervale alăturate. In primul caz condiţiile din enunţ sunt satisfăcute prin felul cum am ales intervalele parţiale. In cazul al doilea avem

$$|f(u)-f(v)|<|f(u)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(v)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},$$

unde x_k este extremitatea comună a celor două intervale parţiale alăturate. Propoziţia este deci demonstrată.

Proprietatea III se mai poate enunţa astfel: o funcţie continuă într'un interval (a, b) este *uniform continuă* în acel interval.

IV. *Dacă o funcţie $f(x)$ este continuă în intervalul (a, b) şi dacă $f(a)$ şi $f(b)$ au semne contrarii, atunci $f(x)$ se anulează în cel puţin un punct c cuprins între a şi b.*

Să intercalăm între punctele a şi b un număr de puncte consecutive destul de apropiate unul de altul, aşa încât, valoarea absolută a diferenţei valorilor ce ia funcţiunea în două puncte consecutive să fie mai mică decât ε, ceace se poate realiza oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε (I). Dacă funcţiunea $f(x)$ nu se anulează în niciunul din punctele intercalate, atunci urmează că $f(x)$ să schimbe de semn în două puncte consecutive, în care puncte valoarea absolută a funcţiunei este mai mică decât ε. Prin urmare avem puncte în intervalul (a, b) în care $\left|\frac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}$; cum însă ε poate fi luat oricât de mic voim, urmează că funcţiunea $\frac{1}{f(x)}$ *nu este mărginită* în intervalul (a, b) şi deci nu este continuă în toate punctele acestui interval (II). Inversa funcţiunei $f(x)$ ne fiind continuă, trebue ca $f(x)$ să se anuleze în intervalul (a, b) [18, I].

V. *Dacă funcţiunea $f(x)$ este continuă în intervalul (a, b), $f(x)$ ia toate valorile cuprinse între $f(a)$ şi $f(b)$.*

Această propoziţie este o consecinţă a propoziţiei precedente. In adevăr, fie A un număr oarecare cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$. Să considerăm funcţiunea $f(x)-A$, evident continuă în acelaş interval, care ia valori de semne contrarii pentru $x=a$ şi $x=b$ şi deci se anulează într'un punct c din intervalul (a, b). Prin urmare $f(c)=A$.

VI. *Dacă M şi m sunt marginile superioară şi inferioară ale funcţiunii $f(x)$, continue în intervalul (a, b), atunci există întotdeauna cel puţin două valori ale lui x în intervalul (a, b) pentru care $f(x)$ ia valorile M şi m* (Weierstrass).

Vom face demonstraţia numai pentru M, cea pentru m fiind analoagă. Să considerăm funcţiunea $M-f(x)$, care poate fi făcută mai mică decât orice număr pozitiv ε, căci $f(x)$ poate întrece orice număr de forma $M-\varepsilon$. Funcţiunea $\frac{1}{M-f(x)}$ putând întrece orice număr pozitiv oricât de mare ar fi, ea nu este mărginită şi deci nici continuă. Va trebui, prin urmare, ca $M-f(x)$ să se anuleze în intervalul (a, b).

Observări. 1⁰. Din propoziţiile V şi VI reiese că în intervalul (a, b) funcţiunea $f(x)$ trece, cel puţin odată, prin toate valorile cuprinse între M şi m.

2⁰. Numărul M se mai numeşte *maximul absolut* şi numărul m *minimul absolut* ale funcţiunii $f(x)$ în intervalul (a, b).

3⁰. Pentru valabilitatea propoziţiilor enunţate este necesar ca funcţiunea $f(x)$ să fie continuă în intervalul *închis* (a, b).

EXEMPLU. Funcţiunea $f(x)=1+x$ definită în intervalul *deschis* $(0, 1-0)$ (adică variabila ia valoarea zero şi toate valorile pozitive mai mici decât 1) are ca margine superioară $M=2$ şi $f(x)$ nu poate atinge, în intervalul considerat, această valoare.

20. Funcţiuni discontinue. Să considerăm o funcţie $f(x)$ definită în intervalul (a, b). Dacă această funcţie nu este continuă într'un punct u al acestui interval, punctul u este numit *punct de discontinuitate* sau *punct singular*. Va trebui ca $f(u+\varepsilon)$ sau $f(u-\varepsilon)$ să nu tindă către $f(u)$, când numărul pozitiv ε tinde către zero.

Zicem că u este un *punct de descontinuitate de prima specie*, atunci când şi $f(u+\varepsilon)$ şi $f(u-\varepsilon)$ au limite determinate, când ε tinde către zero. Aceste limite se însemnează cu $f(u+0)$ şi $f(u-0)$.

Pentru ca u să fie un punct de discontinuitate, trebue ca numerele $f(u+0)$ şi $f(u-0)$ să fie diferite, sau, dacă sunt egale, să fie diferite de $f(u)$.

EXEMPLU. Să considerăm, într'un cerc de rază egală cu unitatea, o coardă AB şi un diametru A'B' perpendicular pe AB. Fie 2α şi 2β lungimile arcelor AA'B, BB'A; presupunem $\alpha \neq \beta$. Dela A' vom lua, în sensul A'BB' un arc A'P de lungime x

şi vom considera unghiul APB ca o funcţie de x, notând-o $U(x)$. Când x creşte de la 0 la α, $U(x)$ păstrează o valoare constantă β; când x ia valoarea $\alpha+\epsilon$, avem $U(x)=\alpha$ şi u păstrează această valoare până ce x ajunge la $\alpha+2\beta$. Prin urmare funcţia $U(x)$ are în intervalul $(0, \alpha+2\beta)$ un punct de discontinuitate de prima specie şi anume $x=\alpha$. Dacă mărim intervalul în care variază x întâlnim succesiv punctele de discontinuitate α, $\alpha+2\beta$, $3\alpha+2\beta, \ldots$ Reprezentarea grafică a funcţiei $U(x)$ se face cu cea mai mare uşurinţă.

Zicem că un punct u este un punct de discontinuitate *de specia a doua*, atunci când $f(u+\varepsilon)$ sau $f(u-\varepsilon)$ nu tinde către nici o limită determinată.

EXEMPLU. Fie $f(x)=\sin\frac{1}{x-a}$. Punctul a este pentru această funcţie un punct de discontinuitate de specia a doua, căci dacă x tinde către a, $f(x)$ nu tinde către nici o limită, valoarea acestei funcţiuni rămânând cuprinsă între -1 şi $+1$.

II. — FUNCŢIUNI DE MAI MULTE VARIABILE.

21. Generalităţi. Dacă valorile ce le ia o variabilă t depind de valorile date altor variabile $x, y, \ldots$, zicem că t este o *funcţie* de aceste variabile. Pentru simplificarea expunerei vom presupune că funcţiunea depinde numai de două variabile independente x şi y. Vom considera pe x şi y ca fiind coordonatele unui punct în planul axelor dreptunghiulare xOy, La orice sistem de valori pentru variabilele x şi y, corespunde *un punct* în acest plan şi invers.

O funcţie $t=f(x,y)$ este *definită* într'o anumită regiune R din plan, dacă la oricare punct (x, y) din această regiune corespunde o valoare pentru t. Regiunea R, care se numeşte *domeniul* sau *câmpul* funcţiunii, este limitată, în general, de un contur închis, numit *frontiera* domeniului.

Un domeniu care conţine şi frontiera sa este un domeniu *închis*; iar dacă din domeniu se exclude frontiera, domeniul este *deschis*. Când nu se precizează nimic asupra unui domeniu se presupune că el e închis.

Zicem că o funcţiune $t=f(x,y)$ este *mărginită* într'un domeniu R, atunci când mulţimea valorilor ce le ia t, pentru toate punctele (x, y) ale acestui domeniu, este o mulţime mărginită. *Marginea superioară* M, *marginea inferioară* m şi *oscilaţia funcţiunii* $f(x,y)$ în domeniul R se definesc ca şi pentru funcţiile de o singură variabilă.

CONTINUITATE. Fie $f(x,y)$ o funcţie definită într'un domeniu R şi P un punct de coordonate u şi v din acest domeniu. Zicem că *funcţiunea $f(x, y)$ este continuă în punctul* P, *atunci când la orice număr pozitiv* ε, *putem face să corespundă un număr* $\eta>0$, *aşa încât să avem*

$$(1) \qquad |f(u+h, v+k)-f(u,v)|<\varepsilon$$

pentru toate valorile $|h|<\eta$, $|k|<\eta$.

După această definiţie punctul de coordonate $u+h$, $v+k$ se va găsi în interiorul patratului de latură 2ε, având centrul în P şi laturile paralele cu axele. Considerând atunci cercul înscris în acest patrat, se vede imediat că definiţia continuităţii funcţiei $f(x, y)$ în punctul P poate fi înlocuită prin aceasta: *la orice număr* ε *putem face să corespundă un număr* η, *aşa încât neegalitatea* (1), *să fie satisfăcută pentru toate valorile lui* h *şi* k, *pentru care avem* $\sqrt{h^2+k^2}<\eta$, adică pentru toate punctele $u+h$, $v+k$ situate la o distanţă, mai mică decât η, de punctul P.

Tot astfel zicem că funcţiunea $f(x, y)$ este continuă într'un punct P (u, v) de pe frontieră, atunci când neegalitatea (1) are loc pentru orice punct $u+h$, $v+k$ situat în regiunea comună a domeniului $\mathfrak{R}$ şi a cercului C cu centrul în P şi cu raza η.

Dacă o funcţie $f(x, y)$ este continuă în orice punct al unui domeniu $\mathfrak{R}$ şi în orice punct al frontierei acestui domeniu, zicem că este o funcţie *continuă* în $\mathfrak{R}$.

Observări. 1°. Condiţiile de continuitate mai pot fi enunţate şi în felul următor: Funcţiunea $f(x, y)$ este continuă în punctul P (u, v), dacă la un număr pozitiv ε putem face să corespundă două numere pozitive a şi b, astfel ca să avem

$$f(u, v)-\varepsilon<f(x, y)<f(u, v)+\varepsilon$$

pentru toate valorile lui x şi y care satisfac la neegalităţile

$$|x-u|<a, \quad |y-v|<b.$$

Se vede atunci imediat, alegând pe ε destul de mic, că dacă funcţiunea $f(x,y)$ este continuă în punctul P, ea va păstra acelaş semn cu $f(u, v)$ în tot dreptunghiul mărginit de dreptele: $x=u-a$, $x=u+a$, $y=v-b$, $y=v+b$.

2°. Din definiţia continuităţei reiese că o funcţie continuă în raport cu amândouă variabilele, este continuă în raport cu fiecare variabilă separat.

Reciproca nu este totdeauna adevărată: o funcţie de două variabile poate fi funcţie continuă în raport cu fiecare din variabile, fără să fie funcţie continuă de ambele variabile.

Fie, spre exemplu, funcţiunea $f(x, y)$ pe care o definim în felul următor:

$$f(x, y)=\frac{x\,y}{x^2+y^2}$$

pentru toate punctele din plan, afară de punctul $x=0$, $y=0$ pentru care avem $f(0,0)=0$. Vedem că funcţiunea $f(x, y)$ este nulă, când punctul (x,y) este pe axa Ox sau pe axa Oy. Această funcţie este deci continuă în origine când x *variază singur* sau y *variază singur*. Cu toate acestea funcţiunea $f(x, y)$ nu este continuă în origine.

In adevăr, să facem ca x şi y să varieze în aşa fel încât să avem $y = \alpha x$ (α o constantă). Pentru x diferit de zero, dar oricât de mic, vom avea

$$f(x, y) = \frac{a}{1+a^2}.$$

Cum în origine $f(x, y) = 0$, reiese că această funcţiune este *discontinuă* în origine.

3⁰. Proprietăţile, pe care le-am stabilit pentru funcţiunile continue de o variabilă, se pot extinde la funcţiunile continue de două sau mai multe variabile.

EXERCIŢII.

1. Funcţiunile următoare, definite ca limite de funcţiuni continue,

$$f(x) = \lim_{n=\infty} x^n \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

$$\phi(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} \qquad x > 0,$$

$$\psi(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad x \text{ oricare},$$

sunt funcţiuni discontinue de x.

R. $f(x)$ este egală cu zero pentru $0 \leqq x < 1$ şi egală cu 1, pentru $x = 1$.

$\phi(x)$ este egală cu $+1$, pentru $x < 1$; cu -1, pentru $x > 1$ şi cu zero, pentru $x = 1$.

$\psi(x)$ este nulă pentru orice valoare a lui x afară de $x = 0$, când funcţiunea este egală cu 1.

2. Se cere forma generală a unei funcţiuni $f(x)$, continuă în orice interval finit, care satisface la ecuaţia funcţională

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

oricare ar fi valorile variabilelor x şi y.

R. Făcând $y = 0$ avem $f(0) = 0$ şi pentru $y = -x$, $f(-x) = -f(x)$. Apoi succesiv $f(x+x) = 2f(x)$, $f(x+2x) = 3f(x)$, ..., $f(nx) = nf(x)$ şi $f(-nx) = -nf(x)$.

Dacă facem $\frac{m}{n}x = y$, m şi n două numere întregi pozitive sau negative, vedem că $f(mx) = nf\left(\frac{mx}{n}\right) = mf(x)$ şi punând $f(1) = a$, avem $f\left(\frac{m}{n}\right) = a\frac{m}{n}$.

Prin urmare avem $f(x) = ax$ pentru toate valorile raţionale ale lui x; cum funcţiunea căutată este *continuă*, conchidem că $f(x) = ax$.

3. Să se găsească forma generală a funcţiei continue $f(x)$ care satisface la ecuaţia funcţională

$$f(x+y) = f(x)\,f(y).$$

R. Luăm logaritmii în baza A a ambilor membri şi, însemnând $\log_A f(x) = \phi(x)$, vom avea $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$. După exerciţiul precedent $\phi(x) = ax$, aşa că $f(x) = A^{\phi(x)} = A^{ax}$.

4. Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţiuni pozitive, continue şi crescătoare într'un interval (a, b). Dacă α şi β sunt două puncte din intervalul (a, b), există un număr γ, cuprins între α şi β, aşa fel încât să avem

$$f(\alpha)g(\beta)=f(\gamma)g(\gamma).$$

R. Să presupunem $\alpha<\beta$ şi să considerăm funcţiunea

$$F(x)=f(x)g(x)-f(\alpha)g(\beta).$$

Totul revine să arătăm că $F(x)$ se anulează într'un punct γ cuprins între α şi β. Din ipotezele făcute rezultă că

$$F(\alpha)=f(\alpha)[g(\alpha)-g(\beta)]<0,$$
$$F(\beta)=g(\beta)[f(\beta)-f(\alpha)]>0.$$

Prin urmare (19, IV) $F(\gamma)=0$.

5. Ori ce funcţie poate fi considerată ca suma a două funcţiuni, una *pară* şi una *impară*.

R. Se zice că o funcţie este *pară*, atunci când schimbând pe x în $-x$ funcţiunea rămâne neschimbată şi *impară* dacă, după această schimbare, funcţiunea schimbă de semn.

Fie $f(x)$ o funcţie definită într'un interval $(-a, +a)$. Funcţiunea

$$F(x)=f(x)+f(-x)$$

este o funcţie pară, iar funcţiunea

$$G(x)=f(x)-f(-x)$$

este o funcţie impară. Avem însă

$$f(x)=\frac{1}{2}[F(x)+G(x)].$$

6. Fiind dată o funcţie $f(x, y)$, continuă într'un domeniu A, să se arate că putem împărţi acest domeniu în domenii parţiale destul de mici aşa fel încât, (u, v) şi (u', v') fiind două puncte dintr'un acelaş domeniu parţial, să avem

$$|f(u, v)-f(u', v')|<\epsilon,$$

oricât de mic ar fi numărul dat ϵ.

R. Se va proceda prin subdiviziuni succesive, împărţind domeniul A, în domenii parţiale prin drepte paralele cu axele şi echidistante. Dacă propoziţia nu ar fi adevărată pentru domeniul A, va trebui ca ea să nu fie nici cel puţin pentru unul din domeniile parţiale. Fie A_1 un astfel de domeniu parţial; se va împărţi şi acest domeniu prin drepte paralele cu axele, etc. Raţionamentul se va sfârşi ca la No 19, I.

7. O funcţie $t=f(x,y)$ continuă într'un domeniu $\mathfrak{R}$ ia, în două puncte P şi Q ale domeniului, valori de semne contrarii. Fie Γ un arc de curbă situat în întregime în domeniul $\mathfrak{R}$ şi având extremităţile în P şi Q. Să se arate că $f(x, y)$ se anulează cel puţin într'un punct al arcului Γ.

R. Când punctul (x, y) descrie arcul Γ, t poate fi considerat ca o funcţie continuă de o singură variabilă: lungimea arcului având originea în P şi extremitatea cealaltă în (x, y). Deci $f(x, y)$ se anulează pe arcul Γ [19, IV].

CAPITOLUL III.

SERII.

I. — ŞIRURI. — SERII NUMERICE.

22. Şiruri convergente. Dacă considerăm o mulţime infinită de numere

(1) $$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

ocupând fiecare un *rang determinat*, zicem că avem un *şir*. Acest şir este *convergent* dacă s_n tinde către o limită finită S, când rangul n creşte nemărginit; sau, cu alte cuvinte, dacă la oricare număr pozitiv ε putem face să corespundă un număr întreg şi pozitiv N, aşa încât să avem

$$| s_n - S | < \varepsilon$$

pentru toate valorile lui $n \geqq N$.

Dacă şirul (1) nu este convergent, zicem că este *divergent*. Divergenţa poate fi de două feluri: fie că $| s_n |$ creşte nemărginit, fie că s_n nu tinde către nici o limită, fără însă ca $| s_n |$ să crească nemărginit.

Şirul (1) este *crescător*, dacă avem necontenit $s_{n+1} - s_n \geqq 0$; iar dacă avem $s_{n+1} - s_n \leqq 0$ şirul este *descrescător*.

Dacă termenul general al unui şir crescător nu creşte nemărginit, şirul este convergent. Această propoziţie este o consecinţă imediată a celor stabilite anterior (11, I).

Criteriu general. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca şirul* (1) *să fie convergent este ca, la oricare număr pozitiv* ε *să putem face să corespundă un număr întreg* N, *aşa încât să avem*

$$| s_{N+p} - s_N | < \varepsilon,$$

oricare ar fi numărul pozitiv p.

Condiţia este necesară, căci dacă şirul este convergent, vom avea

$$| S - s_N | < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{şi} \quad | S - s_{N+p} | < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi cum

$$|S-s_N|+|S-s_{N+p}|>|(S-s_N)-(S-s_{N+p})|$$

vom avea *a fortiori*

$$|s_{N+p}-s_N|<\varepsilon.$$

Condiţia este suficientă. In adevăr, dacă presupunem $|s_{N+p}-s_N|<\varepsilon$, oricare ar fi p, aceasta înseamnă că dela un rang determinat N, toate elementele şirului (1) sunt cuprinse între $s_N-\varepsilon$ şi $s_N+\varepsilon$; în afară de acest interval nu putem avea deci decât un număr *finit* de elemente ale şirului. Punctul limită S al mulţimii (1) va trebui să fie prin urmare cuprins între $s_n-\varepsilon$ şi $s_n+\varepsilon$ şi vom avea $|S-s_n|<\varepsilon$. Dar cum

$$s_{N+p}-S=(s_{N+p}-s_N)+(s_N-S),$$

vom avea, oricare ar fi întregul pozitiv p,

$$|s_{N+p}-S|<|s_{N+p}-s_N|+|s_N-S|<2\varepsilon.$$

Dar ε poate fi luat oricât de mic; deci s_n are ca limită pe S.

23. Serii numerice. Dacă avem un şir de numere $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ formate după o anumită lege, simbolul

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{2}$$

se numeşte *serie*. Termenul u_n este *termenul general* şi dacă cunoaştem expresia lui în funcţie de n, deducem din el toţi termenii seriei.

Seria (2) se poate scrie, mai concentrat, Σu_n.

Fie

$$s_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$$

suma primilor $n+1$ termeni ai seriei. Zicem că seria (2) este *convergentă*, dacă şirul $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ este convergent. In caz contrar seria (2) este divergentă. Dacă seria este convergentă *suma* seriei este limita S către care tinde s_n când n creşte nemărginit.

Să însemnăm

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots;$$

avem astfel o serie care este convergentă în acelaş timp cu seria (2); R_n se numeşte *restul* seriei de la termenul de rang $n+1$. Vedem că în studiul *convergenţei* putem totdeauna face abstracţie de un număr limitat de termeni dela începutul seriei.

OBSERVARE. Pentru a decide dacă o serie este convergentă suntem conduşi, după definiţiune, să cercetăm convergenţa sau divergenţa unui şir. Putem proceda însă şi invers: pentru a şti dacă şirul $s_0, s_1, s_2, \ldots,$ este convergent, este suficient a examina seria al cărei termen general este s_n-s_{n-1}, adică seria

$$s_0+(s_1-s_0)+(s_2-s_1)+\ldots+(s_n-s_{n-1})+\ldots$$

fiindcă suma primilor $n+1$ termeni ai ei este chiar s_n.

CRITERIU GENERAL DE CONVERGENȚĂ. Din definiția convergenței vedem că condiția necesară și suficientă pentru convergența unei serii este [22]: să putem face să corespundă la un număr pozitiv ε, oricât de mic ar fi, un număr n așa încât să avem

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \tag{3}$$

p fiind un întreg pozitiv oarecare.

Condiția (3) se mai poate scrie și astfel

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dacă facem $p = 1$ vedem că: *în orice serie convergentă termenul general u_n tinde către zero când n crește nemărginit*, dar această condiție *nu este suficientă* pentru a asigura convergența unei serii.

EXEMPLE DE SERII. I. Seria

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots$$

care se numește *progresie geometrică*, este des folosită în studiul general al seriilor. Dacă r este diferit de 1, avem

$$s_n = a + ar + \ldots + ar^n = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Pentru $|r| < 1$, r^n tinde către *zero*, când n crește nemărginit, deci seria este *convergentă* și suma ei este $\frac{a}{1-r}$. Pentru $|r| \geqq 1$ termenul general ar^n nu tinde către zero, deci seria este *divergentă*, afară de cazul $a = 0$, când seria este nulă.

II. Să considerăm identitatea

$$(v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + \ldots + (v_n - v_{n+1}) = v_0 - v_{n+1}$$

care ne permite să formăm cu ușurință serii convergente sau divergente. In adevăr, dacă v_n tinde către zero, când n crește nemărginit, atunci seria al cărei termen general este $v_n - v_{n+1}$, este convergentă, iar suma seriei este v_0.

EXEMPLU. Dacă luăm $v_n = \frac{1}{n+1}$ avem seria

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots \tag{4}$$

care este convergentă și are ca sumă unitatea.

Dacă însă v_n nu tinde către nici o limită, sau crește nemărginit în valoare absolută, seria al cărei termen general este $u_n = v_n - v_{n+1}$ este divergentă.

EXEMPLU. Luând $v_n = -\operatorname{Log}(1+n)$ suntem conduși la seria divergentă

$$\Sigma \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

16-17 **24. Serii cu termeni pozitivi.** Dacă toţi termenii unei serii sunt pozitivi, zicem că seria e *pozitivă*. Şirul s_n fiind în acest caz crescător, avem criteriul general: *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o serie pozitivă să fie convergentă este ca sumele s_n să rămână mai mici decât un număr fix.*

Dacă o serie pozitivă este divergentă, suma ei creşte nemărginit.

Din compararea a două serii deducem următoarele

REGULI DE CONVERGENŢĂ. I. *Fie Σu_n şi Σv_n două serii pozitive, aşa ca de la un rang n oarecare, să avem neconteniт*

$$u_n \leqq v_n$$

1⁰. *Dacă seria Σv_n este convergentă şi seria Σu_n este convergentă;*
2⁰. *dacă Σu_n este divergentă* şi Σv_n *este divergentă.*

In adevăr: 1⁰ suma seriei Σv_n fiind finită, *a fortiori* suma seriei Σu_n este finită şi deci seria este convergentă.

2⁰. suma seriei Σu_n fiind nemărginită şi suma seriei Σv_n va fi nemărginită, deci seria Σv_n este divergentă.

EXEMPLU. Avem

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{pentru} \quad n \geqq 1,$$

deci, din faptul că seria (4) este convergentă, conchidem că şi seria

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

este convergentă.

II. *Dacă seria Σu_n este convergentă şi seria Σv_n, obţinută înmulţind fiecare termen al seriei prin factori pozitivi şi inferiori unui număr pozitiv A, este convergentă.*

In adevăr seria Σv_n va fi convergentă, căci are termenii săi mai mici de cât ai seriei $\Sigma A u_n$ evident convergentă.

Tot astfel vedem că: *o serie, obţinută înmulţind fiecare termen al unei serii divergente prin factori mai mari decât un număr pozitiv A, este divergentă.*

III. *Dacă $\frac{u_n}{v_n}$ tinde către o limită finită şi diferită de zero când n creşte nemărginit, seriile Σu_n şi Σv_n sunt convergente sau divergente în acelaş timp.*

In adevăr, fie $\lim \frac{u_n}{v_n} = l$. Aceasta înseamnă că, de la un anumit rang, avem $u_n < (l+\varepsilon) v_n$ şi $u_n > (l-\varepsilon) v_n$, ε fiind luat destul de mic pentru ca $l-\varepsilon$ să fie pozitiv. Prin urmare propoziţia enunţată este o consecinţă a celor stabilite mai sus.

Spre exemplu, *seria armonică*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

este divergentă, pentru că raportul dintre termenul general al seriei divergente (5) și termenul general $\frac{1}{n}$ al seriei armonice este

$$\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

și are ca limită unitatea [1].

IV. Dacă seriile pozitive Σu_n și Σv_n sunt astfel încât începând dela un rang destul de mare, să avem necontenit

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

atunci: 1° dacă seria Σv_n este convergentă și seria Σu_n este convergentă; 2° dacă seria Σu_n este divergentă și seria Σv_n este divergentă.

In adevăr, de la o anumită valoare a lui n avem

$$\frac{u_n}{v_n} \geqq \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \geqq \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} \geqq \ldots$$

așa că dacă însemnăm cu a valoarea primului raport, avem, pentru toate valorile lui $m \geqslant n$,

$$u_m \leqq a\, v_m \quad \text{și} \quad v_m \geqq \frac{1}{a} u_m,$$

de unde, propoziția enunțată.

Fie spre exemplu

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{și} \quad v_n = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n}$$

Vom avea

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{n+1}{n} - \frac{2n+2}{2n+1} > 0.$$

Prin urmare seria $\Sigma \frac{1}{n}$ fiind divergentă și seria

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}+\ldots+\frac{1 \,.\, 3 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \ldots 2n}+\ldots$$

este divergentă.

Criteriul lui d'Alembert. *Dacă în seria Σu_n raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, de la o anumită valoare a lui n, rămâne mai mic decât un număr $k<1$, seria este convergentă. Seria este divergentă dacă raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ este mai mare decât unitatea.*

---

[1] Logaritmii fiind luați în sistemul cu baza e, cum vor fi considerați întotdeauna, când nu vom specifica contrariul.

In adevăr, dacă avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$ şi $k < 1$ pentru toate valorile lui n mai mari decât un număr determinat, deducem

$$u_{n+1} < k\, u_n,\quad u_{n+2} < k^2 u_n,\quad \ldots,\quad u_{n+p} < k^p u_n,\ \ldots$$

Prin urmare termenii seriei

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots$$

sunt mai mici decât termenii progresiei geometrice convergente

$$k u_n + k^2 u_n + \ldots + k^p u_n + \ldots$$

Seria Σu_n este deci convergentă.

In ipoteza a doua termenii seriei, de la un anumit rang, merg crescând; seria este divergentă, căci termenul general nu tinde către zero.

Observare. Dacă raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tinde către o limită l, când n creşte nemărginit, seria este convergentă dacă $l < 1$ şi divergentă dacă $l > 1$. Dacă $l = 1$, acest criteriu nu ne permite a determina natura seriei, afară de cazul când $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tinde către 1 prin valori mai mari decât 1, în care caz seria este divergentă.

EXEMPLU. In seria pozitivă

$$1 + 2a + 3a^2 + \ldots + (n+1)a^n + \ldots$$

raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ are ca limită pe a; deci seria este convergentă dacă $a < 1$ şi divergentă dacă $a > 1$. Pentru $a = 1$ seria este evident divergentă. avem îndoială (dubiu)

Criteriul lui Cauchy. *O serie este convergentă dacă dela o anumită valoare a lui n, avem*

$$\sqrt[n]{u_n} < k < 1 \qquad (6)$$

şi divergentă dacă

$$\sqrt[n]{u_n} > 1. \qquad (7)$$

In adevăr, dacă condiţia (6) este satisfăcută, atunci avem, de la un anumit rang, $u_n < k^n$; deci seria e *convergentă.*

Dacă condiţia (7) este realizată, termenul general al seriei nu tinde către zero; deci seria este *divergentă.*

Observare. Dacă $\sqrt[n]{u_n}$ are o limită l când n creşte nemărgit, seria este convergentă când $l < 1$ şi divergentă când $l > 1$.

Pentru $l = 1$, acest criteriu nu ne permite să determinăm natura seriei.

