



**BIBLIOTECA CENTRALA**  
A  
**UNIVERSITĂȚII**  
DIN  
**BUCUREȘTI**

No. 71314 1

Inv. \_\_\_\_\_ No. \_\_\_\_\_

S. \_\_\_\_\_ D. \_\_\_\_\_ R. \_\_\_\_\_

sammenhänge miteinander, so daß das Ganze,  
wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche,  
systematische Darstellung unseres gesamten  
Wissens bilden dürfte.

Ausführliche Verzeichnisse  
der bisher erschienenen Bände umsonst und postfrei

en

ren,  
gen

1.62  
driger  
14.40;

S o.  
age  
mp.  
i g

# Bibliothek zur Physik und Chemie

aus der Sammlung G ö s c h e n

- Radioaktivität von Prof. Dr. K. Przibram. Mit 31 Abb. . . . . Nr. 317
- Teilchenstrahlen (Korpuskularstrahlen) von Prof.  
Dr. H. Mark. Mit 59 Abbild. . . . . Nr. 1083
- Spektroskopie von Prof. Dr. Karl Wilh. Meißner. Mit 102 Fig. Nr. 1091
- Kristallographie von Prof. Dr. W. Bruhns. Neubearbeitet  
von Prof. Dr. P. Ramdohr. Mit 192 Abb. . . . . Nr. 210
- Einführung in die Kristalloptik von Dr. Eberh. Buchwald.  
Mit 116 Fig. . . . . Nr. 619
- Einführung in die geometrische Optik von Dr.  
W. Hinrichs . . . . . Nr. 532
- Geschichte der Physik von Professor A. Kistner. Mit  
16 Fig. 2 Bände . . . . . Nr. 293, 294
- Theoretische Physik von Professor Dr. G. Jäger. Mit  
127 Fig. 5 Bände . . . . . Nr. 76—78, 374, 1017
- Physikalische Messungsmethoden von Professor Dr.  
Wilh. Bahrdt. Mit 54 Fig. . . . . Nr. 301
- Physikalische Formelsammlung von Prof. G. Mahler.  
Neubearbeitet von Prof. K. Mahler. Mit 71 Fig. . . . . Nr. 136
- Physikalische Aufgabensammlung von Prof. G. Mahler.  
Neubearbeitet von Prof. K. Mahler. Mit den Resultaten. Nr. 243
- Vektoranalysis von Prof. Dr. Siegfried Valentiner Mit 13 Fig. Nr. 354
- Luftelektrizität von Dr. Karl Kähler. Mit 19 Abb. . . . . Nr. 649
- Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht von Prof.  
Dr. A. Nippoldt. Mit 9 Tafeln und 13 Abb. . . . . Nr. 175
- Meteorologie von Prof. Dr. Albert Defant. Mit 38 Fig. u. 7 Taf. Nr. 54
- Geschichte der Chemie von Prof. Dr. Hugo Bauer.  
I. Von den ältesten Zeiten bis Lavoisier . . . . . Nr. 264  
II. Von Lavoisier bis zur Gegenwart . . . . . Nr. 265
- Allgemeine und physikalische Chemie von Prof. Dr.  
Hugo Kauffmann. 2 Bände. Mit 16 Fig. . . . . Nr. 71, 693
- Anorganische Chemie von Prof. Dr. Wilhelm Klemm.  
Mit 18 Fig. . . . . Nr. 37
- Die Metalle und ihre Verbindungen von Prof. Dr. J. Koppel.  
I. Alkalimetalle, Erdkalimetalle, Magnesiumgruppe.  
Mit 8 Fig. . . . . Nr. 812  
II. Kupfergruppe, Aluminiumgruppe, Titangruppe, Blei-  
gruppe. Mit 1 Fig. . . . . Nr. 813  
III. Vanadiumgruppe, Chromgruppe, Mangan, Eisen-  
gruppe, Platingruppe. Mit 5 Fig. . . . . Nr. 814

**Die Nichtmetalle und ihre Verbindungen von Prof. Dr. A. Benrath.**

- I. Bor, Kohlenstoff, Silizium, Stickstoff. Mit 9 Fig. Nr. 211  
II. Wasserstoff, Sauerstoff, Halogene, Edelgase. Mit 24 Fig. Nr. 212
- Organische Chemie** von Dr. Wilhelm Schlenk jun. . . . Nr. 38  
**Stereochemie** von Prof. Dr. E. Wedekind. Mit 44 Fig. . . . Nr. 201  
**Physiologische Chemie** v. Dr. med. A. Legahn. 2 Bände. Nr. 240, 241  
**Neuere Arzneimittel, ihre Zusammensetzung, Wirkung und Anwendung** von Prof. Dr. med. C. Bacher. Nr. 669  
**Kolloidchemie** von Prof. Dr. E. Wedekind. Mit 9 Fig. . . . Nr. 897  
**Thermochemie** von Prof. Dr. W. A. Roth . . . . . Nr. 1057
- Elektrochemie** von Dr. Heinr. Danneel.  
I. Allgemeine Elektrochemie. Mit 19 Fig. . . . . . Nr. 252  
II. Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. . . . . . Nr. 253  
III. Energie. Mit 18 Fig. und mehreren Tabellen . . . . . Nr. 941  
IV. Elektrolyse. Mit 41 Fig. und mehreren Tabellen . . . . . Nr. 980
- Komplexchemie.** Einführung in die Chemie der komplexen Verbindungen. Von Prof. Dr. L. Dede. Mit 5 Fig. . . . . . Nr. 931
- Homogene Katalyse I: Nicht-enzymatische Katalysen** von Prof. Dr. H. v. Euler und Dr. A. Ölander. Mit 3 Figuren Nr. 1037  
— **II: Enzymatische Katalysen** von Dr. Karl Myrberg. Mit 7 Figuren . . . . . Nr. 1023
- Elektrochemische Rechenaufgabensammlung** mit einer kurzen Übersicht über die wichtigsten Lehrsätze und Konstanten. Von Professor Dr.-Ing. Gustav F. Hüttig . . . . . Nr. 892
- Stöchiometrische Aufgabensammlung** von Prof. Dr. W. Bahrdt. Mit den Resultaten . . . . . Nr. 452
- Chemisch-techn. Rechnungen** v. Chemiker H. Deegener. Mit 2 Fig. . . . . . Nr. 701
- Analytische Chemie** von Dr. Johs. Hoppe. 2 Bände. Nr. 247, 248
- Maßanalyse.** Theorie und Praxis der klassischen und der elektrochemischen Titrierverfahren. Von Prof. Dr. Gerhart Jander u. Dr. Karl Friedrich Jahr. 2 Bände. Mit 32 Fig. Nr. 221, 1002
- Toxikologische Chemie** von Prof. Dr. E. Mannheim. Ergänzt von Dr. Fr. X. Bernhard. Mit 5 Fig. . . . . . Nr. 465
- Agrikulturchemische Untersuchungsmethoden** von Prof. Dr. E. Haselhoff . . . . . Nr. 470
- Die chemischen Pflanzenschutzmittel, ihre Anwendung und Wirkung** von Dr. Ernst Vogt . . . . . Nr. 923

---

Weitere Bände sind in Vorbereitung

Sammlung Göschen

Inu. A. 52.106

237916

# Theoretische Physik

## IV Optik

238011

Von

**Dr. Gustav Jäger**

Professor der Physik an der Universität Wien

Mit 44 Figuren..

Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage

67180



Berlin und Leipzig  
Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlags-  
buchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Velt & Comp.

1930

CONTROL 1953.

1956

B.C.U. Bucuresti



C67180

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht  
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Biblioteca Centrala Universitara	
BUCURESTI	
Cota .....	71311 .....
Inventar .....	C67180 .....

RC 239/01

# Inhalt.

Lehrbücher zur Optik und Röntgenstrahlung .....	Seite 4
---	------------

## Optik oder die Lehre vom Licht.

§	1. Geradlinige Fortpflanzung des Lichts — Beleuchtung — Photometrie .....	5
§	2. Reflexionsgesetze ebener Spiegel .....	7
§	3. Kugelspiegel — Gegenstands- und Bildweite — Brennpunkt .....	8
§	4. Bilder von Kugelspiegeln mit kleiner Öffnung .....	11
§	5. Brechungsgesetz — Brechungsexponent — geometrische Optik — Katoptrik — Dioptrik .....	13
§	6. Dispersion des Lichts — Der Regenbogen .....	14
§	7. Abbildung eines Punktes durch eine brechende Kugelfläche — Brennpunkte — Brennweiten .....	18
§	8. Bildgröße .....	21
§	9. System zweier brechender Kugelflächen — Linsen .....	21
§	10. Hauptebenen — Hauptpunkte .....	25
§	11. Bikonvexe Linse .....	29
§	12. Huygenssches Prinzip .....	31
§	13. Fermats Satz .....	33
§	14. Lichtgeschwindigkeit — Aberration .....	35
§	15. Interferenz .....	36
§	16. Fresnels Spiegelversuch .....	37
§	17. Beugung des Lichts .....	40
§	18. Beugung durch eine Spalte .....	43
§	19. Beugung durch zwei Spalten — Interferenzversuche von Young und Arago .....	46
§	20. Fraunhofers Gitter .....	48
§	21. Michelsons Versuch .....	51
§	22. Optik bewegter Körper — Fizeaus Versuch .....	52
§	23. „Französisches“ und „Englisches“ Koordinatensystem .....	53
§	24. Die Bewegungsgleichungen der Elektrizität und des Magnetismus in ursprünglich neutralen Isolatoren .....	55
§	25. Die Strahlgleichungen — Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen .....	57
§	26. Harmonische elektrische und magnetische Schwingungen — Lichtschwingungen .....	60
§	27. Linear polarisiertes Licht — Superposition der Wellen — natürliches Licht .....	64
§	28. Interferenz elektromagnetischer Wellen .....	65
§	29. Elliptisch und zirkular polarisiertes Licht .....	67
§	30. Huygenssches Prinzip für elektromagnetische Wellen .....	72
§	31. Reflexion und Brechung .....	73
§	32. Polarisation des Lichtes durch Reflexion und Brechung — Elektrische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene .....	75

	Seite
§ 33. Magnetische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene .....	79
§ 34. Energie elektromagnetischer Strahlen — Energiedichte der Strahlung .....	81
§ 35. Fresnels Theorie der Polarisation .....	83
§ 36. Farben dünner Blättchen .....	89
§ 37. Newtons Farbenglas .....	96
§ 38. Wirkung dünner Blättchen bei schief auffallendem Licht — Talbots Linien .....	97
§ 39. Stehende Wellen .....	99
§ 40. Doppelbrechung .....	101
§ 41. Huygens Theorie der Doppelbrechung .....	108
§ 42. Erzeugung elliptisch und zirkular polarisierten Lichts .....	110
§ 43. Polarisationsapparat — Turmalinzange .....	113
§ 44. Totale Reflexion .....	116
§ 45. Elliptische Polarisation durch totale Reflexion .....	119
§ 46. Drehung der Polarisationssebene .....	122
§ 47. Breite der Spektrallinien — Interferenzfähigkeit des Lichts ..	125
§ 48. Wellen- und Gruppengeschwindigkeit .....	127
§ 49. Die Lichtgeschwindigkeit in durchsichtigen Körpern .....	130
§ 50. Emanationstheorie und Lichtbrechung .....	135
§ 51. Die Korpuskulartheorie des Lichts und die Relativitätstheorie	136
 <b>Röntgenstrahlen.</b> 	
§ 52. Bremsstrahlung, charakteristische, Sekundärstrahlung — Polari- sation — Brechung — $\gamma$ -Strahlen .....	137
§ 53. Laues Beugungsversuch .....	139
§ 54. Braggs Spektrometer .....	142
§ 55. Das Kristallgitter des Steinsalzes .....	144
Register .....	146

### Lehrbücher zur Optik und Röntgenstrahlung.

- C. Christiansen, Elemente der theoretischen Physik. 4. Aufl. Leipzig 1921.
- Försterling, Lehrbuch der Optik. Leipzig 1928.
- A. Haas, Einführung in die theoretische Physik. 3. u. 4. Aufl. Berlin und Leipzig 1923/24.
- v. Helmholtz, Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts. Hamburg und Leipzig 1914.
- J.C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Berlin 1883.

# Optik oder die Lehre vom Licht.

---

## § 1. Geradlinige Fortpflanzung des Lichts — Beleuchtung — Photometrie.

In der Lehre vom Licht, der Optik, behandeln wir die außerhalb unseres Auges liegenden Ursachen der Lichterscheinungen. Wie wir bei den Schallerscheinungen (Bd. II) als die Ursache des Schalls einen schwingenden Körper annahmen, der seine Bewegungen auf die Luft überträgt, die sie dann an unser Ohr abgibt, so müssen wir die Ursache der Lichts ebenfalls in Bewegungszuständen der kleinsten Teilchen eines Körpers suchen. Damit diese Bewegung fortgepflanzt werden kann, ist es aber nötig, die Voraussetzung zu machen, daß der ganze Raum mit einem sehr feinen Stoff, dem sogenannten Lichtäther, angefüllt ist, den wir als Träger des Lichts ansehen. Durch die Vermittlung des Äthers gelangt das Licht in unser Auge und bewirkt die Gesichtsempfindungen.

Aus dieser Auffassungsweise, die nicht notwendig, die wir aber der einfachen Darstellung halber wählen, ergibt sich sofort, daß sich das Licht ebenso wie der Schall, wenn das Fortpflanzungsmedium überall gleichartig beschaffen ist, wegen der allseitigen Symmetrie nur geradlinig fortpflanzen kann, wie es ja auch die Erfahrung bestätigt.

Sendet eine Lichtquelle beständig dieselbe Lichtsorte aus, so wird eine Fläche, die von den Lichtwellen getroffen wird, für das Auge immer gleich beleuchtet erscheinen. Die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit des Körpers in einer Sekunde empfängt, können wir die Beleuchtungsstärke

nennen. Ist die Lichtquelle punktförmig, so wird jede Kugelfläche, welche wir um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt schlagen, gleichviel Licht empfangen. Daraus geht ohne weiteres hervor, daß die Beleuchtungsstärke verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des beleuchteten Körpers von der Lichtquelle sein muß.

Aber es ist auch nicht gleichgültig, ob das Licht senkrecht oder schief die Oberfläche des beleuchteten Körpers trifft. Nennen wir den Winkel der Flächennormale mit dem auffallenden Lichtstrahl  $\alpha$ , so ist leicht ersichtlich, daß die Beleuchtungsstärke dem  $\cos \alpha$  proportional ist, da sich ja das Licht auf einen um so kleineren Raum zusammendrängt, je kleiner der Winkel  $\alpha$  ist. Wir können demnach für die Beleuchtungsstärke  $B$  einer ebenen Fläche die Formel

$$B = \frac{C \cos \alpha}{r^2}$$

aufstellen, wenn  $r$  die Entfernung der Lichtquelle von der beleuchteten Fläche ist.

Die Größe  $C$  hängt nur von der Natur der Lichtquelle ab. Hierfür lehrt nun die Erfahrung, daß auch die Menge des ausgesandten Lichts dem Kosinus des Winkels  $\beta$  proportional ist, welchen der ausgesandte Strahl mit der Normalen jenes Flächenstücks einschließt, von wo er seinen Ausgang nimmt. Die Beleuchtungsstärke wird sich daher durch folgende Gleichung darstellen lassen:

$$B = \frac{L \cos \alpha \cos \beta}{r^2},$$

wobei wir  $L$  die Lichtstärke der Flächeneinheit des leuchtenden Körpers nennen können.

Als Lichteinheit, Einheit der Lichtstärke dient meist das Hefnerlicht (Kerzenstärke), eine Amylaze-

tatlampe von 40 mm Flammenhöhe. Die Einheit für die Beleuchtungsstärke ist die Meterkerze (Lux), d. i. die Beleuchtung, die ein Schirm von den senkrecht auffallenden Strahlen der Lichteinheit in der Entfernung von 1 m erfährt.

Durch die Wahl der Entfernung der Lichtquelle und der Neigung des auffallenden Lichts ist es leicht, eine Beleuchtung von bestimmter Stärke herzustellen. Es beruht darauf die Vergleichung der Intensitäten verschiedener Lichtquellen, die Photometrie.

## § 2. Reflexionsgesetze ebener Spiegel.

Einen sehr dünnen Lichtkegel nennt man ein Strahlenbündel. Denken wir uns den Lichtkegel unendlich dünn, so haben wir einen Lichtstrahl. Es ist vorteilhaft, diese Begriffe zur bequemen Darstellung des Gangs des Lichts einzuführen.

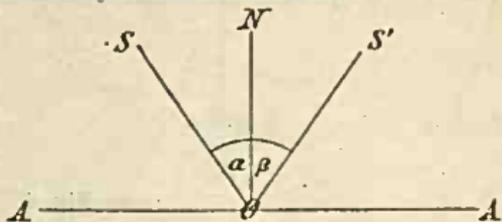


Fig. 1.

Trifft ein Lichtstrahl auf eine glatte Fläche, so wird er nach bestimmten Gesetzen, den Reflexionsgesetzen, zurückgeworfen. Es sei  $AA$  (Fig. 1) eine Ebene. Im Punkt  $O$  treffe ein Lichtstrahl  $SO$  auf. Wir nennen ihn den einfallenden Strahl,  $O$  den Einfallspunkt. Im Einfallspunkt errichten wir die Normale  $ON$  zur Ebene  $AA$ . Sie heißt das Einfallslot. Der Winkel zwischen einfallendem Strahl und Einfallslot sei  $\alpha$ , es ist der Einfallswinkel. Der Reflexionswinkel  $\beta$  ist der Winkel zwischen dem Einfallslot und dem reflektierten Strahl  $OS'$ .

Es gelten nun für die Reflexion folgende Gesetze:

1. Einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

2. Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel,

$$\alpha = \beta.$$

Treffen demnach von einem leuchtenden Punkt  $S$  (Fig. 2) Strahlen auf eine glatte ebene Fläche  $AB$ , so werden sie so zurückgeworfen, daß sie nach rückwärts verlängert sich alle im Punkt  $S'$  vereinigen würden. Für ein beobachtendes Auge scheinen demnach die reflektierten Strahlen aus dem Punkt  $S'$  zu kommen, es ist  $S'$  ein Bild von  $S$ .  $AB$  ist also

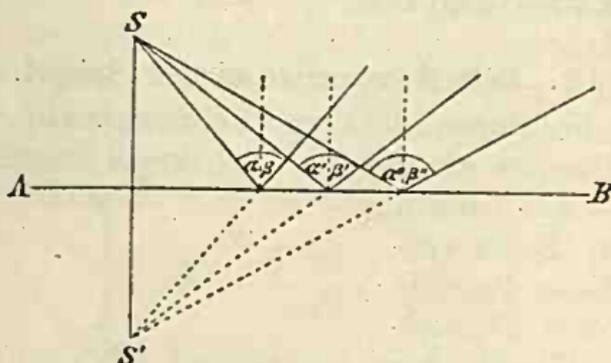


Fig. 2.

eine spiegelnde Fläche, ein ebener Spiegel. Ein solcher entwirft Bilder, welche dieselbe Größe wie der Gegenstand haben und zu ihm symmetrisch liegen. Die Spiegelfläche bildet dabei die Symmetrieebene.

### § 3. Kugelspiegel — Gegenstands- und Bildweite — Brennpunkt.

Der leuchtende Punkt  $S$  (Fig. 3) sende Strahlen auf eine polierte Kugelfläche  $KK'$ . Den Strahl  $SA$ , der durch den Mittelpunkt  $O$  der Kugel geht, nennen wir den Hauptstrahl. Jedes Lot auf die Spiegelfläche geht durch  $O$ . Es ist daher  $OM$  das Einfallslot für den Strahl  $SM$ . Der reflektierte Strahl  $MB$  schneidet den Hauptstrahl in  $B$ . Dort

muß ein Bild des Punktes  $S$  entstehen, da alle Strahlen, welche in einem Kreis um  $A$  herum auftreffen, sich im Punkt  $B$  vereinigen. In  $B$  ist demnach wiederum die Ausgangsstelle von unendlich vielen Strahlen.

Wir wollen den Einfallswinkel  $\lambda$  bzw.  $\mu$  mit den gewohnten Buchstaben  $\alpha$  bzw.  $\beta$  bezeichnen. Ferner seien die Winkel

$$ASM = \lambda, \quad AOM = \mu, \quad ABM = \nu$$

und die Strecken

$$AS = a, \quad AB = b, \quad AO = OM = r.$$

$a$  nennen wir die Gegenstandsweite,  $b$  die Bildweite.  $r$  ist der Radius der Kugel. Es gelten nun folgende Beziehungen:

$$\alpha = \mu - \lambda,$$

$$\beta = \nu - \mu,$$

folglich nach dem Reflexionsgesetz:

$$\alpha = \beta = \mu - \lambda = \nu - \mu,$$

daher

$$(1) \quad \lambda + \nu = 2\mu.$$

Wir setzen voraus, daß  $M$  nahe bei  $A$  liege, daß also die Winkel  $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu$  klein seien. Wir haben dann

$$AM = a\lambda = r\mu = b\nu$$

und nach Gleichung (1)

$$\frac{AM}{a} + \frac{AM}{b} = \frac{2AM}{r}$$

oder

$$(2) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}.$$

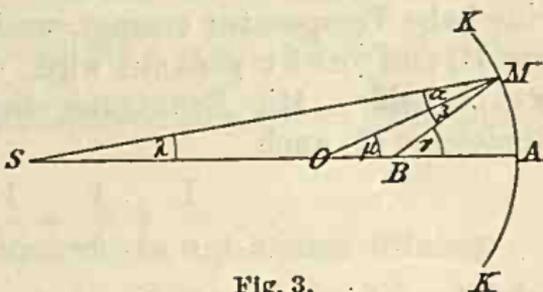


Fig. 3.

Diese Gleichung drückt die Beziehung zwischen Gegenstands- und Bildweite aus.

Kommen die Strahlen aus dem Unendlichen, d. h. fallen auf unsern Spiegel parallele Strahlen, so wird für  $a = \infty$   $b = \frac{r}{2}$ . Als parallele Strahlen können wir die Sonnenstrahlen auffassen. Da diese gleichzeitig wärmen, so wird im Punkt

$$p = \frac{r}{2}$$

eine hohe Temperatur erzeugt, weshalb dieser Punkt auch der Brennpunkt genannt wird, während  $p$  die Brennweite heißt. Mit Benutzung dieser Größe können wir Gleichung (2) auch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$$

schreiben. Liegt der leuchtende Punkt im Mittelpunkt der Kugelfläche, so wird  $a = r$ , mithin auch  $b = r$ . Gegenstand und Bild fallen zusammen. Für  $a < r$  ist  $b > r$ , und es wird  $b = \infty$  für  $a = p$ . Befindet sich also eine Lichtquelle im Brennpunkt, so sendet der Spiegel parallele Strahlen aus. Eine solche Anordnung eignet sich dazu, das Licht auf weite Strecken hinauszusenden, ohne daß es sich erheblich zerstreut, wie es bei den großen elektrischen Scheinwerfern geschieht.

Wird  $a$  noch kleiner als  $\frac{r}{2}$ , so muß  $b$  negativ werden, das heißt: es liegt der Bildpunkt hinter dem Spiegel. Die Strahlen vereinigen sich nicht wirklich, sondern nur scheinbar. Wir haben kein reelles Bild mehr, sondern ein imaginäres, virtuelles, ähnlich wie wir es bereits beim ebenen Spiegel kennengelernt haben. Wir können übrigens

ohne weiteres vom Kugelspiegel zum ebenen übergehen, wenn wir  $r = \infty$  setzen. Es wird dann  $b$  negativ und ebenso groß wie  $a$ , in Übereinstimmung mit dem Resultat des § 2.

Liegt der Kugelmittelpunkt wie bisher auf der Seite des Gegenstands, so nennen wir den Spiegel einen Hohlspiegel, einen konkaven Spiegel, im entgegengesetzten Fall hingegen einen erhabenen oder Konvexspiegel. Dafür haben wir  $r$  also negativ zu wählen. Es ist daher auch die Bildweite negativ, das Bild liegt hinter dem Spiegel, d. h. es ist nur scheinbar vorhanden, ein virtuelles Bild. Die

größte Bildweite ist  $b = \frac{r}{2}$  für  $a = \infty$ . Sie ist also gleich der Brennweite eines Hohlspiegels vom selben Krümmungsradius.

§ 4. Bilder von Kugelspiegeln mit kleiner Öffnung.

Wir denken uns eine leuchtende Linie  $ST$  (Fig. 4). Der Punkt  $S$  hat sein Bild in  $B$ .  $O$  sei für  $SA$  ein Drehpunkt. Es werde eine Drehung um einen sehr kleinen Winkel in

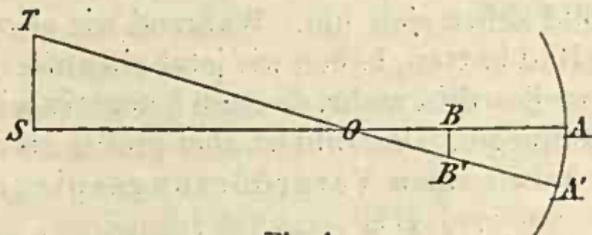


Fig. 4.

der Zeichenebene vollführt. Es kommt dann  $S$  nach  $T$ ,  $B$  nach  $B'$ , wobei wir bei genügend kleinem Drehungswinkel  $ST$  und  $BB'$  als zu  $SA$  senkrecht stehende Gerade ansehen können. Wir erhalten ein verkehrtes Bild  $BB'$  des Gegenstands  $ST$ . Das Verhältnis der Bildgröße  $BB'$  zur Gegen-

standsgröße  $ST$  können wir nun leicht finden, da ja

$$\frac{BB'}{ST} = \frac{OB}{OS} = \frac{r-b}{a-r}$$

ist. Nach Gleichung (2) haben wir

$$b = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}} = \frac{ar}{2a-r},$$

folglich

$$\frac{BB'}{ST} = \frac{r - \frac{ar}{2a-r}}{a-r} = \frac{r}{2a-r}.$$

Das Bild wird also je nach der Wahl der Gegenstandsweite sehr verschieden ausfallen.

Für einen unendlich weiten Gegenstand ist es unendlich klein. Es wächst mit der Annäherung des Gegenstands. Wird  $a = r$ , so ist Bild und Gegenstand gleich groß. Für  $a < r$  ist das Bild größer als der Gegenstand. Es wird unendlich groß und rückt in unendliche Entfernung, d. h. es verschwindet für  $a = \frac{r}{2}$ . Wird  $a < \frac{r}{2}$ , so wird  $\frac{BB'}{ST}$  negativ, das Bild kehrt sich um. Während wir also früher ein verkehrtes Bild hatten, haben wir jetzt ein aufrechtes. Aber es ist kein reelles Bild mehr, da auch  $b$  negativ wird, es liegt hinter dem Spiegel. Das Bild ist aber größer als der Gegenstand, wir haben einen Vergrößerungsspiegel. Setzen wir  $r = \infty$ , so wird  $\frac{BB'}{ST} = -1$ , wir haben wieder den Fall des ebenen Spiegels, für welchen Gegenstand und Bild sowie Gegenstandsweite und Bildweite gleich groß sind.

Wird  $r$  negativ, so liefert unsere Formel die Bildgröße in einem erhabenen Spiegel. Das Bild steht aufrecht und ist immer kleiner als der Gegenstand.

§ 5. Brechungsgesetz — Brechungsexponent —  
geometrische Optik — Katoptrik — Dioptrik.

Fällt ein Lichtstrahl auf einen durchsichtigen Körper von glatter Oberfläche, so dringt er in den Körper ein, wird aber dabei im allgemeinen von seinem Wege abgelenkt, er wird gebrochen. Nennen wir analog dem Vorgang bei Spiegeln  $SO$  (Fig. 5) den einfallenden Strahl, welcher im Einfallspunkt  $O$  die Oberfläche  $AB$  des durchsichtigen Körpers trifft,  $OS'$  den gebrochenen Strahl,  $\alpha$  den Einfallswinkel,  $\beta$  den Brechungswinkel, während  $CD$  das Einfallslot ist, so gelten folgende Gesetze:

1. Einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl liegen in einer Ebene.

2. Das Verhältnis der Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels ist eine konstante Größe, also

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Die Konstante  $n$  nennen wir den Brechungsquotienten oder Brechungsexponenten.

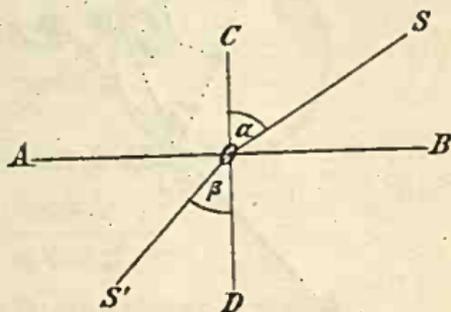


Fig. 5.

3. Nimmt das Licht seinen Ausgang auf der entgegengesetzten Seite und in entgegengesetzter Richtung, so macht es genau denselben Weg. Das heißt: wird der Strahl  $SO$  nach  $S'$  gebrochen, so wird ein Strahl  $S'O$  nach  $S$  abgelenkt.

Die Lehre vom Strahlengang bei Vorhandensein reflektierender und brechender Flächen nennt man die geometrische Optik. Diese teilt man wieder in die Katoptrik und Dioptrik ein, je nachdem man es mit reflektierenden oder mit brechenden Flächen zu tun hat.

### § 6. Dispersion des Lichts — Der Regenbogen.

Bekanntlich hängt der Wert des Brechungsexponenten nicht nur von der Natur der brechenden Substanz, sondern auch von der Art des Lichts ab. Er ist für verschiedene Farben verschieden. In der Regel nehmen die Brechungsexponenten mit der Farbe in folgender Reihenfolge zu: rot, orange, gelb, grün, blau, violett. Es wird daher jeder Lichtstrahl, der durch Brechung eine Ablenkung erleidet, gleichzeitig in seine Farben zerlegt, eine Erscheinung, der man den Namen Farbenzer-

streuung oder Dispersion des Lichts gegeben hat. Eine teilweise hierhergehörige Erscheinung ist der Regenbogen, welchen wir im folgenden näher untersuchen wollen.

Der Kreis (Fig. 6) stelle einen Regentropfen dar. Ein Sonnenstrahl  $SA$  treffe in  $A$  unter dem Einfallswinkel  $\alpha$  den Tropfen. Er wird nach  $B$  gebrochen, wo er teilweise nach  $C$  reflektiert, teilweise nach  $B'$  gebrochen wird. In  $C$  erleidet er wieder eine teilweise Brechung nach  $R$  und Reflexion usw. Der Strahl  $BB'$  erfährt die Ablenkung

$$D_1 = 2\alpha - 2\beta,$$

der Strahl  $CR$  die Ablenkung

$$D_2 = 2\alpha - 2\beta + \pi - 2\beta,$$

da die Ablenkung in  $B$ , wie aus der Zeichnung leicht zu ersehen,  $\pi - 2\beta$  ist. Überhaupt wächst bei jeder Reflexion

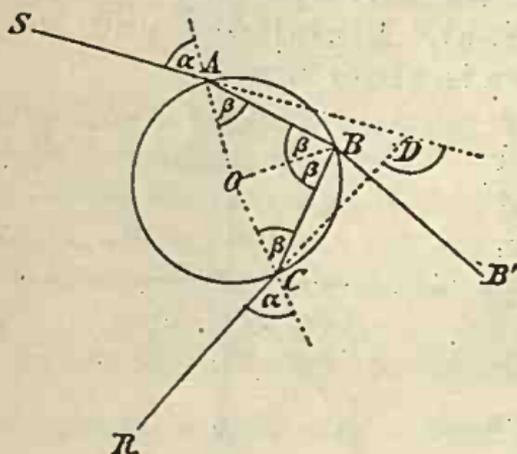


Fig. 6.

im Innern des Tropfens die Ablenkung um  $\pi - 2\beta$ , so daß ein Strahl, der nach  $k$ -maliger Reflexion wieder austritt, die Deviation

$D = 2\alpha - 2\beta + k(\pi - 2\beta) = 2\alpha - 2(k+1)\beta + k\pi$  erfährt.

Je stärker ein Sonnenstrahl gebrochen wird, desto mehr werden auch seine Farben zerstreut. Wir werden daher das intensivste Licht im Minimum der Ablenkung haben. Wir wollen deshalb den Einfallswinkel fürs Ablenkungsminimum suchen. Wir haben dafür die Gleichung

$$(3) \quad \frac{dD}{d\alpha} = 2 - 2(k+1) \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Differenzieren wir die Gleichung

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

so erhalten wir

$$\cos \alpha \, d\alpha = n \cos \beta \, d\beta,$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta}.$$

Dieser Wert, in Gleichung (3) eingesetzt, ergibt

$$\frac{dD}{d\alpha} = 2 - 2(k+1) \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta} = 0,$$

was wir noch folgendermaßen umformen können:

$$n \cos \beta = (k+1) \cos \alpha.$$

Diese Gleichung quadriert, ergibt

$$n^2 - n^2 \sin^2 \beta = (k+1)^2 - (k+1)^2 \sin^2 \alpha$$

und wegen  $\sin \alpha = n \sin \beta$

$$[(k+1)^2 - 1] \sin^2 \alpha = (k+1)^2 - n^2,$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{(k+1)^2 - 1}}.$$

Setzen wir  $k = 0$ , so wird  $\sin \alpha$  imaginär, hat also für uns keine Bedeutung. Für  $k = 1, 2, 3 \dots$  liegt der Wurzel-  
ausdruck für Wasser jedoch zwischen 0 und 1, da  $n$  für  
Wasser nahezu  $\frac{4}{3}$  ist. Wir werden demnach eine Reihe  
von Regenbogen erhalten, deren lichtstärkster der erste  
für  $k = 1$  sein wird, da der Lichtstrahl um so mehr ge-  
schwächt wird, je öfter die Reflexionen stattfinden.

Wir fragen nun nach der Form des Regenbogens  
und wollen uns in unserer Untersuchung auf den ersten, den  
Hauptregenbogen beschränken, da sie für die weiteren,  
die Nebenregenbogen, ganz analog durchgeführt werden  
kann. Zu bemerken ist höchstens, daß für die einzelnen

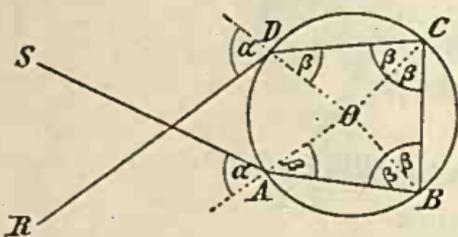


Fig. 7.

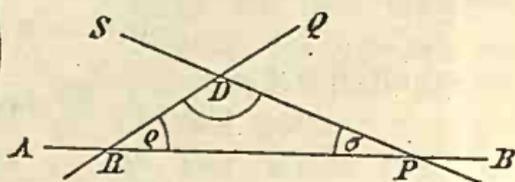


Fig. 8.

Regenbogen der das Ablenkungsminimum liefernde Sonnen-  
strahl auch auf der unteren Seite des Regentropfens (Fig. 7)  
auffallen kann.

Ist  $AB$  (Fig. 8) die Erdoberfläche, und bildet der  
Sonnenstrahl  $SP$  mit ihr den Winkel  $\sigma$ , der gebrochene  
Strahl jedoch den Winkel  $\rho$ , so ist bei einer einmaligen  
Reflexion  $D$  die Deviation, und es muß

$$D + \rho + \sigma = \pi$$

sein. Da aber

$$D = 2\alpha - 4\beta + \pi,$$

so ist

$$\rho + \sigma = \pi - D = 4\beta - 2\alpha.$$

Setzen wir  $\sigma = 0$ , d. h. steht die Sonne im Horizont, oder

sehen wir davon ab, daß  $AB$  die Erdoberfläche sei, sondern eine zu den Sonnenstrahlen parallele Gerade, so wird um  $AB$  herum alles symmetrisch. Der Regenbogen wird also ein Kreis sein vom Öffnungswinkel  $2(\varrho + \sigma)$ . Den vollständigen Kreis können wir nie sehen, wenn wir auf der horizontalen Erdoberfläche stehen, sondern höchstens einen Halbkreis bei Sonnenauf- oder Sonnenuntergang. Etwas anderes ist es jedoch auf einer hohen Bergesspitze oder vom Luftballon aus, wo der vollständige Kreis beobachtet wurde. Die Möglichkeit dazu ist auch vorhanden, wenn nicht die Sonne direkt, sondern ihr Spiegelbild in einem ruhigen Gewässer den Regenbogen erzeugt. Die Winkelsumme  $\varrho + \sigma$  beträgt ungefähr 42 Grad.

Bilden wir den Ausdruck

$$\frac{d\varrho}{dn} = - \frac{dD}{dn},$$

so erhalten wir die Reihenfolge der Farben. Wir haben nun

$$\frac{dD}{dn} = 2 \frac{d\alpha}{dn} - 4 \frac{d\beta}{dn} = 2 \frac{d\alpha}{dn} - 4 \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dn} - 4 \frac{\partial \beta}{\partial n},$$

indem wir  $\beta$  als abhängige Veränderliche von  $\alpha$  und  $n$  einführen. Von früher her kennen wir als Bedingung des Deviationsminimums

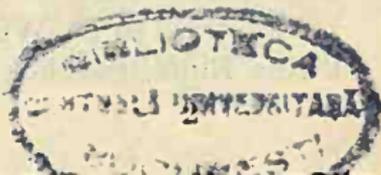
$$2 - 4 \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 0,$$

daher wird

$$\frac{dD}{dn} = - 4 \frac{\partial \beta}{\partial n}.$$

Den Differentialquotienten  $\frac{\partial \beta}{\partial n}$  gewinnen wir aus der Gleichung

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n},$$



welche differenziert

$$\cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial n} = - \frac{\sin \alpha}{n^2}$$

ergibt. Demnach ist

$$\frac{d\rho}{dn} = - \frac{dD}{dn} = - \frac{4 \sin \alpha}{n^2 \cos \beta}.$$

Der Differentialquotient  $\frac{d\rho}{dn}$  ist negativ, d. h. mit wachsendem  $n$  nimmt  $\rho$  ab. Es wird also die rote Farbe den äußersten Rand des Regenbogens bilden, gegen die Mitte zu folgen dann die übrigen Farben.

Die hier gegebene Theorie trifft streng nur für verhältnismäßig große kugelförmige Regentropfen zu, indem die Entstehung der Farben von der Tropfengröße nicht unabhängig ist, was jedoch an dieser Stelle nicht näher erörtert werden kann. Daß die Farben nicht bloß durch Lichtbrechung entstehen, hat zur Folge, daß der Regenbogen nicht aus dem gewöhnlich genannten siebenfarbigen Band besteht, sondern wir können bei manchem Regenbogen eine ganz andere Farbenfolge beobachten.

