



BIBLIOTECA CENTRALA
A
UNIVERSITAȚII
DIN
BUCUREȘTI

No. Curent..... Format.....

No. Inventar..... Anul

Secția..... Raftul.....

sammenhänge miteinander, so daß das Ganze,
wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche,
systematische Darstellung unseres gesamten
Wissens bilden dürfte.

Ausführliche Verzeichnisse
der bisher erschienenen Bände umsonst und postfrei

Inu. A. 52.106

Sammlung Göschen

237 916

Theoretische Physik

II

237 919

Schall und Wärme

Von

Dr. Gustav Jäger

Professor der Physik an der Universität Wien

Mit 7 Figuren

Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage

87178
67179



Berlin und Leipzig
Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Veit & Comp.

1930

CONTROL 1953

B.C.U. Bucuresti



C67178

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Bibliotecă	Universitară
Filială	
Cota	71311
Inventar	67178

RC 239/01

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Inhalt.

Lehrbücher der Akustik und Wärmelehre	Seite 6
---	------------

Akustik.

1. Gegenstand der Akustik — Wellenbewegung — schwingende Bewegung	7
2. Gleichungen für die Schallbewegung in der Luft	7
3. Punktförmige Schallquelle	10
4. Geradlinige Fortpflanzung des Schalls	11
5. Planwellen	11
6. Reflexion des Schalls	12
7. Dopplers Prinzip	13
8. Interferenz der Schallwellen	15
9. Schwebungen — Differenztöne	16
10. Einfach schwingende Bewegung	17
11. Einfluß eines widerstehenden Mittels	18
12. Resonanz	18
13. Bewegungsgleichung schwingender Saiten	19
14. Lösung von d'Alembert	21
15. Unendlich lange Saite	22
16. Einseitig begrenzte Saite	23
17. Schwingungsdauer einer in zwei Punkten befestigten Saite ...	24
18. Bernoullis Lösung	25
19. Grundton und Obertöne	26
20. Klänge	27
21. Gleichung für die Longitudinalschwingungen in Stäben	28
22. Töne eines an beiden Enden freien Stabs	30
23. Töne eines an einem Ende befestigten Stabs	31
24. Offene Pfeifen	32
25. Gedeckte Pfeifen	33
26. Planwellen in einem unbegrenzten elastischen festen Körper ..	34

Die Lehre von der Wärme.

Wärmeleitung.

27. Wärmemenge — Temperatur — spezifische Wärme — Wärmekapazität	37
28. Gleichung der Wärmeleitung in einem Stab	38
29. Stationärer Zustand	43

	Seite
§ 30. Wärmeleitung in einem Ring	44
§ 31. Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung unter der Erdoberfläche	47
§ 32. Gleichung der Wärmeleitung in einem isotropen Körper — Analogie zwischen Wärme- und Flüssigkeitsströmung	50
§ 33. Gleichung der Wärmeleitung in einer Kugel	50
§ 34. Das Temperaturgefälle in der Erdrinde	51
§ 35. Abkühlung der Erde	56

Mechanische Wärmetheorie.

§ 36. Zustand eines Körpers — Zustandsgleichung Idealer Gase — absolute Temperatur	57
§ 37. Umwandelbarkeit der Wärme in Arbeit und der Arbeit in Wärme — mechanisches Wärmeäquivalent — äußere und innere Arbeit — erster Hauptsatz	58
§ 38. Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen und konstantem Druck	60
§ 39. Adiabatische Zustandsänderungen	61
§ 40. Kreisprozeß	63
§ 41. Entropie — zweiter Hauptsatz	66
§ 42. Unabhängigkeit des zweiten Hauptsatzes von der Natur der Körper — thermisches Perpetuum mobile	68
§ 43. Anwendung der beiden Hauptsätze	69
§ 44. Verdampfungswärme — Schmelzwärme — gesättigter Dampf — Schmelzpunkt	72
§ 45. Beziehung zwischen Druck und Temperatur eines Körpers	75
§ 46. Temperaturänderung durch Dehnung	76
§ 47. Freie und gebundene Energie	78
§ 48. Helmholtzsche Gleichung	79
§ 49. Das Nernstsche Wärmetheorem	80
§ 50. Affinität	81
§ 51. Verhalten der Körper nahe am absoluten Nullpunkt	84

Die kinetische Theorie der Gase.

§ 52. Die Wärmebewegung in Gasen	85
§ 53. Boyle-Charlessches Gesetz	86
§ 54. Regel von Avogadro — Gesetze von Gay-Lussac und Dalton — Geschwindigkeit der Molekeln	89
§ 55. Abweichungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz — Zustandsgleichung von van der Waals	91
§ 56. Kritische Temperatur — kritischer Druck — kritisches Volumen	94
§ 57. Spannungs- und Ausdehnungskoeffizient	97
§ 58. Spezifische Wärme	99
§ 59. Stoßzahl und mittlere Weglänge der Molekeln	101
§ 60. Innere Reibung	103
§ 61. Wärmeleitung	107
§ 62. Diffusion	108
§ 63. Größe der Molekeln — Loschmidtsche Zahl	110

	Seite
§ 64. Kinetische Theorie und Statistik	111
§ 65. Kanonische Verteilung	113
§ 66. Maxwells Gesetz	115
§ 67. Wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Gasmolekeln.....	119
§ 68. Die mittlere Geschwindigkeit und das mittlere Quadrat der Geschwindigkeiten	119
§ 69. Boltzmanns Entropiegleichung	121
§ 70. Flüssigkeiten — Lösungen — osmotischer Druck	123
§ 71. Kolloidale Lösungen	126
§ 72. Die Brownsche Bewegung	128
Register.....	131

Lehrbücher der Akustik und Wärmelehre.

Zur Weiterbildung empfehlen wir:

- Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig 1923.
Christiansen, Elemente der theoretischen Physik. 4. Aufl. Leipzig 1921.
A. Haas, Einführung in die theoretische Physik. 3. u. 4. Aufl. Berlin und Leipzig 1923—24.
v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik. Leipzig 1911.
G. Jäger, Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie. Braunschweig 1919.
Mache, Einführung in die Theorie der Wärme. Berlin und Leipzig 1921.
O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. Breslau 1899.
Planck, Vorlesungen über Thermodynamik. Berlin und Leipzig 1922.
Schaefer, Einführung in die theoretische Physik. I. Bd. 3. Aufl., II. Bd. 2. Aufl. Berlin und Leipzig 1929.
v. d. Waals, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Leipzig 1899.
-

Akustik.

§ 1. Gegenstand der Akustik — Wellenbewegung — schwingende Bewegung.

Wir behandeln in der Akustik, der Lehre vom Schall, jene Bewegungserscheinungen, welche immer in Begleitung einer Schallwahrnehmung in der Außenwelt auftreten und die man deshalb mit Recht als die physikalische Ursache des Schalls ansieht.

Unser Gehör wird durch die Bewegungen der Luft erregt, welche in unsere Ohrmuschel gelangen. Die Luft pflanzt also den Schall fort; man sagt, sie vollführt eine Wellenbewegung.

Gesetzmäßigkeiten der Schallerregung hat man nur in jenen Erscheinungen gefunden, denen eine sich regelmäßig wiederholende Bewegung als Begleiterscheinung entspricht. Es sind dies die Klänge. Ein Klang wird demnach durch eine sogenannte periodische, eine schwingende Bewegung erzeugt und vom umgebenden Medium, gewöhnlich Luft, zum Ohr fortgepflanzt. Es wird daher unsere Hauptaufgabe sein, die Wellenbewegung und die schwingende Bewegung zu untersuchen.

§ 2. Gleichungen für die Schallbewegung in der Luft.

Die Bewegung der uns umgebenden Luft muß sich durch die im § 72 Bd. I abgeleiteten hydrodynamischen Grundgleichungen darstellen lassen. Für unsern Zweck vereinfachen sie sich bedeutend, da wir äußere Kräfte völlig ausschließen wollen; ferner sollen alle vorkommenden

Geschwindigkeiten sehr klein sein, so daß auch die auftretenden Dichtenänderungen sehr klein ausfallen, weshalb alle Produkte und höheren Potenzen solcher kleinen Größen unbedenklich vernachlässigt werden können.

Die Dichte wollen wir darstellen durch

$$\rho = \rho_0 (1 + \sigma),$$

wobei ρ_0 die Dichte der ruhenden Luft sein soll, während σ die Abweichung der Dichte von ihrem normalen Zustand angibt. Die Kontinuitätsgleichung wird demnach, da

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

ferner σ, u, v, w sehr kleine Größen sind,

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen werden, da auch $\frac{\partial u}{\partial x}$ usw. sehr kleine Größen sind,

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

usw. Wir haben hier die fünf Größen σ, u, v, w, p , deren Abhängigkeit von der Zeit und dem Ort bestimmt werden soll. Dazu ist neben den vier vorhandenen Gleichungen noch eine fünfte nötig. Wir benutzen als solche das Poissonsche Gesetz

$$(3) \quad p v^* = p_0 v_0^*,$$

welches in der mechanischen Wärmetheorie begründet wird und die Beziehung zwischen Druck und Volumen eines Gases angibt, wenn die Zustandsänderung eine sogenannte adiabatische ist, d. h. eine solche, bei welcher die Bewegungen so rasch vor sich gehen, daß dabei auf-

tretende Temperaturdifferenzen sich nicht ausgleichen können. κ ist das Verhältniß der spezifischen Wärme der Luft bei konstantem Druck zu jener bei konstantem Volumen und besitzt einen konstanten Wert.

Da Dichte und Volumen verkehrt proportional sind, so können wir Gleichung (3) auch schreiben

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa},$$

oder

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa = (1 + \sigma)^\kappa = 1 + \kappa\sigma.$$

Daraus folgt, daß

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p_0 \kappa \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

ist. Die Gleichungen (2) werden demnach

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{p_0 \kappa}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

usw., indem wir wieder beachten, daß die Produkte sehr kleiner Größen weggelassen werden können.

Differenzieren wir diese Gleichungen der Reihe nach nach x , y , z und addieren sie, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{p_0 \kappa}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right).$$

Nach Gleichung (1) ist aber

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2},$$

was mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung ergibt

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{p_0 \kappa}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right).$$

§ 3. Punktförmige Schallquelle.

In der Regel entsteht der Schall an einem Punkt, von wo aus er sich nach allen Richtungen fortpflanzt. Einen solchen Punkt wollen wir als Ursprung eines Koordinatensystems ansehen, so daß wir $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ setzen können. Dann ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{x}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{r^3}.$$

Analoge Gleichungen ergeben sich für $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}$.

Alle drei Gleichungen addiert liefern

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \sigma \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \sigma)}{\partial r^2},$$

wonach Gleichung (4) in

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{p_0 \kappa}{\rho_0 r} \frac{\partial^2 (r \sigma)}{\partial r^2}$$

übergeht, was wir noch in

$$\frac{\partial^2 (r \sigma)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r \sigma)}{\partial r^2}$$

umwandeln können, wenn wir $\frac{p_0 \kappa}{\rho_0} = a^2$ setzen. Wir wollen

etwa noch $r \sigma = \alpha$ schreiben und erhalten so die Gleichung in ihrer einfachsten Form

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2}.$$

§ 4. Geradlinige Fortpflanzung des Schalls.

Wir haben als allgemeine Lösung der zuletzt gewonnenen Gleichung, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$\alpha = f(r - at).$$

Mithin ist

$$\sigma = \frac{1}{r} f(r - at).$$

Daraus geht hervor, daß sich jede Dichtenänderung im Erregungspunkt des Schalls in Form einer Kugelwelle fortpflanzt, daß jedoch die Stärke der Dichtenänderung verkehrt proportional dem Radiusvektor r ist.

Ist zur Zeit t' die Welle in r' , zur Zeit t'' in r'' angekommen, so muß $r' - at' = r'' - at''$ oder

$$\frac{r'' - r'}{t'' - t'} = a$$

sein, d. h. a ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls. Wir wissen, daß

$$a = \sqrt{\frac{p_0 \varkappa}{\rho_0}}$$

ist. In der Tat liefern die entsprechenden Werte des p_0 , ρ_0 und \varkappa für Luft als Schallgeschwindigkeit die beobachtete Größe.

§ 5. Planwellen.

Hat sich der Schall schon weit von seinem Ursprung entfernt, so können wir ein kleines Stück der Kugelwelle

als eben, mithin eine einzige Fortpflanzungsrichtung des Bewegungszustands aller Punkte annehmen. Eine solche Welle nennen wir dann eine Planwelle.

Wir wollen für ihre Bewegung Gleichung (4) in der Form

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right)$$

benutzen. Wie durch Differentiation leicht zu erkennen ist, haben wir als Lösung dafür

$$\sigma = f(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - a t).$$

Es pflanzt sich in diesem Fall der Schall demnach ungeschwächt in jener Richtung fort, welche mit den Achsen des Koordinatensystems die Winkel α , β , γ einschließt.

§ 6. Reflexion des Schalls.

Geht die Schallbewegung bloß parallel zur xz -Ebene vor sich, so ist $\cos \beta = 0$, es wird

$$(6) \quad \sigma = f(x \cos \alpha + z \cos \gamma - a t).$$

Die xy -Ebene sei nun eine starre Wand, auf welche die Planwelle trifft. Die Geschwindigkeit der Luftteilchen parallel zur z -Achse muß in dieser Ebene beständig gleich Null sein, d. h. es muß

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\rho_0 z}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

sein, was erfüllt ist, wenn

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

ist.

Finden in einem Punkt infolge mehrerer durchgehender Wellen mehrere Dichtenänderungen statt, so ist die resultierende Dichtenänderung gleich der algebraischen Summe der einzeln auftretenden. Soll daher die Be-

dingung $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ für die $x y$ -Ebene erfüllt sein, so brauchen wir zur vorhandenen Welle nur noch eine zweite hinzuzufügen, welche dem Punkt in der $x y$ -Ebene die entgegengesetzte Bewegung zu erteilen sucht. Für unsere Welle ist nun

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \cos \gamma \cdot f'.$$

Konstruieren wir also noch eine zweite, für welche

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\cos \gamma \cdot f'$$

ist, so erfüllen beide Wellen die Bedingung, daß in der $x y$ -Ebene keine Geschwindigkeit parallel zur z -Achse vorkommt.

Während also nach Gleichung (3) ein Wellenzug von oben kommend die $x y$ -Ebene durchsetzt, muß gleichzeitig ein zweiter als vorhanden gedacht werden, für welchen

$$\sigma = f(x \cos \alpha - z \cos \gamma - a t),$$

der also genau das Spiegelbild des ersten ist. Trifft demnach die Planwelle auf die starre $x y$ -Ebene, so wird sie durch eine neue ersetzt, deren Richtung nach den bekannten Gesetzen der Reflexion gefunden wird.

§ 7. Dopplers Prinzip.

Wir wollen von nun an nur noch periodische Bewegungen der Luft in Betracht ziehen. Die einfachste Form derselben ist

$$\sigma = c \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon \right).$$

Eine solche einfache schwingende Bewegung nennen wir einen Ton. c ist die Amplitude, τ die Dauer, ε die

Phase der Schwingung. Die Schwingungsdauer τ oder deren reziproker Wert, die Schwingungszahl $n = \frac{1}{\tau}$, bestimmt die Tonhöhe.

Eine Schallquelle gebe einen Ton von der Schwingungszahl n und bewege sich in der Fortpflanzungsrichtung des Schalls mit der Geschwindigkeit v . In einer Sekunde legt der Schall die Strecke a (Schallgeschwindigkeit) zurück, folglich befinden sich n Wellen auf der Strecke $a - v$, auf der Strecke a ist demnach die Zahl der Wellen $n \frac{a}{a - v}$.

Diese treffen in der Sekunde das Ohr, welches somit einen Ton von der Schwingungszahl $n \frac{a}{a - v}$ hört. Nähert sich also die Schallquelle dem Ohr, so ist der Ton höher, entfernt sie sich (wird v negativ), so ist er tiefer, als wenn die Entfernung, Schallquelle—Ohr, konstant bleibt.

Ist die Tonquelle in Ruhe, so gehn auf die Strecke a in der Fortpflanzungsrichtung des Schalls n Wellen. Diese passieren in einer Sekunde das ruhende Ohr. Nähert sich das Ohr der Tonquelle mit der Geschwindigkeit v , so ist die relative Geschwindigkeit des Schalls gegenüber dem Ohr $a + v$, somit passieren $\frac{a + v}{a} n$ Wellen in der Sekunde das Ohr, der Ton ist höher geworden. Bei entgegengesetzt gerichteter Bewegung des Ohrs wird der Ton vertieft. Die letzte Formel ist nicht identisch mit der früheren; nur wenn v gegen a klein ist, geben beide dasselbe Resultat.

Man nennt diese Vergrößerung, bezüglich Verkleinerung der Schwingungszahl durch die Bewegung des schwingenden Körpers oder des Ohrs in der Fortpflanzungsrichtung des Schalls nach seinem Begründer das Dopplersche Prinzip.

§ 8. Interferenz der Schallwellen.

Wirken mehrere Kräfte in einem Punkt so zusammen, daß gleichzeitig mehrere Dichtenänderungen derselben Periode daselbst entstehen würden, so wird

$$\sigma = \sum c \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon \right) = \cos \frac{2\pi t}{\tau} \sum c \cos \varepsilon \\ + \sin \frac{2\pi t}{\tau} \sum c \sin \varepsilon$$

sein. Dieser Ausdruck stellt wieder eine einfache harmonische Schwingung dar; denn setzen wir

$$\sum c \cos \varepsilon = r \cos \vartheta, \quad \sum c \sin \varepsilon = r \sin \vartheta,$$

so wird

$$\sigma = r \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} - \vartheta \right).$$

r und ϑ lassen sich leicht bestimmen, da ja

$$r^2 = (\sum c \cos \varepsilon)^2 + (\sum c \sin \varepsilon)^2$$

und

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sum c \sin \varepsilon}{\sum c \cos \varepsilon}$$

ist. Die Erfahrung bestätigt unsere Formel, bleibt doch eine Melodie dieselbe, ob sie von einem einzigen Instrument oder vom ganzen Orchester unisono gespielt wird. Diese Vereinigung mehrerer Schwingungen zu einer einzigen nennt man Interferenz der Schwingungen.

Wir wollen als speziellen Fall das Zusammenwirken zweier Schwingungen betrachten. Wir erhalten dafür

$$r^2 = (c \cos \varepsilon + c' \cos \varepsilon')^2 + (c \sin \varepsilon + c' \sin \varepsilon')^2 \\ = c^2 + c'^2 + 2 c c' \cos (\varepsilon - \varepsilon').$$

Die Größe der neuen Amplitude hängt also wesentlich vom Phasenunterschied $\varepsilon - \varepsilon'$ ab. Ist $\varepsilon - \varepsilon' = 2k\pi$, wobei

$k = 0, 1, 2$ usw. sein kann, so ist

$$r = c + c'.$$

Für $\varepsilon - \varepsilon' = (2k + 1)\pi$ wird

$$r = c - c'.$$

In dem einen Fall tritt eine Verstärkung, im andern eine Schwächung des Tons ein, ja ist $c = c'$, so heben sich im letztern Fall die Schwingungen vollständig auf. Es entsteht überhaupt kein Ton. Es zeigen sich diese Erscheinungen am besten an Quinckes Interferenzröhren.

§ 9. Schwebungen — Differenztöne.

Wir lassen jetzt zwei Schwingungen verschiedener Dauer auf einen Punkt einwirken. Wir haben dann

$$\sigma = c \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon \right) + c' \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau'} - \varepsilon' \right).$$

Im allgemeinen stellt σ keine harmonische Schwingung dar, ja wenn τ und τ' inkommensurable Größen sind, so wiederholt sich ein gegebener Zustand überhaupt nie wieder.

Wir wollen

$$\frac{1}{\tau} = m, \quad \frac{1}{\tau'} = n$$

setzen und m und n die Schwingungszahlen nennen. Wir haben jetzt

$$\begin{aligned} \sigma &= c \cos (2\pi m t - \varepsilon) + c' \cos (2\pi n t - \varepsilon') \\ &= c \cos (2\pi m t - \varepsilon) + c' \cos [2\pi m t - 2\pi (m - n) t - \varepsilon']. \end{aligned}$$

Ist m von n nur wenig verschieden, so vermag das Ohr die beiden Töne nicht mehr zu unterscheiden. Die Amplitude des Tons ist nun nach dem Vorhergehenden

$$r = \sqrt{c^2 + c'^2 + 2cc' \cos[-2\pi(m-n)t + \varepsilon - \varepsilon']}.$$

Es ist demnach die Amplitude eine Funktion der Zeit. Setzen wir der Einfachheit halber $\varepsilon - \varepsilon' = 0$, so wird

$$r = c + c'$$

ein Maximum für $2\pi(m - n)t = 0, 2\pi, 4\pi \dots$, hingegen wird

$$r = c - c'$$

ein Minimum für $2\pi(m - n)t = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$. Wir haben also wiederum eine periodische Bewegung vor uns, die sich als Anschwellen und Abnehmen des Tons, als Schwebung geltend macht. Die Dauer einer Schwebung ist

$$\tau = \frac{1}{m - n}.$$

$m - n$ können wir analog die Schwingungszahl nennen. Wird $m - n$ genügend groß, so hören wir beide Töne, und auch die Schwebungen nehmen den Charakter eines Tons an, den wir den Differenzton nennen. Der Differenzton wird um so tiefer sein, je näher aneinander die zwei erzeugenden Töne liegen.

§ 10. Einfach schwingende Bewegung.

Wir betrachten einen Massenpunkt, auf den eine Kraft wirkt, die proportional der Entfernung des Punkts von seiner Ruhelage und gegen diese gerichtet ist. Ist die Masse des Punkts m , seine Entfernung von der Ruhelage s , so erhalten wir die Kraftgleichung

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha s.$$

Wir haben als Lösung dafür

$$s = A \cos(at - \varepsilon)$$

(§ 9, Bd. I), wenn wir $\frac{\alpha}{m} = a^2$ setzen. Das System macht

also eine einfach schwingende Bewegung, erzeugt einen Ton von der Schwingungszahl

$$n = \frac{a}{2\pi}.$$

§ 11. Einfluß eines widerstehenden Mittels.

Unser Körper soll in einem Mittel schwingen, welches einen Widerstand proportional der Geschwindigkeit des Körpers leistet. Dann wird die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha s - \beta \frac{ds}{dt}.$$

Hierfür ist die Lösung (§ 10, Bd. I)

$$s = A e^{-bt} \cos(\sqrt{a^2 - b^2} t - \varepsilon),$$

wenn $\frac{\alpha}{m} = a^2$, $\frac{\beta}{m} = 2b$ gesetzt wird. Die Schwingungszahl ist

$$n = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi}.$$

Es wird also erstens der Ton gedämpft, der Körper hört allmählich auf zu tönen, ferner wird die Tonhöhe erniedrigt.