EXEMPLU. In seria

$$a + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{n-1}{n}a\right)^n + \ldots$$

$\sqrt[n]{u_n}$ are ca limită pe a. Deci dacă $a < 1$ seria este convergentă şi dacă $a > 1$ seria este divergentă. Pentru $a = 1$ seria este divergentă, căci termenul general are ca limită $\frac{1}{e}$.

CRITERIUL LUI KUMMER. *Fie $a_0, a_1, a_2, \ldots$ un şir de numere pozitive;*

1⁰. *Dacă, de la o anumită valoare a lui n, expresia*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \tag{8}$$

rămâne mai mare decât un număr pozitiv fix α, atunci seria este convergentă.

2⁰. *Dacă însă expresia (8) este negativă sau nulă şi dacă seria $\Sigma \frac{1}{a_n}$ este divergentă, atunci seria Σu_n este divergentă.*

Cum termenii de la începutul seriei nu influenţează asupra convergenţei sau divergenţei ei, vom presupune condiţiile din enunţ îndeplinite de la primul ei termen.

1⁰. Dacă facem în neegalitatea

$$\alpha\, u_{n+1} < a_n\, u_n - a_{n+1}\, u_{n+1}$$

pe $n = 0, 1, \ldots, n$ şi adunăm apoi neegalităţile obţinute membru cu membru, vom avea

$$\alpha\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}) < a_0\, u_0 - a_{n+1}\, u_{n+1} < a_0\, u_0.$$

Prin urmare seria este convergentă, ca având suma primilor n termeni (n oarecare) mărginită.

2⁰. Vom avea, după ipoteza a doua,

$$a_n\, u_n \geqq a_0\, u_0$$

deci

$$u_n \geqq a_0\, u_0 \frac{1}{a_n}$$

şi cum seria $\Sigma \frac{1}{a_n}$ este divergentă, *a fortiori* seria Σu_n va fi divergentă.

APLICAŢIE. Să facem $a_n = n$. Criteriul precedent ne conduce în acest caz la criteriul lui Raabe şi Duhamel:

Dacă dela un anumit rang, avem

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{k}{n}$$

unde $k > 1$, atunci seria este convergentă.

Dacă însă avem

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqq 1 + \frac{1}{n}$$

seria este divergentă.

OBSERVARE. Criteriul lui Raabe şi Duhamel mai poate fi enunţat şi sub forma următoare:

Fie

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \alpha_n.$$

Seria este convergentă dacă avem, de la un anumit rang, $n\alpha_n > k > 1$ *şi divergentă dacă* $n\alpha_n < 1$.

Să considerăm cazul: $\lim n\alpha_n = 1$. Să însemnăm

$$n\alpha_n = 1 + \frac{\beta}{n}$$

şi să arătăm că: *dacă de la un anumit rang avem* $\beta < b$, b *fiind un număr pozitiv determinat, seria este divergentă.*

In adevăr, după notaţiunile noastre, avem

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n^2}.$$

Seria cu termen general $\frac{1}{n-b}$, unde dăm lui n valori superioare lui b, este divergentă, fiind de aceeaşi natură cu seria armonică (regula III), iar raportul unui termen la următorul este

$$\frac{n+1-b}{n-b} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n^2} = \frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

Deci, după regula IV, seria Σu_n este divergentă.

25. Serii numerice oarecare. Termenii unei serii pot avea şi semne diferite. Studiul seriilor, care de la un rang oarecare au toţi termenii de acelaş semn, se reduce imediat la studiul seriilor cu termeni pozitivi. Ne rămâne deci de studiat cazul, când o serie are o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi.

26. Serii alternate. Se numeşte serie *alternată* o serie ai cărei termeni sunt, alternativ, pozitivi şi negativi.

CRITERIU DE CONVERGENŢĂ. *Dacă valoarea absolută a termenului general* u_n *descreşte şi tinde către zero, când* n *creşte nemărginit, seria este convergentă.*

In seria alternată

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + u_{2n} - u_{2n+1} + \ldots$$

avem, după enunţul propoziţiei,

$$u_0 > u_1 > u_2 > \ldots > u_{2n} > u_{2n+1} > \ldots$$

Să considerăm sumele

$$S_{2n+1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_{2n} - u_{2n+1})$$

formate cu un număr par de termeni ai seriei. Se vede imediat că aceste sume pozitive cresc cu n. Pe de altă parte mai putem scrie

$$S_{2n+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - \ldots - (u_{2n-1} - u_{2n}) - u_{2n+1}$$

şi cum fiecare paranteză este pozitivă, vedem că

$$S_{2n+1} < u_0.$$

Ceeace ne arată că sumele S_{2n+1}, crescătoare cu n, au o limită determinată pe care să o notăm cu S.

Cum însă

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$$

făcând pe n să crească nemărginit şi ţinând seama că u_{2n+1} are pe zero ca limită, vedem că sumele cu un număr par sau impar de termeni au aceeaşi limită S. Seria este deci convergentă.

EXEMPLU. Seria *armonică alternată*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

este convergentă.

27. Serii absolut convergente. O serie este *absolut convergentă*, atunci când seria formată de valorile absolute ale termenilor ei este convergentă.

O serie absolut convergentă este convergentă.

In adevăr, fie seria cu termeni pozitivi şi negativi

(9) $$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

şi

(10) $$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots$$

seria formată de valorile absolute ale termenilor seriei (9); am însemnat deci $U_n = |u_n|$. Seria (10) fiind convergentă şi cum

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < U_n + U_{n+1} + \ldots + U_{n+p}$$

conchidem, în baza criteriului general de convergenţă, că seria (9) este convergentă.

OBSERVARE. Reciproca nu este adevărată: se poate ca seria (9) să fie convergentă fără ca seria (10) să fie convergentă.

EXEMPLU. Am văzut că seria

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

este convergentă, pe când seria armonică

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

este divergentă.

TEOREMĂ. *Intr'o serie absolut convergentă putem schimba ordinea termenilor, fără ca suma seriei să se schimbe.*

Fie seria absolut convergentă

$$u_0+u_1+u_2+\dots$$

şi

$$u'_0+u'_1+u'_2+\dots$$

aceeaş serie, însă cu termenii luaţi în altă ordine. Să însemnăm

$$S_n=u_0+u_1+\dots+u_n,$$
$$S'_p=u'_0+u'_1+\dots+u'_p$$

şi să luăm pe p destul de mare astfel ca *toţi* termenii sumei S_n să se găsească în suma S'_p. Vom avea

$$S'_p-S_n=u_{n+\alpha}+u_{n+\beta}+\dots+u_{n+\lambda}$$

unde α, β, ..., λ sunt $p-n$ numere întregi pozitive. Dacă m este cel mai mare număr dintre acestea, deducem

$$|S'_p-S_n|<|u_{n+\alpha}|+|u_{n+\beta}|+\dots+|u_{n+\lambda}|$$
$$<|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\dots+|u_{n+m}|.$$

Ţinând seama că seria este absolut convergentă, vedem că putem lua pe n destul de mare, aşa ca

$$|S'_p-S_n|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{şi} \quad |S_n-S|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

De aci rezultă

$$|S'_p-S|<\varepsilon$$

şi teorema este demonstrată.

28. **Serii semi-convergente.** O serie convergentă, care nu este absolut convergentă, se zice *semi-convergentă*. Să arătăm că *într'o astfel de serie termenii pozitivi de o parte şi termenii negativi de alta formează două serii d i v e r g e n t e.*

Fie S_n suma primilor n termeni ai unei serii semi-convergente; P_n şi N_n respectiv sumele termenilor pozitivi şi termenilor negativi care intră în S_n. După ipotezele făcute avem, S fiind suma seriei,

$$\lim(P_n-N_n)=S, \quad \lim(P_n+N_n)=\infty,$$

de unde deducem

$$\lim P_n = \infty \quad \text{şi} \quad \lim N_n = \infty. \qquad \text{c. e. d. d.}$$

Teoremă. *Schimbând ordinea termenilor într'o serie semi-convergentă, putem face ca suma seriei să fie orice număr dat.*

Să presupunem dată o serie semi-convergentă şi să formăm cu termenii ei o serie, care să aibă ca sumă, de exemplu, numărul pozitiv M. Vom lua din termenii pozitivi ai seriei, în ordinea în care se prezintă, un număr suficient de termeni, până ce suma lor depăşeşte numărul M (ceeace este posibil, căci suma tuturor termenilor pozitivi este infinită); vom adăuga apoi termenii negativi, până ce suma totală va fi mai mică decât M; apoi iarăşi adăugăm termeni pozitivi până ce depăşim numărul M şi continuăm la infinit aceste operaţiuni. Am format astfel o serie Σ care va avea ca sumă pe M.

In adevăr să notăm cu Σ_m suma primilor m termeni ai acestei serii. Diferenţa $M - \Sigma_m$ schimbă de semn de o infinitate de ori; dacă această diferenţă este pozitivă, ea este mai mică decât ultimul termen pozitiv adăugat din seria dată; dacă este negativă, este mai mică, în valoare absolută de cât valoarea absolută a ultimului termen negativ adăugat. Cum termenul geneneral u_n al seriei date tinde către zero când n creşte nemărginit, rezultă că

$$\lim \Sigma_m = M. \qquad \text{c. e. d. d.}$$

29. Operaţiuni cu seriile. Adunarea seriilor. *Fie Σu_n şi Σv_n două serii convergente având ca sume respectiv s şi σ. Seria $\Sigma(u_n \pm v_n)$ este convergentă şi are ca sumă $s \pm \sigma$.*

Dacă notăm cu s_n şi σ_n sumele primilor n termeni din seriile date, suma primilor n termeni din seria $\Sigma(u_n \pm v_n)$ va fi $s_n \pm \sigma_n$. Făcând pe n să crească nemărginit, vedem că seria $\Sigma(u_n \pm v_n)$ este convergentă şi are ca sumă $s \pm \sigma$.

Inmulţirea seriilor. Fie seriile

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{11}$$

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots \tag{12}$$

Inmulţindu-le termen cu termen, după regula înmulţirii a două sume şi grupând termenii pentru cari suma indicilor lui u şi v e aceeaş, obţinem seria produs

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0) + \ldots \tag{13}$$

Teoremă. *Dacă înmulţim două serii convergente, dintre care una cel puţin este absolut convergentă, seria produs este convergentă şi are ca sumă produsul sumelor celor două serii* (Mertens).

Vom presupune seria (11) absolut convergentă, iar seria (12) convergentă. Să notăm cu w_n termenul general al seriei (13), adică

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0. \tag{14}$$

Vom considera următoarele diferenţe, de ordin par şi impar,

$$\delta = w_0 + w_1 + \dots + w_{2n} - (u_0 + u_1 + \dots + u_n)(v_0 + v_1 + \dots + v_n);$$
$$\delta_1 = w_0 + w_1 + \dots + w_{2n+1} - (u_0 + u_1 \dots + u_{n+1})(v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}).$$

Dacă vom arăta că diferenţele δ şi δ_1 au ca limită zero, când n creşte nemărginit, teorema enunţată va fi demonstrată. Vom arăta acest lucru pentru δ; pentru δ_1 demonstraţia se face în mod identic.

Să punem mai întâiu expresia δ sub altă formă. Ţinând seama de egalitatea (14) vedem că

$$w_0 + w_1 + \dots + w_{2n} = u_0(v_0 + v_1 + \dots + v_{2n}) + u_1(v_0 + v_1 + \dots + v_{2n-1}) + \dots$$
$$+ u_n(v_0 + \dots + v_n) + u_{n+1}(v_0 + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_{2n} v_0,$$

deci

$$\delta = u_0(v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + \dots + v_{2n-1}) + \dots + u_{n-1} v_{n+1}$$
$$+ u_{n+1}(v_0 + \dots + v_{n-1}) + u_{n+2}(v_0 + \dots + v_{n-2}) + \dots + u_{2n} v_0.$$

Prin ipoteză seria (11) este absolut convergentă şi seria (12) convergentă. Prin urmare putem găsi două numere pozitive A şi B, aşa fel încât să avem, oricare ar fi m,

$$|u_0| + |u_1| + \dots + |u_m| < A$$
$$|v_0 + v_1 + \dots + v_m| < B$$

şi putem alege un rang n destul de mare, aşa încât să avem, oricât de mic ar fi ε, pentru toate valorile lui p

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{A+B}$$
$$|v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{A+B}.$$

Ţinând seama de aceste neegalităţi, deducem, din ultima expresie a lui δ,

$$|\delta| < |u_0|\frac{\varepsilon}{A+B} + |u_1|\frac{\varepsilon}{A+B} + \dots + |u_{n-1}|\frac{\varepsilon}{A+B}$$
$$+ |u_{n+1}|B + |u_{n+2}|B + \dots + |u_{2n}|B$$

de unde a fortiori

$$|\delta| < A\frac{\varepsilon}{A+B} + B\frac{\varepsilon}{A+B} = \varepsilon.$$

Prin urmare $\lim |\delta| = 0$, când n creşte nemărginit.

Observare. Dacă nici una din seriile convergente (11) şi (12) nu este absolut convergentă, seria (13) poate fi *divergentă.*

Să arătăm acest lucru pe un exemplu simplu. Vom lua

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}};$$

seriile (11) şi (12) vor fi convergente [26] dar nu absolut convergente.

Vom avea

$$w_n = (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-1)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right].$$

şi ţinând seama că $\sqrt{\alpha\beta} \leqq \frac{\alpha+\beta}{2}$, vedem că

$$|w_n| > \frac{2(n+1)}{n+2}$$

deci w_n nu tinde către zero, când n creşte indefinit; prin urmare seria (13) este divergentă.

II. — SERII DE FUNCŢIUNI.

30. Să considerăm o serie

$$(1) \qquad u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

ai cărei termeni sunt funcţiuni de o variabilă x. Dacă această serie este convergentă pentru toate valorile lui x din intervalul (a, b) suma acestei serii va fi o funcţiune de x determinată în acest interval.

Să punem

$$(2) \qquad R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

Seria (1) fiind convergentă în intervalul (a, b), pentru *fiecare* valoare a lui x din acest interval corespunde câte un număr N, aşa încât să avem, oricât de mic ar fi numărul dat ε,

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

pentru toate valorile lui $n > N$. Numărul N *depinde în general de valoarea aleasă pentru* x.

Convergenţă uniformă. Zicem că seria (1) este *uniform convergentă* în intervalul (a, b), atunci când fiind dat un număr ε putem face să-i corespundă numărul N, aşa fel încât să avem

$$(3) \qquad |R_n(x)| < \varepsilon,$$

pentru toate valorile lui $n > N$, *oricare ar fi valoarea lui x în intervalul* (a, b). Cu alte cuvinte valoarea lui N nu trebue să depindă de x.

Să dăm un exemplu de serie convergentă, care nu este uniform convergentă. Fie progresia geometrică

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots$$

care este convergentă pentru orice valoare a lui x, căci pentru x diferit de zero, raţia este pozitivă şi mai mică decât unitatea, iar pentru $x = 0$ seria se reduce la zero. Să arătăm că această serie nu este uniform convergentă *în orice interval care cuprinde valoarea* $x = 0$.

In adevăr avem

$$R_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\left[1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \ldots\right]$$

deci

$$R_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Vedem că nu putem fixa pe N aşa încât să satisfacem neegalitatea (3), oricât de vecin ar fi x de origină, căci luând, spre exemplu, $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, R_n este foarte vecin de $\frac{1}{e}$.

Observare. Suma seriei precedente este o funcţie *discontinuă* de x: are valoarea zero pentru $x = 0$ şi $1 + x^2$ pentru $x \neq 0$.

Criteriu de convergenţă uniformă. Fie

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots$$

o serie convergentă ai cărei termeni sunt *numere* pozitive.

Dacă pentru orice valoare a lui x din intervalul (a, b) avem, oricare ar fi n, $|u_n(x)| \leqq v_n$, seria (1) *este uniform convergentă în acest interval.*

In adevăr, vom avea pentru toate valorile lui x din intervalul (a, b),

$$|R_n(x)| < v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots$$

Putem alege un număr N aşa ca, pentru $n > N$, membrul al doilea al acestei neegalităţi să fie mai mic decât un număr dat ε. Vom avea deci a fortiori

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

pentru $n > N$, ori care ar fi x în intervalul (a, b). Prin urmare seria (1) este uniform convergentă.

Exemplu. Seria

$$(4) \qquad v_0 + v_1 \sin x + \ldots + v_n \sin nx + \ldots,$$

unde v_0, v_1, ... sunt termenii seriei precedente, este uniform convergentă, pentru x cuprins în orice interval, căci

$$| v_n \sin n x | \leqq v_n.$$

TEOREMĂ. *Dacă termenii seriei* (1), *uniform convergentă în intervalul* (a, b), *sunt funcţiuni continue în acelaş interval, suma seriei va fi o funcţie continuă în intervalul* (a, b).

Să însemnăm cu $s_n(x)$ suma primilor $n+1$ termeni ai seriei (1) şi cu $S(x)$ suma seriei. Vom avea, ţinând seama de (2),

$$S(x) = s_n(x) + R_n(x).$$

Putem, prin ipoteză, să luăm pe n destul de mare aşa încât să avem neegalitatea (3), oricare ar fi x în intervalul (a, b), ε fiind un număr dat dinainte, oricât de mic voim.

u fiind un punct din intervalul (a, b) vom avea

$$S(u) - S(x) = s_n(u) - s_n(x) + R_n(u) - R_n(x),$$

precum şi

$$| R_n(u) - R_n(x) | < 2\varepsilon.$$

Pe de altă parte $s_n(x)$ fiind o sumă de un număr *limitat* de funcţiuni continue, va fi o funcţie continuă; deci putem lua pe u destul de aproape de x pentru ca să avem

$$| s_n(u) - s_n(x) | < \varepsilon.$$

Prin urmare avem

$$| S(u) - S(x) | < 3\varepsilon,$$

pentru u destul de aproape de x. Funcţiunea $S(x)$ este deci continuă în intervalul (a, b).

EXEMPLU. Suma seriei (4) este o funcţie continuă de x, în orice interval, căci această serie este uniform convergentă, iar termenii ei sunt funcţiuni continue de x.

31. Serii întregi. O clasă particulară de serii de funcţiuni şi care joacă un rol fundamental în Analiza Matematică, sunt seriile ordonate după puterile *întregi* şi *pozitive* ale variabilei. Fie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{5}$$

o astfel de serie, unde a_0, a_1, ... sunt coeficienţi numerici. Seria (5) se numeşte o *serie întreagă* sau o *serie de puteri*. Să considerăm şi seria pozitivă

$$A_0 + A_1 X + \ldots + A_n X^n + \ldots$$

formată de valorile absolute ale termenilor seriei (5); adică

$$| a_n | = A_n, \quad | x | = X.$$

CONVERGENŢĂ. Pentru a studia convergenţa seriei (5) să considerăm şirul

$$(7) \qquad A_0,\ A_1,\ \sqrt{A_2},\ \ldots,\ \sqrt[n]{A_n},\ \ldots$$

care poate prezenta una din următoarele trei particularităţi:

1⁰. *Şirul* (7) *este convergent şi tinde către zero.*

In acest caz seria (5) este absolut convergentă pentru orice valoare a lui x. In adevăr, aplicând seriei (6), criteriul lui Cauchy avem

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{A_n X^n} = \lim \sqrt[n]{A_n}\, X = 0$$

ceeace ne arată că seria (6) este convergentă oricare ar fi X; prin urmare seria (5) este absolut convergentă.

EXEMPLU. Seria

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^n} + \ldots$$

este convergentă oricare ar fi x.

2⁰. *Şirul* (7) *nu este mărginit superior.* In acest caz seria (5) este divergentă pentru orice valoare a lui x diferită de zero. In adevăr, termenul general al seriei, pentru $x \neq 0$, nu tinde către zero, căci modulul său

$$\left[\sqrt[n]{A_n}\, X\right]^n$$

poate depăşi orice număr pozitiv.

EXEMPLU. Seria

$$1 + x + \ldots + n^n x^n + \ldots$$

este divergentă oricare ar fi x diferit de zero.

3⁰. Să presupunem că *şirul* (7) *are o margine superioară* şi *nu convergează către zero.* Să însemnăm cu L cea mai mare limită [8] a mulţimii numerelor din şirul (7). In acest şir nu vor fi decât un număr limitat de termeni mai mari decât $L+\varepsilon$; deci, dela un rang destul de mare, *toţi* termenii şirului sunt mai mici decât $L+\varepsilon$. Pe când între $L-\varepsilon$ şi $L+\varepsilon$ avem o infinitate de termeni ai şirului; adică dela orice rang, oricât de mare, se vor găsi termeni de-ai şirului mai mari decât $L-\varepsilon$.

Să însemnăm $R = \frac{1}{L}$ şi să arătăm că:

α) Seria (1) este *absolut convergentă* pentru $-R < x < R$.

β) Seria (1) este *divergentă* pentru x în afară de intervalul $(-R, R)$.

α) Va trebui să arătăm că seria (6) este convergentă pentru orice valoare pozitivă $X < R$. Fie $X = \frac{1}{L + 2\varepsilon}$ un astfel de număr.

Avem, dela o valoare destul de mare a lui n,

$$\sqrt[n]{A_n} < L + \varepsilon,$$

deci

$$\sqrt[n]{A_n X^n} < \frac{L+\varepsilon}{L+2\varepsilon} < 1.$$

Prin urmare seria (6) este convergentă în virtutea criteriului lui Cauchy.

β) Presupunem pe x în afară de intervalul $(-R, R)$, deci

$$|x| = \frac{1}{L-\varepsilon}.$$

Dar în şirul (7) vom avea un termen, de un rang oricât de mare voim, aşa ca

$$\sqrt[n]{A_n} > L - \varepsilon,$$

de unde

$$A_n X^n > (L-\varepsilon)^n X^n.$$

Inlocuind pe X prin valoarea aleasă pentru $|x|$, avem

$$A_n X^n = |a_n x^n| > 1.$$

Termenul general al seriei (5) ne tinzând către zero, seria este divergentă.

Observări. 1⁰. Dacă raportul $\frac{A_n}{A_{n+1}}$ tinde către o limită l, avem $l = R$. In adevăr, să aplicăm seriei (6) criteriul lui d'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{A_{n+1}\, X}{A_n} = \frac{X}{l}.$$

Prin urmare seria (6) este convergentă pentru $X < l$ şi divergentă pentru $X > l$. Va trebui deci să avem $l = R$.

2⁰. Pentru $x = R$ sau $x = -R$ seria (5) poate fi *convergentă* sau *divergentă*.

EXEMPLU. Numărul R corespunzător seriei

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n+1} + \ldots$$

este 1. Seria este convergentă pentru $x = -1$ şi divergentă pentru $x = 1$.

Convergența uniformă. Dacă seria (5) este convergentă pentru $-R < x < R$, să arătăm că ea este *uniform convergentă* în intervalul $(-R_1, R_1)$ unde R_1 este un număr pozitiv mai mic de cât R.

Pentru aceasta ne vom folosi de criteriul de convergență uniformă indicat [30]. Seria pozitivă este convergentă pentru $X = R_1$ şi cum pentru toate valorile lui x din intervalul $(-R_1, R_1)$ avem

$$|a_n x^n| \leqq A_n R_1^n$$

urmează că seria (5) este uniform convergentă în acest interval.

Consecinţă. Cum termenii seriei întregi sunt funcţiuni continue de x, din convergenţa uniformă a seriei (5) în intervalul $(-R_1, R_1)$, deducem [30, Teoremă] că *suma seriei* (5) *este o funcţiune continuă* în acest interval.

Teorema lui Abel. *Dacă seria* (5) *este convergentă pentru* $x = R$, *este uniform convergentă în tot intervalul* $(0, R)$.

Pentru demonstrarea acestei propoziţii ne vom folosi de următoarea *Lemă a lui Abel:*

Fie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$, $p+1$ numere *pozitive* descrescătoare sau staţionare, adică

$$\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_p$$

şi un acelaş număr de cantităţi oarecare $u_0, u_1, \ldots, u_p$. Dacă sumele

$$s_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_i \quad (i = 0, 1, \ldots, p) \tag{8}$$

sunt toate cuprinse între două numere A şi B, atunci *suma*

$$\varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon\; u_p \tag{9}$$

va fi cuprinsă între $\varepsilon_0 A$ *şi* $\varepsilon_0 B$.

In adevăr, din (8) deducem

$$u_0 = s_0, \quad u_1 = s_1 - s_0, \quad \ldots, \quad u_p = s_p - s_{p-1}$$

aşa că suma (9) se mai poate scrie

$$s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots + s_p(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p \varepsilon_p.$$

Diferenţele $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ nefiind nici una negativă, obţinem două limite, una inferioară şi alta superioară, ale acestei sume, când înlocuim cantităţile $s_0, s_1, \ldots, s_p$ prin A sau prin B. Vom avea deci

$$A\varepsilon_0 < s_0 u_0 + s_1 u_1 + \ldots + s_p u_p < B\varepsilon_0.$$

Să trecem acum la demonstrarea *teoremei lui Abel.* Fie ε un număr pozitiv dat oricât de mic. Seria (5) fiind convergentă în punctul R, vom putea alege un număr n destul de mare, aşa încât să avem

$$-\varepsilon < a_{n+1} R^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} + \ldots + a_{n+p} R^{n+p} < \varepsilon$$

oricare ar fi numărul p. Pentru $0 < x \leqq R$ numerele $\left(\frac{x}{R}\right)^{n+i}$ sunt descrescătoare (sau staţionare pentru $x=R$) când i creşte. Să aplicăm *lema lui Abel* luând $\varepsilon_i=\left(\frac{x}{R}\right)^{n+i}$ şi $u_i=a_{n+i}R^{n+i}$.

Vom avea

$$-\varepsilon\left(\frac{x}{R}\right)^n<\sum_{i=0}^{i=p}a_{n+i}R^{n+i}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+i}<\varepsilon\left(\frac{x}{R}\right)^n$$

de unde, a fortiori,

$$|a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\ldots+a_{n+p}x^{n+p}|<\varepsilon$$

pentru toate valorile pozitive ale lui x din intervalul $(0, R)$ *inclusiv* punctul R. Deci seria (5) este uniform convergentă în acest interval.

Observare. Din convergenţa uniformă a seriei (5), rezultă continuitatea sumei $S(x)$ a acestei serii în *întreg* intervalul $(0, R)$. Aşa că putem scrie

$$\lim_{x=R}S(x)=S(R).$$

APLICAŢIE. Seria

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

convergentă pentru $-1<x\leqq 1$, are ca sumă $\operatorname{Log}(1+x)$, după cum vom arăta mai departe. Această serie fiind convergentă pentru $x=1$, avem dreptul să scriem, în baza observării precedente,

$$Log\ 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$$

EXERCIŢII.

1. Dacă şirul $s_0, s_1, s_2, \ldots$ este convergent, vom avea

$$lim\frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}=lim\ s_n$$

R. Consecinţă a propoziţiei 11, 5⁰. Vom lua $a_n=s_0+s_1+\ldots+s_n$ şi $b_n=n+1$. Cum $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=s_{n+1}$ are o limită, raportul $\frac{a_n}{b_n}=\frac{s_0+\ldots+s_n}{n+1}$ va avea aceeaş limită.

2. Dacă şirul de numere pozitive $u_0, u_1, u_2, \ldots$ este convergent, vom avea

$$lim\sqrt[n+1]{u_0u_1\ldots u_n}=lim\frac{u_0+u_1+\ldots+u_n}{n+1}$$

adică media geometrică şi media aritmetică au aceeaş limită.

R. Consecinţă a exerciţiului precedent, căci luând $s_i=\log u_i$ şi aplicând cele stabilite mai sus, avem

$$lim\frac{\log u_0+\log u_1+\ldots+\log u_n}{n+1}=lim\log u_n.$$

de unde

$$(1)\qquad \lim \sqrt[n+1]{u_0 \cdot u_1 \ldots u_n} = \lim u_n.$$

3. Dacă într'o serie cu termeni pozitivi

$$V_0 + V_1 + \ldots + V_n + \ldots$$

raportul $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ are o limită atunci radicalul $\sqrt[n]{V_n}$ are aceeaş limită. Reciproca nu este totdeauna adevărată.

R. Dacă în egalitatea (1) facem $u_0 = v_0$, $u_1 = \frac{v_1}{v_0}, \ldots, u_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}$, avem propoziţia enunţată. Dacă luăm $v_{2n} = A^n B^n$ şi $v_{2n+1} = A^n B^{n+1}$, vedem că reciproca nu este adevărată, căci $\sqrt[n]{v_n}$ are ca limită pe $\sqrt{AB}$, pe când $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ este alternativ A sau B.

4. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca seria, al cărei termen general este

$$u_n = \frac{n^p + a\,n^{p-1} + \ldots}{n^q + b\,n^{q-1} + \ldots},$$

(adică câtul a două polinoame ordonate după puterile descrescătoare ale lui n), să fie convergentă este $q \geqq p + 2$.

R. Seria propusă este de aceeaş natură cu seria, care are termenul general $v_n = \frac{n^p}{n^q}$, căci $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$. Seria v_n este divergentă pentru $q \leqq p$ sau $q = p + 1$; convergentă pentru $q = p + 2$ şi a fortiori convergentă pentru $q > p + 2$.

5. Seria cu termenul general $u_n = \frac{n!}{n^n}$ este convergentă.

R. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; deci $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$.

