TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

32294. — PARIS, IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
55, quai des Grands-Augustins.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS

ET INTRODUCTION

A LA GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS,

PAR

E. JOUFFRET,

Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite,
Ancien Élève de l'École Polytechnique,
Officier de la Légion d'honneur,
Officier de l'Instruction publique,
Membre de la Société mathématique de France.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

AVANT-PROPOS.

I. — La Conception des champs successifs.

Le monde à quatre dimensions n'existe sans doute qu'au sens géométrique. Mais rien n'empêche de lui supposer aussi l'existence concrète, et alors le nôtre en ferait partie. Nous y introduirons le lecteur en nous plaçant avec lui dans cet ordre d'idées, tout en le prévenant que notre travail aura pour point de départ un autre genre de considérations.

L'univers que nous habitons, et ceux que nous soupçonnons à côté de lui, ont été jetés dans ce que nous appelons L'ESPACE. C'est *une chose* que nous considérons comme le contenant de toutes les autres, que nous sentons infinie devant nous de quelque côté que nous portions les yeux, et à laquelle nous attribuons TROIS dimensions, sans trop savoir pourquoi ni comment ce nombre particulier s'impose à nous. Il paraît, ce nombre, n'avoir aucune nécessité logique, car on peut le remplacer par tout autre nombre *entier* lorsqu'on vient à formuler un système analytique quelconque; il serait donc un simple produit de l'expérience, non certes de l'expérience individuelle, mais de cette expérience accumulée qui a fourni les idées héréditaires. Cette notion a été appelée l'*axiome des trois dimensions*, et elle n'a commencé à être discutée que dans ces dernières années [1].

---

[1] Voy. RUSSELL, *Essai sur les fondements de la Géométrie*, traduit de l'anglais par *Cadenat*. In-8°. Paris, 1901, p. 204. — H. POINCARÉ, l'*Espace et la*

M. Poincaré en donne l'explication suivante. La conception que nous avons de l'espace a pour base une image qui se forme sur notre rétine et qui a *deux* dimensions. L'idée d'une troisième dimension résulte de l'effort d'accommodation qu'il faut faire avec nos yeux et de la convergence qu'il faut leur donner; elle dépend de ces *deux* indications qui sont distinctes, mais qui se trouvent toujours concordantes et équivalent ainsi à *une seule*. Ceux des éléments de nos sensations visuelles qui concourent à former en nous la notion de l'espace sont donc, en définitive, des fonctions de *trois* variables indépendantes, et c'est de là que viendrait le sentiment de *trois dimensions*. On conçoit d'ailleurs la possibilité d'un état de choses tel que les deux indications qui constituent ensemble la troisième variable soient indépendantes l'une de l'autre au lieu d'être liées entre elles par une relation constante; alors nous attribuerions sans doute *quatre dimensions* à l'espace visuel.

Voici une autre explication, d'après Hinton.

L'analyste peut, ou du moins a pu jusqu'à nos jours, interpréter les phénomènes de la Nature avec la conception suivante de l'espace. Pour lui, celui-ci n'est pas autre chose qu'un *Système de trois variables*, qu'il appelle *des distances*, ou *des coordonnées* (1), et auxquelles il demande uniquement de pouvoir prendre toutes les valeurs imaginables, chacune indépendamment des deux autres; un point de l'espace

---

Géométrie (*Rev. de métaph. et de morale*, 1895, p. 631, 646 et 1897, p. 66). — NEWCOMB, *The philosophy of hyperespace* (*Bull. of the amer. math. Society*, fév. 1898. — HINTON, *Many Dimensions*, dans *Scientific Romances*, in-12. Londres, 1896.

L'*Étude sur l'espace et le temps*, par Lechalas, Ingénieur en chef des Ponts-et-Chaussées (in-8°, Paris, 1896), est un excellent exposé de la *question de l'Espace;* il faut que l'on voie aussi la discussion de ce livre, par L. Couturat, dans la *Rev. de métaph. et de morale*, 1896, p. 646 à 669.

(1) Leur signification absolue lui importe peu et il peut même la changer sous certaines conditions; *voyez* §§ 17, 18 et 19.

n'est pour lui qu'un système de valeurs *déterminées* de ces trois variables, et la connaissance du monde matériel que celle des relations qu'elles ont entre elles et avec *le temps*, dans un certain ensemble de circonstances appelé *phénomène*. C'est sur cette base qu'ont été édifiés les immortels travaux de Laplace, Lagrange, Poisson..., etc.

Trois variables, voilà donc à quoi se réduisent, en fin de compte et en combinant leurs effets, les mille et mille causes qui se jouent autour de nous et engendrent tout ce qui nous fait jouir ou souffrir. Peut-être est-ce tout simplement ce fait qui, senti confusément par l'esprit de nos pères, s'y serait fixé, à la longue, sous la forme plus ou moins gratuite d'une chose appelée *espace* et douée de trois dimensions, d'ailleurs assez imprécises : par une de ses opérations favorites, ledit esprit aurait substitué cette chose *concrète* au système analytique *abstrait*.

Ce cas n'est pas le seul où l'on aurait vu l'instinct populaire devancer le mathématicien; voyez, par exemple, ce qui est dit au sujet de « Treize à table » dans les *Contes de la veillée* de Ch. Nodier et, par M. Dormoy, dans le *Journal des Actuaires français*, fascicule de janvier 1875, p. 62.

Or il se trouve que les trois variables ne suffisent pas à l'Analyse depuis que, de plus en plus puissante et exigeante, elle a porté ses recherches dans le *monde des petites dimensions*, que nos pères ignoraient; la raison de cette insuffisance est qu'une étude plus approfondie lui découvre des effets dont les causes étaient jusque-là comme inexistantes. Dès lors, elle est amenée, bon gré mal gré, à remplacer pour ces nouvelles études son système de *trois* variables par un de *quatre*. On verra plus loin (¹) que la quatrième, qui n'intervient qu'à propos de très petites grandeurs et de très petits

(¹) A la fin de l'Avant-propos et au § 48.

mouvements, se traduit, au concret, par une quatrième épaisseur très petite. Plus l'étude de la Nature deviendra minutieuse, plus il faudra, comme dans les *Méthodes d'approximations successives*, augmenter le nombre des variables et, en conséquence, celui des dimensions spatiales, au moins dans l'ordre de petitesse considéré.

Si cette seconde explication est la bonne, ne pourrait-il pas se produire progressivement, dans notre mentalité mise aux prises avec des causes de plus en plus nombreuses, une transformation correspondante à celle de l'Analyse et ayant pour résultat de donner à nos lointains descendants la sensation de se voir, et de concevoir l'espace, avec quatre dimensions ?

Le géomètre conçoit l'espace divisé en une infinité de *tranches infiniment minces* qu'il appelle des *plans,* celles-ci en une infinité de *bandes infiniment étroites* qu'il appelle des *droites,* et celles-ci en une infinité de *segments infiniment courts* qu'il appelle des *points.* Quelquefois, ce qu'il appelle *plans, droites* et *points,* c'est, non pas les *tranches,* les *bandes* et les *segments* eux-mêmes, mais les *séparations,* dénuées de toute espèce d'épaisseur et de réalité, que sa pensée voit entre eux. Ces divisions ou ces séparations, il en fait autant d'êtres particuliers qu'il écarte les uns des autres, avec ou sans les choses qu'ils contiennent ; il les déplace de toutes façons et les entrecroise à sa guise ; il les peuple de figures créées par son imagination, liées entre elles par des lois dont il devient lui-même l'esclave. Suivant l'une ou l'autre manière dont la conception de ces sortes de *cloisons,* de *tringles* et de *billes* s'est formée en lui, il dit — que, *sur* les trois dimensions, il y en a *une* infiniment petite chez les plans, *deux* chez les droites, *trois* chez les points, — ou bien qu'*au lieu* d'avoir trois dimensions, les plans *n'en ont que deux*, les droites *n'en qu'une*, et les points *n'en ont pas*. De toute façon, les divisions sont purement idéales, et elles peuvent être faites d'une infinité de manières.

Prenant la série en sens inverse, c'est-à-dire à partir *du point*, la géométrie qui va nous occuper la poursuit *plus loin que l'espace*.

Celui-ci n'est également pour elle qu'une *tranche* (nous ne pouvons plus diversifier les mots et nous cueillons le dernier laissé par la série commencée) qu'une *tranche infiniment mince* au milieu d'une infinité d'autres espaces formant autant de *tranches* pareilles dans une étendue *à quatre* dimensions. Espaces qu'à leur tour le géomètre peuple, déplace, entrecroise comme il l'entend.

Nous appellerons ÉTENDUE l'ensemble que forment ces espaces en nombre infini, et qui est leur contenant comme chacun d'eux est le contenant d'une infinité de plans, chacun de ceux-ci le contenant d'une infinité de droites, chacune de celles-ci le contenant d'une infinité de points. Rien n'empêche de considérer l'étendue comme étant englobée à son tour dans un champ à cinq dimensions, et ainsi de suite indéfiniment.

Telle est la *conception des champs successifs*. Chaque champ procède du précédent par une amplification de plus en plus grandiose. Infiniment grand relativement à celui-ci, il est infiniment petit vis-à-vis de celui dans lequel il est englobé ; sans limites suivant chacune des dimensions dont il est doué, il n'est plus qu'une chose évanouissante suivant une dernière qui lui fait défaut et qui existe en dehors de lui.

Que sont les choses que contiennent ces champs successifs ?

Prenons, pour commencer, un des plans innombrables que notre pensée peut créer, on vient de voir de quelle façon : ce sera, par exemple, le plan horizontal sur lequel nous marchons, supposé prolongé indéfiniment dans tous les sens. Les choses qui sont dans ce plan ne sont que les *sections* faites par lui à travers des corps à trois dimensions occupant l'espace dans lequel il est plongé, ou bien les *faces de contact,* les *affleurements* de ces mêmes corps avec le plan. Nous y concevons bien encore des *figures* n'ayant pas cette origine, formées de lignes et de points; mais celles-là, comme leur nom l'indique et comme le plan lui-même, n'existent que dans notre pensée, par une abstraction de la troisième dimension à laquelle certains cerveaux ne s'habituent pas aisément.

Toutes ces choses, intersections, affleurements ou figures, nous pouvons les concevoir se déplaçant et se transformant dans le plan sans restrictions ni limites. Mais nous ne les concevons qu'avec les deux dimensions de celui-ci; dans le sens de la troisième dimension, elles n'ont comme lui qu'une épaisseur, ou nulle, ou infiniment petite, selon que le plan est conçu de l'une ou de l'autre des deux façons indiquées au début. Enfin, elles ne sont pas des êtres réels, qualité qui est l'apanage des corps à trois dimensions.

Ce que le plan est dans l'espace, nous avons admis que celui-ci l'est à son tour dans l'étendue à quatre dimensions : il y est, vis-à-vis de la quatrième, comme *une tranche* (?) infiniment mince et absolument plate, comme *un plan* (?) qui serait infini suivant trois dimensions au lieu de l'être suivant deux seulement. Les mêmes conditions doivent être faites aux êtres qu'il contient. Chez tous, la *quatrième* dimension est nulle ou infiniment petite. Ceux qui ne sont pas des *figures* évoquées par notre pensée seront les *intersections* ou les *affleurements* de l'espace avec des *corps à quatre dimen-*

sions existant hors de lui au milieu d'êtres analogues disséminés dans l'étendue à quatre dimensions. *Ces derniers jouiront seuls de l'existence réelle*; tous les autres : ceux qui ont trois dimensions, ou les *solides,* ceux qui en ont deux, ou les *surfaces,* ceux qui n'en ont qu'une, ou les *lignes,* enfin, ceux qui n'en ont pas, ou les *points,* seront, comme on dit en philosophie, des *êtres de raison,* c'est-à-dire des abstractions n'existant que dans notre pensée. Ils pourront se déplacer et se transformer dans l'espace sans restrictions ni limites (cette fois, c'est à dessein que nous répétons les mêmes expressions), mais ils n'auront, comme lui, qu'une épaisseur nulle ou infiniment petite dans le sens de la quatrième dimension. Ils y seront *à la superficie* (¹) pour un œil qui regarderait l'espace comme nous pouvons regarder le plan qui est sous nos pieds.

En outre, l'espace ne sera plus une chose absolue, une entité unique et nécessaire, mais une simple unité au milieu d'une infinité d'autres, et il faudra dire : *notre espace*, pour spécifier celle de ces unités qui nous est dévolue. Qu'il les conçoive vides de toutes choses ou, comme le nôtre, peuplés d'univers, notre esprit ne peut *a priori* formuler aucune raison ni pour, ni contre l'existence de ces espaces congénères du nôtre, ni pour, ni contre celle de la vaste étendue qui embrasserait tout. L'observation n'en fournit pas davantage. Il semblerait donc que ce sujet doive être sans intérêt pour tout autre que le géomètre ou le métaphysicien; on verra cependant qu'il peut en être autrement, et que ces autres espaces, qui forment avec le nôtre une seule et même chose, qui ont avec lui la même continuité que les plans d'un espace ont entre eux, peuvent, en dépit des apparences, ne pas lui être complètement étrangers, et expliquent plusieurs des

---

(¹) Cette image sera précisée à la fin de l'Avant-propos (p. XXVIII).

grosses difficultés auxquelles se heurtent les sciences physiques.

C'est dans ce sens, pour revenir à notre premier mot, que nous appartenons au monde des quatre dimensions, *s'il existe*. Et, s'il existe, il est soumis aux lois de la Géométrie que nous allons esquisser, comme le nôtre est soumis, avec les petits champs qu'il englobe, à celles de la *Géométrie ordinaire*.

Anticipant un peu sur le développement logique des idées, et au risque peut-être de déconcerter quelques lecteurs, nous voulons citer dès à présent un exemple des modifications et des généralisations que la multiplication des champs apporte dans celle-ci : ce sont des résultats qui reparaîtront à leur place naturelle dans le Chapitre III.

1° Par un point donné *sur un plan*, on ne peut lui mener, *dans notre espace*, qu'*une seule* perpendiculaire; mais considérez ce plan *dans l'étendue :* vous pourrez alors lui mener, par le même point, *une infinité* de perpendiculaires, dont le lieu est *un autre plan* qui n'a que ce point commun avec le premier, et qui *n'a qu'une droite commune avec notre espace*; nous ne voyons, nous, que celle-là et nous l'appelons LA *droite perpendiculaire au plan*.

2° Prenez encore une droite quelconque; pour nous, le lieu des perpendiculaires qu'on peut lui élever en un de ses points est *un plan* P; pour le géomètre à quatre dimensions, c'est *un espace* qui n'a pas d'autre point commun avec la droite donnée, mais qui contient, avec le plan P, une infinité d'autres plans perpendiculaires aussi à cette droite; son intersection avec notre espace est le plan P, que nous appelons LE *plan perpendiculaire à la droite*, ne voyant pas les autres.

3° Enfin, et ce dernier point nous sera déjà utile dans cet Avant-propos, l'on peut, en un point quelconque *d'un espace*, lui élever une perpendiculaire; elle est unique et déterminée; elle est parallèle à toutes les autres droites qui sont perpendiculaires au même espace; et elle est perpendiculaire *à toutes les droites et à tous les plans* qu'on peut tracer par son pied dans celui-ci. L'on peut donc mener, par un point donné, *quatre* droites perpendiculaires entre elles, puisqu'on en peut déjà placer trois dans l'espace; celles-ci étant données, la quatrième s'ensuit, toujours la même et toujours déterminée.

On voit combien la Géométrie à quatre dimensions élargit et synthétise le Chapitre de la perpendicularité entre droites et plans; et elle en ajoute un nouveau sur la perpendicularité entre droites, plans et espaces.

II. — La non-perception.

Le lecteur vient d'entrevoir des *idées* et des *formes* qui lui auront sans doute paru singulières. Les premières seront précisées au moyen d'équations, qui ne seront que la continuation logique et naturelle de la Géométrie connue, et qui remplaceront, avec leur perfection coutumière, la terminologie que le langage ordinaire ne nous fournit pas suffisamment. Les mêmes équations définiront les secondes, qui, sous le nom générique d'*hypercorps*, et les noms spécifiques d'*hypersurfaces*, *polyédroïdes*, etc., sont déjà riches d'une littérature abondante.

On verra que ces configurations peuvent être représentées par des *projections sur notre espace*, au moyen de perpendiculaires abaissées des divers points du corps sur celui-ci, tout comme les corps de notre espace peuvent être, au moyen de perpendiculaires, représentés par des *projections sur un plan.* Des modèles en relief de pareilles projections, qui sont des *surfaces* ou des *polyèdres*, ont été construits en Allemagne et en Amérique, constructions coûteuses et encombrantes, auxquelles nous suppléerons par celles de la Géométrie descriptive (Chapitre VIII). Mais si, avec une projection sur un plan, encore mieux avec deux projections sur deux plans, on n'a guère de peine à constituer et à voir par la pensée le solide de l'espace, il est de toute impossibilité de remonter de la projection d'un corps à quatre dimensions à ce corps lui-même, *ni d'en concevoir les formes de quelque autre manière que ce soit. Notre esprit n'est pas capable de voir ces êtres avec des formes et dans des positions déterminées.* Aucune des images matérielles qui nous entourent ne nous fournit de point d'appui ni d'élément de comparaison.

S'il faut en croire l'auteur de *A new era of thought* (¹), l'impossibilité n'existerait pas pour tout le monde; voici son texte lui-même, car il nous a paru trop difficile à traduire :

« ...After many years of work, during which the conception
» of four-dimensional bodies lay absolutely dark, at length,
» by a certain change of the plan, the whole subject of four-
» dimensional existence became perfectly clear and easy to
» impart.

» There is really no more difficulty in conceiving four-
» dimensional shapes, when we go about in the right way,
» than in conceiving the idea of solid shapes, nor is there
» any mystery at all about it.

» When the faculty is acquired, or rather when it is brougth
» into consciousness, — for it exists in every one in imper-
» fect form — a new horizon opens. The mind acquires a
» development of power, and in this use of ampler space as

(¹) CH. HOWARD HINTON. Londres, 1883.

» a mode of thought, a path is opened by using that very
» truth which, when first stated by Kant, seemed to close
» the mind within such fast limits. Our perception is subject
» to the condition of being in space; but space is not limited
» as we at first think. »

Quelques rares joueurs d'échecs ont la faculté de *mener plusieurs parties simultanément et sans voir*. N'ayant pas même une feuille de papier pour prendre des notes, le joueur qui accomplit ce tour de force est placé de manière à ne pas voir ses adversaires, placés eux-mêmes devant autant d'échiquiers; un intermédiaire exécute sur ces échiquiers les mouvements ordonnés par lui, et lui fait connaître verbalement les réponses. C'est ce qu'on appelle le *Blindfold-play*. Philidor émerveilla ses contemporains en donnant des séances où il jouait ainsi *trois* parties contre les trois joueurs les plus renommés après lui, et quelques-uns de ces célèbres matchs nous ont été conservés. De nos jours, on a vu successivement, au lieu de trois parties, huit, douze, seize... et, tout récemment, *vingt-deux!*

Quand, après de longues heures, toutes les parties sont finies, en majorité gagnées par lui, le héros (on peut bien lui donner ce nom) est en mesure d'en répéter tous les coups, et ils se chiffrent par centaines! (1) Comment son cerveau opère-t-il? A cette question, quelques-uns répondent que c'est une affaire de mémoire et de méthode, presque tous qu'ils *regardent* un échiquier avec ses pièces, dessiné dans leur pensée *comme dans un miroir intérieur*, suivant

(1) *Voyez* BINET, *Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs*, Paris, 1894. — Le 14 décembre 1902, à Moscou, l'Américain Pillsbury a soutenu, dans ces conditions, *vingt-deux* parties; il en a gagné *dix-sept*, perdu *une*, annulé *quatre;* il a joué au total 675 coups en dix heures, sans voir!!! (Voy. *La Stratégie* de janvier 1903, aussi celle d'août 1902, etc.)

l'expression de Taine; ils vous en feront un croquis, si vous le désirez. Une pareille faculté nous étonne beaucoup, mais nous sommes bien forcés de l'admettre, parce que nous en possédons des exemples relativement nombreux; celle dont il est question dans les lignes ci-dessus nous paraît bien plus étonnante, et nous aimerions à en voir d'autres exemples que celui de leur auteur.

M. Poincaré a dit, ironiquement sans doute : « Quelqu'un » qui y consacrerait son existence, pourrait *peut-être* arriver » à se représenter la quatrième dimension [1] ».

Pour nous, nous avons déjà dit notre pensée. Elle est que le lecteur ne doit pas caresser l'espoir d'objectiver, comme le blindfold-player le fait avec les pièces de son échiquier mental, les êtres à quatre dimensions qui font l'objet de cette étude, ni les mouvements que nous leur imprimerons; qu'il épuiserait son cerveau dans de stériles efforts en cherchant à percer la tranche infinitésimale qui s'étend entre ces êtres et lui. S'il y a réellement quatre dimensions, notre esprit est confiné dans les trois premières. C'est l'axiome, *également d'ordre empirique,* qui remplacerait dans ce cas celui *des trois dimensions,* formulé au début de cet Avant-propos, et nous lui conserverons le même nom.

Une pareille limitation n'est pas spéciale à la branche qui nous occupe. Le mathématicien n'est-il pas dans une situation analogue vis-à-vis de choses devenues tout à fait classiques et dont il tire un excellent parti : — les *nombres infiniment grands* et les *figures infiniment éloignées*, dont nous ferons quelque usage, — les *racines imaginaires des équations* et les *figures imaginaires*, avec lesquelles nous n'aurons presque rien à

---

[1] *Revue générale des Sciences*, 1891, p. 774. — Cette boutade est expliquée et commentée par M. Poincaré dans une publication ultérieure : *L'espace et la Géométrie* (*Revue de Métaphysique et de Morale*, p. 631-646, 1895).

faire? Toutes ces choses, il les admet au sens abstrait, sans être obligé pour cela d'en admettre la réalité concrète, ni même de la discuter; il peut les créer à sa guise à la seule condition de ne pas se mettre en contradiction avec lui-même. Dans ce domaine, il est l'égal de Dieu : *Quidquid contradictionem non implicat, Deus potest* (Saint Thomas).

Sous ces réserves, nous parlerons habituellement de l'étendue et des êtres à quatre dimensions comme si ces choses existaient réellement. Le lecteur voudra bien, de son côté, excuser les expressions, les images et les constructions, impliquant cette existence réelle, dont nous ferons usage pour faciliter notre exposition.

III. — Les applications mathématiques.

La non-perception des corps qui sont à l'extérieur de notre espace n'empêche nullement d'établir leur géométrie, c'est-à-dire les relations descriptives et métriques qu'ils ont entre eux et avec ceux que nous connaissons, et même avec ceux qui, *de l'autre côté*, peuplent les étendues supérieures. Le lecteur qui nous suivra dans ces curieuses régions de la pensée, dans ce pays qu'on a appelé *la féerie des Mathématiques*, s'habituera vite aux étrangetés qu'il rencontrera, parce que ces étrangetés sont d'accord avec la plus rigoureuse logique. Nous ne chercherons d'ailleurs pas à les atténuer, pas plus que nous n'avons cherché à lui dissimuler la seule, mais réelle, difficulté de l'étude à laquelle nous le convions : celle de la non-perception.

Et il se rendra compte de l'utilité d'une pareille étude. Qu'on ne croie pas, en effet, que la Géométrie des dimensions multiples n'a qu'un intérêt intrinsèque, et n'est qu'un beau terrain d'exercices de gymnastique mathématique, clos de toutes parts. Elle a exercé une influence sur la Science tout entière, où elle a désormais sa place marquée. Elle a élargi les idées sur la Géométrie ordinaire, qui n'en est qu'un cas particulier; ouvert de nouveaux aperçus sur la dépendance entre les théories qui concernent respectivement le plan et l'espace; mis entre les mains du mathématicien des méthodes d'investigation insoupçonnées jusqu'alors; fourni de nombreux théorèmes au moyen du facile passage que certains artifices, appelés *projection*, *section*, *particularisation*, établissent entre un champ et ses subordonnés; enfin, rendu plus abordables, en fournissant des énoncés simples et expressifs à des choses compliquées et abstraites, certaines parties fort difficiles de la *Théorie des nombres*, de celle des *Fonctions algébriques*, de celle des *Substitutions*, etc.

Les Écoles d'aujourd'hui ont une tendance marquée, en Allemagne et en Italie plus encore qu'en France, à donner aux questions d'Algèbre la forme géométrique, à illustrer en quelque sorte, en les doublant d'une conception figurative, non seulement une relation entre des quantités pures, mais encore tout le corps de doctrine formé par un ensemble de pareilles relations. Les *Leçons* de Klein *sur l'Icosaèdre*, *faisant entrer* les *polyèdres réguliers* dans la *Théorie des Substitutions* et dans la question de la *Résolution des équations*, sont le modèle du genre [1]. On peut citer encore, du même auteur et dans le même ordre d'idées, les corrélations établies entre certaines configurations géométriques et la *Théorie des nombres* [2], qui est regardée comme ce qu'il y a de

---

[1] KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, in-8°, Leipzig, 1884.

[2] *Conférences sur les mathématiques faites au Congrès de Chicago*, recueillies par ZIWET, traduites par LAUGEL, grand in-8°. Paris, 1898 (8e conférence).

plus difficile, de laquelle on a dit que c'est la seule branche *pure*, non souillée encore par le contact avec les applications.

La Géométrie des dimensions multiples a le mérite de venir agrandir le champ dans lequel peut s'exercer cette tendance à *combiner* intimement ensemble la grandeur exprimée par des lettres et celle qui a la ligne pour élément, tendance qui dénote et satisfait un véritable sentiment artistique, en même temps qu'elle donne du sujet une notion plus étendue. Quand même on lui retirerait toute existence individuelle pour la réduire à ce dernier rôle et ne voir en elle, suivant l'expression de M. Badoureau (1), qu'une *métaphore de l'Algèbre générale*, le rôle serait encore d'une extrême utilité.

Les lignes suivantes, par lesquelles débute le livre de M. Poincaré sur l'*Analysis situs* (2), achèveront de la caractériser bien mieux que ce que nous pourrions faire.

« La Géométrie à n dimensions a un objet réel, personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de tout objet, il n'en est pas de même de l'Hypergéométrie.

» La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique *d'un groupe*. Rien

---

(1) *L'espace géométrique et les espaces algébriques* (*Revue scientifique* du 8 novembre 1890). On peut citer encore, bien qu'il n'y ait plus ici de combinaison proprement dite, mais de simples rapprochements, la *Théorie de la Toupie* de Klein, où cet instrument sert de support tour à tour à la Dynamique, aux fonctions elliptiques, aux quaternions etc. : *Théorie des Kreisels*, Tome I, 1897; Tome II, 1898; Tome III, à paraître.

(2) *Journal de l'École Polytechnique*, 1895.

n'empêche, par conséquent, d'aborder *d'autres groupes* (1).

» Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir? C'est que ce langage nouveau est plus concis; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles. »

Pour finir, tout se passe, *analytiquement, arithmétiquement*, *graphiquement*, comme si la quatrième dimension existait au même titre que les autres. Que peut-on lui demander de plus?

IV. — Les applications physiques.

Si le lecteur bienveillant nous accompagne jusqu'au bout, il verra les idées qu'il a recueillies sortir du domaine purement géométrique pour pénétrer dans celui des sciences physiques. Celui-ci se compose, il est vrai, d'êtres concrets, tandis que nous n'aurons manié jusque-là que des êtres de raison : le point et la droite, le plan avec tous les objets à une ou deux dimensions qu'il peut contenir, l'espace avec tous les siens à une, deux ou trois dimensions, ne sont pas autre chose, puisque nous avons reporté à ceux qui en ont quatre le privilège de l'existence réelle. Pour avoir le droit de les concevoir comme des êtres concrets, il n'y aura qu'à les *compléter à quatre dimensions en leur donnant celles qui leur manquent,* sous la condition que ces dernières aient une

(1) Le mot *Groupe* est employé ici dans le sens, tout à fait défini, introduit dans la science par Galois; *voir*, par exemple, le *Traité des Substitutions* de Jordan.

valeur négligeable comparativement à celles déjà existantes. Des portions d'espace, de plan ou de droite, et le point lui-même, seront ainsi des *portions d'étendue* ayant respectivement une, deux, trois ou quatre dimensions *très petites*. Nous ne disons plus *infiniment petites*, comme en Géométrie : nous n'aurions encore que des êtres abstraits. Il faut que les dimensions ajoutées soient finies, très petites si vous voulez, aussi petites qu'on pourra le désirer, plus petites que toute valeur finie qui pourra être indiquée, *mais finies*.

Revêtant ainsi la forme concrète, les principes de la Géométrie à quatre dimensions donneront une explication, incontrôlable à la vérité, mais éminemment simple et hautement rationnelle, de nombreux phénomènes dont ces sciences n'entrevoient même pas encore la cause directe.

Nous voulons parler de ceux pour lesquels l'ancienne Physique avait créé les vagues entités appelées *Agents impondérables*, non moins transcendantes ni moins intangibles que la quatrième dimension, et que la nouvelle Physique, s'éloignant peut-être du but au lieu de s'en rapprocher, veut expliquer rien qu'en les considérant comme des mouvements d'*atomes matériels*. Le problème qu'elle s'est posé devient bien plus facile à résoudre si, aux trois composantes de mouvements et de forces qu'elle peut appliquer déjà à ces atomes, il s'en ajoute une quatrième, dont nous avons fait entrevoir l'existence (p. XIII), suivant une direction perpendiculaire *à chacune de celles-là*; composante ne se distinguant en rien des premières et pouvant se combiner avec une d'elles pour former un système birectangulaire, avec deux pour former un système trirectangulaire, avec les trois pour former un système quadrirectangulaire ; apportant ainsi au physicien des facilités inespérées pour engendrer les vibrations multiples qu'il veut voir sous les mots *chaleur*, *lumière*, *électricité*, etc.

Quoi de plus simple que cette extension de la Mécanique, bien définie dans son principe, facile dans ses applications, riche dans ses conséquences? Avec cette unique composante, sœur de celles qui nous sont familières à tous, ne satisfait-elle pas à la première condition de toute explication scientifique : *Réduire au minimum le nombre des choses inconnaissables?* Que l'on compare à une pareille solution cette multitude touffue d'hypothèses arbitraires, artificielles, compliquées, contradictoires, improbables ou impossibles, toutes d'une admirable ingéniosité, mais ayant toutes, à l'un ou à l'autre bout, quelque chose que nous ne pouvons pas concevoir : la *matière sans forme* d'Aristote, l'*atome* « *rigide dans sa compacte unité* » de Lucrèce, l'*homéomérie* d'Anaxagore, la *matière subtile* de Descartes et sa *matière cannelée,* les *monades* de Leibnitz, les *centres de force* de Boscowitch, l'*éther élastique et solide* de Fresnel, l'*éther labile* de Thomson, l'*atome-tourbillon* du même, l'*atome palpitant* (*sphere pulsating*) de Hicks, les *électrons* de Larmor, etc.

On remarquera d'ailleurs que l'axiome des trois dimensions (p. VI), n'est nullement mis en cause ici, car, de nature purement empirique, il vise seulement les choses qui tombent sous nos sens. Or les choses hypothétiques que nous appelons *atomes et vibrations atomiques, molécules et mouvements moléculaires*, ne sont pas dans ce cas; la réalité qui peut se cacher sous ces mots, quelle qu'elle soit, échappe absolument à notre observation; nous ne saurions donc l'assimiler à aucun degré aux particules matérielles et aux déplacements, si menus soient-ils, que nous pouvons percevoir et qui ont mis en nous cet axiome.

D'autre part, le fait que la quatrième composante n'apparaît que dans le champ ultramicroscopique suggère l'idée que les corps de notre univers auraient tous une certaine épaisseur dans le sens de la quatrième dimension, mais que cette épaisseur serait extrêmement petite [1].

V. — Programme de l'Ouvrage.

A la tête des savants qui ont exploré et fécondé la Géométrie des dimensions multiples, il convient de citer :

En France, Suisse et Belgique : Camille Jordan, un des premiers en date et en importance, Halphen, Poincaré, Goursat, René de Saussure, Mansion ;

En Italie, où cette branche est fort en honneur et où brille de nos jours une riche pléiade de mathématiciens : Aschieri, Bertini, Cassini, Castelnuovo, Cesàro, Fano, Loria, d'Ovidio, del Pezzo, Pieri, Segre, Veronèse ;

En Espagne : Galdeano ;

En Allemagne, Norvège, Autriche et Hollande : Biermann, G. Cantor, S. Kantor, Kelling, Hoppe, Klein, Sophus Lie, Lipschitz, Puchta, Rudel, Schlegel, Schoute, Schubert, Simony, Van Oss ;

En Angleterre et aux États-Unis : Ball, Cayley, Cole, Hall, Heyl, Hinton, Lasker, Sylvester, Stringham, Spottiswoode, M^me Boole Stott.

Les publications sur la matière forment, dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1900, une liste de 439 articles, qui pourrait déjà être augmentée quelque peu. Ces travaux sont dispersés dans les recueils les plus variés, écrits dans toutes les langues, composés aux points de vue les plus disparates, et la plupart ne s'adressent qu'à des lecteurs rompus au maniement de l'instrument mathématique. Nous nous sommes proposé d'en réunir les principaux résultats en un

---

(1) *Voir* Chapitre IX.

ensemble méthodique, de lecture facile, de facture analogue à celle de nos Traités classiques sur la Géométrie.

La théorie générale des champs fait l'objet de la *Géométrie à n dimensions*. Mais les questions se compliquent singulièrement à mesure qu'on avance d'un champ à l'autre. Nous nous confinerons dans celui du quatrième degré, que nous avons appelé l'*Étendue*, qu'on appelle aussi l'*Hyperespace;* nous ne le franchirons qu'une fois et qu'un instant : dans le dernier Chapitre. Ce n'est pas qu'il soit indifférent de l'étudier en le considérant comme un terme d'une série illimitée, ou comme clôturant le théâtre des spéculations géométriques, ainsi que le faisait jusqu'ici la Géométrie à trois dimensions; c'est que le second parti, plus modeste, convient mieux à notre objet.

Deux méthodes principales peuvent être et ont été employées pour cette étude : celle de Descartes et celle de Grassmann. La seconde, plus simple dans ses calculs, plus puissante comme instrument, mieux adaptée à l'être géométrique, doit être préférée en thèse générale ([1]). La première, plus élémentaire et plus connue, suffira pour notre cas particulier, et nous l'emploierons avec ses procédés classiques.

La route pourrait être longue, mais nous l'abrégerons le plus possible. Des très nombreuses questions qui surgiront devant nous, quelques-unes seront peu intéressantes pour notre objet, qui est de *tracer une fidèle, mais rapide esquisse :* nous les mettrons délibérément de côté. D'autres

---

([1]) On en trouvera une excellente exposition par M. Carvallo dans *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1892, p. 8-37, et, si l'on veut voir l'application à l'hyperespace, on peut lire :

SCHLEGEL, *Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions*, dans *Bulletin de la Soc. math. de France*, 1882.

JOLY, *The associative Algebra applicable to Hyperespace*, dans *Proceedings of the R. Irish Academie*, 1878.

auront du charme et de l'attrait : nous ne craindrons pas trop de nous attarder dans leur voisinage. Il y en aura de faciles : nous prierons le lecteur d'en chercher lui-même les démonstrations ou les solutions. Plusieurs ne pourront être approfondies qu'avec les puissantes ressources dont disposent seuls les mathématiciens de premier ordre : pour celles-là, nous nous contenterons respectueusement d'une exploration superficielle. En général, nous ne nous attacherons pas aux difficultés de pure analyse, mais seulement à celles qui sont inhérentes à la quatrième dimension elle-même.

Nous ne nous occuperons point des espaces non euclidiens, c'est-à-dire des Géométries, quel que soit le nombre de leurs dimensions, où l'on peut, par un point donné dans un plan, mener plus d'une parallèle à une droite donnée de ce plan (Lobatchewsky), et de celles où l'on n'en peut mener aucune (Riemann) [1].

Nous laisserons également de côté la Mécanique.

Les notions professées dans les premières leçons de *Géométrie analytique*, voilà dès lors tout le bagage nécessaire à la personne qui nous suivra, et elle n'aura pas, nous osons l'espérer, à déployer cette attention soutenue et laborieuse que demandent souvent les Ouvrages de Mathématiques. En vue de ce résultat, nous avons lutté avec l'aridité du sujet pour tâcher de donner à la Géométrie, sans rien lui ôter de la précision dont elle est fière, un langage un peu plus imagé que celui dont elle se sert habituellement.

Beaucoup de points seront d'ailleurs facilités par des représentations graphiques, et ceci n'est peut-être pas un des moindres étonnements réservés au lecteur. L'être géomé-

---

[1] On peut voir sur ces Géométries : *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique,* par DE TILLY, major d'artillerie, Bruxelles, 1879; *Fondamenti di Geometria,* par VERONESE, Padoue, 1891.

trique à quatre dimensions, qui se dérobe si bien aux efforts de la pensée, semblerait devoir échapper de même à tout autre mode de représentation. Il est au contraire saisi, aussi entièrement qu'on peut le désirer, par une *Géométrie descriptive* à base quadridimensionnelle, mais à constructions planes comme celle de Monge, avec toutefois plus de simplicité et d'élégance. C'est au point que certaines questions traitées par l'épure gagneraient, comme nous l'avons vu pour d'autres d'ordre abstrait, à être élargies, puis transportées de l'espace dans l'étendue. Cette différence en faveur d'une des deux Géométries descriptives a sans doute sa raison dans la symétrie que le nombre *quatre* porte avec lui, et qu'on remarquera surtout au sujet des *rotations* (§ 15), si singulières dans le monde où nous allons entrer.

Nous citerons nos sources. Nous indiquerons, autant que possible, les endroits où l'on pourra trouver les développements devant lesquels nous aurons reculé, nous contentant alors d'ouvrir une fenêtre sur le vaste horizon, et de montrer les voies de pénétration [1].

Peut-être trouvera-t-on que nous citons plus d'auteurs étrangers que d'auteurs français. C'est que, précisément, notre sujet a été beaucoup plus cultivé par les premiers; il est du reste moins facile au lecteur de les étudier par lui-même, ne serait-ce qu'à raison de la différence de langue.

Tout en prenant un peu plus d'indépendance que si nous écrivions un Traité rigoureusement didactique, nous avons

---

[1] La plupart des travaux auxquels nous renvoyons sont contenus dans des recueils académiques, des publications périodiques, etc., dont le titre est souvent assez long. Dans le courant de l'Ouvrage, où la plupart se trouvent répétés plusieurs fois, nous mentionnerons ces titres sous une forme abrégée, mais nous les donneron *in extenso* dans une liste récapitulative placée à la fin (p. 209).

voulu néanmoins présenter un ensemble méthodique et logique, où il n'y ait ni trop de lacunes, ni trop de superfluités, dont la lecture soit à la fois facile et profitable. *Facile*, on vient de voir dans quelle mesure; *profitable*, parce qu'une fois mise de côté l'utopie — ce mot ne fut peut-être jamais mieux à sa place — il doit rester de notre petit livre un certain nombre de faits généraux, de particularisations, d'idées synthétiques, de méthodes de raisonnement... intéressant les Géométries classiques. Il y aura probablement aussi quelques erreurs, car le passage des trois aux quatre dimensions n'est pas toujours aussi facile et intuitif que ce qu'on pourrait croire (1) : le lecteur voudra bien les mettre tout simplement de côté.

Quoi qu'il en soit, voici quelles seront les principales étapes de notre voyage dans l'hyperespace :

I. — Définitions.
II. — Intersections et parallélisme.
III. — Perpendicularité.
IV. — Quelques théorèmes.
V. — Système de coordonnées.
VI. — Les angles.
VII. — Les êtres de la Géométrie à quatre dimensions.
VIII. — Les polyédroïdes réguliers.
IX. — Les applications.
X. — Hors de l'étendue.

Avant d'entrer en matière, nous insistons pour qu'on n'oublie pas le sens précis que nous donnons à chacun des mots, ESPACE et ÉTENDUE, la distinction essentielle et rigoureuse que nous faisons entre eux et que nous n'oublierons pas de

---

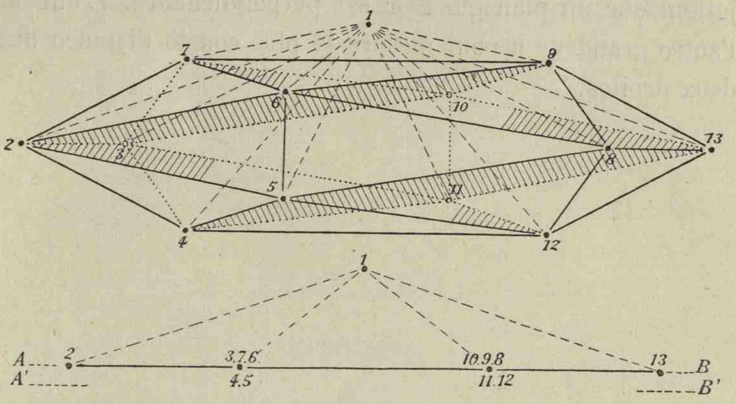
(1) On peut citer comme exemples d'un pareil passage : 1° la question du *Système de coordonnées*, qui en est un des cas les plus simples (§ 20); 2° celle des *Polyèdres* (§ 36), un peu plus compliquée.

notre côté : Celui-là est à celle-ci ce que le plan est à l'espace dans la Géométrie à trois dimensions, ce que la droite est au plan dans celle à deux, ce que le contenu est au contenant dans le langage ordinaire; la droite, le plan et l'espace ne sont que des portions élémentaires, respectivement, du plan, de l'espace et de l'étendue.

Nous voudrions surtout que le lecteur se pénètre bien de ce dernier point, c'est-à-dire de la *conception de l'espace comme élément infinitésimal de l'étendue*. Voici une dernière image qui contribuera peut-être à parfaire ce résultat. Comme la droite est divisée en deux parties infinies égales par un quelconque de ses points; comme le plan l'est de même par une quelconque de ses droites et l'espace par un quelconque de ses plans; ainsi tout espace partage l'étendue en deux régions infinies, qui sont identiques entre elles, qui reposent sur lui de chaque côté, et entre lesquelles il forme une couche *infiniment mince*.

Ce fait n'est nullement une fiction analytique : nos épures du Chapitre VIII lui donneront un corps et le feront toucher du doigt matériellement. Si l'on jette les yeux sur ces épures, on constatera nombre de fois qu'en effet tous les points, droites et plans situés dans un même espace se projettent *sur une seule et même droite* quand cet espace est, relativement au plan de projection, dans une certaine position qui sera définie (Chapitres III et IV) par le mot *perpendiculaire*. Que l'on prenne, par exemple, les deux figures suivantes, fragments de deux épures du § 46. Ce sont les projections d'un *icosaèdre régulier* dont l'espace E se trouve dans cette position pour la seconde et en est voisin pour la première. Déjà fort diminuées dans celle-ci, les dimensions transversales de l'icosaèdre s'évanouissent dans la seconde : la projection n'y est plus qu'une droite 2-13, laquelle recevrait aussi tous les autres points de l'espace E (¹). Un œil placé au point 1, hors de l'espace E, verrait au même niveau, comme nous le disions plus haut, toutes les parties du solide, tant intérieures qu'exté-

Fig. 1.



rieures; aucune ne lui serait cachée par les autres, parce qu'*aucune des directions joignant deux points quelconques du corps ne sort de l'espace* E et, par conséquent, ne peut coïncider avec celles 1-2, 1-3, 1-4, etc., du regard supposé. Il y aurait, entre la manière dont ce regard et le nôtre verraient l'icosaèdre, la même différence qu'entre la manière dont un *polygone* serait vu par un œil confiné dans son plan et par le nôtre.

On doit maintenant bien comprendre le sens de cette expression que nous employons faute d'autre : *une épaisseur*

(¹) On peut remarquer dès à présent, à l'inspection de ces figures, les différences que présentent les *formes* des projections dans la *Géométrie descriptive à quatre dimensions* et dans *celle à trois :* dans celle-ci, la figure supérieure ne peut pas être la projection d'un icosaèdre régulier, et la figure inférieure ne saurait être celle d'aucun polyèdre. — Quatre des six *pentagones* de l'icosaèdre (comp. la fig. 19, p. 110) ont été couverts de hachures dans la première figure tout simplement pour les faire remarquer et faciliter ainsi l'intelligence de cette figure. — On verra, § 25, pourquoi les deux pentagones transversaux 3.4.5.6.7 et 8.9.10.11.12 se projettent chacun en un point unique dans la seconde figure.

dans le sens de la quatrième dimension; c'est la portion d'étendue comprise entre deux espaces parallèles AB, A′B′. Elle correspond à la portion du plan comprise entre les deux droites parallèles suivant lesquelles ces deux espaces se projettent sur un plan qui leur est perpendiculaire. L'une et l'autre grandeur a pour mesure la plus courte distance des deux droites.

TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
A QUATRE DIMENSIONS.

CHAPITRE I.
DÉFINITIONS.

§ 1. — Les champs.

Nous avons vu que, sur le terrain purement géométrique, notre esprit éprouve quelque difficulté à juxtaposer des espaces pour former cet ensemble supérieur que nous avons appelé l'*Étendue*, comme il juxtapose des points pour faire une droite, des droites pour faire un plan, des plans pour faire un espace. Sur le terrain analytique, le quatrième pas se franchit aussi facilement et aussi naturellement que les premiers.

Comme la Géométrie analytique à deux dimensions et celle à trois, la Géométrie à quatre dimensions prend *le point* pour l'être analytique primordial. Et, tandis que la première le définit au moyen de *deux* coordonnées

$$x_1,\quad x_2$$

rapportées à un système de *deux droites se coupant;* tandis que la seconde le définit au moyen de *trois* coordonnées

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3$$

rapportées à un système de *trois plans se coupant;* elle emploie *quatre* coordonnées

$$(a) \qquad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4.$$

On devine de suite, en poursuivant l'analogie, qu'elle va les rapporter à un système de *quatre espaces se coupant*. Mais, précisément à raison de la difficulté que présente la conception de la multiplicité des espaces, nous voulons laisser provisoirement de côté la question du système de référence. Nous n'y viendrons qu'au Chapitre V, après avoir établi toutes les notions fondamentales, et ce sont celles-ci qui nous le donneront elles-mêmes.

De plus, nous substituons à nos quatre coordonnées *quatre équations linéaires simultanées*

$$(1) \qquad \begin{cases} A = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0, \\ B = b_0 + b_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ C = c_0 + c_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ D = d_0 + d_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{cases}$$

les reliant entre elles et assujetties à la condition d'être distinctes les uns des autres et non incompatibles entre elles (c'est-à-dire d'avoir un déterminant différent de zéro). Sous cette condition, le système (1) est équivalent au système (a), puisque sa résolution donnerait quatre valeurs déterminées x_1, x_2, x_3, x_4; nous l'écrirons habituellement ainsi, sur une seule ligne :

$$(1) \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad D = 0.$$

On appelle donc *point* l'être géométrique, *quel qu'il soit* et sous quelque forme qu'on veuille se le représenter, qui correspond à quatre valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 appelées *coordonnées* et satisfaisant aux équations (1).

On appelle en outre *droite* le lieu des points dont les coordonnées satisfont à trois de ces équations :

$$(2) \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0;$$

plan, le lieu des points dont les coordonnées satisfont à deux :

$$(3) \qquad A = 0, \qquad B = 0;$$

espace, le lieu des points dont les coordonnées satisfont à une :

$$(4) \qquad A = 0;$$

enfin *étendue,* le lieu des points que l'on peut obtenir en donnant aux quatre coordonnées des valeurs quelconques, sans aucune condition. L'étendue se présente ordinairement sous la forme

$$(5) \qquad A + \lambda = 0,$$

λ désignant une indéterminée.

Les systèmes (1), (2), (3), (4) s'appellent respectivement *les équations du point, de la droite, du plan et de l'espace.* Nous comprendrons les trois dernières sortes d'êtres géométriques sous le nom générique de *champ.* Il y a une multitude infinie de champs de chaque sorte, et ils sont tous plongés dans l'étendue, qui est le contenant de toutes les configurations imaginables.

La *droite,* champ du premier degré, contient un ∞ de points, les points étant supposés, dans cette image, séparés les uns des autres par un intervalle fini quelconque. Le *plan,* champ du second degré, peut être considéré comme engendré par une droite se déplaçant parallèlement à elle-même pendant qu'un de ses points suit une autre droite qui est fixe; il contient par suite un ∞^2 de points. L'*espace,* champ du troisième degré, peut être considéré comme engendré par un plan se déplaçant parallèlement à lui-même pendant qu'un de ses points suit une droite fixe qui ne s'y trouvait pas contenue au départ; il contient un ∞^3 de points. Enfin l'*étendue* peut être considérée comme engendrée par un espace se déplaçant parallèlement à lui-même pendant qu'un de ses points suit une droite fixe qui ne s'y trouvait pas contenue au départ; elle contient un ∞^4 de points.

Ces propositions, qu'on donne quelquefois comme des définitions, seront démontrées plus loin (§ 4), c'est-à-dire ramenées aux définitions que nous avons données et qu'expriment les équations (2), (3), (4) et (5). Nous les en rapprochons afin que le lecteur puisse, de suite, rapporter les bases de la nouvelle géométrie aux deux formes qui lui sont le plus familières. Elles montrent ce qu'il faut entendre quand on dit que la droite a une dimension, que le plan en a deux, l'espace trois et l'étendue quatre : ces nombres sont les exposants qui affectent le symbole ∞ dans leur énoncé, et correspondent, pour les trois premiers, aux idées de longueur, de surface et de volume qu'ils évoquent.

Considéré sur une droite, le point a *un* degré de liberté ; il en a *deux* dans un plan, *trois* dans un espace et *quatre* dans l'étendue.

Souvent on considère :

Le point, comme un élément de droite, et l'on dit qu'il a une longueur infiniment petite dx_1 ;

La droite, comme un élément de plan et l'on dit qu'elle a une seconde dimension infiniment petite dx_2 ;

Le plan, comme un élément d'espace, et l'on dit qu'il a une troisième dimension infiniment petite dx_3 ;

L'espace, comme un élément de l'étendue, et l'on dit qu'il a une quatrième dimension infiniment petite dx_4.

En un mot, au lieu de dire de la droite, du plan et de l'espace *qu'il leur manque* trois, deux ou une dimension, on dit alors qu'ils ont ces trois, deux, ou une dimension, *infiniment petites.*

§ 2. — Espaces générateurs.

Si l'on prend les équations (3) d'un plan et qu'on les combine linéairement, on obtient une infinité d'équations de la forme

$$A + \beta B = 0, \tag{6}$$

β désignant une indéterminée. Les espaces représentés par ces équations ont le plan pour intersection commune, et nous les appellerons les *espaces générateurs* de ce plan. Leur ensemble s'appelle un *faisceau d'espaces.*

Si l'on prend les équations (3) d'une droite D, et qu'on les combine linéairement, on obtient une infinité d'autres équations de la forme

$$A + \beta B + \gamma C = 0; \tag{7}$$

les espaces représentés par ces équations ont la droite D commune, et nous les appellerons ses *espaces générateurs.* Ils se coupent deux à deux suivant une infinité de plans contenant aussi la droite D, et qu'on pourra appeler ses *plans générateurs.*

D'autre part : 1° Si l'on joint à l'équation $A = 0$ d'un espace A, une autre équation $B = 0$, ou deux autres équations $B = 0$, $C = 0$, on aura, dans le premier cas un plan, dans le second une droite, qui seront contenus en entier dans l'espace A ; nous dirons que les plans et les droites ainsi obtenus sont *les plans et les droites de* A; 2° Si l'on joint aux équations A = o, B = o, d'un plan P, une troisième équation C = o, on obtient l'équation d'une droite contenue en entier dans le plan P, et nous dirons de toutes les droites ainsi obtenues que ce sont *les droites du plan* P.

L'observation qui suit est de nature à abréger souvent les raisonnements et les calculs.

En plus des *quatre coordonnées courantes,* toute question comporte des grandeurs qui sont déterminées invariablement et qu'on appelle *les données,* ou les *constantes;* d'autres qui ne le sont pas et qu'on appelle *les arbitraires, les indéterminées,* ou *les inconnues.* La position de la question conduit à établir entre ces trois catégories de grandeurs des *équations de condition,* et c'est en éliminant de celles-ci les grandeurs de la troisième catégorie qu'on obtient le résultat cherché. Ce résultat n'est autre qu'un des systèmes (1) à (5), et, s'il n'a pas besoin d'être précisé numériquement, on pourra se dispenser de faire les calculs de l'élimination en appliquant le théorème suivant dont une première application se rencontrera au § 7.

Lorsque les quatre coordonnées courantes x_1, x_2, x_3, x_4 sont engagées dans un système de m équations linéaires en compagnie de valeurs arbitraires au nombre de

$m-4$, le système représente		....	un point,
$m-3$,	» »	....	une droite,
$m-2$,	» »	....	un plan,
$m-1$,	» »	....	un espace,
m, ou davantage,	»	....	l'étendue;

car l'élimination des arbitraires donnerait, dans les cinq cas, respectivement, 4, 3, 2, 1 ou o équations entre les coordonnées.

§ 3. — Conditions déterminatives.

Un espace est déterminé quand on donne quatre points qu'il doit contenir. — L'équation (4) contient, en effet, quatre paramètres, qui sont les rapports de quatre de ses coefficients au cinquième, et, si l'on y substitue successivement les coordonnées des quatre points donnés, on obtient quatre équations de condition qui déterminent ces quatre paramètres.

Il n'y a pas de contradiction entre cette conclusion et le fait qu'en vertu des équations (1) quatre points impliquent *seize* constantes. Quand il est dans un espace, chaque point a encore trois *paramètres de détermination*; des seize constantes, il en reste donc seulement $16 - 12 = 4$ essentielles.

Un plan est déterminé par trois points. — Considérons en effet un espace quelconque assujetti à passer par ces trois points. Cette condition donne, entre les quatre paramètres de l'équation générale (4), trois relations linéaires; éliminant trois coefficients au moyen de ces équations de condition, il reste dans l'équation de l'espace un coefficient arbitraire. Elle est donc de la forme (6)

$$A + \beta B = 0,$$

et le plan $A = 0$, $B = 0$, intersection commune de tous les espaces qu'elle représente, passe par les trois points donnés.

Bien que les équations $A = 0$, $B = 0$ comportent ensemble huit constantes, le plan n'en demande en réalité que *six* pour être déterminé. En effet, toute combinaison linéaire de ces équations définit le même plan, de sorte qu'on peut leur substituer ces deux-ci :

$$A + \beta B = 0, \qquad A + \beta' B = 0;$$

il y a donc deux constantes arbitraires qu'il faut retrancher des huit constantes déterminant séparément les deux espaces, et il en reste six.

Ces six constantes essentielles correspondent au fait que le plan est déterminé par trois points, et que chacun d'eux y a deux degrés de liberté.

Deux points déterminent une droite. — Ensemble, ils impliquent huit constantes, mais, comme chacun a un degré de liberté sur la droite, il en reste *six* essentielles. En se reportant aux équations générales de la droite, qui sont les équations (2), on voit aussi qu'elles contiennent ensemble *douze* constantes; mais on peut les remplacer par trois équations telles que les équations (7), contenant chacune deux paramètres arbitraires, et il reste ce même nombre de $12 - 3 \times 2 = 6$.

Enfin, *le point*, avec ses quatre coordonnées, dépend de quatre conditions.

En résumé :

Un espace	est déterminé par	4	conditions	,
Un plan	»	6	»	,
Une droite	»	6	»	,
Un point	»	4	»	;

on remarquera la symétrie de ces nombres, sur laquelle nous aurons occasion de revenir (§§ **8** et **19**).

CHAPITRE II.

INTERSECTIONS ET PARALLÉLISME.

§ 4. — Un espace et les autres champs.

Pour l'étude des intersections, nous avons à considérer successivement les diverses manières dont les champs peuvent être associés deux à deux, savoir :

Deux espaces,
Un espace et un plan,
Un espace et une droite;
Deux plans;
Un plan et une droite,
Deux droites.

On verra que, sauf trois catégories de cas particuliers, qui sont : la *coïncidence,* le *parallélisme* et la *présence simultanée dans un même champ,* l'intersection est un plan dans le premier cas, une droite dans le second, un point dans les troisième et quatrième, non existante dans les cinquième et sixième. Dans ces deux derniers cas, les deux champs ont une *plus courte distance,* question que nous ne faisons qu'indiquer parce qu'elle ne comporte que des calculs et ne présente pas de difficulté spéciale provenant de la quatrième dimension; elle se placerait après le Chapitre de la perpendicularité.

La discussion conduisant à ces résultats repose sur les faits suivants, acquis dans le premier Chapitre : Une équation linéaire unique entre les quatre coordonnées représente un espace. Deux, trois ou quatre de ces équations représentent deux, trois ou quatre espaces si elles sont indépendantes, et alors elles seront écrites sur des lignes différentes. Elles représentent, dans ces trois cas respectivement, un plan, une droite ou un point si elles doivent être satisfaites ensemble, et alors elles seront écrites sur la même ligne ou réunies par une accolade. Enfin la simultanéité de plus de quatre équations ne peut avoir lieu, à moins qu'elles ne rentrent les unes dans les autres.

I. — DEUX ESPACES.

L'intersection de deux espaces $A = 0$ et $B = 0$ est représentée par l'ensemble de ces deux équations :

$$A = 0, \qquad B = 0,$$

et par conséquent est un plan. Mais il faut excepter les cas où l'on aurait

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4};$$

alors les deux équations, ou sont incompatibles, ou rentrent l'une dans l'autre.

C'est le second cas si le rapport $\frac{a_0}{b_0}$ a la même valeur que les autres. Alors, en désignant cette valeur par λ, la seconde équation se présente sous la forme

$$B = \lambda A = 0$$

et ne diffère pas de la première ; on dit que les deux espaces sont *coïncidents*.

C'est le premier cas si le rapport $\frac{a_0}{b_0}$ n'a pas la même valeur que les autres. Alors, en désignant par α une valeur différente de zéro, le polynome B se présente sous la forme $B = \lambda A + \alpha$, et la seconde équation revient au même que

$$B = A + \alpha = 0,$$

car rien n'empêche de remplacer l'équation primitive $A = 0$ par $\lambda A = 0$. Dans ce cas, les deux espaces n'ont pas de point commun, et l'on dit qu'ils sont *parallèles*.

Pour donner une application, démontrons les trois propositions énoncées au § 2, relativement à la génération du plan, de l'espace et de l'étendue, respectivement, par une droite, un plan et un espace se déplaçant parallèlement à eux-mêmes pendant qu'un de leurs points suit une droite fixe. Supposons d'abord que c'est une droite D, c'est-à-dire le champ du premier degré, représenté par les *trois* équations (2).

Puisqu'elle demeure parallèle à elle-même, tous les coefficients des coordonnées dans les trois équations sont des *constantes* et les termes portant l'indice zéro sont des *arbitraires*, au nombre de 3. Il faut exprimer :

1° Que la droite D passe par un certain point *variable* M, c'est-à-dire que ses équations sont satisfaites quand on y substitue les *quatre* coordonnées de ce point; cela donne trois équations de condition et porte à 6 le nombre des équations, à 7 celui des arbitraires;

2° Que le point M est toujours sur une droite *fixe*, c'est-à-dire que ses quatre coordonnées satisfont aux trois équations de celle-ci; le nombre des arbitraires n'est pas changé, mais celui des équations est porté à 9.

Nous avons donc, en définitive, un système de neuf équations dans lequel il y a sept arbitraires; la différence de ces nombres étant 2, le lieu est *un plan*, suivant le petit Tableau qui termine le § 2.

Si le champ mobile est un plan, le nombre primitif des équations est 2 et celui des arbitraires 2; ces nombres deviennent respectivement 4 et 6 dans 1°, 7 et 6 dans 2°; la différence finale est 1, ce qui veut dire que le lieu est *un espace*.

Si le champ mobile est un espace, on part avec 1 équation et 1 arbitraire; on porte ces nombres à 2 et 5 dans 1°, à 5 et 5 dans 2°, et, comme ces derniers sont égaux, le lieu n'est autre chose que l'*étendue*.

II. — UN ESPACE ET UN PLAN.

L'intersection d'un espace

$$A = 0$$

et d'un plan

$$B = 0, \qquad C = 0,$$

représentée par les trois équations réunies, est une droite. Mais il faut pour cela que l'espace ne soit parallèle à aucun des espaces générateurs du plan, lesquels sont donnés par l'équation générale

$$B + \gamma C = 0.$$

Ce parallélisme se réaliserait s'il était possible de satisfaire aux équations

$$\frac{b_1 + \gamma c_1}{a_1} = \frac{b_2 + \gamma c_2}{a_2} = \frac{b_3 + \gamma c_3}{a_3} = \frac{b_4 + \gamma c_4}{a_4} = \alpha.$$

Il n'en sera ainsi que pour certaines combinaisons particulières de valeurs des coefficients a, b, c, d, puisqu'on n'a que deux arbitraires α, γ pour quatre équations de condition. Dans ces cas particuliers, l'espace et le plan sont parallèles, et s'il se trouve qu'on ait aussi

$$\frac{b_0 + \gamma c_0}{a_0} = \alpha,$$

tous les points du second coïncideront avec des points du premier, ce qu'on exprime en disant qu'*il y est compris*.

III. — UN ESPACE ET UNE DROITE.

On verra de la même manière que l'intersection d'un espace et d'une droite est un point, mais que la droite peut être parallèle à l'espace ou y être contenue.

Il résulte de ce qui précède que l'intersection de *trois espaces* est une droite et celle de *quatre espaces* un point.

§ 5. — **Deux plans.**

Deux plans

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

se coupent en un point, qui est l'intersection des quatre espaces. Pour qu'un espace générateur du premier

$$A + \beta B = 0$$

et un espace générateur du second

$$C + \delta D = 0$$

soient parallèles entre eux, il faut que

$$\frac{a_1 + \beta b_1}{c_1 + \delta d_1} = \ldots = \ldots = \frac{a_4 + \beta b_4}{c_4 + \delta d_4} = \alpha,$$

et, comme cela fait quatre équations de condition pour trois arbitraires β, δ, α, le parallélisme en question n'existera généralement pas. Si toutefois les coefficients a, b, c, d sont tels que ces quatre équations se réduisent à trois distinctes, il y aura deux espaces générateurs parallèles appartenant, l'un au premier plan, l'autre au second, et ceux-ci n'auront pas de point commun, au moins à distance finie.

Si l'on a en outre

$$\frac{a_0 + \beta b_0}{c_0 + \delta d_0} = \alpha,$$

ces deux espaces générateurs parallèles seront coïncidents : les deux plans se trouveront dans un même espace à trois dimensions et, comme on sait, ou ils se couperont suivant une ligne droite, ou ils seront parallèles, ou ils seront confondus en un seul.

Si l'on veut formuler la condition pour que deux plans se coupent suivant une droite et non suivant un point, il faut écrire que la solution des quatre équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$: c'est une question de *déterminants*.

§ 6. — Plans et droites.

I. *Un plan et une droite.* — Dans le cas d'un plan et d'une droite

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C = 0, \\ D = 0, \\ E = 0, \end{cases}$$

le nombre des équations est supérieur à celui des coordonnées, et il ne saurait être question d'intersection si elles sont distinctes.

Il y aura généralement, dans ce cas, un espace générateur du plan, savoir

$$A + \beta B = 0$$

et un espace générateur de la droite, savoir

$$C + \delta D + \varepsilon E = 0$$

qui seront parallèles. Car si l'on pose

$$\frac{a_1 + \beta b_1}{c_1 + \delta d_1 + \varepsilon e_1} = \ldots = \ldots = \frac{a_4 + \beta b_4}{c_4 + \delta d_4 + \varepsilon e_4} = \alpha,$$

le nombre de ces équations de condition se trouve juste égal à celui des arbitraires α, β, δ, ε. Si, après avoir déterminé celles-ci, il se trouve qu'on ait aussi

$$\frac{a_0 + \beta b_0}{c_0 + \delta d_0 + \varepsilon e_0} = \alpha,$$

les deux espaces générateurs parallèles coïncideront, la droite se trouvera avec le plan dans un même espace à trois dimensions, et elle pourra le couper, ou lui être parallèle, ou s'y trouver comprise.

II. *Deux droites.* — Dans ce dernier cas, on a les équations

$$\left\{\begin{array}{l} A = 0, \\ B = 0, \\ C = 0, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} D = 0, \\ E = 0, \\ F = 0. \end{array}\right.$$

Ici encore, il ne saurait être question d'intersection ou de parallélisme, en thèse générale. Mais cette fois tout espace générateur d'une des deux droites a un parallèle parmi ceux de l'autre. En effet, pour que deux espaces générateurs

$$A + \beta B + \gamma C = 0,$$
$$D + \varepsilon E + \varphi F = 0$$

soient parallèles, il suffit qu'on puisse satisfaire aux équations

$$\frac{a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1}{d_1 + \varepsilon e_1 + \varphi f_1} = \ldots = \ldots = \ldots \frac{a_4 + \beta b_4 + \gamma c_4}{d_4 + \varepsilon e_4 + \varphi f_4} = \alpha,$$

ce qui sera toujours possible, puisqu'elles sont au nombre de *quatre* et comportent *cinq* arbitraires α, β, γ, ε, φ. On pourra même, à raison de l'arbitraire en plus, satisfaire en même temps à l'équation

$$\frac{a + \beta b + \gamma c}{d + \varepsilon e + \lambda f} = \alpha$$

et avoir ainsi un espace générateur qui contienne à la fois les deux droites. Il suit de là que *tout système de deux droites se trouve entièrement dans un certain espace* (champ du troisième degré) et par conséquent, si on le considère seul, ne relève que de la géométrie à trois dimensions. On sait par celle-ci, et il serait facile de démontrer en restant dans notre méthode d'exposition, que les deux droites n'ont pas d'intersection si elles ne sont pas dans un même plan et qu'alors elles peuvent se couper ou être parallèles.

§ 7. — Les figures infiniment éloignées.

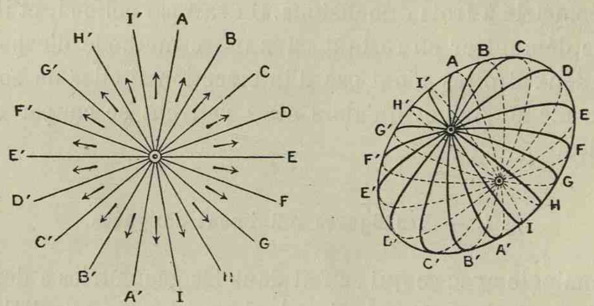
Par analogie avec ce qui se fait dans les géométries à deux et à trois dimensions, on peut dire de deux champs parallèles que leur intersection est *à l'infini*. Dans cette manière de voir, il faut considérer le lieu des points de l'étendue situés à l'infini comme étant *un espace* E. Cela résulte de ce que, si l'on porte dans l'équation générale $A = 0$ de l'espace, les valeurs $x_1 = \infty$, $x_2 = \infty$..., il suffit, pour la satisfaire, de donner à a_0 une des deux valeurs $\pm\infty$, et cela quels que soient les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4. En sorte qu'un espace *quelconque* dont quatre points s'éloignent indéfiniment a toujours pour limite le même espace E, défini par l'unique paramètre $a_0 = \infty$, les autres étant arbitraires.

Il suit de là que le lieu des points d'un espace situés à l'infini est un *plan,* que celui des points d'un plan situés à l'infini est *une droite,* et qu'une droite possède à l'infini un *point unique;* car ces divers lieux ne sont autre chose que les intersections respectives d'un espace, d'un plan, d'une droite, avec un espace : celui que nous avons désigné par E et appelé le *lieu des points de l'étendue situés à l'infini.*

Comme ces résultats ont une apparence quelque peu paradoxale, il convient d'examiner la chose de près et de bien s'en rendre compte.

Pour cela, prenons un point quelconque r dans un plan P, et faisons en partir des rayons suivant toutes les directions possibles, deux rayons opposés formant ensemble une droite. Le lieu δ des points situés à l'infini sur ces rayons est bien une droite, mais non la droite *ordinaire, ouverte,* ou *euclidienne,* que nous avons considérée jusqu'ici et que l'on considère habituellement. C'est la droite *complète,* ou *fermée,* ou *riemanienne,* entourant le plan comme ferait une circonférence de cercle (*fig.* 2), mais ne

Fig. 2.



devant pas être confondue avec cette courbe. Car elle est bien du premier degré. Deux points la déterminent (il en faut trois pour une circonférence), à moins que ce ne soient deux points opposés, c'est-à-dire la partageant en deux parties égales et correspondant à deux rayons opposés du faisceau r : deux pareils points ne doivent être comptés que pour un. Cette droite qui entoure le plan, et que nous appellerons δ, doit être rapportée à une unité U, infinie du premier ordre relativement à l'unité u qui sert dans la région finie.

La figure 2, purement schématique bien entendu, représente cette droite. D'un côté, le faisceau r, pris dans la région finie du plan; de l'autre, la droite ABC...A'B'C'... avec ses points opposés deux à deux, en correspondance univoque avec les rayons A, B, C... A', B', C'.

Supposons maintenant que le point r se déplace et coïncide successivement avec tous les point de la *région finie* du plan P. La droite δ se déplacera de même, et c'est le lieu de toutes ses positions qu'on appelle la *région infinie du plan.* Ce lieu est évidemment à deux dimensions, comme le plan P lui-même.

Mais une des dimensions, celle qui correspond aux déplacements de la droite δ, est du même ordre de grandeur que les déplacements de r, c'est-à-dire finie; elle est donc infiniment petite relativement à l'autre dimension et à l'unité U. Conformément aux lois de la hiérarchie infinitésimale, elle s'efface devant elles, et c'est dans ce sens qu'on dit que la région infinie du plan est une droite : la droite fermée, mais pouvant être remplacée à beaucoup d'égards par la droite ouverte.

De même pour un espace E :

Le lien des points à l'infini des rayons issus d'un de ses points r est un *plan complet,* ou *riemanien,* ϖ, qu'il faut voir enveloppant l'espace à la façon d'une sphère, mais ne pas confondre avec cette surface. Chaque rayon du faisceau r et son opposé, formant ensemble une droite, rencontrent ce plan ϖ en deux points *opposés,* en lesquels se réunissent une infinité de droites complètes, comme le font les méridiens géographiques sur la sphère. Si le point r se déplace dans l'espace E de manière à y occuper successivement toutes les positions possibles, le plan ϖ se déplace semblablement, et le lieu de ses positions est la *région infinie de l'espace.* Ce lieu est à trois dimensions, mais une d'elles est un infiniment petit du premier ordre relativement aux deux autres et s'efface devant elles : c'est comme si toutes les positions du plan ϖ n'en faisaient qu'une, qui est le *plan complet* considéré comme formant la limite de l'espace.

De même enfin pour l'étendue. A première vue, on dira que sa *région de l'infini* est un espace ordinaire. On sera plus exact en disant que c'est un espace complet ε, être géométrique procédant du plan complet comme celui-ci procède de la droite complète. En toute rigueur, il faudrait dire que c'est le lieu *à quatre dimensions* d'une infinité d'espaces ε, correspondant un par un aux divers points de la région finie [1].

On peut faire la géométrie des régions infinies des champs, de ces droites, de ces plans et de ces espaces bizarres qui méconnaissent le postulatum d'Euclide; en d'autres termes on peut établir

---

[1] Voyez dans le journal *Mathesis,* 1898 : LECHALAS, *Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide;* MANSION, *Non-identité des plans de Riemann et de la sphère d'Euclide.*

pour eux, comme pour les autres, les conditions du parallélisme, de la perpendicularité, des distances et des angles.

On l'a faite, cette géométrie, et elle a été féconde. Voici pourquoi. Assurément les figures infiniment éloignées dans le plan ou dans l'espace sont moins inaccessibles au regard de notre esprit que celles hors de l'espace, mais ce n'est pas précisément de là que vient leur utilité. Elle vient, s'il nous est permis d'employer une pareille image, de ce qu'elles nous donnent les êtres géométriques *par leurs extrémités,* et 1° que ces extrémités ont une dimension de moins; 2° qu'à des infiniment petits près, ces extrémités sont communes à des catégories entières dont nous voyons les termes séparés, par exemple *les parallèles.*

Aussi la géométrie de la région infinie d'un champ n'est pas autre chose, moyennant certaines correspondances univoques faciles à établir, que celle du champ immédiatement supérieur. Les figures infiniment éloignées dans l'espace sont donc bien un véritable échelon vers celles qui sont extérieures à l'espace, et cet échelon est précieux pour la géométrie des dimensions multiples : à la voie analytique que nous avons adoptée parce qu'elle nous est plus familière et que nous supposons notre lecteur dans le même cas, il permet de substituer les méthodes de la Géométrie pure, supérieures en bien des points, il faut en convenir. C'est ainsi que procède *Veronese* dans *Fondamenti di Geometria.*

Les considérations qui précèdent montrent une tendance chez le mathématicien d'aujourd'hui à se figurer l'infini un peu autrement que ses prédécesseurs. Il en distingue deux formes, et cette distinction a pris un corps surtout entre les mains de Veronese en ce qui concerne la Géométrie, et de G. Cantor en ce qui concerne la Théorie des nombres ([1]). Dans l'une de ces formes,

---

([1]) VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, p. 26-205, in-8°. Padoue, 1891. — *Il continuo rettilineo e l'assioma V° d'Archimedi* (*Atti dei Lincei*, 1890). — MANSION, dans *Mathesis*, 1896 et 1897.

G. CANTOR, *Fondements d'une théorie générale des ensembles* (*Acta math.*, t. II, 1883). — *Mitheilungen zur Lehre vom Transfiniten* (*Zeitschrift für Philosophie von Fichte*, 1887, p. 81 à 125 et 252 à 270). — *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis;* Paris, 1899.

DU BOIS-REYMOND, *Théorie générale des fonctions*, traduction par MILHAUD et GIROT; Paris, 1887.

depuis longtemps classique, l'infini se présente comme une grandeur variable *croissant* ou *décroissant* au delà de toute limite, car l'*infiniment grand* et l'*infiniment petit* sont comme deux pôles, qu'il ne faut pas traiter différemment; le mot *infini* est alors en quelque sorte synonyme de *illimité*. Dans l'autre, c'est un être géométrique qui a son individualité comme tous les individus de même nom situés dans le même champ, et ne saurait être confondu avec aucun d'eux; il est au-dessus du *fini* et de l'*illimité*, existant hors de nous au même titre que celui-là, tandis que celui-ci est simplement lié à notre pensée et ne serait rien s'il n'y avait pas d'être pensant. Nous nous contentons de présenter au lecteur ces deux idées, autour desquelles les passions se sont quelque peu exercées.

L'infini n'est d'ailleurs pas toujours le même pour un champ donné, car il dépend de la façon dont on envisage ce champ. Nous avons trouvé que c'est une droite pour le plan, un plan pour l'espace et un espace pour l'étendue, mais ces résultats sont essentiellement liés aux équations *linéaires* au moyen desquelles nous avons défini les champs. Dans d'autres cas, on trouvera que c'est une circonférence pour le plan, une sphère pour l'espace, une hypersphère (*voy.* § 31) pour l'étendue. Dans la théorie des fonctions, où l'on représente une variable imaginaire $x_1 + ix_2$ par un point dans un plan, et deux variables imaginaires $x_1 + ix_2$, $x_3 + ix_4$ par un point dans l'étendue, l'infini de chacun de ces champs est *un point*, et il peut paraître singulier de voir celui-ci *les envelopper*; d'ailleurs la fonction se comporte toujours autour de lui de la même manière qu'autour de tout autre point situé dans le fini. Dans les transformations planes par rayons vecteurs réciproques, c'est encore un point qui est l'infini du plan : dans cette transformation, qui n'est pas homographique, les points correspondent aux points, mais non les droites aux droites.

En réalité l'infini, celui de la grandeur comme celui de la petitesse, est *sans forme*; toutes les formes du fini arrivent à se confondre, quel que soit celui de ces deux pôles vers lequel on marche.

Le lecteur qui voudra approfondir cette discussion consultera avec fruit la magistrale Thèse de M. L. Couturat, ainsi que les critiques faites dans la *Revue philosophique* par MM. Evellin et Émile Borel [1].

§ 8. — Les multiplicités.

L'équation d'un espace a quatre paramètres, et quatre espaces se coupent en un point comme quatre points déterminent un espace; on peut donc dire qu'il y a dans l'étendue un ∞^4 d'espaces comme il y a un ∞^4 de points. Il est clair qu'il y a de même dans un espace un ∞^3 de plans et dans un plan un ∞^2 de droites; il est intéressant de connaître aussi les nombres analogues pour les cas intermédiaires.

Prendre un point quelconque dans l'étendue peut se faire de ∞^4 manières; le joindre par une droite à un point quelconque de l'infini peut se faire de ∞^3 manières, puisque les points de l'infini forment un espace. Cela donne un ∞^7 de droites; mais chacune d'elles est ainsi comptée un ∞ de fois, puisqu'elle contient un ∞ de points. Reste donc un ∞^6 pour le nombre des droites existant dans l'étendue.

Par quelques raisonnements de ce genre, et en récapitulant les valeurs déjà obtenues, on trouve qu'un champ donné contient un champ de degré inférieur d'espèce donnée un nombre de fois égal à une puissance de l'infini ayant l'exposant indiqué dans le Tableau suivant :

DEGRÉ DU CHAMP.	EXPOSANT POUR les points.	les droites.	les plans.	les espaces.
Deuxième	2	2	//	//
Troisième	3	4	3	//
Quatrième	4	6	6	4

(1) COUTURAT, *De l'infini mathématique*, Thèse de doctorat ès lettres, in-8°, 1896.

EVELLIN, *L'infini nouveau* (*Rev. phil.*, 1898, p. 113 et 473; 1900, p. 135).

ÉMILE BOREL, *Rev. phil.*, 1899, p. 383.

La formule est [1]

$$(r+1)(n-r),$$

n désignant le degré plus élevé et r le degré inférieur.

Une pareille supputation pour les nombres de figures, ou de conditions, ou de manières de faire une chose, etc., est souvent et utilement employée dans la *Théorie générale des Surfaces,* la *Géométrie énumérative* et la *Géométrie philosophique.*

On est ainsi amené à considérer des *multiplicités* (en allemand *Mannifaltigkeiten,* en anglais *manifoldness*) *de divers ordres.* Les multiplicités fondamentales sont les suivantes :

1° Celles à une dimension, ou à un ∞^1 de termes. Ce sont : — l'ensemble des *points* qui forment une droite : M. Chasles l'appelle une *division;* on dit beaucoup aujourd'hui une *ponctuelle* (en italien *puntegiatta,* en anglais *range,* en allemand *Punktreihe*); — l'ensemble des *droites* qui partent d'un même point, — celui des *plans* qui partent d'une même droite, — celui des *espaces* qui partent d'un même plan. Le mot *faisceau* est employé pour les trois dernières formes;

2° Celles à deux dimensions, ou qui ont un ∞^2 de termes. Ce sont : — l'ensemble des *points* ou des *droites* qui forment un plan, — celui des *droites* ou des *plans* qui partent d'un même point, — celui des *plans* ou des *espaces* qui partent d'une même droite;

3° Celles à trois dimensions, ou qui ont un ∞^3 de termes. Ce sont : — les *points* ou les *plans* d'un espace; — les *droites* ou les *espaces* partant d'un même point;

4° Enfin celles à quatre dimensions, ou comprenant un ∞^4 de termes. C'est l'ensemble des *points* ou des *espaces* qui composent l'étendue.

Toutes ces formes sont *linéaires.* On peut citer comme exemple de celles qui ne le sont pas : les cercles d'un plan, qui forment un ∞^3; les coniques d'un plan, qui forment un ∞^5; les droites d'un espace et les plans passant par un même point, qui sont des ∞^4; les droites et les plans de l'étendue, qui sont des ∞^6, etc.

---

(1) VERONESE, *Le Superficie omaloide normale a due dimenzioni e del 4° ordine dello spazio a cinque dimenzioni* (*Accad. dei Lincei,* vol. XIX, p. 8).

Comme trois points déterminent un plan, on pourrait croire que les plans qui passent par deux points (ou par une droite) forment un ∞^1, c'est-à-dire une multiplicité du premier ordre. On se tromperait, car c'est un ∞^2 ; en effet, on peut mener un plan par la droite donnée et par chacun des points de l'espace de l'infini, dont le nombre est ∞^3 ; mais il s'en trouve un ∞ dans chacun des plans ainsi menés, ce qui réduit à ∞^2 le nombre de ceux-ci.

Le même fait se rencontre dans la Géométrie à trois dimensions, où l'on pourrait croire, à première vue, que, puisqu'une droite est déterminée par deux points, il passe un ∞^1 de droites par un point donné, tandis que c'est un ∞^2.

CHAPITRE III.

PERPENDICULARITÉ.

§ 9. — Distance de deux points.

Nous appelons *distance* de deux points dont les coordonnées sont respectivement

(x_i) $x_1, x_2, x_3, x_4,$

et

(y_i) $y_1, y_2, y_3, y_4,$

une fonction de ces coordonnées ayant pour carré

(1) $\Delta^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2.$

Cette formule, *qui est, avec la présomption des quatre coordonnées, toute la base de la Géométrie à quatre dimensions,* résulte de l'addition d'un terme à celle employée avec des coordonnées rectangulaires dans la Géométrie à trois dimensions, de même que cette dernière résulte de l'addition d'un terme à celle employée dans la Géométrie à deux dimensions.

Comme première application de la formule (1), démontrons le théorème suivant, qui servira plus loin pour l'établissement des systèmes de coordonnées : *Les segments interceptés par deux espaces parallèles sur des droites parallèles ont la même longueur.*

A cet effet, soient

(1) $A = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$

(2) $A' = A + \alpha_0$

les équations de deux espaces parallèles, et

$$(3)\quad \begin{cases} B = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0, \\ C = c_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ D = d_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{cases}$$

$$(4)\quad B' = B + \beta_0, \qquad C' = C + \gamma_0, \qquad D' = D + \delta_0$$

celles de deux droites parallèles. Les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 de l'intersection de la première droite avec le premier espace satisfont aux équations (1) et (3); celles y_1, y_2, y_3, y_4 de l'intersection de cette même droite avec le deuxième espace satisfont aux équations (2) et (3); on a donc, en substituant et retranchant,

$$(5)\quad \begin{cases} a_1(x_1 - y_1) + \ldots + a_4(x_4 - y_4) - \alpha_0 = 0, \\ b_1(x_1 - y_1) + \ldots + b_4(x_4 - y_4) - \beta_0 = 0, \\ c_1(x_1 - y_1) + \ldots + c_4(x_4 - y_4) - \gamma_0 = 0, \\ d_1(x_1 - y_1) + \ldots + d_4(x_4 - y_4) - \delta_0 = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 et y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 de l'intersection de la deuxième droite avec le premier et avec le second espace satisfont aux équations (1) et (4), (2) et (4). En faisant les mêmes opérations on aura les mêmes équations (5) avec les x et les y accentués; il en résulte

$$\begin{cases} x'_1 - y'_1 = x_1 - y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_4 - y'_4 = x_4 - y_4, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(x'_1 - y'_1)^2 + \ldots + (x'_4 - y'_4)^2 = (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_4 - y_4)^2,$$

ce qui n'est autre chose que la proposition énoncée.

Lorsque deux espaces sont parallèles, on peut dire d'une figure, *quelle qu'elle soit*, située dans l'un d'eux qu'elle est parallèle à l'autre, car tous ses points en sont à la même distance.

§ 10. — Distance d'un point à un champ.

La distance d'un point p à un espace, un plan ou une droite, est la *distance du point p au point q de ce champ qui est le plus* *rapproché de lui.* Le point q s'appelle la *projection* du point p sur le champ considéré. Nous allons chercher le lieu des points de l'étendue qui ont la même projection q : 1° sur un espace donné A, 2° sur un plan donné P, 3° sur une droite donnée D.

1° *Sur un espace* A. — Soit

$$A = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 \tag{2}$$

son équation, et soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées d'un point p extérieur à A, y_1, y_2, y_3, y_4 celles de sa projection sur A. Ces dernières satisfont à l'équation (2). D'autre part, l'expression (1) doit être moindre pour le point q que pour tout autre point de A situé dans son voisinage et ayant pour coordonnées $y_i + dy_i$. On exprimera d'abord que cet autre point q' est situé dans A en différentiant l'équation (2)

$$a_1 dy_1 + a_2 dy_2 + a_3 dy_3 + a_4 dy_4 = 0, \tag{3}$$

et ensuite que pq est $< pq'$, en égalant à zéro la différentielle de (1):

$$(x_1 - y_1) dx_1 + \ldots + \ldots + (x_4 - y_4) dx_4 = 0. \tag{4}$$

L'équation (4) devant être satisfaite toutes les fois que l'équation (3) le sera, on devra avoir, en désignant par λ un multiplicateur convenable

$$\left\{\begin{aligned} x_1 - y_1 &= \lambda a_1; \\ x_2 - y_2 &= \lambda a_2; \\ x_3 - y_3 &= \lambda a_3; \\ x_4 - y_4 &= \lambda a_4. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Si l'on élimine λ entre ces équations, il en reste trois :

$$\frac{x_1 - y_1}{a_1} = \frac{x_2 - y_2}{a_2} = \frac{x_3 - y_3}{a_3} = \frac{x_4 - y_4}{a_4}, \tag{6}$$

qui, jointes à (2), déterminent les quatre coordonnées y_i de la projection q quand on se donne celles x_i du point extérieur.

Mais supposons qu'on se donne au contraire le point q de l'espace A, alors les y_i sont invariables, et les équations (6), en y considérant les x_i comme des coordonnées courantes, représentent le lieu des points dont la projection sur A tombe en q. C'est une droite, puisque ces équations sont au nombre de trois.

La ligne droite pq peut donc bien s'appeler la *perpendiculaire abaissée du point p sur l'espace* A. Et si l'on prend sur cette droite pq un autre point quelconque p', la perpendiculaire $p'q'$ abaissée de cet autre point sur le même espace A coïncidera avec pq.

2° *Sur un plan* P. — Dans ce cas, nous avons, au lieu de l'équation unique (2), deux équations

$$(2') \qquad A = 0, \qquad B = 0,$$

et l'équation (3) est aussi remplacée par deux autres:

$$(3') \qquad \left\{ \begin{aligned} & a_1 dy_1 + a_2 dy_2 + a_3 dy_3 + a_4 dy_4 = 0. \\ & b_1 dy_1 + b_2 dy_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Rien n'est changé dans l'équation (4) et, comme elle doit être satisfaite toutes les fois que les équations (3′) le seront, on devra avoir, en désignant par λ, μ deux coefficients indéterminés :

$$(5') \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 - y_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1, \\ x_2 - y_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2, \\ x_3 - y_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3, \\ x_4 - y_4 &= \lambda a_4 + \mu b_4 ; \end{aligned} \right.$$

si l'on élimine λ, μ, il reste deux équations

$$(6') \qquad C = 0, \qquad D = 0,$$

qui, jointes aux équations (2′), déterminent y_1, y_2, y_3, y_4 en fonction des x_i. Mais si l'on considère les premières comme invariables et les secondes comme des coordonnées courantes, alors les équations (6′) représentent le lieu des points dont la projection sur le plan P tombe en q. C'est un plan, puisqu'il y a deux équations.

3° *Sur une droite* D, dont soient

$$(2'') \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

les équations. Les équations (3′) s'augmentent d'une troisième, où les a de la première et les b de la seconde sont remplacés par des c, et les équations (5′) deviennent, avec trois indéterminées :

$$(5'') \qquad \left\{ \begin{aligned} & x_1 - y_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & x_4 - y_4 = \lambda a_4 + \mu b_4 + \nu c_4, \end{aligned} \right.$$

dont l'élimination donnerait une équation unique

$$D = 0, \tag{6''}$$

équation d'un espace.

§ 11. — Applications.

Pour donner de suite une application simple de chaque cas, proposons-nous de trouver :

1° La perpendiculaire menée par le point

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$$

à l'espace

$$y_4 = 0;$$

il faut faire $a_4 = 1$, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$; les équations (5) deviennent alors

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -\lambda,$$

d'où, en éliminant λ,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

ce qui est la droite demandée.

2° Le plan mené par le même point perpendiculairement au plan

$$y_3 = 0, \quad y_4 = 0;$$

les équations (5′) deviennent

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\lambda, \quad x_4 = -\mu,$$

d'où, en éliminant λ et μ,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

ce qui est le plan demandé.

3° Enfin l'espace mené par le même point perpendiculairement à la droite

$$y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0;$$

les équations (5″) deviennent

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\lambda, \quad x_3 = -\mu, \quad x_4 = -\nu,$$

d'où, en éliminant λ, μ et ν,

$$x_1 = 0,$$

ce qui est l'espace demandé.

Les droites, les plans et les espaces que cet exemple a présentés incidemment ne sont autre chose que les éléments d'un système de coordonnées rectangulaires, comme on le verra plus loin.

§ 12. — **Perpendicularité de deux champs.**

Cherchons maintenant les conditions de perpendicularité d'un champ K_2 sur un autre K_1 passant par un même point de l'étendue; nous exprimerons cette perpendicularité par le fait que *chacun des points du premier se projette sur le second en un point de leur intersection*. Si les deux champs n'ont aucun point commun, on leur mène des parallèles K'_2 et K'_1 par un point quelconque et l'on dit que K_2 est perpendiculaire à K_1 si K'_2 l'est à K'_1.

Nous considérons d'abord deux espaces

$$A = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4,$$
$$B = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4,$$

et nous exprimons que le second est perpendiculaire au premier. Un point quelconque x_1, x_2, x_3, x_4 de B est lié à sa projection y_1, y_2, y_3, y_4 sur A par les relations (5), et, pour que B soit perpendiculaire à A, il faut, par définition, que y_1, y_2, y_3, y_4 satisfassent aussi à l'équation de B. En les y substituant, puis retranchant l'une de l'autre les deux équations (B), il vient

$$b_1(x_1 - y_1) + b_2(x_2 - y_2) + b_3(x_3 - y_3) + b_4(x_4 - y_4) = 0;$$

portant dans cette dernière équation les valeurs (5), elle devient

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0, \tag{7}$$

d'où λ s'est éliminé lui-même parce qu'il s'est trouvé facteur commun à tous les termes du premier membre. Telle est la condition pour que B soit perpendiculaire à A; sa forme symétrique montre que la perpendicularité est réciproque.

On raisonnera de la même manière pour toute autre association de deux champs, et l'on trouvera que la condition de perpendicularité s'exprime par des formules semblables à (7), associant chacune des équations afférentes à l'un des deux champs avec chacune des équations afférentes à l'autre, par conséquent en nombre égal au produit des nombres des équations de chaque sorte. Comme ces équations représentent des espaces, cela revient à dire que chacun des espaces déterminants de l'un des deux champs doit être perpendiculaire à chacun des espaces déterminants de l'autre.

Ainsi la perpendicularité dépend de :

Deux	conditions,	quand il s'agit	de deux espaces,
Deux	»	»	d'un espace et d'un plan,
Trois	»	»	d'un espace et d'une droite,
Quatre	»	»	de deux plans,
Six	»	»	d'un plan et d'une droite,
Neuf	»	»	de deux droites.

NOTA. — Nous ne nous sommes pas arrêtés, dans ce Chapitre ni dans le précédent, à la discussion analytique des *cas particuliers* du parallélisme et de la perpendicularité. Dans le Chapitre IV, ces cas vont être considérés au point de vue géométrique.

CHAPITRE IV.

QUELQUES THÉORÈMES.

Ici se placerait, si nous écrivions un Traité tout à fait méthodique, un Chapitre correspondant au cinquième Livre de Legendre et contenant une grosse gerbe de théorèmes. Nous en cueillons quelques-uns, ou parce qu'ils nous seront utiles dans la suite, ou parce qu'ils contribuent à donner la physionomie de la Géométrie à quatre dimensions.

§ 13. — Droites, plans et espaces parallèles.

I. Deux espaces sont parallèles quand leurs plans à l'infini (*voir* § 7) se confondent en un seul.

Une droite et un espace sont parallèles quand le point à l'infini de la première est sur le plan à l'infini du second.

Par un point donné hors d'un espace, on demande de lui mener un espace parallèle. Il n'y a qu'à mener par le point donné trois droites parallèles à trois droites prises d'une manière quelconque dans l'espace donné, pourvu que celles-ci ne soient ni dans un même plan, ni parallèles à un même plan. Ces trois lignes déterminent l'espace cherché.

II. Les plans ont deux manières d'être parallèles. Soient A et B deux plans, a et b les droites qu'ils ont chacun dans l'espace de l'infini. Ces droites peuvent : 1° ne pas se rencontrer : c'est le cas général, et il n'y a aucune espèce de parallélisme; 2° avoir un point commun : on dit alors que les deux plans sont *parallèles suivant le premier mode*, ou *incomplètement parallèles;* 3° se confondre en une seule ; on dit alors que le parallélisme est du *deuxième mode* ou *complet*.

Des propriétés différentes correspondent aux deux modes. Par exemple, s'il s'agit du premier, on ne peut mener dans chaque plan, par un de ses points, qu'une seule droite qui soit parallèle à l'autre; quand il s'agit du second, toutes les droites de chaque plan ont le parallélisme.

Ainsi encore, si un plan est parallèle à un espace, il est parallèle à tous les plans contenus dans celui-ci, mais non à tous de la même manière, car sa droite à l'infini coupe la droite à l'infini des uns et coïncide avec celle des autres.

Quand deux plans sont parallèles suivant le premier mode, un plan quelconque les coupe chacun suivant un point, à moins qu'il ne soit l'intersection de deux espaces passant par chacun des plans donnés, auquel cas il passe par le point commun qu'ils ont à l'infini et les coupe suivant deux droites.

§ 14. — Droites, plans et espaces perpendiculaires.

Les théorèmes qui suivent concernent la perpendicularité entre

les droites et les espaces,
les plans et les plans,
les droites et les plans,
les plans et les espaces,

et la plupart ont des applications dans la *Géométrie descriptive* (Chap. VI et VIII).

I. Quand une droite et un espace sont perpendiculaires entre eux, la première l'est à toutes les droites et à tous les plans menés par son pied dans le second. Car, puisque tous les points de celui-ci se projettent en un même point de la droite, il en est ainsi, en particulier, pour ceux d'entre eux qui s'alignent suivant une même droite, et pour ceux d'entre eux qui sont sur un même plan.

Réciproquement, l'espace est perpendiculaire à tous les plans générateurs de la droite, et à tous les espaces générateurs d'un quelconque de ces plans.

Quand une droite d, coupant un espace E en un point O, est perpendiculaire à deux plans menés par ce point dans cet espace, elle est perpendiculaire à celui-ci. Menons en effet, par le point O, une droite dans chacun des deux plans; on sait, par la géométrie à trois dimensions, que d sera perpendiculaire à chacune de ces deux droites, et qu'elle le sera par conséquent à leur plan; elle est donc perpendiculaire à un plan quelconque mené par le point O dans l'espace E.

Des droites perpendiculaires à un même espace sont parallèles entre elles, et des espaces perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.

II. On demande de *mener, par un point donné* P, *un espace perpendiculaire à une droite donnée* D. Si le point est sur la droite, menez par celle-ci trois plans non situés dans un même espace, et, dans chacun d'eux, menez par le point P la perpendiculaire à la droite D; ces trois lignes détermineront l'espace cherché. Si le point P est hors de la droite D, abaissez, dans le plan PD, une perpendiculaire de P sur D et, par le pied de celle-ci, menez l'espace perpendiculaire à D, comme on vient de le dire.

On demande de *mener, par un point donné* P, *une droite perpendiculaire à un espace donné* E. Si le point est situé dans l'espace E, menez dans celui-ci trois droites non dans un même plan, et, par le point donné, un espace perpendiculaire à ces trois droites, comme dans la première solution ci-dessus; l'intersection des trois espaces sera la droite demandée. Si le point donné est hors de l'espace E, la construction se formule dans les mêmes termes, mais en visant la deuxième solution.

Par un point donné sur une droite, on peut lui élever, si elle est donnée :

Dans un plan (géométrie à deux dimensions), une seule droite perpendiculaire;

Dans un espace (géométrie à trois dimensions), un ∞ de droites perpendiculaires dont le lieu est un plan; un seul plan perpendiculaire;

Dans l'étendue, un ∞^2 de droites perpendiculaires dont le lieu est un espace; un ∞^1 de plans perpendiculaires dont le lieu est le même espace; un seul espace perpendiculaire.

III. De même qu'ils ont deux espèces de parallélisme, les plans ont aussi deux manières d'être perpendiculaires. Si leurs droites à l'infini se rencontrent, on dit qu'ils sont *simplement* ou *incomplètement* perpendiculaires; si elles ne se rencontrent pas, on dit qu'ils sont *absolument* ou *complètement* perpendiculaires.

Considérons deux plans A, B se trouvant dans le premier cas, et soient a, b leurs droites de l'infini. Admettons en outre qu'ils se coupent suivant une même droite d, c'est-à-dire sont dans un même espace E, dans lequel sont aussi, dès lors, les droites a, b, d. Tous les plans passant par la droite a sont complètement parallèles au plan A et, comme lui, simplement perpendiculaires à B. Or ces plans, en nombre ∞^2 (§ 8, à la fin), sont de deux sortes : les uns, dont le nombre est ∞^1, sont dans l'espace E et coupent B suivant une droite; les autres sont hors de cet espace et coupent B suivant un point.

Les plans en perpendicularité simple avec un plan donné peuvent donc couper ce plan, ou suivant une droite, ou suivant un point; ceux de la deuxième catégorie lui sont en même temps incomplètement parallèles.

Deux plans complètement parallèles à deux plans complètement ou incomplètement perpendiculaires sont complètement ou incomplètement parallèles entre eux.

Quand deux plans sont complètement perpendiculaires entre eux, une droite quelconque de l'un est perpendiculaire à une droite quelconque de l'autre; quand ils sont incomplètement perpendiculaires, il y a dans chacun une direction, *et une seule,* qui est perpendiculaire à toutes les droites de l'autre.

Un plan B, qui est incomplètement perpendiculaire à un plan A, l'est suivant le même mode à tout plan complètement perpendiculaire à A.

Si, par le point commun de deux plans A, B absolument perpendiculaires entre eux, on trace une droite dans chacun d'eux, le plan C déterminé par ces deux droites est simplement perpendiculaire à chacun des deux plans A, B; il y a un ∞^2 de plans C.

Le Tableau suivant ([1]) réunit les particularités que peut présenter l'incidence de deux plans :

([1]) D'après SCHOUTE, *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1900, 2e partie, p. 187.

INTERSECTION DES DEUX PLANS.		PARALLÉLISME.	PERPENDICULARITÉ.	OBSERVATIONS.
à distance finie.	un point...	nul	nulle	cas général
		nul	incomplète	A
		nul	complète	B
	une droite.	nul	nulle	cas général
		incomplet	nulle	C
		incomplet	incomplète	D
à l'infini.	un point...	incomplet	nulle	E
		incomplet	incomplète	F
	une droite.	complet	nulle	G

Quand le lecteur aura fait connaissance avec l'usage des coordonnées (§ 16), il pourra exemplifier ces différents cas de la manière suivante. En prenant invariablement

$$x_3 = 0, \qquad x_4 = 0,$$

pour les équations d'un des deux plans, et en prenant successivement pour l'autre les équations

$$\begin{aligned}
&x_1 + \lambda x_2 = 0,\ x_1 + \mu x_4 = 0,\\
&x_1 = 0,\ x_2 = 0,\\
&x_1 + \lambda x_4 = 0,\ x_3 + \mu x_4 = 0,\\
&x_1 + \lambda x_2 = 0,\ x_3 + \mu x_4 = 0,\\
&x_1 + \lambda x_4 = 0,\ x_3 + \mu x_4 = k,\\
&x_1 + \lambda x_2 = 0,\ x_3 + \mu x_4 = k,\\
&x_3 = k,\ x_4 = k'.
\end{aligned}$$

on a respectivement les cas A, B, C, D, E, F, G.

On demande de *mener, par un point* M *donné sur un plan, un autre plan qui lui soit complètement perpendiculaire.* On mènera deux droites quelconques dans le plan donné, puis un espace perpendiculaire à chacune d'elles, par le point donné ; l'intersection des deux espaces sera le plan demandé.

Si le point donné M est extérieur au plan, on mènera par ce point deux droites respectivement parallèles à deux droites quelconques du plan, et l'on fera la même construction.

IV. Par un point O donné sur un plan A, on peut mener un ∞

de droites perpendiculaires à celui-ci ; leur lieu est le plan B absolument perpendiculaire à A.

Mais par un point m donné hors d'un plan A, on ne peut mener qu'une seule droite qui lui soit perpendiculaire; car cette perpendiculaire se trouve forcément dans l'espace mA, et elle est par suite déterminée comme dans la géométrie à trois dimensions.

La *projection d'un point m sur un plan* A peut être conçue de deux manières qui reviennent au même : 1° Par le point m et le plan A, on mène un espace E, puis, dans cet espace, on abaisse une perpendiculaire de m sur E comme l'enseigne la géométrie à trois dimensions. 2° Par le point m, on mène un plan A' perpendiculaire à A suivant le mode absolu, et l'on appelle projection de m sur A l'intersection de A' avec A. Si l'on projette une multiplicité de points m formant une figure quelconque, tous les plans projetants A' sont complètement parallèles entre eux, c'est-à-dire sont les membres d'un même faisceau ∞^1 dont l'axe est à l'infini; si la figure est une surface plane, le rapport de l'aire à sa projection demeure constant.

Tous les points qui ont la même projection sur un plan donné sont dans un même plan.

La *projection d'un point sur un espace* est le pied de la perpendiculaire, unique et déterminée, abaissée du premier sur le second. Voici une application de ce genre de projection.

On démontre sans peine les théorèmes suivants :

1° La projection d'une sphère de rayon R sur un espace faisant avec le sien l'angle φ est un ellipsoïde de révolution aplati dont l'axe est dans le plan perpendiculaire à la fois aux deux espaces et a pour longueur $2R\cos\varphi$.

2° La projection de celui-ci sur un troisième espace faisant avec le sien un angle φ' est un ellipsoïde à trois axes inégaux.

3° La projection d'un parallélépipède, de dimensions finies ou infiniment petites, sur un espace faisant avec le sien un angle φ' a pour volume celui du parallélépipède multiplié par $\cos\varphi'$.

4° Par application de 2° et 3°, le volume de l'ellipsoïde à trois axes inégaux $2a$, $2b$, $2c$, est $\frac{4}{3}\pi abc$ [1].

[1] D'après DE LA RIVE, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1895.

V. Quand un espace E et un plan P sont perpendiculaires entre eux : 1° si l'on projette sur le second un point quelconque du premier, la projection, nous le savons déjà, est toujours sur leur commune intersection; 2° le plan P est incomplètement perpendiculaire à tous les plans menés dans l'espace E par cette commune intersection; 3° les plans et les espaces respectivement parallèles à P et à E sont perpendiculaires entre eux.

Par une droite donnée hors d'un espace E, on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire à celui-ci ; il contient les perpendiculaires abaissées des divers points de la droite sur cet espace; tous les pieds de ces perpendiculaires sont sur une même ligne droite, qui s'appelle la *projection orthogonale* de la droite sur l'espace E.

Par une droite donnée hors d'un plan P, on ne peut mener qu'un seul espace perpendiculaire à celui-ci; il contient les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la droite sur le plan P, et les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite. Il contient aussi les plans absolument perpendiculaires menés d'un point quelconque de la droite au plan P; les points d'intersection de ces plans avec le plan P sont en ligne droite.

VI. *On demande de mener, par un point donné* O, *quatre droites perpendiculaires entre elles.* On mènera par le point O une première droite x_1, ce qui peut se faire de ∞^3 manières; puis une seconde droite x_2 perpendiculaire à x_1, ce qui peut se faire de ∞^2 manières; puis une troisième droite x_3 perpendiculaire au plan x_1x_2, ce qui peut se faire de ∞^1 manières; enfin, comme il vient d'être dit, une quatrième droite x_4 perpendiculaire à l'espace $x_1x_2x_3$, ce qui ne peut se faire que d'une manière.

Chacune des droites

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4$$

est perpendiculaire à une quelconque des trois autres, au plan de deux quelconques des trois autres, à l'espace des trois autres.

Chacun des espaces

$$x_1x_2x_3, \quad x_2x_3x_4, \quad x_3x_4x_1, \quad x_4x_1x_2$$

est perpendiculaire aux trois autres.

Chacun des plans

$$x_1 x_2,\quad x_2 x_3,\quad x_3 x_4,\quad x_4 x_1,\quad x_1 x_2$$

est incomplètement perpendiculaire à celui qui est écrit après lui. Enfin les deux plans de chacun des trois couples

$$x_1 x_2 \text{ et } x_3 x_4,\quad x_1 x_3 \text{ et } x_2 x_4,\quad x_2 x_3 \text{ et } x_4 x_1$$

sont complètement perpendiculaires entre eux.

La construction, qui peut se faire de ∞^6 manières, donne donc, non seulement quatre droites perpendiculaires deux à deux, mais encore quatre espaces satisfaisant à la même condition.

§ 15. — **Rotation d'un espace.**

I. Si, dans l'équation (6) du § 2, on fait passer β par toutes les valeurs possibles, on a une suite infinie d'espaces ayant cela de commun que tous contiennent le plan $A = o$, $B = o$; c'est un *faisceau d'espaces* dont ce plan est *l'axe*.

On peut concevoir aussi que c'est le même espace passant par une infinité de positions successives pendant qu'un plan qui y est contenu demeure fixe. Un pareil mouvement s'appelle la *rotation de l'espace autour du plan*. La géométrie à deux dimensions ne connaît qu'une seule rotation, celle *autour* d'un point, qui s'appelle le *centre de rotation*; dans la géométrie de l'espace, il n'y en a qu'une également, celle autour d'une droite, qui s'appelle l'*axe instantané ou permanent de rotation*. Dans l'étendue, c'est la rotation autour d'un plan qui est le mouvement le plus simple après celui de pure translation. Il est nécessaire de bien le comprendre.

Dans un espace E, par exemple le nôtre, considérons un plan P et appelons A, B les deux régions de l'espace situées de part et d'autre de celui-ci; puis, prenant sur le plan P un point O, menons-lui par ce point une perpendiculaire, dont soient O*a* la partie qui pique dans la région A, O*b*, celle qui pique dans la région B. Nous pouvons faire la même chose sur un autre point quelconque du plan P, où il y aura toujours une perpendiculaire unique et déterminée, puisque nous demeurons dans un espace E; le nombre total de ces perpendiculaires, égal à celui des points du plan P, est ∞^2. Elles accomplissent ensemble, dans la rotation dont il s'agit, le mouvement que nous allons décrire pour une d'elles.

Mettons en mouvement à la fois la région A et la région B, dans le même sens et de telle sorte que les points qui leur sont communs, qui sont tous les points du plan P, ne bougent pas. La droite aOb tourne autour du point O sans cesser d'être perpendiculaire au plan P, c'est-à-dire de faire un angle droit avec une droite quelconque menée par le point O dans ce plan; elle engendre un plan R qui est perpendiculaire, *au sens absolu,* au plan P et n'a de commun avec lui que le point O. Lorsqu'elle y a parcouru un angle de 180° (la moitié du plan R), il en est de même de toutes ses pareilles, chacune dans son plan R, et la région A prend la place qu'occupait primitivement la région B, celle-ci la place qu'occupait primitivement la région A. Le mouvement se continuant, la droite aOb décrit la seconde moitié du plan R, et, finalement, chaque région A, B reprend sa place primitive. L'espace E a parcouru l'étendue entière.

Dans le mouvement, le plan P demeure absolument fixe, c'est-à-dire qu'aucun de ses points ne change de place. Il n'en est pas de même des plans R : ils ne changent pas de position dans l'espace E ni dans l'étendue, mais chacun d'eux tourne comme une roue autour du point O qui lui est commun avec le plan P. L'angle ainsi décrit est le même pour tous les plans R et s'appelle l'*angle de rotation.*

Chacun des ∞^2 plans qui passent par le point O et sont *simplement perpendiculaires* au plan P, coupe celui-ci suivant une ligne fixe p et le plan R suivant une ligne r mobile. Si l'on ne considère que ceux de ces plans passant par une même ligne p, leur mouvement est le même que celui des plans autour de l'axe de rotation dans la géométrie à trois dimensions.

Il sera toujours question du mouvement qu'on vient de décrire lorsque le mot *rotation* sera employé seul; on l'appelle aussi une *rotation simple* ou une *rotation autour d'un plan.* La formation des images réfléchies, en les supposant réelles, est le phénomène du monde à trois dimensions qui se rapproche le plus de celui de la rotation autour d'un plan dans le monde à quatre.

II. Afin de retenir encore un peu l'attention du lecteur sur ce mouvement, nous en ferons l'application à une question des plus simples : celle des deux trièdres symétriques, qu'il est impossible de superposer dans l'espace à trois dimensions, de même qu'il est impossible de mettre sur une main le gant de l'autre main.

Considérons d'abord, en Géométrie plane et à titre préliminaire, deux triangles abc, $b'a'c'$ (*fig.* 3) ayant tous leurs éléments égaux, mais non disposés dans le même sens : celui-ci sera pris de la gauche à la droite pour un observateur placé à l'intérieur du triangle, debout sur le plan. On sait qu'il est impossible de *superposer* les deux triangles, à moins qu'on n'ait la faculté d'en

Fig. 3.

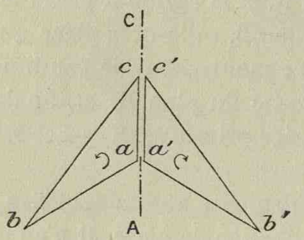
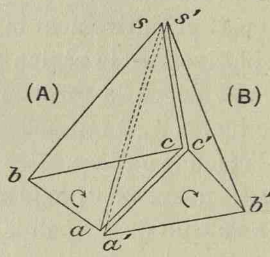


Fig. 4.



sortir un du plan, mais qu'alors on y arrive facilement. Si l'on veut réduire au minimum le déplacement à faire *en dehors du plan,* on amènera, par des glissements et des rotations dans le plan, deux côtés homologues l'un contre l'autre le long d'une ligne quelconque AC, puis on fera tourner autour de celle-ci, de 180°, la région du plan qui contient un des triangles.

Considérons maintenant, dans la Géométrie de l'espace, deux trièdres dont tous les éléments sont égaux, mais non disposés dans le même sens, celui-ci étant pris de la gauche à la droite pour un observateur placé dans le trièdre, la tête du côté du sommet (*fig.* 4). On sait qu'il est impossible de superposer les deux trièdres. Mais nous y arriverons aisément si nous disposons de la quatrième dimension. Pour réduire au minimum le déplacement à accomplir dans celle-ci, commençons par accoler l'une contre l'autre, suivant un plan P, deux faces homologues aSc, a'S$'c'$ de nos deux trièdres, puis faisons tourner de 180° autour du plan P, comme il a été dit plus haut, la région de E qui contient l'un d'eux. La troisième arête Sb viendra s'appliquer sur sa correspondante $S'b'$, et le trièdre $Sabc$ sera superposé au trièdre $S'a'b'c'$.

Par un pareil mouvement, s'il nous était possible de l'exécuter, nous arriverions à superposer les deux gants symétriques ; c'est le résultat que nous obtenons en retournant l'un d'eux, grâce à l'ouverture qu'ils présentent. On verra plus loin (§ 31) que l'emploi de la quatrième dimension permettrait de faire ce retournement alors même qu'il n'y aurait pas d'ouverture.

Des impossibilités du même genre se présentent dans l'étendue et se résolvent au moyen du champ du cinquième degré, et ainsi de suite indéfiniment.

III. *Étant donnés deux systèmes identiques* S *et* S′ *placés d'une manière quelconque dans l'étendue, on peut les amener en coïncidence par deux rotations simples successives.*

Pour le démontrer (1), prenons deux espaces homologues, A dans le système S et B′ dans S′ ; désignons par $\alpha = \beta'$ le plan suivant lequel ils se coupent, la lettre α étant employée plus spécialement quand ce plan sera considéré dans A, la lettre β' quand il sera considéré dans B′. Soient β le plan de A qui est homologue de β', et α' le plan de B′ qui est homologue de α.

Les deux plans α et β, étant dans un même espace A, ont pour intersection une droite $\alpha\beta$ (*fig.* 5), et, pour la même raison, les deux plans α' et β' ont pour intersection une droite $\alpha'\beta'$. Ce sont deux droites homologues situées dans le plan α. En faisant tourner la première d'un certain angle φ autour d'un certain point r de ce plan, on peut l'amener à coïncider avec la seconde. Menons par le point r le plan ρ absolument perpendiculaire au plan α ; par une rotation simple et de même angle φ autour de ρ, le système S, devenant S_1, sera amené à avoir avec S′ une droite commune $d = \alpha'\beta'$, qui sera homologue d'elle-même.

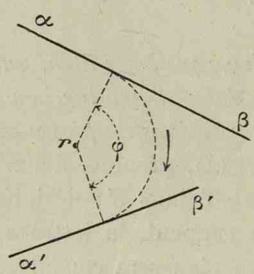
Ayant accompli cette rotation, prenons la droite d pour l'axe commun de deux faisceaux égaux de plans situés respectivement dans S_1 et S′, et menons-lui un espace perpendiculaire E en un

(1) D'après VAN OSS : *The elementary motion of space* S_4 (*Mém. de l'Ac. d'Amsterdam ;* séance du 21 novembre 1901).

quelconque de ses points. Cet espace, qui est son propre homologue, coupe les deux faisceaux de plans suivant deux faisceaux de droites qui, étant égaux et ayant même sommet, ont *un* rayon double d_1. Le plan dd_1 est donc un plan double, c'est-à-dire un plan qui, considéré dans l'un des deux systèmes, est lui-même son homologue dans l'autre. Une rotation simple de S_1 autour de ce plan amènera donc S_1 en coïncidence avec S'.

Dans l'étendue, le mouvement élémentaire le plus général peut donc être représenté par deux rotations successives autour de deux plans se coupant suivant un point. La réduction peut se

Fig. 5.



faire autour d'une infinité de couples de plans conjugués se coupant tous en un même point, qu'on peut appeler le *centre instantané de rotation*. Les couples de plans conjugués coupent un espace quelconque, ne passant pas par ce point, suivant des systèmes de droites qui sont les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe. Parmi ces couples, il y en a un, et un seul, dont les deux plans sont absolument perpendiculaires entre eux; on en trouvera la construction géométrique dans le Mémoire cité de van Oss, et la théorie analytique dans celui de Cole ([1]).

La *possibilité de mouvement*, la *liberté cinématique*, est plus grande dans le monde à quatre dimensions que dans le nôtre. Dans celui-ci, vous pouvez immobiliser un corps solide, que nous supposerons réduit à un point matériel, en le liant par des barres rigides à *trois* points fixes. Supprimez une première barre, vous donnez au corps un *premier degré de liberté :* il peut se

---

([1]) *On rotations in Space of four dimensions* (*Amer. Journ. of Math.*, t. XII, 1890).

déplacer et occuper un ∞^1 de positions qui sont sur une circonférence dans un plan perpendiculaire à la ligne des deux points fixes restants. Supprimez une deuxième barre, vous donnez un *deuxième degré de liberté :* le corps peut occuper maintenant un ∞^2 de positions qui sont sur une sphère ayant pour centre le point fixe restant. Supprimez enfin la troisième barre : le corps, *entièrement libre,* pourra se porter sur un quelconque des ∞^3 points de l'espace. Dans l'étendue, il faut *six* points fixes et autant de barres rigides pour immobiliser un corps.

IV. Nous aurons, dans le Chapitre VIII, à exécuter diverses opérations de rotation, entre autres *deux rotations successives autour de plans absolument perpendiculaires entre eux.* Alors le lecteur remarquera tout d'abord le fait de l'indépendance de deux pareilles rotations, qui donne aux constructions de la Géométrie descriptive à quatre dimensions une simplicité et une élégance inconnues de celle à trois. Puis il fera de lui-même cette seconde remarque que la rotation dans l'étendue ne diffère pas seulement de celle dans l'espace en ce qu'elle s'accomplit autour d'un plan au lieu de s'accomplir autour d'une droite, mais qu'il y a entre les deux choses une autre différence non moins essentielle.

Dans l'espace, une rotation nouvelle imprimée à un corps qui en possède, ou en a accompli déjà une *se combine* avec celle-ci ; le résultat est une rotation de même nature que chacune des deux composantes, et qui aurait pu être obtenue d'un seul coup : *la grandeur est à une dimension.* Dans l'étendue, les deux rotations demeurent indépendantes l'une de l'autre et ne peuvent pas être remplacées par une seule; leur résultat n'est pas homogène avec elles; il est à chacune d'elles ce qu'un rectangle est à chacun de ses côtés; on pourrait l'appeler « une rotation de rotation » : *la grandeur est à deux dimensions.*

De même que deux plans peuvent, à titre de cas particulier, avoir *une droite* pour intersection, de même deux rotations peuvent, au même titre, avoir *une résultante unique.* La condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient une pareille résultante est que les deux plans autour desquels elles s'accomplissent se trouvent précisément dans le cas particulier que nous venons de rappeler. S'ils se trouvent dans le cas général, c'est-à-dire ont *un* *point* pour intersection, tout ce qu'on peut faire c'est de ramener les deux rotations à deux autres autour de plans absolument perpendiculaires entre eux; la réduction est toujours possible, mais d'une seule manière. Nous n'aurons affaire qu'à des rotations de ce genre.

On voit que la composition des rotations est tout autre dans la Géométrie à quatre dimensions et dans celle à trois. Dans la Géométrie *à n dimensions,* les choses se passent de même très différemment selon que n est un nombre pair 2μ, ou un nombre impair $2\mu+1$. Dans le premier cas, la rotation a pour *axe* un champ de degré μ, et le mouvement général autour d'un point ne peut pas se réduire à quelque chose de plus simple que μ rotations perpendiculaires entre elles, dont quelques-unes peuvent être nulles. Dans le second cas, la rotation a encore pour *axe* un champ de degré μ, mais le mouvement autour d'un point peut se réduire généralement à une résultante unique, qui est une rotation autour d'une droite passant par ce point.

CHAPITRE V.

SYSTÈMES DE COORDONNÉES.

§ 16. — Les quatre espaces coordonnés.

L'existence de systèmes de coordonnées obliques ou rectangulaires, analogues dans leur constitution et leur emploi à ceux des Géométries à deux et à trois dimensions, résulte de ce qui précède.

Considérons *quatre* espaces distincts, c'est-à-dire dont les équations générales, telles qu'elles ont été données au § 1, ne soient ni indéterminées, ni incompatibles. Nous prenons leur point d'intersection O pour origine, et nous leur attribuons les équations

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0.$$

Ce seront *les quatre espaces coordonnés;* ils s'appellent respectivement, on verra pourquoi dans un instant, l'espace

des $x_2 x_3 x_4$, des $x_3 x_4 x_1$, des $x_4 x_1 x_2$, des $x_1 x_2 x_3$.