§ 12. Resonanz.

Auf unser System im widerstehenden Mittel wirke eine periodische Kraft, etwa die Luftschwingungen eines in seiner Nähe erzeugten Tons. Die Kraft, welche diese periodische Bewegung auf den Körper ausübt, sei durch $P \cos p t$ gegeben. Die Bewegungsgleichung wird demnach

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha s - \beta \frac{ds}{dt} + P \cos p t,$$

oder

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2b \frac{ds}{dt} + a^2 s = E \cos p t,$$

wenn $\frac{P}{m} = E$. Als ein Integral dieser Gleichung können wir

$$s = A \cos (p t - \varepsilon)$$

ansehen. Bilden wir $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{d^2 s}{dt^2}$, ferner

$$E \cos p t = E \cos [(p t - \varepsilon) + \varepsilon] = E \cos \varepsilon \cos (p t - \varepsilon) - E \sin \varepsilon \sin (p t - \varepsilon),$$

so erhalten wir leicht die Gleichung

$$A (a^2 - p^2) - E \cos \varepsilon + (E \sin \varepsilon - 2 A b p) \operatorname{tg} (p t - \varepsilon) = 0.$$

Da $\operatorname{tg} (p t - \varepsilon)$ sich mit der Zeit beständig ändert, so muß dessen Faktor Null sein.

Daraus ergibt sich

$$A (a^2 - p^2) = E \cos \varepsilon, \quad 2 A b p = E \sin \varepsilon,$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2 b p}{a^2 - p^2}, \quad A = \frac{E \sin \varepsilon}{2 b p}.$$

Wir werden also unter sonst gleichen Verhältnissen die größte Amplitude erhalten, d. h. der Körper wird unter dem Einfluß der äußeren Kraft um so heftiger ins Mitschwingen geraten, je größer $\sin \varepsilon$ und je kleiner b wird. b muß einen endlichen Wert haben. Ist $a = p$, so wird $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$, $\sin \varepsilon = 1$, d. h. wir erhalten die stärkste Resonanz, wenn die auf den Körper einwirkende Kraft dieselbe Periode hat wie die Eigenschwingung des Körpers.

§ 13. Bewegungsgleichung schwingender Saiten.

Wir denken uns eine Saite in zwei Punkten A, B (Fig. 1) mit der Spannung P befestigt und bringen sie aus ihrer

Ruhelage, jedoch so, daß sie eine ebene Kurve bildet. Das kleine Stück MN gelange dabei nach $M'N'$. Die Entfernung aus der Ruhelage sei ebenfalls sehr klein, so daß

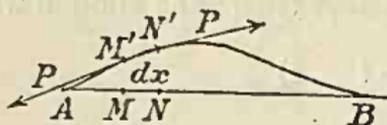


Fig. 1.

die Änderung der Spannung gegenüber der ursprünglichen Spannung völlig zu vernachlässigen ist. An dem Saitenstück $M'N'$ greifen nun zwei Kräfte an, welche ver-

schiedene Richtungen, nämlich jene der Tangenten in den Punkten M' und N' an die Saite haben. Die Ruhelage der Saite sei die x -Achse eines Koordinatensystems und α der Winkel, welchen sie mit der Tangente in M' einschließt. Dann haben wir in M' eine Kraft

$$P \sin \alpha = P \frac{\partial y}{\partial x}$$

parallel zur y -Achse, da wir wegen der Kleinheit des Winkels α Sinus und Tangente desselben vertauschen können. GleichermäÙen wirkt in N' die Kraft $P \sin \alpha'$. Nun ist

$$\sin \alpha' = \sin \alpha + \frac{\partial \sin \alpha}{\partial x} dx = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

wenn wir $MN = dx$ setzen. Die Kraft in N' wirkt in der Richtung der y -Achse, die in M' entgegengesetzt. Die Resultierende ist also

$$P \sin \alpha' - P \sin \alpha = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Ist die Dichte der Saite σ , der Querschnitt q , so hat das Stück MN die Masse $q\sigma dx$, und seine Bewegungsgleichung wird

$$q\sigma dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

oder

$$(7) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{q\sigma} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

wenn wir $\frac{P}{q\sigma} = a^2$ setzen.

§ 14. Lösung von d'Alembert.

Wir erhielten für die Transversalschwingungen einer Saite dieselbe Gleichung wie für eine Welle im Luftraum (§ 2), wenn wir die x -Richtung mit der Fortpflanzungsrichtung zusammenfallen lassen. Wir lernten die von d'Alembert gefundene Lösung (§ 4)

$$y = f(x - at)$$

kennen. Aber auch

$$y = F(x + at)$$

ist eine Lösung, wie man sich leicht durch Differentiation überzeugen kann. Es gilt daher auch

$$y = F(x + at) + f(x - at).$$

Die Funktionen F und f bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen der Bewegung. Es genügt, für $t = 0$ die Elongationen y und die Geschwindigkeiten $\frac{\partial y}{\partial t}$ sämtlicher Punkte zu kennen. Es sei demnach für den Anfang

$$y = \varphi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \psi(x).$$

Wir haben dann

$$\varphi(x) = F(x) + f(x)$$

und

$$\psi(x) = aF'(x) - af'(x).$$

Durch Integration erhalten wir

$$\frac{1}{a} \int_0^x \psi(x) dx = F(x) - f(x) - F(0) + f(0).$$

Diese Gleichung mit jener für $\varphi(x)$ ergibt

$$F(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(x) dx + \frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{2} f(0)$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(x) dx - \frac{1}{2} F(0) + \frac{1}{2} f(0),$$

daher

$$y = F(x + at) + f(x - at) = \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2} \varphi(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx.$$

§ 15. Unendlich lange Saite.

Die von uns gefundene Lösung gilt nur für eine unendlich lange Saite, da wir nur in diesem Falle für jeden Wert der Zeit auch Werte der Funktionen φ und ψ haben.

Wir nehmen nun an, daß für $t = 0$ kein Punkt der Saite in Bewegung sei, daß also für jedes x $\psi(x) = 0$ ist. Unsere Lösung geht dann in die einfachere über:

$$(8) \quad y = \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2} \varphi(x - at).$$

Für alle Punkte der nach beiden Richtungen unendlich langen Saite sei $y = 0$, nur für eine kleine Stelle um den

Nullpunkt habe $y = \varphi(x)$ endliche Werte. Nach Gleichung (8) teilt sich dieser Wert in zwei Teile, d. h. die ursprüngliche Ausbuchtung der Saite teilt sich in zwei halb so hohe, von denen mit der Geschwindigkeit a die eine nach rechts, die andere nach links längs der Saite fortläuft.

§ 16. Einseitig begrenzte Saite.

Läuft eine Welle gegen einen bestimmten Punkt der Saite, so können wir uns gleichzeitig von der andern Seite eine zweite Welle kommend denken, welche dem Punkt genau die entgegengesetzte Elongation geben würde. Das hat den Erfolg, daß der Punkt selbst immer in Ruhe bleibt. Wir können ihn daher von vornherein fest machen und den einen Teil der Saite ganz weglassen. Gelangt dann eine Wellenbewegung gegen diesen Punkt, so wird sie einfach mit entgegengesetzter Amplitude reflektiert.

Wir stellen nun die Bedingung, daß der Endpunkt einer einseitig begrenzten Saite eine bestimmte Bewegung $y=f(t)$ mache. Für $t=0$ sei die ganze Saite noch in Ruhe. Es gilt für sie dann Gleichung (8), und es muß für $x=0$ demnach

$$f(t) = \frac{1}{2} \varphi(at) + \frac{1}{2} \varphi(-at)$$

sein. Machen wir noch die Voraussetzung, daß für $t=0$ auch sämtliche Punkte der Saite in ihrer Ruhelage sind, dann ist für alle positiven Werte von x die Größe $\varphi(x) = 0$, folglich auch $\varphi(at) = 0$. Es bleibt also nur

$$\frac{1}{2} \varphi(-at) = f(t),$$

was weiter ergibt

$$y = \frac{1}{2} \varphi(x - at) = \frac{1}{2} \varphi[-(at - x)] = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Es pflanzt sich also der jeweilige Bewegungszustand am Anfangspunkt mit der Geschwindigkeit a längs der Saite fort.

§ 17. Schwingungsdauer einer in zwei Punkten befestigten Saite.

Bringen wir einen Punkt einer an beiden Enden befestigten Saite aus seiner Ruhelage und überlassen dann die Saite sich selbst, so wird sich diese Deformation nach beiden Richtungen der Saite mit halber Ordinate fortpflanzen. Wie wir in § 16 gesehen haben, wird an den Befestigungspunkten die Welle mit entgegengesetzter Amplitude reflektiert, sie durchläuft dann die ganze Saite, wird am andern Befestigungspunkt ebenfalls reflektiert und kehrt so, wie sie ausgegangen ist, wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück. Dort beginnt dann das Spiel von neuem. Die Zeit, welche dabei verfließt, können wir die Schwingungsdauer der Saite nennen. Die Saite habe die Länge l , ein Punkt in der Entfernung x vom Anfangspunkt werde aus seiner Ruhelage gebracht und dann sich frei überlassen. Es bewegt sich nach links und rechts von x aus eine Welle mit der Geschwindigkeit a . Die Welle, welche nach rechts geht, legt bis zur ersten Reflexion den Weg $l - x$, von hier aus zur zweiten den Weg l und von hier bis zur ursprünglichen Lage den Weg x , im ganzen also

$$l - x + l + x = 2l$$

zurück. Denselben Weg durchheilt die entgegengesetzt laufende Welle. a ist die Wellengeschwindigkeit, daher

$$\tau = \frac{2l}{a}$$

die Zeit des Durchlaufens, d. i. die Schwingungsdauer der Saite. Wegen $a^2 = \frac{P}{q\sigma}$ haben wir demnach für die Schwin-

gungsdauer

$$\tau = 2l \sqrt{\frac{q\sigma}{P}},$$

für die Schwingungszahl

$$n = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{q\sigma}},$$

eine Formel, die sich experimentell bestätigt.

§ 18. Bernoullis Lösung.

Wir versuchen, ob Gleichung (7) durch

$$y = XT$$

befriedigt wird, wobei X eine Funktion von x , T eine Funktion von t ist. t ist also in X , x in T nicht enthalten. Es ist somit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

und es muß

$$X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{a^2}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

sein. Da wir hier auf der einen Seite dieser Gleichung nur die Zeit t , auf der andern nur die Abszisse x als Veränderliche haben, so ist sie nur möglich, wenn jeder dieser Ausdrücke gleich einer Konstanten $-\alpha^2$ ist. Wir erhalten also zwei Gleichungen

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{\alpha^2}{a^2} X, \quad \frac{d^2 T}{dt^2} = -\alpha^2 T,$$

deren Lösungen periodische Funktionen sind. (§ 9, Bd. I), die wir zusammenfassen können in

$$y = \left(A \sin \frac{\alpha x}{a} + B \cos \frac{\alpha x}{a} \right) \sin \alpha t \\ + \left(C \sin \frac{\alpha x}{a} + D \cos \frac{\alpha x}{a} \right) \cos \alpha t.$$

Durch die Klammerausdrücke sind uns also die Amplituden der einzelnen Punkte der Saite gegeben.

§ 19. Grundton und Obertöne.

Die Saite sei an beiden Enden fest. Es muß dann zu jeder Zeit für $x = 0$ und $x = l$, auch $y = 0$ werden, woraus erstens $B = D = 0$ folgt und nur

$$y = \sin \frac{\alpha x}{a} (A \sin \alpha t + C \cos \alpha t)$$

übrigbleibt. Damit ferner für $x = l$, $y = 0$ wird, muß $\sin \frac{\alpha l}{a} = 0$ oder $\frac{\alpha l}{a} = \pi, 2\pi, \dots$,

$$\alpha = \frac{\pi a}{l}, \quad \frac{2\pi a}{l} \dots \frac{k\pi a}{l}$$

sein.

Wieder ist hier $\tau = \frac{2\pi}{\alpha}$ die Schwingungsdauer,

$$n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{a}{2l}, \quad \frac{2a}{2l} \dots \frac{ka}{2l}$$

die Schwingungszahl. Es kann also die Saite eine unendliche Zahl von Tönen hervorbringen, deren tiefster

$$n = \frac{a}{2l}$$

ist, eine Lösung, die wir schon früher fanden (§ 17). Diesen tiefsten Ton nennt man den Grundton, die übrigen die

Obertöne der Saite, und da sie ganzzahlige Vielfache des Grundtons sind, harmonische Obertöne. Gibt die Saite nur den ersten Oberton, so schwingt sie in zwei Teilen, sie hat in der Mitte einen Knoten. Beim zweiten Oberton schwingt sie in drei Teilen mit zwei Knoten usw.

§ 20. Klänge.

Die Saite kann nicht nur einzeln ihren Grundton und ihre Obertöne geben, sondern auch gleichzeitig, da ja

$$(9) \quad y = \Sigma \sin \frac{k\pi x}{l} \left(A_k \sin \frac{k\pi a}{l} t + C_k \cos \frac{k\pi a}{l} t \right)$$

ebenfalls unsere Gleichung (7) befriedigt. Wir haben dann keinen einfachen Ton, sondern einen Klang. Die Gleichung dafür ist also im allgemeinen eine unendliche Reihe, welche bestimmt ist, sobald wir den Anfangszustand der Saite, d. h. die Elongation und die Geschwindigkeit eines jeden Punktes kennen, wenn also für $t = 0$ die Form der Saite durch $y = \varphi(x)$, ihre Geschwindigkeit durch $\frac{\partial y}{\partial t} = \psi(x)$ gegeben ist. Wir haben dann

$$\varphi(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots,$$

$$\psi(x) = A_1 \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + 2 A_2 \frac{\pi a}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots$$

Es wird in der höheren Analysis nun gezeigt, daß für eine derartige Reihe die Konstanten A und C durch die Formel bestimmt sind:

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Wir sind somit in der Lage, auf diese Weise die Werte der A und C , d. h. die Amplitude der einzelnen Obertöne zu finden.

§ 21. Gleichung für die Longitudinalschwingungen in Stäben.

Denken wir uns einen Stab mit seiner Länge parallel zur x -Achse eines Koordinatensystems, so nennt man Longitudinalschwingungen jene, bei welchen sich die Teilchen parallel zur x -Achse bewegen.

Wir legen senkrecht durch unsern Stab zwei parallele Ebenen, welche um dx voneinander entfernt sind. Diese schneiden aus dem Stab ein Stück von der Masse $q dx \sigma$ heraus, wenn q der Querschnitt, σ die Dichte des Stabs ist. Befindet sich dieses Stabelement nicht in seiner Ruhelage, so werden auf beiden Seiten Spannkkräfte wirken.

Wenn wir einen Stab mit der Kraft P dehnen, so erfährt er eine Verlängerung

$$\lambda = \frac{lP}{qE},$$

wenn l die Länge des Stabes ist (§ 57 Bd. I). Danach finden wir die Spannkkräfte, welche auf unser Stabelement wirken, folgendermaßen. Der Querschnitt in der Entfernung x erlangt nach der Dehnung die Lage $x + \xi$, jener in der Entfernung $x + dx$ die Lage $x + dx + \xi'$. Betrachten wir ξ als Funktion von x , so ist

$$\xi' = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Die Verlängerung des Stabelements ist nun

$$\lambda = \xi' - \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Daraus folgt

$$P = E q \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Während nun diese Kraft auf der linken Seite des Stabelements nach links wirkt, greift auf der rechten in entgegengesetzter Richtung eine Kraft

$$P' = P + \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

an. Es wirkt mithin die resultierende Kraft

$$P' - P = \frac{\partial P}{\partial x} dx = E q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

Die Kraft muß gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung (§ 6, Bd. I) des Stabelements sein. Wir erhalten demnach die Gleichung

$$q dx \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx,$$

oder

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

wenn wir $a^2 = \frac{E}{\sigma}$ setzen.

Wir haben also auch hier genau dieselbe Gleichung wie für die Transversalschwingungen der Saiten oder für die Fortpflanzung einer Planwelle in der Luft. Der einzige Unterschied ist die physikalische Bedeutung der Größe a .

Unsere Gleichung können wir auch ohne weiteres auf die Longitudinalschwingungen in gespannten Saiten anwenden, da eine ursprünglich vorhandene Spannung auf die Longitudinalwellen gar nicht von Einfluß ist, indem dieselbe ja über die ganze Saite konstant ist, somit das Saitenelement nach beiden Seiten mit derselben Kraft zu

ziehen trachtet. Alle Lösungen, welche wir für die Transversalschwingungen der Saiten fanden, können wir nun ohne weiteres auf die Longitudinalschwingungen der Stäbe übertragen.

§ 22. Töne eines an beiden Enden freien Stabes.

Eine Lösung unserer Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

ist (§ 18)

$$\xi = \left(A \sin \frac{\alpha x}{a} + B \cos \frac{\alpha x}{a} \right) \sin \alpha t.$$

Für ein freies Stabende ist die Spannung natürlich gleich Null, also $E q \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$, was nur möglich ist, wenn

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

ist. Das eine Stabende sei im Ursprung des Koordinatensystems, für das andere ist also $x = l$, unter l die Länge des Stabs verstanden. Dann muß für $x = 0$ und $x = l$, $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ sein. Daraus folgt $A = 0$ und

$$\sin \frac{\alpha l}{a} = 0$$

oder

$$\frac{\alpha l}{a} = k\pi,$$

und da $\alpha = 2\pi n$, so

$$n = \frac{k a}{2 l}.$$

Das ist die Schwingungszahl des Tons, welchen der Stab

gibt. Da k jede beliebige ganze Zahl sein kann, so sind unendlich viele Töne möglich. $\frac{a}{2l}$ ist die Schwingungszahl des Grundtons. Es ist also derselbe wie bei der schwingenden Saite. Außer ihm haben wir eine unendliche Reihe harmonischer Obertöne.

Für die Schwingung selbst haben wir

$$\xi = B \cos \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t.$$

Wegen $\alpha = \frac{k\pi a}{l}$ ist $\frac{\alpha x}{a} = \frac{k\pi x}{l}$. Für $k=1$ wird $\cos \frac{\alpha x}{a} = 0$,

wenn wir $x = \frac{1}{2}$ setzen. Das heißt: für den Grundton hat der Stab in seiner Mitte einen Knoten, beim ersten Oberton im ersten und dritten Viertel seiner Länge usw.

Aus der bekannten Schwingungszahl eines Stabs können wir umgekehrt seinen Elastizitätsmodul berechnen.

§ 23. Töne eines an einem Ende befestigten Stabs.

Ist der Stab an seinem Anfangspunkt fest, so muß für $x=0$ auch $\xi=0$ sein, woraus für die Lösung

$$\xi = \left(A \sin \frac{\alpha x}{a} + B \cos \frac{\alpha x}{a} \right) \sin \alpha t$$

$B=0$ folgt. Es ist demnach

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\alpha}{a} A \cos \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t,$$

was für $x=l$ ebenfalls Null werden muß. Das läuft darauf hinaus, $\cos \frac{\alpha l}{a} = 0$ zu setzen, was

$$\frac{\alpha l}{a} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

zur Folge hat, unter k wieder eine beliebige ganze Zahl verstanden. Es muß demnach

$$\alpha = 2\pi n = (2k + 1) \frac{a\pi}{2l}$$

sein. Dies ergibt für die Schwingungszahl des Grundtons

$$n = \frac{a}{4l}.$$

Ein solcher Stab gibt also die tiefere Oktav eines gleichartigen, an beiden Enden freien Stabs. Der nächste Oberton hat die Schwingungszahl $n = \frac{3a}{4l}$, der zweitnächste $\frac{5a}{4l}$ usf. Es entfallen also alle ungeradzahlig harmonischen Obertöne.

§ 24. Offene Pfeifen.

Wir fanden für die Fortpflanzung einer Planwelle in der Luft, die sich in der Richtung der x -Achse bewegt, die Gleichung (§ 5)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}.$$

Dieselbe Gleichung bestimmt uns die Bewegung der Luft in Pfeifen, da diese ja auch in nichts anderem als Longitudinalwellen parallel zur Pfeifenachse besteht. Wir haben daher wieder die bekannte Lösung

$$\sigma = \left(A \sin \frac{\alpha x}{a} + B \cos \frac{\alpha x}{a} \right) \sin \alpha t.$$

Bei einer offenen Pfeife steht die innere Luft an beiden Enden der Röhre mit der äußeren in Verbindung. An diesen Stellen wird daher keine Dichtenänderung stattfinden können. Denken wir uns also die Achse der Pfeife mit der x -Achse eines Koordinatensystems zusammenfallend, während sich die eine Öffnung im Ursprung $x = 0$, die andere in der Entfernung $x = l$, d. i. die Länge der Röhre, befindet. Für diese Punkte muß somit $\sigma = 0$ werden. Daraus folgt $B = 0$, ferner $\frac{\alpha l}{a} = k\pi$, oder $\alpha = 2\pi n = \frac{k\pi a}{l}$, was für die Schwingungszahl

$$n = \frac{ka}{2l}$$

ergibt. Eine offene Pfeife verhält sich also genau so wie ein an beiden Enden freier, longitudinal schwingender Stab.

§ 25. Gedekte Pfeifen.

Am gedeckten Ende einer Pfeife können die Luftteilchen keine longitudinalen Bewegungen machen. Es muß demnach hier die Geschwindigkeit $u = 0$ (§ 6) sein. Desgl. ist natürlich auch

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{p_0 \kappa}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0.$$

Als Bedingung für ein gedecktes Pfeifenende erhalten wir demnach

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0.$$

Dies ist bei unserer Pfeife für $x = l$ der Fall, während für $x = 0$, $\sigma = 0$ werden muß. Letztere Bedingung ist in der Lösung

$$\sigma = A \sin \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t$$

erfüllt. Danach wird

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\alpha A}{a} \cos \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha l,$$

und es muß nach dem obigen

$$\cos \frac{\alpha l}{a} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\alpha l}{a} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

werden, woraus wir wegen $\alpha = 2\pi n$

$$n = (2k + 1) \frac{a}{4l}$$

erhalten.

Eine solche Pfeife verhält sich demnach ganz so wie ein an einem Ende befestigter Stab. Sie gibt als Grundton die tiefere Oktav einer gleich langen offenen Pfeife, ferner nur die geradzahigen harmonischen Obertöne.

§ 26. Planwellen in einem unbegrenzten elastischen festen Körper.

Wir wollen noch den Fall einer Planwelle in einem unbegrenzten Medium betrachten, der sich in sehr einfacher Weise unmittelbar aus den allgemeinen Gleichungen (40) (§ 60, Bd. I) ergibt.