$\frac{n!}{n^n} + 1$

$\frac{n!}{n^n}$

6. Seria al cărei termen general este

$$u_n = (2n+1)\left[\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n+1)}\right]^2$$

este convergentă pentru $\lambda > -\frac{1}{2}$ şi divergentă pentru celelalte valori ale lui λ.

R. Avem

$$\lim n\,\alpha = \lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 4\lambda + 3;$$

deci, după criteriul lui Raabe şi Duhamel, seria propusă este convergentă pentru $\lambda > -\frac{1}{2}$ şi divergentă pentru $\lambda < -\frac{1}{2}$. Pentru $\lambda = -\frac{1}{2}$ seria este divergentă, căci avem $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

7. Dacă într'o serie raportul a doi termeni consecutivi este de forma

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + a\,n^{p-1} + \ldots}{n^p + b\,n^{p-1} + \ldots},$$

seria va fi convergentă dacă $b - a > 1$ şi divergentă dacă $b - a \leqq 1$ (G a u s s).

R. Avem

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=b-a;$$

deci seria este convergentă dacă $b-a>1$ şi divergentă dacă $b-a<1$.

Pentru $b-a=1$ expresiunea

$$\beta=n^2\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-n$$

are o limită, deci după observarea făcută asupra criteriului Raabe şi Duhamel [24], seria propusă este divergentă.

8. Fie seria, numită serie ipergeometrică,

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n+\ldots$$

unde α, β, γ sunt numere oarecari. Această serie este convergentă: 1⁰ pentru $|x|<1$; 2⁰ pentru $x=1$ dacă $\alpha+\beta-\gamma<0$.

R. Găsim

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}x.$$

1⁰. Avem $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=x$.

2⁰. După exerciţiul precedent seria este convergentă dacă $\gamma+1-\alpha-\beta>1$ şi divergentă dacă $\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$.

9. Fie S şi S' sumele a două serii convergente (nu absolut convergente)

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$
$$v_0+v_1+\ldots+v_n+\ldots$$

Dacă seria produs, care are ca termen general

$$w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_nv_0,$$

este convergentă, atunci suma ei e SS' (Abel).

R. Să considerăm seriile auxiliare

$$\Sigma(x)=u_0+u_1x+\ldots+u_nx^n+\ldots$$
$$\Sigma'(x)=v_0+v_1x+\ldots+v_nx^n+\ldots$$

care fiind convergente pentru $x=1$ vor fi absolut convergente pentru $|x|<1$.

Facând produsul acestor serii [29], avem

$$\Sigma(x)\Sigma'(x)=w_0+w_1x+\ldots+w_nx^n+\ldots$$

Cum seria din membrul al doilea este convergentă pentru $x=1$, după teorema lui Abel, ambii membri sunt funcţiuni continue de x în întreg intervalul $(0,1)$. Făcând deci $x=1$, avem propoziţia enunţată.

CAPITOLUL IV.

DERIVAREA FUNCŢIUNILOR DE O VARIABILĂ.

I. — INFINIŢI MICI. — METODA INFINITEZIMALĂ.

32. Infiniţi mici. O cantitate, *variabilă, care tinde către zero*, este un *infinit mic*. Mai mulţi infiniţi mici, consideraţi simultan, se pot compara între ei.

Zicem că α este i n f i n i t ~~de~~ m i c în raport cu β, dacă raportul $\frac{\alpha}{\beta}$ are ca limită *zero*, când α şi β tind către zero. Dacă însă raportul $\frac{\alpha}{\beta}$ are o limită finită şi *diferită de zero*, zicem că α şi β sunt infiniţi mici *de acelaş ordin*.

Pentru stabilirea unei clasificări între mai mulţi infiniţi mici se alege unul ca etalon, căruia i se dă numele de *infinit mic p r i n c i p a l*. Zicem că β este un infinit mic de *ordinul p*, în raport cu infinitul mic principal α, dacă avem

$$(1) \qquad \lim \frac{\beta}{\alpha^p} = k$$

unde k e un număr *finit*, determinat şi *diferit de zero*. Dacă p este mai mare decât 1, egalitatea precedentă exprimă că β tinde mai repede către zero de cât α.

Dacă nu există nici un număr p cu ajutorul căruia să putem scrie o egalitate de forma (1), zicem că β nu are nici un *ordin de infinitudine* faţă de α.

EXEMPLU. Fie $\beta = \alpha\left(\sin\frac{1}{\alpha} + 2\right)$; β nu are nici un ordin de infinitudine faţă de α. In adevăr, cum valoarea lui $\sin\frac{1}{\alpha}$ rămâne cuprinsă între -1 şi $+1$, limita raportului $\frac{\beta}{\alpha^p}$, când α tinde către zero, este infinită pentru $p > 1$ şi nulă pentru $p < 1$; pentru $p = 1$ acest raport nu tinde către nici o limită determinată.

Să presupunem că între infiniţii mici α şi β avem relaţia (1), care se mai poate scrie

$$\frac{\beta}{\alpha^p}=k+\varepsilon$$

unde ε tinde către zero, când α tinde către zero. Vom avea

$$\lim\frac{\beta}{k\alpha^p}=1.$$

$k\alpha^p$ se numeşte *partea principală* a infinitului mic β.

Dacă $p=1$ şi $k=1$, zicem că α şi β sunt infiniţi mici *echivalenţi*.

Diferenţa δ a doi infiniţi mici echivalenţi, α şi β, este infinit de mică în raport cu fiecare din cei doi infiniţi mici şi reciproc.

In adevăr, egalitatea $\delta=\alpha-\beta$, se mai poate scrie

$$\frac{\delta}{\alpha}=1-\frac{\beta}{\alpha}$$

şi cum membrul al doilea are ca limită zero, δ este infinit de mic în raport cu α. Reciproc, dacă δ este infinit de mic în raport cu α, din egalitatea precedentă deducem că $\frac{\beta}{\alpha}$ are ca limită unitatea; deci α şi β sunt infiniţi mici echivalenţi.

Observare. Din propoziţia precedentă rezultă că, dacă $k\alpha^p$ este partea principală a lui β, atunci diferenţa $\beta-k\alpha^p$ este infinit de mică în raport cu α^p; deci dacă q este ordinul acestei diferenţe faţă de infinitul mic principal α, vom avea

$$\beta-k\alpha^p=(l+\varepsilon_1)\,\alpha^q$$

unde $q>p$. Tot astfel, expresiunea $\beta-k\alpha^p-l\alpha^q$ este infinit de mică faţă de α^q şi dacă notăm cu r ordinul ei faţă de infinitul mic principal α, avem

$$\beta-k\alpha^p-l\alpha^q=(m+\varepsilon_2)\,\alpha^r,$$

unde $r>q$. O expresie de forma

$$k\alpha^p+l\alpha^q+m\alpha^r \qquad (p<q<r),$$

se chiamă *valoarea asimptotică* a lui β şi diferă de β printr'un infinit mic de ordin superior lui r. Pentru a avea o cât mai bună valoare asimptotică se va lua un număr destul de mare de termeni în expresiunea de mai sus.

Exemplu. Fie $\alpha=\frac{1}{n}$ şi $\beta=\frac{1}{1+n^a}$, unde $a>0$; α şi β sunt infiniţi mici când n creşte nemărginit. Să căutăm o valoare asimptotică pentru β. Vedem imediat că

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^a}=1,\quad \lim\frac{\beta-\alpha^a}{\alpha^{2a}}=-1,\quad \lim\frac{\beta-\alpha^a+\alpha^{2a}}{\alpha^{3a}}=1.$$

Prin urmare

$$a^{\alpha} - a^{2\alpha} + a^{3\alpha}$$

este o valoare asimptotică a lui β şi diferă de β prin infiniţi mici de un ordin superior lui 3α.

33. Metoda infinitezimală. Utilizarea în calcule sau raţionamente a infiniţilor mici, constitue *metoda infinitezimală*. In *calculul diferenţial* se consideră limita raportului a doi infiniţi mici, iar în *calculul integral* se consideră limita unei sume de un număr (care creşte nemărginit) de infiniţi mici.

Vom indica două principii fundamentale în metoda infinitezimală şi care stau, primul la baza calculului diferenţial şi al doilea la baza calculului integral.

I. *Limita raportului a doi infiniţi mici nu se schimbă când înlocuim aceşti infiniţi mici prin alţii respectiv echivalenţi.*

In adevăr, fie α şi β doi infiniţi mici, iar α' şi β' infiniţi mici respectiv echivalenţi cu α şi β; cum putem scrie

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}$$

avem, trecând la limită,

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha}$$

şi cum, prin ipoteză, avem

$$\lim \frac{\beta}{\beta'} = 1, \quad \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1,$$

rezultă că

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

EXEMPLU. Ca să găsim limita raportului $\frac{\sin p\alpha}{\sin q\alpha}$ când α tinde către zero, vom înlocui $\sin p\alpha$ prin $p\alpha$ şi $\sin q\alpha$ prin $q\alpha$, căci [12,3]

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Prin urmare

$$\lim \frac{\sin p\alpha}{\sin q\alpha} = \lim \frac{p\alpha}{q\alpha} = \frac{p}{q}.$$

II. *Limita sumei infiniţilor mici de acelaş semn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, al căror număr creşte nemărginit, nu se schimbă, când înlocuim aceşti infiniţi mici prin alţii echivalenţi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, rapoartele $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$ tinzând însă în mod uniform către unitate.*

Inţelegem prin cuvintele *în mod uniform* posibilitatea de a alege pe n destul de mare aşa încât să avem, oricât de mic ar fi numărul pozitiv ε

$$1-\varepsilon<\frac{\beta_i}{\alpha_i}<1+\varepsilon$$

oricare ar fi indicele i.

Aşa fiind, dacă infiniţii mici consideraţi sunt pozitivi, vom avea

$$(1-\varepsilon)\,\alpha_i<\beta_i<(1+\varepsilon)\,\alpha_i.$$

Făcând $i=1, 2, \ldots, n$ şi adunând neegalităţile obţinute, suntem conduşi la

$$1-\varepsilon<\frac{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}<1+\varepsilon.$$

Cum ε poate fi făcut oricât de mic în acelaş timp cu $\frac{1}{n}$, vedem că

$$\lim\frac{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}=1$$

adică sumele $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ şi $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$ au aceeaş limită, care poate fi finită, nulă sau infinită.

EXEMPLU. Se ştie din trigonometrie că, pentru arcele din primul cadran, avem

$$1-\frac{x^2}{4}<\frac{\sin x}{x}<1\ (^1).$$

Să facem succesiv $x=\frac{1}{n^{1+a}}, \frac{2}{n^{1+a}}, \ldots, \frac{n}{n^{1+a}}$; pentru toate aceste n valori ale lui x, vom avea

$$1-\frac{1}{4\,n^{2a}}<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Dacă a este *pozitiv*, putem lua $\varepsilon=\frac{1}{4\,n^{2a}}$ şi după propoziţia precedentă vedem că, dacă însemnăm

$$S_n=\sin\frac{1}{n^{1+a}}+\sin\frac{2}{n^{1+a}}+\ldots+\sin\frac{n}{n^{1+a}},$$

avem

$$\lim_{n=\infty} S_n=\lim\left(\frac{1}{n^{1+a}}+\frac{2}{n^{1+a}}+\ldots+\frac{n}{n^{1+a}}\right)=\lim\frac{n\,(n+1)}{2\,n^{1+a}}$$

Prin urmare:

$$\lim S_n=\infty,\ \text{dacă}\ 0<a<1;\ \lim S_n=\frac{1}{2},\ \text{dacă}\ a=1;\ \lim S_n=0,\ \text{dacă}\ a>1.$$

---

(1) Această dublă inegalitate rezultă şi din desvoltarea în serie a funcţiunei $\sin x$ [50].

II. — DERIVATE ŞI DIFERENŢIALE.

34. Derivată. Fie $y=f(x)$ o funcţie definită într'un interval (a, b); x un punct al acestui interval şi $x_1=x+h$ un punct vecin de x. Diferenţa $x_1-x=h$ se numeşte *creşterea* variabilei[1] şi se mai notează cu Δx. Creşterea lui y corespunzătoare este egală cu diferenţa

$$f(x+h)-f(x)$$

şi se notează cu Δy. Să formăm raportul acestor două creşteri

$$(1)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Dacă acest raport tinde către o limită când h tinde, într'un fel oarecare, către zero, această limită se numeşte *derivata* funcţiunei $f(x)$ în punctul x şi se notează cu $f'(x)$ sau cu y'.

Fie spre exemplu $y=Ax^m$, unde A este o constantă şi m un întreg pozitiv. Formând raportul (1) vom avea

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A\frac{(x+h)^m-x^m}{h}$$

Desvoltând pe $(x+h)^m$ cu ajutorul formulei binomului şi simplificând, găsim, făcând pe h să tindă către zero,

$$y'=mAx^{m-1}.$$

In particular, pentru $m=1$ derivata este A, iar pentru $y=A$ derivata e nulă.

Dacă raportul (1) tinde către o limită, când h tinde către zero prin valori *pozitive*, această limită se chiamă *derivata la dreapta* a funcţiei $f(x)$; pe când dacă avem o limită, când h tinde către zero prin valori negative, avem *derivata la stânga*.

EXEMPLU. Să se calculeze derivata funcţiunei

$$(2)\qquad y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

în punctul $x=0$. In acest punct funcţiunea se anulează, aşa că raportul (1) va lua forma

$$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}.$$

Dacă h tinde către zero prin valori pozitive, $e^{\frac{1}{h}}$ creşte indefinit şi deci derivata *la dreapta*, în punctul 0, este *nulă*.

Dacă h tinde către zero prin valori negative, $e^{\frac{1}{h}}$ tinde către zero şi deci derivata *la stânga*, în punctul 0, a funcţiunei considerate, este 1.

---

[1] Creşterea poate fi pozitivă sau negativă.

Dacă însă aceste două derivate, la stânga şi la dreapta, într'un punct, sunt *egale*, atunci valoarea lor comună este *derivata funcţiunii* în acel punct (1).

Zicem că o funcţiune este *derivabilă* într'un interval (a, b), atunci când această funcţiune admite o derivată finită în fiecare punct din interiorul acestui interval; o derivată la dreapta în a şi o derivată la stânga în b.

OBSERVARE. O condiţie *necesară* pentru existenţa unei derivate finite într'un punct este ca funcţiunea să fie continuă în acel punct; căci în caz contrar numărătorul raportului (1) nu tinde către zero când h tinde către zero şi deci limita acestui raport nu poate fi finită.

Continuitatea funcţiunei $f(x)$ în punctul x *nu* este o condiţie *suficientă* pentru a putea afirma existenţa derivatei în acel punct.

EXEMPLE. 1°. Fie funcţiunea

$$y = x \sin \frac{1}{x}$$

care este nulă pentru $x = 0$ şi continuă în acest punct. Pentru a avea derivata în punctul $x = 0$ suntem conduşi la căutarea limitei lui $\sin \frac{1}{h}$, când h tinde către zero, limită care n u e x i s t ă. Deci funcţiunea n'are derivată în acest punct.

2°. Dacă considerăm funcţiunea

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

derivata în origine este limita lui $h^{-\frac{1}{3}}$, care creşte nemărginit când h tinde către zero. Convenim a spune, în acest caz, că derivata funcţiei este i n f i n i t ă.

3°. W e i e r s t r a s s a dat în anul 1861 următorul exemplu de funcţiune continuă care nu admite derivată în nici un punct:

Seria

$$y = \Sigma\, a^n \cos(\pi b^n x)$$

este uniform convergentă pentru $0 < a < 1$ şi reprezintă o funcţie cotinuă (30); dacă $b > \frac{1}{a} + \frac{3\pi}{2a}$ această funcţie nu admite derivată pentru nici o valoare a lui x.

Aşa dar clasa funcţiunilor derivabile este mai restrânsă decât clasa funcţiunilor continue, căreia îi aparţine.

35. Diferenţială. Fie $y = f(x)$ o funcţie care admite o derivată $f'(x)$ în punctul x; dacă dăm lui x o creştere Δx va rezulta pentru funcţiune o creştere Δy. După definiţia derivatei avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

(1) Dacă funcţia nu este bine definită într'un punct c, în care funcţia ar avea, de exemplu, o discontinuitate de prima specie, se poate să avem derivatele, la dreapta şi la stânga lui c, egale între ele, fără să avem o derivată în acel punct. De exemplu, funcţiunea $U(x)$ considerată la n. 20 are derivatele nule la dreapta şi la stânga punctului $x = a$, fără să aibă o derivată în acel punct.

unde ε tinde către zero, când Δx tinde către zero. Dacă considerăm pe Δx ca infinit mic principal şi presupunem pe $f'(x)$ diferit de zero, partea principală a infinitului mic Δy este $\Delta x \,.\, f'(x)$. Această parte principală se numeşte *diferenţiala* lui y şi se notează cu dy; aşa că

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{3}$$

Deci: *diferenţiala unei funcţiuni este produsul dintre derivata funcţiunii şi creşterea arbitrară Δx dată variabilei.*

Dacă considerăm în particular funcţiunea $y = x$, avem $y' = 1$ şi formula (3) se reduce la $dx = \Delta x$. Astfel formula (3) se mai poate scrie

$$dy = f'(x)\,dx,$$

sau încă

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{4}$$

De aci rezultă că *derivata unei funcţiuni este egală cu raportul dintre diferenţiala funcţiunii şi diferenţiala variabilei.*

Formula (4) ne dă *notaţiunea diferenţială a derivatei.*

36. Interpretări geometrice. Derivata. Fie $y = f(x)$ o funcţie continuă într'un interval (a, b); când x variază de la a la b punctul (x, y) descrie, în planul axelor dreptunghiulare xOy, un arc de curbă C, care reprezintă *în mod grafic* variaţia funcţiunii. Fie M şi M' două puncte, foarte apropiate, ale curbei C, având respectiv abscisele x şi $x + h$.

Coeficientul unghiular al dreptei MM' este

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Deci dacă funcţiunea $f(x)$ admite o derivată în punctul x, când h tinde către zero, coeficientul unghiular al dreptei MM' tinde către $f'(x)$. Prin urmare, când M' tinde către M, dreapta MM' tinde către o poziţie limită MT, care se numeşte *tangenta la curbă* în punctul M. Ecuaţia acestei tangente, care trece prin punctul $M(x, y)$ şi are pe y' ca coeficient unghiular, este

$$Y - y = y'(X - x)$$

unde X şi Y sunt coordonatele curente.

OBSERVARE. Dacă considerăm cazul curbei (2), vedem că această curbă are două tangente în *origine*; acest punct e un *punct unghiular* al curbei.

Putem defini, în mod grafic, oricâte funcţiuni voim, care să prezinte aceeaş particularitate.

Diferenţiale. Fie Δx o creştere dată lui x; M' şi N punctele, depe arcul C şi depe tangenta MT, care au aceeaş abscisă $x+\Delta x$. In triunghiul dreptunghic MNP, (P fiind proecţia lui M pe M'N) avem $MP=\Delta x$ şi $\operatorname{tg} NMP=f'(x)$. Prin urmare

$$PN=f'(x)\,\Delta x;$$

ceeace ne arată că PN reprezintă diferenţiala dy. Observăm, în acelaş timp, că diferenţa $\Delta y-dy=M'N$ este infinit de mică în raport cu Δy sau cu dy, căci aceştia sunt infiniţi mici echivalenţi.

37. Formule de derivare. Primul obiect al calculului diferenţial este stabilirea câtorva formule simple de derivare pentru cazul când funcţiunea considerată este *compusă* cu ajutorul altor funcţiuni simple, ale căror derivate sunt presupuse determinate.

1⁰. Derivarea unei sume. Fie

$$y=u(x)+v(x),$$

unde presupunem funcţiunile u şi v derivabile într'un interval comun (a, b). Fie x o valoare din acest interval; dacă-i dăm lui x o creştere Δx, rezultă pentru u şi v creşterile Δu şi Δv, iar pentru y creşterea Δy şi avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Trecând la limită, adică făcând pe Δx să tindă către zero, deducem

$$y'=u'+v'.$$

Dacă înmulţim ambii membri cu dx, suntem conduşi la

$$dy=du+dv.$$

In loc de două funcţiuni u şi v am fi putut considera o sumă de un număr oarecare, dar *finit*, de funcţiuni.

Prin urmare *derivata* (diferenţiala) *unei sume de funcţiuni este egală cu suma derivatelor* (diferenţialelor) *acestor funcţiuni.*

2⁰. Derivata unui produs. Fie $y=u.v$ un produs de două funcţiuni de x derivabile. Avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta v\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Trecând la limită şi ţinând seama că limita ultimului termen scris este zero, avem

$$y'=u'v+v'u.$$

Inmulţind ambii membri cu dx, deducem

$$dy = v\,du + u\,dv.$$

Dacă considerăm un produs de trei factori $y = u\,.\,v\,.\,w$, avem

$$y' = (u\,v)'\,w + (w)'\,u\,v = u\,v\,w\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}\right).$$

Tot astfel se arată că, pentru un produs de un număr *finit* de factori, $y = u\,v\,w\ldots$, avem

$$y' = u\,v\,w\ldots\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots\right)$$

şi

$$dy = u\,v\,w\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right).$$

In particular, dacă $y = u^m$, m un întreg pozitiv, avem

$$y' = m\,u^{m-1}\,u'.$$

3⁰. Derivata unui cât. Fie $y = \frac{u}{v}$; avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\cancel{vu} + v\Delta u - \cancel{uv} - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v} \qquad \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

de unde

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

sau cu notaţiunea diferenţială

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

In particular, dacă u se reduce la o constantă A, avem

$$y' = -A\,\frac{v'}{v^2} \text{ sau } dy = -A\,\frac{dv}{v^2}.$$

4⁰. Derivata unei funcţii de funcţie. Fie $y = f(u)$ şi $u = g(x)$, adică y este o funcţie de x prin intermediul lui u. Pentru a calcula derivata acestei funcţiuni intr'un punct x, să dăm lui x o creştere Δx. Avem

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x), \quad \Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

şi putem scrie

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Cum presupunem că funcţiunile f şi g au derivate finite şi determinate, trecând la limită, deducem din ultima egalitate

$$y' = f'(u) \cdot g'(x),$$

căci Δu tinde către zero în acelaş timp cu Δx.

Dacă înmulţim ecuaţia precedentă cu dx, obţinem

$$dy = f'(u)\, du.$$

Acest rezultat fundamental ne arată avantajul notaţiunei diferenţiale: diferenţiala unei funcţiuni de x se calculează după aceeaş regulă, fie că este exprimată direct în funcţie de x, fie că este exprimată în funcţie de x prin intermediul unei variabile auxiliare u.

5⁰. Derivata unei funcţiuni inverse. Fie $y = f(x)$ o funcţie, care admite o funcţie inversă $x = g(y)$. Dacă una din aceste funcţiuni admite o derivată diferită de zero, cealaltă funcţiune admite şi ea o derivată.

Să presupunem că cunoaştem derivata lui f, adică

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Din egalitatea evidentă

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

deducem, trecând la limită,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[g(y)]}.$$

Exemplu. Funcţiunea $y = x^2$ are ca inversă $x = y^{\frac{1}{2}}$; aplicând formula precedentă deducem că $\sqrt{y}$ are ca derivată în raport cu y pe $\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

38. Derivatele funcţiunilor elementare.

I. Exponenţiala. Fie $y = e^x$. După definiţia derivatei avem

$$y' = \lim_{h=0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Insemnând $e^h - 1 = \alpha$, deducem $h = \operatorname{Log}(1+\alpha)$ şi

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{\alpha}{\operatorname{Log}(1+\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{Log}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Dar α tinde către zero când h tinde către zero, iar $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tinde către e când α tinde către zero; avem deci

$$\lim_{h=0} \frac{e^h-1}{h} = \frac{1}{\operatorname{Log} e} = 1.$$

Prin urmare

$$y' = e^x.$$

Deci funcţiunea exponenţială e^x se reproduce prin derivare.

Pentru a avea derivata unei exponenţiale oarecari $y = A^x$ vom aplica formula derivărei unei funcţii de funcţie. Putem scrie $y = e^{x \operatorname{Log} A}$; deci, dacă punem $u = x \operatorname{Log} A$, avem

$$y' = e^u u' = e^{x \operatorname{Log} A} \operatorname{Log} A = A^x \operatorname{Log} A.$$

II. Logaritmul. Să considerăm funcţiunea logaritmică într'o bază oarecare A

$$y = \operatorname{Log}_A x.$$

Luând funcţiunea inversă a logaritmului, avem $x = A^y$ şi aplicând formula de derivare a funcţiunilor de funcţiuni, avem

$$y' = \frac{1}{A^y \operatorname{Log} A} = \frac{1}{x \operatorname{Log} A}.$$

Dacă considerăm cazul particular al logaritmilor *naturali*, adică $A = e$, avem

$$y' = \frac{1}{x}.$$

III. Puterea. Fie $y = x^a$ unde a este un număr dat şi x o variabilă *pozitivă*. Putem scrie

$$x^a = e^{a \operatorname{Log} x}$$

deci $\frac{a}{x}$

$$y' = e^{a \operatorname{Log} x} (a \operatorname{Log} x)' = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Regăsim astfel formula pe care am stabilit-o pentru a întreg şi pozitiv [37,II].

IV. Funcţiuni trigonometrice. — 1⁰. Fie $y = \sin x$. Avem

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h=0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Când h tinde către zero, $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ are ca limită pe $\cos x$ iar $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, unde $\alpha=\frac{h}{2}$, are ca limită unitatea [12,3⁰]; deci

$$y' = \cos x.$$

2⁰. Fie $y = \cos x$; avem $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Deci

$$y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

3⁰. Dacă considerăm funcţia $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, avem, utilizând formula care dă derivata unui cât,

$$y' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4⁰. Tot astfel pentru $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ găsim

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

ceeace se mai poate deduce şi din rezultatul precedent, ţinând seama că $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

V. Funcţiuni trigonometrice inverse. — 1⁰. Fie $y = \operatorname{arc}\sin x$. Ne vom ocupa de ramura principală a funcţiunii [14], care este definită prin condiţia $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Luând funcţiunea inversă avem $x = \sin y$, a cărei derivată este $\cos y$ sau $\sqrt{1-\sin^2 y}$, unde luăm semnul $+$ înaintea radicalului căci $\cos y$ e pozitiv, când y variază de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$. Formula derivării funcţiunilor inverse ne dă deci

$$y' = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

Celelalte determinări ale lui y sunt legate de determinarea principală prin formulele

(I) $$y = \operatorname{arc}\sin x + 2k\pi,$$

(II) $$y = -\operatorname{arc}\sin x + (2k+1)\pi.$$

Determinările (I) au aceeaş derivată ca şi ramura principală; determinările (II) au o derivată de semn contrar.

2⁰. Fie $y = \operatorname{arc}\cos x$. Vom considera ramura principală a acestei funcţiuni multiforme, care se exprimă prin relaţia

$$\operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin x$$

cu ajutorul ramurei principale a funcţiei arc sin x; deci

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3⁰. Pentru $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, avem, luând funcţiunea inversă $x = \operatorname{tg} y$,

$$y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

39. Diferenţialele funcţiunilor elementare. Din formulele găsite mai sus deducem imediat diferenţialele funcţiunilor elementare, înmulţind ambii membri ai fiecărei formule, prin dx. Avem astfel

$$d\,x^a = a\,x^{a-1}\,dx \qquad d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$d\,A^x = A^x \operatorname{Log} A\,dx \qquad d\operatorname{Log}_A x = \frac{dx}{x\log A}$$

$$d\,e^x = e^x\,dx \qquad d\operatorname{Log} x = \frac{dx}{x}$$

$$d\sin x = \cos x\,dx \qquad d\operatorname{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d\cos x = -\sin x\,dx \qquad d\operatorname{arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad d\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Observare. Este esenţial de a observa că toate aceste formule subzistă atunci când înlocuim pe x printr'o funcţie u de x.

Aşa de exemplu, avem

$$d\operatorname{Log} u = \frac{du}{u} = \frac{u'dx}{u}.$$

40. Derivata logaritmică. Se numeşte *derivata logaritmică* a unei funcţiuni y, derivata l o g a r i t m u l u i s ă u, adică $\frac{y'}{y}$. Derivata y' a unei funcţiuni y se deduce deci înmulţind pe y prin derivata logaritmică. De multe ori este mai comod să procedăm astfel pentru determinarea derivatei.

EXEMPLU. Fie $y = u^v$, unde u şi v sunt funcţiuni de x. Avem

$$\operatorname{Log} y = v \operatorname{Log} u$$

de unde

$$\frac{y'}{y} = v' \operatorname{Log} u + \frac{u'}{u} v.$$

Prin urmare

$$y' = u^v \left[v' \operatorname{Log} u + \frac{u'}{u} v \right].$$

41. Derivarea seriilor întregi. Fie

$$(5) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

o serie întreagă convergentă pentru $-R < x < R$. Să arătăm că seria derivată

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

este convergentă pentru $-R < x < R$ şi are ca sumă $f'(x)$.