Un point quelconque M de l'étendue pourra être défini au moyen d'un pareil système en vertu du théorème démontré au § 9 que *les segments interceptés sur des droites parallèles par deux espaces parallèles ont la même longueur*. Il résulte en effet de ce théorème que le lieu des points dont la distance à un espace, comptée suivant une direction donnée, a la même valeur, est un espace parallèle à l'espace fixe. Si donc on vous donne les distances respectives du point M aux quatre espaces coordonnés, chacune étant comptée parallèlement à l'intersection des trois autres espaces, vous pourrez par leur moyen construire quatre espaces parallèles aux premiers, et le point M sera leur intersection. Ces quatre distances

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4$$

sont *les coordonnées du point* M ; elles sont contenues trois par trois dans un des espaces coordonnés : celui des $x_2 x_3 x_4$ pour x_2, x_3 et x_4, etc.

Les quatre espaces coordonnés se coupent trois à trois suivant quatre droites qui ont pour équations

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 0, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0 : \end{cases}$$

ces droites sont *les axes coordonnés,* et s'appellent respectivement l'axe

$$\text{des } x_1,\quad \text{des } x_2,\quad \text{des } x_3,\quad \text{des } x_4.$$

Enfin les espaces coordonnés se coupent deux à deux suivant six plans, qu'on peut aussi définir comme joignant les axes deux à deux, et qui ont pour équations

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Ce sont *les six plans coordonnés;* on les appelle, d'après celles des coordonnées qu'ils contiennent respectivement, le plan

des $x_3 x_4$, des $x_1 x_4$, des $x_1 x_2$, des $x_2 x_3$, des $x_2 x_4$ et des $x_1 x_2$ [1].

---

[1] Dans l'espace à trois dimensions, *six* plans passant par un même point ont pour intersections *quinze* lignes droites. Dans l'étendue, ce nombre se réduit à quatre, comme ceci.

Les associations de deux plans *où il n'y a pas d'indice répété*, au nombre de trois, savoir :

$$\begin{array}{llcll} x_1 = 0, & x_2 = 0 & \text{et} & x_3 = 0, & x_4 = 0; \\ x_2 = 0, & x_3 = 0 & \text{et} & x_4 = 0, & x_1 = 0; \\ x_3 = 0, & x_1 = 0 & \text{et} & x_2 = 0, & x_4 = 0; \end{array}$$

donnent pour intersection *un point*. Les douze autres se rangent en quatre groupes de trois, tels que

$$\begin{array}{llcll} x_1 = 0, & x_2 = 0 & \text{et} & x_1 = 0, & x_3 = 0; \\ x_1 = 0, & x_2 = 0 & \text{et} & x_2 = 0, & x_3 = 0; \\ x_1 = 0, & x_3 = 0 & \text{et} & x_2 = 0, & x_3 = 0, \end{array}$$

où l'intersection est une seule et même droite $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; leurs douze lignes d'intersection se réduisent donc à quatre, chacune comptant pour trois ; ce sont les quatre axes coordonnés.

Si l'on veut que le système soit *rectangulaire,* on n'a qu'à se référer à la construction qui a été donnée à la fin du paragraphe précédent. *Angle droit* dans la Géométrie à deux dimensions, *trièdre droit* dans celle à trois, le système rectangulaire est maintenant un *quadrièdre droit.* Nous y reviendrons au § 24.

La formule de la distance et la théorie que nous avons donnée de la perpendicularité supposent essentiellement que le système est rectangulaire ; la théorie des intersections et du parallélisme le suppose indifféremment rectangulaire ou oblique. Certaines questions se traiteront plus facilement avec celui-là, d'autres avec celui-ci ; mais, comme dans la géométrie à trois dimensions, passer d'une espèce à l'autre n'est qu'une affaire de calcul algébrique ; il en est de même, dans chaque espèce, pour opérer une *transformation de coordonnées,* c'est-à-dire changer l'orientation du système ou déplacer son origine. Nous n'aurons à faire usage que du système rectangulaire.

Nous pouvons maintenant reprendre la définition que nous avons laissée incomplète en commençant (§ 1), et dire : tandis que la géométrie à deux dimensions définit le point au moyen de deux coordonnées rapportées à un *système de deux droites se coupant,* et celle à trois au moyen de trois coordonnées rapportées à un *système de trois plans se coupant,* la géométrie à quatre dimensions le définit au moyen de quatre coordonnées rapportées à un *système de quatre espaces se coupant.*

Les quatre équations linéaires (1) entre les coordonnées, qu'alors nous avons substituées à ces coordonnées elles-mêmes pour la définition d'un point P, ne sont autre chose qu'un système de coordonnées plus générales, qui revient à l'emploi de quatre espaces quelconques A, B, C, D se coupant au point P, comme s'y coupent les quatre espaces respectivement parallèles à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Cette substitution nous a permis de faire une première étude des champs, de leurs intersections et de leurs perpendicularités sans prendre appui, comme on le fait dans l'exposé classique des géométries à deux et à trois dimensions, sur un système particulier de coordonnées dont l'emploi présuppose ces notions. On les possède quand on commence l'étude des deux premières géométries ; elles nous manquaient au début de celle-ci. Mais il ne s'ensuit pas que l'édifice déjà construit, et qu'il ne reste plus qu'à disposer, repose sur le vide, car les méthodes que nous avons employées, les calculs que nous avons faits sont *indépendants du choix des axes*. L'existence de ceux-ci est la conséquence de la conception du point au moyen des équations (1).

§ 17. — Le point géométrique et le point analytique.

Cet édifice présente un cachet qui lui est commun avec toute la géométrie cartésienne, et qu'il importe de faire ressortir.

En vertu des équations (1) du § 1, que nous avons appelées les équations *du point*, il repose tout entier sur celui-ci : comme l'atome pour le chimiste, le point est l'unique élément de tous nos matériaux, l'un « une chimère des sens », l'autre « une abstraction de l'esprit » (Saisset, *Introduction à la Philosophie de Spinosa*). Or ce point n'est pas la même chose que celui sur lequel la géométrie ordinaire est assise de son côté. Le second est un *être géométrique* nettement défini, savoir la limite d'un volume qui se rapetisse au delà de toute expression ; c'est une fraction de mètre cube aussi petite qu'on voudra, mais ce n'est jamais qu'une fraction de mètre cube. Le premier est un *être analytique,* constitué par les valeurs de quatre variables pouvant se rapporter à bien des choses ; sa nature est et demeure indéterminée. Quelle qu'elle soit, si les êtres qui en dépendent forment un ensemble continu tel que, sans exception, un d'eux corresponde toujours à des valeurs données de quatre variables, et qu'inversement un groupe déterminé de valeurs de celles-ci corresponde à un quelconque d'entre eux, cet ensemble sera analytiquement équivalent à l'*étendue,* ces valeurs seront les coordonnées de l'individu en question, et celui-ci pourra *s'appeler un point*. Que faut-il pour cela ? Que les individus soient indépendants les uns des autres, et que leur nombre soit le même que celui des points dans l'étendue.

On peut ainsi faire correspondre diverses choses, et cela de mille manières ; la suivante, assurément la plus simple et la plus naturelle, s'est présentée la première, et nous l'exposerons la première.

§ 18. — Loi de projectivité.

Un point, faisant partie d'une configuration quelconque X, est défini par ses quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4. Lions-leur d'autres variables y_1, y_2, y_3, y_4 par des relations qui attribuent à chacune de celles-ci une valeur unique et déterminée quand on donne aux x des valeurs déterminées. La forme la plus générale d'une pareille dépendance est

$$y_1 = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5}{e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 + e_4 x_4 + e_5},$$

$$y_2 = \frac{b_1 x_1 + \ldots}{e_1 x_1 + \ldots}, \qquad y_3 = \frac{c_1 x_1 + \ldots}{e_1 x_1 + \ldots}, \qquad y_4 = \frac{d_1 x_1 + \ldots}{e_1 x_1 + \ldots},$$

les seconds membres des deuxième, troisième et quatrième équations ne différant de celui de la première que par la substitution de la lettre b, ou c, ou d, à la lettre a.

Si l'on considère les nouvelles variables comme les coordonnées d'un point, le lieu de ces points sera une configuration Y dont les éléments

point, droite, plan, espace

correspondront un par un aux éléments de même nom de la configuration X. Et il y aura réciprocité, car, résolues par rapport aux x, les équations donnent à celles-ci des expressions de la même forme en fonction des y.

C'est cette correspondance qu'on a appelée de *projectivité*, ou d'*homographie*. Et l'on appelle *propriétés projectives des figures*, celles qui se conservent sans altération quand on effectue la substitution ci-dessus, laquelle n'est pas autre chose qu'un *changement de coordonnées*.

La correspondance homographique peut être établie entre deux multiplicités de degré quelconque pourvu que ce soit le même, et entre deux multiplicités situées dans des champs quelconques, sous certaines conditions. En supprimant les lettres qui ont l'indice 4, puis successivement celles qui ont les indices 3 et 2, les équations ci-dessus se réduisent à trois, puis à deux, puis à une : ce sont les conditions de l'homographie pour les figures de l'espace, du plan et de la droite; dans ce dernier cas l'équation prend la forme

$$ax_1 x_2 + bx_2 + cx_1 + d = 0.$$

Voici un exemple de la correspondance dont il s'agit : prenons les équations (2), (3), (4) du § 1, qui représentent respectivement la droite, le plan et l'espace, et supprimons dans chacune *le terme constant*. Nous avons des droites, des plans et des espaces *passant par l'origine,* et il est facile de voir qu'alors les trois sortes d'éléments sont déterminés respectivement par 3, 4, 3 conditions. Ces nombres étant les mêmes que ceux de la deuxième ligne dans le Tableau du § 8, nous en concluons qu'il y a correspondance homographique entre les droites, les plans et les espaces passant par un point fixe de l'étendue et les points, les droites et les plans qui peuplent l'espace ordinaire. La Géométrie des premiers ne sera donc, *mutatis mutandis,* que la répétition de celle des seconds. Ainsi la condition pour que deux plans de l'étendue se coupent suivant une droite s'exprimera de la même manière que celle pour que deux droites de l'espace passent par un même point, etc.

Les équations de l'homographie contiennent 24 paramètres pour les figures de l'étendue, et ce nombre se réduit à 15, 8 et 3 pour celles des champs du troisième, du deuxième et du premier degré. En d'autres termes, la transformation homographique peut se faire, dans les quatre cas respectivement, de

$$\infty^{24}, \quad \infty^{15}, \quad \infty^{8} \quad \text{et} \quad \infty^{3}$$

manières.

Pour donner une application, nous démontrerons le résultat énoncé § 15 relativement au nombre des mouvements qui sont possibles pour un système dont un point O est fixé. Traçons, dans ce système, une hypersphère (§ 34) ayant pour centre le point O, et transformons-le homographiquement sous les deux conditions : 1° que la transformée de l'hypersphère soit une hypersphère identique; 2° que le centre O ne bouge pas. L'équation générale de l'hypersphère ayant quatorze paramètres, la première condition réduit de ∞^{24} à ∞^{10} le nombre des transformations, et la seconde réduit celui-ci à ∞^{6}. Tel est donc le nombre des manières dont la *rotation d'un système autour d'un point* peut s'accomplir dans l'étendue, alors qu'il n'est que ∞^3 dans notre espace.

§ 19. — La loi de dualité.

L'espace, comme le point, est déterminé par quatre conditions, et il y a dans l'étendue le même nombre ∞^4 de l'une et de l'autre espèce. Il offre donc l'aptitude voulue pour être substitué au point en qualité d'être analytique fondamental, et devenir l'unique élément de tous les matériaux de la Géométrie.

Nous pouvons dès lors avoir devant les yeux, à volonté, deux sortes de champs : des *champs-de-points* C_p et des *champs-d'espaces* C_e. Nos discours se rapporteront indifféremment aux uns ou aux autres en supposant que les systèmes d'équations (1), (2), (3), (4) du § 1 représentent, dans un cas :

le point, la droite, le plan et l'espace,

ainsi qu'il a été admis dans les Chapitres précédents, et dans l'autre cas :

l'espace, le plan, la droite et le point.

Le dénombrement sera le même dans les deux cas (§ 8) :

$$\infty^4, \quad \infty^6, \quad \infty^6, \quad \infty^4.$$

C'est la *loi de dualité*, en vertu de laquelle un théorème sur des *lieux des points* est transformé en un théorème sur des *lieux de droites* dans la géométrie plane, sur des *lieux de plans* dans celle de l'espace, et des *lieux d'espaces* dans celle de l'étendue. Ces lieux transformés s'appellent des *enveloppes* et les coordonnées qui y conduisent directement s'appellent des *coordonnées tangentielles;* les figures qui ont entre elles cette correspondance sont dites *réciproques* ou *corrélatives*. Avec les coordonnées ponctuelles d'une part, et les coordonnées tangentielles d'autre part, on peut écrire deux traités parallèles, ne différant en apparence que par certaines substitutions de mots, en réalité roulant sur des objets et donnant des résultats qui n'auront généralement pas d'autre parenté que ce rapprochement matériel. C'est cette correspondance que M. Poincaré a si pittoresquement exprimée avec son idée du *Dictionnaire*, qui s'applique à notre sujet quoiqu'elle en vise un autre :

« Construisons, dit-il, une sorte de dictionnaire en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent, dans les dictionnaires ordinaires, les mots de deux langues dont la signification est la même. Prenons ensuite les théorèmes de Lowatschewski et traduisons-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand-français. Nous obtiendrons ainsi les théorèmes de la géométrie euclidienne » ([1]).

L'intérêt serait évidemment médiocre si tout se réduisait à une pareille traduction; mais il appartient à la perspicacité du mathématicien que le champ nouveau dans lequel elle le transporte renferme lui-même des richesses exploitables.

La manière la plus simple d'exprimer analytiquement la loi de dualité paraît être celle-ci.

Nous avons admis jusqu'ici que, dans notre équation fondamentale du § 1,

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

les a, ou plutôt les rapports de quatre d'entre eux au cinquième, sont des constantes afférentes à un espace fixe, tandis que les x sont des grandeurs variables desquelles dépend la position d'un point, et l'équation exprime *que celui-ci est sur celui-là :* c'est l'équation de l'espace en coordonnées ordinaires. Admettons, au contraire, que les a sont des grandeurs variables desquelles dépend la position d'un espace et les x des constantes afférentes à un point fixe ; alors l'équation exprime *que celui-là passe par celui-ci :* ce sera l'équation du point en coordonnées tangentielles.

Dans cette théorie on a l'habitude, afin d'établir dans la forme la corrélation qui existe dans le fond (l'idée paraît simple et modeste, mais elle a eu d'importantes conséquences) : 1° de rem-

([1]) *Revue générale des sciences pures et appliquées*, numéro du 15 décembre 1891.

placer les x par leurs rapports à une cinquième grandeur de même espèce, x_5 ; c'est ce qu'on appelle *rendre les coordonnées homogènes;* 2° de remplacer le symbole a par le symbole ξ, et, en général, de représenter deux grandeurs corrélatives par deux lettres corrélatives, une de l'alphabet latin, l'autre de l'alphabet grec. Notre équation fondamentale prend ainsi la forme

$$(1) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 + \xi_5 x_5 = 0 :$$

c'est, à volonté, l'équation de l'espace en coordonnées ordinaires, ou du point en coordonnées tangentielles.

Tel est le point de départ d'une théorie qui a pris tant de développement [1].

Dans la Géométrie à deux dimensions, le plan et la droite sont corrélatifs l'un de l'autre. Dans celle à trois, le plan et l'espace sont corrélatifs l'un de l'autre, et la droite est corrélative d'elle-même. Dans celle à quatre, le point et l'espace sont corrélatifs entre eux ; la droite et le plan, considérés comme des lieux de points ou des enveloppes d'espaces, le sont entre eux.

Les lois d'homographie et de dualité ont reçu la consécration d'un monument impérissable : la *Géométrie supérieure* de Chasles [2]. Elles occupent une si haute situation dans la Science et le cours de nos déductions nous en faisait passer tellement près que nous avions le devoir de ne pas les passer sous silence. Nous les rencontrerons plus d'une fois ; mais, obligés par notre programme à passer d'un sujet à un autre sans en approfondir aucun, nous n'aurons pas à en faire un usage systématique.

Avec le principe de l'*Indétermination du point analytique,* qui les domine, elles forment la mine la plus riche qu'ait rencontrée la Géométrie moderne, et la plus exploitée. Voici ce que M. Moutard en disait déjà en 1864 [3] :

« La découverte des principes de la projection centrale marque incontestablement une époque importante dans l'histoire de la

---

(1) *Voyez* par exemple : GARBIERI, *Sui fascie e sulle schiere di superficie* (*Atti dell'Ist. Veneto*, 1886). — PAPELIER, *Leçons sur les coordonnées tangentielles,* 2 vol. in-8; Paris.

(2) *Traité de Géométrie supérieure,* 1re édition, 1852, 2e édition, 1880.

(3) Dans les Notes aux *Applications d'Analyse et de Géométrie* de PONCELET, t. I, p. 509.

Géométrie moderne. Les méthodes fondées sur ces principes possèdent un caractère à la fois intuitif et systématique, qui les rend également propres à découvrir de nouvelles propriétés des figures et à rattacher tout un ensemble de propositions à une même vérité générale. Par là, elles n'ont pas seulement agrandi et simplifié la science de l'étendue, mais, en donnant l'impulsion à l'étude des procédés généraux de transformation des figures, elles ont pour ainsi dire doté la Géométrie d'une puissance nouvelle. »

Plücker, dont le nom est connu de tous les mathématiciens, dont l'œuvre a contribué avec celles de Poncelet, de Chasles, de Grassmann et de Riemann, à aiguiller la Géométrie dans la direction qu'elle a aujourd'hui et à lui donner la puissance de l'Analyse, a créé une géométrie des plus intéressantes et des plus originales ([1]), affranchie de la condition d'égalité des degrés des champs que l'on fait correspondre. Elle prend *la droite* comme élément générateur de l'espace, faisant ainsi de celui-ci un *champ-de-droites* C_d, c'est-à-dire un être quadridimensionnel, puisque le nombre des droites y est ∞^4. Plus tard, Sophus Lie, Reye, Loria, Darboux ([2]), ont fait jouer à *la sphère* le même rôle dans les conditions les plus variées. C'est qu'en effet, comme on peut décrire un ∞^1 de sphères autour d'un point quelconque de l'espace pris pour centre, il y en a un ∞^4 pour l'espace entier; celui-ci peut donc être considéré comme un champ quadridimensionnel de sphères, comportant une géométrie analogue à celle de Plücker.

([1]) PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.* Leipzig, in-8°, 1868-1869.

([2]) SOPHUS LIE, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelncomplexe,* dans *Math. Annalen,* 1872; et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. LXXI, 1871, p. 597.

REYE, *Synthetische Geometrie der Kugeln*, 1879. — Une traduction italienne de cet Ouvrage, par Misani, a été publiée en 1881.

LORIA, *Ricerche intorno alla Geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito* (*Mémoires de Turin,* 1884).

DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal,* Paris, 1887-1896.

Voyez aussi : KLEIN, *Conférences sur les Mathématiques,* faites au Congrès de Chicago. Paris, 1898.

L'étendue elle-même a été traitée comme un champ d'hypersphères [1].

§ 20. — Notre propre espace dans le système de coordonnées.

Après cette double digression, nous revenons à l'ordre d'idées du § 16 pour dire que rien ne nous empêche d'attaquer désormais les questions qui *ne sont pas indépendantes du choix des axes,* ni de faire tel usage qu'on voudra du système des *quatre espaces coordonnés,* rectangulaires ou obliques.

Nous en faisons une première application pour établir cette proposition que *tous les espaces sont pareils entre eux,* et que *tout espace est symétrique de lui-même par rapport à un quelconque de ses plans.* Quelle que soit l'équation d'un espace donné, et quel que soit le plan donné dans cet espace, on peut en effet, par un changement de coordonnées, ramener l'équation du premier à $x_4 = 0$, ce qui démontre la première partie de la proposition, et les équations du second à $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, d'où il est aisé de conclure la seconde partie.

Ces propriétés sont déjà connues pour le plan relativement à ses droites et pour la droite relativement à ses points. On les énonce encore en disant qu'une droite est coupée en deux moitiés égales par un quelconque de ses points, un plan par une quelconque de ses droites, un espace par un quelconque de ses plans, l'étendue par un quelconque de ses espaces. La considération des *demi-droites*, des *demi-plans* et des *demi-espaces* va être utile dans l'étude des angles.

Nous admettrons toujours que *notre espace* est l'un des quatre espaces coordonnés, et nous lui attribuerons l'équation

$$x_4 = 0;$$

il contiendra les deux plans et les trois axes coordonnés dans les équations desquels se trouve l'équation $x_4 = 0$; il contiendra aussi toutes les figures représentées par deux, trois ou quatre

(1) GIACOMINI, *Sulla corrispondenza fra la Geometria conforme di* S_4 *e la geometria projettiva dello spazio ordinario* (*Annales de l'École Normale supérieure de Pise,* 1899).

équations parmi lesquelles se trouve $x_4 = 0$ explicitement ou implicitement. L'axe restant s'appelle l'*axe de la quatrième dimension;* toute direction faisant avec lui, en coordonnées rectangulaires, un angle différent de 90°, est du domaine de la quatrième dimension.

Comme il importe que le système de coordonnées soit bien compris, nous allons le présenter d'une autre manière, en prenant la suite des idées dans l'ordre inverse et substituant la forme concrète à la forme analytique.

Dans *notre espace,* que nous appellerons aussi l'*espace des*

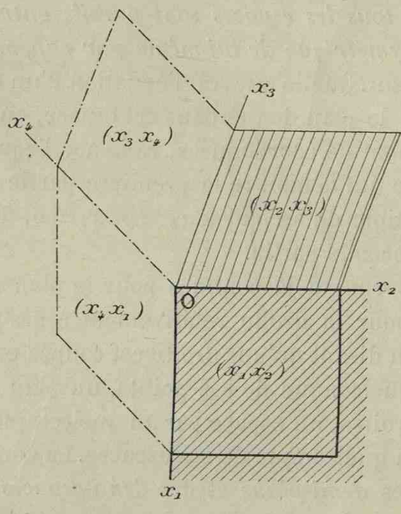


Fig. 6. — Le Système de coordonnées.

Légende de la figure. — $(x_1 x_2)$, le plan horizontal ; Ox_1 et Ox_2, deux droites de ce plan perpendiculaires entre elles. — $(x_1 x_3)$ et $(x_2 x_3)$, deux autres plans menés par ces deux droites perpendiculairement au premier, et déterminant par leur intersection le troisième axe Ox_3. — $(x_1 x_2 x_3)$, l'espace des trois plans, ou *notre espace.* — $(x_1 x_2 x_4)$, $(x_1 x_3 x_4)$ et $(x_2 x_3 x_4)$, trois autres espaces menés par ces trois plans perpendiculairement au premier, et déterminant par leur intersection le quatrième axe Ox_4. — $(x_3 x_4)$ et $(x_1 x_4)$, deux plans *absolument perpendiculaires,* respectivement, aux plans $(x_1 x_1)$ et $(x_2 x_3)$ et les coupant suivant *le point* O ; ils sont *simplement perpendiculaires* entre eux et se coupent suivant la *droite* Ox_4.

$x_1\, x_2\, x_3$, et par un point O, concevez trois lignes perpendiculaires entre elles Ox_1, Ox_2, Ox_3 ; la première sera, par exemple, l'horizontale qui se dirige vers vous, la seconde celle qui va de votre gauche à votre droite, et la troisième la verticale qui pointe vers le haut. Vous pouvez prendre une feuille de dessin posée sur une table horizontale pour *le plan des* $x_1\,x_2$ et y tracer les deux premières, mais non la troisième, car elle n'a qu'un point dans ce plan, le point O. Celle-ci détermine avec celles-là deux autres plans, celui des $x_3\,x_2$ et celui des $x_3\,x_1$, qui, perpendiculaires entre eux et à $x_1\,x_2$, forment avec lui le système de coordonnées. Rabattez le premier sur la feuille en le faisant tourner autour de l'intersection commune Ox_2. Si vous vouliez figurer *en plan* le système $x_1\,x_2\,x_3$, vous n'auriez qu'à rabattre de même le second en le faisant tourner autour de sa ligne de terre Ox_1 ; mais laissons ce deuxième rabattement à la Géométrie à trois dimensions : notre affaire est un peu moins simple.

Menez maintenant par le point O la perpendiculaire Ox_4 à l'espace $x_1\,x_2\,x_3$. Elle n'y a pas d'autre point, et elle détermine, avec chacun des plans $x_1\,x_2$, $x_2\,x_3$, $x_3\,x_1$ trois autres espaces qui sont perpendiculaires entre eux et au premier, et forment avec lui le système des quatre espaces coordonnés

$$x_1\,x_2\,x_3\,; \qquad x_4\,x_1\,x_2, \quad x_4\,x_2\,x_3, \quad x_4\,x_3\,x_1.$$

Elle détermine en outre, avec chacun des axes x_1, x_2, x_3, trois autres plans qui sont perpendiculaires à l'espace $x_1\,x_2\,x_3$ et forment avec les trois premiers les six plans coordonnés

$$x_1\,x_2, \quad x_1\,x_3, \quad x_2\,x_3\,; \qquad x_4\,x_1, \quad x_4\,x_2, \quad x_4\,x_3.$$

Nous négligerons le cinquième comme nous avons négligé le second et nous emploierons comme ceci les deux autres plans nouveaux, qui sont le quatrième et le sixième : 1° Dans l'espace que le plan $x_4\,x_1$ détermine avec le plan $x_1\,x_2$, rabattez-le sur celui-ci en le faisant tourner autour de l'intersection commune Ox_1. 2° Dans l'espace que le plan $x_4\,x_3$ détermine avec le plan $x_3\,x_2$, faites tourner le premier, comme une porte, autour de l'intersection commune Ox_3 jusqu'à ce qu'il coïncide avec le second, puis supposez qu'il l'accompagne dans le rabattement autour de Ox_2 décrit dans l'alinéa précédent ; il s'appliquera avec lui sur la feuille $x_1\,x_2$.

Le système est alors représenté sur cette feuille. Il est vrai que deux de ses plans, $x_1\,x_3$ et $x_2\,x_4$, sont laissés de côté ; mais les quatre autres suffisent pour sa détermination, et ils sont appliqués sur elle. Ils le sont avec les figures qu'ils contiennent; vous pouvez dessiner sur chacun d'eux telles autres figures qu'il vous plaira; puis vous aurez les unes et les autres dans leur vraie position en rétablissant par les moyens inverses des précédents les trois plans autres que $x_1 x_2$, un dans notre espace comme celui-ci, les deux autres dehors.

Sous les noms A, B, C, D, ces quatre plans superposés reparaîtront dans le § 24, où le sens des rotations, négligé ici, sera précisé; à partir de là ils ne cesseront guère de jouer un rôle important.

CHAPITRE VI.

LES ANGLES.

§ 21. — Dièdres d'espaces.

Nous ne voulons pas aborder la *Tétragonométrie*, qui est assez compliquée, mais seulement définir la notion d'*angle*, sur laquelle elle repose. D'ailleurs, nous ne nous arrêterons pas sur les cas :

De deux droites,
D'une droite et d'un plan,
De deux plans se coupant suivant une droite,
D'une droite et d'un espace,
D'un plan et d'un espace;

les trois premiers se présentent à peu près de la même manière que dans la Géométrie à trois dimensions; dans les deux derniers, l'angle n'est autre chose que celui de la droite ou du plan avec la droite ou le plan qui en est la projection sur l'espace considéré (§ 14, IV).

Il ne reste donc à traiter que les cas :

De deux espaces,
De deux plans qui se coupent suivant un point;

nous verrons d'abord le premier; le second est une question difficile, qui ne pourra venir qu'au § 26 à la suite de plusieurs autres.

Soient A et B les deux espaces donnés. Rapportons-les à un système de coordonnées rectangulaires en prenant le premier pour l'espace des $x_2 x_3 x_4$, leur plan d'intersection pour le plan des $x_3 x_4$. L'espace A aura pour équation

$$x_1 = 0,$$

et l'espace B, comptant parmi les espaces générateurs du plan $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, aura une équation de la forme

$$x_1 + \lambda x_2 = 0.$$

En posant $\lambda = -\cot \varphi$, ces équations prennent la forme

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 - x_1 \operatorname{tang} \varphi = 0; \end{cases}$$

on y voit un paramètre, et un seul, qui est un angle φ. M. Jordan a démontré, mais nous ne reproduirons pas sa démonstration, faite pour la Géométrie à un nombre quelconque de dimensions, que les *carrés* des lignes trigonométriques de cet angle ne sont altérés par aucun changement de coordonnées, celles-ci demeurant rectangulaires. C'est ce qu'on appelle des *invariants du système* (¹). Les lignes trigonométriques elles-mêmes ne sont pas des invariants, car on peut changer *leur signe* à volonté en changeant celui d'une des coordonnées.

Tous les systèmes de deux espaces ne sont pas pareils entre eux, comme le sont tous les espaces entre eux; mais ils ne diffèrent les uns des autres que par l'élément caractéristique φ, qui s'appelle *leur angle*. Deux systèmes de deux espaces sont *identiques* si cet élément a la même valeur, et *différents* dans le cas contraire.

L'angle de deux espaces comprend quatre parties opposées deux à deux, de part et d'autre du plan d'intersection. Ce sont quatre *dièdres d'espaces* ayant pour *arête* ce plan, et pour *faces* les demi-espaces qui en partent. L'un d'eux est le maximum et l'autre le minimum de l'angle qu'une droite quelconque menée dans un des demi-espaces fait avec une droite quelconque menée dans un des trois autres.

Si l'on prend sur l'un des deux espaces un point quelconque m, qu'on en abaisse sur le second une perpendiculaire $mp = x_2$, que

---

(¹) On peut consulter sur les Invariants : ANDOYER, *Leçons sur la théorie des formes et la Géométrie analytique supérieure*. Paris, 1900.

du pied p de celle-ci on abaisse une deuxième perpendiculaire $pq = x_1$ sur le plan-arête, le rapport

$$\frac{mp}{pq} = \frac{x_2}{x_1}$$

est *la tangente de l'angle des deux espaces.* C'est la même construction que pour deux plans et pour deux droites, et il en résulte la solution du problème suivant :

Étant donné un demi-espace A *limité par un plan* P, on demande de *trouver un autre demi-espace faisant avec le premier un dièdre de valeur donnée* φ. On mènera par un point q du plan P un plan Q perpendiculaire à ce plan et coupant le demi-espace A suivant une droite qp ; par un point p de celle-ci on élèvera une perpendiculaire sur A de longueur pm telle que l'on ait $pm = pq \tang \varphi$; l'espace demandé sera celui passant par le plan P et le point m.

§ 22. — Les trois formes classiques de l'équation d'un espace.

Considérons un espace A placé d'une manière quelconque. Menons-lui par l'origine O une perpendiculaire dont soient P le pied et d la longueur. Soient en outre

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4$$

les *cosinus des angles* que cette perpendiculaire fait avec les axes des

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

égaux aux dièdres que l'espace A fait avec les espaces coordonnés correspondants.

Pour un point quelconque M de l'espace A, la ligne MP est perpendiculaire à OP; par suite, d est la projection du contour $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, et l'on a

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = d :$$

c'est ce qu'on appelle l'*équation aux cosinus.* Pour l'identifier avec notre *première* équation, l'équation (4) du § 1, il faut observer que tous les α sont compris entre -1 et $+1$, et commencer par mettre dans la même condition les coefficients de cette équation. Pour cela, il n'y a qu'à la diviser par $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}$; en désignant le radical par r, on peut alors poser

$$\alpha_1=\frac{a_1}{r},\qquad \alpha_2=\frac{a_2}{r},\qquad \alpha_3=\frac{a_3}{r},\qquad \alpha_4=\frac{a_4}{r};\qquad d=-\frac{a_0}{r},$$

et l'on voit qu'il y a entre les cosinus la relation

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=1.$$

Mentionnons enfin, pour mémoire, la *troisième* forme classique, celle *des segments à l'origine*, savoir :

$$\frac{x_1}{p_1}+\frac{x_2}{p_2}+\frac{x_3}{p_3}+\frac{x_4}{p_4}=1,$$

où p_1, p_2, p_3, p_4 sont les longueurs comprises sur chaque axe entre l'origine et le point où il est coupé par l'espace A.

§ 23. — Les trièdres.

Le *trièdre ordinaire* est la figure formée par trois demi-droites x_1, x_2, x_3 (§ 20) issues d'un même point O et non situées dans un même plan. Il est tout entier dans *un* espace, que déterminent ses trois arêtes.

On appelle *trièdre de seconde espèce* la figure formée par trois demi-plans X_1, X_2, X_3 issus d'une même droite d et non situés dans un même espace; la droite d s'appelle l'*axe du trièdre;* les portions des plans X_1, X_2, X_3 limitées par leurs intersections deux à deux sont les *faces à deux dimensions du trièdre;* nous les désignerons par A_1, A_2, A_3; les dièdres qu'elles forment sont les *faces à trois dimensions du trièdre* et se désignent par A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1; enfin les dièdres d'espaces que forment les espaces que ceux-ci déterminent deux à deux sont les *faces à quatre dimensions du trièdre* et se désignent par $\widehat{A_1A_2A_3}$, $\widehat{A_2A_3A_1}$, $\widehat{A_3A_1A_2}$. Le trièdre lui-même se désigne par $A_1A_2A_3$. Chaque face plane a pour *opposée* la face à trois dimensions déterminée par les autres. La somme des angles des faces à deux dimensions est moindre que quatre angles droits. Celle des angles dièdres des faces à trois dimensions est plus grande que deux, et moindre que six angles droits.

Il ne faudrait pas considérer la définition du trièdre de seconde espèce comme faite à plaisir. Elle correspond à celle du cône de seconde espèce qu'on verra plus loin, et elles ne sont l'une et l'autre que le commencement d'un épanouissement qui se continue dans les champs de degré supérieur en se compliquant de plus en plus.

§ 24. — Le quadriédre droit.

Quatre espaces ont pour intersections :

Un point (§ 1), généralement unique et déterminé, et nous admettrons ici que tel est le cas;

Des plans, dont le nombre est $\frac{4.3}{1.2} = 6$;

Des droites, dont le nombre est $\frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$, par chacune desquelles il passe trois plans.

Cet ensemble est le *quadrièdre à quatre dimensions,* appelé aussi *tétraédroïde,* mot dont nous ne ferons pas usage parce que nous visons surtout le *quadrièdre droit,* qui ne peut exister dans un espace et par suite ne peut pas donner lieu à confusion avec le quadrièdre ordinaire. On a déjà vu, § 16, que notre système de coordonnées rectangulaires n'est autre chose qu'un quadrièdre droit; aussi importe-t-il de bien connaître celui-ci et nous ajouterons quelques mots à ce qui en a été déjà dit.

Il se compose :

Des quatre droites ou *arêtes,* qui sont les axes coordonnés

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4;$$

Des *six faces planes,* ou *faces à deux dimensions*

$$x_1x_2, \quad x_2x_3, \quad x_3x_4, \quad x_4x_1; \quad x_1x_3, \quad x_2x_4,$$

sur lesquelles nous reviendrons dans le paragraphe suivant;

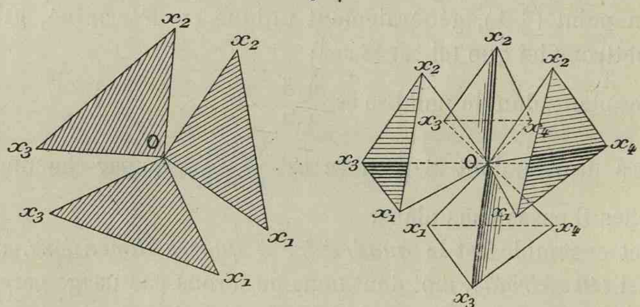
Des *quatre faces à trois dimensions*, qui sont les *quatre espaces coordonnés,* dont chacun est perpendiculairé à l'arête et aux plans qu'il ne contient pas;

Enfin de *quatre trièdres de seconde espèce,* dont chacun a pour axe une arête et pour faces les plans allant de cette arête à chacune des trois autres; comme pour les faces planes diagonales x_1x_3 et x_2x_4, il n'y a guère lieu de s'en occuper en ce qui concerne le système de coordonnées.

On se fera une idée du quadrièdre droit par la construction suivante.

Formons d'abord un *trièdre ordinaire droit*. Si, sur une table, nous réunissons trois triangles rectangles par les sommets de leur angle droit O, ils laissent entre eux des interstices (dont la somme est égale à un *droit*) qu'on ne peut faire disparaître qu'en

Fig. 7.



sortant la figure du plan; alors les deux côtés qui portent la lettre x affectée du même indice, s'appliquent aisément l'un sur l'autre et deviennent les trois arêtes du trièdre droit.

Prenons maintenant quatre de ces trièdres droits I, II, III, IV et réunissons leurs sommets en un point O : ils laissent aussi entre eux des interstices qu'il est impossible de faire disparaître. Mais si nous marquons leurs arêtes et leurs faces comme ceci

I......	x_1,	x_1x_2,	x_4,	x_4x_1,	x_3,	x_3x_1;
II.....	x_2,	x_2x_3,	x_1,	x_1x_2,	x_4,	x_4x_2;
III....	x_3,	x_3x_4,	x_2,	x_2x_3,	x_1,	x_1x_3;
IV....	x_4,	x_4x_1,	x_3,	x_3x_4,	x_2,	x_2x_4,

et si nous supposons mobiles leurs espaces respectifs (§ 15), il sera facile d'appliquer l'une sur l'autre, deux par deux, les faces qui ont la même marque, et trois par trois les arêtes qui sont dans le même cas. Le quadrièdre droit sera construit; on peut dire, dans le sens ainsi défini, que *toutes ses faces sont doubles et toutes ses arêtes, triples.*

Dans la géométrie à deux dimensions, les *deux* axes coordonnés partagent le *plan* en

$$2^2 = 4$$

angles droits, dont les figures limitantes (côtés) sont *deux droites;* en appelant 1, 2, 2, 4 les quatre demi-axes $\pm x_1$, $\pm x_2$ et désignant un angle par ses deux côtés, ces angles droits sont

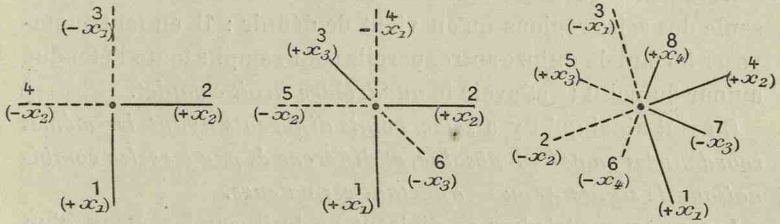
$$12, \quad 23, \quad 34, \quad 41.$$

Dans la géométrie à trois dimensions, les *trois* plans coordonnés partagent *l'espace* en

$$2^3 = 8$$

trièdres droits, dont les figures limitantes sont *trois angles droits;*

Fig. 8.



en appelant 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six demi-axes $\pm x_1$, $\pm x_2$, $\pm x_3$ et désignant un trièdre par ses trois arêtes, ces trièdres droits sont

$$123, \quad 234, \quad 345, \quad 456, \quad 561, \quad 612, \quad 135, \quad 246.$$

Les angles droits limitants sont, pour le premier, 12, 23, 31, et de même pour les autres.

Dans la géométrie à quatre dimensions, les *quatre* espaces coordonnés partagent *l'étendue* en

$$2^4 = 16$$

quadrièdres droits, dont les figures limitantes sont *quatre trièdres droits.* En appelant

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8$$

les huit demi-axes

$$+x_1, \quad +x_3, \quad -x_1, \quad -x_3, \quad +x_4, \quad +x_2, \quad -x_4, \quad -x_2,$$

et désignant un quadrièdre par ses quatre arêtes, ces quadrièdres droits sont

$$\begin{array}{cccc} 1256, & 1267, & 1278, & 1285, \\ 2356, & 2367, & 2378, & 2385, \\ 3456, & 3467, & 3478, & 3485, \\ 4156, & 4167, & 4178, & 4185. \end{array}$$

Les trièdres limitants et les faces sont, pour le premier,

$$\begin{array}{cccccc} 125, & 126, & 156, & 256, & & \\ 12, & 25, & 56, & 61, & 15, & 26, \end{array}$$

et de même pour les autres. Nous retrouverons ces groupes de chiffres dans les §§ 41 et 44, où ils désigneront, non plus des lignes, mais des points.

Le quadrièdre droit construit ci-dessus ne constitue qu'une seule des seize régions qu'on vient de définir : il en faut juxtaposer à celui-là quinze autres pareils pour remplir toute l'étendue autour du point O et avoir le *quadrièdre droit complet.*

On voit ainsi qu'il y a *seize points différents ayant les mêmes coordonnées en valeur absolue, et différenciés par les seize combinaisons de signes + ou — affectant ces valeurs.*

Les seize quadrièdres se divisent en huit couples. Deux d'un même couple ont un trièdre commun dans l'espace $x_4 = 0$, c'est-à-dire le nôtre ; cela fait dans cet espace huit trièdres, lesquels forment ensemble le système de coordonnées des $x_1 x_2 x_3$, qui est celui de la Géométrie à trois dimensions. Semblablement pour chacun des trois autres espaces.

§ 25. — La Géométrie descriptive à quatre dimensions.

I. Nous avons vu que le système de coordonnées comporte trois sortes d'éléments : *des espaces,* au nombre de quatre ; *des plans,* au nombre de six ; *des axes,* au nombre de quatre. Jusqu'ici nous avons considéré surtout les premiers ou les troisièmes ; considérons maintenant ceux de la seconde catégorie.

Les plans coordonnés se peuvent associer par deux de deux manières : 1° il y a trois couples de *plans opposés,* n'ayant en commun que l'origine et *absolument perpendiculaires* l'un à l'autre :

$$x_1x_2 \text{ et } x_3x_4, \quad x_1x_3 \text{ et } x_2x_4, \quad x_2x_3 \text{ et } x_4x_1;$$

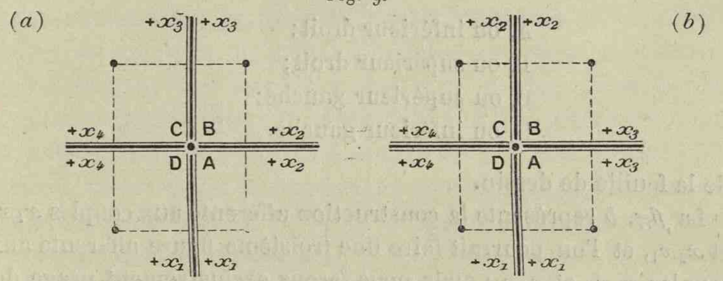
2° il y a douze couples de *plans adjacents, simplement perpendiculaires* l'un à l'autre et se coupant suivant une droite, qui est un des axes coordonnés ; tels sont, par exemple,

$$x_1x_2 \text{ et } x_1x_3, \quad x_1x_2 \text{ et } x_2x_3, \quad \ldots, \quad \text{etc.}$$

Dans le premier cas, les quatre indices sont différents; dans le second, il y en a un de répété.

D'autre part, nous avons défini, § 14, la *projection* d'un point sur un plan, laquelle est un autre point, unique et déterminé.

Fig. 9.



Un point de l'étendue, x_1, x_2, x_3, x_4 est déterminé par ses projections *sur deux plans opposés* x_1x_2 et x_3x_4, car elles ont pour coordonnées dans leur plan respectif, l'une x_1 et x_2 par rapport aux axes x_1, x_2, l'autre x_3 et x_4 par rapport aux axes x_3, x_4. *Un objet quelconque de l'étendue peut donc être déterminé et représenté par les projections de ses différents points sur ces deux plans.*

Par la considération suivante, nous réunissons les deux projections sur une seule et même feuille de dessin.

Supposons, comme toujours, que l'espace $x_1x_2x_3$ est le nôtre, et, en outre, que le plan x_1x_2 est celui de la feuille sur laquelle ces lignes sont imprimées, les axes x_1, x_2 ayant leur direction positive dans l'angle droit inférieur A (*fig.* 9, *a*). Faisons tourner l'espace $x_2x_3x_4$ de 90° autour du plan x_2x_3, qui est son intersection avec le nôtre. Le plan x_3x_4 tournera aussi de 90° autour de l'origine (§ 15), les axes x_3 et x_4 qu'il contient venant s'appliquer respectivement sur les axes x_3 et x_2; ce plan sera ainsi venu dans notre espace, où il se trouve placé perpendiculairement suivant Ox_3 à notre feuille. Rabattons-le sur celle-ci en le faisant tourner autour de Ox_3 de la droite vers la gauche; il s'appliquera par les directions positives de ses axes Ox_3 et Ox_4 dans l'angle supérieur C.

Rien ne nous empêche de faire une opération analogue pour le couple conjugué x_2x_3 et x_4x_1, et de rabattre ses deux plans dans les deux autres angles B et D. En définitive les quatre plans

$$x_1x_2, \quad x_2x_3, \quad x_3x_4, \quad x_4x_1$$

sont rabattus respectivement, par les directions positives de leurs axes, dans les angles

A, ou inférieur droit;
B, ou supérieur droit;
C, ou supérieur gauche;
D, ou inférieur gauche,

de la feuille de dessin.

La *fig. b* représente la construction afférente aux couples x_1x_3 et x_2x_4, et l'on pourrait faire une troisième figure afférente aux couples x_2x_3 et x_4x_1; mais nous ferons exclusivement usage du système que représente la *fig. a*. Voici, pour lui, comment le rabattement applique les quatre régions des plans coordonnés sur les quatre régions de la feuille de dessin, les unes et les autres étant désignées par les deux signes qu'elles imposent aux coordonnées.

FEUILLE DE DESSIN.	PLANS COORDONNÉS			
	x_1x_2	x_2x_3	x_3x_4	x_4x_1
ANGLE inférieur droit................	$+\ +$	$-\ +$	$-\ -$	$+\ -$
ANGLE supérieur droit................	$+\ -$	$+\ +$	$-\ +$	$-\ -$
ANGLE supérieur gauche............	$-\ -$	$+\ -$	$+\ +$	$-\ +$
ANGLE inférieur gauche................	$-\ +$	$-\ -$	$+\ -$	$+\ +$

II. Il est clair que la réunion de deux figures opposées, telles que A et C, ne saurait *représenter pour notre esprit* quelque chose de concret, puisque, ramenées dans leur position réelle, elles se trouvent dans des espaces différents. Mais il n'en est pas de même pour la réunion de deux figures adjacentes telles que A et B, $x_1 x_2$ et $x_2 x_3$. Ramenées à leur position relative réelle, celles-ci sont dans le même espace et y sont dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre, dont l'axe qui les sépare sur le dessin est l'intersection. C'est dès lors de la *Géométrie descriptive ordinaire;* les deux figures déterminent un espace $x_1 x_2 x_3$, ou AB, et représentent ensemble une figure à trois dimensions située dans cet espace; cette figure n'est autre chose que *la projection sur cet espace de la configuration formée dans l'étendue par l'ensemble des points considérés.*

Deux projections *opposées* A et C déterminent complètement la figure de l'étendue, et, avec elle, toutes les choses qui en dépendent; par exemple, on peut en déduire les figures B et D rien qu'en menant des parallèles aux axes par les points correspondants. Deux projections *adjacentes* A et B ne déterminent que la projection de la figure de l'étendue sur un certain espace AB; mais il va de soi que la réunion des projections sur deux espaces différents, tels que AB et DC de la figure 9, déterminerait aussi le corps à quatre dimensions.

Remarquons qu'il ne s'agit en tout cela que de *détermination géométrique.* De nouveau, nous mettons le lecteur en garde contre l'espérance qu'il pourrait concevoir d'obtenir, par le moyen des projections spatiales elles-mêmes, la vision d'un corps à quatre dimensions. Nous pouvons bien construire dans notre espace, en fil de fer, en plâtre ou en carton, une figure identique à ce que serait la projection du corps sur un espace placé dans l'étendue d'une manière quelconque par rapport à lui. Nous pouvons avoir autant de figures de ce genre que nous voudrons, et le Chapitre VIII en montrera plusieurs exemples.

Mais, ce que nous ne pouvons pas faire, c'est de *coordonner deux projections* en mettant dans leur vraie position relative les deux espaces (ou les deux plans absolument perpendiculaires entre eux) sur lesquels elles ont été faites. Une seule projection d'un corps à quatre dimensions sur un espace a même bien moins de *valeur figurative* pour nous que n'en a une seule projection d'un corps à trois dimensions sur un plan, parce que, notre œil étant dans le même espace que la première, nous nous trouvons vis-à-vis d'elle dans les conditions où nous serions vis-à-vis de la seconde si nous la regardions en mettant notre œil dans son plan.

III. En vue des applications qui se présenteront au Chapitre VIII, nous devons ajouter les remarques suivantes :

1° On a vu, § 15, que deux positions d'un même corps dans l'étendue peuvent être ramenées l'une à l'autre par deux rotations successives autour de deux plans absolument perpendiculaires entre eux.

Réciproquement, si un corps est déplacé dans l'étendue de telle sorte que les deux projections d'un quelconque de ses points sur deux plans A, C absolument perpendiculaires entre eux décrivent chacune un cercle, et que les centres de ces deux cercles soient les mêmes pour tous les points du corps, le mouvement de celui-ci est une double rotation autour d'un couple de plans parallèles aux plans A, C. Les angles de rotation étant φ dans le premier et φ' dans le second, il y aura entre les coordonnées x et y, au commencement et à la fin du mouvement, les relations connues

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, \\ y_2 = x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3 = x_3 \cos\varphi' - x_4 \sin\varphi', \\ y_4 = x_3 \sin\varphi' - x_4 \cos\varphi'. \end{cases}$$

2° Si l'un des angles φ, φ' est égal à zéro, c'est-à-dire si rien ne bouge dans un des plans de projection, tandis que dans l'autre plan tous les points décrivent des cercles concentriques, le mouvement du corps est une rotation autour d'un plan parallèle au premier plan de projection.

3° On ne perdra pas de vue la différence essentielle qu'il y a entre les sens du mot *projection sur un plan*, dans la Géométrie à trois et dans celle à quatre dimensions. Dans la première, tous les points situés sur une même droite perpendiculaire au plan de projection ont pour projection un seul et même point; dans la seconde, ce sont tous les points situés dans un même plan absolument perpendiculaire au plan de projection. Dans la première, un point du plan de projection peut donc représenter, non seulement un point, mais encore *des points* en nombre quelconque situés sur une même droite, laquelle est perpendiculaire au plan de projection; dans la seconde, le même point peut représenter, non seulement un point, mais encore *des points et des droites* en nombre quelconque situés dans un même plan, lequel est absolument perpendiculaire au plan de projection.

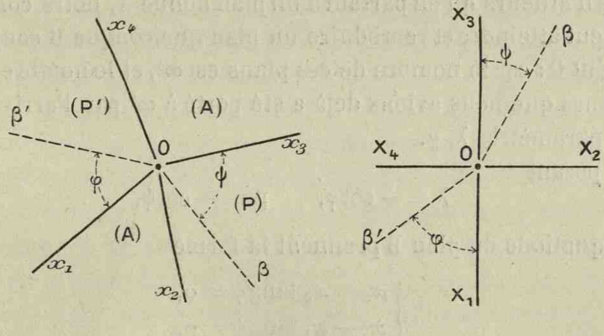
4° Lorsqu'un espace est perpendiculaire au plan de projection, tous les points et toutes les figures qu'il contient se projettent sur une même droite. On verra, dans les figures du Chapitre VIII, de nombreux exemples de ce cas et du précédent.

§ 26. — Angles de deux plans.

On sait qu'un *dièdre de plans* se ramène à un angle de droites en le coupant par un plan perpendiculaire à son arête. Sans en dire davantage sur ce cas, nous allons chercher la relation qui correspond à celle-là pour le cas où les deux plans donnés, A et B, se coupent *suivant un point* O et, dès lors, *ne forment pas de dièdre*.

Nous rapporterons nos deux plans au quadrièdre droit du § 24

Fig. 10.



en supposant que le plan A soit celui des $x_1 x_2$. Pour édifier ce système de coordonnées, menons par le point O :

1° Dans le plan A, une première droite Ox_1, ce qui peut se faire de ∞ manières;

2° Un plan P′ passant par Ox_1 et perpendiculaire à A, qui sera le plan des $x_1 x_4$: cette opération peut encore se faire de ∞ manières (§ 14);

3° Enfin un plan P perpendiculaire à P′ suivant le premier mode et un plan A′ perpendiculaire de même à A; chacun d'eux est unique; le premier, qui coupe A suivant une ligne Ox_2 perpendiculaire à Ox_1, sera le plan des $x_2\,x_3$ et le second sera celui des $x_3\,x_4$.

Comme on le voit, la construction est *doublement indéterminée.* Cette double indétermination sera levée plus loin en faisant intervenir à son tour le plan B. Pour un instant, nous prenons un quelconque des ∞^2 systèmes qui s'offrent à nous, et nous simplifierons le plus possible les équations du plan B en le définissant par deux espaces générateurs dont l'un soit en même temps un des espaces générateurs du plan des $x_2\,x_3$, l'autre un des espaces générateurs de celui des $x_4\,x_1$. Ses équations sont alors

$$\begin{cases} x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_4 + \mu x_1 = 0. \end{cases}$$

Si nous cherchons l'intersection du plan ainsi défini avec A ou avec A′, nous trouvons

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0,$$

c'est-à-dire *un point unique* : l'origine des coordonnées. Remarquons d'ailleurs qu'en partant d'un plan donné A, notre construction peut atteindre et reproduire un plan quelconque B coupant A au point O; car le nombre de ces plans est ∞^4, et le nombre ∞^2 des systèmes que nous avions déjà a été porté à ∞^4 par l'arrivée des deux paramètres λ, μ.

En posant

$$\lambda = -\cot\varphi, \qquad \mu = -\cot\psi,$$

nos équations du plan B prennent la forme

$$\begin{cases} x_2 - x_3 \operatorname{tang}\varphi = 0, \\ x_4 - x_1 \operatorname{tang}\psi = 0, \end{cases}$$

contenant deux angles dont il importe que la signification géométrique soit bien comprise.

Ce sont des *dièdres d'espaces,* savoir : φ des espaces

$$x_2 \text{ et } x_2 = x_3 \operatorname{tang}\varphi, \qquad \text{ou} \qquad \text{A}'\text{P}' \text{ et BP}',$$

ψ des espaces

$$x_4 = 0, \text{ et } x_4 = x_1 \operatorname{tang}\varphi, \qquad \text{ou} \qquad \text{AP et BP};$$

P′ est l'arête du premier dièdre, P celle du second, A′ et B les faces du premier, A et B celles du second. Cette définition serait aussi claire que naturelle pour les géomètres à quatre dimensions; nous avons, nous, plus de facilité à considérer des angles de droites que des dièdres d'espaces. Heureusement la substitution est facile.

Il est clair, en effet, que la trace du plan B sur celui des $x_4\, x_1$ a pour équation, rapportée à ces deux axes,

$$x_4 - x_1 \operatorname{tang} \psi = 0,$$

et que celle sur le plan des $x_2\, x_3$ a pour équation

$$x_2 - x_3 \operatorname{tang} \varphi = 0.$$

Donc φ est l'angle que font ensemble les traces $O\beta'$ et Ox_1 des plans B et A sur le plan P′, et ψ est celui que font ensemble leurs traces $O\beta$ et Ox_3 sur le plan P.

Nous devons maintenant serrer la question de plus près en faisant intervenir le plan B.

Supposons que la droite Ox_4 tourne dans le plan A autour du point O et décrive ce plan tout entier pour revenir à sa position de départ. Soit Ox_1 une position quelconque. Elle est dans un même espace avec le plan B, puisqu'elle a un point commun avec lui. Nous pouvons donc la projeter orthogonalement sur ce plan comme le fait la géométrie à trois dimensions; soit Oy_1 cette projection qui est unique et déterminée.

Projetons de la même manière Oy_1 sur le plan A et soit $O\xi_1$ cette deuxième projection. A chacune des ∞ lignes Ox_1, il correspondra une ligne $O\xi_1$ unique et déterminée; les deux multiplicités sont donc en relation homographique (§ 18): ce sont deux faisceaux qui sont dans un même plan A et y ont leurs sommets l'un sur l'autre.

On sait [1] que, quand deux faisceaux homographiques ont le même sommet, il y a deux *rayons doubles*, c'est-à-dire dont chacun, considéré comme appartenant à l'un des deux faisceaux, est son propre correspondant dans l'autre. Appelons-les, dans notre cas, Oa_1 et Oa_2; appelons en outre Ob_1 et Ob_2 leurs projections sur

---

[1] CHASLES, *Géométrie supérieure*, Chap. VIII (p. 115 de la 2e édition).

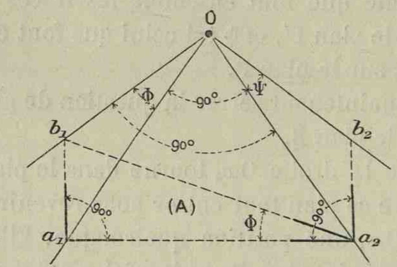
le plan B, qui sont les positions correspondantes de la droite Oy_1; en d'autres termes, remplaçons, dans la figure de la page 71, x_1, x_2, β et β' par a_1, a_2, b_1, b_2.

Si nous considérons le trièdre $Ob_1a_1a_2$, rectangle le long de l'arête a_1, nous avons

$$\cos \widehat{b\,a_2} = \cos \widehat{a_1\,a_2} \cos \widehat{b\,a_1};$$

mais les deux droites Ob_1 et Oa_2 sont perpendiculaires entre elles parce qu'elles sont dans deux plans absolument perpendiculaires a_1Ob_1 et a_2Ob_2 (§ 14, III); on a donc $\widehat{b_1a_2} = 90^\circ$ et par suite aussi $\widehat{a_1a_2} = 90^\circ$, donc le trièdre est isoscèle birectangle et *nos deux*

Fig. 11.



rayons doubles sont perpendiculaires entre eux. Nous pouvons prendre indifféremment, pour figurer l'angle, soit l'angle plan b_1Oa_1, soit l'angle dièdre $b_1a_2a_1$.

Nous voici parvenus au terme de cette longue étape:

1° Chacune des droites Oa_1, Oa_2, d'une part, Ob_1, Ob_2 d'autre part, est la projection orthogonale de l'autre, et ainsi s'établit entre les deux plans A, B la réciprocité qui est une des choses que nous cherchions.

2° Notre quadrièdre droit avait été construit avec une droite Ox_1 et avec un plan $P' = x_1x_4$ indéterminés l'un et l'autre: c'est la droite Oa_1 qu'il faut prendre pour Ox_1 et le plan a_1Ob_1 pour P'.

Alors nous aurons deux angles Φ et Ψ *déterminés en position et en grandeur;* ils jouiront de la propriété *d'invariance,* qui est une autre chose que nous cherchions, et qu'il est impossible de réaliser avec un paramètre unique. Ce sont ces deux angles qui caractérisent un système de deux plans se coupant suivant un point comme le caractérise la section droite du dièdre quand ils se coupent suivant une droite, et comme le dièdre d'espaces caractérise un système de deux espaces; c'est d'eux qu'il faut dire que *deux systèmes de deux plans sont identiques quand ils y sont les mêmes et différents dans le cas contraire.*

On les appelle *les angles des deux plans.*

Les quatre droites (*fig.* 11)

$$Oa_1,\quad Oa_2,\quad Ob_1,\quad Ob_2$$

forment un quadrièdre qui est compris entre les deux plans et qu'il est commode de considérer quand il s'agit de leur inclinaison. Ses quatre dièdres sont droits, ce qui serait impossible dans l'espace ordinaire; de ses quatre faces, deux sont des angles droits et sont, l'une dans le plan A, l'autre dans le plan B; les deux autres sont chacune dans un plan qui est perpendiculaire à la fois à A et à B, et sont, l'une l'angle Φ, l'autre l'angle Ψ.

Ces deux angles jouissent de diverses propriétés dont voici les principales:

1° Si l'on considère le dièdre formé par un espace générateur quelconque du plan A avec un espace générateur quelconque du plan B, ce dièdre demeure compris entre un maximum et un minimum qui ne sont autre chose que nos deux angles.

2° Menons par le point O une droite b dans le plan B et une autre droite a dans le plan A. On sait que si la droite b demeure immobile et que la droite a exécute une rotation complète dans le plan A, l'angle ba ne descend pas au-dessous d'un minimum m qu'on appelle *l'angle de la droite et du plan.* Supposons que la droite b exécute à son tour une rotation complète dans le plan B; l'angle m variera sans descendre au-dessous d'un *minimum* qui est précisément un des deux angles Φ, Ψ, et sans s'élever au-dessus d'un *maximum* qui est l'autre.

Partant de cette propriété, prise comme évidente *a priori* ou démontrée par des considérations faciles, on peut en faire la définition des angles Φ, Ψ et le point de départ de la théorie; c'est ainsi que procède M. Schoute.

3° Si, du point O comme centre, on trace un cercle dans le plan B, la projection (*voir* § 14) de ce cercle sur le plan A est une ellipse dont Oa_1 et Oa_2 sont les deux axes; un cercle tracé dans le plan A avec le centre O se projette de même sur B suivant une ellipse dont Ob_1 et Ob_2 sont les deux axes (¹).

Un point resterait à élucider pour achever la question. Nous l'avons ramenée aux rayons doubles de deux faisceaux homographiques superposés; or ces rayons doubles peuvent être réels ou imaginaires, et il nous incomberait d'établir que c'est toujours le premier cas dans la question actuelle. Nous laisserons ce point de côté, nous contentant d'avoir mis dans son jour le singulier mode de relation qui se présente ici, et qui n'a rien d'analogue dans les deux premières géométries. Au fond, les angles de deux plans dépendent d'une équation du second degré; quelle que soit la grandeur auxiliaire qn'on leur substituera, on ne pourra esquiver, ni ce fait, ni les calculs plus ou moins compliqués qui en sont la conséquence si l'on veut traiter la question complètement.

Les auteurs italiens l'ont résolue en prenant appui sur un être qui semble au premier abord n'avoir guère de relation avec elle: *la sphère imaginaire infiniment éloignée dans l'étendue* (*voir* plus loin, § 34).

§ 27. — Plans d'angles égaux.

Les deux angles Φ, Ψ sont indépendants l'un de l'autre et peuvent avoir chacun toutes les valeurs possibles. S'ils sont nuls tous les deux, c'est que les deux plans sont parallèles suivant le deuxième mode. Si l'un d'eux est nul sans que l'autre le soit, ou les deux plans se coupent suivant une droite, ou ils sont parallèles suivant le premier mode. Si l'un d'eux est droit, les deux plans sont *simplement perpendiculaires* entre eux, et s'ils sont droits

(¹) La question des angles de deux plans est difficile et n'a pas été étudiée par beaucoup d'auteurs. Citons:

Hoppe, *Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionalen Geometrie* (*Arch. der Math. und Phys.*, t. LXVIII, 1882).

Schoute, *Les angles quadridimensionaux de deux plans* (*Nieuw Archief*, 2ᵉ série, t. III, p. 111-116).

Veronèse, *Fondamenti di Geometria*, Padoue, 1891. — Ce dernier auteur traite la question par les droites riemanniennes que les deux plans ont dans l'espace de l'infini, les angles des deux plans correspondant aux *deux plus courtes distances* de ces droites.

tous les deux, les deux plans sont *absolument perpendiculaires* entre eux.

Enfin ils peuvent être *égaux*. Ils ne sauraient le devenir par le fait de la rotation qu'en commençant ce paragraphe nous avons donnée au système de coordonnées, s'ils sont inégaux à un moment quelconque de cette rotation; mais ils le demeurent tout le temps s'ils sont égaux à un moment quelconque. Alors il n'y a plus ni maximum ni minimum; les angles ne sont plus au nombre de deux, mais sont en nombre infini et l'on dit des deux plans qu'ils sont *plans d'angles égaux*, ou *plans à une infinité d'angles*. Le cas correspond à celui, en géométrie plane, de deux faisceaux homographiques superposés ayant plus de deux rayons doubles.

CHAPITRE VII.

LES ÊTRES DE LA GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

§ 28. — Les lignes, les surfaces et les hypersurfaces.

Le premier livre de la Géométrie analytique à trois dimensions a pour titre : *La ligne droite et le plan.* Ce qui précède est un résumé succinct de ce qu'est le livre correspondant de la Géométrie analytique à quatre dimensions, intitulé : *La ligne droite, le plan et l'espace.* Si nous voulions continuer cette exposition, il nous faudrait reprendre les équations (2), (3) et (4) du début, et les discuter en supposant maintenant que A, B, C sont des fonctions de degré supérieur des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4.

Alors le système (2), formé de trois équations, représente *une ligne,* le système (3), formé de deux équations, représente une *surface,* et l'équation unique (4) représente une *hypersurface.* Ces dénominations demandent à être expliquées par quelques considérations d'ordre géométrique.

Quand le point, qui est l'être géométrique primordial, se déplace dans l'étendue d'une manière continue, il engendre une *ligne,* — on dit aussi *une courbe.* Quand une ligne se déplace dans l'étendue de telle sorte que, si l'on considère deux positions *successives,* à un point de la première il corresponde un point de la seconde et réciproquement, elle engendre une *surface.* Quand une surface se déplace dans l'étendue sous la même condition, elle engendre une *hypersurface.* La ligne ou la surface mobile s'appelle la *génératrice,* et la ligne formée par une suite de points correspondants s'appelle la *directrice.*

En résumé, la ligne est un lieu géométrique de points; la surface, un lieu géométrique de lignes, et l'hypersurface un lieu géométrique de surfaces. La première est à *une* dimension, la seconde à *deux*, la troisième à *trois*.

1° *Les lignes.*

Une ligne peut être tout entière dans un même plan, ou tout entière dans un même espace, ou, ce qui est le cas général, traverser successivement une infinité d'espaces différents; on dit, suivant chacun de ces trois cas, qu'elle est *à simple, à double* ou *à triple courbure*. Le serpent enroulé par terre est une ligne à simple courbure; quand il lève en l'air une partie seulement de son corps, c'est une ligne à double courbure; mais il ne peut pas nous donner, et nous ne pouvons pas voir, d'aucune autre manière, la ligne à triple courbure.

Dans celle-ci, deux points consécutifs déterminent une droite qui s'appelle *la tangente;* trois points consécutifs, un plan qui s'appelle le *plan osculateur;* quatre points consécutifs, un espace qui s'appelle l'*espace hyperosculateur*.

En chaque point, il y a :

— Un ∞^2 de droites perpendiculaires à la tangente (§ 14); elles s'appellent les *normales* et sont dans un espace appelé l'*espace normal;* il y en a une, et une seule, dans le plan osculateur : c'est la *normale principale;*

— Un ∞^1 de droites perpendiculaires au plan osculateur (§ 14); on les appelle les *binormales;* il y en a une, et une seule, dans l'espace hyperosculateur : c'est la *binormale principale;*

— Une seule droite perpendiculaire à l'espace hyperosculateur; elle s'appelle la *trinormale,* parce qu'elle est perpendiculaire à trois tangentes consécutives;

— Un ∞^1 de plans normaux, tous situés dans l'espace normal; il y en a un, et un seul, dans l'espace hyperosculateur; il s'appelle le *plan normal principal.*

La normale et la binormale principales sont à la fois dans l'espace normal et dans l'espace hyperosculateur.

La tangente, la normale principale, la binormale principale et la trinormale, en un point donné de la ligne, constituent *ses directions principales;* elles forment un quadrièdre droit.

On prend le rapport de l'angle de deux tangentes consécutives, deux plans osculateurs consécutifs, deux espaces hyperosculateurs consécutifs, à l'arc infiniment petit compris entre leurs points de contact, comme mesure de la première, de la deuxième, de la troisième courbures. C'est, en quelque sorte, la rapidité avec laquelle la forme de la courbe s'éloigne de la forme rectiligne, à simple courbure, à double courbure (1).

La ligne est coupée par un espace en un ou plusieurs points. On dit qu'elle est de degré m quand le nombre de ces points est m; alors, une au moins des quatre coordonnées figure au moins une fois avec l'exposant m dans une au moins de ses trois équations.

2° *Les surfaces.*

La surface est coupée par un espace suivant une ligne et par un plan suivant un ou plusieurs points. On dit qu'elle est du degré m quand, dans le second cas, le nombre de ces points est m.

La théorie des surfaces dans l'étendue a été peu étudiée parce qu'elle présente beaucoup d'analogies avec ce qui se voit dans l'espace à trois dimensions. Elle fait l'objet d'une dissertation publiée en 1897 (2), à Tubingue.

3° *Les hypersurfaces.*

L'hypersurface est coupée par un espace suivant une surface, par un plan suivant une ligne, par une ligne suivant un ou plusieurs points. On dit qu'elle est de degré m quand, dans le troisième cas, le nombre des points est m. Alors, une au moins des quatre coordonnées figure au moins une fois dans son équation avec l'exposant m.

On verra, dans les paragraphes ci-après, **31** à **35**, quelques hypersurfaces particulières.

---

(1) *Voir*, pour la théorie analytique des trois courbures : PIRONDINI, *Sulle linee a tripla curvatura nello spazio euclideo a quattre dimensioni.* (*Giorn. di Battaglini*, 1890).

(2) KOMMERELL, *Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raume von vier Dimensionen*, in-8°, 53 pages, Tubingue.

Voyez aussi : SERVANT, *Sur une extension des formules de Gauss* (*Bull. Soc. Math.*, t. XXX, fasc. II, 1902).

§ 29. — L'hypervolume.

L'extension de la notion de volume se fait comme il suit. Les intégrales double, triple et quadruple, prises entre des limites déterminées, des différentielles

$$x_2 dx_1, \quad x_3 dx_1 dx_2, \quad x_4 dx_1 dx_2 dx_3$$

représentent respectivement :

Dans la Géométrie à deux dimensions, l'*aire* comprise entre deux droites parallèles à l'axe des x_2, et les segments qu'elles interceptent d'une part sur l'axe des x_1, d'autre part sur une courbe donnée ;

Dans celle à trois, le *volume* compris entre quatre plans parallèles, deux à $x_1 = 0$, deux à $x_2 = 0$, et les intersections de ces plans, d'une part avec le plan $x_3 = 0$, d'autre part avec une surface donnée ;

Dans celle à quatre, l'*hypervolume* compris entre six espaces parallèles, deux à $x_1 = 0$, deux à $x_2 = 0$, deux à $x_3 = 0$, et les intersections de ces espaces, d'une part avec $x_4 = 0$, d'autre part avec une hypersurface donnée.

Notre pensée ne peut pas *voir* la dernière figure, mais elle peut néanmoins se rendre compte comme il suit de sa constitution. Supposons, pour simplifier : 1° que l'hypersurface est tout simplement un espace parallèle à $x_4 = 0$; 2° que l'un des espaces de chacun des trois couples d'espaces parallèles est un des trois autres espaces coordonnés. En d'autres termes, il s'agit de la portion d'étendue comprise entre les espaces

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \quad \text{et} \quad x_1 = a, \\ x_2 &= 0 \quad \text{et} \quad x_2 = b, \\ x_3 &= 0 \quad \text{et} \quad x_3 = c, \\ x_4 &= 0 \quad \text{et} \quad x_4 = d, \end{aligned}$$

a, b, c, d étant quatre longueurs déterminées. C'est le *parallélépipède à quatre dimensions, droit* si les axes sont rectangulaires, *oblique* s'ils ne le sont pas.

L'espace $x_4 = 0$ et son parallèle $x_4 = a$ sont coupés chacun suivant des couples de plans parallèles par les trois autres couples, ce qui y forme un parallélépipède. Il en est de même pour chacun des autres couples d'espaces, d'où il suit que l'hypercorps en question est limité par huit *parallélépipèdes*. Quatre de ceux-ci, situés un dans chaque espace coordonné, ont un sommet commun sur l'origine des coordonnées. Il y a en tout seize sommets semblables, en chacun desquels se réunissent quatre parallélépipèdes limitants. 32 *arêtes* vont d'un sommet à l'autre. Enfin chaque face d'un des huit parallélépipèdes lui est commune avec un des sept autres, et ces 48 faces n'en font ainsi que 24 de l'hypercorps. Un cas particulier de cette figure fera l'objet du § 41, sous le nom d'*octaédroïde*.

Telle est la constitution géométrique des êtres *à quatre dimensions*, seuls doués de l'existence réelle si un champ concret du quatrième degré englobe le nôtre, sans être englobé lui-même dans des champs supérieurs.

Naturellement, l'unité à laquelle il faut rapporter l'hypervolume est *le mètre élevé à la quatrième puissance*. Quant aux hypersurfaces, leur unité est le *mètre cube*, et elles sont homogènes avec les solides à trois dimensions. Ainsi les choses qui sont désignées par les mots *aire*, *volume* et *hypervolume*, et qui ont pour mesures des multiples ou sous-multiples de

$$1^{m^2}, \quad 1^{m^3}, \quad 1^{m^4},$$

sont des *contenus* dans les géométries à 2, 3 et 4 dimensions, et des *contenants* dans celles à 3, 4 et 5.

§ 30. — **Quadriques et quartiques.**

Jetons un rapide coup d'œil sur les êtres que représentent les trois systèmes

$$(4) \qquad A = 0,$$

$$(3) \qquad A = 0, \quad B = 0,$$

$$(2) \qquad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

du § 1, quand les polynomes A, B, C sont du *second degré :* nous sommes en présence des *quadriques* si nous avons pris la première ligne, des *quartiques* si nous avons pris la seconde.

L'équation $A = 0$ représente la *quadrique à trois dimensions* ou l'*hypersurface du second degré*. Elle contient quatorze paramètres; par conséquent, il passe une quadrique par quatorze points pris arbitrairement, et l'étendue en contient un ∞^{14}.

Quand ce n'est pas un cône, l'équation peut être ramenée à la forme si connue avec deux termes dans la Géométrie du plan, et avec trois dans celle de l'espace :

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}+\frac{x_4^2}{d^2}=1.$$

Étant donnée une relation de dualité entre deux configurations (§ 19), la quadrique peut être définie comme le lieu des points de l'une qui sont dans les espaces correspondants de l'autre.

La quadrique contient un ∞^3 de droites. Il passe un ∞ de ces droites en chaque point m de la quadrique ; elles forment un cône ordinaire du second degré, et l'espace contenant ce cône est l'*espace tangent au point m*. Chaque point a son espace tangent. *Un plan* est dit *tangent à la quadrique* en un point m quand il la coupe suivant deux droites passant par ce point.

Si, en chaque point d'une droite d de la quadrique, on mène l'espace qui est tangent à celle-ci, le nombre de ces espaces est ∞^1 et ils forment un faisceau (§ 8). Le plan, axe de ce faisceau, est tangent à la quadrique en tous les points de la droite d, c'est-à-dire la coupe suivant cette droite d comptée deux fois ; on l'appelle le plan *hypertangent*. Il passe un plan hypertangent par chaque droite de la quadrique; par suite, leur nombre est ∞^3. Le lieu des plans hypertangents passant par un point donné est un hypercône de première espèce (*voy.* § 34).

Le système (3), auquel nous avons déjà appliqué la dénomination de *quartique,* représente l'intersection de deux quadriques. C'est un lieu du second degré, homogène avec ceux que la Géométrie à trois dimensions étudie sous ce nom, mais autre et plus général : il s'en distingue au même titre que la courbe, intersection de deux surfaces du second degré, se distingue de la courbe plane appelée *conique*.

L'équation

$$A+\lambda B=0$$

représente un *faisceau de quadriques* passant par la quartique (3);

parmi ces quadriques, il y en a cinq qui sont des hypercônes de première espèce (§ 34).

Enfin le système (4) représente l'intersection de trois quadriques. C'est une *ligne du second degré*, généralement à triple courbure,

A notre connaissance, les travaux les plus importants sur les hyperquadriques et les hyperquartiques sont, pour les premières, un Mémoire de M. Sègre, publié dans le *Recueil de l'Académie de Turin*, et, pour les secondes, un Mémoire de M. Bordiga, publié dans les *Actes de l'Institut de Venise* (¹). Nous y renvoyons le lecteur. Mais, afin de le laisser encore un peu dans la compagnie de cet être singulier, l'hypersurface, qu'ignorent les Géométries à deux et à trois dimensions, nous en étudierons sommairement les deux formes les plus simples après celle du premier degré : l'hypersphère et l'hypercône. Ce sont des *quadriques particularisées,* mais la *particularisation* est plus profonde dans la seconde que dans la première.

La *sphère* de la Géométrie ordinaire est une *quartique particularisée :* l'intersection de deux quadriques dont l'une est une hypersphère et dont l'autre est *dégénérée en un espace.*

§ 31. — L'hypersphère.

L'équation, en coordonnées rectangulaires,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - R^2 = 0$$

représente un lieu dont tous les points sont à égale distance de l'origine; on l'appelle l'*hypersphère.* Les espaces la coupent suivant des *surfaces sphériques.* Considérons, par exemple, l'espace $x_4 = 0$ et déplaçons-le parallèlement à lui-même, c'est-à-dire substituons à cette première valeur de la coordonnée des valeurs progressivement croissantes. Au début, la section est une surface sphérique de rayon R; elle va en décroissant progressivement jusqu'à la position $x_4 = R$, pour laquelle elle se réduit à un

(¹) SEGRE, *Studio sulle quadriche in un spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (*Mem. de Turin* (2), p. 36, 1884).
BORDIGA, *Studio generale della quartica normale* (*Atti dell'Ist. ven.*, 1886).

point. Au delà, la section devient une *sphère imaginaire,* jusqu'à ce que notre espace sécant devienne *celui de l'infini.*

Pour cette dernière position, la sphère dont il s'agit est la même pour toutes les hypersphères de l'étendue et s'appelle la *sphère imaginaire infiniment éloignée.* Elle a été très employée par la brillante école italienne [1], qui la désigne habituellement par J_2; on la voit apparaître dans la question de l'angle de deux plans (§ 26).

Tous les plans A absolument perpendiculaires à un plan donné B (§ 17) sont complètement parallèles entre eux, c'est-à-dire vont couper l'espace de l'infini suivant une même droite a; de même tous les plans B absolument perpendiculaires aux plans A passent par une même droite b de l'infini. *Ces deux droites a et b sont polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à la sphère* J_2.

Deux sphères, qui sont un cas particulier de deux quartiques, n'ont en commun, si elles n'appartiennent pas à un même espace ou à une même hypersphère, que *quatre points,* deux à distance finie, réels ou imaginaires suivant la distance des centres, et deux sur la sphère J_2.

Un plan coupe l'hypersphère suivant une *circonférence* qui est maximum si le plan passe par le centre. Dans ce cas, la tangente à la circonférence est dite aussi *tangente à l'hypersphère.* Le lieu de toutes les tangentes en un point donné est un espace qui est perpendiculaire au rayon aboutissant à ce point, et s'appelle *l'espace tangent.* L'hypersphère est tout entière du même côté de cet espace. Tous les plans situés dans celui-ci sont tangents à l'hypersphère.

Cinq points donnés, non situés dans un même espace, déterminent l'hypersphère.

Deux hypersphères qui ont un point commun non situé sur la ligne des centres se coupent suivant une surface sphérique dont le centre est sur cette ligne et dont l'espace lui est perpendiculaire.

Quatre hypersphères qui n'ont en commun, ni une surface

(1) *Voyez,* par exemple, GIACOMINI, *Sulla corrispondenza fra la Geometria conforme di* S_4 *e la Geometria proiettiva dello spazio ordinario* (*Annali della Sc. norm. sup. di Pisa,* 1899).

sphérique, ni une circonférence, et qui n'ont pas un espace tangent commun en un même point, se coupent en *deux points* symétriques par rapport à l'espace des quatre centres, ou en deux points coïncidents, ou ne se coupent pas. Dans le second cas, elles ont une tangente commune perpendiculaire à l'espace des centres.

Mentionnons ici un curieux résultat concernant la sphère et signalé par M. Newcomb, de Baltimore [1] : c'est encore un exemple, pouvant être rapproché de ceux donnés § 15, des différences profondes que présenteraient les conditions de l'existence dans les troisième et quatrième champs.

Soient, dans notre espace $x_4 = 0$, deux sphères concentriques, l'extérieure de rayon R

$$(1) \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2, \qquad y_4 = 0.$$

et l'intérieure de rayon r

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2, \qquad x_4 = 0,$$

et soit $e = R - r$ l'épaisseur de la couche comprise entre elles. Supposons que, sans toucher à la première, on sorte la seconde de notre espace en faisant marcher son centre sur l'axe des x_4 d'une longueur quelconque ζ, et qu'en même temps on fasse varier son rayon r de la quantité ρ; ses équations seront alors

$$(3) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (r + \rho)^2, \qquad x_4 = \zeta.$$

La distance d'un point y_1, y_2, y_3, o, de la sphère R à un point x_1, x_2, x_3, x_4 de la sphère $r + \rho$ a pour carré

$$(4) \qquad (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + x_4^2,$$

et son *minimum*, obtenu en différentiant les équations (3) et (4), sera la *nouvelle épaisseur* ε au point y_1, y_2, y_3. La différentiation donne

$$(y_1 - x_1)\,dx_1 + (y_2 - x_2)\,dx_2 + (y_3 - x_3)\,dx_3 = 0,$$
$$x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3 = 0,$$

---

[1] *Note on a class of transformations which surfaces may undergo in space of more than three dimensions* (*Am. Journ. of Math.*, 1878).

d'où, avec une variable auxiliaire λ,

$$x_1 = \lambda y_1, \qquad x_2 = \lambda y_2, \qquad x_3 = \lambda y_3.$$

En substituant ces valeurs dans (4), nous avons

$$\varepsilon^2 = (\lambda - 1)^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + \zeta^2 = (\lambda - 1)^2 R^2 + \zeta^2,$$

et, en posant

$$(5) \qquad \zeta = e \sin\theta, \qquad \lambda = 1 + \frac{e}{R}\cos\theta,$$

il vient

$$\varepsilon^2 = e^2.$$

Donc, si la sphère r se déplace d'une manière continue à partir du point O, l'épaisseur de la couche *demeurera invariable* à la condition que ζ et λ soient déterminés à chaque instant comme l'indiquent les équations (5), en fonction d'un angle auxiliaire θ qui est l'*angle de position* de la ligne allant d'un point quelconque de la sphère immobile R au point correspondant de la sphère mobile $r + \rho$. Pendant un pareil mouvement, la couche considérée n'éprouve d'autre déformation que celle inhérente à la flexion qui se fait sur la surface extérieure, et qui peut être diminuée autant que l'on voudra en diminuant l'épaisseur e.

Quand θ arrive à 180°, nous avons les valeurs

$$\zeta = 0, \qquad \lambda = 1 + \frac{e}{R}, \qquad r + \rho = \lambda R = R + e,$$

dont la première veut dire que la sphère mobile est *revenue dans notre espace,* et la dernière qu'elle est *devenue extérieure à* R, l'épaisseur étant toujours demeurée la même. En un mot, la couche a été *retournée* sans déchirure et sans aucune déformation permanente, chaque point de la surface intérieure ayant décrit un angle de 180° autour du point correspondant de la surface extérieure.

§ 32. — L'hypersphère (suite). — Pôles et polaires.

Par un plan P, extérieur à l'hypersphère H, on peut mener deux espaces E_1, E_2 tangents à celle-ci et pas davantage. Soient a_1 et a_2 leurs points de contact.

Menons un espace E passant par le centre O. Il coupera : l'hypersphère suivant une sphère maxima S; le plan P suivant une droite D, et les deux espaces E_1, E_2 suivant deux plans tangents à la sphère en a_1, a_2. On sait que la droite D et la droite ab sont conjuguées harmoniques par rapport à la sphère S [1], c'est-à-dire passent par deux points conjugués, sont perpendiculaires au rayon sur lequel se trouvent ces deux points, et sont perpendiculaires entre elles. Donc, toutes les droites du plan P sont conjuguées avec ab; on dit que cette droite et ce plan sont conjugués entre eux par rapport à l'hypersphère H.

A ce théorème il correspond celui-ci, en vertu de la loi de dualité (§ 19). Par une droite D, extérieure à l'hypersphère H, on peut mener à celle-ci un ∞ d'espaces tangents E; leurs points de contact sont sur un cercle dont le plan P est conjugué avec D.

Une figure quelconque a pour correspondante une autre figure, qui est sa conjuguée, ou sa polaire (ces deux termes sont à peu près synonymes), par rapport à une hypersphère donnée H (plus généralement, si l'on veut, à une quelconque des quadriques non spécialisées). Aux

points, droites, plans et espaces

de la première, il correspond des

espaces, plans, droites et points

de la seconde.

§ 33. — L'hypersphère (suite); contenu et contenant.

Il est facile de trouver le *contenu* de l'hypersphère en faisant pour elle comme la géométrie de l'espace fait pour la surface sphérique. Rapportée à trois axes rectangulaires, celle-ci a pour équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2;$$

sa section par un plan à la hauteur x_3 est un cercle dont le rayon a pour carré $R^2 - x_3^2$ et dont la surface est $\pi(R^2 - x_3^2)$; une

[1] *Voyez*, par exemple, CATALAN, *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, p. 273.

tranche d'épaisseur dx_3 ayant ce cercle pour base a pour volume $\pi(R^2 - x_3^2)\,dx_3$, et il faut intégrer cette différentielle de $-R$ à $+R$, ou, après l'avoir doublée, de o à $+R$. En posant $x_3 = R\sin\theta$, la seconde forme devient

$$2\pi R^2 \cos^3\theta\, d\theta,$$

les limites étant maintenant o et $\frac{\pi}{2}$; on trouve aisément que l'intégrale est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

De même:

L'équation de l'hypersphère étant celle donnée plus haut, sa section par un espace situé à la hauteur x_4 est une sphère dont le rayon a pour carré $R^2 - x_4^2$ et dont le volume est $\frac{4}{3}\pi(R^2 - x_4^2)^{\frac{3}{2}}$; une tranche d'épaisseur dx_4 ayant cette sphère pour base a pour hypervolume $\frac{4}{3}\pi(R^2 - x_4^2)^{\frac{3}{2}}\,dx_4$, qu'il faut intégrer de $-R$ à $+R$, ou doubler et intégrer alors de o à $+R$. En posant $x_4 = R\sin\theta$, cette seconde forme devient

$$\frac{8}{3}\pi R^4 \cos^4\theta\, d\theta,$$

les limites étant maintenant o et $\frac{\pi}{2}$; on trouve aisément que l'ingrale est

$$\frac{1}{2}\pi^2 R^4.$$

Ce qu'on peut appeler *la surface* ou *le contenant* de l'hypersphère se trouve de même en opérant comme pour la circonférence du cercle et pour la surface de la sphère: c'est l'intégrale triple de

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx_4}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{dx_3}\right)^2}\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

En posant

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= R\cos\alpha,\\ x_2 &= R\sin\alpha\cos\beta,\\ x_3 &= R\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma,\\ x_4 &= R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\end{aligned}\right.$$

cette différentielle prend la forme

$$r^3 \sin^2\alpha \sin\beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

et donne, intégrée entre les limites convenables,

$$2\pi^2 R^3.$$

Si l'on appelle

$$A_2, A_3, A_4 \quad \text{et} \quad B_2, B_3, B_4$$

le contenu et le contenant de ce lieu qui porte successivement, dans nos trois géométries, les noms de *circonférence, sphère* et *hypersphère,* on a

$$\begin{cases} A_2 = \pi R^2, \\ A_3 = \dfrac{4}{3}\pi R^3, \\ A_4 = \dfrac{1}{2}\pi^2 R^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} B_2 = 2\pi R, \\ B_3 = 4\pi R^2, \\ B_4 = 2\pi^2 R^3, \end{cases}$$

et l'on voit qu'il y a entre ces valeurs les relations

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{R}{2}, \qquad \frac{A_3}{B_3} = \frac{R}{3}, \qquad \frac{A_4}{B_4} = \frac{R}{4},$$

c'est-à-dire que *le contenu se déduit du contenant en multipliant par le rayon et divisant par le degré du champ.* Cette formule se représentera §§ 43 et 56.

§ 34. — Les cônes.

On sait que, si l'on veut obliger une quadrique à avoir un point double (il n'y a pour cela qu'à égaler son discriminant à zéro), elle se *particularise,* dans la géométrie plane, en *un système de deux droites.*

Dans la géométrie de l'espace, le point double cherché, sans vous consulter, se complique d'une multiplicité infinie, et prend le titre de sommet : vous avez *un cône.* C'est ce que nous appellerons le *cône ordinaire,* ou à deux dimensions; dans l'étendue, un plan le coupe en deux points, à moins qu'il ne soit avec lui dans un même espace ; un espace le coupe suivant une conique. Quant au système de deux droites, ce n'est plus une conique particularisée, mais *dégénérée.*

Sous la même condition d'avoir un point double, la quadrique de la géométrie à quatre dimensions se particularise aussi en un cône, et elle peut le faire de deux façons (qui dépendent des déterminants du discriminant). Dans la première, vous avez *un sommet,* et, dans la seconde, *une infinité de sommets en ligne droite.* Ce sont les deux cônes à trois dimensions : celui de première espèce, et celui de seconde espèce. Quant au cône à deux dimensions, il n'est plus, à son tour, qu'une quadrique dégénérée.

1° *Hypercône de première espèce.*

C'est le lieu des droites menées d'un point fixe appelé *sommet* à tous les points d'une *surface* du second degré. On peut aussi l'engendrer en faisant correspondre homographiquement les espaces générateurs de deux plans fixes se coupant suivant un point : il est le lieu des plans d'intersection de deux espaces correspondants.

Il contient deux systèmes de plans ; ceux d'un même système n'ont d'autre point commun que le sommet ; ceux de systèmes différents se coupent suivant une droite.

D'un point extérieur à l'hypersphère, on peut lui mener un ∞^2 de tangentes, qui forment un hypercône de première espèce. Cet hypercône particulier est *circulaire,* et a pour axe le diamètre passant par son sommet. Les points de contact des tangentes sont sur une surface sphérique dont l'espace est perpendiculaire à ce diamètre ; on l'appelle *la sphère de contact.*

2° *Hypercône de seconde espèce.*

C'est le lieu des plans menés par une droite fixe appelée *droite-sommet* et par les points d'une conique directrice.

D'une droite extérieure à une hypersphère, on peut lui mener un ∞^1 de plans tangents qui forment un hypercône circulaire de seconde espèce. Il a deux plans de symétrie qui sont perpendiculaires entre eux suivant le mode absolu ; l'un de ces plans est celui mené par la droite-sommet et par le centre de l'hypersphère. Tout espace passant par un de ces plans rencontre les plans générateurs suivant des droites symétriques deux à deux.

Chacun des plans de symétrie est *plan d'angles égaux* (§ 27) avec un plan générateur quelconque.

Les plans d'angles égaux avec un plan donné et le rencontrant en un même point forment un hypercône circulaire de seconde espèce. On peut déduire de ce théorème une construction *des angles de deux plans* (1).

§ 35. — L'échelle des êtres géométriques.

En résumé, voici l'échelle des êtres géométriques, jusqu'au champ du quatrième degré inclusivement

Dans le plan, champ du deuxième degré, il n'y a que des *lignes*, êtres à une dimension pouvant circonscrire des portions de plan appelées *aires*.

Dans l'espace, champ du troisième degré, il y a, en plus, des *surfaces*, êtres à deux dimensions, qui sont homogènes avec les aires, sont comme des plans courbes, et peuvent circonscrire des portions d'espace appelées *volumes*, ou *solides à trois dimensions*. Les lignes de l'espace ont plus de généralité que celles des plans, qui n'en sont que des cas particuliers.

Dans l'étendue, champ du quatrième degré, il y a, en plus des lignes et des surfaces, des *hypersurfaces*, êtres à trois dimensions, qui sont homogènes avec les volumes, sont comme des espaces courbes et peuvent circonscrire des portions d'étendue appelées *hypervolumes* ou *solides à quatre dimensions*. Les lignes et les surfaces de l'étendue ont plus de généralité que celles des espaces, qu'elles comprennent comme cas particuliers; quelques auteurs donnent aux secondes le nom d'*hypercourbes*, parce qu'elles ont la même situation dans l'étendue que les courbes dans l'espace.

Les corps correspondant au polygones de la géométrie à deux dimensions et aux polyèdres de celle à trois, ont reçu le nom d'*hyperpolyèdres*, ou *polyédroïdes;* ils feront l'objet du Chapitre suivant.

On voit que la géométrie à quatre dimensions implique l'existence, non seulement d'une infinité d'espaces linéaires, c'est-à-dire pareils au nôtre et n'en différant que par leur situation dans

(1) VERONESE, *Fondamenti di Geometria*. Padoue, 1891; p. 502.

l'étendue, mais encore celle d'une infinité d'*espaces courbes,* qui sont les hypersurfaces de tous degrés. Ces espaces plus généraux diffèrent de l'espace ordinaire et diffèrent les uns des autres comme les surfaces diffèrent du plan et diffèrent les unes des autres; ils ne sont pas identiques à eux-mêmes dans leurs parties; ils sont donc aptes à contenir certaines formes géométriques et non certaines autres, comme, dans le monde à trois dimensions, une surface sphérique se refuse à recevoir un triangle sphérique provenant d'une autre sphère dont le rayon n'est pas égal au sien; ils n'ont pas cette qualité, qui appartient à notre espace seul, que nous avons démontrée au § 22, que M. Delbœuf (1) appelle *homogénéité,* et qui permet de *majorer* ou *minorer* une figure sans en modifier la forme.

Est-il permis de leur attribuer une existence concrète? On reviendra sur cette question au § 47.

(1) *Prolégomènes philosophiques de la Géométrie.* Voyez aussi Lechalas, *l'Espace et le Temps.*

CHAPITRE VIII.

LES POLYÉDROÏDES.

§ 36. — Généralités.

Ainsi qu'on vient de le dire, le nom de *polyédroïde* a été donné aux configurations qui correspondent, dans la géométrie à quatre dimensions, aux polyèdres de celle à trois et aux polygones de celle à deux. Comprendre un pareil corps n'est pas chose facile, même dans la mesure restreinte à laquelle nous nous sommes résignés en ce qui concerne la quatrième dimension; pour y arriver, il convient de partir du polygone, et de suivre de près l'évolution qui s'accomplit quand il s'élève, d'abord au rang de polyèdre, puis à celui de polyédroïde. Nous désignerons, en attribuant à ces notations un caractère *générique,* par

$$F_0, \quad F_1, \quad F_2, \quad F_3,$$

des figures dans lesquelles le nombre de dimensions est

zéro, un, deux ou trois,

c'est-à-dire qui sont formées de points, de lignes, de surfaces ou de volumes.

La figure que forment, *dans un plan,* des portions de droite se touchant deux à deux par leurs extrémités, et ne laissant entre elles aucune interruption, est un polygone. Elle a deux sortes de *figures limitantes*: les côtés, qui sont des F_1, et les sommets, qui sont des F_0; chaque sommet sert de contact entre deux côtés une fois, et rien qu'une.

Augmentant les dimensions d'une unité, nous dirons : La figure que forment, *dans un espace,* des portions de plans se touchant deux à deux par leurs bords et ne laissant entre elles aucune interruption est un *polyèdre;* les portions des plans s'appellent les *faces*, et les bords communs par lesquels elles se touchent s'appellent les *arêtes.* Les côtés, F_1, du polygone sont devenus des faces, F_2, du polyèdre ; le point de contact de deux côtés, F_0, est devenu la ligne de contact de deux faces, une arête, F_1 ; les bords d'une face servent chacun de contact une fois, et rien qu'une. Il est apparu un élément de plus : les *sommets,* F_0, dont chacun est l'aboutissant d'au moins trois faces et d'au moins trois arêtes. *Le polygone est devenu un polyèdre.*

Augmentons encore les dimensions d'une unité. La figure formée, *dans l'étendue,* par des portions d'espace se touchant deux à deux et ne laissant entre elles aucune interruption est un *polyédroïde;* les portions d'espace s'appellent *les cases* [1], et les portions de plan par lesquelles elles se touchent s'appellent les *faces.* L'arête, F_1, qui était, dans le polyèdre, la ligne de contact de deux faces, est devenue une *face* F_2, suivant laquelle se touchent deux cases; chaque face d'une case sert une fois, et une seule, de face de contact. Le sommet F_0, qui était l'aboutissant d'au moins trois faces, est devenu une portion de droite F_1, que nous appellerons encore une *arête* pour ne pas créer de mot, et qui est l'aboutissant d'au moins trois cases. Enfin il est apparu un élément de plus : les *sommets,* F_0, dont chacun est l'aboutissant d'au moins trois cases et d'au moins quatre arêtes. *Le polyèdre est devenu un polyédroïde.*

Le polygone, le polyèdre et le polyédroïde ont, chacun dans le champ qui lui est dévolu, un *intérieur* et un *extérieur,* et c'est un point qui n'a pas toujours été bien compris en ce qui concerne le dernier. Nous l'expliquerons au moyen de la figure suivante, représentant un polyédroïde particulier

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16,$$

qui fera l'objet du § 42.

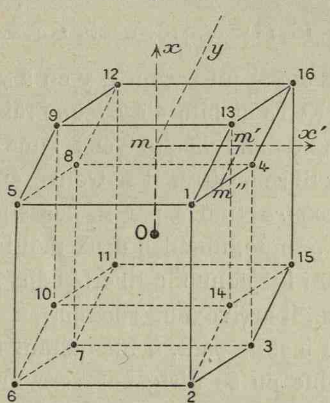
Considérons un point matériel partant du centre O et marchant sur une ligne indéfinie Ox perpendiculaire à l'un S des espaces

---

[1] Les Allemands et les Anglais disent: *cellules* (Zell, Cell).

constituants. Arrivé à celui-ci, il le traverse en un point m, et il le traverse instantanément, parce que l'espace a, dans ce sens, une dimension infiniment petite (§ 2). Il se trouve alors libre dans l'étendue quatre fois infinie ; il est passé de l'*intérieur* à l'*extérieur* du polyédroïde. Ce sera la même chose si, en passant

Fig. 12.



au point m, il dévie sur une direction my faisant avec Ox un angle quelconque *autre que* 90°.

Si, en arrivant au point m, il quitte la direction Ox et s'engage sur une des ∞^2 directions qui lui sont perpendiculaires (§ 14), par exemple mx', il se trouvera dans l'espace S, et il y sera enfermé dans *une case*

$$1.4.16.13.5.8.12.9;$$

de quelque côté qu'il se tourne, il en aura une face devant lui. Supposons qu'il vienne se heurter contre une de celles-ci en un point m', et suivant une direction perpendiculaire $mm'x'$. S'il conserve cette direction ou s'en écarte d'un angle *différent de* 90°, il traversera le plan et se trouvera dans un autre espace S', enfermé dans une autre case

$$1.4.16, 13.2.3.15.14$$

pareille à la première, où les mêmes péripéties l'attendent.

Mais si, étant en m', il s'engage sur une des ∞^1 directions de l'espace S qui sont perpendiculaires à $m'x'$, par exemple $m'm''$, alors il se trouvera dans un plan et il y sera enfermé dans un polygone

1.4.16.13.

Qu'il marche jusqu'à ce qu'il arrive à un côté 1.4 de celui-ci; là, il voit avec étonnement plusieurs plans se présenter à lui, sans compter celui par lequel il est arrivé. Il y en a *trois* au total dans la figure qui sert de support à notre démonstration, savoir:

1.4.16.13; 1.4.8.5 et 1.4.3.2;

nous verrons (§§ 42 et 46) un cas où il y en a *quatre* et un autre où il y en a *cinq*. Notre mobile n'a aucune raison pour préférer l'un ou l'autre plan et, dans chacun d'eux, l'une ou l'autre moitié; embarrassé de son libre arbitre, il se trouve en un de ces *points singuliers de trajectoire* étudiés par M. Boussinesq [1]. Quel que soit le plan qu'il prenne, une des deux moitiés le ramène dans un polygone, l'autre lui donne la liberté dans le plan. Enfin, s'il longe le côté même, il arrive à un sommet.

En définitive, le mobile peut, à un instant quelconque, se libérer dans l'étendue en se dirigeant vers un quelconque des points de l'espace situé à l'infini de celle-ci, pourvu, lorsqu'il se trouve dans une case, que ce ne soit pas un des points du plan d'intersection de cet espace avec celui de cette case. Il peut aussi, par de judicieux changements de direction, gagner une figure limitante du genre F_3, ou F_2, ou F_1, ou F_0, et devenir habitant d'un espace, ou d'un plan, ou d'une droite, ou d'un point unique.

Quelques points de cette organisation se dérobent à notre perception, mais non à notre analyse. Ils se préciseront quand nous examinerons les polyédroïdes réguliers et nous y reviendrons avec celui qui se présentera le premier : l'octaédroïde.

Les arêtes partant d'un sommet S d'un polyèdre forment par leurs autres extrémités un *polygone* dont les sommets et les côtés sont des sommets et des côtés du polyèdre. De même, si l'on considère les autres extrémités des arêtes partant d'un sommet S d'un polyédroïde, ces points sont les sommets d'un *polyèdre*, dont les sommets, les arêtes et les faces sont des sommets,

---

(1) *Conciliation du Déterminisme et de la liberté morale.* Lille, 1878. — *Voy.* aussi notre Ouvrage : *Introduction à la Théorie de l'Énergie,* p. 141.

des arêtes et des faces du polyédroïde. Ce polyèdre joue un rôle important dans l'étude de l'hypercorps, ainsi que nous le verrons plus loin (§ 39).

De même que toutes les arêtes d'un polyèdre sont *doubles*, c'est-à-dire appartiennent à *deux faces*, de même toutes les faces d'un polyédroïde sont *doubles*, c'est-à-dire appartiennent à *deux cases*. S'il s'en trouve parmi les premières qui soient *simples*, elles forment ensemble un polygone qui est le *bord d'un trou*; s'il s'en trouve parmi les secondes qui soient *simples*, elles forment ensemble un polyèdre qui est *la paroi d'un évidement*. Polygone et polyèdre peuvent ne pas être contenus en entier, le premier dans un plan, le second dans un espace.

§ 37. — Formule d'Euler.

Si l'on appelle :

p_0, p_1 le nombre des sommets et celui des côtés d'un polygone,

p_0, p_1, p_2 ceux des sommets, des arêtes et des faces d'un polyèdre,

p_0, p_1, p_2, p_3 ceux des sommets, des arêtes, des faces et des cases d'un polyédroïde,

il y a entre ces nombres les relations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} p_0 - p_1 = 0, \\ p_0 - p_1 + p_2 = 2, \\ p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0. \end{cases}$$

La première est évidente. La seconde est la célèbre *formule d'Euler*, donnée en ces termes, par ce grand mathématicien, dans le *Recueil de l'Académie de Saint-Pétersbourg* pour les années 1752-53 [1] :

In omni solido hedris planis incluso, numerus hedrarum unà cum numero angulorum solidorum, binario excedit numerum acierum.

---

[1] *Novi commentarii Academiæ Scientiarum J. Petropolitanæ*, tomus IV, ad annum 1752-53; Petropoli, 1758.

Il a été signalé presque en même temps par Prouhet à l'Académie des Sciences de Paris ([1]) et par Baltzer à celle de Berlin ([2]), que le théorème d'Euler se trouve dans Descartes, qui toutefois ne l'énonce pas explicitement (*Œuvres inédites de Descartes,* publiées par Foucher de Careil; Paris, 1860, t. II, p. 214).

Un très grand nombre de mathématiciens se sont occupés de ce théorème, pour en donner, soit des démonstrations, dont quelques-unes ont peu de valeur, soit des généralisations. Citons Legendre, Steiner, Grünert, Gergonne, Kirkmann, Schubert, Durège, Lhuilier, Cauchy, Listing, Cayley, Halsted, Poinsot, Jordan, amiral de Jonquières, Perrin ([3]). La meilleure démonstration est peut-être encore celle d'Euler qu'il ne trouva, paraît-il, qu'avec beaucoup de peine et après le théorème lui-même, et de laquelle dérivent celles de Cauchy, de l'amiral de Jonquières, etc.; chose remarquable, elle n'emploie que les notions les plus élémentaires de Géométrie.

Elle consiste dans cette suite de trois propositions, chacune de démonstration facile (p. 145 à 158 du volume cité) :

1° Proposito solido quocumque hedris planis incluso, indè datum angulum solidum ita resecare, ut in solido residuo numerus angulorum solidorum unitate sit minor.

2° Si à corpore proposito angulus quispiam solidus modo antè exposito

---

([1]) *Comptes rendus,* 1860, 1er semestre, p. 779.

([2]) *Monatsberichte,* 1861, p. 1143.

([3]) On peut voir :

1° Sur les polyèdres en général : Brückner, *Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte,* in-4°, Leipzig, 1900, Ouvrage qui peut s'appeler l'*Encyclopédie* de la question; Listing, *Mémoires de Gottingue,* 1831; Cayley, *Philosophical Magazine,* 1861; Jordan, *Recherches sur les polyèdres* (*Journal de Crelle,* t. 68, 1867; Amiral de Jonquières, *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CX, 1890; Eberhard, *Zur Morphologie der Polyeder*; Leipzig, 1891.

2° Sur les polyèdres réguliers : Bravais, *Les polyèdres symétriques de la Géométrie* (*Journal de Liouville,* 1849); Badoureau, *Mémoire sur les figures isoscèles* (*Journal de l'École Polytechnique,* 49e Cahier, 1881); Hugel, *Die regulären und halbregulären Polyeder,* mit 113 stereoscopischer Figuren, Neustadt a. d. H., 1876; Wiener, *Herstellung der platonischen Körper aus Papierstressen,* Munich, 1893; Hess, *Eintheilung in die Lehre von der Kugeltheilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder,* in-8°, 1883.

resecetur, sicque numerus angulorum solidorum S unitate minuatur, ut sit $S - 1$, tum differentia inter numerum acierum A et numerum hedrarum H erit $A - H - 1$.

3° Continuata hac mutilatione, quando ad pyramidem triangularem deveniatur, in quâ $S = 4$, $H = 4$, $A = 6$, evidens est, si fiat $S - n = 4$, fore $A - H - n = 2$, undè $S - 4 = A - H - 2$, seu $H + S = A + 2$.

L'amiral de Jonquières a montré que le théorème d'Euler est vrai pour toute espèce de polyèdre, convexe ou non, et pour tout agrégat de polyèdres, à la condition que, dans ce dernier cas, deux polyèdres constituants soient adhérents entre eux par une face, même partielle, mais non par une arête ou un sommet.

L'étude des polyèdres est entravée par la difficulté de se représenter ces corps lorsque le nombre de leurs éléments n'est pas très petit. Dans un Mémoire publié en 1865, Catalan, après une fort bonne discussion des conséquences de la formule d'Euler, a donné une assez curieuse méthode pour reconnaître la possibilité de construire un polyèdre dont on donne les éléments : faces, arêtes et sommets; c'est une sorte d'échiquier au moyen duquel le problème est ramené à une question de Géométrie plane analogue à celle du saut du cavalier des échecs, à celle du jeu de solitaire, etc. ([1]).

La troisième des équations (1) est moins facile que la seconde à établir directement; Stringham et Durège ([2]) l'ont fait, mais nous ne reproduirons ni l'une ni l'autre démonstration. En réalité, la question relève de l'*Analysis sitûs,* qui donne une formule générale dont les trois équations (1) ne sont que des cas particuliers : là est leur véritable démonstration.

La formule à laquelle nous faisons allusion s'appelle *la formule d'Euler généralisée;* elle exprime que, si l'on considère dans l'espace à n dimensions un polyèdre à $n-1$ dimensions, et si l'on appelle p_0, p_1, p_2, ..., p_{n-1} le nombre de ses *figures*

([1]) *Mémoire sur les polyèdres,* dans le *Journal de l'École Polytechnique* pour 1865. — *Voir* aussi : MANSION, *Discours sur les travaux mathématiques de Catalan,* dans les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége,* 2e série, t. XII, mai 1885.

([2]) *Ueber Körper von vier Dimensionen* (*Académie des Sciences de Vienne,* 1881, t. I, p. 1110-1125).

limitantes

de degré 0 (les sommets).
» 1 (les arêtes).
» 2 (les faces).
» 3 (les cases),
» 4 (les corps à quatre dimensions),
» ....., etc.,

on a

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \ldots \pm p_{n-1} = 1 - (-1)^n,$$

c'est-à-dire que la somme formant le premier nombre est égale à zéro ou à deux, suivant que n est impair ou pair. Ce beau théorème paraît devoir être attribué à Stringham, et alors il daterait de 1880. On en trouvera la démonstration dans l'*Analysis sitûs* de Poincaré, p. 100 à 121 (1). On peut voir aussi le Mémoire de Stringham (2) et celui de Durège (3).

§ 38. — La question des polyédroïdes réguliers.

Nous ne nous occuperons plus maintenant que des *polyédroïdes réguliers*, appelant ainsi ceux dont les cases sont des *polyèdres convexes et réguliers, tous égaux entre eux et faisant entre eux des angles d'espace égaux*. On sait que ceux-ci, qui, à leur tour, ont pour faces des *polygones convexes et réguliers, tous égaux entre eux et faisant entre eux des dièdres égaux*, sont au nombre de *cinq*, qu'on appelle les cinq solides de Platon, et dont Képler s'est beaucoup occupé (4). Le Tableau suivant en rappelle les noms et la composition :

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 1895, et *Rendic. di Palermo*, 1899. *Voir* aussi *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 1893, II.

(2) *American Journal of Math.*, 1880, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1881, p. 212.

(3) *Wiener Sitzungsb.*, 1881, p. 83.

(4) *Mysterium cosmographicum... demonstratum per quinque regularia corpora geometrica*. Tubingue, 1593.

TABLEAU I. — LES CINQ POLYÈDRES RÉGULIERS.

NOMS DES POLYÈDRES.	NOMBRE ET NATURE DES FACES.	NOMBRE DES arêtes.	NOMBRE DES sommets.	NOMBRE DES faces ou arêtes aboutissant à un sommet.	Angle de deux faces adjacentes (9).
L'hexaèdre, ou cube...	6 carrés.	12	8	3	90°
Le tétraèdre..........	4 triangles.	6	4	3	70°31′40″
L'octaèdre............	8 »	12	6	4	109°28′16″
L'icosaèdre...........	20 »	30	12	5	138°11′23″
Le dodécaèdre........	12 pentagones.	30	20	3	116°33′54″
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

On verra que les *polyédroïdes réguliers* sont au nombre de *six*, ayant respectivement

8, 5, 16, 600, 24, 120 cases.

Suivant un usage devenu loi, on prend pour base de la nomenclature le nombre des figures limitantes du degré le plus élevé. Nous désignerons donc les six corps par la lettre C accompagnée de ces nombres, ainsi que le montre le Tableau II, établi sur le même modèle que celui des polyèdres; cette lettre a été prise comme étant l'initiale du mot *Case*, en anglais *Cell,* en allemand *Zell;* on la trouve aussi dans les ouvrages anglais, et elle est remplacée par Z chez les auteurs allemands. Le Tableau II donne dès à présent tous les éléments des polyédroïdes; ils seront repris et établis dans les paragraphes qui suivent. Par angle de deux cases, dans sa dernière colonne, on entend l'angle des deux espaces (§ 21) dans lesquels elles se trouvent, comme par *angle de deux faces,* dans le premier Tableau, on a entendu celui des plans de ces faces.

TABLEAU II. — LES SIX POLYÉDROÏDES RÉGULIERS.

DÉSIGNATION DES POLYÉDROÏDES.	NOMBRE ET NATURE des cases.	NOMBRE ET NATURE des faces.	NOMBRE DES arêtes.	NOMBRE DES sommets.	NOMBRE DES cases ou faces aboutissant à chaque arête.	NOMBRE DES éléments aboutissant à chaque sommet : cases.	faces.	arêtes.	Angle de deux cases adjacentes (γ).
C^8..........	8 hexaèdres.	24 carrés.	32	16	3	4	6	4	90°
C^5..........	5 tétraèdres.	10 triangles.	10	5	3	4	6	4	75°31′21″
C^{16}..........	16 »	32 »	24	8	4	8	12	6	120°
C^{600}..........	600 »	1200 »	720	120	5	20	30	12	164°28′39″
C^{24}..........	24 octaèdres.	96 »	96	24	3	6	12	8	120°
C^{120}..........	120 dodécaèdres.	720 pentagones.	1200	600	3	4	6	4	144°0′12″
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

Les noms qui suivent ont été donnés par Stringham en 1880, et ont été adoptés par les auteurs qui ont écrit depuis en anglais et en français; nous les adopterons aussi, bien qu'ils soient peu satisfaisants [1], mais nous ferons largement usage des abréviations données dans la première colonne du Tableau II.

Nous indiquons à leur suite les noms dont les auteurs allemands font usage.

C^8. — L'octaédroïde. — Achtzell.
C^5. — Le pentaédroïde. — Fünfzell.
C^{16}. — L'hexadécaédroïde. — Sechszehnzell.
C^{600}. — L'hexacosiédroïde. — Sechshundertzell.
C^{24}. — L'icosatétraédroïde. — Vierundzwanzigzell.
C^{120}. — L'hécatonicosaédroïde. — Einhundertzwanzigzell.

La question des polyédroïdes réguliers est difficile; mais elle a été très étudiée, elle l'a été par les méthodes les plus variées, et l'on en est aujourd'hui bien maître. Pour la première fois, les matériaux abondent entre nos mains.

Elle remonte à 1880. A cette date, Stringham [2], professeur à l'Université de Californie, l'ouvre dans le *American Journal of Mathematics,* que dirigeait alors Sylvester, par un important Mémoire dans lequel il généralise la formule d'Euler, établit l'existence des six corps réguliers, en décrit la construction, en donne quelques dimensions. En 1882 et 1883, presque simultanément, apparaissent les travaux de Rudel, à Kaiserslautern [3]; de

---

[1] Ces mots ne sont pas bien faits. Si l'on conserve le principe, déjà peu judicieux lui-même, de baser la nomenclature sur le nombre des cases, il faudrait remplacer l'élément *èdre,* qui correspond au mot *face* comme on a vu, § 36, par un autre correspondant au mot *case,* et supprimer l'élément *oïde,* qui n'aurait plus alors de raison d'être. C'est la facture des noms allemands. Hoppe et Brückner, en allemand, emploient le mot *polytope* au lieu de *polyédroïde;* Hinton et Proctor Hall, en anglais, emploient le mot *tessaract* au lieu d'*octaédroïde.* — Il nous paraîtrait judicieux de n'employer le mot *Hyperpolyèdre* que pour les polyèdres (corps à trois dimensions dont les faces limitantes sont des *polygones*) qui n'ont pas tous leurs sommets dans un même espace.

[2] STRINGHAM, *Regular figures in n-dimensional Space* (*American Journal of Mathematics,* 1880).

[3] RUDEL, *Von Körper höherer Dimension;* Kaiserslautern, 1882.

Hoppe, à Leipzig (1); de Schlegel, à Halle (2); de Puchta, à Prague (3); tous ces auteurs paraissent avoir traité la question chacun de son côté et l'ont résolue plus ou moins complètement. La solution la plus complète est celle de Puchta, travail considérable qui a fourni les matériaux de tous ceux venus depuis; on y trouve, en Tableaux numériques, les quatre coordonnées de tous les sommets des six polyédroïdes. Schlegel construit des modèles en relief représentant les projections sur notre espace (4), et en montre pour la première fois la collection complète, en 1884, dans un Congrès de naturalistes et de médecins allemands, à Magdebourg. Un Mémoire de Cesaro publié en 1887 (5) n'avance pas beaucoup la question. En 1889, M. Goursat (6), de la Faculté de Paris, la ramène à ce problème de Géométrie à trois dimensions: *Diviser l'espace en corps réguliers égaux de manière qu'ils le remplissent sans vides,* et fait naître ainsi les six polyédroïdes d'une manière aussi élégante que nouvelle. Le même M. Goursat, puis Maschke en Amérique (7), puis van Oss en Hollande (8), appliquent à ces corps la théorie des *Groupes de rotations* fondée par Klein dans ses *Leçons sur l'Icosaèdre,* dont nous avons dit un mot dans notre avant-propos; le travail de van Oss prend appui

---

(1) Hoppe, *Regelmässige linearbegrentzte Figuren von vier Dimensionen* (*Archiv der Mathematik und Physik,* gegründet von Grünert, fortgesetzt von Hoppe, Leipzig, 1882).

(2) Schlegel, *Theorie der homogenen zusammengesetzen Raumgebilde* (*Nova Acta Acad. Cæsareæ Leopoldo-Carolinæ germanicæ naturæ curiosorum*; Halle, 1883). — *Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions* (*Bulletin de la Soc. Math. de France,* 1882).

(3) Puchta, *Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raume von vier Dimensionen* (*Sitzungsberichte der k. Acad. der Wissenschaften zu Wien,* 1883; aussi 1884 et 1892).

(4) Librairie Martin Schilling, à Halle.

(5) *Forme poliedriche regolari e semi-regolari in tutti gli Spazii. Milan,* 4°. 1887.

(6) Goursat, *Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace* (*Annales sc. de l'École Normale supérieure,* 1889).

(7) Maschke, *The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color-diagrams* (*American Journal of Mathematics,* t. XVIII, 1896).

(8) Van Oss, *Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen.* Giessen, 1894. — *Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbtsdeckende Bewegungen* (*Verhandlingen der k. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam,* 1899).

sur de belles épures. Tout récemment, M. Schoute ([1]), en Hollande, refait les calculs et les Tableaux de Puchta, et complète l'étude, commencée par Schlegel et par Proctor Hall ([2]), des projections et des sections spatiales. Enfin ces dernières sont traitées par la méthode des *rabattements*, par M^me^ Alicia Boole Stott ([3]), fille d'un mathématicien distingué, un des créateurs de l'*Application de l'Algèbre à la Logique* ([4]).

§ 39. — Arêtes et sommets.

I. Il suit de la condition de *régularité* que le polyédroïde est déterminé par le nombre des sommets et la constitution de l'un d'eux. Laissant de côté la longueur de l'arête, que nous supposerons fixée une fois pour toutes, et que nous désignerons par a, il n'existe qu'un individu de chaque espèce. Les sommets sont régulièrement répartis sur une hypersphère, dont le rayon R et le centre O sont déterminés et que l'on appelle l'*hypersphère circonscrite*.

En outre, il résulte de la condition de *convexité* qu'on doit pouvoir mener par le sommet un espace laissant le polyédroïde tout entier du même côté; il faut pour cela que les cases réunies en ce sommet y fassent un angle solide moindre que *huit fois un trièdre droit* (*voir* § 24). Or l'angle polyédral est égal à celui-ci multiplié par un coefficient k qui est

1,00000	pour	l'hexaèdre,
0,35096	»	le tétraèdre,
0,86539	»	l'octaèdre,
1,88550	»	le dodécaèdre,
1,67720	»	l'icosaèdre;

([1]) SCHOUTE, *Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzelles, Sechszehnzelles, und Vierundzwanzigzelles im vierdimensional Raume* (*Verhandlingen der k. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1894). — *Regelmässige Schnitte und Projectionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume* (*Id.*).