Wir denken uns ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem und nehmen an, daß in jeder Ebene parallel zur (y, z) -Ebene alles konstant sei, sowohl die Dehnungen als die Verschiebungen. Äußere Kräfte sollen überhaupt nicht vorhanden sein, so daß

$$X = Y = Z = 0$$

wird. In den Gleichungen (40) (Bd. I) müssen somit alle Ableitungen nach y und z gleich Null werden. Da allgemein

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

so wird für unseren Fall

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

daher

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Ferner wird

$$\Delta \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \Delta \eta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad \Delta \zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2},$$

und die Gleichungen (40) (Bd. I) vereinfachen sich in folgende:

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$\rho \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\rho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2},$$

die wir auch noch schreiben können:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2},$$

indem wir

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = a^2, \quad \frac{\mu}{\rho} = c^2$$

gesetzt haben.

Die erste dieser Gleichungen ist gelöst durch

$$\xi = f(x - at),$$

die zweite und dritte durch

$$\eta = \varphi(x - ct)$$

bzw.

$$\zeta = \psi(x - ct)$$

(§ 14). Die Verschiebungen ξ einer Planwelle pflanzen sich in der Richtung der Verschiebung mit der Geschwindigkeit

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

fort. Das ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen. Die Verschiebungen η und ζ , welche parallel zur Wellenebene erfolgen, pflanzen sich senkrecht dazu mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

fort. Dies ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen. Die Longitudinalwellen pflanzen sich demnach rascher fort als die Transversalwellen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen im unbegrenzten Raume darf nicht verwechselt werden mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in einem Stabe. Die Verschiedenheit rührt daher, daß hier Querkontraktion, im unbegrenzten Raume jedoch nicht auftritt.

Die Lehre von der Wärme.

Wärmeleitung.

§ 27. Wärmemenge — Temperatur — spezifische Wärme — Wärmekapazität.

Wie wir die Schall- und Lichterscheinungen auf bloße Bewegungserscheinungen zurückgeführt haben, so tun wir es auch mit den Erscheinungen der Wärme. Wir fassen die Wärme als Bewegung der kleinsten Teilchen eines Körpers, als Molekularbewegung auf. Für die Bahnen der Molekeln gibt es keine bevorzugte Richtung, sie sind nach allen Richtungen gleichförmig verteilt. Der Schwerpunkt des Körpers bleibt also in Ruhe, und da die Bewegung der einzelnen Molekeln sinnlich nicht wahrnehmbar ist, so ist für die Sinnesorgane auch der ganze Körper in Ruhe. Die Gesamtenergie der Molekeln nennen wir seine Wärmemenge. Bringen wir zwei Körper zur Berührung, so wird ein Energieaustausch stattfinden. Von jenem Körper, welcher mehr Energie an den andern abgibt, sagen wir, er besitze die höhere Temperatur. Nach willkürlichem Maß messen wir die Temperatur mit dem Thermometer und nennen die Maßeinheit einen Temperaturgrad. Die Wärmemenge, welche die Gewichtseinheit eines Körpers um einen Grad erhöht, ist dessen spezifische Wärme c . Diese kann sich mit der Temperatur ändern, wir werden sie daher besser durch

$$c = \frac{dQ}{du}$$

definieren, wenn wir unter Q die Wärmemenge und unter u die Temperatur verstehen. Die Wärmemenge, welche wir

demnach einem Körper zuführen, wird gleich dem Produkt aus seinem Gewicht, spezifischer Wärme und Temperaturerhöhung sein. Das Produkt aus der spezifischen Wärme und dem Gewicht ist die Wärmekapazität des Körpers.

Die Erfahrung lehrt, daß verschieden temperierte Körper, sich selbst überlassen, ihre Temperaturen ausgleichen. Dies geschieht entweder durch Leitung oder durch Strahlung der Wärme. Im ersteren Fall müssen die Körper einander berühren, und es gibt direkt der eine Energie an den andern ab. Es ist dies die Regel, wenn verschiedene Punkte ein und desselben Körpers verschiedene Temperaturen besitzen. Im zweiten Fall ist der Träger der Wärme der hypothetische Lichtäther, und es lehrten die Untersuchungen, daß Licht- und Wärmestrahlen sich physikalisch voneinander gar nicht unterscheiden.

Die im folgenden gegebene Theorie der Wärmeleitung wurde von Fourier begründet und ausgearbeitet.

§ 28. Gleichung der Wärmeleitung in einem Stab.

Wir halten das eine Ende eines dünnen Stabs beständig auf der Temperatur a , das andere auf der niedrigeren Temperatur b . Es strömt dann durch den Stab Wärme von a nach b . Je größer der Temperaturunterschied $a - b$ ist, desto mehr Wärme wird in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Stabs fließen. Machen wir die Voraussetzung, der Stab gebe nach außen keine Wärme ab, was freilich in Wirklichkeit nur in gewissen Fällen angenähert erreicht werden kann, so muß durch jeden Querschnitt des Stabs in derselben Zeit dieselbe Wärmemenge W gehen. Wir wollen sie daher proportional der Zeit und dem Temperaturunterschied setzen. Sie wird ferner noch proportional dem Querschnitt des Stabs q und schließlich von der Länge l des Stabs

abhängig sein, so daß wir für die durch den Querschnitt gehende Wärmemenge

$$W = q t (a - b) f(l)$$

erhalten.

Teilen wir unsern Stab in gleiche Teile von der Länge λ und sei in der Entfernung λ von a die Temperatur a_1 , in der Entfernung 2λ a_2 usw., so muß die Gleichung

$$\begin{aligned} W &= q t (a - a_1) f(\lambda) \\ &= q t (a_1 - a_2) f(\lambda) = \dots \end{aligned}$$

gelten, woraus folgt

$$a - a_1 = a_1 - a_2 = \dots$$

Es fällt also von a nach b die Temperatur linear ab. Wir können daher ganz allgemein schreiben

$$W = q t (MN - M'N') f(MM')$$

(Fig. 2). Da aber

$$\frac{MN - M'N'}{MM'} = \frac{a - b}{l} = G \text{ (konst.)}$$

ist, so wird

$$W = q t G \cdot \overline{MM'} f(\overline{MM'}) = q t G y f(y),$$

wenn wir $MM' = y$ einführen. Wir können nun $y f(y) = k$, also

$$f(y) = \frac{k}{y}$$

setzen, wonach

$$W = q t k \frac{a - b}{l}$$

wird. Die Konstante k nennen wir die Wärmeleitungs-

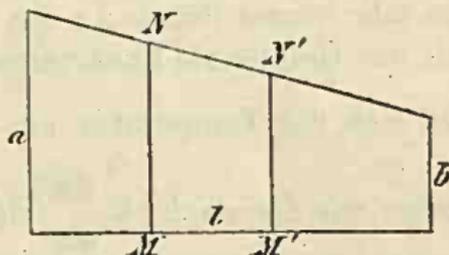


Fig. 2.

fähigkeit; es ist die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit beim Temperaturgefälle Eins geht, wobei wir unter dem Temperaturgefälle die Größe $\frac{a-b}{l}$ verstehen.

Das lineare Temperaturgefälle in unserm Stab ist nur für den Fall eines stationären Zustands vorhanden. In allen andern Fällen können wir daher unsere Gleichung nur für ein sehr kurzes Stück dx des Stabs benützen, für welches wir das Gefälle als linear annehmen. Auf der Strecke dx soll sich die Temperatur um du ändern. Anstatt $\frac{a-b}{l}$ haben wir demnach $-\frac{du}{dx}$ zu setzen. Das negative Vorzeichen rührt davon her, daß die Wärme immer entgegen der Richtung der Temperaturzunahme fließt. Das Temperaturgefälle $-\frac{du}{dx}$ wird ferner nur für eine kurze Zeit τ als konstant anzusehen sein. Während dieser Zeit fließt dann durch den Querschnitt des Stabs die Wärmemenge

$$(10) \quad W = -q \tau k \frac{du}{dx}.$$

Ein sehr kurzes Stabstück von der Länge ξ sei durch die Querschnitte M und M' begrenzt. Es strömt dann in der Zeit τ durch den Querschnitt M die Wärmemenge, welche durch Gleichung (10) gefunden wird, ein, durch M' die Menge

$$W' = -q \tau k \left(\frac{du}{dx} \right)'$$

aus. Es bleibt daher in unserm Stabelement die Wärme $W - W'$ zurück und erhöht die Temperatur um δ . Das

Volumen des Stabelements ist $q \xi$, das spezifische Gewicht sei s , die spezifische Wärme c . Dann ist sein Gewicht $q \xi s$ und seine Wärmekapazität $q \xi s c$. Es besteht somit die Gleichung

$$W - W' = q \xi s c \delta.$$

Die Temperaturerhöhung per Zeiteinheit können wir $\frac{\partial u}{\partial t}$ schreiben, daher für die Zeit τ

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial t} \tau,$$

mithin

$$W - W' = q \xi s c \frac{\partial u}{\partial t} \tau.$$

Für einen Zeitpunkt oder für eine unendlich kleine Zeit τ können wir die Wärmemenge W als eine Funktion von x ansehen, wenn wir mit x die Entfernung eines Punktes des Stabs vom Anfangspunkt bezeichnen. Dann ist

$$W' = W + \frac{\partial W}{\partial x} \xi,$$

folglich nach Gleichung (10)

$$W - W' = - \frac{\partial W}{\partial x} \xi = q \tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$q \xi s c \frac{\partial u}{\partial t} \tau = q \tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{s c} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Wir lassen jetzt die Bedingung, daß der Stab nach außen keine Wärme abgibt, fallen und nehmen an, daß

die abgegebene Wärme der Temperaturdifferenz zwischen Stab und Umgebung und der Oberfläche proportional sei. Ist p der Umfang, so ist $p\xi$ die Oberfläche des Stabelements und $h p \xi (u - a) \tau$ die nach außen abgegebene Wärme, wenn wir a die Temperatur der Umgebung nennen. Da es nun ganz gleichgültig ist, wo wir den Nullpunkt der Temperaturskala anbringen, so können wir von Fall zu Fall

$$a = 0$$

annehmen. Es bleibt uns dann für die nach außen abgegebene Wärmemenge der Ausdruck $h p \xi u \tau$. Die im Stabelement verbleibende Wärme ist daher

$$W - W' - h p \xi u \tau,$$

was uns die Gleichung

$$q \xi s c \frac{\partial u}{\partial t} \tau = q \tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h p \xi u \tau$$

ergibt, die sich reduziert auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{s c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h p}{q s c} u$$

oder

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - n u.$$

Die Größe $m = \frac{k}{s c}$ nennt man die Temperaturleitfähigkeit oder auch das thermometrische Leitungsvermögen, h die äußere Wärmeleitfähigkeit.

Es darf also das Temperaturleitungsvermögen nicht mit dem Wärmeleitungsvermögen verwechselt werden. Während z. B. die Wärmeleitfähigkeit der Gase gegenüber jener der Metalle sehr klein ist, haben sie doch ziemlich dasselbe

Temperaturleitungsvermögen. Das heißt, es gleichen sich verschiedene Temperaturen in Gasen ebenso rasch aus wie in Metallen.

§ 29. Stationärer Zustand.

Bleibt jeder Punkt unseres Stabs auf konstanter Temperatur, so nennen wir diesen Zustand stationär. Es ist also dann

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

und Gleichung (11) wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{n}{m} u = 0.$$

Eine Lösung dafür ist

$$u = e^{\beta x}.$$

Danach wird unsere Gleichung

$$\beta^2 e^{\beta x} - \frac{n}{m} e^{\beta x} = 0,$$

folglich

$$\beta^2 = \frac{n}{m}, \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Wir erhalten also zwei Werte für β , welche wir zusammenfassen können in

$$u = A e^{-x\sqrt{\frac{n}{m}}} + B e^{x\sqrt{\frac{n}{m}}}.$$

Unser Stab sei nun sehr lang. Die Temperatur soll aber für ein unendlich großes x nicht unendlich werden. Dann ist $B = 0$ zu setzen, und es bleibt

$$u = A e^{-x\sqrt{\frac{n}{m}}}.$$

Für $x = 0$ sei $u = u_0$. Folglich wird $A = u_0$. Haben wir zwei Stäbe mit derselben Anfangstemperatur, so ist für den einen

$$u = u_0 e^{-x\sqrt{\frac{n}{m}}},$$

für den andern

$$u' = u_0 e^{-x'\sqrt{\frac{n'}{m'}}}.$$

Für zwei Punkte gleicher Temperatur muß somit

$$x\sqrt{\frac{n}{m}} = x'\sqrt{\frac{n'}{m'}}$$

sein. Es ist nun

$$\frac{n}{m} = \frac{h p}{q k}, \quad \frac{n'}{m'} = \frac{h' p'}{q' k'}.$$

Geben wir daher den Stäben kongruente Form und gleiche Oberflächenbeschaffenheit, so ist

$$\frac{h p}{q} = \frac{h' p'}{q'},$$

und wir erhalten

$$\frac{k'}{k} = \frac{x'^2}{x^2},$$

was uns die Möglichkeit liefert, die Wärmeleitungsfähigkeiten von Stäben verschiedenen Materials miteinander zu vergleichen.

§ 30. Wärmeleitung in einem Ring.

Setzen wir in Gleichung (11)

$$u = y e^{-nt},$$

so nimmt sie, wie leicht zu finden, die Form

$$\frac{\partial y}{\partial t} = m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

an. Das ist aber die Form der Wärmeleitungsgleichung ohne Wärmeabgabe nach außen, welche wir schreiben können

$$(12) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Es wird demnach in vielen Fällen genügen, die Lösung für die Gleichung (12) zu kennen, weil diese, mit $e^{-\alpha t}$ multipliziert, sodann die Lösung für (11) ergibt. Eine Lösung der Gleichung (12) ist

$$(13) \quad u = e^{\alpha t + \beta x}.$$

Dieser Wert, in die Gleichung (12) eingesetzt, gibt

$$\alpha = m \beta^2.$$

Soll die Temperatur mit der Zeit nicht ins Unendliche wachsen, so muß α negativ sein. Wir wollen $\alpha = -\gamma$ schreiben, wonach wir

$$\beta \sqrt{m} = \pm i \sqrt{\gamma}$$

erhalten, was sich in das partikuläre Integral

$$u = e^{-\gamma t} \left(A \cos x \sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin x \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \right)$$

zusammenfassen läßt. (Bd. I § 10.)

Wenden wir diese Formel auf einen Stab an, welcher zu einem Ring zusammengebogen ist, so daß sich Anfangs- und Endpunkt berühren, und legen wir in eine beliebige Stelle des Rings den Anfangspunkt der Abszissen, so muß in den Punkten $x, x+l, x+2l, \dots$ die Temperatur ein und dieselbe Größe haben, wenn l der Umfang des Rings ist. Daraus folgt, daß

$$l \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = 2\pi, \quad 4\pi, \quad 6\pi \dots$$

sein muß, wonach

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m}{l^2}, \quad \frac{16\pi^2 m}{l^2}, \quad \frac{36\pi^2 m}{l^2}, \dots$$

wird. Wir haben somit als allgemeine Lösung

$$u = \sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-\frac{4k^2\pi^2 m t}{l^2}} \left(A_k \cos \frac{2k\pi x}{l} + B_k \sin \frac{2k\pi x}{l} \right).$$

Die Konstanten A und B lassen sich berechnen, sobald für $t = 0$ die Temperatur durch $u = f(x)$ gegeben ist (§ 20). Die höheren Glieder unserer Summe nehmen mit wachsender Zeit sehr rasch ab. In der Praxis genügt es daher, sich auf

$$u = A_0 + e^{-\frac{4\pi^2 m t}{l^2}} \left(A_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + B_1 \sin \frac{2\pi x}{l} \right)$$

zu beschränken. Es ist dies die Temperatur der Abszisse x . Gegenüber liegt der Punkt $x + \frac{l}{2}$ mit der Temperatur

$$u' = A_0 + e^{-\frac{4\pi^2 m t}{l^2}} \left(-A_1 \cos \frac{2\pi x}{l} - B_1 \sin \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Die Summe beider liefert

$$u + u' = 2A_0,$$

die Differenz

$$u - u' = 2e^{-\frac{4\pi^2 m t}{l^2}} \left(A_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + B_1 \sin \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Es nimmt also die Differenz der Temperaturen zweier gegenüberliegender Punkte geometrisch mit der Zeit ab, woraus wir die Größe des Exponenten, somit auch die Temperatur- und Wärmeleitungsfähigkeit bestimmen können.

§ 31. Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung unter der Erdoberfläche.

In der Lösung der Gleichung (12), welche durch Gleichung (13) gegeben ist, ist eine der beiden Konstanten α und β vollständig willkürlich. Wir wollen deshalb α imaginär, also $\alpha = ai$ wählen. Wir haben dann

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{ai}{m}},$$

ferner

$$\sqrt{ai} = \sqrt{\frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{a}{2}}$$

und

$$\begin{aligned} u &= A e^{ait + \frac{x}{\sqrt{m}} \left(\sqrt{\frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{a}{2}} \right)} + B e^{ait - \frac{x}{\sqrt{m}} \left(\sqrt{\frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{a}{2}} \right)} \\ &= A e^{x \sqrt{\frac{a}{2m}} + i \left(at + x \sqrt{\frac{a}{2m}} \right)} + B e^{-x \sqrt{\frac{a}{2m}} + i \left(at - x \sqrt{\frac{a}{2m}} \right)}. \end{aligned}$$

Es läßt sich also u als periodische Funktion bei richtiger Wahl der Anfangszeit in folgender Weise darstellen:

$$u = C e^{-\sqrt{\frac{a}{2m}} x} \sin \left(at - x \sqrt{\frac{a}{2m}} \right).$$

Für den Anfangspunkt $x = 0$ erhalten wir somit

$$u_0 = C \sin at.$$

Unsere Lösung gilt also für einen Stab, der nach außen keine Wärme abgibt und an dessen Anfangspunkt die Temperaturänderung eine harmonische Schwingung darstellt.

Denken wir uns ein Prisma, welches von der Erdoberfläche senkrecht in die Tiefe geht, so haben wir den Fall verwirklicht, daß nach außen keine Wärme abgegeben wird, da wegen der gleichen Verteilung der Temperatur in einer

horizontalen Ebene keine Wärmebewegung stattfindet. Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung an der Erdoberfläche können wir in erster Annäherung als eine harmonische auffassen, können daher unsere Lösung auf die Temperaturänderung unter der Erdoberfläche beziehen. Wir finden in jeder Tiefe eine periodische Temperaturänderung, jedoch wird die Amplitude mit wachsender Tiefe immer kleiner, so daß wir etwa 28 m tief unter der Erdoberfläche die Temperaturschwankung überhaupt nicht mehr wahrnehmen, sondern jahraus jahrein eine konstante Temperatur haben. Hat zu einer bestimmten Zeit t die Temperatur an der Erdoberfläche den Wert Null, so muß $at = n\pi$ sein. In der Tiefe x wird diese Temperatur erst nach der Zeit δ eintreten, welche sich daraus bestimmt, daß dann

$a(t + \delta) - x \sqrt{\frac{a}{2m}} = n\pi$ ist. Wir finden somit

$$a\delta = x \sqrt{\frac{a}{2m}} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{\delta} = \sqrt{2ma}.$$

Das können wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmewelle nennen. Bezeichnen wir analog die Schwingungsdauer mit τ , so haben wir $a = \frac{2\pi}{\tau}$, folglich

$$(14) \quad u = C e^{-x \sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}} \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau} - x \sqrt{\frac{\pi}{m\tau}} \right),$$

$$\frac{x}{\delta} = \sqrt{\frac{4m\pi}{\tau}}.$$

Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Funktion der Schwingungsdauer, und zwar wird sie um so größer, je kleiner die Schwingungsdauer ist. Es pflanzen sich deshalb die täglichen Änderungen viel rascher in die Tiefe fort,

als die jährlichen. Dafür nimmt aber die Amplitude der letzteren mit der Tiefe viel langsamer ab.

Die Gleichung (14) gibt uns die Mittel an die Hand, nach zwei Methoden die Wärmeleitungsfähigkeit der Erdrinde zu bestimmen, einmal aus der Abnahme der Amplitude mit der Tiefe, das zweitemal aus der Verzögerung des Maximums bzw. des Minimums der Temperatur. In der Tiefe x' ist die Schwankung der Temperatur

$$\delta' = 2 C e^{-x' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}},$$

in der Tiefe x''

$$\delta'' = 2 C e^{-x'' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}},$$

folglich

$$\frac{\delta'}{\delta''} = e^{(x'' - x') \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}},$$

woraus sich m bestimmen läßt.

Das Maximum der Temperatur haben wir in x' zur Zeit t' , wenn

$$\frac{2\pi t'}{\tau} - x' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}} = \frac{\pi}{2},$$

desgleichen in x'' nach der Zeit t'' für

$$\frac{2\pi t''}{\tau} - x'' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}} = \frac{\pi}{2},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{2\pi}{\tau} (t'' - t') = (x'' - x') \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}.$$

Dieselbe Formel erhalten wir für die Wanderung des Minimums, und wiederum ist es leicht, aus dieser Gleichung die Temperaturleitungsfähigkeit m und somit auch die Wärmeleitungsfähigkeit der Erdrinde zu finden.

§ 32. Gleichung der Wärmeleitung in einem isotropen Körper
— Analogie zwischen Wärme- und Flüssigkeitsströmung.

Denken wir uns aus einem isotropen Körper ein Volumenelement $\xi \eta \zeta$ herausgeschnitten, so können wir für die drei Richtungen parallel zu den Koordinatenachsen dieselbe Überlegung machen, welche wir über die Wärmeströmung nach einer Richtung (§ 28) anstellten. Der Unterschied ist dann nur der, daß dem Volumenelement nicht nur von einer sondern von drei Seiten Wärme zu- und gleicherweise abgeführt wird. Die Gleichung (12) erweitert sich daher auf

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Für den stationären Zustand wird sie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Dieselbe Gleichung fanden wir (Bd. I § 77) für die stationäre Strömung einer Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitspotential u . Wir können daher alle speziellen Fälle stationärer Wärmeströmung in einem isotropen Körper, der nach außen keine Wärme abgibt, auf die stationäre Bewegung einer idealen Flüssigkeit und umgekehrt übertragen, wenn wir Temperatur und Geschwindigkeitspotential, Temperaturgefälle und Strömungsgeschwindigkeit miteinander vertauschen.

§ 33. Gleichung der Wärmeleitung in einer Kugel.