### § 7. Abbildung eines Punktes durch eine brechende Kugelfläche — Brennpunkte — Brennweiten.

$KK'$  (Fig. 9) sei eine brechende Kugelfläche. Es ist dies der Fall, wenn sich links von ihr etwa Luft, rechts Glas befindet. Der Strahl  $SA$ , welcher gegen den Krümmungsmittelpunkt  $O$  der Kugelfläche gerichtet ist, wird nicht gebrochen, da er mit dem Einfallslot zusammenfällt. Wir nennen ihn den Hauptstrahl. Ein Strahl  $SM$  wird nach dem Gesetz  $\sin \alpha = n \sin \beta$  gebrochen und schneidet den Hauptstrahl in  $B$ . Wir wollen unsere Untersuchung nur auf kleine Einfallswinkel ausdehnen, können dann den Sinus

mit dem Bogen vertauschen und für das Brechungsgesetz schreiben

$$\alpha = n \beta.$$

Wir haben nun

$$\alpha = \varphi + \psi, \quad \beta = \psi - \chi,$$

mithin

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi + \psi = n\psi - n\chi, \\ \varphi + n\chi = (n-1)\psi. \end{cases}$$

Die verschiedenen Winkel können wir folgendermaßen darstellen:

$$\varphi = \frac{MA}{SA}, \quad \psi = \frac{MA}{OA}, \quad \chi = \frac{MA}{BA}.$$

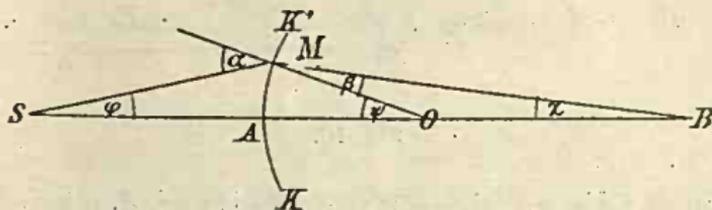


Fig. 9.

Wir setzen ferner

$$SA = a, \quad OA = r, \quad BA = b$$

und nennen  $a$  die Gegenstandsweite,  $r$  den Krümmungsradius,  $b$  die Bildweite. Wir erhalten dann aus Gleichung (4) ohne weiteres

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r}.$$

Es vereinigen sich also in der Tat alle Strahlen, welche von  $S$  ausgehen, in  $B$ . Wir haben hier ein reelles Bild.

Lassen wir  $S$  ins Unendliche rücken, d. h. setzen wir  $a = \infty$  oder, was dasselbe bedeutet, lassen wir parallele Strahlen auffallen, so vereinigen sie sich in einem Punkt,

den wir  $F_1$  (Fig. 10) nennen wollen. Es ist der hintere Brennpunkt und

$$F = b = \frac{n r}{n - 1}$$

die hintere Brennweite. Lassen wir  $S$  näher rücken, so wird  $b$  größer und wir erreichen schließlich einen Punkt  $f_1$ , für welchen  $b$  unendlich wird. Die Gegenstandsweite ist dann

$$f = a = \frac{r}{n - 1}.$$

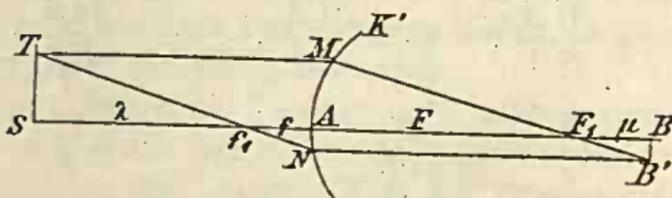


Fig. 10.

Wir nennen  $f$  die vordere Brennweite,  $f_1$  den vorderen Brennpunkt. Die beiden Brennweiten stehen also in der Beziehung

$$F = n f.$$

Wird nun  $a$  noch kleiner, so wird  $b$  negativ, d. h. die Strahlen vereinigen sich nicht mehr, wohl aber ihre rückwärtigen Verlängerungen in einem Punkt, welcher vor der Kugelfläche liegt. Wir erhalten ein imaginäres Bild.

Lassen wir  $r$  unendlich werden, so erhalten wir eine ebene brechende Fläche. Es wird dann

$$b = - n a.$$

Wird  $r$  negativ, haben wir also den Krümmungsmittelpunkt  $O$  links von der brechenden Fläche, so wird auch die Brennweite negativ. Es vereinigen sich dann die Strahlen nur virtuell. Wir erhalten kein reelles Bild mehr.

## § 8. Bildgröße.

Gleicherweise wie der Punkt  $S$  (Fig. 10) in  $B$ , bildet sich  $T$  in  $B'$  ab. Wir erhalten von dem Gegenstand  $ST$  das verkehrte Bild  $BB'$ , dessen Größe wir leicht finden können. Wir wollen die Bezeichnungen

$$Sf_1 = \lambda, \quad F_1B = \mu$$

einführen und haben dann

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{ST}{AN} = \frac{\lambda}{f},$$

aber auch

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{AM}{BB'} = \frac{F}{\mu}.$$

Rückt also der Gegenstand aus dem Unendlichen bis in die vordere Brennweite, so wächst das Bild von der Größe Null bis zur Größe Unendlich. Es ist reell und umgekehrt. Rückt der Gegenstand noch näher, so wird  $\lambda$  negativ, wir erhalten ein aufrechtes vergrößertes virtuelles Bild. Für eine konkave brechende Fläche wird  $r$  negativ. Es wird dann auch  $f$  und gleicherweise  $F$  negativ und für alle Fälle  $\lambda > f$ . Wir haben also dann immer ein virtuelles aufrechtes verkleinertes Bild.

## § 9. System zweier brechender Kugelflächen — Linsen.

Kugelflächen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, nennt man zentriert. Zwei brechende Kugelflächen,  $A$  und  $A'$  (Fig. 11), sind demnach immer zentriert. Das Bild  $B$  des Punktes  $S$ , welches die erste brechende Fläche entwirft, wird für die zweite brechende Fläche zum leuchtenden Punkt und sie entwirft davon ein Bild in  $B'$ .

Für die brechende Fläche  $A$  gilt nun die Gleichung (§ 7)

$$(5) \quad \frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r},$$

für die zweite  $A'$

$$\frac{1}{a'} + \frac{n'}{b'} = \frac{n'-1}{r'}.$$

Ist nun das Medium rechts von  $A'$  gleich jenem links von  $A$ , so ist  $n' = \frac{1}{n}$ . Ferner ist

$$a' = AA' - AB = e - b,$$

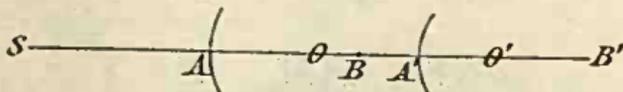


Fig. 11.

wenn  $e$  die Entfernung der beiden Kugelflächen ist. Danach wird die Gleichung für den Strahlengang in der zweiten Fläche

$$\frac{n}{e-b} + \frac{1}{b'} = -\frac{n-1}{r'}.$$

Wir nehmen noch an,  $e$  sei so klein, daß wir es gegenüber den andern vorhandenen Größen vernachlässigen können. Wir haben dann eine dünne Linse vor uns. Unsere letzte Gleichung wird jetzt

$$-\frac{n}{b} + \frac{1}{b'} = -\frac{n-1}{r'},$$

was zur Gleichung (5) addiert

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = (n-1) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

ergibt. Es ist dies die sogenannte Linsenformel.

Ist  $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$  positiv, so haben wir eine Sammellinse, im entgegengesetzten Fall eine Zerstreuungslinse. Im ersten Fall vereinigen sich parallel auffallende Strahlen, für welche  $a = \infty$  ist, in der Entfernung  $p$  hinter der Linse nach der Gleichung

$$\frac{1}{p} = (n - 1) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right),$$

und es ist  $p$  die Brennweite der Linse, weshalb wir die Linsenformel auch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{p}$$

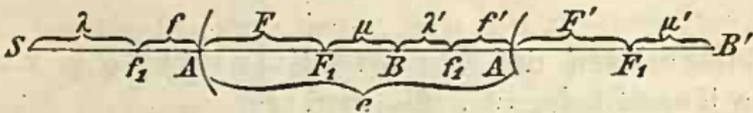


Fig. 12.

schreiben können. Diese Gleichung hat dieselbe Form wie jene für den Kugelspiegel (§ 3), weshalb wir uns hier ihre weitere Diskussion ersparen können.

Im vorhergehenden Paragraphen fanden wir für das Verhältnis des Gegenstands zum Bild die Gleichung

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{\lambda}{f} = \frac{F'}{\mu}.$$

Es gilt demnach für eine brechende Fläche die Beziehung

$$(6) \quad \lambda \mu = f F',$$

welche wir auch auf mehrere brechende Flächen ausdehnen können. Für die beiden Kugelflächen A und A' (Fig. 12) haben wir also die Gleichung (6) nebst der zweiten

$$(7) \quad \lambda' \mu' = f' F',$$

wenn wir das Bild  $B$  zum Gegenstand für die zweite brechende Fläche werden lassen. Die Entfernung beider Flächen ist also

$$(8) \quad e = F + \mu + \lambda' + f'.$$

Wir finden den vorderen Brennpunkt des Systems, wenn nach der zweiten Brechung die Strahlen parallel laufen, also  $\mu' = \infty$  wird. Dann muß nach Gleichung (7)  $\lambda' = 0$  werden, während aus Gleichung (8)

$$\mu = e - F - f'$$

und aus Gleichung (6)

$$\lambda = \frac{fF}{e - F - f'}$$

folgt.

Wir rechnen die vordere Brennweite  $\varphi$  von der ersten Kugelfläche aus. Sie wird also

$$\varphi = \lambda + f = \frac{fF}{e - F - f'} + f = f \frac{e - f'}{e - F - f'}.$$

Und in ganz derselben Weise finden wir für die hintere Brennweite unseres Systems

$$\Phi = F' \frac{e - F}{e - F - f'},$$

wobei diese Brennweite von der hinteren Linsenfläche aus gezählt ist.

Wir wollen als ein Beispiel für die gewonnenen Gleichungen die plankonvexe Linse behandeln. Der Krümmungsradius der vorderen Fläche sei  $r$ , für die hintere Fläche ist er demnach  $\infty$ . Wir haben dann (§ 7)

$$f = \frac{r}{n - 1}, \quad F = \frac{nr}{n - 1}, \quad f' = F' = \infty,$$

daher

$$\varphi = f \frac{e - f'}{e - F - f'} = f \cdot \frac{-f'}{-f'} = f,$$

da ja  $e$  und  $F$  gegen  $\infty$  wegfällt. Ferner haben wir

$$\Phi = F' \frac{e - F}{e - F - f'} = n' f' \frac{e - F}{-f'} = \frac{F - e}{n} = f - \frac{e}{n} = \varphi - \frac{e}{n}.$$

Die hintere Brennweite ist also um  $\frac{e}{n}$  kleiner als die vordere.

### § 10. Hauptebenen — Hauptpunkte.

Analog wie für zwei lassen sich die Brennweiten eines Systems von drei, vier usw. brechenden Kugelflächen bestimmen, vorausgesetzt, daß sie ein zentriertes System bilden, d. h. daß die Mittelpunkte der Kugelflächen alle in einer Geraden liegen. Nicht so einfach wie bei einer unendlich dünnen Linse ist aber jetzt die Konstruktion der Bilder. Zu dem Zweck führen wir den Begriff der zwei Hauptebenen ein. Diese haben die Eigenschaft, daß jeder Strahl, welcher durch die erste geht, in derselben Höhe auch die zweite passiert. Wir sehen wegen der allseitigen Symmetrie sofort ein, daß diese beiden Ebenen senkrecht auf dem Hauptstrahl stehen müssen. Ihre Schnittpunkte mit ihm nennen wir die Hauptpunkte.

Wir haben also zwei Ebenen von der Eigenschaft zu suchen, daß der Gegenstand in der einen kongruent dem Bild in der andern ist. Wir verfolgen dabei wieder die Methode, die gestellte Aufgabe erst für zwei brechende Flächen zu lösen, da ja die Rechnung für mehrere Flächen nach demselben Schema vor sich geht. Wir haben nach dem vorhergehenden Paragraphen für das Verhältnis des Gegen-

standes  $G$  zum Bild  $B$  bei der ersten Brechung

$$\frac{G}{B} = \frac{\lambda}{f} = \frac{F}{\mu},$$

für die zweite

$$\frac{G'}{B'} = \frac{\lambda'}{f'} = \frac{F'}{\mu'}.$$

Nun ist aber der Gegenstand bei der zweiten Brechung das von der ersten Brechung gelieferte Bild, also

$$G' = B,$$

folglich, wenn wir die obigen Gleichungen miteinander multiplizieren,

$$\frac{G}{B'} = \frac{\lambda \lambda'}{f f'} = \frac{F F'}{\mu \mu'}.$$

Da das Bild sich bei jeder Brechung umkehrt, so ist das zweite wieder aufrecht. Soll es daher mit dem Gegenstand kongruent sein, so muß Gegenstand und Bild im Verhältnis Eins stehen. Wir haben also

$$(9) \quad \frac{\lambda \lambda'}{f f'} = \frac{F F'}{\mu \mu'} = 1.$$

Aus Gleichung (8) ergibt sich

$$(10) \quad \mu + \lambda' = e - F - f' = \delta.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $\lambda$ , so erhalten wir mit Zuziehung der Gleichungen (6) und (9)

$$fF + ff' = \delta \lambda,$$

$$\lambda = \frac{fF + ff'}{\delta}.$$

Ganz analog ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung (10) mit  $\lambda'$

chung (10) mit  $\mu'$

$$FF' + f'F' = \delta\mu',$$

$$\mu' = \frac{FF' + f'F'}{\delta}.$$

Damit ist die Lage der beiden Hauptebenen bestimmt, doch ist es bequemer, ihren Abstand von der ersten bzw. zweiten brechenden Fläche zu wissen. Für die erste Hauptebene ist er

$$h = \lambda + f = f \left( \frac{F + f'}{\delta} + 1 \right) = \frac{f}{\delta} (F + f' + e - F - f') = \frac{ef}{\delta}.$$

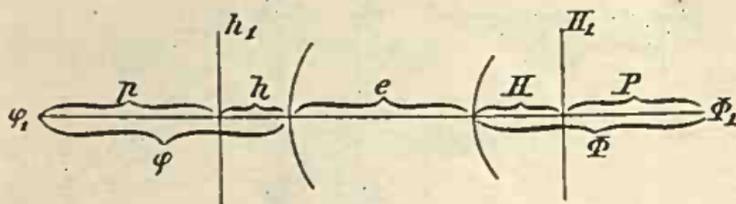


Fig. 13.

Für den Abstand der zweiten Hauptebene von der zweiten brechenden Fläche findet sich gleicherweise

$$H = \frac{eF'}{\delta}.$$

Es ist noch angezeigt, die Brennweiten von den Hauptpunkten an zu zählen. Wir haben dann (Fig. 13) die vordere Brennweite

$$p = \varphi - h = f \frac{e - f'}{\delta} - h = -\frac{ff'}{\delta},$$

für die hintere

$$P = \Phi - H = F' \frac{e - F}{\delta} - H = -\frac{FF'}{\delta}.$$

Da nun

$$F = nf, \quad F' = n'f',$$

so

$$P = -\frac{nn'ff'}{\delta} = nn'p.$$

Ist links und rechts vom optischen System dasselbe Medium, so  $n' = \frac{1}{n}$ , folglich

$$P = p.$$

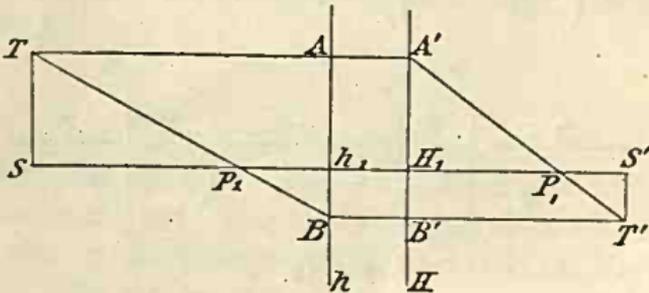


Fig. 14.

Die Konstruktion des Bildes ist nun sehr einfach. Wir errichten in den beiden Hauptpunkten  $h_1$  und  $H_1$  (Fig. 14) die beiden senkrechten Ebenen  $h$  und  $H$ . Ein Strahl, welcher parallel zum Hauptstrahl von  $T$  ausgeht und die erste Hauptebene in  $A$  trifft, muß in gleicher Höhe bei  $A'$  die zweite Hauptebene verlassen und dann durch den hinteren Brennpunkt  $P_1$  gehen. Ein Strahl, welcher durch den vorderen Brennpunkt  $p_1$  geht und in  $B$  die erste Hauptebene trifft, verläßt ebenfalls in gleicher Höhe in  $B'$  die zweite Hauptebene und geht dann parallel zum Hauptstrahl weiter. In  $T'$  schneiden sich beide Strahlen; es ist dort das Bild des Punktes  $T$ .

## § 11. Bikonvexe Linse.

Die beiden brechenden Flächen einer bikonvexen Linse sollen denselben Krümmungsradius haben. Es gilt also die Beziehung

$$f' = F = n f.$$

Die Lage der ersten Hauptebene ist daher gegeben durch

$$h = \frac{e f}{e - F - f'} = \frac{e f}{e - 2n f}.$$

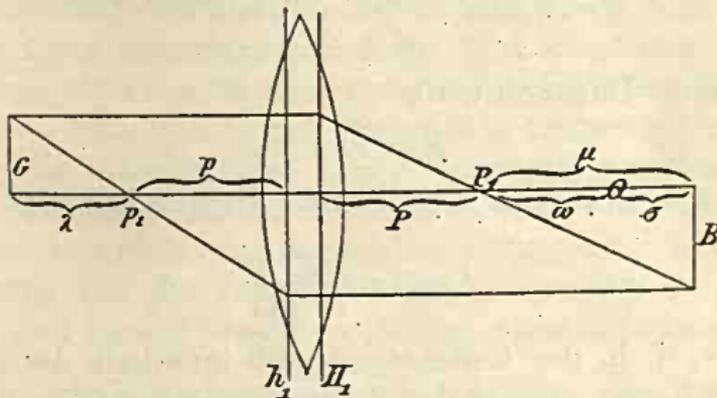


Fig. 15.

Ist die Linse nicht sehr dick, so können wir  $e$  gegen  $2n f$  vernachlässigen und erhalten

$$h = -\frac{e}{2n} = -\frac{e}{3},$$

wenn wir, wie es bei Glas ungefähr zutrifft,  $n = \frac{3}{2}$  setzen.

$h$  ist negativ, d. h. es liegt die erste Hauptebene  $h_1$  (Fig. 15) hinter der Linsenfläche, symmetrisch dazu die zweite Hauptebene  $H_2$ . Die beiden Brennweiten  $p$  und  $P$  sind einander gleich. Für das Verhältnis des Gegenstands zum Bild haben wir daher

$$\frac{G}{B} = \frac{\lambda}{p} = \frac{p}{\mu},$$

woraus folgt:

$$\lambda \mu = p^2.$$

Wir versetzen nun unser Auge in den Punkt  $O$ , welcher die Strecke  $\mu$  so teilt, daß

$$\mu = \omega + \sigma.$$

Wir wollen die Linse als Lupe benutzen. Die Entfernung des Bildes vom Auge muß also in der deutlichen Sehweite  $s$  und negativ sein. Wir haben demnach

$$\sigma = -s$$

zu setzen. Darnach wird

$$\mu = \omega - s,$$

wobei  $s > \omega$ ,  $\mu$  also negativ ist. Desgleichen wird

$$\lambda = -\frac{p^2}{s - \omega}$$

negativ, d. h. der Gegenstand muß innerhalb der Brennweite  $p$  liegen. Unter der Vergrößerung verstehen wir das Verhältnis des Bildes zum Gegenstand

$$V = \frac{B}{G} = \frac{p}{\lambda}.$$

In unserem gegebenen Fall wird somit

$$V = -\frac{s - \omega}{p}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß wir ein aufrechtes Bild erhalten. Je weiter wir das Auge von der Linse entfernen, desto größer wird  $\omega$ , desto kleiner das Bild. Denken wir uns das Auge in der zweiten Hauptebene, so  $\omega = -p$  und

$$V = -\frac{s + p}{p} = -\left(\frac{s}{p} + 1\right),$$

was die gewöhnlich in Verwendung kommende Vergrößerungsformel ist.

Für die Lage der Hauptebenen einer bikonkaven Linse erhalten wir dieselben Formeln wie für die bikonvexe, die Brennweiten werden jedoch negativ, ihre Größe sei  $-p$ . Der vordere Brennpunkt  $p_1$  liegt daher rechts, der hintere  $p_2$  links von der Linse, wenn wir wie bisher die Strahlen des Gegenstands von links kommend annehmen. Ein reeller Gegenstand muß daher immer links von der Linse liegen. Wir können uns aber auch vorstellen, daß durch eine Sammellinse von einem Gegenstand ein Bild entworfen wird, das bei ungestörtem Strahlengang rechts von der bikonkaven Linse zu liegen käme. Dieses Bild können wir ebenfalls für die Bikonkavlinse zum Gegenstand machen, der aber in Wirklichkeit nicht zustande kommt. Wir können von einem imaginären Gegenstand sprechen. Ist seine Entfernung von der Linse zwischen  $p$  und  $2p$ , so ist  $\lambda$  negativ und seinem absoluten Betrag nach kleiner als  $p$ . Daher ist das Verhältnis  $\frac{B}{G}$  größer als Eins, die Lage des Bildes ist aber links von der Linse. Dieser Vorgang findet beim Galileischen Fernrohr statt.

### § 12. Huygenssches Prinzip.

Wir haben das Licht nach Huygens' Theorie als Wellenbewegung aufgefaßt, wobei wir vorerst über die Natur der Wellen keine weiteren Annahmen zu machen brauchen. Von Huygens rührt folgendes Prinzip her: Einen jeden Punkt einer Welle kann man als einen Erregungspunkt neuer Wellen betrachten. Die gemeinschaftliche Umhüllende dieser Wellen, der Elementarwellen, stellt die wirkliche Welle, die Hauptwelle, dar. Denken wir uns z. B. eine

Kugelwelle, welche von einem leuchtenden Punkt ausgeht. Werden alle Punkte der Kugelfläche als Erregungspunkte neuer Wellen aufgefaßt, so entstehen unendlich viele

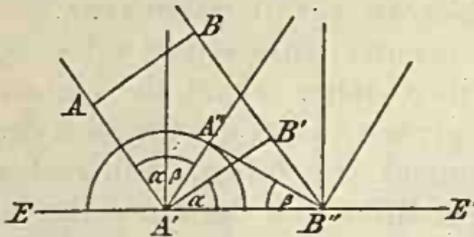


Fig. 16.

ein paralleles Strahlenbündel  $AB$  (Fig. 16) auf die Ebene  $EE'$  unter dem Einfallswinkel  $\alpha$ . Im Punkt  $A'$  entsteht eine Elementarwelle der Planwelle  $A'B'$  und so der Reihe nach in allen Punkten der Strecke  $A'B''$ . Kommt schließlich der Punkt  $B'$  in  $B''$  an, so haben wir als Hauptwelle  $A''B''$ . Da nun

$$A'A'' \perp A''B'', \quad A'B' \perp B'B'', \quad A'A'' = B'B'',$$

so muß auch  $\alpha = \beta$  sein, womit das Reflexionsgesetz als eine Folge der Wellentheorie erscheint.

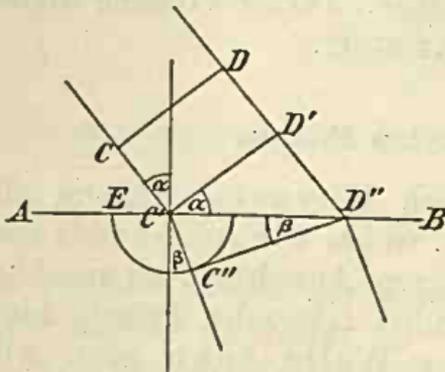


Fig. 17.

Das Brechungsgesetz können wir folgendermaßen erhalten.  $AB$  (Fig. 17) sei die Trennungsebene zweier Medien. Im oberen sei die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , im unteren  $c'$  und es sei  $c > c'$ . Trifft die ebene Welle  $CD$  in  $C'$  auf, so entsteht da eine Elementarwelle mit der

Geschwindigkeit  $c'$ . Dasselbe geschieht der Reihe nach in allen übrigen Punkten der Strecke  $C'D''$ . Während  $C$

nach  $C''$  gelangt, kommt  $D$  nach  $D''$ . Es ist daher  $C'' D''$  die neue Welle. Nun ist

$$\overline{C' D''} \cdot \sin \alpha = D' D'' ,$$

$$\overline{C' D''} \cdot \sin \beta = C' C'' ,$$

folglich

$$\frac{D' D''}{C' C''} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n .$$

Damit ist das Brechungsgesetz abgeleitet, und es zeigt sich, daß der Brechungsexponent nichts anderes als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien ist.

### § 13. Fermats Satz.

Fermat stellte folgendes Prinzip auf: Jeder Lichtstrahl pflanzt sich so fort, daß die zur Zurücklegung des Wegs erforderliche Zeit ein Minimum wird. Auch dieses Prinzip ergibt das Reflexions- und Brechungsgesetz in derselben Form wie das Huygenssche. Soll das Licht vom Punkt  $A$  (Fig. 18) ausgehend von der Fläche  $EF$  in  $B$  nach  $C$  reflektiert werden, so wird die Reflexion so vonstatten gehen, daß die Zeit der Fortpflanzung, folglich auch der Weg  $ABC$  ein Minimum wird. Nach unserer Zeichnung ist

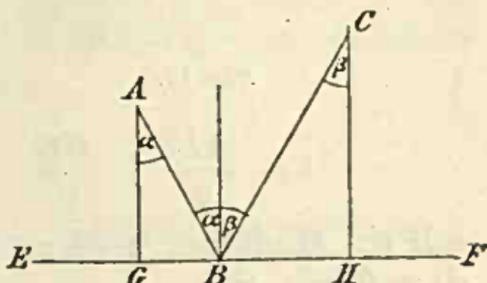


Fig. 18.

$$GH = \overline{AG} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \overline{HC} \cdot \operatorname{tg} \beta ,$$

was durch Differentiation ergibt

$$(11) \quad \frac{\overline{AG} \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha} = - \frac{\overline{HC} \cdot d\beta}{\cos^2 \beta} .$$

Soll der Weg

$$AB + BC = \frac{AG}{\cos \alpha} + \frac{HC}{\cos \beta}$$

ein Minimum werden, so muß sein Differential Null sein. Das ergibt

$$(12) \quad \frac{\overline{AG} \cdot \sin \alpha \, d\alpha}{\cos^2 \alpha} = - \frac{\overline{HC} \cdot \sin \beta \, d\beta}{\cos^2 \beta}$$

Dividieren wir Gleichung (12) durch (11), so resultiert  $\sin \alpha = \sin \beta$  oder  $\alpha = \beta$ . Wir erhalten also in der Tat das Reflexionsgesetz.

Auf ganz demselben Weg ergibt sich auch das Brechungsgesetz.  $ABC$  (Fig. 19) stelle uns den Strahlengang durch die brechende Ebene  $EF$  dar. Oben sei die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , unten  $c'$ . Die Zeit

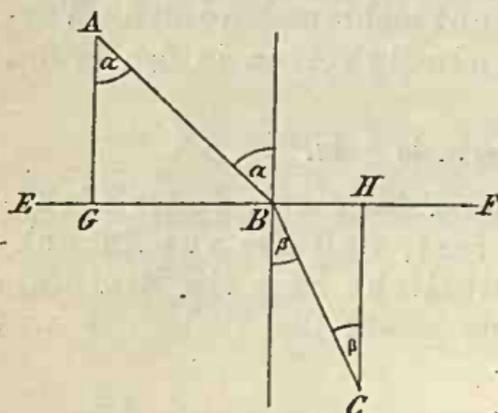


Fig. 19.

$$t = \frac{AB}{c} + \frac{BC}{c'} = \frac{AG}{c \cos \alpha} + \frac{HC}{c' \cos \beta}$$

soll ein Minimum werden, d. h. es muß das Differential  $dt = 0$  sein, was

$$(13) \quad \frac{\overline{AG} \cdot \sin \alpha \, d\alpha}{c \cos^2 \alpha} = - \frac{\overline{HC} \cdot \sin \beta \, d\beta}{c' \cos^2 \beta}$$

ergibt. Ferner folgt wiederum aus dem Differential der konstanten Strecke  $GH$  die Gleichung (11). Gleichung (13) durch (11) dividiert, ergibt sodann nach leichter Reduktion

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n,$$

das Brechungsgesetz. Es stimmen also die Folgerungen aus dem Huygensschen und dem Fermatschen Prinzip vollständig überein.

### § 14. Lichtgeschwindigkeit — Aberration.

Die bekannten Resultate der Astronomie und Experimentalphysik liefern für die Lichtgeschwindigkeit

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec.}$$

Die Bradleysche Methode erhält mit Anwendung der Emanationstheorie, die das Licht als von der Lichtquelle ausgeschleuderte Materie auffaßt, die Lichtgeschwindigkeit aus der Aberration der Fixsterne. Als allgemeingültig für jede Theorie des Lichts, also auch für die Wellentheorie, wollen wir die Aberration aus der Relativitätstheorie ableiten.

Während  $S'$  mit  $S$  (Bd. I, Fig. 15) zusammenfällt, passiere den Punkt  $O$  bzw.  $O'$  eine Lichtwelle, deren Fortpflanzungsrichtung mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  einschließt. Nach der Zeit  $t$  hat sie den Weg  $ct$  mit der Komponente  $x$  zurückgelegt, so daß

$$\cos \varphi = \frac{x}{ct}$$

ist. Analog definieren wir für das gestrichene System

$$\cos \varphi' = \frac{x'}{ct'}$$

Nach den Gleichungen (29 Bd. I) erhalten wir dann

$$\cos \varphi' = \frac{x - vt}{c \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)}$$

Hier haben wir  $v$  als die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn um die Sonne aufzufassen. Dividieren wir Zähler und

Nenner dieses Bruchs durch  $ct$ , so wird

$$\cos \varphi' = \frac{\frac{x}{ct} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{vx}{c^2 t}} = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}.$$

Wir wollen speziell den Fall untersuchen, daß  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , also  $\cos \varphi = 0$  ist. Dann ist  $\cos \varphi' = -\frac{v}{c}$ . Es ist also  $\varphi'$  etwas größer als  $\varphi$ . Wir setzen  $\varphi' = \varphi + \alpha$ , somit  $\cos \varphi' = \cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha$  und für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  wird  $\cos \varphi' = -\sin \alpha$ , also  $\sin \alpha = \frac{v}{c}$ , oder da  $\frac{v}{c}$  eine sehr kleine Zahl sein soll, so können wir

$$\alpha = \frac{v}{c}$$

setzen. Wir nennen diesen Winkel den Aberrationswinkel.

Verfolgen wir die Lichtwellen, bevor sie in  $O$  eintreffen, kommen sie etwa von einem entfernten Stern, so müssen wir, um den Stern in der Fernrohrachse zu sehen, das Fernrohr in der Richtung der Bewegung  $v$  um den kleinen Winkel  $\alpha$  vorausrichten. Bradley, der die Aberration der Fixsterne entdeckte, konnte somit aus der Eigengeschwindigkeit  $v$  der Erde und dem gemessenen Aberrationswinkel  $\alpha$  die Lichtgeschwindigkeit bestimmen.

### § 15. Interferenz.

Nach dem Früheren (§ 1) müssen wir das Licht als eine schwingende Bewegung des Äthers auffassen. Diese Bewegung muß nicht eine mechanische Bewegung der Äther-

teilchen, sondern kann lediglich die Änderung eines bestimmten Zustands des Äthers sein. So faßt die elektromagnetische Lichttheorie (§ 23 ff.) das Licht als eine periodische Änderung des elektromagnetischen Zustands des Äthers auf. Dieser Bewegungszustand pflanzt sich in Wellenform fort und hat die Eigenschaft, daß er nach Verlauf einer halben Wellenlänge gerade entgegengesetzte Bewegungen darstellt. Zwei gleichartige Strahlen, welche um eine halbe Wellenlänge gegeneinander verschoben sind, werden daher gar keine Bewegung im Äther hervorrufen können, da die Kräfte, welche von den beiden Lichtstrahlen ausgeübt werden, gleich und entgegengesetzt sind. Das Licht muß verschwinden. Die beiden Strahlen werden sich aber in ihrer Wirkung unterstützen, wenn sie ohne Phasenverschiebung zusammen treffen. Wir haben hier also ganz analoge Vorgänge wie bei der Interferenz des Schalls (Bd. II, § 8) und belegen sie daher auch mit dem Namen „Interferenz des Lichts“.

Sollen Lichtstrahlen praktisch zur Interferenz gebracht werden, so müssen sie, abgesehen von Phasenunterschieden, einander völlig gleich sein. Derartige Strahlen — man nennt sie kohärente Strahlen — erhält man nur durch Teilung eines Lichtbündels in zwei oder mehrere, die man, nachdem sie verschiedene Wege zurückgelegt haben, wieder zur Vereinigung bringt.

### § 16. Fresnels Spiegelversuch.

Strahlen, welche mit Phasenunterschied in einem Punkt ankommen sollen, müssen ihren Weg in verschiedenen Zeiten zurücklegen. Dies ermöglicht eine Anordnung von Spiegeln, welche von Fresnel, dem hervorragendsten Pfadfinder auf dem Gebiet der Optik, gefunden wurde. Zwei

ebene Spiegel  $AB$  und  $AC$  (Fig. 20) stoßen unter einem sehr spitzigen Winkel  $\varphi$  in  $A$  zusammen. Der leuchtende Punkt  $L$  liege so, daß  $AL$  mit der Spiegelfläche  $AB$  den Winkel  $\alpha$

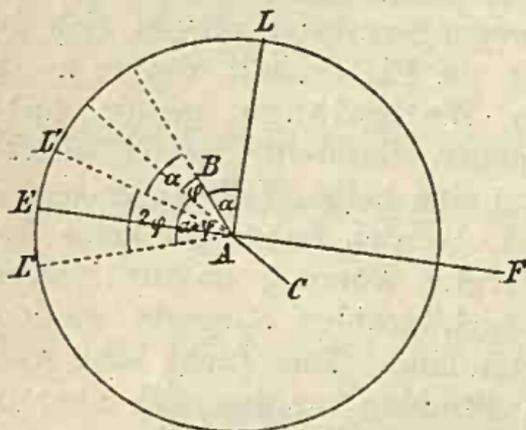


Fig. 20.

den beiden Bildern  $L'$  und  $L''$  ausgehen, werden daher Interferenzerscheinungen liefern, welche zu  $EF$  symmetrisch liegen.

Wir stellen in  $F$  (Fig. 21) einen Schirm auf und fragen

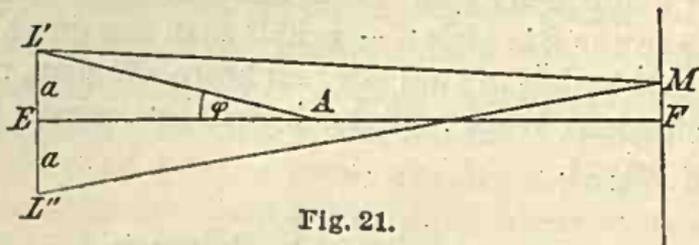


Fig. 21.

nun, welche Lichterscheinungen sich in einem beliebigen Punkt  $M$  zeigen werden. Wir wollen die Strecken

$$L'L'' = 2a, \quad EF = b, \quad FM = y$$

setzen. Es handelt sich also darum, den Zeitunterschied,

oder was hier dasselbe ist, den Wegunterschied, der beiden Strahlen  $L'M$  und  $L''M$  kennen zu lernen. Wir haben

$$\overline{L''M}^2 = b^2 + (a + y)^2,$$

$$\overline{L'M}^2 = b^2 + (a - y)^2,$$

daher

$$\overline{L''M}^2 - \overline{L'M}^2 = (L''M - L'M)(L''M + L'M) = 4ay.$$

Wir können nun mit sehr kleiner Vernachlässigung

$$L''M + L'M = 2b$$

setzen und erhalten so

$$L''M - L'M = \frac{2ay}{b}.$$

Haben wir Licht von der Wellenlänge  $\lambda$ , so wird für alle  $y$ , wo der Gangunterschied der beiden Strahlen

$\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \dots$  ist, Dunkelheit eintreten, da sich dort beide Strahlen infolge der Interferenz auslöschen. Es ist dies also für

$$(14) \quad y = \pm \frac{(2k + 1)b\lambda}{4a}$$

der Fall, wenn  $k = 0, 1, 2 \dots$  ist.

In Wirklichkeit steht uns ein mathematischer Lichtpunkt nicht zur Verfügung, sondern wir müssen eine schmale Spalte  $LL_1$  (Fig. 22) anwenden, durch welche wir das Licht eintreten lassen. Die Folge davon ist, daß die beiden Spiegelbilder ebenfalls eine gewisse Ausdehnung haben, so daß die Bilder des Punktes  $L$  die Gerade  $AF$ , hingegen die Bilder von  $L_1$  die Gerade  $AF_1$  zur Symmetrielinie

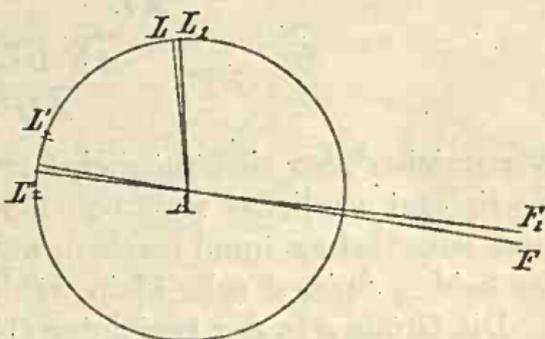


Fig. 22.

haben. Es kann daher vorkommen, daß auf eine dunkle Stelle des Schirms, die von  $L$  herrührt, gerade eine lichte, durch  $L_1$  erzeugt, zu fallen kommt, so daß wir keine Interferenzstreifen wahrnehmen können. Es darf somit die Spalte  $LL_1$  eine gewisse Breite nicht übersteigen. Unsere Aufgabe läuft darauf hinaus,  $FF_1$  möglichst klein zu machen. Es ist  $FF_1 = \overline{AF} \cdot \beta$ , wenn wir den  $\sphericalangle LAL_1 = \beta$ , setzen.

Wir haben somit  $\beta = \frac{LL_1}{AL}$ , folglich

$$FF_1 = \frac{\overline{AF} \cdot \overline{LL_1}}{AL}.$$

Wir erzielen also eine möglichst gute Wirkung, wenn wir die Spiegel tunlichst weit von der Spalte aufstellen und diese selbst sehr schmal machen, während wir den Winkel  $\varphi$  der beiden Spiegel sehr klein wählen.

Die Größe  $a$  in der Gleichung (14) ist durch den Winkel der beiden Spiegel und ihre Entfernung vom Lichtpunkt gegeben. Da wir  $b$  und  $y$  ebenfalls messen können, so haben wir in Fresnels Spiegelversuch ein Mittel, die Wellenlänge  $\lambda$  des Lichts und sodann aus der bekannten Lichtgeschwindigkeit die Schwingungszahl zu bestimmen.

### § 17. Beugung des Lichts.

Fresnel machte vom Huygensschen Prinzip folgende Anwendung. Er sagt: Von allen Punkten einer Kugelwelle (Fig. 23) gelangt Licht nach dem Punkt  $B$ . Derselbe erscheint aber nur deshalb nicht heller, als würde er von einem geraden Strahl von  $O$  aus getroffen, weil die Strahlen  $MB$ ,  $M'B$  usw. verschiedene Wege zurücklegen, sich infolgedessen durch Interferenz gegenseitig auslöschen.