([2]) PROCTOR HALL, *The projections of four-fold figures upon a three-flat* (*American Journal of Mathematics*, 1893).

([3]) ALICIA BOOLE STOTT, *On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids* (*Verhandlingen*, 1900).

([4]) BOOLE, *Mathematical analysis of Logics;* Londres, 1844.

on ne peut donc en réunir qu'un nombre n satisfaisant à la condition

$$nk < 8.$$

Avant d'aller plus loin il est nécessaire de rappeler la suite des considérations par lesquelles le géomètre à trois dimensions forme les polyèdres réguliers au moyen des polygones réguliers.

1° L'angle formé par deux côtés est 60° dans le triangle équilatéral, 90° dans le carré, 54° dans le pentagone, etc. Par suite, on peut réunir *dans le plan,* autour d'un point, sans qu'ils arrivent à se toucher ou à empiéter les uns sur les autres : trois, quatre ou cinq triangles, trois carrés, trois pentagones; mais on

Fig. 13.

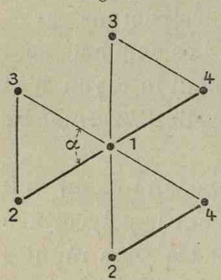


Fig. 14.

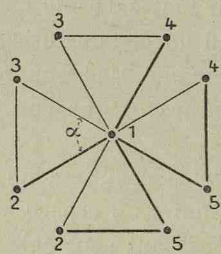
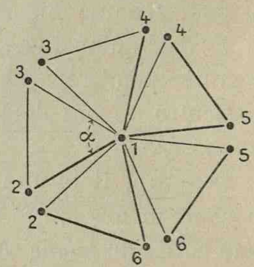


Fig. 15.



ne saurait ni augmenter ces nombres, ni prendre d'autres polygones, étant donné qu'il n'en faut pas moins de trois. Les trois premiers cas sont représentés par les figures 13, 14, 15; le lecteur est prié de faire lui-même la figure pour les deux autres.

Prenant d'abord le cas de trois triangles (*fig.* 13), on forme un angle solide en *détachant du plan commun,* qui est le plan du papier, chacun des plans 123, 134, 142, et le faisant tourner, de dessus en dessous, autour d'une droite du plan convenablement choisie, jusqu'à ce que les deux arètes marquées 12, les deux marquées 13 et les deux marquées 14 se touchent et n'en fassent qu'une. On voit sans peine qu'après le mouvement les points 2, 3, 4, en chacun desquels se sont réunis deux points portant le même numéro, forment un triangle équilatéral; ce triangle *ferme* la figure constituée par les trois premiers, et l'on a un solide régulier : c'est le *tétraèdre.*

Par des rotations analogues, la figure 14 donne un angle solide

1 2 3 4 5 formé par la réunion de quatre angles plans en 1, et dont la *base* 2 3 4 5 est un carré; il faut cette fois, pour faire un solide régulier, accoler à cette première figure une figure symétrique 1′ 2′ 3′ 4′ 5′, les arêtes 2′ 3′, 3′ 4′, 4′ 5′, 5′ 2′ n'en faisant qu'une avec leurs homologues; on a alors l'*octaèdre* (*fig.* 28).

Dans le cas de la figure 15, les bords des cinq triangles forment, après leur réunion, un pentagone régulier 2 3 4 5 6. Sur le sommet 2, accrochons trois triangles formant avec les deux qui y sont déjà un sommet identique à 1. En continuant ainsi de sommet en sommet, les bords libres des nouveaux triangles formeront une deuxième bordure 7 8 9 10 11 parallèle et identique

Fig. 16.

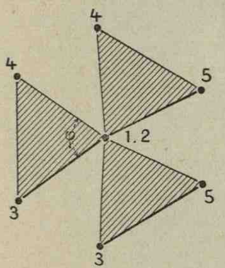


Fig. 17.

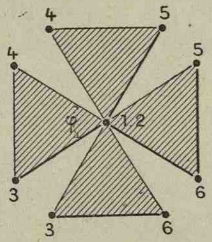
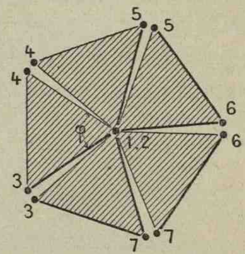


Fig. 18.



à la première, et l'on aura l'*icosaèdre* en la coiffant avec une figure 12 symétrique de 1 (*fig.* 19).

Si l'on prend des carrés, on ne peut former qu'une seule sorte de sommet, et l'on a l'*hexaèdre,* ou cube (*fig.* 24), familier à tous nos lecteurs.

Enfin, si l'on prend des pentagones, on ne peut encore les réunir que par trois. Plaçons-en un horizontalement (*fig.* 19) et attachons-en cinq autres, un à chacune de ses arêtes, de manière qu'ils se touchent par leurs côtés; nous aurons cinq sommets identiques parce que deux pentagones consécutifs font entre eux le même angle dièdre que chacun d'eux fait avec le premier. De plus, deux arêtes libres consécutives font entre elles un angle égal à l'angle pentagonal : 108°; ces arêtes libres forment un décagone dentelé et, si l'on emboîte dans cette première moitié une deuxième moitié toute pareille, on a le *dodécaèdre* régulier.

Les figures 19 inférieures représentent : celle de gauche, la projection de l'icosaèdre régulier sur un plan parallèle à une première et à une deuxième diagonale perpendiculaires entre elles; celle de droite, la projection du dodécaèdre régulier sur un plan parallèle à une deuxième et à une troisième diagonale perpendiculaires entre elles ; on appelle premières, deuxièmes et troisièmes diagonales les lignes qui joignent : deux sommets

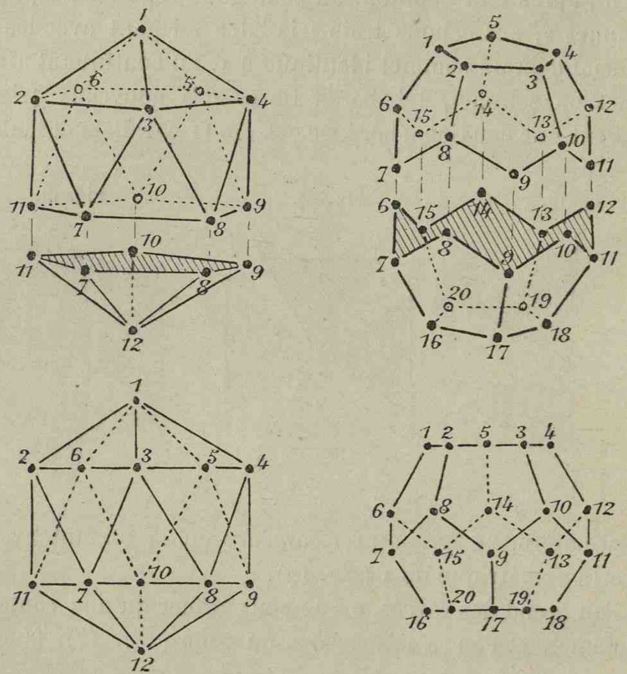


Fig. 19. — L'icosaèdre et le dodécaèdre réguliers.

opposés, les milieux de deux arêtes opposées, les centres de deux faces opposées ([1]).

II. Répétons cette description en augmentant les dimensions d'une unité, ainsi qu'il est dit au § 36.

1° Si l'on multiplie par 3 la valeur φ (Tableau I) qui est afférente à l'icosaèdre, par un nombre plus grand que 5 celle qui est

([1]) On verra, § 45, d'autres projections de l'icosaèdre et du dodécaèdre, faites sur des plans non situés dans le même espace que le corps.

afférente au tétraèdre, et chacune des trois autres par un nombre plus grand que 3, le produit se trouve supérieur à 360°. Par suite, on peut réunir dans l'espace, sur une même arête, sans qu'ils arrivent à se toucher ou à empiéter les uns sur les autres, jusqu'à trois, quatre ou cinq tétraèdres, trois hexaèdres, trois octaèdres, trois dodécaèdres, mais on ne saurait ni augmenter ces nombres, ni se servir de l'icosaèdre. Cela fait six assemblages et, par suite, il ne peut exister au plus que six polyédroïdes réguliers.

Les figures 16, 17, 18 représentent, pour les cas de trois, quatre et cinq tétraèdres (le lecteur est prié de se faire lui-même la figure pour les trois autres cas), la coupe de l'assemblage par un plan perpendiculaire au milieu de l'arête considérée; 12 y est la projection commune de deux points 1 et 2 situés de part et d'autre du papier à la distance d'une demi-longueur d'arête, et les triangles ombrés disposés autour de ce point sont les sections faites par le plan du papier dans les tétraèdres. Ceux-ci sont donc :

1234, 1245, 1253 pour la première figure,
1234, 1245, 1256, 1263 pour la deuxième figure,
1234, 1245, 1257, 1276, 1263 pour la troisième figure.

2° Prenant la figure 16, séparons de l'espace commun chacun des espaces contenant les trois tétraèdres, et faisons-les tourner de dessus en dessous (§ 15), autour d'un plan convenablement choisi dans le premier espace, de manière à amener au contact les deux faces marquées 123, les deux marquées 124 et les deux marquées 125; les trois plans 123, 124 et 125 forment un trièdre de seconde espèce (§ 23).

3° Faisant successivement de même pour les cinq autres assemblages, on a six choses à quatre dimensions, qu'à défaut d'un nom que nous ne voulons pas fabriquer, nous appellerons des *arêtes garnies*, la *garniture* consistant en 3, 4 ou 5 tétraèdres, 3 hexaèdres, 3 octaèdres, ou 3 dodécaèdres; elles correspondent à la sixième colonne du Tableau II.

III. Il s'agit maintenant de former un *sommet* en réunissant sur un même point de l'étendue les bouts d'un certain nombre d'arêtes garnies; nous allons arriver, plus simplement que le lecteur ne peut l'espérer, à confectionner cette singulière *calotte,* mais il devra avoir bien présentes à l'esprit les deuxième et cinquième colonnes du Tableau I.

Supposons un polyédroïde existant et construit; nous avons déjà appelé O et R le centre et le rayon de l'hypersphère qui lui est circonscrite. Considérons un sommet, que nous désignerons indifféremment par la lettre s ou par le chiffre 1, suivant la commodité du moment, et soient 2, 3, 4, 5, 6,... les divers sommets qui l'entourent, c'est-à-dire les autres bouts des arêtes dont il est le point de départ. Ces bouts sont sur une même hypersphère de rayon a, et, par raison de symétrie, sont aussi sur un même espace perpendiculaire au rayon sO (1); leur ensemble est une figure régulière à trois dimensions que nous appellerons F. Cela posé :

1° Si les cases constitutives du sommet s sont des *tétraèdres,* les points 2, 3, 4, 5, 6, ... se groupent en triangles équilatéraux appartenant respectivement à chacune d'elles. Mais le Tableau I montre qu'il n'y a que trois figures régulières à trois dimensions limitées par des triangles, savoir : le tétraèdre avec quatre faces, six arêtes, quatre sommets; l'octaèdre avec huit faces, douze arêtes et six sommets; l'icosaèdre avec vingt faces, trente arêtes, douze sommets. Les cases dont il s'agit ne peuvent donc être qu'au nombre de quatre, huit ou vingt.

Dans le premier cas, la figure F est un tétraèdre 2 3 4 5; il part du sommet s quatre cases tétraédrales, six faces planes et quatre arêtes; chaque arête porte trois tétraèdres et ils ont trois à trois une arête commune. On voit aisément que les points 2, 3, 4, 5 sont les sommets d'un cinquième tétraèdre égal aux premiers; celui-ci *ferme* la figure, et l'on a un corps régulier à quatre dimensions, qui n'est autre que le C^5, le pentaédroïde; nous le reprendrons au § 44.

Dans le second cas, la figure F est un octaèdre 2 3 4 5 6 7 (*fig.* 20); il part du sommet s huit cases tétraédrales, douze

(1) De même, s'il nous est permis de remplacer une fois une démonstration par une comparaison, que les points situés sur les arêtes d'une pyramide régulière à égale distance du sommet sont, à la fois, sur une surface sphérique ayant ce sommet pour centre et sur un plan perpendiculaire à l'axe de la pyramide.

faces planes et six arêtes. Chaque arête porte quatre tétraèdres, et ils ont quatre à quatre une arête commune. La figure 1 2 3 4 5 6 7 qu'ils forment est *ouverte* à l'opposé du point 1 ; on la *ferme* en lui accolant une figure symétrique 8 2 3 4 5 6 7, et l'on obtient

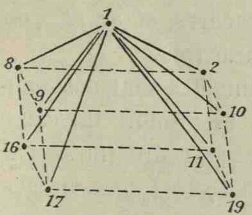


Fig. 20. — Calotte à base d'hexaèdre.

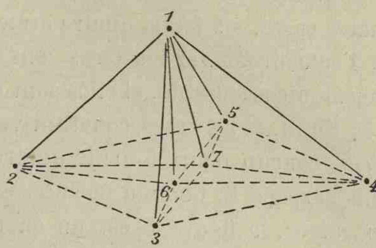


Fig. 21. — Calotte à base d'octaèdre.

ainsi un deuxième solide régulier, qui est le C^{16}, l'hexadécaédroïde ; il reparaîtra au § 42.

Dans le troisième cas, la figure F est un icosaèdre

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 (*fig.* 22) ;

il part du sommet *s* vingt cases tétraédrales, trente faces planes, douze arêtes, et chaque arête porte cinq tétraèdres. La figure est

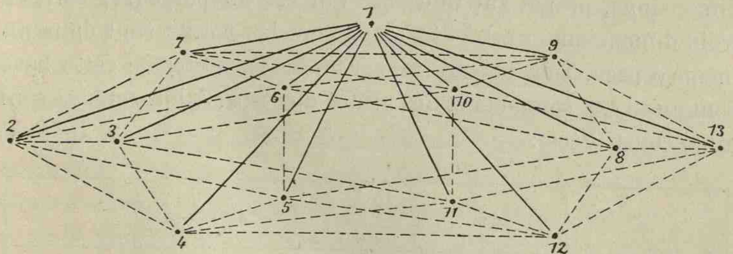


Fig. 22. — Calotte à base d'icosaèdre.

ouverte, mais nous ne pourrons la fermer que plus tard ; nous y reviendrons au § 46, et nous verrons que le sommet que nous venons de constituer fait partie du C^{600}, de l'hexacosiédroïde.

2° Si les cases constitutives du sommet *s* sont des *hexaèdres* ou des *dodécaèdres,* trois arêtes en partent pour le compte de chacun d'eux ; la figure F est encore formée par des groupes de trois points, c'est-à-dire des triangles, et ne peut, comme dans le cas précédent, être qu'un tétraèdre, un octaèdre ou un icosaèdre. Mais le deuxième et le troisième cas ne sont pas admissibles parce que la condition $nk < 8$ du § 39 ne serait pas satisfaite, et le premier nous donne encore, comme partant du sommet s, quatre cases, six faces, quatre arêtes. Nous avons à faire au C^8, ou l'octaédroïde, si les faces sont des hexaèdres, et au C^{120}, ou l'hécatonicosaédroïde, si elles sont des dodécaèdres.

3° Enfin, si les cases constitutives du sommet s sont des *octaèdres,* chacun d'eux fournit quatre arêtes et produit un carré dans l'espace E. Comme le cube est le seul polyèdre limité par des carrés, la figure F est un cube 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (*fig.* 20), et a six faces, douze arêtes, huit sommets. Il part donc du sommet s six cases octaédrales, douze faces planes et huit arêtes ; le solide auquel nous sommes amenés est le C^{24}, ou l'icosatétraédroïde; il fera l'objet des §§ 44 et 45, où l'on peut voir comme exemple la calotte qui a pour sommet le point 8 et pour base le cube

1 2 7 9 12 13 15 24.

§ 40. — Établissement des coordonnées.

En résumé, chaque sommet est *une calotte,* corps à quatre dimensions, posant sur une base qui est un polyèdre, corps à trois dimensions, c'est-à-dire dont tous les points sont dans un même espace. Tous les sommets et toutes les arêtes de cette base sont aussi des sommets et des arêtes du corps. Calotte et base sont ainsi constituées :

		BASE.	ARÊTES.
DANS LE	C^5.......	un tétraèdre.	4 arêtes garnies chacune de 4 tétraèdres.
	C^8.......	»	4 » » 4 hexaèdres.
	C^{120}.......	»	4 » » 3 dodécaèdres.
	C^{16}.......	un octaèdre.	6 » » 8 tétraèdres.
	C^{24}.......	un hexaèdre.	8 » » 3 octaèdres.
	C^{600}.......	un icosaèdre.	12 » » 20 tétraèdres.

Il nous reste à trouver le nombre des sommets et à en fixer la position. Pour que les six figures appartiennent de fait, non pas à un polyédroïde quelconque, mais à un polyédroïde régulier, et que les six corps auxquels nous avons donné des noms par anticipation soient admis à l'existence, il faut : 1° que chacune des distances 23, 34, 45, 56, ... ait la même valeur a que les distances 12, 13, 14, 15, ... ; 2° qu'en portant une figure pareille à s successivement sur chacun des points 2, 3, 4, ... et puis sur chacun des nouveaux points libres qui apparaîtront, il se constitue un tout continu, se fermant sur lui-même pour circonscrire une certaine région de l'étendue. La première condition revient à une petite question de géométrie fixant la distance entre le point s et l'espace E. Nous verrons comment la seconde se réalise pour les polyédroïdes qui ont cinq, huit, seize ou vingt-quatre cases; pour les deux autres, le tâtonnement qu'elle exige n'est pas sans difficulté, et nous le laissons à la sagacité du lecteur; il en trouvera deux formes différentes, mais peu clairement exposées l'une et l'autre, dans Stringham et dans Hoppe.

Nous considérons donc la morphologie comme terminée, et nous passons à la métrique, dont le problème peut s'énoncer comme ceci : mettre les sommets en position dans un système quelconque de référence. La solution consiste, soit en des *tableaux numériques* où sont inscrites les valeurs des coordonnées de chaque point, soit en des *dessins* sur lesquels on peut les mesurer. Il faut toujours passer par les premiers, et souvent arriver aux seconds, qui se prêtent généralement avec plus de facilité aux diverses études du géomètre. Nous emploierons un peu chaque chose, de manière à donner une idée de l'une et l'autre. Nous écourterons beaucoup, ménageant toutefois la vue d'ensemble, mais n'évoquant que des détails, ou plus simples ou plus topiques, que nous nous efforcerons de mettre en clarté. Notre travail ne remplace donc ni le Mémoire de Puchta, ni les Monographies publiées récemment par M. Schoute, M. Van Oss et Mme Stott; en revanche, nous croyons qu'on ne trouverait ni dans ceux-ci, ni ailleurs, la plupart des considérations présentées ici.

Ces publications sont consacrées surtout au C^{600}, et contiennent de belles épures qu'on peut caractériser en disant que celles de la première sont des projections sur des espaces ou des intersections par des espaces, celles de la seconde des projections sur des plans suivant les principes de la Géométrie descriptive (§ 25); celles de la troisième, des rabattements et développements sur des espaces. Disons quelques mots de chacun des trois procédés ([1]).

1° La projection du polyédroïde sur un espace est un polyèdre qui aura généralement un nombre moindre de sommets et d'arêtes. On peut le construire en fils de fer, en plâtre ou en carton, et l'on peut en donner une idée par des projections planes. Ces polyèdres sont intéressants à deux points de vue. Sans nous *faire voir* la forme même des polyédroïdes, nous avons dit pourquoi dans l'Avant-propos et au § 25, ils donnent cependant à notre curiosité une certaine satisfaction, toute platonique qu'elle soit. Ensuite ils constituent, dans la Géométrie à trois dimensions, une grande famille naturelle de polyèdres, qui ne sont pas réguliers au sens étroit donné à ce mot dans le § 38, mais qui viennent se placer à côté des *solides d'Archimède,* des *polyèdres demi réguliers* de M. Catalan ([2]) et des polyèdres de la cristallographie.

2° D'après ce qu'on a vu (§ 25), le polyédroïde est entièrement défini par ses projections sur deux plans *complètement perpendiculaires entre eux,* et celles-ci se représentent dans les angles opposés

$$x_1 0 x_2 \quad \text{et} \quad x_3 0 x_4, \qquad \text{ou} \qquad x_2 0 x_3 \quad \text{et} \quad x_4 0 x_1$$

de deux lignes perpendiculaires entre elles $x_1 x_3$ et $x_2 x_4$ (*voir* la figure du § 25). De ces projections on peut déduire aisément celles sur deux plans associés aux précédents par *perpendicularité simple;* on a alors quatre couples de projections

$$x_1 0 x_2 \quad \text{et} \quad x_2 0 x_3, \qquad x_2 0 x_3 \quad \text{et} \quad x_3 0 x_4, \quad \ldots$$

([1]) Les épures de M. Van Oss sont surtout faites en vue d'une question que nous n'aborderons pas : celle des *groupes de rotations qui ramènent un polyédroïde régulier sur lui-même.*

([2]) M. Catalan appelle ainsi : soit un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers, ceux de même espèce égaux entre eux, et dont les angles solides sont égaux ou symétriques; soit un polyèdre dont les faces sont égales et dont les angles solides sont réguliers, ceux de même espèce égaux entre eux. Il y en a quinze de chaque espèce.

On peut voir le Mémoire de M. Catalan dans le 41e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* et la collection des modèles en plâtre de ses polyèdres au Conservatoire des Arts et Métiers.

dont chacun détermine un espace et y représente un polyèdre; celui-ci, dans le système de la Géométrie descriptive ordinaire, n'est pas autre qu'une projection spatiale comme celles dont il est question dans l'alinéa précédent. Ayant les quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 de chaque point, ces dernières constructions reviennent à les associer par deux dans l'angle voulu, comme le fait la Géométrie analytique à deux dimensions.

3° Enfin, pour faire le développement, on rabat sur l'espace d'une des cases limitantes chacune de celles qui l'entourent, puis les suivantes, au moyen de rotations (§ 18) sur les plans des faces de contact; il faut admettre que les cases se détachent les unes des autres par dédoublement de ces faces, et que les arêtes et les sommets se résolvent de même suivant leur degré de multiplicité.

Il faut considérer, dans les six corps qui vont défiler devant nous, certaines lignes remarquables qui s'appellent :

- les premières diagonales, ou les *diagonales proprement dites* [1],
- les deuxièmes diagonales,
- les troisièmes diagonales,
- les quatrièmes diagonales, qu'on appelle aussi *les axes*,

et qui joignent respectivement

- deux sommets opposés,
- les milieux de deux arêtes opposées,
- les centres de deux faces opposées,
- les centres de deux cases opposées.

Dans le C^5 il n'y a que les lignes de la deuxième et de la troisième espèce.

Les espaces menés par le centre perpendiculairement à quelques-unes de ces lignes sont des *espaces de symétrie*. C'est le cas (nous nous contentons d'énoncer ces propositions) pour ceux perpendiculaires, — dans le C^8, à une quatrième ou à une troisième diagonale, — dans le C^{16}, à une première ou à une

---

[1] Les auteurs allemands réservent le mot *diagonale* pour les lignes de la première espèce, et emploient le mot *transversale* (*Querlinie*) pour les autres, qui sont ainsi *les premières, les deuxièmes* et *les troisièmes transversales*.

deuxième, — dans le C^{24}, à une première ou à une quatrième, — dans le C^{600}, à une première, — dans le C^{120}, à une quatrième.

§ 41. — L'octaédroïde, ou le C^8.

D'après ce qu'on a vu au § 24, la formule

$$(1)\qquad x_1 = \pm\frac{1}{2}a,\quad x_2 = \pm\frac{1}{2}a,\quad x_3 = \pm\frac{1}{2}a,\quad x_4 \pm = \frac{1}{2}a,$$

en y combinant les signes de toutes les manières possibles, donne seize systèmes différents, de quatre équations chacun, et représente seize points. Nous désignerons ces points par les seize premiers nombres comme le montre le Tableau suivant :

	$2x_1$	$2x_2$	$2x_3$	$2x_4$		$2x_1$	$2x_2$	$2x_3$	$2x_4$
1	$+a$	$+a$	$+a$	$+a$	11	$-a$	$-a$	$-a$	$-a$
2	$+a$	$+a$	$+a$	$-a$	12	$-a$	$-a$	$-a$	$+a$
3	$+a$	$+a$	$-a$	$-a$	9	$-a$	$-a$	$+a$	$+a$
4	$+a$	$+a$	$-a$	$+a$	10	$-a$	$-a$	$+a$	$-a$
5	$+a$	$-a$	$+a$	$+a$	15	$-a$	$+a$	$-a$	$-a$
6	$+a$	$-a$	$+a$	$-a$	16	$-a$	$+a$	$-a$	$+a$
7	$+a$	$-a$	$-a$	$-a$	13	$-a$	$+a$	$+a$	$+a$
8	$+a$	$-a$	$-a$	$+a$	14	$-a$	$+a$	$+a$	$-a$

Nous savons déjà (§ 39) que sur ces seize sommets s'agencent :

32 arêtes, se réunissant par quatre à chaque sommet,

24 faces, qui sont des carrés, se réunissant par six à chaque sommet et par trois sur chaque arête,

8 cases, qui sont des hexaèdres, se réunissant par trois à chaque sommet et par trois également sur chaque arête.

Il nous reste à montrer comment se fait cet agencement; pour cela, nous emploierons successivement la méthode géométrique et la méthode analytique, celle-ci procédant par *espaces coordonnés,* celle-là par *plans de projection,* chacune interprétant et complétant l'autre. L'une donne des *projections planes,* l'autre des *projections spatiales.*

I. — Méthode géométrique.

La première et la deuxième colonnes du Tableau ci-dessus nous

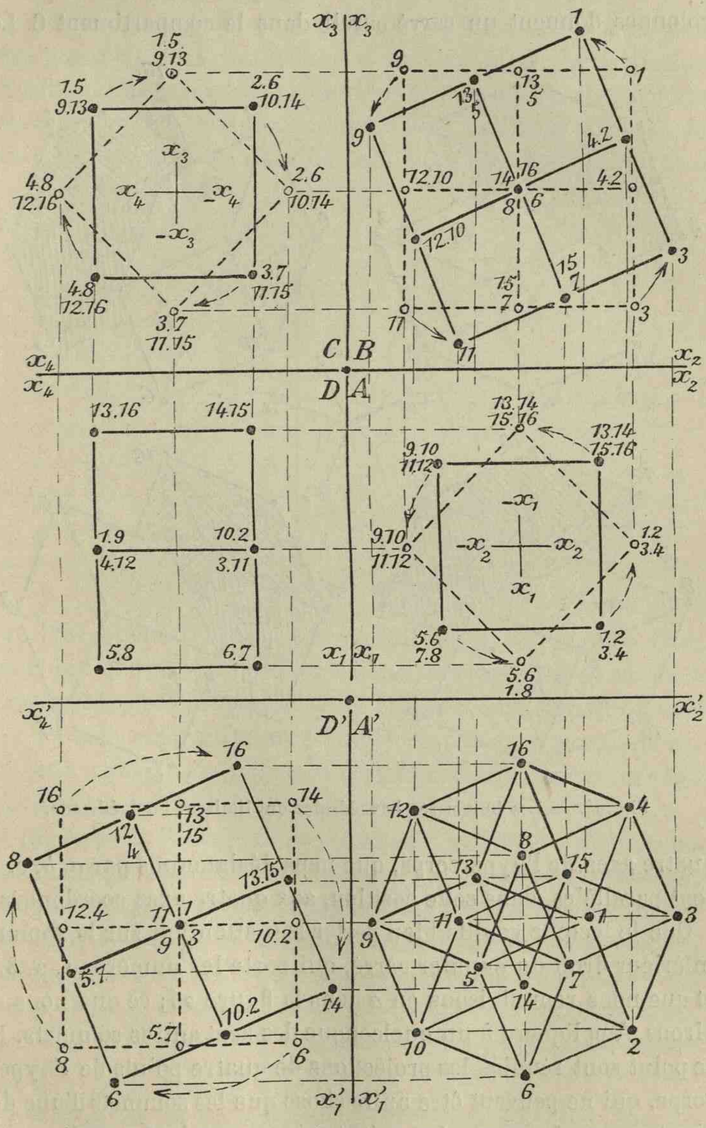


Fig. 23. — Diverses projections de l'octaédroïde, ou C^8.

donnent immédiatement, comme projection sur le plan des $x_1 x_2$, c'est-à-dire dans le compartiment A de la figure 23, le carré qui est dessiné avec des traits pleins et des points noirs, et dont les côtés sont parallèles aux axes. Les quatrième et cinquième colonnes donnent un carré pareil dans le compartiment C. Les

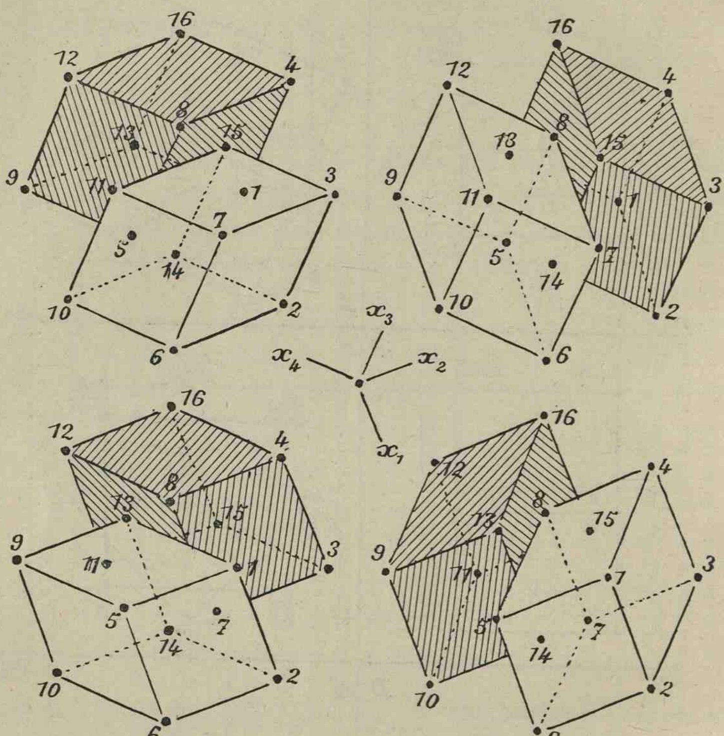


Fig. 24. — Les huit cases hexaédrales qui limitent l'octaédroïde.

quatre axes de l'hypercorps, que nous désignerons par a, b, c, d, sont parallèles, dans cette position, aux quatre axes coordonnés.

Que le lecteur veuille bien porter son attention sur le sommet inférieur droit du premier carré, qui porte les numéros 1, 2, 3, 4 et que nous reproduisons en a dans la figure 25; ce que nous en dirons s'appliquera à un quelconque des sept autres sommets. En ce point sont réunies les projections de quatre points de l'hypercorps, qui ne peuvent être autre chose que les sommets d'une des vingt-quatre faces carrées, située dans un plan complètement perpendiculaire au plan de projection A. Nous nous proposons de *séparer* ces projections les unes des autres en faisant pirouetter l'hypercorps devant les plans de projection, suivant le principe des rotations donné au § 25.

1° Faisons-le tourner d'un quart de quadrant autour d'un plan mené par son centre parallèlement au plan $x_3\ x_4$; la projection sur celui-ci ne change pas et, dans le plan $x_1\ x_2$, le carré prend la position, perpendiculaire aux bissectrices des axes, dessinée en *points blancs* et traits interrompus; la projection sur le plan

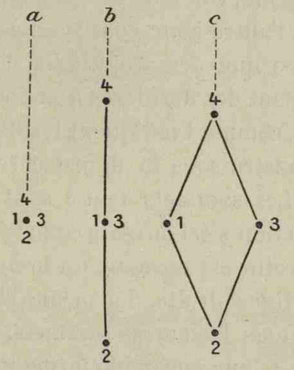


Fig. 25. — Transformations de la projection d'un carré.

$x_1\ x_4$, qui s'obtient comme il est dit au § 25, et que nous avons figurée en C bien que nous n'ayons pas à en faire usage, serait alors composée de six points et sept lignes formant les côtés et la médiane d'un rectangle allongé dans le sens de x_1. Pour cette forme, *deux* axes *a* et *b* sont perpendiculaires au plan de projection, les deux autres lui sont inclinés à 45°.

2° Imprimons une deuxième rotation d'un quart de quadrant autour d'un plan parallèle à celui des $x_1\ x_2$. Le résultat précédent se produit alors sur le plan $x_3\ x_4$, et les axes *a*, *b*, *c*, *d* font maintenant *tous les quatre* un angle de 45° avec chacun des deux plans de projection [1]; les quatres axes coordonnés sont des *troi-*

[1] Si *trois* axes font un angle de 45° avec le plan de projection, le quatrième lui étant perpendiculaire, on a une projection *à contour hexagonal,* que le lecteur peut obtenir en construisant dans A un rectangle pareil à celui de D, puis faisant tourner l'un des deux d'un tiers de quadrant pour déduire une projection sur A.

sièmes diagonales. Avec ces deux figures, construisons les projections sur les deux autres plans coordonnés $x_2\,x_3$, $x_4\,x_1$, en descendant la partie DA du dessin en D'A' pour ne pas superposer des dessins. Nous avons sur chacun d'eux un carré avec ses deux médianes, dessiné en traits interrompus et points blancs, comprenant neuf points et douze lignes. Les projections 2 et 4 sont maintenant séparées de 1 et 3 (*fig.* 25^b), mais ces dernières sont encore confondues ensemble.

3° On voit qu'il est indifférent de considérer la rotation, ou sur l'hypercorps lui-même, ou sur les projections, l'un des deux mouvements ayant l'autre pour conséquence; dès lors, nous ne parlerons plus guère que des projections, dont la considération est plus facile. Partant des dernières que nous venons d'obtenir, faisons-les tourner, comme l'indiquent les flèches, de trois quarts de quadrant, et construisons la figure correspondante dans le compartiment A'. Les sommets 1 et 3 sont maintenant séparés (*fig.* 25^c) : la projection s'est ouverte comme un quadrilatère articulé, et la ligne droite est devenue un losange, comme le point était devenu une ligne droite. La même chose s'est passée en même temps pour tous les autres sommets, et toutes les projections sont séparées : leur ensemble forme une figure régulière à pourtour octogonal, sur laquelle on peut voir, enchevêtrées les unes dans les autres, mais distinctes (*fig.* 23, A') :

α. Les projections des vingt-quatre faces, qui sont : huit carrés, ayant chacun un côté commun avec ce pourtour; huit losanges, ayant chacun avec lui un sommet commun; huit autres losanges ayant chacun avec lui deux côtés consécutifs communs.

β. Les projections des huit cases hexaédrales; comme leur enchevêtrement est un peu plus compliqué, nous les avons séparées en quatre groupes de deux, et avons représenté ceux-ci à part dans la figure 23. Sont réunis ensemble deux cubes situés dans deux espaces parallèles, aux extrémités de chaque axe; et l'on peut considérer l'octaédroïde comme engendré par l'un d'eux, par exemple celui $x_4 = -a$, marchant parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il se confonde avec le second $x^4 = +a$. Dans ce mouvement, chaque sommet du cube engendre une arête de l'octaédroïde, chaque arête en engendre une face, et chaque face une case hexaédrale; chaque position intermédiaire du cube générateur est la section de l'hypercorps par l'espace correspondant.

Les huit cases se voient encore, sous des formes différentes, dans les figures 26 et 27; nous empruntons la première au Mémoire de *Kempe* sur la *Forme géométrique* ([1]); elle a été comparée ([2]) à la *perspective de l'intérieur d'un cube vu à travers une de ses faces*. Cette figure 26, où la génération de l'octaédroïde est rapprochée de celle des configurations correspon-

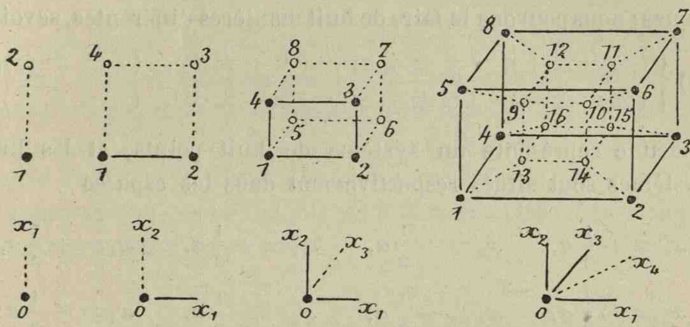


Fig. 26. — Génération de l'octaédroïde.

dantes dans les champs à trois, deux et une dimensions, est la projection de l'hypercorps sur un plan avec lequel ses *quatre premières diagonales* font chacune un angle de 45°.

En chiffres, les huit hexaèdres sont donnés par le Tableau suivant :

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8	1.5. 9.13.2.6.10.14
5. 6. 7. 8. 9.10.11.12	2.6.10.14.3.7.11.15
9.10.11.12.13.14.15.16	3.7.11.15.4.8.12.16
13.14.15.16. 1. 2. 3. 4	4.8.12.16.5.9.13. 1

II. — Méthode analytique.

Si nous récrivons le système (1), p. 118, en omettant les trois

([1]) *A Memoir on the theory of mathematical Form* (*Philos. Transactions,* Vol. CLXXVII, 1887).

([2]) Proctor Hall, *The projection of fourfold figures upon a Three-flat* (*American Journal of Math.*, vol. XV, 1893).

symboles (x), $(=)$ et $\left(\frac{1}{2}a\right)$, qui se répètent toujours les mêmes et ne font qu'apporter un encombrement inutile, il prend la forme

$$(2) \qquad (\pm\pm\pm\pm),$$

et celle-ci nous mène de la manière suivante à la constitution de l'hypercorps.

1° *Les cases.* — Supprimons *une fois* l'alternative des deux signes; nous pouvons le faire de huit manières différentes, savoir :

$$(3)\ \begin{cases} (\pm\pm\pm+), & (\pm\pm+\pm), & (\pm+\pm\pm), & (+\pm\pm\pm), \\ (\pm\pm\pm-), & (\pm\pm-\pm), & (\pm-\pm\pm), & (-\pm\pm\pm). \end{cases}$$

Chacune représente un système de huit points, et les huit systèmes sont situés respectivement dans les espaces

$$\begin{array}{llll} x_4=+\frac{1}{2}a, & x_3=+\frac{1}{2}a, & x_2=+\frac{1}{2}a, & x_1=+\frac{1}{2}a, \\ x_4=-\frac{1}{2}a, & x_3=-\frac{1}{2}a, & x_2=-\frac{1}{2}a, & x_1=-\frac{1}{2}a; \end{array}$$

ce sont les sommets des huit cases hexaédrales; on voit qu'elles sont placées perpendiculairement aux bouts opposés de quatre axes perpendiculaires entre eux, de longueur a.

2° *Les faces.* — Ensemble les huit cases ont $6 \times 8 = 48$ faces, mais chacune de celles-ci est commune à deux cases, ce qui réduit le nombre effectif à 24. Pour voir analytiquement ces contacts, il n'y a qu'à associer successivement chacun des huit symboles (3) avec chacun des autres, excepté celui où le signe unique $+$ ou $-$ occupe la même place. Par exemple, le premier ne s'associe pas avec le quatrième, mais il s'associe avec chacun des six autres et donne :

Avec le second

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\pm\frac{1}{2}a \\ x_2=\pm\frac{1}{2}a \end{array}\right\}, \qquad x_3=+\frac{1}{2}a, \qquad x_4=+\frac{1}{2}a,$$

qui est un carré dans le plan $x_3=+\frac{1}{2}a, \quad x_4=+\frac{1}{2}a$;

Avec le troisième

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \pm \frac{1}{2} a \\ x_3 = \pm \frac{1}{2} a \end{array}\right\}, \qquad x_2 = + \frac{1}{2} a, \qquad x_4 = + \frac{1}{2} a,$$

qui est un carré dans le plan $x_2 = \frac{1}{2} a$, $\quad x_4 = + \frac{1}{2} a$; ... etc.

On voit aisément que le nombre de ces associations est $\frac{8 \times 6}{2} = 24$.

3° *Les arêtes.* — Ensemble les 24 faces ont $24 \times 4 = 96$ côtés, comme les huit cubes en ont $8 \times 12 = 96$, même nombre; mais chacun de ces côtés est commun à trois faces et à trois cubes, ce qui donne seulement $8 \times 4 = 32$ pour le nombre effectif des arêtes. En effet, réunissons trois des symboles (3) dans lesquels le signe unique $+$ ou $-$ ne soit pas à la même place. Par exemple, avec le premier et le second

$$(\pm \pm \pm +) \quad \text{et} \quad (\pm \pm + \pm),$$

nous pouvons prendre: soit le troisième $(\pm + \pm \pm)$, ce qui nous donne une ligne passant par les deux points

$$x_1 = \pm \frac{1}{2} a, \qquad x_2 = + \frac{1}{2} a, \qquad x_3 = + \frac{1}{2} a, \qquad x_4 = + \frac{1}{2} a;$$

soit le quatrième $(+ \pm \pm \pm)$, ce qui nous donne une ligne passant par les deux points

$$x_1 = + \frac{1}{2} a, \qquad x_2 = \pm \frac{1}{2} a, \qquad x_3 = + \frac{1}{2} a, \qquad x_4 = + \frac{1}{2} a;$$

soit le septième $(\pm - \pm \pm)$, et soit enfin le huitième $(- \pm \pm \pm)$; cela fait quatre droites.

Si, au lieu de commencer avec le premier et le deuxième, nous commençons avec deux autres quelconques, nous aurons en tout $8 \times 7 \times 4$ droites, mais alors chaque symbole aura servi sept fois, de sorte qu'il n'y a en tout que $8 \times 4 = 32$ arêtes.

4° *Les sommets.* — Enfin les 32 arêtes ont ensemble 64 extrémités, dont une, par exemple, est

$$x_1 = \pm \frac{1}{2} a, \qquad x_2 = \pm \frac{1}{2} a.$$

On verra sans peine que chaque extrémité est commune à quatre arêtes, à six faces, à trois cases, et que leur nombre 64 ne fait en réalité que seize sommets.

En résumé, les huit cubes limitants sont limités eux-mêmes par 24 carrés, chacun commun à deux d'entre eux ; les carrés sont limités par 32 lignes, chacune commune à trois carrés ; les lignes enfin sont limitées par 64 points, chacun aux extrémités de quatre lignes.

La projection de l'octaédroïde sur l'espace $x_4 = 0$ est le cube

$$(\pm \pm \pm),$$

ou, en développant,

$$x_1 = \pm \frac{1}{2} a, \qquad x_2 = \pm \frac{1}{2} a, \qquad x_3 = \pm \frac{1}{2} a.$$

L'on peut dire que ce sont deux cubes coïncidents ; si l'espace de projection est parallèle à une face seulement, au lieu de l'être à une case, ils se séparent, et la projection consiste en deux cubes parallèles, avec des droites joignant les sommets qui se correspondent.

Voici comment on peut obtenir la projection sur un espace quelconque, déterminé de position relativement à l'hypercorps, mais pouvant toujours être supposé le nôtre, pourvu qu'une pareille supposition ne soit jamais faite en même temps pour deux ou plusieurs espaces à la fois. Cherchons la projection sur un espace perpendiculaire à une première diagonale.

Les premières diagonales sont (§ 40) les lignes qui joignent deux sommets placés sur la même ligne dans les deux parties du Tableau de la page 118. Elles se divisent en deux groupes formant deux quadrièdres droits pareils entre eux, savoir

$$6-16,\ 3-9,\ 1-11,\ 8-14 \quad \text{et} \quad 2-12,\ 4-10,\ 5-15,\ 7-13\,;$$

nous choisirons le premier pour en faire un nouveau système de coordonnées $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$.

La tranformation des coordonnées se fait, comme dans la Géométrie à trois dimensions, en projetant successivement, sur chaque coordonnée y d'un point donné, le contour polygonal formé par les quatre coordonnées anciennes x. Dans le cas actuel, celles-ci ne sont autre chose que quatre arêtes consécutives de l'octaédroïde et sont projetées par des angles égaux à 45° ou à 135° ; les formules de transformation sont :

$$2y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$
$$2y_2 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$
$$2y_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$2y_4 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4,$$

et il en résulte les valeurs contenues dans le Tableau suivant :

	$2y_1$	$2y_2$	$2y_3$	$2y_4$
1	o	o	$+2a$	o
2	$+a$	$+a$	$+a$	$-a$
3	o	$+2a$	o	o
4	$-a$	$+a$	$+a$	$+a$
5	$+a$	$-a$	$+a$	$+a$
6	$+2a$	o	o	o
7	$+a$	$+a$	$-a$	$+a$
8	o	o	o	$+2a$

	$2y_1$	$2y_2$	$2y_3$	$2y_4$
11	o	o	$-2a$	o
12	$-a$	$-a$	$-a$	$+a$
9	o	$-2a$	o	o
10	$+a$	$-a$	$-a$	$-a$
15	$-a$	$+a$	$-a$	$-a$
16	$-2a$	o	o	o
13	$-a$	$-a$	$+a$	$-a$
14	o	o	o	$-2a$

Pour avoir l'intersection de l'hypercorps par l'espace $y_4 = 0$ il

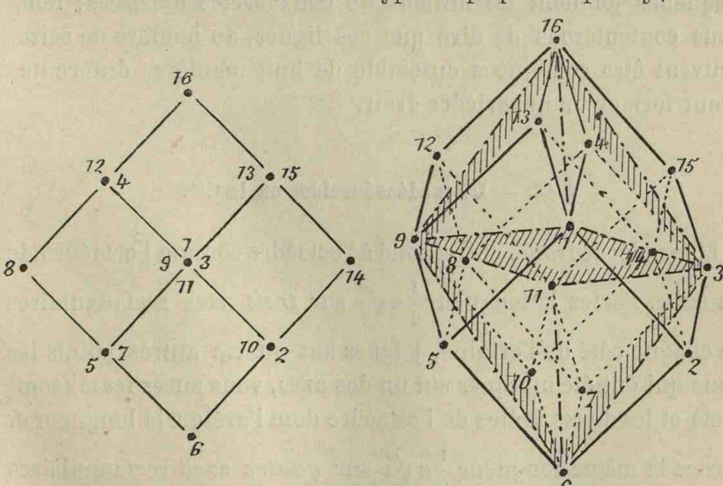


Fig. 27. — L'octaédroïde, traversé par notre espace perpendiculairement à une diagonale.

faut prendre les lignes du Tableau où il y a un *zéro* dans la colonne $2y_4$. Cela donne les points 1, 3, 6, 11, 9, 16, lesquels ont pour coordonnées

$$\begin{array}{ll} 0,\ 0,\ +2a, & 0,\ 0,\ -2a, \\ 0,\ +2a,\ 0, & 0,\ -2a,\ 0, \\ +2a,\ 0,\ 0, & -2a,\ 0,\ 0, \end{array}$$

et forment un *octaèdre;* celui-ci a été dessiné dans la figure 27 en traits mixtes et soulignés de hachures.

Pour avoir la projection sur l'espace $y_4 = 0$, il faut supprimer la colonne $2y_4$. Cela donne un polyèdre qui n'est autre chose que celui appelé *rhombododécaèdre* en Cristallographie. Ce solide a seize sommets et douze faces, qui sont des rhombes, d'où vient son nom ; il peut être décomposé soit en un octaèdre et un cube, soit en deux parallélépipèdes ; on en trouvera la description dans les Traités de Cristallographie, par exemple celui de de Lapparent.

Nous avons établi les projections planes et spatiales de l'octaédroïde successivement sur trois systèmes de coordonnées formés respectivement par des quatrièmes, des troisièmes et des premières diagonales. Est laissé de côté le cas des deuxièmes diagonales, lesquelles joignent les milieux de deux arêtes opposées; nous nous contenterons de dire que ces lignes, au nombre de seize, peuvent être combinées ensemble de huit manières différentes pour former un quadrièdre droit.

§ 42. — L'hexadécaédroïde, ou le C^{16}.

L'hexadécaédroïde correspond à l'octaèdre comme l'octaédroïde au cube. Portez la longueur $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ sur *trois* axes rectangulaires de chaque côté de l'origine, joignez aux quatre autres points les deux qui ont été marqués sur un des axes, vous aurez les six sommets et les douze arêtes de l'octaèdre dont l'arête a la longueur a. Portez la même longueur $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ sur *quatre* axes rectangulaires de chaque côté de l'origine ; joignez aux six autres points les deux qui ont été marqués sur un des axes ; vous aurez les huit sommets et les vingt-quatre arêtes de l'hexadécaédroïde dont l'arête a la longueur a.

D'après cela, en posant, pour abréger, $\alpha = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$, les huit sommets ont les coordonnées qu'indique le Tableau suivant :

SOMMETS.	COORDONNÉES			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	$+\alpha$	0	0	0
2	0	$+\alpha$	0	0
3	0	0	$+\alpha$	0
4	0	0	0	$+\alpha$
5	$-\alpha$	0	0	0
6	0	$-\alpha$	0	0
7	0	0	$-\alpha$	0
8	0	0	0	$-\alpha$

Comme on l'a vu (§ 39), les 24 arêtes aboutissent six par six à chaque sommet, et seize cases tétraédrales se réunissent par quatre sur chaque arête, par huit à chaque sommet. Laissant de côté tout autre point de doctrine, nous nous attacherons uniquement à faire comprendre de notre mieux cette constitution.

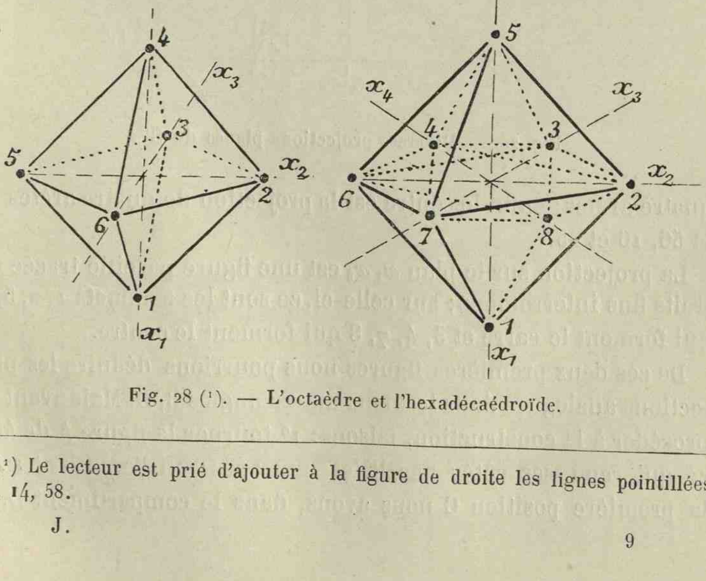


Fig. 28 [1]. — L'octaèdre et l'hexadécaédroïde.

---

(1) Le lecteur est prié d'ajouter à la figure de droite les lignes pointillées 13, 14, 58.

Les deux dernières colonnes du Tableau donnent (*fig.* 29) la projection de l'hypercorps sur le plan des $x_3\,x_4$; c'est le carré dessiné en traits pleins; ses sommets 3, 4, 7, 8 sont les projections des sommets de même nom du corps, et son centre est la projection commune des quatre autres sommets de celui-ci; les quatre côtés du carré sont les projections de quatre des arêtes du corps; chacune des quatre demi-diagonales est la projection de

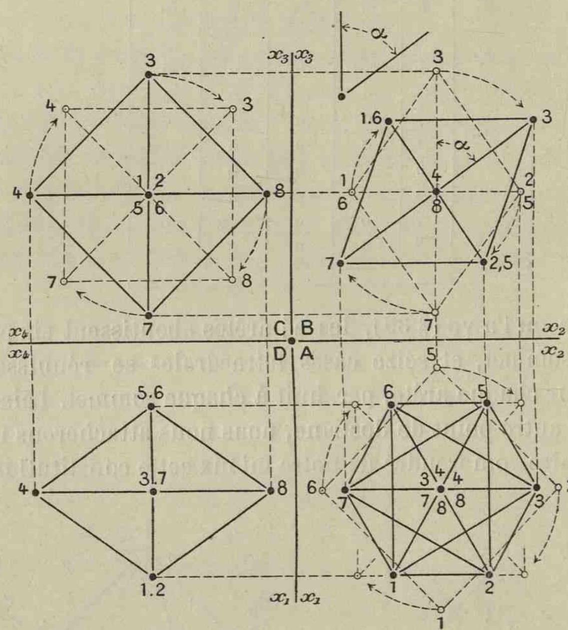


Fig. 29. — Diverses projections planes du C^{16}.

quatre arêtes; enfin le centre est la projection de quatre arêtes 12 et 56, 16 et 25.

La projection sur le plan $x_1\,x_2$ est une figure pareille tracée en traits fins interrompus; sur celle-ci, ce sont les sommets 1, 2, 5, 6 qui forment le carré et 3, 4, 7, 8 qui forment le centre.

De ces deux premières figures nous pourrions déduire les projections analogues dans les deux autres angles B, D. Mais avant de procéder à la construction, faisons: 1° tourner la figure A de 45°, ce qui rend ses côtés parallèles aux axes; en l'associant avec la première position C nous avons, dans le compartiment D, le losange $\overline{12}.8.\overline{56}.4$; c'est une projection sur un plan parallèle à deux deuxièmes diagonales ; 2° tourner la figure C de 45°, ce qui rend à leur tour ses côtés parallèles aux axes ; en l'associant avec la première position A, nous avons, dans le compartiment B, le losange $3.\overline{25}.7.\overline{16}$. Chacune de ces deux figures représente la projection de l'hypercorps sur un plan parallèle au plan bissecteur des précédents.

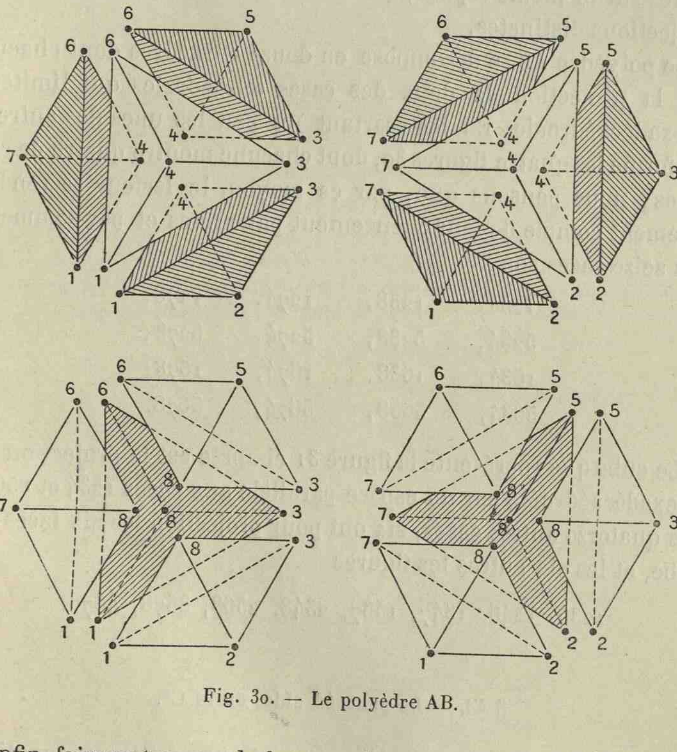


Fig. 30. — Le polyèdre AB.

Enfin, faisons tourner le losange du plan $x_2 x_3$ jusqu'à ce qu'un de ses côtés devienne parallèle à l'axe x_2. En l'associant alors avec le losange du plan $x_4 x_1$, nous avons, dans $x_1 x_2$, la figure hexagonale 1 2 3 5 6 7, à laquelle nous voulions arriver parce qu'elle va nous permettre de voir séparément chacun des seize tétraèdres ; elle est la projection de l'hypercorps sur un plan parallèle à une de ses faces.

Associé avec le losange en traits pleins de l'angle B, la figure hexagonale A définit et représente un corps à trois dimensions, que nous désignerons par AB, et qui est très voisin de l'octaèdre ayant pour sommets les points 1, 2, 3, 5, 6, 7. Il a un sommet de plus : le point 4-8 de la figure A, et six arêtes de plus : les lignes joignant ce point aux six sommets. Le point 4-8 est la projection commune de deux sommets de l'hypercorps sur l'espace AB; les six lignes qui en partent sont chacune la projection de deux arêtes sur le même espace; les autres sommets et arêtes ont des projections distinctes.

Le polyèdre AB se décompose en douze tétraèdres dont chacun est la projection de deux des cases tétraédrales qui limitent l'hexadécaédroïde. En les écartant un peu les unes des autres, on forme les quatre figures 30, dont chacune montre quatre de ces cases; nous pensons que, par ce moyen, le lecteur se rendra aisément compte de leur agencement par arêtes et par sommets. Ces seize cases sont :

1234,	1238,	1274,	1278;
5234,	5238,	5274,	5278;
1634,	1638,	1674,	1678;
5634,	5638,	5674,	5678.

Le cube que représente la figure 31 ci-après est la projection de l'hexadécaédroïde sur un espace parallèle aux cases 1234 et 8567 : des quatorze autres cases, six ont pour projection les six faces du cube, et les six autres les figures

1235, 1246, 1347, 1567, 2348, 2568, 3578, 4678.

§ 43. — Le pentaédroïde, ou le C^5.

Pour établir le pentaédroïde, nous allons mettre en équations la construction géométrique donnée au § 39, II, à laquelle se rapporte la figure 16.

Considérons un premier tétraèdre régulier, que nous appellerons le *tétraèdre fondamental,* et dont nous désignerons les sommets par 1, 2, 3, 4. Comme il convient de donner aux coordonnées des valeurs numériquement aussi simples que possible, plaçons ce tétraèdre dans un cube (*fig.* 31) où ses arêtes opposées 12, 34 soient les *diagonales contraires de deux faces opposées,* et plaçons

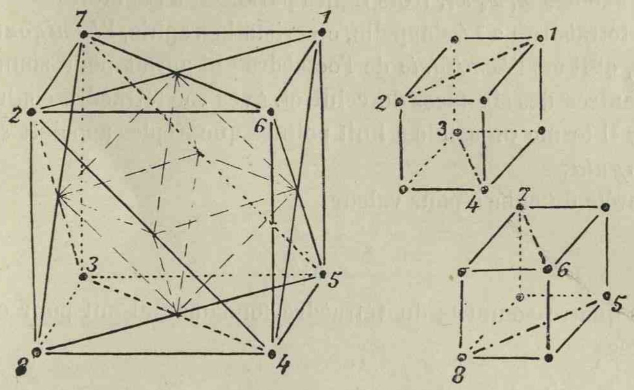


Fig. 31. — *Stella octangula* de Képler ([1]).

([1]) Voici le développement de la figure 31 et la manière de la construire. Faire (*fig.* 32) un tétraèdre fermé en collant la languette *a* sous (*a*) et la languette *b* sous (*b*); puis appliquer successivement les diagonales des cases 5, 4, 3, 2 respectivement sur les arêtes 9.10, 9.7, 7.8, 8.10 de ce tétraèdre; alors

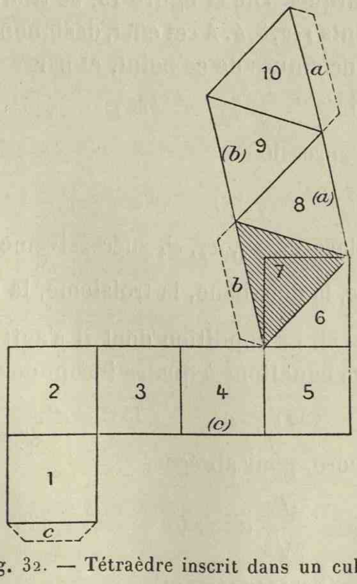


Fig. 32. — Tétraèdre inscrit dans un cube.

il ne reste plus en l'air que la face 1, servant de couvercle, ou pouvant être fixée aussi au moyen de la languette *c* collée sur 4.

le cube lui-même dans l'espace $x_4 = 0$ en prenant dans celui-ci, pour axe des $x_1\, x_2\, x_3$, trois lignes parallèles à ses arêtes.

Le tétraèdre 1 2 3 4 s'appelle, en cristallographie, l'*hémigonie* du cube, et il est l'*hémiédrie* de l'octaèdre qui aurait pour sommets les centres des six faces de celui-ci. Avec son tétraèdre conjugué 8567 il forme un solide à huit pointes que Képler appelait *stella octangula*.

L'arête du cube a pour valeur

$$\alpha = \frac{a}{2\sqrt{2}},$$

et les quatre sommets du tétraèdre fondamental ont pour coordonnées

$$(1)\quad \begin{cases} \text{le point } 1: & x_1 = +\alpha, & x_2 = +\alpha, & x_3 = +\alpha, & x_4 = 0, \\ \quad\text{»}\quad 2: & +\alpha, & -\alpha, & -\alpha, & 0, \\ \quad\text{»}\quad 3: & -\alpha, & -\alpha, & +\alpha, & 0, \\ \quad\text{»}\quad 4: & -\alpha, & +\alpha, & -\alpha, & 0, \end{cases}$$

et nous avons à exprimer que le point 5, en lequel se réunissent les deux points marqués 5 de la figure 15, se trouve à la distance a de chacun des points 1, 2, 3, 4. A cet effet, désignons par y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées inconnues de ce point, et par

$$(15)^2 \qquad (25)^2 \qquad (35)^2 \qquad (45)^2$$

ce que devient l'expression

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2,$$

quand on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4 successivement par

la première, la deuxième, la troisième, la quatrième

ligne du Tableau (1). La condition dont il s'agit fournit alors ce système de quatre équations à quatre inconnues y

$$(15)^2 = a^2, \qquad (25)^2 = a^2, \qquad (35)^2 = a^2, \qquad (45)^2 = a^2,$$

et si l'on pose encore, pour abréger,

$$\beta = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\, a = \alpha\sqrt{5} = \alpha \times 2,236,$$

on en tire presque instantanément :

$$(1') \qquad y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = 0, \qquad y_4 = \beta.$$

En joignant ces valeurs aux valeurs (1) nous formons le Tableau des coordonnées des sommets, savoir :

	x_1	x_2	x_3	x_4
1	$+\alpha$	$+\alpha$	$+\alpha$	0
2	$+\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	0
3	$-\alpha$	$-\alpha$	$+\alpha$	0
4	$-\alpha$	$+\alpha$	$-\alpha$	0
5	0	0	0	β

Détaillons encore la constitution du corps ; il a :

cinq cases limitantes : 1234, 1235, 1245, 1345 et 2345 ;
dix faces : 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245 et 345 ;
dix arêtes : 12, 23, 34, 13, 14, 24, 35, 15, 25, 45 ;
cinq sommets : 1, 2, 3, 4, 5.

Au sommet 1 (ce serait pareil pour chacun des autres) aboutissent

quatre arêtes : 12, 13, 14, 15 ;
six faces : 123, 124, 125, 134, 135, 145 ;
quatre cases : 1234, 1235, 1245, 1345 ;

les quatre arêtes portent chacune trois cases, savoir :

$$12 : \begin{cases} 1234, \\ 1235, \\ 1245, \end{cases} \quad 13 : \begin{cases} 1234, \\ 1235, \\ 1345, \end{cases} \quad 14 : \begin{cases} 1234, \\ 1245, \\ 1345, \end{cases} \quad 15 : \begin{cases} 1235, \\ 1245, \\ 1345, \end{cases}$$

elles ont deux à deux deux cases communes :

12 et 13 :	13 et 14 :	14 et 15 :	15 et 12 :
1234	1234	1245	1235
1235	1345	1345	1245

et trois à trois une case commune :

$$\left.\begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}\right\} : 1234, \quad \left.\begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix}\right\} : 1345, \quad \left.\begin{matrix} 14 \\ 15 \\ 12 \end{matrix}\right\} : 1245.$$

Tel est le pentaédroïde. La figure 33 en montre quelques projections planes obtenues suivant les mêmes principes que dans les cas précédents. Les figures dessinées en traits pleins dans les angles A et C sont celles que fournit immédiatement le Tableau des coordonnées : ce sont les projections sur des plans parallèles

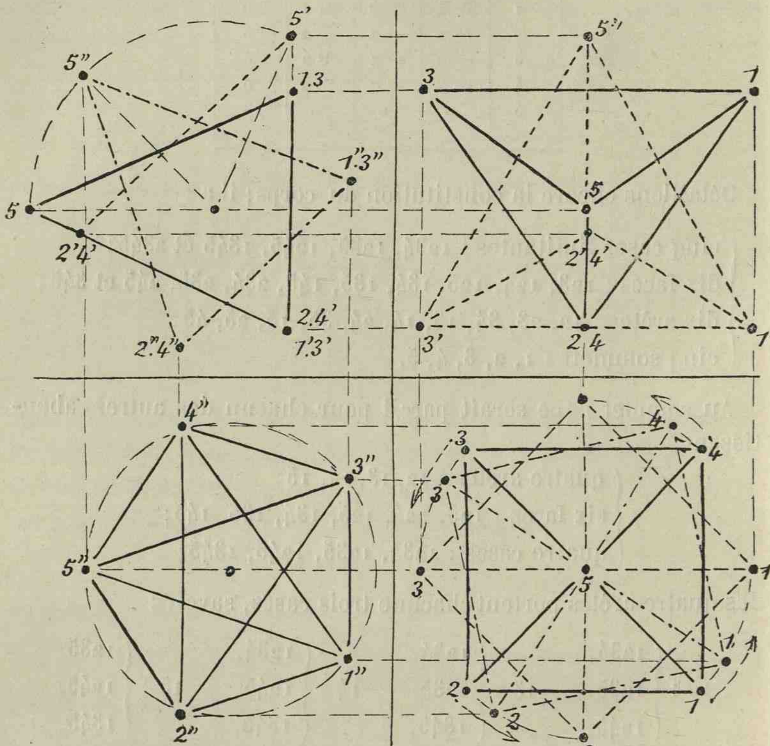


Fig. 33. — Diverses projections planes du pentaédroïde.

à deux faces du cube circonscrit. La figure en traits interrompus de l'angle B est la projection sur un plan parallèle à une face, et celle en traits interrompus de l'angle A, la projection sur un plan parallèle à deux arêtes opposées.

Quant à la projection du pentaédroïde sur un espace, c'est un corps qui s'obtient en joignant les quatre sommets d'un tétraèdre à un cinquième point, soit intérieur, soit extérieur, suivant les cas; on a quelques-unes de ces projections en associant les figures correspondantes des angles A et B, ou B et C, ou C et D, ou D et A.

L'hypervolume de l'octaédroïde est a^4; celui de l'hexadécaédroïde est $\frac{1}{8} a^4$. M. Schoute a donné [1] celui du pentaédroïde en fonction des coordonnées des sommets. En le considérant comme une *pyramide* qui aurait pour *base* le tétraèdre 1 2 3 4 et pour *hauteur* la longueur de la perpendiculaire abaissée du point 5 sur l'espace 1 2 3 4, on peut déduire de la formule de M. Schoute que *cet hypervolume est égal au volume de la base multiplié par la hauteur et divisé par* 4, *c'est-à-dire par le degré du champ*. C'est le même énoncé qui donne le volume du tétraèdre lui-même, le degré du champ étant alors 3, et celui du triangle, le degré du champ étant 2.

Pour les cas de *quatre* et *cinq* tétraèdres (*fig*. 17 et 18, § 39), on opérera comme nous l'avons fait au début de ce Paragraphe, et ainsi de proche en proche sur chaque nouvelle arête obtenue « jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus », dit Puchta, auquel nous avons emprunté ce petit calcul pour donner une idée de sa méthode. Avec quatre tétraèdres, on retrouve l'icosatétraédroïde, qui a fait l'objet du Paragraphe précédent; avec cinq, on a l'hexacosiédroïde, qui fera l'objet du § 47; avec six, ou davantage, on trouverait des valeurs *imaginaires*.

§ 44. — **L'icosatétraédroïde, ou le C^{24}.**

Nous arrivons au troisième cas du § 39, celui où la case constitutive est un octaèdre régulier (*fig*. 28). Nous désignerons ce solide à trois dimensions en écrivant à la file les trois sommets d'une face quelconque, puis les sommets correspondants de son opposée. Par exemple

$$1\ 2\ 3.\ 4\ 5\ 6$$

désigne un octaèdre dont les diagonales (qui sont des lignes ne faisant pas partie du corps) sont

$$14,\ 25,\ 36.$$

---

[1] *Sur les types de cristaux du système régulier de l'espace à quatre dimensions* (*Ass. fr. p. l'avanc. des Sciences; Congrès de Bordeaux*, 1895).

On les écrit en sautant deux chiffres chaque fois dans le symbole 123.456.

Pour avoir les huit faces de cet octaèdre il n'y a qu'à écrire successivement, suivant une loi facile à apercevoir :

$$\begin{array}{cccccccc} 123, & 234, & 345, & 456, & 561, & 612, & 135, & 246, \\ a & b & c & a & b & c & d & d \end{array}$$

les faces soulignées des mêmes lettres étant parallèles entre elles.

Pour avoir les douze arêtes, il faut prendre d'abord deux sommets opposés quelconques, par exemple 1 et 4, puis écrire

$$12,\ 13,\ 15,\ 16;\ 42,\ 43,\ 45,\ 46;\ 23,\ 35,\ 56,\ 62.$$

La projection plane de l'octaèdre comporte régulièrement *douze* lignes. Pour éviter l'encombrement, nous en supprimerons souvent quelques-unes, mais nous conserverons toujours au moins celles qui forment *le pourtour de la projection,* au nombre, tantôt de six, tantôt de quatre, quand la projection de l'octaèdre lui-même ne se réduit pas à un simple fragment de droite.

L'octaèdre régulier d'arête a est déterminé de position dans l'étendue quand on connaît quatre de ses sommets.

I. Appliquant la méthode de Puchta, nous avons à réunir sur une même arête 23 trois octaèdres

$$\alpha = 123.645, \qquad \beta = 123.987, \qquad \gamma = 236.11\ 10\ 7,$$

dont α et β ont en commun le triangle 123, β et γ le triangle 237, γ et α le triangle 236. Nous supposons connus les sommets du premier; pour avoir le second et le troisième il suffit, puisque trois de leurs points sont déjà fixés, savoir 1, 2 et 3 pour celui-là, 2, 3 et 6 pour celui-ci, de chercher un quatrième point de chacun d'eux : ce sera le point 7, qui leur est commun. Soient y_1, y_2, y_3, y_4 ses coordonnées.

La figure 34 représente les trois octaèdres α, β, γ, avant et après la réunion [1], laquelle se fait sur l'arête 23; les triangles communs à α et β, β et γ, γ et α, sont couverts de hachures, incli-

---

[1] Le lecteur remarquera les formes que prennent ces projections de l'octaèdre régulier, faites sur un plan non situé dans le même espace que lui.

nées pour le premier, horizontales pour le second, verticales pour le troisième.

Comme toutes les arêtes ont la longueur a et toutes les diagonales la longueur $a\sqrt{2}$, les distances 27, 37, 17, 67 doivent, après la réunion, être égales, les deux premières à a, et les deux dernières à $a\sqrt{2}$.

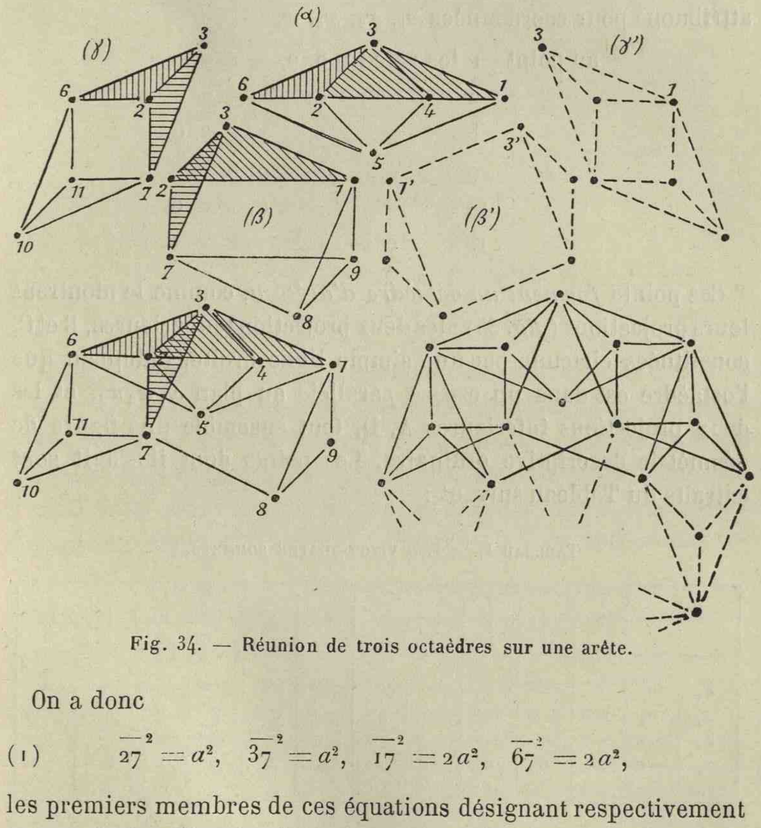


Fig. 34. — Réunion de trois octaèdres sur une arête.

On a donc

$$(1) \qquad \overline{27}^2 = a^2, \quad \overline{37}^2 = a^2, \quad \overline{17}^2 = 2a^2, \quad \overline{67}^2 = 2a^2,$$

les premiers membres de ces équations désignant respectivement ce que devient l'expression

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2$$

quand on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4, successivement par les coordonnées des points 2, 3, 1, 6. Ces équations, au nombre de quatre pour quatre inconnues, font connaître le point 7 et la position des deux octaèdres β, γ est déterminée. On en placera de la même manière deux autres β', γ', et voici ce que l'on trouvera en continuant ainsi.

Prenons six points, que nous désignerons par les numéros 1, 2, 8, 9, 10, 18; et posant toujours

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}.a,$$

attribuons pour coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 :

au point	1	les valeurs	$0,\ 0,\ +\alpha,\ +\alpha,$
»	2	»	$0,\ +\alpha,\ +\alpha,\ 0,$
»	8	»	$0,\ -\alpha,\ +\alpha,\ 0,$
»	9	»	$+\alpha,\ 0,\ +\alpha,\ 0,$
»	10	»	$-\alpha,\ 0,\ +\alpha,\ 0,$
»	18	»	$0,\ 0,\ +\alpha,\ -\alpha.$

Ces points *forment un octaèdre d'arête a*, comme le montrent leurs projections (*fig.* 35) : les deux projections supérieures, B et C, constituées chacune par une simple ligne droite, indiquent que l'octaèdre est dans un espace parallèle au plan $x_1 x_2 x_3$, et les deux projections inférieures A, D, font ensemble une figure de géométrie descriptive ordinaire. Les points dont il s'agit sont extraits du Tableau suivant :

TABLEAU I. — LES VINGT-QUATRE SOMMETS.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	$+\alpha$	0	$+\alpha$	$-\alpha$	0	0
x_2	0	$+\alpha$	$+\alpha$	$+\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	0	0	$+\alpha$	$+\alpha$
x_3	$+\alpha$	$+\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	0	$+\alpha$	$+\alpha$	$+\alpha$	0	0
x_4	$+\alpha$	0	0	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$+\alpha$	$-\alpha$

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
x_1	$-\alpha$	$+\alpha$	0	0	$+\alpha$	0	$-\alpha$	$+\alpha$	$-\alpha$	0	$+\alpha$	$-\alpha$
x_2	0	0	$-\alpha$	$-\alpha$	0	0	0	$+\alpha$	0	0	0	$-\alpha$
x_3	$-\alpha$	$-\alpha$	0	0	0	$+\alpha$	0	0	0	$-\alpha$	0	0
x_4	0	0	$-\alpha$	$+\alpha$	$+\alpha$	$-\alpha$	$+\alpha$	0	$-\alpha$	$+\alpha$	$-\alpha$	0

En substituant ces six points à ceux désignés par 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans l'exposition précédente, et procédant comme il a été dit, le septième point fourni par le calcul fera également partie du

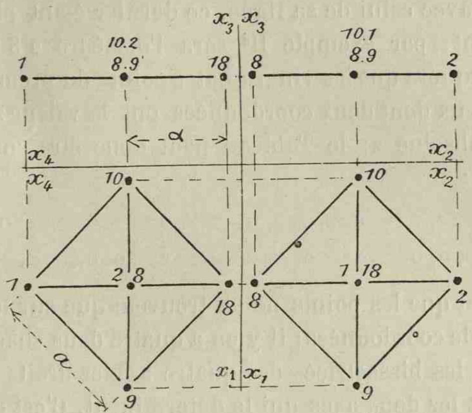


Fig. 35. — Un des 24 octaèdres.

Tableau; puis on verra apparaître successivement toutes les colonnes de celui-ci et, une fois qu'on en aura vingt-quatre, on retombera sur une des six prises comme point de départ. On aura formé vingt-quatre cases octaédrales, se tenant sans solution de continuité dans les conditions qu'exprime le Tableau de la page 104. De la multitude d'octaèdres que l'on peut former avec

Tableau II. — Les vingt-quatre cases octaédrales.

	I.	II.	III.
1.......	1 2 10. 3 19 11	1 2 11.20 17 9	1 11 19.22 16 17
2.......	2 3 11. 4 20 12	2 3 12.21 18 10	2 12 20.23 9 18
3.......	3 4 12. 5 21 13	3 4 13.22 19 11	3 13 21.24 10 19
4.......	4 5 13. 6 22 14	4 5 14.23 20 12	4 14 22.17 11 20
5.......	5 6 14. 7 23 15	5 6 15.24 21 13	5 15 23,18 12 21
6.......	6 7 15. 8 24 16	6 7 16.17 22 14	6 16 24.19 13 22
7.......	7 8 16. 1 17 9	7 8 9.18 23 15	7 9 17.20 14 23
8.......	8 1 9. 2 18 10	8 1 10.19 24 16	8 10 18.21 15 24

les vingt-quatre points et d'associations que l'on peut faire avec ces octaèdres, une seule réalise cette condition; elle est donnée dans le Tableau II, disposé en *Tableau d'enchaînement,* de telle sorte qu'on peut trouver presque à première vue les faces de contact, les arêtes communes, etc.

Nous désignerons chaque octaèdre en réunissant le numéro de sa colonne avec celui de sa ligne, ce dernier étant placé comme un exposant; par exemple II^2 sera l'octaèdre 2 3 12.21 18 10.

On remarquera que les vingt-quatre points du premier Tableau sont tous ceux dont deux coordonnées ont la valeur zéro et deux la valeur absolue α; le Tableau peut donc être condensé sous cette forme :

$$0, \pm\alpha, \pm\alpha, 0 ; \quad \pm\alpha, 0, \pm\alpha, 0 ; \quad \pm\alpha, \pm\alpha, 0, 0 ;$$
$$\pm\alpha, 0, 0, \pm\alpha ; \quad 0, \pm\alpha, 0, \pm\alpha ; \quad 0, 0, \pm\alpha, \pm\alpha.$$

On voit ainsi que les points ne se trouvent que sur les six plans du système de coordonnées; il y en a quatre dans chacun d'eux et ils sont sur les bissectrices des quatre angles droits en lesquels le partagent les deux axes qui le déterminent. C'est ce que nous appellerons *la division hexaédrale* de l'icosatétraédroïde. La répartition entre les six plans a lieu comme ceci :

3, 7, 20, 24 sont dans le plan des $x_1\ x_2$,
1, 5, 18, 22.......................... $x_3\ x_4$;
9, 10, 13, 14.......................... $x_1\ x_3$,
11, 12, 15, 16.......................... $x_2\ x_4$;
2, 4, 6, 8.......................... $x_2\ x_3$,
17, 19, 21, 23.......................... $x_4\ x_1$;

et il se forme de cette manière trois groupes naturels que nous retrouverons plus loin.

II. Construisons quelques projections du C^{24}.

1° D'après le Tableau I, les espaces

$$x_4 = \pm\alpha, \quad x_3 = \pm\alpha, \quad x_2 = \pm\alpha, \quad x_1 = \pm\alpha$$

contiennent les octaèdres

$$\mathrm{III}^1 \text{ et } \mathrm{III}^5, \quad \mathrm{I}^8 \text{ et } \mathrm{I}^4, \quad \mathrm{I}^2 \text{ et } \mathrm{I}^6, \quad \mathrm{III}^7 \text{ et } \mathrm{III}^1.$$

Il s'ensuit que les axes auxquels sont rapportées les coordonnées de ce Tableau sont les axes mêmes de l'hypercorps : des *quatrièmes diagonales*. Le Tableau fournit directement les projections sur les plans $x_1\ x_2$ et $x_3\ x_4$: ce sont (*fig.* 36) deux figures composées

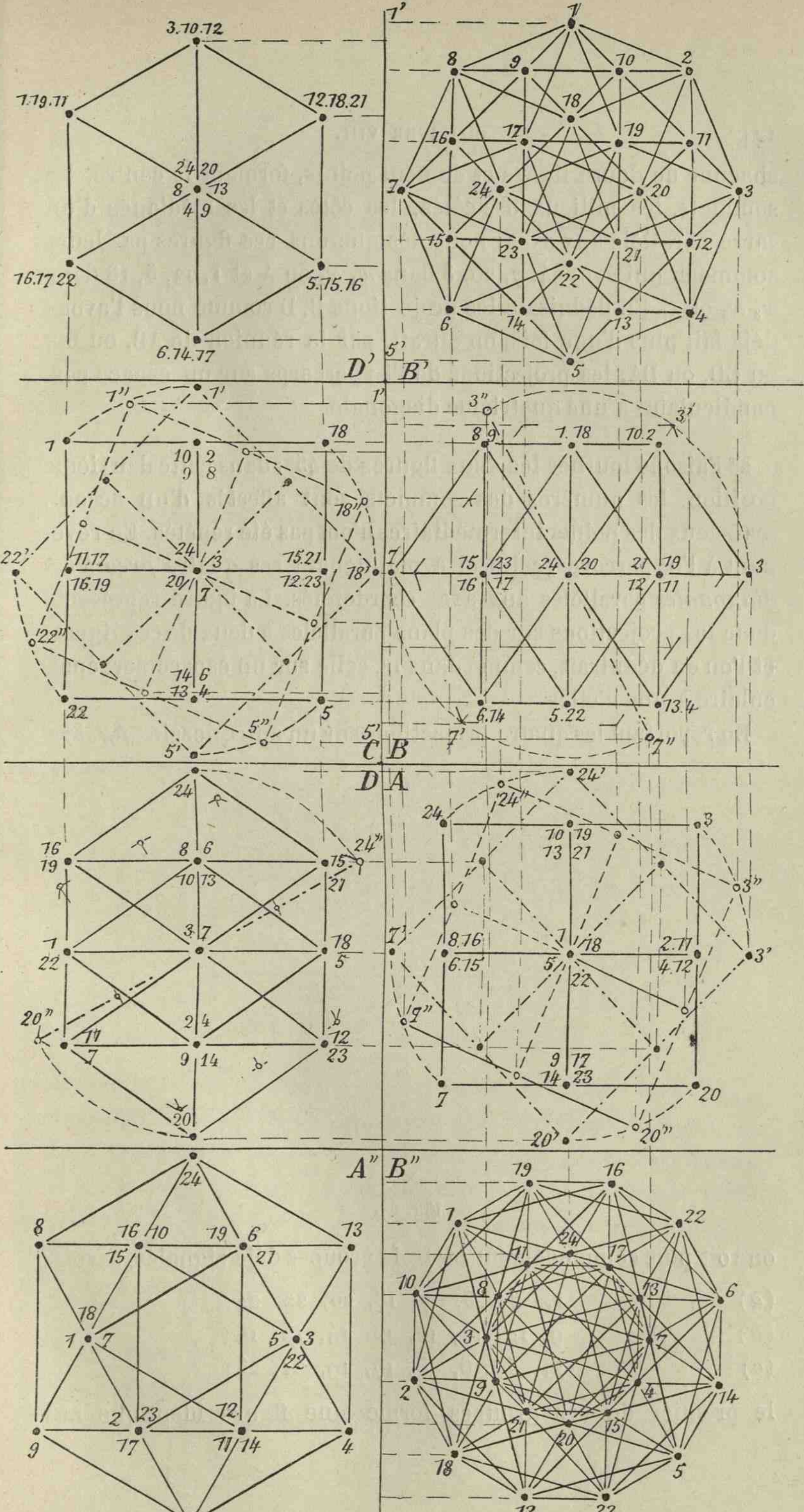


Fig. 36. — Diverses projections de l'icosatétraèdroïde.

chacune de douze lignes et de neuf points, formant le centre, les sommets, les milieux des côtés, les côtés et les médianes d'un carré parallèle aux axes; nous désignerons ces figures par leurs sommets, qui sont 24, 7, 20, 3 dans $x_1\,x_2$ ou A et 1, 22, 5, 18 dans $x_3\,x_4$ ou C. En déduisant les projections B, D comme nous l'avons déjà fait plus d'une fois, on aurait, par la réunion de AB, ou BC, ou CD, ou DA, les projections de l'hypercorps sur un espace perpendiculaire à une quatrième diagonale.

2° Faisons tourner les deux figures de 45°: dans cette deuxième position, les numéros des sommets sont affectés d'un accent, mais ceux des points intermédiaires n'ont pas été répétés. En revenant à l'hypercorps, celui-ci a maintenant ses quatre *premières diagonales* parallèles aux axes coordonnés. La figure représente donc les projections sur des plans parallèles à deux de ces lignes, et l'on en déduirait, comme dans 1°, celle sur un espace perpendiculaire à une d'elles.

En reportant les quatre projections sur un autre dessin (*fig.* 37),

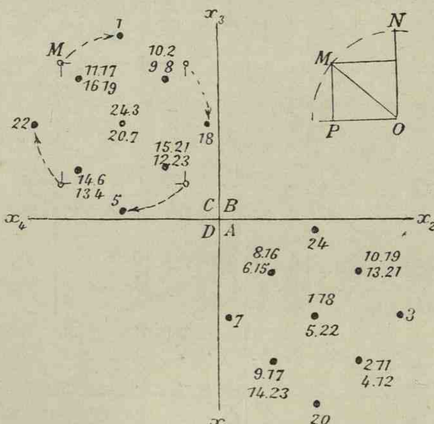


Fig. 37.

on voit plus commodément les trois groupes déjà signalés, savoir :

(*a*) 1, 3, 5, 7, 18, 20, 22, 24;
(*b*) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16:
(*c*) 2, 4, 6, 8, 17, 19, 21, 23;

le premier de ces groupes forme une figure identique aux projections dessinées en traits interrompus dans l'angle A et en traits pleins dans l'angle C de la figure 29, page 131 ; l'ensemble des deux autres forme une figure identique aux deux projections dessinées en traits pleins dans les angles A et C de la figure 23, page 119. On a, d'autre part (*fig.* 37),

$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = 2\,\alpha^2,$$

d'où

$$ON = \alpha\sqrt{2} = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}.\sqrt{2} = a.$$

Les figures se correspondent donc pour la grandeur comme pour

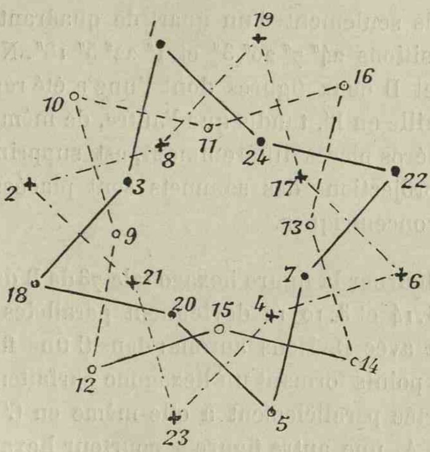


Fig. 38. — Les trois groupes de sommets.

la forme, et il en résulte ce remarquable théorème : *Sur les* 24 *sommets de l'icosatétraédroïde d'arête a, seize sont les sommets d'un octaédroïde d'arête a et les huit autres ceux d'un hexadécaédroïde d'arête $a\sqrt{2}$.* La décomposition peut se faire de trois manières, car il est facile de voir que chacun des trois groupes forme un C^{16} ; la figure 38, qui résulte de la projection B″ (*fig.* 36), montre la parfaite symétrie des trois groupes entre eux.

3° Associant le carré 24.7.20.3 de A avec 1′.22′.5′.18′ de B, puis 24′.7′.20′.3′ de A avec 1.22.5.18 de B, nous avons dans C et D deux figures que nous désignerons par leurs sommets opposés 7.3 et 24.20, lesquelles comprennent chacune onze points et 22 lignes, avec pourtour hexagonal pseudo-régulier. Si l'on note sur ces projections les points

1, 18, 5, 22, 24, 20, 3, 7,

on voit qu'ils forment des losanges identiques à ceux dessinés, l'un avec le grand axe vertical, l'autre avec le grand axe horizontal, dans les compartiments B, D de la figure 29; chacune de nos deux projections est donc faite sur un plan parallèle à deux deuxièmes diagonales d'un des trois C^{16} circonscrits.

4° Faisons tourner les carrés primitifs, non plus d'un demi-quadrant, mais seulement d'un quart de quadrant, ce qui leur donne les positions $24'' \; 7'' \; 20'' \; 3''$ et $1'' \; 22'' \; 5'' \; 18''$. Nous en déduisons dans B et D deux figures dont l'une a été reportée dans le haut de la feuille en B′, tandis que l'autre, de même forme, mais avec des numéros placés différemment, est supprimée. Dans ces figures, les projections des sommets sont placées par huit sur trois cercles concentriques.

5° Faisons tourner la figure hexagonale 73 de B de manière que ses côtés 7.6.14 et 3.10.12 deviennent parallèles à $x_1 x_2$, puis combinons-la avec D. Nous aurons: dans C une figure de douze lignes et sept points formant un hexagone parfaitement régulier, qui a été portée parallèlement à elle-même en C′ au haut de la feuille; dans A, une autre figure à pourtour hexagonal pseudo-régulier, qui est dessinée dans l'angle A″ au bas de la feuille. Celle-ci est la projection du C^{24} sur le plan d'une face, celle-là sur un plan absolument perpendiculaire à une face.

6° Enfin, amenons les figures hexagonales 3.7 et 20.24 de B et D dans les positions $3'' \; 7''$ et $20'' \; 24''$; en les combinant ensuite, nous aurons deux figures où les projections des 24 sommets sont disposées par douze sur deux cercles concentriques; une de ces figures est en B″. Cette curieuse forme, comme la plupart des précédentes, a été mise au jour par M. Van Oss.

7° Les projections du C^{24} sur un espace perpendiculaire à une première, deuxième, troisième, quatrième diagonale sont des polyèdres ayant respectivement

14, 14, 18, 12 sommets,
24, 30, 42, 24 arêtes,
12, 18, 26, 14 faces;

et ses sections par un espace pareillement placé passant par le centre sont des polyèdres ayant

14, 26, 18, 12 sommets,
24, 42, 30, 24 arêtes,
12, 18, 14, 14 faces. (SCHOUTE.)

L'icosatétraédroïde présente cette particularité intéressante qu'on peut le juxtaposer indéfiniment à lui-même et remplir à saturation l'étendue à quatre dimensions. Les centres de ces icosatétraédroïdes sont les sommets d'une suite infinie d'hexadécaédroïdes, qui remplissent aussi l'étendue sans vides.

Les milieux des 24 arêtes d'un C^{16}, comme les centres des 24 faces d'un C^{8}, sont les sommets d'un C^{24}.

§ 45. — Construction de l'icosatétraédroïde.

Nous voudrions maintenant, ainsi que nous l'avons fait dans les trois cas précédents, *construire* l'icosatétraédroïde, c'est-à-dire donner un corps géométrique à cet ensemble de points et d'octaèdres que définissent les Tableaux I et II du dernier paragraphe. C'est un nouvel effort qu'avec le lecteur nous tentons pour *saisir* l'hypercorps, et apprécier la distance qu'il y a de lui au polyèdre, encore plus grande que de celui-ci au polygone. Ce sera, en outre, un exercice de Géométrie descriptive à quatre dimensions, en vue duquel il nous faut rappeler les points suivants (1).

On a vu, dans le § 24, que les quatre espaces coordonnés partagent l'étendue en *seize* quadrièdres droits. Chacun de ceux-ci a quatre arêtes, qui sont une des seize associations quatre à quatre qu'on peut faire avec les six demi-axes; il a six faces planes, qui joignent les arêtes deux à deux. C'est ce point

(1) Le lecteur pourrait aussi, pour suivre plus commodément nos explications, se fabriquer quelques octaèdres en papier fort (de la carte à deux ou trois

de la constitution du quadrièdre droit qui amène dans la Géométrie à quatre dimensions un corps régulier n'ayant pas d'analogie dans celle à trois.

Dans le § 42 nous avons placé, sur chacun des huit demi-axes

$$\pm x_1, \quad \pm x_2, \quad \pm x_3, \quad \pm x_4,$$

et à la distance α de l'origine, un *point*. Ces huit points ont pu être réunis quatre à quatre par *seize* tétraèdres réguliers, dont chacun ferme, *comme un couvercle*, un des seize quadrièdres droits, et dont l'ensemble ferme complètement l'étendue autour de l'origine. C'est l'hexadécaédroïde.

Enfin, dans le § 41, nous avons placé, à la distance a de l'origine et perpendiculairement à chacun des huit demi-axes,

---

feuilles). Nous donnons (*fig.* 39) le développement qui sert à faire cette construction; *a, b, c, d, e* sont des languettes qui doivent être fixées à la colle

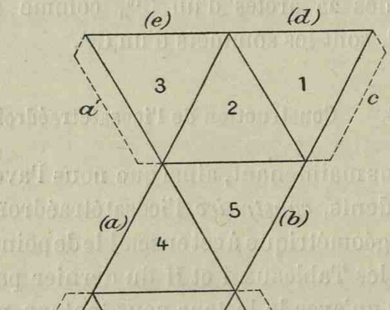


Fig. 39. — Développement d'un octaèdre régulier.

sous les endroits marqués par les mêmes lettres. Pour l'exécution : découper le pourtour, creuser les plis avec une pointe mousse, les briser; faire une pyramide avec les faces 2, 3, 4, 5 en laissant en l'air la face 1 et collant la languette *a* sous 4, coller *b* sous 5, venir à la face 1 et coller *c* sous 6; engager les deux languettes *d, e* de 8 sous 1 et 3; enfin numéroter les sommets. On maintient les languettes *a, b, c* en piquant chaque fois l'assemblage sur une planchette de bois tendre avec deux aiguilles emmanchées, et l'on ne passe à l'assemblage suivant que lorsque la colle a fait prise. La meilleure colle pour ce travail est celle de pâte de seigle et de gélatine blanche, très cuite et un peu épaisse.

un *hexaèdre régulier*. Ces huit hexaèdres, dont chacun a une face commune avec trois des autres, forment aussi un corps régulier fermé, qui a *seize* sommets, un dans chacun des seize quadrièdres droits; de chacun de ces sommets part une calotte de quatre arêtes et six faces, qui est aussi un quadrièdre droit, et qui s'appuie (§ 39) sur un des seize tétraèdres du corps précédent. C'est l'octaédroïde.

Le nombre *seize* va conserver le rôle important qu'il remplit dans ces premières constructions.

I. Considérons un des seize quadrièdres droits, par exemple celui qui, placé le dernier, est désigné par 4185 dans le Tableau de la page 66. Ses arêtes sont

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

et ses faces

$$x_1\,x_2, \quad x_2\,x_3, \quad x_3\,x_4, \quad x_4\,x_1, \quad x_1\,x_3, \quad x_2\,x_4,$$

toutes les lettres étant *affectées du signe + sous-entendu*. Or on voit : 1° par le Tableau I, que les sommets qu'elles contiennent sont respectivement

$$20, \ 17, \ 1, \ 2, \ 11, \ 9;$$

2° par le Tableau II, que ces sommets sont ceux de l'octaèdre II^1. On peut ainsi dresser le Tableau III, page 150, qui donne l'octaèdre inscrit dans chacun des seize quatrièdres droits, mais *ne le remplissant pas*.

Le Tableau est divisé en quatre parties. La première (nous appelons ainsi celle de l'angle supérieur droit) comprend quatre octaèdres,

$$\mathrm{I}^1, \quad \mathrm{II}^2, \quad \mathrm{III}^2, \quad \mathrm{II}^1,$$

formant ensemble un hypercorps que nous appellerons h_2 parce que le sommet 2 leur est commun; nous appellerons de même les trois autres h_4, h_6, h_8. Ils forment à eux quatre l'hypercorps H, de seize octaèdres. L'on remarque que, tandis que chacun des nombres 2, 4, 6, 8 se trouve quatre fois dans un même quartier du Tableau et ne se trouve que dans celui-là, les nombres 17, 19, 21, 23 se trouvent tous les quatre dans chaque quartier et n'y sont chacun qu'une fois. Il y a symétrie entre les deux groupes, et l'on pourrait remplacer le premier par le second en *ordonnant* le Tableau par rapport à celui-ci. La symétrie apparaîtra non moins clairement dans les figures, où la place importante que

TABLEAU III. — LES SEIZE QUADRIÈDRES DROITS ET LEURS OCTAÈDRES.

h_8		h_2	
(2385) $-x_1-x_2+x_3+x_4$ $II^8 = 8\ 1\ 10.\ 19\ 24\ 16$	(1285) $+x_1-x_2+x_3+x_4$ $I^7 = 8\ 7\ 16.\ 1\ 17\ 9$	(4185) $+x_1+x_2+x_3-x_4$ $II^1 = 2\ 1\ 11.\ 17\ 20\ 9$	(3485) $-x_1+x_2+x_3+x_4$ $I^1 = 2\ 1\ 10.\ 19\ 3\ 11$
(2356) $-x_1-x_2+x_3+x_4$ $III^8 = 8\ 10\ 18.\ 21\ 15\ 24$	(1256) $+x_1-x_2+x_3-x_4$ $II^7 = 8\ 7\ 9.\ 23\ 18\ 15$	(4156) $+x_1+x_2+x_3-x_4$ $III^2 = 2\ 12\ 20.\ 23\ 9\ 18$	(3456) $-x_1+x_2+x_3-x_4$ $II^2 = 2\ 3\ 12.\ 21\ 18\ 10$

h_6		h_4	
(2367) $-x_1-x_2-x_3-x_4$ $II^5 = 6\ 5\ 15.\ 21\ 4\ 13$	(1267) $+x_1-x_2-x_3-x_4$ $I^5 = 6\ 5\ 14.\ 23\ 7\ 15$	(4167) $+x_1+x_2-x_3-x_4$ $II^4 = 4\ 5\ 14.\ 23\ 20\ 12$	(3467) $-x_1+x_2-x_3-x_4$ $I^3 = 4\ 3\ 12.\ 21\ 5\ 13$
(2378) $-x_1-x_2-x_3+x_4$ $III^6 = 6\ 16\ 24.\ 19\ 13\ 22$	(1278) $+x_1-x_2-x_3+x_4$ $II^6 = 6\ 7\ 16.\ 17\ 22\ 14$	(4178) $+x_1+x_2-x_3+x_4$ $III^4 = 4\ 14\ 22.\ 17\ 11\ 20$	(3478) $-x_1+x_2-x_3+x_4$ $II^3 = 4\ 3\ 13.\ 19\ 22\ 11$

prennent les quatre derniers nombres se trouve ainsi expliquée.

On remarque aussi que chaque octaèdre a une face commune avec quatre des autres : ce sont ceux occupant les quatre cases qui touchent la sienne par un côté, les colonnes de droite et de gauche étant considérées comme se touchant par leur bord extérieur, et de même les rangées supérieure et inférieure; par exemple, pour l'octaèdre I^1 situé dans la première case, ce sont II^1 et II^8 situés dans les deuxième et quatrième cases de la première ligne, puis II^2 et II^3 situés dans les deuxième et quatrième cases de la première colonne. Il suit de là que, si l'on prend un quartier quelconque de quatre cases, chacun de ces quatres octaèdres tient au suivant, et le dernier au premier, *par une face*.

Ce théorème touche au point fondamental de la constitution des polyédroïdes; nous allons essayer de l'illustrer par des figures et, afin de donner à celles-ci un peu d'expression, nous appliquerons à quelques-unes la distinction, chère au dessinateur, en *parties vues* et *parties cachées*. Nous considérons comme vues, et nous dessinons en traits pleins, les lignes de la projection B qui, le corps étant dans la position qui donne cette projection, sont *au-dessus* de l'espace des quatre points 1, 18, 22, 5; nous considérons comme cachées, et nous dessinons en traits pointillés, celles qui sont *au-dessous* de cet espace. Les sommets

3, 6, 8, 10, 13, 15, 16, 19, 21, 24

sont dans le premier cas, et les sommets

2, 4, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 20, 23

sont dans le second.

Quant aux hachures qui couvrent certaines parties de nos figures, elles n'ont qu'une seule des diverses significations admises dans l'art du dessin : celle d'appeler l'attention sur ces parties ou de les distinguer des autres à un titre quelconque, généralement indiqué dans le texte. Elles ne sont pas autre chose que le *trait* par lequel, dans l'écriture, on souligne un ou plusieurs mots.

Nous mettrons, auprès de quelques figures, une *rose de directions* pour indiquer les positions qu'y prennent les *quatrièmes diagonales* formant le système d'axes auquel sont rapportées les coordonnées du Tableau I.

Ces conventions faites, voici l'explication des figures 39 à 44, qui sont l'expression graphique des Tableaux I, II, III, ou, si l'on aime mieux, dont ces Tableaux sont la formule numérique.

La figure 40 donne les projections A et C, B et D de l'hypercorps H; les deux premières, dont chacune a son plan perpendiculaire aux équateurs de huit octaèdres, se déduisent du Tableau I et fournissent les deux autres comme il est dit dans le Para-

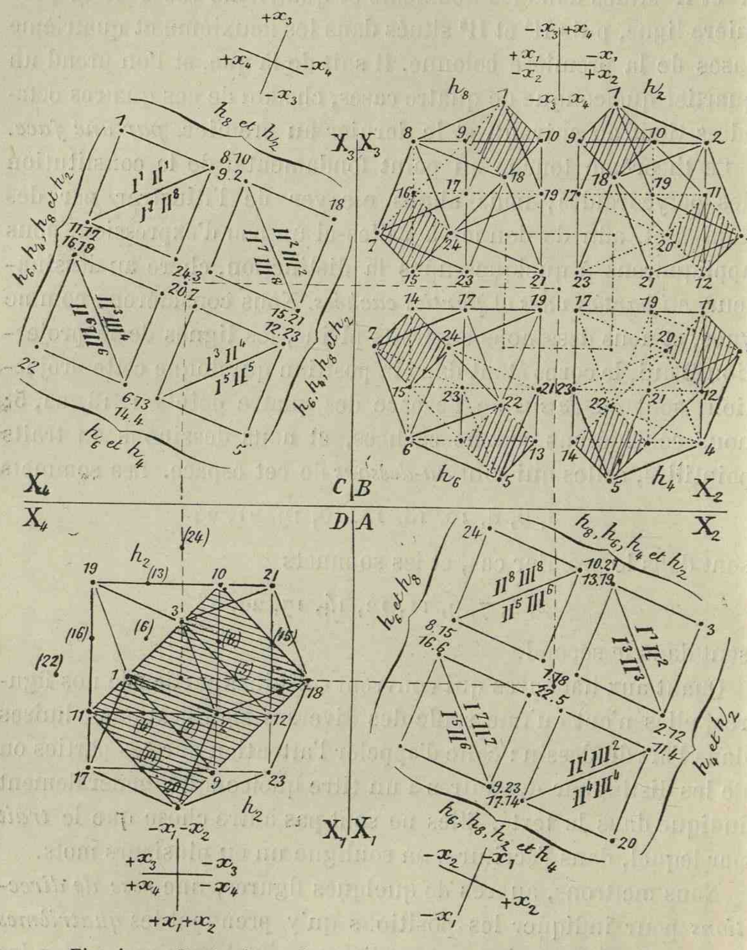


Fig. 40. — Projections planes des seize octaèdres fondamentaux.

graphe précédent. On voit, dans A et C, quatre carrés que nous avons un peu écartés les uns des autres une fois la construction faite; dans l'épure régulière, ils devraient se toucher, leurs quatre angles intérieurs coïncidant avec le point central de la figure. Les groupes de chiffres, qui sont, comme toujours, les numéros des sommets correspondants de l'hypercorps, se rapportent également aux deux ou aux quatre points dont ils sont

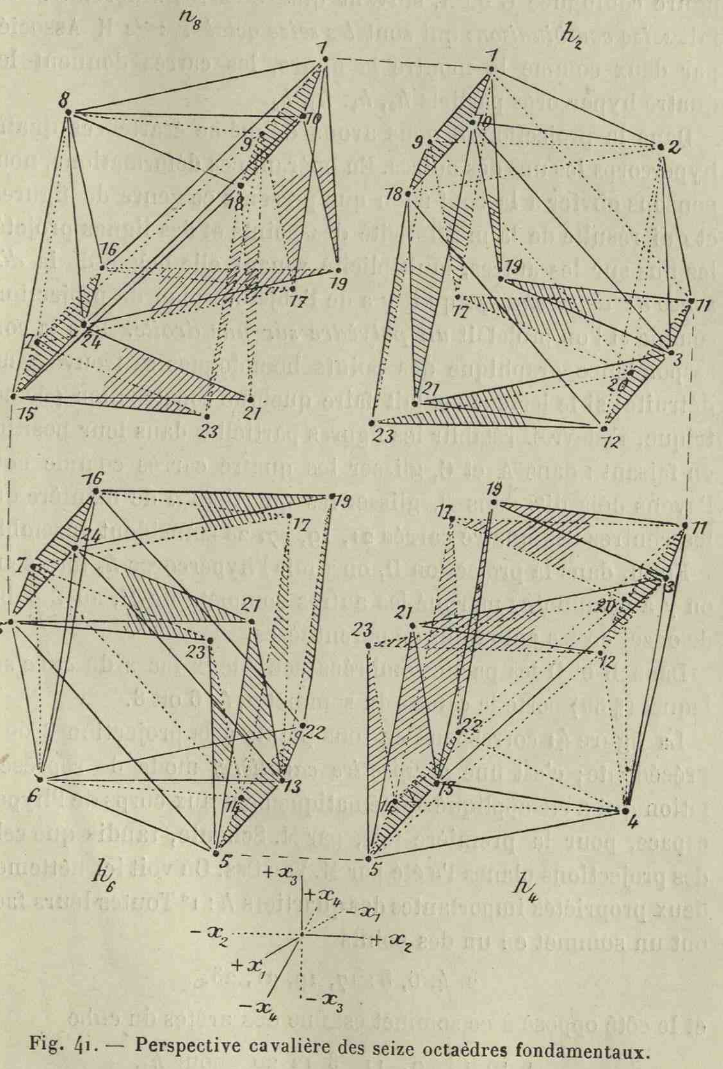


Fig. 41. — Perspective cavalière des seize octaèdres fondamentaux.

voisins; nous ne les avons écrits qu'une fois, et il appartient au lecteur de faire, le cas échéant, le triage des numéros se rapportant à l'un ou à l'autre de ces points. Chaque carré de A ou C, avec son unique diagonale ne passant jamais par le centre, est la projection de quatre octaèdres, lesquels se projettent, dans la figure conjuguée C ou A, suivant quatre carrés différents : cela fait *seize combinaisons* qui sont *les seize octaèdres de* H. Associés par deux comme le montre la figure, les carrés donnent les quatre hypercorps partiels h_2, h_4, h_6, h_8.

Dans la projection B nous avons de même écarté ces quatre hypercorps les uns des autres. En opérant ces déformations, nous pensons obvier à la confusion que présente ce genre de figures, et qui résulte de la multiplicité des points et des lignes projetés les uns sur les autres, multiplicité venant elle-même de la *distance de deux champs* qu'il y a de l'objet au plan de projection, comme si l'on projetait *un polyèdre sur une droite*. Mais la correspondance graphique des points homologues se trouve ainsi détruite; si le lecteur voulait faire quelque construction géométrique, il devrait rétablir les figures partielles dans leur position en faisant : dans A et C, glisser les quatre carrés comme nous l'avons déjà dit; dans B, glisser les quartiers h de manière que les centres des quatre carrés 21, 19, 17, 23 coïncident ensemble.

Enfin, dans la projection D, on a mis l'hypercorps h_2 tout seul; on y a néanmoins marqué les autres sommets de H, au nombre de onze, en les entourant de parenthèses.

Dans B et D les parties ombrées sont deux faces du *cube* sur lequel (§ 39) porte la calotte du sommet 2, 4, 6 ou 8.

La figure 41 correspond en tous points à la projection B de la précédente; c'est une *perspective cavalière,* mode de représentation qui a été appliqué systématiquement aux corps de l'hyperespace, pour la première fois, par M. Schoute, tandis que celui des projections planes l'a été par M. Van Oss. On voit ici nettement deux propriétés importantes des quartiers h : 1° Toutes leurs faces ont un sommet en un des points

$$2,\ 4,\ 6,\ 8\ ;\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,$$

et le côté opposé à ce sommet est une des arêtes du cube

1	10	18	9.	11	3	12	20	pour	h_2,
11	3	12	20.	22	13	5	14	»	h_4,
22	13	5	14.	16	24	15	7	»	h_6,
16	24	15	7.	1	10	18	9	»	h_8.

Figures 42 à 45. — Les couples d'octaèdres constituants de l'hypercorps h_2.

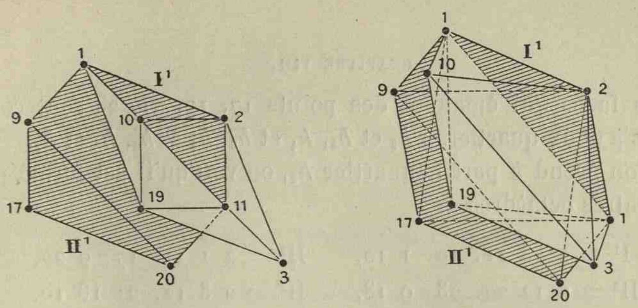


Fig. 42. — Les octaèdres $\mathrm{I}^1 = 1\ 2\ 11\ .\ 3\ 10\ 19$ et $\mathrm{II}^1 = 1\ 2\ 11\ .\ 9\ 17\ 20$.

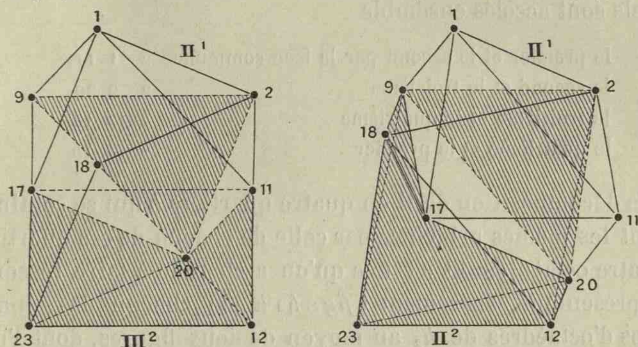


Fig. 43. — Les octaèdres $\mathrm{II}^1 = 2\ 9\ 20\ .\ 17\ 1\ 11$ et $\mathrm{II}^2 = 2\ 9\ 20\ .\ 23\ 12\ 18$.

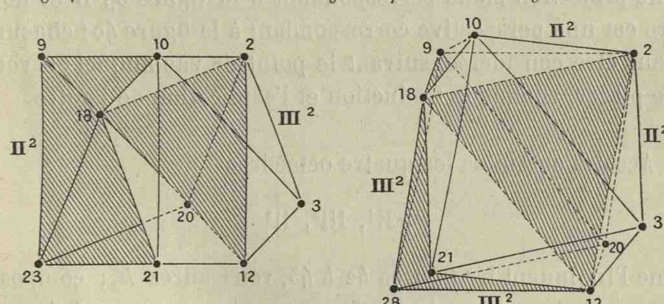


Fig. 44. — Les octaèdres $\mathrm{II}^2 = 2\ 12\ 18\ .\ 23\ 9\ 20$ et $\mathrm{III}^2 = 2\ 12\ 18\ .\ 21\ 10\ 3$.

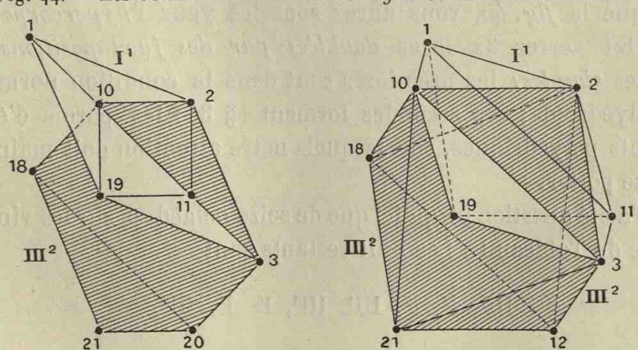


Fig. 45. — Les octaèdres $\mathrm{III}^2 = 2\ 3\ 10\ .\ 4\ 12\ 18$ et $\mathrm{I}^1 = 2\ 3\ 10\ .\ 19\ 1\ 11$.

2° Les faces qui émanent des points 17, 19, 21, 23 sont communes à deux quartiers : h_2 et h_4, h_4 et h_6, h_6 et h_8, h_8 et h_2.

Si l'on prend à part le quartier h_2, on voit qu'il est formé par les quatres octaèdres

$$\mathrm{I}^1 = 2\ 3\ 11.\ 19\ 1\ 10, \qquad \mathrm{II}^1 = 2\ 1\ 11.\ 17\ 9\ 20,$$
$$\mathrm{III}^2 = 2\ 12\ 20.\ 23\ 9\ 18, \qquad \mathrm{II}^2 = 2\ 3\ 12.\ 21\ 18\ 10,$$

lesquels sont accolés ensemble

le premier et le second par la face commune		2 1 11,
le second et le troisième	»	2 9 20,
le troisième et le quatrième	»	2 12 18,
le quatrième et le premier	»	2 3 10 :

c'est la décomposition de H en quatre quartiers h qui se continue suivant les mêmes principes par celle de chacun de ces quartiers en quatre octaèdres. Et c'est ce qu'on a cherché à faire ressortir en représentant séparément (*fig.* 42 à 45) chacun des quatre couples d'octaèdres de h_2 au moyen de deux figures, dont l'une est une projection plane correspondant à la figure 39 B et dont l'autre est une perspective correspondant à la figure 40; chacune pouvant être considérée, suivant le point de vue auquel on voudra se placer, comme la traduction et l'explication de l'autre.

II. Accolez ensemble les quatre octaèdres

$$\mathrm{I}^1,\ \mathrm{II}^1,\ \mathrm{III}^3,\ \mathrm{II}^2$$

comme l'indiquent les figures 42 à 45, vous aurez h_2; composez de même h_4, h_6 et h_8; puis accolez ensemble ces quatre h comme l'indique la *fig.* 40, vous aurez sous les yeux l'*hypercorps* H. Vous lui verrez 32 faces *doublées par des juxtapositions* et 64 faces *simples;* les premières sont dans la condition normale du polyédroïde; les secondes forment (§ 36) les parois d'évidements polyédriques, sur lesquels notre attention doit maintenant se porter.

Il n'a été question jusqu'ici que de seize octaèdres sur les vingt-quatre du Tableau II. Les huit restants sont

$$\mathrm{III}^7,\ \mathrm{I}^2,\ \mathrm{I}^8,\ \mathrm{III}^1,\ \mathrm{III}^3,\ \mathrm{I}^6,\ \mathrm{I}^4,\ \mathrm{III}^5,$$

et ils se trouvent respectivement dans les espaces

$$x_1 = +\alpha,\quad x_2 = +\alpha,\quad x_3 = +\alpha,\quad x_4 = +\alpha,$$
$$x_1 = -\alpha,\quad x_2 = -\alpha,\quad x_3 = -\alpha,\quad x_4 = -\alpha.$$

Ils forment un deuxième hypercorps, qui n'a que des faces

TABLEAU IV. — LES TROIS HYPERPOLYÈDRES (A), (B), (C).

(A)

	III^8	I^3	I^1	III^2	III^4	I^7	I^5	III^6
III^8	»	21	10	18	»	8	15	24
I^3	21	»	3	12	4	»	5	13
I^1	10	3	»	2	11	1	»	19
III^2	18	12	2	»	20	9	23	»
III^4	»	4	10	20	»	17	14	22
I^7	8	»	1	9	17	»	7	16
I^5	15	5	»	23	14	7	»	6
III^6	24	13	19	»	22	16	6	»

(B)

	II^1	II^2	II^3	II^4	II^5	II^6	II^7	II^8
II^1	»	2	11	20	»	17	9	1
II^2	2	»	3	12	21	»	18	10
II^3	11	3	»	4	13	22	»	19
II^4	20	12	4	»	5	14	23	»
II^5	»	21	13	5	»	6	15	24
II^6	17	»	22	14	6	»	7	16
II^7	9	18	»	23	15	7	»	8
II^8	1	10	19	»	24	16	8	»

(C)

	III^7	I^2	I^8	III^1	III^3	I^6	I^4	III^5
III^7	»	20	9	17	»	7	14	23
I^2	20	»	2	11	3	»	4	12
I^8	9	2	»	1	10	8	»	18
III^1	17	11	1	»	19	16	22	»
III^3	»	3	10	19	»	24	13	21
I^6	7	»	8	16	24	»	6	15
I^4	14	4	»	22	13	6	»	5
III^5	23	12	18	»	21	15	5	»

simples, au nombre de $8 \times 8 = 64$, et que nous appellerons (C). On peut aisément se représenter chacun d'eux dans son espace, par exemple III^1 dans $x_4 = +\alpha$, en observant que ses six sommets sont sur les bissectrices des six angles droits que les six demi-axes $\pm x_1$, $\pm x_2$, $\pm x_3$ font entre eux. On peut les écrire comme le montre le Tableau IV (C), disposé à double entrée ([1]). Chaque ligne ou colonne contient les six sommets de l'octaèdre inscrit dans sa première case, et l'intersection d'une ligne avec une colonne est un sommet commun à ces deux octaèdres. Pour les cases marquées d'un astérisque, les deux en-têtes portent, ou le même octaèdre, ce qui est le cas pour celles de la diagonale descendant de gauche à droite, ou deux octaèdres *diamétralement opposés.*

Chaque octaèdre a donc un sommet commun avec chacun des six autres, son opposé ayant été mis de côté. Les points d'attache successifs, en prenant les octaèdres dans l'ordre du Tableau, sont

20, 2, 1, 19, 24, 6, 5, 23, 20;

ils sont entourés d'un rond dans quelques-unes des figures ci-après.