Wenden wir die Gleichung (15) auf eine Kugel an, in welcher die Wärmeströmung nur radial vor sich gehen soll, so muß in jeder konzentrischen Kugelschale die Temperatur konstant sein. Verlegen wir den Ursprung des Koordinaten-

systems in die Mitte der Kugel, so wird $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ die Gleichung einer konzentrischen Kugelfläche, ferner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u)}{\partial r^2}.$$

(§ 3.) Wir können daher Gleichung (15) schreiben

$$(16) \quad \frac{\partial (r u)}{\partial t} = m \frac{\partial^2 (r u)}{\partial r^2},$$

da ja bei der partiellen Differentiation von $r u$ nach t r als konstant anzusehen ist. Wir erhalten also für die Kugel dieselbe Gleichung der Wärmeleitung wie für den Stab, der nach außen keine Wärme abgibt, wenn wir u durch $r u$ und x durch r ersetzen. Es tritt hier dieselbe Analogie auf wie für die Fortpflanzung einer ebenen und einer Kugelwelle (§§ 4 u. 5).

§ 34. Das Temperaturgefälle in der Erdrinde.

Als eine Lösung der Gleichung (16) fanden wir im § 30

$$r u = e^{-r t} \left(A \cos r \sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \right).$$

Für $r = 0$ soll die Temperatur einen endlichen Wert behalten. Dann muß $A = 0$ sein und es bleibt uns

$$(17) \quad u = B e^{-r t} \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r}.$$

Die Wärmemenge, welche durch die Flächeneinheit der Kugeloberfläche in der Zeiteinheit geht, können wir auf zweierlei Art ausdrücken. Sie ist erstens gleich $-k \frac{\partial u}{\partial r}$,

ferner gleich $h u$ (§ 28). Wir haben somit

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} = h u$$

oder

$$(18) \quad \frac{\partial u}{\partial r} + n u = 0,$$

wenn wir

$$\frac{h}{k} = n$$

setzen. Doch gilt diese Gleichung nur für die Oberfläche der Kugel, d. h. für $r = \varrho$, wobei also ϱ der Kugelradius ist. Wir können $\frac{\partial u}{\partial r}$ aus Gleichung (17) finden. Wir erhalten dafür

$$\frac{\partial u}{\partial r} = B e^{-rt} \left(\frac{\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \cos r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r} - \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r^2} \right).$$

Setzen wir hier so wie in der Gleichung (17) $r = \varrho$, so gestaltet sich Gleichung (18) folgendermaßen:

$$B e^{-rt} \left(\frac{\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \cos \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho} - \frac{\sin \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho^2} \right) + n B e^{-rt} \frac{\sin \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho} = 0,$$

welche sich leicht verwandeln läßt in

$$\sin \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} (n \varrho - 1) + \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \cos \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = \frac{\varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{1 - n \varrho}.$$

Setzen wir $\varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = x$, so vereinfacht sie sich noch zu

$$(19) \quad \operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - n \varrho}.$$

Diese letzte Gleichung können wir nun sehr leicht auf graphischem Weg lösen, wenn wir sowohl $\operatorname{tg} x$ als auch $\frac{x}{1 - n \varrho}$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eintragen.

Wir wollen eine Anwendung davon auf unsere Erde machen. Es wird somit ϱ sehr groß, also $\frac{1}{1 - n \varrho}$ eine kleine negative Zahl. Es ist daher die Kurve

$$y = \frac{x}{1 - n \varrho}$$

eine Gerade, welche vom Ursprung 0 (Fig. 3) ausgeht, mit der x -Achse einen sehr kleinen Winkel bildet und für positive x unterhalb der x -Achse liegt. Wo diese Gerade die zweite Kurve

$$y = \operatorname{tg} x$$

schneidet, dort ist immer eine Wurzel der Gleichung (19). Wir erhalten somit unendlich viel Werte für x und somit auch für γ . Die Gleichung (17) verwandelt sich daher in eine unendliche Reihe. Das erste Glied fällt ganz weg, weil dafür $x = 0$, also auch $\gamma = 0$ ist. Die nächste Wurzel von x liegt nahe bei π , die zweitnächste nahe bei 2π usw. Sie werden sich also nahezu verhalten wie $1:2:3\dots$, folg-

lich die Werte der γ nahezu wie 1 : 4 : 9... Das heißt, die höheren Glieder unserer unendlichen Reihe nehmen mit wachsender Zeit sehr rasch ab, so daß wir uns nach einiger Zeit lediglich auf die Gleichung

$$u = B_1 e^{-\gamma_1 t} \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}}{r}$$

beschränken können.

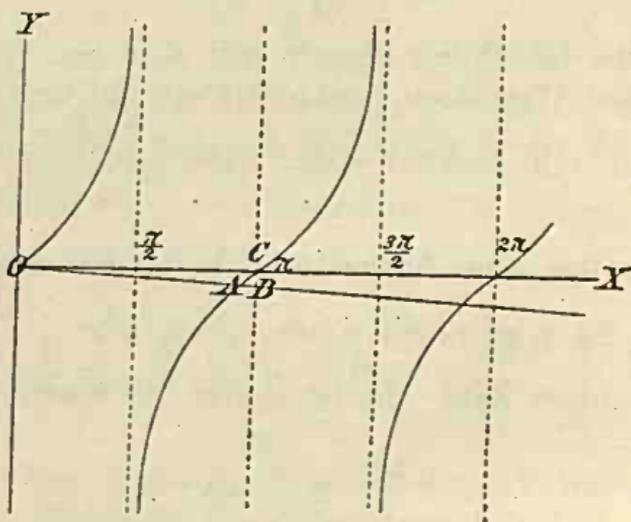


Fig. 3.

Wir wollen nun $x_1 = \pi - \varepsilon$ setzen, wobei ε sehr klein ist. Dann können wir aber ABC (Fig. 3) als ein rechtwinkliges Dreieck auffassen und

$$AB = BC = \varepsilon = -\frac{\pi}{1 - n \varrho} = \frac{\pi}{n \varrho}$$

setzen. Somit wird

$$x_1 = \pi \left(1 - \frac{1}{n \varrho} \right),$$

$$\sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} = \frac{x_1}{\varrho} = \frac{\pi}{\varrho} \left(1 - \frac{1}{n \varrho} \right)$$

und

$$\gamma_1 = m \frac{\pi^2}{\varrho^2},$$

indem wir die anderen Glieder vernachlässigen können. Führen wir die Tiefe z ein, so wird

$$r = \varrho - z,$$

und es soll z gegen ϱ ebenfalls eine kleine Größe sein. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} &= \sin \frac{\pi}{\varrho} (\varrho - z) \left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right) \\ &= \sin \pi \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right) = \sin \left(\pi - \frac{\pi z}{\varrho} - \frac{\pi}{n\varrho}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{\varrho} \left(z + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\varrho} \left(z + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

da wir wegen der Kleinheit von $\frac{\pi}{\varrho}$ den Sinus mit dem Bogen vertauschen können. Wir erhalten demnach weiter

$$\frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}}{r} = \frac{\pi}{\varrho^2} \left(z + \frac{1}{n}\right),$$

wenn wir z gegen ϱ vernachlässigen, was hier erlaubt ist. Somit wird schließlich

$$u = \frac{B_1 \pi}{n \varrho^2} e^{-\frac{m \pi^2}{\varrho^2} t} (1 + n z).$$

Es muß also die Temperatur von der Oberfläche gegen das Erdinnere mit der Tiefe linear zunehmen. Die Erfahrung lehrt, daß die Temperaturzunahme für 30 m etwa 1°C beträgt.

§ 35. Abkühlung der Erde.

Für ein konstantes r wird nach Gleichung (17) die Temperatur lediglich eine Funktion der Zeit, welche für unsere Erde die Form

$$u = A e^{-\frac{m \pi^2}{\rho^2} t},$$

annimmt. Setzen wir für die Zeit $t = 0$ die Temperatur $u = u_0$, so wird $A = u_0$ und

$$u = u_0 e^{-\frac{m \pi^2}{\rho^2} t},$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{m \pi^2 u_0}{\rho^2},$$

da wir wegen des großen $\rho^2 e^{-\frac{m \pi^2}{\rho^2} t} = 1$ setzen können. Die Temperatur unter der Erdoberfläche muß demnach mit der Zeit abnehmen, doch geschieht dies ungemein langsam.

Da u_0 der Überschuß über die Temperatur der Umgebung der Erde ist, so müßten wir, um $\frac{du}{dt}$ berechnen zu können, die Temperatur des Weltraums kennen. Aber selbst wenn diese den absoluten Nullpunkt, d. h. -273°C erreicht hätte, würde $\frac{du}{dt}$ so klein, daß die Temperatur der Erdrinde erst in vielen Millionen Jahren um 1° sinkt.

Die Wärmemenge, welche durch die Oberflächeneinheit der Erde in der Zeiteinheit ausgestrahlt wird, ist $-k \frac{du}{dr}$. Wir können dieselbe berechnen, da wir sowohl $\frac{du}{dr}$ kennen, als auch die Wärmeleitungsfähigkeit k der Erde (§ 17) bestimmbar ist. Es ergibt sich daraus, daß jährlich eine Wärmemenge aus dem Innern der Erde zur Oberfläche strömt, welche imstande ist, eine neun Millimeter dicke Eis-

schicht zu schmelzen. Es kommt diese Wärmemenge somit im Vergleich zu der von der Sonne gespendeten Wärme gar nicht in Betracht. Ob es daher im Innern der Erde kalt oder heiß ist, für die Lebensbedingungen auf der Oberfläche ist das völlig belanglos.

Mechanische Wärmetheorie.

§ 36. Zustand eines Körpers — Zustandsgleichung idealer Gase — absolute Temperatur.

Wir fassen die Wärme als Bewegung der kleinsten Teilchen der Körper auf. Zu einem gegebenen Zeitpunkt wird daher jedes Teilchen eine bestimmte Lage und eine bestimmte Geschwindigkeit besitzen. Wir nennen dies den Zustand des Körpers. Um ihn zu kennen, ist es nicht nötig, den Zustand jedes einzelnen Körperteilchens zu wissen, sondern bloß die Mittelwerte der den Zustand bestimmenden Größen, da ja die thermischen Erscheinungen, welche wir an einem Körper wahrnehmen, durch das Zusammenwirken der kleinsten Teilchen hervorgebracht werden. Der Zustand eines Körpers ist sonach in unserm Sinn bestimmt durch seine Temperatur, sein Volumen, seine Gestalt und die auf ihn wirkenden äußeren und inneren Kräfte. Soweit diese verschiedenen Größen voneinander abhängig sind, lassen sie sich in Gleichungen fassen, und jene Gleichung, welche alle den Zustand bestimmenden Größen untereinander verbindet, nennen wir die Zustandsgleichung des Körpers.

Diese ist z. B. für ideale Gase durch das Boyle-Charles'sche Gesetz

$$p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

gegeben. Das heißt, der Zustand eines Gases ist vollständig durch sein Volumen v , seine Temperatur t und den Druck p ,

unter dem es sich befindet, gegeben. Benutzen wir das hundertteilige Thermometer, so ist $\alpha = \frac{1}{273}$. Die frühere Gleichung läßt sich verwandeln in

$$p v = p_0 v_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = p_0 v_0 \alpha T = R T.$$

In der Form

$$(20) \quad p v = R T$$

wollen wir das Boyle-Charlessche Gesetz künftig benutzen und

$$T = t + \frac{1}{\alpha}$$

die absolute Temperatur nennen. Der absolute Nullpunkt liegt also bei -273°C .

§ 37. Umwandelbarkeit der Wärme in Arbeit und der Arbeit in Wärme — mechanisches Wärmeäquivalent — äußere und innere Arbeit — erster Hauptsatz — Energieprinzip.

R. Mayer hat zuerst bestimmt ausgesprochen, daß Arbeit in Wärme und Wärme in Arbeit verwandelt werden kann und daß einer Kalorie — d. i. jene Wärmemenge, welche ein Kilogramm Wasser von 0° auf 1°C erhöht — ein ganz bestimmter Arbeitswert zukommt. Die experimentellen Untersuchungen haben gelehrt, daß einer Kalorie rund 427 mkg entsprechen, welche Zahl man daher das mechanische Wärmeäquivalent nennt. Da das Gewicht eines Kilogramms sich mit dem Breitengrad ändert, so ist es für genaue Rechnungen oft vorzuziehen, den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents in absolutem Maß anzugeben: d. i. $4 \cdot 19 \cdot 10^7 \text{ Erg/Kal.}$, wobei sich die Kalorie auf ein Gramm Wasser bezieht.

Führen wir einem Körper Wärme zu, so wird im allgemeinen seine Temperatur und seine Gestalt verändert. Es muß daher eine Arbeit aufgewandt werden, um die

inneren Kräfte zu überwinden und die Energie der kleinsten Teilchen zu erhöhen. Man nennt dies die innere Arbeit oder die Vermehrung der inneren Energie, welche auf Kosten der Wärme erzeugt wird. Ferner ist Arbeit zur Überwindung der äußeren Kräfte notwendig, welche wir analog die äußere Arbeit nennen. Es wird sich daher die unendlich kleine Wärmemenge dQ , welche wir einem Körper zuführen, in einen Teil dU zerlegen lassen, welcher die Temperaturerhöhung und die innere Arbeit bewirkt, und einen zweiten, der die äußere Arbeit dK leistet. Um diese Arbeit in Wärmemaß zu bekommen, haben wir sie durch das mechanische Wärmeäquivalent E zu dividieren oder mit dem reziproken Wert desselben, dem kalorischen Arbeitsäquivalent $A = \frac{1}{E}$ zu multiplizieren. Sonach erhalten wir nach dem Satz von der Erhaltung der Energie die Gleichung

$$(21) \quad dQ = dU + A dK,$$

welche man gewöhnlich den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie nennt.

Der Satz von der Erhaltung der Energie, von dem der erste Hauptsatz ein Spezialfall ist, wird gewöhnlich für ein abgeschlossenes System definiert. Unter einem solchen verstehen wir ein System von Körpern, dem Energie weder zugeführt noch entzogen wird. Darnach können wir das Energieprinzip (Energiesatz) allgemein folgendermaßen formulieren:

In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtsumme der Energie konstant, wie immer sich auch die einzelnen Energieformen desselben ineinander umwandeln.

Den Spezialfall für die Mechanik lernten wir bereits in Bd. I § 14 kennen.

§ 38. Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen und konstantem Druck.

Steht ein Körper unter keiner äußeren Kraft als einem konstanten, senkrecht zu seiner Oberfläche wirkenden Druck p , wie es etwa der Luftdruck ist, so wird die zugeführte Wärmemenge dQ lediglich eine kleine Volumsänderung hervorbringen. Jedes Oberflächenelement $d\omega$ legt dabei einen Weg δn zurück. Die äußere Arbeit, welche geleistet wird, ist sonach gleich dem Produkt aus der Kraft $p d\omega$ in den Weg δn , die Gesamtarbeit also

$$dK = \int p \delta n d\omega = p \int \delta n d\omega = p dv,$$

da ja $\int \delta n d\omega$ nichts anderes als die Volumszunahme dv des Körpers ist. Es verwandelt sich daher die Gleichung (21) in

$$(22) \quad dQ = dU + A p dv.$$

Die innere Arbeit wird im allgemeinen ebenfalls eine Funktion der Temperatur, des Drucks und des Volumens sein. Da aber eine dieser drei Größen wegen der Gleichung (20) immer durch die beiden andern bestimmt werden kann, so genügt es,

$$U = f(v, T)$$

zu setzen, wonach

$$dU = \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial T} dT$$

wird.

Es hat nun schon Gay-Lussac gezeigt, daß ein Gas, wenn es sich ohne äußere Arbeitsleistung ausdehnt, seine Temperatur nicht ändert. Es leistet daher ein Gas bei der Volumsänderung auch keine innere Arbeit, d. h. es muß die Größe

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

sein. Setzen wir $\frac{\partial f}{\partial T} = c$, so können wir Gleichung (22) schreiben

$$(23) \quad dQ = c dT + A p dv.$$

Wir wollen voraussetzen, daß sich unsere Gleichung auf die Masseneinheit Gas bezieht. Führen wir die Wärme bei konstantem Volumen zu, so ist $dv = 0$, folglich $\frac{dQ}{dT} = c$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen.

Die Differentiation der Zustandsgleichung (20) ergibt

$$(24) \quad p dv + v dp = R dT.$$

Dadurch können wir Gleichung (23) in

$$dQ = (c + AR) dT - A v dp$$

verwandeln. Nehmen wir eine Wärmeausdehnung bei konstantem Druck vor, so wird $dp = 0$, folglich

$$\frac{dQ}{dT} = c + AR = C.$$

Dies ist also die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck.

§ 39. Adiabatische Zustandsänderungen.

Verändern wir den Zustand eines Körpers, ohne daß ihm Wärme zu- oder abgeführt wird, so nennen wir dies eine adiabatische Zustandsänderung. Für eine solche muß also in Gleichung (23)

$$dQ = 0$$

werden. Dividieren wir dann die Gleichung noch durch $p v = RT$, so ergibt dies

$$0 = \frac{c dT}{RT} + \frac{A dv}{v} \quad \text{oder} \quad 0 = \frac{c dT}{T} + \frac{AR dv}{v}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$c \ln T + A R \ln v = G.$$

Zu Beginn des Prozesses sei diese Gleichung

$$c \ln T_0 + A R \ln v_0 = G.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen folgt

$$c \ln \frac{T}{T_0} + A R \ln \frac{v}{v_0} = 0,$$

was wir schließlich noch umwandeln können in

$$\ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^c + \ln \left(\frac{v}{v_0} \right)^{A R} = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{T}{T_0} \right)^c \left(\frac{v}{v_0} \right)^{A R} = 1.$$

Beachten wir noch, daß

$$C - c = A R,$$

so bleibt uns schließlich

$$(25) \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^{\frac{C}{c} - 1} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^{\kappa - 1},$$

wenn wir das Verhältnis der spezifischen Wärmen κ nennen. Diese Gleichung besagt somit, daß durch Kompression eines Gases seine Temperatur erhöht, durch Ausdehnung erniedrigt wird.

Auf ähnliche Weise können wir auch die Beziehung zwischen Druck und Volumen bei einer adiabatischen Zustandsänderung eines Gases finden. Ersetzen wir in Gleichung (23) dT durch $\frac{p dv + v dp}{R}$ aus der Gleichung (24), so wird

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{c}{R} (p dv + v dp) + A p dv \\ &= \frac{(c + A R) p dv + c v dp}{R} = \frac{C p dv + c v dp}{R}. \end{aligned}$$

Für eine adiabatische Änderung muß wieder $dQ = 0$, also

$$C p dv + c v dp = 0$$

sein, was durch $p v$ dividiert

$$C \frac{dv}{v} + c \frac{dp}{p} = 0$$

ergibt. Durch Integration finden wir wie früher

$$C \ln \frac{v}{v_0} + c \ln \frac{p}{p_0} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^{\kappa} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa},$$

wenn wir ρ die Dichte des Gases nennen. Diese Formel mußten wir benutzen, um die Schallgeschwindigkeit in der Luft zu finden (§ 2).

§ 40. Kreisprozeß.

Lassen wir den Zustand eines Körpers verschiedene Änderungen durchmachen, bis er wieder den Anfangszustand erreicht, so nennen wir das einen Kreisprozeß.

Können die Veränderungen auch in entgegengesetzter Richtung ablaufen, so ist es ein umkehrbarer (reversibler) Kreisprozeß. Einen solchen wollen wir an einem idealen Gas vornehmen. Wir stellen den Zustand der Masseneinheit des Gases

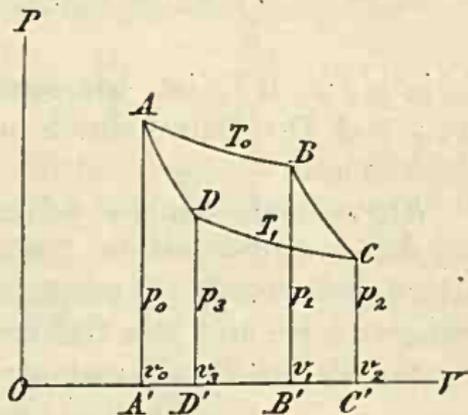


Fig. 4.

durch einen Punkt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar (Fig. 4), dessen Abszisse das Volumen, während die Ordinate den Druck bedeutet. Die Kurve, welche wir für

eine konstante Temperatur dabei erhalten, nennen wir eine Isotherme. Bei einem idealen Gas ist sie

$$p v = \text{konst.},$$

also eine gleichseitige Hyperbel.

Der Punkt A sei der Anfangszustand des Gases bei der Temperatur T_0 , dem Druck p_0 und dem Volumen v_0 . Das Gas dehne sich jetzt isotherm, d. h. bei konstanter Temperatur T_0 aus bis zum Zustand B mit den zugehörigen Größen T_0, p_1, v_1 . Für diesen Vorgang ist also $dT = 0$, daher nach Gleichung (23)

$$dQ = A p dv.$$

Die gesamte Wärme Q_0 , welche wir auf dem Weg von A nach B in unser Gas hineinstecken, wird also nur zur Arbeitsleistung verwendet, und es ist

$$(26) \quad Q_0 = A \int_{v_0}^{v_1} p dv = A R T_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = A R T_0 \ln \frac{v_1}{v_0},$$

da ja $p v = R T_0$ ist, wir somit durch Multiplizieren mit $R T_0$ und Dividieren durch $p v$ den Wert des Integrals nicht ändern.

Wir nehmen nun eine adiabatische Ausdehnung vor. Bei dieser wird somit der Zustand von B längs einer adiabatischen Kurve bis C vorrücken. Wir führen also Wärme weder zu noch ab. Das Gas kühlt sich daher von der Temperatur T_0 auf T_1 ab, und wir haben nach Gleichung (25)

$$(27) \quad v_1^{\kappa-1} T_0 = v_2^{\kappa-1} T_1.$$

Wir komprimieren nun das Gas isotherm, haben somit eine Wärmemenge

$$Q_1 = A R T_1 \ln \frac{v_3}{v_2}$$

zuzuführen. Diese Wärmemenge erscheint aber, da $v_3 < v_2$, negativ, es wird in Wirklichkeit dem Gas Wärme entzogen. Die Kompression wird längs CD so lange fortgesetzt, bis die Isotherme die durch den Punkt A gezogene Adiabate in D schneidet. Von dort aus komprimieren wir dann weiter adiabatisch, langen also wieder beim Ausgangspunkt in A an. Für den letzten Vorgang gilt die Gleichung

$$(28) \quad v_3^{\kappa-1} T_1 = v_0^{\kappa-1} T_0.$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (27) und (28) miteinander, so finden wir $v_1 v_3 = v_0 v_2$ oder

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_3}.$$

Daher ist

$$Q_1 = ART_1 \ln \frac{v_3}{v_2} = -ART_1 \ln \frac{v_1}{v_0},$$

was mit Gleichung (26) vereinigt ergibt

$$\frac{Q_0}{T_0} = -\frac{Q_1}{T_1},$$

wo also das negative Vorzeichen sagt, daß Q_1 eine dem Gas entzogene Wärmemenge ist. Rechnen wir hingegen jede Menge positiv, so ist die in Arbeit umgewandelte Wärme $Q_0 - Q_1$. Sie entspricht in Fig. 4 der Fläche $ABCD$, da ja die Flächen $ABB'A'$, $BCC'B'$ usw. die geleistete bzw. aufgewendete Arbeit bei den einzelnen Vorgängen des Kreisprozesses darstellen.