Wir denken uns auf der Kugel durch  $M$  einen Kreis gezogen, indem wir die Kugel einfach um  $OB$  rotieren lassen.

Die Fläche der Kugelkalotte zwischen  $A$  und  $M$  ist dann

$$F = 2\pi a^2 (1 - \cos \varphi).$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \overline{BM}^2 &= a^2 + (a + b)^2 - 2a(a + b) \cos \varphi \\ &= b^2 + 2a(a + b)(1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

folglich

$$1 - \cos \varphi = \frac{\overline{BM}^2 - b^2}{2a(a + b)}.$$

Wir erhalten sonach

$$F = \frac{\pi a}{a + b} (\overline{BM}^2 - b^2)$$

und analog

$$F' = \frac{\pi a}{a + b} (\overline{BM}'^2 - b^2)$$

usw. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} F' - F = f &= \frac{\pi a}{a + b} (\overline{BM}'^2 - \overline{BM}^2), \\ f' &= \frac{\pi a}{a + b} (\overline{BM}''^2 - \overline{BM}'^2) \end{aligned}$$

usf. Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß  $BM' - BM = BM'' - BM' = BM''' - BM'' = \dots = p$  ist. Dann wird

$$\begin{aligned} f &= \frac{\pi a p}{a + b} (BM' + BM), \\ f' &= \frac{\pi a p}{a + b} (BM'' + BM'), \\ f'' &= \frac{\pi a p}{a + b} (BM''' + BM''). \end{aligned}$$

.....

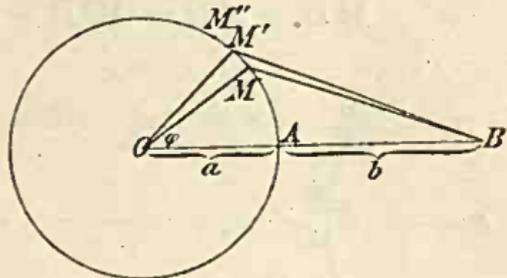


Fig. 23.

Daraus folgt nun

$$f - 2f' + f'' = 0.$$

Die Fläche einer jeden derartigen Kugelzone ist also gleich der halben Flächensumme der beiden benachbarten Zonen, oder es wird vom Punkt  $O$  aus durch jede Zone gerade halb so viel Licht gehen als durch ihre beiden Nachbarzonen zusammen.

Wählen wir nun die Punkte  $M, M', \dots$  so, daß

$$MB - AB = M'B - MB = \dots = \frac{\lambda}{2},$$

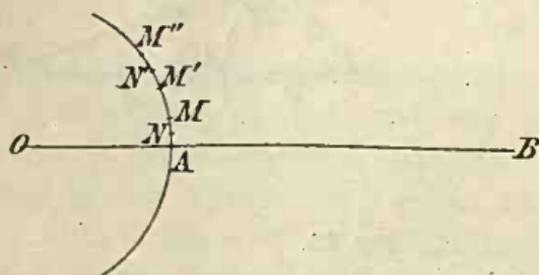


Fig. 24.

so wird sämtliches Licht, welches durch  $MM'$  (Fig. 24) geht, durch jenes, welches bei  $MN$  und  $M'N'$  passiert, aufgehoben; und so geht es über die ganze Kugelfläche fort.

Also nur jenes Licht, welches durch den kleinen Kreis  $AN$  geht, wird in  $B$  nicht vernichtet.

Der Punkt  $B$  wird also bei voller Beleuchtung nicht heller erscheinen, als wenn wir in  $A$  einen Schirm mit einer Öffnung vom Radius  $AN$  anbringen. Vergrößern wir jetzt die Öffnung, so wird  $B$  noch heller werden. Die Helligkeit wird jedoch bei weiterer Vergrößerung wieder schwächer, und wir werden die schwächste Beleuchtung haben, wenn die Öffnung den Radius  $AM'$  hat. Dann wird das Licht wieder heller usw. Ebenso können wir aber auch nach  $A$  einen kleinen kreisförmigen Schirm bringen. Hat er den Radius  $AN$ , so wird in  $B$  kein Licht sein; wird er größer, so wird es in  $B$  hell. Bei weiterer Vergrößerung wird  $B$  wieder dunkel usw. Die Lichtstrahlen erleiden also

eine Ablenkung, so oft sie nahe an der Kante eines Schirms vorübergehen. Man nennt diese Erscheinung „Beugung des Lichts“.

### § 18. Beugung durch eine Spalte.

Der Schirm  $OX$  (Fig. 25) besitze eine Spalte  $AA'$ , auf welche unter dem Winkel  $\alpha$  eine Planwelle  $AB$  fällt. Der Schirm sei gleichzeitig die Grenze zweier verschiedener Medien. Im oberen sei die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , im untern  $c'$ . Bei  $P$  haben wir den Schwingungszustand:

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi}{\tau} t,$$

in  $P'$

$$\sigma' = \gamma a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{PM}{c} - \frac{MP'}{c'} \right).$$

Dorthin gelangt das Licht unter dem Winkel  $\beta$  zum Lot, und die gesamte Lichtmenge wird sich darstellen lassen durch

$$dL = \gamma a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{PM}{c} - \frac{MP'}{c'} \right) df,$$

wenn wir unter  $df$  ein Flächenelement der Spalte im Punkt  $M$  verstehen, während  $\gamma$  jener Bruchteil des Lichts ist, der in das untere Medium eindringt. Wir setzen nun  $OM = x$ , also

$$PM = x \sin \alpha, \quad MP' = (p - x) \sin \beta,$$

wobei  $OO' = p$  ist. Ferner sei noch  $df = dx dy$ , dann

$$dL = \gamma a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin \alpha}{c} - \frac{p \sin \beta}{c'} + \frac{x \sin \beta}{c'} \right) dx dy.$$

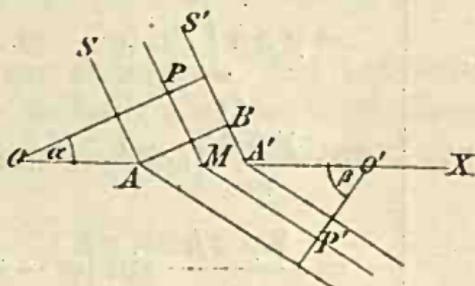


Fig. 25.

Integrieren wir über den ganzen Spalt, so wird aus  $dy$  einfach die Höhe  $h$  des Spalts, und es bleibt uns für die gesamte Lichtmenge  $L$  der Ausdruck

$$(15) \left\{ \begin{aligned} L &= \gamma a h \int_{x_0}^{x_0+b} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin \alpha}{c} - \frac{p \sin \beta}{c'} + \frac{x \sin \beta}{c'} \right) dx \\ &= \gamma a h \int_{x_0}^{x_0+b} \sin (\varphi - m x) dx \\ &= \frac{\gamma a h}{m} [\cos (\varphi - m x_0 - m b) - \cos (\varphi - m x_0)] \\ &= \frac{2 \gamma a h}{m} \sin \left( \varphi - m x_0 - \frac{m b}{2} \right) \sin \frac{m b}{2} \\ &= \gamma a b h \sin \left( \varphi - m x_0 - \frac{m b}{2} \right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}}, \end{aligned} \right.$$

wobei wir

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{p \sin \beta}{c'} \right) = \varphi, \quad \frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{\sin \alpha}{c} - \frac{\sin \beta}{c'} \right) = m$$

gesetzt haben und unter  $b = AA'$  die Breite des Spalts verstehen. Die Amplitude der neuen Lichtbewegung ist also

$$A = \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}}.$$

Sie ist eine periodische Funktion von  $m$ . Ihr Maximum

hat sie für  $m = 0$ . Das ist der Fall, wenn

$$\frac{\sin \alpha}{c} - \frac{\sin \beta}{c'} = 0,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n$$

wird. Das Maximum der Beleuchtung haben wir demnach dort, wohin der Strahl nach dem Brechungsgesetz zu fallen hat.

Für die Folge wollen wir annehmen, daß auf beiden Seiten des Schirms dasselbe Medium, also  $c = c'$  ist. Ferner sollen die Strahlen senkrecht einfallen. Es muß somit  $\alpha = 0$  sein, und wir haben

$$m = - \frac{2 \pi \sin \beta}{\lambda}.$$

Was nun die Lichtintensität für verschiedene  $\beta$  betrifft, so handelt es sich um den Faktor

$$\frac{\sin \frac{b \pi \sin \beta}{\lambda}}{\frac{b \pi \sin \beta}{\lambda}}.$$

Das Licht wird also durch unsere Spalte so gebeugt, daß für  $\beta = 0$  die größte Lichtintensität vorhanden ist. Nach links und rechts nimmt sie sodann ab, bis für

$$\sin \beta = \frac{\lambda}{b}$$

Dunkelheit eintritt. Für größere  $\beta$  haben wir dann wieder Licht, hierauf wieder Dunkelheit usw., doch da der Bogen gegenüber dem Sinus rasch wächst, so nimmt mit wachsendem  $\beta$  auch die Intensität der Maxima bald ab.

§ 19. Beugung durch zwei Spalten — Interferenzversuche von Young und Arago.

Der Schirm  $OO'$  (Fig. 26) besitze zwei parallele Spalten  $AA'$  und  $BB'$  von gleicher Breite  $b$  und gleicher Höhe  $h$ . Der Zwischenraum beider Spalten habe die Breite  $B$ . Das Licht falle unter dem Winkel  $\alpha$  auf, und wir fragen nach der Lichtmenge, welche unter dem Winkel  $\beta$  unterhalb des Schirms austritt. Wir brauchen also für die beiden Spalten

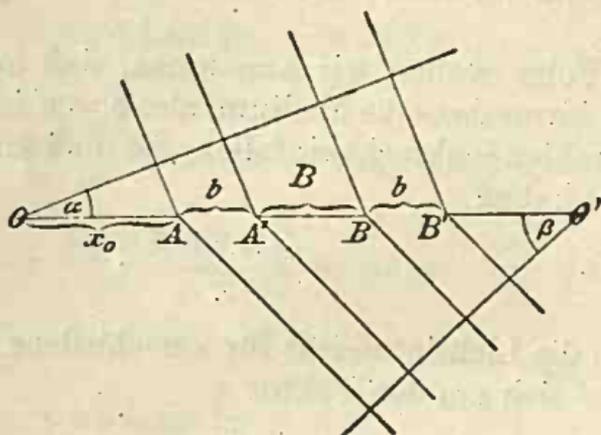


Fig. 26.

bloß die Formel des vorigen Paragraphen anzuwenden und zu addieren. Demnach haben wir für die erste Spalte

$$\sigma = \gamma a b h \sin \left( \varphi - m x_0 - \frac{m b}{2} \right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}},$$

für die zweite

$$\sigma' = \gamma a b h \sin \left( \varphi - m x_0 - m B - m b - \frac{m b}{2} \right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}},$$

indem wir bei der zweiten anstatt  $x_0$  den Wert  $x_0 + B + b$  zu setzen haben. Die Summe beider Lichtmengen ist also

$$\sigma + \sigma' = \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cdot 2 \sin \left( \varphi - m x_0 - \frac{m B + m b}{2} - \frac{m b}{2} \right) \\ \times \cos \frac{m B + m b}{2},$$

für die resultierende Amplitude erhalten wir

$$A = 2 \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cos \frac{m B + m b}{2}.$$

Wiederum sei oben und unten dasselbe Medium und der Einfallswinkel  $\alpha = 0$ , also  $m = -\frac{2\pi \sin \beta}{\lambda}$ . Mit wach-

sendem Winkel  $\beta$  erhalten wir wieder Maxima und Minima

der Beleuchtung. Jene, welche von dem Faktor  $\frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}}$

herrühren, nennt man die Maxima bzw. Minima erster Klasse, jene des Faktors  $\cos \frac{m B + m b}{2}$  die zweiter Klasse. Die Minima zweiter Klasse werden also eintreten für

$$\frac{m B + m b}{2} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \pm \frac{3\pi}{2}, \dots,$$

das ist für

$$\sin \beta = \pm \frac{\lambda}{2(B+b)}, \quad \pm \frac{3\lambda}{2(B+b)}, \dots$$

Man nennt diese Erscheinung „Youngs Interferenzversuch“, welche Arago dahin abgeändert hat, daß er vor die eine Spalte ein dünnes Blättchen gab. Dadurch wird der Strahlengang verzögert, und die Folge ist, daß die Symmetricebene der Erscheinung gegen die Symmetrieebene der beiden Spalten verschoben ist.

### § 20. Fraunhofers Gitter.

Bringen wir auf einem Schirm eine Reihe gleichweit voneinander abstehender Spalten an, so erhalten wir ein Fraunhofersches Gitter. Dieses zeigt Interferenzerscheinungen, welche wir nach derselben Methode wie den Youngschen Versuch im vorhergehenden Paragraphen herleiten können. Das Gitter soll  $n$  Spalten besitzen. Wir haben somit  $n$  Gleichungen von der Form der Gleichung (15) zu addieren, welche sich nur dadurch voneinander unterscheiden, daß wir in der zweiten anstatt  $x_0$  die Größe  $x_0 + B + b$ , in der dritten  $x_0 + 2(B + b)$  usw. zu setzen haben. Ferner führen wir noch die Größen

$$\psi = \varphi - m x_0 - \frac{m b}{2}, \quad \eta = m (B + b)$$

ein und erhalten somit schließlich das Resultat

$$\Sigma = \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \left\{ \sin \psi + \sin (\psi - \eta) + \sin (\psi - 2 \eta) \right. \\ \left. + \dots + \sin [\psi - (n - 1) \eta] \right\}.$$

Die Summierung dieser Reihe geschieht auf folgende Weise:  
Wir setzen

$$S = \sin \psi + \sin (\psi - \eta) + \sin (\psi - 2 \eta) + \dots \\ + \sin [\psi - (n - 1) \eta],$$

$$R = \cos \psi + \cos (\psi - \eta) + \cos (\psi - 2 \eta) + \dots \\ + \cos [\psi - (n - 1) \eta]$$

und bilden

$$\begin{aligned} R + S i &= e^{\psi i} + e^{(\psi - \eta) i} + e^{(\psi - 2 \eta) i} + \dots \\ &+ e^{[\psi - (n - 1) \eta] i} = e^{\psi i} \frac{1 - e^{-n \eta i}}{1 - e^{-\eta i}} \\ &= \frac{e^{\psi i} (1 - e^{-n \eta i}) (1 - e^{\eta i})}{2 (1 - \cos \eta)} \\ &= \frac{e^{\psi i} \cdot e^{-\frac{n \eta i}{2}} \left( e^{\frac{n \eta i}{2}} - e^{-\frac{n \eta i}{2}} \right) e^{\frac{\eta i}{2}} \left( e^{-\frac{\eta i}{2}} - e^{\frac{\eta i}{2}} \right)}{2 (1 - \cos \eta)} \\ &= \frac{e^{\left( \psi - \frac{n \eta}{2} + \frac{\eta}{2} \right) i} \cdot 2 i \sin \frac{n \eta}{2} \cdot -2 i \sin \frac{\eta}{2}}{2 (1 - \cos \eta)}. \end{aligned}$$

Danach erhalten wir

$$S = \sin \left( \psi - \frac{n \eta}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \frac{2 \sin \frac{n \eta}{2} \sin \frac{\eta}{2}}{1 - \cos \eta}.$$

Die Amplitude des resultierenden Lichts wird nun

$$A = \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{n m (B + b)}{2}}{\sin \frac{m (B + b)}{2}}.$$

Es ergeben sich somit wiederum Maxima und Minima erster und zweiter Klasse. Was die Sichtbarkeit anbelangt, so wird die Intensität der Maxima zweiter Klasse um so größer werden, je größer  $n$  ist. Für diese Maxima haben wir nämlich

$$\sin \frac{m(B+b)}{2} = 0,$$

also

$$\frac{m(B+b)}{2} = 0, \quad \pm \pi, \quad \pm 2\pi, \dots$$

Es wird dann

$$\frac{\sin \frac{nm(B+b)}{2}}{\sin \frac{m(B+b)}{2}} = n.$$

Ist demnach  $n$  groß genug, so werden die Maxima erster Klasse gegenüber jenen zweiter ganz verschwinden. Erinnern wir uns, daß  $m = -\frac{2\pi \sin \beta}{\lambda}$  ist, so finden wir ohne weiteres für die Maxima zweiter Klasse

$$\sin \beta = 0, \quad \pm \frac{\lambda}{B+b}, \quad \pm \frac{2\lambda}{B+b}, \dots$$

$n(B+b)$  ist die Gesamtbreite unseres Gitters. Kennen wir daher die Zahl der Linien, so finden wir aus der Breite des Gitters leicht die Größe  $B+b$ . Damit ist uns die Möglichkeit gegeben, die Wellenlänge des Lichts aufs genaueste zu bestimmen. Die Winkel, bei welchen die einzelnen Maxima auftreten, werden um so größer sein, je größer die Zahl der Spalten auf der Längeneinheit des Gitters ist. Ist das Licht eine Mischfarbe, so wird es durch

das Gitter in die einzelnen Farben infolge der verschiedenen Wellenlängen  $\lambda$  zerlegt. Wir erhalten ein Gitterspektrum, den einzelnen Maxima entsprechend Spektren verschiedener Ordnung.

### § 21. Michelsons Versuch.

In der Relativitätstheorie (Bd. I, § 48) erwähnten wir einen Versuch von Michelson, der für die Theorie der Optik in bewegten Körpern grundlegend ist. Wir wollen ihn als rein optische Untersuchung an dieser Stelle behandeln.

Können wir kohärente Strahlen (§15) zur Interferenz bringen, nachdem sie im Raum Wege verschiedener Richtung, etwa senkrecht zueinander, zurückgelegt haben, so muß sich der Ein-

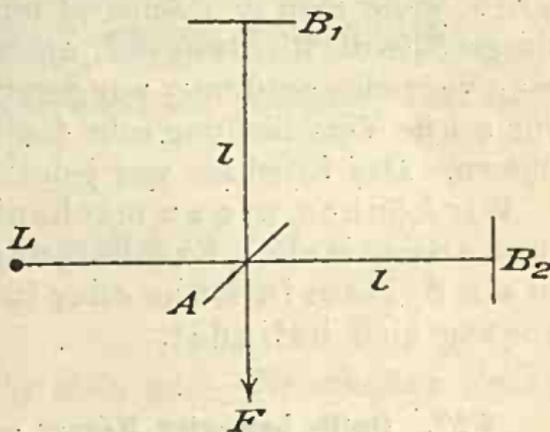


Fig. 27.

fluß der Erdbewegung auf die Lichtgeschwindigkeit, genügende Genauigkeit der Beobachtung vorausgesetzt, nachweisen lassen. Einen solchen Versuch verdanken wir Michelson. Sein Apparat war im Prinzip folgendermaßen eingerichtet. Von einer Lichtquelle (Spalte)  $L$  (Fig. 27) gelangen die Lichtstrahlen unter einem Winkel von  $45^\circ$  auf einen ebenen halbdurchlässigen Spiegel  $A$ . Dort werden sie teilweise reflektiert und treffen den Spiegel  $B_1$ , der sie in sich selbst auf den Spiegel  $A$  zurückwirft, den sie teilweise durchsetzen, worauf sie in der Richtung  $F$  in ein Fernrohr gelangen. Das von  $L$  kommende und bei  $A$  durchgehende Licht kommt erst zum Spiegel  $B_2$ , wird dort

zurückgeworfen, vom Spiegel  $A$  neuerdings teilweise reflektiert und ebenfalls ins Fernrohr  $F$  geleitet. Wir haben zwei kohärente Strahlen, die interferieren und ein Bild, bestehend aus einer Reihe von Interferenzstreifen erzeugen. Eine leicht zu machende Überlegung zeigt nun, daß die Interferenzstreifen nicht dieselbe Lage haben können, wenn wir relativ zum Äther ruhen oder uns etwa in der Richtung zum Spiegel  $B_1$  gegen den Äther bewegen. In letzterem Fall müßte man eine Verschiebung der Interferenzstreifen erhalten, wenn man den Apparat um  $90^\circ$  dreht, so daß der Spiegel  $B_2$  in die Richtung des „Ätherwinds“ käme. Michelsons Versuchsordnung war derart empfindlich, daß man eine solche Verschiebung sehr deutlich hätte wahrnehmen müssen. Das Ergebnis war jedoch ein negatives.

Wir können wie an mechanischen (Bd. II, § 1) so auch an optischen Erscheinungen nicht erkennen, ob ein System in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung sich befindet.

## § 22. Optik bewegter Körper — Fizeaus Versuch.

Die spezielle Relativitätstheorie (Bd. I) hat uns in sehr einfacher Weise die Mittel an die Hand gegeben, viele Erscheinungen darzustellen, die mit der Bewegung der Körper zusammenhängen, an denen sie wahrgenommen werden. Wir sahen dies z. B. bei der Aberration (§ 14). Wir wollen noch einen von Fizeau herrührenden Versuch betrachten.

Fizeau ließ kohärente Lichtstrahlen (§ 15) durch Röhren gehen, die in entgegengesetzter Richtung von Wasser durchströmt wurden. Das Interferenzbild der wieder vereinigten Strahlen erfuhr eine Verschiebung, wenn das Wasser aus der Ruhe in Bewegung übergang. Fizeau erhielt das Resultat, daß sich die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium vom Brechungsexponenten  $n$  darstellen läßt

durch

$$c' = \frac{c}{n} \pm \frac{n^2 - 1}{n^2} v,$$

je nachdem die Bewegung mit der Geschwindigkeit  $v$  in der Richtung des Lichtstrahls oder entgegengesetzt stattfindet.

Diese Formel können wir unmittelbar aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten der speziellen Relativitätstheorie (Bd. I, § 50) gewinnen. Wir haben dann für  $u$  die Geschwindigkeit  $c'$  einzuführen, für  $v$  die Geschwindigkeit des Wassers (des bewegten Systems), für  $v'$  die Größe  $\frac{c}{n}$  (Lichtgeschwindigkeit im Wasser). Das ergibt

$$c' = \frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v c}{c^2 n}} = \frac{c}{n} \left( 1 + \frac{v n}{c} \right) \left( 1 - \frac{v}{c n} \right),$$

da  $\frac{v}{c n}$  gegen Eins sehr klein ist. Wir erhalten weiter

$$c' = \frac{c}{n} \left( 1 + \frac{v n}{c} - \frac{v}{c n} - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Das letzte Glied in der Klammer können wir vernachlässigen und schreiben

$$c' = \frac{c}{n} + \frac{n^2 - 1}{n^2} v,$$

was dem Fizeauschen Ergebnis entspricht.

### § 23. „Französisches“ und „Englisches“ Koordinatensystem.

Unsere bisherigen Betrachtungen gelten für jede Art von Wellenbewegung. Wir brauchten daher über die Natur und Form der Wellen keine weiteren Voraussetzungen zu

machen. Im folgenden sind wir aber dazu genötigt und wollen von der Maxwell'schen Annahme ausgehen, daß die Lichtstrahlen elektromagnetische Strahlen sind (§ 25). Die Gleichungen der Elektrizitätsbewegung in Isolatoren (Bd. III, § 67) beziehen sich auf ein Koordinatensystem, das wir bisher immer angewendet haben. Dieses System ging von Frankreich aus und wurde auf dem Kontinent allgemein üblich. Man pflegt es das „französische“ Koordinatensystem zu nennen. Da aber die von uns abgeleiteten Grund-

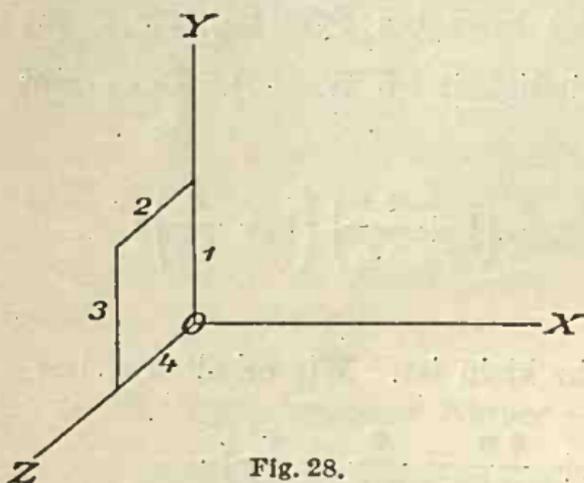


Fig. 28.

gleichungen für die Bewegung der Elektrizität und des Magnetismus in Isolatoren zuerst von J. Cl. Maxwell aufgestellt wurden, so wollen wir, wie es fast allgemein üblich ist, im weiteren auch das von ihm gebrauchte „englische“ Koordinatensystem be-

nutzen. Selbiges unterscheidet sich vom französischen dadurch, daß, wie Fig. 28 zeigt, die  $y$ - mit der  $z$ -Achse vertauscht ist.

Für beide Systeme rechnen wir eine Drehung um die  $x$ -Achse positiv, wenn sie von der positiven  $x$ -Achse betrachtet auf dem kürzesten Weg von der  $y$ - zur  $z$ -Achse geht, wenn sie also beim französischen System im Sinne der Uhrzeigerbewegung, beim englischen entgegengesetzt erfolgt. Dadurch erfolgen beim Übergang von dem französischen zum englischen System sowohl in den Gleichungen (33) und (34) als auch in den Gleichungssystemen (35) und (36) des

III. Bdch. Vorzeichenwechsel, woraus folgende Formen resultieren:

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \text{rot } \mathfrak{H},$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = - \text{rot } \mathfrak{E}.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \end{array} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{array} \right.$$

§ 24. Die Bewegungsgleichungen der Elektrizität und des Magnetismus in ursprünglich neutralen Isolatoren.

Wir wollen die erste der Gleichungen (16) nach der Zeit differenzieren und erhalten so

$$(18) \quad \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial t \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right).$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (17) finden wir

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{c}{\mu} \left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right)$$

und

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{c}{\mu} \left( \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right).$$

Setzen wir diese Ausdrücke in Gleichung (18) ein, so ergibt dies

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{c}{\mu} \left( \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{c}{\mu} \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \right)$$

oder

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \\ \quad - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right). \end{array} \right.$$

Mit Zuhilfenahme der Gleichungen (16) erhalten wir über den Ausdruck  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right)$  näheren Aufschluß. Differenzieren wir dieselben nämlich der Reihe nach nach  $x$  bzw.  $y$  und  $z$  und addieren sie, so erhalten wir

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0.$$

Der Ausdruck  $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$  ist also bezüglich der Zeit konstant. Haben wir somit einen ursprünglich unelektrischen Isolator, in dem erst eine elektrische Bewegung hervorgerufen wird, so ist ursprünglich unser Ausdruck gleich Null und muß immer gleich Null bleiben, so daß wir Gleichung (19) schreiben können

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X,$$

wenn wir mit  $\Delta X$  den Ausdruck  $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$  bezeichnen. In derselben Weise können wir auch die 2. und 3. der Gleichungen (16), sowie die Gleichungen (17) behandeln, so daß wir schließlich folgendes System von sechs Gleichungen erhalten:

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta Y, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta Z. \end{cases} \quad (21) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \Delta \alpha, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \Delta \beta, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \Delta \gamma. \end{cases}$$

### § 25. Die Strahlgleichungen — Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen.

Wir wollen annehmen, daß wir einen elektrischen Zustand haben, der an allen Punkten einer zur  $(y, z)$ -Ebene parallelen Ebene gleich ist und sich auch in gleicher Weise mit der Zeit ändert. Es müssen somit alle Glieder in den Gleichungen (16), (17), (20) und (21), welche Differentialquotienten nach  $y$  und  $z$  sind, Null werden. Desgleichen

wird  $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$ , da ja nach § 24

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

und nach unserer Voraussetzung auch

$$\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$



ist. Ebenso wird  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$ . Auf diese Weise erhalten wir

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial X}{\partial t} = 0, \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x}. \end{cases} \quad (23) \quad \begin{cases} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial x}. \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (25) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß  $\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$ , also auch  $X = 0$  ist, da wir ursprünglich in unserm Isolator keine elektrischen Kräfte annahmen. Elektrische Kräfte können also nur senkrecht zur  $x$ -Achse unseres Koordinatensystems auftreten.

Die Richtung, in welcher die dielektrische Verschiebung vor sich geht, welche ja mit der Richtung der elektrischen Kraft identisch ist, wollen wir mit der Richtung der  $y$ -Achse zusammenfallen lassen. Es wird dann  $Z = 0$ . Von den Gleichungen (22), (23), (24) und (25) bleiben mithin nur

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\partial \gamma}{\partial x}, & \frac{\mu}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, & \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Wir erhalten somit das wichtige Resultat, daß jede elek-

trische Bewegung in einem Isolator von einer magnetischen Bewegung begleitet wird, welche senkrecht dazu steht, und vice versa.

Es läßt sich leicht zeigen, daß jede Funktion von  $x - at$  (Bd. II, §§ 4, 5, 14), welche wir an Stelle des  $Y$  bzw. des  $\gamma$  setzen, eine Lösung unserer Gleichung wird. Wir wollen etwa die elektrische Kraft

$$Y = \varphi(x - at),$$

die magnetische Induktion

$$\gamma = \psi(x - at)$$

setzen, wobei also  $\varphi$  und  $\psi$  ganz willkürliche Funktionen bedeuten sollen. Aus dieser Annahme folgt weiter

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -a\varphi'(x - at), \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\varphi''(x - at),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \varphi'(x - at), \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \varphi''(x - at),$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -a\psi'(x - at), \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2\psi''(x - at),$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \psi'(x - at), \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = \psi''(x - at).$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (26) ein, so erhalten wir

$$-\frac{\varepsilon}{c} a\varphi'(x - at) = -\psi'(x - at),$$

$$-\frac{\mu}{c} a\psi'(x - at) = -\varphi'(x - at),$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} a^2\varphi''(x - at) = \varphi''(x - at),$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} a^2\psi''(x - at) = \psi''(x - at).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt unmittelbar, daß

$$\frac{\varepsilon \mu a^2}{c^2} = 1$$

sein muß. Dasselbe Resultat erhalten wir auch aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, wenn wir die linken und die rechten Seiten miteinander multiplizieren und zu einer neuen Gleichung vereinigen. Demnach ist

$$a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Das ist aber nichts anderes als die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein bestimmter elektromagnetischer Zustand parallel zur  $x$ -Achse fortpflanzt (Bd. II, § 4).

Für den leeren Raum ist  $\varepsilon = \mu = 1$ , folglich

$$a = c.$$

Da aber nach unserer Voraussetzung (Bd. III, § 63)  $c$  die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raum ist, so ist für diesen die Lichtgeschwindigkeit und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen identisch. Ferner haben wir es mit Transversalwellen zu tun, da die elektrischen Kräfte sowohl als auch die magnetischen immer senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung sind.

### § 26. Harmonische elektrische und magnetische Schwingungen — Lichtschwingungen.

Wir wollen die elektrische Kraft einer ebenen Welle immer mit  $E$ , die magnetische mit  $M$  bezeichnen. Wir wissen, daß beide aufeinander senkrecht stehen müssen. Als Fortpflanzungsrichtung wählen wir wiederum die  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Die

Gleichungen (26) gewinnen sonach die Form

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial M}{\partial x}, & \frac{\mu}{c} \frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, & \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Da nun  $E$  sowohl als  $M$  durch jede beliebige Funktion von  $x - at$  genügt wird, wobei  $a$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle ist, so können wir

$$E = E_0 \cos \alpha (x - at)$$

setzen, wobei  $\alpha$  eine willkürliche Konstante bedeutet.

Betrachten wir  $E$  an einer ganz bestimmten Stelle, etwa für  $x = 0$ , so wird

$$E = E_0 \cos (-\alpha at) = E_0 \cos \alpha at.$$

An einer bestimmten Stelle des Raumes haben wir also eine elektrische Kraft, welche eine harmonische Funktion der Zeit ist. Wir haben eine sogenannte elektrische Schwingung. Das ist so zu verstehen, daß wir an einem ganz bestimmten Punkt des Raumes eine dielektrische Polarisation haben, welche von einem Maximalwert  $E_0$  mit fortschreitender Zeit auf Null herabsinkt, sodann negativ wird und bis zum Betrag  $-E_0$  ansteigt. Dann nimmt sie wieder ab, wird Null, positiv und erreicht schließlich den Wert  $E_0$ , wonach sich derselbe Bewegungsvorgang von neuem abspielt. Die Richtung der dielektrischen Verschiebung bleibt, abgesehen vom Vorzeichen, dabei immer dieselbe. Nach Analogie einer mechanischen Schwingung können wir  $E_0$  die Amplitude nennen. Es ist auch ohne weiteres klar, daß die Zeit  $\tau$ , welche zwischen zwei gleichen Zuständen verfließt, durch

$$\alpha a \tau = 2\pi$$

gegeben ist.  $\tau$  ist somit die Schwingungsdauer, und die Konstante  $\alpha$  kann durch  $\frac{2\pi}{a\tau}$  ersetzt werden.

Betrachten wir den elektrischen Zustand während einer bestimmten Zeit, etwa für  $t = 0$  längs der ganzen  $x$ -Achse, so ist die Erscheinung durch

$$E = E_0 \cos \alpha x$$

gegeben. Die elektrische Kraft fängt also mit dem Maximalwert  $E_0$  an, sinkt dann mit wachsendem  $x$  auf 0 herab, wird negativ, erreicht den Wert  $-E_0$ , wird dann wieder kleiner usw. Es wiederholt sich hier im Raum, was wir früher in der Zeit kennen gelernt haben. Die Strecke, welche wir zurücklegen müssen, bis wir wieder denselben Zustand erreichen, nennen wir die Wellenlänge, indem wir wieder, in Analogie zu einer Wasser- oder Schallwelle, die einzelnen Begriffe von dort auf die elektrischen Wellen übertragen. Die Wellenlänge  $\lambda$  ist somit durch

$$\alpha \lambda = 2\pi$$

gegeben. Es kann somit  $\alpha$  nicht nur durch  $\frac{2\pi}{a\tau}$ , sondern auch durch  $\frac{2\pi}{\lambda}$  dargestellt werden, woraus ohne weiteres die bekannten Beziehungen

$$\lambda = a\tau, \quad a = \frac{\lambda}{\tau}$$

folgen. Die elektrische Kraft selbst können wir also folgendermaßen darstellen. Es ist

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos \alpha (x - a t) = E_0 \cos (\alpha x - \alpha a t) \\ &= E_0 \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{\tau} t \right) = E_0 \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist der Ausgangspunkt zur Erklärung der optischen Erscheinungen. Von ganz derselben Gleichung geht auch die Fresnelsche Lichttheorie aus. Nur ist dort die Deutung der Buchstaben eine andere.

Die beiden ersten der Gleichungen (27) zeigen nun einen innigen Zusammenhang zwischen der elektrischen und der magnetischen Welle. Bilden wir

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2\pi}{\tau} E_0 \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right),$$

so folgt aus der ersten dieser Gleichungen

$$\frac{2\pi E_0 \varepsilon}{c \tau} \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) = - \frac{\partial M}{\partial x}$$

oder integriert

$$\begin{aligned} M &= - \frac{2\pi E_0 \varepsilon}{c \tau} \int \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) dx \\ &= - \frac{2\pi E_0 \varepsilon}{c \tau} \left[ - \frac{\lambda}{2\pi} \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) + C \right]. \end{aligned}$$

Die willkürliche Konstante  $C$  wird gleich Null, wenn, wie wir annehmen wollen, ursprünglich keine magnetischen Kräfte vorhanden waren. Dann ist also

$$M = \frac{E_0 \varepsilon \lambda}{c \tau} \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right).$$

Nun können wir aber

$$\frac{E_0 \varepsilon \lambda}{c \tau} = M_0$$

wiederum die Amplitude der magnetischen Schwingung nennen, so daß also ganz analog der elektrischen Welle auch eine magnetische vorhanden ist, welche durch die Gleichung

$$M = M_0 \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

gegeben ist.

Die Schwingungsrichtungen beider Wellen stehen aufeinander senkrecht und außerdem senkrecht auf der gemeinschaftlichen Fortpflanzungsrichtung. Beide Wellen haben genau dieselbe Phase. Während somit die mechanische Lichttheorie mit einer einzigen Schwingungsrichtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung auskommt, braucht die elektromagnetische Lichttheorie deren zwei. Sie scheint also komplizierter zu sein als jene. Dafür umfaßt sie aber auch ein weitaus größeres Gebiet, nämlich neben den rein optischen auch noch analoge elektrische und magnetische Erscheinungen.

### § 27. Linear polarisiertes Licht — Superposition der Wellen — Natürliches Licht.

Den bisher betrachteten Strahlen „elektrischer Kraft“ entspricht in der Optik das sogenannte linear polarisierte Licht. Es gehen die elektrischen Schwingungen parallel zu einer ganz bestimmten Ebene vor sich. Wir wollen sie die Schwingungsebene nennen. Sie ist bestimmt durch die Richtung einer Schwingung und die Fortpflanzungsrichtung der Welle.

Fresnel, welcher die Theorie transversaler Lichtwellen begründete, wählte die Schwingungsebene in der Lage, welche durch die elektrischen Schwingungen bestimmt wird. Wir haben aber auch noch magnetische Schwin-

gungen. Diese finden parallel einer Ebene statt, welche senkrecht zur Ebene der elektrischen Schwingungen liegt. Die Durchschnittslinie beider Ebenen gibt somit die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes an.

Elektrische Kräfte addieren sich nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm, desgleichen die magnetischen Kräfte. Treffen somit mehrere Wellenzüge gleichzeitig auf einen Punkt, so werden sich die einzelnen Kräfte geometrisch addieren, oder, wie man zu sagen pflegt, es gilt das Prinzip der Superposition der Wellen. Es müssen die Wellen somit auch ungestört durcheinander hindurchgehen, gerade so wie es Schallwellen tun.

Denken wir uns nun einen Erreger elektrischer Wellen, welcher imstande ist, nach allen möglichen Richtungen Wellen auszusenden, deren Schwingungsebenen wieder alle möglichen Lagen haben können, so haben wir den Typus einer natürlichen Lichtquelle. Fassen wir, von der Lichtquelle ausgehend, eine bestimmte Richtung ins Auge, so wird damit ein Lichtstrahl fixiert sein, welcher nicht nur eine Schwingungsebene besitzt, sondern eine außerordentlich große Zahl, die sich alle im Lichtstrahl schneiden, untereinander aber alle möglichen Winkel einschließen. Auf diese Weise gehen gewöhnlich die Lichtschwingungen in den Lichtstrahlen vor sich. Man nennt daher derartige Strahlen „natürliches Licht“.

### § 28. Interferenz elektromagnetischer Wellen.

Aus dem Zusammenwirken mehrerer Wellenzüge in einem Punkt gehen jene Erscheinungen hervor, welche man mit dem Namen „Interferenzerscheinungen“ (§15) zu bezeichnen pflegt. Wir wollen speziell zwei Strahlen in Betracht ziehen, welche dieselbe Schwingungsebene besitzen. Die Wirkung des einen sei für einen gegebenen Punkt — wir

wiederum die Amplitude der magnetischen Schwingung nennen, so daß also ganz analog der elektrischen Welle auch eine magnetische vorhanden ist, welche durch die Gleichung

$$M = M_0 \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

gegeben ist.