Le Tableau contient les vingt-quatre numéros de 1 à 24, ce qui veut dire que le groupe des 24 sommets du C^{24} est déjà constitué par les huit octaèdres. C'est pour cela que les projections obtenues dans le présent paragraphe offrent la même apparence que celles du paragraphe précédent auxquelles elles correspondent; la différence entre les trois cas : C^{24}, H et (C), consiste simplement en ce que les points et les lignes de la projection, comparés à ceux de l'hypercorps, n'ont pas la même multiplicité.

Les projections des huit nouveaux octaèdres, représentées figure 46, ont des formes tout autres que celles des premiers. En A et C, elles consistent soit en une *ligne droite,* soit en un *carré avec ses quatre demi-diagonales;* quatre présentent le premier cas sur l'un des deux plans conjugués, et le second sur l'autre; sur chacun de ces plans, les quatre carrés n'en font qu'un, commun à quatre octaèdres. Pour plus de clarté, nous avons écarté un peu les *lignes* de leur position, marquée par quatre lignes pointillées formant un autre carré. En B et D, quatre octaèdres ont pour projection un *losange dans lequel est inscrit un carré,* par exemple 1 2 18 8 et 1 10 18 9, et les quatre autres un *carré dans lequel est inscrit un losange,* par exemple 18 12 5 15

([1]) On verra bientôt la signification des parties (A) et (B) du Tableau.

et 18 23 5 21. Les quatre figures de la première sorte forment, dans chaque plan, le pourtour de la projection, tandis que les quatre autres couvrent ensemble le grand carré 1 3 5 7 dans B, 18 20 22 24

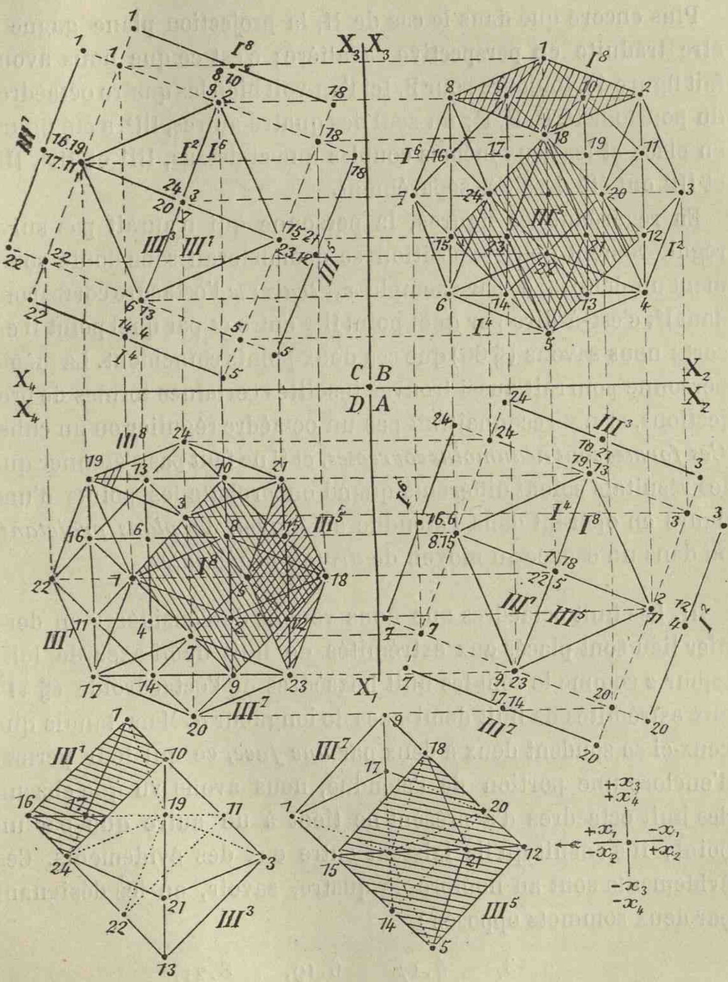


Fig. 46. — Projections planes des huit octaèdres complémentaires.

dans D, se recouvrant elles-mêmes par leurs coins sur le petit carré 18 20 22 24 dans B, 1 3 5 7 dans D. Nous n'avons détaillé le dessin que pour une figure de chaque sorte, laquelle est couverte de hachures. Mais, pour la projection B, nous en avons transporté au bas de la page, à gauche le couple d'octaèdres III^1 et III^3, à droite le couple III^5 et III^7; le premier se trouve *dessous* et le second *dessus*.

Plus encore que dans le cas de H, la projection plane gagne à être traduite en perspective cavalière; c'est ce que nous avons fait figure 47, toujours pour B. Ici l'on voit bien les quatre octaèdres du pourtour I^2, I^4, I^6, I^8; un seul des quatre autres, III^5, a été figuré en place et les deux mêmes couples que ci-dessus, III^1 et III^3, III^5 et III^7 ont été dessinés séparément.

En regardant ces figures, la personne qui n'aurait pas suivi régulièrement notre exposition se demanderait sans doute comment un demi-axe, par exemple x_3, *traverse* l'octaèdre correspondant I^8, c'est-à-dire par quel point il y entre et par quel point il en sort : nous savons (§ 36) que ces deux points coïncident. La même personne pourrait aussi trouver insolites certaines formes de projections, et n'y reconnaîtrait pas un octaèdre régulier ou un cube. *Ces formes sont néanmoins correctes,* et il ne faut pas s'étonner que les résultats soient différents quand on projette les points d'une figure en opérant dans l'étendue au moyen de *plans projetants* ou dans un espace au moyen de *droites projetantes.*

III. Les huit octaèdres que nous venons de considérer en dernier lieu sont placés aux extrémités de huit demi-axes de longueur α comme le sont les huit hexaèdres de l'octaédroïde (§ 41) aux extrémités de huit demi-axes de longueur a. Mais, tandis que ceux-ci se soudent deux à deux par *une face,* ce qui leur permet d'enclore une portion de l'étendue, nous avons vu que chacun des huit octaèdres d'à présent ne tient à un autre que par un point; il s'ensuit qu'ils laissent entre eux des évidements. Ces évidements sont au nombre de quatre, savoir, en les désignant par deux sommets opposés :

$$2.23, \qquad 4.17, \qquad 6.19, \qquad 8.21.$$

Ils sont tous faits comme le premier. Celui-ci a seize faces qui aboutissent à des arêtes du cube

$$1\ 10\ 18\ 9.\ 11\ 3\ 13\ 20$$

et sont :

1° Quatre faces, 2 11 3, 2 3 12, 2 12 20, 2 20 11, de l'octaèdre I^2
2° Quatre » 2 1 10, 2 10 18, 2 18 9, 2 9 1, de l'octaèdre I^8;
3° Deux » 1 11 17 et 1 11 19, de » III^1;
4° Deux » 3 10 19 et 3 10 21, de » III^3;
5° Deux » 12 18 21 et 12 18 23 de » III^5;
6° Deux » 9 20 23 et 9 20 27, de » III^7.

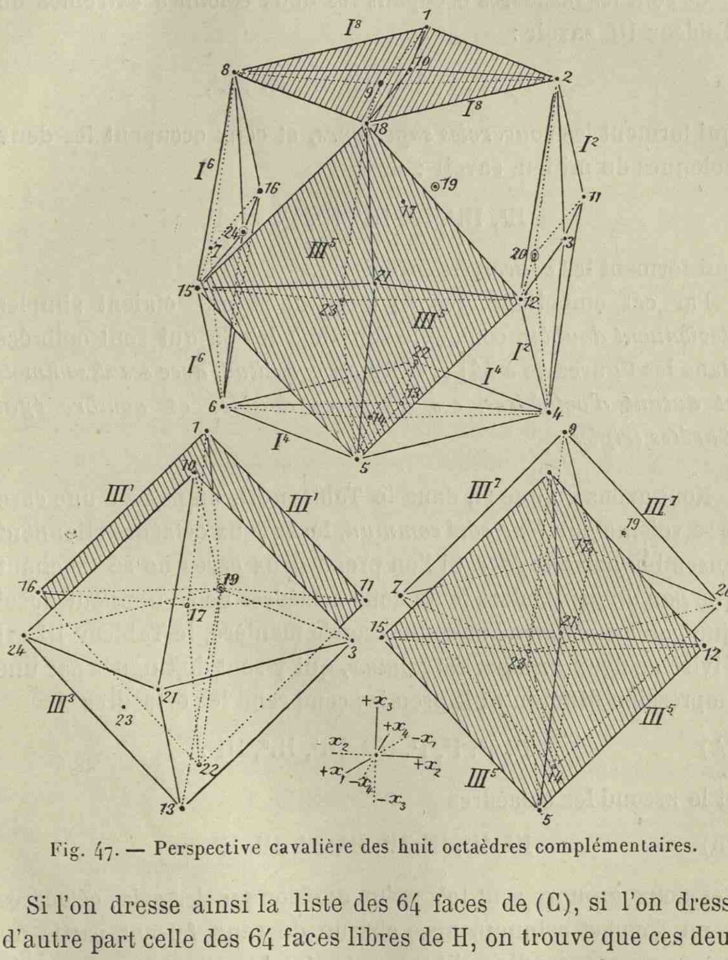


Fig. 47. — Perspective cavalière des huit octaèdres complémentaires.

Si l'on dresse ainsi la liste des 64 faces de (C), si l'on dresse d'autre part celle des 64 faces libres de H, on trouve que ces deux listes sont identiques; on reconnaît en outre que les faces qui dessinent un creux sur celui-ci dessinent un relief sur celui-là, et réciproquement; en un mot, les deux corps *s'emboîtent* exactement l'un sur l'autre, et les évidements que nous venons de reconnaître sur (C) sont remplis:

$$\begin{aligned} 2.23 &\text{ par } h_2, \\ 4.17 &\text{ par } h_4, \\ 6.19 &\text{ par } h_6, \\ 8.21 &\text{ par } h_8. \end{aligned}$$

Ce sont les octaèdres occupant les deux colonnes extrêmes du Tableau III, savoir :

$$\mathrm{I}^1,\ \mathrm{II}^2,\ \mathrm{I}^3,\ \mathrm{II}^3,\ \mathrm{III}^6,\ \mathrm{II}^5,\ \mathrm{III}^8,\ \mathrm{II}^8,$$

qui forment les *couvercles supérieurs,* et ceux occupant les deux colonnes du milieu, savoir :

$$\mathrm{II}^1,\ \mathrm{III}^2,\ \mathrm{II}^4,\ \mathrm{III}^4,\ \mathrm{II}^6,\ \mathrm{I}^5,\ \mathrm{II}^7,\ \mathrm{I}^7$$

qui forment les *couvercles inférieurs.*

Par cet emboîtage, les 64 faces de H qui étaient simples *deviennent doubles,* comme le sont déjà les 32 qui sont ombrées dans les figures 40 à 44; *et le* C^{24} *est constitué, avec ses* 24 *sommets et autant d'octaèdres, ses* 96 *faces doubles et nombre égal d'arêtes triples.*

Nous avons vu que si, dans le Tableau III, on passe d'une case à sa voisine *par leur côté commun,* leurs deux octaèdres tiennent ensemble *par une face.* Si l'on prend deux cases ne se touchant que *par un point,* alors leurs deux octaèdres ne se tiennent aussi que *par un sommet.* Par cette seconde manière, le Tableau III est divisé en deux *groupes diagonaux,* qui y sont distingués par une impression différente; le premier comprend les octaèdres

(A) $\mathrm{I}^1,\ \mathrm{I}^3,\ \mathrm{I}^5,\ \mathrm{I}^7,\ \mathrm{III}^2,\ \mathrm{III}^4,\ \mathrm{III}^6,\ \mathrm{III}^8,$

et le second les octaèdres

(B) $\mathrm{II}^1,\ \mathrm{II}^2,\ \mathrm{II}^3,\ \mathrm{II}^4,\ \mathrm{II}^5,\ \mathrm{II}^6,\ \mathrm{II}^7,\ \mathrm{II}^8.$

Ces deux groupes sont tels qu'un quelconque des seize octaèdres a un sommet commun avec chacun de ceux faisant partie du même groupe, tandis qu'il y en a quatre dans l'autre groupe avec lesquels il a une face commune et quatre avec lesquels il n'a rien de commun.

Si l'on rapproche de ces deux groupes celui des huit octaèdres appelés plus haut *les complémentaires :*

(C) I^2, I^4, I^6, I^8, III^1, III^3, III^5, III^7,

il est avec chacun d'eux dans les mêmes conditions, c'est-à-dire qu'on peut former avec (C) et (A), ou avec (C) et (B), un Tableau pareil au Tableau III. Voici ces trois Tableaux, qui satisfont à une même condition assez complexe, et dont la confection n'est pas des plus aisées :

Tableau V. — Agencement des vingt-quatre octaèdres du C^{24}.

(AB)

II^8	I^7	II^1	I^1
III^8	II^7	III^2	II^2
II^5	I^5	II^4	I^3
III^6	II^6	III^4	II^3

(BC)

II^1	I^8	II^2	I^2
III^7	II^7	III^5	II^4
II^6	I^6	II^5	I^4
III^1	II^8	III^3	II^3

(CA)

III^2	I^8	I^1	I^2
III^5	III^8	III^3	I^3
I^5	I^6	III^6	I^4
III^7	I^7	III^1	III^4

Rappelons la condition dont il s'agit. Deux des seize octaèdres de chaque Tableau ont une face commune si leurs numéros sont inscrits dans deux cases contiguës *par un côté,* et un sommet commun s'ils le sont dans deux cases contiguës *par un point,* les rangées et les colonnes extrêmes étant censées contiguës par leur bord extérieur comme si le Tableau était, sans solution de continuité, imprimé sur un cylindre horizontal en ce qui concerne les rangées, vertical en ce qui concerne les colonnes. Les octaèdres se trouvent ainsi disposés dans les Tableaux comme ils le sont en réalité sur le C^{24} lui-même : à eux trois, ces Tableaux *à double entrée* (à deux dimensions) remplacent le Tableau *à quadruple entrée* (à quatre dimensions) qui réaliserait la condition à lui seul.

On a donc trois groupes

(A), (B), (C),

dont deux, à volonté, peuvent fournir les octaèdres fondamentaux, tandis que le troisième fournit les huit octaèdres complémentaires. Dans chaque groupe séparé, les 64 faces d'octaèdres sont simples; par l'emboîtage de deux d'entre eux, 32 faces de chacun se doublent avec 32 faces de l'autre; par l'emboîtage avec le troisième, les $32 + 32$ faces simples restantes se doublent avec les 64 de celui-ci. On retrouve ainsi le nombre des faces du C^{24} égal à $32 \times 3 = 96$, comme il est donné, par une autre considération, égal à $24 \times 8 \times \frac{1}{2} = 96$.

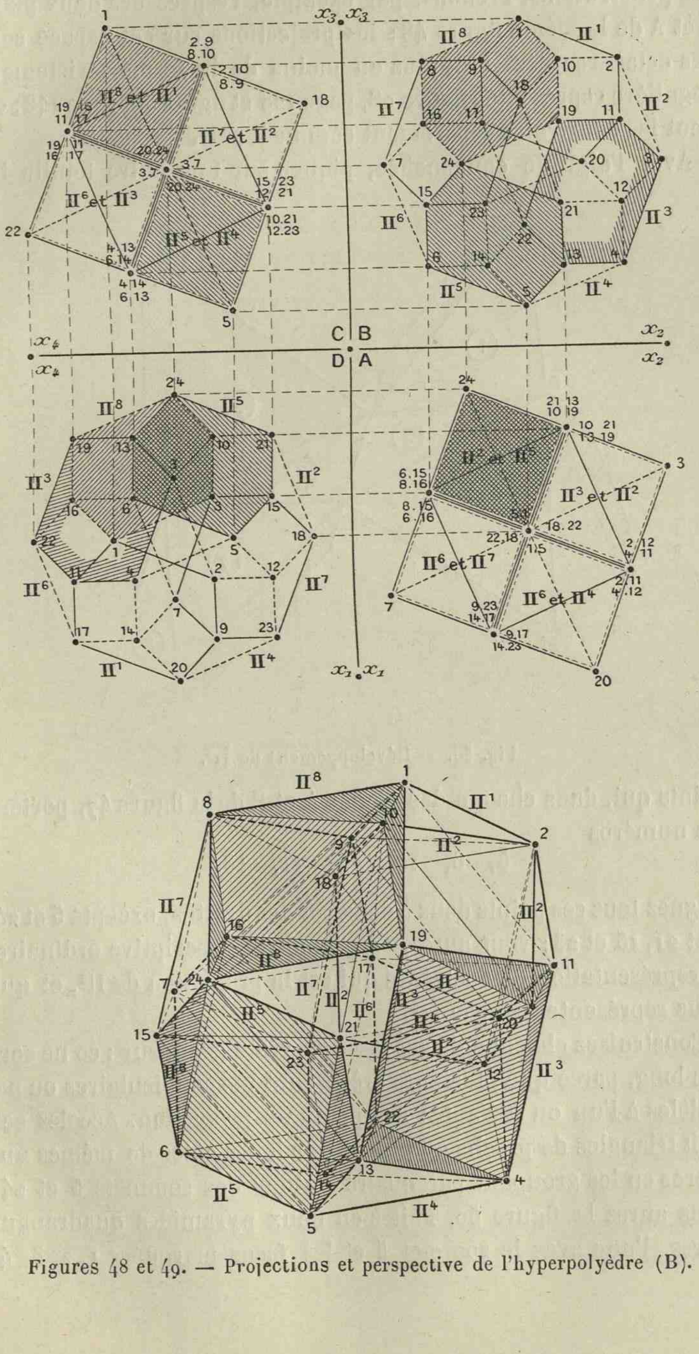
Le groupe B, intermédiaire entre les deux autres, se présente dans les projections avec une symétrie remarquable. Nous le donnons dans la figure 48 qui, débarrassée des constructions dont les précédentes étaient encombrées, semble pouvoir être offerte comme un bon spécimen d'*épure de Géométrie descriptive à quatre dimensions*. — Dans les angles A et C, les octaèdres ont pour projections des carrés superposés par deux; chaque côté d'un de ces carrés est la projection de deux ou de quatre arêtes, et nous avons tracé, suivant le cas, deux ou quatre lignes voisines, qu'il faut considérer comme n'en faisant qu'une. — Dans les angles B et D, nous avons dessiné seulement le pourtour de chaque projection d'octaèdre, formé toujours par la même figure : un hexagone à côtés opposés parallèles, dont deux plus longs; ce pourtour est tracé en pointillé pour les octaèdres à indice pair : II^2, II^4, II^6, II^8. Dans les deux figures, chacun des numéros 1 à 24 devrait être écrit deux fois, parce que chaque sommet appartient à deux octaèdres. Nous avons couvert de hachures les deux octaèdres II^5 et II^8, qui s'attachent par le sommet le plus élevé 24.

La figure 49 est une perspective interprétant la projection B. Cette fois, toutes les arêtes de chaque octaèdre sont dessinées, celles d'un pourtour en traits plus forts. Nous aurions voulu faire ressortir par un modelé que les deux octaèdres

II^5 et II^8,	qui s'attachent par le	sommet	24,
II^8 et II^3,	»	»	19,
II^3 et II^5,	»	»	13,
II^5 et II^2,	»	»	21,

y ont *le vide* au-dessous d'eux et y forment une espèce de *pont*.

Projetés sur un *plan* quelconque, par exemple sur le plan B de la figure 48, où ils forment autour du centre une si régulière couronne d'hexagones, les huit octaèdres II y ont des parties communes : des *recouvrements*. Projetés sur un *espace* quelconque, ils y ont aussi, au moins quelques-uns, des parties communes :



Figures 48 et 49. — Projections et perspective de l'hyperpolyèdre (B).

des *pénétrations*. Prenons, par exemple, l'espace des deux plans B et A de la même figure 48 ; les projections sur cet espace sont des octaèdres s'écartant plus ou moins de la forme strictement régulière représentée figure 28, page 129 et figure 39, page 148 ; on peut les construire séparément comme il suit.

Avec l'aiguille emmanchée, piquez sur une autre feuille les

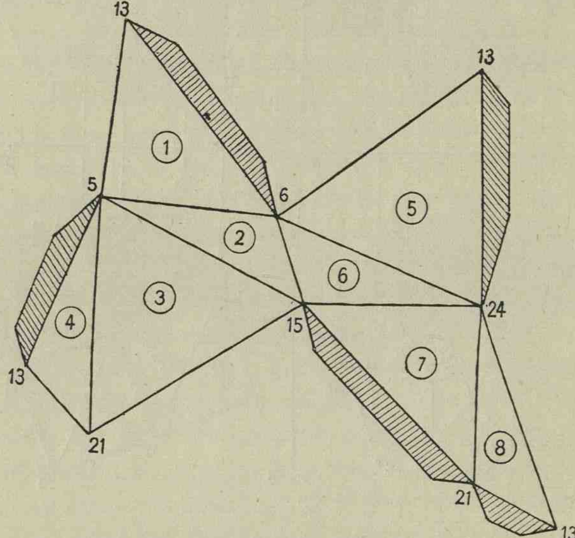


Fig. 50. — Développement de $\overline{11^5}$.

points qui, dans chacun des angles A et B de la figure 47, portent les numéros

$$5, \quad 6, \quad 15, \quad 24, \quad 21, \quad 13 ;$$

joignez tous ces points deux à deux par des droites, excepté 5 et 24, 6 et 21, 15 et 23 ; vous aurez, en géométrie descriptive ordinaire, la représentation de l'octaèdre qui est la projection de II^5, et que nous représenterons par $\overline{11^5}$.

Construisez chacune de ses faces en vraie grandeur : ce ne sera pas long, parce que plusieurs arêtes sont perpendiculaires ou parallèles à l'un ou à l'autre des plans de projection. Accolez ces huit triangles de proche en proche par leurs côtés de mêmes numéros en les groupant par quatre autour des sommets 5 et 24 ; vous aurez la figure 50. Faites-en deux pyramides quadrangulaires, l'une avec le sommet 5 et les faces marquées 1, 2, 3, 4, l'autre avec le sommet 24 et les faces marquées 5, 6, 7, 8; puis, appliquez-les l'une contre l'autre par leur base en les faisant tourner autour de la ligne commune 6-15; vous aurez l'octaèdre $\overline{11^5}$ lui-même, de forme très aplatie.

Faites de même avec les points

3, 4, 13, 23, 10, 11;

vous aurez la figure 51 et l'octaèdre $\overline{11^3}$.

Continuant avec les six octaèdres $\overline{11}$, vous en trouverez trois

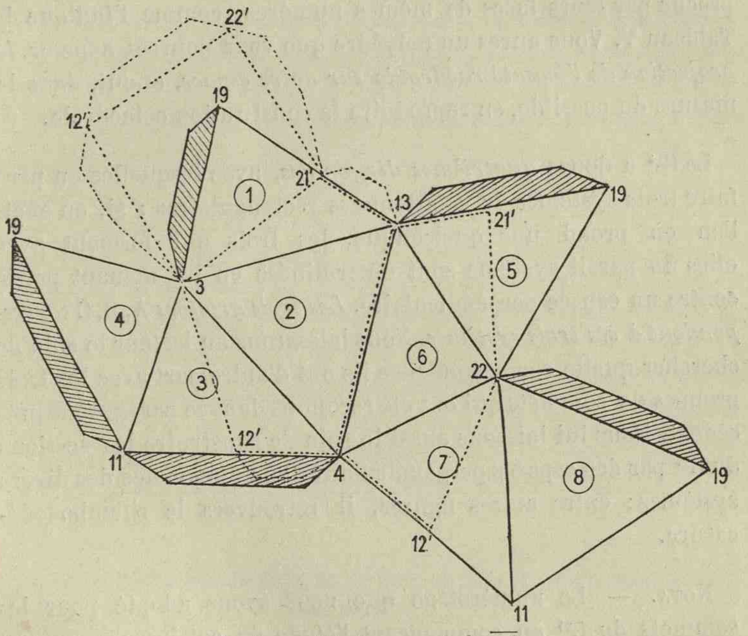


Fig. 51. — Développement de $\overline{11^3}$.

pareils (sauf bien entendu, le numérotage des sommets) à $\overline{11^5}$, un pareil à $\overline{11^3}$, deux symétriques de $\overline{11^3}$.

Cherchez maintenant à réunir ces huit octaèdres par leur sommet comme l'indique le Tableau V pour leurs homonymes de l'étendue. Vous ne pourrez construire que deux moitiés séparées

$\overline{11^1}$, $\overline{11^2}$, $\overline{11^7}$, $\overline{11^8}$ et $\overline{11^4}$, $\overline{11^3}$, $\overline{11^5}$, $\overline{11^6}$ (1);

(1) Voici la manière peut-être la plus simple de faire cette construction. Dessiner sur une planchette le carré 20 7 24 3 de l'angle A (*fig.* 48); planter

pour les amener à la position voulue, il faut, en ne nous occupant que de la partie droite, enlever préalablement, dans un des octaèdres $\overline{11^2}$ ou $\overline{11^3}$, la partie qui leur est commune et qui est déterminée, dans le premier par le plan 3 12 21, dans le second par le plan 3 11 19. Si c'est celui-ci qui est choisi pour l'opération, il devient un autre solide, dont le développement est donné par les traits pointillés de la figure 51.

En tenant compte de ces troncatures, construisez encore les seize autres octaèdres $\overline{1}$ et $\overline{111}$; puis accolez-les de proche en proche par leurs faces de mêmes numéros, comme l'indique le Tableau V. Vous aurez un polyèdre que vous pourrez appeler *la projection de l'icosatétraédroïde sur notre espace*, et qui, dans la mesure du possible, en reproduira la constitution octaédrale.

Le C^{24} a douze *quatrièmes diagonales*, avec lesquelles on peut faire trois systèmes de coordonnées rectangulaires : si, en effet, l'on en prend une quelconque, les trois qui forment avec elles un pareil système sont déterminées en lui menant par le centre un espace perpendiculaire. *Les trois groupes* A, B, C *correspondent à ces trois systèmes*. Nous laisserons au lecteur le soin de chercher quelle correspondance ils ont d'autre part avec les trois groupes de sommets qui ont été reconnus dans le paragraphe précédent. Nous lui laissons aussi le soin de construire les sections du C^{24} par des espaces perpendiculaires aux diagonales des divers systèmes; entre autres figures, il retrouvera le rhombododécaèdre.

Nota. — Le numérotage que nous avons adopté pour les sommets du C^{24} en commençant l'étude de cet hypercorps est celui qui se présente le plus naturellement quand on regarde la

---

sur le milieu de chaque côté *deux* aiguilles se touchant, fines et longues; y enfiler les octaèdres de manière que les arêtes

2 11 et 12 4, 2 12 et 11 4 de $\overline{11^1}$ et $\overline{11^4}$, $\overline{11^2}$ et $\overline{11^3}$,
10 21 et 19 13, 10 19 et 21 13 de $\overline{11^2}$ et $\overline{11^3}$, $\overline{11^8}$ et $\overline{11^5}$,
8 16 et 15 6, 8 15 et 16 6 de $\overline{11^8}$ et $\overline{11^5}$, $\overline{11^7}$ et $\overline{11^6}$,
9 17 et 23 14, 9 23 et 17 14 de $\overline{11^7}$ et $\overline{11^6}$, $\overline{11^1}$ et $\overline{11^4}$

soient respectivement le long des deux aiguilles plantées entre 20 et 3, 3 et 24, 24 et 7, 7 et 20.

projection *supérieure droite* dans les épures qui le représentent. Mais il n'a qu'une régularité partielle. Au lecteur qui voudrait reprendre ou poursuivre notre étude, nous conseillons de remplacer les numéros

20,1,24,5; 22,3,18,7; 14,9,10,13; 16,11,12,15; 4,17,8,21; 6,19,2,23

respectivement par

1,2,3,4; 5,6,7,8; 9,10,11,12; 13,14,15,16; 17,18,19,20; 21,22,23,24.

Cette deuxième notation est modelée sur la division hexaédrale du C^{24}, et nous paraît la plus maniable et la plus suggestive de toutes ; elle donne les vingt-quatre octaèdres comme le montre le Tableau suivant, qui remplacerait le tableau II, de la page 142.

	A	B	C
1.......	1 9 17. 5 14 18	1 9 17. 4 15 24	1 9 18. 8 10 24
2.......	2 10 18. 8 13 19	2 10 18. 1 14.23	2 10 19. 7 11 23
3.......	3 11 19. 7 16 20	3 11 19. 2 13 22	3 11 20. 6 12 22
4.......	4 12 20. 6 15 17	4 12 20. 3 16 21	4 12 17. 5 9 21
5.......	5 13 21. 3 12 22	5 13 21. 8 9 18	5 13 22. 2 14 18
6.......	6 14 22. 2 11 23	6 14 22. 5 12 17	6 14 23. 1 15 17
7.......	7 15 23. 1 10 24	7 15 23. 6 11 20	7 15 24. 4 16 20
8.......	8 16 24. 4 9 21	8 16 24. 7 10 19	8 16 21. 3 13 19

§ 46. — L'hexacosiédroïde, ou le C^{600}, et l'hécatonicosaédroïde, ou le C^{120}.

Nous avons exposé (§ 42), les principes de l'établissement du cinquième polyédroïde régulier, nous ne les développerons pas et nous nous bornerons à donner de ce corps une idée sommaire. Nous serons encore plus bref pour le sixième, et nous renverrons, pour ce qui les concerne l'un et l'autre, aux monographies, déjà citées, de M. Schoute, de M. Van Oss et de M^me^ Stott.

I. Nous empruntons au second de ces auteurs la figure 52 qui représente les projections du C^{600} sur les quatre plans d'un système de coordonnées rectangulaires qui sera défini plus bas. Les deux projections supérieures, $x_2 x_3$ et $x_3 x_4$, font voir cinq systèmes de

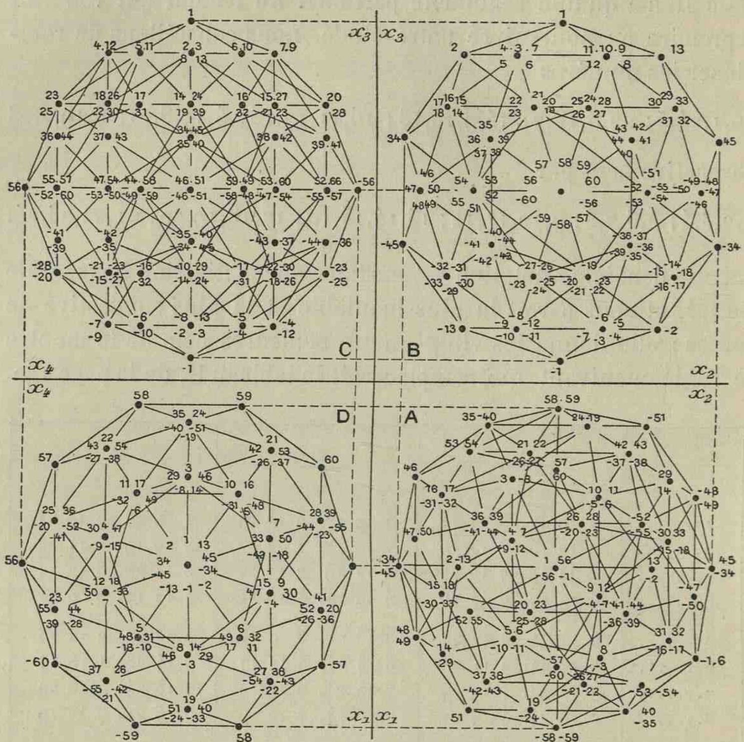


Fig. 52. — L'hexacosiédroïde.

lignes parallèles qui les divisent chacune en six zones et sont les

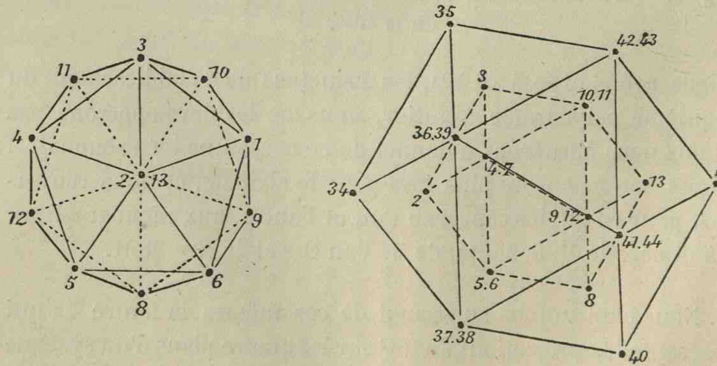


Fig. 53 et 54. — Icosaèdres réguliers.

projections d'autant d'*espaces* perpendiculaires à la diagonale 1 — 1, une des soixante *premières diagonales* de cet hypercorps. Les divisions se présentent comme il suit en descendant du sommet 1 jusqu'au milieu : il est inutile d'aller plus loin à raison de la symétrie.

1° Tout en haut est une calotte formée par douze arêtes partant du sommet 1 et aboutissant à douze autres sommets numérotés de 2 à 13. Nous savons déjà, par le § 39, que ces douze sommets sont ceux d'*un icosaèdre régulier*. Ce solide a une droite

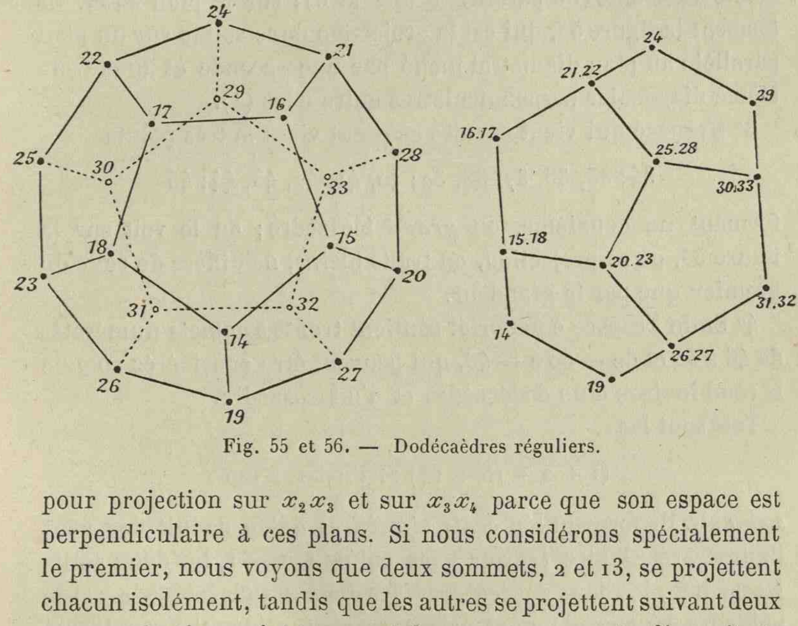


Fig. 55 et 56. — Dodécaèdres réguliers.

pour projection sur $x_2 x_3$ et sur $x_3 x_4$ parce que son espace est perpendiculaire à ces plans. Si nous considérons spécialement le premier, nous voyons que deux sommets, 2 et 13, se projettent chacun isolément, tandis que les autres se projettent suivant deux groupes de cinq points : ce sont deux pentagones réguliers situés dans un plan absolument perpendiculaire au plan de projection. On voit ces pentagones en vraie grandeur sur le plan $x_3 x_4$ (compartiment C), auquel ils sont parallèles; l'icosaèdre lui-même a pour projection sur ce plan une figure que nous avons reportée à part (*fig.* 53), et dans laquelle on reconnaît aisément que la projection du solide est faite sur un plan perpendiculaire à une première diagonale. Sur le plan $x_1 x_2$ (compartiment A), notre icosaèdre a pour projection une figure qui a été reportée à part (*fig.* 54, traits pointillés) et qui est la projection du solide sur un plan parallèle à deux arêtes. Enfin, on peut le voir encore, avec deux autres, afférents l'un au sommet — 36, l'autre au sommet — 53, sur la figure 57 où les points multiples de la projection $x_2 x_3$ ont été dédoublés en faisant tourner l'hypercorps comme nous l'avons fait tant de fois dans les paragraphes précédents.

2° L'espace qui vient ensuite contient vingt sommets, numérotés de 14 à 33, formant ensemble un dodécaèdre : en projection sur le plan $x_3 x_4$, ils forment la figure 54, où l'on reconnaît la projection de ce solide sur un plan perpendiculaire à une troisième diagonale (ou parallèle à une face); sur le plan $x_1 x_2$, ils forment la figure 55, qui est la projection de ce solide sur un plan parallèle au plan diamétral mené par une seconde et une troisième diagonales perpendiculaires entre elles [1].

3° L'espace qui vient ensuite contient vingt autres points

$$34;\ 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 39;\ 40,\ 41,\ 42,\ 43,\ 44;\ 45$$

formant un deuxième, ou *grand* icosaèdre; on le voit sur la figure 53, où sa projection, en traits pleins, ne diffère de celle du premier que par la grandeur.

4° Enfin l'espace équatorial contient trente sommets numérotés de 46 à 60 et de — 60 à — 46, qui peuvent être considérés comme la combinaison d'un dodécaèdre et d'un icosaèdre.

Tels sont les

$$(1 + 2 + 10 + 12) \times 2 + 30 = 120$$

sommets. Ils forment *six cents tétraèdres* qu'on déduit des neuf figures précédentes (savoir : les points 1 et — 1, les deux petits icosaèdres, les deux dodécaèdres, les deux grands icosaèdres et le polyèdre équatorial) en associant, suivant un détail dans lequel nous n'entrerons pas, soit quatre sommets d'une même figure ou de deux figures voisines, soit un sommet avec une face, soit une arête avec une arête. On obtient ainsi les nombres de 720 *arêtes* et 1200 *faces* inscrits au Tableau de la page 104.

Ensemble, les deux figures supérieures, $x_2 x_3$ et $x_3 x_4$, repré-

---

(1) Il est généralement peu aisé de comprendre les projections où abondent les points multiples; le lecteur pourra se rendre compte des figures 53 et 55, en les comparant aux figures 18 où les numéros sont les mêmes.

sentent *la projection de l'hypercorps sur un espace* $x_2 x_3 x_4$ *perpendiculaire à une deuxième diagonale :* celle qui joint le milieu de l'arête 58 59 au milieu de son opposé — 58 — 59. Cette projection est un polyèdre à 52 sommets, 130 arêtes et 80 faces, formé de deux calottes polaires comprenant entre elles quatre pyramides régulières tronquées. L'axe 1 — 1 est, pour employer le langage de la Cristallographie, à période 10, c'est-à-dire qu'une rotation de 36° ramène le corps sur lui-même. Les deux figures

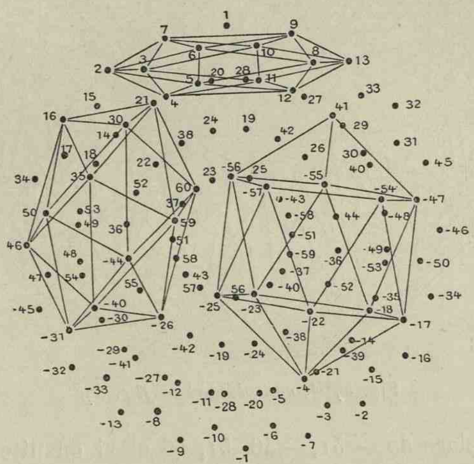


Fig. 57. — Séparation des 120 sommets du C^{600}.

de gauche, $x_3 x_4$ et $x_4 x_1$, représentent la projection de l'hypercorps sur un espace $x_3 x_4 x_1$ perpendiculaire à *une autre deuxième diagonale :* celle qui joint le milieu de l'arête 34 — 45 à celui de l'arête — 34 45.

Ensemble, les deux figures inférieures représentent la *projection de l'hypercorps sur un espace perpendiculaire à une première diagonale* 1 — 1, et les deux figures de droite celle sur un espace perpendiculaire à *une autre première diagonale* 56 — 56. Chacun de ces polyèdres a 42 sommets.

Le système de coordonnées auquel est rapportée la figure 52 est celui constitué par ces quatre espaces perpendiculaires entre eux.

Si l'on fait tourner de 90° la projection $x_4 x_2$ de la figure 52, de manière que les sommets 46, — 51, — 46, 51 prennent respecti-

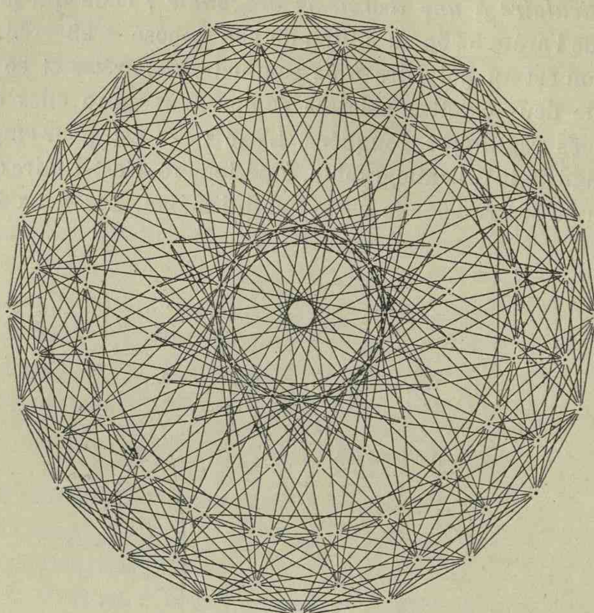


Fig. 57^{bis}, *complétant la fig.* 57.

vement la place de — 51, —46, 51, 46 et si ensuite, en l'asso-

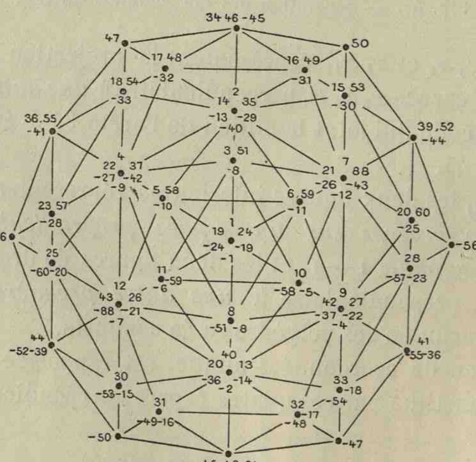


Fig. 58. — Projection du C^{600} sur un plan parallèle à une face.

ciant avec $x_3 x_4$, on construit une nouvelle projection $x_1 x_2$, on aura une figure que nous reportons (*fig.* 57) et qui sera la *projection de l'hypercorps sur un plan parallèle à une face :* la face 8 5 6, ou sa parallèle 3 10 11, ou les deux opposées. En en détachant encore le *petit icosaèdre* et le *dodécaèdre* qui sont perpendiculaires à la diagonale 1 — 1, on a, cette fois, les figures 59 et 60; la première est la projection de l'icosaèdre régulier sur un plan parallèle à une face, et la seconde, la

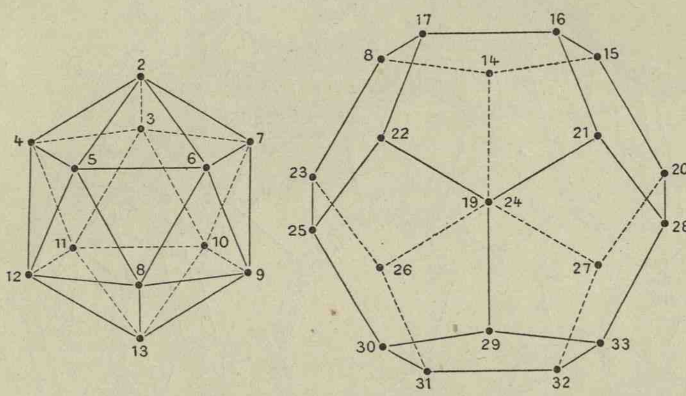


Fig. 59 et 60. — Un icosaèdre et un dodécaèdre.

projection du dodécaèdre régulier sur un plan perpendiculaire à une première diagonale.

II. Le dernier polyédroïde est constitué par 120 dodécaèdres réguliers, qui se réunissent par trois sur 1200 arêtes, tandis que celles-ci se réunissent par quatre sur 600 sommets. On verra, dans le Paragraphe suivant, qu'il peut se déduire directement du précédent.

Nous renonçons à le décrire, parce qu'il ne paraît guère se prêter, comme les précédents, à des décompositions faciles à voir séparément. Nous nous contenterons d'en donner une projection sur notre espace et une coupe centrale par le même, faites en supposant l'hypercorps placé de manière qu'une de ses troisièmes diagonales lui soit perpendiculaire. Les deux figures, empruntées à M. Schoute, sont des perspectives cavalières.

La *projection* (*fig.* 61) est un polyèdre qui a 160 sommets disposés par

10, 10, 10, 20, 20, 10; 10, 20, 20, 10, 10, 10

dans douze plans parallèles, et 92 faces, dont 10 sont des octogones formant une zone équatoriale, 80 des pentagones formant

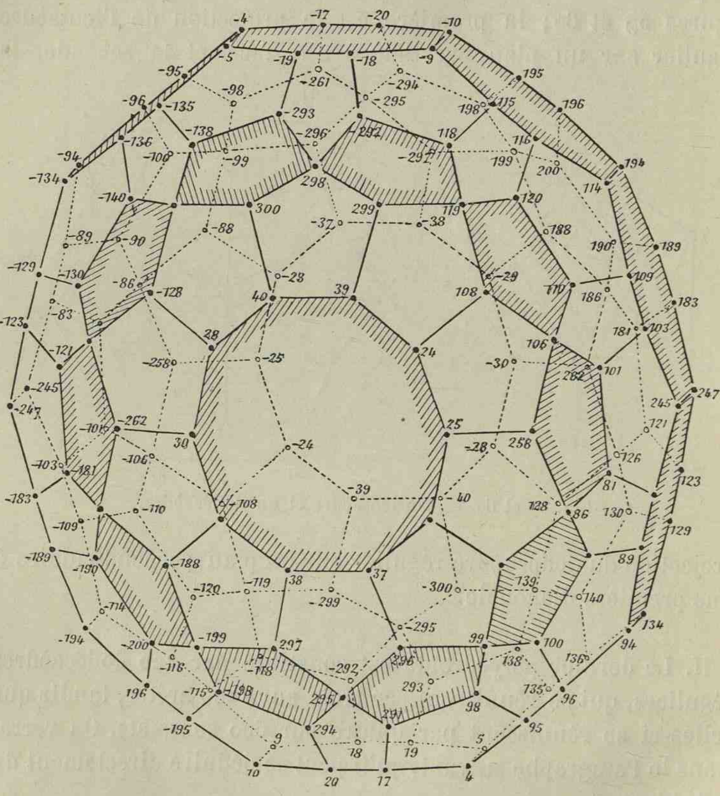


Fig. 61. — Projection orthogonale de l'hécatonicosaédroïde sur un espace perpendiculaire à une troisième diagonale.

deux rangées de chaque côté de celle-ci, deux des décagones polaires; la ligne joignant les centres de ces derniers est l'axe auquel les douze plans sont perpendiculaires.

La *coupe* (*fig.* 62) est un polyèdre ayant 80 sommets disposés par dix dans huit plans perpendiculaires; il est figuré de la même manière, et l'on a reporté sur le dessin, en guise de repère, la moitié du polyèdre précédent qui se trouve au-dessus du plan commun de symétrie; elle est dessinée en traits allongés et en points blancs, ceux-ci accompagnés de numéros qui sont ceux des sommets correspondants de l'hypercorps. Quelques traits ont

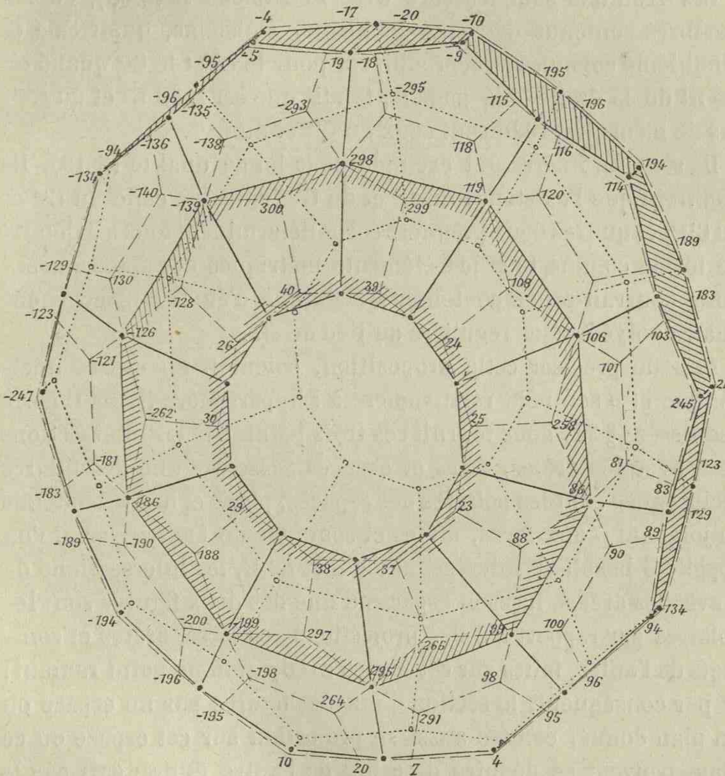


Fig. 62. — Section de l'hécatonicosaédroïde par un espace central perpendiculaire à une troisième diagonale.

été accentués par des amorces de hachures pour faire ressortir la symétrie.

§ 47. — Dualité.

Si l'on prend (§ 32) la figure polaire de chacun des six corps réguliers par rapport à une hypersphère concentrique H, on trouve les résultats suivants. Le C^5 en produit un autre qui lui est concentrique ; il en est de même du C^{24} ; le C^8 donne un C^{16} et le C^{600} donne un C^{120}, et réciproquement. Les cases, faces, arêtes et sommets ont fourni respectivement les sommets, arêtes, faces et cases de la figure transformée.

Ces résultats sont d'accord avec le Tableau II (§ 38), où les nombres contenus dans les deuxième, troisième, quatrième et cinquième colonnes se reproduisent pour le C^5 et le C^{24} quand on les lit de la droite à la gauche, tandis que ceux du C^8 et du C^{600}, lus de même, reproduisent ceux du C^{16} et du C^{120}.

Ils sont un intéressant exemple de la loi de dualité (§ 19). Ils montrent que l'existence du C^8 et du C^{600} entraîne celle du C^{16} et du C^{120}, et que les deux premiers corps déterminent tous les détails de forme comme tous les éléments métriques des deux autres ; aussi pourrait-on se contenter d'établir et d'étudier directement quatre polyédroïdes réguliers au lieu de six.

Afin de préciser cette proposition, soient E un espace quelconque et p son pôle relativement à l'hypersphère H. La théorie esquissée (§ 32) nous fournit ces trois points : 1° les intersections de E avec les arêtes, faces et espaces (cases) d'une des figures réciproques sont les polaires des espaces, plans et droites obtenus en joignant p aux faces, arêtes et sommets de l'autre ; 2° si l'on appelle S la sphère intersection de E et de H, les intersections de E avec les arêtes, faces et espaces d'une des deux figures sont les polaires par rapport à S des projections des faces, arêtes et sommets de l'autre, faites sur cet espace avec p comme point radiant ; 3° par conséquent, la section d'une des figures par un espace ou un plan donné, comme aussi sa projection sur cet espace ou ce plan, peuvent se déduire de celles de l'autre figure, soit par le calcul, soit par des constructions géométriques, à volonté.

Une projection du C^{600} sur un espace de symétrie a pour réciproque une section du C^{120} par un espace de symétrie, et inversement [1]. La correspondance a lieu comme il suit : si l'un des deux espaces est perpendiculaire à une première, deuxième, troisième et quatrième diagonale, la figure réciproque l'est à une quatrième,

---

(1) C'est un cas particulier d'un théorème très général de *Géométrie projective*. (Voy. Veronese, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse...*, dans *Math. Ann.*, t. XIX, 1882.)

troisième, deuxième et première diagonale. Ainsi le polyèdre que représente la figure 62 est polaire réciproque de celui que représentent ensemble les deux projections $x_3\, x_4\, x_1$ de la figure 52 : la ligne joignant les centres des deux décagones du premier correspondant à la diagonale 1 — 1 du second; de ce que celui-ci a 120 faces dont 20 quadrilatères et 100 triangles, il suit que celui-là a 120 sommets dont 20 à chacun desquels il aboutit quatre faces et 100 à chacun desquels il en aboutit trois, etc.

Le rayon r de l'hypersphère transformante étant arbitraire, on peut en disposer pour que les deux corps réciproques aient la même longueur d'arête et, par suite, soient inscrits dans la même hypersphère. Pour le C^{24}, par exemple, il faut prendre

$$r = \frac{a}{\sqrt[4]{2}};$$

alors il *se transforme en lui-même,* mais en changeant de position dans l'hypersphère qui le contient, de sorte qu'un de ses sommets n'a pas pour correspondant dualistique un de ses octaèdres.

Les centres des cases d'un polyédroïde régulier sont les sommets d'un polyédroïde réciproque ; ainsi les centres des 600 tétraèdres du C^{600} sont les 600 sommets d'un C^{120}.

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS.

§ 48. — L'axiome des trois dimensions.

Il y aurait lieu de considérer deux catégories d'applications de la Géométrie à quatre dimensions : celles qui concernent les sciences mathématiques et celles qui concernent les sciences physiques. Les premières ne sont généralement pas d'ordre élémentaire, et elles rempliraient un volume autrement lourd que celui-ci; nous n'ajouterons rien à ce que nous avons pu en dire à diverses reprises. Nous passons aux secondes; mais nous ne nous dissimulons pas que le terrain est moins solide et plus difficile : ce n'est plus de la Géométrie. Il nous a semblé toutefois que nous ne pouvions guère nous dispenser de cette courte excursion.

L'univers que l'homme habite, et dans lequel toutes ses sensations prennent naissance, existe dans ce qu'il appelle *l'espace*. C'est ce que nous disions dès le début et, comme nous le faisions prévoir, les notions que nous avons acquises depuis font de cet être quelque chose de moins absolu : remplaçant l'article défini *le* par l'article indéfini *un,* nous disons maintenant que c'est *un espace, un champ du troisième degré;* nous admettons qu'il est plongé dans un champ de degré supérieur, une étendue à quatre dimensions. Il y coexiste avec une infinité d'espaces semblables, parallèle aux uns, ayant avec chacun des autres un plan commun, de même que le plan sur lequel nous marchons coexiste avec une infinité de plans semblables, parallèle aux uns, ayant avec chacun des autres une droite commune.

Le physicien, allié ou non avec le mathématicien, s'occupe des mouvements dont cet espace est le théâtre, et ces mouvements sont de deux sortes. Les uns sont ceux *des masses,* choses *que nous considérons* comme des agglomérations d'atomes en nombre immense et d'une petitesse que nous ne pouvons pas concevoir, bien que nous soyons parvenus à l'exprimer par des chiffres. Les autres sont *ceux dès atomes* eux-mêmes au sein de la masse. Les premiers tombent sous nos sens, dont nous avons su augmenter la puissance au moyen d'instruments variés; les seconds, de nature essentiellement vibratoire, s'accomplissent dans des espaces dont la petitesse est du même ordre que celle des atomes; ils sont, comme ceux-ci, à une énorme distance (énorme comparativement à leur grandeur) de l'extrême limite du terrain sur lequel portent nos observations.

Il y a une étroite dépendance entre les premiers mouvements et l'axiome des trois dimensions (Avant-propos, pages VI et XVI), puisque celui-ci ne serait autre chose que l'expression d'un sentiment héréditaire leur devant son origine. On doit donc admettre qu'ils lui sont subordonnés, c'est-à-dire qu'aucun échange de matière ni d'énergie ne s'accomplit de leur fait entre notre espace et les autres. Les théories physiques ne présentent d'ailleurs pas de cas dans lesquels la nécessité d'invoquer de pareils échanges se ferait sentir; bien entendu, nous laissons de côté, trop étrangers à ces sujets pour nous permettre d'en parler, le parti que les spirites et les thaumaturges entendent tirer de la quatrième dimension.

Mais, puisque l'axiome des trois dimensions n'est qu'un fait d'ordre expérimental et n'a par ailleurs aucune espèce de nécessité, que d'autre part les mouvements moléculaires, s'ils existent réellement, ne sont pas de cet ordre; ils n'ont rien à faire avec lui. Or, ces mouvements présentent des circonstances qui ne sont pas exprimables par des fonctions ne contenant, avec le temps, que les trois coordonnées de l'espace. On en jugera par la considération suivante. Les corps célestes, en particulier la matière *si divisée* des comètes, marchent dans l'éther avec d'énormes vitesses sans en éprouver de résistance, en d'autres termes, sans lui communiquer la moindre parcelle de leur force vive; au contraire, la molécule animée du mouvement vibratoire que nous appelons *chaleur,* si mouvement il y a, partage rapidement avec lui son excédent d'énergie. Il faut alors qu'il y ait une différence fondamentale entre le mouvement moléculaire ou atomique et celui des particules de matière, même les plus ténues que nous puissions concevoir.

Les fonctions ne contenant que trois coordonnées se trouvent encore insuffisantes lorsqu'il s'agit des phénomènes de la vie, probablement aussi des phénomènes chimiques qui en sont voisins et, en termes généraux, toutes les fois que deux substances ayant même composition atomique manifestent des attributs ou des propriétés dissemblables. L'impuissance de la Mécanique classique vis-à-vis de ces différents cas vient évidemment de ce que des termes essentiels, mais qu'elle ne sait pas où prendre, manquent dans ses équations. C'est avec eux qu'entrerait en scène la quatrième composante, négligeable jusque-là devant les trois qui ont si bien tenu leur rôle tant qu'elles n'ont eu affaire qu'aux mouvements qui tombent sous nos sens, c'est-à-dire, ajouterait un philosophe, qui sont des *choses de perception,* tandis que les mouvements atomiques ne sont, tout comme la quatrième dimension, que des *choses de conception*.

Il est donc naturel, autant que légitime, d'admettre la quatrième composante dans ces petits espaces qui échappent à notre conception, de l'appliquer à ces petits mouvements qui diffèrent tant de ceux que nous voyons; en un mot, d'y remplacer le système trirectangulaire par le système quadrirectangulaire. Sur cette base, la mécanique moléculaire peut édifier des calculs facilement et à perte de vue. Nous ne l'y suivrons pas. Nous ne voulons plus qu'indiquer rapidement, d'après René de Saussure, de Genève ([1]), comment on peut concevoir le mécanisme des actions chimiques, dans cet ordre d'idées; mais il nous faut auparavant présenter, ou plutôt renouveler deux observations.

§ 49. — Récapitulation des qualités de l'espace.

La première est que notre espace n'est qu'une *tranche* élémentaire de cette étendue qui l'entoure de toutes parts. Dans le sens

---

([1]) *Les phénomènes physiques et chimiques et l'hypothèse de la quatrième dimension.* (*Arch. des Sc. phys. et nat. de Genève,* janvier et février 1891, et *Revue scientifique* du 9 mai 1891.)

de la quatrième dimension, il est infiniment mince et absolument plat, et il en est de même de tous les êtres qu'il contient. En un quelconque de ses points on peut lui élever une perpendiculaire, et on peut lui en abaisser une d'un point quelconque de l'étendue extérieure (§ 14). Cette perpendiculaire, qui est unique, n'a pas d'autre point commun avec l'espace; elle est perpendiculaire à toutes les droites et à tous les plans qu'on peut mener dans celui-ci par son pied; elle s'appelle l'*axe de la quatrième dimension*. Toute droite faisant avec elle un angle différent de 90° n'a également qu'un point commun avec l'espace et est du domaine de la quatrième dimension. Mais toute droite faisant avec elle un angle de 90°, et toute droite ayant deux points dans l'espace, sont entièrement dans celui-ci.

Une quelconque des choses qui sont dans l'espace en sort et n'existe plus pour nous si on la déplace si peu que ce soit suivant l'axe de la quatrième dimension ou une de ses obliques. Un point matériel marchant dans l'étendue suivant une de ces directions le traverse instantanément. Si le mobile a des dimensions finies, la durée de la traversée a aussi une valeur finie correspondant à ces dimensions. Si c'est, par exemple, l'hypersphère du § 31, l'apparence sera la même que celle que nous avons décrite alors en supposant que c'est l'espace $x_4 = 0$ qui se transporte parallèlement à lui-même à travers l'hypersphère immobile; on verra une sphère d'abord très petite, puis grossissant jusqu'à avoir le diamètre 2 R, puis diminuant jusqu'à zéro; rien avant ni après; l'apparition sera immobile, puisque le point d'entrée dans l'espace et celui de sortie ne sont qu'un seul et même point; par conséquent, on lui verra le mouvement contraire à celui, sans doute fort rapide, qui nous emporte à notre insu dans l'espace; on ne pourra pas trouver de cause au phénomène.

Pour le professeur Karl Pearson, de Londres, chaque atome serait un filet d'éther [*an ether squirt* (1)] traversant ainsi perpétuellement notre espace, avec une densité soumise à cer-

---

(1) *Ether squirts* (*Amer. Journ. of math.*, vol. XIII, 1891, p. 308; *Cambridge phil. trans.*, vol. XXIV, p. 71; *London math., Soc. Proceedings*, vol. XX, 1889, p. 38 et 297).

Le mot anglais *squirt*, substantif ou verbe, veut dire: *seringue*, ou *seringuer*.

taines variations périodiques. Cette idée bizarre, mais se prêtant remarquablement bien au calcul, comme le montrent sans conteste les volumineux Mémoires de l'auteur, rend compte facilement des actions interatomiques, optiques, électriques, magnétiques, de l'attraction newtonienne, etc. Elle mène tout droit à cette autre idée, émise par Hinton, que la naissance, le développement, la vie et la mort des êtres animés ne seraient que *des phases* présentées par le passage de corps à quatre dimensions à travers notre espace.

Avec les qualités qu'on vient d'énumérer l'espace n'est qu'un être de raison, et les êtres à trois dimensions qu'il contient ne sont aussi que des abstractions. Puisqu'il n'est qu'une tranche de l'étendue, ils ne sont, eux, que les sections faites par cette tranche dans des corps à quatre dimensions. Ceux d'entre eux qui se disent des êtres pensants n'existent, tout comme les autres, que dans l'esprit de l'être de l'hyperespace qui les conçoit, et leurs pensées ne sont que des formes de celles de cet être. C'est tout simplement le système philosophique de Spinosa ([1]), dont Voltaire a dit : « Je ne connais que Spinosa qui ait bien raisonné. » L'exacte définition des champs supérieurs apporte à ce système le théâtre concret et la précision matérielle qui lui manquaient.

Mais si l'on veut qu'au lieu d'être de pures abstractions, l'espace et ce qu'il contient soient des choses réelles, il faut considérer le premier comme étant la *figure limitante*, la *couche superficielle* (c'est une *hypersurface*, voyez § 28) d'un corps à quatre dimensions (un *hypercorps*), que nous appellerons le *Support*. Il serait à ce corps ce que, en descendant d'un degré, la surface terrestre, chose à deux dimensions, est sur la Terre, chose à trois. Naturellement, on admettra, soit d'emblée, soit à titre approximatif, que l'hypersurface est du premier degré, c'est-à-dire est un espace ordinaire.

Le Support, doué d'élasticité et de rigidité, serait l'agent trans-

---

([1]) *Ethica more geometrico demonstrata et in quinque partes distincta*, Amsterdam, 1677. — L'Œuvre de Spinosa a été traduite en français par Em. Saisset, 3 vol. in-12, Paris, Charpentier, 1872. Le Tome I est une *Introduction* remarquable de clarté et de fidélité; l'*Ethique* forme le Tome III.

metteur des vibrations, et remplirait le rôle pour lequel notre Physique a créé le chimérique éther : toute molécule animée d'un mouvement vibratoire lui en communiquerait une partie, qui se propagerait immédiatement dans sa masse, et passerait partiellement dans toute autre molécule en contact avec lui (¹). Les molécules appartenant à certaines catégories déterminées se mettraient à l'unisson, en quelque endroit qu'elles se trouvent; les différences spécifiques des corps simples et le fait, qui étonne tant le chimiste, de leur petit nombre en présence du nombre infini de vibrations possibles, seraient ainsi expliqués avec autant de naturel que de simplicité.

Quant aux êtres que contiendrait cet espace, la manière la plus simple de les concevoir est de leur attribuer une épaisseur extrêmement faible dans le sens de la quatrième dimension. Ce sont ainsi des êtres réels (*Voy.* Avant-propos, p. xx), et, comme quelques-uns sont en outre des êtres pensants, nous allons, dans les paragraphes qui suivent, chercher à nous rendre compte des impressions que doit produire sur leur entendement l'état de choses dans lequel nous les mettons.

Comme leur quatrième dimension est très petite, ils n'en ont pas conscience, et leur vie est exclusivement tridimensionnelle.

§ 50. — Un Univers à deux dimensions.

Voici notre seconde observation.

Dans le cours de ce travail, nous avons sans cesse, pour faciliter l'intelligence d'un point de la Géométrie à quatre dimensions, cherché l'analogie dans celles à trois et à deux. Utile dans l'ordre purement géométrique, cette recherche de l'analogie ne l'est pas moins dans l'ordre concret. Descendons donc d'un degré pour comprendre quel peut être notre état d'esprit en présence de phénomènes dans lesquels la quatrième dimension interviendrait.

A cet effet, considérez l'ombre horizontale qui s'attache à vous quand vous marchez au soleil, et qui, longue ou courte, large ou grêle, répète vos mouvements comme si elle vous comprenait,

(¹) Rouse Ball, *A hypothesis relative to the nature of ether and gravity* (*Messenger of mathematics*, 1891). — Même auteur: *Récréations et problèmes mathématiques*, 3e édition, traduite par Fitz-Patrick. Paris, 1898.

bien qu'elle ne soit qu'une vaine apparence. Donnez-lui l'existence et la vie; donnez-lui, avec la vie, vos sens et votre intelligence, mais sous la réserve absolue de n'en savoir user *que dans son plan*; puis disparaissez avec vos semblables en la laissant seule avec les siens. Nous appellerons cette nouvelle population les *hommes-plans,* et nous admettrons que la surface sur laquelle ils s'agitent est assez petite pour pouvoir être assimilée à un plan P. Découpez des silhouettes en papier, jetez-les sur une table P, poussez-les dans tous les sens, vous aurez une idée de ces gens, de leur support et de leur existence ([1]).

Ils ont, comme tous les corps qui les entourent, une épaisseur très petite, dont ils ne se doutent pas. N'exerçant leurs sens que dans le plan P, ils sont ignorants de l'espace qui les recouvre, ou, s'ils le soupçonnent, ils sont incapables de l'explorer en quoi que ce soit. Ce qu'ils appellent *espace,* c'est ce plan lui-même. Des objets qui les entourent et de ceux qui voguent dans le Ciel, ils ne connaissent que la *section* faite par lui, et ils lui donnent le même nom que celui donné par nous à l'objet lui-même. Très intelligents, la Géométrie à deux dimensions n'a point de secrets pour eux, pas plus dans ses théories les plus élevées que dans ses applications les plus pratiques; mais ils n'ont aucune idée de celle à trois, ni, *a fortiori,* de celle à quatre ; et il en est de même de toutes leurs connaissances, sur quelque sujet que ce soit.

Pour n'avoir pas affaire à une pesanteur extérieure au plan P, nous supposerons toute la masse attirante réunie au centre de la région qu'ils habitent et qu'ils appellent la *Terre.*

Tel est l'*Univers à deux dimensions* sur lequel nous invitons le lecteur à jeter les yeux, et dont nous voulons lui expliquer le mécanisme, non pas dans son ensemble encore bien compliqué, mais en nous bornant à trois des questions qui préoccupent le plus ses physiciens: les changements d'état des corps, les combi-

---

([1]) M. René de Saussure considère aussi une *Terre* à deux dimensions; il en met les habitants, non à plat sur une face du disque, mais debout sur son pourtour. Sous l'une ou l'autre forme, les hommes-plans ont été mobilisés encore par : BELTRAMI, *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea,* — HELMHOLTZ, *Populäre Vorlesungen,* — HINTON, *Scientific Romances,* — SCHOFIELD, *Another world,* — SEELEYS, *Flatland,* ..., etc.

naisons chimiques et les décompositions. Le retour à notre propre univers sera facile et nous ne nous en occuperons même pas : puisque *le plan,* dans le sens de la *troisième* dimension, et *l'espace,* dans celui de la *quatrième,* ont la même épaisseur infiniment petite, il n'y a, dans les limites tout à fait élémentaires qui enserrent notre exposition, qu'à remplacer les deux premiers mots par les deux derniers.

§ 51. — Matière et énergie dans l'Univers à deux dimensions.

Il nous faut commencer par définir les deux éléments : *Matière* et *Énergie,* qui forment le *Système de la Nature* dans ce singulier Univers.

1° Les corps matériels disséminés dans le plan P n'ont pas une épaisseur nulle, ni infiniment petite ; nous avons déjà dit qu'avec ces qualités négatives on n'est qu'un être de raison. Ils ont une épaisseur finie très petite, formée par des atomes ou des molécules superposées. Cette épaisseur est insoupçonnée des hommes plans, pour lesquels il n'y a qu'*une* couche d'atomes, et pour lesquels les groupements d'atomes qui constituent les molécules se font *dans le plan P.* (Rien n'empêcherait, si on le préférait, de considérer de pareils corps comme des tranches faites dans les corps à trois dimensions de notre Univers ; alors le phénomène observé par l'homme-plan ne serait qu'une face de celui que nous observons nous-mêmes).

2° Tous ces corps sont soumis à une force perpendiculaire au plan P, de la nature de celles que nous appelons *forces moléculaires,* c'est-à-dire agissant en sens inverse des deux côtés opposés du plan, et produisant, soit une *traction*, soit une *compression.* Nous l'appellerons la *force perpendiculaire,* ou la *force* C. Elle ne gêne en rien les mouvements des corps, puisqu'elle est perpendiculaire à tout déplacement. Elle n'est pas autre chose qu'une des *trois* composantes des forces que nous voyons, *nous,* se jouer de part et d'autre du plan P, et sur lesquelles s'exerce notre sagacité. Les hommes-plans n'ont connaissance que des *deux autres* composantes, qui sont dans ce plan P et dont l'ensemble forme, avec les corps plats qu'on vient de définir, l'aliment des discussions interminables auxquelles ils se livrent sur l'essence des choses et les destinées de leur Univers.

§ 52. — Les trois états des corps.

Considérons un de ces corps plats, et supposons que la force C agisse *en traction,* avec une grande intensité. Comme la barre de fer à l'épreuve de traction dans le laboratoire de l'usine, le corps s'étire et sa section diminue ; ses molécules se serrent les unes contre les autres ; les hommes-plans disent que c'est un *corps solide ;* ils appellent *cohésion* et désignent par γ la force qui leur paraît lier les molécules ensemble.

Que la force C vienne à diminuer et, avec elle, la force γ ; que celle-ci arrive à n'avoir plus qu'une intensité égale, puis inférieure à celle de la pesanteur. Les molécules se desserrent, s'étalent davantage sur le plan, deviennent de plus en plus indifférentes les unes aux autres et finalement se trouvent libres d'obéir individuellement à la pesanteur ; alors le corps, se moulant sur le récipient qui le contient, n'a plus d'autre tendance que de prendre un niveau perpendiculaire à celle-ci. Il s'est *dilaté,* puis *liquéfié.*

Si la force C change de sens et exerce une *compression* croissante sur le corps que nous considérons, les molécules s'écartent encore plus et semblent maintenant se repousser. La force de la pesanteur devient négligeable devant celle de cette répulsion ; on est obligé de recourir à une enceinte fermée tout autour pour empêcher une diffusion indéfinie. Les hommes-plans disent qu'ils ont affaire à *un gaz* et ils appellent *pression* ou *tension* le résultat du bombardement exécuté contre la paroi enveloppante par ces millions de molécules lancées dans toutes les directions du plan P.

Ces déplacements de molécules, qu'ils aillent ou non jusqu'au changement d'état, ne s'accomplissent pas sans des résistances opposées par leur inertie. Du jeu alternatif de ces résistances et des poussées, il résulte des agitations intestines et invisibles, dans lesquelles la force γ accomplit un certain travail, produit de son intensité par le déplacement de son point d'application. Ce travail est la seule chose qui tombe sous les sens des hommes-plans ; mais, ignorant son origine, ils ne lui ont pas donné le nom de *travail* et ne l'expriment pas en kilogrammètres; ils lui ont donné un nom particulier : *chaleur*, et ils l'expriment au moyen d'une unité factice : *degré de température*.

Si l'homme-plan applique une force F sur tout le pourtour du corps de manière à diminuer la surface que celui-ci recouvre sur le plan P, il en résulte une force égale perpendiculaire au plan, et, si celle-ci accomplit du travail, c'est-à-dire si son point d'application se déplace, on aura de la chaleur. Voilà la transformation du travail en chaleur, inverse de la précédente.

§ 53. — Les combinaisons chimiques.

Un homme-plan triture ensemble de la fleur de soufre et de la limaille de fer. Par cette opération, il *juxtapose* des éléments plus ou moins ténus de ces deux substances, et il pourra plus tard les séparer de nouveau par des moyens mécaniques : il fait un *mélange*.

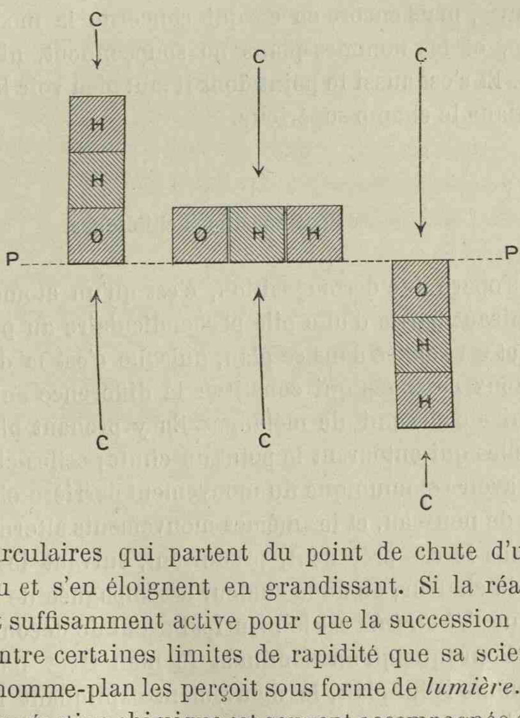
Mais que la force perpendiculaire C intervienne, et qu'elle *superpose* ces éléments dans le sens de la troisième dimension. Alors l'homme-plan, avec ses outils les plus puissants ou les plus fins, ne pourra pas les séparer, parce que son action est nulle dans ce sens; s'il parvient à opérer une division en fragments plus petits, cette division s'est faite sans sortir du plan, et chaque fragment obtenu est encore formé de molécules posées l'une sur l'autre. Il dit alors que c'est une *combinaison chimique*.

Pour obtenir une combinaison, l'expérience lui montre qu'il faut toujours développer de la chaleur. Mais il ignore que c'est la force C qui empile les éléments des corps perpendiculairement au plan P, et qu'elle jouit seule de cette faculté.

Dans cet ordre d'idées, la constitution des molécules des corps composés pourrait être indiquée par une représentation graphique de la pile moléculaire. Et comme une pareille représentation comporte deux figures symétriques pour une même composition de la molécule (*voir* les positions de gauche et de droite dans la figure 63), que ces deux figures se remplacent mutuellement par un simple retournement de la pile, que l'une peut être imaginée debout sur une face du plan P, l'autre debout sur l'autre face, on trouverait là une explication très simple du dimorphisme que présentent certains cristaux.

Chaque atome ou molécule qui, pendant que la combinaison chimique s'opère, *sort* du plan P pour aller se poser *sur* un autre atome ou molécule, laisse *un vide*. Ceux qui entourent ce vide s'y précipitent, s'y choquent, sont repoussés en arrière, y reviennent, exécutent un va-et-vient qui se transmet de proche en proche, dans toutes les directions, sous la forme d'une *onde*, comme les

Fig. 63.



vagues circulaires qui partent du point de chute d'une pierre dans l'eau et s'en éloignent en grandissant. Si la réaction chimique est suffisamment active pour que la succession des ondes se fasse entre certaines limites de rapidité que sa science a calculées, l'homme-plan les perçoit sous forme de *lumière*. C'est pour cela que la réaction chimique est souvent accompagnée de lumière et en est la condition nécessaire.

Mais les choses ne se passent pas entièrement dans le plan P. Si nous revenons à la comparaison de la pierre tombant dans l'eau, nous voyons que la surface de celle-ci s'est couverte de rides circulaires. Ces rides proviennent de ce que les compressions et les dilatations qui se succèdent sur une circonférence ayant le point de chute pour centre, ont pour conséquence, les premières une élévation des molécules au-dessus de la surface de l'eau tout le long de cette circonférence, les secondes une dépression au-dessous; de plus, chaque molécule ne marche pas avec l'onde, mais reste toujours à la même distance du point central. Il en est de même pour les ondes calorifiques et lumineuses : tandis que les forces élastiques se transmettent de proche en proche dans le plan P, les mouvements moléculaires se font perpendiculairement à ce plan, c'est-à-dire *empruntent la troisième dimension*. Celle-ci se trouve donc en jeu, non seulement en ce qui concerne la cause, mais encore en ce qui concerne la modalité du phénomène, et les hommes-plans ne soupçonnent, ni l'un, ni l'autre fait. Et c'est aussi le point dont il faut bien voir la correspondance dans le champ supérieur.

§ 54. — Les décompositions chimiques.

Lorsque s'opère une décomposition, c'est qu'un atome ou une molécule faisant partie d'une pile perpendiculaire au plan P en est retirée et est rejetée dans ce plan, puisque c'est la différence entre ces deux positions qui constitue la différence entre l'état de combinaison et celui de mélange. En y prenant place, elle repousse celles qui entourent le point de chute; celles-ci reviennent après avoir communiqué du mouvement derrière elles, sont repoussées de nouveau, et les mêmes mouvements alternatifs ont lieu que dans le cas précédent, produisant, suivant les circonstances, de la chaleur, ou de la chaleur accompagnée de lumière.

On sait que l'*électricité* est le principal agent de décomposition chimique. Pour quelqu'un dominant le plan P et pouvant le regarder comme il lui plaît, le mouvement expliquant le mieux les phénomènes rangés par ses habitants sous cette rubrique est peut-être *une rotation de la pile moléculaire* autour d'un axe situé dans ce plan, mouvement que ceux-ci ne sauraient s'imaginer.

Ce mouvement peut produire de la chaleur et de la lumière, puisque, à chaque rotation entière, le plan P est traversé par des atomes en deux points symétriquement placés par rapport à l'axe de la pile ; il en résulte des ondes auxquelles cette circonstance donne un cachet particulier, et qui produiront en outre les manifestations électriques, sous certaines conditions de vitesse ou autres.

Il peut aussi produire des décompositions chimiques, et voici comment. Considérons une pile formée de deux atomes H d'hydrogène et un O d'oxygène ; c'est un *molécule d'eau,* que nous prenons au milieu d'une multitude de molécules pareilles, placées dans les mêmes conditions. Au moment où la rotation que nous supposons amène cette pile dans le plan P, les atomes ne sont plus serrés par la force C et ne tiennent plus ensemble ; ils sont un instant dans l'état qui correspond au *mélange* et non plus dans celui qui correspond à la *combinaison.* A chaque demi-rotation, c'est en quelque sorte une combinaison qui se défait et se refait. Qu'une circonstance quelconque, par exemple ce simple fait que la force centrifuge n'est plus annihilée par la pression C, écarte les molécules au moment du passage dans le plan, la rotation ne peut pas se continuer, et l'on trouve séparément deux atomes d'hydrogène d'une part, un d'oxygène de l'autre ; on appelle *pôle négatif,* la direction dans laquelle la *culbute* (ce mot convient mieux maintenant que celui de *rotation*) a fait tomber les premiers, *pôle positif,* celle qui est échue au second ; ce sont la droite et la gauche de la position du milieu dans la figure ci-dessus.

Ainsi s'expliquerait très simplement l'aptitude caractéristique de l'électricité à produire des décompositions chimiques.

CHAPITRE X.

HORS DE L'ÉTENDUE.

§ 55. — Les perpendiculaires.

Le lecteur a donc fait connaissance avec l'*Étendue,* ce champ du quatrième degré formé d'une multitude quatre fois infinie d'espaces, parmi lesquels le nôtre se trouve. Il en a jusqu'ici respecté scrupuleusement les frontières; pour terminer, nous l'invitons à les franchir une fois, et résolument.

Rien n'empêche, disions-nous dans l'Avant-Propos, de considérer l'étendue comme n'étant aussi qu'une unité au milieu d'une

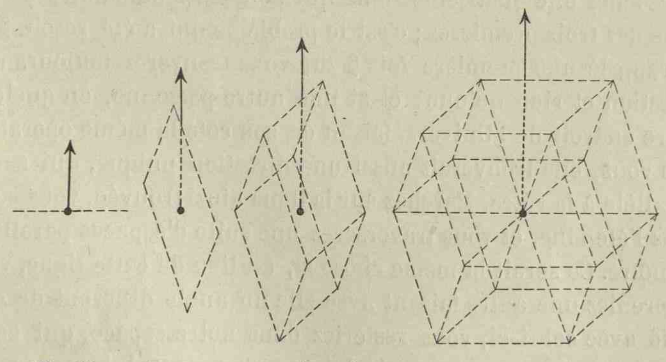


Fig. 64. — Les quatre premiers champs et leur perpendiculaire.

infinité d'autres pareilles, toutes ensemble formant un champ du cinquième degré ; *et ainsi de suite indéfiniment.* En vertu de ces cinq mots si usuels et qui paraissent si simples, et en nous aidant de ce que les Chapitres précédents nous ont appris, pénétrons dans l'immense et mystérieux domaine.

A cet effet (*fig*. 64) :

1° Menez à l'endroit où vous êtes deux lignes droites perpendiculaires entre elles. Vous n'avez que l'embarras du choix, car il est facile de voir, par le raisonnement employé § 8, que le nombre de systèmes birectangulaires qu'on peut établir en un point donné de l'espace à trois dimensions s'exprime par l'infini élevé à la troisième puissance. Mais, le choix une fois fait, toutes les opérations que nous allons indiquer s'ensuivent sans aucune indétermination. Nous supposerons, uniquement pour fixer les idées, que les deux lignes droites choisies par vous sont les deux horizontales *nord-sud* et *est-ouest*.

2° Menez une troisième ligne qui soit perpendiculaire à ces deux-là. Il y en a une et rien qu'une, qui est la verticale du lieu. En vous élevant sur celle-ci, comme l'oiseau ou le ballon, vous traverseriez une suite de plans horizontaux. Ce serait la même chose si vous preniez toute autre direction faisant avec elle un angle différent de 90°, mais avec cet angle particulier, vous resteriez dans le plan horizontal, qui est le lieu de toutes les lignes menées perpendiculairement à la verticale par le point où vous êtes.

3° Menez une quatrième ligne qui soit perpendiculaire à chacune des trois premières ; c'est le problème qui a été résolu § 14 et rappelé une première fois § 20 ; vous trouverez toujours une direction et rien qu'une ; et si une autre personne, en quelque autre endroit de l'Univers, faisait de son côté la même opération que vous, elle trouverait aussi une direction unique, qui serait parallèle à la vôtre. Marchez sur la ligne ainsi trouvée, vous serez dans l'étendue, et vous traverserez une suite d'espaces parallèles au nôtre. Ce serait la même chose si, au lieu de cette ligne, vous en preniez une autre faisant avec elle un angle différent de 90° ; mais avec celui-ci, vous resteriez dans notre espace, qui est le lieu de toutes les perpendiculaires qu'on peut lui mener par l'endroit d'où vous partez (§ 14).

4° Vous arrêtant à un point quelconque, ou revenant au point de départ, menez une cinquième direction perpendiculaire aux quatre premières. Elle est unique et déterminée ; vous l'obtiendrez par l'intersection de quatre étendues comme vous avez obtenu la précédente par l'intersection de trois espaces (§ 14, II), l'antéprécédente par l'intersection de deux plans. Suivez-la à son tour; vous serez dans le champ du cinquième degré et vous traverserez des étendues.

5° Revenez encore au point de départ. Menez une sixième direction, etc.

La figure 64 correspond aux quatre premiers cas : elle voudrait montrer un point mobile s'élevant perpendiculairement aux champs du premier, du deuxième, du troisième et du quatrième degré, représentés respectivement par les projections d'un segment de droite, d'un carré, d'un cube et d'un octaédroïde ([1]).

Chacune des directions que vous trouvez ainsi l'une après l'autre est perpendiculaire, non seulement au dernier champ sur lequel vous avez fait la construction géométrique, mais encore à tous les champs précédents; elle se projette par un point unique, et sur notre espace, et sur le plan horizontal par lequel vous avez commencé.

Les champs que vous visitez successivement sont caractérisés chacun par le nombre de directions perpendiculaires entre elles qu'on y peut mener en chaque point, ou, ce qui revient au même, par la possibilité d'y établir un système de coordonnées *autant de fois rectangulaire* qu'il y a d'unités dans le degré du champ. Les éléments de ce système de coordonnées ne sont autre chose que ceux du champ de degré immédiatement inférieur : c'est le rôle qu'en commençant nous avons vu prendre par les droites pour le champ appelé *plan,* les plans pour celui appelé *espace,* les espaces pour celui appelé *étendue.*

Chaque fois, vous voyez changer le régime des intersections. Au cinquième champ, par exemple, qui a pour éléments : des points o, des droites d, des plans p, des espaces s, et des étendues t, vous voyez que :

Deux, trois, quatre, cinq étendues t ont respectivement pour intersection un espace, un plan, une droite, un point;

Une étendue t a pour intersection avec un espace s, avec un

([1]) La dernière figure est la projection de l'octaédroïde sur un des plans de l'espace perpendiculaire à une première diagonale, et se déduit aisément de la figure 23 (p. 119).

plan p, avec une droite d, respectivement : un plan, une droite, un point;

Deux espaces s se coupent généralement suivant une droite; un espace s et un plan p, suivant un point;

Un espace s et une droite d ne se rencontrent généralement pas; il en est de même de deux plans;

Un plan p et une droite d sont toujours dans une même étendue; il en est de même de deux droites.

Ce cinquième champ et le suivant ont été le théâtre de spéculations importantes intéressant notre propre espace. Nous citerons en particulier les travaux de Véronèse et de Segre (1).

§ 56. — Le champ de degré n.

Le mathématicien, ne se contentant plus des géométries particulières que nous connaissons pour les premiers champs, a fait celle d'un champ *quelconque*, sans le particulariser autrement qu'en le désignant par la lettre n, effroi du profane : c'est ce qu'on appelle la *Géométrie à n dimensions*, expression qui paraît avoir été employée pour la première fois par Cayley (2). Cette Géométrie est le principal théâtre de deux branches des plus difficiles et d'un grand intérêt philosophique.

L'une s'appelle la *Géométrie énumérative* (*Abzählende Geometrie*) et s'occupe de la recherche du nombre des êtres géométriques satisfaisant à des conditions données; les fondements en ont été posés par Shubert, Chasles, Halphen et Zeuthen (3).

---

(1) VERONESE, *La superficie omaloïde normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni* (*Accad. dei Lincei*, 3e série, 1884).

SEGRE, *Sulla Geometria della retta et delle sue serie quadratiche* (*Mémoires de Turin*, 2e série, 1884).

(2) *Chapters in the analytical geometry of n dimensions* (*Cambridge and Dublin Math. Journ.*, 1845).

(3) SHUBERT, *Kalkül der abzhälenden Geometrie*. Leipzig, 1870.

SHUBERT, *Die n-dimensionale Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes* (*Math. Ann.*, 1886).

SHUBERT, *Anzahlbestimmungen für lineare Räume belibieger Dimension* (*Acta Math.*, 1886).

SHUBERT, *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume* (*Math. Ann.*, 1894).

L'autre porte le nom d'*Analysis situs*, qui est devenu d'usage courant depuis Riemann, mais que Riemann a pu prendre dans Gauss, celui-ci dans Kant, et celui-ci dans Leibnitz. L'on trouve en effet dans les Œuvres de ce dernier, pour ne citer que lui, un Chapitre intitulé : *III. De Analysi situs* et commençant ainsi : *Quæ vulgo celebratur Analysis mathematica, est magnitudinis, non situs.* (Édition Gerhardt, t. V, p. 178.)

Cette branche s'occupe des relations entre les êtres géométriques, non au point de vue de la grandeur, mais au point de vue de la forme, et l'un de ses principaux objets est l'étude des *connexions*, dont nous devons donner au moins la définition.

Considérons dans le $n^{\text{ième}}$ champ $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ un ensemble continu de points dépendant de $n-m$ paramètres : c'est ce que nous avons appelé § 11 une *multiplicité* — dans la théorie actuelle, on dit de préférence, une *variété* — *de degré* $n-m$. Elle sera définie par m équations de la forme

$$F_i(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

accompagnées d'un certain nombre p d'inégalités

$$\varphi_j(x_1 x_2 \ldots x_n) \gtrless 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

On dit que cette variété est *linéairement connexe*, si l'on peut joindre par une ligne continue, sans en sortir, deux quelconques de ses points; si ce n'est pas le cas, la variété pourra être décomposée en d'autres linéairement connexes.

Fondée par Riemann et Betti, l'*Analysis situs* a sa principale expression dans un Ouvrage de M. Poincaré, publié en 1895 [1].

La formule d'Euler (§ 37) n'est vraie que pour les polyèdres,

---

HALPHEN, *Recherches de Géométrie à n dimensions* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1873).

SCHOUTE, *Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions, étude de géométrie énumérative* (*Académie des Sciences d'Amsterdam*, juin 1900).

[1] RIEMANN, *Œuvres mathématiques*, traduites par Laugel. Paris, 1898; p. 414-419.

BETTI, *Sopra gli spazî di un numero qualunque di dimensioni* (*Ann. di Matem.*, 1871, p. 140-158).

POINCARÉ, *Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1895, p. 1 à 125). — La publication de 1895 a eu trois continuations importantes : la première dans *Rendic. di Palermo*, 1899, p. 285-343; la seconde dans *Proce-*

polyédroïdes, etc., qui sont linéairement connexes; les solides satisfaisant à cette condition ont été appelés *solides eulériens.*

Toutes les questions que le quatrième champ nous a présentées se retrouvent avec plus d'ampleur dans le $n^{\text{ième}}$. Nous reviendrons sur deux des plus difficiles, celle des angles (§ 26) et celle des corps réguliers (§ 38), mais en nous contentant de dégager les résultats, pour aider dans l'étude des auteurs auxquels nous renvoyons.

I. *Angles de deux champs.* — Deux champs A et B, le premier de degré a, le second de degré b, faisant partie du $n^{\text{ième}}$ champ, ont pour intersection un champ C_m dont le degré m est

$$m = a + b - n;$$

si $n = a + b$, l'intersection est un point; si $n > a + b$, les deux champs n'ont aucun point commun.

1° Envisageant d'abord le cas $n = a + b$, nous commençons par psuposer que n est un nombre pair $2p$, et que les deux champs considérés A, B sont du même degré $a = b = p$, conditions correspondant tout à fait à celles qui font l'objet du § 26. Alors : On peut mener par le point d'intersection O, dans chacun des deux champs A, B, p droites perpendiculaires entre elles

$$\begin{array}{llllll} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_p & \text{dans A,} \\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots, & b_p & \text{dans B,} \end{array}$$

dont chacune est la projection orthogonale de celle qui est écrite au-dessus ou au-dessous, c'est-à-dire qui a le même indice. Deux droites ayant le même indice font ensemble un angle plan, ce qui en fait p, et ces p angles sont *les angles que les deux espaces* A, B *font entre eux;* ce sont des *invariants.* Deux droites quelconques n'ayant pas le même indice font ensemble un angle droit. Le plan d'un quelconque des p angles du premier groupe

---

dings of the London Mat. Soc., 1901, p. 277-308); la troisième dans le *Bull. de la Soc. math. de France,* t. XXX, 1902, p. 49-70.

PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* Paris, 1897. (Le Chapitre II de cet Ouvrage.)

WALTHER DYCK, *Beiträge zur « Analysis situs »* (*Berichte der Sachs. Gesells. d. Wiss.*, 1885, p. 86 et 87; et *Math. Ann.*, 1890, 1893).

est perpendiculaire aux deux plans A, B et au plan d'un quelconque de ces angles droits.

2° n étant pair ou impair, mais a et b satisfaisant toujours à la condition $a+b=n$, soit a le plus petit des deux; alors le champ A a pour projection orthogonale sur B un champ A' de degré a, et les deux champs A, B ont les mêmes angles que A, A', en nombre a.

3° Si $m=a+b-n>0$, les deux champs A, B n'ont plus pour intersection un point, mais un champ C_m; alors m de leurs angles ont la valeur *zéro* [1].

II. *Les corps réguliers.* — On a dû être frappé, § 38, de l'anomalie que présente le nombre des solides réguliers existants dans les premiers champs : *infini* dans la Géométrie à deux dimensions, ce nombre n'est plus que *cinq* dans celle à trois, et il passe à *six* dans celle à quatre. La conception de pareils corps peut être étendue de champ en champ : avec les polyédroïdes réguliers du quatrième comme figures limitantes, on cherchera à en former dans le cinquième, et ainsi de suite. Alors l'anomalie constatée ne se conserve pas, et le nombre dont il s'agit demeure invariablement *trois*, à partir du cinquième champ; nous ignorons à quel fait général se rattache l'existence de deux corps en plus dans le troisième champ (l'icosaèdre et le dodécaèdre), et de trois dans le quatrième (le C^{24}, le C^{120} et le C^{600}); mais nous avons expliqué (§ 44) pourquoi il y en a un de plus dans celui-ci que dans celui-là.

Il s'établit donc trois séries qui ont respectivement pour terme général C^{n+1}, C^{2n}, C^{2^n}, et dont le Tableau suivant montre les premiers termes, ces deux exceptions étant laissées de côté; elles ont été reconnues par Stringham dès 1880.

---

(1) Voyez :

Jordan, *Bulletin de la Société mathématique*, 1875, p. 125.

Cassani, *Gli angoli degli Spazî lineari* (*Rendiconti dei Lincei*, I, p. 1885; *Giornale di Battaglini*, 1885, et *Atti dell' Ist. veneto*, 1895).

Castelnuovo, *Angoli di due Spazî contenuti nello Spazio a n dimensioni Atti dell' Ist. veneto*, 1885. [Cet Auteur établit élégamment la réalité des angles (*voyez* § 26, à la fin)].

Brunel, *Propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions* (*Math. Ann.*, t. XIX, 1882, p. 39).

	Degré des champs.	Désignation des solides.	Nombre de figures limitantes : sommets.	arêtes.	faces.	cases.	à 4 dim.	à 5 dim.	à 6 dim.
Série du tétraèdre.	2	triangle	3	3					
	3	tétraèdre	4	6	4				
	4	C^5	5	10	10	5			
	5	C^6	6	15	20	15	6		
	6	C^7	7	21	35	35	21	7	
	7	C^8	8	28	56	70	56	28	8
Série du cube.	2	carré	4	4					
	3	cube	8	12	6				
	4	C^8	16	32	24	8			
	5	C^{10}	32	80	80	40	10		
	6	C^{12}	64	192	240	160	60	12	
	7	C^{14}	128	448	672	560	280	84	14
Série de l'octaèdre.	2	carré	4	4					
	3	octaèdre	6	12	8				
	4	C^8	8	24	32	16			
	5	C^{16}	10	40	80	80	32		
	6	C^{32}	12	60	160	240	192	64	
	7	C^{64}	14	84	280	560	672	448	128

Ce Tableau offre de beaux exemples de dualité (§§ 19 et 47). On y reconnaît : 1° que toute figure de la première série est corrélative d'elle-même, car chaque ligne donne le même résultat quand on la lit de gauche à droite ou de droite à gauche ; 2° que deux figures, une de la deuxième série et une de la troisième, situées dans le même champ, sont corrélatives l'une de l'autre, car on a le même résultat quand on lit une des deux lignes de gauche à droite et l'autre de droite à gauche. L'on voit en outre de quelle différente manière la correspondance dualistique s'établit entre les champs subalternes suivant que le degré du champ fondamental est pair ou impair. Si les premiers sont de degrés m et m', ils sont corrélatifs quand on a $m + m' = n - 1$.

Puisque nous sommes dans le $n^{\text{ième}}$ champ, il faut bien pousser le Tableau jusqu'à lui et donner les formules qui lui sont relatives [1].

[1] Après Stringham, la question a été étudiée par : — SCHLEGEL, *Quelques*

Ses trois corps réguliers

$$C^{n+1},\quad C^{2n},\quad C^{2^n}$$

sont limités par des solides de même type ayant $n-1$ dimensions, ceux-ci par d'autres en ayant $n-2$, et ainsi de suite jusqu'aux quatre derniers échelons qui sont des cases, des faces, des arêtes et des sommets. Le nombre de ceux qui ont k dimensions est, pour les trois types:

$$\frac{2^{n-k}\,n!}{k!\,(n-k)!},\quad \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!},\quad \frac{2^{k+1}\,n!}{(k+1)!\,(n-k+1)!},$$

$k!$ désignant la factorielle $1.2.3\ldots k$.

Les sommets sont sur une sphère à n dimensions dont le rayon est, pour les trois cas, en désignant l'arête par a,

$$a\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}},\quad a\sqrt{\frac{n}{2}},\quad \frac{a}{\sqrt{2}};$$

quand n augmente indéfiniment, le rapport du rayon à l'arête augmente de même pour le deuxième corps, conserve une valeur constante pour le troisième, et tend vers cette même valeur pour le premier.

Les meilleurs endroits pour étudier la géométrie à n dimensions nous paraissent être les suivants:

1° Le Mémoire de C. Jordan, déjà cité bien des fois (*Bulletin de la Soc. Math.*, 1875, page 103-181).

2° D'Ovidio, *Le funzione metriche fondamentali negli spazî di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (*Memorie dei Lincei*, série III, vol. I, année 1877, p. 929-986).

---

théorèmes de Géométrie à n dimensions (*Bull. de la Soc. Math. de Fr.*, 1882, p. 172-207). — Biermann, *Ueber die regelmässige Körper höherer Dimension* (*Acad. des Sci. de Vienne*, 1884, p. 144-159). — Puchta, *Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebiger Dimension* (*Id.*, p. 168-185). — Schoute, *Voordracht over de regelmatige Lichamen in Ruimte van meer dimensies* dans *Algemeine Vergadering van het deerde natuur-en Scheikundig Congres te Utrecht*, avril 1891).

[Le Tableau de la page précédente est emprunté en grande partie à Proctor Hall, *The Projections of fourfold Figures upon a three-flat* (*Amer. Journ. of Math.*, t. XV, 1893)].

3° VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip der Projicirens und Schneidens* (*Math. Ann.*, t. XIX, année 1882, p. 161-234).

§ 57. — Le champ de degré infini.

Et après? Pouvons-nous, sans que jamais cette opération de notre pensée rencontre d'obstacle, accumuler toujours les perpendiculaires autour de nous, et multiplier *à l'infini* ces champs, dont chacun en contient déjà tant d'infinités? Pouvons-nous entrevoir cette étendue dernière, vers laquelle il semble, non que tout converge, mais que tout diverge, dans laquelle les corps auraient un nombre infini de dimensions, où des choses correspondant à nos surfaces et à nos volumes, le contenant et le contenu, seraient homogènes entre elles? Pouvons-nous seulement y penser avec la même tranquillité qu'aux infinis des plans et des espaces (§ 7), et espérer en tirer, comme de ceux-ci, un parti géométrique quelconque?

Il semble que cet infini des infinis doive être aussi celui de l'imprécision et de la confusion, qu'on n'y puisse rien concevoir, pas même un système de cordonnées, sans que l'objet de la pensée s'écroule aussitôt. Voici, cependant, un résultat des plus curieux, qui a été signalé par M. Heyl, de Philadelphie [1].

Nous avons donné (§ 33) les formules qui expriment le contenu A et le contenant B de la circonférence, de la sphère et de l'hypersphère. Les champs de degré plus élevé nous présentent chacun un corps analogue, lieu des points également distants d'un point donné. Il est facile d'étendre à ces corps les formules du § 33, soit successivement de champ en champ à partir du quatrième, soit par une expression générale contenant le nombre n [2].

Sans recommencer à faire des calculs, nous remarquerons que la relation intéressante constatée alors entre les A et les B se conserve comme une sorte de loi générale, et permet de passer faci-

---

(1) HEYL, *Properties of the locus $r =$ constant in space of n dimensions*. Philadelphie, 1897.

(2) *Voyez* BIERMANN, *Wiener Sitzungsberichte*, 1884, p. 154.

lement des uns aux autres : elle consiste en ce que *le contenu* A *est égal au contenant* B *multiplié par le rayon et divisé par le degré du champ.* Aussi nous donnerons dans un Tableau numérique quelques valeurs de la première fonction seulement ; ensuite nous rapprocherons dans un Tableau graphique les deux fonctions, le contenu et le contenant.

Ces Tableaux supposent le rayon r pris pour unité. Il importe de remarquer que cette particularisation entraîne la fixation de l'unité, qui sera

pour les A : le mètre élevé à la puissance n,
pour les B : le mètre élevé à la puissance $n-1$,

n étant le degré du champ : c'est un point qu'on n'a pas le droit de perdre de vue lorsqu'on songe à faire croître n indéfiniment.

Voici d'abord le Tableau numérique :

VALEURS paires de n.	VALEURS DE A.	VALEURS impaires de n.	VALEURS DE A.
2.......	$\pi = 3{,}142$	3.......	$\frac{4\pi}{3} = 4{,}189$
4.......	$\frac{\pi^2}{2} = 4{,}936$	5.......	$\frac{8\pi^2}{15} = 5{,}264$
6.......	$\frac{\pi^3}{6} = 5{,}170$	7.......	$\frac{16\pi^3}{105} = 4{,}725$
8.......	$\frac{\pi^4}{24} = 4{,}061$	9.......	$\frac{32\pi^4}{945} = 3{,}299$
12.......	$\frac{\pi^6}{720} = 1{,}336$	11.......	$\frac{64\pi^5}{10395} = 1{,}885$
16.......	$\frac{\pi^8}{40320} = 0{,}2351$	15.......	$\frac{256\pi^7}{2027025} = 0{,}3816$
20.......	$\frac{\pi^{10}}{3628800} = 0{,}0258$	19.......	$\frac{1024\pi^9}{654729075} = 0{,}0466$
....	....	....	....
....	....	....	....
$2n$......	$\frac{\pi r^2}{1} \cdot \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{\pi r^2}{3} \cdots \frac{\pi r^2}{n}$	$2n-1$..	$\frac{2}{\pi r} \cdot \frac{\pi r^2}{1} \cdot \frac{\pi r^2}{3} \cdots \frac{\pi r^2}{2n-1}$
....	....	....	....

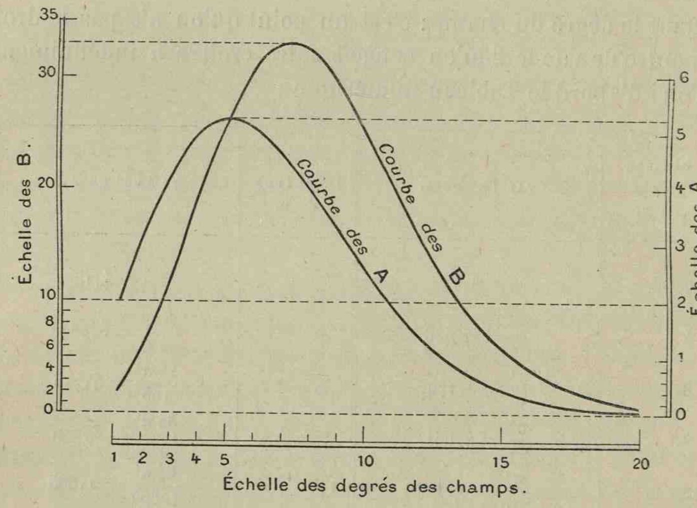
Les valeurs vont d'abord en croissant, atteignent un maximum qui est relativement près de nous, puisqu'il a lieu dans le champ du cinquième degré pour les A, celui du septième pour les B, puis elles diminuent et convergent rapidement vers zéro sous la forme asymptotique. Le fait s'explique tout naturellement par ceci que le facteur au moyen duquel on passe d'un terme de A au suivant va en croissant tant que son dénominateur

$$2n \quad \text{ou} \quad 2n-1$$

est moindre que le numérateur πr^2, et va ensuite en décroissant indéfiniment.

On voit donc que, si le degré du champ augmente au delà de toute limite, le nombre abstrait qui exprime le contenu, comme

Fig 65.



celui qui exprime le contenant, *tendent avec une marche régulière vers une limite parfaitement déterminée, qui est zéro pour l'un et l'autre.* Mais que deviennent les nombres concrets, c'est-à-dire les produits des deux unités par ces nombres abstraits? Est-ce o, ou $\frac{0}{0}$, ou ∞, ou un nombre déterminé? Nous laissons au lecteur le soin de faire cette recherche, qui le jettera, croyons-nous, dans les fonctions Gamma de Legendre.

L'inspection du Tableau graphique suggère deux réflexions.

La première est que, au lieu de l'indétermination que nous redoutions, nous rencontrons une de ces convergences rapides que présentent quelquefois les cas d'asymptotisme, par exemple la fameuse courbe de la *loi de probabilité des erreurs des observations,* dont l'équation est [1]

$$y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Nos deux courbes ont la même forme que celle-là. Après leur point culminant, elles changent le sens de leur courbure, puis s'approchent très vite de l'axe des abscisses, et finissent par se confondre avec lui à nos yeux. A partir d'un endroit qui dépasse à peine l'abscisse 20, nous pouvons *pratiquement* leur substituer celui-ci, *au moins en ce qui concerne la question actuelle;* alors les champs successifs ne diffèrent plus les uns des autres jusqu'à l'infini. Il serait intéressant de faire une étude spéciale des formes géométriques dans ce champ unique en lequel ils finissent tous par se confondre.

La seconde réflexion résulte de la continuité parfaite des courbes. On y peut mesurer les ordonnées qui correspondent à des valeurs quelconques de n, *entières* ou *fractionnaires.* Que signifient ces dernières, qu'on peut aussi calculer au moyen des formules, tout comme les premières, avec telle approximation que l'on voudra ? Le géomètre va-t-il se trouver amené à considérer des *champs de degré fractionnaire,* comme il le fut, à son grand étonnement, le lendemain de l'invention de la notation exponentielle, à considérer des *puissances à degré fractionnaire?*

---

[1] *Voyez* notre Ouvrage : *Sur la probabilité du tir des bouches à feu et la Méthode des moindres carrés.* Paris, 1875.

ERRATA.

Page 4, ligne 12 en remontant. — *Au lieu de* (3), *lire* (2).

Page 21, ligne 15. — *Après* point, *ajouter* dans un plan donné.

» ligne 16. — *Après* droite, *ajouter* dans un espace donné.

» ligne 22. — *Après* point, *ajouter* dans un espace donné.

Page 65 (*fig.* 8). — Mettre le numérotage des axes, dans la figure de droite, en concordance avec la formule qui fait la dernière ligne de la même page.

Page 71 (*fig.* 10). — Remplacer (A) par (A′) dans l'angle $x_3 O x_4$.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET SCIENTIFIQUES

MENTIONNÉS DANS

LE COURS DE L'OUVRAGE ET ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES POUR LES DÉSIGNER.

Acta math. — Acta mathematica, rédigé par Mittag-Leffler; in-4. Stockholm.

American Journ. of Math. — American Journal of mathematics, edited by Thomas Craig, with the cooperation of S. Newcomb, under the auspices of the John Hopkins University; in-4. Baltimore.

Ann. de Gergonne. — Annales de Mathématiques pures et appliquées, publiées par Gergonne; in-4. Nismes (de 1810 à 1831).

Ann. de l'Éc. norm. sup. — Annales scientifiques de l'École normale supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique par un comité de rédaction composé des maîtres de conférences de l'École; in-4. Paris.

Ann. de l'Éc. norm. sup. de Pise. — Annali della r. Scuola superiore di Pisa; in-8. Pise.

Ann. di matematica. — Annali di matematica pura ed applicata, diretti dal professore F. Brioschi colla cooperazione dei prof. Cremona, Beltrami, Dini; in-4. Milan.

Archives de Grünert. — Archiv der Mathematic und Physik, mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von Grünert, fortgesetzt von Hoppe; in-8. Leipzig.

Ass. fr. p. l'avanc. des Sci. — Association française pour l'avance-ment des Sciences; fusionnée avec l'Association scientifique de France; Comptes rendus des sessions; in-8. Paris.

Bull. des Sc. math. — Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par MM. Darboux et Tannery, sous la direction de la Commission des hautes études; in-8. Paris.

Bull. de la Soc. math. — Bulletin de la Société mathématique de France, publié par MM. les Secrétaires; in-8. Paris.

Bull. of the amer. math. Soc. — Bulletin of the american mathematical Society, continuation of the Bulletin of the New-York math. Soc., edited by Fiske, Ziwet, Modley, Cole, etc.; in-8. New-York.

C. R. de l'Acad. des Sc. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences; in-4. Paris.

L'Enseign. math. — L'Enseignement mathématique, Revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs : Laisant et Fehr; in-8. Paris.

Giornale di Battaglini. — Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle Università italiane, fondato nel 1863, proseguito dal prof. Capelli; grand in-8. Naples.

Istituto veneto. — Atti del reale Istituto veneto di Scienze, lettere ed arti; in-12. Venise.

Journal de Crelle. — Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von Crelle 1826, forgesetzt von Fuchs; in-4. Berlin.

Journ. de l'Éc. Polyt. — Journal de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'administration de cet établissement; in-4. Paris.

Leopoldina Nova Acta. — Nova acta Academiæ Cesareæ Leopoldino-Carolinæ germanicæ naturæ curiosorum; in-4. Halle a. S.

Math. Annalen. — Mathematische Annalen, in Verbindung mit Neumann begründet durch Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren Gordan, Neumann, Noether, von der Mühll, Weber, gegenwärtig herausgegeben von Klein, Walter Dyck und Mayer; in-8. Leipzig.

Mathesis. — Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par Mansion et Neuberg; in-4. Gand et Paris.

Mémoires d'Amsterdam. — Voyez plus loin : *Verhandlingen.*

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux; grand in-8. Bordeaux.

Mémoires de Turin. — Memorie della reale Accademia delle Scienze di Torino; in-4. Turin.

Memorie dei Lincei. — Memorie della r. Accademia dei Lincei; grand in-4. Roma.

Messenger of Mathematics. — In-8, Cambridge.

Monatsberichte. — Monatsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; in-4. Berlin.

Nieuw Archief. — Nieuw Archief voor wiskundige uitgegeven door het wiskundig Genootschap te Amsterdam, omler Redactie von Kluyver, Korteweg en Schoute; in-8. Amsterdam.

Nouv. Ann. — Nouvelles Annales de Mathématiques, journal des Candidats aux Écoles spéciales, à la Licence et à l'Agrégation, rédigé par Laisant et Antomari; in-8. Paris.

Novi Comm. Petrop. — Novi commentarii academiæ cientiarum. Imp. Petropolitaneæ; in-4. Saint-Pétersbourg.

Philosophical Magazine. — The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science, conducted by Lord Kelvin, Fitzgerald and Francis; in-8. London.

Proceedings of Irish Academy. — In-8. Dublin.

Proceedings of the London mathematical Society. — In-8. London.

Rendic. di Palermo. — Rendiconti del Circolo matematico di Palermo; grand in-8. Palerme.

Rev. gén. des Sci. — Revue générale des Sciences pures et appliquées, dirigée par Olivier; grand in-8. Paris.

Rev. phil. — Revue philosophique de la France et de l'étranger, dirigée par Th. Ribot; in-8. Paris.

Rev. scientifique. — Revue scientifique (Revue rose) paraissant le samedi, fondée en 1863; directeur : J. Héricourt, in-4. Paris.

Sitzungsb. de l'Ac. des Sc. de Munich. — Sitzungsberichte der math. physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München; in-4. Munich.

Sitzungsb. de l'Ac. des Sc. de Vienne. — Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien; in-4. Vienne.

Verhandlingen te Amsterdam. — Verhandlingen der koninklijke Akademie van Wettenshapen te Amsterdam; eerste Sectie; grand in-8. Amsterdam.

Zeitschrift für Philosophie. — Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, gegründet von Fichte und Ulrici, redigirt von Krohn und Falkenberg; in-8. Halle a. S.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

AVANT-PROPOS.

CHAPITRE I.

Définitions.

CHAPITRE II.

Intersections et parallélisme.

CHAPITRE III.

Perpendicularité.

CHAPITRE IV.

Quelques théorèmes.

CHAPITRE V.

Systèmes de coordonnées.

CHAPITRE VI.

Les angles.

CHAPITRE VII.

Les êtres de la géométrie à quatre dimensions.

CHAPITRE VIII.

Les polyédroïdes.

CHAPITRE IX.

Applications.

CHAPITRE X.

Hors de l'étendue.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

32294. — PARIS, IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
55, quai des Grands-Augustins.

MÉLANGES
DE
GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

37217 Quai des Grands-Augustins, 55.

MÉLANGES

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS

PAR

E. JOUFFRET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

PRÉFACE.

Dans l'Avant-Propos de notre *Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions* (p. XVIII), nous avons avancé que les théories classiques peuvent trouver d'utiles inspirations dans ce quatrième champ que nous avons appelé l'ÉTENDUE, monde géométrique plus vaste que le leur, où des droites, des plans *et des espaces* sont déterminés respectivement par deux, trois et *quatre* points et sont coupés *par un espace* suivant des points, des droites et des plans. Nous nous proposons de donner maintenant quelques applications de nature à justifier cette proposition.

Par la même occasion, nous reviendrons sur quelques points du *Traité élémentaire,* soit pour essayer de les présenter plus clairement ou plus simplement, soit pour les compléter. On va voir, d'ailleurs, notre nouveau programme. Il nous semble réaliser pour la Géométrie à quatre dimensions, par la réunion de nos deux petits Volumes, un tout correspondant à celui que font ensemble la *Géométrie élémentaire* et la *Géométrie analytique* enseignées dans les classes.

Comme précédemment, nous nous tiendrons dans la tradition euclidienne et ne supposerons d'autres connaissances que les cours de mathématiques spéciales. Comme précédemment aussi, nous joindrons au texte, autant que possible, des *figures explicatives*. Ces sortes d'illustrations sont difficiles à réaliser dans les sujets comme celui que nous traitons et, partant, y sont très peu usitées; mais elles apportent au lecteur une aide si efficace qu'elles ne devraient faire reculer ni l'auteur, ni l'imprimeur.

Le premier Chapitre pose les axiomes de la Géométrie à quatre dimensions. Ces axiomes, conventions ou définitions, quel que soit le nom qu'on veuille leur donner, se réduisent à deux : la présupposition de *quatre* coordonnées comme définissant *le point isolé,* puis l'axiome dit *de la distance,* qui établit la relation entre *un point et un autre point* et, comme conséquence, entre *des points en nombre quelconque.*

Le Chapitre II étudie le singulier système de coordonnées de la Géométrie à quatre dimensions, composé de *quatre droites, six plans et quatre espaces, un quelconque des quatorze éléments étant perpendiculaire à un quelconque des autres, s'il ne le contient pas ou n'y est pas contenu.* Une analyse très simple de leurs relations de position nous fournit la théorie des trois polyédroïdes réguliers qui ont respectivement *huit, seize* et *vingt-quatre* cases polyédrales, et nous représentons ces hypercorps par leurs projections *sur quatre des six plans* du système de coordonnées, formant ensemble ce que nous appelons une *épure de Géométrie descriptive à quatre dimensions.* Dans une pareille épure, les quatre projections peuvent être associées deux à deux de *six manières;* deux de ces couples n'ont de sens que pour le *géomètre à quatre dimensions;* un d'eux suffit pour déterminer l'hypercorps dans l'étendue et résoudre graphiquement tous les problèmes dont il peut être l'objet; chacun des quatre autres couples, pris isolément, constitue une *épure de Géométrie descriptive ordinaire* et représente un polyèdre pareil à ceux qui nous sont familiers, projection de l'hypercorps sur un espace qu'on peut supposer être le nôtre. On remarquera sans doute, entre autres choses, la simplicité de notre théorie de l'*icosatétraédroïde*, lequel ne passe pas pour être de compréhension facile.

On ne fait que de la Géométrie à deux dimensions dans le Chapitre III et que de la Géométrie à trois dimensions dans le Chapitre IV. Celui-ci est la continuation de celui-là et le Chapitre V est celle de l'un et de l'autre. Ils mettent sur le tapis trois figures respectivement à deux, trois et quatre dimensions, qui semblent tout d'abord n'avoir rien de commun, savoir :

A. La figure formée dans le plan par *quinze droites joignant deux à deux six points d'une conique;*

B. Celle formée dans l'espace par *quinze droites situées trois par trois dans quinze plans;*

C. Celle formée dans l'étendue par *six espaces*. La première figure dérive du célèbre théorème que Pascal découvrit vers 1640, qu'il appela l'*hexagramme mystique,* sur lequel il avait basé un *Traité des sections coniques* qui ne nous est pas parvenu, et autour duquel le XIX^e^ siècle a lentement accumulé un très grand nombre de propositions. On commence à attacher moins de prix à ces longues suites de théorèmes qu'il est quelquefois facile de faire jaillir d'une source commune; mais ici les théorèmes, pour la plupart d'ailleurs peu faciles à démontrer, se juxtaposent à perte de vue sans qu'on aperçoive cette source commune; on a néanmoins le sentiment qu'elle doit exister et que la figure A ne serait qu'*une forme dérivée d'une autre à la fois plus simple et plus générale.*

Il fut fait un premier pas dans la direction de celle-ci quand on eut découvert la figure B, et qu'on lui eut rattaché la première comme étant sa *projection sur un plan*. Plus tard, on reconnut que la figure B n'est elle-même que la *section faite par un espace* dans la figure C. C'est donc dans l'étendue, car on ne saurait demander plus de simplicité, que réside *la forme* de laquelle émanent la figure B de l'espace et la figure A du plan, et qu'il faut chercher la cause première de leurs multiples propriétés.

Le développement de cette double thèse nous a amenés à exposer la partie la plus importante de la théorie des *surfaces du troisième degré*, pure question de Géométrie à trois dimensions, qui a été très travaillée pendant le dernier demi-siècle, mais que les livres classiques n'osent pas aborder. Nous croyons l'avoir présentée sous une forme des plus accessibles et l'on trouvera peut-être que ce Chapitre que nous ajoutons au bagage ordinaire n'est ni moins intéressant, ni beaucoup plus difficile que ceux qui le composent déjà.

Le Chapitre VI a pour objet de reconnaître le plus rapidement possible et en écartant toutes les questions circonvoisines, les *formes* des *hypersurfaces du second degré*, c'est-à-dire des lieux à trois dimensions, homogènes avec nos volumes, que représente l'équation quadratique entre *quatre* coordonnées. Avec *deux*, cette équation donne naissance à trois types que la Géométrie à deux dimensions appelle l'*ellipse*, l'*hyperbole* et la *parabole*. Avec *trois*, elle donne cinq types généraux, plus deux formes particularisées, dont les noms sont présents à tous nos lecteurs. On verra que la Géométrie à quatre dimensions connaît *quatre formes particularisées*, qui sont des cônes et des cylindres autres que ceux de la Géométrie à trois dimensions, plus *cinq types*, auxquels nous nous sommes dispensé d'imposer des noms, parce qu'il est trop difficile de les apporter à côté de formes connues.