Von der Wärmemenge Q_0 , welche bei der Temperatur T_0 in das Gas hineingesteckt wird, wird also nur der Teil $Q_0 - Q_1$ in Arbeit verwandelt, während die Wärmemenge Q_1 bei der Temperatur T_1 wieder abgegeben wird. Da sich der Kreisprozeß beliebig wieder-

holen läßt, so haben wir hier eine sogenannte kalorische Maschine vor uns, welche Wärme in Arbeit verwandelt. Doch ist es nur der Bruchteil

$$\frac{Q_0 - Q_1}{Q_0} = \frac{T_0 - T_1}{T_0},$$

welcher wirklich von der gesamten aufgewendeten Wärme in Arbeit verwandelt wird. Je größer dieser Bruch ist, desto besser wird die Wärme ausgenützt. Man nennt daher die Größe $\frac{T_0 - T_1}{T_0}$ den ökonomischen Koeffizienten der Maschine. Diese arbeitet mithin um so ökonomischer, je größer der Temperaturunterschied $T_0 - T_1$ ist.

§ 41. Entropie — zweiter Hauptsatz.

Es ist nicht nötig, einen Kreisprozeß einfach längs der früher gewählten Isothermen und Adiabaten vor sich gehen zu lassen, sondern es kann dies längs jeder beliebigen geschlossenen Kurve geschehen, indem die Gleichung (23), wenn wir sie in der Form

$$A p dv = dQ - c dT$$

schreiben, ersichtlich ja nichts anderes als die Summe aus einem adiabatischen und einem isothermen Vorgang enthält, welche bei der graphischen Darstellung eine geometrische Summe wird. Je nach der Fläche der geschlossenen Kurve wird daher das Integral der Gleichung (23) verschiedene Werte annehmen können. Dividieren wir die gesamte Gleichung durch die absolute Temperatur T , so erhalten wir

$$\frac{dQ}{T} = \frac{c dT}{T} + \frac{A R dv}{v}.$$

Integrieren wir nun diese Gleichung zwischen zwei Punkten der Kurve, welche den Größen T_0 , v_0 und T_1 , v_1 entsprechen, so wird

$$\int_0^1 \frac{dQ}{T} = c \ln \frac{T_1}{T_0} + A R \ln \frac{v_1}{v_0}.$$

Es ist also für das Integral ganz gleichgültig, auf welchem Weg wir von dem einen zum andern Punkt gelangen, da es nur vom Anfangs- und Endwert abhängig ist. Für jede geschlossene Kurve ist somit

$$(29) \quad \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

$\frac{dQ}{T}$ ist mithin ein vollständiges Differential.

Wir wollen

$$\frac{dQ}{T} = dS$$

setzen, wonach wir erhalten

$$\int \frac{dQ}{T} = S + C.$$

Clausius nennt S die Entropie des Gases. Wir werden später sehen, daß wir dieselben Überlegungen auf jeden beliebigen Körper anwenden können.

Die Gleichung (29) ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, den wir etwa folgendermaßen formulieren können: Rechnen wir die zugefügte Wärme positiv, die entzogene negativ, so ist die Summe aller unendlich kleinen Wärmemengen, jede dividiert durch ihre jeweilige Temperatur, für einen umkehrbaren Kreisprozeß gleich Null.

Bei jeder adiabatischen Zustandsänderung ist $dQ = 0$, es wird daher

$$\int \frac{dQ}{T} = C,$$

d. h. die Entropie bleibt konstant, weshalb man die adiabatischen Vorgänge auch isentropische nennt.

§ 42. Unabhängigkeit des zweiten Hauptsatzes von der Natur der Körper — thermisches Perpetuum mobile.

Wie wir durch einen umkehrbaren Kreisprozeß Wärme in Arbeit verwandeln können, so läßt sich auch Arbeit in Wärme umsetzen, sobald wir den Prozeß entgegengesetzt durchlaufen. Gleichzeitig wird eine gewisse Wärmemenge auf höhere Temperatur gebracht. Wie ein Gas können wir auch jeden anderen beliebigen Körper zwei isotherme und zwei adiabatische Kurven durchlaufen lassen und somit einen umkehrbaren Kreisprozeß herstellen. Umgrenzen die Kurven eine Fläche von derselben Größe wie der Kreislauf eines Gases, so leisten beide Prozesse dieselbe Arbeit. Lassen wir sie daher entgegengesetzt vor sich gehen, so heben sie sich in ihrer Wirkung auf. Aber es wäre noch die Möglichkeit vorhanden, daß die Wärmemengen, welche von tieferer auf höhere Temperatur und umgekehrt befördert werden, verschieden sind. Das widerspricht aber dem Erfahrungssatz, daß es noch niemals in der Natur beobachtet wurde, daß Wärme ohne vorhandene anderweitige Energieänderung von selbst zu höherer Temperatur aufsteigen kann. Es muß daher auch für unsern zweiten Kreisprozeß wie für das Gas die Gleichung

$$\frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1}$$

gelten. Schon Carnot sprach aus, daß bei der durch die

Wärme hervorgebrachten Arbeit nur die Temperaturen, nicht aber die dazu verwendeten Körper maßgebend sind.

Wäre es möglich, daß Wärme von selbst zu höherer Temperatur aufsteigt, so könnte ein beständiger Wärmekreislauf ohne Arbeitsleistung hergestellt werden, indem ja durch Leitung oder Strahlung die Wärme wieder auf ihre ursprüngliche Temperatur sinken würde. Man hätte dann ein sogenanntes thermisches Perpetuum mobile. Aber dieses ist ebenso unmöglich wie ein mechanisches.

Der zweite Hauptsatz hat in der von uns gegebenen Form die Voraussetzung einer willkürlichen Temperatur, indem wir die auf ein ideales Gas als thermometrische Substanz gegründete absolute Temperatur benützten. Hätten wir ein anderes Temperaturmaß gewählt, so würden wir auch eine andere Form des zweiten Hauptsatzes erhalten haben. W. Thomson machte daher den Vorschlag, den zweiten Hauptsatz direkt zur Temperaturdefinition zu benützen, da dann das Temperaturmaß von einer thermometrischen Substanz völlig unabhängig wird. Willkürlich bleibt jedoch wiederum die Wahl der Form der Temperaturfunktion, und es darf die Annahme der sogenannten absoluten Temperatur nur als eine Folge ihrer großen Einfachheit angesehen werden.

§ 43. Anwendung der beiden Hauptsätze.

Wir lernten den ersten Hauptsatz in der Form

$$dQ = dU + A p dv$$

kennen. Hier ist die Größe dU ebenso ein vollständiges Differential wie das Differential der Entropie $\frac{dQ}{T}$, da wir

ja annehmen müssen, daß die innere Energie durch den jeweiligen Zustand des Körpers bedingt ist, so daß die Änderung der Energie lediglich vom Anfangs- und Endzustand abhängt.

Wir machen nun die Annahme, der Zustand eines Körpers sei durch die Temperatur T und das Volumen v vollständig bestimmt. Die beiden Differentiale der inneren Energie und der Entropie sind sonach Funktionen von T und v und ebenso die dem Körper zugeführte Wärmemenge dQ . Wir wollen deshalb

$$dQ = \alpha dT + \beta dv$$

setzen, wobei α und β Funktionen von T und v sind. Betrachten wir die Gewichtseinheit des Körpers, so ergibt sich ohne weiteres, daß α die spezifische Wärme bei konstantem Volumen ist, da dann $dv = 0$ wird. Jedes vollständige Differential dF , das eine Funktion von T und v ist, können wir schreiben

$$dF = \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial v} dv = M dT + N dv$$

und es folgt

$$\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\partial N}{\partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial v}.$$

Demnach können wir aus

$$dU = dQ - A p dv = \alpha dT + (\beta - A p) dv$$

die Folgerung ziehen:

$$(30) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial (\beta - A p)}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T} - A \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Ferner haben wir

$$\frac{dQ}{T} = \frac{\alpha}{T} dT + \frac{\beta}{T} dv$$

und wiederum gilt

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\alpha}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\beta}{T} \right)$$

oder

$$\frac{1}{T} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{1}{T} \frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{\beta}{T^2},$$

$$(31) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{\beta}{T}.$$

Aus den Gleichungen (30) und (31) erhalten wir

$$\beta = AT \frac{\partial p}{\partial T},$$

folglich

$$(32) \quad dQ = \alpha dT + AT \frac{\partial p}{\partial T} dv.$$

Stellen wir den Zustand als Funktion der Temperatur und des Drucks, also durch T und p dar, so können wir

$$dQ = \gamma dT + \eta dp$$

setzen, wobei also γ die spezifische Wärme bei konstantem Druck ist. Wir haben dann

$$dU = dQ - A p dv = dQ - A p \left(\frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial p} dp \right),$$

da wir jetzt v als Funktion von T und p auffassen müssen. Aus

$$dU = \left(\gamma - A p \frac{\partial v}{\partial T} \right) dT + \left(\eta - A p \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp$$

finden wir

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\gamma - A p \frac{\partial v}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\eta - A p \frac{\partial v}{\partial p} \right);$$

führen wir die Differentiation durch, so ergibt sich

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} - A \frac{\partial v}{\partial T} - A p \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial T} = \frac{\partial \eta}{\partial T} - A p \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial T},$$

oder

$$(33) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial p} - A \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{\partial \eta}{\partial T}.$$

Wir haben nun weiter

$$\frac{dQ}{T} = \frac{\gamma}{T} dT + \frac{\eta}{T} dp,$$

folglich

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\gamma}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\eta}{T} \right),$$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{1}{T} \frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{\eta}{T^2},$$

$$(34) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{\eta}{T}.$$

und aus den Gleichungen (33) und (34)

$$\eta = - A T \frac{\partial v}{\partial T},$$

$$(35) \quad dQ = \gamma dT - A T \frac{\partial v}{\partial T} dp.$$

Analog diesem Vorgang ist es nicht schwer, für beliebige Variable, welche den Zustand bestimmen, die entsprechende Gleichung herzuleiten.

§ 44. Verdampfungswärme — Schmelzwärme — gesättigter Dampf — Schmelzpunkt.

Wir haben in einem geschlossenen Gefäß die Masseneinheit eines Körpers teilweise in flüssigem, teilweise in dampfförmigem Zustand. Das Gewicht des Dampfes sei x ,

das der Flüssigkeit also $1 - x$. Das Volumen v des Gefäßes ist demnach

$$v = \frac{1-x}{s} + \frac{x}{\sigma} = \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{s} \right) x = u' + (u - u') x,$$

wenn s und σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bzw. ihres gesättigten Dampfes ist. Es ist u' also das sogenannte spezifische Volumen der Flüssigkeit, u jenes des Dampfes. Wir wollen nun eine Verdampfung der Flüssigkeit bei konstanter Temperatur vornehmen. Dann wird $dT = 0$ und Gleichung (32) wegen $dv = (u - u') dx$

$$dQ = A T \frac{\partial p}{\partial T} (u - u') dx.$$

Nennen wir die Verdampfungswärme r , so wird

$$dQ = r dx,$$

daher

$$(36) \quad r = A T \frac{\partial p}{\partial T} (u - u').$$

Diese Formel von Clapeyron-Clausius können wir benutzen, um z. B. die Dichte des gesättigten Dampfes $\frac{1}{u}$ zu finden, wenn die übrigen Größen bekannt sind.

Wir wollen jetzt die Temperatur der Masseneinheit des gesättigten Dampfes um dT erhöhen, dabei den Druck und das Volumen aber derart ändern, daß der Dampf gesättigt bleibt. Die Gleichung (22) läßt sich, auf unsern Fall angewendet, schreiben

$$(37) \quad dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T} + A p \frac{\partial u}{\partial T} \right) dT,$$

hingegen auf die Verdampfungswärme angewendet, ergibt die Integration

$$r = U_1 - U_2 + A p (u - u'),$$

wenn wir unter U_1 die innere Energie der Masseneinheit Dampf, unter U_2 dieselbe Größe für die Masseneinheit Flüssigkeit verstehen. Nun können wir aber annehmen, daß

$$U_2 = c T + k,$$

wobei c die spezifische Wärme der Flüssigkeit und k eine Konstante bedeutet. Danach erhalten wir

$$U_1 = r + cT + k - A p (u - u'),$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial T} = \frac{dr}{dT} + c - A p \frac{\partial u}{\partial T} - A (u - u') \frac{\partial p}{\partial T},$$

da wir das spezifische Volumen u' der Flüssigkeit mit großer Annäherung als konstant ansehen können. Diesen Ausdruck haben wir für $\frac{\partial U}{\partial T}$ in Gleichung (37) einzusetzen, wobei wir nach Gleichung (36) $A (u - u') \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{r}{T}$ einführen wollen. Das ergibt

$$dQ = \left(\frac{dr}{dT} - \frac{r}{T} + c \right) dT.$$

Die Größe

$$\gamma = \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T} + c$$

können wir somit die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes nennen. Wie man sieht, kann sie positiv oder negativ sein. In letzterem Fall können wir den Dampf komprimieren, erhöhen dabei seine Temperatur und bewirken, daß er nicht mehr gesättigt ist. Wir müssen ihm Wärme entziehen, wenn er gesättigt bleiben soll. Lassen wir einen derartig gesättigten Dampf sich ausdehnen, so wird er übersättigt und es tritt Kondensation ein. Es verhält sich so der Wasserdampf bei gewöhnlicher Temperatur.

Die Gleichung (36) gilt nun ebenso für einen festen Körper und seinen Dampf, wie etwa für Eis und den dabei befindlichen Wasserdampf. Sie gilt für die Schmelzwärme eines Körpers, wenn wir r damit bezeichnen, unter p den Flüssigkeitsdruck beim Schmelzpunkt, unter u und u' das spezifische Volumen des flüssigen bzw. festen Körpers verstehen. Schreiben wir z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{r}{AT(u - u')},$$

und bedenken wir, daß das spezifische Volumen des Wassers kleiner als jenes des Eises ist, so finden wir $\frac{\partial p}{\partial T}$ negativ. Das heißt, mit wachsendem Druck erniedrigt sich der Schmelzpunkt und umgekehrt. Wir können die Gleichung (36) auch anwenden, wenn sich ein Körper durch Temperaturerhöhung bzw. Druckverminderung in seine chemischen Bestandteile zerlegt. Es ist dann p einfach der Dissoziationsdruck, r die Dissoziationswärme usw.

§ 45. Beziehung zwischen Druck und Temperatur eines Körpers.

Nehmen wir eine adiabatische Zustandsänderung durch Änderung des Drucks vor, so können wir die Gleichung (35) benutzen, wenn wir $dQ = 0$ setzen. Es bleibt dann

$$\gamma dT = AT \frac{\partial v}{\partial T} dp.$$

Es ist nun $\frac{\partial v}{\partial T}$ nichts anderes als $v\delta$, wenn wir unter δ den Ausdehnungskoeffizienten des Körpers verstehen. Wir können daher schreiben

$$\gamma dT = AT v \delta dp.$$

γ , A , T , v sind ihrer Natur nach positive Größen, δ kann jedoch sowohl positiv als auch, wie z. B. beim Wasser zwischen 0° und 4° C, negativ sein. Im ersteren Fall wird sich daher mit wachsendem Druck die Temperatur erhöhen, im andern jedoch erniedrigen.

§ 46. Temperaturänderung durch Dehnung.

Ein Stab von der Masse Eins und der Länge l wird durch ein angehängtes Gewicht P gedehnt. Führen wir dem Stab die Wärme dQ zu, so verlängert er sich um dl . Das Gewicht sinkt und leistet dabei die Arbeit $P dl$. Die Wärme wirkt also diesmal nicht einer äußeren Kraft entgegen, sondern im selben Sinn. Wir haben deshalb nach dem ersten Hauptsatz

$$dU = dQ + AP dl.$$

Die Wärmemenge Q werde als Funktion von T und P dargestellt. Es ist sonach

$$dQ = \gamma dT + \eta dP.$$

Benützen wir nun die Eigenschaft der vollständigen Differentiale dU und $\frac{dQ}{T}$ wie früher, indem wir

$$(38) \quad dl = \frac{\partial l}{\partial T} dT + \frac{\partial l}{\partial P} dP$$

setzen, so finden wir leicht

$$\eta = AT \frac{\partial l}{\partial T};$$

für eine adiabatische Dehnung erhalten wir somit

$$0 = \gamma dT + AT \frac{\partial l}{\partial T} dP.$$

γ ist die spezifische Wärme bei konstantem Zug. $\frac{\partial l}{\partial T} = \lambda l$,
wenn wir mit λ den Ausdehnungskoeffizienten bezeichnen.
Wir haben somit

$$dT = - \frac{AT\lambda l}{\gamma} dP.$$

Da in der Regel λ positiv ist, so kühlt sich bei der Dehnung der Stab ab. Bei gespanntem Kautschuk ist λ negativ. In der Tat erwärmt sich eine Kautschukschnur bei der Dehnung und kühlt sich mit abnehmender Spannung ab.

Aus Gleichung (38) erhalten wir

$$dP = \frac{dl - \frac{\partial l}{\partial T} dT}{\frac{\partial l}{\partial P}},$$

folglich

$$dQ = \gamma dT + \frac{\eta}{\frac{\partial P}{\partial l}} \left(dl - \frac{\partial l}{\partial T} dT \right).$$

Bei konstanter Länge wird $dl = 0$ und

$$dQ = \left(\gamma - \eta \frac{\frac{\partial l}{\partial T}}{\frac{\partial l}{\partial P}} \right) dT.$$

Es ist daher die spezifische Wärme bei konstanter Länge

$$\gamma' = \gamma - \eta \frac{\frac{\partial l}{\partial T}}{\frac{\partial l}{\partial P}} = \gamma - \frac{AT \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)^2}{\frac{\partial l}{\partial P}} = \gamma - AT\lambda^2 Elq,$$

indem $\frac{dl}{\partial P} = \frac{1}{E q}$ (§ 21), wenn q der Querschnitt des Stabs und E der Elastizitätsmodul ist. Bei Metalldrähten und vielen anderen Körpern zeigt sich, daß das Produkt $AT\lambda^2 Elq$ so klein ist, daß man es in der Regel gegen γ vernachlässigen, das Verhältnis der spezifischen Wärmen also gleich Eins setzen kann.

§ 47. Freie und gebundene Energie.

Nach der Bedeutung des Differential der Entropie (§ 41) $dS = \frac{dQ}{T}$ läßt sich schreiben $dQ = T dS$. Danach wird der erste Hauptsatz in der Form der Gleichung (22)

$$T dS = dU + A p dv.$$

Wir suchen die Arbeit, die bei einem isothermen Prozeß geleistet wird, also

$$A \int_{v_0}^{v_1} p dv = TS_1 - TS_0 - (U_1 - U_0)$$

$$= [(U_1 - TS_1) - (U_0 - TS_0)] = - (H_1 - H_0),$$

wobei wir

$$(39) \quad U - TS = H$$

setzen. In dem Maß, als Arbeit geleistet wird, nimmt H ab. Es ist also H eine Energieform. Es ist jene Energiemenge, die bei konstanter Temperatur tatsächlich in Arbeit verwandelt werden kann. Man nennt sie mit Helmholtz die „freie Energie“.

Für einen adiabatischen Prozeß (§ 39) ist

$$0 = dU + A p dv$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (39)

$$A \int_{v_0}^{v_1} p \, dv = U_0 - U_1 = H_0 - H_1 + (TS)_0 - (TS)_1.$$

Bei isothermen Prozessen kann nur die Energie $H_0 - H_1$ gewonnen werden. Es nannte deshalb Helmholtz die Größe TS die bei isothermen Prozessen „gebundene Energie“.

Viele Prozesse, wie z. B. die thermochemischen Prozesse fester und flüssiger Körper sind mit so geringen Volumsänderungen verbunden, daß wir sie als „isochor“, d. h. als Prozesse bei konstantem Volumen ansehen können. Für solche ist nach dem ersten Hauptsatz $dQ = dU$, mithin die Wärmetönung, d. i. die beim chemischen Prozeß gewonnene Wärme $Q = U_0 - U_1$, wenn U_0 die Energie des Systems vor, U_1 nach dem Prozeß ist. Es ist also die Wärmetönung gleich der gesamten Änderung der freien und gebundenen Energie.

Wenden wir das z. B. auf ein reversibles (§ 40) galvanisches, etwa auf ein Daniellsches Element an, so würden wir bei Durchführung der chemischen Prozesse ohne Gewinnung elektrischer Energie (Bd. III § 46) eine bestimmte Wärmeenergie gewinnen. Wenn wir jedoch bei konstanter Temperatur während des chemischen Prozesses nur elektrische Energie gewinnen, so entspricht diese der freien Energie des galvanischen Elements.

§ 48. Helmholtzsche Gleichung.

Durch Differenziation der Gleichung (39) erhalten wir

$$dH = dU - T \, dS - S \, dT.$$

Nun ist aber nach dem vorigen Paragraphen $T \, dS = dU + A \, p \, dv$, daher

$$dH = dU - dU - A \, p \, dv - S \, dT$$

oder

$$dH = - A p dv - S dT.$$

Für isochore Prozesse (§ 47) wird unsere letzte Gleichung wegen $dv = 0$

$$dH = - S dT \quad \text{oder} \quad S = - \frac{\partial H}{\partial T},$$

wonach wir Gleichung (39) schreiben können

$$U = H - T \frac{\partial H}{\partial T},$$

eine Gleichung, die man in der Form

$$(40) \quad H = U + T \frac{\partial H}{\partial T}$$

die „Helmholtzsche Gleichung“ nennt.

Diese Gleichung ist von großer Bedeutung für die physikalische Chemie, wie aus dem vorigen Paragraphen ohne weiteres hervorgeht.

§ 49. Das Nernstsche Wärmetheorem.

Es fiel Nernst auf, daß $U_0 - U_1$ der galvanischen Elemente (§ 47) sehr häufig nahezu gleich $H_0 - H_1$ wird und zwar um so mehr, bei je tieferer Temperatur die Messungen vorgenommen werden. Er schloß daraus, daß $U - H$ mit abnehmender Temperatur sich in höherer Ordnung der Null nähert als die Temperatur T selbst, daß also bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt

$$\lim \frac{H - U}{T} = 0$$

werden muß.

