ACADEMIA ROMÂNA

MONOGRAFII ŞTIINŢIFICE

V

ELEMENTE
DE
GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ PROIECTIVĂ
A CURBELOR ŞI SUPRAFEŢELOR

DE

AL. PANTAZI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ, BUCUREŞTI 1942

ACADEMIA ROMÂNĂ

MONOGRAFII ŞTIINŢIFICE

		Lei
I.	N. CIORĂNESCU, Ecuaţiile Mecanicei analitice, Bucureşti, 1938 .	100.—
II.	R. ŢIŢEICA, Spectroscopie, Bucureşti, 1939	100.—
III.	G. MANU, Fizica nucleară I, Bucureşti, 1940	120.—
IV.	ION I. PLĂCINŢEANU, Electromagnetismul, Bucureşti, 1941. .	100.—
V.	AL. PANTAZI, Elemente de Geometrie diferenţială proiectivă a curbelor şi suprafeţelor, Bucureşti, 1942	200.—

ACADEMIA ROMÂNĂ

MONOGRAFII ȘTIINȚIFICE
V

ELEMENTE
DE
GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ PROIECTIVĂ
A CURBELOR ȘI SUPRAFEȚELOR

DE

AL. PANTAZI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ, BUCUREȘTI 1942

PREFAŢĂ

Scopul lucrării de faţă este să pună la îndemâna cititorilor, atât o parte interesantă din bogatul material pe care-l constitue capitolul, relativ recent creat în ştiinţă şi de care se leagă numele marelui nostru geometru G. Ţiţeica, al geometriei proiective diferenţiale, cât mai ales o metodă, a ecuaţiei reduse, care are de altfel un câmp de aplicare mai larg decât acel al teoriei proiective a curbelor şi suprafeţelor şi se întinde la toate geometriile care intră în vestitul program dela Erlangen.

Sperăm că forma familiară în care se găsesc expuse aceste rezultate, unde calculele au fost conduse aproape în cele mai mici amănunte, pentru a fi urmărite cu uşurinţă, şi care foloseşte aproape exclusiv numai cunoştinţele generale ale programelor noastre de licenţă să facă posibilă cititorilor iniţierea completă şi să le deschidă gustul spre aprofundarea acestor rezultate pe care le vor găsi expuse în lucrări mai complete în acest domeniu.

Cităm în această ordine de idei, lucrările care ne-au inspirat în primul rând, în cea mai mare parte şi anume:

Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, de Guido Fubini şi Ed. Čech (Ed. Gauthiers-Villars, 1931, Paris).

Projective differential geometry of curves and surfaces, de Ernest Preston Lane (Ed. The University of Chicago Press. Chicago Illinois U. S. A., 1932).

Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, (1-a parte) de Elie Cartan (Ed. Gauthiers-Villars, Paris, 1937).

Géométrie différentielle projective des réseaux de G. Ţ i - ţ e i c a (Ed. Acad. Române şi Gauthiers Villars, Paris, 1924), citarea fiind făcută în ordinea în care se recomandă a fi urmărite pentru aprofundarea cunoştinţelor.

Ne rămâne datoria să mulţumim din toată inima *Academiei Române* care a binevoit să primească publicarea acestei lucrări în colecţia « Monografii ştiinţifice ».

Mulţumim de asemeni d-lui N. N. Mihăileanu care ne-a ajutat la revizuirea lucrării şi s'a ocupat cu toate corecturile necesare unei cât mai bune prezentări.

AL. PANTAZI

PARTEA I-a

CURBE PLANE

I

PLANUL EUCLIDIAN

1. **Generalități. Spații sau varietăți cu două dimensiuni.** Numim spațiu sau varietate cu două dimensiuni o mulțime de elemente, pe care le numim *puncte*, astfel încât fiecare element al mulțimii să-l putem caracteriza prin o pereche de numere x_1, x_2, pe care le numim coordonate, și invers, la o pereche, socotită într'o anumită ordine, de două numere x_1, x_2, variind între anumite limite, să-i corespundă un element și unul singur al mulțimii. Ex.: o porțiune dintr'un plan, dintr'o sferă sau dintr'o suprafață oarecare este o varietate cu două dimensiuni (x_1 și x_2 fiind coordonatele curbilinii).

2. **Transformare.** Numim transformare, într'o varietate cu două dimensiuni, o corespondență biunivocă între elementele (punctele) mulțimii care constitue varietatea, așa încât, prin această corespondență, unui anumit punct M al varietății îi corespunde un anumit punct N, iar punctul N fiind dat, există un singur punct M căruia să-i corespundă punctul N. Ex.: rotația de un anumit unghiu în jurul unui punct în plan, translația de o anumită amplitudine, etc. Algebric, o transformare va fi definită prin relații de forma

$$(1) \qquad y_1 = f_1(x_1, x_2) \quad , \quad y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

y_1, y_2 fiind coordonatele punctului N, pe care-l numim *transformatul* punctului M de coordonate x_1, x_2, iar f_1, f_2

două funcţiuni de argumentele x_1, x_2, funcţiuni pe care le vom presupune continui şi derivabile. Să însemnăm prescurtat cu U transformarea definită de relaţiile (1). Dacă determinantul funcţional

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

atunci relațiile (1) se pot rezolva în raport cu x_1 și x_2 și ne dau

(2) $$x_1 = \bar{f}_1(y_1, y_2) \quad , \quad x_2 = \bar{f}_2(y_1, y_2).$$

Relaţiile (2) definesc ca și relaţiile (1) o transformare, dacă privim pe y_1, y_2 ca coordonate ale unui punct al varietății și pe x_1, x_2 ca coordonate ale punctului transformat. Această nouă transformare face evident să corespundă punctului N punctul M, dacă N era transformatul lui M prin transformarea U. Numim această nouă transformare, transformarea inversă a transformării U și o notăm prescurtat cu U^{-1}. Legătura între punctele M şi N, transformate unul din celălalt respectiv prin transformările U^{-1}, U se mai scrie prescurtat

$$N = U(M) \quad , \quad M = U^{-1}(N).$$

3. **Produs de transformări.** Fie U o transformare definită algebric de relaţiile (1) și V o altă transformare definită algebric de relațiile

(3) $$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2).$$

Transformarea V va face să corespundă punctului N, de coordonate y_1, y_2, punctul P de coordonate

$$z_1 = \varphi_1(y_1, y_2), \quad z_2 = \varphi_2(y_1, y_2).$$

Corespondența între punctele M și P, o numim transformarea produs al transformărilor U și V și o notăm prescurtat

UV. Schimbând puţin notaţiile şi însemnând cu y_1, y_2, coordonatele punctului P, vom avea evident

$$(4) \qquad y_1 = \varphi_1(f_1, f_2), \quad y_2 = \varphi_2(f_1, f_2),$$

şi aceste relaţii definesc algebric transformarea produs UV.

Transformarea particulară definită de relaţiile

$$y_1 = x_1 \quad , \quad y_2 = x_2,$$

care, geometric, face să corespundă lui însuşi fiecare punct al varietăţii se numeşte *transformarea identică* sau *unitate* şi se notează cu E. Avem evident

$$U\,U^{-1} = E.$$

Rezultă de asemeni imediat că

$$(U^{-1})^{-1} = U$$

fiindcă relaţiile (2) rezolvate în raport cu y_1, y_2, conduc la relaţiile (1).

4. **Egalitatea figurilor. Noţiunea de grup.** Vom spune în general că două figuri F şi F' sunt *egale*, atunci când elementele figurii F' se deduc din elementele figurii F printr'o *transformare făcând parte dintr'o familie bine definită* Φ *de transformări ale varietăţii.*

Pentru ca noţiunea de egalitate astfel definită să satisfacă proprietăţilor clasice ale egalităţii şi anume:

1. $F = F$, adică o figură este totdeauna egală cu ea însăşi.

2. Dacă $F = F'$ atunci $F' = F$.

3. Dacă $F = F'$ şi $F' = F''$ atunci $F = F''$, adică două figuri egale cu a treia sunt egale între ele, va trebui ca transformările familiei Φ să satisfacă respectiv la următoarele reguli, care se deduc imediat din definiţiunile anterioare:

1. Transformarea identică E face parte din familia Φ.

2. Dacă transformarea U face parte din familia Φ, transformarea U^{-1} face parte de asemeni din familie.

3. Dacă U şi V sunt două transformări care fac parte din familia Φ, produsul UV este de asemeni o transformare din familie.

Familiile de transformări care satisfac acestor trei reguli se numesc *grupuri* de transformări. Putem atunci defini noţiunea de egalitate în modul următor: *Fiind dat un grup de transformări, două figuri se zic egale când ele se deduc una din alta printr'o transformare a grupului.*

Plecând dela această definiţiune generală a egalităţii se poate face o clasificare a geometriilor după grupul care se ia de bază la definiţia egalităţilor. Această clasificare constitue fundamentul ideilor marelui geometru german Felix Klein, expuse în vestita lui lucrare inaugurală din 1872, care este cunoscută de atunci în ştiinţă sub denumirea de *programul dela Erlangen.*

In sensul acestor idei, geometria clasică are la bază grupul care lasă invariantă expresia

$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2,$$

(x_1, x_2) şi (x_1', x_2') fiind coordonatele a două puncte, coordonate pe care le numim *carteziene*. Cu alte cuvinte, dacă relaţiile (1) definesc o transformare a grupului şi punem

$$(5) \qquad y_1' = f_1(x_1', x_2'), \quad y_2' = f_2(x_1', x_2')$$

avem, oricare ar fi transformarea grupului:

$$(y_1 - y_1')^2 + (y_2 - y_2')^2 \equiv (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2$$

în virtutea relaţiilor (1) şi (5).

Se demonstrează că funcţiunile f_1, f_2 sunt atunci neapărat de forma

$$(6) \quad y_1 = f_1 = \xi_1 + x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, \quad y_2 = f_2 = \xi_2 + x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$

sau de forma

$$(7) \quad y_1 = f_1 = \xi_1 - x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta, \quad y_2 = f_2 = \xi_2 - x_1 \sin\theta - x_2 \cos\theta.$$

ξ_1, ξ_2, θ fiind trei constante arbitrare. Dacă x_1, x_2 sunt atunci coordonatele carteziene clasice ale unui punct într'un plan, relaţiile (6) definesc o deplasare şi relaţiile (7) o antideplasare (o deplasare urmată de o simetrie). Putem lua atunci, ca *model* al geometriei deplasărilor sau antideplasărilor, planul euclidian clasic, egalităţile fiind definite prin coincidenţa figurilor după o deplasare sau antideplasare.

5. **Geometria proiectivă** are ca grup fundamental grupul definit de relaţiile

$$(8) \qquad y_1 = \frac{a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_2}{a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_2}, \quad y_2 = \frac{a_{02} + a_{12}x_1 + a_{22}x_2}{a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_2}$$

unde figurează nouă constante a_{ij} $(i, j = 0, 1, 2)$ din care însă numai *opt* sunt esenţiale.

Dacă x_1 şi x_2 sunt coordonatele clasice carteziene ale unui punct într'un plan, atunci relaţiile (8) definesc o *omografie*, care are proprietatea, după cum se constată de altfel imediat din caracterul linear al relaţiilor (8), că transformă dreptele în drepte şi în general curbele algebrice de un anumit ordin în curbe algebrice de acelaşi ordin şi cu acelaşi număr de puncte singulare. Rezultă că putem lua ca *model euclidian* al geometriei proiective, planul clasic euclidian, unde însă două figuri se vor zice *egale*, când se deduc una din alta printr'o omografie. Varietatea cu două dimensiuni astfel organizată o vom numi *planul proiectiv*.

6. **Metode generale de studiere a diferitelor geometrii.** Când grupul fundamental al unei geometrii este un grup continuu finit (adică pentru care diferitele transformări ale grupului sunt definite prin două expresiuni f_1, f_2 în care pe lângă variabilele x_1, x_2 figurează şi un număr *finit* de constante arbitrare) cum este cazul geometriei euclidiene sau al geometriei proiective, există o metodă de studiere cu un caracter general. Ea a fost înaugurată pentru geometria proiectivă a curbelor plane şi strâmbe de către geometrul francez H a l p h e n şi constă într'o schimbare metodică a sistemului de coordonate astfel încât ecuaţia sau ecuaţiile curbei să se prezinte sub o formă cât mai simplă; este *metoda ecuaţiei reduse.* Ea conduce în mod natural, după cum vom vedea, la o altă metodă, introdusă de D a r b o u x în teoria suprafeţelor ca o generalizare a metodei lui F r e n e t şi

care se numeşte *metoda reperului mobil.* Această metodă se poate introduce şi direct, plecând dela teoremele fundamentale ale teoriei grupurilor; sub această formă avem *metoda lui* Cartan.

Pentru geometria proiectivă există şi o metodă specială, bazată pe caracterul linear al transformărilor omografice, care prin aceasta prezintă analogii cu transformările soluţiunilor ecuaţiilor diferenţiale sau cu derivate parţiale lineare şi omogene. Aceasta este *metoda lui* Wilczinski introdusă de acest autor pentru curbele plane şi în spaţiu şi pentru suprafeţe şi în special pentru suprafeţele riglate. Ea a fost continuată de Fubini şi Čech pentru suprafeţele curbe şi de marele nostru geometru Ţiţeica pentru reţele şi congruenţe.

7. **Noţiunea de reper mobil.** Vom numi în general reper mobil, figura (R) făcând parte dintr'o familie de figuri egale între ele (faţă de grupul de bază) şi depinzând de un acelaşi număr de parametri ca şi grupul de bază, astfel încât fiind dat un reper (R_0) să existe pentru fiecare reper (R) o transformare a grupului şi numai una singură care aduce pe (R_0) în (R). Când (R) se confundă cu (R_0) avem transformarea identică. Se demonstrează că pentru orice grup continuu finit există asemenea repere. Aci ne vom mărgini să verificăm acest lucru pentru grupurile geometriei euclidiene şi al geometriei proiective.

Definim ca reper mobil în geometria euclidiană figura formată de două drepte perpendiculare orientate D_1, D_2 care se întâlnesc într'un punct C. O astfel de figură depinde de trei parametri: coordonatele ξ_1, ξ_2 ale punctului C, faţă de un sistem iniţial de axe perpendiculare Ox_1, Ox_2 şi $\theta = \measuredangle (Ox_1, D_1)$. Este evident că nu există decât o singură deplasare sau antideplasare, care să aducă reperul (R_0) (Ox_1, Ox_2) peste reperul (R) (D_1, D_2). De ex. dacă sensul de rotaţie dela D_1 la D_2 este acelaşi ca dela Ox_1 la Ox_2 transformarea este deplasarea dată de relaţiile (6).

8. **Coordonate relative faţă de un reper.** Fie M un punct al varietăţii de coordonate x_1, x_2 şi N, de coordonate y_1, y_2, punctul varietăţii care se transformă în M prin transformarea

care aduce reperul (R_0) în (R). Vom spune prin definiţie că y_1, y_2 sunt coordonatele relative ale punctului M faţă de (R). Dacă (6) sunt relaţiile care definesc această transformare, este evident că între y_1, y_2 şi x_1, x_2 vom avea aceleaşi relaţiuni însă rolul variabilelor x şi y este schimbat, aşa încât

$$(9) \quad x_1 = \xi_1 + y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta \ , \ x_2 = \xi_2 + y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta.$$

Formulele (9) sunt formulele de transformare ale coordonatelor. Ele au aceeaşi formă ca şi relaţiile (6), însă un *înţeles deosebit.* Pe când în formulele (6) (x_1, x_2) şi (y_1, y_2) sunt *coordonatele* a două puncte, transformate unul din celălalt, *faţă de acelaşi sistem de coordonate,* în formulele (9) ele sunt coordonatele *aceluiaşi punct* însă faţă de *două sisteme de coordonate diferite.* Din asemănarea formulelor deducem însă că deoarece primele definesc un grup, trecerea dela un sistem de coordonate relative (y_1, y_2) corespunzătoare unui reper (R), la un alt sistem de coordonate (y_1', y_2') corespunzătoare unui alt reper (R') se va face prin relaţii de aceeaşi formă

$$y_1 = \xi_1' + y_1' \cos\theta' - y_2' \sin\theta' \ , \ y_2 = \xi_2' + y_1' \sin\theta' + y_2' \cos\theta'$$

ca şi relaţiile (9), cu alte constante ξ_1', ξ_2', θ', care au faţă de reperul (R) aceeaşi interpretare geometrică ca şi constantele ξ_1, ξ_2, θ faţă de reperul (R_0).

9. **Studiul curbelor plane.** Pentru ca să pătrundem mai bine metoda ecuaţiei reduse şi a corolarului ei, metoda reperului mobil, vom face o aplicaţie la studiul curbelor plane faţă de grupul euclidian. Vom găsi astfel pe o cale naturală, deoarece pleacă dela un principiu general, rezultatele clasice familiare ale geometriei diferenţiale plane.

Să considerăm o curbă (C) pe care să o presupunem definită faţă de un anumit sistem de coordonate printr'o ecuaţie

$$x_2 = f(x_1)$$

în care, pentru comoditate, vom presupune funcţiunea f olomorfă în jurul punctului $x_1 = 0$, prin urmare desfăşurabilă în seria întreagă

$$(10) \quad x_2 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n + \ldots$$

Dacă raportăm curba (C) la un alt sistem de coordonate (y_1, y_2) ecuaţia curbei va căpăta în general forma

$$(11) \qquad y_2 = b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots + b_n y_1^n + \ldots$$

Metoda ecuaţiei reduse constă în a determina un reper astfel încât ecuaţia (11) să aibă forma cea mai redusă posibilă. Fie, pentru aceasta, (9) formulele de transformare ale coordonatelor (x_1, x_2) în (y_1, y_2). Inlocuind în (9) pe y_2 prin valoarea sa (11), vom căpăta pentru x_1 şi x_2 două funcţiuni de x_1, x_2, desvoltate în serii întregi, pe care apoi le substituim în (10). Vom obţine astfel o identitate între două serii întregi în y_1, în care vom egala coeficienţii aceloraşi puteri ale lui y_1. Identificarea ne va da relaţiile prin care determinăm coeficienţii b_p în funcţie de coeficienţii a_q $(q \leq p)$ şi de constantele ξ_1, ξ_2 şi θ ale transformării. Procedând astfel vom avea succesiv

$$(12) \qquad \begin{cases} x_1 = \xi_1 + y_1 \cos\theta - \sin\theta\,(b_0 + b_1 y_1 + \ldots) \\ x_2 = \xi_2 + y_1 \sin\theta + \cos\theta\,(b_0 + b_1 y_1 + \ldots) \end{cases}$$

apoi

$$(13) \qquad \begin{cases} \xi_2 + y_1 \sin\theta + \cos\theta\,(b_0 + b_1 y_1 + \ldots) = \\ a_0 + a_1 [\xi_1 + y_1 \cos\theta - \sin\theta\,(b_0 + b_1 y_1 + \ldots)] \\ \qquad + a_2 [\xi_1 + y_1 \cos\theta - \sin\theta\,(b_0 + b_1 y_1 + \ldots)]^2 + \ldots \end{cases}$$

Identificarea termenilor independenţi de y_1, în cei doi membri, ne dă

$$(14) \qquad \xi_2 + b_0 \cos\theta = a_0 + a_1 (\xi_1 - b_0 \sin\theta) + a_2 (\xi_1 - b_0 \sin\theta)^2 + \ldots$$

relaţie care conţine numai coeficientul b_0. Se vede imediat că putem lua $b_0 = 0$; relaţia (14) ne dă condiţia

$$(15) \qquad \xi_2 = a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_1^2 + \ldots$$

între parametrii ξ_1, ξ_2 ai reperului. Geometric această condiţie exprimă că punctul C (originea reperului) trebue să se găsească într'un punct oarecare al curbei (C). Reperul determinat prin această condiţie îl numim *reper de ordinul zero* şi ecuaţia curbei faţă de un astfel de reper capătă forma

$$y_2 = b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots,$$

coordonatele punctului considerat al curbei faţă de noul reper fiind $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Dacă presupunem acum că reperul iniţial este de ordinul zero, avem $a_0 = 0$, şi atunci condiţia de trecere dela un reper de ordinul zero la un alt reper de acelaşi ordin este dată de relaţia (15) care devine

$$\xi_2 = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_1^2 + \ldots$$

ceea ce revine a alege originea în alt punct al curbei. Să presupunem că originea rămâne neschimbată ceea ce ne dă

(16) $\quad \xi_1 = 0 \quad$ deci $\quad$ (17) $\quad \xi_2 = 0,$

atunci trecerea dela un reper de ordinul zero la un alt reper de acelaşi ordin şi *având aceeaşi origine* nu mai depinde decât de parametrul θ. Identitatea (13) devine

$$y_1 \sin\theta + \cos\theta\,(b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots) \equiv$$
$$a_1 [y_1 \cos\theta - \sin\theta\,(b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots)] +$$
$$+ a_2 [y_1 \cos\theta - \sin\theta\,(b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots)]^2 + \ldots$$

iar identificarea coeficienţilor lui y_1 în ambii membri ne dă

$$\sin\theta + b_1 \cos\theta = a_1 (\cos\theta - b_1 \sin\theta).$$

sau

$$b_1 = \frac{a_1 \cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + a_1 \sin\theta}.$$

Această relaţie, care ne dă pe b_1 arată că, oricare ar fi valoarea lui a_1, vom putea totdeauna determina pe θ astfel încât să avem $b_1 = 0$. Condiţia se scrie

(18) $$\operatorname{tg}\theta = a_1 .$$

Reperul determinat prin această condiţie îl numim *reper de primul ordin*. Faţă de un asemenea reper, ecuaţia curbei se scrie

$$y_2 = b_2 y_1^2 + b_3 y_1^3 + \ldots$$

Existenţa unui reper de primul ordin fiind dovedită, să presupunem că am ales *în prealabil* drept reper iniţial un reper de ordinul unu. Avem atunci $a_1 = 0$ şi relaţia (18) ne dă

$$(19) \qquad \theta = 0 \quad \text{sau} \quad (19') \qquad \theta = \pi.$$

Relaţiile (16), (17) şi (19) sau (19') ne arată atunci că trecerea dela un reper de primul ordin la un alt reper de primul ordin nu se poate face decât prin substituţiile

$$(20) \qquad x_1 = y_1 \ , \ x_2 = y_2 \quad \text{sau} \quad x_1 = -y_1, \ x_2 = -y_2$$

cărora le corespund transformarea identică sau rotaţiunea în jurul originii de 180°. Prin urmare reperul de primul ordin este perfect determinat cu excepţia sensului axelor D_1, D_2 ale reperului şi odată cu el sunt determinaţi, cu excepţia semnului unora din ei, toţi coeficienţii $a_2, a_3, \ldots$ care intervin în ecuaţia (15) unde $a_0 = a_1 = 0$. Aceşti coeficienţi pentru motive care se vor vedea în paragrafele următoare, poartă numele de *curburile* curbei în punctul considerat.

Astfel prin *metoda ecuaţiei reduse se ajunge la determinarea, în fiecare punct al unei curbe, pe o cale naturală, a unei drepte bine definite* (axa D_1 sau perpendiculara pe ea D_2) *şi a unor curburi* (valorile numerice ale coeficienţilor a_2, a_3, etc.).

Aceste drepte şi curburi *au un caracter invariant faţă de deplasări*, noţiune care are, ca şi alte exemple asemănătoare pe care le vom întâlni ulterior, înţelesul următor: Fie (C) o curbă şi $(\overline{C})$ curba care se deduce din (C) printr'o deplasare. Fie M şi $\overline{M}$ două puncte corespunzătoare, D_1, a_2, $a_3, \ldots$ şi $\overline{D}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \ldots$ dreptele şi curburile corespunzătoare. Spun că D_1 se transformă în $\overline{D}_1$ prin deplasarea care aduce pe (C) în $(\overline{C})$ şi că avem

$$(21) \qquad |a_2| = |\overline{a}_2| \ ; \ |a_3| = |\overline{a}_3| \ ; \text{etc.} \ldots$$

In adevăr, fie (R) unul din reperele de primul ordin referitoare la (C) în M, $(\overline{R})$ unul din reperele de primul ordin referitoare la $(\overline{C})$ în $\overline{M}$ şi $(\overline{R'})$ reperul care se deduce din (R) prin deplasarea care aduce pe (C) peste $(\overline{C})$. După definiţia coordonatelor relative (§ 8), ecuaţia curbei $(\overline{C})$ faţă de $(\overline{R'})$ este identică cu ecuaţia curbei (C) faţă de (R). Aceasta însemnează că şi $(\overline{R'})$ este un reper de primul ordin şi prin urmare se confundă cu $(\overline{R})$ sau se obţine din acesta printr'o rotaţie de 180^0 în jurul originii. In ambele cazuri $\overline{D}_1$ se confundă cu $\overline{D'}_1$ şi avem relaţiile (21), ceea ce demonstrează proprietatea avută în vedere. Caracterul de invarianţă al dreptei D_1 şi al curburilor a_2, a_3, etc. este astfel demonstrat.

Vom face cu această ocazie şi observaţia următoare: dacă însemnăm cu $f\,(x_1)$ funcţiunea din membrul al II-lea din relaţia (10) avem

$$a_2 = \frac{1}{2} f''\,(0)\ ,\ a_3 = \frac{1}{6} f'''\,(0), \ldots$$

ceea ce ne arată că dacă $y_2 = \varphi\,(y_1)$ este ecuaţia curbei faţă de un reper oarecare, a_i depinde, după cum se ştie din calculul diferenţial, de derivatele funcţiunii φ până la ordinul i inclusiv. Pentru aceste motive se spune că a_i este un *invariant diferenţial* (euclidian) *de ordinul i.*

Metoda ecuaţiei reduse ne-a permis prin urmare să determinăm pe cale analitică anumite elemente invariante, drepte şi curburi, care sunt prin urmare susceptibile şi de definiţiuni pur geometrice, intuitive. Pentru a ajunge la acestea există unele metode generale printre care cea dintâi este metoda reperului mobil pe care o vom expune în cele ce urmează ca o consecinţă a metodei ecuaţiei reduse.

10. **Formulele lui Frenet.** Să considerăm în fiecare punct al unei curbe (C) un reper de primul ordin, reperele de primul ordin în diferitele puncte ale curbei fiind deduse din unul din ele prin continuitate. Fie M unul din punctele curbei, I_1, I_2 doi vectori de lungime egală cu unitatea purtaţi de axele D_1 şi D_2, P un punct oarecare din plan de coordonate relative x_1, x_2. Reperul de primul ordin referitor la M este perfect definit de vectorii I_1 şi I_2 şi putem scrie relaţia vectorială

$$P = M + x_1\,I_1 + x_2\,I_2 \tag{22}$$

care nu este altceva decât expresia condensată a relaţiilor (6) deoarece (y_1, y_2), (ξ_1, ξ_2) sunt coordonatele faţă de un sistem de axe iniţiale ale punctelor P şi M iar $(\cos\theta, \sin\theta)$ şi $(-\sin\theta, \cos\theta)$ proiecţiile pe aceleaşi axe ale vectorilor I_1, I_2. Presupunem curba (C) definită parametric în funcţiune de un parametru t; ξ_1, ξ_2, θ sunt funcţiuni de t. Vom presupune că şi x_1, x_2 sunt funcţiuni de t şi vom defini vectorii

$$\frac{dM}{dt}, \quad \frac{dP}{dt}, \quad \frac{dI_1}{dt}, \quad \frac{dI_2}{dt}$$

prin relaţiile vectoriale

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \lim_{t' \to t} \frac{M' - M}{t' - t}, \quad \frac{dP}{dt} = \lim_{t' \to t} \frac{P' - P}{t' - t} \\ \frac{dI_1}{dt} &= \lim_{t' \to t} \frac{I'_1 - I_1}{t' - t}, \quad \frac{dI_2}{dt} = \lim_{t' \to t} \frac{I'_2 - I_2}{t' - t}. \end{aligned} \right.$$

literele accentuate raportându-se la un punct M' al curbei, corespunzător valorii t' a parametrului. Fiecare din relaţiile (23), se înţeleg, ca şi relaţia (22), vectorial, adică reprezentând notaţia prescurtată a câte două relaţii algebrice, câte una de fiecare din coordonate sau proiecţii faţă de un sistem iniţial fix de coordonate. Fie atunci (p_1, p_2), (p_{11}, p_{12}), (p_{21}, p_{22}) componentele *relative* ale vectorilor

$$\frac{dM}{dt}, \frac{dI_1}{dt}, \frac{dI_2}{dt};$$

vom avea astfel

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dM}{dt} = p_1 I_1 + p_2 I_2, \\ &\frac{dI_1}{dt} = p_{11} I_1 + p_{12} I_2, \quad \frac{dI_2}{dt} = p_{21} I_1 + p_{22} I_2. \end{aligned} \right.$$

Cantităţile p_i, p_{ij} $(i, j = 1, 2)$ nu sunt independente. Din relaţiile

$$(24 \text{ bis}) \qquad I_i^2 = 1, \quad I_1 I_2 = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

care exprimă că fiecare din vectorii I_1, I_2 au lungimea 1 şi că sunt perpendiculari, deducem prin derivare

$$I_i \frac{dI_i}{dt} = 0 \ , \ I_1 \frac{dI_2}{dt} + I_2 \frac{dI_1}{dt} = 0$$

prin urmare, ţinând seama de (24) şi (24 bis),

$$p_{11} = 0 \ , \ p_{22} = 0 \ , \ p_{12} + p_{21} = 0.$$

Să punem

$$p_{12} = - p_{21} = p \, ;$$

relaţiile (24) devin

$$\frac{dM}{dt} = p_1 I_1 + p_2 I_2 \ ; \ \frac{dI_1}{dt} = p \, I_2 \ ; \ \frac{dI_2}{dt} = - p I_1 .$$

Derivând acum relaţia (22) şi ţinând seamă de relaţiile precedente, obţinem

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt} + p_1 - p \, x_2\right) I_1 + \left(\frac{dx_2}{dt} + p_2 + p \, x_1\right) I_2 .$$

Să presupunem punctul P fix; vom avea $\frac{dP}{dt} = 0$ şi prin urmare

(25) $$\frac{dx_1}{dt} = - p_1 + p \, x_2 \ ; \ \frac{dx_2}{dt} = - p_2 - p \, x_1 .$$

Pentru a determina coeficienţii p, p_1, p_2, presupunem punctul P fix pe curba (C); între x_1 şi x_2 vom avea pe lângă relaţiile precedente şi relaţia (10) unde $a_0 = a_1 = 0$, prin urmare:

(26) $$x_2 = a_2 \, x_1^2 + a_3 \, x_1^3 + \ldots$$

Derivând această relaţie în raport cu t şi înlocuind în relaţia obţinută pe $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ şi x_2 prin valorile lor (25) şi (26), obţinem identitatea

$$-p_2 - p x_1 = (2a_2 \, x_1 + 3a_3 \, x_1^2 + \ldots) [-p_1 + p(a_2 \, x_1^2 + a_3 \, x_1^3 + \ldots)] + \\ + \frac{da_2}{dt} x_1^2 + \frac{da_3}{dt} x_1^3 + \ldots$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor diferitelor puteri ale lui x_1 în cei doi membri, scoatem:

$$(27) \qquad -p_2=0, \ -p=-2a_2p_1; \ 0=-3a_3p_1+\frac{da_2}{dt}; \ldots$$

Pentru a desăvârşi determinarea coeficienţilor p, mai trebue făcută o ipoteză asupra alegerii parametrului t, care până în prezent era arbitrar. Pentru aceasta vom face observaţia următoare, pe care o vom regăsi şi în alte cazuri asemănătoare. Considerăm punctul M′ infinit vecin cu M pe curba (C) şi corespunzător valorii $t+dt$, a parametrului, şi fie x_1 abscisa lui faţă de reperul de primul ordin considerat în M; dacă deplasăm curba (C) în $(\bar{C})$, raţionamentul făcut în paragraful precedent ne arată că avem şi $|x_1|=|\bar{x}_1|$. Dar x_1 este un infinit mic de primul ordin, a cărui parte principală este de forma $\varphi(t)\,dt$ şi are în virtutea celor ce preced un caracter invariant. Notăm cu ds, acest invariant $(s=\int\varphi(t)\,dt)$, şi numim s arcul curbei, pe care-l alegem ca parametru t. Vom avea $\lim\frac{dx_1}{ds}=\pm 1$ când $x_1\to 0$, prin urmare după (25), $p_1=\pm 1$. Determinăm arcul s prin condiţia $p_1=1$; relaţiile (27) ne dau

$$(28) \qquad p_2=0 \quad , \quad p=2a_2 \quad , \quad a_3=\frac{1}{3}\,\frac{da_2}{ds},\ldots$$

prin urmare, dacă notăm $\rho=\frac{1}{2a_2}$,

$$\frac{dM}{ds}=I_1\,; \quad \frac{dI_1}{ds}=\frac{1}{\rho}\,I_2\,; \quad \frac{dI_2}{ds}=-\frac{1}{\rho}\,I_1$$

şi regăsim astfel formulele clasice ale lui F r e n e t scrise sub formă vectorială. Relaţiile (28) ne mai arată că avem:

$$(29) \qquad a_3=\frac{1}{6}\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right),\ldots$$

ceea ce înseamnă că a_3, a_4, ... sunt invarianţi derivaţi, adică se exprimă în funcţiune de *raza de curbură* ρ şi derivatele sale în raport cu s.

11. Interpretări geometrice. Pentru a găsi interpretări geometrice ale elementelor invariante descoperite prin metoda ecuaţiei reduse, o metodă de cercetare, cu un caracter destul de general, este bazată pe *teoria contactului*. Iată în ce constă această metodă.

Se consideră pe curba studiată un număr finit n de puncte, suficient pentru a determina o configuraţie geometrică de un anumit gen (curbă algebrică, complex linear de drepte în spaţiu, suprafaţă algebrică de un anumit ordin, etc.). Când cele n puncte tind, independent unul de altul către un anume punct al curbei studiate, configuraţiunea considerată tinde către o configuraţie limită de acelaşi gen, care se zice că are un contact de ordinul $n - 1$ (sau n — punct), sau mai pe scurt că este osculatoare în punctul considerat al curbei. Pentru a traduce analitic condiţiile de contact se scrie condiţia ca acea configuraţie să conţină un element infinit vecin, corespunzător valorii x_1, a parametrului curbei, valoare care tinde prin ipoteză către zero, când punctul infinit vecin tinde către punctul considerat al curbei. Această condiţie poate fi considerată ca o ecuaţie algebrică în x_1 ale cărei rădăcini ne dau punctele comune curbei şi configuraţiei. Condiţia de contact se va obţine scriind că ecuaţia are n rădăcini confundate cu 0, cu alte cuvinte, coeficienţii desvoltării primului membru al ecuaţiei, după puterile lui x_1 sunt nuli până la termenul în x_1^{n-1} inclusiv. Vom face o aplicare a acestei metode în capitolele următoare.

O altă metodă de cercetare cu un caracter tot aşa de general, constă în a determina curbele pentru care curburile au valorile cele mai simple posibile şi apoi dintre acestea pe acele care au cu curba studiată, în punctul considerat, un contact de un ordin cât mai ridicat. Ca o aplicaţie a acestei metode să căutăm, în cazul nostru, curbele pentru care $\frac{1}{\rho} = 0$. Formulele (28) arată că în acest caz avem $a_2 = a_3 = \ldots = 0$. Formulele lui F r e n e t ne dau

$$\frac{dM}{ds} = I_1 \; ; \; \frac{dI_1}{ds} = 0 \; , \; \frac{dI_2}{ds} = 0$$

deci prin integrare

$$I_1 = I_1^0 \text{ (vector constant)} \quad , \; I_2 = I_2^0$$

şi apoi

$$M = M_0 + sI_0 \qquad (M_0 \text{ un punct fix}).$$

deci punctul M descrie o dreaptă. Ecuaţia ei faţă de un reper de primul ordin se scrie $x_2 = 0$ (fiindcă $a_2 = a_3 \ldots = 0$) şi această dreaptă are un contact de primul ordin în M cu curba (C). Am arătat astfel *existenţa unei drepte având un contact de 1-ul ordin cu curba dată* şi aceasta este tocmai axa D_1 a reperului de primul ordin; cu alte cuvinte dreapta D_1 este tangenta la curbă şi D_2 este normala. Pentru a avea acum o interpretare a primei curburi $\frac{1}{\rho}$, vom considera curbele din plan pentru care $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} = c^t$. Formulele lui F r e n e t ne dau în acest caz:

$$\frac{dM}{ds} = I_1 \, , \; \frac{dI_1}{ds} = \frac{1}{\rho_0} I_2 \, ; \; \frac{dI_2}{ds} = -\frac{1}{\rho_0} I_1$$

de unde scoatem

$$\frac{d^2 I_1}{ds^2} + \frac{1}{\rho_0^2} I_1 = 0$$

prin urmare:

$$I_1 = I_1^0 \cos \frac{s}{\rho_0} + I_2^0 \sin \frac{s}{\rho_0}$$

şi

$$M = M_0 + \rho_0 \, I_1^0 \sin \frac{s}{\rho_0} - \rho_0 \, I_2^0 \cos \frac{s}{\rho_0} \, .$$

Punctul M descrie astfel cercul de centru M_0 şi de rază ρ_0. Ecuaţia acestui cerc faţă de reperul $(M_0, \, I_1^0, \, I_2^0)$ se scrie

$$x_2 = \frac{1}{2\rho_0} x_1^2 + \ldots$$

Să însemnăm atunci cu ρ_0, valoarea lui ρ într'un punct al curbei; relaţia precedentă ne arată că *există un cerc având în punctul considerat un contact de ordinul doi* (cercul osculator); *inversul razei acestui cerc este prima curbură a curbei în punctul considerat.*

Metodele expuse în acest paragraf şi care pentru studiul curbelor în planul euclidian conduc la rezultate cunoscute, vor conduce în studiul curbelor din planul proiectiv la proprietăţi geometrice nouă, care alcătuesc, în esenţă, obiectul geometriei diferenţiale proiective.

II
GEOMETRIA DIFERENŢIALĂ PROIECTIVĂ A CURBELOR PLANE

Metoda ecuaţiei reduse.

12. **Reperul mobil.** Geometria proiectivă are la bază grupul definit de relaţiile (§ 5).

$$(30)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_2}{a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}; \\ y_2 &= \frac{a_{02} + a_{12}x_1 + a_{22}x_2}{a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta_0} \end{aligned}$$

unde Δ_0, Δ_1, Δ_2 sunt polinoamele care figurează la numărătorii şi numitorul comun al expresiunilor din membrul al II-lea, (x_1, x_2) coordonatele, în modelul euclidian, ale unui punct şi (y_1, y_2) coordonatele punctului transformat. Pentru a defini un reper mobil care să satisfacă condiţiunilor generale arătate anterior (§ 7) să considerăm dreptele

$$\Delta_0 = 0 \quad , \quad \Delta_1 = 0 \quad , \quad \Delta_2 = 0$$

care în cazul când

$$(31)\qquad a = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

formează un triunghiu propriu zis T, pe care-l vom numi *triunghiul de referință al reperului definit de transformarea* (30). Pentru ca, reciproc, un triunghiu oarecare, format din dreptele de ecuații

$$D_i \equiv b_{0i} + b_{1i}\, x_1 + b_{2i}\, x_2 = 0 \qquad (i = 0, 1, 2)$$

să fie triunghiul de referință al transformării (30) trebue ca:

$$a_{ij} = \rho_j\, b_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, 2)$$

unde ρ_j $(j = 0, 1, 2)$ sunt trei factori de proporționalitate arbitrari. Transformarea proiectivă nu este deci complet definită de triunghiul de referință. Să considerăm atunci punctul U transformatul prin omografia (30) a punctului de coordonate (1, 1) și fie (m, n) coordonatele punctului U pe care-l vom numi *punct-unitate* al reperului. Se vede imediat că, dacă se dă, pe lângă triunghiul de referință și punctul-unitate (deci coordonatele m, n) transformarea este perfect determinată. Intr'adevăr vom avea

$$m = \frac{\rho_1 (b_{01} + b_{11} + b_{21})}{\rho_0 (b_{00} + b_{10} + b_{20})}\ ; \quad n = \frac{\rho_2 (b_{02} + b_{12} + b_{22})}{\rho_0 (b_{00} + b_{10} + b_{20})}$$

deci

$$\frac{\rho_0}{\dfrac{1}{b_{00} + b_{10} + b_{20}}} = \frac{\rho_1}{\dfrac{1}{b_{01} + b_{11} + b_{21}}} = \frac{\rho_2}{\dfrac{1}{b_{02} + b_{12} + b_{22}}} = \sigma;$$

ρ_0, ρ_1, ρ_2 și prin urmare coeficienții a_{ij} sunt determinați cu excepția unui același factor σ, care dispare în expresiile (30) prin simplificare. Configurația formată de un triunghiu de referință și din un punct-unitate, depinde de opt parametri ca și grupul (30) și este prin urmare un *reper proiectiv* căci din definiție unei omografii îi corespunde un singur reper, și după cum am arătat mai sus, un anumit reper nu corespunde decât unei singure omografii.

13. **Coordonate relative față de un reper proiectiv.** Fie (R) un reper proiectiv care corespunde unei anumite omografii H, definită de relații de forma (30) și fie M de coordonate

(x_1, x_2) un punct din plan. Fie de asemeni (y_1, y_2) coordonatele punctului N din plan al cărui transformat prin omografia H este punctul M. Vom avea între (x_1, x_2), (y_1, y_2) relațiile (30), unde însă rolul variabilelor x, y este schimbat, adică

$$(32)\quad x_1 = \frac{a_{01} + a_{11}\,y_1 + a_{21}\,y_2}{a_{00} + a_{10}\,y_1 + a_{20}\,y_2}\ ;\quad x_2 = \frac{a_{02} + a_{12}\,y_1 + a_{22}\,y_2}{a_{00} + a_{10}\,y_1 + a_{20}\,y_2}.$$

Prin definiție vom spune că (y_1, y_2) sunt *coordonate e relative* ale punctului M față de reperul (R). Relațiile (32) ne dau atunci formulele de schimbare a coordonatelor când se trece dela coordonate carteziene la coordonate relative față de un reper (R). Intru cât însă aceste relații sunt analoage cu relațiile (30) care definesc transformările unui *grup*, rezultă că trecerea dela un sistem de coordonate relative față de un reper (R), la un sistem de coordonate relative față de un alt sistem (R') se va exprima prin relații de aceeași formă cu relațiile (32).