Continuation du précédent, le CHAPITRE VII examine sommairement l'*intersection de deux hyperquadriques,* qui est une *surface* homogène avec les nôtres, en différant toutefois en ce qu'au lieu de se chambrer dans un espace elle se développe dans l'étendue, coupant les espaces suivant des courbes, pendant que les hyperquadriques les coupent suivant des surfaces. Cette surface, appelée *quartique,* parce qu'elle est du quatrième degré, a pour projection sur notre espace la *surface du quatrième degré contenant une conique double,* dont les *tores,* les *cyclides de Dupin* et celles de *Darboux,* pour ne citer que les plus connues, sont des cas particuliers. Elle est, dans l'espace géométrique supérieur, la souche de cette famille de surfaces qui abondent dans le nôtre; elle en synthétise toute la Géométrie et apporte une seconde preuve, de nature tout à fait différente, à la thèse que nous énoncions il y a un instant.

Le mathématicien avait créé l'hyperespace pour son usage personnel et pour un objet déterminé : *Donner une forme géométrique à la théorie des fonctions algébriques de plus de trois variables.* Depuis, on a voulu y voir quelque chose de réel, et notre HUITIÈME CHAPITRE présente quelques-uns des arguments qui ont été mis en avant à l'appui de cette prétention. Ils sont pris successivement dans l'ordre philosophique, dans l'ordre mathématique, dans le monde des atomes et, enfin, chez les agglomérations d'atomes qui s'appellent *des corps;* nous avons choisi dans chacune de ces catégories l'argument qui nous a paru le plus intéressant ou le plus typique et l'avons développé de notre mieux, sans toutefois prendre nous-même position, ni oublier que nous n'écrivons qu'un livre de Mathématiques.

La Philosophie nous a fourni le *principe de non-contradic-*

tion. Avec le mathématicien, nous avons traité la question des *polyèdres symétriques*, qui fait ressortir si nettement la dépendance des champs successifs; elle nous a donné l'occasion de revenir sur la rotation d'un espace et de compléter utilement, en y introduisant la notion de *retournabilité*, les explications qui en ont été données dans le *Traité élémentaire*. Pour le physicien, nous nous sommes attaché à cette espèce d'affinité qui appelle la quatrième dimension dans la plupart des questions où l'atome est intéressé, et nous avons été amené à mettre en scène une science toute neuve encore appelée d'abord la *Chimie dans l'espace* et aujourd'hui la *Stéréochimie*; elle nous a fourni l'argument de l'*atome plurivalent*. Enfin, l'argument de la dernière catégorie est celui des *spirites*. Ce mot, fort étonné sans doute de se voir ici, désigne un public qui a accueilli avec empressement le monde à quatre dimensions, et lui a valu une notoriété que les mathématiciens ne lui eussent jamais faite à eux seuls. C'est que, pour fournir à des intelligences ultra-terrestres un habitat, et à leurs influences réelles ou prétendues les moyens de s'exercer, ce monde fait admirablement l'affaire et par le cachet mystérieux qu'il est facile de lui donner et par la singulière relation de position (¹) que la Géométrie établit entre lui et nous, et par la vaste carrière qu'il ouvre au travail de l'imagination. La plus belle peinture que nous connaissions de l'*Immensité* est celle que fait Jean Reynaud dans *Terre et Ciel*, pages 234, 248, 291, ..., etc. (²); combien il l'aurait faite à la fois plus grandiose et plus naturelle sur la donnée des champs successifs!

(¹) Elle est décrite dans le *Traité élémentaire*, § 49, et dans le présent Ouvrage, pages 192 et suivantes.

(²) Furne, 3ᵉ édition, 1858.

Il ne nous convient pas d'entrer dans cet ordre d'idées. Mais il nous a paru intéressant de lui consacrer quelques pages montrant les arguments *spéciaux* que ses adeptes apportent à l'appui de l'hyperespace; la question est capitale pour eux s'ils veulent faire usage de la quatrième dimension, car ils ont besoin qu'elle soit réelle, tandis que cette réalité n'est pas plus nécessaire au physicien qu'au mathématicien.

Un important Ouvrage a paru depuis notre premier livre : *Mehrdimensionale Geometrie,* par M. Schoute, de Groningue (1). Fait à un point de vue mathématique plus large que le nôtre, plus méthodique dans son cours, entrant davantage dans les questions, il ne saurait être remplacé par celui-ci; nous croyons toutefois qu'il peut en recevoir d'utiles compléments ou éclaircissements. Mentionnons encore un agréable petit livre paru dans la *Bibliothèque de Philosophie contemporaine* (2). Enfin on annonce un Ouvrage qui ne peut manquer d'avoir une très grande valeur, par M. Segre, de Turin (3).

(1) Librairie Göschen, à Leipzig.

(2) *Essai sur l'hyperespace, le temps, la matière et l'énergie,* par Maurice Boucher. Paris, 1903.

(3) *Vorlesungen über algebraische Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der mehrdimensionalen Geometrie.* Teubner, à Leipzig.

MÉLANGES

DE

GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

CHAPITRE I.

COUP D'ŒIL SUR LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE A QUATRE DIMENSIONS.

---

§ 1. — Premier axiome définissant le point isolé.

Le mathématicien emploie sur une vaste échelle le procédé qui consiste à représenter par un point du plan un système de valeurs de deux variables x_1, x_2, ou inversement. Il y a bien des manières d'établir cette correspondance, analogue à celle qui existe entre deux facteurs et leur produit : la plus simple et la plus usuelle est la Géométrie cartésienne.

Comme chaque valeur d'une des variables peut s'associer à une valeur quelconque de l'autre, et que l'une et l'autre en ont un nombre infini, le système (x_1, x_2) forme une multiplicité deux fois infinie [1], ou de l'ordre ∞^2; on dit de même que le plan est une *multiplicité de points* deux fois infinie, ou de l'ordre ∞^2. Sans chercher plus loin, *nous constatons* cette adaptation comme un fait intuitif.

Dans la Géométrie à trois dimensions, *on constate* une correspondance de même nature entre les points de l'espace et les

---

[1] Selon l'usage, nous prenons le mot *deux fois infini*, ou *double infinité*, dans le sens ∞^2 (et non 2∞). Quant au mot *multiplicité*, il a été défini dans le *Traité élémentaire*, § 8; on peut voir son histoire dans STALLO, *La matière et la Physique moderne*, p. 202.

valeurs de trois variables x_1, x_2, x_3, et l'on dit que l'espace est, comme celle-ci, *une multiplicité de l'ordre* ∞^3.

La Géométrie à quatre dimensions *admet, par analogie,* qu'il correspond aussi un être géométrique déterminé à tout système de valeurs de quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 et elle donne à cet être géométrique le nom de *point*. L'ensemble de tous les points correspondant à toutes les valeurs des quatre variables forme comme elles une *multiplicité de l'ordre* ∞^4, et est considéré comme un lieu géométrique appelé l'*étendue*. Quand on considère des points qui *ne remplissent pas* l'étendue, c'est-à-dire, ou sont *en nombre fini*, ou forment une multiplicité d'*ordre* ∞^1 (les lignes), ou une d'*ordre* ∞^2 (les surfaces), ou une d'*ordre* ∞^3 (les hypersurfaces ou volumes), on a *une figure existant dans l'étendue*.

On trouve souvent commode de considérer les variables comme des longueurs et le point, dans la Géométrie à deux dimensions, comme une fraction infiniment petite d'une unité de surface, qui est le mètre élevé à la seconde puissance, ou le *mètre carré;* dans celle à trois, comme une fraction infiniment petite d'une unité de volume, qui est le mètre élevé à la troisième puissance ou le *mètre cube*. Dans la Géométrie à quatre dimensions, on le considère de même comme une fraction infiniment petite d'*une chose* qui est au *volume* ce que celui-ci est à l'*aire,* ce que celle-ci est à la *longueur,* et qu'on appelle l'*hypervolume;* et l'unité à laquelle on rapporte cette chose est le *mètre élevé à la quatrième puissance*.

Mais le point, ce premier élément des figures étudiées par le géomètre, cet élément qui remplit pour lui le rôle de l'atome pour le chimiste, n'est pas nécessairement le produit de *deux, trois* ou *quatre* différentielles d'une longueur. De même que le chimiste peut supposer à son atome une grosseur et une constitution quelconques, de même le point peut être conçu de mille façons dépendant de la signification que le géomètre attribuera aux variables auxquelles il la fait correspondre. Ces diverses manières, assujetties à une condition que nous avons formulée § 19 du *Traité élémentaire,* lui ouvrent les horizons les plus variés et, parfois, les plus inattendus : le *point* n'est plus un point; c'est, à volonté, une droite, un plan, une sphère, un espace, une hypersphère, etc. Plücker, Lie et Darboux se sont illustrés dans des spéculations de ce genre.

Dans tous les cas, nous donnons le nom de *coordonnées* aux deux, trois ou quatre variables qui définissent le point. Lorsqu'une autre espèce n'aura pas été spécifiée, ce seront des coordonnées cartésiennes, lesquelles supposent l'existence d'*axes coordonnés;* et nous appellerons, comme d'habitude, *axes des* x_1 le lieu des points dont les coordonnées autres que x_1 ont la valeur *zéro*.

§ 2. — Deuxième axiome établissant la relation entre points différents.

Dans le *plan,* comme dans l'*espace,* un point donné peut être *déplacé* : on appelle ainsi toute *opération* ayant pour résultat de remplacer les valeurs x de ses coordonnées par d'autres valeurs ξ. Des points en nombre quelconque peuvent être déplacés simultanément et l'on dit qu'ils font partie d'une *figure rigide* quand ils conservent invariablement les mêmes positions relatives. *On démontre* qu'il existe alors, pour *deux* quelconques de ces points, une fonction de leurs coordonnées qui ne change pas dans leur mouvement; c'est la somme Δ^2 des carrés des différences entre les coordonnées de même nom. Cet invariant, qui est un *binome* dans la Géométrie à deux dimensions, un *trinome* dans celle à trois, est le carré d'une grandeur linéaire qu'on appelle la *distance des deux points.*

Étendant à la Géométrie à quatre dimensions la notion d'une figure rigide, *nous admettrons* que la fonction analogue, qui est maintenant un *quadrinome*, savoir :

$$\Delta^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 + (x_4 - \xi_4)^2,$$

jouit encore de la propriété d'invariance dans le déplacement d'une pareille figure, et nous appellerons encore sa racine carrée la *distance des deux points* (¹).

Dans un travail publié en 1887 (²), M. Poincaré, ne considé-

(¹) La fonction invariante la plus générale contient en outre quatre grandeurs angulaires arbitraires, auxquelles, pour simplifier, nous attribuons ici la valeur 90°.

(²) *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie* (*Bull. de la Soc. math. de France,* t. XV, p. 203-215).

rant que la Géométrie à deux dimensions, ramène la question des axiomes à la *théorie des groupes continus* en admettant que, dans toute série de déplacements d'une figure rigide, le résultat de deux déplacements successifs quelconques peut être réalisé par un seul déplacement faisant partie de la série. Le travail de M. Poincaré a été étendu tout récemment par M. Lovett au cas de n dimensions (¹).

§ 3. — Les champs.

Partant du point, on s'élève de proche en proche aux termes suivants, qui représentent chaque fois le *champ* ouvert à l'activité du géomètre, quand il ne connaît que une, deux, trois ou quatre coordonnées.

Le premier champ est la *droite,* multiplicité infinie du premier ordre. Un des points constituants, qui ne laisse pas que d'avoir certains caractères propres, mais est en continuité avec les autres comme ils le sont entre eux, s'appelle le *point de l'infini de la droite.*

Le deuxième champ est le *plan,* contenant une double infinité de points. Il contient aussi une double infinité de droites, mais n'a cependant qu'une droite à l'infini, lieu des points à l'infini de toutes les autres droites. Sa géométrie a pour objet les configurations de toute espèce qu'on y peut faire avec le point et la droite. — Dans le champ, le nombre des *degrés de liberté* d'une figure rigide est *trois,* c'est-à-dire que trois choses indépendantes y sont nécessaires et suffisantes pour fixer la position de la figure; il y a en effet trois mouvements indépendants possibles : deux translations suivant deux axes et une rotation autour d'un point.

Le troisième champ est l'*espace,* contenant une triple infinité de points. Il contient aussi une triple infinité de plans, dont un s'appelle le *plan de l'infini :* c'est le lieu des points à l'infini de toutes les droites et des droites à l'infini de tous les plans. Sa géométrie a pour objet les configurations de toute sorte qu'on y peut faire avec le point, la droite et le plan. — Les mouvements

---

(¹) *Sur la Géométrie à n dimensions* (*Journal de Liouville,* 1901, p. 259-303).

possibles d'une figure rigide y sont au nombre de *six* : translations suivant trois axes et rotations autour de trois axes.

Le quatrième champ est l'*étendue,* contenant quatre infinités de points. Il contient aussi quatre infinités d'espaces, dont un s'appelle l'*espace de l'infini :* c'est le lieu des points à l'infini de toutes les droites, des droites à l'infini de tous les plans, des plans à l'infini de tous les espaces. Ce champ est le théâtre des spéculations concernant le point, la droite, le plan et l'espace, et sa géométrie a pour objet les configurations de toute espèce qu'on peut faire avec ces quatre sortes d'êtres géométriques. Une figure rigide y a *dix* mouvements possibles : quatre translations suivant quatre axes et six rotations autour de six plans.

§ 4. — Coordonnées générales et coordonnées surabondantes.

Sur ces bases, la Géométrie à quatre dimensions se développe, comme ses devancières, en établissant successivement entre les points, droite, plans et espaces qui peuplent son champ, les relations de distances, d'intersections, d'angles, etc. Sans revenir sur cette suite de déductions, qui remplit les premières pages du *Traité élémentaire,* il nous paraît utile de détacher de celles-ci ou d'y ajouter les considérations suivantes :

1° Deux espaces ont pour intersection un plan, trois une droite, et quatre un point. Quand deux plans sont dans un même espace, le régime de leurs intersections, de leurs angles ... est le même que dans la Géométrie à trois dimensions. Mais cette position n'est plus maintenant qu'un *cas particulier;* dans le cas général, l'intersection des deux plans est *un point,* qui est le point d'intersection des quatre espaces dont deux déterminent un des plans, et deux l'autre. De là résultent de tout autres conditions pour le parallélisme, la perpendicularité et l'inclinaison de ces plans. Rappelons-les en trois mots; ce point fondamental est aussi un des plus curieux de la Géométrie qui nous occupe.

Si l'on mène par le point d'intersection une droite quelconque dans un des deux plans et une droite quelconque dans l'autre, les deux droites font ensemble, puisqu'elles ne peuvent pas avoir d'autre point commun, un angle qui ne descend pas jusqu'à 0°, ni ne monte jusqu'à 180°. Il comporte donc un minimum φ et un maximum ψ, qui sont les racines d'une équation du second degré et qu'on appelle *les angles des deux plans*. L'un d'eux ne peut devenir nul, que si les deux droites considérées plus haut n'en font qu'une; on dit alors que les deux plans sont *demi-parallèles* et ils se coupent suivant une droite située à distance finie ou infinie; à moins d'avoir ce dernier cas, on ne peut mener dans chaque plan qu'une seule droite parallèle à l'autre. Les deux plans sont (*complètement*) *parallèles* quand les deux angles sont nuls, le point d'intersection étant passé à l'infini: alors une droite quelconque de l'un d'eux est parallèle à l'autre. — On dit de même que les deux plans sont *demi-perpendiculaires* quand un des angles est égal à 90°, et (*complètement*) *perpendiculaires* quand ils le sont tous les deux; dans le second cas, une droite quelconque de l'un des plans est perpendiculaire à l'autre, dans le premier il n'y a dans chaque plan qu'une seule direction jouissant de cette propriété. Enfin on dit que les deux plans *sont à angles égaux* quand $\varphi = \psi$; alors, l'un des plans étant donné, ainsi que le point commun et la valeur de l'angle, le second est susceptible d'une infinité de positions dont le lieu est un hypercône du second degré.

2° Au lieu de définir un point par ses quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, on peut le définir par quatre équations linéaires entre ces coordonnées. L'espace, le plan, la droite et le point sont alors représentés comme ceci :

$$(1)\qquad A = 0; \qquad \left\{\begin{array}{l} A = 0, \\ B = 0; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A = 0, \\ B = 0, \\ C = 0; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A = 0, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = 0; \end{array}\right.$$

les polynomes A, B, C, D s'appellent les *coordonnées générales* du point.

3° Si, dans ces systèmes, il y a m variables de plus

$$x_5, \quad x_6, \quad \ldots, \quad x_{4+m}$$

et en même temps *nombre égal* d'équations de plus

$$E = 0, \qquad F = 0, \qquad \ldots,$$

ils ont toujours la même signification, c'est-à-dire représentent encore, respectivement, un espace, un plan, une droite, un point. On dit alors que ceux-ci sont exprimés en *coordonnées surabondantes*.

4° Retenons un instant le second système

$$(2) \qquad A = 0, \qquad B = 0.$$

Il représente : — un point, quand A et B contiennent deux variables et qu'on fait de la Géométrie à deux dimensions ; — une droite, quand ils en contiennent trois et qu'on fait de la Géométrie à trois dimensions ; — un plan, quand ils en contiennent quatre et qu'on fait de la Géométrie à quatre dimensions. La combinaison linéaire des deux équations, savoir

$$(3) \qquad A + \beta B = 0,$$

β étant une indéterminée, représente, dans le premier cas, un faisceau de droites rayonnant dans le plan autour du *point* (2) ; dans le deuxième, un faisceau de plans rayonnant dans l'espace autour de la *droite* (2) ; dans le troisième, un faisceau d'espaces rayonnant dans l'étendue autour du *plan* (2) ; le mot *faisceau* désignant, dans tous les cas, une multiplicité ∞^1, ou de premier ordre.

On dit aussi, dans le premier cas, que c'est une seule et même droite qui *tourne dans le plan* autour du point (2) ; dans le deuxième, que c'est un seul et même plan qui *tourne dans l'espace* autour de la droite (2) ; dans le troisième, que c'est un seul et même espace qui *tourne dans l'étendue* autour du plan (2). C'est ainsi que les mots *tourner* et *rotation* changent de signification quand on passe d'un champ au suivant.

Il résulte de là un procédé qui facilite souvent le passage : vous augmentez d'une unité le *degré* de chacun des éléments *point, droite* et *plan*, ce qui amène à leur place les éléments *droite, plan* et *espace ;* quant au point, il apparaît dans la nouvelle figure comme *élément nouveau*, n'ayant pas de correspondant dans l'ancienne.

5° On a souvent avantage à remplacer les coordonnées x_1, x_2,

x_3, x_4 par leurs rapports à une cinquième variable x_5 : lorsqu'on a chassé les dénominateurs, les équations auxquelles on a affaire sont *homogènes* et plus maniables à raison de leur symétrie. Les cinq plans

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0$$

forment le *pentaèdre des coordonnées,* et le point dont les cinq coordonnées sont égales entre elles s'appelle le *point-unité* du système.

CHAPITRE II.

LE SYSTÈME DE COORDONNÉES ET LES TROIS PREMIERS POLYÈDRES RÉGULIERS.

§ 5. — Le quadriédre droit.

I. — Le quadrièdre droit simple.

Par un point O menons *quatre droites perpendiculaires entre elles*

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4$$

que nous appellerons *les axes*. Ce sont précisément nos *quatre dimensions,* et c'est *la possibilité de faire cette opération* qui caractérise la Géométrie dont nous nous occupons, de même que celle de mener par un point O *deux, trois,* ou *n* perpendiculaires caractérise les Géométries à *deux, trois* ou *n* dimensions.

Ne considérons d'abord que *les moitiés* des axes qui sont situés d'un certain côté du point O, et que nous appellerons leurs *directions positives*. Prises *deux à deux,* elles déterminent six plans et forment six angles droits que nous groupons par deux comme ceci :

$$x_1 x_2 \text{ et } x_3 x_4, \quad x_1 x_3 \text{ et } x_2 x_4, \quad x_1 x_4 \text{ et } x_2 x_3;$$

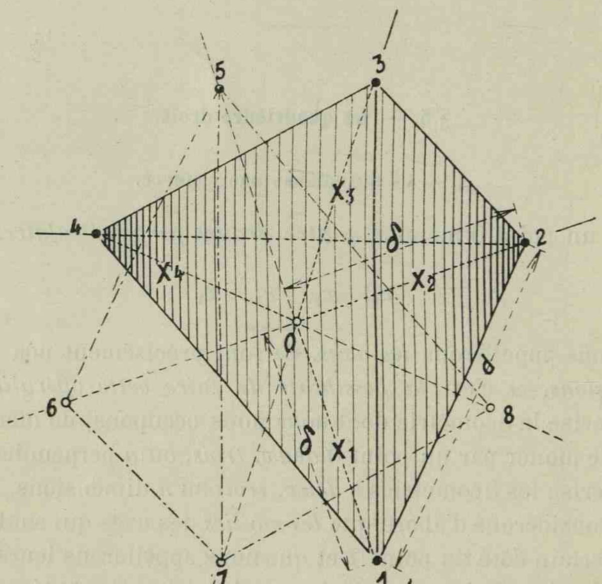
dans chacun de ces trois couples, les quatre indices sont différents et les deux plans sont *absolument perpendiculaires* entre eux, c'est-à-dire n'ont de commun que le *point* O; dans tous les autres couples qu'on peut former au nombre de *douze,* il ne figure que trois indices, un d'eux étant répété, les deux plans ne sont plus qu'en *perpendicularité simple,* et leur intersection est une *droite*. Pris *trois à trois,* les quatre demi-axes forment quatre trièdres trirectangles et autant d'espaces :

$$x_1x_2x_3, \quad x_2x_3x_4, \quad x_3x_4x_1, \quad x_4x_1x_2.$$

Nous appellerons cet ensemble un *quadrièdre droit.* La considération suivante en fera bien comprendre la constitution, moins simple peut-être qu'elle ne le paraît.

Portons (*fig.* 1) sur chacun des quatre demi-axes, à partir du

Fig. 1.



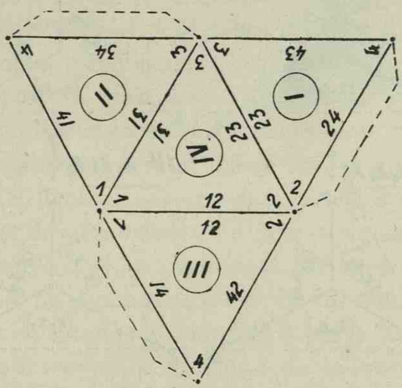
Le tétraèdre terminal du quadrièdre droit $x_1x_2x_3x_4$ et son opposé.

point O, une même longueur δ; coupons-les à cette distance et rejetons les parties restantes, qui iraient de $x = \delta$ à $x = \infty$. Les points terminaux 1, 2, 3, 4 forment un tétraèdre régulier : un *tétraèdre,* parce qu'ils sont au nombre de quatre, et un *tétraèdre régulier* parce que les six arêtes ont une même longueur d, étant les hypoténuses de *triangles rectangles isoscèles égaux.* Cette longueur est

$$d = 12 = 34 = 13 = 24 = 14 = 23 = \delta\sqrt{2}.$$

Transportons-nous dans l'espace de ce tétraèdre. Fendons-le suivant les arêtes 14, 24, 34, puis rabattons sur le plan de la face 123 les trois faces séparées ainsi. Nous aurons la figure 2, où une *languette* a été ajoutée le long des côtés de chacun des trois triangles extérieurs I, II, III afin qu'ayant découpé le pourtour, le lecteur, s'il veut construire le tétraèdre, n'ait qu'à faire tourner chaque triangle sur le côté qui lui est commun avec le

Fig. 2.



Développement du tétraèdre terminal.

triangle central IV [1] et coller chaque languette sous la face contre laquelle elle vient s'appliquer.

Faisons d'autre part quatre trièdres droits I, II, III, IV; marquons leurs arêtes et leurs faces comme le montre la figure 3, où les *indices* des lettres x correspondent aux numéros de la figure 1; puis appliquons sur les faces

$$x_2 x_3, \quad x_3 x_1, \quad x_1 x_2$$

du trièdre IV les faces qui ont la même marque sur les trièdres

I, II, III.

Nous aurons formé une configuration qui a trois plans doubles

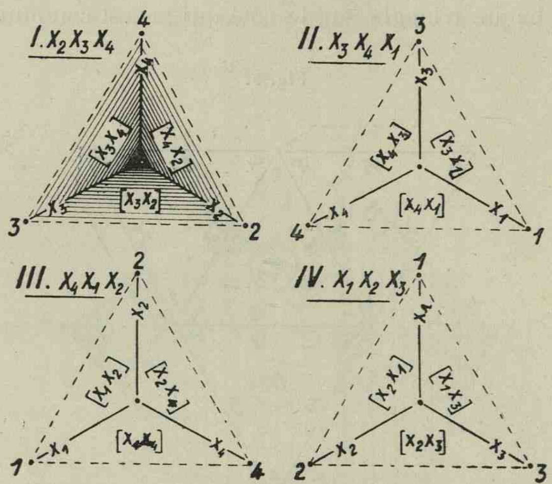
---

[1] Il faut au préalable *creuser les plis* avec le tranchant d'un couteau à papier.

et six plans simples, et qui *remplit la moitié de l'espace* où nous avons élu domicile ([1]).

Jusqu'ici tout s'est passé dans cet espace, et la *configuration* I, II, III, IV est *préparée* sous la forme d'un *développement spatial*

Fig. 3.



Les quatre trièdres trirectangles constitutifs du quadrièdre droit $x_1 x_2 x_3 x_4$.

comme la figure 2 l'est sous la forme d'un *développement plan*. Il faut maintenant (*voyez* le § 29 dans le Chapitre VII ci-après) faire tourner chacun des espaces I, II, III autour du plan qui lui est commun avec l'espace IV jusqu'à ce que *les faces qui ont la même marque s'appliquent l'une sur l'autre*, et alors *les arêtes qui ont la même marque s'appliqueront aussi l'une sur l'autre.*

([1]) Si l'on en construit une deuxième toute pareille, I′, II′, III′, IV′, on pourra es engager l'une dans l'autre en juxtaposant ainsi leurs faces simples

$x_1 x_4$ de I et $x_2 x_4$ de I′, $x_2 x_4$ de I et $x_1 x_4$ de III′, $x_3 x_4$ de I et $x_1 x_4$ de II′,
$x_1 x_4$ de II et $x_3 x_4$ de I′, $x_3 x_4$ de II et $x_3 x_4$ de II′,
$x_2 x_4$ de III et $x_2 x_4$ de III′.

On aura alors une configuration formée de *trois plans doubles* et *remplissant l'espace entier autour du point* O; elle le partage en huit trièdres trirectangles, dont quatre se trouvent de chaque côté de chaque plan.

Le quadrièdre droit sera constitué avec ses quatre sortes de figures limitantes : *un point, quatre arêtes, six faces planes* et *quatre trièdres*, respectivement de degrés 0, 1, 2, 3, les trois dernières correspondant aux sommets, arêtes et faces du tétraèdre, lesquelles sont respectivement de degrés 0, 1, 2.

II. — Le quadrièdre droit complet.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que la direction *positive* des quatre axes x_1, x_2, x_3, x_4. Restituons-leur les directions négatives et marquons sur celles-ci, à la même distance δ, les points 5, 6, 7, 8 respectivement symétriques de 1, 2, 3, 4.

Un quelconque des huit *points numérotés* que nous avons maintenant est à la distance d d'un quelconque des autres, sauf les deux qui se trouvent sur un même axe, et qui sont à la distance $2d$ l'un de l'autre : savoir 1 et 5, 2 et 6, 3 et 7, 4 et 8. On peut les associer de *seize* manières différentes quand on s'interdit celle où ces couples se trouveraient. Par exemple, partant du groupement 123, on ajoutera 4 ou 8, ce qui donne *deux* combinaisons; dans chacune, on remplace 3 par 7, ce qui en ajoute deux et fait *quatre;* dans chacune de celles-ci, on remplace 2 par 6, ce qui en ajoute quatre et fait *huit;* enfin, dans ces dernières, on remplace 1 par 5, ce qui en ajoute huit et fait *seize.*

Ces seize associations

1234,	1238,	1274,	1278,
1634,	1638,	1674,	1678,
5234,	5238,	5274,	5278,
5634,	5638,	5674,	5678

représentent *autant de tétraèdres réguliers situés dans autant d'espaces différents.* Chacun d'eux a *une* face commune avec un des autres et ils forment tous ensemble un solide régulier à quatre dimensions qui sera étudié dans le paragraphe suivant. Or, de même que le tétraèdre 1234, qui est le premier du Tableau, est le *couvercle* d'un quadrièdre droit ayant son sommet en O, de même chacun des autres est le couvercle d'une figure pareille. *L'étendue est donc partagée autour du point* O *en seize quadrièdres droits,* dont chacun a un de ses trièdres commun avec un des autres. Huit trièdres sont dans chacun des quatre espaces $x_1x_2x_3$, $x_2x_3x_4$, $x_3x_4x_1$, $x_4x_1x_2$, chacun d'eux étant commun à deux espaces.

Tel est le système de coordonnées de la Géométrie à quatre dimensions. Constitué dans celle à deux par *deux droites* qui découpent le plan en *quatre angles droits,* dans celle à trois par *trois plans* qui partagent l'espace en *huit trièdres droits,* il l'est maintenant par *quatre espaces* qui divisent l'étendue en *seize quadrièdres droits.* Si, pour compléter la série, nous plaçons à sa tête la *droite simple,* considérée comme l'axe unique x_1 de la *Géométrie à une dimension,* nous voyons que les systèmes de coordonnées

$$x_1;\quad x_1,\ x_2;\quad x_1,\ x_2,\ x_3;\quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$$

des quatre Géométries successives équivalent respectivement à : une table ordinaire, par exemple celle des logarithmes des nombres, — une table à double entrée, par exemple celle de Pythagore, — une table à triple entrée, — une table à quadruple entrée. Dans les deux premiers cas, la table numérique peut être remplacée par un graphique, mais les deux derniers ne sauraient être posés sur un plan comme celui de la présente feuille d'impression ; on leur applique des procédés graphiques spéciaux qui font l'objet de la *Nomographie* (¹).

Si l'on fait $\delta = \infty$, les deux points opposés situés sur chacun des quatre axes se réduisent à un, les huit points à quatre et les seize tétraèdres réguliers *à un seul.* Ainsi *le système des coordonnées est coupé par l'espace de l'infini suivant un tétraèdre régulier.* La considération de ce tétraèdre est souvent utile.

§ 6. — Les plans de projection.

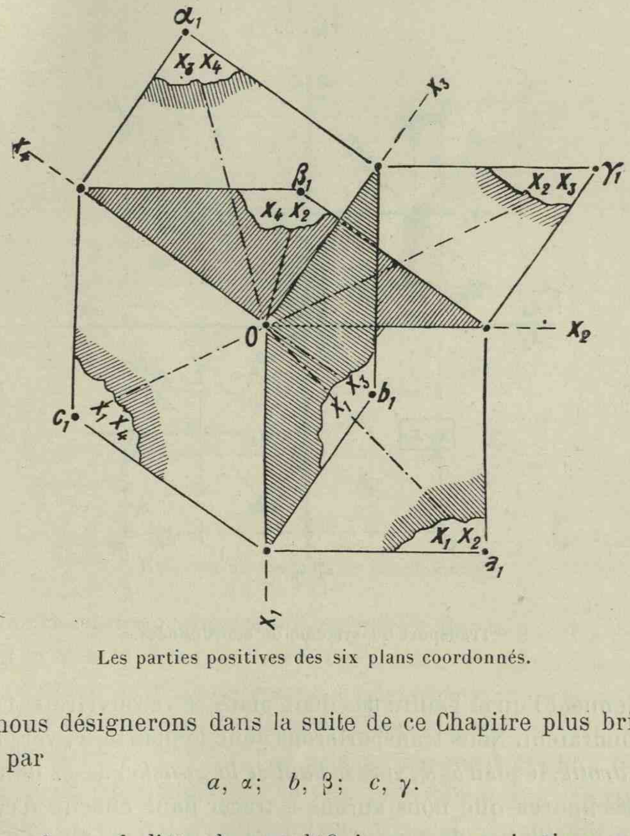
Pour faire plus ample connaissance avec le système des coordonnées, considérons-y (*fig.* 4) les trois couples de plans abso-

(¹) *Voir* D'OCAGNE, *Exposé synthétique des procédés fondamentaux de la Nomographie.* Paris, in-4°, 1903.

lument perpendiculaires entre eux

$$x_1x_2,\quad x_3x_4;\qquad x_1x_3,\quad x_2x_4;\qquad x_1x_4,\quad x_2x_3$$

Fig. 4.



Les parties positives des six plans coordonnés.

que nous désignerons dans la suite de ce Chapitre plus brièvement par

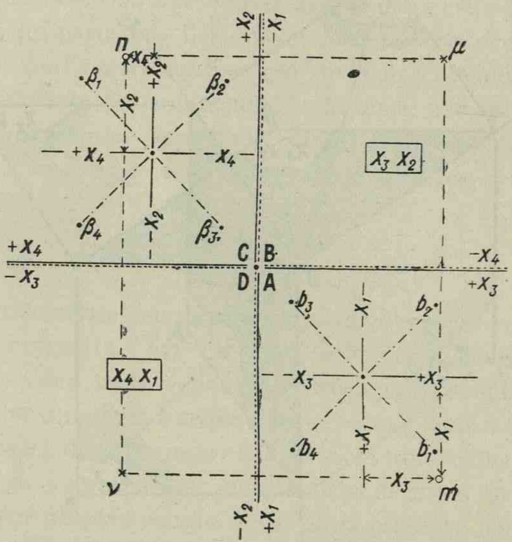
$$a,\ \alpha;\quad b,\ \beta;\quad c,\ \gamma.$$

Toute figure de l'étendue est définie par ses projections sur les deux plans d'un même couple, puisque ces projections donnent à elles deux les quatre coordonnées d'un point quelconque. On est libre de prendre le couple que l'on voudra, et les faces de la question que l'on étudie peuvent faire préférer tour à tour l'un et l'autre; par des raisons de symétrie, choisissons celui du milieu, $b\beta$, et nous l'*emploierons exclusivement.*

Détachons des autres les deux plans qui les composent et couchons-les ensemble (*fig.* 5) sur la présente feuille de papier.

Si nous superposons leurs axes, nous aurons les deux lignes perpendiculaires placées au milieu de la feuille, où les directions positives sont dessinées en traits pleins et les négatives en traits pointillés. Mais, dans une pareille disposition, les figures que

Fig. 5.



Transport du système de coordonnées.

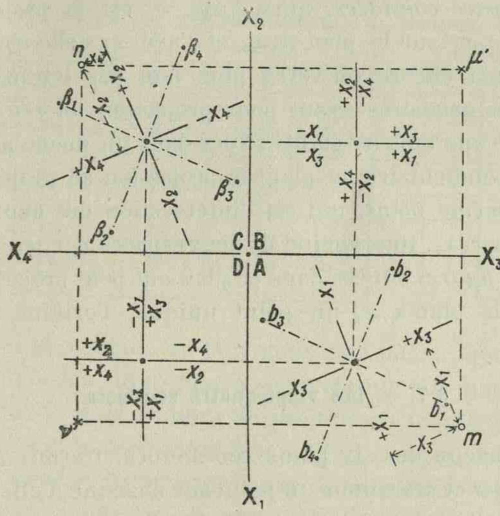
contiennent l'un et l'autre des deux plans se recouvriraient et se confondraient. Nous transporterons donc le plan $x_1 x_3$ vers *le bas et la droite,* le plan $x_2 x_4$ vers *le haut et la gauche,* assez loin pour que les figures que nous aurons à tracer dans chacun d'eux ne sortent pas de l'angle A ou C qui leur est attribué. Étant donnés alors deux points quelconques m et n comme étant les projections d'un point M de l'étendue, on en déduit ainsi que le montre la figure les coordonnées x_1 et x_3, x_2 et x_4 de celui-ci, et réciproquement.

Quant aux angles B et D, nous les considérons comme représentant, couchés aussi sur notre feuille, deux plans *en perpendicularité simple* avec nos deux plans A et C, le premier B étant coupé par eux suivant les lignes x_3 et x_2, le second D suivant les lignes x_1 et x_4. Dès lors chacun des systèmes

AB, BC, CD, DA,

considéré séparément, n'est autre chose qu'*une épure de Géo-*

Fig. 6.



Relation du système de coordonnées.

métrie descriptive ordinaire où ces quatre lignes x_3, x_2, x_4, x_1 jouent le rôle de *ligne de terre*. Ces quatre systèmes sont dans autant d'espaces différents. Nous considérerons comme étant *notre propre espace* celui qui contient le premier et qui est défini par les trois axes x_1, x_2, x_3; si l'on ne s'occupe que des points, lignes et surfaces qui s'y trouvent, on fait de la Géométrie descriptive ordinaire, ou de la Géométrie à trois dimensions, suivant qu'on procède par la méthode graphique ou par la méthode analytique.

L'ensemble de la figure 5 correspond aux quatre plans

$$x_1x_3 \text{ et } x_2x_4, \quad x_3x_2 \text{ et } x_4x_1, \quad \text{ou} \quad b \text{ et } \beta, \quad c \text{ et } \gamma,$$

de la figure 4 ([1]). Les projections μ et ν du point m sur les deux

([1]) Les notations A, B, C, D sont respectivement équivalentes à b, c, β, γ; on voudra bien excuser ce double emploi, qui n'est pas tout à fait involontaire.

plans accessoires s'obtiennent par les lignes de rappel, perpendiculaires aux lignes de terre, qui sont si abondantes dans beaucoup d'épures et se tracent d'ordinaire en *traits interrompus.*

On n'oubliera pas : — 1° que tous les points situés dans un même espace perpendiculaire à un plan de projection se projettent *sur une seule et même droite* de celui-ci, qu'on appelle la *projection de l'espace considéré;* ainsi l'axe x_1 est la projection de l'espace $x_1 x_3 x_4$ sur le plan $x_1 x_2$ et l'axe x_2 celle de l'espace $x_2 x_3 x_4$; ainsi encore on verra plus loin des tétraèdres, des cubes et des octaèdres ayant pour projection *un fragment de droite;* — 2° que tous les points situés dans un même plan absolument perpendiculaire au plan de projection se projettent sur *un seul et même point,* qui est l'intersection des deux plans : ainsi le plan $x_3 x_4$, intersection de deux espaces $x_1 x_3 x_4$ et $x_2 x_3 x_4$, et *toutes les figures* situées dans ce plan ont pour projection commune sur le plan $x_1 x_2$ un point unique, l'origine des coordonnées.

§ 7. — Les vingt-quatre sommets.

I. Dans chacun des six plans coordonnés, traçons *les bissectrices des axes* et marquons un point sur chacune d'elles de part et d'autre de l'origine, à la distance d, cette lettre conservant la même signification que dans le paragraphe précédent. Cela fait en tout

$$6 \times 2 \times 2 = 24$$

points, que nous appellerons *les vingt-quatre sommets.* Nous désignerons les quatre points du plan b par cette même lettre b affectée des indices 1, 2, 3, 4 comme le montre la figure 5, et nous ferons de même dans chacun des cinq autres plans. En ayant égard à la formule de la page 3, qui donne

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,d,$$

on voit que *les vingt-quatre sommets ont tous deux coordonnées nulles et deux coordonnées égales à δ en valeur absolue.* Le détail en est donné dans le Tableau suivant; pour abréger et aussi pour faciliter la tâche de l'imprimeur nous avons *ôté* du Tableau la lettre δ qui y serait répétée *quatre-vingt-seize fois;* le lecteur voudra bien la réintégrer mentalement à la suite de chaque signe + ou —.

TABLEAU I. — COORDONNÉES DES VINGT-QUATRE SOMMETS.

COORDONNÉES.	PREMIER COUPLE. PLAN DES								DEUXIÈME COUPLE. PLAN DES								TROISIÈME COUPLE. PLAN DES								COORDONNÉES.
	x_1x_2.				x_3x_4.				x_1x_3.				x_2x_4.				x_1x_4.				x_2x_3.				
	a_1.	a_2.	a_3.	a_4.	α_1.	α_2.	α_3.	α_4.	b_1.	b_2.	b_3.	b_4.	β_1.	β_2.	β_3.	β_4.	c_1.	c_2.	c_3.	c_4.	γ_1.	γ_2.	γ_3.	γ_4	
x_1	+	—	—	+	0	0	0	0	+	—	—	+	0	0	0	0	+	—	—	+	0	0	0	0	x_1
x_2	0	0	0	0	+	+	—	—	0	0	0	0	+	—	—	+	+	+	—	—	0	0	0	0	x_2
x_3	0	0	0	0	+	—	—	+	+	+	—	—	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	—	—	x_3
x_4	+	+	—	—	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	—	—	0	0	0	0	+	—	—	+	x_4

Rien n'est plus facile, au moyen de ce Tableau, que de figurer les projections des vingt-quatre sommets sur les quatre plans de l'épure figure 5, mais nombre de projections tomberont les unes sur les autres et la figure sera peu facile à comprendre.

Pour les *séparer,* commençons par *faire tourner sur lui-même, d'un quart de quadrant,* chacun des plans x_1x_3 et x_2x_4, ce qui remplace la figure 5 par la figure 6, page 17 ([1]). C'est alors comme si les vingt-quatre points, censés faire partie d'un corps solide, avaient exécuté une petite pirouette dans l'étendue, et *tous les sommets deviennent distincts dans les projections sur les plans intermédiaires c et* γ. Ces projections deviennent ainsi nos *figures principales,* et c'est leur réalisation qui sera visée pour les hypercorps faisant l'objet des paragraphes suivants.

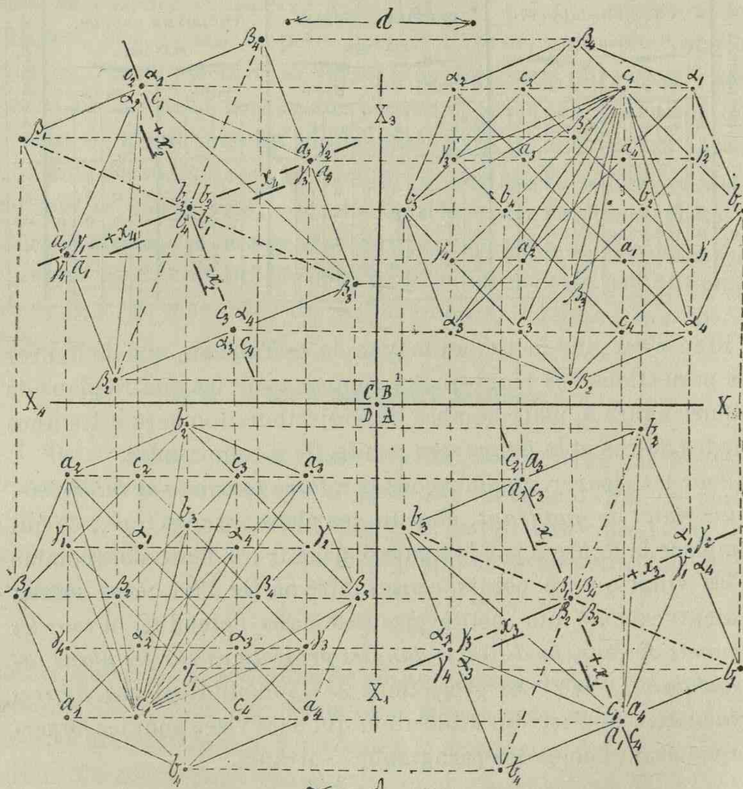
II. — LES QUATRE ESPÈCES DE DISTANCES.

Si l'on joint à tous les autres un quelconque des vingt-quatre sommets, par exemple c_1, on trouve *quatre sortes de distances,* car le remplacement des x et des y dans la formule Δ^2 du paragraphe 2

([1]) On a représenté sur les plans B et D de la figure 6 les projections des quatre axes après leur seizième de rotation.

par des valeurs telles que o, o, $\pm \delta$, $\pm \delta$ peut donner, pour chacune des différences à élever au carré, o, ou δ, ou 2δ, et la somme des carrés peut être $2\delta^2$, ou $4\delta^2$, ou $6\delta^2$, ou $8\delta^2$. La figure 7 montre ces diverses distances, et l'on trouve, partant du

Fig. 7.



Les vingt-quatre sommets.

point c_1 : *huit* distances qui ont la valeur d, savoir :

$$c_1 a_1,\quad c_1 \alpha_1,\quad c_1 b_1,\quad c_1 \beta_1,\quad c_1 a_4,\quad c_1 \alpha_4,\quad c_1 b_4,\quad c_1 \beta_4\,;$$

six qui ont la valeur $d\sqrt{2}$:

$$c_1 c_2,\quad c_1 c_4,\quad c_1 \gamma_1,\quad c_1 \gamma_2,\quad c_1 \gamma_3,\quad c_1 \gamma_4\,;$$

huit qui ont la valeur $d\sqrt{3}$:

$$c_1 a_2,\quad c_1 a_3,\quad c_1 b_2,\quad c_1 b_3,\quad c_1 \alpha_2,\quad c_1 \alpha_3,\quad c_1 \beta_2,\quad c_1 \beta_3;$$

une qui a la valeur $d\sqrt{4} = 2d$:

$$c_1 c_3.$$

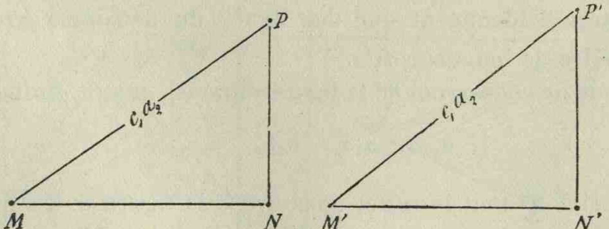
De pareils groupes existent, bien entendu, pour chacun des vingt-quatre sommets; cela fait pour l'ensemble, en multipliant ces nombres par 24 et divisant par 2 pour que chaque droite ne soit pas comptée deux fois :

$$\left.\begin{array}{lcr} 96 \text{ droites de longueur} & & d \\ 72 & » & d\sqrt{2} \\ 96 & » & d\sqrt{3} \\ 12 & » & 2d \end{array}\right\}\ \text{total : } 276.$$

Les douze dernières, dont les extrémités ont des coordonnées égales et de signes contraires, s'appellent *les grandes diagonales.* Nous retrouverons plus loin les quatre groupes, chacun avec un rôle particulier.

Le lecteur qui voudrait faire une vérification graphique des valeurs précédentes, par exemple pour les deux points marqués c_1 et a_2, n'a qu'à construire un triangle rectangle (*fig.* 8) ayant pour

Fig. 8.



Construction de la distance de deux points.

côtés la distance MN des deux points marqués c_1 et a_2 dans la projection A, et celle NP des deux points marqués de même dans la projection B. Le carré $\overline{MN}^2$ est la somme des premier et troisième terme de l'expression Δ^2 donnée au § 2, et $\overline{M'N'}^2$ est celle des deux autres; par conséquent *la vraie distance* $c_1 a_2$ dans l'étendue est l'hypoténuse MP. Rien n'empêche d'opérer avec les deux projections B, D, qui donnent le triangle M'N'P' ayant la même longueur d'hypoténuse que MNP.

Dans le cas particulier qui a été choisi, on a

$$MN = 2\delta = d\sqrt{2}, \qquad NP = d,$$

d'où

$$c_1 a_2 = d\sqrt{3},$$

et $c_1 a_2$ est une des 96 droites du troisième groupe.

§ 8. — Les trois hexadécaédroïdes.

Si, ne se contentant pas de joindre les vingt-quatre points *deux à deux par des droites,* comme nous venons de le faire, on les joint *trois à trois par des plans* et *quatre à quatre par des espaces,* on peut former une multitude de configurations sur l'ensemble desquelles nous ne voulons pas même jeter les yeux. Mais nous en choisirons trois qui sont liées intimement au système de coordonnées et dont nous étudierons sommairement la constitution; elles s'obtiennent en associant d'abord les huit points qui sont dans *deux plans d'un même couple,* puis les seize points qui sont dans *deux couples,* et enfin les points des *trois couples.* Voici d'abord le premier cas, où nous ne devons rencontrer évidemment que des lignes du deuxième groupe, c'est-à-dire de longueur $d\sqrt{2}$.

Si nous ne conservons de la figure 7 que les quatre droites

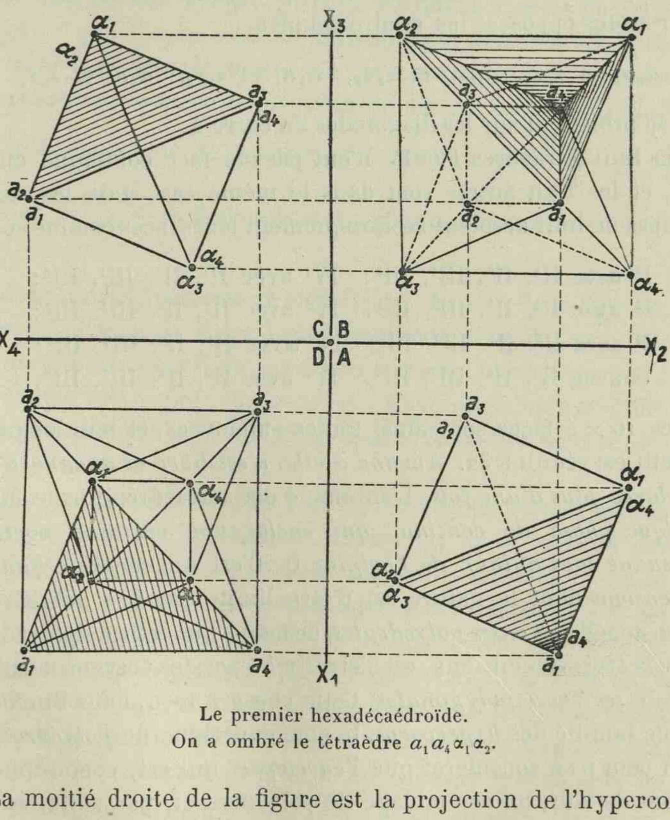
$$a_1 a_3, \quad \alpha_1 \alpha_3, \quad a_2 a_4, \quad \alpha_2 \alpha_4$$

et supprimons tout le reste, nous avons la figure 9. Ces quatre droites se croisent par leurs milieux à l'origine; elles sont perpendiculaires chacune à chacune, comme le montrent les projections; elles forment donc un quadrièdre droit complet, pareil à celui que forment les quatre droites x_1, x_2, x_3, x_4 du paragraphe précédent. Leurs huit points terminaux sont donc les sommets de seize tétraèdres réguliers, savoir, en remplaçant les chiffres d'alors 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 respectivement par les lettres a_1, α_1, a_2, α_2, a_3. α_3, a_4, α_4 :

	I.	II.	III.	IV.
1.......	$a_1\ a_2\ \alpha_1\ \alpha_2$,	$a_1\ a_2\ \alpha_1\ \alpha_4$,	$a_1\ a_4\ \alpha_1\ \alpha_2$,	$a_1\ a_4\ \alpha_1\ \alpha_4$,
2.......	$a_1\ a_2\ \alpha_3\ \alpha_4$,	$a_1\ a_2\ \alpha_2\ \alpha_3$,	$a_1\ a_4\ \alpha_3\ \alpha_4$,	$a_1\ a_4\ \alpha_2\ \alpha_3$,
3.......	$a_3\ a_4\ \alpha_1\ \alpha_2$,	$a_3\ a_4\ \alpha_1\ \alpha_4$,	$a_2\ a_3\ \alpha_1\ \alpha_2$,	$a_2\ a_3\ \alpha_1\ \alpha_4$,
4.......	$a_3\ a_4\ \alpha_3\ \alpha_4$,	$a_3\ a_4\ \alpha_2\ \alpha_3$,	$a_2\ a_3\ \alpha_3\ \alpha_4$,	$a_2\ a_3\ \alpha_2\ \alpha_3$.

Ces seize tétraèdres sont représentés dans la figure 9, qu'il nous faut expliquer sommairement parce que c'est la première projection de ce genre qui se présente.

Fig. 9.



Le premier hexadécaédroïde.
On a ombré le tétraèdre $a_1 a_4 \alpha_1 \alpha_2$.

La moitié droite de la figure est la projection de l'hypercorps sur notre espace, polyèdre qui a lui-même pour projections les figures planes A et B. Le point $a_1 a_4$, tout en bas, représente une arête perpendiculaire au plan A, commune à quatre tétraèdres dans lesquels elle a pour arête opposée

$$\alpha_1\alpha_2,\quad \alpha_3\alpha_4,\quad \alpha_1\alpha_4,\quad \alpha_2\alpha_3,$$

les deux premières parallèles, les deux autres perpendiculaires au plan A; on se figurera aisément ces quatre tétraèdres en les regardant sur la projection B. Le premier est *teinté* sur les quatre projections A, B, C, D. Les deux derniers sont réduits à un *trapèze plan* parce qu'ils sont dans un espace perpendiculaire au nôtre. En se transportant successivement aux trois autres sommets du carré A, on a de même quatre tétraèdres à chaque fois, mais des doubles emplois font qu'il n'y en a que douze différents; ce sont ceux des colonnes II, III et IV. Ceux de la colonne I ont pour arêtes opposées les quatre couples

$$a_1a_2 \text{ et } \alpha_1\alpha_2,\quad a_1a_2 \text{ et } \alpha_3\alpha_4,\quad a_3a_4 \text{ et } \alpha_1\alpha_2,\quad a_3a_4 \text{ et } \alpha_3\alpha_4$$

qui se projettent sur les diagonales du carré A.

Les huit tétraèdres I et IV n'ont pas de face commune entre eux, et les huit autres sont dans le même cas. Mais les deux groupes de huit accolent réciproquement leurs faces comme ceci :

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{I}^1 \text{ avec } \mathrm{II}^1, \mathrm{II}^2, \mathrm{III}^1, \mathrm{III}^3; & \mathrm{IV}^1 \text{ avec } \mathrm{II}^1, \mathrm{II}^3, \mathrm{III}^1, \mathrm{III}^2;\\
\mathrm{I}^2 \text{ avec } \mathrm{II}^1, \mathrm{II}^4, \mathrm{III}^2, \mathrm{III}^4; & \mathrm{IV}^2 \text{ avec } \mathrm{II}^2, \mathrm{II}^4, \mathrm{III}^1, \mathrm{III}^2;\\
\mathrm{I}^3 \text{ avec } \mathrm{II}^3, \mathrm{II}^4, \mathrm{III}^1, \mathrm{III}^3; & \mathrm{IV}^3 \text{ avec } \mathrm{II}^1, \mathrm{II}^3, \mathrm{III}^3, \mathrm{III}^4;\\
\mathrm{I}^4 \text{ avec } \mathrm{II}^3, \mathrm{II}^4, \mathrm{III}^2, \mathrm{III}^4; & \mathrm{IV}^4 \text{ avec } \mathrm{II}^2, \mathrm{II}^4, \mathrm{III}^3, \mathrm{III}^4.
\end{array}$$

Les 16×4 faces sont ainsi toutes employées, et leur nombre effectif est réduit à 32. *Aucune d'elles n'est libre et aucune n'est employée plus d'une fois.* L'ensemble des tétraèdres forme donc *quelque chose de continu, qui enclôt une certaine portion d'étendue tout autour de l'origine* O. C'est un *corps à quatre dimensions* dont la nature est d'être limité par des polyèdres, qu'on appelle *ses cases polyédrales*, de même que celle du polyèdre, corps à trois dimensions, est d'être limité par des polygones qu'on appelle *ses faces polygonales*. Cette chose a reçu, dans l'innombrable famille des *hypercorps*, le nom générique de *polyédroïde*.

On peut n'en considérer que l'*enveloppe*, qui est, comme nous venons de voir, un assemblage de polyèdres et, par suite, *est à trois dimensions*, bien qu'elle existe dans l'étendue puisque ces polyèdres sont dans autant d'espaces différents. On peut, au contraire, ne considérer que la *portion d'étendue circonscrite par cette enveloppe :* c'est alors que l'on a le *corps à quatre dimensions proprement dit,* pour lequel il faut une nouvelle unité, dont il a été déjà question dans le paragraphe 1, et qui sera définie dans le prochain paragraphe.

Le polyédroïde particulier que nous avons sous les yeux s'appelle un *hexadécaédroïde régulier;* il a *huit sommets* et *seize cases tétraédrales.* On voit par le petit Tableau de la page 23 : 1° que chaque sommet de tétraèdre, par exemple a_1 (première et deuxième ligne), est répété huit fois; en d'autres termes, les 16×4 sommets que possèdent ensemble les seize tétraèdres *se réunissent par huit en huit points,* qui sont les huit sommets de l'hypercorps; 2° que chaque arête de tétraèdre, par exemple $a_1 \alpha_1$ (première ligne), est répétée quatre fois; en d'autres termes, les cases *tiennent par quatre* à une même arête qui est une arête de l'hypercorps, d'où suit que le nombre de celles-ci est $\dfrac{16 \times 6}{4} = 24$ et qu'il en a $\dfrac{24 \times 2}{8} = 6$ aboutissant à chaque sommet.

Les deux autres systèmes de bissectrices, $b\beta$ et $c\gamma$ de la figure 4, fournissent chacun un autre hexadécaédroïde régulier, que définirait un Tableau déduit du précédent en remplaçant a et α par b et β, puis par c et γ. Ces deux nouveaux hypercorps, qui ne diffèrent du premier que par leur position dans l'étendue, sont représentés par les figures 10 et 11.

La figure 10 paraît avoir, en B et D, les mêmes formes que la précédente avec une orientation différente; mais, comme les sommets des carrés A, C ne sont pas des points doubles, il ne se trouve pas de tétraèdre perpendiculaire à ces plans. Le cas de cette figure est celui qui montre le mieux la construction de l'hexadécaédroïde, laquelle revient à ceci : 1° étant donnés deux carrés égaux $b_1 b_2 b_3 b_4$ et $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$, les poser dans les deux plans absolument perpendiculaires A et C de telle sorte que la distance d'un sommet quelconque de l'un à un sommet quelconque de l'autre ait toujours la même valeur $d\sqrt{2}$, égale au côté des carrés (*voir* p. 10); 2° construire les quatre tétraèdres qui ont $b_1 b_2$ pour

Fig. 10. — Le deuxième hexadécaédroïde.
Dans les projections A, C, D on a ombré le tétraèdre $b_1 b_4 \beta_1 \beta_4$.

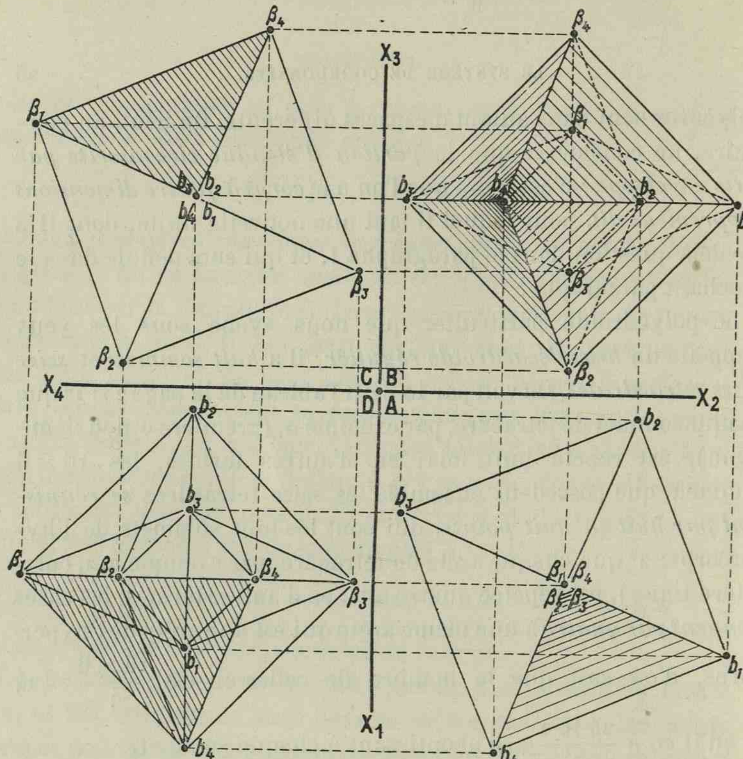
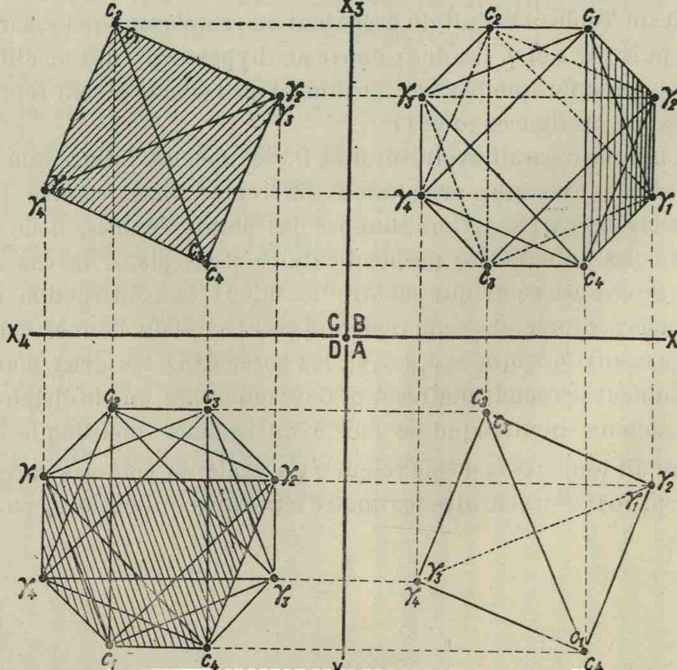


Fig. 11. — Le troisième hexadécaédroïde.
On a ombré le té aèdre $c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2$, réduit à un trapèze dans les espaces AB et AD.



arête commune et respectivement $\beta_1\beta_2$, $\beta_2\beta_3$, $\beta_3\beta_4$, $\beta_4\beta_1$ pour arête opposée à celle-là; 3°, 4° et 5° traiter successivement de même chacun des trois autres côtés b_2b_3, b_3b_4, b_4b_1 du premier carré. Les seize tétraèdres ainsi enchevêtrés seront égaux et réguliers, mais, bien entendu, il ne peut pas en être de même pour leurs projections sur notre espace.

§ 9. — L'octaédroïde.

I. — Sommets et cubes conjugués.

I. On a vu, page 20, qu'il part du point c_1 huit droites ayant la longueur d et aboutissant aux huit points

$$\alpha_1,\ b_1,\ a_1,\ \beta_1,\ \beta_4,\ a_4,\ b_4,\ \alpha_2.$$

On trouve cet assemblage de points dans la figure 12 et nous le reproduisons séparément dans la figure 13 mais sans les lignes aboutissantes; on remarquera : 1° qu'ils sont reliés par trois systèmes de droites parallèles quatre à quatre [1], savoir :

$$\begin{array}{llll} b_1a_1, & \alpha_1\beta_1, & \beta_4\alpha_2, & a_4b_4, \\ b_1a_4, & \alpha_1\beta_4, & \beta_1\alpha_2, & a_1b_4, \\ b_1\alpha_1, & a_1\beta_1, & b_4\alpha_2, & a_4\beta_4; \end{array}$$

2° que les douze droites sont dans un même espace, car, si l'on considère l'espace des droites b_1a_1, b_1a_4, $b_1\alpha_1$, on voit de suite que $a_1\beta_1$ et $a_1\beta_4$ y ont deux points, un, a_1, à distance finie et un à l'infini, puis on y ramène les autres droites de proche en proche de la même manière; 3° que l'angle de deux droites partant d'un quelconque des huit points, par exemple b_1a_1 et b_1a_4, est droit, car on a

$$\overline{b_1a_1}^2 + \overline{b_1a_4}^2 = 4\,\delta^2 = \overline{a_1a_4}^2,$$

comme dans tout triangle rectangle.

Il suit de là que nos huit points sont les sommets de ce polyèdre à trois dimensions appelé un *hexaèdre régulier*, ou un

---

(1) Nous disons que les droites sont parallèles parce que toutes leurs projections le sont.

Fig. 12. — Le premier octaédroïde.
On a ombré le cube $C_1 = a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1 a_4 b_4 \alpha_4 \beta_4$.

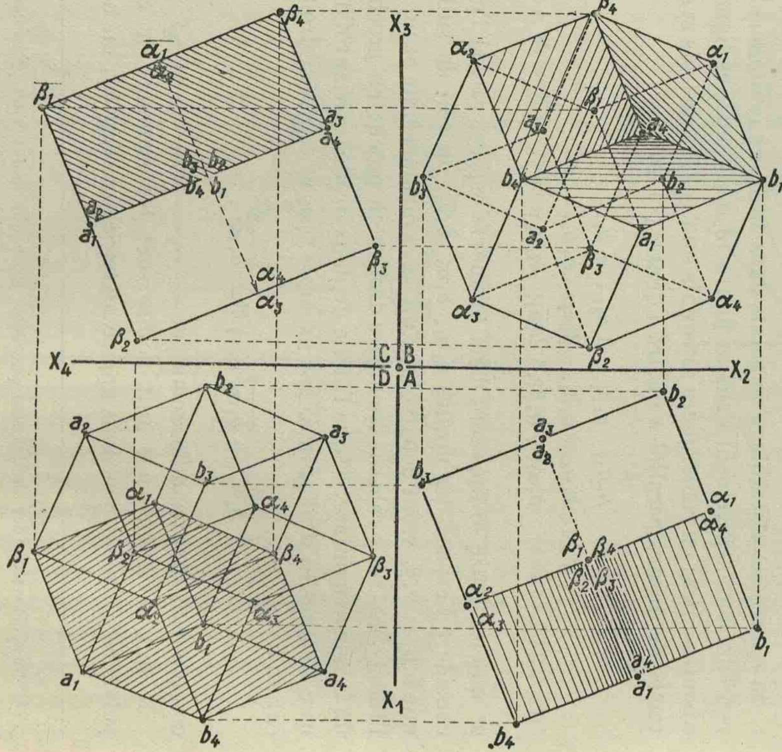
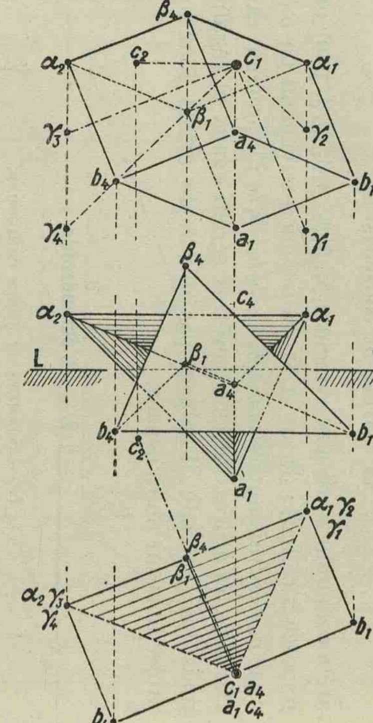


Fig. 13.
1° Le cube conjugué du sommet c_1;
2° *Stella octangula* de Képler.



cube. Pour chacun des vingt-quatre points dont le Tableau I donne les coordonnées, on peut construire un cube pareil à celui que nous avons construit pour c_1 : il y a correspondance univoque entre les uns et les autres, et nous appellerons *conjugués l'un de l'autre* le sommet et le cube qui se correspondent. Le second *est autour* du premier, qui est, pour ainsi dire, *la pointe d'une calotte dont les arêtes, les plans et les espaces s'appuient respectivement sur ses sommets, ses arêtes et ses faces;* de même que, dans la Géométrie à trois dimensions, tout sommet d'un polyèdre a *autour de lui* un polygone *sur les sommets et les côtés duquel s'appuient ses arêtes et ses faces.*

Le Tableau II fait connaître cette correspondance entre sommets et cubes. Chacun de ceux-ci y est désigné par deux faces opposées, pour lesquelles nous avons choisi celles qui ont *des carrés* pour projections sur les plans A et C ; pour abréger, nous désignerons un cube par la lettre affectée au sommet qui lui est conjugué, en la mettant entre deux parenthèses.

Tableau II. — Sommets et cubes conjugués.

SOMMETS	TROISIÈME OCTAÉDROÏDE.	SOMMETS.	DEUXIÈME OCTAÉDROÏDE.	SOMMETS.	PREMIER OCTAÉDROÏDE.
a_1	$b_1, c_1, \beta_1. \gamma_1;\ c_4, b_4, \gamma_4, \beta_2$	b_1	$c_1, a_1, \gamma_1, \alpha_1;\ a_4, c_4, \alpha_4, \gamma_2$	c_1	$a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1;\ b_4, a_4, \beta_4, \alpha_2$
a_2	$b_3, c_2, \beta_1, \gamma_4;\ c_3, b_2, \gamma_1, \beta_2$	b_2	$c_3, a_2, \gamma_1, \alpha_4;\ a_3, c_2, \alpha_1, \gamma_2$	c_2	$a_3, b_2, \alpha_1, \beta_4;\ b_3, a_2, \beta_1, \alpha_2$
a_3	$b_3, c_3, \beta_3. \gamma_3;\ c_2, b_2, \gamma_2, \beta_4$	b_3	$c_3, a_3, \gamma_3, \alpha_3;\ a_2, c_2, \alpha_2, \gamma_4$	c_3	$a_3, b_3, \alpha_3, \beta_3;\ b_2, a_2, \beta_2, \alpha_4$
a_4	$b_1, c_4, \beta_3, \gamma_2;\ c_1, b_4, \gamma_3, \beta_4$	b_4	$c_1, a_4, \gamma_3, \alpha_2;\ a_1, c_4, \alpha_3, \gamma_4$	c_4	$a_1, b_4, \alpha_3, \beta_2;\ b_1, a_4, \beta_3, \alpha_4$
α_1	$b_1, c_1, \beta_1. \gamma_1;\ \gamma_2, \beta_4, c_2, b_2$	β_1	$c_1, a_1, \gamma_1, \alpha_1;\ \alpha_2, \gamma_4, a_2, c_2$	γ_1	$a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1;\ \beta_2, \alpha_4, b_2, a_2$
α_2	$b_3, c_2, \beta_1, \gamma_4;\ \gamma_3, \beta_4, c_1, b_4$	β_2	$c_3, a_2, \gamma_1, \alpha_4;\ \alpha_3, \gamma_4, a_1, c_4$	γ_2	$a_3, b_2, \alpha_1, \beta_4;\ \beta_3, \alpha_4, b_1, a_4$
α_3	$b_3, c_3, \beta_3, \gamma_3;\ \gamma_4, \beta_2, c_4, b_4$	β_3	$c_3, a_3, \gamma_3, \alpha_3;\ \alpha_4, \gamma_2, a_4, c_4$	γ_3	$a_3, b_3, \alpha_3, \beta_3;\ \beta_4, \alpha_2, b_4, a$
α_4	$b_1, c_4, \beta_3, \gamma_2;\ \gamma_1, \beta_2, c_3, b_2$	β_4	$c_1, a_4, \gamma_3, \alpha_2;\ \alpha_1, \gamma_2, a_3, c_2$	γ_4	$a_1, b_4, \alpha_3, \beta_2;\ \beta_1, \alpha_2, b_3, a_2$

On voit que les vingt-quatre cubes se divisent naturellement en trois groupes caractérisés par ceci que ceux du premier groupe n'ont aucun de leurs sommets désigné par une lettre c ou γ, et n'ont pour conjugués que des points désignés par une de ces deux lettres; de même pour les deux autres groupes et les lettres b ou β, a ou α.

Considérons en particulier le groupe qui forme la dernière colonne du Tableau; ce que nous en dirons s'appliquera en tous points aux deux autres.

Deux cubes tels que

$$(c_1) \text{ et } (c_3),\quad (c_2) \text{ et } (c_4),\quad (\gamma_1) \text{ et } (\gamma_3),\quad (\gamma_2) \text{ et } (\gamma_4)$$

sont formés de points symétriquement placés par rapport à l'origine et nous dirons d'eux qu'ils sont *opposés*. Cela étant, si nous prenons le premier de ces cubes (c_1), et si nous laissons de côté son opposé, nous voyons par le Tableau qu'il a une face commune $a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1$, $a_1 b_1 a_4 b_4$, $a_4 b_1 \alpha_1 \beta_4$, $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_4$, $a_1 b_4 \alpha_2 \beta_1$, $a_4 b_4 \alpha_2 \beta_4$, avec chacun des six autres cubes

$$(\gamma_1),\quad (c_4),\quad (\gamma_2),\quad (c_2),\quad (\gamma_4),\quad (\gamma_3),$$

ce que nous exprimerons en disant *qu'il est en contact avec chacun d'eux par cette face*. Il en est de même, naturellement, pour tous les autres. Ainsi, de même que le *cube* de la Géométrie à trois dimensions est constitué par *six carrés opposés et parallèles deux à deux, deux carrés opposés tenant à chacun des quatre autres par un de leurs quatre côtés;* de même l'octaédroïde est constitué (*fig.* 12) par *huit cubes opposés et parallèles deux à deux, chacun de deux cubes opposés tenant à un des six autres par une de ses faces*. Et, de même que les six faces du premier, ne laissant entre elles aucune solution de continuité, enclosent une certaine portion de l'*espace* qui le contient, de même les huit cubes du second, ne laissant entre eux aucune solution de continuité, enclosent une certaine portion de l'*étendue*. Nous arrivons à un deuxième polyédroïde régulier qu'on a appelé l'*octaédroïde*. Il a *seize sommets* et *huit cases cubiques*. Les figures 12, 14, 15 montrent en AB des polyèdres de notre espace qui ont aussi seize sommets et sont décomposables en huit *parallélépipèdes* correspondant à ces huit cubes.

II. — Le mètre octaédroïde.

L'unité du quatrième degré dont il a été question dans le paragraphe 1 n'est autre chose qu'un *octaédroïde régulier* pour lequel on a (*fig.* 12)

$$d = a_1 b_1 = 1^{\mathrm{m}};$$

on pourrait appeler cette unité le *mètre octaédroïde,* mot correspondant à ceux de *mètre carré* et *mètre cube.*

III. — Stella octangula.

On peut écrire ainsi les lignes successives de la troisième colonne du Tableau, en en transposant les termes :

$$a_1 a_4 \alpha_1 \alpha_2 + b_1 b_4 \beta_1 \beta_4,$$
$$a_2 a_3 \alpha_1 \alpha_2 + b_2 b_3 \beta_1 \beta_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où l'on conclut ces trois propositions :

1° *Les sommets de l'octaédroïde ne sont autre chose que la réunion des huit sommets du premier hexadécaédroïde* (§ 6 et figures 10, 11) *avec les huit sommets du second.*

2° *Les huit cubes du même octaédroïde ne sont autre chose que la réunion de huit des seize tétraèdres du premier hexadécaédroïde avec huit des seize tétraèdres du second, chaque couple de tétraèdres prenant la position appelée* stella octangula *de Képler* (*Traité élémentaire*, § 43).

On a profité d'une place vide dans la figure 13 pour y représenter cette manière de réunir les huit sommets d'un cube, le cube (c_1), et l'ombre de la projection horizontale de cette même figure 13 (qui est la même que dans la figure 9) se rapporte à l'un de ces tétraèdres.

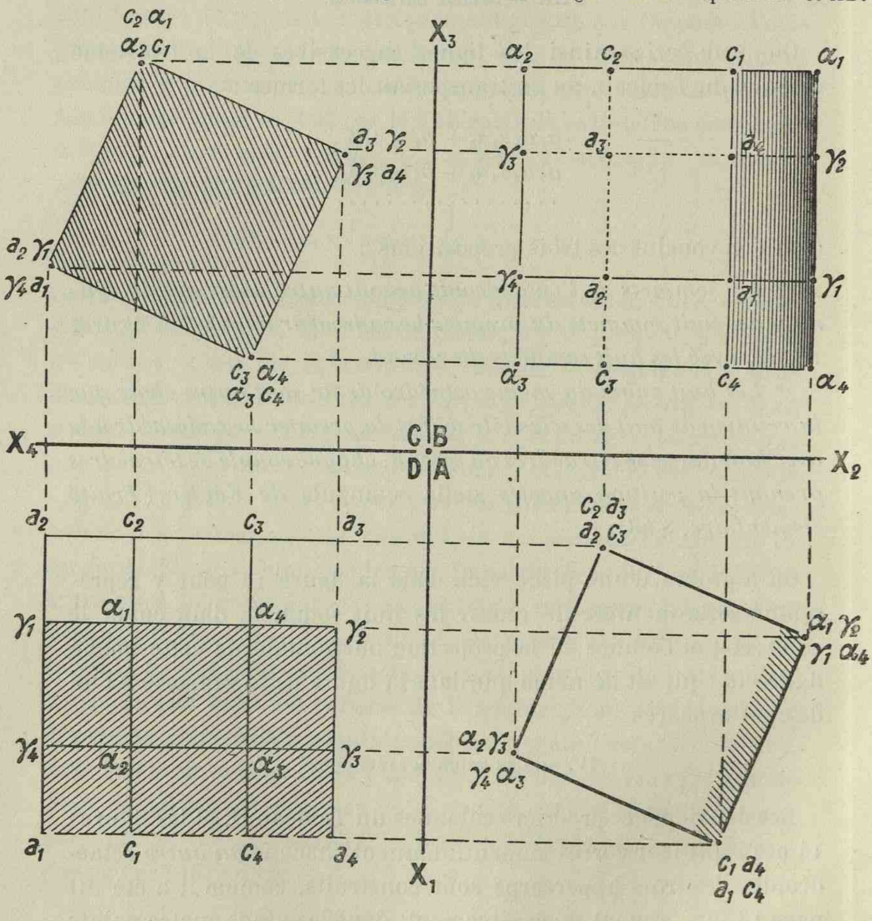
IV. — Les trois octaédroïdes.

Les deuxième et première colonnes du Tableau II, et les figures 14 et 15 qui leur correspondent, donnent chacune *un autre* octaédroïde. Ces trois hypercorps sont construits, comme il a été dit page 13, en prenant successivement, dans les vingt-quatre points terminaux du quadrièdre droit complet, les seize points contenus dans le premier et le second couples de plans absolument perpendiculaires, pour ceux contenus dans le deuxième et le troisième, enfin ceux contenus dans le troisième et le premier.

En réalité, c'est *un seul et même hypercorps* que les figures 12, 14 et 15 placent dans des positions différentes par rapport aux plans de projection. Ils se *correspondent* en effet comme le montre

Fig. 14. — Le deuxième octaédroïde.

On a ombré le cube $c_1 a_1 \gamma_1 \alpha_1 a_4 c_4 \alpha_4 \gamma_2$ réduit à un rectangle dans les espaces AB et AD.

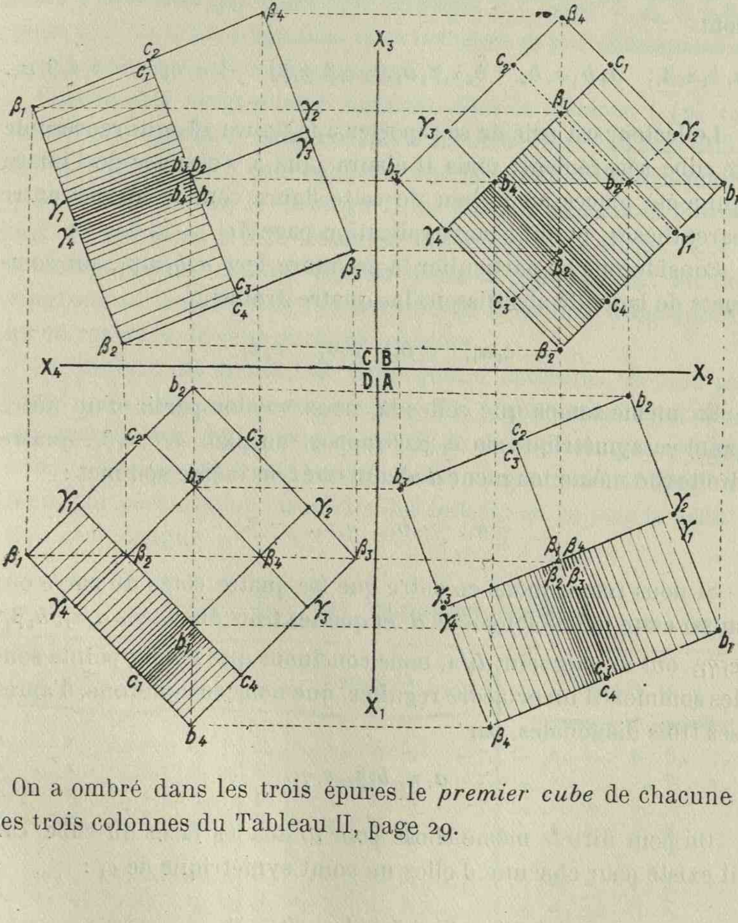


le petit Tableau suivant, entendant par là que si l'on pose, dans l'étendue, sur quatre sommets quelconques de l'un d'eux, les quatre sommets de chacun des deux autres que l'imprimeur a mis *au-dessus* ou *au-dessous,* tous les autres groupes de trois sommets qu'il a mis aussi *sur une même verticale* coïncideront ensemble :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} : & a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1 \quad a_2 b_2 \alpha_2 \beta_2 \quad a_3 b_3 \alpha_3 \beta_3 \quad a_4 b_4 \alpha_4 \beta_4, \\ \mathrm{II} : & b_1 c_1 \beta_1 \gamma_1 \quad b_2 c_2 \beta_2 \gamma_2 \quad b_3 c_3 \beta_3 \gamma_3 \quad b_4 c_4 \beta_4 \gamma_4, \\ \mathrm{III} : & c_1 a_1 \gamma_1 \alpha_1 \quad c_2 a_2 \gamma_2 \alpha_2 \quad c_3 a_3 \gamma_3 \alpha_3 \quad c_4 a_4 \gamma_4 \alpha_4. \end{array}$$

Fig. 15. — Le troisième octaédroïde.

On a ombré le cube $b_1 c_1 \beta_1 \gamma_1 c_4 b_4 \gamma_4 \beta_2$.



On a ombré dans les trois épures le *premier cube* de chacune des trois colonnes du Tableau II, page 29.

§ 10. — L'icosatétraédroïde.

I. — Les vingt-quatre octaèdres.

On a vu dans le paragraphe précédent que les huit droites de longueur d qui partent du point c_1 aboutissent aux huit sommets d'un cube que nous avons désigné par (c_1) et dont les six faces sont

$$a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1, \quad a_1 b_1 a_4 b_4, \quad b_1 \alpha_1 \beta_4 a_4, \quad \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_4, \quad \beta_1 a_1 b_4 \alpha_2, \quad b_4 \alpha_2 \beta_4 a_4.$$

Le lecteur est prié de se reporter à la figure 13, qui représente ce cube séparément; mais il n'aura plus à s'occuper de l'image qui a été placée au milieu de cette figure comme un mot entre parenthèses, et qui a son explication page 31.

Considérons en particulier la première face $a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1$, aux sommets de laquelle aboutissent les quatre droites

$$c_1 a_1, \quad c_1 b_1, \quad c_1 \alpha_1, \quad c_1 \beta_1.$$

En même temps que celles-là, nous voyons partir d'un autre point γ_1, symétrique de c_1 par rapport au plan $a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1$, quatre droites de même longueur d aboutissant au même sommet :

$$\gamma_1 a_1, \quad \gamma_1 b_1, \quad \gamma_1 \alpha_1, \quad \gamma_1 \beta_1.$$

Si nous remarquons en outre que les quatre côtés du carré ont aussi cette même longueur d, et que les trois distances $a_1 \alpha_1$, $b_1 \beta_1$, $c_1 \gamma_1$, ont la longueur $d\sqrt{2}$, nous concluons que les six points sont les sommets d'un octaèdre régulier, que nous désignerons, d'après ses trois diagonales, par

$$a_1 \alpha_1 . b_1 \beta_1 . c_1 \gamma_1.$$

On peut dire la même chose pour toutes les faces du cube, car il existe pour chacune d'elles un point symétrique de c_1 :

$$\gamma_1, \quad c_4, \quad \gamma_2, \quad c_2, \quad \gamma_4, \quad \gamma_3.$$

Il y a donc six octaèdres réguliers ayant le sommet commun c_1

et dont les diagonales partant de ce point sont les six lignes

$$c_1\gamma_1,\quad c_1c_4,\quad c_1\gamma_2,\quad c_1c_2,\quad c_1\gamma_4,\quad c_1\gamma_3$$

tracées en trait mixte sur la figure 13.

Comme l'autre extrémité de ces lignes est en un point congénère de c_1, leur nombre est, pour les vingt-quatre points,

$$\tfrac{1}{2}.24.6 = 24 \times 3.$$

Elles s'associent par trois, par exemple $c_1\gamma_4$ avec $a_1\alpha_2$ et $b_4\beta_1$, pour être les trois diagonales d'un octaèdre et par conséquent *le nombre de ceux-ci est vingt-quatre.*

Chacun des vingt-quatre sommets dont le Tableau I (p. 19) fournit les coordonnées appartient à six octaèdres réguliers différents, dont chacun a pour *équateur* une face d'un des vingt-quatre cubes donnés dans le Tableau II, et chacun de ceux-ci fournit une de ses faces à six octaèdres différents. Cela ferait 24×6 octaèdres; mais, comme chacun d'eux a pour sommet un des vingt-quatre points, leur nombre effectif n'est que vingt-quatre, qu'on retrouve de cette seconde manière.

Le Tableau III donne ces vingt-quatre octaèdres, définis par leurs trois diagonales respectives. Ils y sont rangés en *trois groupes de huit,* désignés par A, B, C, et caractérisés par ceci que *chaque groupe* est fermé sur lui-même et se reproduit indéfiniment par permutation circulaire des lettres; on va voir la définition géométrique.

TABLEAU III. — LES VINGT-QUATRE OCTAÈDRES.

GROUPE A.		GROUPE B.		GROUPE C.	
A_1	$a_1, \alpha_2;\ b_4, \beta_1;\ c_1, \gamma_4$	B_1	$a_1, \alpha_1;\ b_1, \beta_1;\ c_1, \gamma_1$	C_1	$a_1, a_2;\ \beta_1, \beta_2;\ \gamma_1, \gamma_4$
A_2	$a_3, \alpha_4;\ b_2, \beta_3;\ c_3, \gamma_2$	B_2	$a_2, \alpha_4;\ b_2, \beta_2;\ c_3, \gamma_1$	C_2	$a_3, a_4;\ \beta_3, \beta_4;\ \gamma_2, \gamma_3$
A_3	$a_1, \alpha_4;\ b_1, \beta_2;\ c_4, \gamma_1$	B_3	$a_3, \alpha_3;\ b_3, \beta_3;\ c_3, \gamma_3$	C_3	$\alpha_1, \alpha_2;\ \beta_1, \beta_4;\ c_1, c_2$
A_4	$a_3, \alpha_2;\ b_3, \beta_4;\ c_2, \gamma_3$	B_4	$a_4, \alpha_2;\ b_4, \beta_4;\ c_1, \gamma_3$	C_4	$\alpha_3, \alpha_4;\ \beta_2, \beta_3;\ c_3, c_4$
A_5	$a_2, \alpha_1;\ b_2, \beta_1;\ c_2, \gamma_1$	B_5	$a_1, \alpha_3;\ b_4, \beta_2;\ c_4, \gamma_4$	C_5	$a_4, a_1;\ b_4, b_1;\ c_1, c_4$
A_6	$a_4, \alpha_3;\ b_4, \beta_3;\ c_4, \gamma_3$	B_6	$a_2, \alpha_2;\ b_3, \beta_1;\ c_2, \gamma_4$	C_6	$a_2, a_3;\ b_2, b_3;\ c_2, c_3$
A_7	$a_2, \alpha_3;\ b_3, \beta_2;\ c_3, \gamma_4$	B_7	$a_3, \alpha_1;\ b_2, \beta_4;\ c_2, \gamma_2$	C_7	$\alpha_2, \alpha_3;\ b_4, b_3;\ \gamma_3, \gamma_4$
A_8	$a_4, \alpha_1;\ b_1, \beta_4;\ c_1, \gamma_2$	B_8	$a_4, \alpha_4;\ b_1, \beta_3;\ c_4, \gamma_2$	C_8	$\alpha_4, \alpha_1;\ b_1, b_2;\ \gamma_1, \gamma_2$

II. — Constitution de l'hypercorps.

On constate sans peine, comme nous l'avons fait pour les deux hypercorps précédents : 1° que les huit octaèdres d'un groupe sont opposés et parallèles deux à deux, deux octaèdres opposés ayant avec chacun des six autres un sommet commun, et pas autre chose; 2° que chacun d'eux marie ses huit faces à quatre de chacun des deux autres groupes comme ceci :

C_1	avec	$A_1, A_3, A_5, A_7,$	$B_1, B_2, B_5, B_6,$	B_1	avec	$C_1, C_3, C_5. C_8,$	$A_1, A_3, A_5, A_8,$
C_2	»	$A_2, A_4, A_6, A_8,$	$B_3, B_4, B_7, B_8,$	B_2	»	$C_1, C_4, C_6, C_8,$	$A_2, A_3, A_5, A_7,$
C_3	»	$A_1, A_4, A_5, A_8,$	$B_1, B_4, B_6, B_7,$	B_3	»	$C_2, C_4, C_6, C_7,$	$A_2, A_4, A_6, A_7,$
C_4	»	$A_2, A_3, A_6, A_7,$	$B_2, B_3, B_5, B_8,$	B_4	»	$C_2, C_3, C_5, C_7,$	$A_1, A_4, A_6, A_8,$
C_5	»	$A_1, A_3, A_6, A_8,$	$B_1, B_4, B_5, B_8,$	B_5	»	$C_1, C_4, C_5, C_7,$	$A_1, A_3, A_6, A_7,$
C_6	»	$A_2, A_4, A_5, A_7,$	$B_2, B_3, B_6, B_7,$	B_6	»	$C_1, C_3, C_6, C_7,$	$A_1, A_4, A_5, A_7,$
C_7	»	$A_1, A_4, A_6, A_7,$	$B_3, B_4, B_5, B_6,$	B_7	»	$C_2, C_3, C_6, C_8,$	$A_2, A_4, A_5, A_8,$
C_8	»	$A_2, A_3, A_5, A_8,$	$B_1, B_2, B_7, B_8,$	B_8	»	$C_2, C_4, C_5, C_8,$	$A_2, A_3, A_6, A_8;$

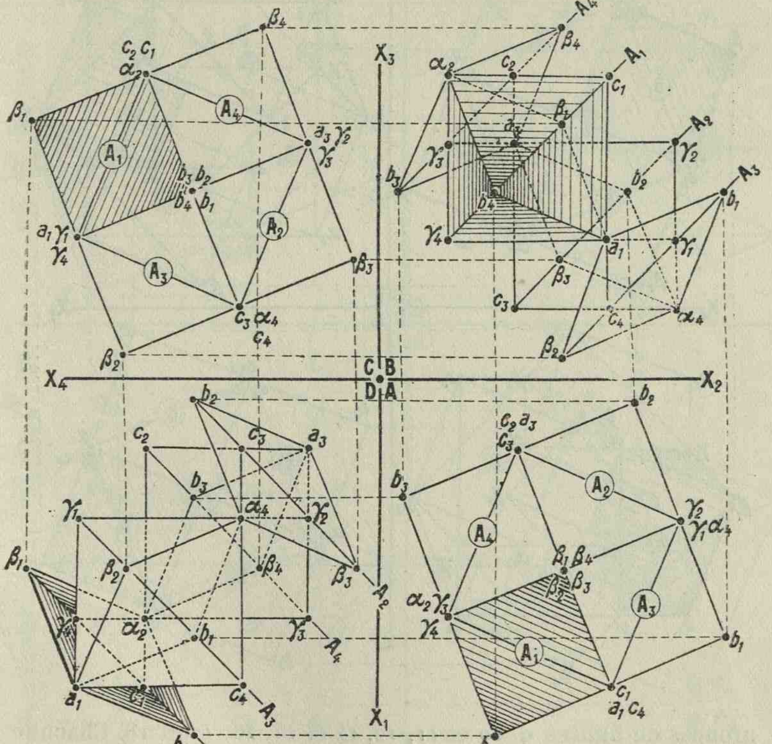
nous nous dispensons d'écrire un troisième Tableau qui aurait les A pour arguments et qui se déduit de ces deux-là avec la plus grande facilité.

Ainsi, *contre une quelconque des huit faces d'un des vingt-quatre octaèdres se trouve appliquée une face d'un des vingt-trois autres, et chaque face se trouve ainsi employée une fois, ni plus ni moins.* Il n'y a pas de solution de continuité, et nous concluons, comme dans les deux cas précédents, que nous avons affaire à un solide régulier à quatre dimensions, qu'on a appelé l'*icosatétraédroïde.*

Cet hypercorps est représenté *partiellement* dans les figures 16, 17 et 18, comparées respectivement aux trois groupes du Tableau III. Nous disons *partiellement* parce que, pour ne pas embrouiller ces figures, nous n'y avons admis que la moitié des octaédroïdes, savoir *les quatre premiers* de chacune des quatre colonnes de ce Tableau : les quatre derniers formeraient un dessin pareil de forme à celui existant et *posé en croix* sur lui. Si l'on veut un langage plus précis, nous dirons, considérant seulement la projection B, que le dessin supprimé est le symétrique du premier par rapport

à la verticale $\beta_4\beta_1\beta_3\beta_2$ dans la figure 16,
à l'horizontale $b_3 b_4 b_2 b_1$ » 17,
à la diagonale $\alpha_3 a_2 a_1 \alpha_1$ » 18.

Fig. 16. — L'icosatétraédroïde. Les quatre premiers octaèdres du groupe A. On a ombré l'octaèdre $a_1\alpha_2 b_4\beta_1 c_1\gamma_4$.



Dans les

première, seconde, troisième

de ces symétries, les octaèdres

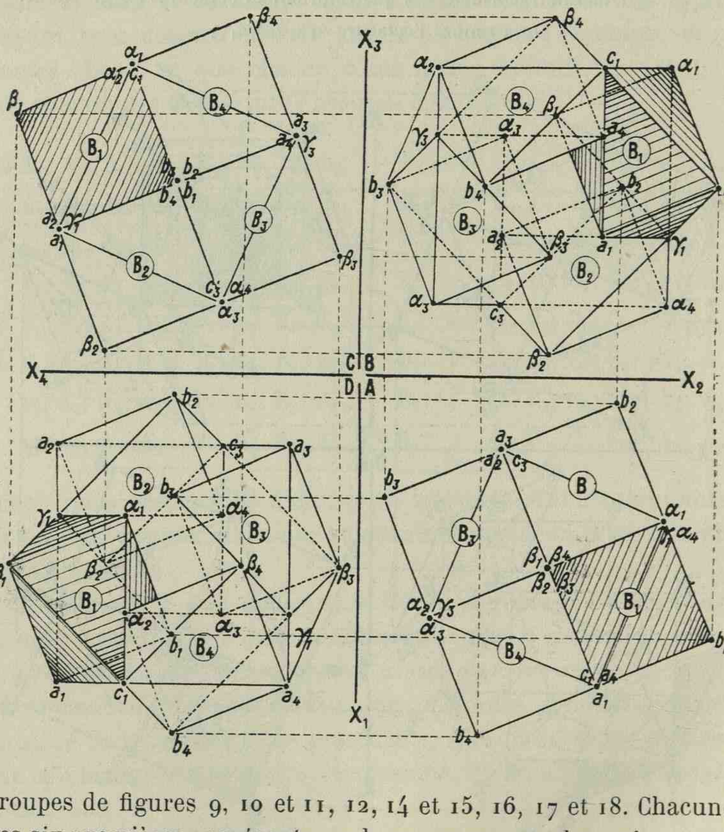
A_1, A_2, A_3, A_4 ; B_1, B_2, B_3, B_4 ; C_1, C_2, C_3, C_4

ont pour correspondants

$$A_5,\ A_6,\ A_7,\ A_8;\quad B_8,\ B_7,\ B_6,\ B_5;\quad C_6,\ C_5,\ C_8,\ C_7.$$

On ne perdra pas de vue la différence que voici entre nos trois

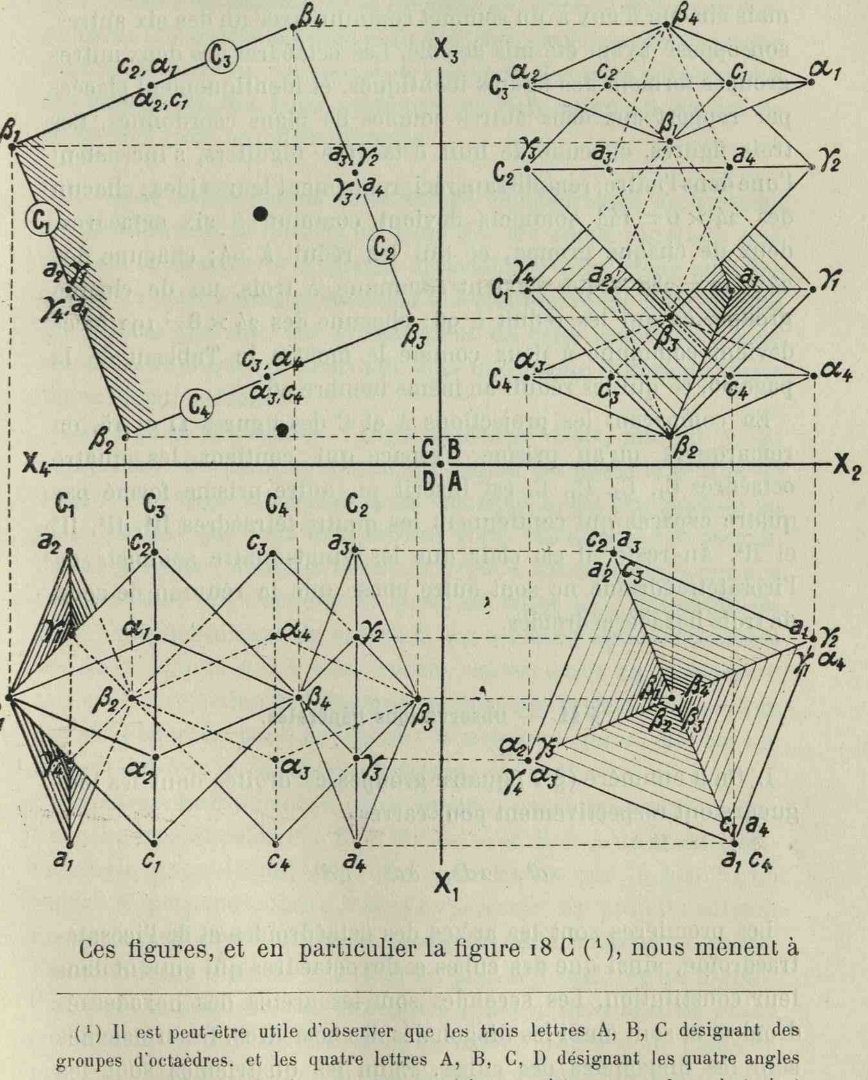
Fig. 17. — Suite de l'icosatétraédroïde. Les quatre premiers octaèdres du groupe B. On a ombré l'octaèdre $\beta_1 = a_1 \alpha_1 b_1 \beta_1 c_1 \gamma_1$.



groupes de figures 9, 10 et 11, 12, 14 et 15, 16, 17 et 18. Chacune des six premières représente un hypercorps *complet*, qu'on peut, à la vérité, supposer être le même dans des positions différentes, pour les trois premières, et puis pour les trois suivantes. Mais les trois dernières figures ne représentent que *trois portions* différentes d'un seul et même hypercorps dans une seule et même position : il faut commencer par les compléter comme il vient d'être dit, et puis *les réunir*, pour faire une chose complète.

On a ombré dans les figures le premier octaèdre de chaque colonne du Tableau III.

Fig. 18. — Suite de l'icosatétraédroïde. Les quatre premiers octaèdres du groupe C. On a ombré l'octaèdre $a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_4$.



Ces figures, et en particulier la figure 18 C ([1]), nous mènent à

([1]) Il est peut-être utile d'observer que les trois lettres A, B, C désignant des groupes d'octaèdres, et les quatre lettres A, B, C, D désignant les quatre angles droits de la feuille de dessin, ne se trouvent ici rapprochées que par hasard et n'ont aucun rapport entre elles.

la conception suivante de l'icosatétraédroïde. Quatre octaèdres du groupe C se trouvent respectivement dans quatre espaces qui forment un *prisme carré* perpendiculaire au plan C, et les quatre autres sont placés de même dans quatre espaces rectangulaires au plan A. Ces huit octaèdres n'ont ni face ni arête commune, mais chacun d'eux a un sommet commun avec un des six autres, son opposé ayant été mis de côté. Les octaèdres des deux autres groupes forment des figures identiques, et identiquement placées par rapport aux deux autres couples de plans coordonnés. Ces trois figures, chacune de huit octaèdres réguliers, s'incrustent l'une dans l'autre, remplissant réciproquement leurs vides : chacun des $24 \times 6 = 144$ sommets devient commun à six octaèdres, deux de chaque groupe, ce qui les réduit à 24; chacune des $24 \times 12 = 288$ arêtes devient commune à trois, un de chaque groupe, ce qui les réduit à 96; chacune des $24 \times 8 = 192$ faces devient commune à deux comme le montre le Tableau de la page 36, ce qui les réduit au même nombre 96.

En comparant les projections A et C des figures 11 et 15, on remarquera qu'au prisme d'espace qui contient les quatre octaèdres C_1, C_2, C_3, C_4 est inscrit un autre prisme formé par quatre espaces qui contiennent les quatre tétraèdres II^1, II^2, II^3 et II^4. Au reste, il est clair que les vingt-quatre sommets de l'icosatétraédroïde ne sont autre chose que la réunion de ceux de trois hexadécaédroïdes.

§ 11. — Observations générales.

I. On a énuméré (§ 7) quatre groupes de droites dont les longueurs ont respectivement pour carrés

$$d^2, \quad 2d^2, \quad 3d^2, \quad 4d^2.$$

Les premières sont les arêtes des octaédroïdes et de l'icosatétraédroïde, ainsi que des cubes et des octaèdres qui entrent dans leur constitution. Les secondes sont les arêtes des hexadécaédroïdes, et sont aussi les diagonales des octaèdres. Les troisièmes sont les diagonales des cubes. Enfin les quatrièmes sont les *grandes diagonales* des octaédroïdes et de l'icosatétraédroïde ; ce sont :

$$\begin{array}{cccc} a_1 a_2, & \alpha_1 \alpha_2, & a_3 a_4, & \alpha_3 \alpha_4, \\ b_1 b_2, & \beta_1 \beta_2, & b_3 b_4, & \beta_3 \beta_4, \\ c_1 c_2, & \gamma_1 \gamma_2, & c_3 c_4, & \gamma_3 \gamma_4. \end{array}$$

et les quatre de chaque ligne forment un système quadrirectangulaire. L'icosatétraédroïde jouit des trois systèmes, dont chaque espace est pour lui un *espace de symétrie;* les trois octaédroïdes ont chacun un des trois systèmes, et rien qu'un; il en est de même des trois hexadécaédroïdes.

II. Nous avons déduit de la simple considération du système de coordonnées la théorie de trois des six corps réguliers que connaît la Géométrie à quatre dimensions, plus riche que les autres en cette matière. Pour que le lecteur se rende bien compte des figures qui ont été l'instrument de cette recherche, nous allons les expliquer de nouveau sous une forme différente, mais d'identification facile.

Dans toutes les figures, l'angle *inférieur droit,* marqué A, est une portion du plan horizontal sur lequel est posée la feuille de dessin, et l'angle *supérieur droit,* marqué B, est une portion du plan vertical que vous avez devant vous, rabattue sur le plan du dessin par une rotation *d'avant en arrière* autour de la commune intersection, qui s'appelle la *ligne de terre* LT. Ensemble les deux plans définissent un espace E, qui est *notre espace;* ensemble les deux figures qui y sont tracées représentent un *polyèdre* P qui est la projection de l'hypercorps sur notre espace. C'est ce que nous appellerons pour un instant *la première épure;* elle occupe la *moitié droite* de la feuille de dessin.

Concevez maintenant, *à votre gauche,* un deuxième plan vertical C perpendiculaire à B; il forme avec B et A un trièdre trirectangle dans lequel est votre œil. Menez par le plan C un espace E′ perpendiculaire à E; l'hypercorps s'y projette suivant un autre polyèdre P′ qui va se présenter de la manière suivante. Faites tourner l'espace E′ autour du plan C jusqu'à ce qu'il coïncide avec le nôtre E: dans cet espace rabattu, *dont tous les plans coïncident maintenant avec ceux du nôtre,* prenez pour plans de projection horizontal et vertical les deux plans C et D qui coïncident respectivement avec les plans vertical et horizontal de la première épure, et supposez le polyèdre P′ défini et représenté par ses projections sur ces deux plans : ce sera *la deuxième épure,* laquelle coupe la *partie gauche* de la feuille.

Ainsi *les deux espaces* E, E′ *et le plan* C jouent dans la Géométrie descriptive à quatre dimensions le même rôle que les *deux plans de projection et la ligne* LT dans celle à trois, et les constructions de la première se ramènent à celles de la seconde par le moyen de *deux épures qui ne sont pas simplement juxtaposées, mais sont intimement reliées ensemble,* car l'on peut faire un autre jeu par les associations A et D, C et B, supposant alors que c'est l'espace des plans A et D qui est le nôtre, et celui des plans C et B qui est rabattu.

Afin de rendre les figures plus expressives, nous avons, conformément à l'usage général des dessinateurs, fait usage, dans l'épure AB, de traits pleins et de traits pointillés pour distinguer des parties vues et des parties cachées; nous avons en outre marqué quelques plans fuyants par des hachures se serrant progressivement. Dans les deux autres projections C et D, nous nous sommes quelquefois dispensés de ce figuré, et l'avons quelquefois remplacé par des hachures couvrant uniformément un des polyèdres constituants.

III. Quand vous examinez la projection d'un polyèdre matériel sur un plan, vous ne pouvez pas toujours discerner les projections des divers polygones qui en sont les faces. Non seulement ceux-ci ont été plus ou moins déformés et aplatis, pouvant même être réduits à de simples fragments de droites, mais encore les projections individuelles des polygones se recouvrent partiellement et toutes ces *épaisseurs de plans* superposées sont fondues en une seule figure dans le dessin.

Quand on projette un polyédroïde sur un espace, ses diverses cases ont pour projections des polyèdres, qui sont aussi plus ou moins déformés et aplatis et peuvent même se réduire à des figures planes ([1]). Mais ce n'est pas tout : ces polyèdres doivent être considérés comme situés dans autant d'espaces superposés

([1]) *Voir,* par exemple, les curieuses projections A de la figure 15 et C de la figure 17.

se recouvrant plus ou moins, et les *épaisseurs d'espaces* se fondent en une seule dans la projection qu'il nous est donné de voir. Les polyèdres s'y pénètrent les uns les autres, et, si on les construisait individuellement, il faudrait, pour réaliser la projection d'ensemble en les réunissant, y faire des *suppressions* correspondant à ces pénétrations.

C'est ce qui explique pourquoi nous ne pouvons pas nous élever de la vue de la projection à la conception de l'objet projeté. Il nous serait facile de construire deux polyèdres qui soient les perspectives d'un même polyédroïde prises de deux points de vue différents. Ils en seraient *l'image stéréoscopique* (¹) pour deux yeux placés en ces deux points. Mais l'image stéréoscopique plane ne nous donne la sensation du corps à trois dimensions que si nous mettons nos deux yeux dans un plan différent du sien, et l'autre ne nous rendrait le même service vis-à-vis du corps à quatre dimensions que si nous pouvions de même mettre nos yeux dans un espace différent.

(¹) Nous donnons à ce mot un sens surélevé que le lecteur comprendra facilement. L'idée est de M. Jules Richard : *Sur la philosophie des Mathématiques*, in-18. Paris, 1903.

CHAPITRE III.

L'HEXAGRAMME DE PASCAL.

§ 12. — Les soixante hexagones.

1. Considérons, *dans un plan,* six points

$$(1)\qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

dont trois quelconques ne soient pas en ligne droite; nous les appellerons *les points fondamentaux*.

Si nous les joignons deux à deux de toutes les manières possibles, nous avons $\frac{6.5}{1.2} = 15$ droites :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{rrrrr} 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\ & 23, & 24, & 25, & 26, \\ & & 34, & 35, & 36, \\ & & & 45, & 46, \\ & & & & 56, \end{array}\right.$$

qui seront *les droites fondamentales* ou *les droites* δ.

En outre des six points (1), ces droites ont encore *quarante-cinq* points d'intersection. Chacune, par exemple 12, doit en effet en porter quatorze, mais quatre sont réunis en 1 et quatre en 2, ce qui réduit les autres à six [1]; chacun de ceux-ci figurant sur deux droites, le nombre effectif des intersections autres que 1, 2, 3, 4, 5, 6 est

$$\frac{1}{2} \cdot 15.6 = 45;$$

nous les appellerons *les points* j.

2. Partagez les six chiffres (1) en trois groupes de deux, l'ordre

[1] Il y a par exemple sur 12 les intersections avec 34, 35, 36, 45, 46, 56.

des chiffres dans chaque groupe étant indifférent. Cela peut se faire de *quinze manières,* et, si vous admettez qu'un couple représente la droite qui passe par les deux points, cela vous donne *quinze triangles;* par exemple 12 34 56 sera celui qui a pour côtés les droites 12, 34 et 56. Chacun de ces triangles est tel que *ses trois côtés contiennent les six points* (1), *à raison de deux chacun.* Nous les appellerons collectivement *les triangles* Δ; ils sont écrits dans les seconds membres des formules (3) et nous les désignerons individuellement par les symboles qui forment les premiers membres de ces formules.

$$
(3)\quad \left\{\begin{array}{llll}
ab = 12 & 34 & 56, \\
ac = 13 & 25 & 46, \\
ad = 14 & 26 & 35, \\
ae = 15 & 24 & 36, \\
af = 16 & 23 & 45; \\[4pt]
bc = 16 & 24 & 35, \\
bd = 15 & 23 & 46, \\
be = 13 & 26 & 45, \\
bf = 14 & 25 & 36; \\[4pt]
cd = 12 & 36 & 45, \\
ce = 14 & 23 & 56, \\
cf = 15 & 26 & 34; \\[4pt]
de = 16 & 25 & 34, \\
df = 13 & 24 & 56; \\[4pt]
ef = 12 & 35 & 46.
\end{array}\right.
\qquad
(4)\quad \left\{\begin{array}{llll}
12 = ab & cd & ef, \\
13 = ac & be & df, \\
14 = ad & bf & ce, \\
15 = ae & bd & cf, \\
16 = af & bc & de; \\[4pt]
23 = af & bd & ce, \\
24 = ae & bc & df, \\
25 = ac & bf & de, \\
26 = ad & be & cf; \\[4pt]
34 = ab & cf & de, \\
35 = ad & bc & ef, \\
36 = ae & bf & cd; \\[4pt]
45 = af & be & cd, \\
46 = ac & bd & ef; \\[4pt]
56 = ab & be & df.
\end{array}\right.
$$

Ces premiers membres constituent une notation dont nous ferons usage à diverses fins, et qu'il faut entendre ainsi. Un symbole tel que *ab*, que nous appellerons un *binome,* et qui désigne ici un triangle, pourra désigner une droite, un plan, etc.; il ne devra pas *être décomposé;* de même que, dans la notation déterminantielle de Sylvester, *a* et *b* sont des *ombres de quantités* n'ayant séparément aucune signification (¹). Nous n'attacherons pas non

(¹) On complique quelquefois le symbole de deux parenthèses, pour mieux accentuer son unité.

plus de signification à l'ordre dans lequel ils sont écrits, lequel est dès lors indifférent.

3. Pour que quinze droites forment quinze triangles, il faut que chacune soit employée trois fois; c'est ainsi que les première, dixième et quinzième des équations (3) montrent que 12 appartient aux trois triangles ab, cd et ef, ce que nous exprimerons en écrivant $12 = abcdef$.

En *résolvant* de cette manière les équations (3), on les met sous la forme (4), qui fait connaître comment les quinze triangles s'arrangent par trois pour avoir un côté commun, et quel est celui-ci; de plus on y a une *seconde manière* de désigner les droites fondamentales, notation qui nous sera fort utile et avec laquelle les premières observations que voici familiariseront le lecteur ([1]).

Quand deux droites δ appartiennent à un même triangle Δ, elles se coupent sur un point j, et réciproquement. Par exemple, les deux droites

$$ab\ cd\ ef \quad \text{et} \quad ab\ ce\ df$$

qui appartiennent toutes deux, comme on voit, au triangle ab, se rencontrent en un point j que nous désignerons par le symbole $\begin{pmatrix} cf \\ de \end{pmatrix}$, ou indifféremment $\begin{pmatrix} de \\ cf \end{pmatrix}$: il s'obtient en prenant, parmi les six combinaisons cd, ef, ce, df, cf, de, les deux qui n'entrent pas déjà dans les symboles des deux droites.

Par le point $\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$, il passe les deux droites

$$ac\ bd\ ef, \quad ad\ bc\ ef,$$

dont on voit de suite la construction.

Les points j qui sont sur la droite $abcdef$ sont au nombre de six, savoir :

$$\begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ad \\ bc \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ae \\ bf \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} af \\ be \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ce \\ df \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} cf \\ de \end{pmatrix}.$$

([1]) Il faut attendre le Chapitre V, c'est-à-dire l'intervention de la quatrième dimension, pour voir clairement *ce qui* rapproche les symboles du type ab et ceux du type 12, et pour se rendre compte de ces notations qui semblent ici faites à plaisir (*Voir* § 35).

Le triangle ab a pour côtés et sommets respectivement opposés :

$$ab\ cd\ ef\binom{cd}{ef};\quad ab\ ce\ df\binom{ce}{df};\quad ab\ cf\ de\binom{cf}{de}.$$

Pour avoir le symbole littéral d'un point donné en chiffres, soit 12 34, il faut ajouter à ces deux binomes celui formé par les deux chiffres manquants, qui est ici 56, puis écrire, d'après (3) et (4),

$$\begin{aligned} 12\ 34\ 56 &= ab \\ 56 &= ab\ ce\ df \end{aligned}$$

et supprimer les termes identiques :

$$12\ 34 = ce\ df, \qquad \text{qu'on écrit} \quad \binom{ce}{df}.$$

4. Ensemble les formules (3) et (4) dominent *ce Chapitre et les deux suivants*, et le lecteur aura sans cesse l'occasion de s'y référer.

Nous dirons de deux triangles Δ *n'ayant pas de côté commun qu'ils forment un couple.* Les équations (3) montrent que chaque triangle forme couple avec huit autres; ces huit couples sont, pour ab par exemple :

$$ab\,ac,\ ab\,ad,\ ab\,ae,\ ab\,af;\quad ab\,bc,\ ab\,bd,\ ab\,be,\ ab\,bf.$$

Il suit de là que le nombre des couples est

$$\tfrac{1}{2}.15.8 = 60,$$

et l'on voit en outre que les *symboles des deux triangles formant couple ont toujours une lettre commune.*

Nous dirons en outre que *trois triangles* Δ *forment un terne quand, pris deux à deux, ils forment chaque fois un couple.* Il faut pour cela que chacun de leurs trois binomes ait une lettre commune avec chacun des deux autres, d'où il suit qu'avec un couple donné $ab\,ac$, on n'a que deux manières de former un terne, l'un en ajoutant un binome qui contienne la lettre a déjà commune aux deux premiers, l'autre en formant ce troisième binome avec les lettres non communes b et c : on a ainsi les deux formes ou *espèces* $ab\,ac\,ad$ et $ab\,ac\,bc$, la seconde s'écrivant aussi $ab\,bc\,ca$. On voit aisément que les huit couples ci-dessus, dans lesquels entre le triangle ab, peuvent produire douze ternes de la première espèce et quatre de la seconde, et l'on en conclut que le nombre des ternes est

$$\tfrac{1}{3}.15.12 = 60, \text{ pour la première espèce,}$$
$$\tfrac{1}{3}.15.\ 4 = 20, \text{ pour la seconde espèce.}$$

Lorsque deux triangles, tels que ab, ac, forment un couple, on appelle *leur associé* celui qui forme couple avec chacun d'eux, et dont le symbole s'obtient par la réunion des deux lettres qui diffèrent dans leurs symboles. Il est clair que chacun des trois triangles, ou binomes, peut être considéré comme l'associé des deux autres, et que leur ensemble est un terne de seconde espèce. C'est toujours de celle-ci qu'il s'agira quand nous emploierons le mot *terne* tout seul : c'est qu'elle tient une place bien plus importante que l'autre dans la théorie qui nous occupe.

Puisque les deux triangles d'un couple ont dans leurs symboles une lettre commune, nous ne mettrons celle-ci qu'une fois dans l'écriture du couple

$$a\ bc, \quad \text{au lieu de} \quad ab\,ac.$$

De même, puisque les trois triangles d'un terne ne contiennent que trois lettres dont chacune est redoublée, nous n'écrirons ces lettres qu'une fois

$$abc, \quad \text{au lieu de} \quad ab\,bc\,ca.$$

5. En interchangeant les points (1) de toutes les manières possibles, on forme *soixante* hexagones différents. Le nombre des permutations de six chiffres est en effet 6.5.4.3.2. Mais six permutations cycliques, telles que

123456, 234561, 345612, 456123, 561234, 612345,

donnent un seul et même hexagone. Dans les 5.4.3.2 restantes deux inverses telles que

123456 et 165432

ne doivent encore être comptées que pour une. Il en reste donc

$$5.4.3 = 60,$$

correspondant à autant d'hexagones.

Si, dans un quelconque de ces soixante hexagones, on prend trois côtés alternes, puis les trois autres, on a deux triangles Δ formant couple; tel est, par exemple, dans la figure 19 (p. 56), l'hexagone 125643, qui donne les deux triangles marqués ab et ac. Nous pouvons donc représenter ces hexagones par les couples de binomes, en nombre égal, que nous venons d'étudier; voici comment se fera le passage d'une notation à l'autre.