Fie x un punct oarecare din intervalul de convergenţă al seriei (5). Să considerăm seria modulelor termenilor acestei serii

$$\mathrm{F}(X) = A_0 + A_1 X + \ldots + A_n X^n + \ldots$$

unde $|a_n| = A_n$ şi $|x| = X$; această serie este convergentă [31] pentru $0 \leqq X < R$. Fie Δ un număr pozitiv determinat aşa ca $X + \Delta < R$. Seria $\mathrm{F}(X + \Delta)$ fiind tot convergentă, vom avea

$$\frac{\mathrm{F}(X+\Delta) - \mathrm{F}(X)}{\Delta} = \sum A_n \frac{(X+\Delta)^n - X^n}{\Delta}$$

sau

$$\frac{\mathrm{F}(X+\Delta) - \mathrm{F}(X)}{\Delta} = \Sigma U_n$$

unde

$$U_n = A_n \left[n X^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta X^{n-2} + \ldots \right].$$

Seria ΣU_n cu termeni constanţi şi pozitivi (căci X şi Δ au valori determinate) este convergentă.

Să dăm acum lui x, în seria (5) o creştere h aşa ca $|h| < \Delta$. Seria $f(x+h)$, fiind convergentă, vom avea în mod analog

$$(6) \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \Sigma u_n(h),$$

unde

$$u_n(h) = a_n \left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h x^{n-2} + \ldots \right].$$

Seria $\Sigma u_n(h)$, ai cărei termeni sunt funcţiuni de h, este uniform convergentă pentru $|h| < \Delta$. In adevăr, pentru toate aceste valori ale lui h, $|u_n(h)| < U_n$, deci [30] această serie este uniform convergentă. Cum $u_n(h)$ sunt polinoame în h deci funcţiuni *continue* [30] de h, suma acestei serii este o funcţie *continuă*, a cărei valoare pentru $h = 0$, se confundă cu limita ei când h tinde către zero. Prin urmare, făcând pe h să tindă către zero în egalitatea (6), avem la limită

$$f'(x) = \Sigma n a_n x^{n-1}.$$

EXEMPLU. Avem

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

pentru $-1 < x < 1$. Vom avea deci, pentru aceleaşi valori ale lui x,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \ldots + n x^{n-1} + \ldots$$

OBSERVARE. La acelaş rezultat mai putem ajunge înmulţind seria considerată prin ea însăşi [29].

42. **Derivate şi diferenţiale succesive.** DERIVATE SUCCESIVE. Fie $y = f(x)$ o funcţie derivabilă în intervalul (a, b). Dacă derivata $f'(x)$ admite o derivată într'un punct x, această *derivată a derivatei* se numeşte *derivata a doua* a funcţiei $f(x)$ şi se notează cu $f''(x)$ sau y''. Tot astfel dela derivata a doua $f''(x)$ se trece la *derivata a treia*, care se notează cu y''' sau $f'''(x)$ Continuând astfel de la *derivata de ordinul* $n-1$ se trece la *derivata de ordinul* n, care este derivata întâi a derivatei de ordinul $n-1$ şi se notează cu $y^{(n)}$ sau $f^{(n)}(x)$.

DIFERENŢIALE SUCCESIVE. Să plecăm de la diferenţiala

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{7}$$

Când x este *variabila independentă* c o n v e n i m a considera pe dx ca independent de poziţia punctului x în intervalul (a, b); *dx este deci considerat ca o constantă.*

Diferenţiala a doua a lui y o vom obţine diferenţiind ambii membri (7), dar c o n v e n i m ca în diferenţiala membrului al doilea, creşterea Δx, care se introduce [35, (3)] să o luăm egală cu dx şi această convenţie o păstrăm pentru toate diferenţialele succesive.

Avem astfel diferenţiala a doua

$$d(dy) = d[f'(x)\,dx] = f''(x)\,(dx)^2.$$

Dacă notăm $d(dy) = d^2 y, \ldots, d(d^{n-1} y) = d^n y$, obţinem diferenţialele succesive, până la acea de ordinul n,

$$d^2 y = f''(x)\,dx^2,\ d^3 y = f'''(x)\,dx^3,\ \ldots,\ d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

De aci deducem *notaţiunea diferenţială* a derivatelor succesive

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

EXEMPLE. Să calculăm derivatele succesive ale câtorva funcţiuni elementare

$y = e^{ax}$, $y' = a e^{ax}, \ldots,$ $y^{(n)} = a^n e^{ax}$

$y = x^a$, $y' = a x^{a-1}, \ldots,$ $y^{(n)} = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$

$y = \mathrm{Log}\, x$, $y' = x^{-1}, \ldots,$ $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$

$y = \sin x$, $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \ldots$ $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$y = \cos x$, $y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \ldots$ $y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

OBSERVĂRI. 1°. Existenţa unei derivate de ordinul n necesită existenţa derivatei de ordinul $n-1$; dar s'ar putea ca derivata de ordinul n să nu existe.

Sunt funcţiuni care admit derivate *de orice ordin*, aşa de exemplu funcţiunile elementare sau seriile întregi.

2°. Am văzut că diferenţiala primă

$$dy = f'(u) . du$$

are aceeaş formă fie că u este variabila independentă sau nu.

Pentru diferenţialele de ordin superior nu se mai prezintă aseeaş simplicitate, atunci când u este funcţie de x. Diferenţiind egalitatea precedentă, avem

$$d^2y = f''(u)\, du^2 + f'(u)\, d^2u$$

căci nu mai putem considera $d^2u = 0$ ($du = u'dx$, $d^2u = u''dx^2$, etc. depind de valoarea variabilei x).

Tot astfel

$$d^3y = f'''(u)\, du^3 + 3 f''(u)\, du\, d^2u + f'(u)\, d^3u$$

şi aşa mai departe, regula generală ne prezentându-se sub o formă simplă.

FORMULA LUI LEIBNIZ. Să considerăm o funcţie reprezentată prin produsul a două funcţii $y = uv$ şi să ne propunem să găsim derivata a n-a a lui y. Avem

$$y' = u'v + uv',$$
$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

Vedem că, în general, vom avea

$$y^{(n)} = A_0 u^{(n)} v + A_1 u^{(n-1)} v' + \ldots + A_n u v^{(n)} \tag{8}$$

unde A_0, A_1, ..., A_n sunt coeficienţi numerici, cari nu depind de forma particulară a funcţiunilor u şi v. Dacă a este o constantă şi punem $u = e^{ax}$ şi $v = e^x$, avem $y = e^{(a+1)x}$; deci

$$y^{(n)} = (a+1)^n e^{(a+1)x}.$$

Aşa că formula (8) va deveni

$$(a+1)^n = A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + \dots + A_n$$

şi identificând, găsim

$$A_p = C_n^p.$$

EXEMPLU. Aplicând formula lui Leibniz, găsim pentru derivata a n-a a funcţiei $y=(x-a)^n(n-b)^n$

$$y^{(n)} = n!\left[(x-a)^n + \left(C_n^1\right)^2 (x-a)^{n-1}(x-b) + \left(C_n^2\right)^2 (x-a)^{n-2}(x-b)^2 + \dots + \left(C_n^n\right)^2 (x-b)^n\right].$$

OBSERVARE. Dacă facem convenţia să notăm cu $(u+v)^{(n)}$ operaţiunea $(u+v)^n$ unde înlocuim produsul puterilor $u^p v^q$ prin produsul d e r i v a t e l o r $u^{(p)} v^{(q)}$, vom putea scrie

$$(uv)^{(n)} = (u+v)^{(n)}.$$

Se stabileşte, în mod analog, că pentru un produs de trei sau mai mulţi factori $y = u.v.w. \dots$, avem

$$y^{(n)} = (u+v+w+\dots)^{(n)}.$$

III. — PROPRIETĂŢILE DERIVATELOR.

43. Teorema lui Rolle. *Dacă $f(x)$ este o funcţie derivabilă în intervalul (a, b) şi dacă $f(a)=0$, $f(b)=0$, există cel puţin un punct c, cuprins între a şi b, pentru care să avem $f'(c)=0$.*

In adevăr, când x variază în intervalul (a, b), $f(x)$ ia o valoare cea mai mare M şi o valoare cea mai mică m [19, 41]. Dacă valorile M şi m sunt amândouă nule, atunci $f(x)$ este egală cu zero în tot intervalul (a, b) şi deci derivata sa va fi nulă în tot acest interval. Teorema, în acest caz este demonstrată.

Să presupunem acum că una din cantităţile M şi m, de exemplu M, este diferită de zero. Fie c valoarea lui x pentru care $f(x)=M$.

Raportul

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

cu $h>0$, este negativ sau poate nul. Limita sa $f'(c)$ (derivata la dreapta) nu poate fi un număr *pozitiv*. Deci $f'(c) \leqq 0$.

Tot astfel limita raportului

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{h},$$

unde h este tot pozitiv, este $f'(c)$ (derivata la stânga) care nu poate fi un număr *negativ*. Deci $f'(c) \geqq 0$

Cum funcţiunea $f(x)$ este presupusă derivabilă în intervalul $(a\ b)$, ea are o derivată *unică* în punctul c. Va trebui să avem dar $f'(c) = 0$.

Consecinţă. Dacă $f(x)$ ia aceeaş valoare γ în punctele a şi b, atunci derivata sa se anulează într'un punct din intervalul (a, b), căci funcţiunea $f(x) - \gamma$, care are aceeaş derivată cu $f(x)$, se anulează pentru $x = a$ şi pentru $x = b$.

44. Formula creşterilor finite (Lagrange). Fie $f(x)$ o funcţie continuă într'un interval (a, b) şi având o derivată unică în fiecare punct al intervalului. Să considerăm raportul

$$(1) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = N f'(c)$$

$f'(c) = N$

între creşterea funcţiunei şi creşterea variabilei; acest raport este un număr finit şi determinat pe care să-l însemnăm cu N.

Vom avea

$$f(b) - f(a) - N(b - a) = 0.$$

Dacă considerăm acum funcţiunea auxiliară

$$g(x) = f(x) - f(a) - N(x - a)$$

vedem că $g(a) = 0$ şi $g(b) = 0$. Va exista deci, după teorema lui Rolle un număr c cuprins între a şi b astfel ca $g'(c) = 0$.

Cum $g'(x) = f'(x) - N$, deducem că $N = f'(c)$. Dar N este valoarea raportului (1); prin urmare avem:

$$(2) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (a < c < b).$$

Aceasta este *formula creşterilor finite*, care se mai poate scrie, însemnând $b - a = h$,

$$(3) \qquad f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h) \quad (0 < \theta < 1).$$

Formula creşterilor finite se mai numeşte şi *formula mediei*.

Interpretarea geometrică a formulei creşterilor finite se face cu uşurinţă. Să considerăm arcul de curbă ACB descris de punctul (x, y), unde $y = f(x)$; punctele A, C şi B corespunzând punctelor cu abscisale a, c, b. Coeficientul unghiular al coardei AB este

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

iar coeficientul unghiular al tangenței la curbă în punctul C este $f'(c)$.

Formula (2) ne arată deci că există pe curba $y = f(x)$ un punct C, cuprins între A și B, în care *tangenta* la curbă este *paralelă* cu coarda AB.

45. *Dacă o funcție $f(x)$ este derivabilă într'un interval (a, b) iar derivata sa este în mod constant nulă, atunci funcția $f(x)$ este constantă în intervalul (a, b).*

In adevăr fie x și $x + h$ două valori ale variabilei luate în intervalul (a, b). Formula (3) ne dă

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h) = 0$$

căci $x + \theta h$ este cuprins între a și b. Prin urmare $f(x) = f(x+h)$, adică $f(x)$ este o *constantă* în intervalul (a, b).

Consecință. *Dacă două funcțiuni $f(x)$ și $g(x)$ au derivate finite și egale într'un interval (a, b) atunci diferența lor este o constantă în acest interval.*

Funcțiunea $f(x) - g(x)$ având derivata nulă, vom avea în intervalul (a, b), $f(x) - g(x) = c$, c fiind o constantă.

Această propoziție stă la baza calculului integral, căci, după cum vom vedea aci, se cere să determinăm *toate* funcțiile care au o derivată cunoscută. După cele stabilite vedem că este suficient a cunoaște o singură funcțiune, toate celelalte obținându-se prin adăugarea unei constante la această funcție.

Aplicație. Fie seria

$$F(x) = x - \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Această serie este convergentă pentru $-1 < x < 1$ și după cele văzute [41] vom avea, pentru aceleași valori ale lui x,

$$F'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

adică $F'(x) = \frac{1}{1+x}$. Dar și funcția Log $(1+x)$ are ca derivată pe $\frac{1}{1+x}$. Deci

$$\text{Log}(1+x) - F(x) = C$$

pentru $-1 < x < 1$. Pentru a determina constanta C să facem $x = 0$; găsim astfel $C = 0$. Prin umare, pentru $|x| < 1$, avem

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

46. Derivata funcțiunilor crescătoare și descrescătoare. Funcțiuni crescătoare. Să considerăm o funcție $f(x)$ crescătoare într'un interval (a, b) și derivabilă în acest interval. Derivata $f(x)$ nu poate fi negativă pentru nici o valoare a lui x, căci numărătorul și numitorul raportului

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

sunt de acelaș semn.

Reciproc: dacă derivata $f'(x)$ este finită și nu devine negativă pentru nici o valoare a lui x din intervalul (a, b), funcția $f(x)$ este *crescătoare* în intervalul (a, b).

In adevăr dacă x_1 și x_2 sunt două numere oarecare din intervalul (a, b) și dacă $x_1 < x_2$, putem scrie, aplicând formula mediei,

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi)\geqq 0.$$

Deci $f(x_2)\geqq f(x_1)$ când $x_2 > x_1$, adică funcțiunea $f(x)$ e crescătoare.

FUNCȚIUNI DESCRESCĂTOARE. In mod analog se arată că derivata unei funcțiuni descrescătoare într'un interval (a, b) nu poate fi pozitivă și reciproc: dacă derivata unei funcțiuni nu devine pozitivă într'un interval (a, b), acea funcție este *descrescătoare* în acel interval.

EXEMPLU. Fie funcțiunea

$$f(x)=e^x(\sin x-\cos x)+1.$$

Avem

$$f'(x)=2\,e^x\sin x.$$

Pentru $0\leqq x\leqq\pi$, derivata $f'(x)$ nu este negativă; funcția $f(x)$ crește de la $f(0)=0$ la $f(\pi)=1+e^{\pi}$. Pentru $\pi\leqq x<0$ derivata nu este pozitivă; funcția $f(x)$ descrește de la $f(-\pi)=1+e^{\pi}$ până la $f(0)=0$.

OBSERVARE. Cele stabilite se pot aplica, cu oarecari precauțiuni și în cazul când funcțiunea sau derivata nu este continuă în întreg intervalul (a, b).

Așa, de exemplu, dacă considerăm funcțiunea $f(x)=\frac{1}{a-x}$, unde a este o constantă, avem $f'(x)=\frac{1}{(a-x)^2}$; deci derivata $f'(x)$ este pozitivă oricare ar fi x. Funcțiunea $f(x)$ nu este totuși crescătoare, când x variază de la $-\infty$ la $+\infty$, căci această funcție este discontinuă pentru $x=a$ și trece de la $+\infty$ la $-\infty$ când x ajunge și depășește valoarea a. Dacă însă ε este un număr pozitiv, funcțiunea este crescătoare în intervalele $(-\infty, a-\varepsilon)$ și $(a+\varepsilon, +\infty)$.

47. Formula lui Cauchy. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcțiuni continue și derivabile în intervalul (a, b), derivata $g'(x)$ *neanulându-se* în acest interval. Să considerăm raportul

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

unde numitorul este diferit de zero, căci dacă am avea $g(a)=g(b)$, $g'(x)$ s'ar anula în intervalul (a, b). Ne propunem să dăm o altă formă valoarei acestui raport. Dacă însemnăm cu N valoarea sa, avem

$$f(b)-f(a)-N[g(b)-g(a)]=0.$$

Să considerăm funcţiunea auxiliară

$$F(x)=f(x)-f(a)-N[g(x)-g(a)]$$

care se anulează pentru $x=a$ şi $x=b$; deci după teorema lui Rolle

$$F'(c)=f'(c)-Ng'(c)=0 \qquad (a<c<b),$$

De unde putem scoate valoarea lui

$$N=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

căci $g'(c)\neq 0$. N fiind valoarea raportului iniţial, deducem *formula lui Cauchy*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a<c<b),$$

care se mai numeşte *formula mediei generalizată*, căci făcând $\varphi(x)=x$ regăsim formula mediei [44, (2)].

Formula lui Cauchy se mai poate scrie

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} \qquad (0<\theta<1).$$

OBSERVARE. Din cele ce preced se vede că formula lui Cauchy subzistă când $g'(x)$ s'ar anula într'una din extremităţile intervalului (a, b).

EXERCIŢII.

1. Se consideră funcţiunea $y=x \operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{1}{x}$, nulă în origine; se cere derivata *la dreapta* şi *la stânga* în punctul 0.

R. Aceste două derivate sunt diferite, căci avem pentru derivata la dreapta $(h>0)$

$$y'=\lim \operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{1}{h}=\frac{\pi}{2},$$

şi pentru derivata la stânga

$$y'=\lim \operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{1}{-h}=-\frac{\pi}{2}.$$

2. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei

$$y=(ax+b)^{\lambda}(\alpha x+\beta)^{n-1-\lambda}$$

R. Vom aplica formula lui Leibniz:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=0}^{n} k\, C_n^p\, (ax+b)^{\lambda-p}\, a^p\, (\alpha x+\beta)^{p-1-\lambda}\, \alpha^{n-p}$$

unde

$$k = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-p+1)\,.\,(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)\dots(p-\lambda),$$

sau

$$k = (-1)^{n-p}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1).$$

Prin urmare

$$\frac{d^n y}{dx^n} = k\,(ax+b)^{\lambda-n}(\alpha x+\beta)^{n-1-\lambda}\left[\Sigma C_n^p(-\alpha a x-\alpha b)^{n-p}(a\alpha x+a\beta)^p\right]$$

adică

$$\frac{d^n y}{dx^n} = k\,(ax+b)^{\lambda-n}(\alpha x+\beta)^{1-\lambda}(a\beta-\alpha b)^n.$$

3. Să se stabilească formula

$$(F_n)\qquad \frac{d^n\, x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

R. Această formulă se verifică imediat pentru $n=1$. Să presupunem adevărată formula F_{n-1} şi să arătăm că formula F_n este o consecinţă a acesteia. Vom pleca de la identitatea

$$\frac{d^n\, x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{d^n\, x\left[x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{dx^n}$$

unde membrul al doilea se mai poate scrie, aplicând formula lui Leibniz,

$$x\frac{d^n x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} + n\frac{d^{n-1}\, x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n}$$

sau, ţinând seama de formula F_{n-1},

$$(-1)^{n-1}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right] + (-1)^{n-1} n \frac{1}{x^n} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Derivând şi făcând reducerile ne rămâne

$$(-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

R. Dacă în formula precedentă facem $f(u) = u^{n-1} g(u)$ suntem conduşi la formula

$$\frac{d^n g\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^{2n}}\left[g^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + (n-1)\, C_n^1\, x\, g^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$\left. + (n-1)(n-2)\, C_n^2\, x^2\, g^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \dots\right].$$

5. Să se calculeze derivata funcţiei $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$ şi să se explice rezultatul.

R. Găsim $y' = \frac{2}{1+x^2}$; deci y are aceeaş derivată ca şi funcţia $u = 2 \operatorname{arc tg} x$. Să arătăm că $y - u$ este constant. Avem

$$\operatorname{tg}(y-u) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} u}$$

şi

$$\operatorname{tg} y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{2x}{1-x^2}$$

Inlocuind şi simplificând găsim $\operatorname{tg}(y-u) = 1$.

6. Fie $f(x)$ o funcţie continuă aşa ca $|f'(x)| \leqq k < 1$. Să se arate că ecuaţia

$$F(x) = x - f(x) = 0$$

are o rădăcină reală r şi numai una.

Dacă x_0 este un număr arbitrar şi

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots,\ x_n = f(x_{n-1})$$

să se arate că, pentru $n = \infty$, avem: $\lim x_n = r$.

R. Fie a un număr arbitrar. Formula mediei ne dă

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(\theta),$$

θ fiind cuprins între x şi a. Ecuaţia dată se mai poate scrie deci

$$F(x) = x[1 - f'(\theta)] - f(a) + a f'(\theta) = 0.$$

Factorul $1 - f'(\theta)$ fiind pozitiv, se vede că $F(x)$ schimbă de semn când x creşte dela $-\infty$ la $+\infty$. Deci $F(x)$ se anulează într'un punct $x = r$. Cum $F'(x)$ este totdeauna pozitivă, $F(x)$ este continuu crescătoare, aşa că nu se poate anula decât într'un singur punct.

Avem, cu ajutorul formulei mediei,

$$x_1 - r = f(x_0) - f(r) = (x_0 - r) f'(\eta)$$

sau

$$|x_1 - r| < k |x_0 - r|$$

Tot astfel

$$|x_2 - r| < k |x_1 - r|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|x_n - r| < k |x_{n-1} - r|.$$

Inmulţind aceste neegalităţi membru cu membru, obţinem

$$|x_n - r| < k^n |x_0 - r|$$

de unde $\lim x_n = r$.

CAPITOLUL V.

DESVOLTAREA FUNCŢIUNILOR. — EXTREME.

I. — FORMULELE LUI TAYLOR ŞI MACLAURIN.

48. Formula lui Taylor. Dacă $P(x)$ este un polinom oarecare de gradul n în x, ordonarea lui $P(x+h)$ după puterile lui h, ne conduce la formula

$$(1) \qquad P(x+h) = P(x) + \frac{h}{1} P'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(x),$$

care se verifică cu uşurinţă. In adevăr, polinomul $P(x)$ este o sumă de termeni de forma $a_k x^k$ (unde a_k sunt coeficienţi numerici şi $k=0$, $1, \ldots, n$). Prin formula binomului se vede imediat că toţi aceşti termeni, deci şi suma lor, satisfac la formula (1). Generalizarea formulei (1) ne va conduce la *formula lui Taylor.*

Să considerăm o funcţie $f(x)$ definită într'un interval (a, b) şi admiţând în acest interval derivate de primele $n+1$ ordine; de aci rezultă că $f(x)$ şi primele n derivate sunt continue; vom presupune că derivata de ordinul $n+1$ e finită.

Fie x un punct determinat din intervalul (a, b) şi h un număr astfel ca punctul $x+h$ să fie în acelaş interval. Prin analogie cu formula (1) vom considera diferenţa

$$f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) - \frac{h^2}{2!} f''(x) - \ldots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x),$$

care este nulă când $f(x)$ este un polinom de gradul n, dar care în general, este un număr ce depinde de funcţia f şi de valorile variabilelor x, n şi h; să luăm acest număr sub forma $h^p A$, unde p este un număr arbitrar aşa că vom avea

$$(2) \qquad f(x+h) - f(x) - h f'(x) - \ldots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) - h^p A = 0.$$

Pentru a da o altă formă numărului A să considerăm funcţia auxiliară

$$F(u) = f(x+h) - f(u) - (x+h-u)f'(u) - \frac{(x+h-u)^2}{2!}f''(u) - \ldots - \frac{(x+h-u)^n}{n!}f^{(n)}(u) - (x+h-u)^p A.$$

Această funcţiune de u este continuă şi derivabilă pentru u cuprins în intervalul $(x, x+h)$; pe de altă parte ea se anulează pentru $u=x$ şi pentru $u=x+h$. Deci, după teorema lui Rolle, $F'(u)$ se anulează pentru o valoare a lui u cuprinsă între x şi $x+h$. Vom avea deci

$$(3) \qquad F'(x+\theta h)=0 \qquad (0<\theta<1).$$

Dar derivând pe $F(u)$ şi reducând termenii din membrul al doilea, vedem că

$$F'(u) = -\frac{(x+h-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u) + p(x+h-u)^{p-1}A.$$

Prin urmare, ţinând seama de (3),

$$A = \frac{(1-\theta)^{n-p+1}h^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Inlocuind pe A prin această expresiune, obţinem formula

$$(4) \qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + R_n$$

numită *formula lui Taylor*, unde am însemnat

$$(5) \qquad R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}f^{(n+1)}(x+\theta h)}{n!\,p}.$$

R_n se numeşte *termenul complimentar* sau *restul* formulei lui Taylor. Numărul θ, care figurează în acest rest, depinde de x, h, n şi p, dar este cuprins între 0 şi 1.

Dacă facem $p=1$, avem restul sub forma dată de Cauchy

$$(6) \qquad R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x+\theta h)}{n!};$$

Pentru $p=n+1$, obţinem

$$(7) \qquad R_n = \frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}$$

formă dată de Lagrange şi care este forma cea mai comodă pentru aplicaţiuni.

Observări. 1°. Este evident că numărul θ, care figurează în expresiunile resturilor (5), (6) şi (7), *nu este acelaşi*.

2°. Formula lui Taylor (4), cu restul lui Lagrange (7), este o generalizare a formulei medii pe care o regăsim făcând $n=0$.

3°. Dacă h este infinit de mic şi îl considerăm ca infinit mic principal, formula (4) ne arată că expresia

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\ldots-\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x)$$

unde $m \leqq n$, este un infinit mic de ordinul $m+1$.

49. Formula lui Maclaurin. Dacă în formula (4) facem $x=0$, deci presupunem că intervalul (a, b) cuprinde originea şi înlocuim pe h prin x, obţinem *formula lui Maclaurin*

$$(8) \quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots$$
$$+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

scrisă cu restul lui Lagrange.

APLICAŢII. 1°. *Constanta lui Euler.* Să aplicăm formula lui Maclaurin (8) la funcţia $f(x)=\text{Log}(1+x)$, luând $n=1$ şi $x>-1$. Vom avea

$$\text{Log}(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}.$$

Această formulă ne va conduce la un rezultat important. Dacă înlocuim pe x prin $\frac{1}{n}$, n fiind un întreg pozitiv, vedem că

$$\frac{1}{n}-\text{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n^2\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^2}=\frac{\theta n}{2n^2}$$

θn fiind un număr pozitiv mai mic de cât unitatea.

Cum $\frac{1}{n^2}$ este termenul general al unei serii convergente [24, I], rezultă că seria al cărei termen general este $\frac{1}{n}-\text{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este şi ea convergentă. Suma primilor n termeni ai acestei serii va fi

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\left[\text{Log}\left(1+\frac{1}{1}\right)+\text{Log}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\text{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

sau

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\text{Log}(n+1).$$

Limita lui S_n când n creşte nemărginit este *constanta lui Euler C*, a cărei valoare cu 10 zecimale exacte este $C=0{,}5772156649$.

2°. *Numărul e.* Dacă facem în formula (8) pe $f(x)=e^x$, derivatele acestei funcţiuni fiind toate egale cu e^x şi având valoarea 1 pentru $x=0$, obţinem

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}$$

de unde, făcând $x=1$,

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}.$$

Ultimul termen din membrul al doilea este mai mic decât $\frac{3}{(n+1)!}$ pentru că [12, 4º] $e < 3$ şi $0 < \theta < 1$. Luând pe n destul de mare putem fa e ca acest ultim termen să devie *oricât de mic*. Prin urmare egalitatea precedentă ne permite a calcula numărul e cu orice aproximaţie voim.

Mai deducem din formula precedentă, înmulţind ambii membri cu $n!$, că

$$n!\,e = \text{număr întreg} + \frac{e^\theta}{n+1}.$$

Această relaţie ne arată că e este un număr *iraţional*; căci dacă ar fi raţional, ar fi de forma $\frac{p}{q}$ (p şi q două numere întregi) şi luând pe $n > q$ primul membru ar fi întreg, pe când membrul al doilea este fracţionar pentru $n > 2$, căci $e^\theta < 3$.

50. Seriile lui Taylor şi Maclaurin. Prezintă o deosebită importanţă în Analiza Matematică cazul când funcţiunea $f(x)$ admite derivate *de orice ordin*, iar *restul* R_n *tinde către zero când* n *creşte nemărginit*.

In acest caz avem

$$\lim_{n=\infty}\left[f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)\right]=0$$

şi seria

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) \tag{9}$$

este convergentă pentru perechile de numere h şi x luate după cum am convenit mai sus, suma seriei fiind $f(x+h)$. Putem deci scrie

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x). \tag{10}$$

Seria (9) se numeşte *seria lui Taylor* corespunzătoare funcţiunei $f(x)$. Când avem egalitatea (10) zicem că $f(x)$ este *desvoltabilă în seria lui Taylor*.

Din egalitatea (10), făcând $x=\alpha$ şi $h=x-\alpha$, deducem

$$f(x)=\Sigma\frac{(x-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha),$$

şi pentru $\alpha=0$, obţinem desvoltarea în *seria lui Maclaurin*

$$f(x)=\Sigma\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \tag{11}$$

Putem afirma într'un anumit caz că termenul complimentar R_n tinde către *zero*, când n creşte nemărginit: când valoarea absolută a unei derivate de un ordin oarecare a funcţiunei $f(x)$ rămâne mai mică decât un număr fix M. In adevăr din forma (7) a termenului complimentar, rezultă că

$$|R_n| < M\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Membrul al doilea fiind termenul general al unei serii convergente vedem că $\lim R_n = 0$; prin urmare formula (10) se aplică la aceste funcţiuni. In această categorie de funcţiuni întră e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Funcţia e^x. Derivatele acestei funcţiuni sunt toate egale cu e^x şi deci mărginite, în orice interval (a, b) s'ar găsi x. Formula (10) se aplică dar acestei funcţiuni. Vom aplica formula mai simplă (11). Funcţia e^x şi toate derivatele ei sunt egale cu unitatea pentru $x = 0$; vom avea deci desvoltarea

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

valabilă pentru toate valorile pozitive sau negative ale variabilei x.