14. **Coordonate proiective.** Să introducem coordonatele omogene X_0, X_1, X_2 definite, cum se știe din geometria analitică, de relațiile

$$x_1 = \frac{X_1}{X_0}\ ,\quad x_2 = \frac{X_2}{X_0}$$

și să considerăm numerele Y_0, Y_1, Y_2, pe care le definim (cu excepția unui factor comun) prin relațiile

$$y_1 = \frac{Y_1}{Y_0}\ ,\quad y_2 = \frac{Y_2}{Y_0}.$$

y_1, y_2 fiind coordonatele față de un reper R ale punctului de coordonate carteziene x_1, x_2. Vom numi Y_0, Y_1, Y_2, coordonate proiective omogene ale punctului față de reperul (R). Coordonatelor relative y_1, y_2 le vom mai da atunci, prin analogie, denumirea de coordonate proiective neomogene. Din relațiile (32) scoatem atunci prin înlocuire:

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{a_{01}\,Y_0 + a_{11}\,Y_1 + a_{21}\,Y_2}{a_{00}\,Y_0 + a_{10}\,Y_1 + a_{20}\,Y_2}\ ,\quad \frac{X_2}{X_0} = \frac{a_{02}\,Y_0 + a_{12}\,Y_1 + a_{22}\,Y_2}{a_{00}\,Y_0 + a_{10}\,Y_1 + a_{20}\,Y_2}$$

sau

$$(33) \quad \begin{cases} X_0 = \sigma\,(a_{00}\,Y_0 + a_{10}\,Y_1 + a_{20}\,Y_2) \\ X_1 = \sigma\,(a_{01}\,Y_0 + a_{11}\,Y_1 + a_{21}\,Y_2) \\ X_2 = \sigma\,(a_{02}\,Y_0 + a_{12}\,Y_1 + a_{22}\,Y_2). \end{cases}$$

Relațiile (33) se mai scriu sub o formă prescurtată de care ne vom servi des în cele ce urmează. Să observăm, pentru aceasta că dacă notăm cu A_0, A_1, A_2 vârfurile triunghiului de referință ale reperului, avem pentru vârful A_1 spre exemplu $Y_0 = Y_2 = 0$ după formulele (30), căci avem $\Delta_0 = \Delta_2 = 0$. Cum pentru acest punct $Y_1 \neq 0$, vom avea după (33)

$$(34) \quad \frac{X_0}{a_{10}} = \frac{X_1}{a_{11}} = \frac{X_2}{a_{12}} = \sigma\,Y_1$$

prin urmare (a_{10}, a_{11}, a_{12}) sunt coordonatele punctului A_1. Putem scrie atunci relațiile (33) sub forma prescurtată

$$(35) \quad M = Y_0\,A_0 + Y_1\,A_1 + Y_2\,A_2$$

din care, pentru a obține formulele (33), care definesc analitic coordonatele proiective omogene Y_0, Y_1, Y_2, vom înlocui pe M cu coordonatele omogene ale punctului M (ceea ce face să apară factorul σ) și pe A_0, A_1, A_2, cu *anumite coordonate omogene* ale vârfurilor reperului (acele care corespund valorilor a_{ij}, care depind cum s'a arătat la § 12 de alegerea punctului unitate). In înțelesul de mai sus ne vom putea totdeauna servi de scrierea prescurtată (35) în locul relațiilor desvoltate (33).

Pentru motivele arătate la sfârșitul § 13, aceleași formule (33) sau (35) vor exprima trecerea dela un sistem de coordonate omogene față de un reper la un sistem de coordonate omogene față de un alt reper. E destul să refacem raționamentul din ultimele trei paragrafe, plecând dela coordonate relative față de reperul inițial, în loc de a pleca dela coordonate carteziene.

15. **Metoda ecuaţiei reduse.** Să considerăm o curbă plană (C), definită algebric prin ecuaţia ei, faţă de un anumit reper:

$$x_2 = f(x_1)$$

f fiind o funcţiune analitică

$$(36) \quad x_2 = f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n + \ldots$$

Metoda ecuaţiei reduse constă în a găsi un reper astfel încât ecuaţia curbei (C) faţă de acest reper să aibă primii coeficienţi ai desvoltării, cât mai simpli. Fie (y_1, y_2) coordonatele unui punct M al curbei faţă de noul reper. Vom avea, în general, între y_1, y_2 o relaţie de aceeaşi formă cu (36):

$$(37) \quad y_2 = b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots + b_n y_1^n + \ldots$$

Fie (32), formulele care definesc schimbarea coordonatelor dela (x_1, x_2) la (y_1, y_2). Pentru a calcula coeficienţii b_i procedăm ca şi în cazul planului euclidian (§ 9) şi anume: înlocuim în (32) pe y_2 prin valoarea sa (37); x_1, x_2 se vor desvolta în serii întregi după puterile lui y_1 de forma

$$(38) \quad x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1^2 + \ldots, \quad x_2 = \beta_0 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_1^2 + \ldots$$

Coeficienţii α_n, β_n rezultând din identităţile deduse din (32):

$$(39) \quad \begin{cases} a_{01} + a_{11} y_1 + a_{21}(b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots) \equiv \\ [a_{00} + a_{10} y_1 + a_{20}(b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots)] \times \\ \qquad \times (\alpha_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1^2 + \ldots) \\ a_{02} + a_{12} y_1 + a_{22}(b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots) \equiv \\ [a_{00} + a_{10} y_1 + a_{20}(b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + \ldots)] \times \\ \qquad \times (\beta_0 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_1^2 + \ldots) \end{cases}$$

se vor exprima în funcţiune de a_{ij} şi b_k $(i, j = 0, 1, 2, k \leqslant n)$. Inlocuind apoi în (36) pe x_1 şi x_2 cu valorile lor (38), în care am înlocuit în prealabil pe α_n, β_n prin valorile lor calculate din identităţile (39), vom obţine identitatea

$$(40) \quad \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_1^2 + \ldots + \beta_n y_1^n + \ldots \equiv \\ a_0 + a_1(\alpha_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1^2 + \ldots) + \\ a_2(\alpha_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1^2 + \ldots)^2 + \ldots \end{cases}$$

care prin identificarea coeficienţilor diferitelor puteri ale lui y_1, va da relaţiile care determină coeficienţii b_n în funcţiune de coeficienţii a_k $(k \leqslant n)$. Calculul fiind mai complicat decât în cazul planului euclidian vom proceda prin etape succesive.

16. **Reper de ordinul zero.** Vom avea mai întâi din (39):

$$(41) \qquad \alpha_0 = \frac{a_{01} + b_0\, a_{21}}{a_{00} + b_0\, a_{20}} \; ; \quad \beta_0 = \frac{a_{02} + b_0\, a_{22}}{a_{00} + b_0\, a_{20}}$$

şi dacă facem $b_0 = 0$, avem

$$(42) \qquad \alpha_0 = \frac{a_{01}}{a_{00}} \; ; \quad \beta_0 = \frac{a_{02}}{a_{00}}$$

deci α_0, β_0 devin egale cu coordonatele proiective neomogene faţă de reperul iniţial al vârfului A_0 (pe care-l vom numi de aci înainte originea reperului mobil). Din (40) scoatem apoi

$$(43) \qquad \beta_0 = a_0 + a_1\, \alpha_0 + a_2\, \alpha_0^2 + \ldots$$

unde α_0, β_0 au în general valorile (41). Această relaţie ne dă pe b_0 şi rezultă din cele ce preced că putem face $\boxed{b_0 = 0}$; e destul pentru aceasta ca să avem relaţia (43) unde α_0, β_0 au valorile (42), şi prin urmare, comparând cu (36), ca originea A_0 să se găsească pe curbă. Reperul determinat prin această condiţie se va numi reper de ordinul zero.

Să presupunem că reperul iniţial a fost în prealabil un reper de ordin zero. Vom avea atunci $\boxed{a_0 = 0}$; ca să trecem dela acest reper la un alt reper de ordinul zero, *fără a schimba originea*, deci un punct ales pe curbă, va trebui să avem şi $\boxed{\alpha_0 = \beta_0 = 0}$ şi prin urmare după (42): $\boxed{a_{01} = a_{02} = 0}$.

Relaţia (31) ne arată atunci că $a_{00} \neq 0$; putem atunci, prin înmulţirea tuturor coeficienţilor a_{ij} cu factorul $\frac{1}{a_{00}}$ să luăm $\boxed{a_{00} = 1}$ şi atunci relaţiile încadrate cu privire la coeficienţii a_{ij}, vor exprima condiţia ca formulele (30) să exprime schimbarea dela coordonatele faţă de un reper de ordinul zero la coordonatele faţă de un alt reper de ordinul zero.

17. **Reper de primul ordin.** Pentru a merge mai departe, plecăm dela un reper de ordinul zero şi utilizăm formulele de schimbare a coordonatelor care nu modifică ordinul reperului; toate relaţiile încadrate sunt atunci valabile. Procedând mai departe la identificare vom avea succesiv din (39) şi (40).

$$\alpha_1 = a_{11} + b_1 a_{21}\,, \quad \beta_1 = a_{12} + b_1 a_{22} \quad \text{şi} \quad \beta_1 = a_1 \alpha_1$$

sau $$a_{12} + b_1 a_{22} = a_1 (a_{11} + b_1 a_{21})$$

de unde scoatem valoarea lui b_1

$$b_1 = \frac{a_{12} - a_1 a_{11}}{a_1 a_{21} - a_{22}}\,.$$

Putem prin urmare, oricare ar fi a_1, să alegem coeficienţii a_{ij} astfel ca să avem $\boxed{b_1 = 0}$. E suficient ca să avem

(44) $$a_{12} = a_1 a_{11}$$

Reperul de ordinul zero determinat prin aceste condiţii îl numim *de primul ordin.*

Să presupunem că reperul iniţial e un reper de primul ordin, deci $\boxed{a_1 = 0}$. Din (44) scoatem $\boxed{a_{12} = 0}$ şi prin urmare formulele de schimbare a coordonatelor prin care trecem dela un reper de primul ordin la un alt reper de primul ordin vor trebui să satisfacă la condiţiile exprimate în relaţiile încadrate.

18. **Reper de al 2-lea ordin. Puncte de inflexiune.** Procedând, în continuare, la identificările indicate de metodă, obţinem

$$\alpha_2 = b_2 a_{21} - a_{10} a_{11}\,; \quad \beta_2 = b_2 a_{22} \quad \text{şi} \quad \beta_2 = a_2 \alpha_1^2$$

deci

(45) $$b_2 = \frac{a_{11}^2}{a_{22}} a_2\,,$$

căci din (31) rezultă că avem $a_{11} a_{22} \neq 0$.

Relația (45) arată că în planul proiectiv se prezintă pentru reperele de primul ordin o particularitate interesantă. In adevăr dacă $a_2 = 0$, avem $b_2 = 0$, oricare ar fi reperul de primul ordin. Rezultă atunci că *relația* $a_2 = 0$ *este invariantă* față de transformările proiective și traduce o *proprietate proiectivă* în punctul considerat al curbei. Acest lucru se poate demonstra printr'un raționament analog cu acel făcut anterior (§ 9). Fie într'adevăr (C) o curbă plană, (R) un reper proiectiv de primul ordin referitor la un punct M al curbei (C), $(\overline{C})$ curba transformată a lui (C) printr'o omografie și $(\overline{R})$ un reper de primul ordin în punctul $\overline{M}$ transformatul lui M. Fie în sfârșit $(\overline{R}')$ reperul în care se transformă reperul (R) prin aceeași omografie. Fiindcă, după definiția coordonatelor relative, ecuația curbei $(\overline{C})$ față de reperul $(\overline{R}')$ este identică cu ecuația lui (C) față de (R), rezultă că $(\overline{R}')$ este și el un reper de primul ordin. Dacă prin urmare avem în M față de (R) relația $a_2 = 0$, aceasta se păstrează în $\overline{M}$ față de $(\overline{R}')$, din cauza identității ecuațiilor, iar în virtutea lui (45) și față de $(\overline{R})$. Proprietatea este astfel demonstrată; ea se mai exprimă spunând că a_2 este un *invariant relativ* și fiindcă depinde de derivatele de primele două ordine ale funcțiunii f, considerată la început (§ 15), *un invariant diferențial relativ de ordinul doi*. Metoda ecuației reduse descoperă astfel un invariant relativ de ordinul doi, căruia rămâne să i se dea o interpretare geometrică atunci când se anulează. Se poate demonstra că relația $a_2 = 0$ exprimă că punctul M este un punct de inflexiune, prin urmare printr'o transformare omografică un punct de inflexiune se transformă într'un punct de inflexiune. Se poate demonstra de asemeni că dacă o curbă are numai puncte de inflexiune este o linie dreaptă. Fiindcă aceste proprietăți sunt evidente și cunoscute vom trece peste demonstrație.

Să presupunem $a_2 \neq 0$, deci excludem punctele de inflexiune și dreptele în studiul nostru; relația (45) arată că putem determina coeficienții a_{ij} astfel ca să avem $\boxed{b_2 = \frac{1}{2}}$.

Alegerea acestei valori numerice pentru coeficientul b_2 se va explica ulterior. Un reper de primul ordin determinat prin această condiţie este un reper de ordinul al 2-lea.

Dacă reperul iniţial este de ordinul al 2-lea avem $\boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

şi relaţia (45) ne dă $\boxed{a_{22} = a_{11}^2}$, relaţie care exprimă condiţia suplimentară pentru formulele de schimbare a coordonatelor faţă de două repere de ordinul al 2-lea.

19. **Reper de ordinul trei.** Continuând aplicarea metodei şi ţinând seamă de relaţiile încadrate, obţinem:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} a_{21} - a_{10} a_{11} \ , \ \beta_3 = a_{11}^2 b_3 - \frac{1}{2} a_{10} a_{11}^2$$

şi

$$\beta_3 = a_{11} \alpha_2 + a_{11}^2 a_3$$

de unde scoatem:

$$a_{11} b_3 - a_{11}^2 a_3 = \frac{1}{2} (a_{21} - a_{11} a_{10})$$

relaţie care ne dă pe b_3. Putem atunci totdeauna, oricare ar fi a_3, să dispunem de coeficienţii a_{ij} ai schimbării de coordonate astfel ca să avem $\boxed{b_3 = 0}$. Condiţia se scrie

$$a_{21} = a_{11} a_{10} - 2a_{11}^2 a_3.$$

Reperul determinat prin condiţiile precedente este un reper de ordinul al 3-lea; dacă presupunem că şi reperul iniţial este de ordinul trei avem $a_3 = 0$ deci $\boxed{a_{21} = a_{11} a_{10}}$. Această condiţie adăugată la cele precedente ne determină formulele de trecere dela un reper de ordinul al 3-lea la un reper de acelaşi ordin.

20. **Reper de ordinul patru.** Prin continuarea procedeului și ținând seamă de relaţiunile încadrate, obţinem

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} a_{11} a_{20} - \frac{1}{2} a_{11} a_{10}^2 \,, \quad \beta_4 = a_{11}^2 b_4 - \frac{1}{4} a_{11}^2 a_{20} + \frac{1}{2} a_{11}^2 a_{10}^2$$

și

$$\beta_4 = a_{11}^4 a_4 + a_{11} \alpha_3 + \frac{1}{8} a_{11}^2 a_{10}^2$$

deci prin eliminarea lui α_3 și β_4:

$$a_{11}^2 a_4 - b_4 = \frac{1}{4}\left(a_{20} - \frac{1}{2} a_{10}^2\right). \tag{46}$$

Putem deci totdeauna determina unii coeficienţi a_{ij} rămaşi independenţi, astfel încât să avem $\boxed{b_4 = 0}$; definim prin această condiţie un reper de ordinul al 4-lea.

Dacă presupunem că reperul iniţial este un reper de ordinul al 4-lea, vom avea și $\boxed{a_4 = 0}$ și relația (46) ne dă $\boxed{a_{20} = \frac{1}{2} a_{10}^2}$, condiţie care adăugată la cele precedente definesc trecerea de la un sistem de coordonate faţă de un reper de ordinul al 4-lea, la alt sistem de coordonate de aceeaşi natură.

Pentru simplificarea scrierii formulelor vom pune de aci înainte $\boxed{a_{11} = \lambda, a_{10} = \mu}$. Formulele (32) de schimbare a coordonatelor se scriu atunci:

$$
(32')\quad \begin{cases}
x_1 = \dfrac{\lambda y_1 + \lambda\mu\, y_2}{1 + \mu y_1 + \dfrac{1}{2}\mu^2 y_2} = \\[2ex]
\lambda\, y_1 - \dfrac{1}{2}\lambda\mu y_1^2 + \dfrac{1}{4}\lambda\,\mu^2 y_1^3 + \alpha_4\, y_1^4 + \alpha_5\, y_1^5 + \ldots \\[2ex]
x_2 = \dfrac{\lambda^2\, y_2}{+ \mu y_1 + \dfrac{1}{2}\mu^2 y_2} = \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\lambda^2\, y_1^2 - \dfrac{1}{2}\lambda^2\mu\, y_1^3 + \dfrac{3}{8}\lambda^2\mu^2 y_1^4 + \beta_5 y_1^5 + \beta_6\, y_1^6 + \ldots
\end{cases}
$$

și vom avea de asemeni

$$
(36')\quad \begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{2}x_1^2 + a_5\, x_1^5 + a_6\, x_1^6 + \ldots, \\
y_2 &= \frac{1}{2}y_1^2 + b_5\, y_1^5 + b_6\, y_1^6 + \ldots
\end{aligned}
$$

care înlocuesc formulele (36) și (37), de unde deducem identitățile

$$
(39')\quad \begin{cases}
\lambda y_1 + \lambda\mu\left(\dfrac{1}{2}y_1^2 + b_5\, y_1^5 + b_6\, y_1^6 + \ldots\right) \equiv \\[2ex]
\qquad \left(\lambda\, y_1 - \dfrac{1}{2}\lambda\mu y_1^2 + \dfrac{1}{4}\lambda\mu^2 y_1^3 + \alpha_4\, y_1^4 + \ldots\right) \times \\[2ex]
\qquad\qquad \times \left[1 + \mu y_1 + \dfrac{1}{2}\mu^2\left(\dfrac{1}{2}y_1^2 + b_5\, y_1^5 + \ldots\right)\right] \\[2ex]
\lambda^2\left(\dfrac{1}{2}y_1^2 + b_5\, y_1^5 + b_6\, y_1^6 + \ldots\right) \equiv \\[2ex]
\left(\dfrac{1}{2}\lambda^2\, y_1^2 - \dfrac{1}{2}\lambda^2\mu y_1^3 + \dfrac{3}{8}\lambda^2\,\mu^2 y_1^4 + \beta_5\, y_1^5 + \ldots\right) \times \\[2ex]
\qquad\qquad \times \left[1 + \mu y_1 + \dfrac{1}{2}\mu^2\left(\dfrac{1}{2}y_1^2 + b_5\, y_1^5 + \ldots\right)\right]
\end{cases}
$$

şi

$$
(40') \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\lambda^2 y_1^2 - \dfrac{1}{2}\lambda^2 \mu\, y_1^3 + \dfrac{3}{8}\lambda^2 \mu^2 y_1^4 + \beta_5 y_1^5 + \ldots \equiv \\ \dfrac{1}{2}\left(\lambda y_1 - \dfrac{1}{2}\lambda\mu y_1^2 + \dfrac{1}{4}\lambda \mu^2 y_1^3 + \alpha_4 y_1^4 + \ldots\right)^2 + \\ \qquad + a_5\left(\lambda y_1 - \dfrac{1}{2}\lambda\mu\, y_1^2 + \ldots\right)^5 + \ldots \end{cases}
$$

care înlocuesc identităţile (39) şi (40). Putem atunci pleca dela aceste formule mai departe în aplicarea metodei.

21. **Interpretări geometrice. Conica osculatoare.** Inainte de aceasta vom face câteva aplicaţii geometrice ale formulelor găsite.

Formulele (32′) arată că vârfurile A_0, A_1, A_2 ale unui reper oarecare de ordinul 4, au, faţă de un reper de ordinul 4, după cele arătate anterior (§ 14), coordonatele proiective omogene

$$
A_0\,(1, 0, 0) \quad ; \quad A_1\,(\mu, \lambda, 0) \quad ; \quad A_2\left(\frac{1}{2}\mu^2, \lambda\mu, \lambda^2\right),
$$

valori la care se reduc coeficienţii a_{ij}. Coordonatele proiective neomogene ale vârfului A_2 sunt prin urmare:

$$
x_1 = 2\,\frac{\lambda}{\mu}\ , \quad x_2 = 2\,\frac{\lambda^2}{\mu^2}
$$

şi prin urmare satisfac ecuaţia

$$
(47) \qquad x_2 = \frac{1}{2}\,x_1^2,
$$

ceea ce arată că punctul A_2 descrie, când reperul variază, o conică Γ de ecuaţie (47). In coordonate proiective omogene ecuaţia conicei se scrie

$$
2X_0\,X_2 - X_1^2 = 0,
$$

astfel că ecuaţia tangentei într'un punct (a, b, c) al acestei conice se scrie

$$
cX_0 - bX_1 + aX_2 = 0.
$$

Ecuaţiile tangentelor în A_0 (1, 0, 0) şi A_2 (0, 0, 1) la Γ vor fi deci $X_2 = 0$, $X_1 = 0$, deci ele se întâlnesc în punctul A_1 (0, 1, 0). Pe de altă parte, din ecuaţia (47) a conicei Γ cu prima ecuaţie (36′) a curbei (C), se deduce că (C) şi Γ au un contact de ordinul 4; conica Γ este deci *conica osculatoare* la curbă în punctul considerat. Căpătăm astfel interpretarea geometrică căutată pe care o putem exprima în modul următor:

Vârful A_0 al triunghiului de referință a unui reper oarecare de ordinul 4, se confundă cu punctul considerat al curbei; vârful A_2 este un punct arbitrar pe conica osculatoare Γ, iar vârful A_1, se găsește la intersecția tangentelor în A_0 și A_2 la conica osculatoare.

22. **Reper de ordinul cinci. Puncte sextactice.** Continuând identificările coeficienţilor lui y_1^5 în relaţiile (39′) vom găsi mai întâi

$$-\frac{1}{8}\lambda\mu^3 + \frac{1}{4}\lambda\mu^3 + \alpha_4 = 0 \qquad \text{deci } \alpha_4 = -\frac{1}{8}\lambda\mu^3$$

$$\beta_5 + \frac{3}{8}\lambda^2\mu^3 - \frac{1}{8}\lambda^2\mu^3 = \lambda^2 b_5 \qquad \text{deci } \beta_5 = \lambda^2 b_5 - \frac{1}{4}\lambda^2\mu^3$$

apoi din (40′)

$$\beta_5 = \lambda^5 a_5 + \frac{1}{2}\left(2\lambda\alpha_4 - \frac{1}{4}\lambda^2\mu^3\right)$$

de unde prin eliminarea lui α_4 și β_5:

$$b_5 = \lambda^3 a_5. \tag{48}$$

Se deduce de aci că pentru reperele de ordinul patru se prezintă o particularitate analoagă cu aceea a reperelor de primul ordin (§ 18). Dacă $a_5 = 0$ pentru un reper de ordinul 4 avem şi $b_5 = 0$ pentru orice reper de ordinul patru. Găsim deci o nouă proprietate proiectivă obţinută prin anularea invariantului diferenţial de ordinul cinci a_5. Vom da mai târziu (§ 33) expresia acestui invariant diferenţial. Să căutăm deocamdată o interpretare geometrică a proprietăţii constatate.

Din prima ecuaţie (36′) se vede că ecuaţia curbei (C) se scrie în cazul când $a_5 = 0$

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + a_6 a_1^6 + \ldots$$

astfel în cât conica Γ şi curba C au în punctul considerat un contact de ordinul cinci: *conica osculatoare este supraosculatoare.* Un punct care satisface la condiţia $a_5 = 0$, se numeşte din această cauză: *punct sextactic* şi rezultă din cele ce preced că un punct sextactic se transformă, printr'o omografie oarecare, într'un punct cu acelaşi caracter.

Excludem din studiul nostru punctele sextactice; vom avea $a_5 \neq 0$. Din (48) se vede că luând pentru λ valoarea

$$\lambda = \sqrt[3]{-\frac{1}{20\, a_5}}$$

vom avea $\boxed{b_5 = -\frac{1}{20}}$. Reperul de ordinul patru determinat prin această condiţie suplimentară este un reper de ordinul cinci. Relaţia precedentă arată că în domeniul real avem un singur reper de ordinul cinci; în domeniul complex avem încă trei repere corespunzând tuturor valorilor rădăcinii cubice.

Să presupunem că reperul iniţial este un reper de ordinul cinci, deci $\boxed{a_5 = -\frac{1}{20}}$. Formula (48) ne dă $\lambda^3 = 1$, deci în domeniul real $\boxed{\lambda = 1}$; relaţie care ne dă condiţia pentru ca formulele (32′) să ne dea schimbarea de coordonate dela un reper la alt reper de ordinul cinci.

23. **Arc proiectiv.** Prima relaţie (32′) ne arată că avem:

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{2} \mu y_1^2 + \ldots$$

deoarece $\lambda = 1$. Să presupunem atunci curba exprimată parametric în funcţie de un parametru t şi fie $t + dt$, valoarea parametrului într'un punct M al curbei vecin cu punctul considerat cu care coincide vârful A_0 al reperului de ordinul cinci. Relaţia precedentă ne arată că *abscisele* x_1 şi y_1 ale punctului M faţă de două repere de ordinul cinci sunt infiniţi mici în raport cu dt, de acelaşi ordin; fie $f(t)\,dt$ partea lor principală care vom arăta că este de primul ordin. Consideraţiile precedente ne arată că $f(t)\,dt$ este o *formă diferenţială invariantă* faţă de transformările proiective şi schimbările de parametru. In adevăr (cf. § 10) fie $(\overline{C})$ curba în care se transformă (C) printr'o transformare omografică oarecare H; (R) un reper de ordinul cinci în punctul considerat al curbei (C), $(\overline{R})$ un reper de ordinul cinci în punctul transformat al curbei $(\overline{C})$ şi $(\overline{R}')$ reperul în care se transformă (R) prin omografia H. Putem face de asemeni pe curba $(\overline{C})$ o schimbare de parametru $\overline{t} = \varphi(t)$ astfel încât valoarea parametrului $\overline{t}$ în punctul $\overline{M}$, transformatul lui M, să fie $\overline{t} + d\overline{t}$, şi partea principală a *abscisei* punctului $\overline{M}$ faţă de $\overline{R}$ să fie $\overline{f}(\overline{t})\,d\overline{t}$. Spun că avem în virtutea schimbării de parametru

$$\overline{f}(\overline{t})\,d\overline{t} = f(t)\,dt.$$

In adevăr în virtutea definiţiei coordonatelor relative, ecuaţia lui $(\overline{C})$ faţă de $(\overline{R}')$ este identică cu ecuaţia lui (C) faţă de (R); rezultă că $(\overline{R}')$ este un reper tot de ordinul cinci şi că partea principală a abscisei punctului $\overline{M}$ faţă de $(\overline{R}')$ este tot $f(t)\,dt$. Dar $(\overline{R})$ şi $(\overline{R}')$ fiind repere de ordinul cinci, părţile principale ale absciselor punctului $\overline{M}$ faţă de $(\overline{R})$ şi $(\overline{R}')$ vor fi, în virtutea celor ce preced, egale, deci vom avea

$$f(t)\,dt = \overline{f}(\overline{t})\,d\overline{t}$$

adică tocmai ceea ce voiam să demonstrăm. Dacă notăm

$$\sigma = \int f(t)\,dt = \int \overline{f}(\overline{t})\,d\overline{t}$$

parametrul σ este un invariant proiectiv definit cu aproximația unei constante aditive; prin analogie îl vom numi *arcul proiectiv al curbei.* O definiție plecând dela noțiuni geometrice concrete, a acestui parametru descoperit pe cale analitică naturală, nu se cunoaște încă.

24. **Reper de ordinul șase. Curburi proiective.** Deoarece avem încă o infinitate de repere de ordinul cinci (depinzând de parametrul μ), putem merge mai departe în aplicarea metodei ecuației reduse până la identificarea coeficienților lui y_1^6 în identitățile (39′) și (40′). Avem din (39′):

$$\alpha_5 - \frac{1}{8}\mu^4 + \frac{1}{16}\mu^4 = -\frac{\mu}{20} \qquad \text{deci } \alpha_5 = -\frac{1}{20}\mu + \frac{1}{16}\mu^4$$

$$\beta_6 - \frac{1}{20}\mu - \frac{1}{4}\mu^4 + \frac{3}{32}\mu^4 = b_6 \qquad \text{deci } \beta_6 = b_6 + \frac{1}{20}\mu + \frac{5}{32}\mu^4$$

și din (40′)

$$\beta_6 = a_6 - \frac{1}{20}\mu + \frac{1}{16}\mu^4 + \frac{1}{16}\mu^4 + \frac{1}{32}\mu^4$$

deci prin eliminarea lui β_6:

$$b_6 = a_6 - \frac{1}{10}\mu. \tag{49}$$

Oricare ar fi a_6, luând $\mu = 10\,a_6$ vom avea $\boxed{b_6 = 0}$; reperul de ordinul cinci determinat prin această condiție suplimentară este un reper de ordinul șase. Să presupunem că reperul inițial este de ordinul șase deci $\boxed{a_6 = 0}$; după (49) vom avea $\boxed{\mu = 0}$. Relațiile de schimbare a coordonatelor (32′) se reduc la

$$x_1 = y_1 \quad ; \quad x_2 = y_2$$

cărora le corespunde transformarea identică. Avem prin urmare, în domeniul real, un singur reper, bine definit, de ordinul șase.

Ecuația curbei față de un reper de ordinul șase, dacă notăm

$$k = 280\ a_7 \quad , \quad k_1 = 2240\ a_8,$$

şi ţinem seamă de rezultatele găsite, se va scrie sub forma:

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \frac{1}{280} k x_1^7 + \frac{1}{2.240} k_1 x_1^8 + a_9 x_1^9 + \dots \tag{50}$$

Reperul de ordinul şase fiind bine definit, coeficienţii k, k_1, a_9,... sunt invarianţi proiectivi ai curbei; ei se numesc *curburi proiective*.

25. **Alte interpretări geometrice. Normala proiectivă.** In spiritul metodei generale de cercetare arătate anterior (§ 9), să căutăm cubicele care au în punctul considerat al curbei, un contact de ordin cât mai ridicat. Fie

$$\begin{aligned} &A + Bx_1 + Cx_2 + Dx_1^2 + Ex_1 x_2 + Fx_2^2 + \\ &Gx_1^3 + Hx_1^2 x_2 + Ix_1 x_2^2 + Jx_2^3 = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

ecuaţia unei cubice în plan, în care intră nouă parametri nedeterminaţi esenţiali. Condiţiile unui contact de ordinul n exprimându-se prin $n + 1$ relaţii, ne putem aştepta să determinăm parametrii din ecuaţia cubicei astfel încât să avem un contact de al 8-lea ordin. Pentru aplicaţii este însă mai interesant să determinăm cubicele care au un contact de ordinul 7, care formează un fascicol.

Condiţiile ca un punct M de coordonate (x_1, x_2) faţă de un reper de ordinul şase, să aparţină cubicei de ecuaţie (51) se vor obţine înlocuind în această ecuaţie pe x_2 cu valoarea sa (50). Căpătăm o ecuaţie în x_1 ale cărei rădăcini sunt abscisele punctelor de intersecţie ale curbei şi cubicei. Această ecuaţie se scrie:

$$\left\{\begin{aligned} &A + Bx_1 + C\left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \frac{1}{280} k x_1^7 + \dots\right) + Dx_1^2 \\ &\quad + Ex_1\left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \dots\right) \\ &\quad + F\left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \dots\right)^2 + Gx_1^3 \\ &\quad + Hx_1^2\left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \dots\right) \\ &\quad + Ix_1\left(\frac{1}{2} x_1^2 - \dots\right)^2 + J\left(\frac{1}{2} x_1^2 - \dots\right)^3 = 0. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Pentru ca să avem un contact de ordinul 7, va trebui ca ecuaţia (52) să admită pe $x_1 = 0$, ca rădăcină multiplă de ordinul 8, prin urmare în desvoltarea primului membru al acestei ecuaţii după puterile lui x_1, vor trebui să se anuleze toţi coeficienţii până la termenul în x_1^7 inclusiv. Aceste condiţii ne vor da

$$A = 0,\ B = 0,\ \frac{1}{2} C + D = 0,\ \frac{1}{2} E + G = 0,\ \frac{1}{4} F + \frac{1}{2} H = 0$$

$$-\frac{1}{20} C + \frac{1}{4} I = 0,\ -\frac{1}{20} E + \frac{1}{8} J = 0,$$

$$\frac{k}{280} C - \frac{1}{20} F - \frac{1}{20} H = 0$$

deci

$$A = B = 0\ ,\ D = -\frac{1}{2} C\ ,\ G = -\frac{1}{2} E\ ,\ H = -\frac{k}{14} C,$$

$$F = \frac{k}{7} C\ ,\ I = \frac{1}{5} C\ ,\ J = \frac{2}{5} E;$$

şi ecuaţia (51) devine, notând $\lambda = \frac{C}{E}$:

$$\text{(53)}\quad \left(x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_1^3 + \frac{2}{5} x_2^3\right) + \lambda \left(x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{k}{7} x_2^2 - \frac{k}{14} x_1^2 x_2 + \frac{1}{5} x_1 x_2^2\right) = 0.$$

Avem aşa dar un fascicol de cubice. Printre acestea există una singură care să admită punctul considerat (originea) ca punct dublu; ea se obţine anulând termenii de gradul zero şi unu din ecuaţie, deci făcând $\lambda = 0$, ceea ce ne dă cubica

$$\text{(54)}\quad x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_1^3 + \frac{2}{5} x_2^3 = 0.$$

Această cubică admite în origine, la cele două ramuri ale ei, drept tangente, dreptele $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, adică laturile $A_0 A_1$ şi $A_0 A_2$ ale reperului de ordinul şase. Latura $A_0 A_2$

capătă astfel o interpretare geometrică; ea poartă numele de *normală proiectivă* şi i se poate da definiţia geometrică următoare:

Se consideră într'un punct al curbei (C), cubica (γ) *având un contact de ordinul şapte şi un punct dublu în punctul considerat. Tangenta în acel punct la ramura transversală a cubicei este normala proiectivă.*

Interpretarea geometrică a reperului de ordinul şase rezultă numai decât din consideraţiile dela § 23. Ea se poate exprima în modul următor:

Vârful A_0 *coincide cu punctul considerat al curbei, vârful* A_2 *este punctul în care normala proiectivă întâlneşte a doua oară conica osculatoare* Γ. *In sfârşit vârful* A_1 *este intersecţia tangentelor în* A_0 *şi* A_2 *la conica* Γ.

26. **Punctul lui Halphen. Puncte şi curbe de coincidenţă.** Să considerăm cubicele de ecuaţii (53) care au un contact de ordinul 7 cu curba dată, deci sunt limitele cubicelor care trec prin opt puncte ale curbei ce tind către punctul considerat. Se ştie din geometria analitică elementară că toate cubicele care trec prin opt puncte date au şi al nouălea punct comun. Vom arăta că această proprietate are loc şi la limită în cazul cubicelor (53). In adevăr toate aceste cubice care formează un fascicul trec prin intersecţia cubicei (54) corespunzătoare lui $x = 0$ şi a cubicei

$$(55)\qquad x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{k}{7}x_2^2 - \frac{k}{14}x_1^2 x_2 + \frac{1}{5}x_1 x_2^2 = 0$$

corespunzătoare lui $\lambda = \infty$ şi aceste două cubice au evident nouă puncte comune. Pentru a le determina vom rezolva sistemul de ecuaţii (54) şi (55). Din (54) punând $x_2 = t\,x_1$ scoatem

$$x_1 = \frac{10\,t}{5 - 4\,t^3}, \quad x_2 = \frac{10\,t^2}{5 - 4\,t^3},$$

expresii raţionale pentru coordonatele x_1, x_2 al unui punct al cubicei nodale, care înlocuite în (55) ne dă:

$$t^7\,(14\,t - 5\,k) = 0$$

ecuaţie care admite rădăcina $t = 0$ de ordinul 7, rădăcina $t = \infty$ (care s'a eliminat şi care corespund punctului $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ socotit de opt ori, şi în sfârşit soluţia $t = \frac{5k}{14}$, care corespunde celui de al nouălea punct comun H care va avea deci coordonatele

$$x_1 = \frac{490\,k}{686 - 25\,k^3} \quad ; \quad x_2 = \frac{175\,k^2}{686 - 25\,k^3}.$$

Acest punct remarcabil este denumit punctul lui Halphen. El poate fi definit geometriceşte sub forma următoare.

Cubicele care au cu o curbă C într'un punct al ei un contact de ordinul şapte formează un fascicol şi mai au un punct comun, punctul lui Halphen.

Punctul lui Halphen este în general diferit de punctul corespunzător al curbei; pentru ca să coincidă trebue ca să avem $k = 0$. *Punctele curbei care coincid cu punctul corespunzător al lui Halphen sunt acele în care se anulează prima curbură proiectivă k.* Astfel de puncte se numesc *puncte de coincidenţă* şi sunt în general puncte excepţionale ale curbei. Când o curbă are toate punctele sale de coincidenţă, ea se numeşte *curbă de coincidenţă.* Condiţia necesară şi suficientă ca o curbă să fie de coincidenţă este ca prima sa curbură k să fie identic nulă.

27. **Metoda reperului mobil.** Ca şi în cazul planului euclidian, vom obţine rezultate nouă dacă vom stabili formule analoage cu formulele lui F r e n e t. Le vom obţine plecând dela studiul variaţiei reperului de ordinul şase de-a-lungul curbei.

Să presupunem curba (C) definită parametric în funcţiune de un parametru t şi să considerăm succesiunea de repere (R) de ordinul şase, definite în fiecare punct al curbei. Coordonatele proiective omogene, în raport cu un reper fix, ale vârfurilor triunghiului de referinţă, care definesc reperul, le vom nota ca şi mai înainte (§ 14), cu A_0, A_1, A_2 prescurtat. Vom considera în acelaşi timp şi punctele ale căror coordonate față de reperul fix sunt derivatele $\frac{dA_0}{dt}$, $\frac{dA_1}{dt}$, $\frac{dA_2}{dt}$ în raport cu t ale coordonatelor A_0, A_1, A_2. Fie p_{i0}, p_{i1}, p_{i2} coordonatele relative față de reperul (R) ale punctului de coordonate $\frac{dA_i}{dt}$ $(i = 0, 1, 2)$. Vom avea (după § 14) relațiile prescurtate

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dA_0}{dt} &= p_{00} A_0 + p_{01} A_1 + p_{02} A_2, \\
\frac{dA_1}{dt} &= p_{10} A_0 + p_{11} A_1 + p_{12} A_2, \\
\frac{dA_2}{dt} &= p_{20} A_0 + p_{21} A_1 + p_{22} A_2.
\end{aligned}
\right. \tag{56}
$$

Coeficienții p_{ij} $(i, j = 0, 1, 2)$ sunt evident funcțiuni de t pe care urmează să le calculăm. După determinarea și înlocuirea lor în formulele (56) acestea devin formulele lui Frenet.

Procedeul de determinare a coeficienților p_{ij} este analog cu acel din planul euclidian. Vom căuta mai întâi condițiile pe care trebue să le satisfacă coordonatele relative față de reperul (R), ale unui punct M din plan, pentru ca acesta să rămână fix în plan, când reperul (R) variază de-a-lungul curbei (C). Fie pentru aceasta X_0, X_1, X_2 coordonate proiective omogene și $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$, $x_2 = \frac{X_2}{X_0}$, coordonatele proiective neomogene față de reperul (R), ele sunt evident funcțiuni de t. Să însemnăm cu M, prescurtat, coordonatele proiective omogene ale punctului M față de reperul fix. Ele pot fi funcțiuni de t, deși punctul e fix, fiindcă le putem înmulți cu un factor arbitrar funcțiune de t. Vom avea după § 14:

$$M = X_0 A_0 + X_1 A_1 + X_2 A_2.$$

Să derivăm această relaţie în raport cu t, vom avea, dacă ţinem seama de formulele (56)

$$\frac{dM}{dt}=\left(\frac{dX_0}{dt}+p_{00}X_0+p_{10}X_1+p_{20}X_1\right)A_0+$$
$$\left(\frac{dX_1}{dt}+p_{01}X_0+p_{11}X_1+p_{21}X_2\right)A_1+$$
$$\left(\frac{dX_2}{dt}+p_{02}X_0+p_{12}X_1+p_{22}X_2\right)A_2.$$

Dacă punctul de coordonate $M(t)$ este fix, el coincide cu punctul de coordonate $M(t+dt)$ deci şi cu punctul de coordonate $\frac{dM}{dt}$; rezultă de aci proporţionalitatea coordonatelor proiective relative ale punctelor de coordonate $M(t)$ şi $\frac{dM}{dt}$. Dacă însemnăm cu M factorul de proporţionalitate avem aşa dar:

$$\frac{dX_0}{dt}+p_{00}X_0+p_{10}X_1+p_{20}X_2=\lambda X_0$$
$$\frac{dX_1}{dt}+p_{01}X_0+p_{11}X_1+p_{21}X_2=\lambda X_1$$
$$\frac{dX_2}{dt}+p_{02}X_0+p_{12}X_1+p_{22}X_2=\lambda X_2$$

şi din aceste relaţii deducem valoarea derivatelor

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{X_0}\frac{dX_1}{dt}-\frac{X_1}{X_0^2}\frac{dX_0}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{1}{X_0}\frac{dX_2}{dt}-\frac{X_2}{X_0^2}\frac{dX_0}{dt}.$$

Făcând calculele indicate de aceste relaţii căpătăm:

$$(57)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-p_{01}+(p_{00}-p_{11})x_1-p_{21}x_2+p_{10}x_1^2+p_{20}x_1x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-p_{02}-p_{12}x_1+(p_{00}-p_{22})x_2+p_{10}x_1x_2+p_{20}x_2^2 \end{cases}$$

relaţii care exprimă condiţiile ca punctul M de coordonate proiective neomogene x_1, x_2 faţă de reperul (R) să fie fix. Ele vor juca pentru geometria proiectivă acelaşi rol ca formulele (25) în planul euclidian.