Nun ist Gleichung (40)

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{H - U}{T};$$

folglich wird auch $\frac{\partial H}{\partial T}$ bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt gleich Null. Wir können also folgendes aufstellen: Für

$$T = 0 \text{ muß } H = U, \quad \frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial T} = 0$$

werden. Das ist der Inhalt des „Nernstschen Wärmethorems“.

Gleichung (39) läßt sich schreiben

$$S = \frac{U}{T} - \frac{H}{T}.$$

Für $T = 0$ wird die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls Null, daher auch $S = 0$. Wir haben früher (§ 41) die Entropie durch $S + C$ darstellen können; folglich nimmt die Entropie beim absoluten Nullpunkt den konstanten Wert C an; danach wird das Differenzial der Entropie

$$dS = 0,$$

was wir somit auch als den Ausdruck des Nernstschen Wärmethorems betrachten können.

§ 50. Affinität.

Die freie Energie (§ 47) sieht man als Maß der chemischen Verwandtschaft der eine Verbindung eingehenden Stoffe, d. h. als Maß der „Affinität“ an.

Durch Differenziation der Gleichung (40) erhalten wir

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial H}{\partial T} + T \frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 H}{\partial T^2} = - \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T},$$

was integriert geschrieben werden kann

$$(41) \quad \frac{\partial H}{\partial T} = - \int \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} dT + b.$$

Da bei der Annäherung an den absoluten Nullpunkt $\frac{\partial U}{\partial T}$ in höherer Ordnung als T Null wird, so wird für diesen Fall auch

$$\int \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} dT = 0$$

und da $\frac{\partial H}{\partial T} = 0$, so muß $b = 0$ sein. Danach wird Gleichung (41)

$$\frac{\partial H}{\partial T} = - \int \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} dT.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für $\frac{\partial H}{\partial T}$ in die Helmholtzsche Gleichung (40) ein, so wird

$$(42) \quad H = - T \int \frac{U}{T^2} dT.$$

Die innere Energie U können wir durch thermische Größen darstellen. Nehmen wir z. B. an, wir hätten 1 g der eine chemische Reaktion eingehenden Körper. Wir führen bei der Temperatur T die Reaktion durch und gewinnen die Wärmemenge Q . Ist die spezifische Wärme der erhaltenen Verbindung γ und erwärmen wir sie von T auf T' , so müssen wir die Wärmemenge $(T' - T) \gamma$ zuführen. Die innere Energie ist also um $(T' - T) \gamma - Q$ vergrößert

worden. Wir machen nun den Prozeß anders. Wir bringen die Körper vor der Reaktion von der Temperatur T auf T' , haben also die Wärmemenge $(T' - T)c$ zuzuführen, indem wir die spezifische Wärme der Körper vor der Reaktion mit c bezeichnen. Jetzt lassen wir die Reaktion erfolgen und gewinnen die Wärmemenge Q' . In beiden Fällen muß die Änderung der inneren Energie dieselbe, also

$$(T' - T)\gamma - Q = (T' - T)c - Q'$$

sein. Daraus folgt weiter $Q' - Q = (T' - T)(c - \gamma)$. Wählen wir den Temperaturunterschied unendlich klein, setzen also $T' - T = dT$, so kann auch $Q' - Q = dQ$ geschrieben werden und es resultiert

$$\frac{dQ}{dT} = c - \gamma.$$

Nun ergibt für einen isochoren Prozeß (§ 47) der erste Hauptsatz $dQ = dU$, folglich gilt auch

$$\frac{dU}{dT} = c - \gamma,$$

womit bewiesen wird, daß die innere Energie U durch thermische Größen allein dargestellt werden kann. Damit ist aber auch gezeigt, daß nach Gleichung (42) die Größe H , d. h. die Affinität durch thermische Größen allein ausdrückbar ist.

Die spezifische Wärme können wir durch eine Potenzreihe der Temperatur darstellen. Wir können somit schreiben

$$c - \gamma = \frac{\partial U}{\partial T} = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots$$

Für $T = 0$ muß nach dem Nernstschen Theorem $\frac{\partial U}{\partial T} = 0$,

folglich auch $a_0 = 0$ sein. Daraus folgt durch Integration

$$U = \frac{a_1 T^2}{2} + \frac{a_2 T^3}{3} + \dots + U_0.$$

Die Konstante $U_0 = H_0$ läßt sich aber aus einer einzigen Wärmetönung errechnen, indem man ja die Größen a_1 , a_2 usw. aus den spezifischen Wärmen c und γ erhält. Wir können nun bilden

$$\begin{aligned} H &= - T \int \frac{U}{T^2} dT = - T \int \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2 T}{3} + \dots \right) dT \\ &= - \frac{a_1}{2} T^2 - \frac{a_2 T^3}{6} - \dots + U_0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung für die Affinität hat sich allenthalben in der Erfahrung bestätigt.

§ 51. Verhalten der Körper nahe am absoluten Nullpunkt.

Da das Differential der Entropie $dS = \frac{dQ}{T}$ mit Annäherung an den absoluten Nullpunkt ebenfalls Null wird, so muß das Wärmedifferential dQ Null höherer Ordnung werden. Nun besteht die Gleichung $dQ = c dT$, wenn wir unter c die Wärmekapazität oder für 1 g des Körpers die spezifische Wärme verstehen (§ 27). Daraus folgt aber ohne weiteres, daß in gleichem Sinne $c = 0$ wird. Mit Annäherung an den absoluten Nullpunkt haben also die Körper keine Wärmekapazität mehr. Auch diese Abnahme der spezifischen Wärme mit abnehmender Temperatur ist experimentell bestätigt.

Denken wir uns einen Körper, dessen spezifische Wärme von einer gewissen Temperatur abwärts Null ist, so können wir ihm keine Wärme entziehen. Es kann ihm aber auch kein anderer Körper unterhalb dieser Temperatur Wärme zuführen; denn sonst müßte seine Temperatur sofort die

genannte Grenztemperatur überschreiten, d. h. es würde Wärme von Punkten tieferer Temperatur zu solchen höherer von selbst übergehen, was gegen alle Erfahrung ist (§ 42). Fehlt einem Körper die spezifische Wärme, so hat er auch keinen Ausdehnungskoeffizienten, d. h. sowohl Ausdehnungs- als Spannungskoeffizient (§ 57) müssen mit Annäherung an den absoluten Nullpunkt verschwinden. Ohne Ausdehnungskoeffizienten gibt es auch keine äußere Arbeit; das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen (§§ 38, 46, 58) wird $\alpha = 1$.

Wegen $dS = 0$ in der Nähe des Nullpunkts sind alle Zustandsänderungen isentropisch, d. h. adiabatisch (§ 30). Wegen $\alpha = 1$ müssen aber die Adiabaten mit den Isothermen zusammenfallen (§ 38), ein Carnotscher Kreisprozeß ist nicht mehr denkbar. Der absolute Nullpunkt kann durch Zustandsänderungen überhaupt nicht erreicht werden, aber er könnte nach dem Obigen gar nicht thermometrisch festgestellt werden.

Die kinetische Theorie der Gase.

§ 52. Die Wärmebewegung in Gasen.

D. Bernoulli, vorzüglich aber R. Clausius entwickelten eine Theorie, welche direkt eine Vorstellung jener Bewegung der kleinsten Teilchen gibt, die wir Wärme nennen. Vollständig entwickelt ist diese Hypothese für mäßig dichte Gase, und man faßt die ganze Anschauungsweise unter dem Namen „mechanische“ oder „dynamische“, in der Regel aber „kinetische“ Theorie der Gase zusammen. Nach ihr stellt man sich im gasförmigen Zustand die Molekeln vollständig voneinander getrennt und in geradliniger Bewegung begriffen vor. „Die Bewegungsrichtungen sind für ein ruhendes Gas über die Gesamtheit der Gasmolekeln im Raum gleichmäßig verteilt,

so daß sich nach jeder Richtung des Raums gleich viel Molekeln bewegen. Da man den Molekeln eine gewisse Ausdehnung zuschreiben muß, so sind natürlich Zusammenstöße derselben nicht ausgeschlossen. Damit aber der Zustand des Gases unverändert bleibt, ist erforderlich, daß die Molekeln infolge der Zusammenstöße weder in ihrer Durchschnittsgeschwindigkeit noch in ihrer Durchschnittsbewegungsrichtung eine Änderung erfahren. Um dieser Bedingung Genüge zu tun, ist es am bequemsten, die Molekeln als vollkommen elastische Kugeln von gleicher Größe und gleicher Masse anzusehen. Für deren Zusammenstoß gilt dann das Gesetz von der Erhaltung der gemeinsamen Bewegungsgröße als auch der kinetischen Energie und entsprechend dem Zustand vor dem Stoß ist auch nachher die Bewegung der Molekeln nach jeder Richtung des Raums gleich wahrscheinlich.

Es genügt in den meisten Fällen und es vereinfacht die mathematische Behandlung bedeutend — tatsächlich wurde es anfangs von seiten der Forscher auch stets so gepflogen und wir werden uns im folgenden ihnen darin anschließen—, wenn man allen Molekeln eine bestimmte Geschwindigkeit zuschreibt. Dies ist aber nur ein Mittelwert aus allen möglichen Geschwindigkeiten, welche nach einem bestimmten Gesetz über die Molekeln verteilt sein müssen“ (§ 66).

§ 53. Boyle-Charlessches Gesetz.

Ein Gas, welches sich in keinem Gefäß befindet und keiner äußeren Kraft, wie etwa der Schwere, unterworfen ist, muß sich nach der kinetischen Theorie immer weiter zerstreuen. Befindet es sich aber in einem allseits geschlossenen Gefäß, so ist die Folge davon, daß von den Molekeln beständig Stöße auf die Gefäßwand ausgeübt werden. Indem diese wegen der großen Zahl der Molekeln sehr rasch aufeinanderfolgen, bewirken sie den Eindruck

eines kontinuierlichen Druckes. Damit dieser, sowie der ganze Zustand des Gases konstant bleibt, ist es nötig, daß ebensoviel Molekeln von der Wand in das Gas zurückfliegen, als gegen die Wand stoßen. Es wird dies am leichtesten erfüllt, wenn wir annehmen, die Gasmolekeln werden von der Wand nach den Reflexionsgesetzen zurückgeworfen (Bd. I, § 12).

„Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so ist das Maß derselben die Bewegungsgröße, welche in der Zeiteinheit auf den Körper übertragen wird (Bd. I, § 11). Stößt eine Molekel von der Masse m mit einer Geschwindigkeitskomponente u senkrecht gegen die Wand, so hat sie nach dem Stoß ebenfalls senkrecht gegen die Wand die Geschwindigkeit $-u$. Es muß also während des Stoßes auf die Molekel ein Gegendruck ausgeübt werden, welcher sie vollständig zur Ruhe bringt, ferner muß ein weiterer Gegendruck vorhanden sein, welcher ihr die Geschwindigkeit $-u$ erteilt. Die Molekel empfängt also von der Wand die Bewegungsgröße $2 m u$. Dieselbe Bewegungsgröße, nur entgegengesetzt gerichtet, hat aber auch die Wand nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung von der Molekel erhalten.“

Eine Molekel besitze die Geschwindigkeit c mit den Komponenten ξ, η, ζ . Es ist also

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2.$$

In der Volumeneinheit seien N_1 Molekeln vorhanden von der Geschwindigkeitskomponente ξ . Es werden daher $N_1 \xi$ solcher Molekeln gegen die Flächeneinheit einer Wand fliegen, welche senkrecht zur x -Achse steht. $N_1 \xi$ Stöße erhält davon die Wand in der Sekunde und

$$N_1 \xi \cdot 2 m \xi = 2 N_1 m \xi^2$$

ist daher die Bewegungsgröße, welche die Wand empfängt.

Bilden wir die Summe über sämtliche Molekeln; so erhalten wir den Druck

$$p = \sum 2 N_1 m \xi^2 = \sum 2 N_1 m \eta^2 = \sum 2 N_1 m \zeta^2,$$

da wegen der gleichen Verteilung es ebensoviel gleich große η und ζ als ξ geben muß.

Es ist demnach

$$p = \frac{\sum 2 N_1 m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{3} = \frac{2m c^2}{3} \sum N_1.$$

Überlegen wir nun, daß die Hälfte der Molekeln positive, die andere negative ξ usw. besitzt, so bewegen sich gegen die Wand, wenn N die Zahl sämtlicher Molekeln in der Volumeinheit ist, $\frac{N}{2}$ Molekeln. Es ist daher

$$\sum N_1 = \frac{N}{2},$$

folglich

$$(43) \quad p = \frac{N m c^2}{3}.$$

Enthält unser Gefäß vom Volumen v n Molekeln, so ist $N = \frac{n}{v}$, folglich

$$(44) \quad p v = \frac{n m c^2}{3}.$$

Dies ist der Inbegriff des Boyle-Charlesschen Gesetzes, welches wir nach Gleichung (20) in der Form

$$p v = R T$$

kennengelernt haben. Da für eine bestimmte Gasmenge die Zahl n der Molekeln, als auch die Masse m einer Molekel konstant ist, so muß c^2 proportional der absoluten Tem-

peratur sein. $\frac{m c^2}{2}$ ist die kinetische Energie einer Molekel und $\frac{n m c^2}{2}$ jene des ganzen Gases. Das ist gleichzeitig die im Gas enthaltene Wärmemenge.

§ 54. Regel von Avogadro — Gesetze von Gay-Lussac und Dalton — Geschwindigkeit der Molekeln.

Es läßt sich zeigen, daß für Gase von gleicher Temperatur die lebendige Kraft der Molekeln gleich ist. Wir haben deshalb die Gleichung

$$\frac{m c^2}{2} = \frac{m_1 c_1^2}{2} = k,$$

wenn m und c dem einen, m_1 und c_1 dem andern Gas angehören. Stehen daher Gase von gleicher Temperatur auch unter demselben Druck, so muß

$$p = \frac{N m c^2}{3} = \frac{N_1 m_1 c_1^2}{3} = \dots,$$

daher

$$N = N_1 = \dots$$

sein. Gase unter gleichem Druck haben bei derselben Temperatur in gleichen Räumen gleich viel Molekeln. Es ist dies Avogadros Regel, welche hier als eine Folge der kinetischen Gastheorie erscheint. Die Gewichte der einzelnen Gase verhalten sich somit zueinander wie ihre Molekulargewichte M . Schreiben wir demnach das Boyle-Charlessche Gesetz, bezogen auf 1 g des Gases,

$$p v = \frac{R T}{M},$$

so nimmt die „Gaskonstante“ R für jedes Gas denselben Wert $R = 8,315 \cdot 10^7$ erg/grad an.

Nach Gay-Lussac stehen zwei eine chemische

Verbindung eingehende Gasmengen, bezogen auf gleichen Druck und gleiche Temperatur, untereinander sowie zur Menge der Verbindung in Verhältnissen, welche durch einfache ganze Zahlen dargestellt werden. Es folgt dies unmittelbar aus Avogadros Regel und Daltons Theorie, nach welcher die Molekeln einer chemischen Verbindung aus ganzen Zahlen von Atomen der sie bildenden Elemente bestehen.

Haben wir mehrere Gase in einem Gefäß, deren Molekelzahlen in der Volumeinheit $N_1, N_2 \dots$ sind, so ist die Gesamtzahl der Molekeln in der Volumeinheit $N = N_1 + N_2 + \dots$ und der Druck

$$p = \frac{2}{3} N k = \frac{2}{3} N_1 k + \frac{2}{3} N_2 k + \dots = p_1 + p_2 + \dots,$$

wenn wir mit $p_1, p_2 \dots$ die Drucke bezeichnen, welche die einzelnen Gase für sich im Gefäß erzeugen würden. Es ist der Gesamtdruck eines Gasgemenges gleich der Summe der Partialdrucke der einzelnen Gase, ein Gesetz, welches Dalton fand.

Setzen wir $N m = \rho$, so haben wir unter ρ die Masse der Volumeinheit, d. i. die Dichte des Gases zu verstehen. Wir haben sonach $p = \frac{\rho c^2}{3}$ oder

$$c^2 = \frac{3p}{\rho}.$$

Da aber Druck und Dichte eines Gases bestimmbar ist, so ist uns damit auch die Geschwindigkeit der Gasmolekeln gegeben. Wir finden so für Sauerstoff 461 m , Stickstoff 492 m , Wasserstoff 1844 m . Diese Zahlen gelten für die Temperatur des schmelzenden Eises und sie wachsen proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur. Wir haben es mit Geschwindigkeiten zu tun, welche jene der Geschosse unserer modernen Feuerwaffen zum Teil übertreffen.

§ 55. Abweichungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz —
Zustandsgleichung von van der Waals.

Nach dem Boyle-Charlesschen Gesetz muß mit wachsendem Druck das Volumen des Gases beständig kleiner werden, bis es bei unendlich hohen Drucken schließlich Null wird. Dasselbe müßte man auch bei endlichen Drucken erreichen, wenn die Temperatur bis zum absoluten Nullpunkt sinkt. Die Erfahrung lehrt jedoch, daß man Gase nur bis zu einer gewissen Grenze komprimieren kann, wie groß man auch den Druck wählt. Wir erklären uns das so, daß wir uns die Molekeln nicht als Massenpunkte, sondern, wie wir bereits früher annahmen, als kleine vollkommen elastische Kugeln vorstellen. Ist nun das Gas so stark komprimiert, daß die Molekeln einander berühren, so füllen sie den ihnen zu Gebote stehenden Raum aus und lassen sich nicht weiter zusammendrücken. Das besagt, daß infolge des Volumens der Molekeln der Bewegung einer einzelnen nicht der ganze Gefäßraum zur Verfügung steht. Der Einfluß des Molekularvolumens auf das Boyle-Charlessche Gesetz konnte bis jetzt strenge noch nicht ermittelt werden. Es genügt jedoch, für nicht zu hohe Drucke das Volumen v um eine konstante Größe b zu vermindern, welche sich als das vierfache Molekularvolumen ergibt. Das heißt: das Volumen, welches die Molekeln wirklich mit Materie ausfüllen, entspricht in seinem vierfachen Wert der Größe b . Die Zustandsgleichung verändert sich dadurch in

$$(45) \quad p(v - b) = \frac{n m c^2}{3} .$$

Wir müssen aber noch einen zweiten Einfluß in Rechnung ziehen. Bisher nahmen wir nämlich an, daß die Molekeln gar keine Kräfte aufeinander ausüben. Diese Annahme ist jedoch sehr willkürlich. Es liegt im Gegenteil

nahe, den Molekeln Anziehungskräfte zuzuschreiben, da ja sonst ein Verflüssigen der Gase und ein Überführen in den festen Zustand bei abnehmender Temperatur kaum denkbar wäre. Wir haben von den Kräften anzunehmen, daß sie nur dann merkbar wirksam sind, wenn die Molekeln einander sehr nahe kommen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, daß bei einem Zusammentreffen von mehr als zwei Molekeln eine Konstellation eintritt, bei welcher zwei Molekeln dauernd zusammenbleiben und eine sogenannte Doppelmolekel bilden. Durch die Anziehungskräfte wird also die Gesamtzahl der sich als Einzelindividuen bewegenden Molekeln verringert, was nach Gleichung (44) einer Verminderung des Drucks gleichkommt. Auch diese Abweichung vom Boyle-Charlesschen Gesetz ist erfahrungsgemäß vom Volumen abhängig. Sie verschwindet bei sehr großer Verdünnung des Gases. Für diesen Fall haben wir also anzunehmen, daß nur einfache Molekeln vorhanden sind. Das gilt auch für sehr hohe Temperaturen, was ohne weiteres verständlich ist. Mit wachsender Temperatur nimmt die Energie der Molekeln zu und erschwert so die Vereinigung zu Doppelmolekeln. Die Zahl der Molekeln in einem verdünnten Gas von hoher Temperatur sei n_0 . Verdichten wir es allmählich, so treten die Abweichungen auf, welche mit abnehmendem Volumen und sinkender Temperatur immer stärker ins Gewicht fallen. Wir werden daher die Zahl der jeweilig vorhandenen Molekeln näherungsweise durch

$$n = n_0 \left(1 - \frac{k}{vT} \right)$$

darstellen können. Wird v und T genügend groß, so kann $\frac{k}{vT}$ gegen Eins vernachlässigt werden, d. h. wir merken

keine Abweichung vom Boyle-Charlesschen Gesetz, während mit abnehmendem v und T auch n , wie es die Erfahrung verlangt, immer kleiner wird. Demnach erhalten wir aus Gleichung (45)

$$p(v - b) = \frac{n_0 m c^2}{3} \left(1 - \frac{k}{vT} \right).$$

Es ist zu bemerken, daß sowohl b gegen v als auch $\frac{k}{vT}$ gegen Eins klein sein muß, da wir sonst nicht so einfache Funktionen voraussetzen können. Es ist somit die Annahme

$$p = \frac{n_0 m c^2}{3(v - b)} - \frac{k n_0 m c^2}{3 v^2 T}$$

erlaubt, wobei wir höhere Glieder nicht in Betracht ziehen. $\frac{c^2}{T}$ ist eine konstante Größe; wir können daher

$$\frac{k n_0 m c^2}{3 T} = a$$

setzen und die Gleichung in die Form

$$(46) \quad \left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT$$

bringen. Dies ist die Zustandsgleichung der Gase, welche zuerst von van der Waals, jedoch mittels anderer Erklärungsweise aufgestellt wurde. Van der Waals nimmt an, daß die Molekeln infolge der Anziehungskräfte, ähnlich wie die Flüssigkeitsmolekeln (Bd. I, § 65) von der Grenzfläche gegen das Innere des Gases gezogen werden. Dieser Zug kommt einer Vergrößerung des Druckes gleich. Die so entstehende Druckvermehrung wird einmal der Zahl der Molekeln in der Grenzfläche proportional sein und ferner der Anziehungskraft, die jede einzelne Molekel erfährt. Beide Größen sind der Dichte des Gases, somit die Druck-

vermehrung dem Quadrat der Dichte proportional oder verkehrt proportional dem Quadrat des Volumens des Gases. Wir werden daher dem Druck p noch ein Glied $\frac{a}{v^2}$ beizufügen haben, wobei a die entsprechende Proportionalitätskonstante ist. Die Zustandsgleichung gewinnt so die Form der Gleichung (46). Sie behält ihre Gültigkeit für viel höhere Drucke, als man nach der theoretischen Herleitung glauben sollte. Von van der Waals selbst wurde sie sogar auf die Verflüssigung der Gase angewendet. Sie zeichnet sich durch Einfachheit aus, da sie in die Zustandsgleichung idealer Gase nur die zwei neuen Konstanten a und b einführt.

§ 56. Kritische Temperatur — kritischer Druck — kritisches Volumen.