Funcţia A^x. Schimbând pe x în $x \operatorname{Log} A$ în formula precedentă avem

$$A^x = e^{x \operatorname{Log} A} = 1 + \frac{x \operatorname{Log} A}{1} + \ldots + \frac{(x \operatorname{Log} A)^n}{n!} + \ldots$$

Funcţia $\sin x$. Derivatele succesive ale acestei funcţiuni formează un şir periodic cu patru termeni distincţi, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, ale căror valori absolute nu depăşesc unitatea. Cum

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \ldots$$

formula (11) fiind aplicabilă, găsim

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots$$

desvoltare valabilă pentru toate valorile pozitive şi negative ale lui x.

Funcţia $\cos x$. In mod analog găsim

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \pm \ldots$$

Observare. Ar părea, la prima vedere, că condiţia ca o funcţie $f(x)$ să admită o desvoltare în seria lui Taylor (10), ar fi ca seria (9) să fie convergentă, adică ca restul acestei serii

$$(12) \qquad \sum_{i=n}^{\infty} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x)$$

să tindă către zero, când n creşte nemărginit. Dar această condiţie, care este evident necesară pentru valabilitatea desvoltărei (10), nu este suficientă. Formula (10) nu este justificată de cât atunci când se arată că termenul complimentar (5) tinde către zero, când n creşte nemărginit, ceea ce nu este o consecinţă a faptului că restul (12) tinde către zero.

Se poate, în adevăr, ca o serie de forma (9) să fie convergentă *fără* ca să reprezinte funcţiunea $f(x)$. Vom arăta acest lucru pe un exemplu dat de Cauchy.

Fie $f(b)=e^{-\frac{1}{x^2}}$; această funcţie este continuă şi admite derivate de orice ordin, pentru *toate* valorile lui x. Se vede cu uşurinţă că derivata de ordinul n este de forma

$$f^{(n)}(x)=\frac{P}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

unde m este un întreg pozitiv şi P un polinom în x. Să arătăm că funcţia $f(x)$ şi toate derivatele ei succesive sunt nule pentru $x=0$. Este suficient a arăta că expresia

$$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

tinde către zero, când x tinde către zero. Sau, făcând $x=\frac{1}{u}$ să arătăm că $\frac{e^{u^2}}{u^m}$ creşte nemărginit când u creşte nemărginit. Acest lucru se vede imediat înlocuind pe e^{u^2} prin valoarea dată de formula [49, II]

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}$$

unde facem $x=u^2$ şi $n>\frac{m}{2}$.

Prin urmare seria

$$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

pentru $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ este convergentă, toţi termenii săi fiind nuli, dar *nu reprezintă pe* $f(x)$.

Mai general, dacă considerăm o funcţie $g(x)$ pentru care formula (11) se aplică, adică

$$g(x)=g(0)+\frac{x}{1}g'(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}g^{(n)}(0)+\ldots$$

vedem că funcţia $G(x)=g(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$ va avea aceeaş desvoltare în seria lui Maclaurin ca şi $g(x)$, dar această desvoltare *nu* reprezintă funcţia $G(x)$.

51. Formula binomului. Să căutăm dosvoltarea în seria lui Maclaurin a funcţiei $f(x) = (1 + x)^\lambda$. Vom avea

$$f^{(n)}(x) = \lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 1)(1 + x)^{\lambda - n};$$

prin urmare

$$(1 + x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1}x + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 1)}{n!}x^n + R_n$$

unde R_n este *termenul complimentar.* Pentru ca R_n să tindă către zero când n creşte nemărginit, este *necesar* ca seria, al cărei termen general este

$$u_n = \frac{\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 1)}{n!}x^n,$$

să fie convergentă. Dar

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda - n}{n}x$$

aşa că, pentru $n = \infty$,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = -x.$$

Seria va fi deci convergentă când $|x| < 1$. Să arătăm că pentru $|x| < 1$ şi termenul complimentar R_n tinde către zero.

In adevăr, vom lua forma lui Cauchy a termenului complimentar

$$R_n = v_n\left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^n (1 + \theta x)^{\lambda - 1}$$

unde

$$v_n = \frac{\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n)}{n!}x^{n+1}.$$

Seria al cărei termen general este v_n este convergentă pentru $|x| < 1$, deci

$$\lim_{n=\infty} v_n = 0$$

ţinând seama că $0 < \theta < 1$, avem $1 + \theta x < 2$ iar $1 - \theta < 1 + \theta x$.

Prin urmare

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Avem deci desvoltarea în serie

$$(1 + x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1}x + \ldots + \frac{\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 1)}{n!}x^n + \ldots$$

valabilă pentru $|x| < 1$ şi care se numeşte *formula binomului.*

II. — VALOAREA ADEVĂRATĂ A EXPRESIUNILOR NEDETERMINATE.

52. Expresiuni nedeterminate. Valoare adevărată. O expresie analitică se poate prezenta, pentru anumite valori ale variabilei, sub una din formele

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty$$

care n'au nici un sens *a priori*. Fie în general o funcție $f(x)$ a cărei valoare devine nedeterminată pentru $x=a$; *prin definiție* limita către care tinde $f(x)$, când x tinde către a, este *valoarea adevărată* a funcțiunei în punctul a.

53. Forma $\frac{0}{0}$. Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sunt două funcțiuni care se anulează în acelaș timp pentru $x=a$, raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ se prezintă sub formă nedeterminată. Pentru a putea găsi valoarea adevărată a acestui raport, vom face următoarele ipoteze:

1⁰. Funcțiunile f și g au derivate bine determinate în vecinătatea lui a.

2⁰. $g'(x)$ nu se anulează de o infinitate de ori în vecinătatea punctului a; ceea ce înseamnă că putem determina un număr destul de mic ε astfel ca, în intervalul $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $g'(x)$ să nu se anuleze decât cel mult în a.

Regula lui l'Hospital. *Dacă există o limită a raportului $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, pentru $x=a$, avem*

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

In adevăr formula lui Cauchy [47] devine, ținând seama că $f(a)=g(a)=0$,

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} \qquad (0<\theta<1), \tag{2}$$

condițiunile cerute pentru stabilirea acestei formule fiind îndeplinite prin ipotezele 1⁰ și 2⁰. Prin urmare, dacă avem o limită pentru membrul al doilea, când h tinde către zero, aceasta este și limita primului membru. Egalitatea (1) este așa dar justificată.

Dacă derivatele $f'(x)$ și $g'(x)$ sunt funcțiuni continue în punctul a, deducem din (2) că

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{3}$$

Această ultimă egalitate subzistă pentru $g'(a)=0$, dacă $f'(a)$ este diferit de zero şi nu schimbă de semn în vecinătatea lui a. Limita raportului în acest caz este $+\infty$ sau $-\infty$.

EXEMPLU. Valoarea adevărată a raportului $\frac{\sin(x-a)}{\sin x - \sin a}$ pentru $x=a$ o găsim aplicând formula (3) şi este $\frac{1}{\cos a}$.

OBSERVĂRI. 1°. Dacă funcţiunile $f(x)$ şi $g(x)$ sunt după cum am presupus (2°) derivabile în punctul a, în egalitatea (2) putem face pe h să tindă către zero, indiferent prin valori pozitive sau negative. Dacă însă $f(x)$ şi $g(x)$ sunt derivabile numai la dreapta, h va fi considerat pozitiv şi vom avea

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a+0)}{g'(a+0)}.$$

Dacă f şi g sunt derivabile numai la stânga, avem

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a-0)}{g'(a-0)}.$$

2°. Dacă raportul $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nu are o limită determinată când x tinde către a, nu trebue să conchidem că raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ nu are nici o limită; căci în formula (2) θh tinde către zero după o lege pe care nu o cunoaştem şi care poate fi astfel încât membrul al doilea să aibă o limită.(1)

EXEMPLU. Raportul

$$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

are ca limită zero, pentru $x=0$; pe când raportul derivatelor

$$\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

nu tinde către nici o limită.

In anumite cazuri putem ajunge la determinarea valoarei adevărate a raportului $\frac{f(x)}{g(x)}$ prin aplicarea repetată a regulei precedente. Dacă şi limita raportului $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, pentru $x=a$, se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ avem

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x=a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

căci aplicând raportului $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ formula (1) avem

$$\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x=a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

(1) Spre exemplu $\sin\frac{1}{x}$, când x tinde către zero, nu are nici o limită; dar dacă x tinde către zero numai prin valorile $\frac{1}{2k\pi}$, unde k este un întreg, atunci $\sin\frac{1}{x}$ are ca limită *zero*.

Dacă şi limita raportului derivatelor de ordinul al doilea se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$, vom lua limita raportului derivatelor de ordinul al treilea $f'''(x)$, $g'''(x)$; şi aşa mai departe.

Rezultă de aci că, în cazul când toate derivatele succesive ale funcţiunilor $f(x)$ şi $g(x)$, până la ordinul n exclusiv, sunt *nule* în punctul a, derivatele $f^{(n)}(x)$ şi $g^{(n)}(x)$ fiind continue în a fără ca ambele valori $f^{(n)}(a)$ şi $g^{(n)}(a)$ să fie nule, vom avea

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}. \tag{4}$$

EXEMPLU. Raportul

$$\frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}$$

ia, pentru $x = 0$, forma $\frac{0}{0}$. Raportul derivatelor prime este de aceeaş formă. Valoarea adevărată a acestui raport este dată de raportul derivatelor de ordinul al doilea şi este 1.

OBSERVARE. Formula (4) se poate stabili şi cu ajutorul formulei lui Taylor. In adevăr, aplicând funcţiunilor $f(x)$ şi $g(x)$ formulele (4) şi (7) de la n avem

$$f(a+h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

$$g(a+h) = \frac{h^n}{n!} g^{(n)}(a + \theta_1 h).$$

Impărţind membru cu membru aceste egalităţi şi făcând apoi pe h să tindă către zero, deducem, ţinând seama de continuitatea funcţiunilor $f^{(n)}(x)$ şi $g^{(n)}(x)$, formula (4).

CAZUL $a = \infty$. Am presupus până acum pe a finit. Formula (1) poate fi însă extinsă şi cazului $a = +\infty$ (sau $a = -\infty$).

Fie $a = +\infty$. Să facem $x = \frac{1}{u}$; când x creşte nemărginit, u tinde către zero prin valori pozitive. Vom avea deci

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u=+0} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Dacă funcţiunile $f\left(\frac{1}{x}\right)$ şi $g\left(\frac{1}{x}\right)$ satisfac la condiţiile 1^0 şi 2^0 pentru $a = 0$, putem aplica formula (1); deci

$$\lim_{u=0} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{u=0} \frac{-\frac{1}{u^2} f'\left(\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u^2} g'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Regăsim astfel formula (1) unde $a = +\infty$.

54. Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţii care devin *infinite* în punctul a; de exemplu, pentru fixarea ideilor, $f(a+0) = +\infty$, şi $g(a+0) = +\infty$. Presupunem că funcţiunile $f(x)$ şi $g(x)$ sunt derivabile în intervalul deschis $(a+0, b)$ şi că $g'(x)$ nu se anulează pentru $a < x < b$.

Să arătăm că: *dacă raportul* $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *are o limită* A *finită sau infinită, vom avea*

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \tag{5}$$

Fie x_0 şi x, $x_0 > x > a$, două valori din intervalul $(a+0, b)$ Aplicând formula lui Cauchy, avem

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (x_0 < \xi < x)$$

Formula precedentă se mai poate scrie

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \times \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{6}$$

Să presupunem mai întâiu limita A finită. In membrul al doilea al egalităţei (6) avem doi factori şi vom arăta că limita primului este A iar a celui de al doilea este 1.

In adevăr, putem lua pe x_0 şi x destul de aproape de a aşafel ca $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ să difere de A cu mai puţin decât ε. Pentru factorul al doilea, putem, fără a înceta de a satisface condiţiei precedente, să lăsăm pe x_0 *fix* şi să facem pe x să tindă către a. Rapoartele $\frac{g(x_0)}{g(x)}$ şi $\frac{f(x_0)}{f(x)}$ tinzând către zero, vedem că acest factor poate fi presupus oricât de vecin de unitate.

Prin urmare avem egalitatea (5).

Dacă $A = +\infty$, rezultă ca mai sus din egalitatea (6) că limita raportului $\frac{f(x)}{g(x)}$ este infinită pentru $x = a$.

EXEMPLU. Valoarea raportului $\frac{\operatorname{Log} x}{x^n}$ pentru $x = +\infty$, n fiind un număr pozitiv, este dată de limita raportului derivatelor $\frac{1}{n x^n}$ şi este deci zero.

OBSERVARE. Se poate ca limita raportului derivatelor $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ să nu existe; nu putem conchide de aci că raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ nu are limită.

Aşa de exemplu $\frac{x+\sin x}{x}$ pentru $x=\infty$ se vede imediat că are ca limită unitatea, pe când raportul derivatelor este $1+\cos x$ şi nu are nici o limită.

CAZUL $a=\infty$. Se arată, ca şi în cazul formei $\frac{0}{0}$, că egalitatea (5) subzistă şi pentru $a=\infty$.

55. Alte forme de nedeterminare. Alte forme mai importante de nedeterminare sunt

$$0 \cdot \infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

dar se reduc toate la cele două forme studiate.

Prima se prezintă când un produs $f(x)\,g(x)$ ia, pentru $x=a$, forma $0 \cdot \infty$. Cum însă putem scrie

$$f(x)\,g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

suntem conduşi la forma $\frac{0}{0}$.

Tot astfel dacă o diferenţă $f(x)-g(x)$ este, pentru $x=a$, de forma $\infty-\infty$, vom scrie

$$f(x)-g(x)=\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\right):\frac{1}{f(x)g(x)}$$

şi suntem conduşi tot la forma $\frac{0}{0}$.

Pentru celelalte 3 forme luăm l o g a r i t m u l expresiunei şi regăsim una din formele considerate.

EXEMPLE. 1°. Limita expresiunei $x \operatorname{Log}\frac{x-a}{x+a}$ pentru $x=\infty$ este, după cele văzute, aceeaş cu a raportului

$$\frac{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}}{-\frac{1}{x^2}}$$

pentru $x=\infty$, deci $-2a$.

2°. Penru găsirea limitei lui x^x pentru $x=0$ suntem conduşi la găsirea limitei lui $x \log x$, care se determină ca în exemplul precedent şi este 0. Deci pentru $x=0$, avem $x^x=1$.

OBSERVARE. Este de multe ori comod a întrebuinţa desvoltarea în serie a lui Taylor pentru găsirea valorii adevărate a unei expresii nedeterminate.

Aşa, de exemplu, dacă utilizăm desvoltarea (1)

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{n!\,x^n} + \ldots$$

vedem că valoarea expresiunei

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}\right)$$

pentru $x = \infty$, care se prezintă sub forma $\infty \,.\, 0$, este 2.

III. — MAXIMELE ŞI MINIMELE FUNCŢIUNILOR DE O VARIABILĂ.

56. Maxime şi minime. Fie $f(x)$ o funcţie definită într'un interval $(a,\ b)$ şi c un punct în interiorul acestui interval. Dacă $f(c)$ este cea mai mare valoare pe care o ia funcţia $f(x)$ pentru valorile lui x cuprinse în intervalul $(c-\eta,\ c+\eta)$, η fiind un număr pozitiv destul de mic, adică dacă

$$f(c) > f(c+h) \text{ pentru } |h| < \eta$$

zicem că funcţiunea $f(x)$ este *maximă* pentru $x = c$, maximul său fiind $f(c)$.

Dacă însă

$$f(c) < f(c+h) \text{ pentru } |h| < \eta$$

adică dacă $f(c)$ este cea mai mică valoare pe care o ia funcţiunea pentru valorile lui x din vecinătatea lui c, zicem că funcţiunea $f(x)$ este *minimă* pentru $x = c$, minimul său fiind $f(c)$.

EXEMPLU. Funcţiunea $\cos\frac{1}{x}$ este maximă pentru toate valorile lui x de forma $\frac{1}{2k\pi}$, unde k e un întreg pozitiv sau negativ şi minimă pentru x de forma $\frac{1}{(2k+1)\pi}$. Într'un interval care cuprinde originea, funcţiunea considerată are o infinitate de maxime şi minime.

Din definiţiunile date rezultă că un maxim sau un minim al funcţiei $f(x)$ nu este neapărat cea mai mare sau cea mai mică valoare a funcţiei $f(x)$ în întreg intervalul $(a,\ b)$. Se poate ca unul din minimele funcţiunei să fie mai mare ca unul din maxime. De aceea maximele şi minimele definite mai sus se mai numesc şi maxime şi minime *relative*.

Maximul absolut şi *minimul absolut* ale funcţiunei $f(x)$ în intervalul (a, b) sunt cea mai mare şi cea mai mică valoare a funcţiunei în întreg(2) intervalul $(a,\ b)$ [19, observări].

(1) Această desvoltare se obţine înlocuind, în desvoltarea lui e^u în seria lui Maclaurin, pe u prin $\frac{1}{x}$.

(2) Este evident că dacă maximul şi minimul absolut nu corespund extremităţilor intervalului $(a,\ b)$, atunci se găsesc printre maximele şi minimele relative.

Maximele şi minimele (relative) ale unei funcţiuni se mai numesc şi *extremele* acelei funcţiuni.

57. **Extremele funcţiunilor derivabile.** *Dacă funcţiunea $f(x)$ este derivabilă în intervalul (a, b) şi dacă $f(c)$ este un extrem, atunci avem $f'(c)=0$.*

In adevăr, dacă presupunem că $f(x)$ este maximă pentru $x=c$, numărătorii rapoartelor

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \text{ şi } \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \qquad h>0,$$

sunt negativi, pe când numitorii sunt de semne contrarii. Când h tinde către zero, primul raport are o limită $\leqq 0$, al doilea o limită $\geqq 0$. Cum aceste limite trebue să fie *egale*, vedem că $f'(c)=0$.

Demonstraţia este analoagă în cazul când $f(x)$ este minimă pentru $x=c$.

Prin urmare pentru a găsi punctele în care $f(x)$ poate fi un extrem vom căuta rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$.

Nu este însă suficient a avea $f'(c)=0$ pentru a putea afirma că $f(x)$ este un extrem pentru $x=c$.

In adevăr să presupunem că toate derivatele succesive ale lui $f(x)$, până la cea de ordinul r inclusiv, se anulează pentru $x=c$ şi că derivata de ordin $r+1$ există, şi este diferită de zero, în punctul c. Avem după formula lui Taylor

$$(1) \qquad f(c+h)=f(c)+\frac{h^r}{r!}f^{(r)}(c+\theta h) \qquad 0<\theta<1.$$

Cum însă $f^{(r)}(c)=0$, termenul complimentar se mai poate scrie

$$\frac{\theta h^{r+1}}{r!}\cdot\frac{f^{(r)}(c+\theta h)-f^{(r)}(c)}{\theta h}$$

şi când h tinde către zero, al doilea factor tinde către $f^{(r+1)}(c)$.

Pentru a decide dacă $f(c)$ este un extrem al funcţiunei sau nu, va trebui să cercetăm semnul termenului complimentar. Vom deosebi următoarele două cazuri:

Cazul I: $r+1$ *par*. Dacă $f^{(r+1)}(c)$ este *pozitiv*, avem din formula (1), pentru h destul de mic şi pozitiv

$$f(c+h)-f(c)>0 \quad \text{şi} \quad f(c-h)-f(c)>0;$$

deci pentru $x=c$, funcţiunea $f(x)$ are un minim; dacă însă $f^{(r+1)}(c)$ este *negativ*, avem

$$f(c+h)-f(c)<0 \quad \text{şi} \quad f(c-h)-f(c)<0$$

şi funcţiunea are un maxim pentru $x=c$.

CAZUL II: $r+1$ *impar*. Când $f^{(r+1)}(c)$ este pozitiv, avem

$$f(c+h)-f(c)>0 \quad \text{şi} \quad f(c-h)-f(c)<0;$$

deci $f(c)$ nu este un extrem, iar $f(x)$ este crescătoare în vecinătatea lui c; când $f^{(r+1)}(c)<0$, avem

$$f(c+h)-f(c)<0 \quad \text{şi} \quad f(c-h)-f(c)>0;$$

deci nici în acest caz $f(c)$ nu este un extrem şi $f(x)$ este descrescătoare în vecinătatea lui c.

OBSERVĂRI. 1⁰. In consideraţiunile de mai sus nu am presupus decât existenţa derivatei de ordinul $r+1$ în punctul c; dacă presupunem însă şi *continuitatea* acestei derivate, rezultatele precedente se stabilesc mai uşor plecând de la formula

$$f(c+h)=f(c)+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}f^{(r+1)}(c+\theta h).$$

2⁰. Dacă considerăm curba $y=f(x)$ şi avem $f'(c)=0$, tangenta T în punctul P $[c, f(c)]$ este după cum ştim paralelă cu Ox.

In cazul când $r+1$ este par, curba este de aceiaş parte a tangentei, în vecinătatea lui P; pe când dacă $r+1$ este impar, curba traversează tangenta în punctul P, care este un punct de *inflexiune* al curbei.

In rezumat vedem că pentru a găsi extremele funcţiei $f(x)$, derivabilă în intervalul (a, b), vom căuta rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$. Dacă c este o rădăcină a acestei ecuaţii, vom calcula valorile derivatelor succesive ale lui $f(x)$ pentru $x=c$; fie n ordinul primei derivate care nu se anulează în punctul c. Dacă n este impar, $f(c)$ nu este un extrem al funcţiunei; dacă n este par, $f(c)$ este: un *maxim* dacă $f^{(n)}(c)<0$; un *minim* dacă $f^{(n)}(c)>0$.

EXEMPLU. Să căutăm extremele funcţiunei

$$y=2\cos x+e^{x}+e^{-x} \tag{2}$$

Avem

$$y'=2\sin x+e^{x}-e^{-x},$$

sau, înlocuind pe $\sin x$, e^{x} şi e^{-x} prin desvoltările după puterile lui x şi făcând reducerile,

$$y'=4x^{3}\left(\frac{1}{3!}+\frac{x^{4}}{7!}+\frac{x^{8}}{11!}+\cdots\right) \tag{3}$$

Cum paranteza nu se anulează pentru nici o valoare a lui x, vedem că y poate avea un extrem în $x=0$. Derivatele a doua şi a treia

$$y''=-2\cos x+e^{x}+e^{-x}, \quad y'''=2\sin x+e^{x}-e^{-x}$$

sunt nule pentru $x=0$, iar derivata a patra este egală cu 4 pentru $x=0$.

Prin urmare funcţiunea dată este minimă pentru $x=0$, minimul său fiind egal cu 4. Avem deci neegalitatea

$$2\cos x+e^{x}+e^{-x}\geqq 4.$$

58. Extremele funcţiunilor nederivabile. Să presupunem acum că funcţiunea continuă $f(x)$ nu este derivabilă în întreg intervalul (a, b) şi anume că în anumite puncte, în număr finit, avem derivate la dreapta şi la stânga diferite. Putem împărţi intervalul (a, b) într'un număr finit de intervale parţiale, care să nu conţină fiecare decât câte un punct în care $f(x)$ nu are o derivată unică. Fie c acest punct al unuia din intervalele parţiale. Să cercetăm când $f(c)$ este un extrem.

Să presupunem că $f'(x)$ are, în vecinătatea punctului c, un semn unic pentru $x > c$. Dacă facem ca variabila x să treacă crescând prin valoarea c, se va prezenta unul din următoarele trei cazuri:

1°. Dacă $f'(x)$ trece de la negativ la pozitiv, atunci $f(c)$ este un *minim*, căci funcţiunea descreşte până ce x ajunge în c şi apoi creşte.

2°. Dacă $f'(x)$ trece de la pozitiv la negativ, $f(c)$ este un *maxim*.

3°. Dacă $f'(x)$ nu schimbă de semn, când x trece prin c, $f(c)$ nu este un extrem, funcţiunea $f(x)$ fiind continuu *crescătoare* sau *descrescătoare*, după cum $f'(x)$ este pozitiv sau negativ.

OBSERVARE. Consideraţiunile de mai sus se pot aplica, pentru determinarea naturei extremului, şi în cazul $f'(c)=0$. De multe ori, în practică, este mai comod a cerceta cum variază funcţia în vecinătatea lui c de cât a căuta semnul unei derivate de ordin superior pentru $x=c$.

Dacă reluăm exemplul precedent (2), vedem din (3) că y' trece dela negativ la pozitiv, când x traversează originea; deci y este *minim* pentru $x=0$.

EXERCIŢII.

1. Să se arate ca

$$(1) \qquad \operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

şi să se deducă egalitatea

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

R. Seria

$$(2) \qquad \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

este convergentă pentru $|x| < 1$. Dacă $f(x)$ este suma acestei serii avem [41]

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

deci [45] $f(x) - \operatorname{arc\,tg} x = C$. Cum determinarea principală a funcţiei arc tg x se anulează pentru $x=0$, vedem că $C=0$.

Seria (2) fiind convergentă pentru $x=1$, egalitatea (1) subzistă, după teorema lui Abel, când facem pe $x=1$.

2. Să se desvolte în serie, după puterile lui x, funcţia $\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{1+x}$.

R. Cunoaştem desvoltarea lui $\operatorname{Log}(1+x)$ [45] şi a lui $\frac{1}{1+x}$. Făcând produsul după regula de înmulţire a seriilor, avem desvoltarea

$$\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\ldots+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n+\ldots$$

valabilă pentru $|x|<1$.

3. Se cere adevărata valoare a raportului $\frac{\operatorname{Log}\cos\alpha x}{\operatorname{Log}\cos\beta x}$ pentru $x=0$.

R. Raportul derivatelor numărătorului şi numitorului este

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\cos\beta x}{\cos\alpha x}\cdot\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$$

şi are ca limită $\frac{\alpha}{\beta^2}$.

4. Limita expresiei

$$y=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x^2}$$

când x tinde către zero.

R. Inlocuind pe $\frac{1}{1+x}$ şi $\operatorname{Log}(1+x)$ prin desvoltările lor în serie, vedem că

$$y=\frac{1}{x}\left[(1-x^2+x^3-\ldots)-\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\right)\right]$$

deci limita este $-\frac{1}{2}$.

5. Limita expresiei $y=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ când x tinde către zero.

R. Avem $\operatorname{Log}y=\frac{1}{x}\operatorname{Log}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$. Deci

$$\lim_{x=0}\operatorname{Log}y=\lim_{x=0}\frac{a^x\operatorname{Log}a+b^x\operatorname{Log}b}{a^x+b^x}=\frac{1}{2}\operatorname{Log}ab.$$

Prin urmare limita este $\sqrt{ab}$.

6. Să se găsească extremele funcţiunei $y=x^{\frac{1}{x}}$

R. y este extrem în acelaş timp cu $u=\log y$. Avem

$$u'=\frac{1-\log x}{x^2}$$

Deci y are un singur extrem: pentru $x=e$. Cum

$$u''=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

vedem că u'' pentru $x=e$ este $-\frac{1}{e^3}$. Deci y este maxim pentru $x=e$.

7. Să se găsească extremele produsului $y=x^m(a-x)^n$, unde m şi n sunt numere întregi şi a un număr pozitiv.

R. Rădăcinile ecuaţiei

$$x^{m-1}(a-x)^{n-1}[am-(m+n)x]=0$$

adică $x=0$, $x=a$, $x=\frac{ma}{m+n}$ sunt punctele în care y poate fi un extrem. y'' este negativ pentru $x=\frac{ma}{m+n}$; deci y e un maxim în acest punct şi are valoarea

$$m^m n^n \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}$$

Pentru $x=0$, vom cerceta curba $y=x^m(a-x)^n$ în vecinătatea originei făcând $x=\pm\varepsilon$. Vedem astfel că: dacă m este par, y este *minim* pentru $x=0$; iar dacă m este impar, n'avem un extrem în origine, funcţiunea fiind crescătoare.

Tot astfel, făcând $x=a\pm\varepsilon$, vedem că dacă n este par avem un *minim* pentru $x=a$, iar dacă n este impar funcţiunea descreşte pentru $x=a$.

CAPITOLUL VI.

FUNCŢIUNI DE MAI MULTE VARIABILE.

I. — DERIVAREA ŞI DIFERENŢIAREA FUNCŢIUNILOR EXPLICITE DE MAI MULTE VARIABILE.

59. **Derivate parţiale.** Fie $\omega = f(x, y)$ o funcţiune de două variabile independente x şi y, definită într'un domeniu D şi continuă în acest domeniu. Dacă dăm lui y o valoare constantă şi facem să varieze x, ω devine o funcţie continuă de singura variabilă x[1]. Dacă această funcţie admite o derivată, această derivată se numeşte *derivata parţială* a lui ω în raport cu x. Deci prin definiţie această derivată *parţială* este limita raportului

$$\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}$$

când h tinde către zero.

Dacă în orice punct al domeniului D există o derivată parţială în raport cu x, zicem că ω este derivabilă parţial în raport cu x *în domeniul* D.