Pour avoir les deux triangles qui équivalent ensemble à un hexagone donné, soit 126543, il faut, partant d'un quelconque des six chiffres, lire cette permutation alternativement dans le sens direct et dans le sens inverse, en la coupant chaque fois par tranche de deux; cela donne, si l'on est parti du chiffre 1 :

$$\left.\begin{array}{l} 12\ 65\ 43 = ab \\ 13\ 45\ 62 = ae \end{array}\right\}, \qquad 126543 = ab\,ae.$$

Réciproquement, pour avoir l'hexagone que représentent ensemble deux triangles Δ (dont les symboles doivent avoir une lettre commune), il faut, profitant de ce qu'on peut intervertir à volonté les chiffres d'un binome et les binomes entre eux : 1° écrire à la file les six binomes de chiffres en les cueillant alternativement dans l'un et dans l'autre de telle sorte que chaque *second chiffre* soit suivi d'un *premier chiffre* identique; 2° supprimer les intervalles et compter chaque double lettre pour une seule :

$$\left.\begin{array}{l} ab = 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6 \\ \\ ac = 1\ \ 3\ \ 2\ \ 5\ \ 4\ \ 6 \end{array}\right\} = 12.25.56.64.43.31 = 125643.$$

La figure 19 montre le graphique de cette opération.

6. Au moyen des couples, le Tableau des soixante hexagones se forme facilement et se présente ainsi :

Tableau I. — Les soixante couples.

a.bc, [*a*] *a.bd*, *a.cd*, *a.be*, *a.ce*, *a.de*, *a.bf*, *a.cf*, *a.df*, *a.ef*	*d.ab*, [*d*] *d.ac*, *d.bc*, *d.ae*, *d.be*, *d.ce*, *d.af*, *d.bf*, *d.cf*, *d.ef*
b.ac, [*b*] *b.ad*, *b.cd*, *b.ae*, *b.ce*, *b.de*, *b.af*, *b.cf*, *b.df*, *b.ef*	*e.ab*, [*e*] *e.ac*, *e.bc*, *e.ad*, *e.bd*, *e.cd*, *e.af*, *e.bf*, *e.cf*, *e.df*
c.ab, [*c*] *c.ad*, *c.bd*, *c.ae*, *c.be*, *c.de*, *c.af*, *c.bf*. *c.df*, *c.ef*	*f.ab*, [*f*] *f.ac*, *f.bc*, *f.ad*, *f.bd*, *f.cd*, *f.ae*, *f.be*, *f.ce*, *f.de*

On vient de voir comment les termes de ce Tableau peuvent être traduits en la forme ordinaire constituée par six chiffres. Voici comment on l'établissait sous cette forme avant que M. Veronese n'eût inventé les triangles Δ. Prenez une permutation quelconque des six chiffres; attribuez-leur les numéros I, II, III, IV, V, VI suivant le rang qu'ils y occupent; formez les trois permutations directes des chiffres impairs

I III V, III V I, V I III

et accolez-leur respectivement les trois permutations inverses des chiffres pairs

II VI IV, IV II VI, VI IV II;

faites ensuite la même opération sur chacun des termes ainsi obtenus. Si vous êtes parti de la permutation 123456, vous avez :

123456, 135264, 351426, 513642,
156342, 312564, 534126,
561234, 123456, 345612,
615423, 231645, 453261,

où vous voyez d'abord trois termes qui sont identiques au premier et doivent être supprimés : ce sont ceux de la troisième ligne. Les *dix* termes restants ne sont autre chose que l'équivalent en chiffres de ceux qui occupent le compartiment [a] du Tableau I; *si vous continuez avec un quelconque de ces termes, vous retombez toujours sur un des dix autres.* Pour aller plus loin, formez la ligne

$$123456,\quad 143652,\quad 163254,\quad 123654,\quad 143256,\quad 163452$$

dont les six termes contiennent les trois chiffres impairs 1, 3, 5 toujours à la même place, et les trois autres 4, 5, 6 avec les six permutations dont ils sont susceptibles, savoir trois directes 246, 462, 624, et trois inverses 264, 426, 642. Puis faites avec chacun des cinq derniers termes les mêmes opérations que vous avez faites ci-dessus avec le premier; vous aurez cinq autres décades correspondant à celles b, c, d, e, f du Tableau I, et vous remarquerez que chacune est, comme la première, fermée sur elle-même.

7. De l'une ou de l'autre façon, nous voyons les soixante hexagones *se partager d'eux-mêmes en six décades* ou *figures,* que nous désignerons collectivement par la majuscule A, et individuellement par les minuscules a, b, c, d, e, f. Chacune contient cinq triangles Δ, savoir :

a	les triangles	ab,	ac,	ad,	ae,	af,
b	»	ba,	bc,	bd,	be,	bf,
c	»	ca,	cb,	cd,	ce,	cf,
d	»	da,	db,	dc,	de,	df,
e	»	ea,	eb,	ec,	ed,	ef,
f	»	fa,	fb,	fc,	fd,	fe,

a et b ont en commun le triangle ab; b et c ont deux à deux en commun le terne $ab\,bc\,ca$, tandis que d, e, f ont en commun le terne $de\,ef\,fd$; à un certain point de vue, ces ternes sont complémentaires.

8. Les six triangles Δ de deux ternes complémentaires *ont les mêmes côtés,* c'est-à-dire n'ont ensemble que neuf côtés au lieu de $6 \times 3 = 18$; en effet, le carré formé par les seconds membres

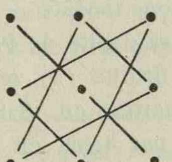
des égalités

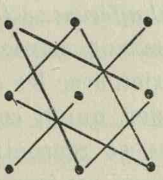
$$\begin{array}{rccc} ab = & 12 & 34 & 56 \\ ac = & 46 & 25 & 13 \\ bc = & 35 & 16 & 24 \\ & \| & \| & \| \\ & ef & de & df \end{array}$$

donne les côtés des triangles ab, ac, bc quand on le lit *par lignes,* et ceux des triangles ef, de, df quand on le lit *par colonnes.* Les neuf côtés sont

$$\begin{array}{ccc} 12, & 13, & 16, \\ 42, & 43, & 46, \\ 52, & 53, & 56. \end{array}$$

On peut encore relier ce dernier carré aux six triangles qu'il engendre, au moyen des deux diagrammes suivants : ces deux diagrammes, composés chacun de *trois figures de trois points* et complémentaires l'un de l'autre, sont usités aussi dans la théorie des déterminants.





Si l'on cueille successivement les termes du carré conformément au premier diagramme, puis conformément au second, on a les deux nouveaux carrés dont les lignes expriment les triangles Δ des deux ternes complémentaires abc, def :

$$\begin{array}{ccc} 12 & 43 & 56, \\ 52 & 13 & 46, \\ 42 & 53 & 16; \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 12 & 53 & 46, \\ 42 & 13 & 46, \\ 52 & 43 & 16. \end{array}$$

9. Les quinze droites fondamentales δ concourent *toutes* à la formation d'une quelconque des figures A, et comme celles-ci sont au nombre de six, *elles peuvent, de la même manière que les six points* (1), *servir de base à une notation de ces droites. C'est précisément cette notation qu'expriment les formules* (4), placées à côté des formules (3); les deux systèmes sont équivalents : le premier exprime les triangles Δ en fonction des droites δ, et le

second exprime celles-ci en fonction de ceux-là. On remarquera la symétrie qui les fait retomber l'un sur l'autre quand on interchange les lettres et les chiffres de même rang.

§ 13. — Les droites de Pascal.

1. Les quinze droites (2) ne sont évidemment pas de construction générale, car le nombre de leurs intersections, au lieu de quarante-cinq, serait alors $\frac{1}{2}.15.14=105$. Elles forment donc une *famille distincte parmi tous les systèmes de quinze droites existant dans le plan.* Nous allons rétrécir encore cette famille en supposant *que les six points* (1) *sont sur une section conique.*

On sait, depuis Pascal, que, dans ce cas, les points de concours des trois couples de côtés opposés de l'hexagone 123456, c'est-à-dire des droites

$$12 \text{ et } 45, \quad 23 \text{ et } 56, \quad 34 \text{ et } 61$$

sont sur une même ligne droite, qu'on appelle maintenant *la droite de Pascal afférente à l'hexagone* 123456.

Chacun des soixante hexagones a sa droite de Pascal. Il existe donc, en connexion avec les quinze droites (2), *soixante droites de Pascal.* Steiner, qui fit cette remarque en 1828, vit que ces soixante droites se rencontraient par trois en vingt points, et il croyait, ce qui est inexact, que ces vingt points étaient par quatre sur quinze droites concourantes. La chose est beaucoup plus compliquée que cela.

La remarque de Steiner donna naissance à une longue suite de théorèmes, auxquels s'attachent les noms, pour ne citer que les principaux, de Plücker, Cayley, Salmon, Kirkman, miss Ladd, Hesse, von Staudt. Grossmann, Caporali, etc., surtout Veronese, professeur à l'Université de Padoue, et Richmond, de *King's College,* à Cambridge. Dans deux Mémoires considérables publiés en 1877 et 1882 [1], l'auteur italien fait l'historique des travaux

---

[1] *Nuovi teoremi sull' « hexagrammum mysticum »* (*Atti dei Lincei,* série III, vol. I, 1877, p. 649-703).

Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres particulièrement pour n = 3, 4, 5, 6, en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique (*Annali di Matematica,* 2e série, t. II, 1882-1883, p. 96-236).

Ces deux Mémoires contiennent ensemble 289 théorèmes.

de ses devanciers et les complète par d'importantes découvertes personnelles; aussi le vaste ensemble de faits groupés autour du théorème de Pascal est-il souvent désigné par les mots *la figure*, ou *les propriétés de Veronese*.

Plus récemment, la question a été reprise en bloc, et de façon magistrale par Richmond, qui la rattache aux considérations les plus élémentaires de la Géométrie à quatre dimensions; une partie de notre Chapitre V ne sera guère qu'un résumé, plus écourté et plus imparfait que nous ne l'aurions voulu, des travaux de cet auteur (¹).

Nous désignerons par

$$p(a.bc) = p(ab\,ac)$$

ou par

$$p(125643),$$

suivant que nous ferons usage de l'une ou de l'autre des deux notations exposées dans le paragraphe précédent, la droite de Pascal afférente à l'hexagone inscrit entre les parenthèses. La lettre p et les autres lettres, employées ci-après dans les mêmes conditions, ont un sens analogue à celui du signe fonctionnel f en analyse (²).

(¹) *On Pascal's hexagram* (*Trans. of the Cambridge Philos. Soc.*, vol. XV, 1891, p. 201-302). — *On the figure of six points in space of four dimensions* (*Quart. Journ. of pure and applied Math.*, t. XXXI, 1900, p. 125-160). — *The figure formed from six points in space of four dimensions* (*Mathematische Annalen*, t. LIII, 1900, p. 161-176). — *Concerning the locus* $\Sigma x_r^3 = 0$, $\Sigma x_r = 0$ $(r = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ (*Quart. Journ. of pure and app. Math.*, t. XXXIV, 1903, p. 117-154).

(²) Nous réunissons ici les signes fonctionnels qui seront employés de cette façon dans le cours du présent Chapitre et du suivant :

pour les droites de Pascal	$p(a.bc)$
» les points de Kirkman	$k(a.bcd)$
» les points de Steiner	$s(abc)$
» les droites de Steiner (Chapitre IV)	$t(ab)$
» les droites de Plücker	$u(ab)$
» les plans de Plücker (Chapitre IV)	$\ddot{u}(ab)$
» les droites de Cayley	$y(abc)$
» les points de Salmon	$m(ab)$

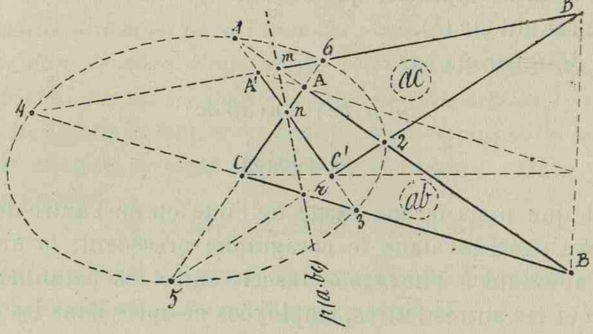
A l'occasion nous écrirons de même $\Delta(ab)$ et $j\begin{pmatrix}ab\\cd\end{pmatrix}$ pour les triangles Δ et les points j.

2. Considérons le couple

$$ab = 12\ 34\ 56, \qquad ac = 13\ 25\ 46;$$

ce sont les deux triangles ABC, A′B′C′ des figures 19 et 20. Si le point 6 se meut en décrivant la conique, tous les autres restant fixes, les rayons 46, 56 déterminent sur 12 et 13 deux divisions

Fig. 19.



Un couple de triangles Δ.

perspectives m et n; par suite la droite qui joint ces deux points tourne autour d'un point fixe r. Mais, quand 6 se pose successivement sur 2 et 3, cette droite prend les positions 25 et 34, dont l'intersection est ce point fixe r. Donc les trois points m, n, r, ou

$$12\ 46,\quad 34\ 25,\quad 56\ 13$$

sont en ligne droite; donc encore *les deux triangles d'un couple sont perspectifs.*

C'est *l'axe de perspective des deux triangles* qui est la droite de Pascal $p(a.bc)$. Il y a soixante droites de Pascal, et chacune contient, comme celle-là, trois points j. [*Voyez* encore, par exemple, $\frac{ae}{df}$, $\frac{be}{df}$, $\frac{ce}{df}$ sur $p(e.df)$ de la figure 2].

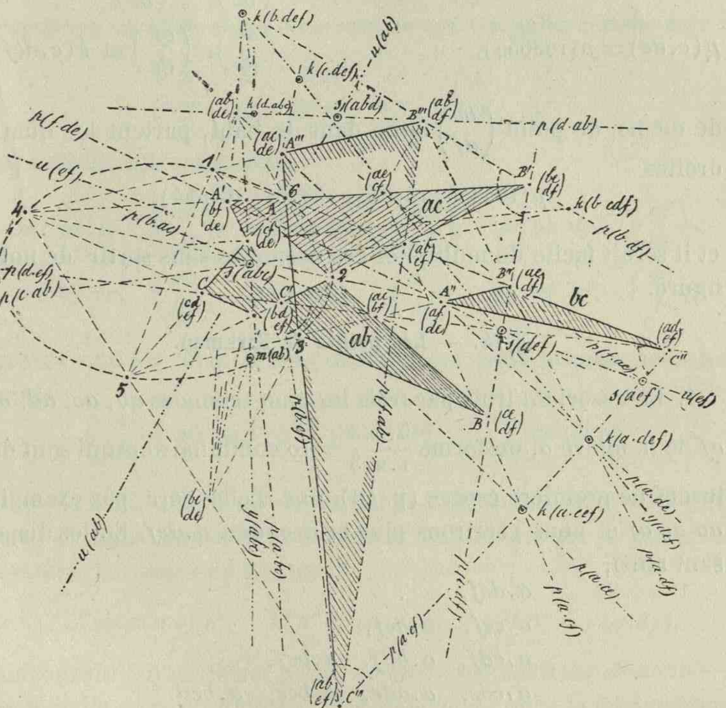
Elles appartiennent dix par dix aux six figures A, celles d'une même figure ayant toutes la même première lettre.

Les trois points j que nous avons appelés m, n, r ont pour symboles

$$\binom{ad}{bc},\ \binom{ae}{bc},\ \binom{af}{bc},$$

dont on voit de suite la formation au moyen de celui $p(a.bc)$.

Fig. 20.



Un terne de triangles Δ.

Inversement, la confrontation de ces symboles montre qu'il passe par le point $\binom{ab}{cd}$ les droites

$$p(a.cd),\quad p(b.cd),\quad p(c.ab),\quad p(d.ab);$$

donc *il passe quatre droites p par chaque point j*. C'est ainsi qu'on voit partir en faisceau serré, du point $\binom{bc}{de}$ placé au bas de la figure 20, quatre droites qui sont, de la gauche à la droite,

$p(b.de) = p(132645)$, se dirigeant sur $\begin{pmatrix} bf \\ de \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ba \\ de \end{pmatrix}$ et $k(b.def)$,

$p(d.bc) = p(123645)$, » $\begin{pmatrix} ad \\ bc \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} df \\ bc \end{pmatrix}$,

$p(e.bc) = p(132654)$, » $\begin{pmatrix} ae \\ bc \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} ef \\ bc \end{pmatrix}$,

$p(c.de) = p(123654)$, » $\begin{pmatrix} ac \\ de \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} cf \\ de \end{pmatrix}$ et $k(c.def)$;

de même, du point $\begin{pmatrix} bc \\ df \end{pmatrix}$ situé dans le haut, partent les quatre droites

$$p(162354,\ 152364,\ 153264,\ 163254),$$

et il serait facile de multiplier ces exemples sans sortir de notre figure.

§ 14. — Les points de Kirkman.

1. En associant trois par trois les cinq triangles ab, ac, ad, ae, af de la figure a, on forme $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ combinaisons qui sont des ternes de première espèce (p. 48); une d'elles sera, par exemple, $ad\ ae\ af$ et nous l'écrirons plus brièvement $a.def$. En les disposant ainsi,

$$\begin{array}{llll} a.def, & & & \\ a.cef, & a.bef, & & \\ a.cdf, & a.bdf, & a.bcf, & \\ a.cde, & a.ade, & a.bce, & a.bcd, \end{array}$$

on voit qu'elles correspondent chacune à chacune aux dix termes qui forment le premier compartiment du Tableau I, page 51, la correspondance consistant en ce que, si l'on ne tient pas compte de a, les deux qu'on voit d'une part et les trois qu'on voit d'autre part font ensemble les cinq lettres b. c, d, e, f.

Si l'on supprime une des trois lettres qui suivent le point, ce qui peut se faire de trois manières, on a trois couples, ou hexagones, qui sont, pour le premier terne par exemple,

$$a.de,\quad a.df,\quad a.ef.$$

Les droites de Pascal de ces trois hexagones sont concourantes.

Pour le démontrer, considérons, sur la figure 20, les deux triangles $A''B''C''$ et $A'''B'''C'''$; le premier, entièrement ombré, n'est autre que $\Delta(bc) = 16\ 24\ 35$; le second, ombré seulement en partie, a pour côtés les droites fondamentales 14, 36 et la droite de Pascal déterminée par les points $\begin{pmatrix} ab \\ cf \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ab \\ df \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ab \\ ef \end{pmatrix}$. On peut faire correspondre les côtés et les sommets de ces triangles comme ceci :

$$\begin{array}{llllll} A''B'', & B'', & B''C'', & C'', & C''A'', & A'', \\ A'''B''', & B''', & B'''C''', & C''', & C'''A''', & A''', \end{array}$$

ou, suivant notre notation :

$$\begin{array}{llllll} ad\ bc\ ef, & \begin{pmatrix} ae \\ df \end{pmatrix}, & af\ bc\ de, & \begin{pmatrix} ad \\ ef \end{pmatrix}, & ae\ bc\ df, & \begin{pmatrix} af \\ de \end{pmatrix}, \\ ad\ bf\ ce, & \begin{pmatrix} ab \\ df \end{pmatrix}, & p(f.ab), & \begin{pmatrix} ab \\ ef \end{pmatrix}, & ae\ cd\ bf, & \begin{pmatrix} ac \\ de \end{pmatrix}; \end{array}$$

on voit que les côtés correspondants ont pour intersections les points

$$\begin{pmatrix} be \\ cf \end{pmatrix} = 16\ 25, \quad \begin{pmatrix} ba \\ cf \end{pmatrix} = 24\ 36, \quad \begin{pmatrix} bd \\ cf \end{pmatrix} = 14\ 53,$$

lesquels sont sur la droite de Pascal $p(b.cf) = 142536$, c'est-à-dire sont en ligne droite. On en conclut que les droites joignant les sommets correspondants, savoir :

$$C''C''' = p(a.ef), \qquad A''A''' = p(a.de), \qquad B''B''' = p(a.df),$$

concourent en un même point, *ce que nous voulions démontrer*. On appelle ce point *un point de Kirkman*, et nous le désignerons par $k(a.def)$.

Chaque droite de Pascal $p(a.bc)$ porte trois points de Kirkman : $k(a.bcd)$, $k(a.bce)$, $k(a.bcf)$ et il passe par chaque point de Kirkman $k(a.def)$ trois droites de Pascal : $p(a.de)$, $p(a.df)$, $p(a.ef)$.

Les douze droites p passant par les trois sommets du triangle bc donnent quatre points k qui sont

$$k(a.def), \quad k(d.aef), \quad k(e.adf), \quad k(f.ade),$$

c'est-à-dire ont leurs symboles formés des quatre mêmes lettres.

On appelle *droites* v (Veronese) toute droite passant par deux pareils points. Chacune passe en outre par un point j, qui est $\begin{pmatrix} ad \\ bc \end{pmatrix}$ pour les deux premiers. Il y a 90 droites v, il en passe trois par chaque point k et deux par chaque point j.

2. Le lecteur verra de suite comment les symboles donnent la solution de questions comme celles-ci : — Quelle est la droite p dont un point donné k est le correspondant, ou inversement ; — quelles sont les trois droites p qui passent par un point donné k, ou inversement les trois points qui sont sur une droite donnée ; — voir si deux droites données p se croisent sur un point k et, en ce cas, quelle est la troisième qui y passe avec elles, etc.

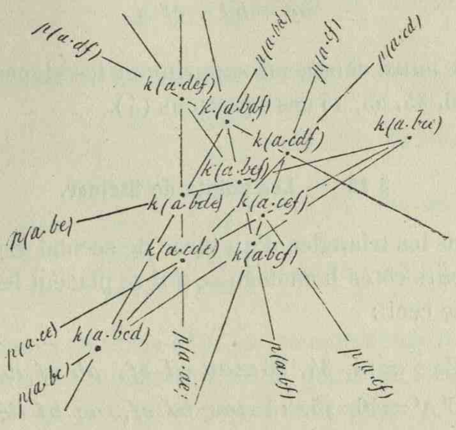
Ces transformations sont beaucoup moins simples avec la notation ordinaire. Par exemple, si l'on veut les droites de Pascal qui passent par un point donné $k(123456)$, il faut : 1° écrire à la file les trois chiffres de rang impair, puis les trois de rang pair en intervertissant l'ordre des deux derniers : c'est une des droites demandées $p(135264)$; — 2° dans celle-ci, sans toucher aux deux chiffres du milieu, intervertir ensemble le premier et le second, puis le cinquième et le sixième ; c'est la seconde droite : $p(153624)$; — 3° dans la même, sans toucher aux chiffres extrêmes, intervertir ensemble les deuxième, troisième, puis les quatrième et cinquième : c'est la troisième droite : $p(315264)$.

3. Il y a donc correspondance univoque entre les dix points k et les dix droites p. La figure 21 représente les uns et les autres. L'ensemble de l'hexagramme comprend six figures parallèles à celle-là et correspondant aux six décades A. Chaque figure est fermée sur elle-même.

La subdivision en six décades ou figures, avec les développements qu'elle a pris entre ses mains, est assurément la contribution la plus importante apportée par Veronese à la théorie de l'hexagramme. Les six décades correspondent *aux six fonctions remarquables à six valeurs* trouvées par J.-A. Serret dans son Mémoire *Sur le nombre des valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres de toutes les manières pos-*

sibles (¹). Elles se rattachent ainsi à la difficile théorie des *groupes de substitutions*, que nous ne cesserons pas de côtoyer jusqu'à la fin du Chapitre V, mais dans lequel nous nous abstiendrons de pénétrer; le lecteur qui voudrait le faire pourra consulter, outre

Fig. 21.



Les droites de Pascal et les points de Kirkman de la première décade.

le Mémoire de Veronese de 1882 cité page 54, les travaux que nous mentionnons en note (²).

C'est dans cette théorie que se trouve la meilleure raison du groupement présenté par les formules (3) et (4), page 46 : « Formons, dit Serret, les produits deux à deux des six lettres a, b, c, d, e, f et faisons les sommes des trois produits correspondant aux transpositions équivalentes que nous avons écrites plus haut.

(¹) *Journal de Liouville*, 1850, p. 70 et *Algèbre supérieure*, 4ᵉ édition, t. II. 1878, p. 433.

(²) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 316-368. — PASCAL. *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le* 27 *rette della superficie di terzo ordine et sui gruppi ad esso isomorfi* (*Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. XX, 1892, p. 163-226 et t. XXI, 1893, p. 85-137). — DICKSON, *A class of groups in an arbitrary realm connected with the configuration of the* 27 *lines of a cubic surface* (*Quart. Journ. of Math.*, vol. XXXIII, 1902).

On aura les cinq fonctions suivantes

$$\begin{gathered} ab + ce + df \\ af + cd + be \\ ad + bc + ef \\ ae + de + bf \\ ac + bd + cf \text{ »} \end{gathered}$$

qui ne sont autre chose, en supprimant les signes +, que les termes 65, 45, 35, 25, 15 des équations (4).

§ 15. — Les points de Steiner.

Considérons les triangles d'un terne de second espèce *ab ac bc* (*fig.* 20). Leurs côtés homologues, qui se placent les uns sur les autres comme ceci :

$$\begin{aligned} &\mathrm{AB},\ \mathrm{BC},\ \mathrm{CA} = 12,\ 34,\ 56 = ab\ cd\ ef,\ ab\ cf\ de,\ ab\ ce\ df, \\ &\mathrm{A'B'},\ \mathrm{B'C'},\ \mathrm{C'A'} = 46,\ 25,\ 13 = ac\ bd\ ef,\ ac\ bf\ de,\ ac\ be\ df, \\ &\mathrm{A''B''},\ \mathrm{B''C''},\ \mathrm{C''A''} = 35,\ 16,\ 24 = ad\ bc\ ef,\ af\ bc\ de,\ ae\ bc\ df, \end{aligned}$$

donnent, par leurs intersections deux à deux, les trois lignes de Pascal

$$\begin{aligned} p(a.bc) &= 12\ 46,\ 34\ 25,\ 56\ 13 = \begin{pmatrix} ad \\ bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} af \\ bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ae \\ bc \end{pmatrix}, \\ p(b.ca) &= 12\ 35,\ 34\ 16,\ 56\ 24 = \begin{pmatrix} bd \\ ac \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} bf \\ ac \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} be \\ ac \end{pmatrix}, \\ p(c.ab) &= 46\ 35,\ 25\ 16,\ 13\ 24 = \begin{pmatrix} cd \\ ab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cf \\ ab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ce \\ ab \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or, si on lit par colonnes les carrés que forment, soit les deuxièmes, soit les troisièmes membres, on a les sommets des trois triangles *ef*, *df*, *de*, lesquels forment aussi un terne de seconde espèce et, par suite, sont perspectifs deux à deux; il s'ensuit que *les trois lignes concourent en un même point*. On appelle ce point un *point de Steiner*, et nous le désignerons par $s(abc)$, la notation entre les parenthèses dérivant de celle du terne générateur *ab bc ca* comme il a été dit page 50.

Les sommets homologues des mêmes triangles ab, ac, bc, savoir :

$$\mathrm{C,\ B,\ A} = \binom{cd}{ef},\ \binom{ce}{df},\ \binom{cf}{de} = 56\ 43,\quad 43\ 12,\quad 12\ 56,$$

$$\mathrm{C',\ B',\ A'} = \binom{bd}{ef},\ \binom{be}{df},\ \binom{bf}{de} = 13\ 52,\quad 52\ 64,\quad 64\ 13,$$

$$\mathrm{C'',\ B'',\ A''} = \binom{ad}{ef},\ \binom{ae}{df},\ \binom{af}{de} = 24\ 16,\quad 16\ 35,\quad 35\ 24,$$

sont par trois sur les trois lignes de Pascal

$$p(d.ef) = \binom{cd}{ef},\ \binom{bd}{ef},\ \binom{ad}{ef} = 34\ 56,\quad 12\ 24,\quad 14\ 26,$$

$$p(e.df) = \binom{ce}{df},\ \binom{be}{df},\ \binom{ea}{df} = 12\ 34,\quad 24\ 56,\quad 13\ 56,$$

$$p(f.de) = \binom{cf}{de},\ \binom{bf}{de},\ \binom{af}{de} = 12\ 56,\quad 13\ 46,\quad 23\ 45,$$

qui sont afférentes au terne $ef\,df\,de$ complémentaire du précédent. Leur commune intersection est le point de Steiner $s(def)$, duquel nous dirons qu'il est *conjugué* de $s(abc)$.

Le nombre des points de Steiner est $\dfrac{6.4.5}{1.2.3} = 20$, conjugués deux à deux. Ce sont :

abc,	abd,	abe,	abf,	def,	cef,	cdf,	cde,
	acd,	ace,	acf,		bef,	bdf,	bde,
		ade,	adf,			bcf,	bce,
			aef;				bcd.

On dit que le point $s(abc)$ est commun aux trois figures a, b, c en ce sens qu'il repose sur des éléments de ces trois figures. Les quatre points $s(abc, abd, abe, abf)$, à la génération desquels concourt le triangle ab, sont communs aux figures a et b. Enfin les dix points $s(abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef)$ appartiennent à la figure a; leurs conjugués sont communs aux cinq autres.

Dans la notation ordinaire, on peut, sans la traduire en couples, reconnaître que trois droites de Pascal concourent en un point de Steiner à ce que, dans leur notation, *les chiffres de rang pair sont les mêmes et que ceux de rang impair forment un cycle, ou inver-*

sement. Telles sont les trois droites

$$p(123456),\quad p(143652),\quad p(163254),$$

dont le point de Steiner sera désigné par $s(135.246)$, et ces trois autres

$$p(123654),\quad p(163452),\quad p(143256),$$

dont le point de Steiner $s(135.264)$ est le conjugué du précédent. Dans ce symbole, l'ordre cyclique dans chaque groupe de trois importe seul et un nouveau point de Steiner arrive si on le change; on a le point conjugué si on le change seulement dans un des groupes.

§ 16. — Les droites de Plücker.

Considérons trois des quatre points de Steiner communs aux deux figures a et b, par exemple (*fig.* 22)

$$s(abc,\quad abd,\quad abe).$$

Il passe par eux, respectivement, les droites de Pascal

$$p(a.bc),\quad p(a.bd),\quad p(a.be)$$

qui font ensemble un triangle ayant pour sommets les points de Kirkman

$$k(a.bcd),\quad k(a.bde),\quad k(a.bec).$$

Il passe encore par eux, respectivement, les droites

$$p(c.ab),\quad p(d.ab),\quad p(e.ab),$$

qui font ensemble un triangle ayant pour sommets les points j

$$\binom{ab}{cd},\quad \binom{ab}{de},\quad \binom{ab}{ec}.$$

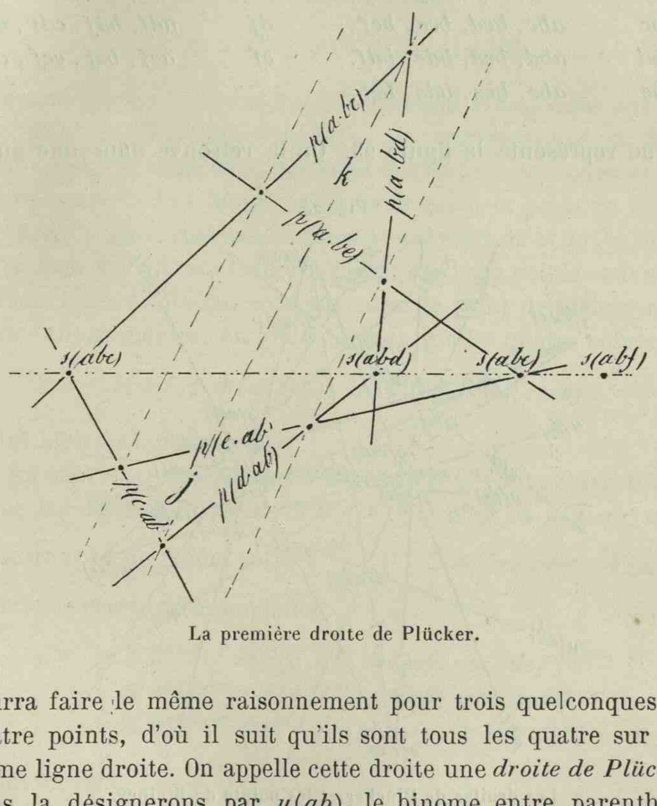
Or, les droites joignant les points correspondants de ces deux triangles k et j sont les droites de Pascal

$$p(a.cd),\quad p(a.de),\quad p(a.ce),$$

lesquelles sont concourantes (au point de Kirkman $a.cde$). Donc les deux triangles sont perspectifs, et les points de Steiner considérés *sont en ligne droite* ([1]).

Si on leur ajoute le quatrième point $s(abf)$, il est clair qu'on

Fig. 22.



La première droite de Plücker.

pourra faire le même raisonnement pour trois quelconques des quatre points, d'où il suit qu'ils sont tous les quatre sur une même ligne droite. On appelle cette droite une *droite de Plücker*; nous la désignerons par $u(ab)$, le binome entre parenthèses exprimant qu'elle est déterminée par le triangle ab et appartient comme lui aux deux figures a et b.

Les droites de Plücker sont au nombre de *quinze,* portant chacune quatre points de Steiner, dont chacun est commun à trois

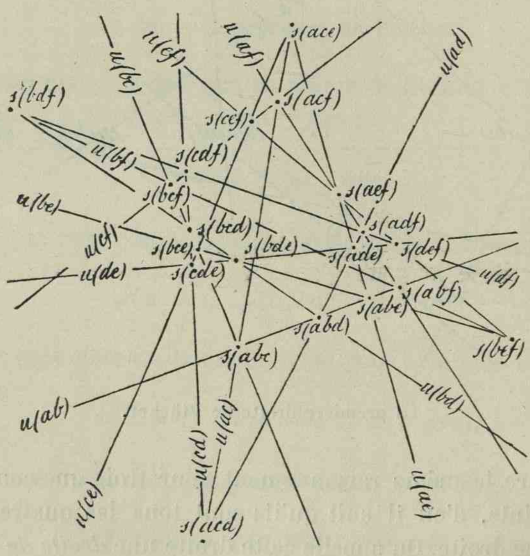
([1]) Dans le cas particulier que représente la figure 22, les droites projetantes sont parallèles, et le point $k(a.cde)$ est à l'infini.

d'entre elles. C'est une configuration que définit le Tableau :

$u.\ ab = s.$	$abc,\ abd,\ abe,\ abf,$	$u.\ bf = s.$	$abf,\ bcf,\ bdf,\ bef;$
ac	$abc,\ acd,\ ace,\ acf,$	cd	$acd,\ bcd,\ cde,\ edf,$
ad	$abd,\ acd,\ ade,\ adf,$	ce	$ace,\ bce,\ cde,\ cef,$
ae	$abe,\ ace,\ ade,\ aef,$	cf	$acf,\ bcf,\ cdf,\ cef,$
af	$abf,\ acf,\ adf,\ aef;$	de	$ade,\ bde,\ cde,\ def,$
bc	$abc,\ bcd,\ bce,\ bcf,$	df	$adf,\ bdf,\ cdf,\ def,$
bd	$abd,\ bcd,\ bde,\ bdf,$	ef	$aef,\ bef,\ cef,\ def,$
be	$abe,\ bce,\ bde,\ bef,$		

et que représente la figure 23. On la retrouve dans une autre

Fig. 23.



Les droites de Plücker et les points de Steiner.

théorie sous cette autre forme : *la projection des intersections de six plans de l'espace,* laquelle peut se résoudre de vingt manières en triangles perspectifs deux à deux.

Les droites de Plücker sont en correspondance univoque :

1° Avec les triangles Δ;

2° Avec nombre égal de quadrilatères dont les quatre côtés sont des droites de Pascal et les six sommets des points j;

3° Avec nombre égal de *couples de quadrilatères* dont les quatre côtés sont aussi des droites de Pascal et les six sommets des points de Kirkman.

§ 17. — Les droites de Cayley.

Au paragraphe **14**, les droites de Pascal

$$p(a.df),\quad p(a.ef),\quad p(a.de)$$

passant par les trois sommets du triangle $\Delta(bc)$, nous ont donné le point de Kirkman $k(a.def)$. En remplaçant a par b, puis par c, nous aurions de même trois droites de Pascal passant par les trois sommets du triangle $\Delta(ac)$ et donnant le point de Kirkman $k(b.def)$, puis trois autres passant par ceux de $\Delta(ab)$ et donnant $k(c.def)$. On voit sur la figure 20 que ces trois points sont sur une même ligne droite qui contient aussi le point de Steiner $s(def)$; nous allons montrer en toute rigueur que les quatre points

$$s(def),\quad k(a.def),\quad k(b.def),\quad k(c.def)$$

sont bien en ligne droite.

En effet les trois triangles $B'B''B'''$ et $C'C''C'''$ sont perspectifs parce que les lignes $B'C'$ ou 25, $B''C''$ ou 16 et $B'''C'''$ ou $p(f.ab)$ se rencontrent en un même point $\binom{ab}{cf}$ (¹). Donc les points d'intersection des côtés correspondants

$$\begin{aligned}
B'B''C'C'' &= p(e.df)\,p(d.ef) = s\,(def)\\
B''B'''C''C''' &= p(a.df)\,p(a.ef) = k(a.def)\\
B'B'''C'C''' &= p(b.df)\,p(b.ef) = k(b.def)
\end{aligned}$$

sont en ligne droite.

Ce sont trois des quatre points que nous considérons. Mais on arriverait à la même conclusion en associant au premier, $s(def)$, deux quelconques des trois autres, d'où il suit que les quatre points sont en ligne droite.

(¹) Parce que la ligne de Pascal $p(f.ab) = p(163254)$ est déterminée par les trois points $16\,25 = \binom{ab}{cf}$, $63\,54 = \binom{ab}{ef}$, $14\,23 = \binom{ab}{df}$.

En observant que le premier est le point de Steiner conjugué de $s(abc)$ et que les trois autres sont les points de Kirkman correspondants des trois droites de Pascal $p(a.bc)$, $p(b.ca)$, $p(c.ab)$ qui passent par $s(abc)$, on énoncera ainsi le théorème : *Les points de Kirkman correspondant aux trois droites de Pascal qui passent par un point donné de Steiner sont en ligne droite, et cette droite contient aussi le point de Steiner conjugué de celui qui est donné.* On appelle ces droites *des droites de Cayley* (1), et nous désignerons par $y(def)$ celle qui contient les quatre points écrits en tête de ce paragraphe : elle est conjuguée de $y(abc)$, qui, elle, passe par $s(abc)$ et les trois points de Kirkman caractérisés par les mêmes lettres. Les droites de Cayley sont au nombre de vingt; elles correspondent chacune à chacune aux vingt points de Steiner. On convient de dire qu'elles appartiennent respectivement aux mêmes figures A que leurs points de Steiner correspondants. Une droite de Cayley est commune à *trois figures* et sa conjuguée aux trois autres; quatre droites de Cayley sont communes à *deux figures,* et les quatre points de Steiner qui leur correspondent sont sur une droite de Plücker; enfin *dix droites* de Cayley appartiennent à *une figure.*

§ 18. — Les points de Salmon.

Considérons les quatre droites de Cayley

$$y(def,\quad cef,\quad bef,\quad aef).$$

Sur les trois premières sont respectivement les points de Kirkman

$$\begin{array}{lcl} k(a.def) & \text{et} & k(b.def) \\ k(a.cef) & \text{et} & k(b.cef) \\ k(a.cdf) & \text{et} & k(b.cdf); \end{array}$$

si l'on réunit les premiers de chaque couple, puis les seconds, on reconnaît les sommets de deux triangles dont les côtés sont

$$p(a.ef),\ p(a.df),\ p(a.cf) \quad \text{et} \quad p(b.ef),\ p(b.df),\ p(b.cf),$$

---

(1) On dit aussi *droites de Cayley-Salmon,* parce qu'elles furent découvertes à peu près en même temps par ces deux auteurs.

et ces triangles sont perspectifs parce que les côtés se rencontrent par deux en des points

$$\binom{ab}{ef}, \quad \binom{ab}{df}, \quad \binom{ab}{cf}$$

qui sont sur une même ligne droite $p(f.ab)$.

Comme on peut faire un raisonnement analogue sur trois quelconques des droites considérées, il s'ensuit qu'elles passent toutes les quatre par un même point. Donc : *les quatre droites de Cayley correspondant aux quatre points de Steiner qui s'alignent sur une droite de Plücker concourent en un même point.* On l'appelle *un point de Salmon.* Il y a quinze points de Salmon, lesquels correspondent un à un aux quinze droites de Plücker et aux quinze triangles Δ. Nous les désignerons de même par un des binomes ab, ac, ..., et celui-ci sera précédé du signe fonctionnel m.

Sur la droite de Cayley $y(def)$, il y a trois points de Salmon $m(de)$, $m(ef)$, $m(fd)$. Donc les points de Salmon sont trois par trois sur les droites de Cayley. Les cinq points $m(ab, ac, ad, ae, af)$ sont unis deux à deux par les dix droites de Cayley appartenant à la figure a; les dix restants sont trois par trois sur les dix autres de Cayley.

§ 19. — Vue d'ensemble.

Résumant à un certain point de vue ce qui précède, on peut dire :

1° L'identité des notations enfermées sous les signes p et k, s et y, u et m montre qu'il y a correspondance entre les soixante droites de Pascal et les soixante points de Kirkman, les vingt droites de Cayley et les vingt points de Steiner, les quinze droites de Plücker et les quinze points de Salmon (¹);

2° Il y a : sur chaque droite p, trois points k et un point s, — sur chaque droite u, quatre points s, — sur chaque droite y, un point s, trois points k, trois points n. Et il passe : par chaque

(¹) Bien que le nombre *six* soit à la fois celui des points fondamentaux et celui des figures A, on ne peut pas faire correspondre ces deux ensembles terme à terme.

point k, trois droites p et une droite y, — par chaque point s, trois droites p, trois droites u et une droite y, — par chaque point n, quatre droites y.

Mais, de vue d'ensemble proprement dite, il n'y en a pas. Dans le cours du XIXe siècle, les théorèmes se sont accumulés sans ordre les uns sur les autres, engendrant peu à peu une vaste figure que son étendue et sa complication ne permettent pas au dessinateur de faire en épure, ni à l'esprit de se représenter, à laquelle il est même difficile de trouver une nomenclature et une notation (¹) : « *I have constructed,* dit Cayley (*Collected math. papers*, t. VI, p. 122), *on a very large scale a figure of the sixty pascalian lines and the forty-five pascalian points; but the figure is, from its complexity, and the inconvenient way in which the points are either crowded together or fly off to a great distance, almost unintelligible.* »

Nous en restons là, ayant à peine effleuré le sujet et renvoyant aux Mémoires de Veronese et de Richmond le lecteur qui voudrait l'étudier davantage sans sortir de la Géométrie plane. Il aura affaire d'abord à de nouvelles droites dans lesquelles entrent comme éléments les points j (²), puis aux relations des figures A entre elles..., etc. En nous suivant il aura peut-être été amené à se poser ces deux questions : 1° *Cette figure si étendue, si encombrée et si décousue ne serait-elle pas une forme secondaire d'une autre à la fois plus simple et plus générale?* 2° *Existe-t-il dans le plan d'autres familles de quinze droites jouissant aussi de cet ensemble de propriétés qui distingue la famille prenant naissance sur six points d'une conique?* C'est à ces deux questions que répondent les deux Chapitres suivants.

Nous étendrons le nom d'*hexagramme de Pascal* à la vaste figure que nous venons de faire entrevoir au lecteur. Le capitaine d'artillerie Brianchon découvrit en 1806 que, *lorsque six droites* A, B, C, D, E, F *sont tangentes à une conique, les diagonales joignant les trois paires de sommets opposés* A *et* D, B *et* E, C *et* F *concourent en un même point.* Ce théorème peut être pris à son tour comme le point de départ d'une suite de constructions et de

---

(¹) Celle adoptée ici procède de Veronese, Cremona, miss Ladd et Caporali.

(²) Par exemple, les droites v mentionnées page 22.

propositions se développant corrélativement à la précédente. Cet autre ensemble, que nous appellerons l'*hexagramme de Brianchon* si, par hasard, nous avons besoin de le considérer en lui-même, n'est autre chose que le *pendant dualistique* du précédent. La Géométrie moderne associe étroitement deux formes ayant ensemble cette relation, et passe de l'une à l'autre sans aucune formalité ; nous ferons de même. C'est ordinairement la première que nous aurons en vue, mais le lecteur est prévenu pour le cas où certaines directions du raisonnement nous achemineraient vers la seconde.

CHAPITRE IV.

LA SURFACE DU TROISIÈME DEGRÉ.

§ 20. — Surface de Klein.

Avant de livrer son manuscrit à la publicité des *Atti dei Lincei*, Veronese le communiqua à Cremona, qui s'était déjà occupé fructueusement de la *théorie des surfaces du troisième degré*. Celui-ci fut conduit à rattacher à cette théorie toute la suite des propositions, et publia le résultat de son étude dans le même Volume des *Atti*. Nous exposerons sommairement sa méthode, mais il nous faut montrer d'abord cette surface du troisième degré qui, avec ses fameuses *vingt-sept droites*, connues seulement depuis 1849, apporte un concours assez inattendu. C'est ce que nous allons essayer de faire en la dégageant autant que possible de l'habituel cortège des équations et de l'encombrement des démonstrations.

Pendant le demi-siècle qui vient de finir, elle a été très en faveur auprès des mathématiciens, qu'elle reposait des coniques et des quadriques : d'après un relevé fait en 1897 par J.-H. Hill ([1]), il n'avait pas été publié sur son compte, à cette date, moins de *deux cent cinq* Mémoires et, ajoute notre auteur, ils méritent presque tous d'être lus attentivement (*nearly all are worthy of a close perusal*). Elle a alimenté pendant quelque temps les questions de concours. Elle a beaucoup exercé la sagacité des constructeurs de modèles. La librairie Martin Schilling, à Halle, a publié une collection de vingt-sept reliefs en plâtre, qui en représentent divers

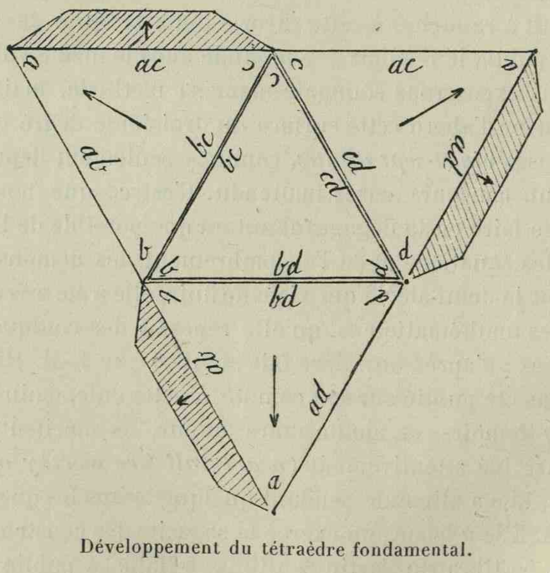
([1]) *Bulletin of the american math. Soc.*, numéro de janvier 1897. Nous ne croyons pas que la liste des ouvrages énumérés par M. Hill ait été publiée. Avec ce qui s'est fait depuis 1897, on peut estimer à 250 au moins le nombre des publications existant aujourd'hui, où il est traité des surfaces du troisième degré.

cas particuliers, et où l'on paraît s'être attaché surtout à montrer la génération des points singuliers des divers ordres.

Des préoccupations d'ordre analytique dominent presque tous ces travaux, et nous n'y avons pas trouvé ce que nous cherchions. une évocation suffisamment claire et complète des *formes de la surface*. Nous nous proposons de remplir cette lacune. Nous espérons y arriver en passant par une forme particulière qu'on appelle la *surface de Klein* ([1]), et qui, pourrait-on dire, occupe dans la famille des surfaces du troisième degré une situation analogue à celle du *cône ordinaire* dans la famille des surfaces du second degré.

Pour construire la surface de Klein, posons devant nous, dans l'espace, une pyramide triangulaire renversée (*fig.* 24 et 25). Sa

Fig. 24.



Développement du tétraèdre fondamental.

base, ou face supérieure, *bcd*, est dans un plan horizontal III; la face *abd*, légèrement inclinée d'arrière en avant, est de notre côté; elle cache l'arête *ac*, inclinée d'avant en arrière. Nous suppose-

([1]) Félix Klein, *Ueber Flächen dritter Ordnung* (*Mathematische Annalen*, t. VI, 1873).

rons les six arêtes et les quatre faces prolongées indéfiniment dans tous les sens, et nous appelons cette figure géométrique : *le tétraèdre*.

Un peu plus bas, menons un autre plan horizontal II et marquons-y les traces des six arêtes

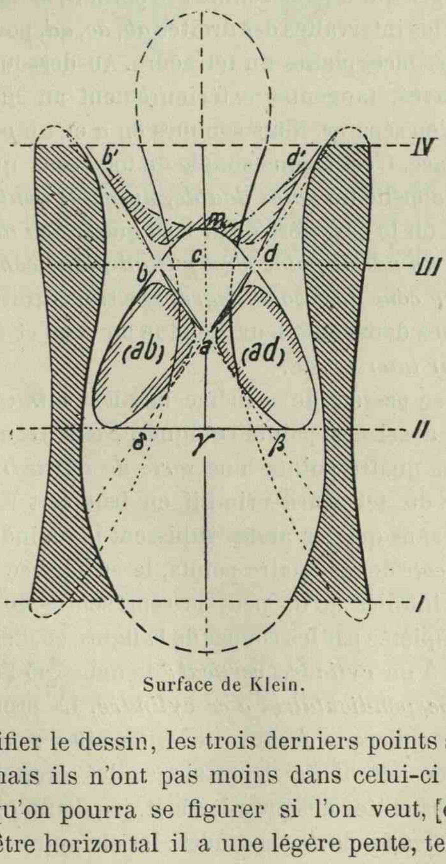
$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad cd,\quad db,\quad bc$$

en les désignant respectivement par les lettres

$$\beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \beta',\quad \gamma',\quad \delta'.$$

A raison de la manière dont nous avons placé les deux plans en

Fig. 25.



Surface de Klein.

vue de simplifier le dessin, les trois derniers points sont à l'infini du second, mais ils n'ont pas moins dans celui-ci une position déterminée qu'on pourra se figurer si l'on veut, [en] supposant qu'au lieu d'être horizontal il a une légère pente, telle qu'aucune des trois lignes *cd, bd, bc* ne lui soit parallèle. Menons dans ce plan les droites $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ qui joignent les traces des *arêtes opposées*, c'est-à-dire des arêtes dont les notations n'ont pas de lettre commune; nous les appellerons *les transversales*.

Cela posé, *les neuf droites*

$$ac,\quad ad,\quad ab,\quad cd,\quad db,\quad bc,\quad \beta\beta',\quad \gamma\gamma',\quad \delta\delta'$$

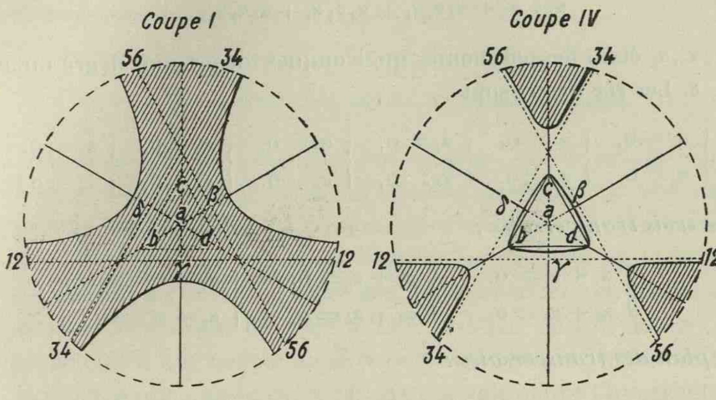
sont des droites de la surface, en ce sens qu'elles y ont tous leurs points, et elles sont les seules dans ce cas. Elles vont nous servir de charpente pour la construire.

Transportons-nous au point *a*. Au-dessus, nous en voyons partir des formes convexes, d'abord tangentes intérieurement à un cône du second degré qui a pour sommet le point *a*, mais s'en écartant bientôt, dans les intervalles des droites *ab*, *ac*, *ad*, pour *s'appliquer presque* sur les faces planes du tétraèdre. Au-dessous, ce sont des formes concaves, tangentes extérieurement au même cône, et pressées de s'en séparer. Nous sommes en *a* en un *point singulier* de notre surface. C'est le plus simple de tous ceux que connaît la théorie; on l'appelle un *point double,* un *point conique*, un *point nodal*....., et on le caractérise par ceci que *le lieu des tangentes à la surface en un pareil point n'est pas un plan, comme à l'ordinaire, mais un cône du second degré.* Les trois droites *ab*, *ac*, *ad* sont communes dans toute leur étendue au cône et à la surface : elles sont *leur intersection.*

Les choses se passent de la même manière aux trois points *b*, *c*, *d* qui sont aussi des points coniques. Nous avons en somme, *en dedans* des quatre points, une *sorte de tétraèdre* qu'on peut faire dériver du tétraèdre primitif en bombant légèrement les quatre faces, sans que les arêtes subissent la moindre atteinte.

De l'autre côté de ces quatre points, la surface se développe en deux nappes infinies qu'on peut se représenter au moyen de la figure 25, complétée par les coupes de la figure 26. Ces deux figures sont arrêtées à un *cylindre vertical;* la figure 25 l'est en outre à *deux plans perpendiculaires à ce cylindre.* La première montre une sorte de collerette formée de trois ailes très prononcées, alternant avec autant de dépressions; les droites *ab*, *ac*, *ad* courent sur les crêtes des premières et, par leurs prolongements $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, sur les fonds des secondes; les six autres en suivent les flancs. Les figures 26 sont des coupes par des plans I et IV situés plus haut ou plus bas que le tétraèdre, mais ne sont guère faites à l'échelle et doivent être considérées comme de simples schémas;

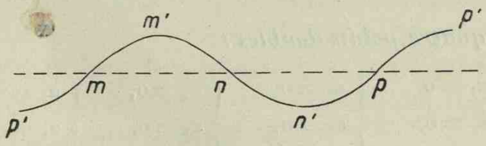
Fig. 26.



Sections horizontales.

ce sont des courbes du troisième degré formées de trois branches à forme hyperbolique, plus un ovale imaginaire, qui devient réel si la section rencontre le tétraèdre; les hachures y correspondent à des parties de la surface situées au-dessus de la section,

Fig. 27.



A l'infini.

tion, et les blancs à des parties situées au-dessous. Si les plans I et IV s'éloignent à l'infini, ces deux formes ont pour limite commune celle que représente la figure 27 : *une courbe du troisième degré composée d'une seule branche avec trois inflexions* m, n, p.

La surface est à *courbure elliptique* sur les quatre faces du tétraèdre central et à *courbure hyperbolique* partout ailleurs. Les quatre faces du tétraèdre s'appellent des *triangles de la sur-*

face et ne doivent pas être confondues avec les *triangles plans* qui ont mêmes pourtours.

Pour achever de fixer les idées sur son compte, disons que notre surface a pour équation, en coordonnées cartésiennes x, y, z :

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

α_1, α_2, α_3 étant des polynomes quelconques du premier degré en x, y, z. Les *six arêtes* sont

$$\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_3=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_4=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_2=0,\\ \alpha_3=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_2=0,\\ \alpha_4=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_3=0,\\ \alpha_4=0;\end{cases}$$

les *trois transversales* :

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0,\\ \alpha_3+\alpha_4=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0,\\ \alpha_2+\alpha_4=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_1+\alpha_4=0 \text{ (1)},\\ \alpha_2+\alpha_3=0;\end{cases}$$

le *plan des transversales* :

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0;$$

les *quatre faces planes du tétraèdre* :

$$\alpha_1=0, \qquad \alpha_2=0, \qquad \alpha_3=0, \qquad \alpha_4=0;$$

les *six plans passant par une arête et la transversale qu'elle rencontre* :

$$\begin{array}{lll}\alpha_1+\alpha_2=0, & \alpha_1+\alpha_3=0, & \alpha_1+\alpha_4=0,\\ \alpha_2+\alpha_3=0, & \alpha_2+\alpha_4=0. & \alpha_3+\alpha_4=0;\end{array}$$

et enfin les *quatre points doubles* :

$$\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=0,\\ \alpha_3=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_2=0,\\ \alpha_3=0,\\ \alpha_4=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_3=0,\\ \alpha_4=0,\\ \alpha_1=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_4=0,\\ \alpha_1=0,\\ \alpha_2=0.\end{cases}$$

On pourra construire une pareille surface, soit par points, soit par sections horizontales, en se donnant les valeurs particulières

$$\begin{array}{ll}30\alpha_1 = 5x+6y+11z-30, & 30\alpha_3 = -15x-6y+16z+30,\\ 30\alpha_2 = -5x-4y-9z+30, & 30\alpha_4 = 15x+4y+9z-30;\end{array}$$

---

(1) Car on voit aisément que l'équation est satisfaite par $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\alpha_3 = -\alpha_4$ et de même pour les deux autres couples.

les points nodaux ont alors pour coordonnées

$$(-6, -12, 12), \quad (0, -6, 6), \quad \left(\frac{6}{5}, \frac{42}{5}, -\frac{12}{5}\right), \quad (0, 21, -6).$$

On trouvera la représentation de ceux-ci dans Blythe, *On models of cubic surfaces* [1].

§ 21. — Surface générale du troisième degré.

Cette première surface une fois comprise, que le lecteur veuille bien se rappeler la figure formée par *l'hyperboloïde à une nappe et celui à deux nappes ayant le même cône asymptote*, et le procédé de déformation par lequel on conçoit habituellement le passage de celui-ci à l'un ou à l'autre des deux premiers : en *ouvrant et dilatant* le sommet du cône *autour* de l'axe, on voit naître l'hyperboloïde à une nappe; en le *tranchant* et en *contractant* la surface perpendiculairement à cet axe, on voit naître l'hyperboloïde à deux nappes. Si l'on déforme *de l'une ou de l'autre* manière *un ou plusieurs* des points coniques *a*, *b*, *c*, *d* de la figure 25, on a *différents types de surfaces du troisième degré;* nous allons appliquer *la première manière* aux *quatre points à la fois.*

Supposons donc que chacun d'entre eux *se dilate,* en sorte que le passage entre les régions de la surface qu'il unissait se fasse maintenant par *une portion de cette surface en forme de gorge ou tunnel.* Dans la projection que représente la figure 25, les traits pleins qui, de gauche à droite, aboutissent en pointe au point *a*, sont remplacés par une courbe en trait mixte qui va s'appliquer sur eux comme la *courbe de raccordement* des ingénieurs, et il en est de même aux points *b*, *c*, *d*.

Les quatre points coniques sont donc remplacés par *quatre gorges.* Entre elles, celles-ci en dessinent *six autres*, qui correspondent aux six arêtes du tétraèdre. Les trois en provenance des arêtes *ab*, *ac*, *ad* complètent leur pourtour, tout naturellement, sur la paroi que leur offre la nappe infinie en face de ces arêtes. Celles en provenance de *bc*, *cd*, *db* s'ouvrent béantes dans le

---

(1) *Quart. Journ. of p. and app. Math.*, Vol. XXXII, 1900-1901, p. 266-270.

haut de la figure et viennent se fermer dans le bas *en passant par l'infini.* Voici comment s'accomplit ce passage. Soit, en reprenant la figure 27, *mnp* l'intersection commune des plans I, II, III, IV par celui de l'infini : c'est sur les trois segments *mn*, *np*, *pm* de cette droite que se fait la réunion des jours supérieurs avec les jours inférieurs, comme c'est sur les trois arcs $mm'n$, $nn'p$, $pp'm$ que se fait la jonction de la surface qui est au-dessus du plan IV avec celle qui est au-dessous du plan I.

Telles sont les *dix ouvertures,* découvertes par Klein. Il ne faut pas trop attacher à ce mot *ouvertures* le sens ordinaire, qui en ferait comme des accidents localisés et indépendants, des *trous* en un mot. *Elles sont la surface même et la surface tout entière;* les deux faces de celle-ci en forment tour à tour les parois, et une portion de cette surface, prise suffisamment petite à un endroit quelconque, appartient toujours à *trois* ouvertures.

Nous désignerons les dix ouvertures par

(a), (b), (c), (d), (ab), (ac), (ad), (bc), (cd), (db).

Bien entendu, la déformation qui s'est accomplie autour des points *a*, *b*, *c*, *d* de la surface primitive n'y est pas localisée, mais a son effet sur tout l'ensemble, sans toutefois en changer beaucoup l'aspect général. A partir d'une certaine distance, ou si le tétraèdre est très petit, cet aspect est celui d'un cône à deux nappes présentant trois ondulations qui sont la continuation des trois échancrures (bc), (cd), (db) et qui aboutissent à la figure 27 dans le plan de l'infini.

La figure 27 montre cinq des ouvertures, mais il n'en faut considérer le dessin que comme un simple schéma, attendu que chaque ouverture est *une chose à deux dimensions,* en partie visible et en partie invisible, dont on ne pouvait songer à faire sur une pareille figure la projection exacte; plus loin nous en étudierons *la paroi.*

Voici d'autres conséquences du travail de dilatation que nous venons de décrire :

1° Les trois arêtes qui passaient par chaque sommet du tétraèdre *ont été séparées,* le nœud qui les serrait s'étant relâché. De plus, il faut observer que chaque arête est une *droite qua-*

druple de la surface de Klein, parce qu'elle est déterminée par deux points doubles et peut être considérée à volonté comme joignant l'un ou l'autre des deux *points simples* du premier à l'un ou à l'autre des deux *points simples* du second. Aussi *chacune des six arêtes s'est résolue en quatre autres* que nous retrouverons sous les dénominations suivantes :

1, 2′, 35, 46	provenant de	*ac*,	1′, 2, 36, 45	provenant de	*bd*,
3, 4′, 15, 26	»	*ad*,	3′, 4, 16, 25	»	*bc*,
5, 6′, 13, 24	»	*ab*,	5′, 6, 14, 23	»	*ab*,

et qui, avec les trois transversales, *portent à vingt-sept le nombre des droites de la surface.*

2° Tandis que les deux arêtes opposées *ac* et *bd* rencontraient le plan des transversales en *deux points* γ et γ', les huit droites qui en proviennent le rencontrent *en huit points qui sont sur la droite* $\gamma\gamma'$ et nous avons semblablement *huit traces* sur chacune des deux autres transversales $\delta\delta'$ et $\beta\beta'$. On verra plus loin la raison d'un pareil jalonnement, qui existe sur toutes les droites et que montrent les figures 28, 29, etc.

3° Les vingt-sept droites sont *toutes* obligées, pour aller se perdre en deux sens opposés dans l'infini de l'espace, de passer par l'étroite région qui s'est formée autour de l'ancien tétraèdre. Elles se faufilent d'une ouverture à l'autre en *se coupant* ou *s'évitant* d'une façon assez compliquée, que le *double-six de Schläfli* va nous permettre de débrouiller.

Il nous faut maintenant faire connaissance avec celui-ci, qui va être la base de notre exposition.

§ 22. — Le double-six de Schläfli.

On appelle ainsi [1], d'après le nom d'un mathématicien bernois qui l'imagina en 1863 pour faire l'énumération et la classification des surfaces du troisième degré, un *système de douze droites*

---

(1) En anglais : *double-six;* en allemand : *doppelsechs;* en italien : *bissestupla.*

de l'espace, opposées une à une dans deux groupes de six

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \\ 1', & 2', & 3', & 4', & 5', & 6', \end{array}$$

de telle sorte que chaque droite n'en coupe aucune du même groupe et coupe toutes celles de l'autre groupe excepté son opposée. Le nombre des intersections est *trente,* et la condition peut être représentée par le schéma

	1	2	3	4	5	6
1′		⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
2′	⋆		⋆	⋆	⋆	⋆
3′	⋆	⋆		⋆	⋆	⋆
4′	⋆	⋆	⋆		⋆	⋆
5′	⋆	⋆	⋆	⋆		⋆
6′	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	

ou, mieux encore, par la figure 28, où les croisements *pointés* correspondent seuls à des intersections, tandis que les autres ne sont que des suppositions accidentelles de projections.

Étant données une droite d'un des deux groupes de six, par exemple 4, et les cinq droites qu'elle doit couper : $1'$, $2'$, $3'$, $5'$, $6'$, le double-six est déterminé, car on peut construire

une droite	1	qui rencontre	$2'$, $3'$, $5'$, $6'$,
»	2	»	$3'$, $5'$, $6'$, $1'$,
»	3	»	$5'$, $6'$, $1'$, $2'$,
»	5	»	$6'$, $1'$, $2'$, $3'$,
»	6	»	$1'$, $2'$, $3'$, $5'$,

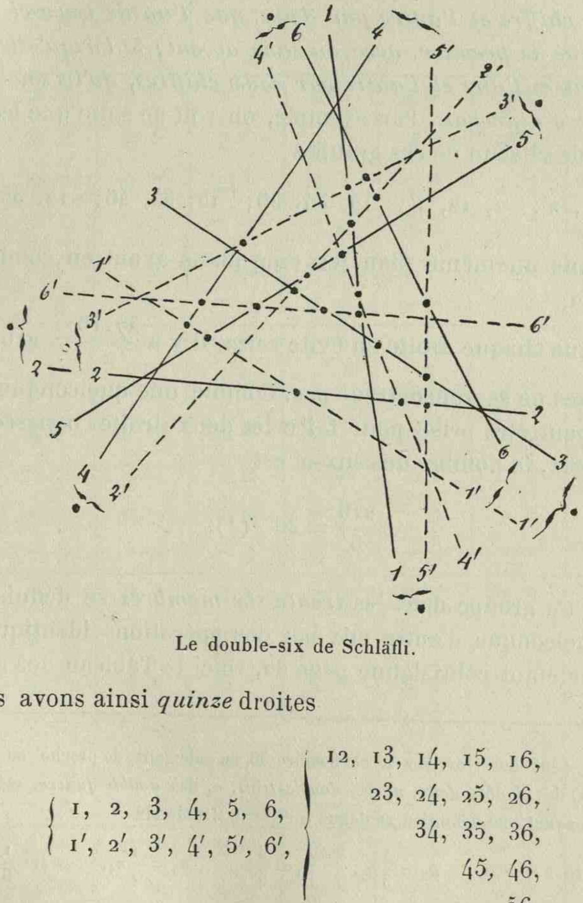
et alors les cinq droites 1, 2, 3, 5, 6 sont toutes rencontrées par une même droite $4'$, qui complète le système ([1]).

Construisons maintenant une première droite, intersection du plan contenant les deux droites 1 et $2'$ avec celui contenant les

([1]) On trouvera la démonstration de ces propositions dans CAYLEY, *On the double-sixes of a cubic surface* [*Collected math. Papers* (*Quart. Journal,* t. X, 1870)] et dans KASNER, *The double-six configuration* (*American J. of Math.*, t. XXV, 1903, p. 107-122); la méthode suivie dans ces deux Mémoires est celle de la Géométrie analytique ordinaire.

deux droites 1′ et 2, et désignons-la par 12; continuons de même en faisant, par exemple, une droite 34 avec le plan des droites 3, 4′ et celui des droites 3′, 4, etc.

Fig. 28.



Le double-six de Schläfli.

Nous avons ainsi *quinze* droites

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \\ 1', & 2', & 3', & 4', & 5', & 6', \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\ & 23, & 24, & 25, & 26, \\ & & 34, & 35, & 36, \\ & & & 45, & 46, \\ & & & & 56, \end{matrix}\right.$$

que nous plaçons à côté des premières, et sur lesquelles nous appelons l'attention dès à présent parce qu'elles arriveront peu à peu à l'accaparer tout entière. Cela fait un ensemble de *vingt-sept droites, dont chacune rencontre dix des autres et en évite seize*, conformément à une règle très simple qui sera souvent invoquée dans le cours de ce Chapitre sous le nom de LOI DES RENCONTRES, et que voici : *Pour que deux droites se rencontrent, il faut et il suffit : 1° lorsqu'elles sont représentées chacune par un seul chiffre, que les deux chiffres soient différents et qu'avec cela un d'eux soit accentué ; 2° lorsqu'elles sont représentées, l'une par un seul chiffre et l'autre par deux, que l'un de ceux-ci soit le même que le premier, avec ou sans accent ; 3° lorsqu'elles sont représentées l'une et l'autre par deux chiffres, qu'ils soient tous les quatre différents.* Par exemple, on voit de suite que les trois droites de chacun de ces groupes

$$1,\ 12,\ 2'; \quad 2,\ 12,\ 1'; \quad 12,\ 34,\ 56; \quad 12,\ 35,\ 46; \quad 12,\ 35,\ 46$$

sont dans un même plan, les cinq plans ayant en commun la droite 12.

Puisque chaque droite en évite seize, il y a $\frac{27.16}{2} = 216$ paires de droites ne se rencontrant pas. Comme une quelconque de ces paires peut être prise pour faire les deux droites opposées d'un double-six, le nombre de ceux-ci est

$$\frac{216}{6} = 36 \quad (^1).$$

C'est un groupe dont les *trente-six membres* se déduisent de l'un quelconque d'entre eux par des opérations identiques. Le premier étant celui donné page 82, voici le Tableau des autres :

(1) On peut aussi arriver à ce nombre 36 en calculant de proche en proche le nombre n_2 des *double-deux,* n_3 des *double-trois,* n_4 des *double-quatre,* etc., ces expressions ayant une définition analogue à celle du double-six :

$$n_2 = 27.10.2 = 540, \qquad n_3 = \frac{4}{3} n_2, \qquad n_4 = \frac{3}{4} n_3, \qquad n_5 = \frac{2}{5} n_4, \qquad n_6 = \frac{1}{6} n_5 = 36.$$

L'examen des numérateurs des coefficients montre la suite *épuisée* et il n'existe pas en effet de *double-sept* ou au-dessus.

Tableau I. — Les trente-cinq double-six dérivés du double-six $\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6'. \end{matrix}\right.$

1	2	3	56	64	45	1	2	4	56	63	35	1	2	5	46	63	34	1	2	6	45	53	34	1	3	4	56	62	25
23	31	12	4′	5′	6′	24	41	12	3′	5′	6′	25	51	12	3′	4′	6′	26	61	12	3′	4′	5′	34	41	13	2′	5′	6′
1	3	5	46	62	24	1	3	6	45	52	24	1	4	5	36	62	23	1	4	6	35	52	23	1	5	6	34	42	23
35	51	13	2′	4′	6′	36	61	13	2′	4′	5′	45	51	14	2′	3′	6′	46	61	14	2′	3′	5′	56	61	15	2′	3′	4′
2	3	4	56	61	15	2	3	5	46	61	14	2	3	6	45	51	14	2	5	5	36	61	13	2	4	6	35	51	13
34	42	23	1′	5′	6′	35	52	23	1′	4′	6′	36	62	23	1′	4′	5′	45	52	24	1′	3′	6′	46	62	24	1′	3′	5′
2	5	6	34	41	13	3	4	5	16	62	21	3	4	6	25	51	12	3	5	6	24	41	12	4	5	6	23	31	12
56	62	25	1′	3′	4′	45	53	34	2′	1′	6′	46	63	34	1′	2′	5′	56	63	35	1′	2′	4′	56	64	45	1′	2′	3′
1	1′	23	24	25	26	1	1′	32	34	35	36	1	1′	42	43	45	46	1	1′	52	53	54	56	1	1′	62	63	64	65
2	2′	13	14	15	16	3	3′	12	14	15	16	4	4′	12	13	15	16	5	5′	12	13	14	16	6	6′	12	13	14	15
2	2′	31	34	35	36	2	2′	41	43	45	46	2	2′	51	53	54	56	2	2′	61	63	64	65	3	3′	41	42	45	46
3	3′	21	24	25	26	4	4′	21	23	25	26	5	5′	21	23	24	26	6	6′	21	23	24	25	4	4′	31	32	35	36
3	3′	51	52	54	56	3	3′	61	62	64	65	4	4′	51	52	53	56	4	4′	61	62	63	65	5	5′	61	62	63	64
5	5′	31	32	34	36	6	6′	31	32	34	35	5	5′	41	42	43	46	6	6′	41	42	43	45	6	6′	51	52	53	54

Deux double-six peuvent avoir *quatre* ou *six* droites communes; on dit dans le second cas qu'ils sont *associés*. Chaque double-six est associé avec vingt des autres, qui sont eux-mêmes associés deux à deux. Nous rencontrerons plus loin *dix couples de trièdres conjugués* qui correspondent à ces *dix couples de double-six associés*.

On voit que les *trente-cinq double-six dérivés* se divisent en deux catégories, l'une de vingt, l'autre de quinze, différenciées par la forme de la notation. Nous n'aurons affaire qu'à ceux de la première, et nous abrégerons leur notation en n'en écrivant que les trois premiers chiffres, comme ceci (¹) :

123,	124,	125,	126,						
	134,	135,	136,	234,	235,	236,			
		145,	146,		245,	246,	345,	346,	
			156;			256,		356;	456.

L'ordre des chiffres de chaque triade est indifférent en soi, mais il conviendra de les mettre dans l'ordre de grandeur, pour passer de la notation abrégée à celle du Tableau.

§ 23. — La projection de Zeuthen.

1. Si, d'un point quelconque O de l'espace, on mène des droites à tous les points de la surface du troisième degré, leurs traces sur un plan fixe, que nous appellerons le *plan de projection*, forment une aire dont le *contour* est, en général, une courbe de sixième degré ayant six points de rebroussement situés sur une section conique.

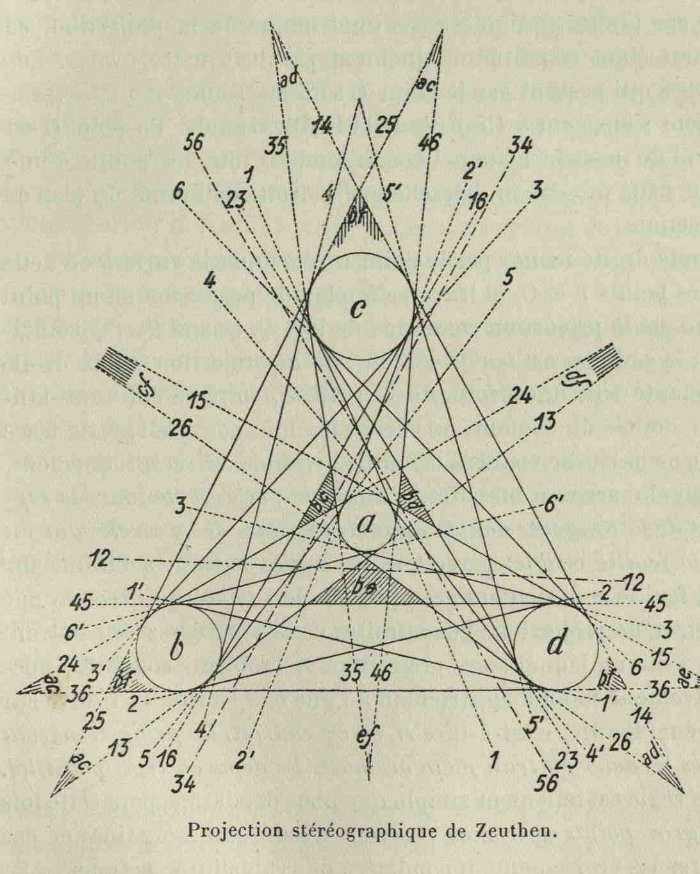
Si l'on prend le point O sur la surface elle-même, et en un point où la courbure est elliptique, par exemple le point m de la figure 25; si en outre on prend le plan de projection parallèle au plan tangent en O; alors *le contour de la projection est une courbe du quatrième degré formée de quatre ovales sans point singulier*.

(¹) Comparez ce Tableau à celui des *points de Steiner*, page 63; à celui des *plans de l'hexastigme*, page 125, etc.

Ce sont ces quatre ovales que représente la figure 29, où on les a remplacés par des cercles, leur forme exacte étant de peu d'importance; ils y sont désignés par les notations (a), (b), (c), (d) dont on verra bientôt la correspondance avec celle du paragraphe précédent.

La figure 29, due à Zeuthen, le grand mathématicien du Danemark, doit être considérée comme la réunion de deux feuilles appliquées sur le plan fixe qu'est le plan de projection, l'une tournée vers le point O et appelée la *feuille visible*, l'autre tournée du côté opposé et appelée la *feuille invisible*. Si l'on fait partir du

Fig. 29.



Projection stéréographique de Zeuthen.

point O, du même côté du plan tangent que les points de la surface qui en sont voisins, un mobile marchant en ligne droite jusqu'à l'infini, puis *continuant dans le même sens* et revenant à son point de départ par l'autre segment de la même droite, c'est la première qu'il rencontrera *d'abord* à l'aller, et c'est la seconde qu'il rencontrera d'abord au retour. Les parties dessinées en plein appartiennent à la première et celles dessinées en pointillé à la seconde. Les deux feuilles se continuent mutuellement au passage par l'infini, qui n'est pas un contour de la projection, ce contour étant constitué uniquement par les quatre ovales. Les courbes qui passent par le point O sont les seules dont les projections s'étendent *à l'infini* sur la feuille visible. Ce point O est le seul de la surface auquel correspondent tous les points d'une droite de la projection, laquelle est la droite de l'infini du plan de projection.

Toute droite menée par le point O rencontre la surface en deux autres points P et Q, et traverse le plan de projection en un point m qui est la projection commune de P et Q. Quand P et Q coïncident, le point m est sur le contour de la projection. Si la droite projetante suit une droite de la surface, sa trace suit une tangente double du contour, on verra plus loin pourquoi; cette trace passe de la feuille visible à la feuille invisible, ou réciproquement, quand elle arrive à un point de tangence; *et c'est toujours le segment de la tangente double compris entre les deux cercles qui est sur la feuille visible,* parce que les lignes passant à l'infini sur cette feuille représentent des lignes de la surface qui passent par le centre de projection. Deux droites de la surface se rencontrent si le point en lequel leurs projections se croisent, considéré successivement comme appartenant à l'une et à l'autre, se trouve sur la même feuille, c'est-à-dire *si, en cet endroit, les projections sont toutes les deux en trait plein ou toutes les deux en trait pointillé.* Cette règle est tellement simple que nous délaissons pour cette fois les *gros points* qui nous servent d'habitude à distinguer des centres les croisements répondant à de vraies intersections.

2. On peut, de six manières, associer les quatre ovales deux à deux et leur mener chaque fois quatre tangentes communes ; cela en fait *vingt-quatre,* et ce sont les projections d'autant de droites

de la surface. Voici pour les trois autres. On sait [1] que la *courbe du quatrième degré à quatre ovales* possède *vingt-huit* tangentes doubles, dont vingt-quatre, dites *de la seconde espèce,* ont leurs contacts réels et sur deux ovales différents, tandis que les quatre autres, dites *de la première espèce,* ont leurs contacts, réels ou imaginaires, sur un même ovale; quand ils sont réels, cet ovale a, entre les deux points de contact, un arc s'éloignant de la tangente double et y revenant par deux points d'inflexion. Les quatre dernières représentent dans notre cas : 1° la droite de l'infini du plan, qui est une tangente double à contacts imaginaires et arrive ici comme l'intersection du plan tangent en O avec le plan de projection; 2° les trois projections qui nous manquaient : elles sont supposées à contacts imaginaires, et représentées dans la figure 29 par les trois lignes en traits mixtes 12, 34, 56; elles sont entièrement sur la feuille invisible. Les trois droites de la surface ainsi projetées ne sont autres que celles qui ont reçu le nom de *transversales* dans le paragraphe 20.

Les quatre ovales se trouvent : un dans le triangle formé par ces trois lignes, et les autres dans les trois angles extérieurs de ce triangle; de cette façon une droite ne saurait les couper en plus de quatre points.

Les projections des vingt-sept droites de la surface sont donc, dans la figure 29 : 1° les trois tangentes doubles à contacts imaginaires, dessinées en trait mixte; 2° douze tangentes doubles externes, c'est-à-dire allant se croiser au delà du plus petit des deux cercles; 3° douze tangentes doubles internes, se croisant entre les deux cercles. Nous désignerons les droites auxquelles répond ce dernier lot par les numéros

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \\ 1', & 2', & 3', & 4', & 5', & 6', \end{array}$$

répartis, comme le montre la figure, de telle sorte que les tangentes internes communes au cercle du milieu et aux trois autres portent les numéros

$$1 \text{ et } 2', \quad 3 \text{ et } 4', \quad 5 \text{ et } 6',$$

---

(1) *Voir* SALMON, *Géometrie analytique.*

et celles communes aux cercles extérieurs les numéros

$$1' \text{ et } 2, \quad 3' \text{ et } 4, \quad 5' \text{ et } 6.$$

Les douze droites de la surface ainsi projetées se trouvent deux à deux dans six plans qui passent par les trois transversales 12, 34, 56, et *forment un double-six.*

Dès lors, *le système formé par les vingt-sept droites de la surface du troisième degré s'identifie avec celui décrit dans le paragraphe précédent et tout ce que nous avons dit de celui-ci s'applique à celui-là ;* en particulier, nous retrouvons sur la surface les *trente-six double-six* du Tableau de la page 85.

§ 24. — Plans bitangents et tritangents.

Tout plan passant par une des vingt-sept droites, par exemple la droite 12, a pour intersection avec la surface *cette droite elle-même plus une conique,* puisque la section complète doit être une ligne du troisième degré. Un quelconque de ces plans est tangent à la surface en deux points de la droite 12, réels ou imaginaires, qui sont *les intersections de la droite,* et les ∞^1 couples de points qui sont ainsi marqués sur celle-ci forment une involution. Les points doubles de l'involution sont imaginaires sur les droites du double-six fondamental, qui sont désignées par un seul chiffre et ont pour projection des tangentes doubles internes ; ils sont réels sur les quinze autres, en sorte qu'il y a *trente* points doubles réels.

Parmi les ∞^1 plans qui passent par la droite 12, et qui sont tous bitangents à la surface, il y en a *cinq* qui la touchent encore une fois *en dehors* de cette droite. Nous savons en effet qu'elle est coupée par dix de ses congénères ; ce sont, de par la loi des rencontres (page 84) : 1° les quatre *droites à un chiffre* formées avec les chiffres 1 et 2 :

$$1, \quad 1', \quad 2, \quad 2',$$

2° les six *droites à deux chiffres* formées avec les chiffres 3, 4, 5, 6 :

$$34, \quad 35, \quad 36, \quad 45, \quad 46, \quad 56.$$

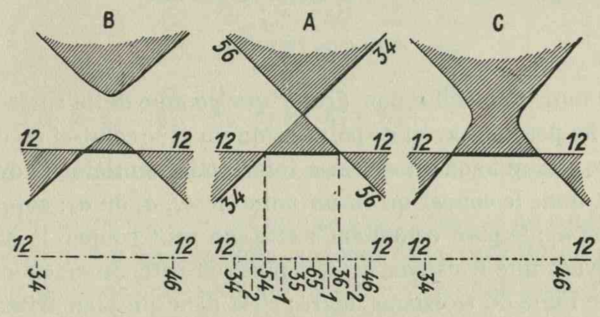
Mais ces dix droites se coupent entre elles, en vertu de cette même loi, suivant chacun des cinq couples

1 et 1', 2 et 1', 34 et 56, 45 et 63, 53 et 64,

et ces couples forment avec la droite 12 cinq plans dont chacun est tangent à la surface aux croisements des trois droites qui la déterminent : *c'est un plan tritangent.*

La figure 30 donne, en A, la forme de l'intersection de la surface

Fig. 30.



Plans bitangents et tritangents.

par le plan tritangent 12 34 56 et l'on y a marqué les numéros des droites coupant 12. Les hachures correspondent aux parties convexes qui sont au-dessus du plan, et les blancs aux parties concaves qui sont au-dessous ; l'on peut d'ailleurs avoir aussi une figure A' qui serait le *moule* de A, remplaçant les reliefs par des creux et réciproquement. Si le plan tourne légèrement autour de 12, dans un sens ou dans l'autre, la section *se déplace et se déforme*, devenant une *hyperbole* B ou C ; le plan n'est plus que bitangent. La rotation continuant, si nous sommes entraînés par elle, nous verrons ce qui suit. La conique court sur la droite en y marquant par ses intersections une infinité de couples de points en involution ; une des branches de l'hyperbole s'éloigne de plus en plus de l'autre qui finit par devenir une *parabole;* mais ce n'est qu'une transition qui amène l'*ellipse;* ellipse d'abord très allongée, se raccourcissant, s'arrondissant, s'allongeant dans le sens perpendiculaire pour donner une *autre parabole.* Et ces alternatives se reproduisent *quatre fois* pour revenir finalement au triangle A précédé de la forme C ou de la forme B [1].

On s'explique maintenant les *tangentes doubles* de la projection de Zeuthen : le plan qui projette une des vingt-sept droites est un plan bitangent, et sa trace sur le plan de projection doit être doublement tangente au contour de la projection.

On s'explique aussi les *vingt-sept* droites de la surface. Nous avons vu qu'il passe par chaque droite *cinq* plans tritangents. Prenons-en un, P. Par chacune de ses trois droites a_1, a_2, a_3 on en peut donc mener quatre autres, ce qui fait douze. Chacun de ces nouveaux plans ajoute deux droites, ce qui fait

$$3 + 2 \times 12 = 27.$$

Et c'est tout. Car soit d une droite quelconque de la surface. Le plan P ne peut pas avoir de point commun avec celui-ci en dehors de a_1, a_2, a_3, qui constituent son intersection entière; la droite d ne peut donc le couper qu'en un point de a_1, a_2 ou a_3; supposons que c'est a_1; le plan contenant d et a_1 ne peut couper la surface que suivant une troisième droite, puisque cette intersection doit être une ligne du troisième degré; c'est donc un plan tritangent, et c'est un des *quatre* qui, en plus de P, passent par a_1, de même que d est une des *huit droites* qui, en plus de a_2 et a_3, rencontrent a_1.

Il suit immédiatement de là que le nombre des plans tritangents est

$$\frac{27 \times 5}{3} = 45.$$

On les désignera en écrivant les trois droties qu'ils contiennent, et cette notation les divise en deux groupes, l'un de *trente*, l'autre de *quinze* :

Premier groupe. — Le premier groupe comprend les plans tritangents ayant deux droites du double-six générateur et une droite dérivée (c'est-à-dire deux droites à *un chiffre* et une à

---

[1] Les *quatre paraboles* ont été découvertes par M. Picquet : *Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degré* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. IV, 1875-1876, p. 153).

deux chiffres); tels sont, par exemple, les deux plans

$$1\ 12\ 2', \quad \text{et} \quad 1'\ 12\ 2$$

qui se coupent suivant la droite 12 ([1]). Le terme du milieu pourrait suffire pour désigner les deux formes en convenant d'y accentuer l'un ou l'autre des deux chiffres, c'est-à-dire d'écrire 12′ pour la première et 1′2 pour la seconde; alors les plans tritangents dont il s'agit se réunissent en un Tableau carré :

*	12′	13′	14′	15′	16′
21′	*	23′	24′	25′	26′
31′	32′	*	34′	35′	36′
41′	42′	43′	*	45′	46′
51′	52′	53′	54′	*	56′
61′	62′	63′	64′	65′	*

où l'on voit clairement que leur nombre est bien *trente*.

Deuxième groupe. — Les quinze plans restants ne contiennent que des droites à deux chiffres, qui sont celles du Tableau page 83. Comme nous aurons souvent affaire à eux désormais, nous les désignerons par les quinze symboles abréviatifs *ab*, *ac*, ... comme le montre le Tableau suivant, imité de celui du paragraphe 12, page 46.

Tableau II.

(I).	(II).	
$ab = 12\ \ 34\ \ 56,$	$bc = 16\ \ 24\ \ 35,$	$ce = 14\ \ 23\ \ 56,$
$ac = 13\ \ 25\ \ 46,$	$bd = 15\ \ 23\ \ 46,$	$cf = 15\ \ 26\ \ 34,$
$ad = 14\ \ 26\ \ 35,$	$be = 13\ \ 26\ \ 45,$	$de = 16\ \ 25\ \ 34,$
$ae = 15\ \ 24\ \ 36,$	$bf = 14\ \ 25\ \ 36,$	$df = 13\ \ 24\ \ 56,$
$af = 16\ \ 23\ \ 45,$	$cd = 12\ \ 36\ \ 45,$	$ef = 12\ \ 35\ \ 46.$

Ils sont divisés eux-mêmes en deux sous-groupes I et II, l'un de cinq, l'autre de dix, lesquels auront chacun leur rôle.

Si l'on *résout* ces égalités par rapport aux binomes de chiffres, on en a quinze autres toutes parallèles aux formules (4) de la

---

([1]) Pour avoir les plans tritangents qui passent par la droite 12, il n'y a qu'à ajouter 12 dans chacun des cinq couples de la page 91.

page 46. Ce second groupe montre on ne peut mieux qu'*il passe trois des quinze plans par chacune des quinze droites*, tandis qu'il ressort du premier que *chacun des quinze plans contient trois des quinze droites.*

§ 25. — Construction des vingt-sept droites.

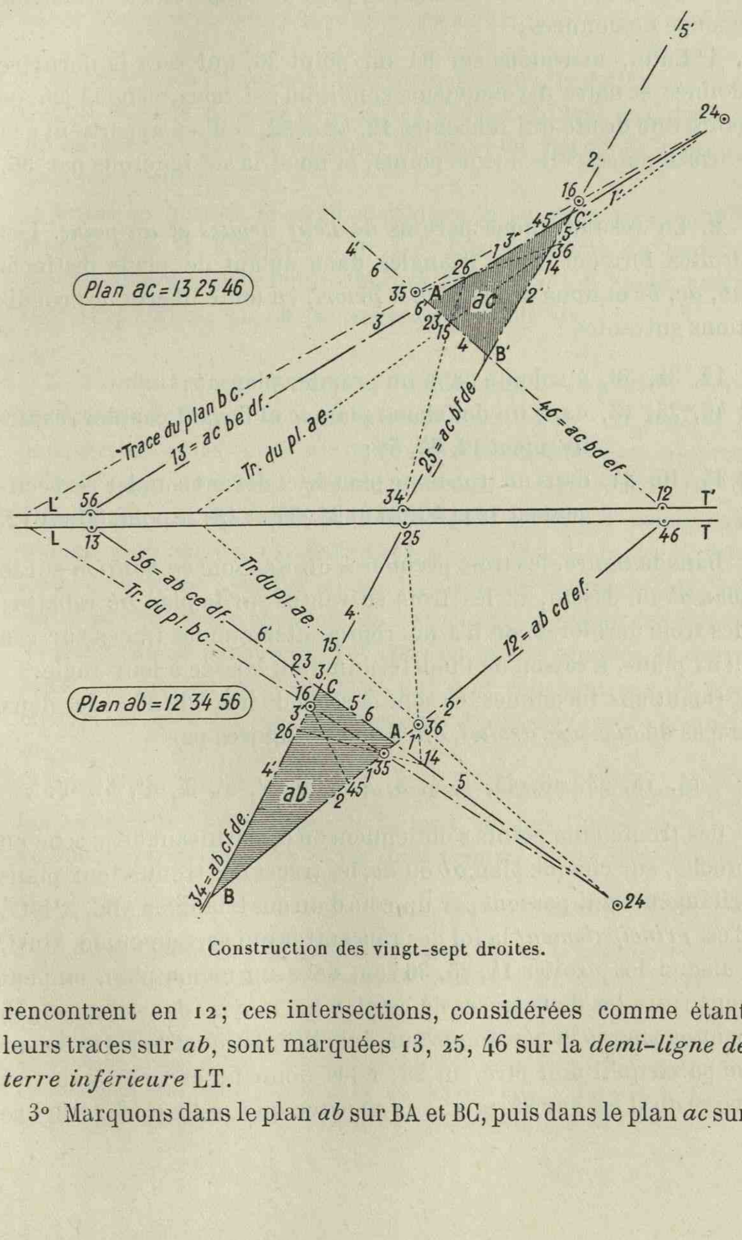
1. On peut *mettre et voir les vingt-sept droites en position* en faisant la construction qu'indique la figure 31; c'est une épure de Géométrie descriptive ordinaire, à ceci près : 1° en vue de faciliter la *séparation* dont il sera question plus bas, nous avons écarté un peu *les deux bords* LT et L'T' de la ligne de terre; 2° afin que notre construction ait toute la généralité qu'on peut demander, nous supposons *quelconque* l'angle des deux plans de projection, que nous appellerons *ab* et *ac*, au lieu des déterminations habituelles H et V; dès lors il ne peut plus être question de projections, mais seulement d'*intersections* : les droites non situées dans les plans *ab* ou *ac* seront définies et représentées simplement par *leurs traces* sur les plans. Un même groupe de deux chiffres, tel que 12, servira donc pour désigner trois choses, *une droite de l'espace, sa trace sur le plan ab et celle sur le plan ac*. Les deux espèces de traces ne pourront pas être confondues parce que le dessin est disposé de manière que les premières soient toutes *au-dessous* de la ligne de terre, et les secondes toutes *au-dessus*; les deux chiffres seront *soulignés* lorsqu'il s'agira de la droite elle-même et qu'une confusion sera possible.

Pour construire les vingt-sept droites, nous devons prendre comme point de départ un ensemble de données équivalent à *dix-neuf conditions*, parce que tel est le nombre de paramètres que contient l'équation générale du troisième degré entre trois variables. Ces données, que voici, consistent en *neuf droites et un point devant appartenir à la surface*, ce qui fait bien $(2 \times 9 + 1)$ conditions :

1° Traçons dans le plan *ab* trois droites quelconques que nous appellerons 12, 34, 56 ou indifféremment AB, BC, CA (A, B, C étant les sommets du triangle formé par elles); marquons sur la *demi-ligne de terre supérieure* L'T' leurs traces verticales 12, 34, 56.

2° Traçons dans le plan *ac* trois autres droites 13, 25, 46 ou A'C', C′B′, B′A′, que nous prenons, la première, parmi celles en nombre infini qui rencontrent la ligne de terre en 56, la deuxième parmi celles qui la rencontrent en 34, la troisième parmi celles qui la

Fig. 31.



Construction des vingt-sept droites.

rencontrent en 12; ces intersections, considérées comme étant leurs traces sur *ab*, sont marquées 13, 25, 46 sur la *demi-ligne de terre inférieure* LT.

3° Marquons dans le plan *ab* sur BA et BC, puis dans le plan *ac* sur

B′A′ et B′C′, deux points 16 et 35 tels que les deux lignes 16 35 se rencontrent sur la ligne de terre et, par suite, soient les traces d'un certain plan que nous appellerons *ac*; appelons 24 les intersections des traces de ce plan avec CA d'une part et C′A′ de l'autre; les trois droites 16, 24, 35 situées dans le plan *ac* formeront le troisième groupe de données;

4° Enfin, marquons sur BA un point 36, qui sera la dernière donnée et notre dix-neuvième condition; si nous menons par ce point une droite qui rencontre 12, 42 et 52, celle-ci appartient à la surface puisqu'elle a trois points, et nous la désignerons par 36.

2. En résumé, nous partons de *neuf droites et un point*. Les droites forment trois triangles dans autant de plans distincts *ab*, *ac*, *bc* et nous avons posé *a priori*, en toute liberté, les conditions suivantes :

12, 34, 56, à volonté dans un premier plan *ab*;
46, 25, 13, dans un deuxième plan *ac* et devant coupler respectivement 12, 34, 56;
35, 16, 24, dans un troisième plan *bc* et devant coupler respectivement 12 et 46, 34 et 25, 56 et 13; le point 36 sur 12.

Dans la figure, les trois premières droites sont *en position* sur le plan *ab* du dessin, et les trois suivantes sur le plan *ac* rabattu; des trois dernières, on n'a pu représenter que les traces sur ces deux plans, à raison de l'indétermination laissée à leur angle.

Quant aux inconnues, ce sont la seconde trace de 36 et les deux traces de *dix-sept droites*, qui seront désignées par

14, 15, 23, 26, 45, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′.

Ces trente-cinq points s'obtiennent en construisant de proche en proche, sur chaque plan *ab* ou *ac*, les traces des trente-deux plans tritangents qui passent par un côté d'un des triangles ABC, A′B′C′. C'est *principalement* la loi des rencontres qui sert de guide. Ainsi, puisque les droites 14, 25, 36 sont dans un même plan, on peut construire les deux traces de ce plan au moyen des points 24, 36 connus sur *ab* et 24 connus sur *ac*; elles donnent le point 36 sur *ac* parce qu'il doit être sur 25; elles donnent encore 15 sur *ab* parce qu'il est sur 24, et 15 sur *ac* parce qu'il est sur 46. La figure montre comment ensuite :

46 et 15	donnent	23	sur *ab*		12 et 36	donnent	45	sur *ac*	
23 et 16	»	45	»	,	45 et 16	»	23	»	.
25 et 36	»	14	»		34 et 15	»	26	»	
14 et 35	»	26	»		26 et 35	»	14	»	

Il se présente à ce moment une sorte d'hiatus, la méthode faisant défaut pour le passage des droites à deux chiffres aux droites à un chiffre; on peut la suppléer de diverses façons et continuer ensuite à l'appliquer.

Avant de quitter le sujet signalons la solution très complète donnée par M. d'Ocagne à propos d'un problème du Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1895 ([1]) et basée, comme notre exposition, sur les propriétés du double-six.

3. Maintenant, que le lecteur veuille bien : — agrandir convenablement la figure 31, par exemple trois fois, — en séparer les deux parties et les coller sur deux planchettes distinctes, — percer celles-ci aux trente-six points marqués, — les réunir par des charnières en ayant soin que leurs lignes LT et L'T' soient exactement sur l'axe de ces charnières, et que les points 12, 34, 56 de l'une coïncident avec les points 46, 25, 13 de l'autre, — les assujettir en équerre ou sous telle autre inclinaison qui lui conviendra, — enfin réunir par des fils les trois de même numéro et couvrir aussi par des fils les six droites qui sont couchées sur les planchettes. *Il aura les vingt-sept droites d'une surface du troisième degré* ([2]).

Cette surface diffère peu de la *surface de Klein* représentée par les équations particulières de la page 26. Les lignes 12, 34, 56 en sont *les transversales*, et les *arêtes du tétraèdre* sont fournies

---

([1]) Solution géométrique complète de la troisième partie du problème d'admission à l'École Polytechnique (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XIV, 1895, p. 339).

([2]) Ce n'est pas sans tâtonnements qu'on peut trouver une figure où les points soient placés comme il faut; celle dont nous faisons usage pourra être reconnue dans *Cambridge Philosophical Transactions*, vol. XVIII, 1900, p. 375 (H. M. Taylor, *On the construction of a model showing the 27 lines on a cubic surface*).

par la fusion des vingt-quatre autres quatre à quatre comme ceci :

$$\left\{\begin{matrix} 1, \\ 2', \\ 35, \\ 46; \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 1', \\ 2, \\ 36, \\ 45; \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 3, \\ 4', \\ 15, \\ 26; \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 3', \\ 4, \\ 16, \\ 25; \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 5, \\ 6'. \\ 13, \\ 24; \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 5', \\ 6, \\ 14, \\ 23. \end{matrix}\right.$$

§ 26. — Les compartiments et les ouvertures.

Les droites divisent la surface en *compartiments,* qui sont de trois sortes et au nombre total de cent trente.

Il y a *trente pentagones,* dont

$$1'\ 2\ 53\ 36\ 14$$

est un exemple ; *quatre-vingt-dix tétragones,* tels que

$$36\ 14\ 1'\ 6' \quad \text{et} \quad 36\ 6\ 1'\ 15\ ;$$

et enfin *dix triangles,* qui méritent un mot de plus. Le dédoublement des arêtes

$$ab,\ cd\ ;\quad ac,\ db\ ;\quad ad,\ bc$$

du tétraèdre primitif (*voir* p. 8) engendre *six* de ces triangles en même temps qu'il engendre les droites

$$35,\ 46\ ;\quad 36,\ 45\ ;\quad 15,\ 26\ ;\quad 16,\ 25\ ;\quad 13,\ 24\ ;\quad 14,\ 23\ ;$$

deux, 13 24 56 et 14 23 56, sont formés par les deux premiers couples avec la transversale $\beta\beta' = 56$; *deux,* 35 46 12 et 36 45 12, le sont par les deux suivants avec la transversale $\gamma\gamma' = 12$; *deux,* 15 26 34 et 16 25 34, par les deux derniers avec $\delta\delta' = 34$. En outre, parmi les droites provenant de trois arêtes d'une même face du tétraèdre, il s'en trouve encore trois qui sont dans un même plan et donnent quatre triangles de plus :

$$13\ 26\ 45,\quad 24\ 35\ 15,\quad 46\ 15\ 23,\quad 23\ 45\ 16.$$

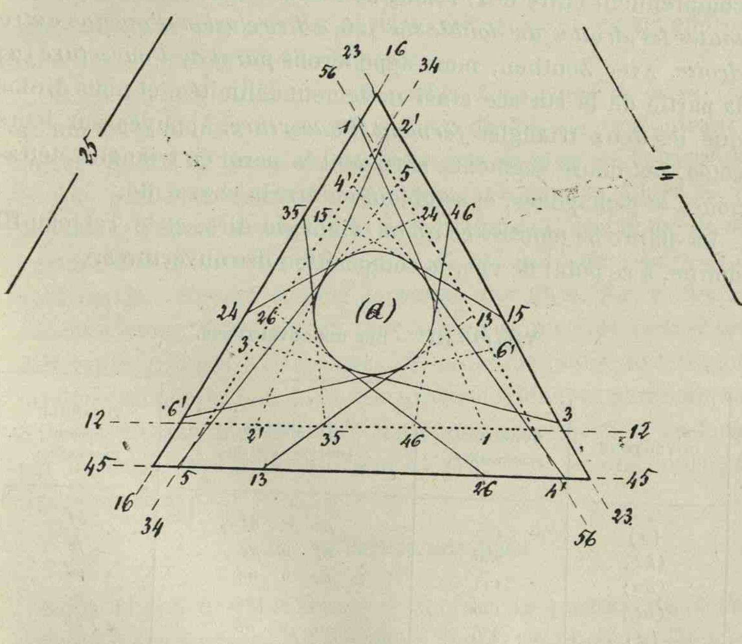
Ces dix triangles sont ceux intitulés II dans le Tableau de la page 93 ; tous les autres *périmètres triangulaires,* au nombre de trente-cinq, que les vingt-sept droites forment par leurs croisements dans l'espace, déterminent bien des plans tritangents, mais circonscrivent une région de la surface formée de plusieurs compartiments et non d'un seul triangle.

Nous dirons qu'*une ouverture et un triangle sont opposés l'un à l'autre* lorsque celle-là provient de la dilatation d'un sommet et celui-ci des arêtes de la face opposée à ce sommet, ou lorsqu'ils proviennent d'arêtes opposées.

Les dix ouvertures.

Le centre de projection avec lequel est faite la figure 29 se trouve au milieu du triangle 14 25 36 qui provient de la face su-

Fig. 32.



Paroi d'une ouverture.

périeure *bcd* du tétraèdre; le pourtour de ce triangle se projette sur les trois tangentes doubles tout à fait extérieures et n'a pas de pendant dans l'ensemble des quarante-cinq plans tritangents. On voit sur la figure que les quatre ovales

$$(a),\quad (b),\quad (c),\quad (d)$$

qui forment le contour de la projection sont entourés respectivement par les projections des droites d'un double-six

$$135,\quad 146,\quad 236,\quad 246.$$

Considérons le premier dont le double-six 135 est formé des douze droites provenant de *ab*, *ac*, *ad*. Visibles d'un côté du point de tangence, ces droites ne le sont plus de l'autre et, par suite, *ont traversé l'ouverture*. Or celle-ci est comprise entre deux triangles, l'un *visible* 16 54 35, l'autre *invisible* 12 34 56, dont les périmètres comprennent entre eux, allant de l'un à l'autre, *des segments de toutes les droites du double-six* 136, *à l'exclusion d'aucune autre droite*. Avec Zeuthen, nous appellerons *paroi de l'ouverture* (a) la partie de la surface ainsi nettement délimitée, et nous dirons que les deux triangles *ferment l'ouverture*. Appuyés sur leurs côtés, les douze segments partagent la paroi en triangles, tétragones et pentagones, et semblent en être la charpente.

La figure 32 montre ce qu'on vient de dire, et le Tableau III donne, à ce point de vue, la composition des ouvertures.

TABLEAU III. — LES DIX OUVERTURES.

OUVERTURE.	DOUBLE-SIX GÉNÉRATEUR.	TRIANGLES LIMITANT LA PAROI.	TRIANGLE opposé A L'OUVERTURE.
(a)	135	*ab* et *af*	*bf*
(bd)	256	*af* » *ae*	*fe*
(da)	123	*ae* » *ad*	*ed*
(ac)	156	*ad* » *ac*	*dc*
(d)	236	*ac* » *ab*	*cb*
(c)	146	*ab* » *ae*	*be*
(ab)	345	*ae* » *ac*	*ec*
(bc)	124	*ac* » *af*	*cf*
(cd)	346	*af* » *ad*	*fd*
(b)	245	*ad* » *ab*	*db*

Si l'on compare aux autres une des dix ouvertures, par exemple

(a), on voit deux sortes de relations : 1° il y a *trois* ouvertures

$$(ab),\quad (ac),\quad (ad)$$

dont les double-six générateurs sont *associés* avec celui de (a), c'est-à-dire ont avec lui *six droites communes* (*voir* § 20); bien plus, c'est *tout une portion de paroi qui est commune aux deux ouvertures,* et elle en est la séparation, ses deux faces étant paroi interne dans l'une et paroi externe dans l'autre ; 2° il y en a *six*

$$(b),\quad (c),\quad (d),\quad (bc),\quad (cd),\quad (db)$$

dont les double-six générateurs ont avec celui de (a) *quatre droites communes;* chacune d'elles a *un triangle de fermeture commun avec* (a); dans le voisinage de ce triangle, les deux ouvertures se trouvent de part et d'autre de son plan et de la surface; elles aussi ont une portion de paroi commune et, en cet endroit, elles sont du même côté de la paroi.

On dit qu'une ouverture est *visible d'un point de la surface* quand on peut mener par celui-ci des droites ne rencontrant la surface qu'en un point et entourées par la paroi de l'ouverture, ou une partie au moins de cette paroi. Si, dans la figure 32, on déplace le centre de projection vers la ligne 25, une nouvelle ouverture devient visible de ce côté, et (d) finit par s'éclipser du côté opposé, comme si l'on déroulait une toile. En le mettant successivement dans chacun des triangles, on voit tour à tour différents groupes d'ouvertures. Si on le met dans un tétragone ou dans un pentagone, deux des ovales deviennent paraboliques. S'il s'arrête sur une droite, le contour de la projection est formé par la droite de l'infini du plan de projection et une courbe du troisième degré.

§ 27. — Particularisations.

Nous ne pouvons pas songer à aborder la question de la *classification* des surfaces du troisième degré, résolue complètement par Schläfli et par Cayley ([1]), et assez compliquée, car il ne se

---

([1]) SCHLÄFLI, *On the distribution of surfaces of the third order into species in reference to the absence of singular points and the reality of their lines* (*Philosophical Transactions,* vol. CLIII, 1863, p. 193-241). — CAYLEY, *A Memoir on cubic* présente pas moins de *vingt-deux* types. Nous voulons seulement *indiquer* les modes principaux de particularisation ; un d'eux va nous être nécessaire.

A. *La surface diagonale.* — Si l'on poursuit le mouvement de dilatation décrit paragraphe 20, jusqu'à ce que les deux courbes concaves qu'il y a dans le haut de la figure 26 se rejoignent en une seule courbe $b'md'$, et de même pour toutes les autres, on a la figure appelée par Clebsch *surface diagonale*. On peut donc dire que la surface que nous avons étudiée sous le nom de *surface générale* est comprise entre deux *cas limites* dont l'un est la *surface de Klein* et l'autre la *surface diagonale*. Dans celle-ci, les dix triangles A sont réduits à autant de points, espèces d'*ombilics* où la surface *n'a pas de courbure*; partout ailleurs elle est à courbure hyperbolique. Elle a toujours vingt-sept droites et dix ouvertures. Elle a été étudiée par M. Bioche dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XIV, 1897.

B. *Un point conique.* — Supposons que la paroi d'une ouverture *se resserre* de plus en plus, et qu'à la limite une de ses sections se réduise à un point O. Ce sera un *point conique*, comme nous savons. Alors toutes les droites du double-six qu'il y avait sur la paroi en question passent par ce point, et il faut pour cela que *chacune de ses droites vienne coïncider avec son opposée*, autrement il y aurait quatre droites de la surface sur une même section plane. En appelant ce double-six

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \\ 1', & 2', & 3', & 4', & 5', & 6', \end{matrix}$$

les couples de droites 1 et 1', 2 et 2', ... se réduisent à *six rayons* 1, 2, 3, 4, 5, 6, qui sont les intersections de la surface par le cône tangent en O ; deux plans 1 2' et 1' 2 n'en font plus qu'un et le binome 12 désigne la droite de la surface située dans le plan des rayons 1 et 2.

Il reste donc toujours quinze droites dont la notation est composée de deux chiffres, comme dans le Tableau de la page 83,

---

surfaces (*Id.*, vol. CLIX, 1869, p. 231-326). — RODENBORG, *Zur Classification der Flächen dritter Ordnung* (*Math. Annalen*, t. XIV, 1879).

elles sont trois par trois dans quinze autres plans Δ, qui sont les plans tritangents de la surface et dont aucun n'a son point de contact en O.

Au fond, nous avons toujours le même total de 27 droites, car il y en a six comptant pour deux et quinze simples, et le même total de 45 plans tritangents, car il y en a quinze comptant pour deux (ce sont ceux qui passent par O) et quinze simples.

C. *Plusieurs points coniques.* — Il peut se former de même *deux*, *trois* ou *quatre* points coniques, *mais pas davantage.* Le dernier cas est celui de la surface de Klein, décrite paragraphe 20. Nous y voyons maintenant, en plus des six droites dont chacune compte pour quatre (les arêtes) et des trois droites simples (les transversales) :

Six plans tritangents dont chacun compte pour deux (ce sont les plans passant par une arête, ligne double, et par une transversale, ligne simple);

Quatre plans tritangents dont chacun compte pour huit parce qu'il est déterminé par trois lignes doubles (ces plans sont les quatre faces du tétraèdre);

Un plan tritangent simple (celui des trois transversales);

Total : neuf droites valant 27 et 11 plans tritangents valant 45.

Par la réunion de deux points coniques ou davantage, on a des points singuliers du degré plus élevé, dont un se représentera au Chapitre VII sous le nom de *point biplanaire,* mais dont nous n'avons pas besoin ici.

D. *Les droites imaginaires.* — Effacez de la figure 29 un des ovales avec les droites qui lui sont tangentes, puis un deuxième, puis un troisième. A chaque fois des double-six deviennent imaginaires, en totalité ou en partie et, par une analyse qui n'est pas des plus simples, vous arriveriez à reconnaître l'existence d'une nouvelle série de types qui, au lieu de réunir plusieurs droites en une seule, les fait passer du réel à l'imaginaire :

1.	27	droites réelles et	45	plans tritangents réels	(type général),
2.	15	»	15	»	
3.	7	»	5	»	
4.	3	»	13	»	
5.	3	»	7	»	

§ 28. — L'hexagramme dans l'espace.

I. — Les droites de Pascal.

Considérons une surface du troisième degré ayant un point conique O. C'est le cas particulier traité dans l'article B du paragraphe 27, et nous reprenons notre description au point où la laisse cet article. Nous rappelons : 1° que la surface a vingt et une droites, dont six

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

passent par O et sont sur un cône du second degré, tandis que les quinze autres, désignées collectivement par la lettre δ, sont dans les quinze plans que déterminent les premières prises deux à deux; 2° que les droites δ, prises trois par trois, forment quinze triangles Δ, situés dans quinze autres plans que nous appellerons aussi Δ, et qui sont les plans tritangents de la surface ne passant pas par O. Ces quinze droites et ces quinze plans sont désignés respectivement par les symboles

$$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16;\quad 23,\ 24,\ 25,\ 26;\quad 34,\ 35,\ 36;\quad 45,\ 46;\quad 56,$$

et

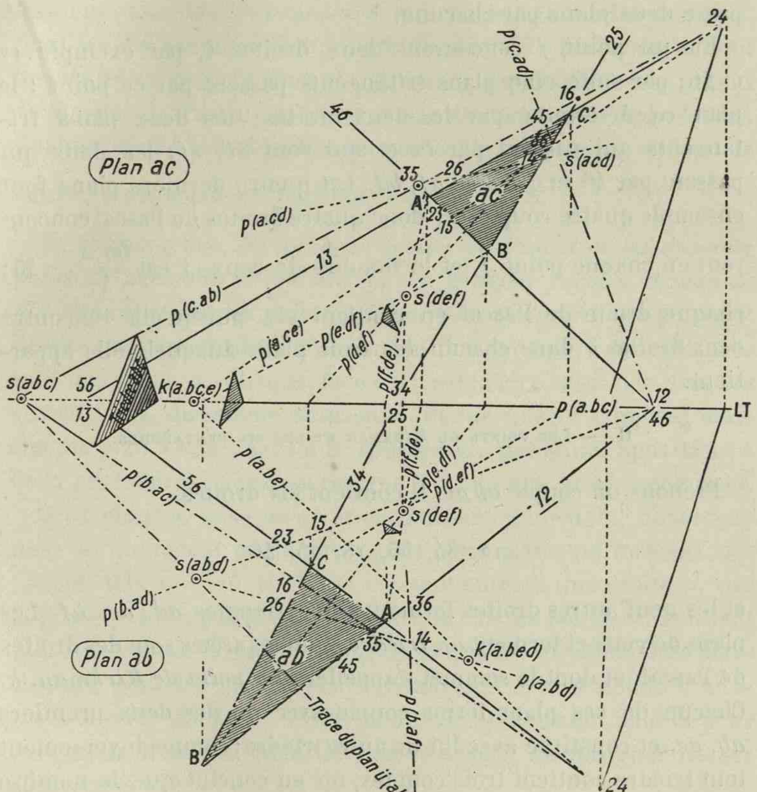
$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af;\quad bc,\ bd,\ be,\ bf;\quad cd,\ ce,\ cf;\quad de,\ df;\quad ef,$$

entre lesquels il existe, en vertu des formules (I) et (II) de la page 93, des relations qui ne sont autres que les formules (3) et (4) du paragraphe 12, page 46. Le lecteur voudra bien se reporter à ces dernières, que nous ne reproduirons pas ici; il devra oublier provisoirement la signification qu'avaient alors les chiffres et les lettres et leur attribuer celle du présent Chapitre.

Quand deux triangles Δ n'ont pas de côté commun, nous dirons qu'ils *forment un couple*, et nous dirons aussi la même chose de leurs plans. Le nombre des couples est *soixante*, parce que chaque plan ou triangle entre dans huit couples. Les deux plans d'un couple se coupent suivant une droite que nous appellerons *une droite de Pascal;* cette droite rencontre la surface en trois points j, en lesquels les trois côtés du triangle d'un des deux plans rencontrent respectivement ceux du triangle de l'autre plan. Par exemple, l'intersection des deux plans

$$ab = 12\,34\,54, \qquad ac = 13\,25\,46$$

Fig. 33.



L'hexagramme dans l'espace.

(c'est *la ligne de terre* de l'épure 31, page 95) (¹) rencontre la

---

(¹) Nous ferons usage de l'épure 31 pour donner un corps à nos déductions, bien qu'elle représente une surface *générale* du troisième degré, et non une surface à point conique. Ce sera une preuve *de fait* de cette proposition sur laquelle nous insisterons plus loin, que les propriétés de l'hexagramme sont vraies dans le premier cas comme dans le second.

Nous avions admis jusqu'ici que l'angle des plans *ab* et *ac* de l'épure était *quel-*

surface aux points j : 13 56, 25 34, 12 46. Nous la désignerons par $\varpi(a.bc)$.

Les soixante couples donnent ainsi soixante droites de Pascal. Elles sont distribuées huit par huit dans les quinze plans, et il passe deux plans par chacune.

En un point j concourent deux droites δ, par exemple 12 et 46; par suite cinq plans tritangents passent par ce point : le plan cd déterminé par les deux droites; les deux plans tritangents qui passent par 12 et qui sont ab, ef; les deux qui passent par 46 et qui sont af, bd. Les quatre derniers plans font ensemble quatre couples Δ; donc quatre droites de Pascal concourent en chaque point j, et le nombre de ceux-ci est $\frac{60.3}{4} = 45$; chaque droite de Pascal en contient six, puisqu'elle rencontre deux droites δ dans chacun des trois plans auxquels elle appartient.

II. — Les points de Kirkman et les six pentaèdres.

Prenons un couple $ab\,ac$. Il contient six droites

$$12,\ 34,\ 56,\ 13,\ 25,\ 46$$

et les neuf autres droites forment trois triangles ad, ae, af. Les plans de ceux-ci forment *un trièdre,* dont les arêtes sont des droites de Pascal, et dont le sommet s'appellera *un point de Kirkman, k.* Chacun de ces plans forme couple avec un des deux premiers ab, ac, et constitue avec lui un autre trièdre; comme inversement tout trièdre contient trois couples, on en conclut que le nombre de ces trièdres, que nous appellerons *de première espèce,* est $\frac{60.3}{3} = 60$. C'est aussi celui des points k. Il passe trois droites de Pascal par chaque point k (1), et chacune en contient trois.

---

conque et nous ne pouvions alors figurer *que des points situés dans ces deux plans;* nous admettrons maintenant qu'il est *droit,* afin de pouvoir figurer les autres points par des projections à la façon ordinaire.

(1) Cette constatation et quelques autres de même genre seraient puériles en elles-mêmes, si ce n'était la démonstration intuitive qu'elles fournissent pour les théorèmes correspondants de l'hexagramme-plan.

Les soixante trièdres et les soixante couples se correspondent un à un, chacun des premiers contenant neuf droites situées dans ses trois faces, chacun des seconds six droites situées dans ses deux plans. Les trois faces du trièdre et les deux plans du couple forment ensemble *un pentaèdre*, qui contient toutes les droites δ, dont les dix sommets sont autant de points de Kirkman, et dont les dix arêtes respectivement opposées à ces sommets sont autant de droites de Pascal qu'on peut appeler *leurs correspondantes*. Chaque point k individualise un pentaèdre et, puisque chacun de ceux-ci a dix sommets, leur nombre est $\frac{60}{10} = 6$.

En conséquence, *les soixante droites de Pascal et les soixante points de Kirkman se divisent en six groupes formés chacun de dix droites et des dix points qui leur correspondent*. Ces points et droites sont les sommets et les arêtes d'un *pentaèdre* dont les faces sont des plans Δ. Chaque face d'un pentaèdre, associée avec les autres faces du même pentaèdre, donne quatre couples; mais chaque plan Δ entre dans huit couples et, par suite, appartient à deux pentaèdres; deux pentaèdres ont toujours un plan commun.