Wir können die Gleichung (46) in die Form

$$p v^3 - (p b + R T) v^2 + a v - a b = 0$$

bringen. Sie ist somit bezüglich des Volumens v eine Gleichung 3. Grades. Eine solche hat drei Wurzeln, von welchen entweder alle reell, oder eine reell und die beiden andern imaginär sein können. Wir veranschaulichen uns dies am besten durch die graphische Darstellung (Fig. 5), indem wir die Volumina als Abszissen, die Drucke als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eintragen. Tun wir das bei verschiedenen Temperaturen, so erhalten wir eine Schar von Isothermen. Bei entsprechend tiefer Temperatur, für welche die zugehörige Kurve ein Minimum bei E und ein Maximum bei F hat, erhalten wir drei mögliche Werte des Volumens, wenn wir innerhalb des Druckunterschieds EF eine zur v -Achse parallele Gerade ziehen. Diese schneidet die Kurve in drei Punkten, welche die drei Wurzeln der Gleichung ergeben. Es lassen sich aber nicht alle drei Wurzeln realisieren,

Zwischen E und F haben wir nämlich einen labilen Zustand, indem bei wachsendem Druck auch das Volumen wachsen soll, was nicht ausführbar ist; sondern, wenn wir das Gas komprimieren, beginnt es sich bei einem bestimmten Punkt C zu verflüssigen. Wir haben dann gleichzeitig zweierlei Zustände, den flüssigen und gasförmigen, und die Strecke $BG = CH$ veranschaulicht den Druck des gesättigten Dampfes. Während wir also von C an das Volumen weiter verkleinern, bleibt der

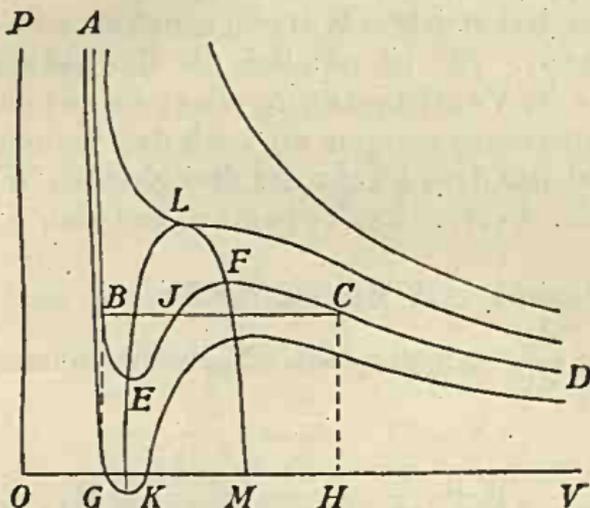


Fig. 5.

Druck konstant. Es verläuft die Volumsänderung längs der Geraden CB . In B ist aber nur noch Flüssigkeit vorhanden. Es muß dann für weitere Volumsverminderungen der Druck gleich beträchtlich steigen.

Es wäre verfehlt, nach dem Bisherigen zu glauben, daß das Stück $BEJFC$ der Kurve völlig wertlos sei. Bei der nötigen Vorsicht ist es möglich, den Punkt C zu passieren, ohne daß Verflüssigung eintritt. Wir haben dann einen übersättigten Dampf. Dasselbe geschieht beim umgekehrten Durchlaufen der Kurve im Punkt B . Wir sprechen

dann von einer überhitzten Flüssigkeit. Ja sogar ein negativer Druck ist möglich, wie die Isothermen für genügend tiefe Temperaturen zeigen. Auch das ist experimentell festgestellt.

Je höher die Temperatur wird, desto mehr nähern sich die Punkte *B*, *J* und *C*, bis sie schließlich zusammenfallen. Für diesen Punkt sind somit alle drei Wurzeln der Gleichung gleich groß. Steigern wir die Temperatur noch mehr, so erscheint nur noch eine reelle Wurzel. Die Temperatur der drei gleichen Wurzeln nennt man die kritische Temperatur. Sie ist nämlich die Grenztemperatur, für welche die Verflüssigung eines Gases noch möglich ist. Gleicherweise nennen wir auch das Volumen und den Druck, welcher dem Punkt der drei gleichen Wurzeln entspricht, das kritische Volumen und den kritischen Druck.

Die Maxima und Minima der Kurven sind durch die Gleichung $\frac{dp}{dv} = 0$ gegeben. Nach Gleichung (46) haben wir also

$$(47) \quad p + \frac{a}{v^2} - \frac{2a(v-b)}{v^3} = 0.$$

Es ist das die Gleichung der Kurve *KELFM*, welche die Minima bzw. Maxima der Isothermen verbindet. Sie hat wieder ein Maximum, welches gleichzeitig der kritische Punkt ist. Wir erhalten sonach das kritische Volumen v_1 , wenn wir für Gleichung (47) $\frac{dp}{dv} = 0$ setzen. Dies ergibt

$$\frac{6a(v_1 - b)}{v_1^4} - \frac{4a}{v_1^3} = 0,$$

daher $v_1 = 3b$.

Die Gleichungen (46) und (47) lassen jetzt mit Hilfe des Wertes v_1 auch den kritischen Druck

$$p_1 = \frac{a}{27 b^2}$$

und die kritische Temperatur

$$T_1 = \frac{8 a}{27 b R}$$

ermitteln.

Machen wir die kritischen Werte zur Einheit, d. h. setzen wir

$$v = \omega v_1 = 3 b \omega,$$

$$p = \pi p_1 = \frac{a}{27 b^2} \pi,$$

$$T = \tau T_1 = \frac{8 a}{27 b R} \tau,$$

so verwandelt sich die Zustandsgleichung in

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) (3 \omega - 1) = 8 \tau.$$

Es haben alle Körper dieselben Isothermen, wenn wir als Maßeinheiten des Drucks, des Volumens und der Temperatur deren kritische Werte nehmen.

§ 57. Spannungs- und Ausdehnungskoeffizient.

Schreiben wir das Boyle-Charlessche Gesetz in der Form

$$p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t),$$

so wird bei konstantem Volumen v_0

$$p = p_0 (1 + \alpha t),$$

und wir nennen α den Spannungskoeffizienten. Lassen

wir hingegen den Druck konstant, so heißt analog in der Gleichung

$$v = v_0 (1 + \alpha t)$$

α der Ausdehnungskoeffizient. Für ideale Gase sind somit diese beiden Koeffizienten identisch, nicht aber für wirkliche Gase. Wir wollen daher den Spannungskoeffizienten mit $\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t}$, den Ausdehnungskoeffizienten mit $\alpha_v = \frac{v - v_0}{v_0 t}$ bezeichnen. Nach Gleichung (46)

ist

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = RT = R_1 (1 + \alpha t),$$

wenn wir $R_1 = 273 R$ setzen. Gleicherweise ist

$$\left(p_0 + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = R_1.$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, so

$$(p - p_0) (v - b) = R_1 \alpha t = \left(p_0 + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) \alpha t,$$

daher

$$\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t} = \left(1 + \frac{a}{p_0 v^2}\right) \alpha.$$

Für ein bestimmtes Volumen ist also der Spannungskoeffizient eine konstante Größe, doch ist er immer größer als sein idealer Wert. Erst wenn das Volumen v groß wird, kann $\frac{a}{p_0 v^2}$ vernachlässigt werden und wir erhalten $\alpha_p = \alpha$. Der Umstand, daß für Wasserstoffgas a verschwindend klein ist, macht dieses Gas geeignet zur Bestimmung des idealen Spannungskoeffizienten α .

Nicht so einfach wie der Spannungskoeffizient läßt sich der Ausdehnungskoeffizient α_v finden. Wir müßten zu diesem Zweck v und v_0 aus Gleichungen vom 3. Grad bestimmen und würden so zu sehr komplizierten, unübersichtlichen Ausdrücken kommen. Für bestimmte Grenzen der Temperatur und des Drucks lassen sich jedoch Vereinfachungen einführen, so daß die Ausdrücke handlicher werden. Für Wasserstoff z. B. wird, da $a = 0$ gesetzt werden kann,

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{b}{v_0}\right) \alpha,$$

mithin $\alpha_v < \alpha_p$. Bei anderen Gasen findet das Gegenteil statt.

§ 58. Spezifische Wärme.

Die in einem Gas enthaltene Wärmemenge ist die gesamte kinetische Energie der Molekeln. Wir betrachten die Masseneinheit des Gases, für welche $n m = 1$ ist. Sonach wird nach Gleichung (44)

$$p v = \frac{c^2}{3}$$

und die im Gas enthaltene kinetische Energie

$$\frac{c^2}{2} = \frac{3}{2} p v.$$

Bekanntlich ist

$$c^2 = c_0^2 (1 + \alpha t),$$

daher $\frac{c_0^2 \alpha}{2}$ die Zunahme der gesamten Energie des Gases bei einer Temperaturerhöhung um 1°C . Lassen wir dabei keine Volumsänderung eintreten, so ist

$$\gamma = \frac{c_0^2 \alpha}{2} A$$

die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, wenn A das kalorische Äquivalent der Arbeit ist (§ 37). Bei konstantem Druck gilt für das Gas

$$v = v_0 (1 + \alpha t).$$

Die Zunahme für einen Grad ist $v_0 \alpha$, wobei die äußere Arbeit $p v_0 \alpha$ (§ 38) zu leisten ist. Das entspricht der Wärmemenge $A p v_0 \alpha$. Um diesen Wert ist also die spezifische Wärme bei konstantem Druck Γ größer als jene bei konstantem Volumen. Es ist somit

$$\Gamma = \frac{A c_0^2 \alpha}{2} + A p_0 v \alpha = \frac{A c_0^2 \alpha}{2} + \frac{A c_0^2 \alpha}{3} = \frac{5}{3} A \alpha \frac{c_0^2}{2}$$

und

$$\frac{\Gamma}{\gamma} \vartheta = \frac{5}{3}.$$

In Wirklichkeit ist aber nur für wenige Gase, die sogenannten einatomigen, wie z. B. für Quecksilberdampf und die Edelgase das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\frac{5}{3}$. Das rührt davon her, daß wir bei den meisten Gasen die Molekeln nicht als Kugeln von vollkommen glatter Oberfläche auffassen dürfen, sondern sie als kompliziertere Gebilde ansehen müssen. Demzufolge besitzen sie nicht nur eine fortschreitende Bewegung, sondern auch eine drehende, sowie eine innere Bewegung, wie z. B. Schwingungen der die Molekeln bildenden Atome. Wir haben daher einen Unterschied zwischen der Gesamtenergie H und der Energie der fortschreitenden Bewegung K der Molekeln zu machen. Für die Masseneinheit des Gases ist

$$K = A \frac{c_0^2}{2},$$

hingegen

$$H = A \frac{c_0^2}{2} + k,$$

wobei k von jenem Teil der Energie herrührt, der nicht in der fortschreitenden Bewegung liegt. Ferner ist

$$\Gamma = \gamma + A p v_0 \alpha = \frac{5}{3} \frac{A \alpha c_0^2}{2} + k \alpha,$$

indem wir $\gamma = A \alpha \frac{c_0^2}{2} + k \alpha$ setzen müssen.

Aus diesen Gleichungen findet man leicht

$$\frac{\Gamma}{\gamma} = 1 + \frac{2}{3} \frac{K}{H}.$$

Überlegen wir, daß $\frac{K}{H}$ zwischen Null und Eins liegen muß, so folgt

$$1 < \frac{\Gamma}{\gamma} < \frac{5}{3},$$

was sich ausnahmslos in der Erfahrung bestätigt.

§ 59. Stoßzahl und mittlere Weglänge der Molekeln.

Wir wollen die Molekeln als kleine Kugeln vom Durchmesser σ betrachten. Alle sind nach den verschiedensten Richtungen des Raums in geradliniger Bewegung begriffen. Es muß sich folglich ereignen, daß eine Molekel mit anderen zusammenstößt. Die Zahl der Zusammenstöße, welche eine Molekel in der Sekunde erfährt, wollen wir berechnen. Wir denken uns zu dem Zweck erst alle Molekeln in Ruhe bis auf eine, welche sich mit der Geschwindigkeit c bewegt. Stößt sie mit einer anderen zusammen, so ist die Entfernung der Mittelpunkte beider gleich dem Durch-

messer σ einer Molekel. Wir werden also denselben Effekt erreichen, wenn wir uns die ruhende Molekel als Punkt, hingegen die sich bewegende als eine Kugel vom Radius σ denken. Eine solche Kugel hinterläßt als Spur einen Zylinder vom Querschnitt $\pi \sigma^2$ und der Länge c per Sekunde. In der Sekunde fegt unsere Kugel also einen Raum $\pi \sigma^2 c$ ab. In diesem Raum befinden sich $N \pi \sigma^2 c$ Gasmolekeln, falls N die Zahl der Molekeln in der Volumeneinheit ist.

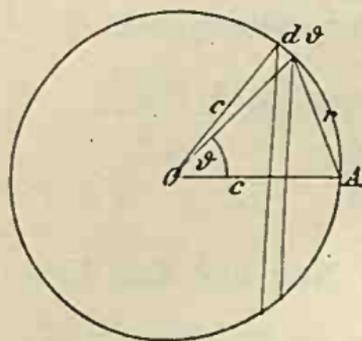


Fig. 6.

$$Z = N \pi \sigma^2 c$$

ist daher die Zahl der Zusammenstöße, welche die wandernde Molekel erfährt.

Dieselbe Betrachtungsweise können wir für den Fall festhalten, daß alle Molekeln in Bewegung sind; nur haben wir dann anstatt c die mittlere relative Geschwindigkeit r einzusetzen, welche eine

Molekel gegenüber den andern hat. Bilden die Bewegungsrichtungen zweier Molekeln den Winkel ϑ (Fig. 6), so ist die relative Geschwindigkeit r gegeben durch

$$r^2 = c^2 + c^2 - 2 c^2 \cos \vartheta = 2 c^2 (1 - \cos \vartheta).$$

Die Zahl sämtlicher Geschwindigkeiten sei N . Sie verteilen sich gleichmäßig nach allen Richtungen des Raums. Wir können sie uns zum Zweck der Rechnung als Radien einer Kugel vorstellen, welche gleichmäßig verteilt die Kugeloberfläche treffen. Auf die Flächeneinheit der Kugel gehen demnach $\frac{N}{4 \pi c^2}$ solcher Radien. Auf einer Kugelzone $2 \pi c^2 \sin \vartheta d\vartheta$ liegen die Geschwindigkeiten, welche mit

der Richtung OA den Winkel ϑ einschließen. Ihre Zahl ist

$$\frac{2\pi N c^2 \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi c^2} = \frac{N}{2} \sin \vartheta d\vartheta$$

und ihre Gesamtsumme

$$\begin{aligned} \frac{N}{2} \sin \vartheta d\vartheta \sqrt{2c^2(1 - \cos \vartheta)} &= c N \sin \vartheta d\vartheta \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2}} \\ &= c N \sin \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = 4c N \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} d\frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

Bilden wir nun durch Integration die Summe über die ganze Kugelfläche und dividieren wir durch die Gesamtzahl N der Geschwindigkeiten, so erhalten wir die mittlere relative Geschwindigkeit. Diese ist somit

$$r = 4c \int_0^\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} d\frac{\vartheta}{2} = 4c \left[\frac{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}}{3} \right]_0^\pi = \frac{4c}{3}.$$

Es ist demnach die Zahl der Zusammenstöße einer Molekel in der Sekunde

$$Z = \frac{4}{3} N \pi \sigma^2 c.$$

Dividieren wir den Weg c , welchen die Molekel in der Sekunde zurücklegt, durch die Zahl der Zusammenstöße, so erhalten wir die mittlere Weglänge, d. i. den Weg welchen die Molekel im Durchschnitt zwischen zwei Zusammenstößen zurücklegt,

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2}.$$

§ 60. Innere Reibung.

Bewegen sich zwei einander berührende parallele Gaschichten mit verschiedener Geschwindigkeit, so übt die schnellere auf die langsamere eine Beschleunigung, diese auf jene eine Verzögerung aus. Es wird somit Bewegungs-

größe von der schnelleren an die langsamere Schichte abgegeben, u. z. wird durch die Flächeneinheit der Schichte die Bewegungsgröße

$$(48) \quad R = -\eta \frac{du}{dz}$$

per Sekunde getragen. Das heißt, R ist die Kraft, welche die langsamere Schichte auf die Flächeneinheit der schnelleren ausübt. Wir bezeichnen diese Kraft mit dem Namen „innere Reibung“ (siehe Bd. I § 79). η nennen wir den Reibungskoeffizienten, $\frac{du}{dz}$ ist der Geschwindigkeitsanstieg senkrecht zur Bewegungsrichtung der Gasschichte. Verstehen wir unter z die eine der Koordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so bewegen sich die Schichten parallel zur xy -Ebene. Den Vorgang der inneren Reibung der Gase nach der kinetischen Theorie zu erklären, läuft also darauf hinaus, die Möglichkeit des Transports von Bewegungsgröße parallel zur z -Achse nachzuweisen.

Die Bewegungsrichtung der Gasschichten sei parallel zur x -Achse. In der Volumeneinheit des Gases seien n Molekeln von der Geschwindigkeit ξ' parallel zur x -Achse und ζ parallel zur z -Achse. Durch die Flächeneinheit der xy -Ebene wird sonach in der Sekunde die Bewegungsgröße

$$R = \sum n m \xi' \zeta$$

getragen, wobei sich die Summe über alle möglichen Werte von ξ' und ζ erstreckt. Die Molekeln, welche die xy -Ebene mit der Geschwindigkeit ζ passieren, kommen aus verschiedenen Schichten. Die aus der Schichte mit der Ordinate z stammen, haben die Geschwindigkeit

$$\xi' = \xi + u + \frac{du}{dz} z,$$

wobei sich ξ auf die Wärmebewegung, $u + \frac{du}{dz} z$ auf die Bewegung der Schichte als Ganzes bezieht. Es sei nämlich u die Geschwindigkeit der Schichte in der xy -Ebene, $\frac{du}{dz}$ konstant. Für die Reibung haben wir also

$$R = \sum n m \left(\xi + u + \frac{du}{dz} z \right) \zeta.$$

Die Summe $\sum n m \xi \zeta$ und $\sum n m u \zeta$ verschwinden wegen der gleich großen Anzahl positiver und negativer ξ und ζ .

Es bleibt also nur

$$R = \frac{du}{dz} \sum n m \zeta z.$$

Ist der Weg, welchen die Molekel nach ihrem letzten Zusammenstoß in m (Fig. 7) bis zum Passieren der xy -Ebene zurücklegt, r , so besteht die Proportion

$$\zeta : c = -z : r,$$

daher

$$z = -\frac{\zeta r}{c}.$$

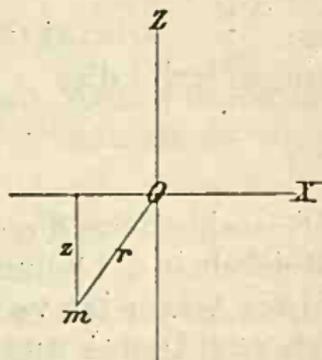


Fig. 7.

Danach können wir schreiben

$$R = -\frac{1}{c} \frac{du}{dz} \sum n m \zeta^2 r.$$

Der Mittelwert von r ist aber für alle ζ eine konstante Größe, und zwar gleich der mittleren Weglänge λ , weshalb

$$R = -\frac{\lambda}{c} \frac{du}{dz} \sum n m \zeta^2$$

gesetzt werden kann. Nun ist

$$\sum \dot{n} m \zeta^2 = p$$

gleich dem Druck des Gases, so daß wir leicht nach Gleichung (48) für die Größe des Reibungskoeffizienten

$$(49) \quad \eta = \frac{p \lambda}{c} = \frac{N m c \lambda}{3}$$

erhalten, wenn wir den Wert von p aus Gleichung (43) benützen.

Führen wir in Gleichung (49) den Wert der mittleren Weglänge

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2}$$

ein, so ergibt dies

$$\eta = \frac{m c}{4 \pi \sigma^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist frei von der Zahl der Molekeln in der Volumeneinheit, d. h. die innere Reibung eines Gases ist von dessen Dichte oder, was dasselbe ist, vom Druck unabhängig. Dieses überraschende, von Maxwell gefundene Resultat bestätigt sich tatsächlich innerhalb sehr großer Druckgrenzen.

Aber noch einen anderen merkwürdigen Aufschluß gewährt uns die Theorie der inneren Reibung. Wir wissen, daß $N m = \rho$ die Dichte des Gases ist, somit finden wir nach Gleichung (40)

$$\lambda = \frac{3 \eta}{\rho \sigma}.$$

Die Geschwindigkeit der Molekeln ist uns bereits bekannt (§ 54), der Reibungskoeffizient und die Dichte sind experimentell bestimmbare Größen. Wir können somit den

Zahlenwert der mittleren Weglänge angeben und damit auch die Stoßzahl einer Molekel. So finden wir für

	Weglänge	Stoßzahl
Wasserstoff	0,0000 1855 cm	9480 Millionen.
Sauerstoff	1059 „	4065 „
Stickstoff	959 „	4735 „
Kohlensäure	680 „	5510 „

Es beziehen sich diese Zahlen auf den Druck einer Atmosphäre und die Temperatur 0° C.

§ 61. Wärmeleitung.

Haben wir parallel zur z -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ein Temperaturgefälle $-\frac{dT}{dz}$, so fließt beständig von oben nach unten Wärme durch die $x y$ -Ebene. Für die Flächen- und Zeiteinheit ist diese Wärmemenge

$$W = -k \frac{dT}{dz},$$

wenn wir k die Wärmeleitungsfähigkeit nennen. Nach unserer Auffassung ist nun W nichts anderes als eine Energiemenge, welche von oben nach unten getragen wird, und wir können deren Größe genau so finden, wie den Wert der transportierten Bewegungsgröße im vorhergehenden Paragraphen. Es trägt jede passierende Molekel durch die $x y$ -Ebene die Wärmemenge $m \gamma \left(T_0 + \frac{dT}{dz} z \right)$, indem m die Masse einer Molekel, γ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen und z die Höhe jener Schichte bedeutet, aus welcher die Molekel kommt. Dabei haben wir vorausgesetzt, daß die Temperatur

$$T = T_0 + \frac{dT}{dz} z$$

sei. T_0 ist also die Temperatur in der xy -Ebene. Wir brauchen somit in den Formeln für die innere Reibung nur m durch $m\gamma$ und u durch T zu ersetzen und haben unmittelbar die Formel für die Wärmeleitung

$$k = \frac{c N m \lambda \gamma}{3} = \frac{\rho c \lambda \gamma}{3}.$$

Es besteht demnach zwischen dem Reibungskoeffizienten und der Wärmeleitungsfähigkeit die enge Beziehung

$$k = \eta \gamma.$$

Ferner folgt, daß auch die Wärmeleitungsfähigkeit vom Druck des Gases unabhängig ist, und schließlich haben wir auch in der Wärmeleitung ein Mittel, den Zahlenwert der mittleren Weglänge kennenzulernen.