Die Schwingungsrichtungen beider Wellen stehen aufeinander senkrecht und außerdem senkrecht auf der gemeinschaftlichen Fortpflanzungsrichtung. Beide Wellen haben genau dieselbe Phase. Während somit die mechanische Lichttheorie mit einer einzigen Schwingungsrichtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung auskommt, braucht die elektromagnetische Lichttheorie deren zwei. Sie scheint also komplizierter zu sein als jene. Dafür umfaßt sie aber auch ein weitaus größeres Gebiet, nämlich neben den rein optischen auch noch analoge elektrische und magnetische Erscheinungen.

### § 27. Linear polarisiertes Licht — Superposition der Wellen — Natürliches Licht.

Den bisher betrachteten Strahlen „elektrischer Kraft“ entspricht in der Optik das sogenannte linear polarisierte Licht. Es gehen die elektrischen Schwingungen parallel zu einer ganz bestimmten Ebene vor sich. Wir wollen sie die Schwingungsebene nennen. Sie ist bestimmt durch die Richtung einer Schwingung und die Fortpflanzungsrichtung der Welle.

Fresnel, welcher die Theorie transversaler Lichtwellen begründete, wählte die Schwingungsebene in der Lage, welche durch die elektrischen Schwingungen bestimmt wird. Wir haben aber auch noch magnetische Schwin-

gungen. Diese finden parallel einer Ebene statt, welche senkrecht zur Ebene der elektrischen Schwingungen liegt. Die Durchschnittslinie beider Ebenen gibt somit die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes an.

Elektrische Kräfte addieren sich nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm, desgleichen die magnetischen Kräfte. Treffen somit mehrere Wellenzüge gleichzeitig auf einen Punkt, so werden sich die einzelnen Kräfte geometrisch addieren, oder, wie man zu sagen pflegt, es gilt das Prinzip der Superposition der Wellen. Es müssen die Wellen somit auch ungestört durcheinander hindurchgehen, gerade so wie es Schallwellen tun.

Denken wir uns nun einen Erreger elektrischer Wellen, welcher imstande ist, nach allen möglichen Richtungen Wellen auszusenden, deren Schwingungsebenen wieder alle möglichen Lagen haben können, so haben wir den Typus einer natürlichen Lichtquelle. Fassen wir, von der Lichtquelle ausgehend, eine bestimmte Richtung ins Auge, so wird damit ein Lichtstrahl fixiert sein, welcher nicht nur eine Schwingungsebene besitzt, sondern eine außerordentlich große Zahl, die sich alle im Lichtstrahl schneiden, untereinander aber alle möglichen Winkel einschließen. Auf diese Weise gehen gewöhnlich die Lichtschwingungen in den Lichtstrahlen vor sich. Man nennt daher derartige Strahlen „natürliches Licht“.

### § 28. Interferenz elektromagnetischer Wellen.

Aus dem Zusammenwirken mehrerer Wellenzüge in einem Punkt gehen jene Erscheinungen hervor, welche man mit dem Namen „Interferenzerscheinungen“ (§15) zu bezeichnen pflegt. Wir wollen speziell zwei Strahlen in Betracht ziehen, welche dieselbe Schwingungsebene besitzen. Die Wirkung des einen sei für einen gegebenen Punkt — wir

können etwa wieder den Ursprung eines Koordinatensystems, also  $x = 0$ , annehmen —

$$E = E_0 \cos \frac{2\pi}{\tau} t, \quad M = M_0 \cos \frac{2\pi}{\tau} t.$$

Die des zweiten sei

$$E' = E_0' \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - \delta), \quad M' = M_0' \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - \delta),$$

wobei durch  $\delta$  die Phasenverschiebung zur ersten Schwingung gegeben ist. Ziehen wir vorerst die elektrische Schwingung in Betracht, so können wir genau denselben Weg der Entwicklung einschlagen wie bei der Interferenz der Schallwellen (Bd. II, § 8). Wir erhalten resultierende Wellen von gleicher Wellenlänge (Schwingungszahl), jedoch verschiedener Amplitude und Phase.

Für die Interferenz der magnetischen Wellen gilt natürlich genau dasselbe wie für die elektrischen. Es ist somit die resultierende elektromagnetische Welle ihrer Zusammensetzung nach genau so gebaut wie jede Einzelwelle.

Dieser einfache Fall der Interferenz ist die Ursache einer großen Anzahl optischer Erscheinungen. Wenn wir auch nie zwei einzelne Lichtstrahlen, wie sie hier beschrieben worden sind, isolieren können, so basieren doch alle Interferenzerscheinungen des natürlichen Lichtes auf diesem einfachen Fall. Dieselben kommen nämlich immer so zustande, daß die Wellenfläche, welche ja für jede Schwingung über den ganzen Querschnitt des in Betracht kommenden Lichtbündels erstreckt gedacht werden muß, geteilt wird, so daß zwei Wellenzüge verschiedener Länge gebildet werden, die man sodann zu einem einzigen Zug vereinigt. In diesem neuen Wellenzug finden sich nun, so vielerlei Schwingungsarten von der verschiedensten Dauer und Richtung auch

vorkommen mögen, immer je zwei zusammen, die gleichartig sind und nur durch die Phasendifferenz sich voneinander unterscheiden. Es sind das immer jene, welche durch Teilung aus ein und derselben Welle entstanden sind. Diese zwei zusammengehörigen Wellen bilden aber immer eine neue, deren Intensität so, wie oben auseinandergesetzt wurde, von der jeweiligen Phasenverschiebung abhängt. Derartige interferenzfähige Strahlen nennt man kohärente Strahlen (§ 15).

Benutzen wir weißes natürliches Licht, etwa Sonnenlicht, zur Herstellung der Interferenzerscheinungen, so werden im allgemeinen die verschiedenen Farben des Sonnenlichts verschiedene Phasenverschiebungen erfahren und infolgedessen nach der Interferenz mit relativ verschiedener Amplitude, also auch relativ verschiedener Intensität auftreten. Die Folge davon wird sein, daß gewisse Farben durch ihre Intensität überwiegen und so farbige Erscheinungen hervorrufen, wie sie z. B. bei der Beugung des Lichts (§§ 17—19), beim Fresnelschen Spiegelversuch (§ 16) usw. auftreten.

Die Superposition der Wellen und der Begriff kohärenter Strahlen ist für die Theorie deshalb außerordentlich wichtig, weil sie uns ermöglicht, immer mit der Untersuchung eines einzelnen Wellenzuges auszureichen, um alle Erscheinungen eines so überaus komplizierten Gebildes, wie es ein natürliches Lichtstrahlenbündel darstellt, interpretieren zu können.

### § 29. Elliptisch und zirkular polarisiertes Licht.

Wir denken uns zwei linear polarisierte Lichtstrahlen, deren Schwingungsebenen aufeinander senkrecht stehen. Und zwar sollen die elektrischen Schwingungen des einen Strahles parallel zur  $y$ -Achse, die des andern parallel zur  $z$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems erfolgen.

Der eine ist also gegeben durch die Gleichungen

$$Y = Y_0 \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right),$$

$$\gamma = \gamma_0 \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right),$$

der andere durch

$$Z = Z_0 \cos 2\pi \left( \frac{x + \xi}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right),$$

$$\beta = -\beta_0 \cos 2\pi \left( \frac{x + \xi}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right).$$

Beide Lichtstrahlen sind also parallel zur  $x$ -Achse gerichtet, haben dieselbe Schwingungsdauer  $\tau$ , mithin auch dieselbe Wellenlänge  $\lambda$ . Wir wissen, daß, wenn wir eine elektrische Schwingung parallel zur  $y$ -Achse haben, gleichzeitig eine magnetische parallel zur  $z$ -Achse vorhanden ist. Dementsprechend wurden die Gleichungen für den ersten Strahl gewählt.

Denken wir uns nun den ganzen Vorgang von der  $(x, y)$ -Ebene in die  $(x, z)$ -Ebene übertragen, so erfolgt die elektrische Schwingung parallel zur  $x$ -Achse und die magnetische muß dann parallel zur negativen  $y$ -Achse vor sich gehen. Daher mußten wir beim zweiten Strahle der magnetischen Schwingung das negative Vorzeichen geben. Übrigens ergibt sich die Richtigkeit der oben aufgestellten Gleichungen ohne weiteres durch Einsetzen derselben in die Gleichungen (16) und (17).

Wir haben ferner eine Phasenverschiebung zwischen unseren beiden Strahlen angenommen, derart, daß der zweite Strahl mit seiner zu jener des ersten Strahles gleichen Phase um  $\frac{\xi}{\lambda}$  Wellenlängen zurückliegt, oder, was dasselbe ist, er erreicht im selben Punkt erst um  $\frac{\delta}{\tau}$  Schwingungs-

dauern später dieselbe Phase wie der erste Strahl, wenn wir  $\frac{\delta}{\tau} = \frac{\xi}{\lambda}$  setzen. In der Tat erhalten wir für  $Z$  und  $\beta$  dieselben Gleichungen, wenn wir, anstatt  $x$  um  $\xi$  zu vermehren,  $t$  um  $\delta$  vermindern.

Wenn wir nun einen Querschnitt des Strahlenbündels senkrecht zu seiner Fortpflanzungsrichtung, also parallel zur  $(y, z)$ -Ebene ins Auge fassen, so haben wir zu jeder Zeit daselbst eine elektrische Kraft parallel zur  $y$ -Achse und eine parallel zur  $z$ -Achse, die sich nach dem Kräfteparallelogramm zusammensetzen. Dies ergibt eine elektrische Kraft, die in der  $(y, z)$ -Ebene beständig ihre Größe und Richtung ändert, doch in der Art, daß sie nach Verlauf der Zeit  $\tau$  immer wieder dieselbe Lage und Größe erreicht, also auch eine periodische Bewegung vollführt.

Wir wollen die weitere Untersuchung auf den Fall beschränken, daß  $\xi = \frac{\lambda}{4}$  ist. Wir nehmen also eine Phasenverschiebung von  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge an. Ferner wollen wir als Ebene, in welcher wir die elektrischen Vorgänge betrachten, die  $(y, z)$ -Ebene selbst wählen, da sich in jeder zu ihr parallelen ja dasselbe, nur zu einer anderen Zeit ereignet. Wir werden also in den eingangs aufgestellten Gleichungen  $x=0$  und  $\xi = \frac{\lambda}{4}$  setzen. Es unterscheidet sich somit das Argument des Kosinus für die zweite Schwingung von jenem der

ersten dadurch, daß es um  $\frac{2\pi \cdot \frac{\lambda}{4}}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$  größer ist, so daß also

$$\cos 2\pi \left( \frac{x + \xi}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) = - \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

gesetzt werden kann. Unsere Gleichungen werden somit

$$Y = Y_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau},$$

$$\gamma = \gamma_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau},$$

$$Z = Z_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau},$$

$$\beta = -\beta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Die Gleichungen für die elektrischen Kräfte können wir auch schreiben

$$(28) \quad \frac{Y}{Y_0} = \cos \frac{2\pi t}{\tau}, \quad \frac{Z}{Z_0} = \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Quadrieren und addieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$(29) \quad \frac{Y^2}{Y_0^2} + \frac{Z^2}{Z_0^2} = 1.$$

Falls wir  $Y$  und  $Z$  als Koordinaten eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems auffassen, haben wir hier die Gleichung einer Ellipse, welche besagt, daß der Vektor der elektrischen Kraft im Laufe der Zeit Lagen und Größen annimmt, welche durch Gleichung (29) bestimmt sind.

Wie die einzelnen Lagen der Zeit nach folgen, erkennen wir sofort, wenn wir  $Z$  durch  $Y$  dividieren. Wir erhalten so die Tangente des Winkels  $\varphi$ , welchen der Vektor der elektrischen Kraft mit der  $y$ -Achse einschließt. Es ist somit

$$(30) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Z}{Y} = \frac{Z_0}{Y_0} \operatorname{tg} \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Der Winkel  $\varphi$  wächst also beständig mit der Zeit, aber nicht gleichförmig. Wir haben ein rotierendes elektrisches Feld, das sich aber nicht gleichförmig bewegt. Wir könnten es in der Sprache der Technik ein pulsierendes elektrisches Drehfeld nennen.

Wird

$$Y_0 = Z_0,$$

so wird die Gleichung (29) die Gleichung eines Kreises, die Gleichung (30) ergibt

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{2\pi t}{\tau}.$$

In diesem Fall haben wir ein elektrisches Feld von der Intensität  $Y_0$ , welches mit konstanter Geschwindigkeit rotiert, da der Winkel  $\varphi = \frac{2\pi t}{\tau}$  gleichförmig mit der Zeit wächst. Genau denselben Vorgang befolgen natürlich die magnetischen Kräfte. Wir haben also im letzten Fall ein vollkommenes elektromagnetisches Drehfeld. Licht von derartigen Eigenschaften nennen wir „zirkular polarisiert“. Ist jedoch  $Y_0$  von  $Z_0$  verschieden, so haben wir es mit elliptisch polarisiertem Licht zu tun. Licht von der Schwingungszahl 500 Billionen erzeugt bei der Zirkularpolarisation ein Drehfeld von der Tourenzahl 500 Billionen.

Betrachten wir zu einem bestimmten Zeitpunkt den elektrischen Zustand längs des Lichtstrahles, also etwa zur Zeit  $t = 0$ , so wird

$$Y = Y_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad Z = Z_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Es wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z}{Y} = \frac{Z_0}{Y_0} \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Der Vektor der elektrischen Kraft  $E$  beschreibt also mit fortschreitender Abszisse eine Art Schraubenlinie, deren Projektion auf die  $(y, z)$ -Ebene eine Ellipse ist. Betrachten wir von der positiven  $x$ -Achse aus den vorwärtsschreitenden Vektor, so dreht er sich im Sinne der Uhrzeigerbewegung, also entgegengesetzt der Drehung, die der Vektor in der  $(y, z)$ -Ebene mit fortschreitender Zeit macht. Ist wieder  $Y_0 = Z_0$ , so erhalten wir eine gewöhnliche Schraubenlinie, deren Ganghöhe gleich einer Wellenlänge ist.

### § 30. Huygenssches Prinzip für elektromagnetische Wellen.

Elektromagnetische Wellen, welche von elektromagnetischen Veränderungen herrühren, die auf kleinem Raum vor sich gehen, pflanzen sich wie alle Wellen punktförmiger Erreger als Kugelwellen fort. Die elektrische Kraft, sowie die magnetische Induktion steht senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Haben wir demnach im Erreger eine bestimmte Richtung der elektrischen Kraft, so wird bezüglich der Fortpflanzung nur jene Komponente derselben in Rechnung kommen, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung wirkt. Denken wir uns somit durch den Erreger in der Richtung der elektrischen Kraft einen Durchmesser der Kugelwelle gezogen und nennen die Endpunkte desselben die Pole der Kugel, so finden auf derselben die elektrischen Schwingungen in der Richtung der Meridiane statt und ihre Amplitude ist immer proportional dem Sinus des Winkels, welchen die Richtung des Strahles mit dem Pole einschließt. Die magnetischen Schwingungen stehen senkrecht zu den elektrischen, finden also in den Parallelkreisen statt und ihre Amplitude ist natürlich immer proportional der Amplitude der elektrischen Schwingung im selben Punkte. Wir können dies auch so ausdrücken: Die Amplitude der elektrischen und magnetischen Schwingungen ist

am Äquator der Kugelwelle am größten und nimmt gegen die Pole mit dem Kosinus der jeweiligen Breite ab.

Haben wir nun eine ebene Welle, so können wir zu einem gegebenen Zeitpunkt jeden Punkt der Welle als Erreger einer derartigen Kugelwelle auffassen. Suchen wir nach Verlauf einer bestimmten Zeit die gemeinschaftliche Umhüllende aller dieser Kugelwellen auf, so erhalten wir wieder eine ebene Welle, welche mit der wirklich vorhandenen Welle identisch ist. Darin besteht aber das Huygenssche Prinzip (§ 12).

Die Beugungserscheinungen des Lichtes werden alle unter Annahme der Gültigkeit des Huygensschen Prinzips, und daß das Licht eine harmonische Wellenbewegung sei, abgeleitet. Welche Art von Wellen wir dabei vor uns haben, ist ganz gleichgültig. Die Beugungserscheinungen würden der Hauptsache nach ebensogut durch longitudinale wie durch transversale Wellen hervorgerufen. Wir erhalten daher auch genau dieselben Resultate, wenn wir den Lichtwellen elektromagnetische Natur zuerkennen.

### § 31. Reflexion und Brechung.

Die Anwendung des Huygensschen Prinzips auf elektromagnetische Wellen ermöglicht uns auch ohne weiteres, für dieselben das Reflexions- und Brechungsgesetz abzuleiten (§ 12). Wir gelangen also auch hier in keinen Widerspruch mit der Erfahrung, wenn wir Lichtwellen und elektromagnetische identifizieren. Bezeichnen wir den Einfallswinkel mit  $\alpha$ , den Brechungswinkel mit  $\beta$ , so gilt bekanntlich

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n ,$$

wobei wir  $n$  den Brechungsexponenten nennen. Es ist

ferner

$$n = \frac{a}{a'},$$

wenn  $a$  die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten,  $a'$  jene im zweiten Medium ist. Nun haben wir aber (§ 25) gefunden, daß

$$a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

ist. Analog wird die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im zweiten Medium sich darstellen lassen durch

$$a' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'\mu'}},$$

wobei also  $\varepsilon'$  und  $\mu'$  die Dielektrizitätskonstante bzw. magnetische Induktionskonstante für das zweite Medium ist. Daraus erhalten wir weiter

$$n = \frac{a}{a'} = \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu'}{\varepsilon\mu}}.$$

Gewöhnlich bestimmt man die Brechungsexponenten zwischen atmosphärischer Luft und einem anderen durchsichtigen Körper. Für Luft ist aber sowohl die Dielektrizitäts- als auch die magnetische Induktionskonstante so wenig von Eins verschieden, daß wir praktisch fast immer

$$\varepsilon = \mu = 1$$

setzen können. Desgleichen können wir mit größter Annäherung für alle uns bekannten durchsichtigen Körper  $\mu' = 1$  annehmen. Somit bleibt

$$n = \sqrt{\varepsilon'} \quad \text{oder} \quad n^2 = \varepsilon'.$$

Es ist also die Dielektrizitätskonstante eines Körpers immer gleich dem Quadrat seines Brechungsexpo-

nenen. Diese Folgerung ist der experimentellen Prüfung ohne weiteres zugänglich, und sie hat sich tatsächlich für eine große Zahl von Isolatoren bestätigt.

Das war neben dem Umstande, daß das Verhältnis der Maßzahlen einer Elektrizitätsmenge, wenn sie einmal im elektrostatischen, das andere Mal im elektromagnetischen Maßsystem (Bd. III, § 63) gemessen wird, gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, für J. Cl. Maxwell der Hauptstützpunkt zur Begründung der elektromagnetischen Lichttheorie.

§ 32. Polarisation des Lichtes durch Reflexion und Brechung — Elektrische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

Malus machte die Beobachtung, daß Licht, durch einen Turmalin betrachtet, verschiedene Erscheinungen hervorruft, je nachdem es direkt oder erst nach vorhergegangener Reflexion an einer ebenen Fläche den Turmalin passiert. Das Licht erfährt also durch die Reflexion eine Veränderung, die man Polarisation nennt.

Die  $(x, z)$ -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 29) sei die Trennungsebene zwischen Luft und Glas. Ein Lichtstrahl  $SO$  treffe in  $O$  die Glasfläche. Dort wird er teilweise nach  $R$  reflektiert, teilweise nach  $B$  gebrochen. Haben wir es mit natürlichem Lichte zu tun, so finden

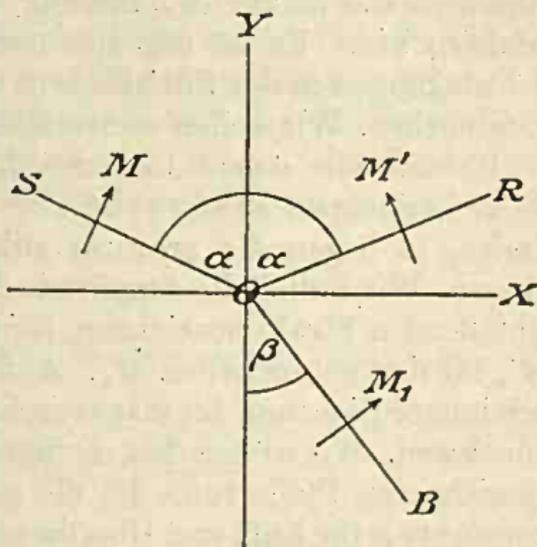


Fig. 29.

die elektrischen und magnetischen Schwingungen im einfallenden Strahle parallel einer Ebene statt, welche senkrecht zu  $SO$  ist. Die Ebene, welche durch  $SOY$  bestimmt ist, nennen wir die Einfallsebene. Wir können nun jede dielektrische Polarisirung, welche im einfallenden Strahle vorkommt, in zwei Komponenten zerlegen, deren eine senkrecht zur Einfallsebene, deren andere in der Einfallsebene liegt. Die zugehörigen Komponenten der magnetischen Induktion liegen dann in der Einfallsebene bzw. senkrecht dazu.

Nach der Reflexion bzw. Brechung wird die Amplitude der elektrischen Schwingung im allgemeinen eine Änderung erfahren haben. Kennen wir nun die Änderung der Amplituden der Komponenten, so können wir aus diesen die resultierende Schwingung wieder zusammensetzen und erfahren so die wirkliche Änderung, welche der Lichtstrahl erfahren hat. Es ist uns also nur vonnöten, elektrische Schwingungen in der Einfallsebene und senkrecht zu ihr zu untersuchen. Wir wollen vorerst letztere in Betracht ziehen.

Haben wir einen Lichtstrahl, dessen elektrische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stattfinden, so liegen die magnetischen in der Einfallsebene. Wir wollen die Amplitude derselben mit  $M$  für den einfallenden Strahl bezeichnen, für den reflektierten sei sie  $M'$ , für den gebrochenen  $M_1$ . Außerdem müssen wir eine bestimmte Richtung der magnetischen Induktion als positiv annehmen. Wir wollen dies im Sinne der in der Fig. 29 eingezeichneten Pfeile tun. Da die magnetische Induktionskonstante  $\mu$  für Luft und Glas dieselbe, nämlich gleich Eins ist, so muß die magnetische Induktion an der Trennungsebene, d. h. in der  $(x, z)$ -Ebene beim Übergang von Luft in Glas sich stetig ändern.

Es hat nun an der Trennungsebene  $M$  die Komponente  $M \cos \alpha$ ,  $M'$  die Komponente  $-M' \cos \alpha$  und  $M_1$  die Kom-

ponente  $M_1 \cos \beta$ . Wir haben also in der Luft an der Trennungsebene die Komponente der magnetischen Induktion  $M \cos \alpha - M' \cos \alpha$ , im Glas  $M_1 \cos \beta$ , und es muß wegen der Kontinuität

$$(31) \quad M \cos \alpha - M' \cos \alpha = M_1 \cos \beta$$

sein. Gleicherweise sind die Komponenten senkrecht zur Trennungsebene  $M \sin \alpha$ ,  $M' \sin \alpha$ ,  $M_1 \sin \beta$ , und es muß die Beziehung bestehen

$$(32) \quad M \sin \alpha + M' \sin \alpha = M_1 \sin \beta.$$

Nennen wir die zu den magnetischen Amplituden  $M$ ,  $M'$  und  $M_1$  gehörigen elektrischen  $E$ ,  $E'$  und  $E_1$ , so folgt nach § 25, daß an der Trennungsebene die elektrischen Schwingungen ganz in die  $(x, z)$ -Ebene hineinfallen und senkrecht zur  $(x, y)$ -Ebene stehen. Die zu  $M$ ,  $M'$  und  $M_1$  gehörige Richtung der Amplitude der elektrischen Schwingung ist jedoch bei unserer Figur parallel zur negativen  $z$ -Achse, und zwar sowohl für  $E$  als auch für  $E'$  und  $E_1$ . In diesem Falle müssen sich beim Übergang von Luft in Glas die elektrischen Kräfte ebenfalls kontinuierlich ändern. Es muß somit

$$(33) \quad E + E' = E_1$$

sein.

In § 26 haben wir nun kennengelernt, daß, wenn wir eine elektrische Welle

$$E = E_0 \cos 2 \pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

haben, die dazugehörige magnetische Welle durch

$$M = \frac{E_0 \varepsilon \lambda}{c \tau} \cos 2 \pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

gegeben ist. Es besteht somit zwischen der magnetischen

Amplitude  $M_0$  und der elektrischen  $E_0$  die Beziehung

$$(34) \quad M_0 = \frac{E_0 \varepsilon \lambda}{c \tau}.$$

Dabei ist  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichtes in dem Medium von der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$ . Ist die Lichtgeschwindigkeit daselbst  $a$ , so besteht demnach zwischen der Wellenlänge  $\lambda$  und der Schwingungsdauer  $\tau$  die Beziehung  $\lambda = a \tau$  (§ 26). Führen wir dies in die Gleichung (34) ein, so wird

$$M_0 = \frac{E_0 \varepsilon a \tau}{c \tau}.$$

Nun ist aber  $\frac{c}{a} = n$  nichts anderes als der Brechungsexponent des Glases und die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon = n^2$ . Demnach ist

$$(35) \quad M_0 = \frac{E_0 n^2}{n} = n E_0.$$

Diese Beziehung besteht nach unserer Ableitung bei elektromagnetischen Wellen, welche sich in einem Medium von Brechungsexponenten  $n$  bewegen. Ist dieses Medium Luft, so haben wir  $n = 1$  zu setzen. Für die Amplituden  $M$ ,  $M'$  und  $M_1$  der magnetischen Schwingungen und  $E$ ,  $E'$ ,  $E_1$  der elektrischen erhalten wir somit nach Gleichung (35)

$$M = E, \quad M' = E', \quad M_1 = n E_1.$$

Danach können wir Gleichung (33) auch schreiben

$$M + M' = \frac{M_1}{n},$$

oder, da  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ ,

$$M + M' = M_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

oder

$$M \sin \alpha + M' \sin \alpha = M_1 \sin \beta.$$

Das ist aber die Gleichung (32). Folglich sagen die Gleichungen (32) und (33) ein und dasselbe aus.

Die Gleichung (31) können wir schreiben

$$E \cos \alpha - E' \cos \alpha = n E_1 \cos \beta = E_1 \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta}$$

oder

$$(E - E') \cos \alpha \sin \beta = (E + E') \sin \alpha \cos \beta .$$

Dies läßt sich weiter umwandeln in

$$E (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = E \sin (\beta - \alpha) = E' \sin (\alpha + \beta) ,$$

$$(36) \quad E' = - E \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)} .$$

Es hat also das reflektierte Licht gegen das einfallende eine Phasenverschiebung von einer halben Schwingungsdauer.

Für die Amplitude im gebrochenen Strahl finden wir auf ähnliche Weise, indem wir in unseren Gleichungen  $E' = E_1 - E$  setzen,

$$(37) \quad E_1 = E \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} .$$

### § 33. Magnetische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

Denken wir uns in Fig. 29 die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene gegen den Beschauer gerichtet, so nehmen die elektrischen die durch die Pfeile gegebenen Richtungen an. Wenn wir nun die Gleichungen der Kontinuität entwickeln wollen, so ist sie für die magnetischen Kräfte beim Übergang von Luft in Glas wiederum bedingungslos vorhanden, weil die magnetische Induktionskonstante in beiden Mitteln gleich Eins ist. Wir erhalten sonach die Gleichung

$$(38) \quad M + M' = M_1 .$$

Was jedoch die elektrischen Kräfte anbelangt, so braucht Kontinuität nur für die Komponenten, die in die  $(x, z)$ -Ebene fallen, vorhanden zu sein, indem durch die Komponenten senkrecht zur  $(x, z)$ -Ebene in dieser auch freie Elektrizität hervorgerufen wird. Hat dieselbe die Dichte  $\sigma$ , so gehen von der Flächeneinheit  $4\pi\sigma$  Kraftlinien aus (Bd. III, § 16). Da nun die Kräfte durch die Dichte der Kraftlinien gemessen werden, so herrscht beim Übergang von Glas in Luft keine Kontinuität zwischen den Komponenten der elektrischen Kräfte parallel zur  $y$ -Achse, sondern ihr Unterschied wird immer  $4\pi\sigma$  betragen. Wir haben also neben der Gleichung (38) für die Kontinuität nur noch die elektrischen Schwingungen zu betrachten, welche in die Trennungsebene fallen. Dieselben sind nach Fig. 29

$$(39) \quad E \cos \alpha - E' \cos \alpha = E_1 \cos \beta.$$

Da wir auch im jetzigen Falle wieder die Beziehungen

$$M = E, \quad M' = E', \quad M_1 = nE_1$$

(§ 32) haben, so können wir Gleichung (38) auch

$$E + E' = nE_1$$

oder wegen  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

$$(40) \quad E \sin \beta + E' \sin \beta = E_1 \sin \alpha$$

schreiben.

Aus den Gleichungen (39) und (40) lassen sich nun wieder leicht die Amplituden  $E'$  des reflektierten und  $E_1$  des gebrochenen Lichtes berechnen. Wir multiplizieren die Gleichung (40) mit  $\cos \beta$ , hingegen die Gleichung (39) mit  $\sin \alpha$  und subtrahieren beide voneinander. Es bleibt dann

$$(E + E') \sin \beta \cos \beta - (E - E') \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

woraus weiter folgt

$$E' = E \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = E \frac{\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

Wir erhalten sonach für die Amplitude der reflektierten elektrischen Wellen

$$(41) \quad E' = E \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Ferner findet sich für die entsprechende Amplitude des gebrochenen Strahles aus den Gleichungen (39) und (40) leicht

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1 &= E \frac{4 \cos \alpha \sin \beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \\ &= E \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (36), (37), (41) und (42) entsprechen genau den von Fresnel gefundenen Beziehungen. Seine Entwicklungen wollen wir mit Benutzung der Bezeichnungen der elektromagnetischen Theorie in § 35 andeuten.

### § 34. Energie elektromagnetischer Strahlen — Energiedichte der Strahlung.

Wir denken uns einen elektromagnetischen Wellenzug (§ 26) oder, wie wir auch sagen können, einen elektromagnetischen Strahl vom Querschnitte Eins. Die elektrische Kraft ist dann gegeben durch

$$E = E_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Zu einem gegebenen Zeitpunkte wird die gesamte elektrische Energie auf der unendlich kleinen Strecke  $dx$  (Bd. III,

§ 24)  $\frac{\epsilon}{8\pi} E^2 dx$  sein. Die gesamte Energie einer Welle ist somit

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_0^{\lambda} E^2 dx &= \frac{\varepsilon E_0^2}{8\pi} \int_0^{\lambda} \cos^2 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) dx \\
 &= \frac{\varepsilon E_0^2}{8\pi} \int_0^{\lambda} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] dx \\
 &= \frac{\varepsilon E_0^2}{8\pi} \left[ \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{8\pi} \sin 4\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]_0^{\lambda} = \frac{\varepsilon E_0^2 \lambda}{16\pi},
 \end{aligned}$$

indem der Sinus im Klammersausdruck für  $x = 0$  und  $x = \lambda$  denselben Wert annimmt. Genau dieselbe Formel erhalten wir auch für die Energie der magnetischen Welle, wenn wir wiederum die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  durch die magnetische Induktionskonstante  $\mu$ , die elektrische Kraft  $E_0$  durch die magnetische  $M_0$  ersetzen. Die gesamte Energie des Strahls in der Volumseinheit, die Energiedichte, ist somit

$$A = \frac{1}{16\pi} (\varepsilon E_0^2 + \mu M_0^2).$$

Befinden wir uns im reinen Äther, so wird  $\varepsilon = \mu = 1$  oder

$$A = \frac{1}{16\pi} (E_0^2 + M_0^2),$$

oder, da für diesen Fall

$$M_0 = E_0$$

ist — im § 26 fanden wir  $\frac{E_0 \varepsilon \lambda}{c \tau} = M_0$ , da aber  $\varepsilon = 1$ ,  $\lambda = c \tau$  wird, so ist  $E_0 = M_0$  — so erhalten wir

$$A = \frac{E_0^2}{8\pi}.$$

## § 35. Fresnels Theorie der Polarisation.

Um die Gleichungen für die Polarisation bei der Reflexion und Brechung des Lichts an ebenen Flächen zu gewinnen, sah sich Fresnel genötigt anzunehmen, daß die Ätherteilchen Schwingungen vollführen, die senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts stattfinden, daß wir es also bei der Wellenbewegung des Lichts mit Transversalwellen zu tun haben. Nach ihm gelten folgende Sätze:

1. Es muß die lebendige Kraft des einfallenden Strahls gleich der Summe der lebendigen Kräfte des reflektierten und gebrochenen Strahls sein.

2. In der Trennungsebene beider Medien muß Kontinuität vorhanden sein. Das heißt: in der Trennungsebene muß die Gesamtbewegung im ersten Medium gleich der Bewegung im zweiten sein.

Wir beschränken uns vorerst auf die elektrische Energie der Lichtwellen. Nach dem vorigen Paragraphen ist sie für eine Welle vom Querschnitt Eins und der Länge  $\lambda$

$$\frac{\varepsilon E^2 \lambda}{16 \pi},$$

wenn wir unter  $E$  die Amplitude der Schwingung, unter  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante des Mediums verstehen.

Der Lichtstrahl gehe von Luft in Glas. Wir setzen für Luft  $\varepsilon = 1$ . Wir wählen einen Lichtstrahl rechteckigen Querschnitts, dessen Breite  $g$  und dessen Höhe  $h$  ist. Dann wird die Energie einer Welle

$$\frac{E^2 g h \lambda}{16 \pi}.$$

Für die Energie einer Welle im reflektierten Licht ändert sich in diesem Ausdruck nur die Größe  $E$ . Wir wollen sie

für dieses Licht  $E'$  nennen. Im gebrochenen Licht haben wir jedoch auch ein anderes  $h$  und  $\lambda$ . Wir wollen hier analog  $h_1$  und  $\lambda_1$  einführen. Somit muß folgende Gleichung gelten

$$\frac{E^2 g h \lambda}{16 \pi} = \frac{E'^2 g h \lambda}{16 \pi} + \frac{\varepsilon E_1^2 g h_1 \lambda_1}{16 \pi}$$

oder

$$(43) \quad E^2 h \lambda = E'^2 h \lambda + \varepsilon E_1^2 h_1 \lambda_1.$$

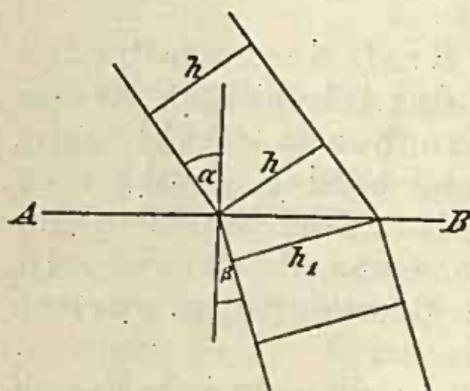


Fig. 30.

Es ist nun nach Fig. 30

$$h : h_1 = \cos \alpha : \cos \beta,$$

ferner

$$\lambda = c \tau, \quad \lambda_1 = c_1 \tau,$$

wenn  $c$  und  $c_1$  die Lichtgeschwindigkeiten oben bzw. unten sind. Daraus folgt

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{c}{c_1} = n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Demnach können wir die Gleichung (43) schreiben

$$(E^2 - E'^2) \sin \alpha \cos \alpha = \varepsilon E_1^2 \sin \beta \cos \beta.$$

Nun ist aber (§ 31)  $\varepsilon = n^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}$ , was, in die letzte Gleichung eingesetzt, ergibt

$$(E^2 - E'^2) \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta = E_1^2 \sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha$$

oder

$$(44) \quad (E^2 - E'^2) \cos \alpha \sin \beta = E_1^2 \cos \beta \sin \alpha.$$

Wir haben jetzt noch die Gleichungen der Kontinuität zu entwickeln. Wir zerlegen die Amplitude  $E$ , die senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts steht, in zwei Komponenten, deren eine in der Einfallsebene, während die

andere senkrecht dazu ist. Diese wollen wir zuerst betrachten. Sie fällt in die Trennungsebene selbst hinein, und es muß zur Aufrechterhaltung der Kontinuität der Zustand im unteren Medium gleich der Summe der Zustände im oberen sein. Daraus folgt

$$(45) \quad E + E' = E_1,$$

so daß wir aus Gleichung (44) und (45) bilden können

$$(E - E') \cos \alpha \sin \beta - (E + E') \cos \beta \sin \alpha = 0,$$

was sich weiter umwandeln läßt in

$$E (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = E \sin (\beta - \alpha) = E' \sin (\alpha + \beta),$$

$$(46) \quad E' = -E \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Für die Amplitude im gebrochenen Strahl finden wir aus den Gleichungen (44) und (45)

$$(47) \quad E_1 = E \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Für die Komponente in der Einfallsebene haben wir eine bestimmte Richtung als positiv anzunehmen. Es sei jene des Vektors  $M$  (Fig. 29). Diesen Vektor wollen wir im Punkt  $O$  abermals in eine Komponente in der Trennungsebene  $OX$  und eine im Einfallslot  $OY$  zerlegen. Kontinuität im obigen Sinne ist nur für diese Komponenten in der Trennungsebene notwendig, da jene senkrecht dazu ja auch freie Elektrizität in der Trennungsebene hervorrufen werden. Wir erhalten somit die Gleichung

$$(48) \quad E \cos \alpha - E' \cos \alpha = E_1 \cos \beta.$$

Dividieren wir Gleichung (44) durch Gleichung (48), so erhalten wir

$$(E + E') \sin \beta = E_1 \sin \alpha.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit  $\cos \beta$ , hingegen die Gleichung (48) mit  $\sin \alpha$  und subtrahieren beide voneinander. Es bleibt dann

$$(E + E') \sin \beta \cos \beta - (E - E') \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

woraus weiter folgt

$$E' = E \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = E \frac{\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

Wir erhalten sonach für die Amplitude des reflektierten Lichts, welches in der Einfallsebene schwingt,

$$(49) \quad E' = E \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Ferner findet sich für die entsprechende Amplitude des gebrochenen Lichts wieder aus den Gleichungen (44) und (48) leicht

$$(50) \quad E_1 = E \frac{4 \cos \alpha \sin \beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = E \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

Wir erkennen, daß die Gleichungen (46), (47), (49) und (50) identisch sind mit den Gleichungen (36), (37), (41) und (42). Fresnel erschöpft mit diesen Gleichungen seine Theorie. Nach der Maxwell'schen Theorie haben wir aber auch noch die magnetischen Schwingungen in Betracht zu ziehen. Diese können wir nach beiden Methoden in genau derselben Weise behandeln wie die elektrischen. Berücksichtigen wir dabei, daß zu den elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene magnetische in der Einfallsebene gehören, daß ferner in der Luft  $M = E$ ,  $M' = E'$  und im Glas  $M_1 = nE_1$  (§ 26) ist, so ergibt sich leicht, daß die zu einem Lichtstrahl gehörigen elektrischen und magnetischen Schwingungen genau dieselben Gleichungen befolgen. Es lassen sich also die behandelten Erscheinungen durch die elektrischen Schwingungen allein darstellen.