In mod analog se defineşte şi derivata parţială în raport cu y

Notaţiuni. Derivata parţială a funcţiei $\omega = f(x, y)$ în raport cu x se notează cu $f'_x(x, y)$, sau mai simplu

$$f'_x \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ sau } \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Derivata parţială în raport cu y, se notează cu $f'_y(x, y)$ sau

$$f'_y \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ sau } \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Se mai întrebuinţează notaţia lui Monge: prin litera p se notează derivata parţială în raport cu x şi prin litera q derivata parţială în raport cu y.

---

[1] Geometriceşte, punctul (x, y) se deplasează pe porţiunea, cuprinsă în domeniul D, a unei drepte paralele cu axa x-ilor.

Derivate parţiale de ordin superior. Derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt funcţiuni de x şi y, care la rândul lor pot admite şi ele derivate parţiale în raport cu x şi y. Aceste derivate se notează prin

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{y^2}$$

şi se numesc derivate parţiale *de ordinul al doilea.*

Prin analogie f'_x şi f'_y se numesc derivate parţiale *de ordinul întâi.*

Din derivatele parţiale de ordinul al doilea, deducem pe cele de ordinul al treilea

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Urmând tot astfel definim derivatele parţiale de un ordin oarecare n.

Se definesc la fel derivatele parţiale de diverse ordine ale funcţiunilor ce depind de mai multe variabile independente.

Principiul intervertirei ordinei derivărilor. Nu totdeauna cele 4 derivate parţiale de ordinul al doilea ale unei funcţiuni de două variabile, sau cele 8 de ordinul al treilea, sunt distincte între ele. Vom indica un criteriu, care ne va permite să restrângem numărul derivatelor distincte de ordin superior.

Dacă într'un domeniu D, *derivatele* f''_{xy} şi f''_{yx} *sunt continue, atunci în acel domeniu avem:*

$$f''_{xy}=f''_{yx}.$$

In adevăr, să considerăm expresia

$$\mathrm{E}=f(x+h,\ y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y)$$

x şi y fiind coordonatele unui punct din domeniul D; însemnând

(1) $$g(u)=f(x+h,u)-f(x,u),$$

expresia E se mai poate scrie

$$\mathrm{E}=g(y+k)-g(y),$$

sau, aplicând formula mediei [44]

$$\mathrm{E}=kg'_y(y+\theta k)\quad \text{unde}\quad 0<\theta<1.$$

Dacă înlocuim pe g'_y prin valoarea sa (1), avem

$$E = k\,[f'_y(x+h,\ y+\theta k) - f'_y(x,\ y+\theta k)]$$

şi aplicând din nou formula mediei

(2) $$E = k\,h\,f''_{yx}(x+\theta' h,\ y+\theta k) \qquad 0<\theta'<1.$$

Din cauza simetriei expresiei E în x, y, h şi k vedem că plecând dela funcţiunea auxiliară

$$y(v) = f(v,\ y+k) - f(v,\ y)$$

ajungem, urmând aceeaş cale, la

(3) $$E = k\,h\,f''_{xy}(x+\theta'_1 h,\ y+\theta_1 k) \quad 0<\theta_1'<1,\ 0<\theta_1<1.$$

Egalând valorile (2) şi (3), vedem că

$$f''_{xy}(x+\theta_1' h,\ y+\theta_1 k) = f''_{yx}(x+\theta' h,\ y+\theta k).$$

Când h şi k tind către zero, f''_{xy} şi f''_{yx}, fiind continue, vor fi limitele către care tind ambii membri ai egalităţii precedente şi deci propoziţia este demonstrată.

Acest lucru fiind stabilit, să presupunem că am efectuat asupra funcţiei $f(x, y)$ un număr oarecare de derivări parţiale succesive, unele în raport cu x, altele în raport cu y şi într'o ordine arbitrară. Dacă toate derivatele parţiale ale funcţiunii sunt continue, putem interverti ordinea a două derivări consecutive şi prin aplicarea repetată a unor astfel de intervertiri, putem aranja derivările în ordinea pe care o voim. Putem, spre exemplu, face mai întâiu toate derivările în raport cu x şi apoi toate derivările în raport cu y.

In demonstraţia criteriului precedent putem presupune că funcţiunea ar mai depinde şi de alte variabile independente în afară de x şi y, pentru că aceste alte variabile trebuesc considerate ca nişte constante în derivările parţiale în raport cu x şi y.

Dacă avem o funcţiune $f(x, y, z, \ldots)$ de un număr oarecare de variabile, ordinea a două derivări succesive în raport cu variabile diferite poate fi schimbată, în ipoteza continuităţii derivatelor.

Astfel că rezultatul a m derivări în raport cu x, n derivări în raport cu y, p derivări în raport cu $z, \ldots$, efectuate într'o ordine oarecare, poate fi reprezentat prin simbolul unic

$$\frac{\partial^{m+n+p+\cdots} f}{\partial x^m\, \partial y^n\, \partial z^p \ldots}$$

In aceste condiţiuni o funcţie de p variabile independente are atâtea derivate parţiale de ordinul n, câţi termeni distincţi poate avea un polinom omogen de gradul n cu p variabile, adică

$$\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\dots\,n}$$

ceea ce reprezintă *numărul combinărilor cu repetiţie* a p obiecte luate câte n. Pentru o funcţie de două variabile vom avea deci: trei derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

care, după notaţiunea lui Monge, se însemnează respectiv cu literele r, s, t; *patru* derivate de ordinul al treilea

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

şi în general $n+1$ derivate de ordinul n.

60. Formula creşterilor finite. Să considerăm o funcţie de mai multe variabile, pentru fixarea ideilor de trei variabile,

$$\omega = f(x, y, z)$$

şi să formăm diferenţa finită (sau creşterea)

$$\Delta\omega = f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z)$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\begin{aligned}\Delta\omega = f(x+h,\ y+k,\ z+l) &- f(x, y+k,\ z+l)\\ + f(x, y+k,\ z+l) &- f(x, y,\ z+l)\\ + f(x, y,\ z+l) &- f(x, y, z).\end{aligned}$$

Aplicând formula mediei diferenţelor din fiecare rând, avem

$$(4) \qquad \begin{aligned}\Delta\omega = h f'_x(x+\theta h,\ y+k,\ z+l) &+\\ k f'_y(z, y+\theta_1 k,\ z+l) &+ l f'_z(x, y,\ z+\theta_2 l)\end{aligned}$$

cu

$$0 < \theta, \theta_1, \theta_2 < 1.$$

In demonstraţia acestei formule nu se presupune continuitatea derivatelor parţiale f'_x, f'_y, f'_z; dacă însă aceste derivate sunt continue formula precedentă se mai poate scrie

$$(5) \qquad \Delta\omega = f'_x(x, y, z) + f'_y(x, y, z) + f'_z(x, y, z) + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 + l\varepsilon_3$$

ε_1, ε_2, ε_3 fiind cantităţi care tind către zero în acelaş timp cu h, k, l.

61. Derivarea funcţiunilor compuse. Să considerăm o funcţie de mai multe variabile, pentru uşurarea scrisului de 3 variabile,

$$\omega = f(u, v, w)$$

u, v, w fiind funcţiuni de alte variabile independente x, y, z; ω e funcţie de variabilele independente x, y, z, ... prin intermediul funcţiunilor u, v, w.

Ne propunem să calculăm derivata parţială a funcţiei ω în raport cu una din variabilele independente, de exemplu x.

Presupunem că $f(u, v, w)$ este o funcţie continuă de variabilele u, v, w; că admite derivate f'_u, f'_v, f'_w *continue* şi că funcţiunile u, v, w sunt derivabile în raport cu fiecare din variabilele x, y, z, ...

Lăsând toate variabilele y, z, ... constante şi dând lui x o creştere Δx, funcţiunile u, v, w capătă nişte creşteri Δu, Δv, Δw şi după formula (5), avem

$$\Delta\omega = \Delta u f'_u + \Delta v f'_v + \Delta w f'_w + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v + \varepsilon_3 \Delta w$$

ε_1, ε_2, ε_3 tinzând către zero în acelaş timp cu Δx.

Impărţind cu Δx şi făcând apoi pe Δx să tindă către zero, obţinem formula de derivare a funcţiunilor compuse

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$

căci coeficienţii cantităţilor ε_1, ε_2, ε_3 tind către cantităţile finite $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, pe când ε_1, ε_2, ε_3 tind către zero.

In cazul particular când u, v, w depind numai de singura variabilă x, formula precedentă se poate scrie

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}$$

EXEMPLU. Fie $\omega = u^v$, unde u şi v sunt funcţiuni de x. Avem

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = v\, u^{v-1}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v} = u^v \operatorname{Log} u$$

de unde

$$\frac{d\omega}{dx} = v\, u^{v-1}\cdot\frac{du}{dx} + u^v \operatorname{Log} u \frac{dv}{dx}$$

rezultat pe care l-am găsit şi pe altă cale [40].

62. Diferenţiala totală de primul ordin. Fie $\omega = f(x, y, z)$ o funcţie de 3 variabile independente x, y, z având derivatele parţiale f'_x, f'_y, f'_z. Fie dx, dy, dz diferenţialele lui x, y, z, adică creşteri *arbitrare* ale acestor variabile. Suma

$$f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz$$

se numeşte diferenţiala totală de primul ordin a funcţiei f şi se notează cu $d\omega$ sau df. Avem deci

$$d\omega = f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz.$$

Presupunând derivatele f'_x, f'_y, f'_z continue, putem aplica funcţiunei f formula (5), unde vom face $h = dx$, $k = dy$, $l = dz$; vom avea deci

$$\Delta\omega = f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz + \varepsilon_1\, dx + \varepsilon_2\, dy + \varepsilon_3\, dz.$$

Prin urmare, dacă dx, dy, dz sunt infiniţi mici de acelaş ordin vedem că $d\omega$ este *partea principală* a creşterei $\Delta\omega$.

Diferenţiala funcţiunilor compuse. Să presupunem că în funcţia precedentă x, y, z n'ar mai fi variabile independente, ci ar fi funcţiuni de u şi v. Diferenţiala totală a funcţiei f, considerată ca funcţie de variabilele independente u şi v, va fi

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv.$$

Dar avem, după regula de derivare a funcţiunilor compuse,

$$du \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} \overset{du}{+} \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \overset{du}{+} \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\ du$$

$$dv \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} \overset{dv}{+} \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \overset{dv}{+} \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\ dv$$

Inmulţind prima egalitate cu du şi pe a doua cu dv şi adunând, în membrul întâiu căpătăm pe $d\omega$, iar în membrul al doilea coeficienţii lui $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ sunt egali respectiv cu dx, dy, dz. Prin urmare

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

aşa că expresia *diferenţialei totale de primul ordin* a unei funcţiuni este *aceeaş* fie că variabilele sunt idependente, fie că ele sunt funcţiuni de alte variabile independente.

Observare. Aplicând regula de diferenţiare a funcţiunilor compuse, vedem că, oricare ar fi variabilele de care depind funcţiunile u şi v şi oricare ar fi numărul lor, avem

$$d(u+v) = du + dv,\quad d(uv) = u\,dv + v\,du,\quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},\ \text{etc.}$$

Aplicaţii. I. Calculul derivatelor parţiale prin diferenţiare. Dacă printr'un calcul oarecare am găsit pentru diferenţiala unei funcţiuni $u(x, y, z)$, de variabilele independente x, y, z, expresiunea

$$du = A\, dx + B\, dy + C\, dz \tag{7}$$

va trebui să avem

$$(8) \qquad A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

In adevăr, diferențiala totală a funcției u este

$$(9) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Egalitățile (7) și (9) având loc oricare ar fi dx, dy, dz deci în particular și pentru $dy = 0$, $dz = 0$ deducem că

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A.$$

In acelaș fel se găsesc și celelalte identități (8).

EXEMPLU. Fie $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Avem aplicând regula de diferențiare a unei funcții compuse

$$d \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{d \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

de unde

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

II. Calculul erorilor. In diverse măsurători din fizică, astronomie, etc., datele unui calcul nu sunt cunoscute de cât cu anumite aproximații. Fie dx, dy, dz erorile cu care s'au măsurat mărimile x, y, z și α, β, γ limitele superioare ale acestor erori, adică

$$|dx| \leqq \alpha, \quad |dy| \leqq \beta, \quad |dz| \leqq \gamma.$$

Se admite și este legitim din punct de vedere practic, că eroarea ce rezultă pentru $\omega = f(x, y, z)$ este dată de formula

$$d\omega = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

Limitarea eroarei $d\omega$ se obține imediat:

$$|d\omega| \leqq |f'_x dx| + |f'_y dy| + |f'_z dz| \leqq \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z.$$

63. Diferențiale de ordin superior. Fie $u = \varphi(x, y)$ o funcție de două variabile *independente* x și y. Diferențiala sa de primul ordin este

$$du = f'_x dx + f'_y dy.$$

Diferențiala de ordinul al doilea $d^2 u$ este diferențiala diferențialei de ordinul întâi

$$d^2 u = d(du) = \frac{\partial du}{\partial x} dx + \frac{\partial du}{\partial y} dy$$

dx şi dy *fiind consideraţi ca nişte constante.* Avem deci

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \text{ (1)}.$$

Diferenţialele succesive d^3u, d^4u,... se definesc astfel din aproape în aproape.

Putem găsi o expresie simbolică foarte comodă pentru diferenţiala de ordinul n a unei funcţiuni de un număr oare care de variabile independente, observând că avem diferenţiala totală a unei funcţiuni u, de variabilele independente x, y, z spre exemplu, înmulţind pe u cu factorul simbolic

$$\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz. \tag{10}$$

Diferenţiala a doua se poate scrie

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^{2} u$$

ridicarea la patrat făcându-se ca şi cum $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, dx, dy, dz ar fi factori algebrici. Cum trecerea de la o diferenţiare la cea de un ordin superior cu o unitate se face prin multiplicarea cu factorul simbolic (10), avem

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^{n} u$$

puterile lui ∂ fiind interpretate ca indici de derivare.

Funcţiuni compuse. Fie $f(u, v, w)$ o funcţie de cantităţile u, v, w care sunt funcţiuni de variabilele independente x şi y. Am văzut că

$$df = A\,du + B\,dv + C\,dw$$

unde am însemnat

$$A = \frac{\partial f}{\partial u},\ B = \frac{\partial f}{\partial v},\ C = \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Inlocuind în egalitatea precedentă pe du, dv, dw prin valorile lor, avem

$$df = A\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + B\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy\right).$$

Putem pune astfel pe df sub forma $P dx + Q dy$; pentru a trece la diferenţiala a doua vom proceda ca mai sus, considerând pe dx şi dy

(1) Presupunem, ca şi în toate cele ce urmează, că condiţiile ce se cer pentru a avea facultatea de a interverti ordinea derivărilor, sunt satisfăcute.

ca nişte constante, aşa că

$$d^2f = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dA + A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2\right) + \cdots$$

adică, mai concentrat,

$$d^2f = dA\,du + A\,d^2u + dB\,dv + B\,d^2v + dC\,dw + C\,d^2w,$$

unde

$$dA = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}dv + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial w}dw$$

dB şi dC având valori analoage. Vedem astfel că formula ce ne dă pe d^2f este mai complicată de cât în cazul când u, v, w ar fi variabile independente.

Diferenţialele de ordin superior se prezintă sub forme din ce în ce mai complicate, expresia lui $d^n f$ conţinând diferenţialele du, $d^2u, \ldots, d^n u$ şi cele analoage în v şi w.

In cazul particular când

$$u = ax + by + c$$
$$v = a_1x + b_1y + c_1$$
$$w = a_2x + b_2y + c_2$$

toate diferenţialele $d^n u$, $d^n v$, $d^n w$ sunt nule pentru $n > 1$. Formula care dă pe $d^n f$ va fi deci aceeaş ca şi când u, v, w ar fi variabile independente, adică, sub formă simbolică:

(11) $$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv + \frac{\partial}{\partial w}dw\right)^n f.$$

64. Funcţiuni omogene. Zicem că o funcţiune $f(x, y, z)$ este *omogenă* în raport cu variabilele x, y, z atunci când avem identitatea

(12) $$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$$

t fiind o variabilă auxiliară. Numărul m este *gradul de omogeneitate*. El este un număr întreg, pozitiv sau negativ, dacă f este o funcţie raţională; pentru alte funcţii el poate fi fracţionar sau chiar iraţional.

EXEMPLU. Funcţia

$$\frac{(x+y)^a\,(x-y)^b}{(x+y)^c + (x-y)^c}$$

este omogenă, gradul său fiind $a + b - c$.

Dacă derivăm în raport cu t ambii membri ai identităţi (12) avem

$$x f'_x(tx, ty, tz) + y f'_y(tx, \ldots) + z f'_z(tx, \ldots) = mt^{m-1} f(x, y, z).$$

şi făcând pe $t = 1$,

$$x f'_x(x, y, z) + y f'_y(x, \ldots) + z f'_z(x, \ldots) = mf(x, y, z).$$

Această identitate constitue *teorema lui Euler*.

Putem generaliza această identitate utilizând formula (11). Să punem în identitatea (12) $u=tx$, $v=ty$, $w=tz$ şi să socotim pe t ca variabilă independentă iar pe x, y, z ca constante. Dacă luăm diferenţiala de ordinul n a ambilor membri ai identităţei (12), vom avea ţinând seama de (11),

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}du+\frac{\partial}{\partial v}dv+\frac{\partial}{\partial w}dw\right)^n f(u,\ v,\ w)$$
$$=m(m-1)\ldots(m-n+1)f(x,\ y,\ z)\,t^{m-n}\,dt^n.$$

Dar

$$du=xdt,\ dv=ydt,\ dw=zdt$$

aşa că identitatea precedentă devine, după ce am suprimat factorul comun dt^n şi am făcut $t=1$,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f=m(m-1)\ldots(m-n+1)f(x,\ y,\ z).$$

65. Formula lui Taylor. Să considerăm o funcţie de mai multe variabile, pentru fixarea ideilor de trei variabile, $f(x,\ y,\ z)$. Ne propunem a pune funcţiunea $f(x+h,\ y+k,\ z+l)$ sub forma unei sume de polinoame omogene în raport cu h, k şi l de gradele $0, 1, \ldots, n$ plus un termen complimentar. Presupunem pentru aceea că funcţiunea $f(x, y, z)$ admite derivate parţiale până la ordinul $n+1$.

Să plecăm de la funcţiunea auxiliară

$$g(t)=f(x+ht,\ y+kt,\ z+lt)$$

unde x, y, z, h, k, l sunt considerate ca constante. Aplicând funcţiunei $g(t)$, de singura variabilă independentă t, formula lui Maclaurin, avem

$$g(t)=g(0)+\frac{t}{1}g'(0)+\ldots+\frac{t^n}{n!}g^{(n)}(0)+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta t). \tag{13}$$

Funcţiunea $g(t)$ este prin intermediul lui f o funcţie compusă de t, căci

$$g=f(u,\ v,\ w)$$

unde

$$u=x+ht,\ v=y+kt,\ w=z+lt.$$

Putem deci aplica formula (11). Avem astfel

$$d^n g=g^{(n)}(t)\,dt^n=\left(\frac{\partial}{\partial u}du+\frac{\partial}{\partial v}dv+\frac{\partial}{dw}dw\right)^n f$$
$$=\left(h\frac{\partial}{\partial u}+k\frac{\partial}{\partial v}+l\frac{\partial}{\partial w}\right)^n f\,dt^n$$

cum pentru $t=0$, u, v, w se reduc la x, y, z, găsim

$$
(15)\quad \begin{cases} g(0)=f(x,y,z) \\ g'(0)=h\dfrac{\partial f}{\partial x}+k\dfrac{\partial f}{\partial y}+l\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dots\dots\dots\dots \\ g^{(n)}(0)=\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}+l\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z) \end{cases}
$$

iar

$$
(16)\quad g^{(n+1)}(\theta t)=\left(h\frac{\partial}{\partial u}+k\frac{\partial}{\partial v}+l\frac{\partial}{\partial w}\right)^{n+1} f(u,v,w)
$$

unde după efectuarea derivărilor înlocuim pe u, v, w prin valorile lor (14).

Făcând $t=1$ în formula (13) şi ţinând seama de relaţiile (15) şi (16) obţinem *formula lui Taylor*

$$
(17)\quad f(x+h,\ y+k,\ z+l)=f(x,y,z)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)
$$
$$
+\dots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f+\mathrm{R}_n.
$$

Terminul complimentar R_n are valoarea

$$
\mathrm{R}_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f
$$

unde, după derivare, variabilele x, y, z vor fi înlocuite respectiv prin $x+\theta h$, $y+\theta k$, $z+\theta l$ cu $0<\theta<1$.

Observări. 1⁰. Dacă facem în formula (17) $x=y=z=0$ şi $h=x$, $k=y$, $l=z$, obţinem formula lui Maclaurin relativă la o funcţie de trei variabile.

2⁰. Făcând în formula (17) $n=0$, căpătăm

$$
(18)\quad f(x+h,\ y+k,\ z+l)-f(x,y,z)=hf'(x+\theta h,y+\theta k,z+\theta l)+
$$
$$
kf'_y(x+\theta h,y+\theta k,z+\theta l)+lf'_z(x+\theta h,y+\theta k,z+\theta l)
$$

adică o extindere a formulei mediei la cazul funcţiunilor de mai multe variabile, diferită de formula (4) dată anterior.

3⁰. Să privim creşterile h, k, l ca infiniţi mici. Dacă punem $h=dx$, $k=dy$, $l=dz$ şi dacă ţinem seama de formula care ne dă diferenţiala de ordinul n a lui $f(x)$ [63], vedem că formula (17) se mai poate scrie

$$
\Delta f=df+\frac{1}{2!}d^2f+\dots+\frac{1}{n!}d^nf+\mathrm{R}_n
$$

unde am însemnat $\Delta f=f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)-f(x,y,z)$.

4⁰. Să presupunem că $f(x,y,z)$ admite derivate parţiale de *orice* ordin şi că, pentru sisteme de valori convenabile date lui h, k, l termenul complimentar R_n *tinde către zero*, când n creşte nemărginit. In acest caz deducem din (17) că *seria lui Taylor*

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(n)} f$$

corespunzătoare funcţiunei $f(x, y, z)$ este convergentă şi are ca sumă $f(x+h,\ y+k,\ z+l)$.

66. Determinanţi funcţionali. Fie

$$(19)\qquad \begin{cases} y_1 = f_1\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \\ y_2 = f_2\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = f_n\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \end{cases}$$

un sistem de n funcţiuni, continue şi derivabile de variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Determinatul

$$(20)\qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

format cu derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiunilor (19) se numeşte *determinantul funcţional* sau *jacobianul* sistemului (19) [1].

Dacă intervertim ordinea funcţiunilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sau ordinea variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în determinantul (20), atunci valoarea sa nu schimbă decât cel mult de semn, căci aceasta revine a schimba în acest determinant liniile între ele sau coloanele între ele.

Determinantul funcţional (20) se mai notează prin simbolul

$$J = \frac{D\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

şi această notaţiune are avantajul de a pune mai în evidenţă analogia ce există între proprietăţile jacobianului şi cele ale derivatei. Vom indica numai una din aceste proprietăţi: acea care corespunde derivatei unei funcţiuni de funcţiune.

(1) De la numele matematicianului Jacobi care a creat teoria determinanţilor funcţionali.

Fie

$$\begin{cases} y_1 = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ y_2 = f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{cases}$$

cu

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Intre jacobianii acestor sisteme avem relaţia

$$(21)\qquad \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Vom demonstra această relaţiune presupunând pentru simplificarea scrisului $n=2$; demonstraţia cazului general se face în acelaş fel. Fie deci

$$X = f(u,v), \qquad u = h(x,y),$$
$$Y = g(u,v), \qquad v = k(x,y).$$

Vom arăta că

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)}.$$

In adevăr, înmulţind determinanţii, din membrul al doilea, obţinem

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

şi acest determinant este tocmai jacobianul $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$.

Observare. In cazul $n=1$ formula (21) ne dă regula cunoscută de derivare a unei funcţiuni de funcţiune.

Vom vedea mai departe, în acest capitol, importanţa determinanţilor funcţionali.

II. FUNCŢIUNI IMPLICITE.

67. Funcţiuni definite printr'o singură ecuaţie. Să considerăm ecuaţia

$$(1)\qquad F(x, y, \ldots, u) = 0,$$

F fiind o funcţie de variabilele $x, y, \ldots$. In anumite cazuri simple putem scoate din ecuația (1) valoarea lui u în funcție de celelalte variabile $x, y, \ldots$, adică putem găsi pentru u o funcție $f(x, y, \ldots)$, care să verifice identic ecuația (1). Făcând anumite ipoteze asupra funcției F putem arăta existența unei funcțiuni $u = f(x, y, \ldots)$ care satisface ecuației (1).

Dacă funcția F satisface la următoarele condițiuni:

1°. *Este continuă în vecinătatea punctului* M $(a, b, \ldots, u_0)$ *și se anulează în acest punct, adică* $F(a, b, \ldots, u_0) = 0$;

2°. *Are derivatele parțiale de primul ordin continue în vecinătatea punctului* M;

3°. $F'(a, b, \ldots, u_0) \neq 0$;

există o funcție și numai una, $u = f(x, y, \ldots)$ *de variabilele independente* $x, y, \ldots$, *care se reduce la* u_0 *în punctul* $(a, b, \ldots)$ *și care e continuă, derivabilă și satisface identic la ecuația* (1) *în vecinătatea punctului* $(a, b, \ldots)$.

Pentru a ușura expunerea demonstrației vom considera numai trei variabile x, y, u și vom presupune, pentru fixarea ideilor $F'_u(a, b, u_0) > 0$. Funcțiunile $F(x, y, u)$ și $F'_u(x, y, u)$ fiind continue în vecinătatea punctului (a, b, u_0), putem alege un număr pozitiv α astfel ca, în domeniul D, definit prin neegalitățile

$$|x - a| \leqq \alpha \quad , \quad |y - b| \leqq \alpha \quad , \quad |u - u_0| \leqq \alpha,$$

funcțiunile F și F'_u să fie continue în D, *funcțiunea* F'_u *fiind pozitivă* în întreg acest domeniu [21, observarea 1°].

Funcțiunea $F(a, b, u)$, de singura variabilă u, este *crescătoare* [46] când u crește de la $u_0 - \alpha$ la $u_0 + \alpha$, căci $F'_u(a, b, u) > 0$; cum însă $F(a, b, u_0) = 0$, vedem că, pentru $0 < \lambda < \alpha$ avem

$$F(a, b, u_0 + \lambda) > 0 \quad , \quad F(a, b, u_0 - \lambda) < 0.$$

Din aceste două neegalități rezultă [1] că putem determina un număr pozitiv β, cel mult egal cu α, astfel ca, pentru orice sistem de valori x, y luat în domeniul d definit prin neegalitățile

$$|x - a| \leqq \alpha \quad , \quad |y - b| \leqq \beta,$$

să avem

$$F(x, y, u_0 + \lambda) > 0 \quad , \quad F(x, y, u_0 - \lambda) < 0.$$

Prin urmare, dacă în funcțiunea $F(x, y, u)$, *fixăm* pentru x și y valori în domeniul d și facem apoi pe u să varieze de la $u_0 - \lambda$ la $u_0 + \lambda$, cum $F'_u > 0$, funcțiunea de u, $F(x, y, u)$, va fi crescătoare; dar ea schimbă de semn pentru valorile extreme ale lui u. Deci această

---

[1] Ținând seama de continuitatea funcțiunilor $F(x, y, u_0 + \lambda)$, $F(x, y, u_0 - \lambda)$, de variabilele x și y, în domeniul $|x - a| \leqq \alpha$, $|y - b| \leqq \alpha$ și de observarea 1° de la n. 21.

funcţie se anulează, şi numai o singură dată în intervalul $(u_0 - \lambda, u_0 + \lambda)$. Aşa dar vom avea o valoare bine determinată pentru u, cuprinsă între $u_0 - \lambda$ şi $u_0 + \lambda$, astfel ca

$$F(x, y, u) = 0.$$

In particular, dacă luăm $x = a$ şi $y = b$, valoarea corespunzătoare lui u, care este unică, va fi chiar u_0, căci $F(a, b, u_0) = 0$.

Deci, în rezumat, la un sistem de valori x, y din domeniul d, corespunde pentru u o valoare unică satisfăcând condiţiei $|u - u_0| < \lambda$ şi care verifică ecuaţia $F(x, y, u) = 0$.

Această variabilă u, care depinde de variabilele x, y, se numeşte o *funcţie implicită* de x, y; să o notăm $u = f(x, y)$. Vom avea

$$F[x, y, f(x, y)] = 0$$

în întreg domeniul d şi $f(a, b) = u_0$.

Continuitate. Fie (x, y) şi $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ două puncte din domeniul d; u şi $u + \Delta u$ valorile corespunzătoare funcţiunei f. Deci

$$F(x, y, u) = 0 \ , \ F(x + \Delta x \ , \ y + \Delta y \ , \ u + \Delta u) = 0.$$

Dacă aplicăm funcţiunei F formula (18) stabilită la n. 65, vedem că

$$\begin{aligned} 0 = \Delta x F'_x (x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u) \\ + \Delta y F'_y (x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u) \\ + \Delta u F'_u (x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u). \end{aligned}$$

Cum $0 < \theta < 1$, urmează că punctul $(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u)$ aparţine domeniului D, aşa că F'_u este pozitiv, deci diferit de zero, în acest punct. Prin urmare dacă Δx şi Δy tind către zero şi Δu tinde către zero; deci funcţiunea $u = f(x, y)$ este continuă în domeniul d.