28. **Determinarea coeficienţilor p_{ij}. Formulele lui Frenet.** Pentru a determina coeficienţii p_{ij} vom presupune punctul M fix pe curba (C); între x_1, x_2 avem pe lângă relaţiile (57) şi relaţia (50). Să o derivăm în raport cu t ţinând seamă de faptul că toate curburile $k, k_1, \ldots$ sunt funcţiuni de t. Vom avea:

$$
(58) \quad \begin{aligned}
\frac{dx_2}{dt} &= \left(x_1 - \frac{1}{4} x_1^4 + \frac{1}{40} k x_1^6 + \frac{1}{280} k_1 x_1^7 + \ldots\right) \frac{dx_1}{dt} \\
&+ \frac{1}{280} \frac{dk}{dt} x_1^7 + \frac{1}{2240} \cdot \frac{dk_1}{dt} x_1^8 + \ldots
\end{aligned}
$$

Dacă înlocuim în (57) pe x_2 cu valoarea sa (50) şi rezultatele le înlocuim în (58) obţinem o identitate între două serii întregi în x_1, în care e suficient să egalăm coeficienţii primelor puteri ale lui x_1 pentru a determina relaţiile necesare la calcularea coeficienţilor p_{ij} (cp. § 10). Procedând astfel obţinem mai întâi identitatea

$$
\begin{aligned}
&-p_{02} - p_{12} x_1 + (p_{00} - p_{22}) \left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \frac{k}{280} x_1^7 + \ldots \right) \\
&+ p_{10} x_1 \left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \ldots \right) + p_{20} \left(\frac{1}{2} x_1^2 - \ldots \right)^2 \equiv \\
&\left(x_1 - \frac{1}{4} x_1^4 + \frac{1}{40} k x_1^6 + \frac{1}{280} k_1 x_1^7 + \ldots \right) \\
&\times \left[-p_{01} + (p_{00} - p_{11}) x_1 - p_{21} \left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \ldots \right) \right. \\
&\left. + p_{10} x_1^2 + p_{20} x_1 \left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \ldots \right) \right] + \frac{1}{280} \frac{dk}{dt} x_1^7 + \ldots
\end{aligned}
$$

Prin identificarea coeficienţilor până la x_1^6 inclusiv obţinem:

$$
(59)\quad \left\{
\begin{array}{l}
p_{02}=0\ ,\ p_{12}=p_{01}\quad ;\quad \frac{1}{2}(p_{00}-p_{22})=p_{00}-p_{11}\\
\frac{1}{2}p_{10}=-\frac{1}{2}p_{21}+p_{10}\quad \text{deci } p_{10}=p_{21}\\
\frac{1}{4}p_{20}=\frac{1}{4}p_{01}+\frac{1}{2}p_{20}\quad \text{deci } p_{20}=-p_{01}\\
-\frac{1}{20}(p_{00}-p_{22})=-\frac{1}{4}(p_{00}-p_{11})\ \text{deci } p_{00}=p_{11}=p_{22}\\
-\frac{1}{20}p_{10}=\frac{1}{20}p_{21}+\frac{1}{8}p_{21}-\frac{1}{4}p_{10}-\frac{1}{40}k.\\
\text{deci}\qquad p_{10}=p_{21}=-k.
\end{array}
\right.
$$

Pentru coeficienţii lui x_1^7 avem:

$$-\frac{1}{20}p_{20}=-\frac{1}{20}p_{20}-\frac{1}{8}p_{20}+\frac{1}{280}\frac{dk}{dt}-\frac{1}{280}p_{01}k_1$$

deci

$$(60)\qquad p_{01}k_1=\frac{dk}{dt}+35\,p_{01}.$$

Forma simplă a acestor rezultate explică alegerile valorilor numerice ale coeficienţilor desvoltării (50). Formulele (59) nu determină complet coeficienţii p_{ij}. Faptul se explică prin aceea că se mai poate alege arbitrar un parametru t pe curbă, precum şi un factor de proporţionalitate comun cu care putem înmulţi toate coordonatele A_i, fără a schimba reperul. Pentru a isprăvi determinarea coeficienţilor vom alege ca parametru arcul proiectiv σ (§ 23) al curbei şi vom presupune coordonatele A_j *normate* cu un factor astfel încât determinantul coordonatelor, pe care-l putem nota prescurtat $|A_0A_1A_2|$ să aibă o valoare numerică constantă (de ex.: valoarea unu). Prima condiţie o putem exprima în modul următor. Observăm că punctul M de pe curbă, corespunzător valorii $t + dt$ a parametrului este punctul de coordonate $A_0(t+dt)$ sau, limitându-ne la părţile principale: $A_0 + \frac{dA_0}{dt}dt$. Insă

$$A_0 + \frac{dA_0}{dt}dt = (1 + p_{00}\,dt)\,A_0 + p_{01}\,dt\,A_1$$

căci $p_{02} = 0$. Coordonatele proiective omogene ale punctului M, vor fi (limitându-ne la părţile principale)

$$X_0 = (1 + p_{00}\,dt)\ ,\ X_1 = p_{01}\,dt\ ,\ X_2 = 0$$

şi coordonatele proiective neomogene:

$$x_1 = \frac{X_1}{X_0} = \frac{p_{01}\,dt}{1 + p_{00}\,dt} = p_{01}\,dt.$$

Vom avea aşa dar

$$d\sigma = p_{01}\,dt;$$

dacă $\sigma = t$, atunci $p_{01} = 1$, şi prin urmare după formulele (59)

(61) $p_{02}=0,\ p_{12}=1,\ p_{21}=p_{10}=-k,\ p_{20}=-1,\ p_{00}=p_{11}=p_{22}$

A doua condiţie o exprimăm derivând în raport cu t relaţia

$$|A_0\,A_1\,A_2| = 1$$

şi ţinând seamă de relaţiile (56). După regula de derivare a determinanţilor avem:

$$\frac{d}{dt}\left|A_0\,A_1\,A_2\right| = \left|\frac{dA_0}{dt}\,A_1\,A_2\right| + \left|A_0\,\frac{dA_1}{dt}\,A_2\right| + \left|A_0\,A_1\,\frac{dA_2}{dt}\right|$$

$$= (p_{00} + p_{11} + p_{22})\ |A_0\,A_1\,A_2| = p_{00} + p_{11} + p_{22}.$$

Vom avea deci $p_{00} + p_{11} + p_{22} = 0$ şi comparând cu ultima formulă (61): $p_{00} = p_{11} = p_{22} = 0$. Toţi coeficienţii p_{ij} sunt astfel determinaţi şi înlocuind în formulele (56) căpătăm

(62) $$\frac{dA_0}{d\sigma} = A_1\ ,\ \frac{dA_1}{d\sigma} = -kA_0 + A_2\ ,\ \frac{dA_2}{d\sigma} = -A_0 - kA_1$$

relaţii care constituesc *formulele lui* F r e n e t căutate.

Din relaţia (60) scoatem

$$k_1 = \frac{dk}{d\sigma} + 35 \tag{63}$$

relaţia care arată că a doua curbură k_1, ca şi de altfel toate celelalte, nu este independentă ci se exprimă cu ajutorul primei curburi şi a derivatelor sale în raport cu arcul proiectiv.

29. **Aplicaţie. Curbele de coincidenţă.** Am arătat (§ 26) că pentru curbele pe care le-am numit de coincidenţă avem $k = 0$. Formulele (62) ale lui F r e n e t ne dau în acest caz:

$$\frac{dA_0}{d\sigma} = A_1 \quad ; \quad \frac{dA_1}{d\sigma} = A_2 \quad ; \quad \frac{dA_2}{d\sigma} = -A_0$$

sau eliminând pe A_1 şi A_2:

$$\frac{d^3A_0}{d\sigma^3} = \frac{d^2A_1}{d\sigma^2} = \frac{dA_2}{d\sigma} = -A_0 \quad \text{deci} \quad \frac{d^3A_0}{d\sigma^3} + A_0 = 0.$$

Coordonatele A_0 ale originii reperului, care sunt coordonatele unui punct variabil pe curba (C) căutată, satisfăcând această ecuaţie lineară şi omogenă cu coeficienţi constanţi, a cărei ecuaţie caracteristică este $r^3 + 1 = 0$, cu rădăcinile

$$r_1 = -1 \quad , \quad r_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ecuaţie care are deci sistemul de soluţii fundamentale

$$e^{-\sigma}, \; e^{\frac{\sigma}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma, \; e^{\frac{\sigma}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma,$$

vom avea:

$$A_0 = M_0\,e^{-\sigma} + M_1\,e^{\frac{\sigma}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma + M_2\,e^{\frac{\sigma}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma.$$

In această formulă M_0, M_1, M_2 sunt numere fixe deci pot reprezenta coordonatele omogene a trei puncte fixe M_0, M_1 M_2, care pot fi luate ca vârfuri ale unui reper de referinţă ;

coordonatele X_0, X_1, X_2, omogene, ale punctului A_0 faţă de acest reper sunt după relaţia precedentă

$$X_0 = e^{-\sigma} \quad , \quad X_1 = e^{\frac{\sigma}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma \quad , \quad X_2 = e^{\frac{\sigma}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma,$$

iar coordonatele neomogene:

$$x_1 = \frac{X_1}{X_0} = e^{\frac{3\sigma}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma \quad , \quad x_2 = \frac{X_2}{X_0} = e^{\frac{3\sigma}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma.$$

Să aplicăm atunci curbei transformarea omografică prin care coordonatele proiective x_1, x_2 devin coordonate carteziene; curba (C) se transformă într'o curbă ale cărei coordonate polare sunt, după relaţiile precedente

$$\rho = e^{\frac{3\sigma}{2}} \quad , \quad \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma,$$

prin urmare ecuaţia curbei transformate, în coordonate polare, se scrie

$$\rho = e^{\omega\sqrt{3}} = e^{\omega \cot\frac{\pi}{6}}.$$

Curba transformată este deci o spirală logaritmică care taie razele vectoare sub un unghiu de 30^0.

Curbele de coincidenţă sunt aşa dar transformatele omografice ale spiralei logaritmice care taie razele vectoare sub un unghiu de 30^0.

30. **Curbe de curbură proiectivă constantă.** Ca o a doua aplicaţie a formulelor lui Frenet să căutăm curbele plane pentru care curbura proiectivă k este o constantă.

Din formulele (62) ale lui Frenet, deducem succesiv, prin eliminarea lui A_1, A_2:

$$\frac{d^2A_0}{d\sigma^2} = \frac{dA_1}{d\sigma} = -kA_0 + A_2$$

$$\frac{d^3A_0}{d\sigma^3} = -k\frac{dA_0}{d\sigma} + \frac{dA_2}{d\sigma} = -k\frac{dA_0}{d\sigma} - A_0 - kA_1$$

$$= -A_0 - 2k\frac{dA_0}{d\sigma}$$

deci

$$\frac{d^3A_0}{d\sigma^3} + 2k.\frac{dA_0}{d\sigma} + A_0 = 0.$$

Ecuația caracteristică a acestei ecuațiuni

$$r^3 + 2kr + 1 = 0$$

admite în general trei rădăcini distincte r_0, r_1, r_2, cărora le corespund soluțiile fundamentale $e^{r_0\sigma}$, $e^{r_1\sigma}$, $e^{r_2\sigma}$; vom putea scrie prin urmare

$$(64) \qquad A_0 = M_0\, e^{r_0\sigma} + M_1\, e^{r_1\sigma} + M_2\, e^{r_2\sigma}$$

unde constantele M_0, M_1, M_2 pot fi privite drept coordonate omogene a trei puncte fixe cu același nume. Față de reperul determinat (cf. § 14) de aceste coordonate, punctul A_0 va avea coordonatele omogene și neomogene

$$X_0 = e^{r_0\sigma} \quad , \quad X_1 = e^{r_1\sigma} \quad , \quad X_2 = e^{r_2\sigma}$$

$$x_1 = \frac{X_1}{X_0} = e^{(r_1 - r_0)\sigma} \quad , \quad x_2 = \frac{X_2}{X_0} = e^{(r_2 - r_0)\sigma} ;$$

dacă eliminăm atunci pe σ, vom avea

$$x_2 = x_1^m \qquad \left(m = \frac{r_2 - r_0}{r_1 - r_0}\right).$$

Ecuația curbelor de curbură proiectivă constantă se poate deci scrie sub această formă finită și prin urmare aceste curbe depind, în afară de constantele care definesc o transformare omografică, de o singură constantă arbitrară m, care de altfel se poate exprima cu ajutorul curburii k.

Să căutăm o caracterizare geometrică a acestor curbe. Fie N_0, N_1, N_2 punctele unde tangenta în A_0 la o asemenea curbă (C), întâlnește respectiv laturile $M_1 M_2$, $M_2 M_0$, $M_0 M_1$ ale triunghiului fix $M_0 M_1 M_2$. Un punct oarecare N al acestei tangente având coordonate de forma

$$N = \lambda A_0 + \frac{dA_0}{d\sigma}$$

vom avea, după (64),

$$N = (r_0 + \lambda)\, e^{r_0 \sigma} M_0 + (r_1 + \lambda)\, e^{r_1 \sigma} M_1 + (r_2 + \lambda)\, e^{r_2 \sigma} M_2$$

deci punctele N_0, N_1, N_2 corespund valorilor

$$\lambda_0 = -r_0\ ,\ \lambda_1 = -r_1\ ,\ \lambda_2 = -r_2$$

ale parametrului λ, pe când punctul A_0 corespunde valorii $\lambda = \infty$. Raportul anarmonic

$$(A_0\, N_0\, N_1\, N_2) = (\infty\, ,\, -r_0, -r_1, -r_2) = \frac{r_0 - r_2}{r_0 - r_1} = m$$

are deci o valoare constantă prin urmare curbele considerate se bucură de următoarea proprietate geometrică.

Tangenta într'un punct oarecare al unei curbe de curbură proiectivă constantă întâlneşte laturile unui triunghiu fix (pe care-l numim triunghiu fundamental) *în trei puncte care împreună cu punctul de contact au un raport anarmonic constant.*

Curbele plane care se bucură de această proprietate au fost denumite *curbe* W. Curbele de curbură proiectivă constantă sunt deci curbe W.

METODA LUI WILCZINSKI

31. **Ecuaţia diferenţială lineară a unei curbe.** In studiul curbelor de coincidenţă şi a curbelor de curbură constantă s'a văzut că coordonatele omogene ale unui punct al unei astfel de curbe verifică o ecuaţie diferenţială lineară şi omogenă de ordinul al III-lea. Se poate arăta uşor că această proprietate aparţine oricărei curbe plane.

O primă verificare a acestei proprietăţi se poate face, ca şi în cazurile de mai sus, plecând dela formulele (62) ale lui Frenet. In adevăr prin eliminarea lui A_1 şi A_2 din aceste formule, deducem succesiv:

$$\frac{d^2A_0}{d\sigma^2} = \frac{dA_1}{d\sigma} = -kA_0 + A_2 \qquad \text{deci } A_2 = \frac{d^2A_0}{d\sigma^2} + kA_0$$

apoi

$$\frac{d^3A_0}{d\sigma^3} = -k\frac{dA_0}{d\sigma} - \frac{dk}{d\sigma}A_0 + \frac{dA_2}{d\sigma} = -k\frac{dA_0}{d\sigma} - \frac{dk}{d\sigma}A_0 - A_0 - kA_1$$

sau

$$\frac{d^3A_0}{d\sigma^3} = -2k\frac{dA_0}{d\sigma} - \left(1 + \frac{dk}{d\sigma}\right)A_0$$

deci

$$\frac{d^3A_0}{d\sigma^3} + 2k\frac{dA_0}{d\sigma} + \left(1 + \frac{dk}{d\sigma}\right)A_0 = 0 \tag{65}$$

ceea ce demonstrează proprietatea. Dacă în această ecuaţie facem $k = 0$ sau $k = c$, obţinem ecuaţiile diferenţiale ale curbelor cunoscute.

In al doilea rând, dacă presupunem curba exprimată parametric prin coordonatele sale X_0, X_1, X_2 în funcţiune de parametrul t, oricare ar fi aceste funcţiuni, putem totdeauna determina trei funcţiuni p, q, r, de t, astfel încât ele să fie soluţiile ecuaţiei diferenţiale lineare şi omogene

$$\frac{d^3X}{dt^3} + p\frac{d^2X}{dt^2} + q\frac{dX}{dt} + rX = 0. \tag{66}$$

Condiţiile care determină funcţiunile p, q, r, se scriu în adevăr

$$X_i''' + pX_i'' + qX_i' + rX_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2)$$

unde am însemnat prin accente derivatele în raport cu t; ecuaţia (66) se mai poate scrie atunci sub forma

$$\begin{vmatrix} X''' & X'' & X' & X \\ X_0''' & X_0'' & X_0' & X_0 \\ X_1''' & X_1'' & X_1' & X_1 \\ X_2''' & X_2'' & X_2' & X_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{67}$$

Proprietatea este astfel din nou demonstrată.

Reciproc, să considerăm ecuaţia diferenţială lineară şi omogenă cea mai generală de ordinul al III-lea, pe care o putem scrie totdeauna sub forma (66) şi fie X_0, X_1, X_2 un sistem de soluţii fundamentale ale acestei ecuaţii. Punctul ale cărui coordonate omogene faţă de un reper fix sunt X_0, X_1, X_2 descrie, când t variază, o curbă (C). Fie Y_0, Y_1, Y_2

un alt sistem oarecare de soluţii fundamentale. Din teoria ecuaţiilor diferenţiale lineare şi omogene se ştie că avem

$$Y_0 = a_{00} X_0 + a_{10} X_1 + a_{20} X_2$$

$$Y_1 = a_{01} X_0 + a_{11} X_1 + a_{21} X_2$$

$$Y_2 = a_{02} X_0 + a_{12} X_1 + a_{22} X_2$$

unde coeficienţii a_{ij} sunt constante, astfel încât determinantul $a = |a_{ij}| \neq 0$. Fie (D) curba descrisă de punctul ale cărui coordonate omogene, faţă de acelaşi reper fix, sunt Y_0, Y_1, Y_2. Relaţiile precedente ne arată atunci, că (D) este transformata lui (C) prin omografia definită de relaţiile (30). Putem deci enunţa următoarea proprietate:

O ecuaţie diferenţială lineară şi omogenă de ordinul III defineşte printr'un sistem de soluţii fundamentale o anumită curbă (C) sau una oarecare din transformatele ei proiective şi numai pe acestea.

Această corespondenţă între ecuaţii diferenţiale şi figuri geometrice (în cazul nostru curbe) este baza metodei lui W i l c z i n s k i.

32. **Transformarea ecuaţiilor diferenţiale. Forma canonică.** Dacă la o ecuaţie diferenţială lineară şi omogenă de ordinul al III-lea corespunde, cum am văzut, cu excepţia unei omografii, o singură curbă, *reciproc*, fiind dată o curbă oarecare, există o infinitate de ecuaţii diferenţiale cărora să le corespundă, în sensul paragrafului precedent, acea curbă.

In adevăr, ecuaţia diferenţială este bine determinată când se dau coordonatele omogene X_0, X_1, X_2 al unui punct al curbei în funcţiune de parametrul t aşa cum arată ecuaţia (67). Dar putem, fără a schimba curba, să înmulţim toate coordonatele X_i cu un acelaşi factor $\frac{1}{\lambda(t)}$, funcţiune arbitrară de t şi apoi putem schimba parametrul t, înlocuindu-l cu o altă funcţiune arbitrară de un nou parametru a. Evident acestea sunt singurele modificări care se pot face fără a schimba curba (C); ele schimbă însă forma ecuaţiei corespunzătoare şi se traduc algebric prin transformarea în ecuaţia (66) de funcţiune şi variabilă independentă, definită de relaţiile

$$(68) \qquad X = \lambda(t)\, A \quad ; \quad \sigma = \sigma(t)$$

$A(\sigma)$ şi σ fiind noua funcţiune şi variabilă independentă.

Metoda lui Wilczinski constă în a alege funcţiunile $\sigma(t)$ şi $\lambda(t)$ astfel încât prin transformarea (68), ecuaţia (66) să aibă o formă cât mai simplă. Alegerea odată făcută dacă este unică, va rezulta că ecuaţia diferenţială (66), care este cea mai generală ecuaţie diferenţială de ordinul al III-lea lineară şi omogenă, se poate reduce la o *formă canonică*, în care coeficienţii, exprimaţi numai în funcţie de coeficienţii p, q, r ai formei iniţiale, vor fi, evident, invarianţi ai ecuaţiei (66) faţă de toate transformările (68) şi de asemeni invarianţi proiectivi ai curbei (C).

Pe de altă parte am văzut că pentru orice curbă plană la care formulele (62) ale lui Frenet sunt satisfăcute, *adică pentru orice curbă plană care nu se reduce la o conică* (vezi § 33), coordonatele A_0 ale originii reperului de ordinul şase, care descrie curba, exprimate în funcţiune de arcul proiectiv σ, satisfac la ecuaţia (65), care este evident o formă canonică, fiindcă este determinate în mod unic. Am arătat deci prin acest raţionament geometric că, în general, orice ecuaţie (66), prin o transformare de forma (68) se poate aduce la forma (65). Ne propunem să verificăm acest lucru şi prin calculul care rezultă din aplicarea directă a metodei lui Wilczinski.

Derivând de trei ori a doua relaţie (68) în raport cu t, obţinem succesiv, după regulele calculului diferenţial

$$X' = \lambda \frac{dA}{d\sigma}\sigma' + \lambda' A$$

$$X'' = \lambda \frac{d^2A}{d\sigma^2}\sigma'^2 + \lambda \frac{dA}{d\sigma}\sigma'' + 2\lambda' \frac{dA}{d\sigma}\sigma' + \lambda'' A$$

$$X''' = \lambda \frac{d^3A}{d\sigma^3}\sigma'^3 + (3\lambda'\sigma'^2 + 3\lambda\sigma'\sigma'')\frac{d^2A}{d\sigma^2}$$

$$+ (\lambda\sigma''' + 3\lambda'\sigma'' + 3\lambda''\sigma')\frac{dA}{d\sigma} + \lambda''' A$$

unde accentele însemnează derivate în raport cu t, pe când derivatele în raport cu σ s'au însemnat cu notaţia diferenţială. Substituind în (66) pe $\frac{dX}{dt} = X', X'', X'''$ prin valorile lor de mai sus, obţinem

$$\lambda\sigma'^3 \frac{d^3 A}{d\sigma^3} + (3\lambda'\sigma'^2 + 3\lambda\sigma'\sigma'' + p\lambda\sigma'^2)\frac{d^2 A}{d\sigma^2}$$

$$+ (\lambda\sigma''' + 3\lambda'\sigma'' + 3\lambda''\sigma' + p\lambda\sigma'' + 2p\lambda'\sigma' + q\lambda\sigma')\frac{dA}{d\sigma}$$

$$+ (\lambda''' + p\lambda'' + q\lambda' + r\lambda)A = 0,$$

ecuaţie care se scrie, împărţind cu $\lambda\sigma'^3$, sub forma

$$\frac{d^3 A}{d\sigma^3} + \bar{p}\frac{d^2 A}{d\sigma^2} + \bar{q}\frac{dA}{d\sigma} + \bar{r}A = 0 \tag{69}$$

unde $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$, au valorile date de relaţiile

$$\left\{\begin{aligned} \bar{p} &= 3\frac{\sigma''}{\sigma'^2} + 3\frac{\lambda'}{\lambda}\cdot\frac{1}{\sigma'} + p\frac{1}{\sigma'} \\ \bar{q} &= \frac{\sigma'''}{\sigma'^3} + 3\frac{\lambda'\sigma''}{\lambda\sigma'^2} + 3\frac{\lambda''}{\lambda}\cdot\frac{1}{\sigma'^2} \\ &\quad + p\frac{\sigma''}{\sigma'^3} + q\frac{1}{\sigma'^2} + 2\frac{\lambda'}{\lambda}p\cdot\frac{1}{\sigma'^2} \\ \sigma'^3\bar{r} &= \frac{\lambda'''}{\lambda} + p\frac{\lambda''}{\lambda} + q\frac{\lambda'}{\lambda} + r. \end{aligned}\right. \tag{70}$$

Pentru ca ecuaţia (69) să aibă forma (65) va trebui să avem mai întâi, $\bar{p} = 0$, adică

$$\frac{\sigma''}{\sigma'} + \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{p}{3} = 0 \tag{71}$$

sau integrând

$$\log(\lambda\sigma') + \frac{1}{3}\int p\,dt = 0 \quad \text{deci} \quad \lambda\sigma' = Ce^{-\frac{1}{3}\int p\,dt},$$

C fiind o constantă; rezultă deci că, după ce vom determina, prin condiţiile ce urmează, pe σ', relaţia precedentă ne dă pentru λ, o valoare bine determinată cu excepţia factorului constant C care nu schimbă forma ecuaţiei (65) sau (69).

Pentru ca să determinăm pe σ', vom scoate mai întâi valoarea lui λ în funcţie de σ', din relaţia precedentă sau din relaţia (71) şi o vom înlocui în expresiile (70) ale lui $\bar{q}$ şi $\bar{r}$. Astfel din (71) obţinem prin derivare

$$\frac{\lambda''}{\lambda}-\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}=-\frac{\sigma'''}{\sigma'}+\frac{\sigma''^2}{\sigma'^2}-\frac{1}{3}p'$$

sau înlocuind pe $\frac{\lambda'}{\lambda}$ cu valoarea sa scoasă din (71):

$$\frac{\lambda''}{\lambda}=-\frac{\sigma'''}{\sigma'}+2\frac{\sigma''^2}{\sigma'^2}+\frac{2}{3}p\frac{\sigma''}{\sigma'}+\frac{1}{9}p^2-\frac{1}{3}p'; \tag{72}$$

derivând din nou obţinem

$$\frac{\lambda'''}{\lambda}-\frac{\lambda'\lambda''}{\lambda^2}=-\frac{\sigma^{IV}}{\sigma'}+5\frac{\sigma''\sigma'''}{\sigma'^2}-4\frac{\sigma''^3}{\sigma'^3}+\frac{2}{3}p\left(\frac{\sigma'''}{\sigma'}-\frac{\sigma''^2}{\sigma'^2}\right)$$
$$+\frac{2}{3}p'\frac{\sigma''}{\sigma'}+\frac{2}{9}pp'-\frac{1}{3}p''$$

sau înlocuind pe $\frac{\lambda'}{\lambda}, \frac{\lambda''}{\lambda}$ prin valorile lor scoase din (71) şi (72)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\lambda'''}{\lambda}&=-\frac{\sigma^{IV}}{\sigma'}+6\frac{\sigma''\sigma'''}{\sigma'^2}-6\frac{\sigma''^3}{\sigma'^3}+p\left(\frac{\sigma'''}{\sigma'}-2\frac{\sigma''^2}{\sigma'^2}\right)\\&+\left(p'-\frac{1}{3}p^2\right)\frac{\sigma''}{\sigma'}-\frac{1}{3}p''+\frac{1}{3}pp'-\frac{1}{27}p^3.\end{aligned}\right. \tag{73}$$

Inlocuind în sfârşit în expresiile (70) ale lui $\bar{q}$ şi $\bar{r}$ obţinem:

$$\bar{q}=-2\frac{\sigma'''}{\sigma'^3}+3\frac{\sigma''^2}{\sigma'^4}+\left(-p'-\frac{1}{3}p^2+q\right)\frac{1}{\sigma'^2}$$

$$\bar{r}=-\frac{\sigma^{IV}}{\sigma'^4}+6\frac{\sigma''\sigma'''}{\sigma'^5}-6\frac{\sigma''^3}{\sigma'^6}+\left(p'+\frac{1}{3}p^2-q\right)\frac{\sigma''}{\sigma'^4}$$
$$+\left(r-\frac{1}{3}pq+\frac{2}{27}p^3-\frac{1}{3}p''\right)\frac{1}{\sigma'^2}.$$

Pentru a determina pe σ' rămâne să scriem a doua condiţie pentru ca ecuaţia (69) să aibă forma (65). Pentru aceasta este necesar şi suficient să determinăm o funcţiune k, astfel încât

$$\bar{q} = 2k \quad , \quad \bar{r} = 1 + \frac{dk}{d\sigma}$$

sau eliminând pe k:

$$\bar{r} - \frac{1}{2}\frac{d\bar{q}}{d\sigma} = 1 \quad \text{sau} \quad \bar{r} - \frac{1}{2}\frac{\bar{q}'}{\sigma'} = 1. \tag{74}$$

Derivând ultima expresie a lui $\bar{q}$ obţinem

$$\bar{q}' = -2\frac{\sigma^{IV}}{\sigma'^3} + 12\frac{\sigma''\sigma'''}{\sigma'^4} - 12\frac{\sigma''^3}{\sigma'^5} + 2\left(p' + \frac{1}{3}p^2 - q\right)\frac{\sigma''}{\sigma'^3}$$
$$+ \left(-p'' - \frac{2}{3}pp' + q'\right)\frac{1}{\sigma'^2}$$

de unde scoatem numaidecât

$$\bar{r} - \frac{1}{2}\frac{\bar{q}'}{\sigma'} = \frac{H}{\sigma'^3} \tag{75}$$

unde am însemnat cu H expresia:

$$H = r - \frac{1}{3}pq + \frac{2}{27}p^3 + \frac{1}{6}p'' + \frac{1}{3}pp' - \frac{1}{2}q'\,;$$

Condiţia (74) devine astfel

$$\sigma'^3 = H\,;$$

σ' este prin urmare determinat, în domeniul real, în mod unic prin relaţia precedentă, şi deci şi arcul proiectiv σ este determinat cu excepţia unei constante aditive, care depinde de alegerea originii arcelor, prin relaţia

$$\sigma = \int \sqrt[3]{H}\, dt.$$

In definitiv λ şi σ sunt complet determinaţi, astfel încât ecuaţia (68) se poate aduce într'un singur mod la forma

(65), care va fi aşa dar o formă canonică, aşa cum am prevăzut, pentru ecuaţiile diferenţiale lineare şi omogene de ordinul al III-lea. Se observă că relaţia $\bar{q} = 2k$, permite, înlocuind pe σ' prin valoarea sa din relaţia precedentă, să calculăm prima curbură proiectivă k în funcţie de t, atunci când curba, deci p, q, r, sunt daţi *à priori*.

33. **Observaţiuni şi consecinţe. Parametru proiectiv.** Din cele ce preced se constată în primul rând că pentru a determina pe σ' trebue ca $H \neq 0$. Insă arcul σ este determinat pentru orice curbă în orice punct care nu este sextactic (§ 23); rezultă că, invers, într'un punct sextactic avem neapărat $H = 0$. Curbele pentru care toate punctele sunt sextactice vor fi caracterizate deci prin relaţia identică $H \equiv 0$.

In al doilea rând se observă că în loc de a aduce ecuaţia (66) la forma canonică (65), se poate, după ce am determinat pe λ prin relaţia (71) dedusă din condiţia $\bar{p} = 0$, să determinăm pe σ' astfel încât să avem şi $\bar{q} = 0$. Ecuaţia (69) la care se reduce (66) prin transformările (68), va avea atunci forma

$$\frac{d^3 A}{d\sigma^3} + \bar{r} A = 0. \tag{76}$$

Ultima expresie a lui $\bar{q}$ ne arată că σ trebue să satisfacă la condiţiunea

$$\frac{\sigma'''}{\sigma} - \frac{3}{2}\frac{\sigma''^2}{\sigma'^2} - \frac{1}{2}\left(p' + \frac{1}{3}p^2 - q\right) = 0$$

care se mai scrie

$$\{\sigma\}_t = \frac{1}{2}\left(p' + \frac{1}{3}p^2 - q\right) \tag{77}$$

unde am însemnat prin $\{\sigma\}_t$ expresia [numită « Schwarzianul » funcţiunii $\sigma(t)$]:

$$\{\sigma\}_t = \frac{\sigma'''}{\sigma'} - \frac{3}{2}\frac{\sigma''^2}{\sigma'^2}.$$

Parametrul σ determinat prin ecuaţia (77) se numeşte *parametrul proiectiv* al curbei, şi depinde de trei constante arbitrare fiind determinat de o ecuaţie diferenţială de ordinul al III-lea; avem prin urmare o triplă infinitate de parametri proiectivi.

Să presupunem atunci că, în prealabil, am ales ca parametru t un parametru proiectiv; ecuaţia diferenţială (66) are forma:

$$X''' + r\,X = 0$$

cu $p = 0$, $q = 0$. Pentru a trece printr'o transformare (68) la o ecuaţie de forma:

$$\frac{d^3A}{d\sigma^3} + \bar{r}A = 0$$

unde σ să fie tot un parametru proiectiv vom avea după (77):

$$\{\sigma\}_t = 0 \qquad \text{sau} \qquad \frac{\sigma'''}{\sigma''} = \frac{3}{2}\frac{\sigma''}{\sigma'}$$

şi prin integrare:

$$\sigma'' = C\sigma'^{\frac{3}{2}} \qquad\qquad \sigma'^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}Ct + C_1$$

$$\sigma' = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}Ct - C_1\right)^2} \qquad\qquad \sigma = \frac{4}{C\,(2C_1 - Ct)} + C_2$$

sau, schimbând puţin relaţiile:

$$\sigma = \frac{At + B}{Ct + D}$$

prin urmare *toţi parametrii proiectivi sunt funcţiuni omografice de unul oarecare din ei.* Această proprietate ne permite să facem următoarea constatare. Fie t_1, t_2, t_3, t_4 valorile pe care le ia un parametru proiectiv în patru puncte M_1, M_2, M_3, M_4 ale curbei; *raportul anarmonic*

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_4} : \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_4}$$

nu depinde de parametrul proiectiv ales şi defineşte raportul anarmonic (M_1, M_2, M_3, M_4) *al celor patru puncte pe curbă.* De aci rezultă că raportul anarmonic este un invariant faţă de transformările omografice, căci aceste transformări nu schimbă forma ecuaţiei (66), iar transformările de parametri proiectivi nu schimbă valoarea raportului anarmonic.

In ultimul rând, relaţia (75) ne arată că dacă $\bar{p} = \bar{q} = 0$, avem

$$\bar{r}\,\sigma'^3 = H,$$

prin urmare dacă $H = 0$, avem $\bar{r} = 0$. Ecuaţia (69) devine

$$\frac{d^3 A}{d\sigma^3} = 0$$

şi admite sistemul de soluţii fundamentale $1, \sigma, \frac{1}{2}\sigma^2$, astfel că putem scrie

$$A = M_0 + M_1\sigma + \frac{1}{2} M_2\sigma^2.$$

Faţă de reperul definit de coordonatele M_0, M_1, M_2, coordonatele omogene ale punctului A_0 sunt

$$X_0 = 1 \quad , \quad X_1 = \sigma \quad , \quad X_2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

deci

$$x_1 = \sigma \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

şi eliminând pe σ, avem

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2$$

curba este deci o conică. *Curbele în care toate punctele sunt sextactice sunt conice.* Reciproc, fiecare punct al unei conice este sextactic deoarece conica osculatoare se confundă cu ea însăşi, prin urmare este supraosculatoare.

34. **Aplicaţie. Ecuaţia diferenţială a conicelor.** Să considerăm o curbă definită analitic prin ecuaţia explicită $y=f(x)$, faţă de un reper fix. Ecuaţia (67) devine, dacă luăm pe x ca parametru, deoarece $X_0=1$, $X_1=x$, $X_2=f(x)=y$

$$\begin{vmatrix} X''' & X'' & X' & X \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ y''' & y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$X''' - \frac{y'''}{y''} X'' = 0.$$

Avem aşa dar:

$$p = -\frac{y'''}{y''} \quad , \quad q = 0 \quad , \quad r = 0,$$

astfel încât

$$H = \frac{2}{27} p^3 + \frac{1}{6} p'' + \frac{1}{3} pp'.$$

Pentru a desăvârşi calculul lui H să notăm

$$\zeta = y''^{-\frac{2}{3}};$$

avem

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = -\frac{2}{3}\frac{y'''}{y''} \quad \text{deci } p = \frac{3}{2}\frac{\zeta'}{\zeta},$$

de unde scoatem

$$p' = \frac{3}{2}\frac{\zeta''}{\zeta} - \frac{3}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} \quad , \quad p'' = \frac{3}{2}\frac{\zeta'''}{\zeta} - \frac{9}{2}\frac{\zeta'\zeta''}{\zeta^2} + 3\frac{\zeta'^3}{\zeta^3}$$

astfel încât, înlocuind în expresia lui H obţinem:

$$\sigma'^3 = H = \frac{1}{4}\frac{\zeta'''}{\zeta}.$$

Condiţia $H=0$, ne dă $\zeta'''=0$, sau

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

obţinem astfel forma dată de H a l p h e n a ecuaţiei diferenţiale de ordinul 5, care caracterizează conicele.

35. **Condiţia de echivalenţă a două curbe.** Să considerăm o curbă (C) definită parametric în funcţie de t şi un punct M al curbei. Faţă de reperul de ordinul şase corespunzător în M curbei (C), ecuaţia acesteia se scrie [cf. (50)]

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \frac{k}{280} x_1^7 + \frac{k_1}{2240} x_1^8 + \ldots$$

Fie $(\overline{C})$ o altă curbă exprimată în funcţiune de parametrul $\bar{t}$, $\overline{M}$ un punct al ei şi

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{20} x_1^5 + \frac{\bar{k}}{280} x_1^7 + \frac{\bar{k}_1}{2240} x_1^8 + \ldots$$

ecuaţia curbei $(\overline{C})$ faţă de reperul de ordinul şase în $\overline{M}$. Pentru ca (C) şi $(\overline{C})$ să corespundă printr'o transformare proiectivă, M şi $\overline{M}$ fiind puncte corespunzătoare, vor trebui să coincidă şi reperele de ordinul şase şi deci şi ecuaţiile celor două curbe. Va trebui deci să avem în particular

$$\bar{k} = k \quad , \quad \bar{k}_1 = k_1$$

Dar după (63) avem

$$k_1 = \frac{dk}{d\sigma} + 35 \quad , \quad \bar{k}_1 = \frac{d\bar{k}}{d\bar{\sigma}} + 35$$

deci va trebui să avem:

$$\frac{dk}{d\sigma} = \frac{d\bar{k}}{d\bar{\sigma}} \text{ prin urmare } d\sigma = d\bar{\sigma} \text{ sau } \bar{\sigma} = \sigma + C.$$

Arcele proiective pe cele două curbe sunt egale, dacă alegem ca origine puncte corespunzătoare.

Reciproc condiţiile

$$k = \bar{k} \quad , \quad d\sigma = d\bar{\sigma}$$

sunt şi suficiente. Intr'adevăr formele canonice

$$\frac{d^3A}{d\sigma^3} + 2k\frac{dA}{d\sigma} + \left(1 + \frac{dk}{d\sigma}\right)A = 0$$

şi

$$\frac{d^3\bar{A}}{d\bar{\sigma}^3} + 2\bar{k}\frac{d\bar{A}}{d\bar{\sigma}} + \left(1 + \frac{d\bar{k}}{d\bar{\sigma}}\right)\bar{A} = 0$$

ale ecuaţiilor diferenţiale corespunzătoare celor două curbe sunt, în acest caz, identice, deci curbele sunt (cf. § 31) proiectiv egale.

Putem da condiţiilor (68) o altă formă utilă în practică. Să presupunem pentru aceasta mai întâi că (C) este o curbă W, deci $k = C_t$; va trebui ca şi $\bar{k}$ să aibă peste tot aceeaşi valoare constantă deci $(\bar{C})$ să fie tot o curbă W, de aceeaşi curbură proiectivă. Condiţiile (68) se reduc la $d\bar{\sigma} = d\sigma$, sau $\bar{\sigma} = \sigma + C$. Putem lua ca origine a arcelor proiective pe cele două curbe, două puncte M, $\bar{M}$ alese după voie şi defini o corespondenţă între cele două curbe prin egalitatea arcelor proiective. Această corespondenţă va satisface condiţiile (68), deci cele două curbe sunt proiectiv egale, după cum se vede astfel, într'o simplă infinitate de moduri posibile. In particular o curbă W se poate deplasa proiectiv în ea însăşi; se constată astfel analogia între curbele W de curbură proiectivă constantă şi cercurile de curbură euclidiană constantă, care admit deplasări euclidiene în ele însile.