Wird (Gl. 49)  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , so wird  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \infty$ , also  $E' = 0$ . Wenn wir demzufolge Licht so einfallen lassen, daß  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  ist, so werden parallel zur Einfallsebene gehende Schwingungen überhaupt nicht reflektiert. In diesem Fall stehen reflektierter und gebrochener Strahl aufeinander senkrecht (Brewstersches Gesetz). Es ist für Glas dieser Winkel  $\alpha$  etwa  $57^\circ$ . Man nennt ihn den Polarisationswinkel. Für den Polarisationswinkel ist also  $\sin \beta = \cos \alpha$ , daher

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

es ist die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungsexponenten.

In Fig. 31 sei  $EE$  die Einfallsebene des Lichts,  $PP$  liege in der Trennungsebene der beiden Medien und stehe senkrecht auf  $EE$ . Die Trennungsebene ist also zur Bildebene

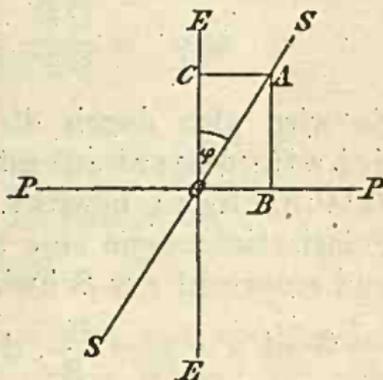


Fig. 31.

um den Einfallswinkel  $\alpha$  geneigt zu denken. Die Schwingungen des Lichts finden in der Geraden  $SS$  statt.  $OA$  sei die Amplitude des einfallenden Lichts. Wir zerlegen sie in die Komponenten  $OB$  senkrecht und  $OC$  parallel zur Einfallsebene. Wir haben somit

$$OB = \overline{OA} \sin \varphi, \quad OC = \overline{OA} \cdot \cos \varphi.$$

Nach der Reflexion verwandelt sich  $OB$  nach Gleichung (46) in

$$OB' = -OB \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

und nach Gleichung (49)  $OC$  in

$$OC' = \overline{OC} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Es ist nun

$$\frac{OB'}{OC'} = - \frac{OB}{OC} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = - \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Es werden sich nach der Reflexion die Komponenten sonach zu einer Schwingungsrichtung  $\varphi'$  zusammensetzen, welche von der früheren abweicht. Wir haben nämlich

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{OB'}{OC'} = - \operatorname{tg} \varphi \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Es wird also durch die Reflexion eine Drehung der Schwingungsebene oder, wie man auch sagt, der Polarisationssebene bewirkt, dabei versteht man unter der Polarisationssebene eine Ebene, die durch den Strahl geht und senkrecht zur Schwingungsebene steht.

Wird  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , d. h. fällt das Licht unter dem Polarisationswinkel auf, so wird  $\operatorname{tg} \varphi' = -\infty$ , das reflektierte Licht schwingt parallel zur Trennungsebene beider Medien. Das natürliche Licht, dessen Schwingungen nach allen Richtungen in einer zum Lichtstrahl senkrechten Ebene gehen, wird daher, wenn es unter dem Polarisationswinkel reflektiert wird, nur noch Schwingungen in einer Richtung, nämlich parallel zur Trennungsebene machen; es ist vollkommen polarisiert. Lassen wir nun solches Licht unter dem Polarisationswinkel auf einen Spiegel fallen, aber so, daß es in der Einfallsebene schwingt, so wird es überhaupt nicht mehr reflektiert.

Wir wollen jetzt eine ähnliche Betrachtung für das gebrochene Licht anstellen. Für dieses seien die Kompo-

nenten  $OB_1$  und  $OC_1$ , und wir haben nach den Gleichungen (47) und (50)

$$OB_1 = \overline{OB} \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad OC_1 = \overline{OC} \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)},$$

folglich

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{OB_1}{OC_1} = \frac{OB}{OC} \cdot \cos(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \varphi \cos(\alpha - \beta).$$

Also auch bei der Brechung haben wir eine Änderung der Schwingungsrichtung. Lassen wir Licht durch eine planparallele Platte fallen, so haben wir bei der ersten Brechung

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(\alpha - \beta),$$

bei der zweiten

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos^2(\alpha - \beta).$$

Fällt das Licht durch  $n$  Platten, so haben wir

$$\operatorname{tg} \varphi_{2n} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos^{2n}(\alpha - \beta).$$

Da nun  $\cos(\alpha - \beta) < 1$ , so nähert sich mit wachsender Zahl der Platten  $\varphi_{2n}$  immer mehr jenem Winkel, für welchen  $\operatorname{tg} \varphi_{2n} = 0$  ist, d. i. dem Winkel  $\varphi_{2n} = 0$ . Man nennt eine solche Reihe aufeinandergeschichteter planparalleler Platten einen Plattensatz, welcher ebenfalls die Fähigkeit hat, natürliches Licht in teilweise polarisiertes zu verwandeln; jedoch schwingt das polarisierte Licht dann in der Einfallsebene.

### § 36. Farben dünner Blättchen.

Von dem leuchtenden Punkte  $S$  (Fig. 32) falle ein Strahl  $SA$  auf die planparallele Platte  $PP'$ . Im Punkte  $A$  werde er teilweise nach  $C$  reflektiert, teilweise nach  $B$  gebrochen. Dort findet ebenfalls Reflexion und Brechung statt; ein

Teil geht nach  $E$ , der andere nach  $A'$ , und das geht so fort, so daß eine Reihe von Strahlen nach oben, eine andere nach unten von der Platte weggeht. Das Auge wird daher sowohl von oben als von unten in der Platte Interferenzerscheinungen der nebeneinander verlaufenden Strahlen sehen können, welche man mit dem Namen „Farben dünner Blättchen“ belegt.

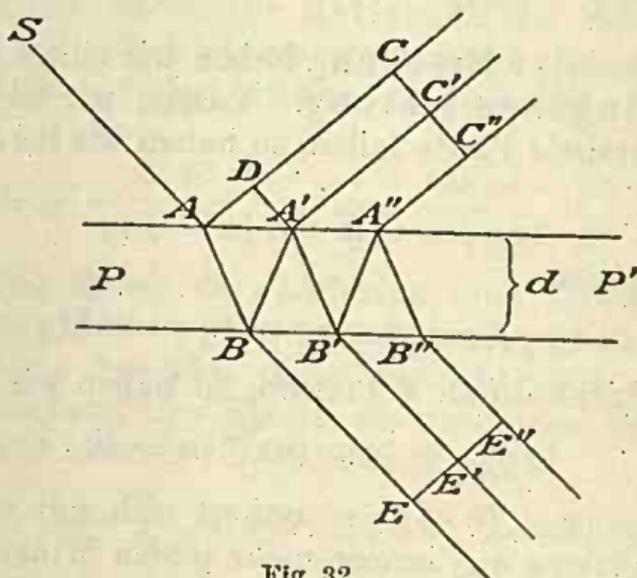


Fig. 32.

Der einfallende Strahl sei natürliches Licht. Wir denken uns die Schwingungen in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene zerlegt und wollen vorerst den Fall untersuchen, daß die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stehen. Der Brechungsindex zwischen Luft und Platte sei  $n$ , beim Gang von der Platte in die Luft also  $\frac{1}{n}$ . In  $A$  sei der Schwingungszustand der einfallenden Welle

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei außerhalb der Platte  $c$ , innerhalb  $c'$ . Der Schwingungszustand in  $A$  wird nach der Zeit  $\frac{AC}{c}$  in  $C$  sein, nur mit dem Unterschied, daß er dort mit geringerer Stärke auftritt, da seine Amplitude daselbst nach Gleichung (36) eine kleinere sein wird. Wir wollen die jeweilige elektrische Kraft daselbst mit  $E_1$  bezeichnen, desgleichen in  $C'$  mit  $E_2$ , in  $C''$  mit  $E_3$  usw. Es ist also

$$E_1 = - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} E_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AC}{c} \right) \\ = - \alpha_1 E_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AC}{c} \right).$$

Wir haben also

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \alpha_1$$

gesetzt. In ähnlicher Weise können wir nun weiter schließen. Wir werden in  $C'$  den Zustand

$$E_2 = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ \times \frac{2 \cos \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} E_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{2AB}{c'} - \frac{A'C'}{c} \right) \\ = \beta_1 \alpha_1 \gamma_1 E_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{2AB}{c'} - \frac{A'C'}{c} \right)$$

haben. Dabei ist zu bemerken, daß

$$\frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \beta_1$$

dem Lichtverlust bei der Brechung in  $A$  nach Gleichung (37) Rechnung trägt. Dasselbe ist mit  $\alpha_1$  bei der Reflexion in  $B$

und mit

$$\frac{2 \cos \beta \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} = \gamma_1$$

bei der Brechung in  $A'$  der Fall. Bei den letzteren Formeln ist noch zu erwähnen, daß die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  zu vertauschen sind, da es sich hier ja nicht um den Gang des Lichtes von Luft in die Platte, sondern um den entgegengesetzten Verlauf handelt. Auf ganz dieselbe Weise finden wir nun weiter

$$E_3 = \beta_1 \alpha_1^3 \gamma_1 E_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{4AB}{c'} - \frac{A''C''}{c} \right).$$

Wollen wir den resultierenden Schwingungszustand kennen lernen, d. h. den Eindruck, den das reflektierte Licht wirklich auf das Auge macht, so haben wir die Summe  $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$  zu bilden.

Es ist nun

$$A'C' = AC - AD,$$

$$A''C'' = AC - 2AD,$$

$$\dots \dots \dots$$

wenn  $A'D$  das Lot auf  $AC$  ist. Wir setzen jetzt

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AC}{c} \right) = \varphi,$$

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{2AB}{c'} - \frac{AD}{c} \right) = \psi$$

und erhalten dann für die Summe sämtlicher  $E$  den Ausdruck

$$\Sigma = E_0 \alpha_1 [-\sin \varphi + \beta_1 \gamma_1 \sin(\varphi - \psi) + \alpha_1^2 \beta_1 \gamma_1 \sin(\varphi - 2\psi) + \alpha_1^4 \beta_1 \gamma_1 \sin(\varphi - 3\psi) + \dots].$$

Diese Summe wird uns also die Lichterscheinung darstellen, die unser Auge in der dünnen Platte  $PP'$  im reflektierten

Licht erblickt. Um die Summierung durchführen zu können, führen wir (§ 20) folgende Hilfssummen ein:

$$S = \sin(\varphi - \psi) + \alpha_1^2 \sin(\varphi - 2\psi) + \alpha_1^4 \sin(\varphi - 3\psi) + \dots,$$

$$R = \cos(\varphi - \psi) + \alpha_1^2 \cos(\varphi - 2\psi) + \alpha_1^4 \cos(\varphi - 3\psi) + \dots$$

und bilden

$$R + S i = e^{(\varphi - \psi)i} + \alpha_1^2 e^{(\varphi - 2\psi)i} + \alpha_1^4 e^{(\varphi - 3\psi)i} + \dots$$

$$= e^{(\varphi - \psi)i} (1 + \alpha_1^2 e^{-\psi i} + \alpha_1^4 e^{-2\psi i} + \alpha_1^6 e^{-3\psi i} + \dots)$$

$$= e^{(\varphi - \psi)i} (1 + n + n^2 + n^3 + \dots),$$

wenn wir  $\alpha_1^2 e^{-\psi i} = n$  setzen. Die geometrische Reihe hat nun eine bekannte Summenformel, wonach wir erhalten

$$R + S i = e^{(\varphi - \psi)i} \cdot \frac{1}{1 - n} = \frac{e^{(\varphi - \psi)i}}{1 - \alpha_1^2 e^{-\psi i}} \cdot \frac{1 - \alpha_1^2 e^{\psi i}}{1 - \alpha_1^2 e^{\psi i}}$$

$$= e^{(\varphi - \psi)i} \frac{1 - \alpha_1^2 e^{\psi i}}{1 - 2\alpha_1^2 \cos \psi + \alpha_1^4} = \frac{e^{(\varphi - \psi)i} - \alpha_1^2 e^{\varphi i}}{N}$$

$$= \frac{\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi) - \alpha_1^2 \cos \varphi - i \alpha_1^2 \sin \varphi}{N},$$

wobei wir

$$1 - 2\alpha_1^2 \cos \psi + \alpha_1^4 = N$$

gesetzt haben. Der imaginäre Teil der Summe ergibt

$$S = \frac{\sin(\varphi - \psi) - \alpha_1^2 \sin \varphi}{N},$$

somit

$$\Sigma = -E_0 \alpha_1 \sin \varphi + E_0 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \frac{\sin(\varphi - \psi) - \alpha_1^2 \sin \varphi}{N}.$$

Wir wollen hier die Glieder mit den Faktoren  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  noch trennen, erhalten somit

$$\Sigma = E_0 \sin \varphi \left( -\alpha_1 + \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \frac{\cos \psi - \alpha_1^2}{N} \right) - E_0 \cos \varphi \cdot \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \frac{\sin \psi}{N}.$$

Es ist also das Resultat wiederum eine schwingende Bewegung von derselben Schwingungsdauer, aber von verschiedener Amplitude und Phase.

Wir finden das Quadrat der Amplitude der resultierenden Schwingung aus der Gleichung

$$A^2 = E_0^2 \left( -\alpha_1 + \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \frac{\cos \psi - \alpha_1^2}{N} \right)^2 + E_0^2 \alpha_1^2 \beta_1^2 \gamma_1^2 \frac{\sin^2 \psi}{N^2}.$$

(Siehe Bd. II, § 8.) Dieser Größe setzen wir die Lichtstärke proportional (§ 34). Sie gibt uns also ohne weiteres Aufschluß über die Intensität des reflektierten Lichts.

In ganz derselben Weise wie für das reflektierte können wir nun die Rechnung auch für das durchgehende Licht machen. Wir erhalten in  $E$  (Fig. 32) den Schwingungszustand

$$E' = E_0 \beta_1 \gamma_1 \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AB}{c'} - \frac{BE}{c} \right),$$

in  $E'$

$$E'' = E_0 \alpha_1^2 \beta_1 \gamma_1 \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{3AB}{c'} - \frac{B'E'}{c} \right)$$

usw. Wir führen

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AB}{c'} - \frac{BE}{c} \right) = \chi$$

ein und können so für die Summe sämtlicher  $\sigma$  schreiben

$$\Sigma' = E_0 \beta_1 \gamma_1 [\sin \chi + \alpha_1^2 \sin (\chi - \psi) + \alpha_1^4 \sin (\chi - 2\psi) + \dots],$$

was nach dem früheren Vorgang

$$\Sigma' = E_0 \beta_1 \gamma_1 \frac{\sin \chi - \alpha_1^2 \sin (\chi + \psi)}{N}$$

ergibt.

Jetzt können wir uns auch eine Vorstellung von dem Quadrat der resultierenden Amplitude im reflektierten und durchgehenden Licht machen. Es ist

$$\left(-1 + \beta_1 \gamma_1 \frac{\cos \psi - \alpha_1^2}{N}\right)^2 =$$

$$\left[-1 + (1 - \alpha_1^2) \frac{\cos \psi - \alpha_1^2}{N}\right]^2 = \frac{(1 + \alpha_1^2)^2 (1 - \cos \psi)^2}{N^2},$$

was sich durch Ausmultiplizieren leicht finden läßt, indem  $\beta_1 \gamma_1 = 1 - \alpha_1^2$  ist, wovon man sich ebenfalls durch Einsetzung der Werte von  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  ohne weiteres überzeugen kann. Wir haben somit

$$\frac{A^2}{E_0^2 \alpha_1^2} = \frac{(1 + \alpha_1^2)^2 (1 - \cos \psi)^2 + (1 - \alpha_1^2)^2 \sin^2 \psi}{N^2}$$

$$= \frac{2(1 - \cos \psi)}{N}.$$

Wird demnach  $\cos \psi = 1$ , d. i. für  $\psi = 0, 2\pi, \dots$ , so wird kein Licht reflektiert, für  $\psi = \pi, 3\pi \dots$  werden wir hingegen das Maximum der Lichtstärke erhalten.

Verfahren wir mit dem durchgelassenen Licht  $\Sigma'$  genau so wie mit dem reflektierten, so finden wir für das Quadrat der Amplitude

$$B^2 = \frac{E_0^2 (1 - \alpha_1^2)^2}{N}.$$

Hier kann also nie völlige Dunkelheit eintreten, wohl gibt es aber auch ein Minimum der Lichtstärke, d. i. für  $\cos \psi = 0$ , also  $\psi = \pi, 3\pi, \dots$ . Haben wir also im reflektierten Licht das Maximum der Intensität, so ist im durchgelassenen das Minimum und umgekehrt. Man sagt, die Erscheinungen im reflektierten und durchgelassenen Licht sind zueinander komplementär.

Beide Intensitäten geben zusammen die ursprüngliche; denn es ist

$$A^2 + B^2 = E_0^2.$$

Wie mit den elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, können wir auch mit jenen in der Einfallsebene vorgehen, nur haben dann für die Reflexion und Brechung die Formeln (41) und (42) zu gelten. Das hat zur Folge, daß das Resultat nicht genau dasselbe wird. Wir haben zwar für beide Komponenten der elektrischen Kraft unter denselben Bedingungen vollkommenes Verschwinden des Lichtes oder das Maximum der Amplitude, aber während im einfallenden natürlichen Lichte die Amplituden beider Komponenten im Durchschnitt einander gleich sind, ist das beim reflektierten nicht mehr der Fall. Es ist somit das reflektierte Licht mehr oder weniger polarisiert.

Auch für das durchgehende Licht lassen sich nach Analogie des bereits Gesagten leicht die entsprechenden Formeln aufstellen. Wir gelangen wiederum zu ähnlichen Formeln. Das durchgehende Licht ist ebenfalls teilweise polarisiert.

### § 37. Newtons Farbenglas.

Legen wir auf eine planparallele Glasplatte eine sehr flache konvexe Linse (Fig. 33), so begrenzen wir damit eine

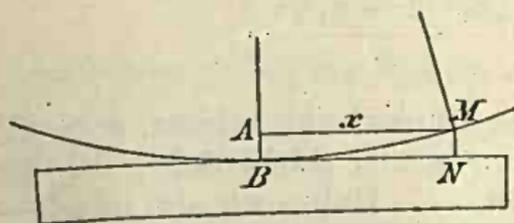


Fig. 33.

Luftschicht von veränderlicher Dicke, welche in der Mitte unendlich dünn wird. Man nennt diese Anordnung „Newtons Farbenglas“. Eine solche Luftschicht muß

nach dem vorhergehenden Paragraphen sowohl im durchgehenden als reflektierten Licht Interferenzerscheinungen

zeigen. An einer bestimmten Stelle vom Radius  $x$  hat die Luftschicht die Dicke

$$MN = AB = R - \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x^2}{2R},$$

wenn wir den Krümmungsradius  $R$  der Linse gegenüber  $x$  sehr groß annehmen. Wir erhalten nach §36 für  $\psi = 0,2\pi \dots$  im reflektierten Licht Dunkelheit. Lassen wir das Licht senkrecht auffallen, so wird  $AB = d$  (Fig. 32), wenn wir unter  $d$  die Dicke der Schicht verstehen,  $AD = 0$ . Mithin ist

$$\psi = \frac{4\pi d}{c'\tau}.$$

Es ist aber  $c'\tau = \lambda'$  die Wellenlänge des Lichts in der Platte. Wir haben demnach Dunkelheit für  $d = 0, \frac{\lambda'}{2}, \frac{2\lambda'}{2}, \frac{3\lambda'}{2} \dots$ , das ist für  $x^2 = 0, \lambda' R, 2\lambda' R, \dots$  Wir erhalten demnach in unserem Farbenglas dunkle Kreise, deren Radien sich der Reihe nach wie  $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} \dots$  verhalten. Bei Licht, welches aus mehreren Farben zusammengesetzt ist, entstehen natürlich entsprechende farbige Ringe.

### § 38. Wirkung dünner Blättchen bei schief auffallendem Licht — Talbots Linien.

Auf ein Blättchen von der Dicke  $d$  (Fig. 34) falle Licht unter dem Winkel  $\alpha$  auf, welches unter dem Winkel  $\beta$  im Blättchen weitergeht. In der Formel

$$\psi = \frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{2AB}{c'} - \frac{AD}{c} \right)$$

(§36) wollen wir  $AB$  und  $AD$  durch Blättchendicke, Einfallswinkel und Brechungswinkel ausdrücken. Wir haben

$$d = \overline{AB} \cdot \cos \beta,$$

ferner

$$AD = \overline{AA'} \cdot \sin \alpha = 2\overline{AB} \cdot \sin \beta \sin \alpha = \frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta},$$

folglich

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{2d}{c' \cos \beta} - \frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{c \cos \beta} \right) \\ &= \frac{4\pi d}{c' \tau \cos \beta} \left( 1 - \frac{c'}{c} \sin \alpha \sin \beta \right) \\ &= \frac{4\pi d}{\lambda' \cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) = \frac{4\pi d}{\lambda'} \cos \beta, \end{aligned}$$

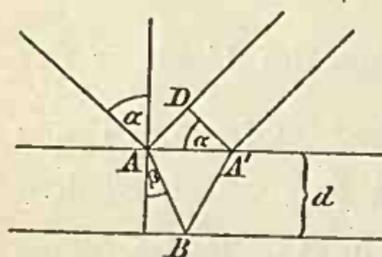


Fig. 34.

indem ja  $\frac{c'}{c} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{n} = \sin \beta$

ist. Für  $\psi = 0, 2\pi, \dots$  haben wir wiederum Dunkelheit im reflektierten Licht. Indem die Strahlen schief auffallen, erzielen wir also den Effekt, als würde das Blättchen dünner.

Wir setzen nun voraus, unser Blättchen sei so dick, daß die Formel

$$\frac{4\pi d}{\lambda'} \cos \beta = 2m\pi,$$

nach welcher wir Dunkelheit erhalten, erst für ein größeres  $m$  erfüllt ist. Gehen wir vom roten zum violetten Licht über, so wird die Wellenlänge etwa halb so groß. Es muß daher wiederum für den Fall der Dunkelheit  $m$  sich etwa verdoppeln. Haben wir daher weißes Licht, so werden durch unser Blättchen in demselben alle jene Lichtsorten verlöschen, deren Wellenlängen obige Gleichung erfüllen, wenn wir der Reihe nach anstatt  $m$  die Werte  $m + 1$ ,  $m + 2, \dots 2m$  einsetzen. Wir können dies dadurch nach-

weisen, daß wir das Licht nach der Reflexion durch ein Prisma gehen lassen. Wir erhalten dann ein Spektrum mit  $m$  dunklen Streifen, die nach ihrem Entdecker den Namen Talbotsche Linien führen.

### § 39. Stehende Wellen.

Aus der Superposition der Wellen folgt, daß verschiedene Wellenzüge, welche durch einen Punkt hindurchgehen, sich in ihrer Wirkung einfach geometrisch addieren. Wir wollen zwei Wellenzüge voraussetzen. Der eine sei gegeben durch

$$Y_1 = Y_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

der andere durch

$$Y_2 = Y_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda} \right).$$

Die erste Gleichung entspricht einem Wellenzuge, welcher sich parallel zur  $x$ -Achse und zwar nach der positiven Richtung derselben bewegt; die zweite stellt einen Wellenzug dar, der entgegengesetzt wandert (§ 26). Die elektrischen Kräfte wirken nur parallel zur  $y$ -Achse. Es ist in den Gleichungen (16) und (17)

$$X = Z = 0,$$

desgleichen

$$\alpha = \beta = 0.$$

Für die resultierende elektrische Kraft parallel zur  $y$ -Achse erhalten wir

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = Y_1 + Y_2 = Y_0 \left[ \cos 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) \right. \\ \left. + \cos 2\pi \left( \frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda} \right) \right] = 2 Y_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi t}{\tau}, \end{array} \right.$$

wenn wir die bekannte Formel

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

benützen.

Unsere Gleichung stellt nichts anderes dar als eine sogenannte stehende elektromagnetische Welle. Es

wird nämlich  $Y = 0$  für  $\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ,

wobei  $k$  eine beliebige ganze Zahl ist. Das heißt, wir haben in diesen Punkten gar keine Elektrizitätsbewegung. Wir

nennen sie Knotenpunkte der elektrischen Schwin-

gungen. Für  $\frac{2\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, \dots, k\pi$  hingegen haben wir

Maxima der elektrischen Schwingungen, sogenannte Schwingungsbäuche.

Aus den Gleichungen (17) und (51) folgt:

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{4\pi Y_0}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

Wir haben also auch stehende magnetische Wellen,

doch sind ihre Knoten und Bäuche gegen jene der

elektrischen Wellen verschoben. Dort, wo die elek-

trischen Wellen ihre Knoten haben, haben die magnetischen

ihre Bäuche und vice versa. Es unterscheiden sich also

die stehenden elektromagnetischen Wellen wesent-

lich von den fortschreitenden, indem diese keine

Phasenverschiebung der elektrischen und magnetischen

Schwingungen aufweisen (§ 26).

Zwei einander entgegenkommende Wellenzüge gleicher

Wellenlänge können wir auf die Weise erhalten, daß wir

einen Lichtstrahl senkrecht auf eine spiegelnde Fläche fallen

lassen. Der reflektierte Strahl ist dann entgegengesetzt ge-

richtet dem einfallenden, und es muß zu Interferenzerschei-

nungen von der eben besprochenen Art kommen, wie es O. Wiener tatsächlich experimentell nachgewiesen hat.

Da nach unseren Formeln an der reflektierten Wand die einfallende und die reflektierte elektrische Welle entgegengesetztes Vorzeichen haben, so muß an der Wand für die elektrischen Wellen ein Knoten, für die magnetischen ein Schwingungsbauch entstehen. Die photographische Aufnahme zeigt an der Wand den Knoten, so daß die photographische Wirkung des Lichtes den elektrischen Wellen zuzuschreiben ist. Da die physiologischen Wirkungen des Lichtes wohl durch chemische Wirkungen entstehen dürften, so können wir auch fürs Auge mit größter Wahrscheinlichkeit die elektrischen Schwingungen als die Erreger der Lichtempfindung ansehen.

Auch auf folgende Art können wir leicht zur Erkenntnis kommen, daß bei der senkrechten Reflexion einer elektromagnetischen Welle an einer Metallwand eine Phasenverschiebung zwischen elektrischer und magnetischer stehender Welle vorhanden sein muß. Trifft eine elektromagnetische Welle auf eine Metallwand auf, so müssen sich dort alle elektrischen Spannungen wegen der guten Leitfähigkeit des Metalls sofort ausgleichen. Es werden also in der Metallwand elektrische Ströme, nicht aber erhebliche Spannungen auftreten. Die elektrischen Kräfte müssen daher daselbst einen Knoten haben. Infolge der elektrischen Ströme werden jedoch magnetische Kräfte, die senkrecht dazu stehen, wachgerufen, welche hier somit einen Schwingungsbauch bilden.

#### § 40. Doppelbrechung.

Wir haben bisher den Gang des Lichtes in isotropen Körpern betrachtet. In solchen besitzt die Dielektrizitätskonstante nach allen Richtungen denselben Wert. Anders ist es in Kristallen. Wir wollen uns auf den

Fall der sogenannten optisch einachsigen Kristalle beschränken. Dieselben haben die Eigenschaft, daß für eine bestimmte Richtung (optische Achse) die Dielektrizitätskonstante einen ganz bestimmten Wert  $\epsilon_0$  in allen Richtungen senkrecht dazu jedoch einen andern Wert  $\epsilon_1$  besitzt. Von der magnetischen Induktionskonstanten wollen wir wieder, wie es tatsächlich auch bei allen durchsichtigen Kristallen der Fall ist, annehmen, daß sie gleich Eins gesetzt werden kann. In jene Richtung, welche die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$  besitzt, wollen wir die  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems legen. Wir können dann die allgemeinen Gleichungen (16) und (17) des elektromagnetischen Feldes schreiben

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\ \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \end{array} \right.$$

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Wir denken uns nun eine ebene elektromagnetische Welle, deren Fortpflanzungsrichtung mit den drei Achsen des Koordinatensystems die Winkel  $\lambda, \mu, \nu$  einschließt. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei  $c'$ , die jeweilige Entfernung der Wellenfläche vom Ursprung des Koordinaten-

systems ist somit  $x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu$ , und wir können die elektrische Kraft etwa darstellen durch

$$E = E_0 \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu}{c'} \right) = E_0 \cos \delta,$$

wenn wir

$$\delta = \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu}{c'} \right)$$

setzen (Bd. II, § 5). Analogerweise ist die magnetische Induktion durch

$$M = M_0 \cos \delta,$$

die einzelnen Komponenten der elektrischen und magnetischen Kräfte durch

$$X = X_0 \cos \delta, \quad \alpha = \alpha_0 \cos \delta,$$

$$Y = Y_0 \cos \delta, \quad \beta = \beta_0 \cos \delta,$$

$$Z = Z_0 \cos \delta, \quad \gamma = \gamma_0 \cos \delta$$

gegeben.

Es ist ferner

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{2\pi}{\tau} X_0 \sin \delta,$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{\cos \mu}{c'} \gamma_0 \sin \delta,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{\cos \nu}{c'} \beta_0 \sin \delta.$$

Die erste der Gleichungen (52) wird somit lauten

$$-\frac{\epsilon_0}{c} \frac{2\pi}{\tau} X_0 \sin \delta = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{\cos \mu}{c'} \gamma_0 \sin \delta - \frac{2\pi}{\tau} \frac{\cos \nu}{c'} \beta_0 \sin \delta$$

oder

$$\frac{c' \epsilon_0}{c} X_0 = \beta_0 \cos \nu - \gamma_0 \cos \mu.$$

In gleicher Weise lassen sich auch die übrigen Gleichungen (52) sowie (53) umformen, und wir erhalten folgendes System:

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{c' \varepsilon_0}{c} X_0 = \beta_0 \cos r - \gamma_0 \cos \mu, \\ \frac{c' \varepsilon_1}{c} Y_0 = \gamma_0 \cos \lambda - \alpha_0 \cos r, \\ \frac{c' \varepsilon_1}{c} Z_0 = \alpha_0 \cos \mu - \beta_0 \cos \lambda, \end{cases}$$

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{c' \alpha_0}{c} = Z_0 \cos \mu - Y_0 \cos r, \\ \frac{c' \beta_0}{c} = X_0 \cos r - Z_0 \cos \lambda, \\ \frac{c' \gamma_0}{c} = Y_0 \cos \lambda - X_0 \cos \mu. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die drei Gleichungen (54) mit  $\alpha_0$  bzw.  $\beta_0$  und  $\gamma_0$  und addieren sie, so ergibt dies

$$\frac{c' \varepsilon_0}{c} X_0 \alpha_0 + \frac{c' \varepsilon_1}{c} (Y_0 \beta_0 + Z_0 \gamma_0) = 0$$

oder

$$\varepsilon_0 X_0 \alpha_0 + \varepsilon_1 (Y_0 \beta_0 + Z_0 \gamma_0) = 0.$$

Da im allgemeinen  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_1$  in keiner bestimmten Beziehung zueinander stehen, so ist die letzte Gleichung nur möglich, wenn

$$X_0 \alpha_0 = 0 \quad \text{und} \quad Y_0 \beta_0 + Z_0 \gamma_0 = 0$$

ist.

Aus der Gleichung  $X_0 \alpha_0 = 0$  folgt, daß die Lichtschwingungen so stattfinden müssen, daß entweder  $X_0 = 0$  ist, oder daß  $\alpha_0 = 0$  ist. Ist  $X_0 = 0$ , so heißt das: die elek-

trischen Schwingungen müssen senkrecht zur  $x$ -Achse erfolgen. Die elektrischen Schwingungen müssen aber auch senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes sein. Sie müssen also senkrecht zu der Ebene erfolgen, welche durch die Fortpflanzungsrichtung und die  $x$ -Achse bestimmt wird. Diese Ebene nennt man den Hauptschnitt. Die magnetischen Schwingungen werden für letzteren Fall also im Hauptschnitt stattfinden. Ist hingegen  $\alpha_0 = 0$ , so werden die magnetischen Schwingungen senkrecht, die elektrischen hingegen parallel zum Hauptschnitt sein. Wir erhalten also das wichtige Resultat, daß in den von uns gekennzeichneten Kristallen die elektrischen sowohl als die magnetischen Schwingungen nur parallel oder senkrecht zum Hauptschnitt stattfinden können.

Multiplizieren wir die Gleichungen (54) der Reihe nach mit  $\cos \lambda$ ,  $\cos \mu$ ,  $\cos \nu$  und addieren sie, so erhalten wir

$$(56) \quad \varepsilon_0 X_0 \cos \lambda + \varepsilon_1 Y_0 \cos \mu + \varepsilon_1 Z_0 \cos \nu = 0.$$

Dieselbe Behandlung ergibt aus den Gleichungen (55)

$$\alpha_0 \cos \lambda + \beta_0 \cos \mu + \gamma_0 \cos \nu = 0.$$

Wird nun  $\alpha_0 = 0$ , so ist

$$\beta_0 \cos \mu = -\gamma_0 \cos \nu.$$

Wie wir von früher her wissen, stehen in diesem Falle die magnetischen Schwingungen senkrecht zum Hauptschnitt. Mit Rücksicht auf die letzte Gleichung können wir die Gleichungen (54) jetzt schreiben:

$$\frac{c' \varepsilon_0}{c} X_0 = (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) \frac{\beta_0}{\cos \nu},$$

$$\frac{c' \varepsilon_1}{c} Y_0 = -\cos \lambda \cos \mu \cdot \frac{\beta_0}{\cos \nu},$$

$$\frac{c' \varepsilon_1}{c} Z_0 = -\cos \lambda \cdot \beta_0,$$

oder

$$X_0 = \frac{c \beta_0}{c' \varepsilon_0 \cos \nu} (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu),$$

$$Y_0 = - \frac{c \beta_0}{c' \varepsilon_1 \cos \nu} \cos \lambda \cos \mu,$$

$$Z_0 = - \frac{c \beta_0}{c' \varepsilon_1 \cos \nu} \cos \lambda \cos \nu.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (55) ein, so ist die erste identisch erfüllt. Die beiden anderen ergeben

$$\frac{c' \beta_0}{c} = \frac{c \beta_0}{c' \varepsilon_0} (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) + \frac{c \beta_0}{c' \varepsilon_1} \cos^2 \lambda$$

und

$$\frac{c' \gamma_0}{c} = - \frac{c \beta_0 \cos^2 \lambda \cos \mu}{c' \varepsilon_1 \cos \nu} - \frac{c \beta_0 \cos \mu}{c' \varepsilon_0 \cos \nu} (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu).$$

Wegen  $\beta_0 \cos \mu = -\gamma_0 \cos \nu$  ergeben die beiden letzten Gleichungen dasselbe Resultat, welches wir nach den leicht durchzuführenden Kürzungen schreiben können

$$c'^2 = c^2 \left( \frac{\cos^2 \mu + \cos^2 \nu}{\varepsilon_0} + \frac{\cos^2 \lambda}{\varepsilon_1} \right).$$

Wegen  $\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$  ist  $\cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1 - \cos^2 \lambda = \sin^2 \lambda$ , und die letzte Gleichung wird

$$(57) \quad c'^2 = c^2 \left( \frac{\sin^2 \lambda}{\varepsilon_0} + \frac{\cos^2 \lambda}{\varepsilon_1} \right).$$

Haben wir demnach in irgendeinem Punkte des Kristalles eine elektromagnetische Erregung, so breiten sich die elektrischen Schwingungen, welche parallel zum Hauptschnitte erfolgen, nach den verschiedenen Richtungen mit verschiedener Geschwindigkeit aus. Eine jede Elementarwelle wird eine Rotations-

fläche, ähnlich einem Rotationsellipsoid sein, deren Rotationsachse parallel zur  $x$ -Achse ist.

Sind die elektrischen Schwingungen senkrecht zum Hauptschnitte, so ist  $X = 0$ , nach Gleichung (56) also

$$Y_0 \cos \mu = -Z_0 \cos \nu.$$

Danach ergeben die Gleichungen (55)

$$\alpha_0 = -\frac{c Y_0}{c' \cos \nu} (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu),$$

$$\beta_0 = \frac{c Y_0}{c' \cos \nu} \cos \lambda \cos \mu,$$

$$\gamma_0 = \frac{c Y_0}{c' \cos \nu} \cos \lambda \cos \nu.$$

Diese Werte in die Gleichungen (43) eingesetzt, liefern dann die Beziehung

$$c'^2 = \frac{c^2}{\epsilon_1}.$$

Das heißt: Licht, dessen elektrische Schwingungen senkrecht zum Hauptschnitte erfolgen, pflanzt sich in unserem Kristalle wie in einem isotropen Körper fort. Die Elementarwellen einer jeden Wellenfläche sind Kugelwellen.

Trifft demnach ein Lichtstrahl auf die Fläche eines optisch einachsigen Kristalles, etwa eines Kalkspates, so werden im Kristalle nur Schwingungen senkrecht und parallel zum Hauptschnitte erfolgen können. Wir müssen also die Schwingungen des einfallenden Strahles in zwei dementsprechende Komponenten zerlegen. Diese haben aber im allgemeinen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit und daher auch verschiedene Brechungsexponenten. Es tritt Doppelbrechung

ein. Dabei hat der eine Strahl, dessen Elementarwellen Kugelflächen sind, stets denselben Brechungsexponenten. Wir nennen ihn den ordentlichen Strahl. Seine elektrischen Schwingungen sind senkrecht zum Hauptschnitte. Der Brechungsindex des zweiten Strahles hängt von der Lage des einfallenden Strahles zur optischen Achse ab. Wir nennen ihn den außerordentlichen Strahl. Seine elektrischen Schwingungen erfolgen parallel zum Hauptschnitte. Seine Elementarwellen bilden kompliziertere Rotationsflächen mit einer zur  $x$ -Achse parallelen Rotationsachse.

Die optische Achse können wir jetzt auch als die Richtung definieren, in der sich das Licht des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt.

#### § 41. Huygens Theorie der Doppelbrechung.

Huygens erklärte die Erscheinungen der Doppelbrechung im Kalkspat mit Hilfe der Elementarwellen. Diese sind im Kalkspat jedoch nicht einfach Kugelwellen, sondern jeder vom Lichtstrahl getroffene Punkt des Kalkspats wird zum Erregungspunkt neuer Elementarwellen, deren eine eine Kugel, die andere ein Rotationsellipsoid darstellt; deren Rotationsachse die kleine Achse der Ellipse ist und die Größe des Durchmessers der Kugel-

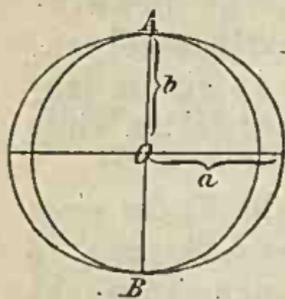


Fig. 35.

welle hat. Es liegt somit die Kugelwelle innerhalb des Ellipsoids und berührt es in zwei Punkten  $A$  und  $B$  (Fig. 35). Die Richtung  $AB$  nennt man die optische Achse. Sie fällt beim Kalkspat mit der Verbindungs-

geraden der stumpfen Rhomboederecken zusammen. Die Ebene, welche von der optischen Achse und dem Lichtstrahl gebildet wird, nennen wir den Hauptschnitt (§ 40).