Derivate. Dacă presupunem $\Delta y = 0$, egalitatea precedentă se va putea scrie

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{F'_u (x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u)}{F'_u (x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u)}$$

şi făcând pe Δx să tindă către zero, din cauza continuităţii derivatelor F'_x, F'_u (ipoteza 2°), vom avea derivata lui u în raport cu x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u}.$$

In mod analog găsim

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u}.$$

Din punct de vedere practic calculul derivatelor $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}$ se poate face direct derivând, cu ajutorul regulei de derivare a funcţiunilor compuse [61], ecuaţia $F(x, y, u) = 0$, unde u este funcţie de x şi y. Făcând derivarea în raport cu x, avem

$$F'_x + F'_u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

de unde se deduce valoarea găsită pentru $\frac{\partial u}{\partial x}$.

68. **Funcţiuni definite printr'un sistem de ecuaţii.** Să considerăm sistemul de n ecuaţii cu $n+p$ variabile

$$(2) \qquad F_i(x_1, x_2, ..., x_p, u_1, u_2, ..., u_n) = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

şi să presupunem că următoarele condiţiuni sunt satisfăcute:

1°. *Funcţiunile* $F_1, F_2, ..., F_n$ *se anulează într'un punct* $M(a_1, a_2, ..., a, \mu_1 \mu_2, ..., \mu_n)$;

2°. *Aceste funcţiuni sunt continue şi admit derivate parţiale continue în vecinătatea lui* M;

3°. *Determinantul funcţional*

$$J = \frac{D(F_1, F_2, ..., F_n)}{D(u_1, u_2, ..., u_n)}$$

este diferit de zero în punctul M.

In aceste condiţiuni există un sistem, şi numai unul, de n *funcţiuni* $u_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_p)$, $k = 1, 2, ..., n$, *de variabilele independente* $x_1, x_2, ..., x_p$, *funcţiuni care sunt continue, derivabile şi care satisfac identic ecuaţiilor* (2) *în vecinătatea punctului* $m(x_1, x_2, ..., x_p)$; *funcţiunile* $u_1, u_2, ..., u_n$ *iau respectiv valorile* $\mu_1, \mu_2, ..., \mu$ *în punctul* m.

Am demonstrat [67] această teoremă în cazul $n = 1$. Pentru a o demonstra sub această formă generală, să presupunem că este adevărată pentru $n-1$ ecuaţii şi să dovedim că subzistă şi pentru n ecuaţii.

In adevăr, jacobianul J desvoltat după elementele primei coloane, ne dă

$$J = J_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + J_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_1} + \ldots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial u_1}$$

unde $J_1, J_2, ..., J$ sunt minorii corespunzători elementelor din prima coloană.

Cum prin ipoteză J nu se anulează în punctul M, a trebui ca cel puţin unul din minorii J_k să nu se anuleze în acest punct; vom presupune că

$$J_1 = \frac{D(F_2, F_3, ..., F_n)}{D(u_2, u_3, ..., u_n)}$$

este *diferit de zero* în punctul M.

Teorema fiind presupusă adevărată pentru $n-1$ ecuaţiuni, urmează că sistemul de $n-1$ ecuaţiuni cu $n+p$ variabile

$$(3)\qquad F_i(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_n)=0 \qquad (i=2, 3, \ldots, n)$$

defineşte un sistem unic de $n-1$ funcţiuni $u_2, u_3, \ldots, u_n$ de $p+1$ variabile independente $x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1$ şi care satisfac în mod identic ecuaţiile (3).

Fie

$$u_i = U_i(x_1, \ldots, x_p, u_1) \qquad (i=2, 3, \ldots, n)$$

aceste funcţiuni. Ele sunt continue şi au derivate parţiale în raport cu $x_1, \ldots, x_p, u_1$ în punctul $(a_1, \ldots, a_p, \mu_1)$; în acest punct vom avea $u_2=\mu_2, u_3=\mu_3, \ldots, u_n=\mu_n$.

Inlocuind variabilele u_i prin funcţiunile U_i în sistemul (3), vom avea în mod identic, în vecinătatea punctului $(a_1, \ldots, a_p, \mu_1)$,

$$(4)\qquad F_i(x_1, \ldots, x_p, u_1, U_2, \ldots, U_n)=0 \qquad (i=2, 3, \ldots, n).$$

Făcând aceeaşi substituţie şi în ecuaţia $F_1(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_n)=0$, obţinem o nouă ecuaţie

$$F_1(x_1, \ldots, x_p, u_1, U_2, \ldots, U_n)=\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1)=0,$$

care rămâne să fie satisfăcută.

Această ecuaţie ne defineşte [67] pe u_1 ca funcţie implicită de $x_1, x_2, \ldots, x_p$; dacă $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}$ este diferit de zero în punctul $a_1, a_2, \ldots, a_p, \mu_1$. Rămâne să calculăm pe $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}$.

Derivând în raport cu u_1 ecuaţia $\Phi=0$, după regula de derivare a funcţiunilor compuse, avem

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}=\frac{\partial F_1}{\partial u_1}+\frac{\partial F_1}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial u_1}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial U_n}\frac{\partial U_n}{\partial u_1}.$$

Ecuaţiile sistemului (4) derivate în raport cu u_1 ne dau

$$0=\frac{\partial F_2}{\partial u_1}+\frac{\partial F_2}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial u_1}+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial U_n}\cdot\frac{\partial U_n}{\partial u_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0=\frac{\partial F_n}{\partial u_1}+\frac{\partial F_n}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial u_1}+\ldots+\frac{\partial F_n}{\partial U_n}\frac{\partial U_n}{\partial u_1}.$$

Inmulţind aceste relaţiuni respectiv cu $J_1, J_2, \ldots, J_n$ şi adunând obţinem

$$J_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = J_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + J_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_1} + \ldots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial u_1} + \left[J_1 \frac{\partial F_1}{\partial U_2} + \ldots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial U_2} \right] \frac{\partial U_2}{\partial u_1}$$

$$+ \ldots + \left[J_1 \frac{\partial F_1}{\partial U_n} + \ldots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial U_n} \right] \frac{\partial U_n}{\partial u_1}.$$

Coeficienţii lui $\frac{\partial U_2}{\partial u_1}$, ..., $\frac{\partial U_n}{\partial u_1}$ sunt nuli, fiindcă se obţin din determinantul J înlocuind elementele din coloana întâi prin elementele unei alte coloane. Rămâne dar

$$J_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = J_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + J_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_1} + \ldots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial u_1} = J$$

deci

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = \frac{J}{J_1}.$$

Cum prin ipoteză determinanţii J şi J_1 sunt diferiţi de zero în punctul $(a_1, \ldots, a_p, \mu_1, \ldots, \mu_n)$, urmează că şi $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}$ este diferit de zero în punctul $(a_1, \ldots, a_p, \mu_1)$. Prin urmare, ecuaţia

$$\Phi(x_1, \ldots, x_p, u_1) = 0$$

defineşte pe u_1 ca funcţie implicită de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Fie

$$u_1 = f_1(x_1, \ldots, x_p)$$

această funcţie, care este definită în vecinătatea punctului $(a_1, \ldots, a_p)$; ea admite derivate în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_p$ şi ia valoarea μ_1 în punctul $(a_1, \ldots, a_p)$. Inlocuind pe u_1 în sistemul (4) prin $f_1(x_1, \ldots, x_p)$ obţinem pentru $u_2, u_3, \ldots, u_n$ nişte funcţiuni de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pe care să le notăm respectiv cu $f_2, f_3, \ldots, f_n$. Funcţiunile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ satisfac la toate condiţiile din enunţul teoremei.

Calculul derivatelor. Am văzut că funcţiunile implicite $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de variabilele $x_1, \ldots, x_p$, definite prin sistemul (2), au derivate parţiale în raport cu aceste variabile. Să indicăm un procedeu de calcul al acestor derivate. Fie de calculat derivatele funcţiunilor $u_1, \ldots, u_n$ în raport cu variabila x_1, spre exemplu.

Derivând în raport cu x_1 ecuaţiile sistemului (2), vom avea

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_1} + \frac{\partial F_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0.$$

Am format astfel un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}$, în care determinantul coeficienţilor necunoscutelor e tocmai

$$J = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \neq 0;$$

deducem deci

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{J_{u_1}^{x_1}}{J}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{J_{u_2}^{x_1}}{J}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_1} = -\frac{J_{u_n}^{x_1}}{J}$$

unde $J_{u_k}^{x_1}$ reprezintă determinantul ce se obţine din J când înlocuim coloana derivatelor în raport cu u_k prin derivatele în raport cu x_1.

69. Derivate şi diferenţiale de ordin superior. Să considerăm o funcţie implicită z definită prin ecuaţia

$$f(x, y, z) = 0.$$

Ne propunem să găsim derivatele parţiale de diferite ordine ale acestei funcţiuni. Am văzut că derivatele de ordinul întâi sunt date de ecuaţiile

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Derivatele de ordinul al doilea se obţin derivând aceste ecuaţii în raport cu x şi y. Astfel derivând prima ecuaţie (5) în raport cu x, avem

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] = 0$$

sau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

de unde valoarea lui $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Derivând aceeaş ecuaţie în raport cu y, obţinem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

La aceeaş relaţie suntem conduşi, dacă derivăm a doua ecuaţie (5) în raport cu x; această ecuaţie derivată însă în raport cu y ne dă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Derivatele de ordinul al treilea şi cele de un ordin superior se vor calcula la fel.

Rezultatele de mai sus se pot regăsi pe o altă cale utilizând propoziția următoare:

Dacă mai multe funcțiuni $u_1, u_2, ..., u_n$ de variabilele independente $x_1, x_2, ..., x_p$ verifică relațiunea

(6) $$f(u_1, u_2, ..., u_n, x_1, x_2, ..., x_p) = 0,$$

atunci diferențiala totală

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x} dx_p,$$

calculată ca și când toate variabilele $u_1, ..., u_n, x_1, ..., x_p$ ar fi variabile independente, este nulă.

In adevăr derivând ecuația (6) în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_p$, avem

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_p} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_p} + \frac{\partial f}{\partial x_p} = 0.$$

Inmulțind aceste p relațiuni respectiv cu $dx_1, dx_2, \ldots, dx$, avem

$$df = 0.$$ C. c. e. d. d.

Obținem o relație între diferențialele de ordinul al doilea dacă aplicăm propoziția de mai sus la relația $df = 0$, considerând pe df ca o funcție de $u_1, \ldots, u_n, du_1, \ldots, du_n, x_1, \ldots, x_p$; și așa mai departe.

Să aplicăm această propoziție la funcția implicită z de variabilele independente x și y definită prin ecuația

$$f(x, y, z) = 0.$$

Vom avea

(7) $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

(8) $$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial z} \partial^2 z = 0, \text{ etc.}$$

căci $d^2x, d^2y, d^3x, \ldots$ sunt nule. Din relația (7) deducem

$$dz = -\frac{f'_x dx + f'_y dy}{f'_z}.$$

Din relația (8), după ce înlocuim pe dz cu expresiunea găsită, obținem o expresie de forma

$$d^2z = A\, dx^2 + 2\, B\, dx\, dy + C\, dy^2$$

A, B, C fiind funcţiuni de x, y, z; şi de acì

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{A} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \mathrm{B} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{C}$$

şi aşa mai departe.

III. — FUNCŢIUNI DEPENDENTE ŞI INDEPENDENTE.

70. Fiind date mai multe funcţiuni de n variabile, zicem că aceste funcţiuni sunt *dependente*, atunci când între aceste funcţiuni există o relaţie în care nu figurează explicit nici una din variabile. In caz contrar funcţiunile sunt zise *independente*.

EXEMPLU. Funcţiunile

$$u = x + y + z \quad , \quad v = xy + yz + zx \quad , \quad w = x^2 + y^2 + z^2$$

sunt dependente, căci între ele avem relaţia

$$u^2 - 2v - w = 0.$$

Fie u_1, u_2, ..., u_n, n funcţiuni, de n variabile independente x_1, x_2, ..., x_n, continue şi admiţând derivate parţiale de primul ordin continue într'un domeniu D. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca aceste funcţiuni să fie dependente este ca jacobianul*

$$\frac{\mathrm{D}(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{1}$$

să fie identic nul în domeniul D.

Condiţia este necesară. Căci dacă între funcţiunile u_1, ..., u_n avem o relaţie

$$\mathrm{F}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

vom avea, luând derivatele parţiale[1] în raport cu x_1, x_2, ..., x_n,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0.$$

Acest sistem linear şi omogen în $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_n}$ având soluţiuni nu toate nule, urmează că determinantul coeficienţilor, adică jacobianul (1) este nul.

[1] Presupunem că F admite derivate parţiale de primul ordin.

Observare. In mod analog se vede că pentru ca n funcţiuni u_1, $u_2, \ldots, u_n$ de $n+p$ variabile independente $x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}$ să fie dependente, este necesar ca toţi determinanţii funcţionali

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda)}$$

unde $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sunt n oarecare din numerele $1, 2, \ldots, n+p$, să fie indentic nuli.

Condiţia este suficientă. Vom face demonstraţia luând, pentru simplificare, trei funcţiuni de trei variabile independente

$$(2) \qquad u=f(x,y,z), \quad v=g(x,y,z), \quad w=h(x,y,z).$$

Prin ipoteză avem

$$(3) \qquad \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=0$$

într'un anumit domeniu şi vrem să dovedim existenţa unei relaţii

$$F(u,v,w)=0.$$

Să presupunem că unul din minorii de ordinul întâi ai determinantului (3) este *diferit de zero*; fie

$$(4) \qquad \frac{D(u,v)}{D(x,y)}\neq 0.$$

Atunci primele două ecuaţiuni ale sistemului (2) ne definesc pe x şi y ca funcţiuni implicite de z, u, v. Să însemnăm aceste funcţiuni cu

$$x=X(z,u,v), \quad y=Y(z,u,v)$$

şi să înlocuim pe x şi y prin aceste expresiuni în ecuaţia a treia a sistemului (2); vom avea

$$w=h(X,Y,z)=H(z,u,v).$$

Să dovedim că funcţiunea H astfel obţinută este independentă de z. Vom arăta, pentru aceea că derivata funcţiei H în raport cu z este identic nulă. Avem

$$(5) \qquad \frac{\partial H}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial h}{\partial z}.$$

Dar cum avem în mod identic

$$u=f(X,Y,z), \quad v=g(X,Y,z),$$

deducem, derivând în raport cu z,

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$0=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial z}$$

sau

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}=0.
\end{aligned}
$$

Eliminând pe $\frac{\partial X}{\partial z}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ între relaţiile (5) şi (6) căpătăm

$$\frac{D(u\ v)}{D(x,y)}\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}.$$

Cum prin ipoteză membrul al doilea este identic nul, rezultă, ţinând seama de (4), că $\frac{\partial H}{\partial z}=0$ şi deci că funcţiunea $H(z,u,v)$ este independentă de z. Avem prin urmare

$$w=H(u,v).$$

Observare. Dacă toţi minorii de ordinul al doilea ai determinantului (3) sunt nuli, atunci se dovedeşte în mod analog că două din funcţiunile u, v, w sunt funcţiuni de a treia.

In general, dacă toţi minorii determinantului (1), până la ordinul $n-r+1$ sunt nuli şi dacă primul minor diferit de zero este de ordinul $n-r$, atunci avem r *relaţiuni distincte* între funcţiunile $u_1, u_2..., u_n$ şi *r dintre aceste funcţiuni se pot exprima ca funcţiuni de celelalte* $n-r$.

Aplicaţie. Să determinăm o funcţiune derivabilă $f(x)$, astfel ca funcţiunile

$$u=f(x+y) \quad , \quad v=f(x)f(y)$$

să fie dependente. Va trebui ca

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} f'(x+y) & f'(x)f(y) \\ f'(x+y) & f(x)f'(y)\end{vmatrix}=0;$$

deci, funcţiunea f fiind presupusă că nu este identică cu o constantă,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(y)}{f(y)}.$$

Această egalitate având loc oricare ar fi x şi y, va trebui ca ambii membri să se reducă la aceeaş constantă a. Vom avea deci

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=a.$$

Cum primul membru este derivata lui $\operatorname{Log} f(x)$ iar membrul al doilea derivata lui ax, vom avea [45],

$$\operatorname{Log} f(x) = ax + C,$$

unde C este o constantă arbitrară. Prin urmare

$$f(x)=e^{ax+C}=A\,e^{ax}$$

A şi a fiind două constante arbitrare.

Relaţia între u şi v se vede imediat că este

$$Au=v.$$

EXERCIȚII.

1. Fie funcțiunea

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y},$$

unde luăm valoarea *principală* pentru arc-tangentă. Să se arate că $f''_{xy} \neq f''_{yx}$ în punctul (0, 0).

R. Derivatele parțiale de primul ordin sunt

$$f'_x(x, y) = 2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - y,$$

$$f'_y(x, y) = x - 2y \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

Deci

$$f'_x(0, y) = -y\,,\quad f'_y(x, 0) = -x$$

așa că $f''_{xy}(0, 0) = -1$ și $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

2. Funcțiunea

$$z = x f(x+y) + y g(x+y),$$

unde f și g sunt funcțiuni arbitrare, satisface la relația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R. Avem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 f'(x+y) + x f''(x+y) + y g''(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x+y) + g'(x+y) + x f''(x+y) + y g''(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 g'(x+y) + x f''(x+y) + y g''(x+y)$$

de unde relația cerută.

3. Fie sistemul

$$u^3 + v^3 + x^3 = a$$
$$u v x = b,$$

care definește pe u și v în funcție de x. Să se determine derivatele lui u și v.

R. Avem

$$u^2 \frac{du}{dx} + v^2 \frac{dv}{dx} + x^2 = 0$$

$$vx \frac{du}{dx} + ux \frac{dv}{dx} + uv = 0\,,$$

de unde $\frac{du}{dx}$ și $\frac{dv}{dx}$.

4. Fie $z = f(x, y)$ o relație care ne definește pe x ca funcție implicită de variabilele independente z și y. Se cere diferențialele de ordinul întâi și al doilea ale funcției x.

R. Avem, cu notațiile lui Monge

(1) $$dz = p\,dx + q\,dy$$

deci

$$dx = \frac{dz - q\,dy}{p}. \tag{2}$$

Pentru a obţine pe d^2x diferenţiem ambii membri ai relaţiei (1) şi, ţinând seama că d^2z şi d^2y sunt nuli, căci z şi y sunt variabile independente, avem

$$0 = r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x.$$

De aci, ţinând seama de (2), deducem

$$d^2x = -\frac{r\,dz^2 + 2\,(ps - qr)\,dz\,dy + (q^2r - 2\,pqs + p^2t)\,dy^2}{p^3}.$$

Rezultă că

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{p}{q};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{r}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y} = \frac{qr - ps}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2\,pqs - p^2t - q^2r}{p^3}.$$

5. Să se determine funcţiunea derivabilă $f(x)$ astfel ca funcţiunile

$$u = f(x+y), \quad v = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)\,f(y)}$$

să fie dependente. Să se determine apoi relaţia ce există între u şi v.

R. Va trebui să avem

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{f'(x+y)}{[1 - f(x)\,f(y)]^2}\begin{vmatrix} 1 & f'(x)\,[1 + f^2(y)] \\ 1 & f'(y)\,[1 + f^2(x)] \end{vmatrix} = 0$$

adică, f constant sau

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = \frac{f'(y)}{1 + f^2(y)}$$

oricare ar fi x şi y. Prin urmare

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = a,$$

de unde deducem

$$\operatorname{arc\,tg} f(x) = ax + b$$

a şi b fiind două constante arbitrare. Funcţiunea căutată este deci

$$f(x) = \operatorname{tg}(ax + b)$$

iar relaţia între u şi v este

$$v = \frac{u + \operatorname{tg} b}{1 - u \operatorname{tg} b}.$$

CAPITOLUL VII.

EXTREME. — SCHIMBĂRI DE VARIABILE.

I. — EXTREMELE FUNCŢIUNILOR DE MAI MULTE VARIABILE.

71. Extremele funcţiunilor de două variabile. Fie $f(x, y)$ o funcţie continuă şi derivabilă într'un domeniu D. Zicem că această funcţie este *extremă* (adică are un *maxim* sau un *minim*) în punctul (a, b) din domeniul D, atunci când putem determina un număr η astfel ca diferenţa

$$\Delta = f(a+h,\ b+k) - f(a, b)$$

să păstreze *acelaş semn* pentru toate valorile lui h şi k pentru care avem

$$\sqrt{h^2+k^2} < \eta. \tag{1}$$

In cazul când semnul lui Δ rămâne negativ, funcţiunea $f(x, y)$ are un *maxim* în punctul (a, b); iar când Δ rămâne pozitiv, $f(x, y)$ are un *minim* în punctul (a, b).

Putem, în particular, satisface condiţia (1) luând $k = 0$ şi $|h| < \eta$; diferenţa

$$f(a+h, b) - f(a, b)$$

păstrând un semn constant pentru toate valorile lui $|h| < \eta$, urmează că funcţiunea de o singură variabilă $f(x, b)$ este extremă în punctul $x = a$ şi deci $f'_x(a, b) = 0$.

Se vede tot astfel, luând $h = 0$ şi $|k| < \eta$, că $f'_y(a, b) = 0$.

Prin urmare: singurele puncte în care funcţiunea $f(x, y)$ *poate* fi extremă, sunt punctele ale căror coordonate verifică sistemul

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Rezolvând acest sistem de două ecuaţii cu două necunoscute x şi y, găsim un număr oarecare de soluţii; fie $x = a$ şi $y = b$ una din aceste soluţii. Să cercetăm când funcţiunea $f(x, y)$ este extremă în punctul (a, b).

Vom presupune că derivatele de ordinul al doilea, ale funcţiunii $f(x, y)$, există şi sunt continue în vecinătatea punctului (a, b). Formula lui Taylor [65] corespunzătoare lui $n = 1$ ne dă

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\Big[h^2 f''_{x^2}(a+\theta h, b+\theta k)$$
$$+ 2hk f''_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2 f''_{y^2}(a+\theta h, b+\theta k)\Big]$$

cu $0 < \theta < 1$.

Dar, în virtutea continuităţii derivatelor de ordinul al doilea putem scrie

$$f''_{x^2}(a+\theta h, b+\theta k) = f''_{x^2}(a, b) + \varepsilon_1,$$
$$f''_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) = f''_{xy}(a, b) + \varepsilon_2,$$
$$f''_{y^2}(a+\theta h, b+\theta k) = f''_{y^2}(a, b) + \varepsilon_3,$$

unde ε_1, ε_2, ε_3 sunt cantităţi care tind către *zero*, când h şi k tind simultan către zero. Aşa că, dacă însemnăm

(3) $$A = f''_{x^2}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{y^2}(a, b),$$

formula precedentă a lui Taylor va deveni

$$\Delta = \frac{1}{2}\Big[A h^2 + 2 B h k + C k^2 \Big] + \frac{1}{2}\Big[\varepsilon_1 h^2 + 2 \varepsilon_2 hk + \varepsilon_3 k \Big].$$

Pentru a face mai clară discuţia în ceea ce priveşte semnul lui Δ, vom pune

$$h = r\cos\varphi, \quad k = r\sin\varphi$$

şi vom avea toate valorile lui h şi k din neegalitatea (1), dacă luăm pentru r şi φ toate valorile care satisfac la neegalităţile

$$0 \leqq r < \eta, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Avem astfel

(5) $$\Delta = \frac{r^2}{2}\Big(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi \Big) + \frac{r^2\sigma}{2},$$

unde

$$\sigma = \varepsilon_1\cos^2\varphi + 2\varepsilon_2\cos\varphi\sin\varphi + \varepsilon_3\sin^2\varphi.$$

Deci σ tinde către zero când r tinde către zero, căci ε_1, ε_2, ε_3 tind către zero, când h şi k tind către zero. Semnul lui Δ depinde de semnul trinomului

(6) $$A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi.$$

Distingem următoarele trei cazuri:

1⁰. $AC - B^2 > 0$. In acest caz A şi C sunt diferiţi de zero, aşa că trimonul (6) se va putea scrie sub forma

$$(7) \qquad \frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi}{A}$$

care ne arată că trinomul (6) nu se poate anula și păstrează necontenit semnul lui A. Cum acest trinom este o funcție continuă de φ, valoarea sa absolută va admite un *minim* $m > 0$. Cum putem determina un număr η destul de mic astfel ca pentru $r < \eta$ să avem $|\sigma| < m$, rezultă că expresia (5) va păstra semnul lui A pentru r și φ care satisfac la neegalitățile (4).

Prin urmare, dacă $A > 0$, vom avea

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a, b) > 0;$$

deci funcția $f(x, y)$ are un minim în punctul (a, b); iar dacă $A < 0$ vom avea

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a, b) < 0;$$

deci funcția are un maxim în punctul (a, b).

2⁰. $AC - B^2 < 0$. Să presupunem mai întâi $A \neq 0$. Trinomul (6) pus sub forma (7) ne arată că el schimbă de semn când φ variază, căci, pentru, $\sin\varphi = 0$, are semnul lui A, iar pentru $\operatorname{cotg}\varphi = -\frac{A}{B}$ are semnul lui $-A$. Prin urmare oricât de mic ar fi η, Δ nu poate păstra un semn constant, pentru toate valorile lui r și φ care satisfac la neegalitățile (4). Deci $f(x, y)$ nu are în punctul (a, b) nici maxim nici minim.

Dacă $A = 0$ și $C \neq 0$, concluzia este aceeaș, căci nici în acest caz trinomul (6), care se mai poate scrie

$$\frac{(C\sin\varphi + B\cos\varphi)^2 - B^2\cos^2\varphi}{C}$$

nu păstrează un semn constant pentru (4).

Să presupunem în fine $A = C = 0$, deci B diferit de zero. Cum trinomul (6) se reduce la $2B\cos\varphi\sin\varphi$, care schimbă de semn, vedem că nici în acest caz $f(x, y)$ nu poate fi extremă în punctul (a, b).

3⁰. $AC - B^2 = 0$. Dacă A este diferit de zero, trinomul (6) se mai poate scrie

$$\frac{1}{A}\left(A\cos\varphi + B\sin\varphi\right)^2;$$

se vede astfel că trinomul (6) păstrează un semn constant, semnul lui A, *dar se anulează pentru o anumită valoare a lui* φ. Pentru valoarea lui φ care anulează pe (6) semnul lui Δ este dat de σ și cum, numai cu ajutorul consideraţiilor precedente, nu putem determina semnul lui σ şi variaţia acestui semn, nu putem nici hotărî dacă la punctul (a, b) corespunde sau nu un maxim sau minim pentru funcţiunea $f(x, y)$.

Dacă $A = 0$ urmează că şi $B = 0$, iar trinomul (6) se reduce la $C \sin^2 \varphi$, care păstrează un semn constant, dar se anulează dentru $\varphi = 0$; deci nici în acest caz nu putem afirma că $f(x, y)$ are sau nu un extrem în punctul (a, b).

Şi în cazul $A = B = C = 0$ avem nevoe de semnul lui σ.

Pentru ca să putem decide dar, când avem $AC - B^2 = 0$, dacă punctul (a, b) este sau nu un maxim sau minim al funcţiei $f(x, y)$, vom lua un număr mai mare de termeni în formula lui Taylor; dar cum discuţia generală este foarte delicată nu-şi are locul în acest curs.

In rezumat, dacă $x = a$ şi $y = b$ sunt o soluţie a sistemului (2) şi dacă A, B, C au valorile (3),

1°. dacă $AC - B^2 > 0$ avem $\left\{\begin{array}{l} \textit{maxim} \text{ când } A < 0, \\ \textit{minim} \text{ când } A > 0; \end{array}\right.$

2°. dacă $AC - B^2 < 0$ n'avem *nici maxim, nici minim*;

3°. dacă $AC - B^2 = 0$ avem *îndoială*; o discuţie specială este necesară.

EXEMPLU. Fie

$$f(x, y) = ax^2 + 2xy + ay^2 + 1.$$

Vom avea

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(ax + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(ay + x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a.$$

In acest caz sistemul (2) va avea ca soluţie $x = 0$, $y = 0$, dacă $a^2 - 1 \neq 0$. $AC - B^2 = a^2 - 1$. Prin urmare $f(x, y)$ va fi maximă dacă $a > 1$; pentru $-1 < a < +1$ nu va fi nici maximă nici minimă.

Dacă $a^2 - 1 = 0$, a este $+1$ sau -1. Pentru $a = +1$ avem

$$f(x, y) = (x + y)^2 + 1$$

şi vedem că în punctul (0,0) $f(x, y)$ are cea mai mică valoare pe care poate să o ia, dar pentru toate punctele $x + y = 0$ are aceeaş valoare; deci în punctul (0, 0) $f(x, y)$ *nu* va fi extremă în acest caz. Tot astfel vedem că nici în cazul $a = -1$ punctul (0,0) nu corespunde unui extrem al funcţiei considerate.