Să presupunem acum că curbura k nu este constantă (deci nici $\bar{k}$). Prin eliminarea parametrului t între expresiile lui k şi $\frac{dk}{d\sigma}$, vom obţine $\frac{dk}{d\sigma} = \varphi(k)$. Dar atunci din (68) deducem că trebue să obţinem prin eliminarea lui $\bar{t}$:

$$\frac{d\bar{k}}{d\bar{\sigma}} = \varphi(\bar{k}),$$

cu alte cuvinte *funcţiunea* φ *prin care se exprimă* $\frac{dk}{d\sigma}$ *în funcţiune de* k *este aceeaşi pentru cele două curbe.*

Această condiţie este şi suficientă. In adevăr relaţia

$$\bar{k} = k$$

ne va da pe $\bar{t}$ în funcţie de t, deci ne va defini o corespondenţă între cele două curbe, iar din această relaţie și din relaţiile:

$$\frac{dk}{d\sigma} = \varphi(k) \quad , \quad \frac{d\bar{k}}{d\bar{\sigma}} = \varphi(\bar{k})$$

vom deduce

$$\frac{dk}{d\sigma} = \frac{d\bar{k}}{d\bar{\sigma}} \quad \text{deci} \quad d\sigma = d\bar{\sigma}$$

şi condiţiile (68) sunt satisfăcute.

PARTEA II-a

CURBE STRÂMBE

I

GENERALITĂŢI. SPAŢIUL PROIECTIV

36. **Varietăţi cu trei dimensiuni.** Numim varietate cu trei dimensiuni, o mulţime (ansamblu) de elemente, în care fiecare element este definit prin trei numere x_1, x_2, x_3, denumite în general coordonate şi invers, la fiecare sistem de trei valori numerice x_1, x_2, x_3 socotite într'o anumită ordine şi variind între anumite limite, corespunde un element al mulţimii şi unul singur.

Intr'o varietate cu trei dimensiuni se pot defini aceleaşi noţiuni de transformare, produs de transformări, egalitate de figuri faţă de un grup fundamental, etc. ca şi într'un spaţiu cu două dimensiuni, cu singura deosebire că vom avea a face cu funcţiuni de trei variabile în loc de două. Astfel, o transformare U este o corespondenţă între un punct variabil al mulţimii $M'(x_1, x_2, x_3)$ şi un punct $N(y_1, y_2, y_3)$ al aceleiaşi mulţimi, definită algebric prin relaţiile

$$(1)\quad y_1=f_1(x_1, x_2, x_3),\quad y_2=f_2(x_1, x_2, x_3),\quad y_3=f_3(x_1, x_2, x_3).$$

Dacă o altă transformare V face să corespundă punctului N al varietăţii, punctul P de coordonate z_1, z_2, z_3 şi este definită algebric prin relaţiile

$$z_1=g_1(y_1, y_2, y_3)\ ,\ z_2=g_2(y_1, y_2, y_3)\ ,\ z_3=g_3(y_1, y_2, y_3),$$

atunci corespondenţa între punctele M şi P este tot o transformare, pe care o numim *produsul* transformărilor U şi V, o notăm cu UV şi este definită algebric prin relaţiile

$$z_1 = g_1 [f_1, f_2, f_3] \ , \ z_2 = g_2 [f_1, f_2, f_3] \ , \ z_3 = g_3 [f_1, f_2, f_3].$$

Rezolvând relaţiile (1) în raport cu x_1, x_2, x_3, ceea ce este posibil dacă

$$\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} \neq 0,$$

obţinem

$$x_1 = \bar{f}_1 (y_1, y_2, y_3) \ , \ x_2 = \bar{f}_2 (y_1, y_2, y_3) \ , \ x_3 = \bar{f}_3 (y_1, y_2, y_3)$$

relaţii care pot fi privite ca definind algebric o transformare în care M este transformatul punctului N, transformare pe care o numim inversa lui U şi o notăm cu U^{-1}.

In sfârşit transformarea definită de relaţiile

$$y_1 = x_1 \ , \ y_2 = x_2 \ , \ y_3 = x_3$$

face să corespundă fiecărui punct al spaţiului, punctul însuşi şi o numim transformarea unitate sau identică.

O familie Φ de transformări se va spune că formează un *grup*, atunci când sunt satisfăcute cele trei condiţii arătate în § 4 şi anume:

1. Transformarea unitate face parte din familie
2. Transformarea inversă a unei transformări din familie este tot o transformare din familie şi
3. Produsul a două transformări din familie este tot o transformare din familie.

Fiecărui grup i se poate alătura o geometrie, după programul dela Erlangen (cf. § 4) bazată pe noţiunea de egalitate şi anume: două figuri se zic egale, în geometria unui grup, atunci când ele sunt transformatele una alteia prin transformări ale acelui grup. Studiul unei astfel de geometrii este studiul proprietăţilor figurilor, care nu se schimbă când trecem dela o figură la o altă figură egală, şi prin urmare sunt invariante faţă de transformările grupului.

37. **Geometria proiectivă a spaţiului** este geometria grupului

$$
(2) \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{a_{01} + a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 + a_{31}\, x_3}{a_{00} + a_{10}\, x_1 + a_{20}\, x_2 + a_{30}\, x_3} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_0} \\[2ex] y_2 = \dfrac{a_{02} + a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{32}\, x_3}{a_{00} + a_{10}\, x_1 + a_{20}\, x_2 + a_{30}\, x_3} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_0} \\[2ex] y_3 = \dfrac{a_{03} + a_{13}\, x_1 + a_{23}\, x_2 + a_{33}\, x_3}{a_{00} + a_{10}\, x_1 + a_{20}\, x_2 + a_{30}\, x_3} = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_0} \end{cases}
$$

unde

$$
a = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Un model al acestei geometrii îl formează spaţiul obişnuit unde coordonatele unui punct sunt coordonatele carteziene ale acelui punct faţă de un sistem de trei axe fixe, perpendiculare sau oblice. Formulele (1) definesc în acest caz transformările omografice ale spaţiului, caracterizate, după cum se ştie, prin proprietatea de a transforma dreptele în drepte şi planele în plane. Se ştie din geometria elementară că aceste transformări conservă şi raportul anarmonic a patru puncte colineare sau a patru plane dintr'un fascicol; de asemeni ele transformă curbe şi suprafeţe algebrice în curbe şi suprafeţe algebrice cu păstrarea ordinului, a singularităţilor şi a naturii lor.

Studiul proprietăţilor figurilor în spaţiul proiectiv se poate face ca şi în plan prin două metode: 1) metoda lui W i l c z i n s k i care face să corespundă la configuraţia studiată (curbă, suprafaţă, congruenţă, etc.) o ecuaţie sau un sistem de ecuaţii diferenţiale sau cu derivate parţiale, lineare şi omogene şi 2) metoda, cu perspective mai largi, a reperului mobil care se poate introduce sub două forme: prin metoda ecuaţiei reduse, aşa cum am făcut-o pentru planul euclidian şi cel proiectiv şi printr'o metodă directă, având ca punct de plecare proprietăţile fundamentale ale teoriei grupurilor.

38. **Reperul mobil proiectiv** este o figură care depinde de acelaşi număr (15) de parametri ca şi grupul proiectiv (2), două repere având proprietatea că sunt totdeauna transformate omografice unul altuia, adică sunt egale în sensul geometriei proiective.

Putem defini astfel de repere într'o infinitate de moduri. Un mod simplu şi natural este să formăm figura definită de planele

$$\Delta_0 = 0\ ,\ \Delta_1 = 0\ ,\ \Delta_2 = 0\ ,\ \Delta_3 = 0.$$

care formează *tetraedrul de referinţă* al reperului şi de punctul *U (punctul unitate)* transformatul prin omografia corespunzătoare a punctului de coordonate ($x_1 = x_2 = x_3 = 1$). Este uşor de văzut că, invers, fiind dat un reper prin tetraedrul de referinţă şi punctul unitate, există o singură transformare (2) care să le admită ca atare. In adevăr, tetraedrul de referinţă determină polinoamele Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3 cu excepţia unor factori constanţi arbitrari ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3, iar punctul unitate determină şi pe aceşti factori (comp. § 12) cu excepţia unui aceluiaşi factor σ comun, care nu este esenţial deoarece dispare prin simplificare.

Numim *coordonate relative* ale unui punct M de coordonate carteziene x_1, x_2, x_3, *faţă de un reper* (R) corespunzător transformării (2), coordonatele carteziene y_1, y_2, y_3 ale punctului N care se transformă prin omografia (2) în punctul M. Intre x_i şi y_i ($i = 1, 2, 3$) avem relaţiile (2) cu deosebire că rolul literelor x şi y este schimbat aşa că:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{01} + a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 + a_{31}\, y_3}{a_{00} + a_{10}\, y_1 + a_{20}\, y_2 + a_{30}\, y_3} \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{02} + a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{32}\, y_3}{a_{00} + a_{10}\, y_1 + a_{20}\, y_2 + a_{30}\, y_3} \\[2ex] x_3 = \dfrac{a_{03} + a_{13}\, y_1 + a_{23}\, y_2 + a_{33}\, y_3}{a_{00} + a_{10}\, y_1 + a_{20}\, y_2 + a_{30}\, y_3}. \end{cases}$$

Formulele (3) definesc o *schimbare de coordonate*, x_1, x_2, x_3 şi y_1, y_2, y_3 fiind respectiv coordonatele carteziene şi relative ale unui acelaşi punct M. Transformările (2) formând un grup, rezultă că formulele (3) vor defini şi schimbările de coordonate relative dela un sistem de coordonate faţă de un reper la un sistem de coordonate faţă de alt reper.

Introducem şi noţiunea de coordonate omogene prin relaţiile

$$x_1=\frac{X_1}{X_0}\,,\ x_2=\frac{X_2}{X_0}\,,\ x_3=\frac{X_3}{X_0}\,;\ y_1=\frac{Y_1}{Y_0}\,,\ y_2=\frac{Y_2}{Y_0}\,,\ y_3=\frac{Y_3}{Y_0}.$$

Relaţiile (3) se pot scrie prin introducerea unui factor de proporţionalitate ρ

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho X_0 = a_{00}\,Y_0 + a_{10}\,Y_1 + a_{20}\,Y_2 + a_{30}\,Y_3 \\ \rho X_1 = a_{01}\,Y_0 + a_{11}\,Y_1 + a_{21}\,Y_2 + a_{31}\,Y_3 \\ \rho X_2 = a_{02}\,Y_0 + a_{12}\,Y_1 + a_{22}\,Y_2 + a_{32}\,Y_3 \\ \rho X_3 = a_{03}\,Y_0 + a_{13}\,Y_1 + a_{23}\,Y_2 + a_{33}\,Y_3 \end{cases}$$

şi fiindcă planele tetraedrului de referinţă au respectiv ecuaţiile

$$\Delta_0=0\ ,\ \Delta_1=0\ ,\ \Delta_2=0\ ,\ \Delta_3=0$$

deci în coordonate relative

$$Y_0=0\ ,\ Y_1=0\ ,\ Y_2=0\ ,\ Y_3=0$$

rezultă că vârful A_i al reperului ($i=0, 1, 2, 3$) are faţă de reperul iniţial, cu excepţia factorului ρ, comun la toate punctele A_0, A_1, A_2, A_3, coordonatele omogene a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}. Reciproc, cunoscând aceste anumite coordonate omogene, faţă de un reper iniţial, ale vârfurilor A_i, transformarea proiectivă căreia îi corespunde reperul, este evident perfect determinată căci ea este determinată prin aceste coordonate a_{ij}.

Relaţiile (4) se mai pot scrie sub forma simbolică prescurtată:

$$(5)\qquad M = Y_0\,A_0 + Y_1\,A_1 + Y_2\,A_2 + Y_3\,A_3$$

relaţiile (4) deducându-se din (5) prin înlocuirea lui M, A_0, A_1, A_2, A_3 succesiv prin câte una din cele patru coordonate omogene ale acestor puncte față de un reper fix. Cu aceeași interpretare, relațiile (5) pot fi socotite ca definind coordonatele proiective omogene Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 ale punctului de coordonate inițiale M (sau mai pe scurt punctul M) față de reperul definit de punctele de coordonate inițiale A_0, A_1, A_2, A_3 (sau mai pe scurt reperul $A_0\, A_1\, A_2\, A_3$).

II.

METODA ECUAȚIEI REDUSE

39. **Reper de ordinul zero.** Să considerăm o curbă strâmbă definită prin ecuațiile

$$x_2 = f\,(x_1) \quad , \quad x_3 = g\,(x_1)$$

față de un sistem de coordonate inițiale (de ex. coordonate carteziene). Vom presupune funcțiunile $f\,(x_1)$ și $g\,(x_1)$ olomorfe în jurul punctului $x_1 = 0$, deci desfășurabile în seriile întregi

$$(6) \qquad \begin{cases} x_2 = f\,(x_1) = a_0 + a_1\, x_1 + a_2\, x_1^2 + a_3\, x_1^3 + \ldots \\ x_3 = g\,(x_1) = b_0 + b_1\, x_1 + b_2\, x_1^2 + b_3\, x_1^3 + \ldots \end{cases}$$

Metoda ecuației reduse constă în a găsi un reper astfel încât ecuațiile curbei față de acest reper să aibă primii coeficienți ai desvoltării în serie, cât mai simpli. Procedeul de determinare a acestui reper este prin etape succesive, ca în cazul planului.

Fie (3) formulele de schimbare a coordonatelor. Ecuațiile curbei în coordonate y, se vor desvolta, în general, în serii întregi de forma

$$(7) \qquad \begin{cases} y_2 = c_0 + c_1\, y_1 + c_2\, y_1^2 + \ldots + c_n\, y_1^n + \ldots \\ y_3 = d_0 + d_1\, y_1 + d_2\, y_1^2 + \ldots + d_n\, y_1^n + \ldots \end{cases}$$

Coeficienții c_n, d_n sunt legați de a_m, $b_{m'}$ $(m,\ m' \leqslant n)$ prin anumite relații unde intervin coeficienții a_{ij} ai transformării (3). Pentru a le determina procedăm, ca în cazul planului, înlocuind în relațiile (3) pe y_2, y_3 prin valorile lor (7); obținem pentru x_1, x_2, x_3 anumite funcţiuni de y_1 pe care le putem desvolta în serii întregi sub formă:

$$(8)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1^2 + \dots \\ x_2 = \beta_0 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_1^2 + \dots \\ x_3 = \gamma_0 + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_1^2 + \dots \end{cases}$$

coeficienţii α_i, β_i, γ_i din identităţile următoare care se deduc din (3)

$$(9)\quad \begin{cases} a_{01} + a_{11} y_1 + a_{21} (c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_1^2 + \dots) \\ \qquad + a_{31} (d_0 + d_1 y_1 + d_2 y_1^2 + \dots) \\ \equiv [a_{00} + a_{10} y_1 + a_{20} (c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_1^2 + \dots) \\ \qquad + a_{30} (d_0 + d_1 y_1 + d_1 y_1^2 + \dots)] \\ \qquad \times (\alpha_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1^2 + \dots) \\ a_{02} + a_{12} y_1 + a_{22} (c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_1^2 + \dots) \\ \qquad + a_{32} (d_0 + d_1 y_1 + d_2 y_1^2 + \dots) \\ \equiv [a_{00} + a_{10} y_1 + a_{20} (c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_1^2 + \dots) \\ \qquad + a_{30} (d_0 + d_1 y_1 + d_2 y_1^2 + \dots)] \\ \qquad \times (\beta_0 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_1^2 + \dots) \\ a_{03} + a_{13} y_1 + a_{23} (c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_1^2 + \dots) \\ \qquad + a_{33} (d_0 + d_1 y_1 + d_2 y_1^2 + \dots) \\ \equiv [a_{00} + a_{10} y_1 + a_{20} (c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_1^2 + \dots) \\ \qquad + a_{30} (d_0 + d_1 y_1 + d_2 y_1^2 + \dots)] \\ \qquad \times (\gamma_0 + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_1^2 + \dots). \end{cases}$$

In particular găsim imediat prin identificarea termenilor constanţi

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{a_{01} + a_{21} c_0 + a_{31} d_0}{a_{00} + a_{20} c_0 + a_{30} d_0}, \quad \beta_0 = \dfrac{a_{02} + a_{22} c_0 + a_{32} d_0}{a_{00} + a_{20} c_0 + a_{30} d_0}, \\ \gamma_0 = \dfrac{a_{03} + a_{23} c_0 + a_{33} d_0}{a_{00} + a_{20} c_0 + a_{30} d_0}. \end{cases}$$

Dacă $\boxed{c_0 = d_0 = 0}$, avem

$$\alpha_0 = \frac{a_{01}}{a_{00}}, \quad \beta_0 = \frac{a_{02}}{a_{00}}, \quad \gamma_0 = \frac{a_{03}}{a_{00}}. \tag{11}$$

deci $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ se reduc la coordonatele, față de reperul inițial ale punctului A_0 (originea noului reper).

Introducând valorile lui x_1, x_2, x_3, date de (8) în ecuațiile (6), găsim identitățile:

$$\left\{\begin{aligned} \beta_0+\beta_1 y_1+\beta_2 y_1^2+\ldots &\equiv a_0+a_1(\alpha_0+\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_1^2+\ldots) \\ &\quad + a_2(\alpha_0+\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_1^2+\ldots)^2+\ldots \\ \gamma_0+\gamma_1 y_1+\gamma_2 y_1^2+\ldots &\equiv b_0+b_1(\alpha_0+\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_1^2+\ldots) \\ &\quad + b_2(\alpha_0+\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_1^2+\ldots)^2+\ldots \end{aligned}\right. \tag{12}$$

de unde vom scoate, prin identificare, valorile coeficienților c_n, d_n. In particular identificarea termenilor constanți ne dă relațiile

$$\beta_0 = a_0+a_1\alpha_0+a_2\alpha_0^2+\ldots, \quad \gamma_0 = b_0+b_1\alpha_0+b_2\alpha_0^2+\ldots \tag{13}$$

care în virtutea relațiilor (10), nu conțin decât coeficienții c_0 și d_0. Pentru ca să avem $c_0 = d_0 = 0$, e nevoie deci ca relațiile (13) să fie satisfăcute când dăm lui α_0, β_0, γ_0 valorile (11), cu alte cuvinte trebue ca originea reperului să fie pe curbă. Reperul determinat prin această condiție este un reper de ordinul zero.

40. **Reper de I-ul ordin.** Să presupunem acum că reperul inițial (corespunzător coordonatelor x_i) este un reper de ordinul zero, deci $\boxed{a_0 = b_0 = 0}$. Pentru ca să trecem dela un reper de ordinul zero la alt reper de ordinul zero, *care să păstreze originea*, va trebui să avem $\boxed{\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0}$.

Relațiile (10) ne dau atunci

$$\boxed{a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0}$$

condiţii de care se leagă trecerea dela un reper de ordinul zero la alt reper de ordinul zero cu păstrarea originii. Cum avem $a \neq 0$, rezultă că vom avea şi $a_{00} \neq 0$; putem lua prin urmare, pentru simplificarea formulelor $\boxed{a_{00} = 1}$.

Procedând, mai departe, la identificarea termenilor în y_1 în identităţile (9) obţinem, ţinând seamă de relaţiile încadrate

$$(14) \quad \alpha_1 = a_{11} + c_1 a_{21} + d_1 a_{31} \; ; \; \beta_1 = a_{12} + c_1 a_{22} + d_1 a_{32},$$
$$\gamma_1 = a_{13} + c_1 a_{23} + d_1 a_{33};$$

iar prin identificarea termenilor în y_1 în identităţile (12):

$$\beta_1 = a_1 \alpha_1 \; , \; \gamma_1 = b_1 \alpha_1$$

deci

$$(15) \quad \begin{cases} a_{12} + c_1 a_{22} + d_1 a_{32} = a_1 (a_{11} + c_1 a_{21} + d_1 a_{31}), \\ a_{13} + c_1 a_{23} + d_1 a_{33} = b_1 (a_{11} + c_1 a_{21} + d_1 a_{31}). \end{cases}$$

Oricare ar fi a_1, b_1, putem deci determina o parte din coeficienţii a_{ij} astfel ca să avem $\boxed{c_1 = d_1 = 0}$. Reperul de ordinul zero determinat prin condiţiile precedente este un reper de primul ordin.

Să presupunem că reperul iniţial este un reper de primul ordin; vom avea $\boxed{a_1 = b_1 = 0}$. Relaţiile (14) şi (15) ne dau

$$\boxed{\alpha_1 = a_{11} \; , \; \beta_1 = 0, \; \gamma_1 = 0} \quad , \quad \boxed{a_{12} = a_{13} = 0}$$

relaţii care condiţionează, împreună cu cele precedente, formulele de schimbare a coordonatelor dela un reper de primul ordin la alt reper de primul ordin.

41. **Reper de ordinul al II-lea. Puncte de inflexiune.** Identificarea coeficienţilor lui y_1^2 în identităţile (9) ne dă, ţinând seamă de relaţiile încadrate

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha_2 = c_2 a_{21} + d_2 a_{31} - a_{11} a_{10} \\ \beta_2 = c_2 a_{22} + d_2 a_{32} \quad , \quad \gamma_2 = c_2 a_{23} + d_2 a_{33} \end{cases}$$

iar (12) ne dau prin identificarea termenilor în y^2

$$\beta_2 = a_2 a_{11}^2 \quad , \quad \gamma_2 = b_2 a_{11}^2$$

deci prin eliminarea lui β_2, γ_2:

$$a_{11}^2 a_2 = a_{22} c_2 + a_{32} d_2$$

$$a_{11}^2 b_2 = a_{23} c_2 + a_{33} d_2.$$

Aceste relaţii ne arată că dacă $a_2 = b_2 = 0$, atunci pentru orice reper de primul ordin $c_2 = d_2 = 0$; relaţiile $a_2 = b_2 = 0$ traduc astfel o proprietate proiectivă a punctului considerat pe curbă. Menţionăm această proprietate fără a o demonstra, căci nu conduce la nimic nou, anume: *punctele în care avem* $a_2 = b_2 = 0$ *sunt puncte de inflexiune* (planul osculator este nedeterminat) *iar curbele pentru care toate punctele sunt de inflexiune sunt linii drepte.*

Să presupunem acum că punctul considerat nu este de inflexiune; unul cel puţin din coeficienţii a_2, b_2 este diferit de zero. Oricare ar fi valoarea acelui coeficient putem determina unii din coeficienţii a_{ij} astfel ca să avem $\boxed{d_2 = 0}$ deci $c_2 \neq 0$; e destul în adevăr să luăm

$$a_{22} = \frac{a_2}{c_2} a_{11}^2 \quad ; \quad a_{23} = \frac{b_2}{c_2} a_{11}^2 \tag{17}$$

şi mai putem determina coeficienţii a_{ij} astfel încât să avem şi $\boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$. Reperul de primul ordin astfel determinat este un reper de ordinul II.

Să presupunem atunci că reperul iniţial a fost ales în prealabil un reper de ordinul II; avem atunci

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad b_2 = 0}$$

şi din (16) şi (17) scoatem relaţiile

$$\boxed{a_{22} = a_{11}^2 \;\; ; \;\; a_{23} = 0} \; ;$$

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{1}{2} a_{21} - a_{11} a_{10} \, , \beta_2 = \frac{1}{2} a_{11}^2 \;\; , \;\; \gamma_2 = 0}$$

care condiţionează trecerea dela un reper de ordinul II la un alt reper de ordinul II.

42. **Reper de ordinul III. Puncte staţionare.** Trecem acum la identificarea coeficienţilor lui y_1^3 în identităţile (9) şi (12) şi căpătăm

$$\alpha_3 = a_{21} c_3 + a_{31} d_3 - \frac{1}{2} (a_{11} a_{20} + a_{10} a_{21}) + a_{10}^2 a_{11} \, ,$$

$$\beta_3 = a_{11}^2 c_3 + a_{32} d_3 - \frac{1}{2} a_{10} a_{11}^2 \quad , \quad \gamma_3 = a_{33} d_3$$

apoi

$$\beta_3 = a_{11} \left(\frac{1}{2} a_{21} - a_{11} a_{10} \right) + a_{11}^3 a_3 \quad ; \quad \gamma_3 = a_{11}^3 b_3$$

sau prin eliminare

$$a_{11}^2 c_3 + a_{32} d_3 = a_{11}^3 a_3 + \frac{1}{2} a_{11} (a_{21} - a_{11} a_{10})$$

$$a_{33} d_3 = a_{11}^3 b_3 \, .$$

Ultima relaţie ne arată că dacă $b_3 = 0$, avem $d_3 = 0$, deci această relaţie traduce o proprietate proiectivă pe care o menţionăm fără demonstraţie. *Punctele în care avem* (faţă de un reper de ordinul al II-lea) $b_3 = 0$ *sunt staţionare* (planul osculator este supraosculator) *iar curbele pentru care toate punctele sunt staţionare sunt curbe plane.*

Excludem în studiul nostru cazul punctelor staţionare (şi deci a curbelor plane) şi vom presupune prin urmare

$b_3 \neq 0$; putem atunci alege pe a_{33} astfel încât să avem $\boxed{d_3 = \frac{1}{6}}$ prin condiţia

$$a_{33} = 6\, b_3\, a_{11}^3$$

şi atunci putem determina unii coeficienţi a_{ij} astfel ca să avem $\boxed{c_3 = 0}$ prin relaţia

$$a_{32} = 6\, a_{11}^3\, a_3 + 3\, a_{11}\, (a_{21} - a_{11}\, a_{10}).$$

Reperul de ordinul al II-lea astfel determinat este un reper de ordinul III.

Presupunem acum că, în prealabil, am ales ca reper iniţial un reper de ordinul al III-lea. Avem $\boxed{a_3 = 0,\ b_3 = \frac{1}{6}}$

şi prin urmare

$$\boxed{a_{33} = a_{11}^3\ ,\ a_{32} - 3a_{11}\, a_{21} + 3\, a_{11}^2\, a_{10} = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha_3 = \frac{1}{6}\, a_{31} - \frac{1}{2}\, a_{11}\, a_{20} + a_{11}\, a_{10}^2 - \frac{1}{2}\, a_{10}\, a_{21} \\ &\beta_3 = \frac{1}{2}\, a_{11}\, a_{21} - a_{11}^2\, a_{10}\ ,\quad \gamma_3 = \frac{1}{6}\, a_{11}^3 \end{aligned}}$$

relaţii care caracterizează trecerile dela un reper de ordinul III la un alt reper de ordinul III.

Pentrucă reperul de ordinul III nu este determinat în mod unic, şi prin urmare se pot impune condiţii nouă coeficienţilor a_k, b_k $(k > 3)$ din desvoltările (6), curbele plane nu mai apar ca în spaţiul euclidian drept *cazuri particulare* ale curbelor strâmbe ci mai curând drept *cazuri singulare*.

43. **Reper de ordinul IV.** Continuând procedeul și identificând coeficienții lui y_1^4 în identitățile (9) și (12), avem din (9)

$$\alpha_4 = a_{21}\, c_4 + a_{31}\, d_4 - \frac{1}{6}\, a_{11}\, a_{30} - \frac{1}{4}\, a_{20}\, a_{21}$$

$$+ a_{10}\, a_{11}\, a_{20} - \frac{1}{6}\, a_{10}\, a_{31} - a_{11}\, a_{10}^3 + \frac{1}{2}\, a_{10}^2\, a_{21}$$

$$\beta_4 = a_{11}^2\, c_4 + 3\,(a_{11}^2\, a_{10} - a_{11}\, a_{21})\, d_4$$

$$- \frac{1}{4}\, a_{11}^2\, a_{20} - \frac{1}{2}\, a_{10}\, a_{11}\, a_{21} + a_{10}^2\, a_{11}^2$$

$$\gamma_4 = a_{11}^3\, d_4 - \frac{1}{6}\, a_{11}^3\, a_{10}$$

apoi din (12)

$$\beta_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, a_{21} - a_{11}\, a_{10}\right)^2$$

$$+ a_{11}\left[\frac{1}{6}\, a_{31} + a_{11}\, a_{10}^2 - \frac{1}{2}\,(a_{11} a_{20} + a_{10}\, a_{21})\right] + a_{11}^4\, a_4$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{2}\, a_{11}^2 \left(\frac{1}{2}\, a_{21} - a_{11}\, a_{10}\right) + a_{11}^4\, b_4$$

și prin eliminarea lui β_4 și γ_4

$$a_{11}^2\, c_4 + 3\,(a_{11}^2\, a_{10} - a_{11}\, a_{21})\, d_4 = a_{11}^4\, a_4$$

$$+ \frac{1}{8}\, a_{21}^2 - \frac{1}{4}\, a_{11}^2\, a_{20} + \frac{1}{2}\, a_{10}^2\, a_{11}^2 + \frac{1}{6}\, a_{11}\, a_{31} - \frac{1}{2}\, a_{10}\, a_{11}\, a_{21}$$

$$a_{11}^3\, d_4 = a_{11}^4\, b_4 + \frac{1}{4}\, a_{11}^2\, a_{21} - \frac{1}{3}\, a_{11}^3\, a_{10}.$$

Rezultă că putem totdeauna alege coeficienții a_{ij} prin condițiile

$$a_{11}^4 a_4 + \frac{1}{6}\, a_{11} a_{31} - \frac{1}{4}\, a_{11}^2 a_{20} + \frac{1}{8}\, a_{21}^2 + \frac{1}{2}\, a_{10}^2\, a_{11}^2 - \frac{1}{2}\, a_{10} a_{11} a_{21} = 0$$

$$\frac{1}{4}\, a_{21} = \frac{1}{3}\, a_{11}\, a_{10} - a_{11}^2\, b_4$$

astfel încât să avem $\boxed{c_4 = d_4 = 0}$; reperul de ordinul III determinat prin aceste condiții suplimentare este un reper de ordinul IV.

Dacă presupunem, continuând aceeași metodă, că reperul inițial este un reper de ordinul IV, avem $\boxed{a_4 = b_4 = 0}$; condițiile precedente devin

$$\boxed{3\,a_{21} = 4\,a_{11}\,a_{10} \quad ; \quad \frac{1}{6}\,a_{31} - \frac{1}{4}\,a_{11}\,a_{20} = -\frac{1}{18}\,a_{11}\,a_{10}^2}$$

și vor caracteriza, împreună cu cele ce preced, formulele de trecere dela un reper de ordinul IV, la alt reper de ordinul IV. Vom mai avea $\boxed{a_{32} = a_{11}^2\,a_{10}}$ și

$$\alpha_4 = -\frac{1}{6}\,a_{11}\,a_{30} + \frac{5}{12}\,a_{10}\,a_{11}\,a_{20} - \frac{5}{18}\,a_{11}\,a_{10}^3$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{4}\,a_{11}^2\,a_{20} + \frac{1}{3}\,a_{11}^2\,a_{10}^2 \quad ; \quad \gamma_4 = -\frac{1}{6}\,a_{11}^3\,a_{10}.$$

44. **Reper de ordinul V.** Identificarea coeficienților lui y_1^5 în identitățile (9) ne dă:

$$a_{21}\,c_5 + a_{31}\,d_5 = \alpha_5 + a_{10}\,\alpha_4 + \frac{1}{2}\,a_{20}\,\alpha_3 + \frac{1}{6}\,a_{30}\,\alpha_2$$

$$a_{22}\,c_5 + a_{32}\,d_5 = \beta_5 + a_{10}\,\beta_4 + \frac{1}{2}\,a_{20}\,\beta_3 + \frac{1}{6}\,a_{30}\,\beta_2$$

$$a_{23}\,c_5 + a_{33}\,d_5 = \gamma_5 + a_{10}\,\gamma_4 + \frac{1}{2}\,a_{20}\,\gamma_3 + \frac{1}{6}\,a_{30}\,\gamma_2,$$

unde pentru ușurința urmăririi calculelor, am ținut deocamdată seama numai de valorile coeficienților a_k, b_k, c_k, d_k pentru $k \leqslant 4$, care ne dau desvoltările

$$y_2 = \frac{1}{2}\,y_1^2 + c_5\,y_1^5 + \ldots, \quad y_3 = \frac{1}{6}\,y_1^3 + d_5\,y_1^5 + \ldots$$

şi desvoltări analoage pentru x_2, x_3 în funcţie de x_1. Identităţile (12) ne vor da apoi

$$\beta_5 = \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1^5 a_5$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{2} \alpha_1^2 \alpha_3 + \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1^5 b_5.$$

Din aceste relaţii prin eliminarea lui β_5 şi γ_5, ţinând seamă de relaţiile care leagă coeficienţii a_{ij} şi de valorile

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3} a_{11} a_{10}\ ,\ \alpha_3 = -\frac{1}{4} a_{11} a_{20} + \frac{5}{18} a_{11} a_{10}^2$$

pe care le ia în virtutea acestor relaţii coeficienţii α_2 şi α_3, se capătă:

$$a_{11}^2 c_5 + a_{11}^2 a_{10} d_5 = a_{11}\left(-\frac{1}{6} a_{11} a_{30} + \frac{5}{12} a_{10} a_{11} a_{20} - \frac{5}{18} a_{11} a_{10}^3\right)$$

$$-\frac{1}{3} a_{11} a_{10}\left(-\frac{1}{4} a_{11} a_{20} + \frac{5}{18} a_{11} a_{10}^2\right) + a_{11}^5 a_5$$

$$a_{11}^3 d_5 = \frac{1}{2} a_{11}^2\left(-\frac{1}{4} a_{11} a_{20} + \frac{5}{18} a_{11} a_{10}^2\right)$$

$$+\frac{1}{18} a_{11}^3 a_{10}^2 - \frac{1}{6} a_{11}^3 a_{10}^2 + \frac{1}{12} a_{11}^3 a_{20} + a_{11}^5 b_5$$

sau simplificând

$$d_5 = a_{11}^2 b_5 - \frac{1}{24} a_{20} + \frac{1}{36} a_{10}^2$$

$$c_5 + a_{10} d_5 = a_{11}^3 a_5 - \frac{1}{6} a_{30} + \frac{1}{2} a_{10} a_{20} - \frac{10}{27} a_{10}^3.$$

Se vede deci că putem dispune de coeficienţii a_{ij} astfel ca să avem $\boxed{c_3 = d_3 = 0}$; reperul de ordinul IV determinat prin aceste condiţiuni este un reper de ordinul V.

Dacă reperul iniţial este de ordinul V avem $\boxed{a_5 = b_5 = 0}$; din relaţiile precedente deducem

$$\boxed{a_{20} = \frac{2}{3} a_{10}^2 \quad ; \quad a_{30} = \frac{2}{9} a_{10}^3}$$

care caracterizează schimbările între reperele de ordinul V.

Pentru comoditatea scrierii vom pune în cele ce urmează $a_{11} = \lambda$, $a_{10} = \mu$. Identităţile (9) şi (10) devin, ţinând seamă de valorile coeficienţilor $a_{ij}, a_k, b_k, c_k, d_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ $(k \leqslant 5)$ în funcţie de λ, μ:

$$
(9') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda y_1 + \frac{4}{3}\lambda\mu\left(\frac{1}{2}y_1^2 + c_6 y_1^6 + \ldots\right) + \frac{2}{3}\lambda\mu^2\left(\frac{1}{6}y_1^3 + d_6 y_1^6 + \ldots\right) \\
&\equiv \left[1 + \mu y_1 + \frac{2}{3}\mu^2\left(\frac{1}{2}y_1^2 + c_6 y_1^6 + \ldots\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{2}{9}\mu^3\left(\frac{1}{6}y_1^3 + d_6 y_1^6 + \ldots\right)\right] \\
&\times \left(\lambda y_1 - \frac{1}{3}\lambda\mu y_1^2 + \frac{1}{9}\lambda\mu^2 y_1^3 - \frac{1}{27}\lambda\mu^3 y_1^4\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{81}\lambda\mu^4 y_1^5 + \alpha_6 y_1^6 + \ldots\right) \\
&\lambda^2\left(\frac{1}{2}y_1^2 + c_6 y_1^6 + \ldots\right) + \lambda^2\mu\left(\frac{1}{6}y_1^3 + d_6 y_1^6 + \ldots\right) \\
&\equiv \left[1 + \mu y_1 + \frac{2}{3}\mu^2\left(\frac{1}{2}y_1^2 + c_6 y_1^6 + \ldots\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{2}{9}\mu^3\left(\frac{1}{6}y_1^3 + d_6 y_1^6 + \ldots\right)\right] \\
&\times \left(\frac{1}{2}\lambda^2 y_1^2 - \frac{1}{3}\lambda^2\mu y_1^3 + \frac{1}{6}\lambda^2\mu^2 y_1^4 - \frac{2}{27}\lambda^2\mu^3 y_1^5 + \beta_6 y_1^6 + \ldots\right) \\
&\lambda^3\left(\frac{1}{6}y_1^3 + d_6 y_1^6 + \ldots\right) \\
&\equiv \left[1 + \mu y_1 + \frac{2}{3}\mu^2\left(\frac{1}{2}y_1^2 + c_6 y_1^6 + \ldots\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{2}{9}\mu^3\left(\frac{1}{6}y_1^3 + d_6 y_1^6 + \ldots\right)\right] \\
&\times \left(\frac{1}{6}\lambda^3 y_1^3 - \frac{1}{6}\lambda^3\mu y_1^4 + \frac{1}{9}\lambda^3\mu^2 y_1^5 + \gamma_6 y_1^6 + \ldots\right)
\end{aligned}
\right.
$$

şi

$$
(12')\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lambda^2 y_1^2-\frac{1}{3}\lambda^2\mu\, y_1^3+\frac{1}{6}\lambda^2\mu^2 y_1^4-\frac{2}{27}\lambda^2\mu^3 y_1^5+\beta_6 y_1^6+\dots\\
&\equiv\frac{1}{2}\Big(\lambda y_1-\frac{1}{3}\lambda\mu y_1^2+\frac{1}{9}\lambda\mu^2 y_1^3-\frac{1}{27}\lambda\mu^3 y_1^4\\
&\qquad+\frac{1}{81}\lambda\mu^4 y_1^5+\dots\Big)^2+a_6(\lambda y_1+\dots)^6+\dots\\
&\frac{1}{6}\lambda^3 y_1^3-\frac{1}{6}\lambda^3\mu y_1^4+\frac{1}{9}\lambda^3\mu^2 y_1^5+\gamma_6 y_1^6+\dots\\
&\equiv\frac{1}{6}\Big(\lambda y_1-\frac{1}{3}\lambda\mu y_1^2+\frac{1}{9}\lambda\mu^2 y_1^3-\frac{1}{27}\lambda\mu^3 y_1^4+\dots\Big)^3\\
&\qquad+b_6(\lambda y_1+\dots)^6+\dots
\end{aligned}\right.
$$

45. **Interpretări geometrice. Cubică osculatoare.** Formulele (4) de schimbare a coordonatelor omogene (cu abstracţia factorului comun ρ) se scriu înlocuind coeficienţii a_{ij} cu valorile lor în funcţie de λ, μ:

$$X_0=Y_0+\mu Y_1+\frac{2}{3}\mu^2 Y_2+\frac{2}{9}\mu^3 Y_3\ ;\quad X_3=\lambda^3 Y_3$$

$$X_1=\lambda Y_1+\frac{4}{3}\lambda\mu Y_2+\frac{2}{3}\lambda\mu^2 Y_3\ ;\quad X_2=\lambda^2 Y_2+\lambda^2\mu Y_3$$

ceea ce ne arată că dacă însemnăm cu $A_0\,A_1\,A_2\,A_3$ reperul iniţial de ordinul cinci şi cu $B_0\,B_1\,B_2\,B_3$ reperul general de ordinul V, corespunzător valorilor λ şi μ, vârfurile B_0, B_1, B_2, B_3 vor avea faţă de reperul iniţial coordonatele omogene

$$B_0\,(1,\,0,\,0,\,0)\ ;\quad B_1\,(\mu,\,\lambda,\,0,\,0)\ ;\quad B_2\left(\frac{2}{3}\mu^2,\,\frac{4}{3}\lambda\mu,\,\lambda^2,\,0\right);$$

$$B_3\left(\frac{2}{9}\mu^3,\,\frac{2}{3}\lambda\mu^2,\,\lambda^2\mu,\,\lambda^3\right).$$

Rezultă că B_0 se confundă cu A_0, dreapta $B_0\,B_1$ cu $A_0\,A_1$ (care capătă astfel o semnificaţie invariantă şi este de fapt tangenta la curbă), planul $B_0\,B_1\,B_2$ cu $A_0\,A_1\,A_2$ (planul osculator al curbei). In ceea ce priveşte coordonatele neomogene (x_1, x_2, x_3) ale punctului B_3, avem:

$$x_1 = 3\frac{\lambda}{\mu}\ , \quad x_2 = \frac{9}{2}\,\frac{\lambda^2}{\mu^2}\ ; \quad x_3 = \frac{9}{2}\,\frac{\lambda^3}{\mu^3}$$

sau eliminând raportul $\frac{\lambda}{\mu}$:

$$x_2 = \frac{1}{2}\,x_1^2\ ; \quad x_2^2 = \frac{3}{2}\,x_1\,x_3 \tag{18}$$

ceea ce ne arată că punctul B_3, descrie când $\frac{\lambda}{\mu}$ deci reperul variază, o *cubică strâmbă* intersecţie a două conuri cu vârfurile în A_3 şi A_0 respectiv, reprezentate prin câte una din ecuaţiile (18) şi care au generatoarea $A_0\,A_3$ comună. Această cubică (Γ), ale cărei ecuaţii (18) se mai pot scrie sub forma:

$$x_2 = \frac{1}{2}\,x_1^2\ ; \quad x_3 = \frac{1}{6}\,x_1^3, \tag{19}$$

are un contact de ordinul V cu curba studiată în punctul considerat; o numim *cubica raţională osculatoare* la curbă în punctul considerat. Se deduce de aci rolul important pe care îl va juca în studiul proiectiv al curbelor strâmbe.