Wir denken uns den Kalkspat senkrecht zur optischen Achse  $OX$  (Fig. 36) geschliffen. Das Lichtbündel  $SS'$  falle schief auf. In  $O$  entstehen sodann die zwei Elementarwellen, welche den Durchmesser bezüglich die kleine Achse  $OC$  erreicht haben, wenn der Punkt  $A$  der Lichtwelle nach  $B$  kommt. Die Tangenten von  $B$  an die Kugel bezüglich Ellipsoidfläche ergeben dann die zwei neuen Planwellen,

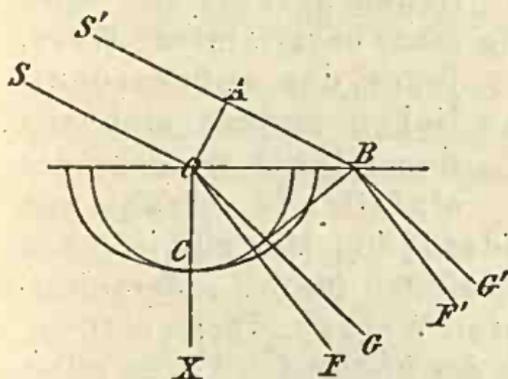


Fig. 36.

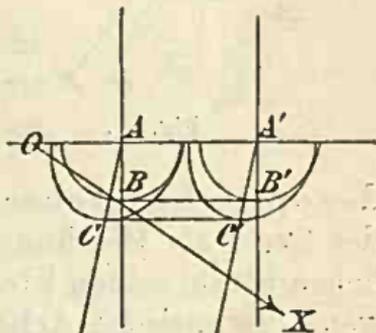


Fig. 37.

welche in den Richtungen  $F$  und  $G$  ihren Weg fortsetzen. Das Licht hat also tatsächlich eine Doppelbrechung erlitten. Würde es, anstatt schief, senkrecht einfallen, so wäre keine Brechung vorhanden.

Dies ist nicht mehr der Fall, wenn wir den Kalkspat schief zur optischen Achse schleifen. Es ergibt dann Fig. 37, in welcher  $OX$  die optische Achse sein soll, zwei Wellen, deren eine ungebrochen in der Richtung  $AB$  durch den Kalkspat geht, während die andere gebrochen wird und die Richtung  $AC$  einschlägt. Der ungebrochene Lichtstrahl, dessen Elementarwellen Kugelflächen sind, heißt der ordentliche Strahl. Seine Schwingungen er-

folgen senkrecht zum Hauptschnitt. Der andere jedoch, der außerordentliche Strahl, rührt von den Ellipsoiden her, und sein Licht schwingt parallel zum Hauptschnitt. Drehen wir den Kalkspat um den einfallenden Strahl als Achse, so behält der ordentliche Strahl seine Lage bei,

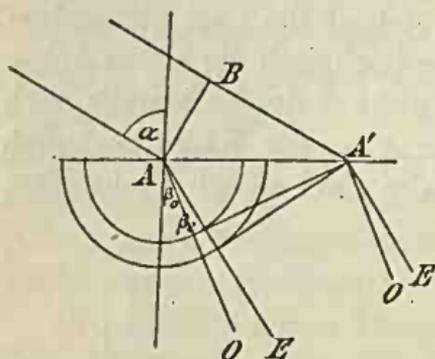


Fig. 38.

während der außerordentliche sich um jenen herumdreht. Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahls hat einen ganz bestimmten Wert, jener des außerordentlichen ändert sich mit dem Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der optischen Achse bildet (§ 40). Man gibt jedoch in der Regel als Brechungsexponenten für den außerordentlichen Strahl seinen kleinsten Wert an. Dieser tritt ein, wenn die optische Achse in der brechenden Fläche selbst liegt und senkrecht zur Einfallsebene ist. Wir erhalten dann den ordentlichen und außerordentlichen Strahl nach der Konstruktion Fig. 38, wo der kleinere Kreis der Kugelfläche angehört, während der größere der Äquator des Rotationsellipsoids ist.

## § 42. Erzeugung elliptisch und zirkular polarisierten Lichts.

Wir nehmen an, ein polarisierter Lichtstrahl falle senkrecht auf eine planparallele Kalkspatplatte, deren optische Achse  $HH$  (Fig. 39) senkrecht zum Einfallslot liegt, während die Schwingungen in der Richtung  $PP$  vor sich gehen.  $HH$  versinnlicht also gleichzeitig die Lage des Hauptschnitts. Die Dicke der Platte sei  $\Delta$ ; der Bewegungs-

zustand beim Einfallspunkt sei gegeben durch

$$E = E_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Dieser wird zerlegt in den ordentlichen und außerordentlichen Strahl. Ersterer ist beim Austritt aus der Platte

$$E_o = E_1 \sin \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\Delta}{o} \right),$$

letzterer

$$E_e = E_1 \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\Delta}{e} \right),$$

wenn wir mit  $o$  und  $e$  die Lichtgeschwindigkeit des ordentlichen bzw. außerordentlichen Strahls bezeichnen.

Wir wollen

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\Delta}{o} \right) = \psi,$$

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e} \right) = \vartheta$$

setzen, können sonach schreiben

$$E_o = \eta = a \sin \varphi \sin \psi, \quad E_e = \xi = a \cos \varphi \sin (\psi + \vartheta);$$

führen wir noch

$$a \cos \varphi = p, \quad a \sin \varphi = q$$

ein, so erhalten wir schließlich

$$\xi = p \sin (\psi + \vartheta), \quad \eta = q \sin \psi.$$

Betrachten wir diese Größen als rechtwinkelige Koordinaten einer ebenen Kurve, so erhalten wir für  $\vartheta = 2\pi$

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{q}{p} = \operatorname{tg} \varphi.$$

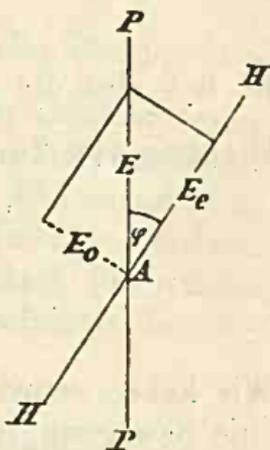


Fig. 39.

Das Licht der beiden Strahlen setzt sich also nach dem Austritt wieder zu einer geradlinigen Bewegung zusammen, welche dieselbe Schwingungsrichtung wie das einfallende Licht hat. Ist  $\vartheta = \pi$ , so wird

$$\xi = -p \sin \psi, \quad \eta = q \sin \psi,$$

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{q}{p} = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Es hat also die neue Schwingungsebene zur alten eine Drehung von  $2\varphi$  erhalten. Es sei nun  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , dann

$$\xi = p \cos \psi, \quad \eta = q \sin \psi,$$

$$\frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\eta^2}{q^2} = 1.$$

Wir haben somit als resultierenden Schwingungszustand eine Bewegung, die durch die Gleichung einer Ellipse dargestellt ist, weshalb wir das Licht elliptisch polarisiert nennen (§ 29). Ist die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts durch  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  gegeben, d. h. bildet die

Schwingungsrichtung mit dem Hauptschnitte einen Winkel von  $45^\circ$ , so wird  $p = q$  und wir haben die Gleichung eines Kreises. Licht von einem derartigen Bewegungszustand nennt man daher zirkular polarisiertes Licht.

Ist  $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ , so erhalten wir dieselbe Ellipse bzw. denselben Kreis, nur geht jetzt die Bewegung in entgegengesetzter Richtung vor sich.

Wir wissen, daß

$$\vartheta = \frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e} \right)$$

ist. Für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  wird demnach

$$\frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e} = \frac{\tau}{4}.$$

Nun ist aber  $\frac{\Delta}{o}$  die Zeit, welche der ordentliche Strahl braucht, um die Platte zu passieren,  $\frac{\Delta}{e}$  die Durchgangszeit für den außerordentlichen Strahl. Wir erhalten somit elliptisch bzw. zirkular polarisiertes Licht, wenn sich die Durchgangszeiten beider Strahlen um  $\frac{1}{4}$  Schwingungsdauer voneinander unterscheiden. Glimmer läßt sich in dünne Blätter spalten, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Man nennt ein solches Glimmerblättchen  $\frac{1}{4}$ -Undulationsglimmer.

### § 43. Polarisationsapparat — Turmalinzange.

Um zu erkennen, in welcher Weise polarisiertes Licht beim Durchgang durch Kristallplatten geändert wird, benutzt man einen sogenannten Polarisationsapparat. Ein solcher besteht aus zwei Hauptteilen, dem Polarisator und dem Analysator. Ersterer verwandelt das natürliche Licht in geradlinig polarisiertes. Dieses Licht läßt man dann durch die zu untersuchende Kristallplatte und sodann durch den Analysator gehen, aus welchem ebenfalls linear polarisiertes Licht austritt. Der einfachste derartige Apparat ist die sogenannte Turmalinzange. Der Turmalin hat die Eigenschaft, nur Licht von bestimmter Schwingungsrichtung durchzulassen. Bringen wir daher zwischen zwei Turmalinplatten einen Kristall, so kann durch Verdrehung der Turmaline gegeneinander alles erzielt werden, was man von einem Polarisationsapparat verlangt.

Es seien nun  $E_e = AM$  (Fig. 40) und  $E_o = AM'$  die beiden Schwingungen nach dem Passieren der Kristallplatte. Die Strahlen gelangen sodann durch den Analysator, der sie nur Schwingungen in der Richtung  $QQ$  ausführen läßt. Es könnte dies z. B. ein Spiegel sein, auf welchem die Strahlen unter dem Polarisationswinkel auffallen.

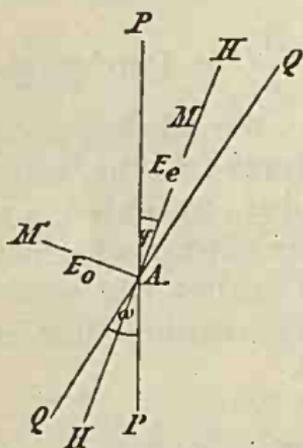


Fig. 40.

Wir haben nun nach dem Früheren

$$E_o = E_1 \sin \varphi \sin \psi,$$

$$E_e = E_1 \cos \varphi \sin (\psi + \vartheta).$$

Vom ordentlichen Strahl entfällt sodann auf die Richtung  $QQ$  die Komponente  $E_o \sin (\omega - \varphi)$ , wenn  $\omega - \varphi$  der Winkel zwischen dem Hauptschnitt der Kristallplatte und der Schwingungsebene des Analysators ist. Der außerordentliche Strahl liefert  $E_e \cos (\omega - \varphi)$ , und wir haben als resultierende Schwingung

$$\begin{aligned} E' &= E_e \cos (\omega - \varphi) - E_o \sin (\omega - \varphi) \\ &= E_1 \cos \varphi \cos (\omega - \varphi) \sin (\psi + \vartheta) - E_1 \sin \varphi \sin (\omega - \varphi) \sin \psi. \end{aligned}$$

Wir wollen hier die Glieder mit  $\cos \psi$  bzw.  $\sin \psi$  als Faktoren herausheben, erhalten somit

$$\begin{aligned} E' &= [E_1 \cos \varphi \cos (\omega - \varphi) \cos \vartheta - E_1 \sin \varphi \sin (\omega - \varphi)] \sin \psi \\ &\quad + E_1 \cos \varphi \cos (\omega - \varphi) \sin \vartheta \cos \psi. \end{aligned}$$

Wir haben also eine schwingende Bewegung von der Form

$$E' = A \sin \psi + B \cos \psi.$$

Die Amplitude  $J$  dieser Bewegung ist gegeben durch

$$J^2 = A^2 + B^2,$$

woraus für unsern speziellen Fall folgt

$$J^2 = E_1^2 \cos^2 \varphi \cos^2 (\omega - \varphi) + E_1^2 \sin^2 \varphi \sin^2 (\omega - \varphi) \\ - 2 E_1^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin (\omega - \varphi) \cos (\omega - \varphi) \cos \vartheta .$$

Fügen wir der zweiten Seite dieser Gleichung noch

$$- 2 E_1^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos (\omega - \varphi) \sin (\omega - \varphi) \\ + 2 E_1^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos (\omega - \varphi) \sin (\omega - \varphi)$$

hinzu, so können wir leicht finden

$$(58) \quad J^2 = E_1^2 \cos^2 \omega + E_1^2 \sin 2\varphi \sin (2\omega - 2\varphi) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} .$$

Wir setzen nun  $\omega = 0$ . Man nennt das die Parallelstellung, da die Schwingungen im Polarisator jenen im Analysator parallel sind. Wir haben dann

$$J_0^2 = E_1^2 - E_1^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} .$$

Für  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , die gekreuzte Stellung, erhalten wir hingegen

$$J_{\frac{\pi}{2}}^2 = E_1^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} .$$

Es ist somit

$$J_0^2 + J_{\frac{\pi}{2}}^2 = E_1^2 .$$

Das heißt, die Erscheinungen der Parallelstellung und der gekreuzten sind einander komplementär. Verändern wir die Lage des Hauptschnitts, so wird für die Kreuzstellung

$$J^2 = 0 ,$$

wenn

$$\varphi = 0 , \quad \frac{\pi}{2} , \quad \pi , \quad \dots$$

wird. In diesem Falle erhalten wir also ein dunkles Gesichtsfeld. Hat der Kristall die Eigenschaft, das Licht zirkular zu polarisieren, so geschieht dies für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  und  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Dann wird

$$J^2 = E_1^2 \cos^2 \omega - E_1^2 \cos 2\omega \cdot \frac{1}{2} = \frac{E_1^2}{2} + \frac{E_1^2}{2} \cos 2\omega$$

$$- \frac{E_1^2}{2} \cos 2\omega = \frac{E_1^2}{2}.$$

Es ist hier die Intensität des Lichts von der Stellung des Analysators ganz unabhängig.

#### § 44. Totale Reflexion.

Für die Brechung des Lichts fanden wir die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'},$$

welche immer einen Sinn hat, falls  $c > c'$  ist. Geht jedoch der Strahl von einem optisch dichteren in ein dünneres Medium, d. h. ist  $c < c'$ , so gelangen wir schließlich zu einem Einfallswinkel  $\alpha$ , für welchen  $\sin \beta = 1$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  wird.

Der Strahl tritt dann nicht mehr in das zweite Medium ein, sondern er wird für alle Winkel, die größer als dieser Grenzwinkel sind, vollständig reflektiert, weshalb wir diesen Vorgang „totale Reflexion“ und den Winkel  $\alpha$ , für welchen  $\beta = \frac{\pi}{2}$  wird, den Grenzwinkel der totalen Reflexion nennen.

Wir fanden für die Größe der Amplitude des reflektierten Lichts, welches senkrecht zur Einfallsebene schwingt, nach Gleichung (36)

$$\frac{E'}{E} = - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = - \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}.$$

Wir wollen die Substitution

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}$$

einführen. Dann haben wir

$$\frac{E'}{E} = \frac{\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}}{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}} = \frac{f - gi}{f + gi} = h + ki.$$

Wir erhalten somit bei der totalen Reflexion für die Amplitude der reflektierten Welle eine komplexe Zahl. Dies können wir uns so deuten: Für eine schwingende Bewegung haben wir die Gleichung  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -a^2 \varphi$  (Bd. II, § 10). Eine

Lösung ist

$$\varphi = A (\sin at + i \cos at),$$

wobei  $A$  jede beliebige Zahl sein kann. Ist  $A$  reell, so gilt die Lösung

$$\varphi = A \sin at.$$

Setzen wir die Amplitude imaginär etwa  $Ai$ , so

$$\varphi = A (i \sin at - \cos at).$$

Unsere Lösung ist dann

$$\varphi = -A \cos at.$$

Wir können also sagen: Multiplizieren wir  $A \sin at$  mit  $i$ , so wird daraus  $-A \cos at$ .

Es wird also unser Schwingungszustand nach der Reflexion

$$E' \sin \frac{2\pi t}{\tau} = E (h + k i) \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

$$= E \left( h \sin \frac{2\pi t}{\tau} - k \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right) = E \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta),$$

wenn wir

$$h = \cos \frac{2\pi \vartheta}{\tau}, \quad k = \sin \frac{2\pi \vartheta}{\tau}$$

setzen. Dies können wir tun, da sich leicht zeigen läßt, daß auch nach dem Obigen

$$h^2 + k^2 = 1$$

ist. Wir können nämlich

$$f - g i = (f + g i) (h + k i)$$

setzen und dies verwandeln in

$$f - g i = f h - g k + i (f k + g h).$$

Folglich ist

$$f = f h - g k, \quad -g = f k + g h.$$

Dividieren wir diese Gleichungen durch  $g$ , so erhalten wir

zwei Gleichungen für  $\frac{f}{g}$ , was eliminiert ergibt

$$h^2 + k^2 = 1.$$

Es läßt sich somit die frühere Annahme einführen,  $h$  durch den Kosinus,  $k$  durch den Sinus eines bestimmten Winkels darzustellen. Es folgt nun weiter, daß

$$E' = E$$

ist, da ja jetzt die neue Amplitude durch (Bd. II, § 8)

$$E'^2 = E^2 (h^2 + k^2)$$

bestimmt ist.

Für die Amplitude des reflektierten Lichts, welches in der Einfallsebene schwingt, haben wir nach Gleichung (41)

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \frac{E'}{E} &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \\
 &= (h + ki) \cdot - \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= (h + ki) \frac{\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}}{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}} \\
 &= (h + ki) \frac{l - mi}{l + mi} = (h + ki)(r + si).
 \end{aligned} \right\} (59)
 \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz der Lichtkomponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene ist daher durch  $r + si$  bestimmt. Nennen wir sie  $\delta$ , so wird

$$r = \cos \frac{2\pi\delta}{\tau}, \quad s = \sin \frac{2\pi\delta}{\tau}.$$

Auch hier folgt, wie oben,

$$E' = E.$$

Es entsprechen also unsere Formeln insofern tatsächlich der Wirklichkeit, als aus ihnen die Totalreflexion folgt; doch werden wir sofort noch weitere Konsequenzen kennenlernen, die alle durch das Experiment erhärtet sind.

### § 45. Elliptische Polarisation durch totale Reflexion.

Wir wollen annehmen, daß die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

mit der Einfallsebene den Winkel  $\varphi$  bildet. Dann sind die

beiden Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene

$$\xi = E \sin \varphi, \quad \eta = E \cos \varphi,$$

folglich, wie wir im vorhergehenden Paragraphen erfahren haben, nach der Reflexion

$$\xi' = E_0 \sin \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta),$$

$$\eta' = E_0 \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta - \delta).$$

Wird  $\delta = \frac{\tau}{4}$ , so setzen sich die beiden Komponenten zu einer Schwingung zusammen, welcher die Gleichung

$$\frac{\xi'^2}{E_0^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\eta'^2}{E_0^2 \cos^2 \varphi} = 1$$

entspricht. Wir haben somit elliptisch polarisiertes Licht.

Dies wird zu zirkular polarisiertem, wenn  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  ist.

Wird nun  $\delta = \frac{\tau}{4}$ , so wird  $r = \cos \frac{2\pi\delta}{\tau} = 0$ . Aus

der Gleichung

$$\frac{l - m i}{l + m i} = r + s i$$

finden wir

$$r = \frac{l^2 - m^2}{l^2 + m^2}.$$

Soll demnach  $r = 0$  werden, so muß  $l = m$  sein. Wir finden daher nach Gleichung (59)

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \beta - 1}$$

oder

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha (\sin^2 \beta - 1).$$

Hier können wir  $\sin \beta$  durch  $\alpha$  und den Brechungsexponenten  $n$  aus der Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}$$

ersetzen, wenn wir den Brechungsexponenten beim Gang des Lichts aus dem dünneren ins dichtere Medium  $n$  nennen.

Es läßt sich nun leicht die Gleichung

$$\sin^4 \alpha - \frac{n^2 + 1}{2n^2} \sin^2 \alpha = -\frac{1}{2n^2}$$

und somit auch

$$\sin^2 \alpha = \frac{n^2 + 1}{4n^2} \pm \sqrt{\frac{(n^2 + 1)^2}{16n^4} - \frac{1}{2n^2}}$$

herleiten. Soll also  $\alpha$  einen reellen Wert haben, so muß  $\frac{(n^2 + 1)^2}{16n^4} > \frac{1}{2n^2}$  sein. Daraus folgt aber ein Brechungs-

exponent, welcher so groß ist, daß nur beim Diamant durch eine einmalige Totalreflexion elliptisch polarisiertes Licht zu erhalten wäre. Wir

können aber die Phasendifferenzen summieren.

Lassen wir daher einen Lichtstrahl, anstatt einmal, zweimal total reflektieren, so daß jedesmal eine Phasendifferenz

$\delta = \frac{\tau}{8}$  entsteht, dann er-

halten wir ebenfalls elliptisch polarisiertes Licht.

Dies geschieht im Fresnelschen Parallelepiped  $ABCD$  (Fig. 41), dessen Winkel  $\alpha$  so geschliffen sind, daß sie einer

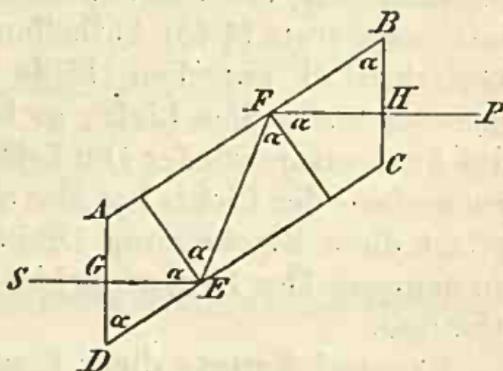


Fig. 41.

Phasendifferenz  $\delta = \frac{\tau}{8}$  entsprechen. Ein bei  $G$  senkrecht eintretender geradlinig polarisierter Lichtstrahl wird daher bei  $H$  in der Richtung  $HP$  als elliptisch polarisierter austreten. Geht die ursprüngliche Schwingung unter einem Winkel von  $45^\circ$  zur Einfallsebene  $GEF$  vor sich, so erhalten wir einen zirkular polarisierten Strahl.

Es eignet sich ein derartiges Parallelepipèd viel besser zur Erzeugung zirkular polarisierten Lichts, als der sogenannte  $\frac{1}{4}$ -Undulationsglimmer. Da in letzterem der Gangunterschied des ordentlichen und außerordentlichen Strahls  $\frac{1}{4}$  Schwingungsdauer ausmachen soll, so läßt sich die Zirkularpolarisation nur für eine bestimmte Farbe genau herstellen, indem ja die Wellenlänge mit der Farbe sich erheblich verändert, während die Änderung des Brechungsexponenten eine verhältnismäßig geringe ist.

#### § 46. Drehung der Polarisationsene.

Wir gehen von der bekannten Tatsache aus, daß bei der Kreuzstellung von Polarisator und Analysator eines Polarisationsapparats (§ 43) Aufhellung eintritt, sobald wir einen Quarzkristall zwischen beide bringen. Benutzen wir monochromatisches Licht, so können wir durch Drehung des Analysators wieder Dunkelheit herstellen. Die Schwingungsebene des Lichts hat also eine Drehung erfahren. Man pflegt diese Erscheinung Drehung der Polarisationsene zu nennen. Der Drehwinkel ist proportional der Dicke des Quarzes.

Fresnel deutete diese Erscheinung in sehr eigentümlicher Weise. Wir denken uns die Schwingungsrichtung des in den Kristall eintretenden Lichts in zwei Komponenten zerlegt. Die Komponente senkrecht zur Schwingungsebene des Polarisators, in die wir die  $x$ -Achse eines rechtwinkligen

Koordinatensystems legen, nennen wir  $\xi$ , jene senkrecht dazu, d. i. parallel zur  $y$ -Achse  $\eta$ . Die  $z$ -Achse ist also identisch mit der Achse des Polarisationsapparats.

Das eintretende Licht sei dargestellt durch

$$E = \eta_0 = E_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}, \quad \xi_0 = 0,$$

da ja das Licht parallel zur  $y$ -Achse schwingt. Der Eintrittspunkt in den Kristall sei der Ursprung des Koordinatensystems. Für einen Punkt  $z$  im Kristall haben wir also die Lichtbewegung

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} \right),$$

wenn wir unter  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Kristall verstehen. Die Schwingungsrichtung hat sich aber jetzt um den Winkel  $\varphi$  gedreht, und zwar ist  $\varphi = kz$ , da die Drehung ja proportional der Dicke des Kristalls ist. Wir wollen die Schwingung jetzt zerlegen in die Komponenten

$$\eta = E \cos \varphi, \quad \xi = E \sin \varphi,$$

oder anders geschrieben

$$\eta = E_0 \cos kz \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} \right),$$

$$\xi = E_0 \sin kz \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} \right).$$

Für die weitere Rechnung gebrauchen wir die trigonometrischen Formeln

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta,$$

$$- \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Wir wenden diese Formeln auf die Gleichungen für  $\eta$  und  $\xi$

an, indem wir  $kz = \alpha$ ,  $\frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} \right) = \beta$  setzen. Danach wird

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{E_0}{2} \sin \left[ kz + \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] - \frac{E_0}{2} \sin \left[ kz - \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] \\ &= \frac{E_0}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} + \frac{k\tau z}{2\pi} \right) + \frac{E_0}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} - \frac{k\tau z}{2\pi} \right) \\ &= \eta_1 + \eta_2, \\ \xi &= \frac{E_0}{2} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} - \frac{k\tau z}{2\pi} \right) - \frac{E_0}{2} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{z}{c} + \frac{k\tau z}{2\pi} \right) \\ &= \xi_1 - \xi_2. \end{aligned}$$

Wäre von diesen Schwingungen  $\eta_1$  und  $\xi_2$  allein vorhanden, so würden sie zusammen einen zirkular polarisierten Lichtstrahl von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c'$  geben, wobei

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{c} - \frac{k\tau}{2\pi}$$

zu setzen wäre. Gleicherweise würden  $\eta_2$  und  $\xi_1$  zusammen zirkularpolarisiertes Licht, dessen Drehsinn aber entgegengesetzt ist, von der Geschwindigkeit  $c''$  geben, die wir aus der Gleichung

$$\frac{1}{c''} = \frac{1}{c} + \frac{k\tau}{2\pi}$$

gewinnen. Wir können also sagen: Wenn linear polarisiertes Licht auf eine Quarzplatte auffällt, verwandelt es sich in zwei kreisförmige Schwingungen von entgegengesetzter Schwingungsrichtung und verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die sich nach dem Austritt wieder zu einer geradlinigen Schwingung jedoch von anderer Richtung als beim Eintritt zusammensetzen.

Fresnel konnte nun auch experimentell zeigen, daß

dem so ist. Er schliff einen Quarzkristall so zu, daß die Austrittsfläche schief zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts stand. Dann mußte Brechung eintreten. Speziell bei der verschiedenen Geschwindigkeit des zirkular polarisierten Lichts mußte sich Doppelbrechung zeigen und außerdem mußte jeder der beiden Strahlen zirkular, aber in entgegengesetzter Richtung schwingend polarisiert sein. Das hat sich alles tatsächlich bestätigt.

### § 47. Breite der Spektrallinien — Interferenzfähigkeit des Lichts.

Stellen wir uns ein Gas nach der kinetischen Gastheorie vor (Bd. II, §§ 52—54), so gehen die Lichtwellen eines leuchtenden Gases von den Molekeln aus, die nach dem Maxwell'schen Gesetz (Bd. II, § 66) mit den verschiedensten Geschwindigkeiten umherfliegen, sich uns nähern oder von uns entfernen. Wir werden somit nach dem Dopplerschen Prinzip (Bd. II, § 7) in einem Spektroskop Licht in allen möglichen Wellenlängen zwischen

$$\lambda_1 = \frac{c + v}{n} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{c - v}{n}$$

beobachten können, falls wir unter  $v$  die mittlere Geschwindigkeit der Molekeln in der Sehlinie verstehen. Man pflegt den Unterschied

$$d\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$$

die Breite der Spektrallinien zu nennen, welche somit gegeben ist durch

$$d\lambda = \frac{c + v}{n} - \frac{c - v}{n} = \frac{2v}{n}.$$

Besitzt ein leuchtender Körper mehrere Spektrallinien, so müssen jene mit kleinerer Schwingungszahl breiter als jene mit größerer sein, also die roten Linien breiter als die blauen, was tatsächlich beobachtet werden kann.

Lassen wir homogenes Licht von einem Newtonschen Farbenglas (§ 37) reflektieren, so sehen wir in der Mitte einen dunklen Fleck, der von einer großen Anzahl dunkler Kreise umgeben ist. Heben wir mit Hilfe einer Schraube die Linse langsam von dem planparallelen Glas ab, so werden der dunkle Fleck sowie sämtliche Kreise kleiner. Schließlich verschwindet der dunkle Fleck, es tritt an seine Stelle ein heller. Die Kreise ziehen sich aber immer mehr zusammen, der innerste wird zum dunklen Fleck. Es ist dann der Mittelpunkt der Linse von der Planplatte um  $\frac{\lambda}{2}$  entfernt. Dieselbe Erscheinung zeigt sich bei der Entfernung  $\frac{2\lambda}{2}$ ,  $\frac{3\lambda}{2}$  ... Je weiter wir die Linse von der Platte entfernen, desto mehr Kreise werden gegen die Mitte wandern und dort verschwinden.

Hätten wir vollkommen homogenes Licht, also Licht von einer ganz bestimmten Wellenlänge, so müßte der geschilderte Versuch bei jedem beliebigen Abstand der Linse von der Platte gelingen. In Wirklichkeit zeigt sich jedoch, daß die dunklen Kreise des Newtonschen Farbenglases mit wachsender Dicke der Luftschicht immer blasser werden und schließlich verschwinden. Es zeigt sich ferner, daß für verschiedene Lichtquellen dieses Verschwinden bei verschiedener Schichtdicke eintritt. Je größer die Schichtdicke werden kann, bis die Interferenzkreise verschwinden, desto größer, sagen wir, ist die Interferenzfähigkeit des Lichtes.

Die Interferenzfähigkeit wird also auch abhängig sein von der von uns im vorigen Paragraphen definierten Breite der Spektrallinien. Hätten wir z. B. Licht, welches aus zwei Sorten von nahezu gleicher Wellenlänge  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  besteht, so werden anfänglich deutliche Interferenzringe auf

dem Farbenglas auftreten. Es sei nun

$$\frac{k \lambda_1}{4} = \frac{(k + 1) \lambda_2}{4},$$

wobei  $k$  eine größere gerade Zahl sein soll. In diesem Falle wird für die Schichtdicke  $\frac{k \lambda_1}{4}$  des Farbenglases das Licht von der Wellenlänge  $\lambda_1$  ausgelöscht, jenes von der Wellenlänge  $\lambda_2$  besitzt ein Helligkeitsmaximum. Wir werden daher keine Interferenzringe mehr wahrnehmen. Bei größerer Schichtdicke können jedoch wieder sichtbare Interferenzringe auftreten. Diese Beobachtung wurde tatsächlich von Fizeau bei Natriumlicht gemacht, und er zog daraus bereits den Schluß, daß das gelbe Natriumlicht aus zwei Lichtsorten bestehen muß, was vom Spektroskop ja tatsächlich bestätigt wird.

Haben wir nun Licht von einer bestimmten spektroskopischen Breite, so muß aus demselben Grunde von einer gewissen Schichtdicke des Farbenglases die Interferenzmöglichkeit aufhören, und zwar um so früher, je breiter die Spektrallinien sind. Nach unserer Betrachtung im vorigen Paragraphen werden wir um so breitere Spektrallinien erhalten, je kleiner das Molekulargewicht des glühenden Dampfes ist. In der Tat hat sich bestätigt, daß das Quecksilberlicht weitaus interferenzfähiger ist als das Licht des in einer Geißlerröhre glühenden Wasserstoffs.

#### § 48. Wellen- und Gruppengeschwindigkeit.

Wir lernten (Bd. II, § 9) bei der Besprechung der Schwebungen von Tönen das Zusammenwirken zweier Wellenzüge kennen, die sich in der Luft mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen, aber in der Wellenlänge etwas verschieden sind. Wir wollen jetzt die Untersuchung etwas allgemeiner führen, indem wir nicht nur die zeitliche Änderung der

Dichte der Luft an einem bestimmten Punkte z. B. an unserm Ohr ins Auge fassen, sondern auch die Verhältnisse auf dem ganzen Weg der Wellen untersuchen. Wir beschränken uns auf ebene Wellen. Einen dementsprechenden Wellenzug können wir darstellen durch

$$\sigma = A \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x}{v} \right),$$

wobei die Dichtenänderung  $\sigma$  als Funktion der Amplitude  $A$ , der Schwingungsdauer  $\tau$ , der Zeit  $t$ , des Weges  $x$  und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  gegeben ist.

Wir denken uns nun zwei unendlich lange Wellenzüge. Der Einfachheit halber geben wir ihnen dieselbe Amplitude. Ihre Schwingungsdauer sei  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$  und wir setzen auch gleich voraus, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen wie etwa bei den Wasserwellen (Bd. I, § 78) eine Funktion der Schwingungsdauer sei. Es gehöre also zur Schwingungsdauer  $\tau_1$  die Geschwindigkeit  $v_1$ , zu  $\tau_2$  analog  $v_2$ . Führen wir statt der Schwingungsdauern die Schwingungszahlen ein, setzen also  $\frac{1}{\tau_1} = n_1$ ,  $\frac{1}{\tau_2} = n_2$ , so erhalten wir als

Resultat der Welleninterferenz

$$\sigma = A \left[ \sin 2\pi n_1 \left( t - \frac{x}{v_1} \right) + \sin 2\pi n_2 \left( t - \frac{x}{v_2} \right) \right].$$

Diese Gleichung wollen wir nach dem Satz

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

verwandeln in

$$\begin{aligned} \sigma = 2A \sin \pi \left[ (n_1 + n_2)t - \left( \frac{n_1}{v_1} + \frac{n_2}{v_2} \right) x \right] \\ \times \cos \pi \left[ (n_1 - n_2)t - \left( \frac{n_1}{v_1} - \frac{n_2}{v_2} \right) x \right]. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt

$$n_1 + n_2 = 2n, \quad \frac{n_1}{v_1} + \frac{n_2}{v_2} = \frac{2n}{v}$$

einführen, so daß wir erhalten

$$(60) \quad \begin{cases} \sigma = 2A \sin 2\pi n \left( t - \frac{x}{v} \right) \\ \times \cos \pi \left[ (n_1 - n_2)t - \left( \frac{n_1}{v_1} - \frac{n_2}{v_2} \right) x \right]. \end{cases}$$

Betrachten wir den Zustand  $\sigma$  an einem bestimmten Punkt des Raums etwa für  $x = 0$ , so ergibt sich

$$\sigma = 2A \cos \pi (n_1 - n_2) t \sin 2\pi n t.$$

Wenden wir das auf zwei Töne an, so erhalten wir ohne weiteres die Formel für die Schwebungen. Wir hören einen Ton von der Schwingungszahl  $n$  mit periodisch wechselnder Amplitude. Zur Zeit  $t = 0$  ist sie  $2A$ . Wird  $(n_1 - n_2)t = \frac{1}{2}$ , so wird die Amplitude gleich Null. Für  $(n_1 - n_2)t = 1$  ist sie  $-2A$ , was jedoch dasselbe wie  $+2A$  zur Folge hat, d. h. sie ist wieder ein Maximum usw. Wir können daher  $n_0 = n_1 - n_2$  die Periodenzahl der Schwebungen nennen.

Gehen wir von diesem speziellen zum allgemeinen Fall der Gleichung (60) über, setzen wir aber wieder voraus, daß  $n_0$  klein gegen  $n_1$  und  $n_2$ , also  $n_1$  von  $n_2$  wenig verschieden sei. Weiter wollen wir

$$\frac{n_1}{v_1} - \frac{n_2}{v_2} = \frac{n_0}{u}$$

einführen. Demnach wird Gleichung (60)

$$\sigma = 2A \cos \pi n_0 \left( t - \frac{x}{u} \right) \sin 2\pi n \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

Diese Gleichung stellt einen unendlich langen Wellenzug

von periodisch veränderlicher Amplitude dar. Die maximale Amplitude wandert in der  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $u$  fort. Das ist aber im allgemeinen eine andere Geschwindigkeit als  $v$ , mit der sich die einzelnen Wellen fortpflanzen. Man pflegt zum Unterschied von der Wellengeschwindigkeit die Geschwindigkeit  $u$  die Gruppengeschwindigkeit zu nennen.

Die Schallwellen in der Luft haben alle dieselbe Geschwindigkeit, ebenso die Lichtwellen im leeren Raum oder mit sehr großer Annäherung in der Luft. Gruppengeschwindigkeit und Wellengeschwindigkeit unterscheiden sich nicht voneinander. Anders ist es bei den Wasserwellen oder beim Licht in einem durchsichtigen festen oder flüssigen Körper. Hier müssen Unterschiede zwischen den beiden Arten der Geschwindigkeit auftreten.

#### § 49. Die Lichtgeschwindigkeit in durchsichtigen Körpern.

Das weiße Licht setzt sich aus einer kontinuierlichen Reihe von Farben zusammen, kontinuierlich insofern, als innerhalb eines bestimmten Intervalls Strahlen jeder beliebigen Schwingungszahl  $\nu$  vorhanden sind. Wir beschränken uns auf einen engen Spektralbereich und untersuchen die Interferenzen der einzelnen Lichtstrahlen. Haben wir natürliches Licht, so können wir durch ein Strahlenbündel zwei senkrecht zueinander stehende Ebenen gelegt denken. Jeden Lichtvektor (§ 35) zerlegen wir in zwei Komponenten, die in die beiden Ebenen hineinfallen. Für jede dieser Ebenen gelten dann dieselben Vorgänge. Wegen des engen Spektralbereiches können wir für jede Frequenz  $\nu$  die Amplitude  $a$  als konstant ansehen. Für jeden unbegrenzten Wellenzug gilt die Gleichung (§ 48)

$$\sigma = a \sin 2\pi \nu \left( t - \frac{x}{v} - \delta \right) = a \sin \varphi ,$$

woraus sich die Bedeutung von  $\varphi$  ohne weiteres ergibt, während  $\delta$  der Phase (Bd. II, § 7) Rechnung trägt.

Jener Teil des Lichtstrahls, dessen Frequenzen zwischen  $\nu$  und  $\nu + d\nu$  liegen, wird zur Interferenz einen Beitrag liefern, der  $a \sin \varphi d\nu$  proportional ist. Die gesamte Interferenzerscheinung kann daher dargestellt werden durch

$$\psi = a \int_{\nu_1}^{\nu_2} \sin \varphi d\nu,$$

wobei  $\nu_1$  und  $\nu_2$  die Grenzen des kleinen Spektralbereiches sind. Wir wollen  $\varphi$  in eine Reihe entwickeln, indem wir es als Funktion von  $\nu - \nu_0$  betrachten. Dann ist

$$\varphi(\nu - \nu_0) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} (\nu - \nu_0).$$

Wegen des engen Spektralbereiches können wir die höheren Glieder der Reihe vernachlässigen. Danach wird

$$\begin{aligned} \psi &= a \int_{\nu_1}^{\nu_2} \sin \left[ \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} (\nu - \nu_0) \right] d\nu \\ &= a \frac{\left. -\cos \left[ \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} (\nu - \nu_0) \right] \right|_{\nu_1}^{\nu_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}} \\ &= \frac{a}{\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}} \left\{ \cos \left[ \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} (\nu_1 - \nu_0) \right] \right. \\ &\quad \left. - \cos \left[ \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} (\nu_2 - \nu_0) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Wir behandeln diese Gleichung weiter mit Zuhilfenahme der Formel

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

erhalten somit

$$\psi = \frac{2a}{\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}} \sin \left[ \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - \nu_0 \right) \right] \sin \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \cdot \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} \right).$$

Wir wählen  $\nu_0 = \frac{\nu_2 + \nu_1}{2}$ ; dann ist

$$\psi = a \frac{2 \sin \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \cdot \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} \right) \sin \varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}},$$

indem wir wegen des engen Spektralbereiches ja auch für  $\varphi(0)$  einen Mittelwert  $\varphi$  einsetzen können.