72. **Extremele funcţiunilor de mai multe variabile.** Pentru fixarea ideilor, vom considera cazul a trei variabile. Zicem că funcţiunea $f(x, y, z)$ are un *extrem* în punctul a, b, c atunci când putem determina un număr η astfel ca diferenţa

$$\Delta = f(a + h, b + k, c + l) - f(a, b, c)$$

să păstreze un semn constant pentru *toate* valorile lui h, k, l care satisfac la neegalitatea

$$\sqrt{h^2+k^2+l^2}<\eta.$$

In acest caz și funcțiunile de o singură variabilă

$$f(x,b,c), \quad f(a,y,c), \quad f(a,b,z)$$

vor fi extreme, prima pentru $x=a$, a doua pentru $y=b$, a treia pentru $z=c$, așa că va trebui să avem

$$(8) \qquad f'_x=0, \quad f'_y=0, \quad f'_z=0$$

pentru $x=a$, $y=b$, $z=c$.

Dacă aceste condițiuni sunt satisfăcute, formula lui Taylor, în ipoteza continuității tuturor derivatelor de ordinul al doilea ale funcțiunei $f(x,y,z)$, ne permite să scriem

$$f(a+h,b+k,c+l)-f(a,b,c)=Q+\sigma,$$

unde am reprezentat prin Q valoarea expresiunii

$$\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)}f(x,y,z)$$

în punctul $x=a$, $y=b$, $z=c$, iar prin σ un termen complimentar, care tinde către zero, când h, k, l tind simultan către zero.

Dacă facem

$$x=r\cos\theta\sin\varphi, \quad y=r\sin\theta\sin\varphi, \quad z=r\cos\varphi$$

unde

$$(9) \qquad 0\leqq r<\eta, \quad 0\leqq\theta\leqq 2\pi, \quad 0\leqq\varphi\leqq\pi$$

și luăm pe r ca infinit mic principal, vedem că Q este un infinit mic de ordinul al doilea, iar σ este infinit de mic față de Q. Așa că dacă Q păstrează un semn constant pentru toate valorile (9) ale lui r, θ, φ, neputându-se anula decât pentru $r=0$, funcțiunea $f(x,y,z)$ va fi extremă în punctul (a,b,c). Dacă acest semn este negativ, $f(x,y,z)$ este maximă în punctul (a,b,c); dacă este pozitiv, funcțiunea este minimă în acel punct.

Observare. Condiția necesară pentru ca o funcție f de mai multe variabile să fie extremă într'un punct, este ca în acel punct să avem $df=0$.

APLICAȚIE. Să se găsească un punct astfel ca suma patratelor distanțelor la n puncte fixe, să fie minimă.

Fie (x,y,z) coordonatele punctului căutat și (x_i,y_i,z_i), $i=1,2,\dots,n$ cele n puncte date. Axele fiind dreptunghiulare suntem conduși la căutarea minimului expresiei

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{i=n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2].$$

Sistemul corespunzător sistemului (8) este

$$\sum_{i=1}^{i=n}(x-x_i)=0\,,\quad \sum_{i=1}^{i=n}(y-y_i)=0\,,\quad \sum_{i=1}^{i=n}(z-z_i)=0;$$

deci punctul în care expresia (10) poate fi extremă este

$$(11)\qquad x=\frac{\Sigma x_i}{n}\,,\quad y=\frac{\Sigma y_i}{n}\,,\quad z=\frac{\Sigma z_i}{n}\,,$$

adică centrul de greutate al sistemului de puncte dat.

Expresiunea (10) este minimă în punctul (11) căci

$$Q=h^2+k^2+l^2>0.$$

73. Extremele funcţiunilor implicite. Fie y o funcţie de x definită de ecuaţia

$$f(x,y)=0.$$

Ne propunem a căuta pentru ce valori ale lui x funcţiunea y poate fi extremă. Va trebui să determinăm valorile lui x pentru care $y'=0$. Dar avem

$$(12)\qquad f'_x(x,y)+y'f'_y(x,y)=0$$

aşa că la valorile lui x, care anulează pe y', corespund pentru y valori care vor satisface sistemului

$$(13)\qquad f(x,y)=0\quad ,\quad f'_x(x,y)=0.$$

Rezolvarea acestui sistem ne dă valorile lui x pentru care y poate fi un extrem şi în acelaş timp ne dă şi eventualele valori extreme ale lui y.

Fie $x=a$ şi $y=b$ o soluţie a sistemului (13); pentru a putea afirma că pentru $x=a$ funcţiunea y are un extrem şi a determina natura acestui extrem, trebue să ne convingem că y' se anulează pentru $x=a$. Dacă pentru $x=a$ şi $y=b$ avem $f'_y \neq 0$, atunci rezultă din (12) că y' este nul pentru $x=a$. Relaţia (12), derivată în raport cu x, ne dă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cancel{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'}+\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2}+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0$$

şi cum, pentru $x=a$, y' este nul, rezultă că valoarea lui y'', pentru $x=a$, va fi dată de

$$y''=\left[-\frac{f''_{x^2}}{f'_y}\right]_{x=a,\ y=b}.$$

Dacă însă f'_y se anulează în punctul (a,b) nu mai putem afirma că y' se anulează pentru $x=a$ şi o discuţie specială este necesară.

In cazul unei funcţiuni implicite de mai multe variabile, determinarea extremelor se face în mod analog. Pentru funcţiunea u de variabilele x, y, z definită de ecuaţia

$$f(x, y, z, u) = 0,$$

se vede că punctele, în care u ar putea fi extrem, se obţin rezolvând sistemul

$$f = 0, \quad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0.$$

EXEMPLU. Să determinăm extremele funcţiunii y definită de ecuaţia

$$y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0. \tag{14}$$

Sistemul format de ecuaţia (14) şi de ecuaţia $f'_x = 0$, adică de

$$xy + 1 = 0, \tag{15}$$

are următoarele două soluţiuni

$$(a) \qquad x = 1 \quad \text{şi} \quad y = -1$$

$$(b) \qquad x = -\frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad y = 2.$$

Pentru soluţia (a) avem $f'_y = 0$. Putem vedea uşor pentru $x = 1$ că y nu este nici maxim nici minim. In adevăr din (14) deducem

$$y = -x^2 \pm (x - 1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$$

deci

$$y'(1) = -2 \pm \sqrt{6} \neq 0.$$

Pentru soluţia (b) a sistemului (14) şi (15) $f'_y \neq 0$, deci y' se anulează pentru $x = -\frac{1}{2}$. Cum valoarea lui y'' pentru $x = -\frac{1}{2}$ este dată de

$$\left[\frac{-2y}{y + x^2}\right]_{x = -\frac{1}{2},\ y = 2}$$

vedem că $y''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$; deci pentru $x = -\frac{1}{2}$, y' este maxim, valoarea acestui maxim fiind 2.

74. Extreme legate. Să ne propunem a găsi punctele în care funcţiunea

$$\omega = f(x, y, u, v)$$

ar putea fi extremă, variabilele x, y, u, v fiind *legate* prin două relaţiuni

$$g(x, y, u, v) = 0, \quad h(x, y, u, v) = 0. \tag{16}$$

Extremele lui ω se numesc, în acest caz *extreme legate* sau *condiţionate.*

Presupunem că condiţiunile, cari ne permit a afirma că ecuaţiile (16) definesc pe u şi v ca funcţiuni de x şi y, sunt satisfăcute şi deci că într'un anumit domeniu, în care căutăm extremele lui ω, avem

$$J = \frac{D(g, h)}{D(u, v)} \neq 0.$$

Putem deci considerà pe ω ca o funcţie numai de variabilele independente x şi y, de care depinde direct şi prin intermediul variabilelor u şi v. Avem

$$(17) \qquad d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

du şi dv fiind legate prin relaţiunile

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = 0, \\ &\frac{\partial h}{\partial x} \partial x + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv = 0. \end{aligned} \right.$$

Din aceste două relaţiuni vom scoate valorile lui du şi dv, ceeace este posibil, căci avem $J \neq 0$ şi înlocuind în (17) obţinem pentru $d\omega$ o expresie de forma $A\,dx + B\,dy$. Pentru ca ω să prezinte un extrem va trebui să avem $d\omega = 0$, deci $A = 0$, $B = 0$.

Putem face eliminarea lui du şi dv între (17) şi (18) şi prin metoda multiplicatorilor (L a g r a n g e). Să înmulţim relaţiile (18) respectiv prin factorii nedeterminaţi λ şi μ şi apoi să le adunăm cu relaţia (17). Avem astfel

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y}\right) dy +$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} + \mu \frac{\partial h}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \lambda \frac{\partial g}{\partial v} + \mu \frac{\partial h}{\partial v}\right) dv.$$

Vom determina pe λ şi μ astfel ca

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} + \mu \frac{\partial h}{\partial u} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial v} + \lambda \frac{\partial g}{\partial v} + \mu \frac{\partial h}{\partial v} = 0 \end{aligned} \right.$$

deci

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y}\right) dy$$

şi cum x şi y sunt singurele variabile independente de care depinde ω, ω nu va putea prezenta un extrem decât dacă

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ecuaţiile (19) şi (20) împreună cu (16) determină pe λ, μ şi pe x, y, u, v care pot corespunde la un maxim sau minim al funcţiunei ω.

Mai general, dacă ω este o funcţie de n variabile

$$\omega = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$ fiind *legate* între ele prin p relaţiuni

$$(21) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_p = 0,$$

vedem, procedând ca mai sus, că valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pentru care funcţiunea ω poate avea extreme, se obţin în felul următor: considerăm funcţiunea auxiliară

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_p \varphi_p$$

de n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cantităţile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ fiind considerate ca nişte constante şi scriem condiţiile ca funcţia F să fie extremă, adică

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Aceste n ecuaţiuni, împreună cu ecuaţiile (21) formează un sistem de $n+p$ ecuaţii cu $n+p$ necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, care ne dă valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ căutate.

APLICAŢIE. *Axele unei secţiuni centrale într'o cuadrică.* Vom determina axele secţiunei prin planul central

$$(g) \qquad lx + my + nz = 0$$

făcută în cuadrica cu centrul în origine

$$(h) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 1 = 0$$

ţinând seama că jumătăţile acestor axe reprezintă extremele distanţei de la origine la un punct al secţiunei. Vom căuta deci extremele expresiunei

$$(22) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

x, y, z fiind legate prin relaţiile (h) şi (g); valorile extreme ale lui r vor fi jumătăţile axelor căutate. Rezultă din cele văzute, că ecuaţiunile

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2x + \lambda l + 2\mu(Ax + Ez + Fy) = 0 \\ & 2y + \lambda m + 2\mu(By + Dz + Fx) = 0 \\ & 2z + \lambda n + 2\mu(Cz + Dy + Ex) = 0 \end{aligned} \right.$$

asociate cu ecuaţiile (g) şi (h) ne vor da pe x, y, z care corespund la extremele lui r. Dacă adăugăm la aceste 5 ecuaţiuni, relaţia (22) şi facem eliminarea lui x, y, z, λ, μ între aceste 6 ecuaţiuni, obţinem valorile jumătăţilor axelor căutate.

Pentru a face această eliminare să înmulţim prima relaţie (23) prin x, a doua prin y, a treia prin z şi apoi să le adunăm. Obţinem astfel ţinând seama de (g), (h) şi (22)

$$\mu = r^2.$$

Inlocuind pe μ prin valoarea r^2 în (23) suntem conduşi la sistemul, linear şi omogen în x, y, z, λ

$$
\begin{aligned}
&x(1+Ar^2)+yFr^2 \quad +zEr^2 \quad +\tfrac{1}{2}\lambda l=0\\
&xFr^2 \quad +y(1+Br^2)+zDr^2 \quad +\tfrac{1}{2}\lambda m=0\\
&xEr^2 \quad +yDr^2 \quad +z(1+Cr^2)+\tfrac{1}{2}\lambda n=0\\
&xl \quad +ym \quad +zn \quad =0
\end{aligned}
$$

Astfel că eliminarea lui x, y, z, λ ne conduce la ecuaţia

$$
\begin{vmatrix}
1+Ar^2 & Fr^2 & Er^2 & l\\
Fr^2 & 1+Br^2 & Dr^2 & m\\
Er^2 & Dr^2 & 1+Cr^2 & n\\
l & m & n & 0
\end{vmatrix}=0,
$$

care este de gradul al doilea în r^2 şi ale cărei rădăcini sunt patratele jumătăţilor axelor secţiunei.

II. — SCHIMBAREA VARIABILELOR.

75. In multe chestiuni de analiză, unde intervin funcţiuni de una sau mai multe variabile şi derivatele lor, suntem conduşi a înlocui acele variabile prin alte variabile, legate de cele dintâi prin anumite relaţiuni. Derivatele funcţiunilor în raport cu noile variabile se calculează cu ajutorul formulelor generale de derivare stabilite.

76. Funcţiuni de o variabilă independentă. 1⁰. SCHIMBAREA NUMAI DE VARIABILĂ. Cazul cel mai simplu de schimbare de variabilă ce se poate prezenta, este acela al unei funcţiuni

$$y=f(x) \tag{1}$$

unde se face schimbarea

$$x=g(t). \tag{2}$$

Va trebui să exprimăm derivatele lui y în raport cu x, în funcţie de noua variabilă t. Expresia lui y în funcţie de t este

$$y=f[g(t)];$$

deci, după regula de derivare a unei funcţii de funcţie, avem

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot g'(t)$$

de unde scoatem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{g'(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}$$

Prin urmare: *pentru a avea derivata lui y în raport cu x, exprimată în funcție de t, vom lua derivata lui y în raport cu t și o vom împărți prin derivata lui x în raport cu t.*

Pentru a obține pe $\frac{d^2y}{dx^2}$ în funcție de t, vom aplica regula precedentă pentru derivata funcțiunii $\frac{dy}{dx}$. Avem astfel

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)}{x'}=\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}.\text{(1)}$$

In mod analog

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{y'''x'^2-3y''x'x''+3y'x''^2-y'x'x'''}{x'^5}$$

și așa mai departe, calculele făcându-se din aproape în aproape prin aplicarea formulei

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]}{x'}.$$

OBSERVARE. Dacă notăm

$$f[g(t)]=h(t)$$

curba (1) va fi reprezentată parametric prin ecuațiile

$$x=g(t),\quad y=h(t)$$

Formulele precedente ne permit a exprima pe $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,... cu ajutorul derivatelor funcțiunilor $g(t)$ și $h(t)$; avem astfel

$$\frac{dy}{dx}=\frac{h'(t)}{g'(t)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g'(t)h''(t)-h'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3},\ldots$$

Putem da altă formă formulelor precedente utilizând notațiunea diferențială. In adevăr dacă notăm cu $y', y'', \ldots$ derivatele succesive ale lui y în raport cu x și cu $dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots$ diferențialele succesive ale lui x și y, luate în raport cu variabila t, avem

$$y'=\frac{dy}{dx}.$$

Prin urmare: pentru a găsi derivata unei funcțiuni y în raport cu funcțiunea x, facem raportul între diferențiala lui y și diferențiala lui x.

Aplicând această regulă la funcțiunile y', y'', ..., avem succesiv

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dx\,d^2y-d^2x\,dy}{dx^3}$$

(1) Derivatele marcate prin accente sunt în raport cu t.

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{d^3y\,dx^2-3\,d^2y\,dx\,d^2x+3\,dy\,(d^2x)^2-dy\,dx\,d^3x}{dx^5}$$

. . . .

Trecerea de la o derivată la următoarea se face prin aplicarea formulei

$$y^{(n)}=\frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

EXEMPLU. Să considerăm expresia

$$\text{(3)} \qquad E=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

unde y' și y'' sunt derivatele de ordinul întâi și al doilea ale lui y în raport cu x. Să căutăm ce devine această expresie când luăm ca variabilă pe t, t fiind legat de x prin relația (2). Vom avea

$$E=\frac{\left[1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right]^3}{\left[\frac{y''x'-x''y'}{x'^3}\right]^2}=\frac{(x'^2+y'^2)^3}{(y''x'-x''y')^2}.\ \text{(1)}$$

Aceeaș expresie devine, cu notațiunea diferențială,

$$\frac{(dx^2+dy^2)^3}{(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}.$$

2°. Schimbarea de funcție și de variabilă. Intre x și y avem o relație de forma

$$\text{(4)} \qquad f(x,y)=0$$

care ne definește pe y în funcție de variabila x. Dacă facem schimbarea

$$\text{(5)} \qquad x=g(t,z), \quad y=h(t,z)$$

la relația (4) corespunde o relație între z și t care ne definește pe z în funcție de t. Ne propunem a exprima derivatele lui y în raport cu x cu ajutorul lui t, z și a derivatelor lui z în raport cu t. Această chestiune se reduce la precedenta, căci în formulele (5) putem considera pe z ca funcție de t, așa că x și y pot fi socotite ca funcțiuni compuse de noua variabilă independentă t. Avem deci

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dt}}$$

(1) Derivatele însemnate prin accente sunt în raport cu t.

apoi

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\left[\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+\dots\right]-\left[\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right]\left[\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+\dots\right]}{\left(\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)^3}$$

şi aşa mai departe.

Derivata de ordinul n, $\frac{d^ny}{dx^n}$, se va exprima cu ajutorul lui t, z şi a derivatelor $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, ..., $\frac{d^nz}{dt^n}$.

Chestiunea se poate trata şi cu ajutorul diferenţialelor.

EXEMPLU. Să reluăm expresiunea (3) şi să facem schimbarea

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

θ fiind variabila independentă. Avem, însemnând prin accente derivatele în rapot cu θ,

$$x'=r'\cos\theta-r\sin\theta \qquad y'=r'\sin\theta+r\cos\theta$$

$$x''=r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta \qquad y''=r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta$$

de unde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''x'-y'x''}{x'^3}=\frac{-rr''+2r'^2+r^2}{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^3}.$$

Aşa că

$$E=\frac{(r^2+r'^2)^3}{(r^2+2r'^2-rr'')^2}.$$

77. **Funcţiuni de mai multe variabile.** 1°. SCHIMBAREA NUMAI DE VARIABILE. Vom considera pentru uşurarea expresiunii o funcţiune $z=f(x,y)$ de două variabile independendente x şi y. Să facem schimbarea

$$(6)\qquad \begin{cases} x=g(u,v)\\ y=h(u,v)\end{cases}$$

luând pe u şi v ca noi variabile independente, funcţiunile g şi h fiind presupuse astfel ca sistemul (6) să definească pe u şi v în funcţie de x şi y. Presupunem deci

$$\frac{D(g,h)}{D(u,v)}\neq 0.$$

Ne propunem să exprimăm derivatele lui z în raport cu x şi y cu ajutorul lui u, v şi a derivatelor parţiale ale lui z luate în raport cu u şi v. z este o funcţie de u şi v prin intermediul lui x şi y, aşa că avem, aplicând formula de derivare a funcţiunilor compuse,

$$
(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.
\end{aligned}\right.
$$

Din acest sistem putem scoate valorile lui $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$, de oarece am presupus că determinantul sistemului (7) e diferit de zero. Obţinem astfel, pentru derivatele de primul ordin formulele

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= C\frac{\partial z}{\partial u} + D\frac{\partial z}{\partial v}
\end{aligned}
$$

unde am notat prin A, B, C, D nişte funcţiuni cunoscute de u şi v.

Derivatele de ordinul al doilea şi următoarele se calculează din aproape în aproape prin aceleaşi formule, căci operaţiile $\frac{\partial}{\partial x}$ şi $\frac{\partial}{\partial y}$ au ca transformate în u şi v respectiv operaţiile

$$
A\frac{\partial}{\partial u} + B\frac{\partial}{\partial v}, \quad C\frac{\partial}{\partial u} + D\frac{\partial}{\partial v}.
$$

Să calculăm în particular pe $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Avem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \left(A\frac{\partial}{\partial u} + B\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\
&= A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\
&\quad + B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + B\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\right)
\end{aligned}
$$

EXEMPLU. Să se caute ce devine expresia

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
$$

când luăm ca noi variabile pe u şi v

$$
x = u\cos v, \quad y = u\sin v.
$$

Vom urma metoda generală indicată. Formulele (7) devin

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \cos v\frac{\partial z}{\partial x} + \sin v\frac{\partial z}{\partial y}\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= -u\sin v\frac{\partial z}{\partial x} + u\cos v\frac{\partial z}{\partial u}
\end{aligned}
$$

de unde scoatem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos v\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sin v\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial z}{\partial v};$$

deci, în acest caz, $A=\cos v$, $B=-\frac{\sin v}{u}$, $C=\sin v$, $D=\frac{\cos v}{u}$.

Avem apoi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos v\frac{\partial}{\partial u}\left(\cos v\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\cos v\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=\cos^2 v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\sin^2 v}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\sin 2v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\sin 2v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\sin^2 v}{u}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Tot astfel

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin^2 v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\cos^2 v}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\sin 2v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\sin 2v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\cos^2 v}{u}\frac{\partial z}{\partial u}$$

De unde, în fine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

2°. Schimbare de funcţie şi de variabile. Ecuaţia

$$F(x, y, z)=0 \tag{8}$$

defineşte pe z în funcţie de variabilele x şi y. Să facem schimbarea

$$x=g(u,v,w),\quad y=h(u,v,w),\quad z=k(u,v,w). \tag{9}$$

La ecuaţia (8) corespunde o relaţie între u, v, w care ne defineşte pe w în funcţie de u şi v. Ne propunem să arătăm cum putem exprima derivatele parţiale ale lui z în raport cu x şi y cu ajutorul lui u, v, w şi a derivatelor lui w în raport cu noile variabile independente u şi v.

Mai întâi vom considera pe z ca funcţie de u şi v prin intermediul lui x şi y; deci

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Dar din formulele (9)

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial k}{\partial u}+\frac{\partial k}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},\quad \frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}$$

aşa că

$$\frac{\partial k}{\partial u}+\frac{\partial k}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}=\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

In mod analog găsim

$$\frac{\partial k}{\partial v}+\frac{\partial k}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Din aceste două ecuaţiuni scoatem valorile lui $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Pentru calcularea derivatelor următoare se procedează ca în cazul precedent.

EXEMPLU. Să particularizăm ecuaţiile luând

$$x = w \sin u \cos v, \quad y = w \sin u \sin v, \quad z = w \cos u.$$

Vom avea

$$-w \sin u + \cos u \frac{\partial w}{\partial u} = \left(w \cos u \cos v + \sin u \cos v \frac{\partial w}{\partial u}\right) \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+ \left(w \cos u \sin v + \sin u \sin v \frac{\partial w}{\partial u}\right) \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\cos u \frac{\partial w}{\partial v} = \left(-w \sin u \sin v + \sin u \cos v \frac{\partial w}{\partial v}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(w \sin u \cos v + \sin u \sin v \frac{\partial w}{\partial v}\right) \frac{\partial z}{\partial y}$$

de unde scoatem expresiile lui $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$.

78. **Transformările curbelor plane.** In legătură cu schimbările de variabile vom considera şi transformările curbelor plane.

1⁰. TRANSFORMĂRI PUNCTUALE. Formulele

$$(10) \qquad \begin{cases} X = f(x, y) \\ Y = g(x, y) \end{cases}$$

fac să corespundă unui punct $m(x, y)$ punctul $M(X, Y)$. Zicem că aceste formule definesc o transformare punctuală.

Când punctul m descrie o curbă c, punctul M va descrie o curbă C, care este *transformata*, prin formulele (10), a curbei c.

Fie dx, dy creşterile corespunzătoare lui x şi y pentru o deplasare foarte mică a punctului m pe curba c şi dX, dY creşterile ce rezultă pentru X şi Y. Tangenta în m la curba c are ca coeficient unghiular

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

iar tangenta în punctul M la curba C are ca coeficient unghiular

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{g'_x(x, y)\,dx + g'_y(x, y)\,dy}{f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy} = \frac{g'_x + g'_y y'}{f'_x + f'_y y'}.$$

Din această expresie a lui Y' rezultă că fiind dată o transformare (10), direcţiunea tangentei în punctul $M(X, Y)$ al curbei C nu depinde de cât de x, y şi y', adică de punctul m şi de tangenta în acest punct la curba c. Prin urmare, dacă o altă curbă c_1 este *tangentă* în m la curba c, atunci şi transformata sa C_1 va fi tangentă în M la curba C.

2°. TRANSFORMĂRI DE CONTACT. Două curbe tangente se pot transforma în alte două curbe tangente cu ajutorul unor transformări mai generale de cât cele punctuale. Să considerăm formulele

$$(11) \qquad X = f(x, y, y'), \quad Y = g(x, y, y')$$

unde x, y sunt coordonatele unui punct m de pe o curbă c, iar y' coeficientul unghiular al tangentei în m la curba c. Când punctul m descrie curba c, punctul $M(X, Y)$ descrie transformata C. Să determinăm tangenta în punctul M la curba C.

Coeficientul unghiular Y' al acestei tangente va fi

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial y'} y''}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''}.$$

Vedem că, în acest caz, Y' depinde de x, y, y', y''. Două curbe c și c_1 tangente în m se vor transforma în două curbe tangente în M: *a*) dacă y'' este *acelaș* în punctul m pentru ambele curbe c și c_1; *b*) dacă, y'' nefiind acelaș, Y' *nu depinde de* y'', adică dacă avem

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y'}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y'}}.$$

Când funcțiunile $f(x, y, y')$ și $g(x, y, y')$ sastisfac la această condițiune, zicem că transformarea (11) este o *transformare de contact*.

EXEMPLU. Transformarea

$$X = y', \quad Y = xy' - y$$

numită transformarea lui Legendre, este *de contact*. In adevăr

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{y' + xy'' - y'}{y''} = x,$$

deci Y' nu depinde de y''.

EXERCIȚII.

1. Să se găsească extremele funcțiunii

$$f(x, y) = x^4 + x^2 y + y^2.$$

R. Sistemul

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xy, \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y$$

are ca soluție unică $x = 0$, $y = 0$. Suntem în cazul dubios, căci $AC - B^2 = 0$. Cum însă

$$f = \left(\frac{x^2}{2} + y\right)^2 + \frac{3}{4} x^4,$$

vedem că originea corespunde unui *minim*, căci funcţiunea f este pozitivă şi nu se anulează în alt punct de cât în origine.

2. Să se găsească extremele funcţiunii

$$f(x, y) = 2 \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \cos\frac{x+y}{2}$$

x şi y fiind arcuri cuprinse între 0 şi π.

R. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin\frac{y}{2}\cos\frac{2x+y}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x+2y}{2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin\frac{y}{2}\sin\frac{2x+y}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\cos(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x+2y}{2}.$$

Sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ este echivalent cu sistemul

$$\sin(x+y) = \sin x$$
$$\sin(x+y) = \sin y,$$

care are ca soluţie

$$(1) \quad x = y = 0, \qquad (2) \quad x = y = \frac{\pi}{3}.$$

La soluţia (1) nu corespunde nici maxim nici minim. La soluţia (2) corespunde *maximul* funcţiunii f.

3. Să se determine axele cuadricei

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 1 = 0.$$

R. Va trebui să căutăm extremele expresiei $x^2 + y^2 + z^2$, x, y, z fiind legate prin ecuaţia cuadricei. Intre sistemul

$$x + \lambda(Ax + Ez + Fy) = 0,$$
$$y + \lambda(By + Dz + Fx) = 0,$$
$$z + \lambda(Cz + Dy + Fx) = 0,$$

relaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

şi ecuaţia (1) va trebui să eliminăm pe x, y, z, λ. Găsim mai întâi $r^2 = \lambda$. Deducem apoi ecuaţia care ne dă patratele jumătăţilor axelor

$$\begin{vmatrix} 1 + Ar^2 & Fr^2 & Er^2 \\ Fr^2 & 1 + Br^2 & Dr^2 \\ Er^2 & Dr^2 & 1 + Cr^2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Ce devine $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{d^2y}{dx^2}$, când facem schimbarea

$$e^x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)?$$

R. Avem

$$x = \operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right);$$

prin urmare

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}=\cos\theta\,\frac{dy}{d\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\cos^2\theta\,\frac{d^2y}{d\theta^2}-\sin\theta\cos\theta\,\frac{dy}{d\theta}.$$

5. Ce devine expresia

$$E=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

prin schimbarea de variabile

$$x=u,\quad y=uv\ ?$$

R. Avem $u=x$ şi $v=\frac{y}{x}$, aşa că

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Cu ajutorul acestor formule găsim

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{v^2}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{v}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

de unde rezultă că $E=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

6. Transformarea

$$X=x-\frac{y}{y'},\quad Y=y-xy'$$

este *de contact*.

R. Avem

$$\frac{dY}{dX}=\frac{-xy'^2}{y},$$

ceeace ne arată că transformarea este de contact.

ERRATA.

Pag. 6, *rândul* 9, *se va adăuga după cuvântul* numere:
cu aceste proprietăţi, putem intercala între ele două numere raţionale

Pag. 6, *rândul* 10, *prima virgulă se va înlocui prin:* şi

Pag. 14, *rândul* 2 *de jos în sus, se va înlocui* $\frac{m}{p}$ *prin* $\frac{p}{m}$

Pag. 16, *rândul* 7 *de jos în sus, se va înlocui numărul* 2 *prin* 3

Pag. 19, *rândul* 5 *de jos în sus, se va înlocui semnul* $>$ *prin* $<$

Pag. 25, *rândul* 15 *de jos în sus, se va înlocui* $f(u)$ *prin* $f(x)$

Pag. 26, *rândul* 6 *de jos în sus, se va înlocui* $<$ *prin* $>$

Pag. 102, *rândul* 7 *de jos în sus, se va înlocui* $\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z$ *prin*
$\alpha |f'_x| + \beta |f'_y| + \gamma |f'_z|$.