Punctul B_3 odată ales pe această cubică prin fixarea valorii $\frac{\lambda}{\mu} = s$ a parametrului în raport cu care se exprimă raţional coordonatele unui punct al cubicei, restul vârfurilor B_1, B_2 ale tetraedrului de referinţă se determină prin construcţii geometrice uşor de stabilit. In adevăr tangenta (δ) şi planul osculator (π) la cubica (Γ) în punctul

$$B_3\left(1,\ 3s,\ \frac{9}{2}s^2,\ \frac{9}{2}s^3\right)$$

au drept ecuaţii

$$(\delta) \qquad \frac{\xi_1 - 3s}{3} = \frac{\xi_2 - \frac{9}{2}s^2}{9s} = \frac{\xi_3 - \frac{9}{2}s^3}{\frac{27}{2}s^2}$$

$$(\pi) \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 - 3s & \xi_2 - \frac{9}{2}s^2 & \xi_3 - \frac{9}{2}s^3 \\ 3 & 9s & \frac{27}{2}s^2 \\ 0 & 9 & 27s \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$(\pi) \qquad \frac{9}{2}s^2\xi_1 - 3s\xi_2 + \xi_3 - \frac{9}{2}s^3 = 0.$$

Intersecţia dreptei (δ) cu planul osculator $\xi_3 = 0$ în $B_0\,(s = 0)$ la cubică este punctul de coordonate neomogene

$$\xi_1 = 2s \quad , \quad \xi_2 = \frac{3}{2}s^2 \quad , \quad \xi_3 = 0$$

adică tocmai punctul B_2 pe când intersecţia tangentei $(\xi_2 = \xi_3 = 0)$ în B_0 la cubică cu planul π este punctul

$$\xi_1 = s \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_3 = 0$$

adică punctul B_1. Rezultă numaidecât construcţia căutată care se poate formula în modul următor.

Vârful B_3 al unui reper de ordinul V este un punct arbitrar al cubicei osculatoare (Γ); vârful B_2 este la intersecţia tangentei la (Γ) în B_3 cu planul osculator în B_0, care se confundă cu punctul studiat al curbei; vârful B_1 este intersecţia planului osculator la (Γ) în B_3 cu tangenta în B_0 la (C).

46. **Reper de ordinul VI. Puncte singulare de 1-a și a 2-a speță. Arc proiectiv.** Identificarea coeficienților lui y_1^6 în identitățile (9') ne dă

$$\frac{4}{3}\lambda\mu c_6+\frac{2}{3}\lambda\mu^2 d_6=\alpha_6+\frac{1}{81}\lambda\mu^5-\frac{1}{81}\lambda\mu^5+\frac{1}{243}\lambda\mu^5$$

$$\lambda^2 c_6+\lambda^2\mu d_6=\beta_6-\frac{2}{27}\lambda^2\mu^4+\frac{1}{18}\lambda^2\mu^4-\frac{1}{81}\lambda^2\mu^4$$

$$\lambda^3 d_6=\gamma_6+\frac{1}{9}\lambda^3\mu^3-\frac{1}{18}\lambda^3\mu^3+\frac{1}{162}\lambda^3\mu^3$$

și în identitățile (12')

$$\beta_6=\frac{1}{81}\lambda^2\mu^4+\frac{1}{81}\lambda^2\mu^4+\frac{1}{162}\lambda^2\mu^4+\lambda^6 a_6$$

$$\gamma_6=-\frac{1}{54}\lambda^3\mu^3-\frac{1}{162}\lambda^3\mu^3+\lambda^6 b_6$$

sau prin eliminarea lui β_6, γ_6 și simplificare:

$$c_6+\mu d_6=\lambda^4 a_6 \quad , \quad d_6=\lambda^3 b_6 .$$

Se vede atunci din aceste relații că ecuația $b_6=0$ este invariantă și de asemeni sistemul $a_6=b_6=0$. Punctele care satisfac ecuației $b_6=0$ le vom numi atunci *singulare de prima speță,* dacă $a_6\neq 0$ sau *singulare de speța 2-a* dacă $a_6=0$. Curbele care au numai puncte singulare de 1-a sau numai de a 2-a speță le vom numi respectiv *curbe singulare de 1-a speță* sau *a 2-a speță.* Fiindcă ele prezintă un element nou (în special cele de 1-a speță) nu le mai excludem din studiul nostru ci le vom examina mai de aproape.

Să considerăm mai întâi cazul general $b_6\neq 0$; se vede atunci că putem determina pe λ astfel în cât b_6 să aibă o anumită valoare numerică. Fie ρ acea valoare numerică, care devine egală cu zero în cazul punctelor singulare. Pentru simplificarea formulelor lui F r e n e t vom face în cazul punctelor nesingulare $\boxed{\rho=\frac{1}{72}}$; se vede atunci că putem lua pe μ astfel încât, însemnând $\boxed{c_7 = \rho'}$, să avem $\boxed{\rho' = 0}$. Reperul astfel determinat în punctele nesingulare (sau ordinare) este reperul de ordinul VI.

Să presupunem că reperul iniţial este de ordinul VI; avem atunci

$$a_6 = 0 \quad , \quad \boxed{b_6 = \rho = \frac{1}{72}}$$

de unde deducem:

$$\lambda^3 = 1, \text{ sau în domeniul real } \lambda = 1, \text{ şi } \mu = 0.$$

Formulele (3) devin

$$x_1 = y_1 \quad , \quad x_2 = y_2 \quad , \quad x_3 = y_3$$

deci reperul de ordinul VI are un caracter proiectiv invariant, căci nu putem trece dela un reper real de ordinul VI la alt reper de acelaşi ordin decât prin transformarea identică. Formulele precedente mai arată că, t fiind un parametru în raport cu care este definită curba, *partea principală* $\varphi(t)\,dt$ a abscisei punctului corespunzător valorii $t + dt$ a parametrului faţă de reperul de ordinul VI în punctul corespunzător valorii t, *are un caracter invariant*; o numim elementul de arc proiectiv al curbei şi-l vom nota cu $d\sigma$ $(\sigma = \int \varphi(t)\,dt)$.

Pentru punctele singulare de prima speţă avem $b_6 = d_6 = 0$, dar $a_6 \neq 0$; putem atunci determina pe λ astfel încât să avem $\boxed{c_6 = \rho' = \frac{1}{72}}$; vom avea astfel un reper de ordinul VI într'un punct singular de prima speţă. Dacă presupunem că reperul iniţial este de ordinul VI vom avea $\boxed{a_6 = \rho' = \frac{1}{72}}$;

deducem $\lambda^4 = 1$, deci în domeniul real $\lambda = \pm 1$. Formulele (3) şi (9′) ne dau

$$x_1 = \pm \frac{y_1 + \frac{4}{3}\mu y_2 + \frac{2}{3}\mu^2 y_3}{1 + \mu y_1 + \frac{2}{3}\mu^2 y_2 + \frac{2}{9}\mu^3 y^3} = \pm\left(y_1 - \frac{1}{3}\mu y_1^2 + \dots\right)$$

cu alte cuvinte partea principală a lui $|x_1|$ are un caracter invariant: este elementul de arc $d\sigma$, al curbelor singulare de prima speţă.

Prezenţa coeficientului nedeterminat μ în formulele de trecere dela un reper de ordinul VI la alt reper de acelaşi ordin ne arată că avem o simplă infinitate de repere de ordinul VI în puncte singulare de prima speţă.

In sfârşit în cazul punctelor singulare de speţa 2-a avem:

$$\boxed{a_6 = c_6 = \rho' = 0 \quad , \quad b_6 = d_6 = \rho = 0}$$

iar λ, μ sunt nedeterminaţi; pentru o curbă singulară de speţa 2-a nu putem vorbi de arc proiectiv. Vom demonstra ulterior că o curbă singulară de speţa 2-a este o *cubică strâmbă.*

Să însemnăm $a_7 = k$, $b_7 = k_1$, $a_8 = k_2$, $b_8 = k_3$ în ecuaţiile unei curbe faţă de un reper de ordinul VI. Aceste ecuaţii se vor scrie:

$$(20) \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \rho' x_1^6 + k x_1^7 + k_2 x_1^8 + \dots \\ x_3 = \frac{1}{6} x_1^3 + \rho x_1^6 + k_1 x_1^7 + k_3 x_1^8 + \dots \end{cases}$$

Pentru curbele ordinare (nesingulare) reperul de ordinul VI fiind determinat în mod unic, coeficienţii $k, k_1, k_2\, k_3, \dots$ sunt invarianţi proiectivi: îi vom numi *curburile proiective ale curbei.*

Pentru curbele singulare de prima speţă se poate demonstra, printr'un calcul pe care îl omitem, făcând identificările coeficienţilor lui y_1^7 în formulele (9′) şi (12′), că putem totdeauna determina coeficientul μ astfel încât $k = 0$. Reperul de ordinul VI determinat prin această condiţie este unic astfel încât k_1, k_2, k_3,... sunt *curburi proiective*. Vom demonstra ulterior că *pentru curbele singulare* de speţa 1-a, k_1 are o valoare numerică iar $k_2 = 0$; k_3 este o curbură propriu zisă pe care o putem numi curbură proiectivă a curbei singulare de prima speţă.

Vom demonstra de asemeni cu aceeaşi ocaziune (§ 51) că pentru curbele singulare de speţa 2-a toţi coeficienţii $k, k_1, k_2, k_3, a_m, b_m$ $(m \geqslant 9)$ sunt identic nuli. Curbele singulare de speţa 2-a sunt deci transformate omografice una alteia.

47. **Interpretarea geometrică a reperului de ordinul VI. Punctele lui Halphen şi Sannia.** Pentru a găsi elemente geometrice proiectiv-invariant legate de o curbă ne propunem, în primul rând, în spiritul metodei generale arătate la § 11°, să căutăm cuadricele care conţin cubica (Γ). Fie

$$(21)\qquad \begin{aligned} A + 2Bx_1 + 2Cx_2 + 2Dx_3 + Ex_1^2 + Fx_2^2 \\ + Gx_3^2 + 2Hx_1x_2 + 2Ix_1x_3 + 2Jx_2x_3 = 0 \end{aligned}$$

ecuaţia, faţă de un reper de ordinul VI, a unei cuadrice oarecare. Pentru a determina coeficienţii corespunzători cuadricelor căutate, vom înlocui pe x_2 şi x_3 cu valorile lor (19) în funcţie de x_1; obţinem un polinom de gradul al VI-lea în x_1, care trebue să fie identic nul, ceea ce ne dă imediat:

$$A = B = G = J = 0, \quad E = -C, \quad H = -\frac{1}{3} D, \quad I = -\frac{3}{4} F,$$

astfel încât ecuaţia generală a cuadricelor căutate are forma

$$C\,(2x_2 - x_1^2) + D\left(2x_3 - \frac{2}{3}\,x_1\,x_2\right) + F\left(x_2^2 - \frac{3}{2}\,x_1\,x_3\right) = 0;$$

toate aceste cuadrice formează deci o rețea de cuadrice. Cuadrica se reduce la un con atunci când discriminantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & C & D \\ 0 & -C & -\frac{1}{3}D & -\frac{3}{4}F \\ C & -\frac{1}{3}D & F & 0 \\ D & -\frac{3}{4}F & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{4}CF + \frac{1}{3}D^2\right)^2$$

este nul, sau

$$9CF + 4D^2 = 0;$$

avem așa dar o familie de conuri ce trec prin cubica (Γ). Coordonatele vârfurilor acestor conuri, sunt în virtutea relației precedente

$$x_1 = -3\frac{C}{D} \quad ; \quad x_2 = \frac{9}{2}\frac{C^2}{D^2} \quad ; \quad x_3 = -\frac{9}{2}\frac{C^3}{D^3}$$

și satisfac ecuațiilor (18) sau (19). *Singurele conuri pătratice care conțin cubica* (Γ) *sunt deci conurile care proiectează această cubică dintr'un punct oarecare al ei.*

Să căutăm, în al doilea rând, cuadricele care au un contact de ordinul al VI-lea cu curba studiată. Pentru aceasta vom înlocui în ecuația (21) pe x_2, x_3 cu valorile lor (20) unde $\rho' = 0$, $\rho = \frac{1}{72}$, și vom anula coeficienții puterilor lui x_1 în desvoltarea obținută, până la x_1^6 inclusiv. Căpătăm imediat relațiile

$$A = 0 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad C + E = 0 \quad , \quad \frac{1}{3}D + H = 0$$

$$\frac{1}{4}F + \frac{1}{3}I = 0 \quad , \quad J = 0 \quad , \quad \frac{1}{36}D + \frac{1}{36}G = 0.$$

Ecuaţia (21), devine

$$C(2x_2 - x_1^2) + D\left(2x_3 - \frac{2}{3}x_1x_2 - x_3^2\right) + F\left(x_2^2 - \frac{3}{2}x_1x_3\right) = 0. \tag{22}$$

Obţinem astfel o reţea de cuadrice, rezultat la care ne puteam aştepta, deoarece se ştie că prin şapte puncte oarecare ale spaţiului trec ∞^2 cuadrice formând o reţea; proprietatea aceasta se păstrează deci, după cum se vede, şi atunci când cele şapte puncte tind, pe o curbă, spre un anumit punct al acestei curbe.

Pentru ca o cuadrică a reţelei (22) să conţină cubica (Γ), trebue şi ajunge, prin comparaţie cu formulele precedente, să avem $G = 0$ deci $D = 0$; pentru ca în plus o asemenea cuadrică să fie şi un con, trebue să mai adăugăm condiţia suficientă $CF = 0$, ceea ce ne dă $C = 0$ sau $F = 0$.

Avem prin urmare două conuri care conţin cubica (Γ) şi au un contact de ordinul şase; ecuaţiile lor sunt

$$2x_2 - x_1^2 = 0 \qquad (D = 0,\ F = 0)$$

$$x_2^2 - \frac{3}{2}x_1x_3 = 0 \quad (D = 0,\ C = 0)$$

Primul con are vârful în punctul considerat al curbei, deci nu introduce niciun element nou. Vârful celui de al 2-lea con va fi, din contra, un punct remarcabil, care se numeşte punctul lui H a l p h e n; definiţia lui sub formă geometrică rezultă imediat din consideraţiile precedente. Coordonatele omogene ale vârfului acestui con sunt (0, 0, 0, 1), deci vârful A_3 al reperului coincide cu punctul lui H a l p h e n. Aplicând atunci rezultatele dela § 45, avem pentru punctele ordinare o interpretare completă a reperului de ordinul VI.

Considerarea reţelei de cuadrice care au un contact de ordinul şase cu o curbă dată, definită de ecuaţiile (22), conduce şi la un al 2-lea punct remarcabil. Se ştie, în adevăr, că cuadricele unei reţele au opt puncte comune. Cuadricele

(22) având şapte puncte comune confundate în punctul considerat al curbei, vor mai avea încă un punct comun; acesta este punctul remarcabil care se numeşte punctul lui S a n n i a. Coordonatele acestui punct se găsesc rezolvând sistemul

$$2x_2 - x_1^2 = 0,\ 2x_3 - \frac{2}{3} x_1 x_2 - x_3^2 = 0,\ x_2^2 - \frac{3}{2} x_1 x_3 = 0$$

ceea ce ne dă, în afară de soluţia de ordinul VII: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, soluţia $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 2$, care corespunde punctului lui S a n n i a; acest punct se găseşte deci pe muchia $A_0 A_3$ a reperului. Avem astfel teorema:

Un punct al curbei şi punctele lui Halphen şi Sannia corespunzătoare sunt puncte colineare.

48. **Altă interpretare geometrică a reperului. Plan principal.** Noţiunea de plan principal se capătă plecând dela consideraţiile următoare. Fie (C) şi (Γ) două curbe strâmbe care au într'un punct M un contact strict de ordinul n $(n \geqslant 1)$. Proiectăm această figură dintr'un punct P pe un plan π; fie (C'), (Γ'), M' proiecţiile lui (C), (Γ), M. Curbele (C') şi $(\Gamma)'$ vor avea evident în M' un contact de ordin *cel puţin egal cu n*. Se demonstrează că locul punctelor P, pentru care contactul este cel puţin de ordinul $n+1$, este un plan Π, care conţine tangenta MT comună curbelor (C) şi (Γ) în M. Vom face demonstraţia pentru cazul, care ne interesează, când (Γ) este cubica osculatoare la (C) în punctul considerat, al cărui contact este de ordinul V. Ecuaţiile curbelor (C) şi (Γ) faţă de reperul de ordinul şase al curbei (C) sunt respectiv ecuaţiile (20) şi (19). Fie (α, β, γ) coordonatele centrului de proiecţie P şi (x_1, x_2, x_3) ale unui punct variabil N în spaţiu, faţă de acelaşi reper. Vom lua ca plan π, planul $x_3 = 0$, osculator la curba (C). Un punct de pe dreapta PN având coordonatele date de expresiile:

$$\xi_1 = \alpha + t(\alpha - x_1);\quad \xi_2 = \beta + t(\beta - x_2);\quad \xi_3 = \gamma + t(\gamma - x_3),$$

unde t este un parametru, coordonatele proiecţiei N' ale punctului N pe planul π se găsesc determinând pe t astfel ca $\xi_3 = 0$, deci $t = -\frac{\gamma}{\gamma - x_3}$. Substituind găsim:

$$\xi_1 = \frac{\gamma x_1 - \alpha x_3}{\gamma - x_3}\ ; \quad \xi_2 = \frac{\gamma x_2 - \beta x_3}{\gamma - x_3}. \tag{23}$$

Fie atunci

$$\xi_2 = m_0 + m_1\, \xi_1 + m_2\, \xi_1^2 + \ldots \tag{24}$$

ecuaţia curbei (C') (sau Γ') descrisă de N' când N descrie (C) (sau Γ). Pentru a determina coeficienţii m înlocuim în ecuaţiile (23) pe x_2 şi x_3 prin valorile (20) [sau (19)] în funcţie de x_1 şi desvoltăm rezultatele după puterile lui x_1. Substituim apoi aceste desvoltări în (24) şi identificăm coeficienţii puterilor lui x_1 în seriile obţinute în cei doi membri. Vom obţine astfel pentru curba (C'):

$$\xi_1 = \frac{\gamma x_1 - \alpha\left(\frac{1}{6}x_1^3 + \rho x_1^6 + \ldots\right)}{\gamma - \left(\frac{1}{6}x_1^3 + \rho x_1^6 + \ldots\right)} = x_1 - \frac{\alpha}{6\gamma}x_1^3$$

$$+ \frac{1}{6\gamma}x_1^4 - \left(\frac{\alpha\rho}{\gamma} + \frac{\alpha}{36\gamma^3}\right)x_1 + \ldots$$

$$\xi_2 = \frac{\gamma\left(\frac{1}{2}x_1^2 + \rho' x_1^6 + \ldots\right) - \beta\left(\frac{1}{6}x_1^3 + \rho x_1^6 + \ldots\right)}{\gamma - \left(\frac{1}{6}x_1^3 + \rho x_1^6 + \ldots\right)}$$

$$= \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{\beta}{6\gamma}x_1^3 + \frac{1}{12\gamma}x_1^5 + \left(\rho' - \frac{\beta\rho}{\gamma} - \frac{\beta}{36\gamma^2}\right)x_1^6 + \ldots$$

şi substituind apoi în (24) şi identificând vom determina succesiv coeficienţii m_k $(k \leqslant 6)$, ceea ce ne dă înlocuind în (24) următoarea desvoltare:

$$\left\{\begin{aligned} \xi_2 = {} & \frac{1}{2}\xi_1^2 - \frac{\beta}{6\gamma}\xi_1^3 + \frac{\alpha}{6\gamma}\xi_1^4 - \left(\frac{1}{12\gamma} + \frac{\alpha\beta}{12\gamma^2}\right)\xi_1 \\ & + \left(\rho' - \frac{\beta\rho}{\gamma} + \frac{\beta}{18\gamma^2} + \frac{7\alpha^2}{72\gamma^2}\right)\xi_1^6 + \ldots \end{aligned}\right. \tag{25}$$

a ecuaţiei curbei (C'). Pentru curba Γ' se vede că este destul să înlocuim pe ρ' şi ρ cu zero. Obţinem astfel desvoltarea

$$(26)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{1}{2}\xi_1^2 - \dfrac{\beta}{6\gamma}\xi_1^3 + \dfrac{\alpha}{6\gamma}\xi_1^4 - \left(\dfrac{1}{12\gamma} + \dfrac{\alpha\beta}{12\gamma^2}\right)\xi_1^5 \\ \quad + \left(\dfrac{\beta}{18\gamma^2} + \dfrac{7\alpha^2}{72\gamma^2}\right)\xi_1^6 + \dots \end{cases}$$

pentru ecuaţia curbei (Γ). Dacă punctul considerat al curbei este un punct ordinar avem $\rho'=0$, $\rho=\frac{1}{72}$; curbele $(C)'$ şi (Γ') de ecuaţii (25) şi (26) nu pot avea un contact de ordinul VI cel puţin decât dacă $\beta = 0$; locul punctelor P satisfăcând această condiţie este deci planul $\xi_2 = 0$, adică planul $A_0 A_1 A_3$. Putem deci enunţa teorema:

Locul punctelor din spaţiu, din care, proiectând o curbă (C) *şi cubica osculatoare* (Γ) *într'un punct ordinar pe planul osculator comun, se obţin două curbe având un contact de ordinul şase cel puţin, este un plan* Π, *care trece prin tangenta comună şi este diferit de planul osculator. El se numeşte planul principal al curbelor* (C) *şi* (Γ).

Interpretarea geometrică a reperului de ordinul VI rezultă numaidecât. Planul Π care conţine tangenta la (Γ) în punctul considerat mai taie odată cubica (Γ) în vârful A_3 al reperului; celelalte vârfuri ale reperului se obţin prin construcţia dela sfârşitul § 45.

III

REPERUL MOBIL. FORMULELE LUI FRENET

49. **Formule preliminarii.** Să considerăm o curbă (C), definită parametric în funcţie de un parametru t, şi în fiecare punct al ei reperul faţă de care ecuaţia curbei se scrie sub forma (20), unde

$$\rho' = 0,\ \rho = \frac{1}{72} \text{ pentru curbele ordinare,}$$

$$\rho' = \frac{1}{72}, \ \rho=0, \ k=0 \text{ pentru curbele singulare de prima speţă}$$

$$\rho' = \rho = 0 \text{ pentru curbele singulare de speţa 2-a.}$$

Vom presupune, aşa dar, că pe o porţiune studiată a curbei toate punctele curbei sunt ordinare sau au singularităţi de aceeaşi speţă.

Fie, în notaţie prescurtată, simbolică, A_0, A_1, A_2, A_3 coordonatele omogene faţă de un reper fix ale vârfurilor notate cu aceleaşi litere ale reperului, factorul de proporţionalitate ale coordonatelor fiecărui vârf, fiind determinat astfel încât la acele coordonate să corespundă, conform § 38^0, o singură omografie care să transforme reperul fix în reperul considerat. Coordonatele A_0, A_1, A_2, A_3 ca şi coeficienţii k, k_i din ecuaţiile (20) sunt evident funcţiuni de t. Cu această notaţie simbolică expresiile $\frac{dA_0}{dt}$, $\frac{dA_1}{dt}$, $\frac{dA_2}{dt}$, $\frac{dA_3}{dt}$, vor desemna punctele care au drept coordonate, faţă de reperul fix, derivatele în raport cu t, ale coordonatelor A_0, A_1, A_2, A_3. Fie p_{i0}, p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} $(i=0, 1, 2, 3)$ coordonatele omogene faţă de reperul $A_0 A_1 A_2 A_3$. Vom avea

$$(27) \quad \begin{cases} \dfrac{dA_0}{dt} = p_{00} A_0 + p_{01} A_1 + p_{02} A_2 + p_{03} A_3 \\ \dfrac{dA_1}{dt} = p_{10} A_0 + p_{11} A_1 + p_{12} A_2 + p_{13} A_3 \\ \dfrac{dA_2}{dt} = p_{20} A_0 + p_{21} A_1 + p_{22} A_2 + p_{23} A_3 \\ \dfrac{dA_3}{dt} = p_{30} A_0 + p_{31} A_1 + p_{32} A_2 + p_{33} A_3 \end{cases}$$

Problema revine a determina valorile coeficienţilor p_{ij}. Pentru aceasta să considerăm un punct M în spaţiu ale cărui coordonate faţă de un reper fix sunt funcţiuni de t. Fie X_0, X_1, X_2, X_3 coordonatele relative omogene şi $x_1 = \frac{X_1}{X_0}$,

$x_2 = \frac{X_2}{X_0}$, $x_3 = \frac{X_3}{X_0}$ coordonatele relative neomogene ale punctului M față de reperul $A_0 A_1 A_2 A_3$. Vom nota simbolic cu M și $\frac{dM}{dt}$ coordonatele punctului M și ale punctului ale cărui coordonate față de reperul fix sunt derivatele în raport cu t ale coordonatelor M față de reperul fix. Vom avea atunci relațiile scrise sub formă prescurtată

$$M = X_0 A_0 + X_1 A_1 + X_2 A_2 + X_3 A_3$$

și

$$\frac{dM}{dt} = \xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3$$

unde $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$, coordonatele față de reperul $A_0 A_1 A_2 A_3$ ale punctului $\frac{dM}{dt}$ au expresiile următoare care se deduc din derivarea relației precedente și din relațiile (27):

$$\xi_0 = \frac{dX_0}{dt} + p_{00} X_0 + p_{10} X_1 + p_{20} X_2 + p_{30} X_3$$

$$\xi_1 = \frac{dX_1}{dt} + p_{01} X_0 + p_{11} X_1 + p_{21} X_2 + p_{31} X_3$$

$$\xi_2 = \frac{dX_2}{dt} + p_{02} X_0 + p_{12} X_1 + p_{22} X_2 + p_{32} X_3$$

$$\xi_3 = \frac{dX_3}{dt} + p_{03} X_0 + p_{13} X_1 + p_{23} X_2 + p_{33} X_3 .$$

Să presupunem acum că punctul M este fix în spațiu. Rezultă că punctele M și $M + dM$ coincid, deci coincid și M și $\frac{dM}{dt}$; vom avea atunci relațiile

$$\xi_0 = \lambda X_0 \ , \ \xi_1 = \lambda X_1 \ , \ \xi_2 = \lambda X_2 \ , \ \xi_3 = \lambda X_3 .$$

Inlocuind în aceste relații, ξ_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ cu valorile lor precedente obținem niște relații din care deducem numaidecât valorile $\frac{dx_i}{dt}(i = 1, 2, 3)$ ale coordonatelor neomogene relative ale punctului M, cu ajutorul relaţiilor

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{X_0}\frac{dX_i}{dt} - \frac{X_i}{X_0^2}\frac{dX_0}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Căpătăm astfel

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -p_{01} + (p_{00} - p_{11})\, x_1 - p_{21}\, x_2 - p_{31}\, x_3 \\ &\quad + p_{10}\, x_1^2 + p_{20}\, x_1\, x_2 + p_{30}\, x_1\, x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -p_{02} - p_{12}\, x_1 + (p_{00} - p_{22})\, x_2 - p_{32}\, x_3 \\ &\quad + p_{10}\, x_1\, x_2 + p_{20}\, x_2^3 + p_{30}\, x_2\, x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -p_{03} - p_{13}\, x_1 - p_{23}\, x_2 + (p_{00} - p_{33})\, x_3 \\ &\quad + p_{10}\, x_1\, x_3 + p_{20}\, x_2\, x_3 + p_{30}\, x_3^2. \end{aligned} \right.$$

Formulele (28) exprimă condiţiile ca un punct de coordonate *relative* neomogene x_1, x_2, x_3 să fie fix în spaţiu.

50. **Determinarea coeficienţilor** p_{ij}. Să presupunem punctul *M fix pe curba* (*C*). Coordonatele x_1, x_2, x_3 vor satisface în acelaşi timp la relaţiile (20) şi (28). Să derivăm relaţiile (20) în raport cu t şi să înlocuim în relaţiile obţinute pe $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, $\frac{dx_3}{dt}$ prin valorile lor (28) în care am înlocuit în prealabil pe x_2, x_3 cu valorile lor (20). Obţinem două identităţi în x_1, care prin identificarea coeficienţilor puterilor lui x_1, ne vor da coeficienţii p_{ij}. Pentru ca determinarea acestora să fie însă completă va trebui să facem şi o alegere a parametrului t precum şi a factorului de proporţionalitate comun cu care putem înmulţi toate coordonatele A_i fără ca ecuaţiile (20) să se schimbe. Vom alege ca parametru t arcul proiectiv σ, definit la § 46, atunci când acest lucru e posibil. In ceea ce

priveşte factorul de proporţionalitate, pe acesta îl vom presupune ales astfel încât determinantul

$$a = |A_0\, A_1\, A_2\, A_3|,$$

scris în notaţie simbolică, să aibă mereu valoarea unu. Condiţia aceasta se traduce prin relaţia:

$$0 = \frac{da}{dt} = \left|\frac{dA_0}{dt}\, A_1\, A_2\, A_3\right| + \left|A_0\, \frac{dA_1}{dt}\, A_2\, A_3\right|$$

$$+ \left|A_0\, A_1\, \frac{dA_2}{dt}\, A_3\right| + \left|A_0\, A_1\, A_2\, \frac{dA_3}{dt}\right|$$

$$= (p_{00} + p_{11} + p_{22} + p_{33})\, a$$

deci

(29) $$p_{00} + p_{11} + p_{22} + p_{33} = 0$$

Ca să găsim condiţia legată de alegerea parametrului vom observa că punctul de pe curbă care corespunde valorii $t + dt$ a parametrului este punctul

$$A_0 + \frac{dA_0}{dt} dt + \ldots = (1 + p_{00}\, dt + \ldots)\, A_0 + (p_{01}\, dt + \ldots)\, A_1$$

$$+ (p_{02}\, dt + \ldots)\, A_2 + (p_{03}\, dt + \ldots)\, A_3$$

a cărui abscisă x_1 este

$$x_1 = \frac{p_{01}\, dt + \ldots}{1 + p_{00}\, dt + \ldots} = p_{01}\, dt + \ldots;$$

partea principală a acestei abscise, care se demonstrează astfel că este un infinit mic de primul ordin, este deci $p_{01}\, dt$, care prin definiţie este elementul de arc proiectiv $d\sigma$. In caz când $t = \sigma$, vom avea

(30) $$p_{01} = 1,$$

şi aceasta este condiţia căutată.

Să procedăm acum aşa cum s'a indicat în cele ce preced. Prin derivarea relaţiilor (20) obţinem relaţiile

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_2}{d\sigma} = (x_1 + 6\,\rho'\,x_1^5 + 7\,k\,x_1^6 + 8\,k_2\,x_1^7 + \ldots)\dfrac{dx_1}{d\sigma} \\ \qquad + \dfrac{dk}{d\sigma}\,x_1^7 + \dfrac{dk_2}{d\sigma}\,x_1^8 + \ldots \\ \dfrac{dx_3}{d\sigma} = \left(\dfrac{1}{2}\,x_1^2 + 6\,\rho\,x_1^5 + 7\,k_1\,x_1^6 + 8\,k_3\,x_1^7 + \ldots\right)\dfrac{dx_1}{d\sigma} \\ \qquad + \dfrac{dk_1}{d\sigma}\,x_1^7 + \dfrac{dk_3}{d\sigma}\,x_1^8 + \ldots \end{cases}$$

Inlocuirea în (28) a lui x_2, x_3 cu valorile (20), ne dă, ţinând seamă de (30):

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = -1 + (p_{00} - p_{11})\,x_1 + \left(p_{10} - \frac{1}{2}\,p_{21}\right)x_1^2$$

$$+ \left(\frac{1}{2}p_{20} - \frac{1}{6}\,p_{31}\right)x_1^3 + \frac{1}{6}\,p_{30}\,x_1^4 - (\rho'\,p_{21} + \rho\,p_{31})\,x_1^6 + \ldots$$

$$\frac{dx_2}{d\sigma} = -p_{02} - p_{12}\,x_1 + \frac{1}{2}\,(p_{00} - p_{22})\,x_1^2 + \left(\frac{1}{2}\,p_{10} - \frac{1}{6}\,p_{32}\right)x_1^3$$

$$+ \frac{1}{4}\,p_{20}\,x_1^4 + \frac{1}{12}\,p_{30}\,x_1^5 + [\rho'\,(p_{00} - p_{22}) - \rho\,p_{32}]\,x_1^6$$

$$+ [k\,(p_{00} - p_{22}) - k_1\,p_{32} + \rho'\,p_{10}]\,x_1^7 + \ldots$$

$$\frac{dx_3}{d\sigma} = -p_{03} - p_{13}\,x_1 - \frac{1}{2}\,p_{23}\,x_1^2 + \frac{1}{6}\,(p_{00} - p_{33})\,x_1^3 + \frac{1}{6}\,p_{10}\,x_1^4$$

$$+ \frac{1}{12}\,p_{20}\,x_1^5 + \left[\rho\,(p_{00} - p_{33}) - \rho'\,p_{23} + \frac{1}{36}\,p_{30}\right]x_1^6$$

$$+ [k_1\,(p_{00} - p_{33}) - k\,p_{23} + \rho\,p_{10}]\,x_1^7 + \ldots$$

Inlocuind aceste valori în (31) şi făcând apoi identificarea coeficienţilor puterilor lui x_1 până la gradul şapte inclusiv, obţinem succesiv relaţiile:

$$-p_{02}=0\,;\ -p_{12}=-1\ ,\quad \frac{1}{2}(p_{00}-p_{22})=(p_{00}-p_{11}).$$

$$\frac{1}{2}p_{10}-\frac{1}{6}p_{32}=p_{10}-\frac{1}{2}p_{21}\ ,\quad \frac{1}{4}p_{20}=\frac{1}{2}p_{20}-\frac{1}{6}p_{31}$$

$$\frac{1}{12}p_{30}=\frac{1}{6}p_{30}-6\rho'\ ;\ \rho'(p_{00}-p_{22})-\rho p_{32}=6\rho'(p_{00}-p_{11})-7k$$

$$k(p_{00}-p_{22})-k_1p_{32}+\rho'p_{10}=-8k_2+7k(p_{00}-p_{11})$$
$$+6\rho'\left(p_{10}-\frac{1}{2}p_{21}\right)+\frac{dk}{d\sigma}-\rho'p_{21}-\rho p_{31}$$

şi

$$-p_{03}=0\,;\ -p_{13}=0\,;\ -\frac{1}{2}p_{23}=-\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{6}(p_{00}-p_{33})$$
$$=\frac{1}{2}(p_{00}-p_{11})\,;\ \frac{1}{6}p_{10}=\frac{1}{2}\left(p_{10}-\frac{1}{2}p_{21}\right);$$
$$\frac{1}{12}p_{20}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_{20}-\frac{1}{6}p_{31}\right)-6\rho$$

$$\rho(p_{00}-p_{33})-\rho'p_{23}+\frac{1}{36}p_{30}=\frac{1}{12}p_{30}+6\rho(p_{00}-p_{11})-7k_1$$

$$k_1(p_{00}-p_{33})-kp_{23}+\rho p_{10}=-8k_3+7k_1(p_{00}-p_{11})$$
$$+6\rho\left(p_{10}-\frac{1}{2}p_{21}\right)+\frac{dk_1}{d\sigma}$$

de unde scoatem mai întâi

$$(32)\quad\begin{cases} p_{02}=0\ ,\ p_{03}=0\ ,\ p_{13}=0\ ,\ p_{12}=1\ ,\ p_{23}=1\\ 6(p_{11}-p_{00})=3(p_{22}-p_{00})=2(p_{33}-p_{00})\,;\,4p_{10}=3p_{21}=4p_{32}\\ p_{20}=144\rho\ ,\ p_{31}=216\rho\ ;\ p_{30}=72\rho'\end{cases}$$

şi apoi, punând $p_{11} = p$; $p_{10} = 3q$ şi ţinând seamă de (29)

$$(33)\quad \begin{cases} p_{00} = 3p \ ; \ p_{11} = p \ ; \ p_{22} = -p \ ; \ p_{33} = -3p \\ p_{10} = 3q \ ; \ p_{21} = 4q \ ; \ p_{32} = 3q \\ 5\rho' + 6\rho p = 7k_1 \ ; \ 8\rho' p + 3\rho q = 7k. \\ 8k_2 = 10pk + 3qk_1 - \rho' q - 216\rho^2 + \dfrac{dk}{d\sigma} \\ 8k_3 = k + 8pk_1 + 3\rho q + \dfrac{dk_1}{d\sigma}. \end{cases}$$

Relaţiile (32) şi (33), afară de ultimele două, ne vor da, în cazul general, valorile coeficienţilor p_{ij}. Ultimele două relaţiuni au fost stabilite pentru a arăta, ca şi relaţiile ce s'ar mai putea deduce prin continuarea procedeului de identificare, că invarianţii $k_2, k_3, k_4, \ldots$ se exprimă cu ajutorul invarianţilor k, k_1 şi a derivatelor de diferite ordine ale acestora în raport cu arcul proiectiv σ; sunt cu alte cuvinte *invarianţi derivaţi.*

51. **Formulele lui Frenet.** In cazul curbelor ordinare avem $\rho = \frac{1}{72}$, $\rho' = 0$. Formulele (33) ne dau în acest caz

$$p = 84k_1 \quad , \quad q = 168k;$$

ţinând atunci seamă de valorile coeficienţilor p_{ij}, trase din relaţiile (32) şi (33) şi punând

$$k = \frac{K}{168} \ ; \ k_1 = \frac{K_1}{84}$$

formulele (27) ne vor da făcând $t = \sigma$:

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{dA_0}{d\sigma} = 3K_1 A_0 + A_1 \quad ; \quad \dfrac{dA_1}{d\sigma} = 3K A_0 + K_1 A_1 + A_2 \\ \dfrac{dA_2}{d\sigma} = 2A_0 + 4K A_1 - K_1 A_2 + A_3 \\ \dfrac{dA_3}{d\sigma} = 3A_1 + 3K_1 A_2 - 3K_1 A_3 \end{cases}$$

şi vom căpăta astfel formulele lui F r e n e t corespunzătoare curbelor ordinare. Se vede din aceste formule că curbele ordinare au două curburi proiective K şi K_1, şi acestea sunt de ordinul şapte, fiindcă intervin, prin k şi k_1 în coeficienţii lui x_1^7 din desvoltările în serie a ecuaţiilor curbei (conform § 9, observaţia finală).

In cazul curbelor singulare de prima speţă avem $\rho = 0$, $\rho' = \frac{1}{72}$, $k = 0$. Formulele (33) ne dau:

$$k_1 = \frac{5}{504} \quad , \quad p = 0 \quad , \quad q = 63k_2 \quad , \quad k_3 = 0$$

şi punând $k_2 = \frac{K}{63}$, formulele (28) ne dau, cu ajutorul lui (32) şi (33), relaţiile

$$(35) \qquad \begin{cases} \dfrac{dA_0}{d\sigma} = A_1 \ ; \ \dfrac{dA_1}{d\sigma} = 3\,KA_0 + A_2 \\[2ex] \dfrac{dA_2}{d\sigma} = 4KA_1 + A_3 \ ; \ \dfrac{dA_3}{d\sigma} = A_0 + 3\,KA_2 \end{cases}$$

care sunt formulele lui F r e n e t pentru curbele singulare de prima speţă. Se observă că curbele aparţinând acestei categorii au o singură curbură fundamentală K de ordinul opt, restul curburilor fiind invarianţi derivaţi.

In sfârşit pentru curbele singulare de speţa 2-a avem $\rho = \rho' = 0$; relaţiile (33) ne dau $k = k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Prin continuarea procedeului de identificare se recunoaşte, din aproape în aproape că toţi coeficienţii k_i sunt nuli. Ecuaţiile (20) se reduc atunci la

$$(36) \qquad x_2 = \frac{1}{2}\,x_1^2 \quad ; \quad x_3 = \frac{1}{6}\,x_1^3$$

curba (C) se confundă cu cubica osculatoare (Γ). Obţinem astfel teorema:

Curbele singulare de speţa 2-a sunt cubice raţionale.

Se pot stabili şi pentru curbele singulare de speţa 2-a nişte formule F r e n e t. In adevăr ecuaţiile unei astfel de curbe față de un reper oarecare de ordinul cinci, într'un punct determinat, de altfel oarecare se scriu sub forma (36) de unde putem deduce următoarea reprezentare a curbei în coordonate omogene

$$X_0 = 1 \ , \ X_1 = \sigma \ , \ X_2 = \frac{1}{2}\sigma^2 \ , \ X_3 = \frac{1}{6}\sigma^3$$

pe care le luăm drept coordonate omogene ale punctului A_0. Vom pune:

$$A_1 = \frac{dA_0}{d\sigma} \ , \ A_2 = \frac{dA_1}{d\sigma} \ , \ A_3 = \frac{dA_2}{d\sigma} .$$

Cum avem:

$$\frac{d^4A_0}{d\sigma^4} = 0 \quad \text{vom avea} \quad \frac{dA_3}{d\sigma} = 0$$

deci în definitiv:

$$\frac{dA_0}{d\sigma} = A_1 \ ; \ \frac{dA_1}{d\sigma} = A_2 \ ; \ \frac{dA_2}{d\sigma} = A_3 \ ; \ \frac{dA_3}{d\sigma} = 0 \tag{37}$$

care sunt formulele Frenet ale curbelor singulare de speța 2-a.

52. **Coordonate plückeriene.** Pentru a defini alte elemente geometrice interesante în legătură cu studiul proiectiv al curbelor strâmbe și al suprafețelor este nevoie să reamintim aci câteva noțiuni și proprietăți de geometrie proiectivă analitică elementară, printre care pe acelea de coordonate plückeriene, complexe și congruențe lineare.

Să considerăm o dreaptă Δ în spațiu definită prin două puncte distincte X, Y, ale căror coordonate omogene față de un reper bine determinat le vom nota cu (X_0, X_1, X_2, X_3) și (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3). Să considerăm apoi matricea

$$\begin{Vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{Vmatrix}$$

formată cu aceste coordonate. Minorii

$$\pi_{ij} = X_i Y_j - X_j Y_i = -\pi_{ji} \quad (i \neq j = 0, 1, 2, 3)$$

dintre care, cu excepţia semnului nu sunt distincţi decât $C_4^2 = 6$, unul cel puţin fiind diferit de zero, se numesc *coordonatele plückeriene* ale dreptei Δ, după numele geometrului german P l ü c k e r care le-a introdus în geometrie.