Unser Resultat stellt also einen Wellenzug  $\sin \varphi$  dar mit der veränderlichen Amplitude

$$(61) \quad A = 2a \frac{\sin \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \cdot \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} \right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}}.$$

Wird  $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ , so erreicht  $A$  seinen größten Wert  $a(\nu_2 - \nu_1)$ .

Erinnern wir uns an die Bedeutung des  $\varphi$ , so erkennen wir, daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 2\pi \left( t - \frac{x}{v} - \delta \right) - 2\pi \nu \left[ \frac{d \left( \frac{1}{v} \right)}{d\nu} x + \frac{d\delta}{d\nu} \right]$$

ist, da nur  $v$  und  $\delta$  von  $\nu$  abhängig sind. Überlegen wir weiter, daß

$$\frac{1}{v} + \frac{\nu \left( d \frac{1}{v} \right)}{d\nu} = \frac{1}{v} - \frac{\nu d\nu}{v^2 d\nu} = \frac{d \left( \frac{\nu}{v} \right)}{d\nu}$$

ist, so können wir schreiben

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 2\pi \left( t - \frac{d \left( \frac{\nu}{v} \right)}{d\nu} x - \delta - \nu \frac{d\delta}{d\nu} \right).$$

Ist  $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$  konstant, so bleibt auch die Amplitude der Wellengruppe — wählen wir etwa die größte  $a(\nu_2 - \nu_1)$  — konstant. Dann muß aber nach der letzten Gleichung

$t - \frac{d \left( \frac{\nu}{v} \right)}{d\nu} x$  konstant, d. h. gleich Null sein, wenn wir für  $t = 0$  auch  $x = 0$  wählen.  $\delta + \nu \frac{d\delta}{d\nu}$  kann als ein Mittelwert ebenfalls als konstant, d. h. als Phase der Gruppe an-

gesehen werden. Aus  $t - \frac{d \left( \frac{\nu}{v} \right)}{d\nu} x = 0$  folgt aber

$$\frac{x}{t} = \frac{d\nu}{d \left( \frac{\nu}{v} \right)} = u,$$

die Geschwindigkeit, mit der sich die Gruppe fortpflanzt. Nach dem Früheren können wir diese Gruppengeschwindigkeit  $u$  auch in die Gleichung bringen

$$\frac{1}{u} = \frac{d \left( \frac{\nu}{v} \right)}{d\nu} = \frac{1}{v} + \nu \frac{d \left( \frac{1}{v} \right)}{d\nu} = \frac{1}{v} - \frac{\nu}{v^2} \frac{d\nu}{d\nu}.$$

Wenden wir diese Gleichung auf die Fortpflanzung des Schalls in der Luft oder des Lichts im Vakuum an, so ist für jede Schwingungszahl  $\nu$  des Tons bzw. der Farbe die Geschwindigkeit  $v$  dieselbe, also von  $\nu$  unabhängig. Dann wird

$$\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{d\nu} = 0 \quad \text{und} \quad u = v.$$

In diesem Fall ist also die Gruppengeschwindigkeit gleich der Wellengeschwindigkeit.

Anders ist es jedoch z. B. für das Licht in einem festen oder flüssigen durchsichtigen Körper. Bei der normalen Dispersion nimmt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  mit

der Schwingungszahl  $\nu$  ab, folglich ist  $\frac{dv}{d\nu}$  negativ, also  $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$  oder  $u < v$ .

Wir setzen die Energie der Welle (§ 34) proportional dem Quadrat der Amplitude. In der Wellengruppe wird dort die größte Energie sein, wo die größte Amplitude  $A$  vorhanden ist. Die Fortpflanzung der Energie erfolgt demnach mit der Gruppengeschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit kommt in Betracht bei den Methoden der Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau und Foucault. Für die Lichtgeschwindigkeit in der Luft spielt das keine Rolle, weil der Brechungsexponent sehr wenig von Eins abweicht und die Dispersion nicht merklich wird. Anders ist es jedoch in dem stark brechenden Schwefelkohlenstoff. Da zeigt sich, daß die Lichtgeschwindigkeit, die nach der Foucaultschen Methode von Michelson gefunden wurde, in der Tat abweicht von jener, die sich aus dem Brechungsexponenten (§ 12) ergibt. Die theoretische Korrektur beträgt 7,5% in Übereinstimmung mit dem experimentellen Resultat.

## § 50. Emanationstheorie und Lichtbrechung.

Newton, der das Licht als einen feinen Stoff ansah, der von den leuchtenden Körpern ausgesendet wird, erklärte die Brechung der Lichtstrahlen, wenn sie aus dem Vakuum in einen durchsichtigen Körper eintreten, folgendermaßen. Die Körperatome üben auf die Lichtkorpuskeln Anziehungskräfte aus, die ähnlich wie die Kapillarkräfte (Bd. I, § 65) nur an der Oberfläche des Körpers zur Geltung kommen, da sie nur auf sehr kurze Entfernungen merkbar werden und sich im Innern des Körpers gegenseitig aufheben. Beim Übertritt eines Lichtkorpuskels aus dem Vakuum in den Körper leisten die Anziehungskräfte eine ganz bestimmte Arbeit  $a$ . Die Masse des Lichtkorpuskels sei  $m$ . Dann muß nach dem Satz von der Erhaltung der Energie (Bd. I, § 14)

$$\frac{m c^2}{2} + a = \frac{m c'^2}{2}$$

sein. Diese Gleichung ist ganz unabhängig vom Einfallswinkel des Korpuskels. Das heißt: Es wird immer ein ganz bestimmter Unterschied zwischen  $c$  und  $c'$  sein, oder das Licht hat im Vakuum immer die Geschwindigkeit  $c$ , im Körper immer die Geschwindigkeit  $c'$ .

Die Bewegungsgröße oder der Impuls  $G = m c$  des Lichtkorpuskels (Bd. I, § 11) muß daher ebenfalls sowohl im leeren Raum als auch im Körper unabhängig vom Einfallswinkel  $\alpha$  und Brechungswinkel  $\beta$  (§ 12) immer denselben Unterschied aufweisen. Die Kraft des Körpers auf das Lichtkorpuskel wirkt in der Richtung der Normalen zur brechenden Fläche. Nur die Komponente des Impulses in der Normalen wird demnach beim Passieren der Körperoberfläche eine Änderung erfahren. Die Komponente senkrecht dazu kann sich nicht ändern. Diese ist aber  $G \sin \alpha$  bzw.  $G' \sin \beta$ , wenn  $G'$  der Impuls im Körper ist. Es ergibt

sich also die Gleichung  $G \sin \alpha = G' \sin \beta$  oder

$$\frac{G'}{G} = \frac{c'}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Da  $G'$  und  $G$  aber nach dem Obigen konstante Größen sind, so ist auch ihr Verhältnis konstant, also auch

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

eine Konstante. Wir erhalten das Brechungsgesetz (§ 5). Während nach der Huygensschen Theorie der Brechungsexponent  $n$  aber gleich dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im ersten Medium zu jener im zweiten ist, ist nach der Newtonschen Theorie das reziproke Verhältnis anzunehmen. Die Foucaultsche Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit im Wasser hat zugunsten der Huygensschen Theorie entschieden.

### § 51. Die Korpuskulartheorie des Lichts und die Relativitätstheorie.

Nach der speziellen Relativitätstheorie ist die Energie  $L$  einer Masse  $m$  (Bd. I, § 54)  $L = m c^2$ , wenn  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Beim Übertritt aus dem Vakuum in einen Körper nimmt die Energie des Lichtkorpuskels nach dem vorhergehenden Paragraphen um die Übertrittsarbeit  $a$  zu. Im selben Verhältnis muß also auch die Masse  $m$  zunehmen, so daß auch der Impuls, selbst bei Abnahme der Geschwindigkeit, eine Zunahme erfahren kann. Das ermöglicht uns die Korpuskular- und Wellentheorie in Übereinstimmung zu bringen. Nach der einen muß  $\frac{G'}{G} = n$ , nach der anderen  $\frac{c}{c'} = n$  sein, woraus  $G' c' = G c$  folgt. Das Produkt  $G' c'$  muß also für alle Körper denselben Wert  $G c$  des

leeren Raumes haben. Für diesen ist  $G = m c$ , daher  $G c = m c^2$ . Das ist aber die Energie des Korpuskels, so daß die Invariante  $G' c'$  die Energie  $W$  des Korpuskels im leeren Raum darstellt. Es ergibt sich die bedeutungsvolle Gleichung

$$(62) \quad G' c' = W,$$

durch die Korpuskular- und Wellentheorie miteinander verknüpft erscheinen.

## Röntgenstrahlen.

### § 52. Bremsstrahlung, charakteristische, Sekundärstrahlung — Polarisation — Brechung — $\gamma$ -Strahlen.

Wie die Lichtstrahlen (§ 26) werden auch die Röntgenstrahlen als elektromagnetische Strahlen aufgefaßt. Das kann nur geschehen, wenn wir an allen diesen Strahlen gleichartige Erscheinungen nachweisen können. Die Röntgenstrahlen gehen bekanntlich von der Antikathode der Röntgenröhre aus, wo sie durch die von der Kathode auftreffenden Korpuskular-(Kathoden-)strahlen erzeugt werden. Da sie weder von elektrischen noch magnetischen Feldern abgelenkt werden, kann man sie selbst nicht als Korpuskularstrahlen ansprechen, sondern muß sie als Wellen elektromagnetischer Natur auffassen.

Ihr Ursprung ist auch ohne weiteres klar. Die Geschwindigkeit der Elektronen wird beim Auftreffen auf die Antikathode fast völlig vernichtet. Es tritt eine starke Bremsung, also eine elektromagnetische Störung ein. Diese pflanzt sich nach allen Richtungen als elektromagnetische Kugelwelle fort. Nach § 25 müssen diese Wellen Transversalwellen sein. Die entsprechende Strahlung nennt man

Bremsstrahlung. Ihre spektroskopische Zerlegung (§ 54) ergibt Strahlen kontinuierlich aufeinanderfolgender Wellenlängen, das kontinuierliche Röntgenspektrum (Bd. V, § 51).

Neben dem kontinuierlichen Spektrum treten einzelne dem jeweiligen Antikathodenmaterial eigentümliche diskrete Wellenlängen auf, die „charakteristische“ Strahlung, die also ein Röntgenlinienspektrum darstellt.

Fallen Röntgenstrahlen auf einen Körper außerhalb der Röhre auf, so geht von diesem ebenfalls kontinuierliche und Linienstrahlung aus und außerdem geben sie Anlaß zur Abschleuderung von Elektronen analog den Kathodenstrahlen. Diese dritte Art von Strahlungen nennt man gemeinsam die Sekundärstrahlung. Diese hat abgesehen von den Korpuskularstrahlen die Zusammensetzung der sie erzeugenden Primärstrahlung. Dazu kommt noch die eigene Strahlung des Sekundärstrahlers, welche dieselbe ist, die der Strahler aussenden würde, wenn er als Antikathodenmaterial benutzt würde.

Polarisation an Röntgenstrahlen erhält man folgendermaßen. Man lasse Primärstrahlen auf eine Kohleplatte unter  $45^\circ$  auffallen. Jener Teil der Sekundärstrahlen, der nach dem Reflexionsgesetz von der Kohleplatte weggeht, falle wieder unter  $45^\circ$  auf eine Kohleplatte auf. Er erzeugt dort eine Tertiärstrahlung. Drehen wir die zwei Platten um eine Gerade, die beide Platten verbindet, so zeigt die nach dem Reflexionsgesetz reflektierte Tertiärstrahlung ein Maximum der Intensität, wenn die Einfallsebenen beider Platten parallel, ein Minimum, wenn sie senkrecht zueinander stehen. Wir haben also ganz analoge Polarisationserscheinungen wie beim sichtbaren Licht (§ 35).

Daß man lange Zeit eine Brechung der Röntgenstrahlen nicht nachweisen konnte, rührt von ihrer äußerst kleinen Wellenlänge her (§§ 53 und 55). Solchen Wellen bieten eben

die Molekeln eines Körpers beim Durchgang kein merkenswertes Hindernis. Durch Benutzung eines Prismas aus sehr schwerem Glas und einem sehr stumpfen brechenden Winkel konnte eine sehr kleine Ablenkung der Röntgenstrahlen nachgewiesen werden. Das Auffallende dabei ist, daß die Röntgenstrahlen vom Prisma in entgegengesetzter Richtung abgelenkt werden als das sichtbare Licht. Das heißt: ihr Brechungsexponent ist kleiner als Eins, wenn die Strahlung von Luft in Glas erfolgt, doch ist er äußerst wenig von Eins verschieden.

Das vollständige Analogon zu den Röntgenstrahlen bilden die  $\gamma$ -Strahlen der radioaktiven Substanzen. Was wir über jene erwähnten, läßt sich auch an diesen nachweisen. Wir werden im Späteren besonders im V. Bd. bei verschiedenen Gelegenheiten darauf zurückkommen.

### § 53. Laues Beugungsversuch.

Gehen Röntgenstrahlen durch einen Bleispalt, der nicht von zwei parallelen, sondern von zwei einen sehr spitzen Winkel bildenden Geraden begrenzt wird, so lassen sich Beugungserscheinungen nachweisen, die eine Abschätzung der Wellenlänge des Röntgenlichts erlauben. Man fand, daß sie kleiner als  $10^{-8}$  cm ist. Gegenüber solch kurzen Wellen mußten künstlich hergestellte Beugungsgitter (§ 20) für die experimentelle Untersuchung versagen. Es machte deshalb Laue den Vorschlag, als Beugungsgitter die Raumgitter zu benutzen, welche die Atome in Kristallen bilden und die eine Distanz von der Größenordnung  $10^{-8}$  haben, die man bei Kenntnis der Loschmidtschen Zahl (Bd. II, § 63) leicht finden kann.

Bei einem Kristall wird wegen des Raumgitters die Untersuchung komplizierter als bei einem ebenen Gitter. Wir wollen uns deshalb auf einen ganz einfachen Fall be-

schränken. Wir nehmen an, wir hätten einen Kristall des tesseralen Systems. Er bilde einen Würfel und seine Atome seien ebenfalls so angeordnet, daß sie die Eckpunkte aneinander stoßender, gleich großer Würfel von der Kantenlänge  $d$  bilden. Wir machen einen solchen Eckpunkt zum Ursprung  $O$  eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 42). Die Achsen legen wir so, daß sie durch die nächsten Punkte  $A, B, C$  des Elementarwürfels gehen. Die Projektion der Atome auf eine der Koordinatenebenen würde also die Fig. 43 ergeben.

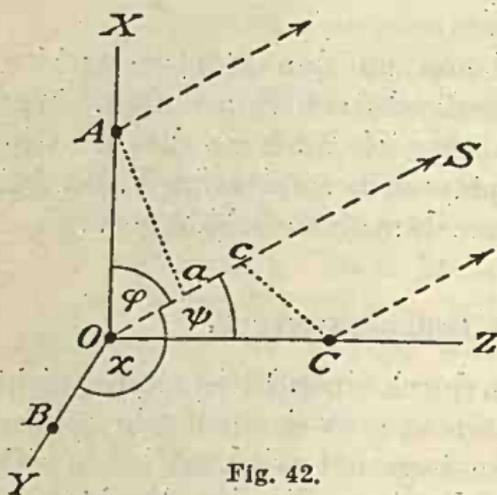


Fig. 42.

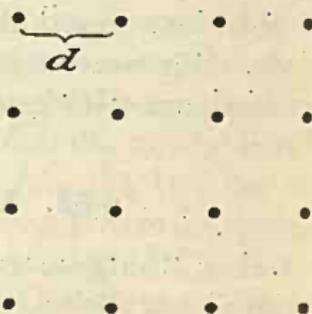


Fig. 43.

Wir denken uns jetzt vom Ursprung (Fig. 42) einen beliebigen Strahl  $OS$  gezogen, der mit den drei Achsen die Winkel  $\varphi, \chi, \psi$  einschließt. Wir setzen voraus, es gehe in der Richtung  $OZ$  ein Wellenzug. Nach dem Huygensschen Prinzip (§ 12) müssen alle Atome, die von den Wellen getroffen werden, Erregungspunkte neuer Wellen werden. Wir denken uns irgendwo eine Ebene (Schirm) senkrecht zu  $OS$  gelegt. Wir werden dann einen Strahl maximaler Helligkeit haben, wenn alle von den Atomen ausgehenden Elementarwellen mit gleicher Phase dort ankommen. Betrachten wir erst die von  $O$  und  $A$  ausgehenden Wellen, so muß der Wegunterschied in unserm Fall ein ganzzahliges Vielfaches der

Wellenlänge  $\lambda$  sein. Da die beiden Strahlen von  $O$  und  $A$  mit gleicher Phase ausgehen, so ist ihr Wegunterschied gleich  $Oa$ , wobei  $a$  der Fußpunkt des Lots ist, das wir von  $A$  auf den Strahl  $OS$  fallen. Es ist demnach  $OA = d \cos \varphi$  und es muß  $d \cos \varphi = m \lambda$  sein, wobei  $m$  eine ganze Zahl bedeutet. Analog werden die Wellen von  $O$  und  $B$  die Gleichung  $d \cos \chi = n \lambda$  erfüllen müssen. Liegen wir durch  $C$  eine Ebene senkrecht zu  $OS$ , die in  $c$  diese Gerade schneidet, so muß für den Fall maximaler Intensität in  $C$  und  $c$  Phasengleichheit der Wellen aus  $O$  und jener aus  $C$  vorhanden sein. Das heißt: Die Strecke  $OC - Oc$  muß ebenfalls ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$  sein. Nun ist aber  $Oc = OC \cos \psi$ , somit

$$OC - Oc = OC (1 - \cos \psi) = d (1 - \cos \psi) = p \lambda,$$

wobei  $p$  sowie  $m$  und  $n$  eine ganze Zahl bedeuten. Aus diesen Beziehungen finden wir demnach

$$\cos \varphi = m \frac{\lambda}{d}, \quad \cos \chi = n \frac{\lambda}{d}, \quad \cos \psi = 1 - p \frac{\lambda}{d}.$$

Diese Werte setzen wir in die Gleichung  $\cos^2 \varphi + \cos^2 \chi + \cos^2 \psi = 1$  ein und erhalten so leicht

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{2p}{m^2 + n^2 + p^2}$$

und

$$\cos \varphi = \frac{2mp}{m^2 + n^2 + p^2}, \quad \cos \chi = \frac{2np}{m^2 + n^2 + p^2},$$

$$\cos \psi = \frac{m^2 + n^2 - p^2}{m^2 + n^2 + p^2}.$$

Es ergibt die bloße Anschauung, daß wir dieselbe Überlegung für alle Atome übereinstimmend machen können, daß also das, was für die Atome  $A$ ,  $B$  und  $C$  gilt, sich

gleicherweise bei jedem Atom wiederholt, daß also unsere Überlegung für den ganzen Kristall gültig ist.

Wir nehmen jetzt an, ein dünnes Röntgenstrahlbündel gehe parallel zur  $OZ$ -Achse durch den Kristall. Dann ist

$\varphi = \chi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi = 0$ . Folglich ist nach den obigen Gleichungen für  $\varphi$ ,  $\chi$  und  $\psi$   $m = n = p = 0$ . Darnach wird

$\lambda = \frac{0}{0}$  also unbestimmt. D. h. wir erhalten für jede Wellenlänge ein Maximum der Intensität. Es ist genau so wie beim Fraunhoferschen Gitter (§ 20).

Wir machen jetzt die Annahme  $m = n = p = 1$ . Dann wird  $\frac{\lambda}{d} = \frac{2}{3}$ ,  $\cos \varphi = \cos \chi = \frac{2}{3}$ ,  $\cos \psi = \frac{1}{3}$ . Legen wir

durch diesen Strahl und die  $z$ -Achse eine Ebene, so halbiert sie den Winkel zwischen der  $x$ - und  $y$ -Achse. Unsere Überlegung gilt aus symmetrischen Gründen für alle vier Quadranten der  $(xy)$ -Ebene. Die zugehörigen Strahlen maximaler Intensität liegen symmetrisch zur  $(xz)$ - und  $(yz)$ -Ebene. Das gilt allgemein, so daß man aus den Beugungsbildern auf die Symmetrieverhältnisse des Kristalls schließen kann.

### § 54. Braggs Spektrometer.

Wir denken uns wieder einen regulären Kristall wie im vorhergehenden Paragraphen und lassen auf ihn einen Zug ebener Wellen von der Wellenlänge  $\lambda$  auffallen. Die Atome der obersten Netzebene werden der Reihe nach von einer Wellenfläche getroffen und werden so zu Erregungspunkten neuer Wellen, deren gemeinschaftliche Umhüllende eine reflektierte Wellenfläche darstellt, die genau so gewonnen wird wie bei der Reflexion an einem ebenen Spiegel (§ 12); nur wird hier der überwiegende Teil der einfallenden Welle

im Kristall weitergehen. Eine analoge Wellenfläche wird von der zweiten, dritten usw. Netzebene reflektiert. Von jeder Netzebene wird also ein Wellenzug weggehen. Die einzelnen Wellenzüge werden miteinander interferieren und sich im allgemeinen austilgen, nur dann nicht, wenn sie mit gleicher Phase zusammentreffen.

Nennen wir den nächsten Abstand zweier Gitterpunkte  $d$  (Gitterkonstante), so erleiden die Punkte  $A$  und  $B$  der einfallenden Wellenfläche (Fig. 44) in der reflektierten Wellenfläche einen Wegunterschied  $2d \sin \varphi$ . Ist dieser ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$ , so ist kein Phasenunterschied in den beiden reflektierten Strahlen vorhanden,

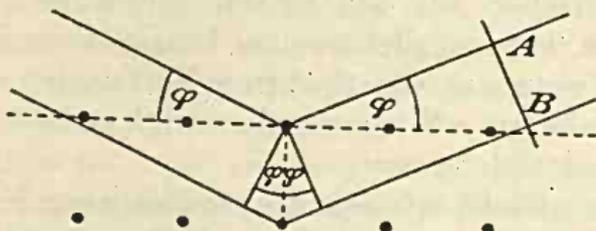


Fig. 44.

was, wie man ohne weiteres erkennt, für alle Netzebenen gilt, so daß sämtliche reflektierten Strahlen mit gleicher Phase zusammentreffen, mithin in der Richtung, die durch den Winkel  $\varphi$  („Gleit-“ oder „Glanzwinkel“) gegeben ist, ein Strahlungsmaximum besitzen ähnlich einem Strahlungsmaximum, wie es von einem Fraunhoferschen Gitter (§ 20) im sichtbaren Licht erzeugt wird. Es gilt somit die Gleichung

$$(63) \quad 2d \sin \varphi = n \lambda .$$

Dies ermöglicht das von Bragg konstruierte Röntgenspektroskop. Man läßt durch einen Bleispalt die Röntgenstrahlen auf einen Kristall genannter Art, z. B. Steinsalz fallen, der um eine zum Spalt parallele Achse drehbar ist.

Der reflektierte Strahl kann etwa auf einem Film photographiert werden. Man erhält so Spektren verschiedener Ordnung ganz analog wie beim Fraunhoferschen Gitter. Man kann mit Hilfe der Gitterkonstanten  $d$  (§55) die Wellenlänge der Röntgenstrahlen finden.

### § 55. Das Kristallgitter des Steinsalzes.

Benutzt man die natürlichen Flächen eines Steinsalzwürfels zur Erzeugung eines Röntgenspektrums (§54), z. B. einer Antikathode aus Platin, so erhält man Spektren verschiedener Ordnung, die nach Gleichung (63) auf gleiche Abstände der aufeinanderfolgenden Netzebenen schließen lassen. Versetzen wir den Kristall mit einer künstlichen Schlißfläche etwa parallel zu einer Diagonalebene des Würfels, so ergeben uns die Spektren Netzebenen, die näher aneinander liegen. Wieder anders wird es beim Anschliff einer Oktaederfläche usw.

Es ist nun leicht möglich, die verschiedenen Netzebenenabstände zu erklären, wenn man mit Bragg annimmt, daß im Steinsalzkristall die Na- und Cl-Atome nicht zu Molekeln NaCl vereinigt vorkommen, sondern getrennt verteilt sind und zwar folgender Art: Denken wir uns parallel den Würfel­flächen in gleichen Abständen Ebenen, so erhalten wir ein System gleich großer Würfel. Die Na- und Cl-Atome sind nun so verteilt zu denken, daß sie die Eckpunkte der Elementarwürfel besetzen und zwar so, daß nach allen drei Richtungen der Würfelkanten abwechselnd auf jedes Na-Atom ein Cl-Atom, dann wieder ein Na-Atom usw. folgt. Wir können also nicht von NaCl-Molekeln sprechen, sondern jedes Stück Steinsalz bildet sozusagen eine einzige große Molekel.

Denken wir uns die Ecken des natürlichen Steinsalzwürfels abgestumpft, so erhalten wir ein Oktaeder. Die Netzebenen, die diesen Oktaederflächen entsprechen, ent-

halten abwechselnd nur Na- oder nur Cl-Atome. Würden die verschiedenen Atome zu gleichartigen Zentren der Elementarwellen werden, die eine eindringende Röntgenstrahlung erzeugt, so müßten Spektren entsprechend dem Abstand der benachbarten Na- und Cl-Netzebenen entstehen, deren Maxima entsprechend der Gleichung (63). In Wirklichkeit liegen die Maxima aber näher aneinander und zwar so, als wären nur die Netzebenen einer Art von Atomen wirksam. Allerdings sind die Maxima der Intensität nach nicht gleichartig, sondern es wechselt größere und geringere Intensität regelmäßig ab. Beachtet man nur die Maxima größerer Intensität, so ergeben sie das Bild, das gleichartige Netzebenen liefern würden. Man nimmt deshalb an, und analoge Versuche an verschiedenen Substanzen erhärten dies, daß die Intensität der Elementarwellen mit dem Atomgewicht zunimmt. Auch das Fraunhofersche Gitter würde etwas analoges ergeben, wenn alle geradzahigen Spalten eine andere Breite hätten als die ungeradzahigen.

Die Gitterkonstante des Steinsalzes läßt sich nun leicht bestimmen. Die Zahl der Molekeln, die ein Mol einer Substanz besitzt, ist die Loschmidtsche Zahl  $\mathfrak{N}$  (Bd. II, § 63). Nach unserer Vorstellung enthält ein Mol Steinsalz  $2\mathfrak{N}$  Atome, daher  $2\mathfrak{N}$  Elementarwürfel von der Kantenlänge  $d$ . Das Volumen eines Mols Steinsalz ist daher  $v = 2\mathfrak{N}d^3$ . Damit ist der Wert der Gitterkonstanten  $d$  feststellbar. Mit Hilfe der Gleichung (63) können wir jetzt die Wellenlänge der charakteristischen Röntgenstrahlung berechnen. So erhält man z. B. für Steinsalz und eine Pt-Antikathode  $d = 2,814 \cdot 10^{-8}$  cm,  $\lambda = 1,09 \cdot 10^{-8}$  cm.

Die Röntgenspektren der einzelnen Elemente, wenn sie als Antikathode dienen, wollen wir an anderer Stelle (Bd. V) im Zusammenhang mit der Theorie der Spektren des sichtbaren Lichts behandeln.



# Register.

(Die beigetzten Zahlen geben die Seite des Buches an.)

- Aberration 35.  
 Aberrationswinkel 36.  
 Additionstheorem der Geschwindigkeiten 53.  
 Amplitude 61, 66.  
 — elektromagnetischer Kugelwellen 72.  
 Analysator 113.  
 Aragos Interferenzversuch 48.  
 Ätherwind 52.  
 Außerordentlicher Strahl 108, 110.  
  
 Beleuchtung 5.  
 Beleuchtungsstärke 5, 6.  
 Beugung der Röntgenstrahlen 139ff.  
 — des Lichts 40ff.  
 — durch eine Spalte 43ff.  
 — — zwei Spalten 46ff.  
 Beugungsgitter (Fraunhofer) 48ff.  
 Bewegung der Elektrizität und des Magnetismus in Isolatoren 55ff.  
 Bild 8.  
 Bilder von Kugelspiegeln 11ff.  
 Bildgröße einer brechenden Kugelfläche 21.  
 Bildkonstruktion 28.  
 Bildweite 9, 11, 19.  
 bikonkave Linse 31.  
 bikonvexe Linse 29.  
 Bradleys Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit 35.  
 Brags Spektrometer 142ff.  
 Brechende Kugelfläche 18ff.  
 — —, Bildgröße 21.  
 — —, konkave 21.  
 — Kugelflächen, zwei 21ff.
- Brechung der Röntgenstrahlen 138.  
 — des Lichts 13.  
 — — — (elektrische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene) 79ff.  
 — — — (magnetische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene) 79ff.  
 — elektromagnetischer Wellen 73ff.  
 Brechungsexponent 13, 33, 73, 136.  
 — und Dielektrizitätskonstante 74.  
 Brechungsexponenten einachsiger Kristalle 107, 110.  
 Brechungsgesetz 13, 33, 34, 73.  
 Brechungsquotient 13.  
 Brechungswinkel 13.  
 Breite der Spektrallinien 125.  
 Bremsstrahlung 138.  
 Brennpunkt 10, 20.  
 Brennweite 10, 20, 23.  
 Brewstersches Gesetz 87.  
  
 Charakteristische Röntgenstrahlung 138.  
  
 Deviation 15.  
 Deviationsminimum 17.  
 Dielektrizitätskonstante 101, 102.  
 — und Brechungsexponent 74.  
 Dioptrik 13.  
 Dispersion des Lichts 14.  
 Doppelbrechung 101ff.  
 — bei Drehung der Polarisationsebene 125.
- Drehung der Polarisationsebene 88, 122ff.  
 — — Schwingungsebene 88.  
 Dünne Blättchen 89.  
 — — bei schief auffallendem Licht 97ff.  
 Dünne Linse 22.  
 Durchsichtige Kristalle 102.  
  
 Ebene brechende Fläche 7ff., 20.  
 Ebener Spiegel 8, 11, 12.  
 Einachsige Kristalle 102ff.  
 Einfallender Strahl 7, 13.  
 Einfallslot 7, 13.  
 Einfallspunkt 7, 13.  
 Einfallswinkel 7, 13.  
 Einheit der Lichtstärke 6.  
 $\frac{1}{4}$ -Undulationsglimmer 113.  
 Elektrische Schwingung 61, 108.  
 Elektrische Wellen 60ff.  
 Elektromagnetische Bewegung in Isolatoren 55ff.  
 — Lichttheorie 63, 75.  
 Elektromagnetisches Drehfeld 71.  
 Elementarwellen 31.  
 — in einachsigen Kristallen 106ff.  
 Elliptisch polarisiertes Licht 67ff., 110ff., 119ff.  
 Emanationstheorie 35.  
 — (Lichtbrechung) 135.  
 Energie der Welle 82.  
 — — Wellengruppe 134.  
 — des Lichtkorpuskels 137.

- Energie elektromagnetischer Strahlen 81.  
 Energiedichte der Strahlung 82.  
 Englisches Koordinatensystem 53ff.  
 Erdbewegung und Lichtgeschwindigkeit 151.  
 Erhabener Spiegel 11.  
 Erklärung der optischen Erscheinungen 63.  
 Erreger der Lichtempfindung 101.  
 Farbe 14.  
 — und Brechungsexponent 14.  
 Farben dünner Blättchen 89ff.  
 Farbenzerstreuung 14.  
 Farbige Interferenzerscheinungen 67.  
 Fermats Satz 33.  
 Fizeaus Versuch 52.  
 — mit dem Newtonschen Farbbglas 127.  
 Fortpflanzung der Wellenenergie 134.  
 — des Lichts 5.  
 — elektromagnetischer Wellen 57ff., 107.  
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen 60, 107.  
 Fortpflanzungsrichtung elektromagnetischer Wellen 65.  
 Fortschreitende Wellen 60ff., 100.  
 Französisches Koordinatensystem 53ff.  
 Fraunhofers Gitter 48ff.  
 Fresnelsche Lichttheorie 63.  
 Fresnelsches Parallelepiped 121.  
 Fresnels Spiegelversuch 37ff.  
 — Theorie der Beugung 40.  
 — — — Polarisation 83ff.  
 Galileisches Fernrohr 31.  
 Gamma-Strahlen 138.  
 Gegenstandsweite 9, 19.  
 Gekreuzte Stellung 115.  
 Geometrische Optik 13.  
 Geschwindigkeit des Lichts 35.  
 Gitterkonstante 143.  
 — des Steinsalzes 145.  
 Gitterspektrum 51.  
 Glanzwinkel 143.  
 Gleitwinkel 143.  
 Grenzwinkel der Totalreflexion 116.  
 Gruppengeschwindigkeit 127ff.  
 Harmonische elektromagnetische Schwingungen 60ff.  
 Hauptebenen 25ff.  
 Hauptpunkte 25ff.  
 Hauptregenbogen 16.  
 Hauptschnitt 105, 109.  
 Hauptstrahl 8, 18.  
 Hauptwelle 31.  
 Hefnerlicht 6.  
 Hintere Brennweite 20, 24, 27.  
 Hinterer Brennpunkt 20.  
 Hohlspiegel 11.  
 Huygenssches Prinzip 31ff., 40.  
 — für elektromagnetische Wellen 72.  
 Huygens Theorie der Doppelbrechung 108ff.  
 Imaginärer Gegenstand 31.  
 Imaginäres Bild 10, 20.  
 Impuls des Lichtkorpustels 135, 136.  
 Interferenz des Lichts 37.  
 — elektromagnetischer Strahlen 65ff.  
 Interferenzfähigkeit des Lichts 126.  
 Interferenzstreifen 52.  
 Interferenzversuch von Arago 43.  
 — — Young 43.  
 Isotrope Körper 101.  
 Kalkspat 107, 108.  
 Katoptrik 13.  
 Kerzenstärke 6.  
 Knotenpunkte stehender Wellen 100.  
 Kohärente Strahlen 37, 51, 52, 67.  
 Komplementäre Erscheinungen 95.  
 Konkave brechende Kugelfläche 21.  
 Konkaver Spiegel 11.  
 Konstruktion der Bilder eines Systems brechender Flächen 28.  
 Kontinuierliches Röntgenspektrum 138.  
 Konvexspiegel 11.  
 Korpuskulartheorie des Lichts 136.  
 Kräfteparallelogramm 65, 69.  
 Kreuzstellung 115.  
 Kristalle 101ff.  
 Kristallgitter des Steinsalzes 140ff.  
 Kugelfläche, brechende 18ff.  
 — — Bildgröße 21.  
 Kugelflächen, zwei brechende 21ff.  
 Kugelspiegel 8ff.  
 Kugelwelle 32, 107.  
 Laues Beugungsversuch 139ff.  
 Lehrbücher zur Optik 4.  
 — — Röntgenstrahlung 4.  
 Lehre vom Licht 5ff.  
 Lichtäther 5.  
 Lichteinheit 6.  
 Lichtempfindung 101.  
 Lichtgeschwindigkeit 35, 60.  
 — im Schwefelkohlenstoff 134.  
 — in durchsichtigen Körpern 130ff.  
 — — einachsigen Kristallen 106.  
 — und Erdbewegung 51.  
 Lichtstärke 6.  
 Lichtstrahl 7.  
 Linearpolarisiertes Licht 64ff.  
 Linsen 21ff.  
 Linsenformel 22.  
 Lupe 20.  
 Lux 7.  
 Magnetische Wellen 64.  
 Maxima der elektrischen Schwingungen 100.

- Maxima erster Klasse 47, 50.  
 — zweiter Klasse 47, 50,  
 Maxwells Lichttheorie 63,  
 75.  
 Meterkerze 7.  
 Michelsons Versuch 46.  
 Minima erster Klasse 47,  
 50.  
 — zweiter Klasse 47, 50.  
 Minimum der Ablenkung  
 15.  
 Natürliches Licht 65.  
 Nebenregenbogen 16.  
 Negative Brennweite 31.  
 Newtons Farbenglas 96,  
 126.  
 Optik 5ff.  
 — bewegter Körper 52.  
 Optisch einachsige Kri-  
 stalle 102ff.  
 Optische Achse 102, 108.  
 Ordentlicher Strahl 100,  
 109.  
 Parallele Strahlen 10.  
 Parallelstellung 115.  
 Phase 64, 66.  
 Phasendifferenz 67.  
 Phasenverschiebung 37,  
 66, 67.  
 — zwischen elektrischer  
 und magnetischer Wel-  
 le 101.  
 Photographische Wir-  
 kung des Lichts 101.  
 Photometrie 7.  
 Physiologische Wirkung  
 des Lichts 101.  
 Plankonvexe Linse 24.  
 Plattensatz 89.  
 Polarisation 75.  
 — an Röntgenstrahlen  
 138.  
 — des Lichts durch Re-  
 flexion und Brechung  
 75ff.  
 Polarisationsapparat 113.  
 Polarisationsebene 88.  
 Polarisations-theorie Fres-  
 nels 83ff.  
 Polarisationswinkel 87.  
 Polarisator 113.  
 Polarisiertes Licht 64ff.  
 Primärstrahlung 138.  
 Prinzip der Superposition  
 der Wellen 65.  
 Pulsierendes elektrisches  
 Drehfeld 71.  
 Raumgitter 130.  
 Reelles Bild 10, 19.  
 Reflexion (elektrische  
 Schwingungen senk-  
 recht zur Einfallse-  
 bene) 75ff.  
 — elektromagnetischer  
 Wellen 73ff.  
 — (magnetische Schwin-  
 gungen senkrecht zur  
 Einfallsebene) 79ff.  
 Reflexionsgesetz 7, 32,  
 34, 73.  
 Reflexionswinkel 7.  
 Regenbogen 14.  
 Relativitätstheorie 35,  
 51, 52, 53.  
 — und Korpuskular-  
 theorie 136.  
 Röntgenlinienspektrum  
 138.  
 Röntgenspektroskop 143.  
 Röntgenspektrum 138.  
 Röntgenstrahlen 187ff.  
 Rotierendes elektrisches  
 Feld 71.  
 Sammellinse 23.  
 Scheinwerfer 10.  
 Schraubenlinie des elek-  
 trischen Vektors 72.  
 Schwingungsbäuche 100  
 Schwingungsdauer 62.  
 Schwingungsebene 64.  
 Schwingungszahl des  
 Lichts 40.  
 Sekundärstrahlung 188.  
 Sonnenstrahlen 10.  
 Spektrallinien, deren  
 Breite 125.  
 Spiegelversuch von Fres-  
 nel 37ff.  
 Stehende Wellen 99ff.  
 Steinsalzgitter 144.  
 Strahlenbündel 7.  
 Strahlgleichungen elek-  
 tromagnetischer Wel-  
 len 57ff.  
 Superposition der Wellen  
 65.  
 Symmetrieverhältnisse  
 der Kristalle 142.  
 System brechender Ku-  
 gelflächen 21ff.  
 Talbotsche Linien 99.  
 Tertiärstrahlung 138.  
 Totale Reflexion 116ff.  
 Transversalwellen 60, 83.  
 Turmalin 113.  
 Turmalinzange 113.  
 Übertrittsarbeit 135, 136.  
 Ursachen der Lichter-  
 scheinungen 5.  
 Vergrößerung der Lupe  
 30.  
 Vergrößerungsspiegel 12.  
 Verschiebung der Inter-  
 ferenzstreifen 52.  
 Virtuelles Bild 10, 11, 21.  
 Vordere Brennweite 20,  
 24, 27.  
 Vorderer Brennpunkt  
 20, 24.  
 Weißes Licht 130.  
 Wellengeschwindigkeit  
 127ff.  
 Wellenlänge der Rönt-  
 genstrahlen 144.  
 — des Lichts 40, 50, 62.  
 Wieners stehende Wellen  
 101.  
 Zentriertes System 21.  
 Zerstörungslinse 23, 25.  
 Zirkularpolarisiertes  
 Licht 71, 110ff., 120,  
 122.