Deux plans Δ, tels que ab et ac, formant un couple, appartiennent à un même pentaèdre; mais deux plans ne formant pas couple, tels que ab et cd, se coupent suivant une droite d, par laquelle passe aussi le plan ef, puisque chaque pentaèdre contient toutes les quinze droites. Il suit de là que les six pentaèdres fournissent, pour les quinze plans tritangents Δ, une notation analogue à celle que les génératrices du cône O nous ont donnée pour les quinze droites d. Rien ne nous empêche de désigner les six pentaèdres par

$$a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ f,$$

car ces lettres isolées n'ont aucun sens jusqu'ici; alors la notation dont il s'agit se traduit par des formules identiques aux formules (4) et assigne les faces des six pentaèdres suivant un Tableau qui serait la reproduction de celui du paragraphe 12, page 46.

Nous pouvons donc maintenant *séparer* les éléments de ces binomes mystérieux ab, ac,... etc., qui nous accompagnent depuis le début du Chapitre III, et leur donner un sens géométrique. Ces binomes désignent *les plans communs de six pen-*

taèdres déterminés, et leurs éléments a, b, c, d, e, f *ne sont autre chose que ces pentaèdres eux-mêmes.* Ceux-ci peuvent être pris comme données premières; ils définissent alors nos quinze plans par leurs associations deux à deux comme le montrent les formules (4) et puis ceux-ci définissent les quinze droites par leurs associations trois à trois, comme le montrent les formules (3).

III. — Les points de Steiner.

1. Les trois couples de droites δ, par exemple

$$12\,46,\quad 25\,34,\quad 13\,56,$$

concourantes en trois points j d'une droite de Pascal $\varpi(a.bc)$ (qui est la *ligne de terre* de l'épure 33, intersection des plans ab, ac), donnent *six triangles* que réunit le carré suivant :

12	34	56	...ab
46	25	13	...ac
35	16	24	...bc
...ef	...de	...df	

On a les trois premiers en lisant le carré *par lignes* et les trois autres en le lisant *par colonnes* [1]. Chaque groupe de trois forme un *terne de seconde espèce.*

Au lieu des triangles on peut considérer les plans les continuant et les désigner par les mêmes binomes littéraux. Nous dirons des plans ou triangles d'un même terne qu'ils sont *associés entre eux,* et des deux ternes qu'ils sont *conjugués l'un de l'autre.* Les deux ternes de plans forment *deux trièdres,* que nous appellerons *de seconde espèce,* et qui sont de même conjugués l'un de l'autre. Prenons d'abord le premier *ab ac bc.*

Les deux triangles ab et ac se voient de suite sur l'épure 33 : ce sont les deux triangles teintés, situés, l'un ABC dans le plan ab (plan de la feuille), l'autre $A'B'C'$ dans le plan ac (rabattu sur la feuille). Les côtés de leur associé bc, ou $A''B''C''$, ont pour traces sur ces deux plans les points 16, 24, 35 et le plan bc a pour traces

---

[1] Comparez § 12, page 53.

les deux lignes droites qui, dans chacun d'eux, contiennent ces trois points. Mais le triangle, moins favorisé que son homonyme de la figure 20, a deux sommets, A″ et C″, trop éloignés pour que leurs projections puissent être représentées, et nous n'avons pas représenté celles de B″. Les trois arêtes du trièdre sont la ligne de terre et les deux lignes 16 24 35, qui sont dessinées en *trait mixte* et vont se couper sur la ligne de terre en un point marqué $s(abc)$. Nous appellerons celui-ci *un point de Steiner*.

Les arêtes du trièdre conjugué *de df ef* ont pour traces sur *ab* et *ac* les sommets des deux triangles ombrés. Elles se rencontrent dans l'espace en un point unique marqué $s(def)$ et représenté par ses deux projections : c'est aussi un point de Steiner, duquel nous dirons qu'il est *conjugué du précédent*.

Tout couple de triangles Δ détermine de même deux trièdres conjugués et, comme chaque trièdre comprend trois couples, le nombre des trièdres dont il s'agit est $\frac{60}{3} = 20$, conjugués deux à deux. Leurs arêtes sont les soixante droites de Pascal.

Chaque droite de Pascal contient un point de Steiner, sommet d'un trièdre de second espèce. Mais d'autre part, puisque les dix droites de Pascal contenues dans un pentaèdre en sont les arêtes, elles se rencontrent exclusivement sur les dix sommets, qui sont des points k. Par suite, les trois droites de Pascal concourantes en un point de Steiner appartiennent à trois pentaèdres différents; le point de Steiner est commun à ces trois pentaèdres, tandis que son conjugué l'est aux trois autres. La notation $s(abc)$ exprime cette participation du point O aux trois pentaèdres a, b, c; elle montre encore que ce point est l'intersection des trois plans tritangents conjugués ab, bc, ca; elle fait ressortir que les quatre points $s(abc, abd, abe, abf)$ sont communs aux deux pentaèdres a et b, et se retrouvent dans le plan ab. Si l'on veut vérifier ce dernier point, il suffit d'observer — qu'un plan face d'un trièdre entre dans deux des trois couples appartenant à ce trièdre; — que tout plan Δ est commun à huit couples, appartient par suite à quatre trièdres différents et contient quatre points σ.

IV. — Les plans de Plücker.

Considérons les quatre points σ situés dans le plan ab, desquels partent, sortant de ce plan, les quatre droites de Pascal

$$\varpi(c.ab,\ d.ab,\ e.ab,\ f.ab).$$

Deux quelconques de ces quatre droites se rencontrent. En effet, en vertu des formules (4), les plans ac, bd se coupent suivant une droite 46, par laquelle passe aussi le plan ef; les plans bc, ad se coupent suivant une droite 35 que contient aussi le même plan ef. Donc les quatre plans ac, bc, ad, bd, dont les deux premiers se coupent suivant $\varpi(c.ab)$ et les deux autres suivant $\varpi(d.ab)$, ont un point commun. Comme on peut faire le même raisonnement pour deux quelconques des quatre droites, elles se rencontrent toutes deux à deux et par suite sont dans un même plan. Nous appellerons celui-ci un plan de Plücker, et le désignerons par le symbole $\ddot{u}(ab)$; les six sommets du quadrilatère formé par ses quatre droites de Pascal sont des points j.

Il passe deux plans de Plücker par chaque point j; en effet le point j intersection des droites

$$35 = ad\,bc\,ef, \qquad 46 = ac\,bd\,ef$$

est dans le plan de Plücker $\ddot{u}(ab)$ comme dans celui $\ddot{u}(cd)$. Nous avons vu qu'au même point j concourent quatre droites de Pascal : des six plans que ces droites déterminent deux à deux, quatre sont des plans Δ et deux des plans $\ddot{u}$.

V. — Les droites de Steiner et l'hexaèdre polaire.

Les quatre points $s(abc, abd, abe, abf)$ sont à la fois dans le plan tritangent $\Delta(ab)$ et dans le plan de Plücker $\ddot{u}(ab)$. Ils sont donc en ligne droite; nous appellerons celle-ci *une droite de Steiner* et la désignerons par $t(ab)$. Ainsi il correspond aux quinze plans Δ : quinze plans de Plücker $\ddot{u}$ qui contiennent chacun quatre droites de Steiner, et quatre droites de Steiner t qui contiennent chacune quatre points de Steiner.

Réciproquement, il passe par le point $s(abc)$ les trois droites de Steiner $t(ab)$, $t(bc)$, $t(ca)$.

Deux droites se coupent en un point de Steiner si leurs symboles ont une lettre commune. Par exemple, $t(ab)$ et $t(ac)$ se coupent sur $s(abc)$. Il suit de là que les cinq droites

$$t(ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af)$$

se coupent deux à deux et sont dans un même plan; elles y forment un 5-latère dont les dix sommets sont autant de points de Steiner. Donc les vingt points de Steiner sont dix par dix et les quinze droites de Steiner cinq par cinq dans six plans ; en d'autres termes, *les premiers sont les vingt sommets, opposés ou conjugués deux à deux, et les secondes sont les quinze arêtes d'un hexaèdre* A' *qui forme en quelque sorte le noyau de toute la figure :* c'est le fameux *hexaèdre polaire* des auteurs allemands. Nous désignerons ses faces par a', b', c', d', e', f'; elles correspondent aux six pentaèdres en ce sens, par exemple, que a' contient les droites de Steiner situées dans les faces du pentaèdre a, etc.

VI. — Les droites de Cayley.

Considérons les trois trièdres ayant respectivement pour faces les plans

$$\begin{array}{lllll} ad, & bd, & cd, & \ldots, & (d), \\ ae, & be, & ce, & \ldots, & (e), \\ af, & bf, & cf, & \ldots, & (f); \end{array}$$

comme on voit, ils ont pour sommets des points de Kirkman et pour arêtes des droites de Pascal appartenant les uns et les autres aux pentaèdres d, e, f.

Les arêtes des deux premiers trièdres, prises par couples,

$$\begin{array}{lcl} p(d.ab) & \text{et} & p(e.ab), \\ p(d.ac) & \text{et} & p(e.ac), \\ p(d.bc) & \text{et} & p(e.bc), \end{array}$$

sont ensemble dans les plans de Plücker

$$\ddot{u}(ab),\quad \ddot{u}(ac),\quad \ddot{u}(bc)$$

et, par suite, se rencontrent en trois points j. Dès lors les deux trièdres sont perspectifs. Ces trois points j sont les sommets d'un triangle inscrit dans le premier trièdre et ayant pour côtés les droites de Pascal

$$p(a.de),\quad p(b.de),\quad p(c.de),$$

ce qui montre que le plan du triangle n'est autre que le plan de Plücker $\ddot{u}(de)$.

En remplaçant le second trièdre par le troisième, on obtient un autre triangle inscrit dans le premier et ayant pour côtés les droites de Pascal

$$p(a.df),\quad p(b.df),\quad p(c.df)$$

situées dans le plan de Plücker $\ddot{u}(df)$. Puisque les deux triangles sont perspectifs, leurs côtés homologues se rencontrent en trois points d'une ligne droite qui est l'intersection des plans de Plücker $\ddot{u}(de)$, $\ddot{u}(df)$ et qui passe par le point de Steiner $s(def)$, attendu que celui-ci est dans chacun des deux plans. Mais ces points de rencontre des côtés homologues ne sont autre chose que les points de Kirkman

$$k(a.def),\quad k(b\ def),\quad k(c,def)$$

appartenant respectivement aux pentaèdres a, b, c et correspondant aux droites de Pascal

$$p(a.bc),\quad p(b.ca),\quad p(c.ab),$$

qui concourent sur le point de Steiner $s(abc)$. Il en résulte un énoncé tout pareil à celui du paragraphe **17**, amenant dix couples de droites de Cayley conjuguées, tels que $y(abc)$ et $y(def)$.

La droite de Cayley $y(def)$ passe par le point de Steiner $s(def)$ et est dans les plans de Plücker $\ddot{u}(de)$, $\ddot{u}(df)$. On prouverait de la même manière qu'elle est aussi dans le plan $\ddot{u}(ef)$ et, en outre, que celui-ci contient encore les trois autres droites

$$y(cef,\ bef,\ def).$$

Donc les vingt droites y sont quatre par quatre dans les quinze plans $\ddot{u}$, et il passe trois de ces plans par chacune d'elles.

VII. — Les plans de Salmon.

Considérons les deux pentaèdres a et b. Leurs faces non communes

$$ac,\ ad,\ ae,\ af;\quad bc,\ bd,\ be,\ bf$$

forment deux tétraèdres perspectifs. En effet les faces correspondantes se coupent suivant des droites de Pascal

$$p(c.ab),\quad p(d.ab),\quad p(e.ab),\quad p(f.ab)$$

qui sont situées dans un même plan $\ddot{u}(ab)$, d'où il suit que les quatre droites qui joignent deux sommets correspondants, tels que

$$k(a.def) \text{ et } k(b.def),\quad \text{et}\quad k(a.cef) \text{ et } k(b.cef),\quad \ldots,$$

concourent en un même point. Comme ces couples de points sont sur les droites de Cayley

$$y(def,\ cef,\ bef,\ aef),$$

la même conclusion s'applique à celles-ci. Donc *les quatre droites de Cayley communes à deux pentaèdres concourent en un même point :* c'est (*voir* § 18) un *point de Salmon* $m(ef)$.

Le point de Salmon $m(ef)$ est un centre de perspective commun à trois tétraèdres. Nous venons de voir les deux premiers, formés par les faces non communes des deux pentaèdres a et b; le troisième a pour sommets les points de Steiner conjugués des quatre qui sont sur la droite de Steiner $t(ef)$, et pour faces les faces c', d', e', f', de l'hexaèdre A'. Les faces correspondantes du premier et du troisième se coupent sur les droites de Steiner

$$t(fd,\ fc,\ fb,\ fa)$$

et, par suite, leur plan d'homologie est f'; semblablement, c'est le plan d'homologie du second et du troisième ; quant aux premier et deuxième, nous avons vu que leur plan d'homologie est $\ddot{u}(ef)$. La droite de Cayley $y(def)$ contient donc trois centres de perspective, qui sont des sommets des pentaèdres f, e, d, et ne sont autre chose que les points de Salmon $m(ef)$, $m(df)$, $m(cf)$. Donc les points m sont au nombre de quinze, alignés par trois sur les vingt droites y. On peut voir en outre qu'ils sont par six sur les plans de Plücker, qui sont les plans projetants des arêtes des trois tétraèdres perspectifs, etc.

VIII. — Retour a l'hexagramme de Pascal.

Projetons du point O, sur un plan quelconque, les points et droites que nous avons vu naître avec tant de profusion et que nous avons essayé de débrouiller. Les droites 1, 2, 3, 4, 5, 6 coupent ce plan suivant une conique, pour laquelle rien ne nous empêche de prendre la conique des six points fondamentaux (1), paragraphe **12**; les soixante couples de triangles Δ donnent ceux que nous avons désignés par la même lettre dans le Chapitre précédent; les six pentaèdres donnent les six figures A; les droites de Pascal, les points de Steiner, etc. donnent les droites et points qui portent les mêmes dénominations dans l'hexagramme et que nous n'avons d'ailleurs adoptées qu'en prévision de l'identification que nous faisons maintenant. Tous les théorèmes du Chapitre précédent se trouvent ainsi démontrés à nouveau, et la subordination de la figure plane à celle de l'espace est mise en évidence.

§ 29. — L'hexagramme dans l'espace (*suite*).

Le paragraphe précédent traite la question par la Géométrie ; on va voir l'Analyse s'y appliquer avec non moins d'aisance et y apporter son genre de lumière particulier [1].

1. Nous référant toujours aux formules (3), page 46, considérons les deux *carrés de binomes*

$$ab = 12\ 34\ 56, \qquad ef = 12\ 35\ 46,$$
$$ac = 13\ 25\ 46, \qquad df = 13\ 24\ 56,$$
$$bc = 16\ 24\ 35, \qquad de = 16\ 25\ 34;$$

ce sont maintenant six plans tritangents formant les deux trièdres conjugués décrits à la page 108 et figurés dans l'épure 33. On sait

---

[1] Les considérations qui suivent s'appliquent également, soit que l'on considère les quinze droites sur la surface donnée d'un point conique, ou sur la surface générale.

qu'il existe *dix couples* de trièdres pareils [1]; chacun d'eux pourrait être employé au même titre et de la même façon que celui que nous venons de choisir.

Soient, dans un système quelconque de coordonnées cartésiennes,

$$(1) \qquad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = 0$$

les équations respectives des plans

$$ab, \ ac, \ bc; \quad ef, \ df, \ de.$$

Celles de leurs *neuf droites d'intersection* sont alors

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{lll} 12: \begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \alpha_4 = 0; \end{cases} & 42: \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_5 = 0; \end{cases} & 52: \begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_6 = 0; \end{cases} \\ 13: \begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_5 = 0; \end{cases} & 43: \begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \alpha_6 = 0; \end{cases} & 53: \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_4 = 0; \end{cases} \\ 16: \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_6 = 0; \end{cases} & 46: \begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_4 = 0; \end{cases} & 56: \begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \alpha_5 = 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

et nous allons d'abord chercher celles des six autres droites du système.

Comme l'équation de la surface doit être satisfaite par une quelconque de ces combinaisons des α elle est nécessairement de la forme

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \lambda \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6.$$

Or on peut écrire ainsi les équations des six plans, en y introdui-

---

[1] Ce chiffre de *dix* est relatif aux *quinze droites* représentées par un symbole de deux chiffres. Si l'on a affaire à la surface générale, il s'ajoute à celle-ci les douze droites du double-six fondamental (*voir* les deux Tableaux à la fin du paragraphe 22); alors il y a encore vingt couples de trièdres conjugués de la forme

$$12' \ 23' \ 31'; \quad 21' \ 32' \ 13'$$

et quatre-vingt-dix de la forme

$$12 \ 34 \ 56, \ 14', \ 32'; \quad 14 \ 23 \ 56, \ 34', \ 12',$$

ce qui en fait *cent vingt* en tout.

sant huit paramètres nouveaux a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 :

$$(1') \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \\ \alpha_5 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4, \\ \alpha_6 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 + b_4\alpha_4, \end{cases}$$

car le nombre des paramètres est *dix-huit* dans la nouvelle forme comme dans l'ancienne. Si nous posons

$$(4) \quad x_1 = p_1\alpha_1, \quad x_2 = p_2\alpha_2, \quad \ldots, \quad x_6 = p_6\alpha_6,$$

$$(5) \quad \begin{cases} p_1 = a_1 p_5 + b_1 p_6 = 0, \\ p_2 = a_2 p_5 + b_2 p_6 = 0, \\ p_3 = a_3 p_5 + b_3 p_6 = 0, \\ p_4 = a_4 p_5 + b_4 p_6 = 0, \end{cases}$$

il est clair que nous aurons, *toujours et forcément,*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 0.$$

Cette relation se présente avec le caractère particulier d'une *identité,* c'est-à-dire se satisfait d'elle-même, en conséquence des coefficients implicitement contenus dans les polynomes x, quelles que soient les valeurs attribuées aux coordonnées simples ; nous accentuerons *ce caractère d'identité* en substituant le signe spécial $\equiv$ au signe ordinaire $=$.

Aux quatre équations en p_i ajoutons celle-ci

$$p_1 p_2 p_3 + \lambda p_4 p_5 p_6 = 0$$

et éliminons p_1, p_2, p_3, p_4 : il vient une équation du troisième degré en $\frac{p_5}{p_6}$. En calculant les p avec une racine de cette équation, les α de l'équation (3) sont remplacés par les x, et son coefficient λ par l'unité. *La surface est représentée maintenant par ces deux équations*

$$(6) \quad x_1 x_2 x_3 + x_4 x_5 x_6 = 0,$$

$$(7) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \equiv 0,$$

et nous rappelons que x_1, x_2, x_3, ... désignent des fonctions linéaires déterminées des coordonnées proprement dites, aucun nom n'étant attribué à celles-ci, parce que nous n'avons pas à les considérer en elles-mêmes.

2. D'après (2) et (4), les équations

$$x_3 + x_4 = 0, \qquad x_1 + x_5 = 0, \qquad x_2 + x_6 = 0$$

représentent trois plans passant respectivement par les droites 12, 42, 52. En vertu de (7), ces plans passent par une même droite et cette commune intersection a pour équations

$$(8) \qquad x_3 + x_4 = x_1 + x_5 = x_2 + x_6 = 0.$$

Elle est sur la surface, car les équations (6), (7), (8) sont satisfaites toutes les trois par

$$x_3 = -x_4, \qquad x_1 = -x_5, \qquad x_2 = -x_6.$$

Puisqu'elle est dans un même plan avec 12, avec 42 et avec 52, c'est, en vertu de la *loi des rencontres* (p. 84), celle des droites de la surface dont le symbole ne contient aucun des chiffres 1, 2, 4, 5, c'est-à-dire la droite 36; (8) est donc l'équation de celle-ci.

Faisant le même raisonnement avec les droites 13, 43, 53, puis 16, 46, 56, nous trouverons de même que

$$x_2 + x_5 = x_3 + x_6 = x_1 + x_4 = 0$$

et

$$x_1 + x_6 = x_2 + x_4 = x_3 + x_5 = 0$$

sont les équations des droites 26 et 23.

Prenant ensuite le Tableau (2) par colonnes verticales, la première nous donnera les équations de la droite qui exclut de son symbole les chiffres 1, 2, 3, 6, c'est-à-dire 45, la deuxième celle qui exclut 2, 3, 4, 6, c'est-à-dire 15, et la troisième celle qui exclut 2, 3, 5, 6, c'est-à-dire 14.

On a dès lors les équations des quinze droites, mais sous deux formes différentes : neuf sous la forme (2), où l'on peut remplacer la lettre α par la lettre x, et six sous la forme (8). Il convient, pour la symétrie, de ramener celles-là à celles-ci, l'inverse étant évidemment impossible.

A cet effet, reprenons la question *ab ovo* et partons d'un autre couple de trièdres conjugués, par exemple

$$de, \quad ae, \quad ad; \quad cf, \quad bf, \quad bc,$$

aux six plans duquel nous donnerons respectivement les équations

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = 0; \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_6 = 0.$$

En raisonnant de la même manière, nous mettrons encore l'équation de la surface sous la forme (6, 7) et nous obtiendrons les équations des six droites

$$12, \quad 13, \quad 23; \quad 64, \quad 65, \quad 45$$

sous la forme demandée. Mais, en réalité, cela ne nous en donne que quatre nouvelles, car 13 et 45 se trouvent déjà dans le lot précédent. Prenons alors un troisième couple, par exemple

$$ef, \quad fa, \quad ae; \quad cd, \quad cb, \quad bd$$

avec les équations

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_5 = 0, \quad \gamma_6 = 0; \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_4 = 0, \quad \gamma_3 = 0;$$

nous aurons les droites 13, 14, 34, et 25, 26, 56, ce qui nous en fera quatorze. La dernière s'obtiendra de même avec le couple

$$df, \quad af, \quad ad; \quad ec, \quad be, \quad bc$$

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_4 = 0, \quad \delta_6 = 0; \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = 0, \quad \delta_5 = 0.$$

On aura ainsi formé les quinze équations qui occupent la gauche du Tableau suivant. Celles de droite s'en déduisent à première vue en vertu des équations (3) : par exemple, ab a pour équation $x_1 + x_2 = 0$ parce que cette équation se trouve dans les lignes qui, à gauche, ont pour en-tête 12, 34 et 56. Et si l'on observe la loi très simple suivant laquelle procèdent les indices dans les équations de droite, on verra l'*idée* qui présida, dès le début du Chapitre précédent, à l'attribution réciproque des lettres et des chiffres. Cette attribution est aussi celle adoptée par Cremona et par Richmond; c'est un peu différent dans Veronese, Klein et Zeuthen et Cayley.

$$\left\{\begin{array}{l}
12 \ldots \; x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = 0, \\
13 \ldots \; x_1 + x_3 = x_2 + x_5 = x_4 + x_6 = 0, \\
14 \ldots \; x_1 + x_4 = x_2 + x_6 = x_3 + x_5 = 0, \\
15 \ldots \; x_1 + x_5 = x_2 + x_4 = x_3 + x_6 = 0, \\
16 \ldots \; x_1 + x_6 = x_2 + x_3 = x_4 + x_5 = 0;
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{l}
ab \ldots \; x_1 + x_2 = 0, \\
ac \ldots \; x_1 + x_3 = 0, \\
ad \ldots \; x_1 + x_4 = 0, \\
ae \ldots \; x_1 + x_5 = 0, \\
af \ldots \; x_1 + x_6 = 0;
\end{array}\right.$$

$23\ldots\ x_1+x_6=x_2+x_4=x_3+x_5=0,$	$bc\ldots\ x_2+x_3=0.$
$24\ldots\ x_1+x_5=x_2+x_3=x_4+x_6=0,$	$bd\ldots\ x_2+x_4=0,$
$25\ldots\ x_1+x_3=x_2+x_6=x_4+x_5=0,$	$be\ldots\ x_2+x_5=0,$
$26\ldots\ x_1+x_4=x_2+x_5=x_3+x_6=0;$	$bf\ldots\ x_2+x_6=0;$
$34\ldots\ x_1+x_2=x_3+x_6=x_4+x_5=0,$	$cd\ldots\ x_3+x_4=0,$
$35\ldots\ x_1+x_4=x_2+x_3=x_5+x_6=0,$	$ce\ldots\ x_3+x_5=0.$
$36\ldots\ x_1+x_5=x_2+x_6=x_3+x_4=0;$	$cf\ldots\ x_3+x_6=0;$
$45\ldots\ x_1+x_6=x_2+x_5=x_3+x_4=0,$	$de\ldots\ x_4+x_5=0,$
$46\ldots\ x_1+x_3=x_2+x_4=x_5+x_6=0;$	$df\ldots\ x_4+x_6=0;$
$56\ldots\ x_1+x_2=x_3+x_5=x_4+x_6=0.$	$ef\ldots\ x_5+x_6=0.$

3. L'équation (7) peut s'écrire

$$(x_1+x_2+x_3)\equiv-(x_4+x_5+x_6),$$

ou, en élevant au cube et ramenant tout dans le même membre,

$$\begin{gathered}0\equiv x_1^3+x_2^3+\ldots+x_6^3\\+(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_4+x_5)(x_5+x_6)(x_6+x_4).\end{gathered}$$

Mais, d'après le Tableau IV, la seconde ligne se réduit à zéro, et les équations de la surface deviennent

$$\begin{gathered}x_1^3+x_2^3+\ldots+x_6^3=0,\\x_1+x_2+\ldots+x_6\equiv0.\end{gathered}$$

L'ensemble de ces deux relations s'appelle *l'équation canonique*. On y peut remplacer la première, suivant la commodité, soit par une quelconque des combinaisons analogues à

$$x_1x_2x_3+x_4x_5x_6=0,$$

soit par une quelconque de celles analogues à

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_4+x_5)(x_5+x_6)(x_6+x_4);$$

ces combinaisons sont au nombre de *vingt* [1].

---

[1] H.-N. TAYLOR (*Philosophical Transactions of the R. S. of London*, vol. 135A, 1895, page 37) traite la question en employant cette autre et intéressante forme de

Afin de donner une application de ces formules, vraies évidemment pour la surface générale, montrons comment on écrirait l'équation de celle qui contient les vingt-sept droites de l'épure 31. Par des mesures prises sur cette figure, il est facile de poser les équations des six plans tritangents qui forment deux trièdres conjugués, et qui résultent des dix-neuf points formant les données de la construction, page 94.

En représentant ces équations par $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., l'équation demandée sera

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \lambda \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 = 0$$

et le coefficient λ se déterminera en substituant les coordonnées d'un point quelconque, mesurées aussi sur l'épure.

4. Voici quelques conséquences des équations de la page 118 : les six équations

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_6 = 0$$

représentent les faces d'un *hexaèdre* qui a vingt sommets s conjugés deux à deux, tels que

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad \text{et} \qquad x_4 = x_5 = x_6 = 0,$$

et quinze arêtes telles que

$$x_1 = x_2 = 0,$$

sur lesquelles ces sommets sont distribués par quatre ; il passe par chaque arête un des quinze plans tritangents.

Les quinze plans

$$x_1 = x_2, \qquad x_1 = x_3, \qquad \ldots, \qquad x_4 = x_5, \qquad x_5 = x_6$$

sont les *plans de Plücker* et correspondent un à un aux plans tritangents.

l'équation générale du troisième degré entre trois coordonnées

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = (\alpha_1 - \beta)(\alpha_2 - \beta)(\alpha_3 - \beta)(\alpha_4 - \beta),$$

α_1, α_2, α_3, α_4 et β étant cinq polynomes linéaires.

Les cinq plans

$$x_1+x_2=0,\quad x_1+x_3=0,\quad x_1+x_4=0,\quad x_1+x_5=0,\quad x_1+x_6=0$$

forment un *pentaèdre,* auquel s'en joignent cinq autres donnés par des équations analogues. Ces six pentaèdres A ont pour faces des plans tritangents. Deux quelconques d'entre eux ont une face commune. Chacun a *dix arêtes* qui sont des droites p (droites de Pascal) et *six sommets* qui sont des points k (points de Kirkman).

L'équation

$$-x_1=x_2=x_3$$

et ses semblables sont les soixante droites p; quatre de ces droites telles que

$$-x_3=x_4=x_6,\quad -x_4=x_3=x_5,\quad -x_5=x_4=x_6,\quad -x_6=x_3=x_5,$$

passent par un même point s

$$x_1+x_2=0,\qquad x_3=-x_4,\qquad x_5=-x_6;$$

trois telles que

$$-x_1=x_2=x_3,\qquad -x_1=x_3=x_4,\qquad x_1=x_2=x_4$$

passent par un même point k

$$-x_1=x_2=x_3=x_4.$$

Par chaque droite p il passe un plan tritangent et deux plans de Plücker; il y a huit droites p dans chaque plan tritangent, et quatre dans chaque plan de Plücker.

Si l'on prend six droites telles que

$$12,\ 23,\ 31,\ 45,\ 56,\ 64,$$

chacune des trois premières coupe chacune des trois autres en vertu de la loi des rencontres, et leurs associations deux à deux déterminent neuf plans dont les équations ont pour premiers membres

	45.	56.	46.
12........	x_3+x_4,	x_1+x_2.	x_5+x_6,
23........	x_1+x_6,	x_3+x_5,	x_2+x_4,
31........	x_2+x_5,	x_4+x_6,	x_1+x_3.

Ces droites sont les génératrices d'une surface réglée du second degré dont on peut écrire de suite l'équation (1)

$$x_1^2 + x_4^2 + x_5^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_6^2.$$

Il y a en tout dix quadriques de ce genre, les indices de leurs équations présentant les dix permutations que nous avons rencontrées pour la première fois dans le Tableau des points de Steiner. Deux quelconques de ces quadriques, par exemple la précédente et celle-ci

$$x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_1^2,$$

qui passe par les droites 13, 34, 41, 25, 56, 62, ont en commun les génératrices 13 et 56, et leur intersection complète est formée par ces deux droites jointes à la conique $x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2$.

5. Lorsque la surface a un point conique O, dont soient a_1, $a_2, \ldots, a_6$ les coordonnées, l'identité (7), page 116, est remplacée par

$$a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_6^2 x_6 = 0,$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = 0, \qquad a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_6^3 = 0,$$

et l'on a, au point conique lui-même,

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_6}{a_6}.$$

Si l'on projette du point O sur un plan quelconque $\varphi = 0$, les rayons 1, 2, 3, 4, 5, 6 couperont ce plan en six points situés sur une conique, et les droites 12, 13, ..., 56 s'y projetteront suivant les quinze droites joignant ces six points deux à deux. Il n'est pas nécessaire de spécifier le plan de projection, car on peut considérer les équations des *figures projetantes* (qui sont des droites, des plans, des cônes... passant par le point O) comme représentant aussi les points, les droites, les coniques, ... qu'elles contiennent : il sera tout simplement sous-entendu qu'on leur adjoint

(1) Il est clair en effet que cette équation est satisfaite par la substitution de $-x_2$, $-x_3$, $-x_6$ à x_1, x_4, x_5, ou par une des cinq autres substitutions analogues qu'indiquent les équations des droites.

l'équation $\varphi = 0$. L'*opération analytique* de la projection se réduit donc à former ces projections. On trouve, par exemple, que le *cône des six rayons* a pour équation

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_6 x_6^2 = 0,$$

qui représentera aussi *la conique des six points*.

§ 30. — Observations sur la méthode de Cremona.

1. Telle est, dans ses premiers traits, la très élégante méthode esquissée par Cremona en 1877 dans les *Atti* de l'Académie romaine *dei Lincei*, développée brillamment, en 1874, par Richmond dans les *Transactions de la Société philosophique* de Cambridge. Par la simplicité et la symétrie de ses équations, elle permet de donner un seul exemple de chaque type, des permutations fournissant le système complet des types similaires; elle donne une prompte réponse à toute question sur la correspondance entre les divers éléments, le nombre de ceux d'un type donné, etc.

En outre elle rend évidentes et intuitives la plupart des propositions concernant l'hexagramme plan; par exemple, quand on a vu que trois droites sont les projections des intersections de trois plans deux à deux, on n'a pas besoin d'autre chose pour dire qu'elles sont concourantes. L'espace est à ce point de vue *plus simple* que le plan : dans celui-ci, deux droites *se coupent toujours*, et c'est une complication inutile, car leur intersection ne joue un rôle dans la figure de l'hexagramme que lorsqu'elles sont les projections de deux droites de l'espace *qui se coupent;* le meilleur moyen de laisser dehors les points inutiles est donc de remonter du plan dans l'espace.

2. Ce n'est que dans l'*opération de projection* que nous avons fait usage du point singulier de la surface du troisième degré. Mais, au lieu de la surface ainsi particularisée, rien ne nous empêche de prendre la surface générale, d'y mettre de côté douze droites formant un double-six et d'employer les quinze autres comme nous l'avons fait dans l'un ou l'autre des deux paragraphes précédents. Les projections des quinze droites ne passeront plus par six points d'une conique, mais n'en auront pas moins soixante

droites de Pascal. Si, pour préciser, nous plaçons le centre de perspective comme le suppose l'épure de Zeuthen, nous voyons qu'on peut, parmi les vingt-huit doubles tangentes d'une courbe du quatrième degré à quatre ovales, prendre de trente-six manières un lot de quinze de ces tangentes ayant les mêmes propriétés que les quinze droites de l'hexagramme de Pascal.

Celles-ci ne sont donc pas la seule famille jouissant de cette prérogative, et celle qui vient de nous apparaître n'est elle-même, évidemment, qu'un cas particulier parmi bien d'autres. Pour que quinze droites dans le plan possèdent les nombreuses propriétés dont nous avons aperçu l'ensemble de loin, il faut et il suffit qu'elles soient les projections de quinze droites de l'espace ayant la position définie par les équations de la page 118, c'est-à-dire *situées trois par trois dans quinze plans*. C'est ce qu'on peut appeler *la figure de Cremona*, et celle de l'hexagramme tient ses propriétés de ce qu'elle en est la projection sur un plan. Nous allons voir qu'à son tour la première a une origine quadridimensionnelle. Au fond, et peut-être sans le savoir, Cremona ne faisait d'ailleurs pas autre chose que de la Géométrie à quatre dimensions, car son système de *deux* équations *homogènes* entre *six* variables, (6) et (7), page 116, équivaut à une équation entre *quatre* coordonnées *ordinaires*, c'est-à-dire est un lieu relevant de cette Géométrie.

CHAPITRE V.

L'HEXAGRAMME ET L'HEXASTIGME.

§ 31. — Éléments de l'hexastigme.

Nous empruntons aux auteurs anglais le mot *hexastigme* pour désigner la figure formée dans l'étendue par *six points*

1, 2, 3, 4, 5, 6

dont cinq quelconques ne sont pas dans un même espace.

Outre ces six points fondamentaux, ou *sommets,* la figure présente encore : *quinze droites,* ou *arêtes,* joignant les sommets deux à deux :

12, 13, 14, 15, 16,
23, 24, 25. 26,
34, 35, 36,
45, 46,
56;

vingt faces planes, ou *triangles :*

123, 124, 125, 126, 456, 356, 346. 345,
134, 135, 136, 256, 246, 245,
145, 146, 236, 235,
156; 234;

et *quinze espaces,* ou *cases tétraédrales,* ou *figures limitantes,* ayant dans l'hypercorps le même rôle que les *polygones limitants* des polyèdres :

12 34, 12 35, 12 36, 12 45, 12 46, 12 56,
13 45, 13 46, 13 56, 14 56,
23 45, 23 46, 23 56, 24 56, 34 56.

Dans la terminologie du Chapitre II, le solide à quatre dimensions qui va nous occuper s'appellerait donc un *pentadécaédroïde.* Dans ce qui suit nous le désignerons quelquefois abréviativement par l'initiale **H**.

Deux faces planes, telles que 123 et 456, dont les désignations comprennent ensemble les six numéros, sont dites *opposées;* elles n'ont qu'un point commun, que nous appellerons *croisillon,* et que nous désignerons indifféremment par p_{123} ou p_{456}.

Trois arêtes, telles que 12, 34 et 56, dont les désignations comprennent ensemble les six numéros, sont appelées *alternes.*

Une arête et un espace, tels que 12 et 3456, dont les désignations comprennent ensemble les six numéros, seront dits *opposés;* leur point d'intersection sera appelé *un point diagonal* et désigné par p_{12}; il sera le *point diagonal de l'arête* 12 si on le considère sur cette arête, et le *point diagonal de l'espace* 3456 si on le considère comme appartenant à cet espace.

Sur la même arête 12 nous noterons un deuxième point, celui qui est harmonique avec le point diagonal par rapport aux deux sommets 1 et 2; nous l'appellerons *le point harmonique* de l'arête 12, et nous le désignerons par q_{12}.

Lorsque trois points diagonaux tels que p_{12}, p_{34}, p_{56} appartiennent à des arêtes alternes, c'est-à-dire lorsque leurs indices se complètent naturellement à 1, 2, 3, 4, 5, 6, ils sont en ligne droite; car ils appartiennent aussi, respectivement, aux trois espaces 3456, 5612, 1234 et, par suite, à la droite suivant laquelle ces espaces se coupent. Une pareille droite, qui rencontre les trois arêtes 12, 34, 56, sera appelée *une transversale de l'hexastigme* et sera désignée par $\theta(12\ 34\ 56)$. Cette notation pouvant signifier à volonté ou qu'elle coupe les trois arêtes 12, 34 et 56, ou qu'elle contient les trois points p_{12}, p_{34}, p_{56}. *Il y en a quinze,* parce qu'on peut faire avec six chiffres quinze groupes de trois couples chacun.

Voici, jusqu'à présent, les choses qui se rencontrent sur chaque sorte d'élément de la figure dont nous entreprenons l'étude :

1° *Sur une arête,* par exemple 12, il y a deux sommets 1 et 2, un point diagonal p_{12}, un point harmonique q_{12}.

2° *Sur une face plane* 135, il y a dix points, savoir : les trois sommets 1, 3, 5; les trois diagonales p_{35}, p_{51}, p_{13}; les trois points harmoniques q_{35}, q_{51}, q_{13}; et enfin, seul de son espèce, le croisillon p_{135}. En ce dernier se rencontrent forcément les trois droites allant des trois sommets aux points diagonaux des côtés opposés; par suite, en vertu d'une propriété du triangle, *les trois points de chacun de ces quatre groupes*

$$\begin{array}{lll} p_{13}, & p_{15}, & q_{35}, \\ p_{13}, & p_{35}, & q_{15}, \\ p_{15}, & p_{35}, & q_{13}, \\ q_{13}, & q_{35}, & q_{51} \end{array}$$

sont en ligne droite.

3° *Dans un espace,* par exemple 1234, il y a : un tétraèdre 1234, dont les sommets, les arêtes et les faces sont des sommets, des arêtes et des faces de l'hexastigme; les points diagonaux et les points harmoniques qui appartiennent à ces six arêtes; les croisillons qui appartiennent à ces quatre faces; le point diagonal p_{56} qui est commun à l'espace 1234 et à l'arête opposée 56; une transversale $\theta(12\ 34\ 56)$.

§ 32. — Espaces cardinaux.

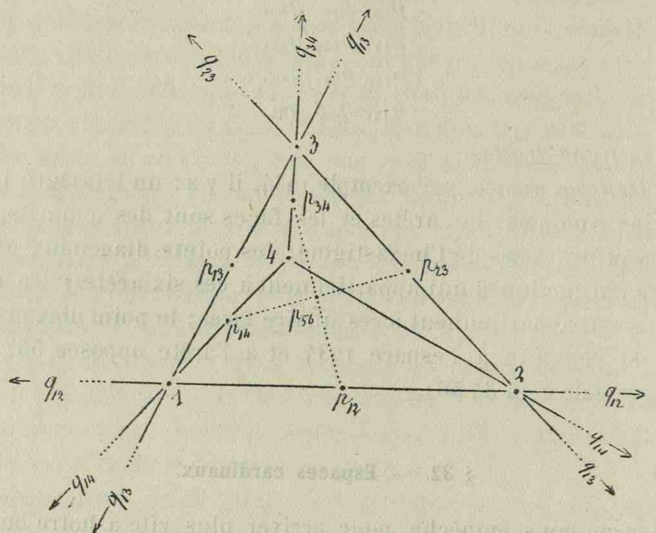
Rien ne nous empêche, pour arriver plus vite à notre but, de supposer un tétraèdre particulier (*fig.* 34) où le dernier point p_{56} soit le centre de moyenne position des quatre sommets, et où les points diagonaux qui sont les six arêtes en soient le milieu; alors les droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées sont des transversales de l'hexastigme et les centres de faces en sont les croisillons; alors aussi les points harmoniques des six arêtes *sont à l'infini.* Passant homographiquement de ce cas particulier au cas général, nous voyons que *les points harmoniques* de six arêtes quelconques de l'hexastigme *sont dans un même plan :* le transformé de celui de l'infini.

Adjoignant un cinquième sommet 5, nous avons affaire à dix arêtes, et leurs dix points harmoniques

$$q_{12},\ q_{13},\ q_{14},\ q_{15};\quad q_{23},\ q_{24},\ q_{25};\quad q_{34},\ q_{35};\quad q_{45}$$

sont dans un même espace. Il correspond un pareil espace à chacune des associations par cinq que les six sommets peuvent faire entre eux ; par conséquent ces espaces sont au nombre de six et *les quinze points harmoniques de l'hexastigme sont quatre par quatre les intersections de six espaces.* Il y a correspondance entre les six sommets et ces espaces, et l'on pourrait partir de ceux-ci

Fig. 34.



Tétraèdre auxiliaire.

pour construire l'hexastigme en suivant la marche inverse de celle que nous venons de parcourir. C'est le grand principe de dualité (*Traité élémentaire,* § 19) qui fait ici son entrée, associant à sa façon : chaque sommet avec l'espace qui contient les points harmoniques des dix arêtes qui joignent les cinq autres, le point harmonique d'une arête avec l'espace opposé à cette arête, la transversale qui coupe trois arêtes avec le plan qui contient leurs harmoniques, etc. De fait, l'on peut trouver une hypersurface du du second degré ([1]) par rapport à laquelle l'hexastigme est polaire de lui-même.

([1]) Elle est imaginaire et a une équation de la forme

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = 0,$$

X_1, X_2, ... étant des polynomes linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4.

Sur le tétraèdre auxiliaire (*fig.* 34), on voit que les arêtes 13 et 24 sont parallèles au plan de la croix formée par les droites $p_{12}p_{34}$ et $p_{14}p_{23}$ qui se coupent en p_{56}. Il s'ensuit que, dans le cas général, les sept points

$$p_{56},\ p_{12},\ p_{34},\ p_{14},\ p_{23},\ p_{13},\ q_{24}$$

sont dans un même plan. L'espace que ce plan détermine avec le point p_{16} contient les points diagonaux de neuf arêtes

$$p_{12},\ p_{14},\ p_{16};\quad p_{32},\ p_{34},\ p_{36};\quad p_{52},\ p_{54},\ p_{56}$$

et les points harmoniques des six arêtes restantes

$$q_{13},\ q_{35},\ q_{51};\quad q_{24},\ q_{46},\ q_{62}.$$

De ceux-ci les trois premiers sont sur la face plane 135 de l'hexastigme et les trois autres sur la face opposée 246; et, comme il y a dix couples de faces planes, il existe dix espaces pareils au précédent. On les appelle *les espaces cardinaux;* conformément à une contraction déjà employée, nous désignerons par le symbole $c(135)$ celui qui contient les six points harmoniques ayant pour indices 13, 35, 51, 24, 46, 62; pour passer du symbole à ce développement, il faut commencer par ajouter la triade formée des trois chiffres manquants, puis doubler chaque chiffre, partager en tranches et restituer les lettres q :

$$c(135) = c(135\,246) = q_{13}q_{35}q_{51}q_{24}q_{46}q_{62}.$$

Outre ses *neuf points diagonaux* et ses *six points harmoniques,* chaque espace cardinal contient encore *six transversales* θ, dont les symboles se forment en associant par couples les chiffres de sa triade 135 avec ceux de la triade complémentaire 246; cela donne, pour l'espace cardinal qui nous sert d'exemple,

$$\theta(12\,34\,56),\quad \theta(14\,23\,56),\quad \theta(16\,25\,34),$$
$$\theta(12\,36\,45),\quad \theta(14\,25\,36),\quad \theta(16\,23\,45).$$

A eux dix les espaces cardinaux contiendraient donc soixante transversales; puisque le nombre de celles-ci est quinze, il s'ensuit que *quatre espaces cardinaux passent par chacune d'elles.*

Dans l'opposition dualistique de l'hexastigme avec lui-même, les espaces cardinaux sont corrélatifs des dix croisillons.

§ 33. — Seconde notation des transversales.

1. Comme chacune des quinze transversales rencontre trois des quinze arêtes, il est possible d'associer cinq des premières qui, ensemble, rencontrent toutes les secondes; telles sont, par exemple,

$$\theta(12\,34\,56),\quad \theta(13\,25\,46),\quad \theta(14\,26\,35),\quad \theta(15\,24\,36),\quad \theta(16\,23\,45).$$

Les associations jouissant de cette propriété sont au nombre de six, que nous désignerons par

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

et chaque transversale entre dans deux d'entre elles.

Si nous convenons de *prendre la réunion des deux lettres* pour désigner cette transversale, nous aurons une notation plus brève reliée à la précédente par les quinze égalités qui occupent la gauche du Tableau suivant :

$ab = \theta(12\ 34\ 56)$,	$12 = \alpha(ab\ cd\ ef)$,
$ac = \theta(13\ 25\ 46)$,	$13 = \alpha(ac\ be\ df)$,
$ad = \theta(14\ 26\ 35)$,	$14 = \alpha(ad\ bf\ ce)$,
$ae = \theta(15\ 24\ 36)$,	$15 = \alpha(ae\ bd\ cf)$,
$af = \theta(16\ 23\ 45)$,	$16 = \alpha(af\ bc\ de)$,
$bc = \theta(16\ 24\ 35)$,	$23 = \alpha(af\ bd\ ce)$,
$bd = \theta(15\ 23\ 46)$,	$24 = \alpha(ae\ bc\ df)$,
$be = \theta(13\ 26\ 45)$,	$25 = \alpha(ac\ bf\ de)$,
$bf = \theta(14\ 25\ 36)$,	$26 = \alpha(ad\ be\ cf)$,
$cd = \theta(12\ 36\ 45)$,	$34 = \alpha(ab\ cf\ de)$,
$ce = \theta(14\ 23\ 56)$,	$35 = \alpha(ad\ bc\ ef)$,
$cf = \theta(15\ 26\ 34)$,	$36 = \alpha(ae\ bf\ cd)$,
$de = \theta(16\ 25\ 34)$,	$45 = \alpha(af\ be\ cd)$,
$df = \theta(13\ 24\ 56)$,	$46 = \alpha(ac\ bd\ ef)$,
$ef = \theta(12\ 35\ 46)$.	$56 = \alpha(ab\ ce\ df)$.

Il est bon d'avoir aussi la contre-partie, et elle s'obtient aisément [1]. Employant α comme signe fonctionnel pour indiquer, par exemple, que 12 est l'arête rencontrée par les trois transversales ab, cd, ef, on trouve les quinze égalités qui occupent la droite du même Tableau.

2. Deux transversales telles que ab, cd, dont les symboles contiennent des lettres différentes, se coupent en un point diagonal de l'hexastigme; elles ne se rencontrent pas quand il y a une lettre commune. Trois transversales représentées par des symboles tels que $ab\ cd\ ef$, où se trouvent les six lettres, passent par un même point diagonal. En somme, *les quinze transversales forment une famille de quinze droites passant trois par trois par quinze points, qui sont les points diagonaux.*

Six transversales situées dans un même espace cardinal sont représentées par des symboles tels que

$$ab,\ bc,\ ca \quad \text{et} \quad de,\ ef,\ fd$$

et, comme chacune des trois premières coupe chacune des trois autres, elles sont les génératrices d'une surface du second degré. Le symbole $abc\,def$, ou simplement abc, en continuant à appliquer le même principe d'abréviation, peut servir à distinguer des autres l'espace cardinal qui contient ces six transversales; cette remarque conduit à appliquer la notation littérale aux espaces cardinaux, et elle correspond comme ceci avec celle par chiffres :

$$\begin{array}{ll}
C(abc) = C(145), & C(ace) = C(126), \\
C(abd) = C(236), & C(acf) = C(124); \\
C(abe) = C(146), & C(ade) = C(123), \\
C(abf) = C(135); & C(adf) = C(125); \\
C(acd) = C(156), & C(aef) = C(134).
\end{array}$$

3. Nous pouvons relever déjà dans l'hexastigme les propriétés suivantes; quelques-unes sont tellement simples qu'il serait puéril de les signaler pour elles-mêmes, mais on en verra de suite l'application.

---

[1] Comparez paragraphe 12, page 46.

1° Trois espaces cardinaux se coupent suivant une droite que déterminent deux points diagonaux, et il peut arriver deux choses. Ou les deux arêtes auxquelles ces points appartiennent ne se rencontrent pas : alors la droite est une transversale et contient un troisième point diagonal. Ou elles aboutissent à un même sommet ; alors la droite contient un point harmonique ; ainsi

$$c(123\,456), \quad c(124\,356), \quad c(125\,346)$$

se coupent sur la droite joignant p_{16} à p_{26}, laquelle passe aussi par p_{12}. Les droites qui se coupent dans le second cas sont au nombre de soixante, et nous les appellerons *les droites de Pascal de l'hexastigme.*

2° Les points diagonaux p_{12}, p_{13} sont respectivement sur les trois transversales ab, cd, ef et df, bc, ae; or ab et df ont en commun le point p_{56} et sont par conséquent dans un même plan ; il en est de même de cd et be, qui ont en commun le point 45; de ef et ac, qui ont en commun le point 46; par conséquent *ces trois plans passent par une même droite de Pascal.*

3° Si l'on joint les cinq points p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{16} deux à deux par des droites et trois à trois par des plans, on a dix droites, qui sont des droites de Pascal, et dix plans, que nous appellerons *des plans de Kirkman;* nous appellerons cet ensemble de dix droites et de dix plans une figure A; il y a, pour tout l'hexastigme, cinq autres figures pareilles B, C, D, E, F.

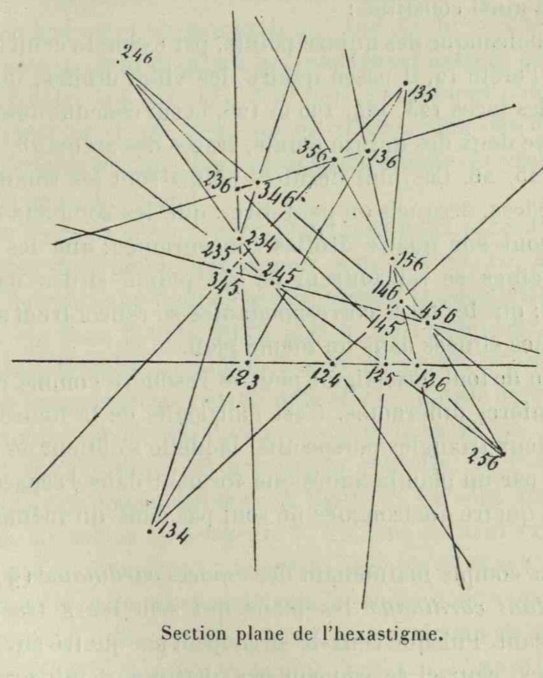
4° Les trois droites de Pascal qui joignent les points p_{12}, p_{13}, p_{14} passent par les soixante points de Kirkman. Celles qui joignent les points p_{12}, p_{23}, p_{31} sont sur une des faces de l'hexastigme, et ces vingt faces jouent ici le rôle de *vingt plans de Steiner.* On peut de même donner le nom de *droites de Plücker* aux quinze arêtes suivant lesquelles ces vingt plans se coupent par quatre. Trois plans de Kirkman mènent sans difficulté à *vingt points de Cayley* et à *quinze plans de Salmon.*

§ 34. — Section plane de l'hexastigme.

Dans toute section d'un hypercorps *par un plan,* les sommets et les arêtes sont hors de cause ; les plans donnent des points et les espaces des droites. Nous avons donc ici vingt points et quinze droites ; trois droites passent par chaque point et quatre points sont sur chaque droite. Une pareille section est représentée par la figure 35, qui n'est pas autre chose, à part la signification différente des éléments, que la figure 23 du Chapitre III.

Elle appartient à une intéressante famille de figures de Géométrie plane, sur lesquelles Schubert a attiré l'attention en leur donnant le nom de *configurations :* elles sont composées de droites

Fig. 35.



Section plane de l'hexastigme.

et de points satisfaisant à cette condition qu'il passe un même nombre de droites par tous les points, et qu'il y ait un même nombre de points sur toutes les droites. Ce rapprochement fournit un nouvel exemple de l'intervention du quatrième champ dans les affaires du deuxième.

La figure 23, page 66, Chapitre III, est aussi une *configuration de Schubert.*

§ 35. — Section spatiale de l'hexastigme.

1. Dans la section *par un espace*, il n'y a plus que les sommets de l'hypercorps qui ne soient pas en cause; les droites, les plans et les espaces donnent respectivement des points, des droites et des plans que nous appellerons *leurs traces*.

Si nous nous en tenons d'abord aux figures limitantes (§ 31), elles donnent quinze points, vingt droites et quinze plans dont le système est ainsi constitué :

Par un quelconque des quinze points, par exemple celui qui est la trace de l'arête 12, il passe quatre des vingt droites, qui sont les traces des faces 123, 124, 125 et 126, et sur chacune desquelles il y a encore deux des quinze points, traces des arêtes 13, 14, 15, 16; 23, 24, 25, 26. Ces huit derniers points sont les sommets de deux tétraèdres, desquels on peut dire : que les sommets correspondants sont sur quatre droites concourantes; que les arêtes correspondantes se rencontrent en six points situés dans un même plan; que les faces correspondantes se rencontrent suivant quatre droites situées dans un même plan.

La section de tout hexastigme peut se résoudre comme cela de quinze manières différentes. C'est l'analogue de la figure plane formée de deux triangles perspectifs, laquelle s'obtient de même en coupant par un plan la figure que forment dans l'espace cinq points dont quatre quelconques ne sont pas dans un même plan.

2. Tenons compte maintenant des *espaces cardinaux* (§ 32), et appelons *plans cardinaux* les plans qui sont leurs traces sur l'espace sécant. Puisque ceux-là se coupent par quatre sur quinze transversales, ceux-ci se coupent par quatre sur quinze points, qui sont les traces de ces transversales, et que nous appellerons *points principaux* (ne pouvant pas conserver le mot *tranversal* qui refuserait de s'unir avec le mot *point*). Le symbole

$$C(abc) \quad \text{ou} \quad C(abc.def)$$

désignera maintenant un plan cardinal et

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af;\quad bc,\ bd,\ be,\ bf;\quad cd,\ ce,\ cf;\quad de,\ df;\quad ef$$

désigneront des points principaux. Ceux de ces points qui sont dans ce plan sont

$$ab,\ bc,\ ca,\ de,\ ef,\ fd$$

et, comme ils dérivent de six droites qui sont génératrices d'une surface du second degré, ils sont sur une conique.

Il nous est permis d'essayer de donner un corps à cette section spatiale, puisqu'elle n'est qu'une figure de Géométrie à trois dimensions.

Par rapport à l'arête 12, les dix espaces cardinaux se divisent en deux groupes. Ceux du premier, au nombre de quatre, la rencontrent en son point harmonique q_{12}. Les six du second la rencontrent en son point diagonal p_{12}, par lequel passent aussi les trois transversales ab, cd, ef; deux des six espaces contiennent cd et ef, deux ef et ab, deux ab et cd. Chacune des douze autres transversales est dans deux espaces cardinaux du premier groupe et dans deux du second.

Dans l'espace sécant, deux plans cardinaux passent par chacun des côtés du triangle qui a pour sommets ab, cd, ef et ces six plans forment une figure F ayant, comme le parallélépipède classique, six faces planes, douze arêtes, huit sommets; elle devient un parallélépipède quand les transversales ab, cd, ef sont parallèles à l'espace sécant; sans doute elle peut aussi devenir un cube. Les quatre plans cardinaux restants forment un tétraèdre T. Quant aux douze points principaux restants, il y en a un sur chacune des douze arêtes de la figure F; ils sont aussi par deux sur les six arêtes du tétraèdre T, les deux qui sont sur deux arêtes opposées de F étant sur une même arête de T. Vous pouvez vous faire une idée de cet ensemble de la manière suivante :

Construisez avec du fil de fer ou des réglettes de bois un cube PR'QS'P'RQ'S. Marquez-y, comme l'indique la figure 36, des points

$$ac,\ bd;\quad ad,\ bc;\quad ae,\ fb;\quad af,\ be;\quad ce,\ df;\quad de,\ cf$$

respectivement sur les arêtes

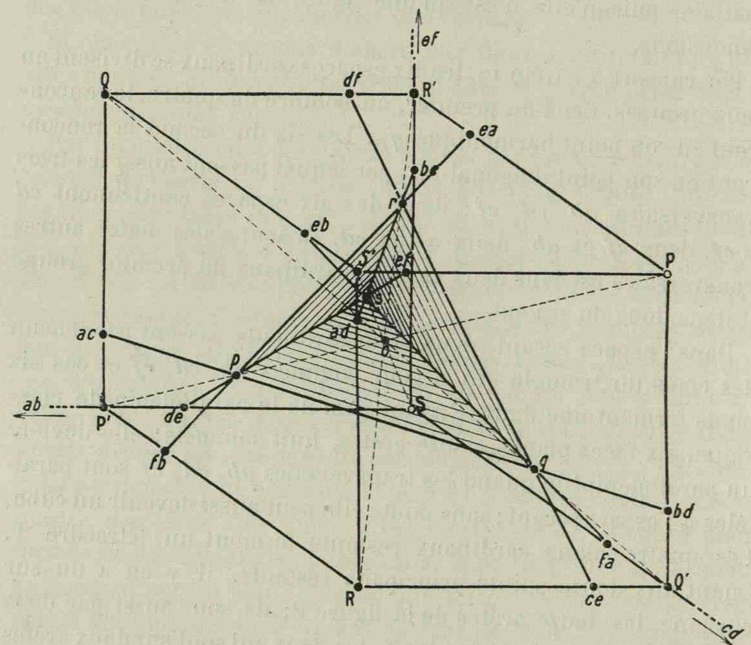
$$P'Q,\ Q'P;\quad S'R,\ R'S;\quad PR',\ RP';\quad SQ',\ QS';\quad RQ',\ QR';\quad SP',\ PS'$$

et à égales distances des sommets P', Q', R', S' [1].

[1] Ces distances ne sont pas égales *sur la figure* 35 parce qu'elles sont inégalement

Joignez par des fils les points marqués sur des arêtes opposées; ces fils passeront trois par trois en des points p, q, r, s, par lesquels passent aussi les diagonales du cube : ce sont les sommets du tétraèdre T. Alors les faces du cube et celles du tétraèdre

Fig. 36.



Section spatiale de l'hexastigme.

vont vers dix plans cardinaux; les points marqués sur les arêtes du premier sont douze des points principaux, et les trois autres

$$ab;\quad cd;\quad ef$$

sont à l'infini respectivement sur

$$SP',\ S'P,\ RQ',\ R'Q;\quad SQ',\ S'Q,\ RP',\ R'P;\quad SR',\ S'R,\ PQ',\ P'Q.$$

3. Comme conséquence de notre conception de l'étendue quadri-

---

déformées par la projection. Elles ne devraient pas être égales *sur le solide* si l'on prenait un parallélépipède au lieu d'un cube.

dimensionnelle, il est établi, dit Richmond, qu'*il existe dans l'espace ordinaire des familles de quinze points possédant les propriétés suivantes :*

1° Aux quinze points l'on peut associer, chacun à chacun, quinze couples formés avec *six* symboles

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

tels que certaines correspondances entre certaines associations des quinze points soient accusées par des correspondances entre les six symboles; qu'en particulier l'on puisse, en interchangeant ceux-ci, modifier les couples sans attenter à la vérité de certaines propriétés concernant les points auxquels ils sont associés. Convenons d'appeler les quinze points *points principaux,* et de leur associer *chacun à chacun* les couples

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af\ ;\quad bc,\ bd,\ be,\ bf\ ;\quad cd,\ ce,\ cf\ ;\quad de,\ df\ ;\quad ef.$$

2° Six points tels que

$$ab,\quad bc,\quad ca,\quad de,\quad ef,\quad fd$$

sont dans un même plan et sont sur une section conique; il y a dix pareils plans, appelés *plans cardinaux,* dont quatre passent par chaque point principal.

3° Le point d'intersection de trois plans cardinaux est, ou un point principal, par lequel passe un quatrième plan cardinal, ou un membre d'un groupe de soixante points, appelés *points de Pascal.* La ligne d'intersection de deux plans cardinaux quelconques contient deux points principaux et quatre points de Pascal; par exemple, SP′ de la figure 36 passe par les deux points principaux *ab*, *de* et par quatre points de Pascal qui sont : S, P′, l'intersection avec *pqr*, celle avec *qrs*.

Par chaque point de Pascal, par exemple S, il passe trois droites SP′, SQ′, SR′, intersections de trois plans cardinaux, lesquelles joignent *ab* et *de*, *bc* et *ef*, *cd* et *fa*. Chaque point de Pascal peut être considéré comme l'intersection de droites joignant les sommets opposés d'un hexagone gauche dont les sommets sont *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fa* ; ils correspondent aux soixante permutations (§ 12) des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

4° Les points de Pascal forment six groupes de dix points ou décades, et les dix membres de chaque décade sont les sommets d'une figure A formée par cinq plans. Dans la figure 36, les quatre points P, Q, R, S et les dix points où les droites

$$PS,\quad QS,\quad RS,\quad QR,\quad RP,\quad PQ$$

rencontrent respectivement

$$ps,\quad qs,\quad rs,\quad qr,\quad rp,\quad pq$$

forment une de ces décades; ces six derniers points sont dans un plan qui, avec les quatre faces du tétraèdre PQRS, fait les cinq plans de la figure A.

5° Les points de Pascal sont aussi par trois sur vingt droites et par douze sur quinze plans qui forment la figure décrite paragraphe 34. Dans le cas particulier du cube (*fig.* 36), les quinze plans sont : les six plans qui passent par deux arêtes opposées; quatre qui passent par les points principaux des arêtes se rencontrent en P, Q, R, S et forment un tétraèdre dont les sommets sont sur PP′, QQ′, RR′, SS′; quatre qui forment un second tétraèdre dont les sommets sont aussi sur ces lignes et dont les faces sont parallèles à celles du précédent; enfin le plan de l'infini. Les douze points de Pascal qui sont sur le dernier sont les intersections des faces de *pqrs* avec les trois droites de l'infini des faces du cube.

6° Chacune des six décades de points qui se sont montrées dans 4° est formée par les traces des arêtes d'une figure que définissent cinq points diagonaux de l'hexastigme, tels que p_{12}, p_{13}, p_{14} p_{15}, p_{16}; les faces de ces six figures se coupent par trois suivant des points tels que q_{56}, q_{64}, q_{45}, et leurs espaces se coupent par deux suivant les plans similaires à ceux qui contiennent q_{34}, q_{35}, q_{36}, q_{45}, q_{46}, q_{56}. Mais nous avons vu que les points harmoniques sont déterminés complètement par les intersections de six espaces; donc, revenant à notre section spatiale, nous inférons qu'il existe une certaine figure de six plans (*hexaèdre*) par chaque arête de laquelle passent deux plans appartenant aux dix figures A, et par chacun des sommets de laquelle passent trois de leurs arêtes.

§ 36. — La figure de six espaces.

On a vu, paragraphe 32, que l'hexastigme peut se construire sur six espaces au lieu de six points. Nous avons besoin de le connaître aussi sous cet autre aspect, qu'il prendra dans diverses parties des prochains paragraphes, et où des

espaces, plans, droites, points

correspondent aux

points, droites, plans, espaces

du premier. Nous désignerons les deux figures respectivement par $\mathbf{H}_p$ (hexastigme de points) et $\mathbf{H}_e$ (hexastigme d'espaces).

Admettons donc maintenant que les numéros

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

désignent des espaces. Par leurs intersections deux à deux, trois à trois et quatre à quatre, ces espaces donnent ([1]) quinze plans :

$$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16;\ 23,\ \ldots,\ 56;$$

vingt droites formant dix couples :

$$123,\ 456;\ 124,\ 356,\ \ldots;$$

quinze points :

$$3456,\ 2456,\ 2356,\ \ldots,\ 1234.$$

Nous attribuerons à ces quatre sortes d'éléments la qualification commune de fondamentaux; à leur tour, ils en engendrent d'autres, parmi lesquels nous avons à distinguer les suivants.

I. — Espaces diagonaux.

Les quinze points diagonaux du paragraphe 31 sont remplacés par des *espaces diagonaux,* tels que p_{12}, celui-ci étant déterminé par le plan qui est l'intersection des deux espaces fondamentaux 1, 2 et le point qui est celle des quatre autres espaces 3, 4, 5, 6.

([1]) Comparez paragraphe 31, page 125.

II. — Plans transversaux.

Les quinze transversales dont le type était θ (12, 34, 56) deviennent des *plans transversaux* qui seront désignés, soit de cette manière, soit par les quinze couples de lettres

$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad \ldots,\quad ef,$$

les deux notations étant liées entre elles par les formules page 130. M. Schoute a eu l'idée ingénieuse de disposer ces couples sous la forme d'un déterminant symétrique où chacun d'eux entre deux fois :

$$\begin{array}{cccccc}
\star & ab & ac & ad & ae & af \\
ba & \star & bc & bd & be & bf \\
ca & cb & \star & cd & ce & cf \\
da & db & dc & \star & de & df \\
ea & eb & ec & ed & \star & ef \\
fa & fb & fc & fd & fe & \star
\end{array}$$

et où l'on reconnaît aisément les propriétés suivantes :

α. Deux plans ont pour intersection un point ou une droite, suivant que leurs couples représentatifs ont, ou non, une lettre commune, c'est-à-dire sont ou non sur la même ligne ou la même colonne.

β. Si l'on associe ensemble deux lignes ou colonnes quelconques, en supprimant dans chacune le terme qui correspond à une case vide de l'autre, et qui est le même dans les deux, on a huit plans tels que

$$\begin{array}{cccc}
ac, & ad, & ae, & af, \\
bc, & bd, & be, & bf,
\end{array}$$

dont chacun coupe suivant un point un quelconque de ceux qui sont sur la même horizontale ou la même verticale que lui, et suivant une droite un quelconque des autres. C'est ce que M. Schoute appelle *un double-quatre de plans*, à raison de l'analogie de cette propriété avec celle du *double-six de droites* de Schläfli. Il y a quinze double-quatre dans $\mathbf{H}_e$. Les quatre points d'intersection des plans qui se trouvent l'un sous l'autre quand on a pris deux lignes du déterminant, l'un à côté de l'autre quand on a pris deux colonnes, sont dans un même plan, qui est celui *ab* mis de côté.

γ. Les lignes et colonnes composent six groupes de cinq plans (ou six *quines*) jouissant de cette remarquable propriété que chaque plan d'un quine joue, par rapport au double-quatre dans lequel entrent les quatre autres, le même rôle que nous avons vu jouer à *ab* par rapport au premier double-quatre.

δ. Toute droite rencontrant quatre plans d'un quine rencontre aussi le cinquième; nous verrons plus loin que ces droites sont en nombre infini et forment une hypersurface du troisième degré, qui est la même pour les six quines.

ε. Un espace quelconque coupe chacun des six quines suivant cinq droites, qui admettent deux transversales communes; cela fait six couples de droites, qui sont les éléments opposés d'un double-six de Schläfli.

III. — Points cardinaux.

Un terne de plans transversaux tel que *ab*, *cd*, *ef*, c'est-à-dire où les plans se coupent deux à deux suivant une droite, est contenu dans un espace diagonal 12; il y en a quinze, un dans chacun de ces espaces.

Six plans transversaux *ab*, *bc*, *ca*; *de*, *ef*, *fd* formant deux ternes tels que chaque plan de l'un coupe chaque plan de l'autre suivant une droite, passent par un même point, que nous désignerons par

$$C(abc\ def), \quad \text{ou, plus simplement,} \quad C(abc).$$

Il y a dix points pareils, qui sont les *dix points cardinaux* correspondant aux espaces cardinaux du paragraphe 32; chaque plan transversal en contient quatre.

Il passe par chaque point cardinal neuf espaces diagonaux.

§ 37. — Projection plane.

Nous pouvons maintenant marcher rapidement.

Si vous projetez sur un plan une section spatiale de la figure qui fait l'objet du paragraphe précédent, vous avez l'hexagramme de Pascal avec son riche cortège de théorèmes. Si vous projetez la section spatiale qui a été étudiée dans le paragraphe 33, vous avez l'hexagramme de Brianchon, avec la masse de théorèmes qui sont corrélatifs des précédents. Avoir l'une ou l'autre forme est à peu près indifférent à la Géométrie moderne, tant la transition de l'une à l'autre lui est facile, au moins lorsqu'il ne s'agit que de propriétés descriptives. Quoi qu'il en soit, vous êtes amené à dire, renouvelant pour le plan l'énoncé déjà formulé pour l'espace à la fin du paragraphe 35 :

Une conséquence nécessaire de notre conception de l'étendue est qu'il existe dans le plan des familles de quinze droites possédant les propriétés suivantes : Les droites peuvent être associées avec un système de quinze symboles

$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad ae,\quad af;\quad bc,\quad bd,\quad \ldots,\quad ef$$

formant tous les accouplements possibles de six lettres a, b, c, d, e, f; elles peuvent être désignées au moyen de ces symboles; toute proposition les concernant demeure inaltérée quand on interchange les dix lettres d'une manière quelconque; toute symétrie ou correspondance de divers groupements faits avec les droites est accusée par leurs symboles représentatifs. La figure qu'elles forment, avec les nombreuses propriétés que Veronese lui a reconnues, est simplement un cas particulier de la figure tridimensionnelle de dix plans cardinaux (§ 35), de même que celle-ci est un cas particulier de la figure quadridimensionnelle de six points (§ 31).

§ 38. — L'hypersurface de Segre.

On a vu l'étroite relation qu'il y a entre l'hexastigme, la surface du troisième degré et l'hexagramme : *les quinze droites qui restent sur la seconde quand on a retiré un double-six ne sont autre chose qu'une section spatiale des plans transversaux du premier, et ont pour projection sur un plan les droites fondamentales du troisième*. Cette propriété de la *surface* du troisième degré est un cas particulier de celles que nous offre l'*hypersurface* du même degré, variété des plus intéressantes, découverte et étudiée par Segre, étudiée aussi, géométriquement ou analytiquement, par

Castelnuovo, Schoute et d'autres [1]. On la désigne ordinairement par V_3.

Analytiquement, elle est définie par les équations canoniques

$$(1) \quad \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0, \end{cases}$$

où x_1, x_2, désignent des polynomes du premier degré à quatre coordonnées. Ces équations étant homogènes l'une et l'autre, c'est comme si elles n'avaient que cinq variables; étant au nombre de deux, elles équivalent à une seule entre les quatre coordonnées [2]. Elles représentent donc une hypersurface, laquelle est du troisième degré.

En vertu de la seconde, la première équation peut recevoir une quelconque des dix formes

$$(2) \quad \begin{cases} (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = -(x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4) \\ (x_1 + x_2)(x_2 + x_4)(x_4 + x_1) = -(x_3 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

les huit qui ne sont pas écrites étant constituées de manière analogue, savoir : les indices des premiers membres formés avec les trois couples que fournissent les chiffres de ces dix triades

123, 124, 125, 126; 134, 135, 136; 145, 146; 156

et ceux des seconds avec les trois couples que fournissent les chiffres complémentaires.

---

(1) SEGRE, *Sulle varieta cubiche dello spazio a quatro dimensioni* (*Mémoires de Turin*, t. 1888).

SEGRE, *Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni* (*Rendiconti di Palermo*, vol. II).

CASTELNUOVO, *Sulle congruenze del terzo ordine delle spazio a quattro dimensioni* (*Atti dell' Istituto veneto*, 1888).

CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria dello retta nello spazio a quattro dimensioni* (*Atti dell' Istituto veneto*, 1891-1892).

SCHOUTE, *Considerations in reference to a configuration of Segre* (*Akad. v. Vettenschappen to Amsterdam*, 1902).

(2) Comme les *coordonnées* proprement dites n'apparaissent nulle part, nous emploierons ce mot pour désigner les *six* fonctions x : ce sera ce que le paragraphe 4 appelle *coordonnées surabondantes*.

Il en résulte les propositions suivantes :

1° En associant successivement à chacune de ces formes la condition d'identité, on voit que les équations canoniques sont satisfaites si l'on pose un quelconque de ces *quinze ternes d'équations*

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} x_1+x_2=0, & x_3+x_4=0, & x_5+x_6=0;\\ x_1+x_3=0, & x_2+x_5=0, & x_4+x_6=0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ce sont *autant de plans* que les indices des x conduisent à représenter par les quinze symboles

$$12\,34\,56,\quad 13\,25\,46,\quad \ldots.$$

et, en se reportant aux formules (3), page 3, on les représentera aussi par

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af;\quad \ldots;\quad ef.$$

Ils ne sont pas autre chose que les *plans transversaux* de l'hexastigme $\mathbf{H}_e$ (1).

2° Il y a dans V_3 toutes les droites données par les équations

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda(x_1+x_2)=-\mu(x_5+x_6),\\ \mu(x_1+x_3)=-\nu(x_4+x_6),\\ \nu(x_2+x_3)=-\lambda(x_4+x_5), \end{array}\right.$$

λ, μ, ν désignant trois variables qui équivalent à deux paramètres arbitraires. Ces droites rencontrent, toutes, cinq des plans ci-dessus, savoir

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af.$$

Cela est évident, par les équations elles-mêmes, pour le premier, le second et le cinquième; en ajoutant membre à membre ces équations, une première fois multipliées par 1, 1, 1, une seconde fois par ν, λ, μ, et tenant compte de la relation d'identité, il vient

(1) Ces quinze plans constituent l'intersection complète de V_3 avec cette autre hypersurface

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+\frac{1}{x_3^3}+\frac{1}{x_4^3}+\frac{1}{x_5^3}+\frac{1}{x_6^3}=0.$$

ces deux autres

$$
(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda(x_1 + x_5) + \mu(x_2 + x_4) + \nu(x_3 + x_6) = 0, \\ \mu\nu(x_1 + x_4) + \nu\lambda(x_3 + x_5) + \lambda\mu(x_2 + x_6) = 0, \end{array} \right.
$$

qui le montrent pour le troisième et pour le quatrième.

Des équations semblables à celles en λ. μ, ν peuvent s'obtenir de cinq autres manières, d'où il suit qu'*il existe sur* V_3 *six systèmes de* ∞^2 *droites;* il correspond à chacun un groupe de cinq plans transversaux appartenant à V_3 ; il passe une droite de chaque système par chaque point *ordinaire* k de V_3 ; ces six droites, qui sont des génératrices d'un cône du second degré situé dans l'espace tangent en k, sont celles qui rencontrent au même point chacun des quinze espaces diagonaux de H_e et un des trois plans transversaux qu'il contient. Un sens géométrique plus précis est ainsi attribué aux symboles a, b, c, d, e, f : les droites représentées par un couple dans lequel entre la lettre a rencontrent les cinq plans transversaux d'un même groupe et l'association du couple ab avec le plan transversal 12 34 56 signifie que ce plan est rencontré par toutes les droites des types a et b ;

3° Les équations (3), qui représentent les quinze plans transversaux, montrent que ces plans passent six par six en dix points qui ont chacun trois coordonnées égales à $+1$ et trois égales à -1. Par exemple les six plans

$$
ab, \quad cd, \quad ce, \quad de, \quad af, \quad bf
$$

passent par le point

$$
\begin{array}{lll} x_1 = +1, & x_2 = -1, & x_3 = +1, \\ x_4 = -1, & x_5 = +1, & x_6 = -1. \end{array}
$$

Ces dix points sont des points singuliers de l'hypersurface, car il est clair que l'espace tangent ne saurait y être unique. Ce sont aussi les dix *points cardinaux* de H_e, corrélatifs des espaces cardinaux de H_p. Ils sont par six sur chacun des quinze plans transversaux. Neuf plans diagonaux passent par chacun d'eux.

§ 39. — La surface de Kummer.

1. La section de V_3 par l'espace qui lui est tangent en un point ordinaire k est une surface du troisième degré S ayant un point conique en k. Les quinze plans transversaux de V_3 donnent dans la section quinze droites situées sur S; les six droites de V_3 qui passent par k demeurent, dans la section, des droites pouvant toujours être désignées par les lettres a, b, c, d, e, f et chacune des quinze premières coupe deux d'entre elles suivant le schéma que définissent les couples ab, ac, ... Si l'on projette ce système sur un plan, les unes coupent le plan en six points d'une conique, et les autres donnent les quinze droites de l'hexagramme de Pascal. La projection de la ligne d'intersection des plans $x_1+x_2=0$, $x_1+x_3=0$, ..., $x_1+x_6=0$ contient encore les intersections de ab avec de, bc avec ef, cd avec fa, et est une droite de Pascal.

2. La réciproque dualistique de V_3 est une hypersurface de la troisième classe et, étant tenu compte de ce que V_3 a dix points singuliers, du quatrième degré [1]; nous la désignerons par V_4. Elle est associée avec l'hexastigme de points H_p de la même manière que V_3, qui est du troisième degré et de la quatrième classe, l'est avec celui d'espaces H_e. Elle contient comme ligne double chacune des quinze transversales de H_p, et chacun des dix espaces cardinaux du même H_p lui est un espace tangent singulier, c'est-à-dire la coupe suivant une surface du second degré double.

La section de V_4 par un espace est donc une surface du quatrième degré qui a quinze points doubles et dix plans tangents singuliers : ce sont les points principaux et les plans cardinaux de la section faite par le même espace dans H_p. *Les projections sur un plan des quinze points singuliers d'une surface du quatrième degré forment donc une famille de quinze droites possédant les propriétés de l'hexagramme de Brianchon.*

---

[1] Ce calcul de réciprocation n'est pas des plus simples. On le trouvera dans le Mémoire de Castelnuovo, *Atti dell' Istituto veneto*, 1891. — *Voir* aussi : DRAGONI, *Sulla varieta cubica di* S_4 *dotata di dieci punti doppii* (*Giornale di Battaglini*, t. XL, 1902, p. 255).

Si l'espace sécant touche V_4 en un point ordinaire k, la surface du quatrième degré qui est son intersection avec V_4 a encore un point singulier en k, ce qui en fait *seize*. C'est la *surface de Kummer*, qui a été extrêmement étudiée ; elle est à la fois du quatrième degré et de la quatrième classe ; elle a, dans le cas considéré ici, seize points singuliers ; elle a aussi seize plans tangents singuliers (c'est-à-dire la touchant suivant une conique) : six de ces plans passant par chacun de ces points et six de ces points se trouvent sur chacun de ces plans (1). *Quinze quelconques des seize points singuliers ont toutes les propriétés reconnues pour les quinze premiers, et leurs projections sur un plan forment une famille de seize droites dont quinze quelconques possèdent les propriétés de l'hexagramme de Brianchon.*

Voilà donc, faisant suite à ce qui a été dit à la fin du Chapitre précédent (p. 124), de nouvelles familles de quinze points ou de quinze droites par corrélation, qui jouissent des propriétés reconnues par Véronèse.

§ 40. — Résumé et conclusion des Chapitres III, IV et V.

Voici le chemin qu'avec le lecteur nous avons parcouru dans ces trois Chapitres.

I. L'hexagramme de Pascal, formé de quinze droites se rencontrant deux à deux sur six points d'une conique, — ou, indifférement, l'hexagramme de Brianchon, formé des quinze points d'intersection de six tangentes à une conique, — présente, quand on le considère comme une chose purement bidimensionnelle, une complication et une diffusion un peu déconcertantes pour l'esprit. Mais il est en relation immédiate avec une certaine forme de la *surface du troisième degré* de la Géométrie à trois dimensions, celle qui

(1) Salmon, dans son *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, ne consacre pas plus de quatre pages à la surface de Kummer. On peut voir de préférence : CAPORALI, *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer* (*Acc. dei Lincei*, 1877-1878). — ROHN, *Die verschiedene Gestalten der Kummer'schen Fläche* (*Math. Annalen*, t. XVIII, 1881, p. 99-160). — KUMMER, *Monatsberichte* de 1863, p. 539 ; 1866, p. 216-220 ; 1872, p. 474-483.

a un point nodal. La relation consiste en ce que la surface du troisième degré ainsi particularisée contient *vingt et une* droites, dont six sont les génératrices d'un cône du second degré ayant pour sommet le point nodal et sur lequel on peut poser la conique de l'hexagramme, tandis que les quinze autres droites sont dans les quinze plans joignant les premières deux à deux. Toutes les propriétés de l'hexagramme sont contenues dans cette figure ; elles sont facilement reconnaissables sous la forme tridimensionnelle, et elles y ont plus de cohésion, d'étendue, de profondeur, sans toutefois y trouver encore ce cachet de naturel et de simplicité, si apprécié du géomètre.

II. Si, de la surface du troisième degré particularisée par un point nodal, on passe à la surface générale, le nombre des droites en faisant partie se trouve porté de 21 à 27. On peut faire avec celles-ci, de diverses manières, un lot de quinze droites qui, projetées d'un point de la surface situé sur un de ses dix triangles, possèdent aussi les propriétés des quinze droites de l'hexagramme. Nous sommes en présence d'une nouvelle famille. Ce ne sont plus quinze droites joignant deux à deux six points d'une conique; ce sont quinze droites prises à volonté parmi *les vingt-huit doubles tangentes d'une courbe plane du quatrième degré formée de quatre ovales sans points singuliers.*

III. La figure à trois dimensions se trouve à son tour dans une figure quadridimensionnelle, qui, elle, est aussi simple que naturelle, celle de six points : *elle en est la section par un espace.* Ce n'est donc pas dans le troisième, mais dans le quatrième champ, ce n'est pas dans l'espace, mais dans l'étendue, que vont se nouer les tronçons épars montrés par le Chapitre III, et qu'il faut chercher la cause des multiples propriétés de l'hexagramme. M. Richmond fait cette observation que la figure de *quatre points dans le plan* fournit à la Géométrie de *la droite* (le champ inférieur d'un degré) une notion tout à fait fondamentale, celle du *rapport anharmonique;* que la figure de *cinq points dans l'espace* fournit à la Géométrie *du plan* une notion également capitale, celle de *deux triangles homologiques;* qu'enfin la figure de *six points dans l'étendue* fournit aux champs inférieurs la notion de l'hexagramme, assurément moins essentielle, mais que Pascal jugeait assez importante pour la mettre à la base de la théorie des coniques.

IV. Nous avons d'abord cherché à masser et à synthétiser les propriétés de l'hexagramme en nous élevant du plan dans l'espace, et nous avons trouvé avantageux, au lieu d'opérer dans l'*espace général*, multiplicité à trois dimensions, de nous confiner sur la *surface du troisième degré*, qui n'en a que deux. Puis, nous avons synthétisé à la fois la figure plane et la figure de l'espace dans le champ supérieur : l'étendue. Là nous avons obtenu la réalisation de ce que nous cherchions ; et là encore nous avons trouvé avantage à ne pas rester dans l'*étendue générale*, multiplicité à quatre dimensions, mais à supprimer une de ces dimensions en nous renfermant dans l'*hypersurface du troisième degré*. En d'autres termes, de même que nous avions *courbé le plan primitif et l'avions modelé sur une surface du troisième degré*, opération qui n'en conservait que les vingt-sept droites utiles et laissait les autres dehors, de même nous avons *courbé et modelé notre espace sur une hypersurface du troisième degré*, pour en expulser l'encombrante multitude des droites et des plans ne servant à rien.

Alors sont nées sous nos yeux de nouvelles familles planes de quinze droites, partageant avec celle de l'hexagramme toutes ses propriétés et ayant avec elle une origine commune dans l'étendue. Avec curiosité, nous avons vu qu'elles *n'existent pas isolément*, comme leur aînée de 1640, mais se réunissent plusieurs ensemble pour former des *groupes de permutations circulaires* : il a été noté un pareil groupe comprenant seize membres, parmi lesquels on peut prendre à volonté une permutation quelconque de quinze ; un second est de *trente-six* membres, et il n'en manque pas d'autres.

Voilà comment il est répondu aux deux questions qui se sont posées dans le paragraphe 19.

CHAPITRE VI.

LES HYPERSURFACES DU SECOND DEGRÉ.

§ 41. — Principes de la discussion de l'équation générale du second degré entre quatre coordonnées.

1. On appelle *hyperquadrique*, et nous désignerons abréviativement par φ, le *lieu des points dont les quatre coordonnées satisfont à une équation du second degré*. Il pourra nous arriver de remplacer ce mot encombrant par le mot plus simple de *quadrique*, lorsqu'il n'y aura pas danger de confusion entre l'*hypersurface* et la *surface*, entre l'être à trois dimensions et celui à deux.

La forme la plus générale de l'équation du second degré, en coordonnées homogènes $\frac{x_1}{x_5}, \frac{x_2}{x_5}, \frac{x_3}{x_5}, \frac{x_4}{x_5}$ (§ 2), est

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{rl}\varphi(x_i)= & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{15}x_1x_5 \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{25}x_2x_5 \\ & + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 + a_{34}x_3x_4 + a_{35}x_3x_5 \\ & + a_{41}x_4x_1 + a_{42}x_4x_2 + a_{43}x_4x_3 + a_{44}x_4^2 + a_{45}x_4x_5 \\ & + a_{51}x_5x_1 + a_{52}x_5x_2 + a_{53}x_5x_3 + a_{54}x_5x_4 + a_{55}x_5^2 = 0.\end{array}\right.$$

Le nombre des termes de φ est $\frac{1}{2}.5.6 = 15$, ce qui fait qu'il y a quatorze paramètres et que l'on peut, en thèse générale, faire passer une hyperquadrique par quatorze points de l'étendue.

Pour la symétrie, chaque terme ne contenant pas un carré a été écrit deux fois : une première fois, par exemple, sous la forme $a_{12}x_1x_2$ et une seconde fois sous la forme $a_{21}x_2x_1$, étant connu que $a_{12} = a_{21}$, c'est-à-dire que l'interversion des chiffres 1 et 2 ne change pas plus le coefficient a_{12} qu'elle ne change le produit

$x_1 x_2$. C'est donc comme s'il y avait $2a_{12}x_1x_2$, et ce n'est *qu'en apparence* que le nombre des termes est $5.5 = 25$ (¹).

Si l'on désigne par X_1 le multiplicateur de x_1 dans la première ligne, par X_2 celui de x_2 dans la seconde, etc., l'équation s'écrit

$$(2) \qquad \varphi(x_i) = X_1 x_1 + X_2 x_2 + \ldots + X_5 x_5 = 0.$$

2. Le théorème suivant est la pierre angulaire de la théorie des hyperquadriques : *Si*

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, \quad \text{ou, plus brièvement,} \quad y_i$$

sont les coordonnées d'un point quelconque p, et Y *ce que deviennent les polynomes* X *quand on y remplace x par y, l'équation*

$$(3) \qquad Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + \ldots + Y_5 x_5 = 0$$

représente un espace E *jouissant de cette propriété que, si l'on joint par une droite un quelconque de ses points au point p, cette droite est divisée harmoniquement par les deux points en lesquels elle coupe l'hyperquadrique.*

Soient en effet

$$y_i, \quad y'_i, \quad y_i + k_1 y'_i, \quad y_i + k_2 y'_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

quatre points en ligne droite. Les deux derniers seront sur l'hyperquadrique si l'on prend pour k_1 et k_2 les deux racines de

---

(¹) Bibliographie de ce Chapitre :

SEGRE, *Studio sulle quadriche in un spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (*Mém. de l'Acad. des Sci. de Turin*, 2ᵉ série, t. XXXVI, 1884, p. 1-86).

SEGRE, *Étude des différentes surfaces du troisième ordre à conique double ou cuspidale considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions* (*Math. Annalen*, t. XXIV, 1882, p. 313-444).

KLEIN, *Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale* (*Math. Annalen*, t. XXVIII, 1887).

HENSEL, *Ueber die Classification der nicht homogenen quadratischen Formen und der oberflächen zweiter Ordnung* (*Journ. de Crelle*, vol. 113, 1894, p. 303).

WYTHOFF, *The Classification of quadrics in n-dimensional space* (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1899, p. 162-191).

SOMMER, *Focaleigenschaften quadratischer Mannifaltigkeiten im vierdimensionalen Raume* (*Math. Annalen*, t. LIII, 1900).

l'équation du second degré en k

$$\varphi(y_i + ky'_i) = 0,$$

et ils seront conjugués harmoniques des deux premiers si $k_1 = -k_2$, c'est-à-dire si le coefficient du terme du premier degré de cette équation est nul. Or ce coefficient est

$$Y_1 y'_1 + Y_2 y'_2 + \ldots + Y_5 y'_5,$$

ce qui donne l'équation (3) en supposant que les y_i sont les coordonnées d'un point fixe et que les y'_i sont les coordonnées courantes.

3. On dit d'un point p et d'un espace E ayant entre eux la relation ainsi définie que p est le pôle de E et que E est l'espace polaire de p.

Pour que l'espace polaire du point p soit déterminé, il faut qu'un au moins des coefficients Y ne soit pas nul. Lorsqu'un point p est sur l'espace polaire d'un autre point q, réciproquement q est sur l'espace polaire de p; alors le point p et le point q sont dits *conjugués l'un de l'autre*. Lorsqu'un point q est sur son propre espace polaire E, il est sur l'hyperquadrique; en lui se réunissent les deux points d'intersection de la droite qui le joint à un point quelconque de E, et celui-ci s'appelle *l'espace tangent à l'hyperquadrique* au point p.

Quand des points sont sur une même droite ou sur un même plan, leurs espaces polaires passent par un même plan ou par une même droite; cette droite et ce plan sont dits *polaires l'un de l'autre*.

4. Cherchons les conditions pour qu'une droite D *se trouve sur l'hyperquadrique*. Soient

$$y_i, \quad y'_i, \quad y_i + ky'_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

trois quelconques de ses points; on doit avoir, quel que soit k,

$$\varphi(y_i) = 0, \qquad \varphi(y'_i) = 0, \qquad \varphi(y_i + ky'_i) = 0,$$

la troisième équation pouvant s'écrire, en vertu des deux premières,

$$Y_1 y'_1 + Y_2 y'_2 + \ldots + Y_5 y'_5 = 0.$$

Cela fait trois équations de condition, et elles expriment :

1° Que deux points de D doivent être sur l'hyperquadrique;

2° Qu'ils doivent être conjugués l'un de l'autre. Pour achever de préciser ces deux points, il faut ajouter deux équations (une pour chacun) qui sont arbitraires, puisque chacun d'eux peut être pris où l'on voudra sur D. On a alors $3 + 2 = 5$ équations entre les coordonnées y_i, y'_i et, comme celles-ci sont au nombre de huit, le système est *trois fois indéterminé*. En d'autres termes, il y a sur l'hyperquadrique un ∞^3 de droites; elles peuvent être réelles ou imaginaires; il en passe trois par chaque point.

Si l'on fait le même calcul pour un plan, on trouve pour le déterminer : 1° trois équations exprimant que trois de ses points sont sur l'hyperquadrique; 2° trois autres exprimant qu'ils sont conjugués deux à deux; 3° deux autres pour chacun des trois points; 4° deux autres pour chacun des deux autres points. Cela fait douze équations en tout, et, comme douze coordonnées sont en jeu, il s'ensuit qu'il n'y a pas de systèmes plans sur l'hyperquadrique générale.

5. Tout espace

$$(4) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_5 x_5 = 0$$

a, en thèse générale, un pôle par rapport à φ. Pour trouver les coordonnées y_i de ce point, il faut identifier les équations (4) et (3), c'est-à-dire poser

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 + \lambda\xi_1 = 0, \\ Y_2 + \lambda\xi_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_5 + \lambda\xi_5 = 0, \end{array} \right.$$

ce qui fait cinq équations du premier degré entre cinq inconnues, λ étant une inconnue auxiliaire qui s'annexe aux coordonnées demandées. Les valeurs de ces inconnues sont autant de quotients, alternativement positifs et négatifs, dont on obtient le dénominateur commun Δ en supprimant la dernière colonne dans la matrice rectangulaire

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \xi_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \xi_4 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \xi_5 \end{vmatrix},$$

et les numérateurs en supprimant successivement chacune des autres colonnes; on sait que Δ s'appelle *le discriminant, ou le hessien de la forme quadratique* φ.

Si l'on veut que le point (4) soit sur l'hyperquadrique, auquel cas (n° 3) son espace polaire sera tangent à celle-ci et il sera lui-même le point de contact, il faut substituer dans (1') les coordonnées y_i. En appelant D le déterminant obtenu par l'addition d'une sixième ligne

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4, \quad \xi_5, \quad 0$$

à la matrice M, le résultat de cette substitution dans le premier membre est

$$\varphi = -\Delta D.$$

6. Tout point qui a l'espace de l'infini pour espace polaire s'appelle *un centre* de l'hyperquadrique. Lorsque le centre est à l'infini, il est sur son propre espace polaire, en conséquence de cette définition; il est donc aussi sur l'hyperquadrique et celle-ci est tangente à l'espace de l'infini. Admettons maintenant que l'équation (4) représente cet espace particulier [1] et, par suite, que les coordonnées du centre sont déterminées par les équations (5).

Si les équations (5) sont toutes indépendantes les unes des autres, le système équivaut à quatre équations entre les quatre coordonnées y_i et représente par conséquent *un point*. Si les quatre premières sont indépendantes et ont la cinquième pour conséquence, le système, réduit à trois équations par l'élimina-

---

[1] Alors quatre des coefficients ξ sont nuls sans que le cinquième le soit.

tion de λ, représente *une droite dont tous les points sont des centres*. Si les trois premières sont indépendantes et que les deux autres en résultent, le lieu des centres est *un plan*. C'est *un espace* si ce sont seulement les deux premières.

Conformément à la marche classique, c'est sur la considération des centres que nous ferons reposer la discussion des hyperquadriques; elle occupera deux paragraphes, l'un contenant les trois derniers cas que l'on vient de reconnaître, et l'autre le premier.

§ 42. — Hyperquadriques ayant une infinité de centres.

I. — Cylindre de première espèce.

Supposons d'abord que les quatre premières des équations (5), savoir

$$(6)\qquad Y_1+\lambda\xi_1=0,\qquad Y_2+\lambda\xi_2=0,\qquad Y_3+\lambda\xi_3=0,\qquad Y_4+\lambda\xi_4=0,$$

sont indépendantes les unes des autres et impliquent la cinquième

$$(7)\qquad Y_5+\lambda\xi_5=0;$$

nous avons déjà dit qu'alors ces équations représentent une droite : nous l'appellerons *l'axe des centres*, A^c.

Si nous y faisons $\lambda=0$, il vient

$$(8)\qquad Y_1=0,\qquad Y_2=0,\qquad Y_3=0,\qquad Y_4=0$$

et, si nous admettons d'abord *que ces nouvelles équations sont indépendantes*, elles représentent un point que nous appellerons *un sommet*. Ce sommet est évidemment sur l'axe des centres, c'est-à-dire satisfait aux équations (6) et (7), et, non moins évidemment, il satisfait aussi à cette dernière quand on y fait $\lambda=0$, c'est-à-dire à

$$(9)\qquad Y_5=0;$$

il suit de là qu'il satisfait aussi à l'équation (1), qu'*il est sur l'hyperquadrique*.

Puisqu'il est un centre, l'espace de l'infini est son espace polaire et, puisqu'il est sur l'hyperquadrique, il est aussi sur son espace polaire. *Il est donc à l'infini.*

Soient y'_i ses coordonnées, y''_i celles d'un autre point quelconque de l'hyperquadrique, $y'_i + ky''_i$ celles d'un point quelconque de la droite $y'_i y''_i$. Si nous substituons ces dernières dans (1), un terme tel que $a_{12}x_1x_2$ en donne quatre autres qui sont : un terme $a_{12}y'_1y'_2$, et l'addition de tous les termes analogues donne *zéro* parce que y' est sur l'hyperquadrique ; un terme $k^2a_{12}y''_1y''_2$ qui donne la même chose parce que y'' y est aussi ; un terme $ky''_2 . a_{12}y'_1$, et, si l'on additionne tous les termes analogues en laissant k''_2 en facteur commun, l'autre est nul parce que les y'_i satisfont aux équations (8) et (9) ; enfin un terme $ky''_1 . a_{12}y'_2$, qui donne le même résultat pour la même raison.

On a donc *zéro* comme résultat final de la substitution dans (1) ; c'est dire que tous les points de la droite $y'y''$ sont sur l'hyperquadrique ; en d'autres termes, celle-ci est un lieu de droites dirigées vers un même point de l'infini de l'étendue ; en d'autres termes encore, un lieu de droites parallèles entre elles : *c'est un cylindre que nous avons sous les yeux.*

Pour voir quel est ce cylindre, coupons-le par notre espace, lequel a pour équation $x_4 = 0$. En biffant tout simplement dans l'équation (1) les termes en x_4, nous avons de suite l'équation de cette intersection en trois coordonnées homogènes $\frac{x_1}{x_5}, \frac{x_2}{x_5}, \frac{x_3}{x_5}$, c'est une *surface* dont la spécification ne serait plus qu'une question de géométrie à trois dimensions, à laquelle nous ne nous arrêterons pas. *Tous ces points appartiennent au cylindre,* et l'on peut l'appeler *sa base ;* elle a pour centre l'intersection de A^c avec notre espace.

On appelle *cylindre de première espèce* ce cylindre qui a pour *génératrices* des droites et, pour *base* ou *directrice,* une surface du second degré pouvant être

l'ellipsoïde,
le paraboloïde elliptique ou hyperbolique,
l'hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes.

Chaque génératrice contient un ∞^1 de points ; la directrice, homogène avec un plan, en contient un ∞^2 ; cela fait ∞^3 pour le lieu engendré, et ce nombre est bien celui des points de l'hyperquadrique, laquelle est homogène avec un espace.

II. — Cone de seconde espèce.

Le résultat qu'on vient d'obtenir suppose que les quatre équations (8) sont indépendantes et, par suite, représentent un point. Si elles ne le sont pas, on voit aisément que les équations (6) ne peuvent être satisfaites qu'en attribuant à λ la valeur $\lambda = 0$, qui remplace les équations (6) et (7) par

$$(10) \quad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0, \qquad Y_3 = 0, \qquad Y_4 = 0, \qquad Y_5 = 0.$$

Ces cinq équations n'en font que trois en réalité et représentent une droite, qui est encore un axe *des centres* A^c, non situé à l'infini [1].

Par un raisonnement analogue à celui qui a été tenu plus haut, on montrera que la droite joignant un point quelconque de A^c à un point quelconque m de l'hyperquadrique est tout entière sur celle-ci. Il s'ensuit que le plan passant par A^c et par le point m y est aussi tout entier. L'hyperquadrique est donc un *lieu de plans* passant tous par la droite A^c. Celle-ci est à la fois un *axe de centres* A^c et un *axe de sommets* A^s.

Cette forme s'appelle un *cône de seconde espèce*. Comme chaque plan générateur contient un ∞^2 de points, on ne peut plus prendre pour directrice (ou lieu des points m) une section spatiale, ce qui ferait un ∞^4 pour le nombre des points du lieu engendré : on prendra une section plane et le cône sera dit

à base d'ellipse,
» de parabole,
» d'hyperbole,

suivant le cas. Les ∞^1 plans générateurs forment *une seule série*, tandis que nous verrons qu'ils en forment deux dans le cône de première espèce.

---

(1) Si elles n'en faisaient que *deux* ou *une*, on aurait *une droite* ou un *point à l'infini*.

III. — Cylindre de seconde espèce.

Revenant en arrière jusqu'au début de ce paragraphe, nous supposons maintenant que les trois premières seulement des équations (6), savoir

$$Y_1 + \lambda\xi_1 = 0, \qquad Y_2 + \lambda\xi_2 = 0, \qquad Y_3 + \lambda\xi_3 = 0,$$

sont indépendantes et impliquent les deux autres

$$(7') \qquad Y_4 + \lambda\xi_4 = 0 \qquad Y_5 + \lambda\xi_5 = 0.$$

Les équations (6) représentent alors un plan : *le plan des centres*, P^c.

Si nous y faisons $\lambda = 0$, il vient

$$(8') \qquad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0, \qquad Y_3 = 0,$$

et, si nous admettons d'abord que les nouvelles équations sont indépendantes, elles représentent une droite, que nous appellerons une *droite-sommet*, D^s. Cette droite est évidemment sur P^c, et elle satisfait, non seulement aux équations (8), mais encore à

$$(9') \qquad Y_4 = 0, \qquad Y_5 = 0.$$

Il suit de là qu'elle est sur l'hyperquadrique.

Puisqu'un quelconque c de ses points est un centre et se trouve en même temps sur l'hyperquadrique, il ne peut être qu'à l'infini. On verra, comme tout à l'heure, que la droite joignant le point c à un autre point quelconque m de l'hyperquadrique est tout entière sur celle-ci, qui est dès lors constituée par des plans ayant en commun une même droite dans l'espace de l'infini.

Nous avons affaire au *cylindre de seconde espèce,* lieu des plans menés parallèlement à un plan fixe par les divers points m d'une courbe, que rien n'empêche de supposer plane et qui est alors une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Mais, si les équations (8) ne sont pas indépendantes, on est obligé de supposer $\lambda = 0$; alors les équations (6') et (7') prennent la forme (10), n'équivalant maintenant qu'à deux équations indépendantes et représentant un plan P^c : notre hyperquadrique est constituée par deux espaces se coupant suivant ce plan.

IV. Nous mentionnons seulement pour mémoire les cas où les équations (5) n'en vaudraient que deux, ou qu'une seule : l'hyperquadrique serait constituée, dans le premier par deux espaces parallèles ou coïncidents, dans le second par l'espace de l'infini compté deux fois.

En définitive, nous avons déjà reconnu trois formes du second degré spéciales à la Géométrie à quatre dimensions : le *cylindre de première espèce, celui de seconde espèce,* et le *cône de seconde espèce.* Quant au cône de première espèce, comme il n'a qu'un centre, il veut être placé dans le paragraphe suivant, où d'ailleurs sa déduction nous sera plus facile.

§ 43. — Hyperquadriques n'ayant qu'un centre.

I. — Paraboloïde et cône de première espèce.

Nous arrivons à la classe importante dans laquelle les équations (5) sont indépendantes les unes des autres et représentent un point.

Commençons par nous débarrasser du cas où ce point *est sur l'hyperquadrique.* Il faut pour cela, en vertu de l'équation (5), que le produit ΔD soit nul, c'est-à-dire que l'on ait, soit $D = 0$, soit $\Delta = 0$ (le centre serait indéterminé si l'on avait à la fois ces deux égalités).

Si $D = 0$, les équations (4) et (3) sont satisfaites simultanément ; l'hyperquadrique est tangente à l'espace de l'infini, le point de contact est un centre et il n'y en a pas d'autre. La forme que nous avons correspond à celle du *paraboloïde* de la Géométrie à trois dimensions ; c'est un type à placer à la suite des quatre qui seront examinés plus loin.

Si $\Delta = 0$, il résulte de cette relation combinée avec les équations (5)

$$\lambda = 0;$$

alors ces équations, après la suppression de λ, sont indépendantes et déterminent un point situé à distance finie. On verra comme au paragraphe 42 qu'une droite le joignant à un autre point quelconque de l'hyperquadrique est tout entière sur celle-ci, puis que sa section par notre espace est une surface du second degré.

Quant à son espace polaire ou plan tangent, c'est un quelconque des espaces, en nombre ∞^2, qu'il détermine avec un quelconque des plans tangents de cette surface. Nous avons le *cône de première espèce*, qui vient compléter la liste des cônes et cylindres et peut, comme le cylindre de première espèce, avoir pour base ou directrice une surface quelconque du second degré. En conséquence de ce mode de génération, il contient un ∞^1 de plans qu'on peut appeler aussi *ses plans générateurs*. Ils forment *deux séries;* deux plans qui appartiennent à une même série ne se coupent que dans le sommet, et deux plans qui appartiennent à des séries différentes se coupent suivant une droite; on n'a qu'à le concevoir s'appuyant sur un hyperboloïde à une nappe pour se rendre compte de cette propriété.

Il n'y a plus désormais devant nous que des hyperquadriques ayant pour centre *un point déterminé, situé dans la région finie de l'étendue.* Nous pouvons donc transporter en ce point l'origine des coordonnées et, les supposant rectangulaires, faire subir à la fonction φ la transformation si connue à la suite de laquelle il ne reste, avec une constante, que des termes contenant les carrés des coordonnées. C'est une opération purement algébrique, aux détails de laquelle nous ne nous arrêterons pas; nous passons de suite à *l'équation réduite* et, abandonnant les coordonnées homogènes, nous la prenons sous la forme

$$\text{(11)} \qquad \frac{x_1^2}{\alpha_1 - t} + \frac{x_2^2}{\alpha_2 - t} + \frac{x_3^2}{\alpha_3 - t} + \frac{x_4^2}{\alpha_4 - t} = 1,$$

α_1, α_2, α_3, α_4 étant des constantes et t un paramètre arbitraire. Avec deux termes, cette forme donne les *coniques homofocales* de la Géométrie à deux dimensions et, avec trois, les *quadriques homofocales* de celle à trois; elle va donner maintenant les *hyperquadriques homofocales.*

En considérant les x_i comme données, l'équation (11) est du quatrième degré en t, et il est facile de voir que ses quatre racines sont réelles. Si l'on a eu soin d'écrire les constantes α_1, α_2, α_3, α_4 dans l'ordre de grandeur décroissante, ces quatre racines t_1, t_2, t_3, t_4 se placent dans leurs intervalles comme ceci :

$$\text{(12)} \qquad \alpha_1 > t_1 > \alpha_2 > t_2 > \alpha_3 > t_3 > \alpha_4 > t_4 > -\infty.$$

On les appelle les *coordonnées elliptiques* du point p dont x_1, x_2, x_3, x_4 sont les *coordonnées ordinaires*. Celles-ci peuvent s'en déduire par les formules

$$\begin{cases} x_1^2 = -\dfrac{(\alpha_1 - t_4)(\alpha_1 - t_3)(\alpha_1 - t_2)(\alpha_1 - t_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)}, \\ x_2^2 = \ldots, \qquad x_3^2 = \ldots, \qquad x_4^2 = \ldots, \end{cases}$$

les trois dernières résultant de la première par la permutation circulaire des indices des α.

II. — Intersection de l'hyperquadrique avec son espace tangent.

C'est ici le lieu de préciser les notions de *tangence*, parce qu'elles reçoivent leur pleine expression dans les configurations que nous allons voir.

Un *espace*, un *plan*, une *droite* coupent respectivement l'hyperquadrique suivant une *surface* du second degré, une *courbe* du second degré et un système de deux *points*. On dit qu'ils lui sont tangents en un point m, quand m est un *point double* de cette intersection. Or la surface du second degré ne saurait avoir un point double sans se particulariser en un cône, et la courbe du second degré sans se particulariser en un système de deux droites. Donc, au point m de l'hyperquadrique : l'espace tangent la coupe suivant un cône ordinaire ayant ce point pour sommet, le plan tangent suivant deux droites qui s'y croisent, et la droite tangente suivant deux points qui s'y réunissent en un seul.

Il y a en chaque point m un espace tangent, un ∞ de plans tangents et un ∞^2 de droites tangentes. Le premier a pour équation, a_1, a_2, a_3, a_4 étant les coordonnées du point m :

$$\frac{a_1 x_1}{\alpha_1 - t} + \frac{a_2 x_2}{\alpha_2 - t} + \frac{a_3 x_3}{\alpha_3 - t} + \frac{a_4 x_4}{\alpha_4 - t} = 1.$$

Parmi les seconds, il en est un pour lequel les deux droites qui forment son intersection avec l'hyperquadrique sont réunies en une seule : on l'appelle le *plan hypertangent* suivant cette droite, dont il est le plan polaire. Pour l'hyperquadrique entière, il y a un ∞^3 de plans hypertangents, un sur chacune de ses droites, et un ∞^5 de plans tangents.

III. Les hyperquadriques comprises dans l'équation (11) se rangent en *quatre types,* qui correspondent respectivement aux valeurs du paramètre t comprises dans les quatre intervalles définis par les inégalités (12); t_4 est une de ces valeurs pour le quatrième intervalle, t_3 pour le troisième .... Nous admettrons d'abord qu'on ne prend que des valeurs *comprises* dans les intervalles, et qu'on exclut celles $t = \alpha_4$, $t = \alpha_3$, ... *faisant les passages* d'un intervalle à un autre.

Les ∞^3 droites sont toutes imaginaires dans le premier et le quatrième types; le deuxième et le troisième ont des régions où elles sont réelles et d'autres où elles sont imaginaires.

Premier type. — Prenons t dans le quatrième intervalle, celui où est t_4. L'hyperquadrique n'a pas de point réel à l'infini. Les espaces coordonnés la coupent suivant des ellipsoïdes, et elle ne contient que des surfaces fermées. En un quelconque de ses points, l'espace tangent la coupe suivant un cône imaginaire et la laisse tout entière du même côté. Elle comprend comme cas particulier l'*hypersphère* [1], qui a été étudiée dans le *Traité élémentaire* (§ 31, 32, 33).

Deuxième type. — Prenons t dans le troisième intervalle, celui où est t_3. L'espace $x_4 = 0$ coupe l'hyperquadrique suivant un ellipsoïde et les trois autres la coupent suivant des hyperboloïdes à une nappe. D'autres espaces peuvent donner un hyperboloïde à deux nappes ou un paraboloïde.

Pour voir en particulier ce que donne celui de l'infini, soit

$$(13) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 1$$

---

[1] Dans le cours de notre travail, l'occasion était belle, et forte la tentation, de faire de la néologie sur une grande échelle. Nous nous en sommes garé soigneusement : l'acception particulière donnée aux mots *champ* et *étendue* est peut-être tout ce que nous nous sommes permis en ce genre. Le mot *hypersphère*, qui n'est d'ailleurs pas de notre création, est une conséquence naturelle de la nomenclature que nous avons suivie; nous devons toutefois prévenir le lecteur qu'il est employé aussi, et avec un tout autre sens, en Géométrie lobatschewskienne (*voir* LECHALAS, *Revue des questions scientifiques,* octobre 1903). Les deux branches ont trop peu de points de contact (celui dont nous sommes ici voisins est peut-être le seul), pour que ce double emploi ait des inconvénients; s'il en était ainsi, le mot devrait rester à l'autre Géométrie.

un espace quelconque; divisons les équations (11) et (13) par x_4 et posons

$$\frac{x_1}{x_4} = y_1, \qquad \frac{x_2}{x_4} = y_2, \qquad \frac{x_3}{x_4} = y_3;$$

elles deviennent

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y_1^2}{\alpha_1 - t} + \frac{y_2^2}{\alpha_2 - t} + \frac{y_3^2}{\alpha_3 - t} = \frac{1}{t_3 - \alpha_3}, \\ &\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = -\xi_4, \end{aligned} \right.$$

qui représentent, en coordonnées tridimensionnelles y, la première un ellipsoïde, la seconde un plan, ensemble une certaine courbe. Pour $x_4 = \infty$, cette courbe correspond au cône asymptote de l'intersection de l'hyperquadrique avec l'espace de l'infini; suivant qu'elle est réelle, réduite à un point ou imaginaire, ce cône asymptote est réel, ne contient qu'une droite réelle, ou est imaginaire, et l'intersection de l'hyperquadrique avec l'espace de l'infini est un hyperboloïde à une nappe, un paraboloïde elliptique ou une surface fermée.

Troisième type, qui prend t dans le deuxième intervalle. Il est coupé suivant un hyperboloïde à une nappe par les deux espaces coordonnés $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, suivant un hyperboloïde à deux nappes par les deux autres. D'autres espaces peuvent le couper suivant des paraboloïdes hyperboliques, mais jamais suivant un paraboloïde elliptique ou une surface fermée. En chaque point le cône qui lui est commun avec l'espace tangent est toujours réel.

Quatrième type, pour lequel t est dans le premier intervalle, c'est-à-dire entre α_1 et α_2. Les hyperquadriques de ce type coupent l'axe des x_1 en des points réels, les trois autres en des points imaginaires, l'espace $x_1 = 0$ suivant une surface imaginaire, les trois autres suivant des hyperboloïdes à deux nappes. Elles contiennent des ellipsoïdes réels et des paraboloïdes elliptiques, mais point d'hyperboloïdes à une nappe. Elles ne contiennent aucune droite réelle et, dès lors, leur espace tangent n'a en commun avec elles qu'un cône imaginaire.

IV. Pour en finir avec cette longue discussion, il nous reste à examiner les hyperquadriques, déterminées par les valeurs, laissées expressément de côté jusqu'ici, que prend le paramètre t en passant d'un intervalle au suivant, dans l'échelle tracée par les inégalités (12).

1° Pour $t=\alpha_4$, le dénominateur du quatrième terme de l'équation générale (11) est *zéro;* alors cette équation n'a de sens que si l'on y fait aussi $x_4=0$ et si l'on y considère le $\frac{0}{0}$ comme positif, puisqu'il représente la limite de valeurs positives. En le faisant passer au second membre, l'équation (11) prend la forme

$$x_4=0, \qquad \frac{x_2^1}{\alpha_1-\alpha_4}+\frac{x_2^2}{\alpha_2-\alpha_4}+\frac{x_3^2}{\alpha_3-\alpha_4}-1\leqq 0,$$

ce qui veut dire que l'hyperquadrique du premier type devient en *montant* à la limite $t=\alpha_4$, le lieu des points qui sont à l'intérieur de l'ellipsoïde

$$(15) \qquad x_4=0, \qquad \frac{x_1^2}{\alpha_1-\alpha_4}+\frac{x_2^2}{\alpha_2-\alpha_4}+\frac{x_3^2}{\alpha_3-\alpha_4}=1.$$

Celle du deuxième type devient, en *descendant* à la même limite, le lieu des points qui sont extérieurs au même ellipsoïde. Ensemble elles font l'espace entier des $x_1x_2x_3$;

2° L'hyperquadrique générale de deuxième type et celle du troisième ont pour limite, quand leur paramètre t tend de part et d'autre vers la valeur α_3, la première, la position de l'espace $x_3=0$ située à l'intérieur de l'hyperboloïde à une nappe

$$(16) \qquad x_3=0, \qquad \frac{x_1^2}{\alpha_1-\alpha_3}+\frac{x_2^2}{\alpha_2-\alpha_3}-\frac{x_4^2}{\alpha_3-\alpha_4}=1,$$

la seconde celle située à l'extérieur de la même surface ;

3° Même chose à dire pour les hyperquadriques des troisième et quatrième types, leur limite commune α_2, et l'hyperboloïde à deux nappes

$$(17) \qquad x_2=0, \qquad \frac{x_1^2}{\alpha_1-\alpha_2}-\frac{x_3^2}{\alpha_2-\alpha_3}-\frac{x_4^2}{\alpha_2-\alpha_4}=1;$$

4° Enfin l'hyperquadrique du premier type, quand son paramètre t passe à la limite α_1, devient l'espace $x_4=0$, dont tous les points satisfont à la condition

$$(18) \qquad x_4 = 0, \qquad -\frac{x_2^2}{\alpha_1 - \alpha_2} - \frac{x_3^2}{\alpha_2 - \alpha_3} - \frac{x_4^2}{\alpha_2 - \alpha_4} - 1 < 0.$$

Situées respectivement dans les quatre espaces coordonnés, les surfaces (15), (16), (17) et la surface imaginaire

$$x_4 = 0, \qquad \frac{x_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{x_3^2}{\alpha_2 - \alpha_3} + \frac{x_4^2}{\alpha_2 - \alpha_4} + 1 = 0,$$

jouent par rapport aux hyperquadriques homofocales (11) le même rôle que les *lignes focales* de la Géométrie à trois dimensions par rapport aux quadriques homofocales ; elles sont le point de départ d'une théorie correspondante à celle dont ces lignes ont été l'objet entre les mains de Chasles [1].

---

(1) *Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales et des surfaces du second degré homofocales* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. V). *Voir* aussi les Traités de Géométrie analytique, par exemple celui de Pruvost, t. II, p. 365.

CHAPITRE VII.

LES QUARTIQUES.

§ 44. — Classification.

I. — Faisceau d'hyperquadriques.

Deux *surfaces* du second degré, ou *quadriques* de la Géométrie à trois dimensions, ont pour intersection une *courbe* du quatrième degré appelée *quartique*. Dans certains cas particuliers, comme celui de deux sphères, cette courbe est plane, mais, dans le cas général, elle traverse une *succession de plans* en n'ayant qu'un *point* pour trace dans chacun d'eux; en d'autres termes, elle passe dans diverses régions de l'*espace;* on exprime ce fait en disant qu'elle est gauche ou *à double courbure* ([1]).

Deux *hypersurfaces* du second degré, ou *hyperquadriques,* ont pour intersection une *surface* du quatrième degré appelée aussi *quartique*. Dans certains cas particuliers, comme celui de deux hypersphères, où elle est une sphère, cette surface est tout entière dans un espace; mais dans le cas général elle traverse une *succession d'espaces,* n'ayant qu'une *courbe* pour trace dans chacun d'eux; en d'autres termes, elle passe successivement dans diverses régions de l'*étendue*. Il n'y a pas de mot exprimant cette manière d'être et correspondant au mot *gauche* de la Géométrie à trois dimensions. Mais ce mot, s'il existait ou si nous le faisions, ne créerait pas plus que ne le fait le mot gauche une différence spécifique entre le cas particulier et le cas général; c'est toujours

([1]) Cette courbe a été discutée pour la première fois d'une manière complète par Painvin (*Nouv. Ann de Math.*, 2e série, t. VII, 1868); plus récemment par Andoyer (*Id.*, 3e série, t. XV, 1896).

une *surface*, chose à deux dimensions, homogène avec le plan et se mesurant comme lui en *mètres carrés*, tandis que l'hyperquadrique est une chose à trois dimensions, homogène avec l'espace et se mesurant comme lui en *mètres cubes*, et que le *contenu* de l'hyperquadrique, quand elle est fermée, est une chose à quatre dimensions, se mesurant par une unité plus élevée d'un degré : le *mètre octaédroïde* (*voir* p. 30).

Soient $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ les équations des deux hyperquadriques : φ ne sera pas autre chose que le développement (1) ou (2) du paragraphe 41, et ψ sera ce que devient φ quand on remplace a par b. L'intersection est représentée par les deux équations simultanées

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0; \tag{19}$$

c'est une *surface du quatrième degré* [1] que nous désignerons par **S** dans tout ce qui suit.

λ étant un paramètre arbitraire, l'équation

$$\varphi + \lambda\psi = 0 \tag{20}$$

représente un ∞^1 d'hyperquadriques passant par la surface (19) : c'est un *faisceau d'hyperquadriques* dont φ et ψ sont les *hyperquadriques fondamentales* et dont **S** est le *support*. Si l'on pose

$$a_i + \lambda b_i = c_i,$$

l'équation (20) résulte à son tour de (19) en y remplaçant a par c.