Dacă definim dreapta Δ prin alte două puncte U, V, de coordonate (U_0, U_1, U_2, U_3) şi (V_0, V_1, V_2, V_3) coordonatele plückeriene ale dreptei Δ vor fi definite şi prin minorii

$$\rho_{ij} = U_i V_j - U_j V_i = -\rho_{ji} \quad (i \neq j = 0, 1, 2, 3)$$

ai matricei

$$\begin{Vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\ V_0 & V_1 & V_2 & V_3 \end{Vmatrix}$$

Dar avem, după cum se ştie:

$$U_i = \lambda X_i + \mu Y_i \ , \ V_i = \nu X_i + \sigma Y_i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

prin urmare:

$$U_i V_j - U_j V_i = (\lambda\sigma - \mu\nu)\ (X_i Y_j - X_j Y_i)$$

sau

$$\rho_{ij} = (\lambda\sigma - \mu\nu)\ \pi_{ij}.$$

Oricare ar fi deci punctele prin care definim dreapta Δ coordonatele plückeriene se deduc unele din altele prin înmulţirea cu un acelaşi factor de proporţionalitate; ele sunt deci *coordonate omogene.*

Intre coordonatele plückeriene ale unei drepte avem totdeauna relaţia identică

$$\pi_{01}\,\pi_{23} + \pi_{02}\,\pi_{31} + \pi_{03}\,\pi_{12} \equiv 0 \tag{38}$$

care rezultă din desvoltarea determinantului identic nul

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix}$$

prin regula lui L a p l a c e, după minorii matricei formate din primele două rânduri.

Reciproc fiind date şase numere nu toate nule, care satisfac relaţiei (38) există o dreaptă şi numai una, în spaţiu, care să le admită drept coordonate plückeriene. Să presupunem în adevăr că există o asemenea dreaptă; şi fie de ex. $\pi_{23} \neq 0$. Fie apoi $(X_0, X_1, X_2, 0)$ coordonatele punctului X unde dreapta întâlneşte planul $X_3 = 0$ şi $(Y_0, Y_1, 0, Y_3)$ coordonatele punctului Y unde întâlneşte planul $X_2 = 0$. Va trebui să avem.

$$(39)\qquad \frac{X_0 Y_1 - X_1 Y_0}{\pi_{01}} = \frac{-X_2 Y_0}{\pi_{02}} = \frac{X_0 Y_3}{\pi_{03}} = \frac{-X_2 Y_1}{\pi_{12}} = \frac{X_1 Y_3}{\pi_{13}} = \frac{X_2 Y_3}{\pi_{23}}$$

şi ultimele patru relaţii ne dau:

$$\frac{X_0}{\pi_{03}} = \frac{X_1}{\pi_{13}} = \frac{X_2}{\pi_{23}}\ ; \quad \frac{Y_0}{\pi_{02}} = \frac{Y_1}{\pi_{12}} = \frac{Y_3}{\pi_{32}}\ ;$$

punctele X şi Y sunt perfect determinate şi distincte deoarece, $\pi_{23} \neq 0$, deci dacă există o dreaptă aceasta este unic determinată. Pe de altă parte punctele distincte, X de coordonate $(\pi_{03}, \pi_{13}, \pi_{23}, 0)$ şi Y de coordonate $(\pi_{02}, \pi_{12}, 0, \pi_{32})$ satisfac în virtutea relaţiei (38) la relaţiile (39), deci dreapta XY are coordonate plückeriene proporţionale cu numerele date π_{ij}, ceea ce demonstrează teorema.

Fie acum π_{ij}, π'_{ij} coordonatele plückeriene a două drepte Δ, Δ' care se întâlnesc în spaţiu. Se vede uşor că avem relaţia identică

$$(40)\qquad \pi_{01}\pi'_{23} + \pi_{02}\pi'_{31} + \pi_{03}\pi'_{12} + \pi_{23}\pi'_{01} + \pi_{31}\pi'_{02} + \pi_{12}\pi'_{03} \equiv 0.$$

In adevăr, fie (X_0, X_1, X_2, X_3) coordonatele punctului comun, (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) coordonatele unui alt punct pe Δ şi (Y'_0, Y'_1, Y'_2, Y'_3) coordonatele unui alt punct pe Δ'. Vom avea

$$\pi_{ij} = X_i Y_j = X_j Y_i \ ; \quad \pi'_{ij} = X_i Y'_j - X_j Y'_i.$$

Dar desvoltarea prin regula lui Laplace a determinantului identic nul

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0' & Y_1' & Y_2' & Y_3' \end{vmatrix}$$

după minorii matricei formată de primele două linii ne dau tocmai relația (40), ceea ce trebuia demonstrat.

Reciproc, dacă între coordonatele plückeriene π_{ij}, π'_{ij} a două drepte Δ și Δ' avem relația (40), atunci dreptele sunt concurente. In adevăr punctele $X(\pi_{03}, \pi_{13}, \pi_{23}, 0)$ și $Y(\pi_{02}, \pi_{12}, 0, \pi_{32})$ sunt, cum s'a arătat mai sus, pe dreapta Δ, iar punctele $X'(\pi'_{03}, \pi'_{13}, \pi'_{23}, 0)$ și $Y'(\pi'_{02}, \pi'_{12}, 0, \pi'_{32})$ sunt pe dreapta Δ'. Să considerăm aunci punctul $Z(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3)$ de coordonate

$$Z_0 = \pi_{02}\,\pi'_{03} - \pi_{03}\,\pi'_{02}$$

$$Z_1 = \pi_{02}\,\pi'_{31} + \pi_{03}\,\pi'_{12} + \pi_{23}\,\pi'_{01} = -(\pi'_{02}\,\pi_{31} + \pi'_{03}\,\pi_{12} + \pi'_{23}\pi_{01})$$

$$Z_2 = \pi_{20}\,\pi'_{30} - \pi_{23}\,\pi'_{20}$$

$$Z_3 = \pi_{30}\,\pi'_{32} - \pi_{32}\,\pi'_{30}.$$

Se deduc numaidecât din aceste relații:

$$\pi_{32}\,Z_i = (\pi_{23}\,\pi'_{02} - \pi_{02}\,\pi'_{23})\,X_i + (\pi_{03}\,\pi'_{23} - \pi_{23}\,\pi'_{03})\,Y_i$$

$$\pi'_{23}\,Z_i = (\pi_{23}\,\pi'_{02} - \pi_{03}\,\pi'_{23})\,X_i + (\pi_{03}\,\pi_{23} - \pi_{23}\,\pi'_{03})\,Y'_i$$

ceea ce ne arată că punctul Z este comun dreptelor Δ și Δ'.

53. **Complex linear. Congruență lineară.** Se numește *complex linear* configurația formată de toate dreptele spațiului care se bucură de proprietatea că între coordonatele lor plückeriene π_{ij} există o relație lineară cu coeficienți constanți de forma

$$(41)\quad A_{23}\,\pi_{01} + A_{31}\,\pi_{02} + A_{12}\,\pi_{03} + A_{01}\,\pi_{23} + A_{02}\,\pi_{31} + A_{03}\,\pi_{12} = 0,$$

relație care poartă numele de *ecuația comp'exului.*

In general coeficienţii A_{ij} sunt nişte constante arbitrare, în care caz complexul este ordinar. Dacă însă între aceşti coeficienţi avem relaţia

$$A_{01} A_{23} + A_{02} A_{31} + A_{03} A_{12} = 0$$

atunci ei pot fi priviţi drept coordonate plückeriene ale unei drepte D şi ecuaţia (41) arată că dreptele complexului sunt acele şi numai acele drepte din spaţiu care întâlnesc dreapta D. In acest caz complexul se zice că este *special*, iar dreapta D se numeşte *axa complexului special.*

Să presupunem dat un complex linear şi un punct oarecare Y^0 în spaţiu. Dreptele complexului care trec prin Y^0 sunt situate într'un plan trecând prin Y^0. In adevăr să definim o dreaptă din această categorie prin punctul Y^0 şi prin un alt punct X. Coordonatele plückeriene ale dreptei vor fi

$$\pi_{ij} = X_i Y_j^0 - X_j Y_i^0;$$

scriind că dreapta aparţine complexului de ecuaţie (41) obţinem prin înlocuire şi ordonare după X_0, X_1, X_2, X_3, relaţia

$$\begin{aligned}(A_{23} Y_1^0 + A_{31} Y_2^0 + A_{12} Y_3^0) X_0 + (A_{03} Y_2^0 - A_{23} Y_0^0 - A_{02} Y_3^0) X_1 \\ + (A_{01} Y_3^0 - A_{31} Y_0^0 - A_{03} Y_1^0) X_2 \\ + (A_{02} Y_1^0 - A_{12} Y_0^0 - A_{01} Y_2^0) X_3 = 0,\end{aligned}$$

relaţie lineară şi omogenă în X_0, X_1, X_2, X_3 care se anulează când înlocuim aceste coordonate respectiv cu Y_0^0, Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0. Rezultă că punctul X se află într'un plan bine determinat trecând prin punctul Y^0 şi acelaşi lucru rezultă şi pentru o dreaptă oarecare $Y^0 X$ a complexului trecând prin Y^0. Proprietatea este astfel demonstrată. Planul care conţine toate dreptele complexului ce trec prin Y^0 se numeşte *planul polar al punctului* Y^0 *faţă de complexul considerat.*

Să considerăm acum două complexe lineare, primul definit de ecuaţia (41) şi al 2-lea de ecuaţia analoagă

$$(42)\quad B_{23}\,\pi_{01} + B_{31}\,\pi_{02} + B_{12}\,\pi_{03} + B_{01}\,\pi_{23} + B_{02}\,\pi_{31} + B_{03}\,\pi_{12} = 0.$$

Dreptele din spaţiu care aparţin la două complexe lineare se zic că formează o *congruenţă lineară*. Este evident că dreptele care aparţin unei congruenţe lineare aparţin la o infinitate de complexe lineare. In adevăr dacă congruenţa este definită de *complexele de bază* de ecuaţii (41) şi (42), complexul definit de ecuaţia

$$(43)\quad \begin{cases} (A_{23} + \lambda B_{23})\,\pi_{01} + (A_{31} + \lambda B_{31})\,\pi_{02} \\ \qquad + (A_{12} + \lambda B_{12})\,\pi_{03} + (A_{01} + \lambda B_{01})\,\pi_{23} \\ + (A_{02} + \lambda B_{02})\,\pi_{31} + (A_{03} + \lambda B_{03})\,\pi_{12} = 0, \end{cases}$$

unde λ este un parametru, conţine evident orice dreaptă a congruenţei. Complexele (43) se zic că formează, când λ variază un fascicol linear de complexe lineare. Reciproc toate dreptele comune complexelor unui fascicol linear formează o congruenţă şi anume congruenţa definită de două complexe oarecare ale fascicolului.

Printre complexele lineare ale unui fascicol există în general două şi numai două complexe lineare speciale. Fac excepţie congruenţele care au drept complexe de bază două complexe speciale cu axele concurente, caz care nu este interesant în studiul nostru. In adevăr pentru ca ecuaţia (42) să definească un complex special, va trebui să avem:

$$(A_{23} + \lambda B_{23})\,(A_{01} + \lambda B_{01}) + (A_{31} + \lambda B_{31}(A_{02} + \lambda B_{02}) \\ + (A_{12} + \lambda B_{12})\,(A_{03} + \lambda B_{03}) = 0.$$

Obţinem astfel o ecuaţie de gradul al 2-lea în λ care admite în general două rădăcini λ_1, λ_2 şi numai două, afară de cazul când se anulează identic în care caz avem o infinitate. Lăsând la o parte acest caz, fie D_1, D_2 axele complexelor speciale care corespund valorilor λ_1, λ_2. Cum putem lua aceste complexe drept complexe de bază, rezultă că *o congruenţă lineară este formată în general de totalitatea dreptelor care se sprijină pe două drepte fixe D_1 şi D_2 numite directoarele congruenţei.*

Fiind date cinci drepte oarecare în spaţiu D_1, D_2, D_3, D_4 şi D_5 există în general un complex linear şi numai unul singur care să conţină aceste cinci drepte. Fie, în adevăr,

$\pi_{01}^{(k)}$, $\pi_{02}^{(k)}$, $\pi_{03}^{(k)}$, $\pi_{23}^{(k)}$, $\pi_{31}^{(k)}$, $\pi_{12}^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ coordonatele plückeriene ale dreptei D_k. Pentru ca complexul linear definit de ecuaţia (41) să conţină dreptele D_k, va trebui să avem

$$A_{23}\,\pi_{01}^{(k)} + A_{31}\,\pi_{02}^{(k)} + A_{12}\,\pi_{03}^{(k)} + A_{01}\,\pi_{23}^{(k)} + A_{02}\,\pi_{31}^{(k)} + A_{03}\,\pi_{12}^{(k)} = 0$$
$$(k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

şi obţinem cinci relaţii omogene în raport cu coeficienţii A_{ij} care-i determină pe aceştia în mod unic cu excepţia unui factor comun care se elimină dela sine. Rezolvând aceste ecuaţii în raport cu A_{ij} şi înlocuind în (41), obţinem ecuaţia complexului căutat, rezultat care se poate scrie direct sub formă de determinant

$$\begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{02} & \pi_{03} & \pi_{23} & \pi_{31} & \pi_{12} \\ \pi_{01}^{(1)} & \pi_{02}^{(1)} & \pi_{03}^{(1)} & \pi_{23}^{(1)} & \pi_{31}^{(1)} & \pi_{12}^{(1)} \\ \pi_{01}^{(2)} & \pi_{02}^{(2)} & \pi_{03}^{(2)} & \pi_{23}^{(2)} & \pi_{31}^{(2)} & \pi_{12}^{(2)} \\ \pi_{01}^{(3)} & \pi_{02}^{(3)} & \pi_{03}^{(3)} & \pi_{23}^{(3)} & \pi_{31}^{(3)} & \pi_{12}^{(3)} \\ \pi_{01}^{(4)} & \pi_{02}^{(4)} & \pi_{03}^{(4)} & \pi_{23}^{(4)} & \pi_{31}^{(4)} & \pi_{12}^{(4)} \\ \pi_{01}^{(5)} & \pi_{02}^{(5)} & \pi_{03}^{(5)} & \pi_{23}^{(5)} & \pi_{31}^{(5)} & \pi_{12}^{(5)} \end{vmatrix} = 0.$$

54. **Complex linear osculator.** Să considerăm un punct M al unei curbe strâmbe (C) şi patru puncte vecine M_1, M_2, M_3, M_4. Tangentele $M\,T$, $M_1\,T_1$, $M_2\,T_2$, $M_3\,T_3$, $M_4\,T_4$ în aceste puncte definesc un complex linear (γ_1). Dacă facem punctele M_1, M_2, M_3, M_4 să tindă, independent unul de altul, către punctul M, complexul (γ_1) tinde către un complex limită (γ), care se numeşte complexul linear osculator la curba (C) în punctul M. Pentru a arăta acest lucru, să considerăm reperul de ordinul şase corespunzător punctului M. Ecuaţiile curbei (C) faţă de acest reper vor avea atunci forma (20). Rezultă atunci că un punct M' al curbei va avea faţă de acest reper coordonatele omogene

$$X_0 = 1\ ,\quad X_1 = x_1\ ,\quad X_2 = \frac{1}{2}\,x_1^2 + \rho'\,x_1^6 + \ldots,$$

$$X_3 = \frac{1}{6}\,x_1^3 + \rho\,x_1^6 + \ldots,$$

exprimate parametric în funcție de abscisa x_1 neomogenă a acestui punct, iar tangenta $M'T'$ va fi definită de acest punct și de punctul $\left(\frac{dM'}{dx_1}\right)$ de coordonate:

$$Y_0 = 0 \;,\quad Y_1 = 1 \;,\quad Y_2 = x_1 + 6\,\rho'\,x_1^5 + \ldots,$$
$$Y_3 = \frac{1}{2}\,x_1^2 + 6\,\rho\,x_1^5 + \ldots$$

Coordonatele plückeriene ale dreptei $M'T'$ vor fi deci:

$$\pi_{01} = 1, \quad \pi_{02} = x_1 + 6\rho'\,x_1^5 + \ldots, \quad \pi_{03} = \frac{1}{2}\,x_1^2 + 6\rho x_1^5 + \ldots$$

$$\pi_{12} = \frac{1}{2}\,x_1^2 + 5\rho' x_1^5 + \ldots, \quad \pi_{13} = \frac{1}{3}\,x_1^3 + 5\rho x_1^5 + \ldots,$$

$$\pi_{23} = \frac{1}{12}\,x_1^4 + \ldots$$

Fie atunci

$$a_{23}\,\pi_{01} + a_{31}\,\pi_{02} + a_{12}\,\pi_{03} + a_{01}\,\pi_{23} + a_{02}\,\pi_{31} + a_{03}\,\pi_{12} = 0 \tag{44}$$

ecuația unui complex linear. Dacă acest complex conține dreapta $M'T'$ vom avea

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & a_{23} + a_{31}\,(x_1 + 6\rho' x_1^5 + \ldots) + a_{12}\left(\frac{1}{2}\,x_1{}^2 + 6\rho x_1 + \ldots\right) \\ & + a_{01}\left(\frac{1}{12}\,x_1^4 + \ldots\right) - a_{02}\left(\frac{1}{3}\,x_1^3 + 5\rho x_1^5 + \ldots\right) \\ & + a_{03}\left(\frac{1}{2}\,x_1^2 + 5\rho'\,x_1^5 + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

Pentru ca ecuația (44) să fie aceea a complexului (γ_1) va trebui ca ecuația (45) să fie satisfăcută când facem $x_1 = 0$ și $x_1 = x_1^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, x_1^k fiind abscisa punctului M_k. Dacă punctele M_k tind către M, x_1^k tind către zero și atunci ecuația (45) tinde către o ecuație care va avea cinci rădăcini egale cu zero. Fie A_{ij} limitele coeficienţilor a_{ij}. Ecuaţia care se obţine înlocuind în (45) pe a_{ij} cu A_{ij} va avea deci pe zero ca rădăcină multiplă de ordinul cinci, cu alte cuvinte coeficienţii puterilor lui x_1 până la x_1^4 inclusiv vor trebui să fie nuli. Am ilustrat astfel pe un nou caz particular metoda generală expusă în § 11. Aplicată aci obţinem succesiv:

(46) $A_{23}=0, \quad A_{31}=0, \quad A_{12}+A_{03}=0, \quad A_{02}=0, \quad A_{01}=0$

care determină coeficienţii A_{ij} cu excepţia unui factor comun ceea ce demonstrează proprietatea. Dacă în loc de cinci tangente vecine am fi considerat şase tangente, condiţia să existe un complex care să conţină la limită aceste şase tangente s'ar obţine adăugând la relaţiile (46), pe aceea care se obţine anulând şi coeficientul lui x_1^5, ceea ce ne dă

(47) $$\rho A_{12}=0.$$

Relaţiile (46) ne arată că complexul (γ) are ecuaţia

(48) $$\pi_{03}-\pi_{12}=0$$

şi deci este bine definit, până când relaţia (17) ne arată că trebue să avem $\rho=0$ altfel toţi A_{ij} se anulează şi complexul devine iluzoriu. Dar relaţia $\rho=0$, caracterizează punctele singulare. Putem deci spune că *punctele singulare sunt caracterizate geometric prin proprietatea că complexul osculator este supraosculator.*

Dacă o curbă este singulară, proprietatea are loc în fiecare punct al curbei. Am putea deduce intuitiv, din aproape în aproape că complexul linear osculator într'un punct oarecare, conţine toate tangentele curbei, cu alte cuvinte toate aceste tangente aparţin la un acelaşi complex linear. Vom da însă acestei teoreme o demonstraţie riguroasă.

Fie (C) o curbă singulară de prima speţă spre exemplu. Reperul mobil satisface formulelor (35) ale lui Frenet. Ecuaţia complexului linear osculator în punctul A_0 al curbei are faţă de reperul corespunzător acestui punct ecuaţia (48). Fie atunci M şi N două puncte *fixe* în spaţiu de coordonate relative omogene, faţă de acelaşi reper (X_0, X_1, X_2, X_3) şi

(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3). Aceste coordonate vor satisface relaţiilor dela § 49, care în cazul nostru devin

$$\frac{dX_0}{d\sigma} + 3KX_1 + X_3 = \lambda X_0\,, \quad \frac{dY_0}{d\sigma} + 3KY_1 + Y_3 = \mu Y_0$$

$$\frac{dX_1}{d\sigma} + X_0 + 4KX_2 = \lambda X_1\,, \quad \frac{dY_1}{d\sigma} + Y_0 + 4KY_2 = \mu Y_1$$

$$\frac{dX_2}{d\sigma} + X_1 + 3KX_3 = \lambda X_2\,, \quad \frac{dY_2}{d\sigma} + Y_1 + 3KY_3 = \mu Y_2$$

$$\frac{dX_3}{d\sigma} + X_2 = \lambda X_3 \qquad , \quad \frac{dY_3}{d\sigma} + Y_2 = \mu Y_3$$

de unde deducem, însemnând cu π_{ij} coordonatele plückeriene ale dreptei MN

$$\frac{d\pi_{03}}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}(X_0 Y_3 - Y_0 X_3) = (\lambda + \mu)\,\pi_{03} - 3K\pi_{13} - \pi_{02}$$

$$\frac{d\pi_{12}}{d\sigma} = (\lambda + \mu)\,\pi_{12} - 3K\,\pi_{13} - \pi_{02}$$

prin urmare

$$\frac{d\,(\pi_{03} - \pi_{12})}{d\sigma} = (\lambda + \mu)\,(\pi_{03} - \pi_{12})$$

sau

$$\pi_{03} - \pi_{12} = C\,e^{\int (\lambda+\mu)\,d\sigma}\,.$$

Dacă dreapta *fixă în spaţiu* MN aparţine complexului linear osculator într'un punct al curbei corespunzător unei valori oarecare $\sigma = \sigma_0$ avem pentru acea valoare

$$\pi_{03} - \pi_{12} = 0 \qquad \text{deci} \qquad C = 0$$

şi vom avea atunci

$$\pi_{03} - \pi_{12} \equiv 0.$$

pentru orice valoare a lui σ. Dreapta fixă MN aparţine tuturor complexelor osculatoare, cu alte cuvinte complexul osculator este fix şi cum fiecare complex osculator conţine tangente la curbă, putem enunţa următoarea proprietate care este de fapt o caracterizare geometrică a curbelor de prima speţă:

Tangentele la o curbă singulară de prima speţă aparţin unui complex linear bine determinat.

IV.

METODA LUI WILCZINSKI

55. **Ecuaţia diferenţială lineară a unei curbe strâmbe.** Să considerăm o curbă strâmbă (C) şi formulele (34), (35) sau (37) ale lui Frenet referitoare la această curbă. Să eliminăm pe A_1, A_2 şi A_3 din aceste formule. Astfel, de ex., în cazul formulelor (34), corespunzătoare curbelor ordinare, vom avea:

$$A_1 = \frac{d A_0}{d\sigma} - 3 K_1 A_0$$

$$A_2 = \frac{d A_1}{d\sigma} - 3 K A_0 - K_1 A_1 = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d A_0}{d\sigma} - 3 K_1 A_0\right)$$
$$- 3 K A_0 - K_1\left(\frac{d A_0}{d\sigma} - 3 K_1 A_0\right)$$

sau

$$A_2 = \frac{d^2 A_0}{d\sigma^2} - 4 K_1 \frac{d A_0}{d\sigma} + 3\left(K_1^2 - K - \frac{d K_1}{d\sigma}\right) A_0.$$

La fel găsim

$$A_3 = \frac{d^3 A_0}{d\sigma^3} - 3 K_1 \frac{d^2 A_0}{d\sigma^2} - \left(K_1^2 + 7 K + 7 \frac{d K_1}{d\sigma}\right)\frac{d A_0}{d\sigma}$$
$$+ \left(3 K_1^3 + 9 K K_1 - 2 - 3 \frac{d^2 K_1}{d\sigma^2} + 3 K_1 \frac{d K_1}{d\sigma} - 3 \frac{dK}{d\sigma}\right) A_0$$

şi înlocuind aceste valori ale lui A_1, A_3, A_3 în ultima formulă (34) obţinem o ecuaţie în A_0, care, punând,

$$m = K_1^2 + K + \frac{d\,K_1}{d\sigma},$$

se scrie

$$(49)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d_4\,A_0}{d\sigma^4} - 10\,m\,\frac{d^2\,A_0}{d\sigma^2} - \left(10\,\frac{dm}{d\sigma} + 5\right)\frac{d\,A_0}{d\sigma} \\ & + \left(9\,m^2 - 3\,\frac{d^2 m}{d\sigma^2} - 6\,K_1\right) A_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Aplicând un procedeu analog şi plecând dela formulele (35) ale lu F r e n e t corespunzătoare curbelor singulare de prima speţă, obţinem succesiv

$$A_1 = \frac{d\,A_0}{d\sigma},\ A_2 = \frac{d\,A_1}{d\sigma} - 3\,K\,A_0 = \frac{d^2\,A_0}{d\sigma^2} - 3\,K\,A_0$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{d\,A_2}{d\sigma} - 4\,K\,A_1 = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d^2\,A_0}{d\sigma^2} - 3\,K\,A_0\right) - 4\,K\,\frac{d\,A_0}{d\sigma} \\ &= \frac{d^3 A_0}{d\sigma^3} - 7\,K\,\frac{d\,A_0}{d\sigma} - 3\,\frac{d\,K}{d\sigma}\,A_0 \end{aligned}$$

şi substituind în ultima ecuaţie (35):

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d^3\,A_0}{d\sigma^3} - 7\,K\,\frac{d\,A_0}{d\sigma} - 3\,\frac{dK}{d\sigma}\,A_0\right) = A_0 + 3\,K\left(\frac{d^2\,A_0}{d\sigma^2} - 3KA_0\right)$$

obţinem ecuaţia

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^4\,A_0}{d\sigma^4} - 10\,K\,\frac{d^2\,A_0}{d\sigma^2} - 10\,\frac{d\,K}{d\sigma}\,\frac{d\,A_0}{d\sigma} \\ & + \left(9\,K^2 - 3\,\frac{d^2\,K}{d\sigma^2} - 1\right) A_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

In ceea ce priveşte curba singulară de speţa 2-a, eliminarea lui A_1, A_2, A_3 dintre formulele lui Frenet (37) ne va conduce evident la ecuaţia

$$\frac{d^4 A_0}{d\sigma_4} = 0 \tag{51}$$

dela care am plecat pentru a stabili formulele (27).

Se vede aşa dar că în toate cazurile coordonatele omogene A_0 ale unui punct variabil al unei curbe strâmbe satisfac la o ecuaţie diferenţială de ordinul al IV-lea de forma (49), (50) sau (51).

56. **Reducerea unei ecuaţii diferenţiale lineare la forma canonică.** Proprietatea precedentă se poate demonstra de altfel imediat şi direct, cum s'a făcut la § 31 pentru curbele plane. Fie, în adevăr, X_0, X_1, X_2, X_3 coordonatele omogene ale unui punct variabil al unei curbe strâmbe, funcţiuni de un parametru t. Oricare ar fi aceste funcţiuni, există totdeauna o ecuaţie diferenţială lineară de ordinul IV, de forma

$$\frac{d^4X}{dt^4} + p\frac{d^3X}{dt^3} + q\frac{d^2X}{dt^2} + r\frac{dX}{dt} + sX = 0, \tag{52}$$

p, q, r, s fiind funcţiuni de t, care să admită ca soluţiuni funcţiunile X_i $(i = 0, 1, 2, 3)$. Această ecuaţie se scrie imediat sub formă de determinant, după cum urmează, derivatele în raport cu t fiind exprimate prin accente:

$$\begin{vmatrix} X^{IV} & X''' & X'' & X' & X \\ X_0^{IV} & X_0''' & X_0'' & X_0' & X_0 \\ X_1^{IV} & X_1''' & X_1'' & X_1' & X_1 \\ X_2^{IV} & X_2''' & X_2'' & X_2' & X_2 \\ X_3^{IV} & X_3''' & X_3'' & X_3' & X_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{53}$$

şi care se scrie sub forma (52) dacă desvoltăm după elementele primei linii şi împărţim cu coeficientul lui $X^{IV} = \frac{d^4X}{d\iota^4}$, care e neapărat diferit de zero, altfel curba ar fi plană.

Reciproc fiind dată o ecuație diferențială lineară de forma (52), la un sistem (X_0, X_1, X_2, X_3) de soluții fundamentale putem face să corespundă o curbă și anume curba descrisă de punctul de coordonate omogene, față de un reper fix, X_0, X_1, X_2, X_3. Dacă (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) este un alt sistem de soluții fundamentale, avem, cum se știe din analiză

$$\begin{aligned}
Y_0 &= a_{00} X_0 + a_{10} X_1 + a_{20} X_2 + a_{30} X_3 \\
Y_1 &= a_{01} X_0 + a_{11} X_1 + a_{21} X_2 + a_{31} X_3 \\
Y_2 &= a_{02} X_0 + a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + a_{32} X_3 \\
Y_3 &= a_{03} X_0 + a_{13} X_1 + a_{23} X_2 + a_{33} X_3,
\end{aligned}$$

unde a_{ij} sunt constante. Curba descrisă de punctul de coordonate Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 este deci o transformată omografică a curbei precedente.

La o ecuație diferențială lineară corespunde o singură curbă cu excepția unei transformări omografice în spațiu.

Ecuația (52) [sau (53)] nu este însă singura ecuație pe care o satisfac coordonatele omogene ale unui punct variabil pe o curbă strâmbă dată. Putem, în adevăr, înmulți toate coordonatele cu un același factor $\left[\dfrac{1}{\lambda(t)}\right]$ și alege un alt parametru $\sigma = \sigma(t)$, cu alte cuvinte putem face transformarea de funcție și variabilă [(68) § 32]

$$X = \lambda(t) A \quad ; \quad \sigma = \sigma(t)$$

în ecuația (52) sau (53), transformare care schimbă această ecuație în una de aceeași formă, fără a schimba curba. Desvoltările făcute în paragraful precedent, arată, *fără a mai fi nevoie de efectuat calcule*, că se pot alege totdeauna funcțiunile $\lambda(t)$ și $\sigma(t)$, astfel încât ecuația transformată să aibă una din formele (49), (50) sau (51), ireductibile una la alta și aceasta cel puțin în ceea ce privește formele (49) și (50) numai într'un singur mod. Ecuațiile (49), (50) și (51) sunt deci forme canonice pentru ecuațiile diferențiale lineare de ordinul IV și servesc și pentru o clasificare a lor, foarte utilă cum se arată în teorii mai înalte, studiului integrabilității acestor ecuațiuni.

Rezultatele cu privire la reducerea unei ecuaţiuni la forma canonică se pot stabili şi prin un calcul elementar cum s'a făcut pentru curbele plane la § 32.

Ca o aplicaţie a metodei lui Wilczinski se poate arăta că curbele ordinare pentru care curburile K şi K_1 sunt constante sunt curbe W, adică există un tetraedru fundamental $M_0\,M_1\,M_2\,M_3$ astfel încât tangenta într'un punct variabil al curbei taie feţele tetraedrului în patru puncte N_0, N_1, N_2, N_3, care împreună cu punctul de contact determină rapoarte anarmonice constante (dintre care două independente între ele) şi care se exprimă în funcţie de curburile constante ale curbei. Demonstraţia se face la fel ca pentru curbele W plane.

PARTEA III-a

SUPRAFEȚE STRÂMBE

I

STUDIUL SUPRAFEȚELOR IN SPAȚIUL PROIECTIV PRIN METODA ECUAȚIEI REDUSE

57. **Reper de ordinul zero.** Fie (S) o suprafață definită într'un sistem de coordonate proiective neomogene (x_1, x_2, x_3) printr'o ecuație

$$x_3 = f(x_1, x_2)$$

în care funcțiunea f, o vom presupune, pentru simplicitate, olomorfă în jurul punctului $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, prin urmare desfășurabilă în serie de forma

$$x_3 = \varphi_0 + \varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 + \frac{1}{6}\varphi_3 + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi_n + \ldots \tag{1}$$

φ_n fiind un polinom omogen și de gradul n în x_1, x_2 pe care-l vom scrie sub forma:

$$\varphi_n = A_{n0}\, x_1^n + C_n^1\, A_{n-1,\,1}\, x_1^{n-1}\, x_2 + \ldots + A_{0n}\, x_2^n.$$

Vom avea așa dar

$$\varphi_0 = A_{00},\quad \varphi_1 = A_{10}\, x_1 + A_{01}\, x_2,\quad \varphi_2 = A_{20}\, x_1^2 + 2A_{11}\, x_1\, x_2 + A_{02}\, x_2^2,$$

$$\varphi_3 = A_{30}\, x_1^3 + 3A_{21}\, x_1^2\, x_2 + 3A_{12}\, x_1\, x_2^2 + A_{03}\, x_1^3,$$

$$\varphi_4 = A_{40}\, x_1^4 + 4A_{31}\, x_1^3\, x_2 + 6A_{22}\, x_1^2\, x_2^2 + 4A_{13}\, x_1\, x_2^3 + A_{04}\, x_2^4,$$

etc.... etc.... etc....

Să facem o schimbare de reper şi fie y_1, y_2, y_3, coordonatele punctului faţă de noul reper. Intre (x_1, x_2, x_3) şi (y_1, y_2, y_3) vom avea relaţiile (3) § 38, pe care le scriem din nou pentru claritate

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{01} + a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 + a_{31}\, y_3}{a_{00} + a_{10}\, y_1 + a_{20}\, y_2 + a_{30}\, y_3}, \\ x_2 &= \frac{a_{02} + a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{32}\, y_3}{a_{00} + a_{10}\, y_1 + a_{20}\, y_2 + a_{30}\, y_3}, \\ x_3 &= \frac{a_{03} + a_{13}\, y_1 + a_{23}\, y_2 + a_{33}\, y_3}{a_{00} + a_{10}\, y_1 + a_{20}\, y_2 + a_{30}\, y_3}. \end{aligned} \right.$$

Ecuaţia suprafeţei (S) faţă de noul reper se va putea scrie în general sub forma analoagă lui (1):

$$(3) \qquad y_3 = \psi_0 + \psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{1}{6}\psi_3 + \ldots$$

unde ψ_n are forma:

$$\psi_n = B_{n0}\, y_1^n + C_n^1\, B_{n-1,1}\, y_1^{n-1}\, y_2 + \ldots + B_{0n}\, y_2^n .$$

Metoda ecuaţiei reduse constă în alegerea noului reper aşa fel încât coeficienţii B_{ij} să aibă în primii termeni ai desvoltării (3), valorile cele mai simple. Procedând ca şi în cazul curbelor plane şi strâmbe va trebui să stabilim mai întâi relaţiile care ne dau coeficienţii B_{ij} în funcţie de coeficienţii A_{ik} ai desvoltării (1) şi coeficienţii a_{rs} ai transformării (2) şi care se obţin ca şi în cazurile precedente înlocuind în formulele (2) pe y_3 cu valoarea lui (3) şi apoi desvoltând rezultatele în serii întregi după puterile lui y_1 şi y_2. Substituirea acestor serii în relaţia (1) şi identificarea în cei doi membri a coeficienţilor expresiunilor $y_1^p\, y_2^q$, ne vor da relaţiile căutate.

Incepând cu termenii constanţi, identificarea lor ne arată imediat, ceea ce este evident şi geometriceşte, că putem alege totdeauna coeficienţii a_{rs} astfel încât să avem

$$\boxed{\psi_0 = B_{00} = 0}\,.$$

Geometriceşte aceasta revine în a fixa vârful B_0 al noului reper într'un punct oarecare al suprafeţei. Dacă ne fixăm acest punct în jurul căruia studiem suprafaţa, reperul determinat prin condiţia precedentă este numit *reper de ordinul zero* corespunzător punctului considerat.

Să presupunem că reperul iniţial este de ordinul zero. Vom avea atunci $\boxed{\varphi_0 = A_{00} = 0}$. Pentru a trece dela un reper de ordinul zero la un alt reper de acelaşi ordin, care să lase punctul suprafeţei neschimbat, trebue ca pentru $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, să avem $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, deci după (2)

$$\boxed{a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0}.$$

Cum pe de altă parte avem determinantul $a \neq 0$, vom avea şi $a_{00} \neq 0$ şi atunci putem înmulţi, pentru simplificare toţi coeficienţii a_{rs} cu $\dfrac{1}{a_{00}} \neq 0$, pentru a face $\boxed{a_{00} = 1}$. Condiţiile încadrate relative la coeficienţii a_{rs} caracterizează astfel trecerea dela un reper de ordinul zero, la alt reper de ordinul zero.

58. **Reper de primul ordin. Plan tangent.** Continuând aplicarea metodei, vom obţine oprindu-ne la primul ordin, desvoltările

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 + a_{31}\, \psi_1 \\ x_2 &= a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{32}\, \psi_1 \\ x_3 &= a_{13}\, y_1 + a_{23}\, y_2 + a_{33}\, \psi_1 \end{aligned}$$

pe care înlocuindu-le în (1), ne dă:

$$\varphi_1 (x_1 , x_2) = a_{13}\, y_1 + a_{23}\, y_2 + a_{33}\, \psi_1$$

sau desvoltat

$$\begin{aligned} &A_{10} \left[a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 + a_{31}\, (B_{10}\, y_1 + B_{01}\, y_2)\right] \\ &+ A_{01}\left[a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{32}\, (B_{10}\, y_1 + B_{01}\, y_2)\right] \\ &= a_{13}\, y_1 + a_{23}\, y_2 + a_{33}\, (B_{10}\, y_1 + B_{01}\, y_2) \end{aligned}$$

deci prin identificare

$$\begin{aligned} a_{11}\, A_{10} + a_{31}\, A_{10}\, B_{10} + a_{12}\, A_{01} + a_{32}\, A_{01}\, B_{10} &= a_{13} + a_{33}\, B_{10} \\ a_{21}\, A_{10} + a_{31}\, A_{10}\, B_{01} + a_{22}\, A_{01} + a_{32}\, A_{01}\, B_{01} &= a_{23} + a_{33} B_{01}\, ; \end{aligned}$$

de unde rezultă că oricare ar fi valorile lui A_{10}, A_{01}, se pot determina unii coeficienţi a_{rs} astfel încât să avem $\boxed{B_{10} = B_{01} = 0}$ deci $\boxed{\psi_1 = 0}$. Condiţiile sunt:

$$a_{13} = a_{11} A_{10} + a_{12} A_{01} \quad , \quad a_{23} = a_{21} A_{10} + a_{22} A_{01},$$

iar reperul de ordinul zero, determinat prin condiţiile precedente este numit *reper de primul ordin.*

Să presupunem acum că reperul iniţial este un reper de primul ordin, vom avea $\boxed{A_{10} = A_{01} = \varphi_1 = 0}$ şi condiţiile precedente devin $\boxed{a_{13} = a_{23} = 0}$, acestea caracterizând, împreună cu cele ce preced, trecerea dela un reper de primul ordin la un reper de acelaşi ordin.

Relaţiile precedente arată apoi că deoarece $a \neq 0$, avem $a_{33} \neq 0$ şi $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$; apoi dacă $y_3 = 0$ avem şi $x_3 = 0$. Planul $A_0 A_1 A_2$ (de ecuaţie $x_3 = 0$) rămâne astfel neschimbat când trecem dela un reper de primul ordin la alt reper de primul ordin; el are astfel un caracter invariant şi se constată imediat din forma pe care o ia ecuaţia (1) că este planul tangent la suprafaţă. Printr'o transformare proiectivă planul tangent se transformă astfel în planul tangent la suprafaţa transformată.

59. **Reper de ordinul al 2-lea. Direcţii asimptotice.** Continuăm aplicarea metodei. Relaţiile (2) de transformare a coordonatelor devin, în virtutea relaţiilor stabilite

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3}{1 + a_{10} y_1 + a_{20} y_2 + a_{30} y_3} \\ x_2 &= \frac{a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3}{1 + a_{10} y_1 + a_{20} y_2 + a_{30} y_3} \\ x_3 &= \frac{a_{33} y_3}{1 + a_{10} y_1 + a_{20} y_2 + a_{30} y_3} \end{aligned} \right.$$

ceea ce ne dă, limitând desvoltările la termenii utili:

$$(5) \qquad x_1 = a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 \quad , \quad x_2 = a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\, a_{33}\, \psi_2$$

și înlocuind în (1)

$$\frac{1}{2}\, a_{33}\, \psi_2 = \frac{1}{2}\, \varphi_2$$

sau

$$(6) \qquad a_{33}\, \psi_2 \equiv \varphi_2$$

identitatea având loc în virtutea relațiilor (5). Această identitate remarcabilă ca formă are o interpretare geometrică. Ecuația $\varphi_2(x_1, x_2) = 0$, omogenă și de gradul al 2-lea în x_1, x_2 reprezintă în planul tangent $x_3 = 0$, două drepte trecând prin punctul de contact care e originea reperului. Cum pe de altă parte prin transformarea (4) ecuațiile dreptelor situate în planul tangent și trecând prin origine se transformă după aceleași formule (4) în care facem $y_3 = 0$; dacă suprimăm factorul de proporționalitate $\dfrac{1}{1 + a_{10}\, y_1 + a_{20}\, y_2}$, cădem peste formulele (5). Identitatea (6) ne arată atunci că dreptele definite de ecuația

$$\varphi_2\,(x_1\,,\, x_2) = 0$$

din planul tangent au un caracter invariant, fiindcă se confundă cu dreptele definite față de noul reper prin ecuația

$$\psi_2\,(y_1\,,\, y_2) = 0.$$

Se pot prezenta atunci trei cazuri:

1. Dreptele sunt reale și distincte
2. Dreptele sunt reale și confundate
3. Dreptele sunt imaginar conjugate.

Cazurile 1 și 3 nu se deosebesc unul de altul în domeniul complex. Ne vom mărgini astfel la cazurile 1 și 2, primul fiind cazul general și al doilea un caz *singular*.