# Literatur zur Physik

Mit einem Anhang: Mathematische Literatur  
für den Physiker

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 35

**Lehrbuch der Physik.** Von Eduard Riecke, weiland Gehelmer Regierungsrat, o. Professor an der Universität Göttingen. Zu eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen herausgegeben von Professor Dr. Ernst Lecher †, Vorstand des I. Physikalischen Instituts der Universität Wien, und Dr. Adolf Smekal, o. Professor an der Universität Halle a. S. Siebente, verbesserte und um eine Darstellung der Atomphysik vermehrte Auflage. Groß-Oktav.

I. Band: Mechanik und Akustik. Wärme. Optik. Mit 458 Figuren im Text. XVI, 656 Seiten. 1923 . . . . . RM. 12.60, geb. RM. 14.—

II. Band: Magnetismus und Elektrizität. Atomphysik. Mit einem Bildnis von E. Lecher † und 319 Figuren im Text. XVI, 725 Seiten. 1928. RM. 15.—, geb. RM. 17.—

**Lehrbuch der Physik.** Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule zu München. Von H. Ebert, weil. Professor an der Technischen Hochschule München.

I. Band. Mechanik. Wärmelehre. Mit 168 Abbildungen. Zweite Auflage. Groß-Oktav. XX, 661 Seiten. 1917. Anastatischer Neudruck. 1920. RM. 20.—, geb. RM. 21.50

II. Band, I. Teil. Die elektrischen Energieformen. Fertiggestellt und herausgegeben von Professor C. Heinke. Mit 341 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. XX, 687 Seiten. 1920 . . . . . RM. 22.—, geb. RM. 24.—

II. Band, II. Teil. Die strahlende Energie. Fertiggestellt und herausgegeben von Professor C. Heinke. Mit 196 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. XII, 416 Seiten. 1923 . . . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

**Einführung in die theoretische Physik.** Von Dr. Clemens Schaefer, Professor an der Universität Breslau.

I. Band. Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929 . . . . . RM. 45.—, geb. RM. 48.—

II. Band. Theorie der Wärme. Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 88 Figuren im Text. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. 1929. Groß-Oktav. X, 660 Seiten . . . . . RM. 28.—, geb. RM. 30.—

III. Band, 1. Teil. Elektrodynamik und Optik. Mit 235 Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 918 Seiten. 1932. RM. 37.50, geb. RM. 40.—  
2. Teil. Atom- und Quantenphysik. Erscheint 1937.

*„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“*  
Annalen der Physik.

**Einführung in die theoretische Physik**, mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien.

I. Band. Fünfte und sechste, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 67 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 396 Seiten. 1930. R.M. 8.50, geb. R.M. 10.—

II. Band. Fünfte und sechste, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 85 Abbildungen im Text und auf sechs Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 448 Seiten. 1930 . . . . . R.M. 8.50, geb. R.M. 10.—

„Der Vorzug des Buches liegt zweifellos in dem Umstande, daß es dem Verfasser gelingt, den Leser unter Vermeidung jedes überflüssigen Wissensballastes bis an die Probleme der modernen theoretisch-physikalischen Forschung heranzuführen. Es gibt gewiß kein anderes Buch ähnlichen Umfangs, das den Studierenden gleichzeitig mit den Elementen der theoretischen Physik und mit den wichtigsten modernen Forschungsergebnissen, wie Röntgenspektroskopie, Kristallanalyse, Isotopenbestimmung usw., vertraut macht.“

Monatshefte für Mathem. u. Physik.

**Theoretische Physik.** Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. 5 Bände.

I. Mechanik. Mit 25 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 76) . . . . . Geb. R.M. 1.62

II. Schall und Wärme. Mit 7 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 133 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 77) Geb. R.M. 1.62

III. Elektrizität und Magnetismus. Mit 35 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 78) Geb. R.M. 1.62

IV. Optik. Mit 44 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 374) . . . Geb. R.M. 1.62

V. Wärmestrahlung, Elektronik und Atomphysik. Mit 16 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 130 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 1017) . . . . . Geb. R.M. 1.62

**Kleiner Grundriß der theoretischen Physik.** Kleine, besonders bearbeitete Ausgabe der Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Arthur Haas, Professor für Physik a. d. Univ. Wien. Mit 22 Figuren. Oktav. VII, 183 Seiten. 1934 . . . . . Geb. R.M. 5.30

Dieser „Kleine Grundriß“ ist für die Leser bestimmt, die die Physik nicht als Hauptstudium, sondern nur als Ergänzung eines anderen Faches betreiben und deshalb auf die umfangreiche, zweibändige, schon in 6. Auflage vorliegende „Einführung in die theoretische Physik“ desselben Verfassers verzichten können. Für Studierende der Physik selbst soll der „Kleine Grundriß“ als erste Einleitung oder als Repetitorium dienen. Selbstverständlich ist der „Kleine Grundriß“ ein in sich abgeschlossenes, einheitliches und selbständiges Buch. Das Hauptgewicht wurde auf die Verständlichmachung der Grundlagen der theoretischen Physik gelegt — auf die Grundgleichungen der Bewegung und des elektromagnetischen Feldes sowie auf die fundamentalen Prinzipie der Wärmelehre und der Atomphysik. Die modernen Probleme sind stark herausgestellt. Für die Benutzung des Grundrisses werden besondere Vorkenntnisse nicht vorausgesetzt; es genügt die Kenntnis der Grundideen der Differential- und Integralrechnung sowie der wichtigsten Ergebnisse der Experimentalphysik.

**Das Naturbild der neuen Physik.** Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren im Text. Oktav. V, 129 Seiten. 1932. R.M. 5.—, geb. R.M. 6.—

**Atomtheorie.** Von Dr. phil. Arthur Haas, Professor für Physik an der Universität in Wien. Mit 81 Figuren im Text und auf 5 Tafeln. Dritte, völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Groß-Oktav. VIII, 292 Seiten. 1930 . . . . . R.M. 8.50, geb. R.M. 10.—

**Die Welt der Atome.** Zehn gemeinverständliche Vorträge. Von Arthur Haas, Dr. phil., a. o. Professor für Physik an der Universität Wien. Mit 37 Figuren im Text und auf 8 Tafeln. Oktav. XII, 130 Seiten. 1926.

R.M. 4.80, geb. R.M. 6.—

**Künstliche Verwandelung der Elemente (Zertrümmerung der Atome).** Von Dr. Hans Pettersson in Göteborg (Schweden). Aus dem Schwedischen übersetzt von Elisabeth Kirsch. Mit 59 Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 151 Seiten. 1929 . . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.—

**Die Umwandlungen der chemischen Elemente.** Von Dr. Arthur Haas, Professor der Physik an der Universität Wien. Mit 31 Abbildungen. Oktav. VIII, 118 Seiten. 1935 . . . . . RM. 4.30, geb. RM. 5.—

*Unter den wissenschaftlichen Leistungen der letzten drei Jahre (1932 bis 1934) haben vielleicht wenige so viel Interesse in weitesten Kreisen erweckt wie die umwälzenden Entdeckungen, die in dieser Zeit der physikalischen Forschung glückten: die Auffindung neuer Urbausteine der Materie (Neutron und Positron), der experimentelle Nachweis der Entstehung von Materie aus Licht, die Feststellung und Isolierung des schweren Wassers, die ungeahnten und durch neue Methoden ermöglichten Erfolge der Atomzertrümmerung und die künstliche Erzeugung von Radioaktivität.*

*Von diesen neuen Entdeckungen berichtet zusammenfassend, kurz und möglichst leicht verständlich das Büchlein von Haas in der Form von fünf Vorträgen: I. Die Materialisation des Lichtes — II. Die Grundstoffarten — III. Die Mittel der Atomzertrümmerung — IV. Die Ergebnisse der Atomzertrümmerung — V. Die künstliche Radioaktivität. 31 Abbildungen, fast durchweg Wiedergaben nach Photographien, gewähren einen anschaulichen Einblick in die Welt der Atome.*

**Experimentalphysik.** Von Professor Robert Lang, Rektor des Realgymnasiums in Stuttgart.

I. Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper. Dritte Auflage. Mit 125 Figuren im Text. 146 Seiten. 1927. (Sammlung Göschen Bd. 611) Geb. RM. 1.62

II. Wellenlehre und Akustik. Mit 69 Figuren im Text. Zweite Auflage. 96 Seiten. 1920. (Sammlung Göschen Bd. 612) . . . . . Geb. RM. 1.62

III. Wärmelehre. Mit 55 Figuren im Text. 98 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 613) . . . . . Geb. RM. 1.62

IV. Lehre vom Licht. Mit 90 Figuren im Text. 110 Seiten. 1925. (Sammlung Göschen Bd. 614) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Methoden der praktischen Analysis.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers, Mit 132 Figuren. Groß-Oktav. 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12.) . . . . . RM. 20.—, geb. RM. 21.50

**Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen Anwendungen.** Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 37 Abbildungen im Text. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. VI, 147 Seiten. 1929 . . . . . RM. 5.—, geb. RM. 6.—

**Vektoranalysis.** Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Sammlung Göschen Bd. 354) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Ein für Studium und Praxis mit Erfolg benutztes Hilfsmittel zur Lösung technischer Aufgaben.*

**Punkt- und Vektor-Rechnung.** Von Dr. Alfred Lotze, a. o. Prof. für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. Groß-Oktav. 132 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13.) RM. 12.—, geb. RM. 13.—

**Die Grundlagen der Physik.** Synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie. Von Dr. Hugo Dingler, Professor an der Universität München. Zweite Auflage. Oktav. XIV, 336 Seiten. 1923. RM. 4.—, geb. RM. 5.—

*Aus dem Inhalt: Das Geltungsproblem. Das Zweckprinzip. Die Logik. Raum und Zeit. Kausalität. Die Mechanik.*

**Physik und Hypothese.** Versuch einer induktiven Wissenschaftslehre nebst einer kritischen Analyse der Fundamente der Relativitätstheorie. Von Dr. Hugo Dingler, Professor an der Universität München. Oktav. XI, 200 Seiten. 1921 . . . . . RM. 3.—, geb. RM. 4.—

**Wörterbuch der Physik.** Von Professor Dr. Felix Auerbach. Mit 267 Figuren. Oktav. X, 466 Seiten. 1920 . . . . . Geb. RM. 4.50

*Ein unentbehrliches Nachschlagewerk für Wissenschaft und Praxis der Physiker, Chemiker, Mediziner und Techniker.*

**Physikalische Formelsammlung.** Von G. Mahler, † Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Sechste Auflage, besorgt von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen in Württemberg. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 136) Geb. RM. 1.62

*Das Buch gibt fertige Resultate und ermöglicht einen raschen Überblick über die Teilgebiete der Physik.*

**Physikalische Aufgabensammlung.** Von G. Mahler, † Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Neu bearbeitet von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen. Fünfte, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1936. (Sammlung Göschen Bd. 243) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Zum Studium und Selbststudium für den Anfänger und zum Gebrauch in der Ingenieurpraxis.*

**Physikalische Tabellen.** Von Dr. A. Leick. Zweite Auflage, neubearbeitet von Prof. Dr. W. Leick in Berlin-Lichterfelde. 96 Seiten. 1920. (Sammlung Göschen Bd. 650) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Physikalische Messungsmethoden.** Von Professor Dr. Wilhelm Bahrdt in Berlin-Lichterfelde. Mit 54 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 147 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 301) Geb. RM. 1.62

**Einführung in die Differentialgleichungen der Physik.** Von Professor Ludwig Hopf. Mit 49 Abbildungen. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1070) Geb. RM. 1.62

**Kristallographie.** Von Dr. W. Bruhns, weil. Professor an der Bergakademie Clausthal. Dritte Auflage, neubearbeitet von Dr. P. Ramdohr, o. Professor an der Universität Berlin. Mit 192 Abbildungen. 109 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 210) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Einführung in die Kristalloptik.** Von Dr. Eberhard Buchwald, Professor an der Technischen Hochschule Danzig. 3., neubearb. Auflage. Mit 116 Fig. 134 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 619) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Einführung in die geometrische Optik.** Von Dr. W. Hinrichs in Berlin-Wilmersdorf. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 56 Figuren. 1924. (Sammlung Göschen Bd. 532) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Das Buch gibt die Grundlagen des Gebiets bis zur Brechung durch ein zentriertes System von Kugelflächen und zu den einfachsten Linsenfällen. Jedem Abschnitt sind Übungsbeispiele beigegeben.*

**Radioaktivität.** Von Dr. Karl Przylbram, Professor an der Universität Wien. Mit 31 Abbildungen. 142 Seiten. 1932. (Sammlung Göschen Bd. 317). Geb. RM. 1.62

**Röntgenstrahlen.** (Physik, Technik und Anwendung.) Von Dr. phil. nat. Richard Herz in Frankfurt a. M. Mit 48 Figuren im Text und 36 Abbildungen auf 16 Tafeln. 1926. (Samml. Göschen Bd. 950) Geb. RM. 1.62

*Das Buch wendet sich an Ärzte, Röntgenassistenten, Ingenieure, Techniker und vor allem an Studierende der Medizin und Naturwissenschaften.*

**Teilchenstrahlen (Korpuskularstrahlen).** Von Dr. H. Mark, Professor an der Universität Wien. Mit 59 Abbildungen. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1083) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Luftlektrizität.** Von Prof. Dr. Karl Kähler, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter am Preußischen Meteorologisch-Magnetischen Observatorium in Potsdam. Zweite Auflage. Mit 19 Abbildungen. 134 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 649) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Inhalt: Das natürliche Feld der Erde. Das elektrische Teilvermögen der Atmosphäre. Die elektrischen Ströme in der Luft. Die radioaktiven Vorgänge in der Atmosphäre. Elektrische Wirkungen des Sonnenlichts. Ursprung der Luftlektrizität.*

**Röntgenspektroskopie und Kristallstrukturanalyse.** Von Prof. Dr. Arthur Schlegel und Dr. Erich Schneider. Zwei Bände. Groß-Oktav. 1929.

I. Band: Mit 249 Figuren und 57 Tabellen im Text. VIII, 336 Seiten. RM. 18.50, geb. RM. 20.—

II. Band: Mit 553 Figuren und 40 Tabellen im Text. IV, 344 Seiten. RM. 22.50, geb. RM. 24.—

*Das vorliegende Werk behandelt — auf einem Minimum an Voraussetzungen aufbauend — Theorie und Praxis der Röntgenspektroskopie und Kristallstrukturanalyse. Zur Beherrschung dieser Methoden ist jedoch eine so große Zahl verschiedenartigster Kenntnisse und Fertigkeiten (Röntgenstrahlen, Hochspannung, Vakuum, Atomtheorie usw.) erforderlich, daß es denen, die sie auf irgendein Spezialproblem anwenden wollen, zur gründlichen Einarbeitung zumeist an Zeit gebricht. Hier greift das vorliegende Werk ein, das den Gegenstand nach der praktischen und theoretischen Seite erschöpfend behandelt.*

**Spektroskopie.** Von Dr. Karl Wilh. Meißner, o. Professor d. Experimentalphysik an der Universität Frankfurt a. M. Mit 102 Figuren. 1935. (Sammlung Göschen Bd. 1091) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht.** Von Prof. Dr. A. Nippoldt, Direktor des Magnetischen Instituts der Universität Berlin. Mit 9 Tafeln und 13 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 175) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Einführung in die Theorie der Wärme.** Von Dr. Heinrich Mache, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 96 Textfiguren. Groß-Oktav. VIII, 319 Seiten. 1921 . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.—

*Aus dem Material von Vorlesungen entstanden und auf einem Minimum von mathematischen und physikalischen Kenntnissen aufbauend, ist das Werk eine Einführung zur streng wissenschaftlichen Behandlung dieses Themas.*

**Die Physik der Verbrennungerscheinungen.** Von Dr. Heinrich Mache, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 43 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln. Groß-Oktav. V, 133 Seiten. 1918. RM. 3.—, geb. RM. 3.80

**Empfindliche Galvanometer für Gleich- und Wechselstrom.** Von Dr. Otto Werner. Mit 23 Abbildungen und 17 Tabellen. Groß-Oktav. VIII, 208 Seiten. 1928 . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.—

*Der Verfasser erörtert Aufbau, Arbeitsweise und Empfindlichkeitsarten der Galvanometerkonstruktionen sowohl für Gleich- als auch für Wechselstrom und gibt Gesichtspunkte für die Galvanometerauswahl und kritische Vergleiche der Galvanometertypen.*

**Vorlesungen über Thermodynamik.** Von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Neunte Auflage. Groß-Oktav. X, 288 Seiten. 1930 . . Geb. RM. 11.50

**Die Grundgleichungen der Mechanik**, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung. Vorlesungen zur Einführung in die theoretische Physik, gehalten im Sommersemester 1914 an der Universität Leipzig. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 45 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 216 Seiten. 1914. RM. 7.50

**Die Prinzipie der Dynamik**. Von Dr. Clemens Schaefer, o. Professor an der Universität Breslau. Mit 6 Figuren im Text. Groß-Oktav. IV, 76 Seiten. 1919 . . . . . RM. 2.50

*„Das ausgezeichnete Werk behandelt in eingehender, elementarer Weise die Fragen der Ableitung und Äquivalenz der verschiedenen mechanischen Prinzipien.“*  
*Monatshette für Mathematik und Physik.*

**Geschichte der Physik**. Von A. Kistner, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe I, B.

I. Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 126 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 293) . . . . . Geb. RM. 1.62

II. Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Zweite, erweiterte Auflage. 149 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 294)  
Geb. RM. 1.62

**Wilhelm von Siemens**. Ein Lebensbild. Gedenkblätter zum 75jährigen Bestehen des Hauses Siemens & Halske. Von August Roth. Mit 5 Tafeln in Lichtdruck. Oktav. V, 224 Seiten. 1922 . . . RM. 2 60, geb. RM. 4.—

*Die Biographie gibt zugleich ein Bild der Entwicklung der Siemenswerke und ein Stück Geschichte der deutschen Technik.*

**Einführung in die Elektrotechnik**. Hochschulvorlesungen von Dr. C. Heinke, Geh. Reg.-Rat, o. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule München. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 560 Abbildungen. Oktav. 490 Seiten. 1924 . . . . . Geb. RM. 18.—

**Grundlagen der Elektronenoptik**. Von Dr. W. Glaser. Ca. 224 Seiten. 1937. Mit ca. 100 Fig. . . . . . Geb. ca. RM. 10.—

*Über das außerordentlich interessante Gebiet der Optik kontinuierlicher Mittel und speziell der Elektronenoptik fehlte bisher eine zusammenfassende Darstellung in Lehrbuchform.*

*Nicht nur dem Theoretiker, sondern vielmehr auch jedem Praktiker wird dieses Lehrbuch willkommen sein, da vor allem das elektrische und magnetische Elektronen-Mikroskop und seine Anwendungsmöglichkeiten beschrieben werden. (Oscillograph, Bildwandler, Fernsehen.)*

*Die geschickte Textanordnung und das instruktive Bildmaterial machen das Buch für weite Kreise vorzüglich verwendbar.*

**Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung**. Von Dr. E. Hiedemann. Ca. 200 Seiten. Mit über 100 Fig. . . . Geb. ca. RM. 10.—

*In dieser knappen Monographie kommt ein erfahrener Theoretiker und Praktiker zu Wort.*

*Bei der noch unübersehbaren Auswirkungsmöglichkeit des Ultraschalles wird sich jeder Physiker, Mathematiker und Chemiker, vor allem aber auch jeder Biologe und Mediziner mit diesem Material beschäftigen müssen. Das Buch wird hier Führer sein und zur Weiterarbeit auf allen Gebieten der Naturwissenschaften in stärkstem Maße anregen.*

**Lehrbuch der Elektrotechnik**. Von Professor E. Stöckhardt, Diplomingenieur und Studienrat. Dritte, umgearbeitete Auflage. Mit mehreren hundert Abbildungen. Oktav. VIII, 327 Seiten. 1925 . . . . . Geb. RM. 13.—

**Elektrotechnik**. Einführung in die Starkstromtechnik. Von Prof. I. Herrmann. (Samml. Göschen Bd. 196—198, 657.)

I. Die physikalischen Grundlagen. Sechste, neubearb. Auflage. Mit 88 Figuren und 16 Tafeln. 128 Seiten. 1933 . . . Geb. RM. 1.62

- II. Die Gleichstromtechnik. Fünfte, Neubearb. Auflage. Mit 121 Figuren und 16 Tafeln. 135 Seiten. 1928 . . . . . Geb. RM. 1.62
- III. Die Wechselstromtechnik. Fünfte Auflage. Mit 153 Figuren und 16 Tafeln. 184 Seiten. 1929 . . . . . Geb. RM. 1.62
- IV. Die Erzeugung und Verteilung der elektrischen Energie. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 99 Figuren im Text und 16 Tafeln mit 42 Abbildungen. 118 Seiten. 1932 . . . . . Geb. RM. 1.62

Die Schwingung als Vortriebsfaktor in Natur und Technik. Gedanken eines Ingenieurs über das Problem der schwingenden Propulsion in Technik und Biologie. Von Hans Schramm. Mit 54 Abbildungen. Oktav. VI, 91 Seiten. 1927 . . . . . RM. 4.—

## MATHEMATISCHE LITERATUR FÜR DEN PHYSIKER

**Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik.** Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. Neue Ausgabe. Lexikon-Oktav. VIII, 743 Seiten. 1932 . . . . . Geb. RM. 15.—

*Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.*

**Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen,** bearbeitet nach den Vorlesungen von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Prof. a. d. Technischen Hochschule zu Dresden, o. Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 3 Bände. Jeder Band ist einzeln käuflich. . . . . Geb. je RM. 3.80

I. Vektorrechnung und analytische Geometrie.

II. Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. — Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung.

III. Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. — Differentialgleichungen, Differentialgeometrie. — Funktionen einer komplexen Veränderlichen. — Probleme der Variationsrechnung.

*Dieses neue billige Lehrbuch ist aus der Vorlesungspraxis heraus entstanden und gibt in klarem Aufbau eine hervorragende Einführung in die höhere Mathematik. Die bekannte pädagogische Meisterschaft Kowalewski's, die in allen Mathematikerkreisen größte Anerkennung gefunden hat, bewährt sich auch in diesem Werk, das sich würdig seinen früheren Lehrbüchern anschließt.*

**Neue Rechentafeln.** Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut, Berlin. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909 . . . . . Geb. RM. 20.—

Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben . . . . . Geb. je RM. 20.—

**Dr. A. L. Crelles Rechentafeln,** welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1930 . . . . . Geb. RM. 26.—

Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer und französischer Ausgabe vor . . . . . Geb. je RM. 26.—

**Fünfstellige Logarithmen.** Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Regierungsrat Professor A. Adler. Zweite Auflage. 117 Seiten und 1 Tafel. 1929. (Samml. Göschen Bd. 423) Geb. RM. 1.62

*Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.*

**Fünfstellige Logarithmentafeln** der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut, Berlin. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912 . . . . . Geb. RM. 7.—

**Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln.** Von Professor Dr. E. F. August, welfand Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Neunundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. August, welfand Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 Seiten. 1931 . . . . . Geb. RM. 2.—

*„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein.“*  
*Allgemeine Vermessungs-Nachrichten.*

**Vierstellige Tafeln und Gegentafeln** für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haussner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neue Auflage. 1934. (Samml. Göschen Bd. 81) . . . . . Geb. RM. 1.62

*„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten.“*  
*Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.*

**Vierstellige Logarithmentafeln.** Von Dr. Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Hersherschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927 . . . . . Geb. RM. 1.50

**Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker.** Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Einnundvierzigste bis fünfundvierzigste Auflage. Oktav. 216 Seiten. 1935 . . . . . Geb. RM. 6.80

*„Die wohl allseitig bekannten Küsterschen Rechentafeln sind dem Chemiker, der sich ihrer einmal bedient hat, zum ungern entbehrten Werkzeug geworden, das sich in seiner bewährten Anordnung des Stoffes zu einem wirklich nützlichen und fast notwendigen Hilfsbuch entwickelt hat. Die Neuaufgabe erscheint wie üblich nach dem neuesten Stande der Forschung.“*  
*Zeitschrift für angewandte Chemie.*

**Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen  $e^x$  und  $e^{-x}$**  mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Keijchi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1931. RM. 9.—

*„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit, die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschieden großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die*

Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“  
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.

**Mathematische Formelsammlung.** Von Professor O. Th. Bürklen †. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. Ringleb. Mit 37 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. 272 Seiten. 1936. (Sammlung Göschen Bd. 51) . . . . . Geb. RM. 1.62

„Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche wohlgeignet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze System der Elementarmathematik zu geben.“ Fortschritte der Mathematik.

**Formelsammlung zur praktischen Mathematik.** Von Dr. Günther Schulz. Mit 10 Abbild. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 1110.) Geb. RM. 1.62

**Höhere Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

I: Lineare Gleichungen. Zweite, verbesserte Auflage. 152 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 931) . . . . . Geb. RM. 1.62

II: Gleichungen höheren Grades. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Fig. 160 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 932) Geb. RM. 1.62

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der ‚allgemeinen‘ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definition der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“  
Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterr.

**Aufgabensammlung zur höheren Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. 160 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1082) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Algebra I: Die Grundlagen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 301 Seiten. 1932. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8) . . . . . Geb. RM. 11.50

**Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. VIII, 243 S. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9) . . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.50

Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.

**Praxis der Gleichungen.** Von Professor Dr. C. Runge. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. V, 172 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2) . . . . . RM. 6.— geb. RM. 7.—

**Einführung in die Determinantentheorie** einschließlic der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. 1925 . . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“  
Schulwart.

**Differentialrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. R. in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 94 Figuren und 189 Beispielen. 191 Seiten. 1936. (Samml. Göschen Bd. 87) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting. Oberstudienrat i. R. in Dresden. Mit 63 Figuren und 190 Beispielen. 176 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 88) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.** Von Professor Dr. A. Witting. Mit 58 Figuren und 405 Beispielen und Aufgaben. 136 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 146). . . Geb. RM. 1.62

**Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung** nebst den Resultaten. Von Dr. H. Dölp. Neu bearbeitet von Dr. Eugen Netto. 18. Auflage. Oktav. 214 Seiten 1935. (Verlag von Alfred Töpelmann.) Berlin W 35 . . . . . RM. 1.95

*Das Bändchen stellt eine elementare Aufgabensammlung zur Differential- und Integralrechnung mit eingefügten Erläuterungen dar. Der erste Abschnitt, Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen, bringt die Differentiation der elementaren Funktionen, einschließlich implizite Funktionen, die Ermittlung der Werte unbestimmter Formen, Maxima und Minima, Taylor'sche Reihe. Der zweite Abschnitt, Integralrechnung, führt das Integral als unbestimmtes ein, entwickelt die Integrationsformeln im Bereiche der elementaren Funktionen und geht dann kurz auf das bestimmte Integral ein. Schließlich werden noch verhältnismäßig ausführlich geometrische Anwendungen der Infinitesimalrechnung gebracht: Tangentenbestimmung, singuläre Punkte, Krümmung; Quadratur, Rektifikation, Kubatur.*

**Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Mit 32 Figuren und 305 Beispielen. 118 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 147) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Integralgleichungen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. Groß-Oktav. 302 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Bd. 18) . . . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

**Elementare Reihenlehre.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Das Bändchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und fügt deshalb z. B. der Erörterung über das Cauchysche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gaußsche an.*

**Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 3 Figuren im Text. 140 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 1027) Geb. RM. 1.62

**Fouriersche Reihen.** Von Dr. W. Rogosinski, Professor an der Universität Königsberg. Mit 4 Figuren. 135 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1022) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik.** Von Dr. Josef Lense, o. ö. Professor der Technischen Hochschule München. Mit 30 Abbildungen. 178 Seiten. 1933 . . . . . Geb. RM. 9.50

**Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hohelsel. Zweite, verbesserte Auflage. 159 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 920) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 197 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10) . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50

**Partielle Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hohelsel. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 1003) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Partielle Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. 1929. VIII, 228 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14) RM. 11.—, geb. RM. 12.—

**Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.** Von Professor Dr. G. Hoheisel. 148 Seiten. 1933. (Sammlung Göschens Bd. 1059) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Integralgleichungen.** Von Dr. Guido Hohelsel, a. o. Prof. an der Universität Greifswald. 136 Seiten. 1936. (Sammlung Göschens Bd. 1099). Geb. RM. 1.62

**Elemente der Funktionstheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Prof. an der Universität Tübingen. Mit 23 Fig. 144 Seiten. 1937. (Samml. Göschens Bd. 1109.) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Fünfte, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschens Bd. 668) . . . . . Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 138 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 703) . . . . . Geb. RM. 1.62

*„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen.“*  
*Monatsschrift für Mathematik und Physik.*

**Aufgabensammlung zur Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 877) Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschens Bd. 878) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Elliptische Funktionen.** Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11) . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

*Das Buch will dem Studierenden und Fachmann die elliptischen Funktionen als Glied eines großen Organismus verstehen lehren, der mit den einfachsten analytischen Funktionen, den rationalen, beginnt und schließlich zu den Riemannschen Funktionensystemen emporwächst.*

**Elliptische Funktionen.** Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren im Text. XII, 356 Seiten. Neudruck. 1930. (Samml. Schubert Bd. 30) . . . . . Geb. RM. 20.—

II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren im Text. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61) Geb. RM. 7.80

**Potentialtheorie.** Von Dr. W. Sternberg.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschens Bd. 901) . . . . . Geb. RM. 1.62

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926. (Samml. Göschens Bd. 944) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.** Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.

I. Teil: Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58) . . . . . Geb. RM. 4.—

II. Teil: Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59) . . . . . Geb. RM. 4.—

*„Wer in die Potentialtheorie eindringen will, findet in dem leichtverständlichen Buch einen zuverlässigen und angenehmen Führer.“*

*Zeitschrift f. d. mathem. u. naturwiss. Unterricht.*

**Numerische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.*

**Graphische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Der Verfasser versucht einem weiteren Kreise die immer noch zu wenig benutzten zeichnerischen Methoden bekanntzumachen. Er setzt dabei so wenig Vorkenntnisse wie möglich voraus.*

**Praktisches Zahlenrechnen.** Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.*

**Mathematische Instrumente.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922) . . . Geb. RM. 1.62

*Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.*

**Nichteuklidische Geometrie.** Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970) Geb. RM. 1.62

*Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorgedrungen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.*

**Nichteuklidische Geometrie.** Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—

*Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.*

**Kreis und Kugel.** Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 S. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50

**Projektive Liniengeometrie.** Von Dr. Robert Sauer, Prof. an der Techn. Hochschule Aachen. Mit 36 Abbildungen. Groß-Oktav. 1937. (Göschens Lehrbücherei Bd. 23.) Im Druck.

**Projektive Geometrie.** Von Dr. Timmerding, Prof. an der Technisch. Hochschule Braunschweig. Mit 59 Figuren. 132 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 72) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.** Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923 . . . . . Geb. RM. 14.50

II. Mit 110 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XI, 582 Seiten. 1922. RM. 15.—, geb. RM. 16.50

*Die besprochenen Probleme werden alle mit großer Ausführlichkeit behandelt. Die am Schluß beigelegten Formeltafeln und Regeln erhöhen den Wert des Werkes, das nicht nur einführen, sondern auch zu selbständigen Forschungen anregen soll.*

**Grundlagen der Geometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. 143 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 17) . . . . . RM. 6.50, geb. RM. 7.80

*Hessenbergs Vorlesungen über die „Grundlagen der Geometrie“ stellen eine besonders einfache und lesbare Einführung in die geometrische Grundlagenforschung dar. Sie werden darum allen denen willkommen sein, die zwar der Sache selbst Interesse entgegenbringen, aber mit der sonstigen Grundlagenliteratur nicht recht fertig geworden sind. Auch der Kenner wird ihnen manche Anregung entnehmen. Die ersten beiden Kapitel sind so einfach gehalten, daß sie selbst mathematischen Arbeitsgemeinschaften an höheren Schulen Stoff liefern können. Der Schwerpunkt des Buches liegt in den Erörterungen über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie und seine Sonderfälle, den Desarguesschen und Pascalschen Satz.*

**Darstellende Geometrie.** Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena.

Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 142) . . . . . Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 143) . . . . . Geb. RM. 1.62

Dritter Teil: Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 65 Figuren im Text. 144 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 144) . . . . . Geb. RM. 1.62

Vierter Teil: Freie und gebundene Perspektive, Photogrammetrie, kotierte Projektion. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 76 Figuren im Text. 144 Seiten. 1933. (Sammlung Göschens Bd. 1063.) Geb. RM. 1.62

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. Neudruck. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. 1932 . . . . . Geb. RM. 18.90

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. Neudruck. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1932. Geb. RM. 8.55

III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 . . . . . RM. 10.80, geb. RM. 12.—

**Darstellende Geometrie.** Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65) Geb. RM. 6.—  
II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Figuren. 340 Seiten. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66) . . . . . Geb. RM. 7.50

**Elementargeometrie der Ebene und des Raumes.** Von Professor Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. Groß-Oktav. 252 S. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

**Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor der reinen Mathematik an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 16 Figuren. Groß-Oktav. 280 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Bd. 19) RM. 15.50, geb. RM. 17.—

**Geometrische Transformationen.** Von Dr. Karl Doehlemann, weill. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. Groß-Oktav. 254 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Bd. 15) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

*Entsprechend dem Programm von „Göschens Lehrbücherei“ wurden aus dem Gesamtgebiete der geometrischen Transformationen diejenigen Kapitel in nicht zu abstrakter Weise dargestellt, die sowohl für den Mathematiker wie für den technischen Wissenschaftler wesentlich sind. Aus diesem Grunde wurde neben der analytischen Darstellung die zeichnerische Auswertung berücksichtigt.*

**Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. Mit 10 Figuren. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschens Bd. 508 und 871) Geb. je RM. 1.62

**Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik.** Von Prof. Dr. M. Pirani. Zweite, verbesserte Auflage, besorgt durch Dr. I. Runge. Mit 71 Abbild. 149 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 728) Geb. RM. 1.62

**Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien.** Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Baulingenieur und Studienrat an der Baugewerkschule in Erfurt. 2 Teile. (Samml. Göschens Bd. 603 u. 695) Geb. je RM. 1.62

**Vorlesungen über graphische Statik.** Von Professor Dr. Fr. Schur. Herausgegeben unter Mitwirkung von Wolfgang Vogt. Mit zahlreichen Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 219 Seiten. 1915 RM. 7.—, geb. RM. 8.20

**Statik. I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper.** Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher in Hannover. Mit 47 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 178) . . . . . Geb. RM. 1.62

**II. Teil: Angewandte (techn.) Statik.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 61 Abbildungen. Sechster Neudruck. 149 Seiten. 1922. (Samml. Göschens Bd. 179) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Ballistik.** Von Dr. Theodor Vahlen, o. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik in Berlin. Mit 53 Abbildungen. Groß-Oktav. XII, 231 Seiten. 1922 . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.—

**Flakschuß und Wetter.** Ein Unterrichtsbuch für den Flakartilleristen und Deutschlands studierende Jugend. Von Lt. d. R. Dr. P. Lautner, Reg.-Rat und Ballistiker der Flakartillerieschule Wustrow. Ca. 182 Seiten Umfang mit ca. 50 Figuren . . . . . Preis ca. RM. 5.—

**Festigkeitslehre.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 56 Figuren und 1 Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten und 1 Tafel. 1923. (Samml. Göschen Bd. 288) . . . . . Geb. RM. 1.62

*In dem Band gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die Fundamentalsätze der elastischen Kräfte in ihrer Anwendung auf die einfacheren Fälle der Festigkeit, soweit sie für die gewöhnlichen Aufgaben des praktischen Lebens in Frage kommen.*

**Hydraulik.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.*

**Elastizitätslehre für Ingenieure.** Von Professor Dr.-Ing. Max Ensslin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) . . . . . Geb. je RM. 1.62

*Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger.*

*Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.*

**Etymologisches Wörterbuch der Naturwissenschaften und Medizin.** Sprachliche Erklärung der wichtigeren Ausdrücke und Namen der Anatomie, Astronomie, Biologie, Botanik, Chemie, Geographie, Geologie, Medizin, Mineralogie, Naturphilosophie, Paläontologie, Physik, Psychologie und Zoologie. Von Dr. C. W. Schmidt. Oktav. VII, 138 Seiten. 1923.

Geb. RM. 2.—

*Das Büchlein wendet sich in erster Linie an Nichthumanisten, wird aber auch von Studierenden mit griechischer und lateinischer Vorbildung mit Vorteil gebraucht.*

---

Fachkataloge und Prospekte auf Wunsch kostenlos

---

VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO.  
IN BERLIN W 35 UND LEIPZIG

III. 1937.

Buchdruckerel Otto Regel G. m. b. H., Leipzig

# Geistige Arbeit

Zeitung aus der wissenschaftlichen Welt

---

**Die Zeitschrift aller,  
die am geistigen Neuaufbau teilnehmen,**

**Ein unentbehrlicher Führer**

für alle, die einen Gesamtüberblick und laufende Orientierung über die weitverzweigten Einzelgebiete der Wissenschaft zu erhalten wünschen,

**Ein Vermittler**

aller wirklich zeitnahen und aktuellen Wissenschaftsprobleme,

**Ein Pfeiler**

in der Brücke, die zwischen Volk und Wissenschaft geschlagen werden soll.

**Die „Geistige Arbeit“ erscheint**

zweimal monatlich, jeweils am 5. und 20.

**Sie kostet** vierteljährlich 1.50.

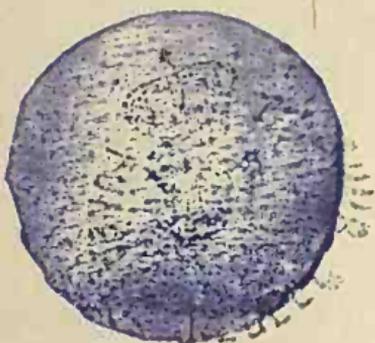
**Preis der Einzelnummer 25 Pfennig.**

Probenummer kostenlos durch Jede Buchhandlung.

---

VERLAG WALTER DE GRUYTER & CO.,  
Berlin W 35, Woynschstraße 13 (ehem. Genthiner Straße)

1987



VERIFICAT  
2007