Par un point donné p de l'étendue il passe une hyperquadrique du faisceau : c'est celle correspondant à la valeur λ qui résulte de l'équation (20) quand on y substitue les coordonnées de p.

Tout point p de l'étendue a, naturellement, des espaces polaires différents par rapport aux diverses hyperquadriques du faisceau; mais, comme leur nombre est ∞^1, ces espaces forment aussi un faisceau et passent tous par un même plan P. On dit que P est le

---

(1) C'est par inadvertance qu'il a été dit dans le *Traité élémentaire* (§ 30) que l'intersection de deux hypersurfaces est une *surface du second degré* et celle de trois une *courbe du second degré;* il faut lire : *une surface du quatrième degré* et une *courbe du huitième degré*.

plan polaire de p par rapport à S et, réciproquement, que *p est le pôle de* P *par rapport à* S.

L'hyperquadrique du faisceau qui passe par p y a pour espace tangent l'espace déterminé par le point p et le plan P. Si elles y passent toutes, c'est-à-dire si p se trouve à l'intersection commune S, P est le plan tangent à S en p : lieu des droites qui sont tangentes en ce point à toutes les courbes de S qui y passent, et intersection commune des espaces tangents en ce point à toutes les hyperquadriques du faisceau.

II. — Théorème de Weierstrass.

D'après ce qu'on a vu paragraphes 42 et 43, l'équation (20) représente un cône si, ayant remplacé a_i par $a_i + \lambda b_i$, on trouve que le discriminant Δ est égal à zéro. Comme chacun des vingt-cinq termes de Δ est un produit de cinq facteurs tels que $a + \lambda b$, l'équation $\Delta = 0$ est du *cinquième degré* en λ. Il y a donc, en thèse générale, *cinq cônes* dans le faisceau (20); pour faire plus ample connaissance avec celui-ci, il faut procéder à un examen plus détaillé des manières dont Δ peut s'annuler. Cet examen, moins simple ici qu'au début du Chapitre, est facilité par l'emploi du théorème suivant, dû à Weierstrass. Appelons

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_5$$

les racines de l'équation $\Delta = 0$, en fonction desquelles Δ prend la forme

$$\Delta = K(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_5). \tag{21}$$

Le nombre 5 peut se décomposer en nombres plus petits de *sept manières,* que nous écrivons comme ceci :

$$[11111], \quad [1112], \quad [122], \quad [113], \quad [23], \quad [14], \quad [5],$$

et qui donnent à Δ autant de formes différentes correspondant aux divers cas d'égalité des racines λ_i. Soit n_i le nombre de fois que se rencontre dans l'une d'elles le binome $(\lambda - \lambda_i)$, i désignant un des cinq nombres 1, 2, 3, 4, 5 et les n_i satisfaisant naturellement à la condition

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_5 = 5. \tag{22}$$

Soient en outre : n'_i le nombre de fois que le binome se rencontre dans les cinq premiers sous-déterminants Δ', n'' le nombre de fois qu'il se rencontre dans les quatre seconds Δ'' .... Un de ces nombres ne saurait être plus petit que le suivant, et il en est de même pour leurs différences

$$e_i = n_i - n'_i, \qquad e'_i = n'_i - n''_i, \qquad \ldots.$$

En outre il est facile de voir que

$$(\lambda - \lambda_i)^{n_i} = (\lambda - \lambda_i)^{e_i}(\lambda - \lambda_i)^{e'_i}\ldots. \tag{23}$$

Les facteurs qui forment le second membre s'appellent *les diviseurs élémentaires de* Δ (*Elementartheiler* de Weierstrass) [1]. Quand on passe de Δ à Δ', le premier de ces facteurs, $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ s'en détache; le second s'en détache à son tour quand on passe de Δ' à Δ'', etc., et ainsi de suite. C'est une sorte de constitution moléculaire où les sept formes de groupement qui se sont tout d'abord présentées à nous ne sont plus que des premiers termes.

Un diviseur élémentaire peut appartenir une ou plusieurs fois à la même racine. Pour faire ressortir cette circonstance, on réunit dans une parenthèse, comme $(m, n, \ldots)$, les nombres qui expriment les multiplicités respectives des divers diviseurs de la racine. Par exemple : [113] veut dire que Δ a trois diviseurs élémentaires, un simple $(\lambda - \lambda_1)$, un simple $(\lambda - \lambda_2)$, un triple $(\lambda - \lambda_3)$; et [1(13)] veut dire que Δ a un premier diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_1)$ une fois, puis un second $(\lambda - \lambda_2)$ quatre fois; que le premier n'est plus dans Δ', mais que le second y est encore une fois; qu'ils ne sont plus ni l'un ni l'autre dans Δ''. En opérant de la même manière pour les six autres termes, on forme le Tableau suivant :

[11111]	[2111]	[221]	[311]	[32]	[41]	[5]
[(11) 111]	[(21) 11]	[2 (21)]	[(31) 1]	[(32)]	[(41)]	
[(11) (11) 1]	[21 (11)]	[(22) 1]	[3 (11)]			
»	[(21) (11)]	»	»			
[(111) 11]	»	[(221)]	[(311)]			
[(111) (11)]	[(211) 1]					
[(1111) 1]	[2 (111)]					
	[2111]					

[1] *Voir* MÜHL, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Leipzig, 1899.

Cela posé, le théorème de Weierstrass (simplifié et particularisé) s'énonce ainsi : *Deux formes quadratiques données* φ, ψ *et deux autres* φ_1, ψ_1 *peuvent se changer l'une dans l'autre par une même transformation linéaire quand leurs discriminants* Δ *ont les mêmes diviseurs élémentaires et ne le peuvent pas dans le cas contraire; il en est de même pour la transformation par rayons vecteurs réciproques.* En vertu de ce théorème, les *vingt-six* termes ci-dessus *classent* les formes quadratiques homogènes à cinq variables, c'est-à-dire les surfaces quartiques de la Géométrie à quatre dimensions.

Ce sont comme autant d'étiquettes qu'on appelle les *caractéristiques.* Il s'attache à chacune d'elles une classe de quartiques dont les deux équations, réduites au maximum de simplicité, prennent le nom d'*équations canoniques* et ont pour coefficients précisément les coefficients des diviseurs élémentaires, qui sont de véritables invariants du couple d'équations. Si l'on veut connaître les propriétés de la classe, il faut en définitive former et discuter les équations, ainsi que nous l'avons fait sommairement pour les quadriques à centre; nous ne nous livrerons pas à ce travail, la seule considération des caractéristiques devant suffire à nos besoins (¹).

III. — Les caractéristiques.

On peut dire indifféremment la *caractéristique de la quartique,* ou bien *la caractéristique du faisceau d'hyperquadriques* dont elle est le support. Cette donnée fait connaître immédiatement la constitution du faisceau en ce qui concerne les cônes, et celle de la surface quartique en ce qui concerne ses points singuliers.

(¹) Dans la Géométrie à trois dimensions, l'intersection de deux surfaces du second degré, qui est une *ligne,* comporte *treize* caractéristiques, qui correspondent aux classes reconnues dès 1868 par Painvin, et qui sont :

[1111], [211], [31], [22], [4],
[(11) 11], [(21) 1], [(11) 2], [(31)], [(22)],
[(11) (11)], [(211)],
[(111) 1].

Dans celle à cinq dimensions, le lieu correspondant, qui s'appellerait le *volume quartique,* en aurait *cinquante-huit.*

A un chiffre *libre* il correspond un cône de première espèce ; à deux chiffres, enfermés ensemble dans une parenthèse, un cône de seconde espèce. Plus de deux chiffres enfermés ensemble dénoncent des quadriques *dégénérées*, c'est-à-dire abaissées dans le degré ou la dimension ; elles sont, dans le Tableau, séparées des autres par un trait et nous les laisserons de côté, ce qui réduit le nombre des quartiques proprement dites de vingt-six à *dix-huit*.

Un chiffre 2 correspond à un point double m de la surface **S**, point où le plan tangent est remplacé par un *cône ordinaire* f, c'est-à-dire un cône du second degré à deux dimensions. Toutes les hyperquadriques du faisceau ont en ce point le même espace tangent, celui E qui contient le cône f : car une droite quelconque de E, coupant **S** deux fois en m, coupe aussi chacune d'elles deux fois en m. Cet espace coupant chacune des hyperquadriques suivant un cône ordinaire (§ 43), ces cônes sont en nombre ∞^1 comme les hyperquadriques elles-mêmes, et ont quatre génératrices communes ; il passe donc par tout point double, en général, quatre droites, distinctes ou non, situées sur la surface **S**.

Le chiffre 2 répété veut dire qu'il y a deux points doubles. La droite qui joint ces deux points appartient tout entière à la surface, car ils sont conjugués par rapport à toutes les hyperquadriques du faisceau, d'où il suit que tout point en ligne droite avec eux appartient à une de ces hyperquadriques. En outre il passe par cette droite un plan qui est tangent à toutes celles-ci : c'est l'intersection de l'espace tangent commun en m avec celui en m'.

Le chiffre 3 indique l'existence d'un point double où le cône ordinaire tangent s'est décomposé en deux plans ; la *Théorie des singularités* donne à un pareil point le nom de *point biplanaire de première espèce*. Pour un chiffre 4, la droite d'intersection des deux plans tangents appartient tout entière à la surface, et, pour un chiffre 5, un des deux plans lui est tangent tout le long de celle-ci. Ces deux cas peuvent être considérés comme la réunion des degrés 1 et 2 ou 2 et 3, et le point biplanaire correspondant est dit *de deuxième* ou *de troisième espèce*.

IV. — Les dix-huit classes.

La caractéristique [11111] est celle du *cas général*. Il y a dans le faisceau *cinq cônes de première espèce*. Leurs sommets jouissent de cette propriété que chacun d'eux est le pôle de l'espace des quatre autres par rapport à une quelconque des hyperquadriques du faisceau.

Avec [2111], il n'y a plus que quatre cônes, et la surface **S** a un point double m. Nous avons déjà vu qu'alors la surface **S** a quatre droites passant par le point m. Celui-ci est le sommet d'un des cônes à trois dimensions du faisceau, lequel compte pour deux et peut être pris pour l'une φ des hyperquadriques fondamentales. Il a un plan générateur passant par chacune des quatre droites déjà trouvées sur **S**; il y en a sur chacun d'eux une deuxième appartenant aussi à **S**, ce qui en fait *huit*.

On a le cas [221], c'est-à-dire trois cônes de première espèce et deux points doubles, en prenant pour les hyperquadriques fondamentales φ, ψ deux cônes de première espèce ayant chacun son sommet sur l'autre. Ces sommets m et m' sont deux points doubles de **S** et, ainsi qu'on l'a vu plus haut, la droite qui les joint appartient tout entière à **S**. En m, comme en m', toutes les hyperquadriques du faisceau ont un même espace tangent et les deux espaces E, E' se coupent suivant un plan qui est le plan tangent (unique) à la surface tout le long de la droite mm'. Les ∞^1 cônes à deux dimensions ayant pour sommet commun le point m sont tangents à un même plan le long de mm' et n'ont que deux autres génératrices communes. En raisonnant comme ci-dessus, on trouvera donc que le sommet m ne fournit plus à **S** huit droites, mais seulement quatre, outre mm'; comme m' en fait autant, cela fait *neuf* droites situées sur **S**.

Nous aurons [311] (trois cônes de première espèce et un point double biplanaire) si, dans le cas précédent, nous orientons un des deux cônes fondamentaux de manière que l'espace tangent en son sommet à toutes les hyperquadriques du faisceau le touche lui-même le long d'une génératrice; huit droites sur **S**.

[32] donne deux cônes de première espèce et deux points doubles dont un biplanaire; ... et ainsi de suite jusqu'à [5], qui

clôt la première ligne du Tableau des caractéristiques, et porte à *sept* le nombre des classes où ne se trouvent que des cônes de première espèce. Dans les lignes suivantes, nous rencontrons *huit* termes où ils sont associés avec des cônes de seconde espèce, et *trois* où ceux-ci se trouvent tout seuls.

Lorsqu'il y a dans le faisceau un cône de seconde espèce, son arête coupe **S** en deux points r et r' dont chacun est un point double. Ils sont distincts pour les classes

$$[(11)111],\quad [(11)(11)1],\quad [(11)21],\quad \text{et}\quad [(11)(21)],$$

coïncidents pour les classes

$$[(31)1] \quad \text{et} \quad [(41)],$$

indéterminés pour les classes

$$[(22)1] \quad \text{et} \quad [(32)].$$

Pour celles-ci, cela veut dire que l'arête est tout entière sur la surface **S**, dont elle est même une droite double; l'intersection du cône avec cette surface se compose de cette arête et de ∞^1 droites appuyées sur elles : on a affaire à une *surface réglée*.

Pour les six autres classes, les intersections des plans générateurs du cône avec **S** forment une série de ∞^1 coniques passant toutes par z et par z'. Il y a en outre sur **S** huit droites constituant par couples quatre *coniques décomposées* qui font partie de cette série. On trouve, en effet, en raisonnant pour chacun de ces points comme nous l'avons fait plus haut pour le sommet d'un cône de première espèce, qu'il doit passer par chacun d'eux quatre droites situées sur **S**; d'ailleurs il n'y a pas sur **S** de droite ne passant pas par l'un ou par l'autre, car une pareille droite déterminerait avec eux un espace faisant partie du cône.

§ 45. — Une nouvelle halte dans la Géométrie à trois dimensions.

I. La Géométrie à trois dimensions a retourné de mille manières les *surfaces du second degré*, et il est aujourd'hui difficile de faire une découverte importante, plus encore peut-être une découverte futile, sur un terrain si exploré. Elle connaît bien aussi les *surfaces du troisième degré*, comme on l'a vu au Chapitre III. Mais elle est moins avancée en ce qui concerne les *surfaces du quatrième degré*. Leur théorie générale n'est pas faite, et quelques-unes seulement de leurs familles ont été reconnues. Citons en particulier : celles formées par une infinité de droites, étudiées par Rohn ; celles qui ont un point triple et qu'on appelle les *monoïdes* du quatrième degré, étudiées par le même auteur ; celles qui ont des points doubles (de un à seize), étudiées principalement par Cayley, et parmi lesquelles se trouve la surface de Kummer, que nous avons entrevue au paragraphe 39 ; enfin celles *qui contiennent une conique double*.

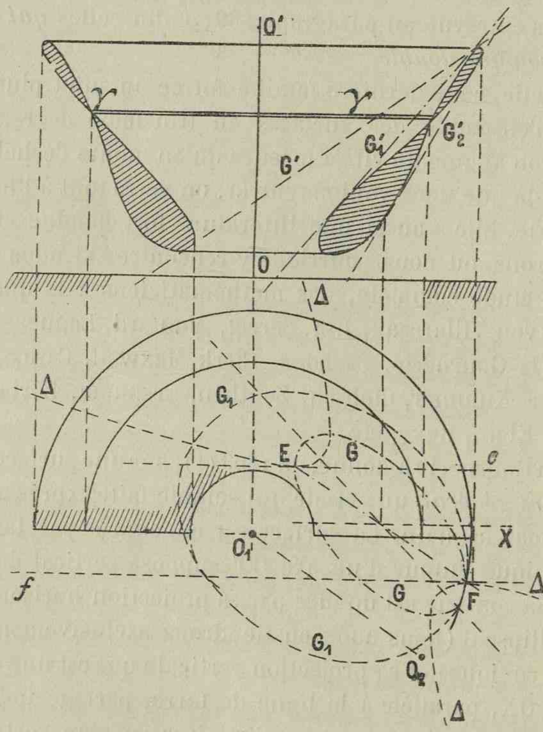
A elle seule, cette dernière famille forme un sujet plus étendu que tout l'ensemble des surfaces du troisième degré, tant la complication augmente vite à mesure qu'on monte l'échelle. C'est dans celle-là que nous voulons entrer, on verra tout à l'heure par quelle porte. Elle a aussi une littérature fort étendue et nous y rencontrerons, ou nous pourrions y rencontrer si nous voulions faire une étude complète, des mathématiciens tels que Dupin, Chasles, Yvon Villarceau, J.-A. Serret, Moutard, Laguerre, Mannheim, de la Gournerie, Darboux, Clerk Maxwell, Casey, Cayley, Lemonnier, Kummer, Clebsch, Zeuthen, Cremona, Loria, Sophus Lie, Félix Klein, Reye, etc.

M. de la Gournerie a donné, en 1863 (1), sur une surface appelée par lui *tore général*, une étude qui semble faite exprès pour nous y mener par la main. La surface est engendrée par la rotation d'une conique autour d'un axe OO′ supposé vertical dans la figure 37 ; la conique est donnée par sa projection horizontale, qui est une ellipse G (nous nous en tiendrons exclusivement à cette forme de conique) et sa projection verticale qui est une droite G′. La ligne OX, parallèle à la ligne de terre, partage inégalement les cordes de G qui sont perpendiculaires au plan vertical, sauf une dDδ, celle qui la coupe au même point que le diamètre EF conjugué de ces cordes. Par suite, tandis que deux points de la conique génératrice situés à la même hauteur, autres que d et δ,

(1) *Mémoire sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace* (*Journal de l'École Polyt.*, t. XXIII, 1863, p. 1-74). *Voir* aussi : *Journal de Liouville*, 1865, et CAYLEY, *Quarterly Journal*, t. X, XI, 1870.

décrivent deux parallèles distincts, ces deux points particuliers décrivent un seul et même parallèle, qui sépare les deux parties de la surface engendrées par les deux moitiés de la conique situées de part et d'autre du diamètre EF. La section méridienne est une courbe en forme de *huit*, et la surface est formée de deux nappes qui se croisent sur ce parallèle, que M. de la Gournerie appelle le

Fig. 37.



Une surface du quatrième degré à conique double.

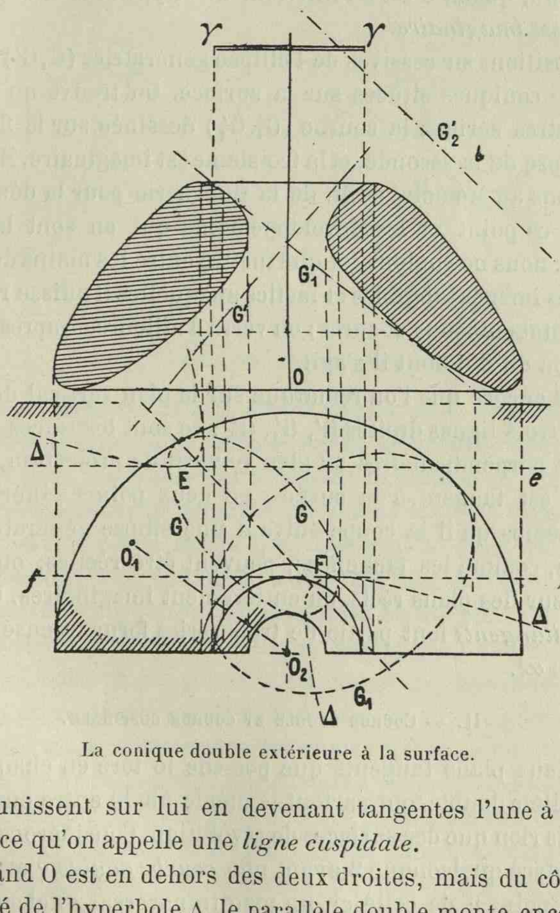
parallèle double. En un quelconque de ses points, la surface a *deux plans tangents,* comme la section méridienne a deux tangentes.

Traçons sur le plan horizontal : 1° les deux droites E*e*, F*f* passant par les extrémités du diamètre EF et parallèles au plan vertical; 2° l'hyperbole Δ ayant les mêmes foyers que G et tangente à ces deux droites. Voici ce que devient le parallèle double suivant les différentes positions que peut prendre le pivot O par rapport à l'ellipse génératrice :

1° Quand O est entre les droites E*e* et F*f*, le parallèle double est l'*intersection de deux nappes réelles*.

2° Quand O est sur une de ces deux droites, il est rejeté tout en haut de la surface, et les nappes extérieure et intérieure de celle-

Fig. 38.



La conique double extérieure à la surface.

ci se réunissent sur lui en devenant tangentes l'une à l'autre; il forme ce qu'on appelle une *ligne cuspidale*.

3° Quand O est en dehors des deux droites, mais du côté de la convexité de l'hyperbole Δ, le parallèle double monte encore plus haut et *s'isole* du reste de la surface; une pareille position (*fig.* 38) se traduit par ce fait que les deux plans tangents qu'il a en un quelconque de ses points sont *imaginaires*. Si l'axe de l'ellipse est vertical, le parallèle double, toujours réel, se trouve dans le plan de l'infini : c'est le cas pour le tore ordinaire, où, en outre, l'ellipse génératrice est un cercle.

4° Quand O est sur l'hyperbole Δ, le tore a un *point isolé* sur l'axe de révolution.

5° Quand O est en E ou en F, l'ellipse rencontre l'axe normalement, et la surface a un *point double avec un plan tangent unique.*

6° Enfin, quand O est à l'intérieur de l'hyperbole Δ, le parallèle double est *imaginaire.*

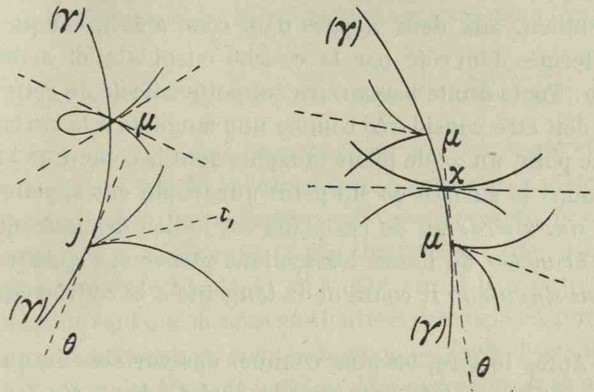
Les positions successives de l'ellipse génératrice (G, G') forment un ∞^1 de coniques situées sur la surface. On trouve qu'il existe deux autres séries : la courbe (G_1, G'_1) dessinée sur la figure est une ellipse de la seconde, et la troisième est imaginaire. Mais nous renvoyons au Mémoire de M. de la Gournerie pour la démonstration de ce point et les développements qui en sont la conséquence : nous ne voulons ici que mettre entre les mains du lecteur quelques images tangibles et faciles auxquelles il puisse rapporter les résultats obtenus ci-après; on verra d'ailleurs ci-après la généralisation du fait dont il s'agit.

Il faut encore que l'on remarque sur le plan vertical de projection les trois lignes droites G', G'_1, G'_2 : ce sont les traces de plans qui sont perpendiculaires au plan vertical de projection, et dont chacun est tangent à la surface en deux points différents, en même temps qu'il la coupe suivant une ellipse génératrice; les sections, comme les tangences, peuvent être réelles, ou imaginaires sur des plans réels, ou entièrement imaginaires. Ces trois *plans bitangents* font partie de trois séries formant ensemble un système ∞^1.

II. — Courbe double et courbe cuspidale.

Les deux plans tangents que possède le tore en chaque point du parallèle double font partout le même angle entre eux. Mais il n'y a pas rien que des surfaces de révolution. Considérons (*fig.* 39) une surface quelconque Σ ayant une *courbe double* γ et menons, par un point μ de celle-ci, un plan transversal quelconque, *ne passant pas toutefois par la tangente à* γ; la section sera une courbe σ à deux branches, ayant chacune sa tangente t, t'. Si le point μ se déplace sur γ, cet angle varie d'une manière continue, et il peut *devenir nul*. Nous sommes alors en un point j, où le croisement est remplacé par un *rebroussement*, où les deux tangentes t et t' de la courbe σ se réunissent en une seule, et les deux plans tangents de la surface Σ en un seul; un pareil point s'ap-

Fig. 39.



Point-pince et point-clos.

pelle un *point-pince;* le mot est de Cayley et la singularité qu'il désigne est spéciale aux surfaces ayant une courbe double. Chacune des deux tangentes t et t' coupait la surface en deux points réunis en un seul; la tangente τ_1 suivant laquelle elles se réunissent, et qui est la même quel que soit le plan transversal, réunit ces deux points doubles et doit être considérée comme coupant la surface en *quatre* points réunis en un seul. On l'appelle la *tangente singulière*. Toute droite passant par j emprunte, pour ainsi dire, deux de ces points et est une *tangente ordinaire*. Tout plan qui la contient en emprunte trois et est un *plan tangent ordinaire;* mais il les a tous les quatre s'il contient en outre la tangente à γ et on l'appelle alors le *plan tangent singulier;* alors aussi sa section en j est formée d'une branche à rebroussement ayant τ_1 pour tangente et d'une branche simple ayant pour tangente la tangente à γ. En général, un point-pince forme le passage d'une partie de la courbe double le long de laquelle les deux plans tangents sont réels à une partie le long de laquelle ils sont imaginaires.

Lorsqu'une surface a une *courbe cuspidale*, une section plane transversale faite en un point de celle-ci présente un rebroussement, sauf en certains points particuliers, qu'avec Cayley on appelle des *points-clos*, où c'est un *contact de deux branches*. Un pareil point est généralement (*fig.* 39) le passage d'une branche de la courbe cuspidale où la pointe est tournée d'un côté à une branche où elle est tournée de l'autre ; la surface y ressemble, dit Zeuthen, aux deux nappes d'un cône aplati, chaque nappe étant fermée d'un côté par la courbe cuspidale et arrondie de l'autre. Toute droite passant par un point affecté de cette singularité doit être considérée comme une tangente à la surface ; il y a en ce point un ∞^1 de plans tangents dont la commune intersection coupe la surface en un point quadruple et s'appelle *la tangente singulière ;* un de ces plans est le lieu des tangentes *aux deux branches* de toutes les sections planes et s'appelle le *plan tangent singulier ;* il contient la tangente à la courbe cuspidale.

III. Après le tore, les plus connues des surfaces du quatrième degré sont les *cyclides*. On appelle *cyclide de Dupin* l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur un plan et qui touche deux sphères données, ou encore l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur une conique et qui touche une autre sphère donnée ; la définition donnée par Dupin lui-même ([1]), *enveloppe d'une sphère qui touche trois sphères données*, n'individualise pas une cyclide, mais en détermine quatre. Clerk Maxwell, que nous citons parmi bien d'autres, s'en est occupé à propos d'une question d'optique dans un Mémoire paru en 1868 dans le *Quarterly Journal*, et dont une traduction fut donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de la même année ; malheureusement la traduction ne reproduit pas quatre *doubles figures* de la première publication, faites pour être regardées au stéréoscope et

([1]) *Applications de Géométrie et de Mécanique*, Paris, 1822, p. 200-210.

Nous nous abstiendrons d'autres indications bibliographiques parce qu'il y en aurait trop ; nous renvoyons : 1° à la Notice et à la liste données par Cayley dans *Proceedings of the London math. Soc.*, t. III, 1871, p. 186-185 ; à la liste qui remplit les quatre dernières pages de l'Ouvrage de M. Darboux : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, Paris, 1873 ; 3° aux Notes qui accompagnent le Mémoire de Segre déjà cité et qui va maintenant être notre guide : *Étude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double* (*Math. Ann.*, 1884).

représentant la *cyclide en fuseau,* la *cyclide en anneau,* la *cyclide parabolique* et la *cyclide à cornes.*

Les cyclides de Dupin ne sont que des cas particuliers des surfaces auxquelles Darboux a étendu ce même nom de *cyclides* parce qu'elles contiennent dix séries de sections circulaires, qu'il appelle encore *surfaces du quatrième degré ayant le cercle de l'infini pour ligne double,* et qui sont comprises dans l'équation générale

$$(x^2+y^2+z^2)^2+2u_1(x^2+y^2+z^2)+u_2=0,$$

u_1 désignant un polynome homogène du premier degré et u_2 un polynome quelconque du second degré. A peu près le même sens ont la dénomination de *surfaces anallagmatiques du quatrième degré* employée par Laguerre et par Moutard, et celle de *sphéro-quartiques* employée par Casey en Angleterre. A leur tour, toutes ces cyclides ne sont que des cas particuliers des surfaces que Segre a magistralement étudiées sous le nom de *surfaces du quatrième degré à conique double, générale ou décomposée en deux droites,* en y ajoutant le cas où, au lieu d'une conique *double,* c'est une conique *cuspidale.* Chez les cyclides proprement dites, celles de Dupin et de Darboux, la conique double est toujours imaginaire, tout en appartenant à un plan réel et à des quadriques réelles, tandis que les surfaces plus générales dont il s'agit maintenant jouissent de la conique double réelle.

Dans le curieux Mémoire qui contient cette étude et dont nous avons donné le titre en note de la page précédente, Segre a fait de la théorie de ces surfaces un *corollaire de celle de l'intersection de deux hyperquadriques;* il lui a donné ainsi une forme purement géométrique, c'est-à-dire exempte de ces amas d'équations compliquées qui grèvent à l'ordinaire les questions de ce genre. Nous voudrions donner une idée de ce travail, mais elle sera forcément très lointaine et très raccourcie, car il n'occupe pas moins de 132 pages dans l'impression compacte des *Mathematische Annalen;* toutefois, comme il est écrit en français, nous n'avons pas trop de scrupule à y renvoyer le lecteur pour suppléer à l'insuffisance des pages qui suivent.

§ 46. — Projection de la quartique sur notre espace.

I. — La conique double.

Après cette halte dans la Géométrie à trois dimensions, qui a plus avancé notre besogne qu'elle n'en a l'air, nous revenons sur l'intersection de deux hyperquadriques, qu'au paragraphe 25 nous avons représentée par les deux équations simultanées

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0.$$

Voici d'abord les principales notations dont nous ferons usage, et dont quelques-unes se sont déjà montrées dans le même paragraphe 44 : en cas de besoin, le lecteur aura plus de facilité à les trouver ici qu'à chercher la page où elles auront pris naissance.

On désignera donc par

$\varphi\psi$, le faisceau d'hyperquadriques défini par l'équation (20);

χ, une hyperquadrique quelconque du faisceau, autre que φ ou ψ et de construction générale;

ω, un des cônes de première espèce qui en font partie et dont le nombre ne saurait dépasser *cinq;*

ϖ, un cône de seconde espèce, s'il y en a;

K, un cône quadrique, c'est-à-dire le cône ordinaire de la Géométrie à trois dimensions; le double mot *cône quadrique* aura exclusivement cette signification, tandis que le mot *cône* employé seul voudra toujours dire un cône hyperquadrique, de première ou de seconde espèce;

p, un point de l'étendue se trouvant sur χ et pris pour centre de projection; le mot *projection* voudra dire la projection d'un point, d'une ligne, d'une surface ou d'une hypersurface, faite de ce point sur notre espace;

S, la surface du quatrième degré représentée par les équations (19) et intersection commune de toutes les hyperquadriques du faisceau;

Σ, la projection de S, qui est aussi, dans notre espace, une surface du quatrième degré;

P, le plan polaire de p par rapport à S;

E, l'espace qui est tangent à χ au point p;

f, le cône quadrique commun à l'espace E et à l'hyperquadrique χ, son sommet est p;

ε, le plan qui est l'intersection du même espace avec le nôtre, et que nous appellerons *sa trace;*

Γ, la courbe du quatrième degré, intersection de f et de χ;

γ, la projection de Γ sur notre espace, qui est également, dans celui-ci, une courbe du quatrième degré, mais se trouvera ordinairement particularisée sous le nom de *conique double* ou un des mots analogues.

La courbe Γ, qui est l'intersection de f et de χ et dont le degré est $2 \times 2 = 4$, se trouve tout entière sur S.

Le cône f et le plan ε, puisqu'ils sont dans un même espace, se coupent suivant une conique γ, qui est la projection, sur notre espace, faite avec des rayons partant du point p, de toute figure tracée sur le cône, et en particulier de la courbe Γ. Une génératrice quelconque du cône a deux points, m et m', sur cette dernière et, par suite, aussi sur S; ces deux points de S sont donc projetés sur notre espace en un même point μ de la conique γ. En d'autres termes : *la surface Σ qui est la projection de* S *sur notre espace, et qui est comme elle du quatrième degré, contient une conique double δ. Tel est le principe de la méthode.*

Les plans tangents de S ont pour projection les plans tangents de Σ. En chaque point μ de la courbe double, Σ a donc deux plans tangents qui sont les projections des plans tangents à S aux deux points m et m' dont μ est la projection.

Ici nous regrettons de ne pouvoir pas mettre une figure sous les yeux du lecteur, et le prions de redoubler d'attention pendant un instant. Il a vu, au paragraphe 44, que l'espace déterminé par le point p et son plan polaire P est tangent à χ au point p. Toute droite située dans cet espace, en particulier une génératrice quelconque du cône f, coupe donc χ en deux points coïncidents, et comme P coupe χ et f suivant deux courbes du second degré dont les quatre points d'intersection a, b, c, d sont sur Γ, il s'ensuit que les quatre génératrices de f passant par ces quatre points sont tangentes à Γ. Il y a donc sur la projection γ quatre points μ dont chacun est la projection de deux points m, m' de S qui se réunissent en un seul et confondent leurs plans tangents. En chacun de ces quatre points les deux plans tangents de Σ se confondent aussi et les deux nappes de cette surface se réunissent : ce sont des *points-pince*. Nous les avons déjà (§ 45) désignées par j, et nous désignerons par J les quatre points de S qui s'y projettent.

Le plan tangent à S en un point J passe par p, puisque ce point se trouve sur le plan polaire de p; en outre, puisqu'il est la réunion de deux plans tangents, son point de tangence est un point quadruple de S. Sa projection sur notre espace se réduit donc à une droite t_1 qui est sa trace, et qui coupe γ en un point comptant pour quatre. Cette droite est la *tangente singulière* de Σ au point-pince j, et il y a une tangente analogue en chacun des trois autres.

On a vu dans le paragraphe précédent que le plan passant par la tangente singulière et la tangente en j à la courbe double, lequel plan est le lieu des droites dont l'intersection avec Σ se compose de trois points réunis en j, s'appelle le *plan tangent singulier*. Les quatre plans tangents singuliers aux quatre points-pince ne sont autre chose que les traces sur notre espace des quatre espaces tangents à χ aux quatre points a, b, c, d; puisque ces quatre points sont dans un même plan P, les quatre espaces passent par une même droite, polaire par rapport à χ; donc *les quatre plans tangents singuliers des quatre points-pince de la conique double de* Σ *passent par un même point.*

II. — Cônes de Kummer.

La Géométrie de la surface Σ est des plus intéressantes, et il y aurait beaucoup à dire : sur ses *seize droites,* qui furent découvertes par Darboux en 1864, et qui ont la même configuration que celles restant des ving-sept droites d'une surface du troisième degré (§ 21) quand on en a retiré *une quelconque et les dix qui la rencontrent* (¹); sur ses *quarante plans tritangents,* dont la configuration est la même que ceux qui restent quand des quarante-cinq plans tritangents d'une surface du troisième degré on

(¹) *Voir* de Vries, *La configuration formée par les droites d'une surface du quatrième degré à conique double* (*Arch. néerlandaise des Sc. math. et nat.*, 2ᵉ série t.VII, 1902, p. 460).

en a retiré *cinq passant par une même droite;* sur les surfaces du second degré qui lui sont inscrites; sur son *image plane,* qui a été découverte par Clebsch et jouit de cette propriété que les points de l'une et de l'autre figure sont en correspondance univoque; sur ses foyers et ses homofocales; sur les propriétés qui lui ont valu le nom *d'anallagmatique* auprès des mathématiciens français, etc., toutes questions relevant de la méthode qui nous occupe. Nous ne voulons que jeter un regard, encore le ferons-nous rapidement, sur les *plans bitangents,* en nombre ∞^1 comme chez la surface du troisième degré, mais différant de ceux-ci en ce que la droite joignant les deux points de tangence *n'appartient à la surface que par ces deux points.*

Prenons d'abord le cas général où les cinq cônes du faisceau d'hyperquadriques dont **S** est le support (§ 44, II) sont tous de première espèce et distincts; alors aucun n'a son sommet sur **S**. D'après ce qu'on a vu au paragraphe 43, chacun d'eux contient un ∞^1 de plans générateurs qui forment deux séries, deux plans d'une même série n'ayant de commun que le sommet du cône, deux de séries différentes ayant en commun une génératrice. En outre, deux plans générateurs de cônes différents ont pour intersection un point, comme c'est le cas pour tout couple de plans non particularisé, et il est inutile de dire que ce point appartient à **S**.

Chaque plan générateur est coupé par une autre hyperquadrique du faisceau suivant une conique appartenant à **S**; réciproquement, le plan de toute conique de **S** appartient à l'un d'eux, car si l'on considère l'hyperquadrique du faisceau passant par un point de ce plan autre que ceux de la conique, elle devra contenir le point et la conique, c'est-à-dire le plan tout entier, et les cônes sont les seules hyperquadriques contenant des plans. Donc la surface **S** contient ∞^1 coniques, lesquelles forment autant de systèmes qu'il y a de cônes dans le faisceau, c'est-à-dire cinq. Chaque système se décompose en deux séries, comme les plans générateurs du cône qui le donne. Deux coniques ont *un, deux* ou *zéro* points communs : *un* quand elles sont de systèmes différents; *deux,* que nous appellerons α et β, quand elles sont de même système et de séries différentes; *zéro* quand elles sont de même système et de même série.

Projetons sur notre espace en prenant pour centre de projection un point p de l'étendue qui ne soit pas sur un des cinq cônes ; nous devons retrouver ces coniques sur la surface Σ projection de S. La projection de chacune d'elles est faite par un espace que déterminent le point p et le plan la contenant; cet espace H contient aussi un deuxième plan générateur et une deuxième conique qui sont du même cône ω et de l'autre série; il est tangent à ω le long de la droite d'intersection des deux plans, laquelle contient les deux points α et β, et il est tangent à **S** en chacun de ces points. La droite $\alpha\beta$ se trouve dans l'intersection du cône ω avec l'espace polaire du point p par rapport à ce cône ω lui-même (§ 43, II); elle et ses pareilles ne sont pas autre chose que les génératrices du cône quadrique qui constitue cette intersection. Appelons celui-ci K; appelons en outre k sa projection sur notre espace, qui est aussi un cône quadrique; appelons enfin h le plan qui est la trace de l'espace H sur le nôtre.

Les deux coniques de **S** qui sont dans l'espace H ont pour projections deux coniques situées dans le plan h et se coupant sur les deux points a, b, projections de α, β. Donc, en ne retenant de toute la figure que les choses qui sont dans notre espace :

La surface Σ (c'est-à-dire la surface du quatrième degré à conique double, de construction générale) contient un nombre ∞^1 de coniques qui se rangent en cinq systèmes; les coniques de chaque système s'associent elles-mêmes deux par deux situées dans un même plan qui enveloppe un cône de second degré k; des quatre points d'intersection de ces deux coniques formant couple, il y en a deux sur la conique double, et les deux autres a, b sont sur la génératrice de contact du plan avec le cône; *la génératrice et le plan sont donc tangents à la surface* Σ *en chacun de ces deux points et, comme la génératrice est quelconque, le cône est bitangent à la surface.*

Les deux cônes k ainsi définis s'appellent *les cônes de Kümmer*. Ils ont été découverts en 1863 par le savant dont ils portent le nom, lequel les publia dans les *Monatsberichte* du 16 juillet; presque en même temps, Moutard les découvrait de son côté et les publiait dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1864.

Voici la démonstration de Kummer. On verra comme elle est peu explicative et peu suggestive et, si l'on se rappelle quel puissant instrument a été la méthode des projections en reliant les figures planes à celles de l'espace, on appréciera l'utilité d'un champ supérieur permettant à celles-ci de recevoir à leur tour les services qu'elles ont rendus au-dessous d'elles.

En appelant, dit Kummer, φ et ψ des fonctions rationnelles entières du second degré de trois coordonnées x, y, z et p une fonction linéaire des mêmes coordonnées, l'équation la plus générale des surfaces de quatrième degré qui ont une conique double est

$$\varphi^2 + 4p^2\psi = 0;$$

on peut encore l'écrire

$$(\varphi + 2\lambda p^2)^2 = 4p^2(\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2),$$

λ étant une constante arbitraire. Si l'on détermine cette constante par la condition que l'équation du second degré

$$\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2 = 0$$

représente un cône, celui-ci enveloppera doublement la surface du quatrième degré, en ce sens que chacun de ses plans tangents la touchera deux fois ; de plus, il la coupera suivant un couple de coniques. La condition pour que l'équation du second degré représente un cône est facile à développer et est du cinquième degré ; donc il y a cinq cônes bitangents.

Nous avons déjà dit, dans le paragraphe précédent, que les *cyclides* sont des surfaces Σ ayant pour conique double *le cercle imaginaire à l'infini;* elles ont aussi cette propriété caractéristique que les deux coniques d'intersection des plans bitangents (plans tangents aux cônes de Kummer) sont particularisées en *deux cercles.*

Dans la cyclide de Dupin, quatre des cônes de Kummer sont dégénérés en quatre plans tangents singuliers (plans touchant la surface suivant une courbe).

III. — Décomposition de la conique double en deux droites.

Dans le cas général, la surface Σ de notre espace, surface du quatrième degré ornée d'une conique double, a donc un cortège de cinq cônes de Kummer, dont la présence vient de ce que Σ est la projection de la surface S, intersection de deux hyperquadriques ; et voici, en résumant ce qui précède, comment cette conséquence se produit. De même que par l'intersection de deux surfaces du second degré il en passe une infinité d'autres contenant quatre cônes quadriques, de même il passe par **S** une infinité d'autres hyperquadriques parmi lesquelles se trouvent cinq cônes hyperquadriques : chaque cône de Kummer correspond à l'un d'eux et est tout simplement la projection du cône quadrique commun à ce cône et à son espace polaire par rapport au centre de projection. Quant à la propriété qu'ont les plans tangents des cônes de Kummer d'être des plans bitangents de la surface Σ et de la couper suivant deux coniques, elle vient de ce que chacun d'eux est à la projection commune de deux plans générateurs de séries différentes d'un cône hyperquadrique, dont les espaces projetants confondus sont tangents à **S**.

Il suit de cette filiation entre les surfaces **S** et Σ que la famille des secondes est dominée tout entière, comme l'est celle des premières, par le Tableau des caractéristiques issues du théorème de Weierstrass (p. 170). La discussion, que nous n'avons pas faite mais que nous aurions pu faire, du cachet particulier que chaque caractéristique imprime aux formes et aux propriétés des surfaces **S**, se refléterait sur les surfaces Σ et fournirait tout ce que la Géométrie peut dire sur leur compte. Nous avons même ici plus de richesses que n'en a la Géométrie à quatre dimensions, car, en faisant varier la position du centre de projection, nous créons des sous-familles qui lui sont inconnues.

Plaçons-le, par exemple, non plus en un point quelconque de l'étendue, mais en un point p d'un des cônes ω, dont soit σ le sommet. L'espace tangent au cône en ce point est en même temps l'espace polaire P de celui-ci, et la figure commune à ω et à P se réduit à deux plans générateurs dont l'intersection est $p\sigma$. La quartique **S** se décompose en deux coniques de ces plans ; celles-ci sont projetées suivant deux droites d_1, d_2 dont chaque point est une projection double. *La conique double de Σ est elle-même décomposée en deux droites doubles.*

Comme on peut mener de p deux tangentes à chacune des deux coniques, il y a sur chaque droite double deux points-pince, et il n'y a rien à changer à ce qui a été dit plus haut de ces points singuliers. Les deux plans générateurs qui passent par p et qui coupent notre espace suivant les droites doubles d_1, d_2 de Σ, et les espaces projetants des divers couples de plans générateurs, ont pour traces les deux faisceaux de plans passant par ces deux droites ; ils contiennent deux des séries de coniques de Σ et il n'y a plus que quatre cônes de Kummer proprement dits, le cinquième se réduisant au couple des deux droites doubles considérées comme enveloppes de ces plans.

IV. — Droite bidouble et conique cuspidale.

Nous passons maintenant aux cas, exclus jusqu'ici, où le faisceau $\varphi\psi$ contient un cône de seconde espèce, ou deux. On se rappelle qu'un pareil cône ϖ contient un ∞^1 de plans générateurs formant une seule série et passant tous par une arête a, lieu de sommets ; ces plans coupent la surface S en ∞^1 coniques formant de même une seule série et passant par les points d'intersection de l'arête a avec S, qui sont au nombre de deux, distincts ou non (à moins qu'ils ne soient en nombre infini, cas dont nous allons nous débarrasser tout d'abord). Ce sont toujours *des points doubles de* S ; nous les désignerons par m, m'.

Si nous plaçons sur le cône ϖ le centre de projection p, les deux droites doubles que nous venons de voir se réunissent en une seule qui, sous le nom de *droite bidouble,* donne naissance à une nouvelle famille de surfaces Σ, où seront représentées encore les diverses caractéristiques autres que celles de la première ligne du Tableau. Il peut arriver que l'arête soit tout entière sur la surface S ; alors les plans générateurs de ϖ coupent S suivant cette arête et une autre droite, de sorte que la surface contient, non plus ∞^1 coniques proprement dites, mais ∞^1 droites appuyées sur l'arête : c'est une *surface réglée* et il en est de même de la projection Σ.

Replaçons désormais notre centre de projection sur une hyperquadrique du faisceau de construction générale, mais toutefois dans une position particulière telle qu'il soit sur le plan polaire A de l'arête a par rapport à cette hyperquadrique χ. Alors l'espace E tangent à celle-ci en p passe par a et les deux points m, m' de S sont projetés en deux points d, d' de la conique double γ ; on voit aisément qu'en chacun de ces points singuliers une section plane a un contact de deux branches : deux points-pince s'y sont réunis.

Nous pouvons particulariser la position du centre de projection sur le plan A en l'amenant en un des points de ce plan qui sont communs à χ et à la conique polaire de π par rapport à χ, en sorte que l'espace E tangent à χ en ce point soit aussi tangent à ϖ le long d'un certain plan générateur G. Voici ce qui arrivera :

Le plan P qui, au début du présent paragraphe, était le plan polaire de p par rapport à la surface S, n'est autre chose maintenant que le plan G, car celui-ci appartient à la fois aux espaces polaires de p par rapport à deux hyperquadriques, χ et ϖ, du faisceau. Comme alors P coupait S en quatre points dont les projections étaient les quatre points-pince de la conique double γ, et que dans le cas actuel toute cette courbe se trouve sur P, tous ses points sont maintenant des points-pince et la conique double γ est remplacée par une *conique cuspidale,* etc. L'espace E qui, au début, touchait la surface S suivant une courbe quartique Γ dont γ était la projection, ne fait plus que toucher cette surface suivant une conique G dont χ est la projection.

Nous avons rencontré dans le paragraphe précédent, sans sortir de notre espace, un exemple de conique cuspidale : le cas 2°, page 177.

On verrait sans beaucoup de peine qu'il y a un contact de deux branches aux deux points de χ qui sont les projections des points doubles m, m' et S : ce sont des *points-clos*, points de changement de sens du rebroussement cuspidal.

Quant aux cônes de Kummer, il n'y en a plus que trois au maximum, puisque leur existence est subordonnée aux cônes de première espèce présents dans le faisceau.

Le Tableau des caractéristiques (p. 170) nous fournirait encore la classification de la dernière suite de surfaces que nous venons de parcourir et dans laquelle se rencontrent des associations que nous n'avons pas nommées, telles que : deux droites cuspidales, une droite double et une droite cuspidale, etc. C'est à la forme (11)(11)1 que se rapporte la *cyclide de Dupin* (p. 180).

CHAPITRE VIII.

LA QUESTION DE L'EXISTENCE RÉELLE DE L'HYPERESPACE.

§ 47. — Argument philosophique.

Rien n'existe en dehors de l'esprit qui conçoit, disent certains philosophes qui n'admettent aucune objectivité, pour lesquels toutes nos sensations, y compris celles d'espace et de temps, ne sont que nos propres manières d'être, et pour lesquels les causes mêmes de ces sensations n'existent qu'en nous.

Tout ce qui n'implique pas contradiction existe, l'absurde seul est irréel, disent d'autres, qui ont à leur tête Leibniz et Hegel et paraissent plus raisonnables. Pour eux, le quatrième champ existe forcément, car il n'est contradictoire ni avec lui-même, ni avec aucun des faits ou principes déjà consacrés. De quelque manière que l'on conçoive notre espace, qu'on en fasse une chose subjective ou une donnée du monde extérieur, ce quatrième champ en partage la nature et en est une simple extension, comme sa Géométrie est le prolongement de la vieille Géométrie euclidienne. Le fait que nous ne voyons pas la fameuse quatrième perpendiculaire n'est nullement une raison pour la repousser, tellement le témoignage de nos sens est suspect (*voir* plus loin p. 200).

Nous contentant de soumettre cet argument aux réflexions du lecteur, nous allons lui présenter successivement les principales raisons d'ordre mathématique ou physique qui ont été données pour croire à l'existence de cette quatrième perpendiculaire. Les premières font l'objet du paragraphe 48 et les secondes des paragraphes 49 à 53.

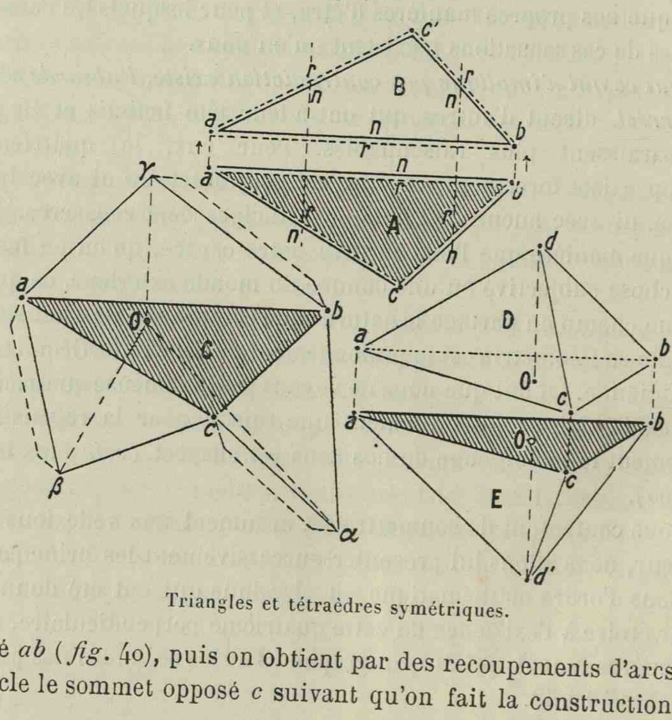
§ 48. — L'argument des polyèdres symétriques.

I. Il y a des faits, dans la Géométrie à deux dimensions, qui s'expliquent *plus facilement* au moyen de celle à trois ; il suffit de prononcer les mots de *Géométrie projective*, de *section conique*... pour qu'une foule d'exemples justifiant cette proposition se présente aussitôt à l'esprit. Peut-être même y a-t-il des choses pour lesquelles la première *ne saurait* se passer de la seconde.

II. Il y a de même des faits dans la Géométrie à deux ou à trois dimensions, qu'on ne peut expliquer ou qu'on n'explique facilement qu'au moyen de celle à quatre. Nous en donnerons l'exemple suivant :

Lorsqu'on connaît les longueurs des trois côtés d'un triangle scalène, et qu'on veut le construire, on commence par *poser* un

Fig. 40.



Triangles et tétraèdres symétriques.

côté ab (*fig.* 40), puis on obtient par des recoupements d'arcs de cercle le sommet opposé c suivant qu'on fait la construction de part ou d'autre de la ligne ab (au-dessous ou au-dessus dans la figure), on obtient deux triangles abc ou abc', qui n'ont pas seulement leurs côtés égaux chacun, mais encore leurs angles, et que néanmoins on ne peut pas arriver à superposer en ne faisant faire aux triangles que des glissements ou des rotations dans le plan commun. On dit qu'ils sont *symétriques*. La figure 40 représente ces deux triangles; pour qu'elle soit lue plus facilement, nous les avons un peu écartés l'un de l'autre, et le lecteur devra considérer les deux lignes parallèles marquées ab comme n'en faisant qu'une.

La superposition devient possible si l'on ne s'astreint pas à ce que les deux triangles restent dans le même plan, et si, les considérant comme étant sur deux plans superposés, on fait tourner de 180° celui de l'un deux, le premier par exemple, autour d'une droite quelconque de ce double plan. Nous choisirons le côté ab lui-même pour axe de rotation; alors abc se trouve de suite appliqué sur abc' une fois la demi-révolution accomplie.

Quelle modification ce passage par le troisième champ a-t-il apportée dans le triangle abc pour que, n'étant pas auparavant superposable à abc', il le soit lorsqu'il se retrouve dans le plan primitif, après le demi-tour?

Pour nous en rendre compte, supposons que chaque côté du triangle abc ait *deux bords de couleur différente :* l'un extérieur, que nous supposerons *noir,* que nous désignerons par la lettre n, et qui a été dessiné sur la figure en traits pleins ; l'autre intérieur, que nous supposerons *rouge,* que nous désignerons par r, et qui a été tracé en traits pointillés. Alors on voit tout de suite que, lorsque le triangle abc a accompli son demi-tour et est venu en abc', le trait plein et le trait pointillé, les deux lettres n et r, les deux couleurs se sont mutuellement remplacés; le triangle a été *retourné,* en attachant à ce mot le même sens que quand on dit : *retourner un gant.* Voilà pourquoi il est devenu superposable à son symétrique.

III. Construisons trois autres triangles $a\gamma b$, $b\alpha e$, $c\beta a$, un sur chaque côté du triangle abc, et tel que l'on ait

$$(1) \qquad a\gamma = a\beta, \qquad b\alpha = b\gamma, \qquad c\beta = c\alpha,$$

c'est-à-dire que les deux longueurs partant d'un même sommet soient égales entre elles. Si nous faisons tourner chaque nouveau triangle autour du côté qui lui est commun avec le premier, en les amenant tous les trois *au-dessus* du plan *abc*, les six droites (1) se réuniront par deux en trois arêtes, et les trois points α, β, γ se réuniront en un seul sommet que nous appellerons *d*; nous avons formé un *tétraèdre abcd*. Nous en aurions un autre *abcd'* si nous avions amené les trois triangles mobiles *au-dessous* du plan *abc*. Ces deux tétraèdres ont tous leurs éléments égaux chacun à chacun, mais ils ne peuvent pas être superposés, nous verrons tout à l'heure pourquoi; on dit encore qu'ils sont *symétriques*. Il est clair, par la construction, que les côtés du papier qui, chez l'un, sont tournés vers le dedans, regardent le dehors chez l'autre ([1]).

Mais les deux tétraèdres *abcd*, *abcd'* deviennent superposables *si l'on fait tourner de* 180° *l'espace de l'un, abcd, autour du plan commun abc*. On a vu, dans le *Traité élémentaire,* que c'est cette rotation qui remplace, dans l'étendue, celle que nous connaissons. Pendant qu'elle s'accomplit, tous les points du plan demeurent immobiles, et en particulier les trois points *a*, *b*, *c*; le point *d*, sortant de suite de l'espace *abcd'*, décrit une demi-circonférence dans le plan qui est *absolument perpendiculaire* au plan *abc*, et qui n'a de commun avec lui que le point O en lequel le perce la droite *dd'*. Le demi-tour accompli, le point *d* arrive en *d'* et les deux tétraèdres coïncident, puisque *a*, *b*, *c* ont été tout le temps des sommets communs. *Chaque face* du tétraèdre *abcd* a été *retournée* comme l'avait été tout à l'heure *chaque côté* du triangle *abc*, et c'est pour cela que la coïncidence a lieu.

Dans le *Traité élémentaire* (§ 31) nous avons appliqué le calcul au cas d'une sphère creuse et montré qu'un demi-tour dans l'étendue, ou tout mouvement équivalent, a encore pour effet de la retourner, sa surface intérieure devenant extérieure, et réciproquement. Le fait est général ([2]). Vous pouvez retourner un

---

([1]) Les *languettes* placées le long des côtés $a\beta$, $c\alpha$, $b\gamma$ sont destinées à être collées sous les faces contre lesquelles ces arêtes viennent s'appliquer.

([2]) Un récit du romancier anglais Wells est bâti sur cette donnée : *The Plattner Story*, collection Tauchnitz, vol. 3426. Projeté dans l'étendue par un accident qui n'a guère d'autre exemple, M. Plattner en est revenu *retourné :* le cœur à droite, etc.

gant parce qu'il a une ouverture et qu'il est fait d'une étoffe flexible; si l'ouverture était cousue, si l'étoffe était rigide, vous le retourneriez en faisant tourner de 180°, autour d'un plan quelconque de l'espace, la portion d'espace qui le contient.

Pour revenir au tétraèdre, la différence entre le résultat d'une demi-rotation *dans l'étendue autour du plan abc* et celui d'une demi-rotation *dans l'espace autour d'une droite ab* (par exemple), vient de ce que, dans le premier cas, les *trois* points a, b, c sont immobiles; dès lors l'effet est le même que si, le triangle abc étant ouvert et rigide et le reste du tétraèdre étant flexible (tel un filet à papillons dont l'ouverture serait triangulaire), le point d venait en d' en glissant le long de la droite dd' et traversant le plan abc. Dans l'autre cas, deux points seulement, a et b, sont immobiles; les côtés des triangles, réunis par deux sur les arêtes du tétraèdre, sont retournés comme nous l'avons dit plus haut et chaque triangle, tel que A, est remplacé par son symétrique B; mais les *plans des faces* ne sont pas retournés, et c'est pour cela que la coïncidence n'a pas lieu; il est d'ailleurs impossible de trouver *dans l'espace* un mouvement ou une combinaison de mouvements qui produise ce résultat.

On se rend compte aisément de ces diverses circonstances en dessinant la figure C sur de la *carte* faite avec *deux feuilles de papier de couleur différente,* et exécutant, tantôt d'un côté, tantôt de l'autre, la rotation des trois triangles qui doivent devenir les faces du tétraèdre.

IV. Voilà donc deux figures dont tous les éléments sont égaux chacun à chacun, et qui ne peuvent être mises en coïncidence que par la rotation, ou quelque mouvement équivalent, de l'une d'elles dans le champ supérieur, savoir : le champ du troisième degré pour les deux figures planes, celui du quatrième degré pour les deux figures de l'espace. Cette nécessité de l'intervention du champ supérieur pour amener un résultat aussi simple ne peut-elle pas être considérée comme une raison suffisante pour croire à son existence?

Bien entendu, les polyédroïdes (*voir* Chap. II), symétriques sans être réguliers, qu'il y a dans l'étendue ne peuvent à leur tour être mis l'un sur l'autre que par une demi-rotation accomplie dans le champ supérieur (c'est autour *d'un espace* qu'elle aurait lieu cette fois); *et ainsi de suite.*

Rapprochons de cet exemple celui du Chapitre V et celui du Chapitre VI. Le premier nous a montré des faits épars de *notre* monde géométrique se masser, en se simplifiant et se synthétisant dans une figure de l'étendue, celle de six espaces. Dans le second, nous avons vu éclore, d'une figure de l'étendue, *l'intersection de deux hyperquadriques,* des théories qui font autant de chapitres de la Géométrie à trois dimensions. Toujours le géomètre voit de même le premier, le second, le troisième et le quatrième champ former un seul tout; les lignes, les surfaces, les hypersurfaces, les hypercorps échanger des relations continuelles; les premières circonscrire des portions des secondes qu'il appelle *des aires,* les secondes, des portions des troisièmes qu'il appelle *des volumes,* les troisièmes, des portions des quatrièmes qu'il appelle *des hypervolumes.* Chaque fois, il distingue un *contenant* et un *contenu,* et les mesure respectivement au moyen d'unités qui sont, dans le premier cas, *le mètre* élevé aux puissances 1 et 2; dans le second, le même mètre élevé aux puissances 2 et 3; dans le troisième, le même mètre élevé aux puissances 3 et 4. Tout autour de lui les deux premiers cas se réalisent en foule : des lignes entourent des surfaces qui, à leur tour, se moulent sur des volumes. Pourquoi, dit le partisan de la réalité de l'hyperespace, pourquoi donc le reste de l'harmonieux édifice s'écroulerait-il sitôt qu'il lève les yeux de dessus son épure?

Helmholtz et Riemann croyaient à cette réalité, et les savants d'aujourd'hui qui l'admettent ne sont pas rares. Voici ce que dit Taine, dont la pensée est ici flottante et difficile à saisir (1); nous citons le passage entier, bien qu'il soit un peu long et que *le second alinéa seulement* se rapporte à la question actuelle, mais le premier intéresse une question qui viendra dans un prochain paragraphe, où nous n'aurons plus à le reproduire.

Pour construire l'espace, nous avons d'abord supposé un point qui se meut vers un seul et unique autre point, et nous avons ainsi fabriqué la ligne droite; nous avons ensuite supposé que cette droite se mouvait en traçant

---

(1) *De l'intelligence,* 5e édition, t. II, 1888, p. 376.

par tous ses points des droites égales entre elles, et nous avons ainsi fabriqué la surface plane; nous avons enfin supposé que cette surface se mouvait en traçant par tous ses points des droites égales entre elles, et nous avons ainsi fabriqué le solide géométrique ou l'espace complet. Mais rien ne prouve que ces mouvements supposés par nous soient possibles dans la nature. Si, par quelque nécessité inconnue, les droites qu'on vient d'énumérer étaient et devaient être toujours infléchies, nos constructions mentales n'auraient pas et ne pourraient pas avoir de correspondantes effectives; l'espace réel aurait une ou plusieurs courbures que notre espace idéal n'a pas, et, pour que la courbure échappât forcément à nos observations, il suffirait qu'elle fût très petite. Tel est peut-être le cas; il n'y aurait qu'une ressemblance approximative entre notre espace et l'espace physique. Nous avons beau connaître la structure du réceptacle hypothétique que nous avons forgé; nous n'en pouvons pas déduire la structure du réceptacle indépendant dans lequel les corps se meuvent.

De même, dans le réceptacle fictif, au delà de la troisième dimension, nous ne pouvons en imaginer une quatrième : cela ne prouve pas que, dans le réceptacle réel, il n'y en ait pas une quatrième. Tout au rebours : il y a même des indices en sens contraire; car, si l'on ne peut imaginer géométriquement une quatrième dimension, on peut l'exprimer algébriquement, grâce à l'analogie des dimensions et des puissances, et la vraie raison que nous avons pour refuser à l'espace réel la quatrième dimension est encore une analogie. Dans l'espace réel, chaque dimension est influente. Placez des corps pesants sur une ligne droite, c'est-à-dire selon la première dimension : ils se meuvent d'une certaine manière. Placez un autre corps pesant hors de la ligne droite, dans le plan, c'est-à-dire selon la seconde dimension; le mouvement des corps situés sur la ligne droite se modifie. Placez enfin un dernier corps hors du plan, c'est-à-dire selon la troisième dimension; le mouvement des corps situés sur le plan se modifie encore. Ayant la même nature, la quatrième dimension aurait la même influence; si elle existait, dans le mouvement des corps pesants observé et calculé selon les trois premières dimensions, nous trouverions des perturbations que nous n'y trouvons pas.

Taine pense évidemment au *problème des trois corps,* mais il ne tient pas compte de l'*immensité;* éloignez suffisamment vos trois corps les uns des autres, chacun d'eux suivra sa voie comme s'il était seul. Sans sortir de notre espace, nous voyons le système solaire au milieu d'un vaste désert et les choses qui se passent aux confins de ce désert, par exemple dans le système de Sirius, ont bien peu d'influence sur nous. Or, il part de l'endroit où nous sommes un ∞^3 de directions qui font ensemble l'étendue, et dont les deux tiers (un ∞^2) font ensemble notre espace; pourquoi la solitude qui règne le long de ces dernières jusqu'à une aussi grande distance ne régnerait-elle pas aussi le long de celles qui composent l'autre tiers?

C'est par une raison de ce genre que les adeptes de la quatrième dimension expliquent pourquoi nous ne voyons pas d'hypercorps traverser notre espace; encore, leur est-il loisible de considérer comme tels certains phénomènes d'explication difficile et de vérification impossible, par exemple les étoiles temporaires.

§ 49. — Molécule et atome.

I. Qu'est, au fond, cette chose dont l'image renversée se peint sur notre rétine et que nous appelons *un corps matériel,* par exemple un morceau de fer ou une masse d'eau?

Toutes les théories en faveur aujourd'hui la considèrent comme l'agglomération d'une multitude de choses plus petites qui, sous le nom de *molécules*, ont *une constitution analogue*. Bien trop petites pour tomber sous nos sens, extrêmement petites même par rapport aux intervalles qui les séparent, exerçant les unes sur les autres des actions attractives ou répulsives qui maintiennent leurs distances dans certaines limites, animées avec cela de vitesses propres considérables, les molécules sont dans un état incessant d'agitation, de chocs, de déviations et de déformations.

Ce sont ces mouvements qui produisent les phénomènes de la lumière, de l'électricité, etc. Ils sont susceptibles d'être transmis par le milieu ambiant (air, éther ou autre chose) aux molécules faisant partie d'autres agglomérations. Si le récepteur provisoire est un de nos organes, et si certaines conditions d'amplitude et de rapidité se trouvent réalisées, nous en éprouvons, par une traduction mystérieuse, les sensations du tact, du son, de la vision, de la chaleur, etc. Ce que nous appelons la surface des corps n'est donc pas la chose continue que nous croyons voir, mais l'enveloppe idéale en dedans de laquelle les molécules s'agitent, pareilles à ces masses tourbillonnantes que les moucherons forment parfois au coucher du soleil et qui indiquent, dit-on, une belle journée pour le lendemain. Idéale aussi est la notion de *volume* que nous associons à cette apparence, et que nous nous figurons avec trois dimensions.

Mais que sont les molécules elles-mêmes?

Analogue au corps dont elle contribue à former l'apparence, et agitée aussi par des vibrations intestines, chacune est l'agglomération d'une multitude d'autres choses beaucoup plus petites qu'elle-même; chacune de ces choses est constituée à son tour de la même manière, et ainsi de suite.

Si nous nous retournons et regardons dans le sens opposé, nous voyons dans le même corps matériel pris comme exemple au début de ce paragraphe l'origine d'une série ascendante dont les termes successifs, de plus en plus grandioses, seront le globe terrestre, le système solaire, etc. *Cela fait avec la série précédente une seule et même série.* Le mathématicien peut avoir à considérer un terme quelconque de cette vaste série, et il n'a besoin pour ses calculs, en outre des termes qui sont sur le même rang que celui-là, que d'un très petit nombre de ceux qui sont au-dessus ou au-dessous : *un ou deux au plus.* Les autres n'ont pas d'influence appréciable, ceux-ci à raison de leur éloignement, ceux-là à raison de leur petitesse; il dit *qu'il les néglige* et, ce mot une fois prononcé, ils n'existent plus pour lui. Il considère les plus petites agglomérations auxquelles il s'est arrêté comme les éléments des corps, et il les appelle *atomes,* en dépit de la signification du mot, qui est : *indivisible.*

II. Plus scrupuleux, le métaphysicien *ne veut pas* simplifier ainsi les choses. Il lui faut voir *le bout* des deux séries, et il se trouve dans cette alternative, ou d'admettre qu'elles se prolongent *à l'infini,* ou de leur assigner *un dernier terme.* Si nous prenons d'abord la seconde alternative, ce dernier terme serait, d'un côté, l'*atome* proprement dit, surface fermée sur elle-même, impénétrable, immuable dans sa forme, au dedans de laquelle nous ne voulons pas jeter les yeux; de l'autre, une enveloppe infranchissable, repoussant vers l'intérieur tout ce qui arriverait à elle, et hors de laquelle nous ne regarderons pas davantage. Mais l'infini n'est ainsi supprimé qu'en apparence, car, en nous en tenant à l'atome et à la considération qui se présente la première, le mot *impénétrable* veut déjà dire : résistance *infinie* à la pénétration.

Il est d'ailleurs bien malaisé de se représenter ce que peut être un pareil objet : l'atome. Nous ne pouvons pas le comparer aux corps solides que nous voyons, car de toutes les propriétés qui nous le définissent : l'étendue [1], la dureté, la mollesse, l'éclat, la couleur, la densité, la malléabilité, la flexibilité, l'élasticité, la sonorité, la dilatabilité, la ténacité, la fragilité, la beauté, la laideur, etc. la première, cet attribut que nous représentons avec trois dimensions, semble seule pouvoir lui être appliquée. Encore n'est-ce pas l'avis de certains penseurs. Même l'opinion la plus en faveur aujourd'hui parmi les mathématiciens et les philosophes la supprime purement et simplement, en faisant de l'atome un *point géométrique*, siège des diverses activités que nous sommes obligés de lui supposer, et dont la visibilité des corps, leur masse, etc., sont des résultantes. Il n'existerait ainsi dans l'univers que des éléments dynamiques, dont les directions concourraient par groupes en des *points géométriques*, qui seraient *les atomes*, c'est-à-dire les éléments des corps [2].

Peut-être plus incompréhensible *à première vue*, mais plus plausible et moins affligée de contradictions, est la première alternative, laquelle implique l'existence physique de l'*infini*, en petitesse comme en grandeur.

Dans tous les cas, qu'il y a loin du morne univers que la Science nous révèle, constitué uniquement par les va-et-vient de corpuscules incapables d'occasionner individuellement la moindre sensation visuelle ou autre, aux images riantes ou sombres qui nous charment et nous troublent tour à tour ! Si la Science dit vrai, combien nos sens sont des témoins suspects !

III. Nous donnons pour théâtre à ces phénomènes une entité

---

(1) Inutile de dire que l'acception donnée au mot *étendue*, dans ces quelques lignes, n'a aucun rapport avec celle que nous avons adoptée comme synonyme des mots *quatrième champ*.

(2) L'idée de l'atome inétendu fut mise en avant par le P. Boscowich vers le milieu du XVIIIe siècle (*Theoria philosophiæ naturalis reducta ad unicam legem virium in natura existentium*, Vienne, 1758). On peut citer parmi ses partisans : Ampère, Faraday, Cauchy, de Saint-Venant, Dugald Stewart, Victor Cousin, Vacherot, etc. *Voir*, par exemple, un Article de ce dernier, dans la *Revue des Deux-Mondes* du 15 août 1876, p. 55.

que nous appelons *l'espace,* et dont nous faisons un *champ de troisième degré.* On sait combien est frêle la base sur laquelle notre esprit s'appuie pour le classer ainsi. En tout cas, il est naturel, faisant pour lui la même chose que pour le corps matériel, de le considérer comme un terme d'une série commençant par le point, arrivant à lui par la droite et le plan, puis se continuant indéfiniment. Une pareille manière de voir n'est ni moins rationnelle, ni plus incompréhensible, ni plus gratuite que celle qui, à la base même de la Physique, fait état de l'infiniment petit et de l'infiniment grand.

Il a été montré, dans le *Traité élémentaire,* par un certain nombre de faits, que cette conception est utile au moins pour la *Théorie atomique,* qui s'est heurtée à des choses non exprimables par des fonctions ne contenant que les trois coordonnées de l'espace. La quatrième perpendiculaire ferait ainsi son entrée dans la Physique par le monde des molécules. Les petites agglomérations qui forment le premier terme pratique de la série définie plus haut jouiraient de quatre dimensions, mais leurs groupements en agglomérations d'ordre supérieur qui impressionnent nos sens ne se feraient que suivant les trois dimensions auxquelles nous sommes habitués; tel, en descendant d'un degré, un mur dont nous ne voyons que la façade, mais dont chaque brique n'en a pas moins une dimension perpendiculaire à cette façade. Tous les corps auraient donc dans le sens perpendiculaire à notre espace une épaisseur de l'ordre des grandeurs atomiques. Cependant notre existence serait purement tridimensionnelle, parce que, même en nous supposant capables de la conception quadridimensionnelle, nous ne saurions avoir conscience d'une grandeur de cet ordre. Diverses déductions paraissant assez plausibles placent en effet le diamètre moléculaire de la plupart des substances connues entre *un millionième et un dix-millionième de millimètre,* alors que nos plus puissants microscopes ne vont pas jusqu'au *dix-millième de millimètre.*

§ 50. — Argument tiré de l'atome plurivalent.

Citons encore un fait en confirmation des affinités qu'il y a entre l'atome et la quatrième dimension; nous espérons qu'on ne trouvera pas trop longue l'explication préliminaire dont nous sommes obligé de l'accompagner, plus encore, peut-être, pour faciliter notre propre tâche que celle du lecteur.

I. Nous ne nous sommes pas inquiété, dans le paragraphe précédent, de la distinction que fait la Chimie entre *corps simples* et *corps composés,* mais il nous faut y arriver. Chez les premiers, la molécule est constituée par des atomes identiques, d'espèce particulière pour chacun d'eux, et le nombre des espèces différentes serait d'environ quatre-vingts, indiqué par celui des corps simples connus. La molécule des seconds est édifiée avec les mêmes espèces d'atomes, mais il s'en trouve dans chacune *au moins deux* d'espèces différentes. Les diverses espèces étant désignées par A, B, C... et m, n, p... étant des nombres entiers pris comme *multiplicateurs,* tout corps composé est donc représenté par un *symbole* tel que

$$A^m B^n C^p \ldots$$

qu'on appelle sa *formule brute,* parce qu'il n'implique aucun mode particulier d'association et laisse la porte ouverte à toutes les suppositions. Oubliant les considérations *gratuites* qui y ont conduit le chimiste ne voit plus que ce symbole qui, avec les signes A, B, C... et un très petit nombre de valeurs de m, n, p..., lui permet de représenter la masse colossale des corps composés auxquels il a à faire, d'interpréter et de prévoir les phénomènes qui naissent de leurs rapprochements.

Dans les substances qui font l'objet de la Chimie organique, un de ces constituants est toujours le *carbone,* et il s'y présente comme *quadrivalent,* on disait il n'y a pas longtemps encore : *tétratomique* (1). Cela veut dire que sa puissance de combinaison n'est épuisée que lorsqu'il est associé dans la molécule à quatre autres *atomes* ou *groupements d'atomes,* apportant chacun une *valence,* mot qui désignerait une force de nature particulière, douée d'orientation et de sens. On donne à un pareil groupement

---

(1) On peut voir l'histoire du mot au paragraphe 93 de l'Ouvrage : LOTHAR MEYER, *Les théories modernes de la Chimie et leur application à la Mécanique chimique,* 2 vol. in-8°, 1887.

d'atomes le nom de *radical;* on se le représente comme *un corps composé ordinaire diminué d'un atome,* fiction n'ayant pas d'existence réelle, mais censée apparaître un instant dans le passage entre les deux états d'équilibre stable qui précèdent et suivent une réaction chimique.

Voici, par exemple, le *gaz des marais*, appelé aussi *méthane, hydrure de méthyle, hydrogène protocarboné,* etc.; c'est le carbure fondamental de la Chimie organique. C'est lui qui, accumulé au fond des galeries des mines de houille et s'enflammant par une cause quelconque, y détermine ces explosions si redoutées des mineurs sous le nom de *feu grisou*. Il a pour formule CH^4, et les quatre valences de l'atome de carbone y sont saturées par celles de quatre atomes d'hydrogène, qui est un corps monovalent. On peut remplacer dans sa formule les quatre H par d'autres atomes ou groupements univalents X, Y, Z, V et, suivant que quatre, trois, deux ou *zéro* de ceux-ci sont identiques, elle donne naissance à ces quatre formes :

$$CX^4, \quad CX^3Y, \quad CX^2YZ, \quad CXYZV,$$

le cas où le carbone lui-même se trouverait parmi les quatre atomes apportés étant exclu provisoirement.

Tous les composés de la dernière forme, et ils sont nombreux, *jouissent, à l'exclusion de tous ceux des trois autres, de la curieuse propriété que voici.* Chacun d'eux présente *deux variétés*, qui ont absolument la même composition chimique; mais, si l'on place sur le trajet d'un rayon de lumière polarisée une cuve de verre contenant une des variétés à l'état liquide, de dissolution ou de vapeur, le plan de polarisation tourne *de gauche à droite* autour du rayon; si c'est l'autre variété, il tourne de *droite à gauche*, et du même angle. On dit que la première variété est *droite* ou *dextrogyre,* que la seconde est *gauche* ou *lévogyre,* et que les deux variétés sont *isomères* (¹) l'une de l'autre. Leur mélange est *inactif,* c'est-à-dire sans action sur le rayon lumineux.

A première vue, on pourrait croire à l'identité du phénomène avec celui que présentent divers cristaux. Mais dans le dernier

---

(¹) De *isos,* égal; *meros,* partie.

cas, le phénomène est dû à une dissymétrie cristalline (1) et ne peut pas être conçu en dehors de l'*état solide;* dans celui qui nous occupe, il est clair que c'est la molécule elle-même qui est organisée dissymétriquement, soit dans *la position relative de ses constituants,* soit dans *leurs mouvements intestins.* La seconde alternative a été abandonnée comme plus difficile ou moins intéressante, et l'on s'est attaché à la première qui a conduit, dans ce dernier quart de siècle, aux principes étonnamment féconds de la *Stéréochimie.* Van't Hoff en Hollande, et Le Bel, en France, ont été les créateurs de cette science; Pasteur (2) en avait posé la première pierre.

Comment nous figurer cette molécule? Encore une fois, ce n'est pas après sa forme réelle (si tant est qu'il y ait quelque chose répondant à ce mot) que nous devons courir, mais après une forme schématique nous permettant d'interpréter le phénomène constaté, savoir : *la molécule en question est active vis-à-vis de la lumière polarisée quand tous ses termes sont inégaux, inactive quand deux, trois ou quatre des termes qui suivent* C *sont égaux.*

On eut bientôt vu qu'aucune figuration plane ne saurait faire l'affaire, et la figure la plus simple qu'on puisse prendre hors du plan est celle du *tétraèdre.* L'atome de carbone se trouvera à l'intérieur, et ses quatre valences sont dirigées vers les quatre sommets où elles se riveront aux quatre valences neutralisantes. Le tétraèdre sera régulier dans le cas CX^4 (*fig.* 41). Il ne le sera pas dans les autres cas, à raison des inégalités des forces dirigées par les molécules X, Y, Z, V non seulement vers C, mais encore les unes vers les autres; néanmoins, comme il ne s'agit que d'un schéma conventionnel, on peut conserver toujours le dessin régulier et commode de la figure 41. En interchangeant les lettres placées aux deux bouts d'une arête quelconque, il vient deux dispositions différentes toujours les mêmes (*fig.* 42), et il ne peut pas y en avoir davantage. C'est de ces deux dispositions qu'on dit

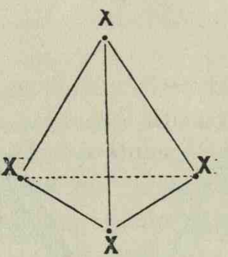
(1) La démonstration en a été donnée par M. Sarrau : *Mémoires sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux* (*Journ. de Liouville*, 2e série, t. XII et XIII, 1867 et 1868).

(2) *Recherches sur la dissymétrie moléculaire des produits organiques naturels*, Paris, 1861.

qu'elles sont *inverses sans être superposables,* et c'est cette conception qu'on a appelée le *carbone tétraédral* ou *asymétrique.*

On s'en rendra peut-être mieux compte en construisant le

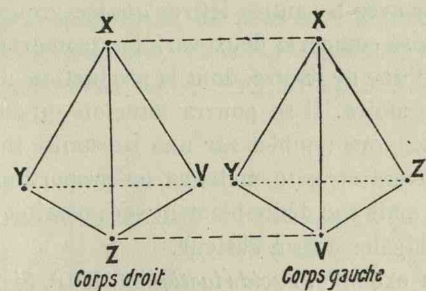
Fig. 41.



Tétraèdre de valences.

tétraèdre avec de la carte au moyen du développement que donne la figure 43 et teintant ses quatre sommets avec des couleurs différentes qui correspondront aux quatre corps X, Y, Z, V ; ce seront,

Fig. 42.



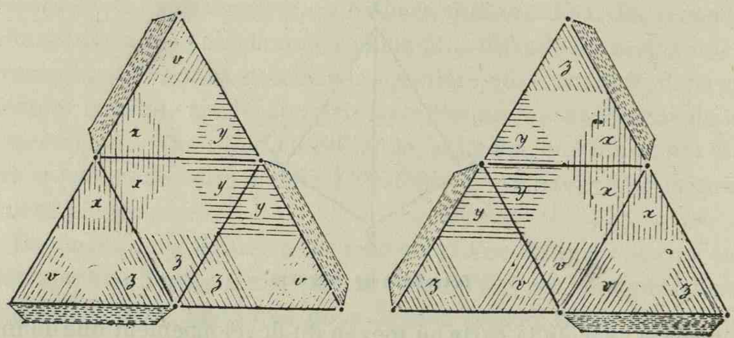
Tétraèdres de valences.

par exemple, le *bleu,* le *jaune,* et le *rouge,* le *vert,* que la figure représente par des hachures ayant quatre directions différentes. On voit de suite alors que les deux tétraèdres symétriques ne peuvent pas être superposés, mais qu'ils peuvent l'être si deux couleurs seulement sont les mêmes. Friedländer (1) emploie des

(1) Cité par Van't Hoff, *Leçons de Chimie physique,* traduit par Corvisy, 3 vol. in-8°, Paris, 1900.

modèles dans lesquels le tétraèdre est figuré par quatre tubes de caoutchouc partant d'un même point; des tiges de bois qu'on y enfonce et se terminant par une boule diversement colorée représentent les X, Y, Z, V.

Fig. 43.



Développement du tétraèdre de valences.

Toutes les fois qu'en prenant la formule brute d'un composé chimique où entre le carbone vous pouvez, ayant isolé *une fois* la lettre C, former avec les autres lettres quatre groupements *différents,* ce composé comporte deux variétés isomériques, optiquement inverses l'une de l'autre, dont la production ne sera qu'une affaire de laboratoire. Il se pourra toutefois qu'en procédant à cette production vous tombiez sur une substance inactive : c'est qu'elle se trouvera être un mélange en proportions égales des deux variétés, mais son dédoublement sera possible, grâce à trois méthodes principales dues à Pasteur.

Prenons, par exemple, l'*acide lactique* $C^3H^6O^3$. Si nous mettons de côté une lettre C, le reste donne quatre groupements

$$H, \quad CH^3, \quad OH, \quad CO^2H$$

auxquels s'applique tout ce qui a été dit ci-dessus de X, Y, Z, V. L'acide lactique comporte en effet deux variétés qui ont à peu près le même aspect de liquide sirupeux et incolore, mais différant par leur origine, leur constitution, quelques-unes de leurs réactions, la forme cristalline de leurs sels et le sens dans lequel elles dévient le rayon lumineux.

Or l'acide lactique dérive d'un autre appelé *acide propionique,* qui a pour formule $C^3H^6O^2$. En retirant de celle-ci une lettre C, le reste donne ces quatre groupements

$$H, \quad CH^3, \quad H, \quad CO^2H,$$

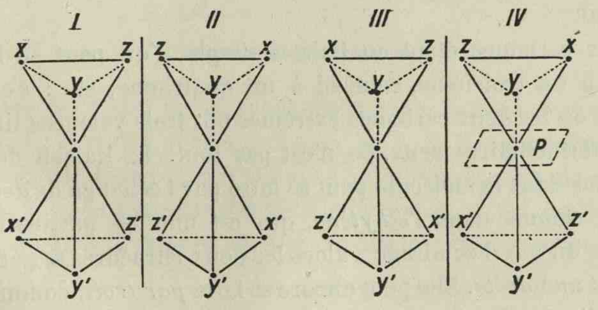
de la forme X^2YZ ; aussi n'y a-t-il là ni isomérie ni pouvoir rotatoire.

II. Voyons maintenant le cas, laissé de côté jusqu'ici, où l'un des quatre constituants est *encore du carbone*. Cet atome arrive, lui aussi, avec son tétraèdre et échange une de ses valences avec le premier. Il faut imaginer que les deux tétraèdres se pénètrent réciproquement de sorte que chacun porte un sommet à l'intérieur de l'autre; mais les chimistes, dans leurs croquis, se contentent de faire toucher les deux pointes, comme le montre la figure 44. Quoi qu'il en soit, il reste trois valences sur chaque tétraèdre et en appelant X, Y, Z, X′, Y′, Z′ les six valences qui les neutralisent, la molécule a pour expression

$$CXYZ + CX'Y'Z'.$$

Si toutes sont différentes, on peut faire quatre figures symétriques non superposables : elles correspondent aux quatre manières dont un des deux termes XYZ, ZYX peut s'associer avec un

Fig. 44.



Liaison simple du carbone.

des deux termes X′Y′Z′, Z′Y′X′. Il existe donc alors quatre isomères, mais ce nombre se réduira plus ou moins s'il y a des égalités entre les X, Y, Z ou entre les X′, Y′, Z′.

On dit qu'une pareille molécule *contient deux carbones simplement liés*. Un exemple nous en sera fourni par *l'acide tartrique* $C^4H^6O^6$, qui se trouve dans ces croûtes épaisses et dures déposées par le vin et se présente, après préparation, sous la forme de gros cristaux prismatiques divisant à droite le rayon polarisé. La formule peut s'écrire, en entourant le carbone asymétrique :

$$\boxed{C}.H.CO^2H.OH + \boxed{C}.H.CO^2H.OH;$$

on voit que nous sommes ici dans un *cas particulier* consistant en ce que les termes afférents à chaque carbone *sont identiques*, et il faut remplacer

$$X \text{ et } X', \quad Y \text{ et } Y', \quad Z \text{ et } Z'$$

par une même expression

$$H, \quad CO^2H, \quad OH.$$

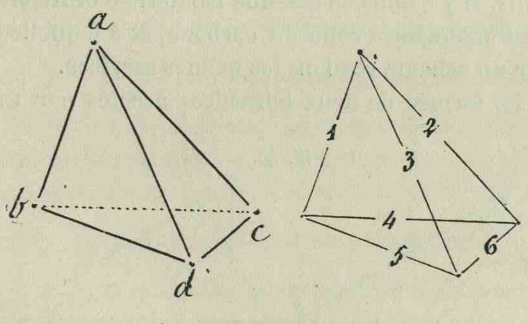
En faisant ces substitutions dans les quatre schémas du cas général, il se trouve que les deux derniers ont un plan de symétrie P passant par le sommet de jonction : *ils n'en font plus qu'un*, lequel donne une variété évidemment inactive et, de plus, *indédoublable*. Les deux autres schémas donnent les variétés *droite* et *gauche*, dont le mélange en donne une quatrième appelée *acide racémique*, inactive et dédoublable. Ces quatre variétés existent.

Deux carbones étant en liaison simple, l'un peut se lier de même à un troisième, celui-ci à un quatrième, etc.: c'est *une chaîne* où les deux carbones extrêmes ont trois valences libres et les intermédiaires deux. Ce n'est pas tout. La liaison de deux carbones dans la molécule peut se faire par l'échange de *deux valences*, comme dans l'*éthylène*, qui est une des parties constituantes du gaz d'éclairage : alors les deux tétraèdres se pénètrent *suivant une arête*. Elle peut encore se faire *par trois*, comme dans l'*acétylène*, et les deux tétraèdres se pénètrent alors *suivant une face*. C'est à partir de là que la Stéréochimie se complique ; qu'elle se divise en une branche mathématique et une branche chimique ; qu'il peut y avoir dans la molécule à la fois des liaisons simples et des liaisons doubles ; qu'à la suite des précédents, simples *iso-*

mères de position, va se ranger la troupe serrée des *isomères par substitution;* que le schéma tétraédral se fait apprécier de plus en plus ; enfin que le chimiste accomplit des merveilles pour réaliser les corps que la Géométrie lui signale, et accumule cette énorme masse de matériaux dont on peut se faire une idée en jetant les yeux sur le *Dictionnaire des combinaisons du carbone,* de Richter ([1]). C'est également là que nous arrêterons notre exposition préliminaire ([2]), espérant que ses sept pages n'auront pas été inutiles pour la diffusion d'une science déjà largement constituée, mais encore peu connue.

III. Le carbone *n'est que quadrivalent.* Le schéma de ses valences s'est offert à nous de lui-même, et il fonctionne avec une complaisante régularité. Quelles que soient (*fig.* 45) les positions,

Fig. 45.



L'atome à quatre valences.

inconnues de nous, qu'occupent autour de l'atome les extrémités *a*, *b*, *c*, *d* des quatre valences X, Y, Z, V, ce schéma s'y emboîte exactement ; il peut allonger ou raccourcir ses six arêtes 1, 2, 3, 4, 5, 6 à la demande des six distances *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*, car la Géométrie n'impose aucune condition aux six distances de

([1]) *Lexicon der Kohlenstoffverbindungen,* von M. M. RICHTER. Hamburg et Leipzig, 1900. 2 vol. compacts gr. in-8° de 2500 pages. — Le nombre des combinaisons du carbone est supérieur à 100 000 et s'augmente chaque année de plusieurs milliers.

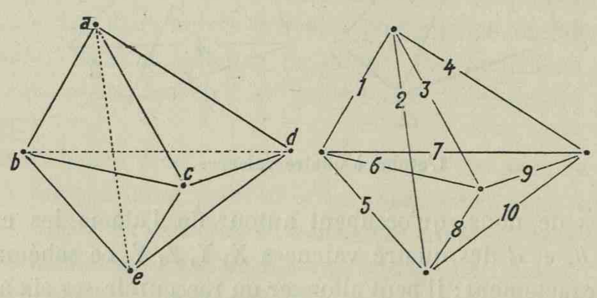
([2]) *Voir* pour plus de développements : G. MONOD, *La Stéréochimie,* exposé des théories de Le Bel et de Van't Hoff, in-8°, Paris, 1895. — FREUNDLER, *La Stéréochimie,* Paris, 1902, de la Collection *Scientia.*

quatre points de l'espace. Cet emboîtage *se fait tout seul*, sans que nous ayons à nous en occuper ; c'est pour cela que nous avons pu faire abstraction de la forme géométrique du tétraèdre et raisonner toujours au moyen de la figure 41, qui n'est après tout qu'un *quadrilatère quelconque*.

Il n'en va pas de même avec l'azote. Ce corps bizarre, qui fait le désespoir des chimistes par ses caprices et par l'instabilité qu'il apporte dans les édifices moléculaires, est tantôt trivalent, comme dans l'ammoniaque AzH^3, et tantôt quintivalent, comme dans le sel ammoniac AzH^4Cl; en d'autres termes, il est susceptible de présider à des organisations de la forme AzXYZ, ou de la forme AzXYZVU. Les premières, où l'on pourrait supposer ses trois valences dirigées suivant les trois arêtes d'un trièdre, n'ont jamais le pouvoir rotatoire, on ne sait trop pourquoi, et sont ici sans intérêt. Les secondes en jouissent quand X, Y, Z, V, U sont *tous différents*. Il y a dans ce cas une isomérie d'ordre stéréochimique qui est analogue à celle du carbone, et à laquelle on voudrait trouver un schéma rendant les mêmes services.

La figure 46, formée de deux tétraèdres accolés par une face,

Fig. 46.



L'atome à cinq valences.

présente bien cinq pointes, et admet une inverse qui ne lui est pas superposable, mais les chimistes repoussent ce schéma, qu'ils ont trouvé rebelle à certains faits d'expérience. Voici probablement la raison de son incapacité.

Pendant la période de constitution de la molécule, les extrémités des valences oscillent autour de certaines positions *a*, *b*, *c*, *d*, *e* où elles finissent par s'arrêter ; les deux forces antagonistes, qui règnent entre *une quelconque de ces extrémités et chacune des neuf autres,* oscillent autour de certaines grandeurs qui finissent par des grandeurs définitives i; enfin les dix droites sur lesquelles sont ces forces, après avoir partagé les mêmes péripéties, finissent aussi par se figer en des longueurs définitives ab, qui sont des fonctions des i. Rien ne dit que ces dix fonctions ne sont pas indépendantes les unes des autres et, pour avoir toute la généralité désirable, il faut les supposer telles.

Or les dix distances entre cinq points de l'espace *ne sont pas indépendantes les unes des autres.* Pour nous en rendre compte en passant du plus simple au moins simple, prenons d'abord le cas de *trois points sur une ligne droite.* Leurs distances sont au nombre de $\frac{3.2}{1.2} = 3$, et il existe entre elles une relation, des plus simples et des plus faciles à écrire, qui fait que lorsqu'on en donne deux la troisième s'ensuit.

Si nous considérons *quatre points sur un plan,* leurs distances sont au nombre de $\frac{4.3}{1.2} = 6$, et il suffit de penser au *quadrilatère complet,* pour voir qu'elles sont liées ensemble par une relation, maintenant assez compliquée, en vertu de laquelle cinq suffisent pour déterminer le tout. Enfin, si nous considérons *cinq points dans l'espace,* leurs distances sont au nombre de $\frac{5.4}{1.2}$, ce qui fait *dix,* et il y a toujours entre elles une relation obligée. Cette relation a été étudiée, entre autres, par Lagrange, Cayley, Mansion et Carnot, auxquels nous renvoyons le lecteur qui en voudrait la démonstration (¹). Voici toutefois la relation elle-même, pour les amateurs de formules compliquées. Soient a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3,

(¹) LAGRANGE, *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (*Œuvres,* t. III, p. 659-692). La première publication est de 1773 (*Mémoires de l'Académie de Berlin*). — CAYLEY, *On a theorem in the Geometry of Position* (*Messenger of mathematics,* t. XVIII, 1889, p. 100, et *Collected math. papers,* t. XII, p. 581). — MANSION, *Relation entre les distances de cinq ou de six points en Géométrie euclidienne et en Géométrie non euclidienne* (*Ann. de la Soc. de Bruxelles,* 1894-1895, p. 189). — CARNOT, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace.* Paris, Courcier, 1806. La démonstration de Carnot est assez laborieuse.

g_1, g_2, g_3, f les carrés des dix distances. Prenons, pour abréger,

$$\alpha = -(a_2 - a_3)^2 + 2c_1(a_2 + a_3) - c_1^2,$$
$$\alpha' = -(a_3 - a_1)^2 + 2c_2(a_3 + a_1) - c_2^2,$$
$$\alpha'' = -(a_1 - a_2)^2 + 2c_3(a_1 + a_2) - c_3^2;$$

puis

$$\beta = -(a_3 - a_1)(a_1 - a_2) + 2c_1a_1 - c_2(a_1 + a_2) - c_3(a_3 + a_1) + c_2c_3,$$
$$\beta' = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) + 2c_2a_2 - c_3(a_2 + a_3) - c_1(a_1 + a_2) + c_3c_1,$$
$$\beta'' = -(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) + 2c_3a_3 - c_1(a_3 + a_1) - c_2(a_2 + a_3) + c_1c_2;$$

puis encore

$$\begin{aligned} D^2 = {} & c_1(a_3 - a_1)(a_1 - a_2) + a_1c_1(c_3 + c_2 - c_1) \\ & + c_2(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) + a_2c_2(c_1 + c_3 - c_2) \\ & + c_3(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) + a_3c_3(c_2 + c_1 - c_3) - c_1c_2c_3; \end{aligned}$$

et enfin

$$A = a_1 + f - g_1, \qquad A' = a_2 + f - g_2, \qquad A'' = a_3 + f - g_3;$$

la relation est alors

$$D^2 f = \alpha A^2 + \alpha' A'^2 + \alpha'' A''^2 + 2\beta A'A'' + 2\beta' A''A + 2\beta'' AA'.$$

Désignant par (12) la distance des points 1, 2, et de même pour les autres, Cayley condense la relation sous cette déterminantielle, que Mansion démontre avec beaucoup d'élégance :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (13) & (14) & (15) \\ 1 & (21) & 0 & (23) & (24) & (25) \\ 1 & (31) & (32) & 0 & (34) & (35) \\ 1 & (41) & (42) & (43) & 0 & (45) \\ 1 & (51) & (52) & (53) & (54) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si compliquée que soit cette formule, la figure de cinq points n'en est pas moins tenue de lui obéir sans réserve et n'est pas la libre maîtresse de ses dix distances : elle ne pourra pas, comme faisait tout à l'heure celle de quatre, les allonger ou les raccourcir à la demande des dix fonctions, et le chimiste se plaindra qu'elle n'a pas une adaptabilité suffisante.

S'il est nécessaire que vous ayez pour le cas de cinq valences un schéma aussi élastique que le tétraèdre pour celui de quatre, le troisième champ ne suffit pas et il vous faut passer dans le quatrième. Là seulement vous trouverez l'indépendance entre les dix distances de cinq points, et l'emboîtage de la figure schématique sur celle des valences se fera encore automatiquement.

Mais celui-ci devient insuffisant à son tour si vous voulez opérer avec une molécule à *six valences;* alors se présente le cinquième champ, *et ainsi de suite.* Soulignons une dernière fois ces quatre petits mots que nous avons vu revenir si souvent : *partout* le terme que nous arrivons à saisir se noue à un terme supérieur comme le maillon d'une chaîne au suivant, avec la différence que ce terme supérieur est toujours beaucoup plus compliqué. Que deviendrait, par exemple, l'équation de la page 212 pour les *quinze distances de six points dans le cinquième champ?*

IV. Il ne faudrait par considérer le tétraèdre des figures 41 et 42 comme étant à un degré quelconque un reflet de la forme ou de la structure de l'atome : ce n'est qu'une notation, un procédé graphique, un symbole, un schéma. De quelque façon que les mots *atome* et *molécule* entrent dans nos raisonnements, ils ne sauraient être autre chose. Il en est de même des mots *éther, fluide,* etc. Toutes ces entités, précieuses comme instruments d'étude et de recherches, se montrent, quand on les creuse, trop affligées de contradictions pour qu'on puisse croire à leur réalité, et bien rares sont les physiciens qu'une longue fréquentation à fait leurs dupes. Ce ne sont pas même des suppositions : seulement des schémas.

Tel est d'ailleurs le vrai caractère de la Physique moderne : toute schématique, elle ne pense nullement, comme dit M. Duhem [1], à passer derrière nos perceptions pour voir ce qu'il y a, mais elle cherche à les représenter par des *symboles* empruntés à la Géométrie ou à la Science des nombres, qu'elle connaît seule ensuite. Le *tétraèdre* de la figure 42, substitué à un certain effet sur la lumière, la *formule chimique* (p. 208) en sont des exemples typiques.

---

(1) *Le Mixte et la combinaison chimique,* in-8°, Paris, 1902.

Ce qui ressort de ce paragraphe et du précédent au sujet du quatrième champ, c'est le même caractère de schéma utile, venant se placer à côté des autres, en combler certaines lacunes et, comme eux, intéressant surtout ces parties pleines de la matière qui nous échappent. Aucun des faits mentionnés ne force de conclure à son existence réelle, mais le fait que cette existence réelle *n'implique pas de contradiction* donne au quatrième champ un caractère bien plus élevé qu'aux autres schémas, et fait penser à l'argument philosophique du paragraphe 47. En tout cas, il ne serait consacré que le jour où il ferait prévoir quelque phénomène encore inconnu, et qui serait vérifié. Alors cependant, pas plus qu'aujourd'hui, nous ne pourrions dire que nous possédons une explication définitive de la nature : nous aurions tout simplement remplacé le vieux schéma par un autre plus fécond.

§ 51. — La place que nous aurions dans le monde à quatre dimensions.

Les personnes qui croient à des interventions extranaturelles ont en grand nombre jeté leur dévolu sur le monde à quatre dimensions, qui leur fournit un appui des plus commodes. Elles ont deux manières de pourvoir notre monde d'une place dans celui-là.

I. La plus naturelle consiste à considérer *l'espace* que nous habitons comme étant *la figure limitante* d'un corps matériel à quatre dimensions, de même que *la surface* sur laquelle nous marchons et que nous appelons la surface terrestre est *la figure limitante* d'un corps à trois dimensions. On sait, en effet (*voir* Chap. II), que les corps à quatre dimensions sont limités par des figures à trois dimensions, de même que ceux à 3, 2 et 1 dimensions le sont par des figures à 2, 1 et 0, c'est-à-dire par des surfaces, des lignes et des points.

Vous vous êtes sans doute arrêtés quelquefois, debout sur la rive, à suivre de l'œil les évolutions saccadées, rappelant celles du patineur sur la glace, qu'accomplit à la surface d'une eau tranquille, sans s'y mouiller mais sans pouvoir s'en séparer, cet hémiptère que le vulgaire appelle *tisserand* ou *araignée d'eau*, et le naturaliste *hydrometra stagnorum*. Il est *si plat*, avec ses longues pattes, que votre esprit n'a pas de peine à le concevoir *beaucoup plus mince encore*, et à admettre qu'*il ne sait rien de ce qui est au-dessous ni de ce qui est au-dessus de la surface à laquelle il est attaché*. Avec vos trois dimensions, vous êtes la même chose vis-à-vis de l'homme qui en a une de plus. Debout sur notre espace; entouré de choses que vous ne pouvez pas vous figurer; doué d'une intelligence en rapport avec la complication de ces choses et les ressources qu'elles contiennent; voyant tous les points de notre espace distincts les uns des autres comme nous voyons ceux du plan qui est sous nos pieds; joignant peut-être à ces facultés celle de *connaître le temps avec deux dimensions*, qui lui permettrait de même d'embrasser simultanément toute la succession d'une d'elles ([1]), etc., cet homme est subordonné, lui aussi, à des créations d'un ordre plus élevé.

Si l'on admet, par analogie, que le support matériel est *une hypersphère solide* ([2]), notre habitat serait une *couche hypersphérique infiniment mince suivant la quatrième dimension*, de même que l'insecte rappelé plus haut peut se figurer que le sien est une *couche sphérique infiniment mince suivant la troisième*. Ce serait un *espace courbe*, qui n'est pas infini, où deux droites quelconques se rencontrent toujours, où la somme des trois angles d'un triangle est plus grande que deux droits, etc. Cet *excès hypersphérique*, s'il existait et si l'on pouvait le constater, pourrait être un argument en faveur de l'existence d'un pareil support. Mais il est évi-

---

([1]) Cette idée ingénieuse est de M. le capitaine Boucher : *L'hyperespace et le temps*.

([2]) Le lecteur n'ayant pas suivi régulièrement notre exposition pourrait croire que ces mots désignent des choses plus ou moins vagues. Nous le renverrons au paragraphe 33 du *Traité élémentaire*, où, sous les noms de *contenant* et *contenu*, ces deux choses : *couche hypersphérique* et *hypersphère*, sont évaluées tout comme le sont, dans la Géométrie à trois dimensions, la *surface* et le *volume* de la sphère; seulement les unités sont maintenant plus élevées d'un degré : au lieu du *mètre carré* et du *mètre cube*, nous avons le *mètre cube* et le *mètre octaédroïde*. Le même lecteur peut encore se reporter à l'un des polyédroïdes réguliers étudiés au Chapitre II, par exemple l'hexadécaédroïde des figures 9, 10 et 11; ce corps, limité par des espaces dont les intersections forment des triangles, est à l'hypersphère ce qu'un polyèdre régulier, limité par des plans dont les intersections sont des segments de droites, est à la sphère.

demment très petit, vu l'immensité du rayon qu'il faut supposer à l'hypersphère sous-jacente. Dans les plus grands triangles que l'astronome puisse mesurer, dans ceux-là mêmes que feraient en concertant leurs télescopes trois astronomes stationnés sur trois planètes différentes, il doit disparaître sous les erreurs attribuables aux imperfections de ces instruments (¹). Si donc notre espace n'est pas rigoureusement euclidien, il l'est pratiquement : sa courbure et celle du support sont nulles pour nous, et nous pouvons considérer la perpendiculaire qui leur serait élevée en un point quelconque comme parallèle à une direction fixe.

II. Moins rationnelle, mais plus connue, la seconde manière prend, pour l'espace dans lequel nous nous agitons, un quelconque de ceux, en nombre ∞^4, qui forment ensemble l'étendue quadri-dimensionnelle, et dont chacun la partage en deux régions infinies entre lesquelles il forme une couche infiniment mince. Tel serait pour nous, en descendant d'un degré, un *voile léger*, habité par des êtres à épaisseur nulle ou très faible, qui serait tendu en travers de notre espace, allant se perdre en un seul cercle indécis dans ce que le géomètre appelle la *sphère de l'infini* (²).

C'est la conception de Zöllner, l'auteur qui s'est livré le plus à ce genre d'applications de la Géométrie. Décédé en 1882, professeur à l'Université de Leipzig, il avait consigné le résultat de ses études dans cinq énormes volumes publiés en 1872 (³). Partant de ce fait que la projection d'un corps à quatre dimensions sur notre espace est un corps à trois dimensions, il considère notre monde comme l'*ombre* ou la *projection* d'un monde à quatre dimensions que nous ne pouvons pas voir directement, et qui est *plus réel* que le nôtre, de même que les corps à trois dimensions sont plus réels que leur ombre portée sur un mur ou que leur image sur le verre

---

(¹) *Voir*, pour plus de détails sur ce point, dans la jolie collection *Scientia*, le volume : *La Géométrie non-euclidienne*, par Barbarin, 1902. *Voir* aussi le premier alinéa de la citation de Taine, page 196.

(²) Un roman anglais (*Flatland, A romance of many dimensions*, London, Selley, 1886) se passe dans ce monde si peu favorisé.

(³) *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Leipzig, 1872. (Il n'est guère facile de mettre la main sur cet Ouvrage; on le trouve à la bibliothèque Mazarine.)

du photographe (1). Notre monde serait à celui-là ce que, dans les épures du Chapitre II, le polyèdre que représentent ensemble les deux projections A et B est à l'hypercorps que représentent ensemble les quatre projections A, B, C et D. De fait, les deux hypercorps sont sans doute aussi imaginaires l'un que l'autre, mais il faudrait bien accepter aussi celui de Zöllner s'il rendait à la Physique les mêmes services que ses congénères à la Géométrie.

Voulant nous en tenir à la question posée par le titre de ce Chapitre, nous ne parlerons que des arguments sur lesquels Zöllner cherche à établir l'existence matérielle d'un pareil monde. Ils sont nombreux et variés, mais de valeur médiocre. Voici, par exemple, comment il présente le phénomène de la vision.

Suivant lui, celle-ci consiste uniquement dans la création d'une image sur chaque rétine; par suite, l'homme n'a originairement qu'une intuition bidimensionnelle de l'espace, mais l'impossibilité d'expliquer tous les mouvements dont il avait la sensation l'a amené à transformer cette intuition en une autre ayant trois dimensions. C'est ainsi que l'astronome, en observant les mouvements des planètes sur une surface sphérique, a été amené à substituer à cette surface un firmament à trois dimensions pour remplacer une complication inextricable par quelque chose de très simple. Une connaissance plus exacte des phénomènes, ajoute Zöllner, forcera notre esprit à compléter par une quatrième les trois dimensions déjà acquises, et cette conception sera aussi familière à l'*homme du* XX^e^ *siècle* que celles des trois dimensions dans lesquelles se meuvent les corps célestes l'est à nous-mêmes depuis Copernic.

Or il a été montré dans le *Traité élémentaire,* que la vision humaine dépend en réalité non *de deux variables,* mais *de quatre* réduites pratiquement à trois. En sorte qu'on pourrait dire, renversant le raisonnement de Zöllner, qu'elle est originairement à quatre dimensions, mais que l'homme primitif, sans doute parce

(1) S'il en était ainsi, l'image tridimensionnelle du monde à quatre dimensions se produirait aussi sur les espaces qui sont parallèles au nôtre et serait répétée à l'infini. Nous ne pensons pas qu'on puisse rien tirer d'utile de ce genre de considérations et nous ne donnons l'idée, comme plusieurs autres, que pour faire saisir de mieux en mieux la conception géométrique.

qu'il trouvait cela trop compliqué, l'aurait ramenée à trois par un lent travail d'accommodation.

§ 52. — Les arguments de Zöllner.

I. Nous passons à des considérations d'autre nature. Ce sont celles qui admettent, ou prétendent prouver, l'existence réelle d'êtres intelligents extraterrestres et leur intervention effective dans nos affaires. Le champ du quatrième degré, tel qu'il a été défini et étudié ci-dessus, fournirait à de pareils êtres un corps matériel et un habitat, et expliquerait leurs relations avec notre monde, n'y laissant de mystérieux que la quatrième dimension elle-même, qui échappe à notre entendement mais non à notre analyse.

En premier argument, les adeptes de cette manière de voir invoquent l'autorité des penseurs éminents de diverses époques, c'est-à-dire apportent *des citations*. Ce genre de démonstration n'est guère de mise dans l'ordre exclusivement mathématique ou physique où nous nous cantonnons, mais il peut mettre au jour des choses intéressantes. Mentionnons par exemple, et ce sera tout, les deux passages suivants, desquels on a voulu conclure que l'idée des quatre dimensions ne fut pas étrangère aux auteurs sacrés.

On lit dans le Livre de Job, Chapitre XI, versets 7 à 9 : *Forsitan vertigia comprehendes et usque ad perfectum Omnipotentem reperies? Excelsior cœlo est, et quid facies? Profundior inferno et unde recognosces? Longior terrâ mensura ejus et latior mari.* C'est-à-dire : *Est-ce que tu aurais la prétention de connaître le Tout-Puissant? Il est plus haut que le ciel, plus profond que l'enfer, plus long que la Terre et plus large que la mer.*

Dans Saint-Paul, Épître aux Éphésiens, Chapitre III, verset 18 : *Ut possitis comprehendere cum omnibus Sanctis quæ sit latitudo, et longitudo, et sublimitas, et profondum.* Il s'agit, suivant les commentateurs bibliques, du mystère de la bonté divine; craignant qu'il ne fût réellement trop mystérieux avec quatre dimensions, quelques-uns traduisent *longitudo* par *durée,* tandis que d'autres traduisent *profondum* par *incompréhensibilité;* mais il est bien clair que, dans l'esprit de l'auteur, les quatre mots désignent quatre choses de même nature.

C'est de l'hyperespace et des hypercorps que les auteurs en question entendent ces paroles de l'Évangile.

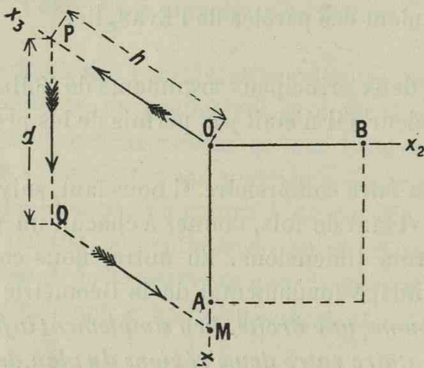
II. Voici les deux principaux arguments de Zöllner; ils seraient de première valeur s'il n'était pas permis de les prendre pour des supercheries.

Pour les bien faire comprendre, il nous faut, suivant la méthode qui nous a servi tant de fois, donner à chacun un préambule tiré du monde à trois dimensions. En outre, nous commençons par rappeler le principe fondamental de la Géométrie quadridimensionnelle : *Comme une droite, lieu simplement infini, forme une tranche élémentaire entre deux régions du plan deux fois infini; comme un plan, lieu deux fois infini, forme une tranche élémentaire entre deux régions de l'espace trois fois infini; de même un espace, lieu trois fois infini, forme une tranche élémentaire entre deux régions de l'étendue quatre fois infinie. Dès lors : toute droite menée d'un point quelconque* P *d'une de ces régions rencontre cet espace en un point unique: tous les points de cet espace sont sur autant de directions différentes partant du point* A, *s'étalent au même niveau pour un être placé en ce point et sont vus par lui simultanément; deux points quelconques situés l'un et l'autre dans cet espace déterminent une droite qui y est tout entière et ne saurait passer par le point extérieur* P.

1° Tout le monde connaît l'apologue du scorpion qui, entouré d'un cercle de charbons ardents et reconnaissant l'impossibilité de le franchir, tourne sur lui-même son dard venimeux. Il ne serait pas réduit à cette extrémité si, comme l'oiseau, il pouvait s'élever sur la troisième dimension, qui est la verticale, ou si un être pouvant agir suivant celle-ci le prenait et le transportait par-dessus l'obstacle. La figure 47 indique cette opération. Le plan sur lequel l'animal réside est défini par les deux axes Ox_1, Ox_2 ou par un carré dont ces axes sont deux côtés ; on n'a marqué de l'obstacle circulaire que les points A et B en lesquels il les coupe. Ox_3 est la verticale et OPQM est le trajet libérateur, OM étant plus grand que OA.

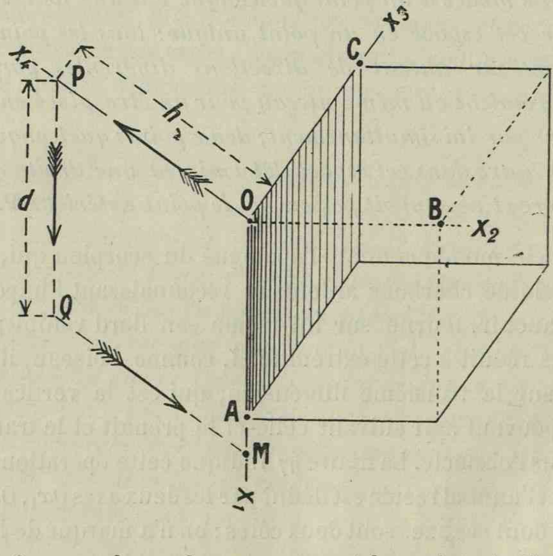
De même l'être à trois dimensions qui serait enfermé dans une enveloppe sphérique hermétiquement close pourrait en sortir

Fig. 47.



sans effraction s'il disposait de la quatrième dimension. Par le centre de cette enveloppe, on a mené dans la figure 48 trois axes

Fig. 48.



Ox_1, Ox_2, Ox_3 sur lesquels on a marqué les points A, B, C en lesquels ils percent la sphère, et sur lesquels on a construit un cube censé représenter l'espace la contenant. La perpendiculaire Ox_4 à cet espace ne rencontre la sphère nulle part ; on peut donc, comme dans le cas précédent, aller du point O à un quelconque P de ses points, puis revenir de celui-ci à un point M de l'espace qui soit extérieur à la sphère.

Le lecteur peut, si cela lui convient, *mettre l'opération en équations :* comme à l'ordinaire, il y verra moins clair mais sera peut-être plus satisfait. Prenons notre espace pour celui des $x_1 x_2 x_3$, et

$$x_4 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

pour l'équation de la surface sphérique. L'intersection de celle-ci par l'espace des $x_1 x_2 x_4$ est

$$x_4 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 = R^2 :$$

c'est un cercle et aucun autre point de la sphère ne se trouve dans ce deuxième espace. Nous considérant comme devenu un habitant de celui-ci, nous sortons du cercle suivant la perpendiculaire à son plan et passons du point O à un autre point P,

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = h.$$

Nous pouvons aller de celui-ci, par une parallèle à Ox_1, à un troisième Q,

$$x_1 = d, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = h,$$

et enfin, par une parallèle à Ox_4, revenir dans le premier espace au point M,

$$x_1 = d, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0 :$$

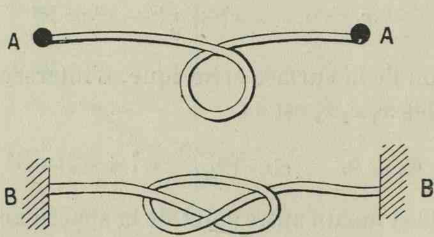
nous n'aurons jamais touché la sphère si $d > r$.

C'est d'un pareil fait que Zöllner fut témoin. Un grain de blé (*ein Schrotkorn*) enfermé dans une sphère de verre en disparut à la volonté du médium et reparut au dehors, transporté, disait celui-ci, par un être de l'hyperespace à ses ordres.

Ayant deux anneaux engagés l'un dans l'autre, et faisant suivre à l'un des deux le chemin que nous venons de décrire, on exécute le *jeu des anneaux* avec la même facilité.

2° Avec une corde, faites une boucle et ramenez chaque brin dans la direction qu'avait l'autre, formant ainsi un point double (*fig.* 49, A); posez cette figure sur une planchette et scellez-y les deux bouts. Il est clair qu'on ne pourra pas défaire la boucle si l'on est obligé de laisser la corde à plat et qu'on ne puisse lui faire faire que des mouvements le long de la planchette ; mais ce sera facile si l'on peut la soulever et la redresser, c'est-à-dire *emprunter la troisième dimension.*

Fig. 49.



Avec une autre corde, faites un nœud : le plus facile de tous, celui qui s'appelle le nœud droit simple (*fig.* 49, B); puis scellez les deux bouts sur deux poteaux ou contre les murs de la chambre ; le nœud sera *indéfaisable.* Mais on pourra le défaire si l'on dispose de la quatrième dimension : la démonstration en a été donnée par une analyse assez compliquée, que nous nous abstiendrons de reproduire parce qu'elle n'a d'autre intérêt que celui de la difficulté [1]. Slade opéra ce nouveau tour de force devant Zöllner qui fut de plus en plus convaincu de ses intelligences avec le monde dont nous sommes la projection.

§ 53. — Résumé du Chapitre.

1° Dans l'ordre mathématique, la question de l'existence des champs supérieurs ne se pose même pas. Nous n'avions pas à établir la légitimité, mais seulement l'utilité d'une pareille extension de la Géométrie classique; nous croyons l'avoir fait suffisamment en montrant quelle opulente moisson ont récoltée les cher-

---

(1) Durège, *Ueber die Hoppe'sche Knotencurve* (*Sitzungsb. der k. Akad. d. Wiss. zu Wien, mathematische Classe,* vol. LXXXII, juillet 1880, p. 135-146).

cheurs qui, en Allemagne, en Angleterre, en Hollande et en Italie, se sont engagés dans la voie ouverte en France.

2° Dans l'ordre physique, la conception du quatrième champ vient se placer à côté des conceptions déjà en usage, telles que l'atome et l'éther, comme un schéma analogue utile pour en combler certaines lacunes. Tout en s'en servant, on peut, *comme on le fait pour ceux-là,* le traiter de chimère; mais il n'est pas comme eux affligé de contradictions rédhibitoires, et rien n'empêche de lui attribuer une existence pareille à celle de notre espace, dont il partagerait la nature et dont il serait une sorte de prolongement. Les théories *dans lesquelles intervient l'atome* sont à peu près les seules, jusqu'ici, qui paraissent devoir tirer un utile parti de la quatrième dimension.

3° Allant plus loin, de nombreux penseurs font entrer dans le quatrième champ, non plus seulement le monde des infiniment petits, mais celui qui frappe nos sens; ils veulent faire fonctionner un univers physique et intellectuel jouissant réellement des quatre dimensions. Nous avons montré la place que le nôtre y occuperait; il nous a paru intéressant d'indiquer dans quel esprit sont conçus les principaux arguments que font valoir ses adeptes. Mais nous n'avons pas voulu nous étendre sur ces arguments intéressés, trop éloignés d'ailleurs du terrain mathématique où nous nous cantonnons.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

La surface du troisième degré.

CHAPITRE V.

L'hexagramme et l'hexastigme.

CHAPITRE VI.

Les hypersurfaces du second degré.

CHAPITRE VII.

Les quartiques.

CHAPITRE VIII.

La question de l'existence réelle de l'hyperespace.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
37217 Quai des Grands-Augustins, 55.