Se demonstrează că suprafeţele care au toate punctele singulare sunt suprafeţe desfăşurabile; dacă admitem această proprietate rezultă că printr'o transformare omografică o suprafaţă desfăşurabilă se transformă tot într'o suprafaţă desfăşurabilă. Fiindcă aceste proprietăţi nu sunt nouă, nu ne vom opri la studiul suprafeţelor desfăşurabile şi nu vom lua în considerare decât cazul general 1.

Metoda ecuaţiei reduse ne-a pus astfel în evidenţă existenţa în fiecare punct al unei suprafeţe, a două drepte situate în planul tangent şi trecând prin acel punct de contact. Vom demonstra ulterior că sunt *direcţiunile asimptotice* (*autoconjugate)* din acel punct; direcţiunile asimptotice se păstrează deci prin o transformare omografică. Aceste direcţiuni fiind presupuse distincte le putem lua în planul tangent drept muchiile $B_0 B_1$, $B_0 B_2$ ale reperului, astfel că ecuaţiile lor devin $y_1 = 0$ şi $y_2 = 0$. Forma ψ_2 se reduce la $2B_{11} y_1 y_2$, deci avem $\boxed{B_{20} = B_{02} = 0}$; putem atunci, după formulele (6), dispune totdeauna de a_{33} astfel încât să avem $\boxed{B_{11} = 1}$ deci $\boxed{\psi_2 = 2y_1 y_2}$. Reperul de 1-iul ordin care satisface la aceste condiţii este numit *reper de ordinul doi.*

Presupunem acum că reperul iniţial este de ordinul doi. Avem

$$\boxed{A_{20} = A_{02} = 0 \quad , \quad A_{11} = 1 \quad , \quad \varphi_2 = 2x_1 x_2}$$

iar identitatea (6) devine

$$a_{33} y_1 y_2 = (a_{11} y_1 + a_{21} y_2)(a_{12} y_1 + a_{22} y_2),$$

ceea ce ne dă

$$\boxed{a_{12} = 0 \quad , \quad a_{21} = 0 \quad , \quad a_{11} a_{22} = a_{33}}.$$

sau

$$a_{11} = 0 \quad , \quad a_{22} = 0 \quad , \quad a_{12} a_{21} = a_{33},$$

ultima relaţie reducându-se la prima dacă schimbăm pentru variabilele y_1, y_2, rolul indicilor 1 şi 2. Relaţiile obţinute vor exprima astfel trecerea dela un reper de ordinul doi, la un alt reper de acelaşi ordin.

60. **Reper de ordinul trei. Suprafeţe riglate.** Formulele de transformare ale coordonatelor ne dau în aceste condiţiuni:

$$
(7)\quad \begin{cases} x_1 = a_{11}\, y_1 + (a_{31} - a_{11}\, a_{20})\, y_1\, y_2 - a_{11}\, a_{10}\, y_1^2 + \ldots \\ x_2 = a_{22}\, y_2 + (a_{32} - a_{10}\, a_{22})\, y_1\, y_2 - a_{22}\, a_{20}\, y_2^2 + \ldots \\ x_3 = a_{33} y_1\, y_2 + \dfrac{1}{2}\, a_{33}\, \psi_3 - a_{33} y_1 y_2\, (a_{10}\, y_1 + a_{20}\, y_2) + \ldots \end{cases}
$$

şi înlocuind în (1) care devine

$$
x_3 = x_1\, x_2 + \frac{1}{6}\, \varphi_3 + \ldots
$$

şi identificând termenii de gradul 3 în y_1, y_2, căpătăm:

$$
\frac{1}{6}\, a_{33}\, \psi_3 - a_{33}\, y_1\, y_2\, (a_{10}\, y_1 + a_{20}\, y_2) = \frac{1}{6}\, \varphi_3\, (a_{11}\, y_1,\ a_{22}\, y_2)
$$
$$
+ a_{11}\, (a_{32} - a_{10}\, a_{22})\, y_1^2\, y_2 - a_{11}\, a_{22}\, a_{20}\, y_1\, y_2^2
$$
$$
+ a_{22}\, (a_{31} - a_{11}\, a_{20})\, y_1\, y_2^2 - a_{11}\, a_{22}\, a_{10}\, y_1^2\, y_2
$$

sau simplificând

$$
\frac{1}{6}\, a_{33}\, \psi_3\, (y_1,\ y_2) = \frac{1}{6}\, \varphi_3\, (a_{11}\, y_1,\ a_{22}\, y_2)
$$
$$
+ y_1\, y_2\, [a_{11}\, (a_{32} - a_{22}\, a_{10})\, y_1 + a_{22}\, (a_{31} - a_{11}\, a_{20})\, y_2].
$$

Desvoltată această relaţie se scrie

$$
\frac{1}{6}\, a_{33}\, (B_{30}\, y_1^3 + 3B_{21}\, y_1^2\, y_2 + 3B_{12}\, y_1\, y_2^2 + B_{03}\, y_2^3)
$$
$$
\equiv \frac{1}{6}\, (a_{11}^3\, A_{30}\, y_1^3 + 3a_{11}^2\, a_{22}\, A_{21}\, y_1^2\, y_2 + 3a_{11}\, a_{22}^2\, A_{12}\, y_1\, y_2^2
$$
$$
+ a_{22}^3\, A_{03}\, y_2^3) + y_1\, y_2\, [a_{11}\, (a_{32} - a_{22} a_{10})\, y_1 + a_{22}\, (a_{31} - a_{11} a_{20})\, y_2]
$$

şi ne dă:

$$(8)\qquad \begin{cases} a_{22}\, B_{30} = a_{11}^2\, A_{30} \quad ; \quad a_{11}\, B_{03} = a_{22}^2\, A_{03} \\ a_{22}\, B_{21} = a_{11}^2\, A_{21} + 2\,(a_{32} - a_{22}\, a_{10}) \\ a_{11}\, B_{12} = a_{22}^2\, A_{12} + 2\,(a_{31} - a_{11}\, a_{20}) \end{cases}$$

şi fiindcă din $a \neq 0$, rezultă $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, se vede că putem face totdeauna $\boxed{B_{21} = B_{12} = 0}$.

Primele relaţii (8) ne arată însă că dacă avem $A_{30} = 0$ avem şi $B_{30} = 0$ iar dacă $A_{03} = 0$ avem şi $B_{03} = 0$; fiecare din relaţiile $A_{30} = 0$, $A_{03} = 0$ are deci un caracter invariant şi punctele în care are loc una sau ambele relaţii sunt puncte singulare; ele se numesc *puncte flecnodale.* Se demonstrează că dacă toate punctele unei suprafeţe sunt flecnodale atunci suprafaţa este după caz simplu riglată sau dublu riglată (cuadrică). Vom exclude aceste cazuri din studiul nostru limitându-ne numai la puncte ordinare pentru care avem $A_{30} \neq 0$ şi $A_{03} \neq 0$ şi la suprafeţe conţinând numai puncte ordinare care se numesc *suprafeţe strâmbe.* Pentru astfel de puncte putem alege pe a_{11} şi a_{22} astfel că B_{30} şi B_{03} să aibă valori numerice simple diferite de zero; pentru simplicitatea formulelor finale vom face

$$\boxed{B_{30} = B_{03} = -2} \quad \text{deci} \quad \boxed{\psi_3 = -2\,(y_1^3 + y_2^3)}$$

Reperul de ordinul doi determinat prin condiţiile ce preced este numit *reper de ordinul trei.* Ecuaţia (3) a suprafeţei faţă de un astfel de reper se scrie:

$$(9)\qquad y_3 = y_1\, y_2 - \frac{1}{3}\,(y_1^3 + y_2^3) + \ldots$$

Să presupunem că reperul iniţial este un reper de ordinul trei; vom avea

$$\boxed{A_{30} = A_{03} = -2\ ,\ A_{12} = A_{21} = 0\ ,\ \varphi_3 = -2\,(x_1^3 + x_2^3)}$$

şi relaţiile (8) ne dau:

$$a_{22} = a_{11}^2 \ , \ a_{11} = a_{22}^2 \ , \ a_{32} = a_{22}\, a_{10} \ , \ a_{31} = a_{11}\, a_{20}$$

de unde scoatem în particular $a_{11}^3 = a_{22}^3 = 1$. In domeniul real putem lua deci numai

$$\boxed{a_{11} = a_{22} = 1}$$

de unde scoatem

$$\boxed{a_{32} = a_{10} \ , \ a_{31} = a_{20}} \ ;$$

aceste relaţii adăugate la cele ce preced cu privire la coeficienţii a_{rs}, traduc condiţiile de trecere dela un reper de ordinul trei la un alt reper de acelaşi ordin.

61. Elementul linear proiectiv al unei suprafeţe. Direcţiile lui Darboux şi Segre.

Ţinând seamă de aceste condiţii nouă, relaţiile (7) devin

$$x_1 = y_1 - a_{10}\, y_1^2 + \dots \quad ; \quad x_2 = y_2 - a_{20}\, y_2^2 + \dots$$

Să presupunem atunci suprafaţa definită parametric în funcţie de doi parametri u şi v şi fie $u + du$, $v + dv$ valorile acestor parametri într'un punct M' vecin punctului M corespunzător valorilor u, v. Vom demonstra ulterior că coordonatele x_1, x_2 ale punctului M' faţă de un reper de ordinul trei corespunzător punctului M sunt infiniţi mici de ordinul lui du şi dv, cu alte cuvinte părţile lor principale sunt două forme Pfaff ω_1, ω_2, adică două forme lineare în du, dv. Relaţiile precedente ne arată atunci că dacă ne limităm numai la părţile principale avem

$$x_1 = y_1 \quad ; \quad x_2 = y_2$$

cu alte cuvinte formele ω_1, ω_2 au un caracter proiectiv invariant faţă de orice transformare proiectivă; sunt *forme diferenţiale invariante*. Acelaşi lucru se poate spune evident şi despre formele

$$\omega_1\, \omega_2 \quad , \quad \omega_1^3 + \omega_2^3 \quad , \quad \frac{\omega_1^3 + \omega_2^3}{2\omega_1\, \omega_2}$$

dintre care ultima joacă un rol important într'un anumit capitol al geometriei diferenţiale proiective şi a fost numit de Fubini: invariantul linear proiectiv al suprafeţei.

Se observă apoi, în aceeaşi ordine de idei, că dacă considerăm o transformare proiectivă prin care se trece dela un reper de ordinul trei, la un altul de ordinul trei, aceasta transformă punctele din planul tangent ($x_3 = 0$ sau $y_3 = 0$) după formulele

$$x_1 = \frac{y_1}{1 + a_{10} y_1 + a_{20} y_2}, \quad x_2 = \frac{y_2}{1 + a_{10} y_1 + a_{20} x_2}$$

prin urmare dreptele trecând prin origine de ecuaţie

$$x_1^3 + x_2^3 = 0$$

se transformă în dreptele de ecuaţie

$$y_1^3 + y_2^3 = 0$$

şi prin urmare au un caracter invariant; ele se numesc *direcţiile lui* Darboux şi sunt, în cazul când direcţiile asimptotice sunt reale, una reală şi două imaginare conjugate. Conjugata armonică a unei direcţii a lui Darboux faţă de direcţiile asimptotice poartă numele de *direcţie a lui* Segre. Direcţiile lui Segre sunt deci date de ecuaţia

$$x_1^3 - x_2^3 = 0 \quad \text{sau} \quad y_1^3 - y_2^3 = 0.$$

62. **Interpretări geometrice.** Pentru a caracteriza geometric direcţiile lui Darboux, vom introduce câteva elemente geometrice în legătură cu reperele de ordinul al treilea.

Două suprafeţe (S_1) şi (S_2) se zic că au într'un punct M un contact de ordinul n, când (S_1) are un contact de ordinul n cu orice curbă situată pe (S_2) şi care trece prin M. Să căutăm pe baza acestei definiţii, toate cuadricele care trec prin un punct al unei suprafeţe date (S) şi au cu aceasta un contact de ordinul doi. Fie pentru aceasta

$$(10) \qquad A + 2Bx_1 + 2Cx_2 + 2Dx_3 + Ex_1^2 + Fx_2^2 + Gx_3^2 + 2Hx_1 x_2 + 2Ix_1 x_3 + 2Jx_2 x_3 = 0$$

ecuaţia, faţă de un reper de ordinul trei, a unei astfel de cuadrice, ecuaţia suprafeţei (S) faţă de acelaşi reper fiind

$$(11) \qquad x_3 = x_1 x_2 - \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) + \dots$$

Fie

$$(12) \qquad x_2 = mx_1 + nx_1^2 + \dots$$

ecuaţia care defineşte o curbă pe suprafaţa (S) trecând prin punctul dat al suprafeţei, care este originea reperului.

Ecuaţiile (11) şi (12) sunt ecuaţiile curbei faţă de reperul considerat, prima ecuaţie mai putându-se scrie, pe baza celei de a doua sub forma:

$$(13) \qquad x_3 = m_1^2 + x\left(n - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}m^2\right)x_1^3 + \dots$$

Pentru a scrie condiţiile de contact vom înlocui în (10) pe x_2 şi x_3 cu valorile lor (12) şi (13) şi anulând în expresia obţinută, termenul constant şi coeficienţii lui x_1 şi x_2. Se obţine:

$$A = 0\ , \quad B + Cm = 0\ , \quad 2Cn + 2Dm + E + Fm^2 + 2Hm = 0$$

şi aceste relaţii trebue să aibă loc oricare ar fi m şi n, ceea ce ne dă

$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0,\quad D + H = 0,\quad E = 0,\quad F = 0,$$

astfel că punând

$$\frac{I}{2D} = l\,,\ \frac{G}{2D} = k\,,\ \frac{J}{2D} = h$$

ecuaţia cuadricelor căutate se scrie:

$$(14) \qquad x_3 - x_1 x_2 + x_3\,(lx_1 + hx_2 + kx_3) = 0.$$

Fie Q o cuadrică din această familie. Ea taie suprafaţa (S) după o curbă ale cărei ecuaţii sunt (11) şi (14). Prin eliminarea lui x_3 între aceste două ecuaţii, una din ecuaţiile curbei devine

$$-\frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) + x_1 x_2\,(l\,x_1 + h\,x_2) + \dots = 0.$$

Această ecuaţie este în acelaşi timp şi ecuaţia proiecţiei, din vârful A_3 al reperului pe planul tangent, a curbei de intersecţie. Rezultă de aci că această curbă are în punctul considerat al suprafeţei un punct triplu, tangentele în acest punct fiind date de ecuaţia:

$$(15) \qquad -\frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) + x_1 x_2 (l\, x_1 + h\, x_2) = 0.$$

Putem deci enunţa teorema

O cuadrică având un contact de ordinul doi cu o suprafaţă într'un punct, o taie pe aceasta după o curbă având în acel punct, un punct triplu. Tangentele în acest punct au în planul tangent ecuaţia (15).

Plecând dela această proprietate vom da direcţiilor lui Darboux o primă caracterizare geometrică prin rezolvarea problemei următoare. *In ce caz cele trei tangente în punctul triplu se confundă?* Pentru aceasta trebue evident ca primul membru al ecuaţiei (15) să fie, cu excepţia unui factor un cub perfect, adică

$$-\frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) + x_1 x_2 (h\, x_1 + k\, x_2) = (a\, x_1 + b\, x_2)^3,$$

factorul fiind introdus în coeficienţii a, b. Vom avea atunci

$$a^3 = -\frac{1}{3}\,, \quad b^3 = -\frac{1}{3}\,, \quad h = 3\, a^2 b\,, \quad k = 3\, ab^2$$

și atunci putem lua

$$a = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\,, \quad b = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\,\varepsilon, \quad h = -\,\varepsilon, \quad k = -\,\varepsilon^2,$$

ε fiind una din rădăcinile cubice ale unităţii. Ecuaţia (15) devine

$$-\frac{1}{3}(x_1 + \varepsilon\, x_2)^3 = 0$$

deci tangenta comună are ecuaţia

$$x_1 + \varepsilon\, x_2 = 0$$

şi deci este o direcţie a lui D a r b o u x. Prin urmare *dacă o cuadrică care are un contact de ordinul al 2-lea intersectează suprafaţa după o curbă având un punct triplu cu tangente confundate, tangenta triplă este o direcţie a lui Darboux*. Aceasta este caracterizarea căutată.

63. **Cuadricele lui Darboux. Polaritatea fundamentală.** Se numeşte cuadrică a lui D a r b o u x, o cuadrică care are un contact de ordinul al 2-lea cu o suprafaţă şi a cărei intersecţie cu aceasta are în punctul triplu drept tangente direcţiile lui D a r b o u x. Pentru o cuadrică a lui D a r b o u x ecuaţia (14) trebue să satisfacă condiţia ca ecuaţia (15) corespunzătoare să se reducă la $x_1^3 + x_2^3 = 0$, cu alte cuvinte $h = l = 0$. O cuadrică a lui D a r b o u x are deci o ecuaţie de forma:

$$x_3 - x_1 x_2 + kx_3^2 = 0. \tag{16}$$

Cuadricele lui D a r b o u x formează deci un fascicol din care face parte planul tangent ($x_3 = 0$) socotit dublu. Fie acum:

$$\frac{x_1}{\lambda} = \frac{x_2}{\mu} = \frac{x_3}{\nu} \tag{17}$$

ecuaţiile faţă de acelaşi reper de ordinul trei, a unei drepte Δ ce trece prin punctul studiat al suprafeţei, originea reperului. Dreapta Δ', conjugata dreptei Δ faţă de o cuadrică D a r b o u x are ecuaţiile

$$x_3 = 0 \quad , \quad \nu - \mu x_1 - \lambda x_2 + 2k\nu x_3 = 0$$

fiecare din aceste ecuaţii fiind aceea a planului polar faţă de cuadrică, a punctelor $(1, 0, 0, 0)$ şi $(0, \lambda, \mu, \nu)$ de pe dreapta Δ. Ecuaţiile precedente sunt echivalente cu

$$x_3 = 0 \quad , \quad \nu - \mu x_1 - \lambda x_2 = 0 \tag{18}$$

ceea ce ne arată că oricare ar fi cuadrica lui D a r b o u x, dreapta Δ' este independentă de aceasta şi situată în planul tangent. La o dreaptă Δ trecând prin un punct al suprafeţei corespunde deci o dreaptă Δ' situată în planul tangent în acel punct. Această corespondenţă între drepte trecând prin un punct şi drepte situate în planul tangent se numeşte *polaritate fundamentală.*

In particular când Δ se confundă cu muchia $A_0 A_3$ ($\lambda = \mu = 0$) dreapta Δ' are, după cum rezultă din (18) ecuaţiile $x_3 = 0$, $x_0 = 0$, cu alte cuvinte este muchia $A_1 A_2$ a reperului. *Muchiile A_0A_3 şi A_1A_2 ale unui reper de ordinul al 3-lea se corespund în polaritatea fundamentală.*

64. **Corespondenţa lui Segre.** O altă noţiune geometrică interesantă se obţine prin consideraţiile următoare:

Fie (C) o curbă pe o suprafaţă (S) trecând printr'un anumit punct M al suprafeţei şi (π) planul osculator la curba (C) în punctul M. Să considerăm acum suprafaţa desfăşurabilă care se racordă cu suprafaţa (S) de-a-lungul curbei (C), cu alte cuvinte înfăşurătoarea planelor tangente la suprafaţa (S) în punctele curbei (C). Fie PM generatoarea care trece prin M a acestei suprafeţe desfăşurabile şi P punctul de contact al acestei generatoare cu muchia de înapoiere a suprafeţei desfăşurabile; punctul P este cuprins, după cum se ştie, în planul tangent în M la (S) şi se numeşte *punctul de înapoiere* al curbei (C) în M. Să arătăm că toate curbele care trec prin M şi au în acest punct acelaşi plan osculator, au şi acelaşi punct de înapoiere în M.

Fie, în adevăr, (11):

$$x_3 = x_1 x_2 - \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) + \ldots$$

ecuaţia suprafeţei S faţă de un reper de ordinul al 3-lea şi (12)

$$x_2 = mx_1 + nx_1^2 + \ldots$$

relaţia care defineşte curba pe suprafaţă. Ecuaţiile curbei sunt (12) şi (13):

$$x_3 = mx_1^2 + \left(n - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} m^2\right) x_1^3 + \ldots$$

care se deduce din (11) şi (12).

Să însemnăm cu ξ_1, ξ_2, ξ_3 coordonatele curente, limitând deocamdată notația x_1, x_2, x_3 numai la puncte situate pe suprafață. Ecuațiile tangentei la curbă într'un punct oarecare al ei se scriu

$$\frac{\xi_1 - x_1}{1} = \frac{\xi_2 - x_2}{m + 2n\,x_1 + \ldots} = \frac{\xi_3 - x_3}{2mx_1 + (3n - 1 - m^2)\,x_1^2 + \ldots}$$

care pentru $x_1 = 0$, ne vor da ecuațiile

$$\frac{\xi_1}{1} = \frac{\xi_2}{m} = \frac{\xi_3}{0} \quad \text{sau} \quad \xi_2 - m\xi_1 = 0\ , \ \xi_3 = 0$$

ale tangentei MT la curbă în punctul M. Pentru $m = 0$, tangenta are ecuațiile $\xi_2 = \xi_3 = 0$ adică este una din direcțiile asimptotice. Ecuația planului osculator la curbă într'un punct oarecare se scrie de asemeni

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - x_1 & \xi_2 - x_2 & \xi_3 - x_3 \\ 1 & m + 2n\,x_1 + \ldots & 2m\,x_1 + (3n - 1 - m^2)\,x_1^2 + \ldots \\ 0 & 2n + \ldots & 2m + \ldots \end{vmatrix} = 0$$

deci ecuația planului osculator (π) în M este, făcând $x_1 = 0$ și desvoltând

$$m^2\xi_1 - m\xi_2 + n\xi_3 = 0. \tag{18 bis}$$

Acest plan se confundă cu planul tangent $\xi_3 = 0$ numai dacă $m = 0$, deci când curba este tangentă la o direcție asimptotică; găsim astfel proprietatea pe care ne-am promis s'o demonstrăm (§ 59) relativ la direcțiile asimptotice.

Pe de altă parte ecuația planului tangent la suprafață în punctul de coordonate x_1, x_2, x_3 se scrie

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - x_1 & \xi_2 - x_2 & \xi_3 - x_3 \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - x_1 & \xi_2 - x_2 & \xi_3 - x_1 x_2 + \dfrac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) + \ldots \\ 1 & 0 & x_2 - x_1^2 + \ldots \\ 0 & 1 & x_1 - x_2^2 + \ldots \end{vmatrix} = 0$$

şi când punctul de contact este pe curba considerată x_2 are valoarea (12). Inlocuind, desvoltând şi neglijând puterile lui x_1 mai mari ca 3, obţinem:

(19) $$-[mx_1 + (n-1)x_1^2]\,\xi_1 - (x_1 - m^2 x_1^2)\,\xi_2 + \xi_3 + mx_1^2 = 0.$$

Ecuaţiile dreptei PM se vor obţine atunci adăugând la această ecuaţie pe aceea obţinută derivând în raport cu x_1, adică

(20) $$-[m + (2n-2)\,x_1]\,\xi_1 - (1 - 2m^2 x_1)\,\xi_2 + 2mx_1 = 0$$

şi făcând $x_1 = 0$. Obţinem astfel ecuaţiile

(21) $$\xi_3 = 0 \quad , \quad \xi_2 + m\,\xi_1 = 0$$

care demonstrează, ceea ce se ştie că dreapta PM este în planul tangent şi e conjugată cu MT faţă de direcţiile asimptotice.

Pentru a putea obţine coordonatele (α, β) ale punctului P, vom adăuga, la ecuaţiile (19) şi (20), derivata ultimă în raport cu x_1, adică

(22) $$-(n-1)\,\xi_1 + m^2\,\xi_2 + m = 0$$

şi facem $x_1 = 0$, ceea ce anulează termenii neglijaţi în ultima ecuaţie. Rezolvând ecuaţiile (21) şi (22), găsim:

$$\alpha = \xi_1 = \frac{-m}{1 - m^3 - n} \quad , \quad \beta = \xi_2 = \frac{m^2}{1 - m^3 - n}.$$

Pentru a demonstra acum proprietatea enunţată să considerăm un plan oarecare (p) ce trece prin M, de ecuaţia:

(23) $$A\xi_1 + B\xi_2 + \xi_3 = 0.$$

Pentru ca acesta să fie osculator la curba considerată va trebui să avem, prin comparație cu (18 bis)

$$\frac{A}{m^2} = \frac{B}{-m} = \frac{1}{n}$$

ceea ce ne dă

$$m = -\frac{A}{B}, \quad n = \frac{A}{B^2}.$$

și reciproc aceste relații exprimă condiția ca o curbă definite de (12) să admită planul (23) ca plan osculator. Coordonatelă α, β ale punctului de înapoiere al curbei se scriu atunci

$$(24) \qquad \alpha = \frac{AB^2}{A^3 + B^3 - AB}, \quad \beta = \frac{A^2B}{A^3 + B^3 - AB}$$

și se vede că nu depind decât de planul (p), ceea ce demonstrează proprietatea.

Relațiile (24) se rezolvă în raport cu A, B și ne dau:

$$A = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^3 + \beta^3 - \alpha\beta}, \quad B = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^3 + \beta^3 - \alpha\beta}$$

ceea ce arată că dacă curbele au acelaşi punct de înapoiere P, au și același plan osculator (p).

Considerațiile precedente pun astfel în evidență o corespondență între planele (p) ce trec prin M și punctele P situate în planul tangent în M la (S) și anume punctul P este punctul de înapoiere a tuturor curbelor ce au planul (p) drept plan osculator și planul (p) este planul osculator al tuturor curbelor ce au punctul P drept punct de înapoiere. Această corespondență se numește corespondența lui S e g r e. Ea este o corespondență *algebrică birațională*, cum arată formulele (24) și (25), adică o corespondență cremoniană sau de-a lui C r e m o n a.

65. **Aplicații geometrice.** Să presupunem că planul (p) se rotește în jurul dreptei Δ de ecuații (17):

$$\frac{\xi_1}{\lambda} = \frac{\xi_2}{\mu} = \frac{\xi_3}{\nu}.$$

Vom avea

$$A\lambda + B\mu + \nu = 0.$$

Inlocuind pe A, B cu valorile lor (25), vom avea:

$$F(\alpha, \beta) = \nu\alpha\beta - (\nu\alpha^3 + \mu\alpha^2\beta + \lambda\alpha\beta^2 + \nu\beta^3) = 0 \tag{26}$$

ceea ce ne arată că punctul P corespunzător descrie o cubică (Γ) de ecuaţie (26) având punctul M ca punct dublu cu direcţiile drept tangente în punctul dublu.

Se ştie pe de altă parte că o cubică nodală (cu punct dublu) are trei puncte de inflexiune în linie dreaptă. Pentru a le determina scriem ecuaţia (26) sub formă omogenă

$$P(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \gamma^3 F\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0$$

adică

$$F(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha\beta\gamma - (\alpha^3 + \mu\alpha^2\beta + \lambda\alpha\beta^2 + \beta^3) = 0$$

şi adăugăm la aceasta sau la ecuaţia (26) echivalentă, ecuaţia obţinută anulând *hessiana* formei $F(\alpha, \beta, \gamma)$, adică determinantul

$$\Phi(\alpha, \beta\ \gamma) \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\gamma} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial\beta\,\partial\gamma} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\gamma} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial\beta\,\partial\gamma} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial\gamma^2} \end{vmatrix}$$

sau

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, \beta, 1) = 0.$$

Un calcul elementar ne dă

$$\Phi(\alpha, \beta) \equiv \begin{vmatrix} -6\nu\alpha - 2\mu\beta & \nu - 2\mu\alpha - 2\lambda\beta & \beta \\ \nu - 2\mu\alpha - 2\lambda\beta & -2\lambda\alpha - 6\nu\beta & \alpha \\ \beta & \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

deci ecuaţia care se adăugă la (26) este:

$$\Phi\,(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{sau}$$

$$\nu\,\alpha\,\beta + (3\,\nu\,\alpha^3 - \mu\,\alpha^2\,\beta - \lambda\,\alpha\,\beta^2 + 3\,\nu\,\beta^3) = 0. \tag{27}$$

Sistemul format de ecuaţiile (26) şi (27) şi care ne dă punctele de inflexiune ale cubicei Γ, este după cum se vede imediat, dacă eliminăm soluţia improprie $\alpha = \beta = 0$, echivalent cu sistemul

$$\alpha^3 + \beta^3 = 0 \qquad \nu - \mu\,\alpha - \lambda\,\beta = 0.$$

Prima ecuaţie ne arată că punctele de inflexiune se găsesc pe direcţiile lui D a r b o u x, iar a doua, comparată cu (18), arată că punctele de inflexiune sunt pe dreapta Δ' conjugata dreptei Δ în polaritatea fundamentală. Rezultatele de mai sus se pot deci cuprinde în teorema următoare.

Locul punctelor de înapoiere ale curbelor care trec printr'un punct M pe o suprafaţă şi al căror plan osculator (p) în M, trece prin o dreaptă Δ dusă din M, este o cubică (Γ) situată în planul tangent în M, având în M un punct dublu, tangentele în acest punct fiind direcţii asimptotice ale suprafeţei. Punctele de inflexiune ale acestei cubice se găsesc la intersecţia direcţiilor lui D a r b o u x în M cu conjugata Δ' a dreptei Δ în polaritatea fundamentală.

Această teoremă ne dă o nouă interpretare a direcţiilor lui D a r b o u x. Corelativ cu această teoremă se poate demonstra, plecând dela relaţiile (24), următoarea teoremă pe care ne mulţumim numai să o enunţăm.

Planele osculatoare ale curbelor care trec prin un punct M al unei suprafeţe şi al căror punct de înapoiere în M se află pe o dreaptă Δ' situată în planul tangent, înfăşură un con de clasa III având planul tangent în M ca plan tangent dublu de-a-lungul direcţiilor asimptotice. Un astfel de con are trei muchii de înapoiere, planele tangente la con de-a-lungul acestor muchii taie planul tangent la suprafaţă după direcţiile lui D a r b o u x şi au în comun dreapta Δ conjugata dreptei Δ' în polaritatea fundamentală.

66. **Reperul de ordinul IV.** Să continuăm metoda întreruptă după § 60. Pentru comoditatea scrierii vom nota

$$\boxed{a_{10} = \lambda, \; a_{20} = \mu, \; a_{30} = \nu} \,.$$

Formulele (2) devenite (4) se mai scriu în baza relaţiilor stabilite la § 60.

$$x_1 = \frac{y_1 + \mu y_3}{1 + \lambda y_1 + \mu y_2 + \nu y_3} = y_1 - \lambda y_1^2 + \left(\lambda^2 - \frac{1}{3}\mu\right) y_1^3$$

$$+ (\lambda\mu - \nu)\, y_1^2\, y_2 - \frac{1}{3}\mu y_2^3 + \dots$$

$$x_2 = \frac{y_2 + \lambda y_3}{1 + \lambda y_1 + \mu y_2 + \nu y_3} = y_2 - \mu y_2^2 - \frac{1}{3}\lambda y_1^3$$

$$+ (\lambda\mu - \nu)\, y_1 y_2^2 + \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\lambda\right) y_2^3 + \dots$$

$$x_3 = \frac{y_3}{1 + \lambda y_1 + \mu y_2 + \nu y_3} = y_1 y_2$$

$$-\left(\frac{1}{3} y_1^3 + \lambda y_1^2\, y_2 + \mu y_1\, y_2^2 + \frac{1}{3} y_2^3\right) + \left[\frac{\lambda}{3}\, y_1^4 + \left(\lambda^2 + \frac{1}{3}\mu\right) y_1^3 y_2\right.$$

$$\left. + (\nu + 2\,\lambda\mu)\, y_1^2\, y_2^2 + \left(\mu^2 + \frac{1}{3}\lambda\right) y_1 y_2^3 + \frac{\mu}{3}\, y_2^4\right] + \frac{1}{24}\psi_4 + \dots$$

Inlocuind aceste expresii în (1) care devine

$$x_3 = x_1\, x_2 - \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) + \frac{1}{24}\varphi_4 + \dots$$

căpătăm prin identificarea termenilor de gradul IV şi simplificare, identitatea:

$$\frac{1}{24}\psi_4\,(y_1,\, y_2)$$

$$= \frac{1}{24}\varphi_4(y_1, y_2) + \frac{\lambda}{3}\, y_1^4 - \frac{2\mu}{3}\, y_1^3\, y_2 + (\lambda\mu - 3\,\nu)\, y_1^2\, y_2^2$$

$$- \frac{2\lambda}{3}\, y_1\, y_2^3 + \frac{\mu}{3}\, y_2^4$$

ceea ce ne dă:

$$\frac{1}{24} B_{40} = \frac{1}{24} A_{40} + \frac{\lambda}{3} \quad ; \quad \frac{1}{6} B_{31} = \frac{1}{6} A_{31} - \frac{2\mu}{3}$$

$$\frac{1}{4} B_{22} = \frac{1}{4} A_{22} + \lambda\mu - 3\nu$$

$$\frac{1}{6} B_{13} = \frac{1}{6} A_{13} - \frac{2\lambda}{3} \quad , \quad \frac{1}{24} B_{04} = \frac{1}{24} A_{04} + \frac{\mu}{3} .$$

Oricare ar fi atunci A_{31} și A_{13}, dacă luăm $\lambda = \frac{1}{4} A_{13}$, $\mu = \frac{1}{4} A_{31}$, vom avea $\boxed{B_{31} = B_{13} = 0}$; luând apoi

$$\nu = \frac{1}{12} A_{22} - \frac{m}{12} + \frac{1}{48} A_{31} A_{13}$$

vom avea $B_{22} = m$. Pentru simplicitatea formulelor lui F r e n e t pe care le vom stabili ulterior vom lua $\boxed{m = 12}$ astfel încât $\boxed{B_{22} = 12}$. Reperul de ordinul trei determinat prin aceste condițiuni, îl numim *reper de ordinul IV* și se vede, deoarece coeficienții λ, μ, ν sunt perfect determinați, că reperul de ordinul IV este unic.

Dacă presupunem de altfel că reperul inițial este un reper de ordinul IV avem $\boxed{A_{31} = A_{13} = 0, \quad A_{22} = 12}$, și prin urmare, conform relațiilor precedente, $\lambda = \mu = \nu = 0$. Transformarea de coordonate se reduce la

$$x_1 = y_1 \quad , \quad x_2 = y_2 \quad , \quad x_3 = y_3$$

deci numai transformarea identică poate face trecerea dela un reper de ordinul IV la un alt reper de același ordin.

Dacă punem:

$$A_{40} = 6a, \quad A_{04} = 6b, \quad A_{50} = 4m, \quad A_{41} = 4n$$

$$A_{32} = 4p, \quad A_{23} = 4q, \quad A_{14} = 4r, \quad A_{05} = 4s$$

ecuaţia suprafeţei faţă de reperul de ordinul IV se scrie:

$$(28) \quad \begin{cases} x_3 = x_1 x_2 - \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) + \frac{1}{4}(a x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + b x_2^4) \\ + \frac{1}{30}(m x_1^5 + 5n x_1^4 x_2 + 10p x_1^3 x_2^2 + 10q x_1^2 x_2^3 \\ + 5r x_1 x_2^4 + s x_2^5) + \ldots \end{cases}$$

Reperul de ordinul IV fiind unic, vârfurile sale sunt elemente proiectiv invariante, deci se pot caracteriza prin proprietăţi geometrice care rămân neschimbate atunci când facem o transformare proiectivă a suprafeţei. In cele ce urmează vom căuta o interpretare geometrică a vârfurilor reperului.

De asemeni coeficienţii a, b din ecuaţia (28) sunt invarianţi proiectivi de ordinul IV-lea iar m, n, p, q, r, s sunt invarianţi proiectivi de ordinul al V-lea ai suprafeţei.

67. **Cuadrica lui Lie.** Pentru a putea defini geometriceşte elementele reperului de ordinul IV, vom căuta să definim unele noţiuni geometrice nouă. Prima din acestea este *cuadrica lui Lie* la definiţia căreia putem ajunge în modul următor.

Să considerăm una din liniile asimptotice C_1, trecând prin punctul M al suprafeţei. In fiecare punct al curbei C_1 considerăm direcţia asimptotică diferită de tangenta în acel punct la C_1. Când punctul variază pe C_1, aceste direcţii dau naştere la o suprafaţă riglată R_1 care conţine şi direcţia asimptotică în M diferită de tangenta la C_1. Această suprafaţă riglată se numeşte *riglată asimptotică.* Considerăm apoi de-a-lungul generatoarei ce trece prin M *iperboloidul osculator* la această riglată asimptotică pe care-l definim astfel. Generatoarea în M şi cu două generatoare vecine determină o cuadrică; când cele două generatoare tind, independent una de alta, către generatoarea în M, cuadrica tinde către o cuadrică limită care se numeşte iperboloidul osculator la riglata asimptotică considerată.

Să căutăm ecuaţia acestui iperboloid osculator. Vom lua ca asimptotică C_1 pe aceea tangentă dreptei $x_1 = 0$ în planul tangent. Această asimptotică va fi definită de o ecuaţie de forma

$$x_2 = Mx_1^2 + Nx_1^3 + Px_1^4 + \dots \tag{29}$$

Pentru a determina coeficienţii $M, N, P, \dots$ vom scrie că această relaţie satisface ecuaţiei liniilor asimptotice pe suprafaţă:

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1\, dx_2 + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} dx_2^2 = 0. \tag{30}$$

După (28) avem:

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} = -2x_1 + 3ax_1^2 + x_2^2 + \frac{2}{3}(mx_1^3 + 3nx_1^2 x_2 + 3px_1 x_2^2 + qx_2^3) + \dots$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 1 + 2x_1 x_2 + \frac{2}{3}(nx_1^3 + 3px_1^2 x_2 + 3qx_1 x_2^2 + rx_2^3) + \dots$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} = -2x_2 + x_1^2 + 3bx_2^2 + \frac{2}{3}(px_1^3 + 3qx_1^2 x_2 + 3rx_1 x_2^2 + sx_2^3) + \dots$$

iar după (29):

$$dx_2 = (2Mx_1 + 3Nx_1^2 + 4Px_1^3 + \dots)\, dx_1$$

înlocuind aceste valori în (30) obţinem identitatea:

$$\left[-2x_1 + 3ax_1^2 + \frac{2}{3} mx_1^3 + \dots\right]$$

$$+ 2\left\{1 + \left(2M + \frac{2}{3}n\right)x_1^3 + \dots\right\}\left\{2Mx_1 + 3Nx_1^2 + 4Px_1^3 + \dots\right\}$$

$$+ \{(1 - 2M)\, x_1^2 + \dots\}\{4M^2 x_1^2 + \dots\} \equiv 0.$$

De unde prin anularea coeficienţilor lui x_1, x_1^2, x_1^3, scoatem

$$-2+4M=0\ ,\ 3a+6N=0\ ,\ \frac{2}{3}m+8P=0$$

ceea ce ne dă:

$$M=\frac{1}{2}\ ,\ N=-\frac{a}{2}\ ,\ P=-\frac{m}{12}.$$

Ecuaţia (29) devine atunci

$$x_2=\frac{1}{2}x_1^2-\frac{a}{2}x_1^3-\frac{m}{12}x_1^4+\dots \tag{31}$$

Această ecuaţie, împreună cu (28) reprezintă ecuaţiile asimptoticei C_1, faţă de reperul de ordinul IV. Ecuaţia (28) se mai scrie, înlocuind pe x_2 cu valoarea sa (31):

$$x_3=\frac{1}{6}x^3-\frac{a}{4}x_1^4-\frac{m}{20}x_1^4+\dots \tag{32}$$

Ecuaţiile (31) şi 32) reprezintă astfel, de asemeni, ecuaţiile asimptoticei C_1. Fie acum:

$$\frac{\xi_1-x_1}{l}=\frac{\xi_2-x_2}{m}=\frac{\xi_3-x_3}{n} \tag{33}$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 fiind coordonate curente, ecuaţiile generatoarei suprafeţei R_1 ce trece prin un punct N (x_1, x_2, x_3) al asimptoticei C_1. Pentru a determina pe l, m, n, să observăm că aceste valori tind către valori proporţionale cu 0, 1, 0 când x_1 tinde către zero, deoarece generatoarea tinde către direcţia asimptotică de ecuaţii $x_1=0$, $x_3=0$. Putem deci împărţi cu m şi scrie

$$\lambda=\frac{l}{m}\ ,\ \nu=\frac{n}{m}$$

unde λ, ν, vor avea expresii de forma

$$\lambda=\lambda_1x_1+\lambda_2x_1^2+\lambda_3x_1^3+\dots,\ \nu=\nu_1x_1+\nu_2x_1^2+\nu_3x_1^3+\dots \tag{34}$$

Pentru a determina pe λ, ν se observă că avem:

$$\lambda = \frac{\delta x_1}{\delta x_2}$$

δ fiind diferențiala de-a-lungul unei asimptotice ce trece prin N. Avem așa dar,

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2}\lambda^2 + 2\,\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\lambda + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} = 0.$$

Inlocuind în această relație pe λ cu valoarea sa (34) și derivatele parțiale prin valorile lor scrise mai sus, în care înlocuim pe x_2 cu valoarea sa (31), obținem identitatea:

$$(-2x_1 + \ldots)(\lambda_1^2\, x_1^2 + \ldots) + 2\,(1 + \ldots)\,(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1^2 + \lambda_3 x_1^3 + \ldots)$$
$$+ \left[\left(\frac{2p}{3} + a\right) x_1^3 + \ldots\right] \equiv 0$$

de unde scoatem:

$$\lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 0\ ,\ \lambda_3 = -\left(\frac{a}{2} + \frac{p}{3}\right),$$

astfel că:

$$\lambda = -\left(\frac{a}{2} + \frac{p}{3}\right) x_1^3 + \ldots$$

Apoi fiindcă:

$$\frac{\delta x_1}{\lambda} = \delta x_2 = \frac{\delta x_3}{\nu}\ ,\quad \delta x_3 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\,\delta x_2,$$

iar, dacă ținem seamă de (31):

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = x_2 - x_1^2 + \ldots = -\frac{1}{2}\,x_1^2 + \ldots$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = x_1 - x_2^2 + \ldots = x_1 + \ldots$$

vom avea:

$$\nu = \left(-\frac{1}{2}\,x_1^2 + \ldots\right)\lambda + (x_1 + \ldots)$$

sau
$$\nu = x_1 + \ldots$$

termenii nescrişi conţinând pe x_1 cel puţin la puterea 4-a. Inlocuind în (33), ecuaţiile generatoarei lui R_1 devin:

$$\text{(35)}\qquad \frac{\xi_1 - x_1}{-\left(\frac{a}{2}+\frac{p}{3}\right)x_1^3+\ldots} = \frac{\xi_2 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{a}{2}x_1^3 + \ldots}{1} = \frac{\xi_3 - \frac{1}{6}x_1^3 + \ldots}{x_1 + \ldots}$$

sau, limitându-ne la termenii până la x_1^2 inclusiv:

$$\text{(36)}\qquad \xi_1 = x_1 \quad , \quad \xi_3 = x_1 \xi_2 .$$

Ecuaţia iperboloidului osculator, trebuind să fie de forma:

$$\text{(37)}\qquad \begin{aligned} &A + 2B\xi_1 + 2C\xi_2 + 2D\xi_3 + E\xi_1^2 + F\xi_2^2 + G\xi_3^2 \\ &+ 2H\xi_1\xi_2 + 2I\xi_1\xi_3 + 2J\xi_2\xi_3 = 0 \end{aligned}$$

şi să conţină generatoarea de ecuaţie (36) vom avea, înlocuind pe ξ_1, ξ_3 cu valorile lor:

$$\begin{aligned} &A + 2Bx_1 + 2C\xi_2 + 2Dx_1\xi_2 + Ex_1^2 + F\xi_2^2 + Gx_1^2\xi_2^2 \\ &+ 2Hx_1\xi_2 + 2Ix_1^2\xi_2 + 2Jx_1\xi_2^2 = 0 \end{aligned}$$

deci

$$A + 2Bx_1 + Ex_1^2 = 0 \quad , \quad C + (H + D)\,x_1 + Ix_1^2 = 0,$$

$$F + 2Jx_1 + Gx_1^2 = 0.$$

Cum iperboloidul osculator conţine generatoarea corespunzătoare valorii $x_1 = 0$ şi limita a două generatoare infinit vecine, va trebui să anulăm în relaţiile precedente, termenii constanţi şi coeficienţii lui x_1 şi x_1^2, ceea ce ne dă

$$A = B = C = E = I = F = J = G = 0 \quad , \quad H + D = 0$$

astfel că ecuaţia (37) devine ecuaţia:

$$\text{(38)}\qquad \xi_3 - \xi_1\xi_2 = 0$$

a iperboloidului osculator.

Din forma acestei ecuații se poate face următoarele două constatări:

1. Ecuația fiind simetrică în raport cu indicii 1 și 2 rezultă că *se capătă acelaș iperboloid osculator plecând dela cealaltă riglată asimptotică.*

2. Comparând ecuația sa cu ecuațiile (16) a cuadricelor lui Darboux rezultă că *iperboloidul osculator comun face parte din fascicolul de cuadrice a lui Darboux.*

Acest iperboloid osculator comun poartă numele de *cuadrica lui Lie* a suprafeței în punctul considerat.

In coordonate omogene $\frac{X_1}{X_0} = \xi_1$, $\frac{X_2}{X_0} = \xi_2$, $\frac{X_3}{X_0} = \xi_3$, ecuația cuadricei lui Lie se scrie:

$$X_0 X_3 - X_1 X_2 = 0$$

și se constată astfel că ea conține toate vârfurile A_0, A_1, A_2, A_3 ale reperului precum și muchiile $A_0 A_1$ $(X_2=X_3=0)$, $A_0 A_2$ $(X_1=X_3=0)$, $A_1 A_3$ $(X_0=X_2=0)$ și $A_2 A_3$ $(X_0=X_1=0)$.

68. **Directoarele lui Wilczinski. Caracterizare geometrică a reperului de ordinul IV.** Un al doilea element geometric interesant se obține plecând dela considerațiile următoare.

Fie (C_1), (C_2) cele două linii asimptotice ce trec prin un punct M al suprafeței. Se consideră complexele osculatoare (§ 54) la curbele (C_1) și (C_2) în M. Aceste două complexe, diferite între ele, definesc o congruență lineară (conform § 53). Directoarele (§ 53) acestei congruențe sunt elementele geometrice căutate și se numesc *directoarele lui Wilczinski.*

Pentru a le determina să plecăm dela ecuațiile (31) și (32) ale asimptoticei (C_1). Un punct N de abcisă x_1 al acestei asimptotice are coordonatele omogene:

$$X_0=1 \ , \ X_1=x_1 \ , \ X_2=x_2=\frac{1}{2}x_1^2-\frac{a}{2}x_1^3-\frac{m}{12}x_1^4+\ldots$$

$$X_3=x_3=\frac{1}{6}x_1^3-\frac{a}{4}x_1^4-\frac{m}{20}x_1^5+\ldots$$

şi tangenta NT la C_1 în N conţine şi punctul $Y = \frac{dX}{dx}$ de coordonate

$$Y_0 = 0\ , \ Y_1 = 1\ , \ Y_2 = x_1 - \frac{3a}{2} x_1^2 - \frac{m}{3} x_1^3 + \ldots$$

$$Y_3 = \frac{1}{2} x_1^2 - a x_1^3 - \frac{m}{4} x_1^4 + \ldots$$

Coordonatele plückeriene ale tangentei NT vor fi deci:

$$\pi_{01} = X_0\, Y_1 - X_1\, Y_0 = 1\ ; \quad \pi_{02} = x_1 - \frac{3a}{2} x_1^2 - \frac{m}{3} x_1^3 + \ldots .$$

$$\pi_{03} = \frac{1}{2} x_1^2 - a x_1^3 - \frac{m}{4} x_1^4 + \ldots\ ; \ \pi_{12} = \frac{1}{2} x_1^2 - a x_1^3 - \frac{m}{4} x_1^4 + \ldots$$

$$\pi_{13} = \frac{1}{3} x_1^3 - \frac{3a}{4} x_1^4 - \frac{m}{5} x_1^5 + \ldots , \quad \pi_{23} = \frac{1}{12} x_1^4 - \frac{a}{4} x_1^5 + \ldots$$

Fie atunci (§ 54)

$$a_{23}\ \pi_{01} + a_{31}\ \pi_{02} + a_{12}\ \pi_{03} + a_{01}\ \pi_{23} + a_{02}\ \pi_{31} + a_{03}\ \pi_{12} = 0 \tag{39}$$

ecuaţia complexului osculator. Inlocuind în această ecuaţie coordonatele π_{ij} prin valorile lor precedente se obţine:

$$a_{23} + a_{31}\left(x_1 - \frac{3a}{2} x_1^2 - \frac{m}{3} x_1^3 + \ldots\right) + a_{12}\left(\frac{1}{2} x_1^2 - a x_1^3 - \frac{m}{4} x_1^4 + \ldots\right)$$

$$+ a_{03}\left(\frac{1}{2} x_1^2 - a\, x_1^3 - \frac{m}{4} x_1^4 + \ldots\right) - a_{02}\left(\frac{1}{3} x_1^3 - \frac{3a}{4} x_1^4 - \frac{m}{5} x_1^5 + \ldots\right)$$

$$+ a_{01}\left(\frac{1}{12} x_1^4 - \frac{a}{4} x_1^5 + \ldots\right) = 0$$

şi anulând în această ecuaţie în x_1, termenii până la x_1^4 inclusiv, obţinem:

$$a_{23} = 0,\ a_{31} = 0,\ a_{12} + a_{03} = 0,\ -a\ (a_{12} + a_{03}) - \frac{1}{3} a_{02} = 0$$

$\frac{m}{4}(a_{12} + a_{03}) + \frac{3a}{4} a_{02} + \frac{1}{12} a_{01} = 0$ deci şi $a_{02} = 0,\ a_{01} = 0.$

Ecuaţia (39) se reduce la:

$$\pi_{03} - \pi_{12} = 0$$

şi este ecuaţia primului complex linear căutat. Complexul linear corespunzător asimptoticei C_2 se obţine permutând indicii 1 şi 2, ceea ce ne dă

$$\pi_{03} + \pi_{12} = 0.$$

Fascicolul de complexe determinat de aceste două complexe are ecuaţia

$$(1 + \lambda)\,\pi_{03} - (1 - \lambda)\,\pi_{12} = 0$$

şi complexele speciale ale acestui fascicol, fiind date de ecuaţia

$$(1 + \lambda)\,(1 - \lambda) = 0$$

au ecuaţiile:

$$\pi_{03} = 0, \qquad \pi_{12} = 0.$$

Axele acestor două complexe speciale sunt dreptele de coordonate plückeriene

$$D\ (a_{01} = a_{02} = a_{03} = a_{13} = a_{23} = 0, \qquad a_{12} = 1)$$

$$D'\ (a_{01} = a_{02} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \qquad a_{03} = 1)$$

adică tocmai muchiile $A_1\,A_2$ şi $A_0\,A_3$ ale reperului de ordinul patru. Căpătăm astfel teorema.

Directoarele congruenţei lineare determinate de complexele lineare osculatoare la liniile asimptotice ce trec prin un punct al unei suprafeţe sunt două drepte din care prima $(A_0\,A_3)$ *trece prin punctul considerat şi a doua* $(A_1\,A_2)$ *este situată în planul tangent. Ele sunt conjugate în polaritatea fundamentală şi se numesc respectiv prima şi a doua directoare a lui Wilczinski.*

Din combinaţia rezultatelor din § § 67 şi 68, rezultă următoarea interpretare geometrică a reperului de ordinul IV.

Vârful A_0 *al reperului coincide cu punctul considerat al suprafeţei; punctele* A_1 *şi* A_2 *se găsesc la intersecţia celei de a 2-a directoare a lui Wilczinski cu direcţiile asimptotice în punctul considerat; în sfârşit punctul* A_3 *este a 2-a intersecţie a primei directoare a lui Wilczinski cu cuadrica lui Lie.*

II.

REPERUL MOBIL. FORMULELE LUI FRENET

69. **Preliminarii.** Să considerăm o suprafaţă (S) definită parametric prin expresiile coordonatelor unui punct al ei în funcţiune de doi parametri u şi v. In fiecare punct al suprafeţei s'a definit ca la § 66 un reper de ordinul IV pe care-l vom numi, pentru simplificare, reperul lui F r e n e t - C a r t a n. Ecuaţia suprafeţei faţă de fiecare reper Frenet-Cartan are forma (28), valoarea invarianţilor a, b, m, n, p, q, r, s, putând varia însă dela un punct la altul; aceşti invarianţi sunt deci funcţiuni de u şi v. Vom însemna prescurtat, în notaţie simbolică, ca la § 49, cu A_0, A_1, A_2, A_3, coordonatele omogene ale vârfurilor reperului şi anume acele care se determină în mod unic, cu excepţia unui factor comun pentru toate, prin transformarea omografică care aduce un reper fix peste reperul lui Frenet-Cartan. Coordonatele A_0, A_1, A_2, A_3 sunt de asemeni funcţiuni de u şi v. Vom considera acum punctele

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial u} du + \frac{\partial A_i}{\partial v} dv \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

care au respectiv drept coordonate, faţă de un reper fix, diferenţialele totale ale coordonatelor A_i, şi vom însemna cu ω_{i0}, ω_{i1}, ω_{i2}, ω_{i3} coordonatele omogene relative, ale aceloraşi puncte faţă de reperul $A_0 A_1 A_2 A_3$ însuşi. Vom avea relaţiile

$$(40) \qquad dA_i = \omega_{i0} A_0 + \omega_{i1} A_1 + \omega_{i2} + \omega_{i3} A_3 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

care permit calcularea coordonatelor ω_{ij} atunci când se cunosc valorile coordonatelor A_i; din aceste relaţii rezultă că ω_{ij}, ca şi dA_i, sunt forme diferenţiale lineare în du, dv, coeficienţii fiind funcţiuni de u, v. Problema pe care ne-o propunem este să determinăm expresiunea formelor ω_{ij}. Vom ntrebuinţa pentru aceasta o metodă analoagă ca la § 49.

Considerăm mai întâi un punct *fix* M în spațiu, a'e cărui coordonate *relative* față de reperul $A_0 A_1 A_2 A_3$ sunt X_0, X_1, X_2, X_3. Vom avea în notație simbolică

$$M = X_0 A_0 + X_1 A_1 + X_2 A_2 + X_3 A_3 . \tag{41}$$

Fie dM punctul ale cărui coordonate *fixe* sunt diferențialele totale ale coordonatelor *fixe* ale punctului M. Trebue observat că deși punctul M este fix, putem înmulți coordonatele sale omogene cu o funcțiune arbitrară $\lambda(u, v)$, fără ca punctul să se schimbe și atunci diferențialele dM nu sunt neapărat nule. Diferențiând total relația (41) și ținând seamă de relațiile (40), obținem:

$$dM = \xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3$$

unde am notat

$$\xi_0 = dX_0 + X_0 \omega_{00} + X_1 \omega_{10} + X_2 \omega_{20} + X_3 \omega_{30}$$

$$\xi_1 = dX_1 + X_0 \omega_{01} + X_1 \omega_{11} + X_2 \omega_{21} + X_3 \omega_{31}$$

$$\xi_2 = dX_2 + X_0 \omega_{02} + X_1 \omega_{12} + X_2 \omega_{22} + X_3 \omega_{32}$$

$$\xi_3 = dX_3 + X_0 \omega_{03} + X_1 \omega_{13} + X_2 \omega_{23} + X_3 \omega_{33} .$$

Dacă punctul M este fix, el coincide cu dM și atunci însemnând cu Ω factorul de proporționalitate a coordonatelor punctelor $d\,M$ *și* M, avem:

$$dX_0 + X_0 \omega_{00} + X_1 \omega_{10} + X_2 \omega_{20} + X_3 \omega_{30} = X_0 \Omega$$

$$dX_1 + X_0 \omega_{01} + X_1 \omega_{11} + X_2 \omega_{21} + X_3 \omega_{31} = X_1 \Omega$$

$$dX_2 + X_0 \omega_{02} + X_1 \omega_{12} + X_2 \omega_{22} + X_3 \omega_{32} = X_2 \Omega$$

$$dX_3 + X_0 \omega_{03} + X_1 \omega_{13} + X_2 \omega_{23} + X_3 \omega_{33} = X_3 \Omega.$$

Trecând la coordonate neomogene

$$x_i = \frac{X_i}{X_0} , \quad dx_i = \frac{1}{X_0} dX_i - \frac{X_i}{X_0^2} dX_0$$

obţinem uşor:

$$
(42)\quad \left\{
\begin{aligned}
dx_1 &= -\omega_{01} + x_1(\omega_{00} - \omega_{11}) - x_2\,\omega_{21} - x_3\,\omega_{31} \\
&\quad + x_1^2\,\omega_{10} + x_1\,x_2\,\omega_{20} + x_1\,x_3\,\omega_{30} \\
dx_2 &= -\omega_{02} - x_1\,\omega_{12} + x_2(\omega_{00} - \omega_{22}) - x_3\,\omega_{32} \\
&\quad + x_1\,x_2\,\omega_{10} + x_2^2\,\omega_{20} + x_2\,x_3\,\omega_{30} \\
dx_3 &= -\omega_{03} - x_1\,\omega_{13} - x_2\,\omega_{23} + x_3(\omega_{00} - \omega_{33}) \\
&\quad + x_1\,x_3\,\omega_{10} + x_2\,x_3\,\omega_{20} + x_3^2\,\omega_{30}
\end{aligned}
\right.
$$

formule analoage formulelor [(28) § 49⁰] şi care exprimă condiţia ca un punct de coordonate relative neomogene x_1, x_2, x_3, să rămână fix în spaţiu.

70. **Determinarea formelor** ω_{ij}. **Formulele Frenet.** Vom presupune acum punctul *M fix pe suprafaţa* (S). Coordonatele x_1, x_2, x_3 satisfac pe lângă relaţiile (42) şi relaţia (28).

Să diferenţiem atunci total relaţia (28) şi să înlocuim în rezultat pe dx_1, dx_2, dx_3 cu valorile lor (42) după ce am înlocuit, în prealabil, în acestea pe x_3 cu valoarea sa (28). Obţinem o identitate în x_1, x_2, desvoltată după puterile acestor variabile, identitate în care egalând coeficienţii diferiţilor termeni $x_1^p\,x_2^q$ $(0 \leqslant p + q \leqslant 4)$, vom căpăta relaţiile căutate. Să arătăm însă mai întâi că formele ω_{01}, ω_{02} sunt identice cu formele ω_1, ω_2 definite la § 61. In adevăr, punctul care corespunde valorilor $u + du$, $v + dv$ ale parametrilor este, dacă ne limităm la 1-ul ordin, $A_0 + dA_0$. Dar avem

$$A_0 + d\,A_0 = (1 + \omega_{00})\,A_0 + \omega_{01}\,A_1 + \omega_{02}\,A_2 + \omega_{03}\,A_3$$

deci coordonatele neomogene ale acestui punct sunt:

$$x_1 = \frac{\omega_{01}}{1 + \omega_{00}}\,,\quad x_2 = \frac{\omega_{02}}{1 + \omega_{00}}\,,\quad x_3 = \frac{\omega_{03}}{1 + \omega_{00}}\,;$$

în particular părţile principale ale lui x_1, x_2 sunt ω_{01}, ω_{02} deci avem

$$\boxed{\omega_1 = \omega_{01} \quad , \quad \omega_2 = \omega_{02}} \,. \tag{43}$$

Aceste relaţii justifică şi afirmaţia făcută la § 61, după care formele ω_1, ω_2 definite acolo, sunt lineare în raport cu du, dv.

Aplicând, după stabilirea acestui rezultat, metoda indicată la începutul acestui paragraf, obţinem identitatea următoare unde am lăsat la o parte termenii care ne dau $x_1^p\, x_2^q$ cu $p + q > 4$:

$$
\begin{aligned}
&- \omega_{03} - x_1\,\omega_{13} - x_2\,\omega_{23} + \Big(x_1 x_2 - \frac{1}{3}\,x_1^3 - \frac{1}{3}\,x_2^3 + \frac{a}{4}\,x_1^4 \\
&+ \frac{1}{2}\,x_1^2 x_2^2 + \frac{b}{4}\,x_2^4\Big)(\omega_{00} - \omega_{33}) + \Big(x_1^2\,x_2 - \frac{1}{3}\,x_1^4 - \frac{1}{3}\,x_1\,x_2^3\Big)\omega_{10} \\
&+ \Big(x_1\,x_2^2 - \frac{1}{3}\,x_1^3\,x_2 - \frac{1}{3}\,x_2^4\Big)\omega_{20} + x_1^2\,x_2^2\,\omega_{30} \equiv \Big(x_2 - x_1^2 + a\,x_1^3 \\
&+ x_1\,x_2^2 + \frac{m}{6}\,x_1^4 + \frac{2n}{3}\,x_1^3\,x_2 + p\,x_1^2\,x_2^2 + \frac{2a}{3}\,x_1 x_2^3 + \frac{r}{6}\,x_2^4\Big) \times \Big\{ - \omega_1 \\
&+ x_1\,(\omega_{00} - \omega_{11}) - x_2\,\omega_{21} + x_1^2\,\omega_{10} + x_1\,x_2\,(\omega_{20} - \omega_{31}) \\
&+ \frac{1}{3}\,x_1^3\,\omega_{31} + x_1^2\,x_2\,\omega_{30} + \frac{1}{3}\,x_2^3\,\omega_{31}\Big\} + \Big(x_1 - x_2^2 + x_1^2\,x_2 + b\,x_2^3 \\
&+ \frac{n}{6}\,x_1^4 + \frac{2p}{3}\,x_1^3\,x_2 + 9\,x_1^2\,x_2^2 + \frac{2\,r}{3}\,x_1 x_2^3 + \frac{s}{6}\,x_2^4\Big) \times \Big\{ - \omega_2 - x_1\omega_{12} \\
&+ x_2\,(\omega_{00} - \omega_{22}) + x_1\,x_2\,(\omega_{10} - \omega_{32}) + x_2^2\,\omega_{20} + \frac{1}{3}\,x_1^3\,\omega_{32} \\
&+ x_1\,x_2^2\,\omega_{30} + \frac{1}{3}\,x_1^3\,\omega_{32}\Big\} + \frac{1}{4}\,x_1^4\,da + \frac{1}{4}\,x_2^4\,db + \ldots
\end{aligned}
$$

Identificând termenii constanţi şi coeficienţii termenilor în $x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, \ldots$, găsim succesiv relaţiile:

$$-\omega_{03}=0\,,\ -\omega_{13}=-\omega_2\,,\ -\omega_{23}=-\omega_1\,,\ 0=\omega_1-\omega_{12}$$

$$\omega_{00}-\omega_{33}=\omega_{00}-\omega_{11}+\omega_{00}-\omega_{22}\,,\ 0=-\omega_{21}+\omega_2,$$

$$-\frac{1}{3}(\omega_{00}-\omega_{33})=-(\omega_{00}-\omega_{11})-a\,\omega_1\,,\ \omega_{10}=\omega_{10}+\omega_{21}$$

$$+\omega_{10}-\omega_{32}-\omega_2\,,\ \omega_{20}=\omega_{20}-\omega_{31}-\omega_1+\omega_{20}+\omega_{12}\,,$$

$$-\frac{1}{3}(\omega_{00}-\omega_{33})=-(\omega_{00}-\omega_{22})-b\,\omega_2\,,\frac{a}{4}(\omega_{00}-\omega_{33})$$

$$-\frac{1}{3}\omega_{10}=-\omega_{10}-\frac{m}{6}\omega_1+a(\omega_{00}-\omega_{11})+\frac{1}{3}\omega_{32}-\frac{n}{6}\omega_2$$

$$+\frac{1}{4}\,da,-\frac{1}{3}\omega_{20}=\frac{1}{3}\omega_{31}-(\omega_{20}-\omega_{31})-\frac{2n}{3}\omega_1-a\,\omega_{21}$$

$$-\frac{2p}{3}\omega_2-\omega_{12},\frac{1}{2}(\omega_{00}-\omega_{33})+\omega_{30}=\omega_{30}-p\omega_1+(\omega_{00}-\omega_{11})$$

$$+\omega_{30}-q\,\omega_2+(\omega_{00}-\omega_{22}),-\frac{1}{3}\omega_{10}=-\frac{2q}{3}\omega_1-\omega_{21}+\frac{1}{3}\omega_{32}$$

$$-(\omega_{10}-\omega_{32})-\frac{2r}{3}\omega_2-b\omega_{12},\frac{1}{4}(\omega_{00}-\omega_{33})-\frac{1}{3}\omega_{20}=\frac{1}{3}\omega_{31}$$

$$-\frac{r}{6}\omega_1-\omega_{20}-\frac{s}{6}\omega_2+b(\omega_{00}-\omega_{22})+\frac{1}{4}\,db.$$

din care, cu excepţia ultimei şi celei de a 11-a, scoatem

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l}\omega_{03}=0\,,\ \omega_{13}=\omega_2\,,\ \omega_{23}=\omega_1\,,\ \omega_{12}=\omega_1\,,\ \omega_{21}=\omega_2\\ \omega_{11}-\omega_{00}=2\,a\,\omega_1+b\,\omega_2\,,\ \omega_{22}-\omega_{00}=a\,\omega_1+2\,b\,\omega_2,\\ \omega_{33}-\omega_{00}=3\,a\,\omega_1+3\,b\omega_2,\ \omega_{32}=\omega_{10},\ \omega_{31}=\omega_{20}\end{array}\right.$$

şi punând

$$\lambda=q+\frac{3b}{2},\ \mu=r+\frac{3}{2},\ \nu=n+\frac{3}{2},\ \rho=p+\frac{3a}{2}$$

$$(45)\quad \omega_{10}=\lambda\,\omega_1+\mu\,\omega_2\,,\ \omega_{20}=\nu\,\omega_1+\rho\,\omega_2\,,\ \omega_{30}=\rho\,\omega_1+\lambda\omega_2.$$

Relațiile (41), (43), (44) și (45) ne dau, cu ajutorul relațiilor (40), formulele căutate ale lui F r e n e t, care se vor scrie:

$$
(46) \quad \begin{cases}
dA_0 = \omega_{00} A_0 + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 \\
dA_1 = (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) A_0 + (\omega_{00} + 2a\omega_1 + b\omega_2) A_1 \\
\qquad + \omega_1 A_2 + \omega_2 A_3 \\
dA_2 = (\nu\omega_1 + \rho\omega_2) A_0 + \omega_2 A_1 + \\
\qquad (\omega_{00} + a\omega_1 + 2b\omega_2) A_2 + \omega_1 A_3 \\
dA_3 = (\rho\omega_1 + \lambda\omega_2) A_0 + (\nu\omega_1 + \rho\omega_2) A_1 + \\
\qquad (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) A_2 + (\omega_{00} + 3a\omega_1 + 3b\omega_2) A_3;
\end{cases}
$$

ele joacă în teoria proiectivă a suprafețelor, același rol ca și celelalte formule ale lui F r e n e t, stabilite anterior pentru curbele plane și strâmbe. Coeficienții a, b, λ, μ, ν, ρ, care intervin în aceste formule sunt invarianții proiectivi fundamentali ai suprafeței.

Cele două formule de care nu ne-am servit în stabilirea formulelor lui F r e n e t, ne dau:

$$
(47) \quad \begin{cases}
da = \left(\frac{2m}{3} + \frac{4\lambda}{3} + 5a^2\right) \omega_1 + \left(ab + \frac{4}{3}\mu + \frac{2}{3}\nu - 1\right) \omega_2 \\
db = \left(ab + \frac{2}{3}\mu + \frac{4}{3}\nu - 1\right) \omega_1 + \left(\frac{25}{3} + \frac{4\rho}{3} + 5b^2\right) \omega_2,
\end{cases}
$$

ceea ce ne arată că din cei șase invarianți fundamentali care intră în formulele lui F r e n e t, doi (μ și ν) sunt *derivați* adică se exprimă în funcție de alți doi (a și b) și de coeficienții diferențialelor acestora în desvoltarea lor după formele diferențiale invariante ω_1, ω_2.

71. **Aplicațiune. Axele lui Čech.** Formulele (46) permit în primul rând să arătăm că formele ω_1, ω_2 sunt independente în du și dv. In adevăr dacă ar fi altfel, am avea *identic*

$$\omega_2 = k\,\omega_1$$

și atunci însemnând cu $t(u, v) = c_t$ integrala generală a ecuației $\omega_1 = 0$, am avea $\omega_1 = p_1\,dt$ și prin urmare și

$\omega_2 = p_2\, dt$, $\omega_{ij} = p_{ij}\, dt$ $(i \neq j)$, $\omega_{ii} - \omega_{00} = (p_{ii} - p_{00})\, dt$. Formulele (46) s'ar reduce la formulele [(27) § 49⁰]. Eliminarea lui A_1, A_2, A_3 între aceste formule ar arăta că coordonatele A_0 satisfac la o ecuaţie diferenţială lineară de ordinul 4, deci punctul A_0 ar descrie o curbă în loc de o suprafaţă.

Acestea fiind stabilite rezultă că o ecuaţie de forma

$$\omega_2 = k\, \omega_1 \tag{48}$$

unde k este o funcţie de u şi v, defineşte pe suprafaţă o familie de curbe (fiindcă scrisă desvoltat, devine o ecuaţie lineară şi omogenă în du şi dv), astfel încât prin fiecare punct al suprafeţei trece o curbă a familiei şi una singură.

Ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului osculator la această curbă, faţă de reperul Frenet-Cartan corespunzător punctului considerat, se deduc numai decât din formulele (46) şi ecuaţia (48). In adevăr tangenta conţine punctul de coordonate omogene A_0 şi punctul dA_0. Dar avem după (46) şi (48):

$$dA_0 = \omega_{00} A_0 + \omega_1 (A_1 + kA_2)$$

deci tangenta conţine punctele A_0 şi $A_1 + kA_2$, adică punctele de coordonate relative omogene (1, 0, 0, 0) şi (0, 1, k, 0). Dreapta care conţine aceste două puncte are în coordonate relative ecuaţiile

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$\xi_2 = k\xi_1 \quad , \quad \xi_3 = 0.$$

Se deduce de aci că familia de linii asimptotice tangente muchiilor $A_0 A_1$ $(\xi_2 = \xi_3 = 0)$ sunt date de ecuaţia $\omega_2 = 0$ $(k = 0)$ şi la fel familia de linii asimptotice tangente muchiilor $A_0 A_2$ $(\xi_1 = \xi_3 = 0)$ va fi dată de ecuaţia $\omega_1 = 0$ $(k = \infty)$. Ecuaţia liniilor asimptotice se scrie atunci

$$\omega_1\, \omega_2 = 0.$$

La fel, dacă numim linie Darboux, o linie care în fiecare punct are ca tangentă o direcţie Darboux şi linie Segre o linie care în fiecare punct are ca tangentă o direcţie Segre, liniile lui Darboux şi Segre vor fi date respectiv de ecuaţiile

$$\omega_1^3 + \omega_2^3 = 1 \quad (k^3 = -1) \quad , \quad \omega_1^3 - \omega_2^3 = 1 \quad (k^3 = 1).$$

Avem prin urmare pe o suprafaţă trei familii de linii Darboux şi trei familii de linii Segre, astfel încât prin fiecare punct al suprafeţei trec trei curbe Darboux având drept tangente în acel punct direcţiile Darboux şi trei linii Segre având în acel punct drept tangente direcţiile Segre.

Să căutăm acum ecuaţia planului osculator la curba din familia dată de ecuaţia (48), ce trece prin un punct al suprafeţei, faţă de reperul Frenet-Cartan corespunzător acelui punct. Ne vom mărgini, pentru cele ce urmează, numai la cazul când k este constant. Acest plan osculator este definit de punctele A_0, dA_0, d^2A_0 sau A_0, $A_1 + kA_2$, $d(A_1 + kA_2)$. Insă avem din (46) şi (48)

$$d(A_1 + kA_2) = \{\lambda + k(\mu + \nu) + k^2\rho\}\,\omega_1 A_0 + \omega_{00}(A_1 + kA_2)$$
$$+ (2a + kb + k^2)\,\omega_1 A_1 + (1 + ka + 2bk^2)\,\omega_1 A_2 + 2k\omega_1 A^3$$

putem deci înlocui pe $A_1 + kA_2$ prin punctul de coordonate omogene relative $(0,\ 2a+kb+k^2,\ 1+ka+2bk^2,\ 2k)$. Ecuaţia planului osculator devine

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 2a + kb + k^2 & 1 + ka + 2bk^2 & 2k \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$(49) \qquad 2k^2\,\xi_1 - 2k\xi_2 + (1 - ka + kb^2 - k^3)\,\xi_3 = 0.$$

Cu această pregătire să demonstrăm următoarea teoremă a lui Čech.

Planele osculatoare la cele trei curbe ale lui S e g r e care trec prin un punct dat, se taie după o dreaptă.

In adevăr pentru o linie S e g r e avem $k^3 = 1$ şi ecuaţia (49) devine

$$2k\xi_1 - 2\xi_2 + (kb - a)\,\xi_3 = 0; \tag{50}$$

pentru fiecare din cele trei valori ale lui k pentru care avem $k^3 = 1$, planul osculator conţine dreapta

$$2\xi_1 + b\xi_3 = 0 \quad , \quad 2\xi_2 + a\xi_3 = 0$$

sau

$$\frac{\xi_1}{b} = \frac{\xi_2}{a} = \frac{\xi_3}{-2} \tag{51}$$

şi teorema e demonstrată. Dreapta Δ comună celor trei plane osculatoare, dată de ecuaţiile (51) se numeşte *prima axă a lui Č e c h.*

Dacă se compară acum ecuaţia (50) cu (23), avem

$$A = \frac{2k}{kb - a} \quad , \quad B = \frac{2}{a - kb}$$

de unde rezultă după formulele (24) coordonatele α, β ale punctelor de înapoiere ale curbelor S e g r e şi anume:

$$\alpha = \frac{\dfrac{8k}{(kb-a)^3}}{\dfrac{8k^3}{(kb-a)^3} - \dfrac{8}{(kb-a)^3} + \dfrac{4k}{(kb-a)^2}} = \frac{2}{kb-a}$$

$$\frac{-\dfrac{8k^2}{(kb-a)^3}}{\dfrac{8k^3}{(kb-a)^3} - \dfrac{8}{(kb-a^3)} + \dfrac{4k}{(kb-a)^2}} = \frac{2k}{a-kb}$$

căci $k^3 - 1 = 0$. Se constată uşor că avem oricare ar fi k:

$$2 + a\alpha + b\beta = 0 \tag{52}$$

de unde rezultă a *2-a teoremă a lui Č e c h.*

Punctele de înapoiere ale celor trei curbe a lui Segre ce trec prin un punct sunt situate pe o dreaptă Δ'.

Această dreaptă care se numeşte *a 2-a axă a lui Čech* are ecuaţia (52); cum această ecuaţie se deduce din (51), la fel ca (18) din (17) rezultă că *cele două axe ale lui Čech se corespund în polaritatea fundamentală.*

72. **Suprafeţele Ţiţeica-Wilczinski.** Ca a doua aplicaţie a formulelor lui Frenet, ne propunem să găsim *suprafeţele pentru care prima directoare Wilczinski trece prin un punct fix.*

Fie $(0, 0, m)$ coordonatele relative, neomogene ale punctului fix din spaţiu, situat, prin ipoteză, pe dreapta $A_0 A_3$ $(x_1 = x_2 = 0)$. Formulele (42), în care ţinem seamă de expresiile (43), (44) şi (45) ale formelor ω_{ij}, aplicate acestor coordonate, ne dau

$$0 = -\omega_1 - m(\nu\omega_1 + \rho\omega_2)$$
$$0 = -\omega_2 - m(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)$$
$$dm = m(\omega_{00} - \omega_{33}) + m^2(\rho\omega_1 + \lambda\omega_2)$$

şi fiindcă formele ω_1, ω_2 sunt independente, din primele două relaţii deducem:

$$\rho = 0 \quad , \quad \lambda = 0 \quad , \quad \mu = \nu = -\frac{1}{m} \tag{53}$$

şi înlocuind în ultima

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{d\nu}{\nu} = \omega_{33} - \omega_{00} = 3a\omega_1 + 3b\omega_2. \tag{54}$$

Relaţiile (53) şi (54) caracterizează suprafeţele căutate. Aceste suprafeţe, descoperite pe această cale de Wilczinski, fuseseră descoperite cu puţină vreme înainte de marele nostru geometru Ţiţeica, ca suprafeţe pentru care fiecare din riglatele asimptotice se bucură de o anumită proprietate (să aibă liniile flecnodale plane şi confundate); pentru aceste motive ele au fost denumite în ştiinţă, suprafeţele Ţiţeica-Wilczinski.

Ne vom mulţumi să demonstrăm pentru suprafeţele Ţiţeica-Wilczinski, următoarea proprietate:

Directoarele secunde ale lui Wilczinski sunt cuprinse într'un plan fix.

In adevăr dacă vom ţinea seama în formulele (42), care caracterizează un punct fix, de expresiile (43), (44) şi (45) ale formelor ω_{ij}, precum şi de relaţiile (53) şi (54) care caracterizează suprafeţele studiate, vom scoate, fără nicio dificultate, relaţia:

(55) $$d(\nu x_3 - 1) = (\nu x_3 - 1)(x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2).$$

Să considerăm atunci *planul fix* în spaţiu care faţă de un anumit reper Frenet-Cartan, are ecuaţia

(56) $$\nu x_3 - 1 = 0;$$

relaţia (55) ne arată că pentru punctele fixe ale acestui plan avem

$$d(\nu x_3 - 1) = 0$$

deci

$$\nu x_3 - 1 = C = \text{const.}$$

iar (56) ne arată că avem $C = 0$ într'un punct al suprafeţei deci în toate punctele suprafeţei. Toate aceste puncte fixe rămân deci în planele care au faţă de orice reper Frenet-Cartan ecuaţia (56), cu alte cuvinte *planul de ecuaţie* (56) *este fix în spaţiu.* Cum acest plan conţine în fiecare punct directoarea $A_1 A_2$, de ecuaţii $X_0 = 0$, $X_3 = 0$, în coordonate omogene, proprietatea este demonstrată.

TABLA DE MATERII

Pag.

Prefață 3

PARTEA I-a. CURBE PLANE

I. PLANUL EUCLIDIAN

1. Generalități. Spații sau varietăți cu două dimensiuni 5
2. Transformare 5
3. Produs de transformări 6
4. Egalitatea figurilor. Noțiunea de grup 7
5. Geometria proiectivă 9
6. Metode generale de studiere a diferitelor geometrii 9
7. Noțiunea de reper mobil 10
8. Coordonate relative față de un reper 10
9. Studiul curbelor plane 11
10. Formulele lui Frenet 15
11. Interpretări geometrice 19

II. GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ PROIECTIVĂ A CURBELOR PLANE

METODA ECUAȚIEI REDUSE

12. Reperul mobil 21
13. Coordonate relative față de un reper proiectiv 22
14. Coordonate proiective 23
15. Metoda ecuației reduse 25
16. Reper de ordinul zero 26
17. Reper de primul ordin 27
18. Reper de ordinul doi. Puncte de inflexiune 27
19. Reper de ordinul trei 29
20. Reper de ordinul patru 30
21. Interpretări geometrice. Conica osculatoare 32
22. Reper de ordinul cinci. Puncte sextactice 33
23. Arc proiectiv 34
24. Reper de ordinul șase. Curburi proiective 36
25. Alte interpretări geometrice. Normala proiectivă 37
26. Punctul lui Halphen. Puncte și curbe de coincidență 39
27. Metoda reperului mobil 40
28. Determinarea cœficienților p_{ij}. Formulele lui Frenet 43
29. Aplicație. Curbele de coincidență 46
30. Curbe de curbură proiectivă constantă 47

Pag.

METODA LUI WILCZINSKI

31. Ecuaţia diferenţială lineară a unei curbe 49
32. Transformarea ecuaţiilor diferenţiale. Forma canonică 51
33. Observaţii şi consecinţe. Parametru proiectiv 56
34. Aplicaţie. Ecuaţia diferenţială a conicelor 59
35. Condiţia de echivalenţă a două curbe 60

PARTEA II-a. CURBE STRÂMBE

I. GENERALITĂŢI. SPAŢIUL PROIECTIV

36. Varietăţi cu trei dimensiuni 63
37. Geometria proiectivă a spaţiului 65
38. Reperul mobil proiectiv 66

II. METODA ECUAŢIEI REDUSE

39. Reper de ordinul zero 68
40. Reper de primul ordin 70
41. Reper de ordinul doi. Puncte de inflexiune 71
42. Reper de ordinul trei. Puncte staţionare 73
43. Reper de ordinul patru 75
44. Reper de ordinul cinci 76
45. Interpretări geometrice. Cubică osculatoare 79
46. Reper de ordinul şase. Puncte singulare de prima şi a doua speţă. Arc proiectiv 82
47. Interpretarea geometrică a reperului de ordinul şase. Punctele lui Halphen şi Sannia 85
48. Altă interpretare geometrică a reperului. Plan principal 88

III. REPERUL MOBIL. FORMULELE LUI FRENET

49. Formule preliminarii 90
50. Determinarea coeficienţilor p_{ij} 93
51. Formulele lui Frenet 97
52. Coordonate plückeriene 99
53. Complex linear. Congruenţă lineară 102
54. Complex linear osculator 105

IV. METODA LUI WILCZINSKI

55. Ecuaţia diferenţială lineară a unei curbe strâmbe 109
56. Reducerea unei ecuaţii diferenţiale lineare la forma canonică 111

PARTEA III-a. SUPRAFEŢE STRÂMBE

I. STUDIUL SUPRAFEŢELOR IN SPAŢIUL PROIECTIV PRIN METODA ECUAŢIEI REDUSE

57. Reper de ordinul zero 114
58. Reper de primul ordin. Plan tangent 116
59. Reper de ordinul doi. Direcţii asimptotice 117
60. Reper de ordinul trei. Suprafeţe riglate 120
61. Elementul linear proiectiv al unei suprafeţe. Direcţiile lui Darboux şi Segre 122

Pag.

62. Interpretări geometrice 123
63. Cuadricele lui Darboux. Polaritatea fundamentală 126
64. Corespondenţa lui Segre 127
65. Aplicaţii geometrice 130
66. Reper de ordinul patru 133
67. Cuadrica lui Lie 135
68. Directoarele lui Wilczinski. Caracterizare geometrică a reperului de ordinul patru 140

II. REPERUL MOBIL. FORMULELE LUI FRENET

69. Preliminarii 143
70. Determinarea formelor ω_{ij}. Formulele Frenet 145
71. Aplicaţiune. Axele lui Čech 148
72. Suprafeţele Ţiţeica-Wilczinski 152