§ 62. Diffusion.

In einem senkrechten Zylinder befinden sich zwei Gase, das leichtere oben, das schwerere unten. Sie wandern gegeneinander, mischen sich also. Wir haben einen Vorgang, den man Diffusion nennt. Nach der Regel von Avogadro (§ 54) muß die Zahl der Molekeln per Volumeinheit an allen Punkten des Zylinders dieselbe, also $N = N_1 + N_2$ sein, wobei N_1 die Zahl der leichteren, N_2 jene der schwereren Molekeln sein soll. In der Umgebung eines bestimmten horizontalen Querschnitts sei die Verteilung der Gase so, daß

$$N_1 = \mathfrak{N}_1 + a z, \quad N_2 = \mathfrak{N}_2 - a z$$

ist, wobei a eine Konstante bedeutet. Unter diesen Umständen wandert erfahrungsgemäß vom ersten Gas durch die Querschnittseinheit von oben nach unten in der Sekunde die Menge δa . Gleichviel wandert vom zweiten von unten nach oben. δ nennt man den Diffusionskoeffizienten.

Um diesen zu berechnen, denken wir uns der Einfachheit halber die Bewegung der Molekeln in drei aufeinander senkrechte Richtungen zerlegt, deren eine mit der Zylinderachse, die gleichzeitig die z -Achse ist, zusammenfällt. Die Geschwindigkeit der Molekeln des ersten Gases sei c_1 , die mittlere Weglänge λ_1 . Alle Molekeln, die durch unsere Ebene von oben nach unten fliegen, kommen aus einer mittleren Entfernung λ_1 von dieser Ebene. Dort ist ihre Konzentration $N_1 + a \lambda_1$. Von dieser Anzahl soll ein Drittel parallel zur z -Achse sich bewegen, es fliegt also $\frac{1}{3} (N_1 + a \lambda_1)$ nach oben und ebensoviel nach unten und es werden in der Sekunde

$$\frac{1}{3} (N_1 + a \lambda_1) c_1$$

Molekeln die Flächeneinheit unseres Querschnitts von oben nach unten passieren. Gleicherweise gehen von unten nach oben $\frac{1}{3} (N_1 - a \lambda_1) c_1$ Molekeln. Der Überschuß der nach abwärts wandernden Molekeln ist also $\frac{1}{3} a \lambda_1 c_1$. Analog wandern vom zweiten Gas $\frac{1}{3} a \lambda_2 c_2$ Molekeln nach oben.

Diese zwei Zahlen werden im allgemeinen verschieden sein, etwa $\lambda_1 c_1 > \lambda_2 c_2$. Dann würden im ganzen

$$\frac{1}{3} a (\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2)$$

Molekeln nach abwärts wandern, was eine Druckerhöhung im unteren Teil des Gefäßes zur Folge hätte. Wir müssen daher annehmen, daß dies durch eine Verschiebung des ganzen Gasgemisches nach oben ausgeglichen wird.

Beachten wir, daß in unserer Ebene die Konzentration N_1 bezüglich N_2 und $N = N_1 + N_2$ ist, so werden von den Molekeln des ersten Gases

$$\frac{1}{3} a (\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2) \frac{N_1}{N},$$

vom zweiten Gas

$$\frac{1}{3} a (\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2) \frac{N_2}{N}.$$

Molekeln nach oben wandern. Die Gesamtzahl der nach unten wandernden Molekeln des ersten Gases wird somit sein

$$\frac{1}{3} a \lambda_1 c_1 - \frac{1}{3} a (\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2) \frac{N_1}{N} = \frac{1}{3} a \lambda_1 c_1 \left(1 - \frac{N_1}{N}\right) + \frac{1}{3} a \lambda_2 c_2 \frac{N_1}{N} = \frac{a}{3N} (\lambda_1 c_1 N_2 + \lambda_2 c_2 N_1) = \delta a.$$

Für den Diffusionskoeffizienten erhalten wir also

$$\delta = \frac{1}{3N} (\lambda_1 c_1 N_2 + \lambda_2 c_2 N_1).$$

Der Klammerausdruck ist vom Druck unabhängig, daher ist δ verkehrt proportional N , d. h. (§ 53) verkehrt proportional dem Druck, was sich auch bestätigt.

Aus den Formeln für die innere Reibung und Diffusion erkennt man einen innigen Zusammenhang dieser Größen, so daß sich z. B. der Diffusionskoeffizient direkt durch die Reibungskoeffizienten der diffundierenden Gase darstellen läßt.

§ 63. Größe der Molekeln — Loschmidtsche Zahl.

Komprimieren wir ein Gas durch sehr große Druckkräfte auf das kleinste mögliche Volumen, so können wir annehmen, daß die Molekeln den Raum V , der ihnen zur Verfügung steht, völlig mit Materie ausfüllen. Ist das ursprüngliche Volumen Eins, die darin enthaltene Molekelzahl N , so wird, da $\frac{4}{3} N \pi \sigma^3$ das achtfache Molekularvolumen ist,

$$V = \frac{1}{8} N \pi \sigma^3.$$

Diese Gleichung erlaubt mit Hilfe des Werts der mittleren Weglänge

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2}$$

den Durchmesser einer Molekel

$$\sigma = 8 V \lambda$$

zu finden. Dieses überraschende Resultat verdanken wir Loschmidt. Er fand auf diesem Weg für

	σ
Wasser	$44,10^{-9}$ cm
Kohlensäure	$114,10^{-9}$ „

Aus den früheren Gleichungen finden wir gleicherweise

$$N = \frac{3}{256\pi V^2 \lambda^3}.$$

Das ist die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit. Es läßt sich somit auch die Zahl der Molekeln eines Mols des Gases, die Loschmidtsche Zahl, berechnen. Sie ist von der Größenordnung

$$Z = 6.10^{23}.$$

§ 64. Kinetische Theorie und Statistik.

Zu wiederholten Malen führten wir zur Vereinfachung der Rechnung Mittelwerte ein wie z. B. bei der Betrachtung der Geschwindigkeit der Molekeln (§ 52) oder der mittleren Weglänge (§ 59). Soweit dies bei der Darstellung eines physikalischen Vorgangs das Resultat qualitativ nicht beeinflußt, mag dies nicht nur gestattet, sondern direkt angezeigt sein. Es gibt jedoch Erscheinungen, die nur durch die Kenntnis des „Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten der Molekeln“ oder der Verteilung der Weglängen usw. streng dargestellt werden können.

Wir betrachten einen Körper; n sei die Zahl seiner Molekeln. Von diesen sollen ν_1 eine beliebige Eigenschaft, z. B. eine Geschwindigkeit von der Größe γ , ν_2 2γ , ν_3 3γ , . . . ν_i $i\gamma$. . . haben, wobei γ als kleine Größe zu betrachten

ist. Es ist also $\sum v_i = n$. Vertauschen wir nach Belieben zwei Molekeln miteinander, so ändert sich am sichtbaren Zustand nichts, wohl aber am molekularen, da ja eine Änderung einer Geschwindigkeit auch eine Änderung des molekularen Zustands bedeutet. Hingegen ändert die Vertauschung zweier Molekeln derselben Geschwindigkeit nichts am molekularen Zustand. Die Zahl sämtlicher Anordnungen der Molekeln ist durch die Zahl sämtlicher Permutationen, d. i. $n!$ gegeben. Unter diesen befinden sich aber $v_1!$ Zustände derselben Art, indem durch Vertauschung der Molekeln derselben Geschwindigkeit der molekulare Zustand unverändert bleibt. Analog ist es mit v_2, v_3 usw. Wir finden daher die Zahl der molekularen Zustände wie die Zahl der Permutationen bei Gleichheit bestimmter Elemente. Diese Zahl, die wir die „statistische Wahrscheinlichkeit“ nennen wollen, ist somit

$$(50) \quad W = \frac{n!}{v_1! v_2! \dots v_i! \dots}$$

Wir bilden

$$\ln(n!) = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n.$$

n sei sehr groß; dann ist unsere Summe angenähert

$$\int_1^n \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

Auf große Zahlen angewendet kann 1 gegen n vernachlässigt werden. Wir erhalten daher

$$\ln(n!) = n \ln n - n.$$

Wir bilden nun $\ln W$. Das ergibt nach Gleichung (50)

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln(n!) - \ln(v_1!) - \ln(v_2!) - \dots - \ln(v_i!) - \dots \\ &= \ln(n!) - \sum \ln v_i = n \ln n - n - \sum v_i \ln v_i + \sum v_i \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, daß auch alle ν_i große Zahlen sind.

Da $\sum \nu_i = n$, so

$$\ln W = n \ln n - \sum \nu_i \ln \nu_i.$$

Wir setzen jetzt $\frac{\nu_i}{n} = w_i$, so wird

$$\begin{aligned} \ln W &= n \ln n - n \sum w_i \ln (n w_i) \\ &= n \ln n - n \sum w_i \ln n - n \sum w_i \ln w_i. \end{aligned}$$

Da $\sum w_i = 1$ und daher

$$n \sum w_i \ln n = n \ln n \sum w_i = n \ln n,$$

so

$$\ln W = -n \sum w_i \ln w_i = -n \sum \frac{\nu_i}{n} \ln \frac{\nu_i}{n}.$$

§ 65. Kanonische Verteilung.

Ist ε_i die Energie einer Molekel, so ist die innere Energie des Körpers

$$U = \sum \nu_i \varepsilon_i,$$

wobei ε_i im allgemeinen sich aus potentieller und kinetischer Energie zusammensetzt, d. h. eine Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten sein wird. Es ist nun anzunehmen, daß bei selbständiger Änderung der Zustand von einer geringeren zu einer größeren statistischen Wahrscheinlichkeit übergeht. Ein stationär bleibender Zustand wird daher eintreten, wenn die statistische Wahrscheinlichkeit W und damit auch $\ln W$ ein Maximum wird. In diesem Fall sprechen wir von einer kanonischen Verteilung.

Diese ist also dadurch gekennzeichnet, daß

$$\delta (\ln W) = 0$$

sein muß. Aus der Formel des vorhergehenden Paragraphen

läßt sich bilden

$$\begin{aligned}\delta(\ln W) &= -n \sum \ln \frac{v_i}{n} \delta \frac{v_i}{n} - n \sum \frac{\delta v_i}{n} \\ &= - \sum \ln \frac{v_i}{n} \delta v_i,\end{aligned}$$

indem ja $\sum \delta v_i = \delta \sum v_i = \delta n = 0$ ist.

In der Gleichung für die Energie $U = \sum v_i \varepsilon_i$ haben wir zu berücksichtigen, daß die in § 64 für die Moleküle angenommenen Eigenschaften $\gamma, 2\gamma \dots$ jetzt die Energien ε_i sind. Bei der Variation von U sind daher die ε_i als konstante Größen zu betrachten. Bleibt bei einer Zustandsänderung die innere Energie konstant, so ist

$$\delta U = \sum \varepsilon_i \delta v_i = 0.$$

Wir haben also die drei Gleichungen:

$$\sum \ln \frac{v_i}{n} \delta v_i = 0, \quad \sum \varepsilon_i \delta v_i = 0, \quad \sum \delta v_i = 0,$$

die wir, wenn wir die zweite etwa mit der Konstanten λ , die dritte mit μ multiplizieren, zusammenfassen können zu

$$\sum \left(\ln \frac{v_i}{n} + \lambda \varepsilon_i + \mu \right) \delta v_i = 0.$$

Daraus folgt

$$\ln \frac{v_i}{n} + \lambda \varepsilon_i + \mu = 0$$

oder

$$v_i = n e^{-\mu - \lambda \varepsilon_i}.$$

Wir führen noch die neuen Bezeichnungen ein $\lambda = \frac{1}{\theta}$, $\mu = -\frac{\psi}{\theta}$; danach wird

$$(51) \quad v_i = n e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\theta}}.$$

Nun ist aber $\sum v_i = n$, daher $\sum e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\theta}} = 1$, oder da $\frac{\psi}{\theta} = -\mu$ konstant ist,

$$(52) \quad e^{-\frac{\psi}{\theta}} = \sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}.$$

§ 66. Maxwells Gesetz.

Das Gesetz, nach dem die Geschwindigkeiten eines Gases über die Molekeln verteilt sind, wurde von J. Cl. Maxwell gefunden. Wir fassen es als kanonische Verteilung auf. Gleichung (51) können wir schreiben

$$v_i = n e^{\frac{\psi}{\theta}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}},$$

wobei $e^{\frac{\psi}{\theta}}$ eine Konstante ist. Es soll v_i die Zahl der Molekeln sein, die bezüglich der Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems Geschwindigkeitskomponenten zwischen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$ haben. Alle Geschwindigkeiten, die in dieses Intervall fallen, sehen wir als gleichwertig an, es ist daher

$$\varepsilon_i = \frac{m}{2} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{m c^2}{2},$$

indem wir unter c die Geschwindigkeit der Molekeln verstehen. Die Gesamtzahl der Molekeln n sei außerordentlich groß, so daß wir auch $v_i = dn$ als große Zahl ansehen können.

Nach all dem läßt sich die Gleichung aufstellen:

$$\begin{aligned} v_i = dn &= n A e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} du dv dw = n A e^{-\frac{m c^2}{2\theta}} du dv dw \\ &= n A e^{-\frac{c^2}{a^2}} du dv dw, \end{aligned}$$

indem wir

$$e^{\frac{\psi}{\theta}} = A \, du \, dv \, dw$$

($A = \text{konst.}$) und $\frac{2\theta}{m} = \alpha^2$ setzen. Durch Integration erhalten wir

$$\sum v_i = n = n A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} \, du \, dv \, dw$$

oder

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} \, du \, dv \, dw = 1.$$

Das mehrfache Integral dieser letzteren Gleichung führen wir folgendermaßen durch. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} \, du \, dv \, dw &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2 + v^2 + w^2}{\alpha^2}} \, du \, dv \, dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \, du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \, dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{w^2}{\alpha^2}} \, dw = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \, du \right]^3. \end{aligned}$$

Es ist weiter

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \, du = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx,$$

wenn wir $\frac{u}{\alpha} = x$ einführen. Dieses letzte Integral finden wir nun folgendermaßen. Wir denken uns x und y als die Koordinaten eines Punkts in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. In Polarkoordinaten wird

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad dx \, dy = r \, dr \, d\varphi.$$

Wir bilden nun

$$\begin{aligned} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Die Integration nach $d\varphi$ ergibt 2π . Wir haben daher weiter

$$2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \pi,$$

mithin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du = \alpha \sqrt{\pi}$$

und

$$A \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du \right]^3 = A \alpha^3 \pi^{3/2} = 1$$

oder

$$A = \frac{1}{\alpha^3 \pi^{3/2}},$$

folglich nach dem früheren

$$dn = \frac{n}{\alpha^3 \pi^{3/2}} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} du dv dw.$$

Fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, daß eine Molekel Geschwindigkeitskomponenten zwischen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$ hat, so ist diese nach der letzten Formel wegen $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^3 \pi^{3/2}} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} du dv dw &= \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du \cdot \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv \\ &\quad \cdot \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2}{\alpha^2}} dw. \end{aligned}$$

Aus dem Bau dieser Gleichung sehen wir ohne weiteres, daß sie das Produkt dreier gleichartiger Wahrscheinlichkeiten darstellt, deren jede einzelne sich auf u bzw. v und w bezieht. Wir können daher sagen: die Wahrscheinlichkeit, daß eine Molekel eine Geschwindigkeitskomponente zwi-

schen u und $u + du$ besitzt, ist $\frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du$ und die Zahl der Molekeln dieser Komponente ist

$$Z = \frac{n}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du.$$

Denken wir uns jetzt neuerdings die Komponenten u , v , w der Geschwindigkeit c als Koordinaten eines Punkts in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, so können wir $du dv dw$ als ein Volumelement auffassen und es auch in Polarkoordinaten durch $c^2 dc \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ darstellen. Darnach wird

$$dn = \frac{n}{\alpha^3 \pi^{3/2}} c^2 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dc \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Sehen wir von einer bestimmten Geschwindigkeitsrichtung ab, so erhalten wir für dn die Zahl der Molekeln, die Geschwindigkeiten zwischen c und $c + dc$ haben, wenn wir nach ϑ von 0 bis π , nach φ von 0 bis 2π integrieren. Nun ist aber

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi [-\cos \vartheta]_0^\pi = 4\pi.$$

Damit wird

$$dn = \frac{4n}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} c^2 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dc.$$

Das ist der gewöhnliche Ausdruck des Maxwell'schen

Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten über die Molekeln eines Gases. Es gibt, wie schon erwähnt, die Zahl der Molekeln an, die eine Geschwindigkeit zwischen c und $c + dc$ haben.

§ 67. Wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Gasmolekeln.

Man erkennt ohne weiteres, daß nach dem Maxwell'schen Gesetz unendlich kleine und unendlich große Geschwindigkeiten unendlich selten vorkommen werden; denn für $c = 0$ sowohl als für $c = \infty$ wird der Ausdruck $c^2 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}}$ gleich Null. Dieser Ausdruck wird für ein bestimmtes c ein Maximum werden. Diese Geschwindigkeit wird dann auch am häufigsten vorkommen. Man nennt sie deshalb auch die wahrscheinlichste Geschwindigkeit. Für das Maximum von c muß

$$\frac{d}{dc} \left(c^2 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} \right) = 0$$

werden. Führen wir die leichte Rechnung durch, so erhalten wir

$$c = \alpha.$$

Die von uns früher eingeführte Größe α hat somit die Bedeutung der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit der Molekeln.

§ 68. Die mittlere Geschwindigkeit und das mittlere Quadrat der Geschwindigkeiten.

Um die mittlere Geschwindigkeit der Molekeln zu erhalten, haben wir sämtliche Geschwindigkeiten zu addieren und die Summe durch die Zahl der Geschwindigkeiten zu

dividieren. Die Summe der Geschwindigkeiten ist

$$\frac{4n}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} c^3 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dc.$$

Dieser Ausdruck durch n dividiert ergibt also die mittlere Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} c^3 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dc = \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx \\ &= \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} + \int x e^{-x^2} dx \right]_0^{\infty} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, haben wir hier die Variable $x = \frac{c}{\alpha}$ eingeführt.

Es ist also die mittlere Geschwindigkeit $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$ größer als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit α .

Wir wollen noch den Mittelwert von c^2 berechnen. Wir haben also wie früher zu bilden

$$\begin{aligned} \overline{c^2} &= \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} c^4 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dc = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx \\ &= \frac{6\alpha^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{3\alpha^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{3\alpha^2}{2}, \end{aligned}$$

was durch wiederholte partielle Integration erhalten wird und indem wir den Wert des letzten Integrals dem § 66 entnehmen, wo wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

fanden.

Während die mittlere Geschwindigkeit größer als die wahrscheinlichste ist, ist das mittlere Quadrat der Geschwindigkeiten wieder größer als die mittlere Geschwindigkeit.

Es ist leicht zu verstehen, daß wir in der Druckformel (Gl. 43 und 44) an Stelle von c^2 das mittlere Quadrat der Geschwindigkeiten \bar{c}^2 zu setzen haben. Dessen Zahlenwert können wir berechnen (§ 54) und bei der Beziehung von \bar{c}^2 und \bar{c} zu α auch die letzteren Geschwindigkeiten zahlenmäßig bestimmen. So findet man z. B. für Sauerstoff $\sqrt{\bar{c}^2} = 461 \text{ m}$, $\bar{c} = 425 \text{ m}$ und $\alpha = 377 \text{ m}$.

Mit Benutzung des Maxwellschen Gesetzes lassen sich nun alle Überlegungen, die wir früher (§§ 59—63) gemacht haben, ebenfalls durchführen; nur werden sie rechnerisch entsprechend komplizierter. Ferner erhalten die auftretenden Zahlenkoeffizienten zwar nicht sehr abweichende, doch immerhin andere Werte. Während wir z. B. für die mittlere Weglänge (§ 59)

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2}$$

gefunden, ergibt sich mit Benützung des Maxwellschen Gesetzes

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} N \pi \sigma^2}$$

Ähnliche Zahlenänderungen erhalten wir für den Reibungskoeffizienten usw.

§ 69. Boltzmanns Entropiegleichung.

Nehmen wir von Gleichung (52) den Logarithmus, so erhalten wir

$$-\frac{\psi}{\theta} = \ln \sum e^{-\frac{\epsilon_i}{\theta}}.$$

Wir wollen ferner

$$n\psi = \Psi$$

setzen, wonach wir die letzte Gleichung schreiben können

$$\Psi = -n\theta \ln \sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}.$$

Zu Ende des § 47 fanden wir

$$\ln W = -n \sum \frac{\nu_i}{n} \ln \frac{\nu_i}{n}.$$

Haben wir eine kanonische Verteilung (§ 65), so wird

$$\nu_i = n e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\theta}}, \quad \sum e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\theta}} = 1$$

und die innere Energie

$$U = n \sum \varepsilon_i e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\theta}}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichungen können wir dann weiter schreiben

$$\begin{aligned} \ln W &= -n \sum \frac{\psi - \varepsilon_i}{\theta} e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\theta}} = -\frac{n\psi}{\theta} \sum e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\theta}} \\ &+ \frac{n}{\theta} \sum \varepsilon_i e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\theta}} = -\frac{\Psi}{\theta} + \frac{U}{\theta} = \frac{U - \Psi}{\theta}. \end{aligned}$$

Nach Gleichung (39) ist bis auf eine willkürliche Konstante die Entropie

$$S = \frac{U - H}{T}.$$

Die Analogie dieser Gleichung mit der vorhergehenden springt in die Augen. Demnach müßte θ proportional der absoluten Temperatur T sein. Dies läßt sich ohne weiteres aus dem Maxwell'schen Gesetz (§ 66) finden. Wir setzen

dort $\frac{2\theta}{m} = \alpha^2$, also $\theta = \frac{m\alpha^2}{2}$, fanden ferner (§ 68) $\overline{c^2} = \frac{3\alpha^2}{2}$
und (§ 53)

$$\frac{nm\overline{c^2}}{3} = RT.$$

Daraus ergibt sich leicht

$$\theta = \frac{RT}{n}.$$

Setzen wir demnach die potentielle Energie $\Psi = H$ und $\frac{R}{n} = k$, so können wir die Gleichung aufstellen

$$S = k \ln W.$$

Das ist die berühmte Boltzmannsche Gleichung. Sie sagt aus, daß bis auf eine willkürliche Konstante die Entropie proportional dem Logarithmus der Wahrscheinlichkeit ist.

Wie nun Zustände von selbst von weniger wahrscheinlichen zu wahrscheinlicheren übergehen, so verlaufen auch thermische Prozesse so, daß dabei die Entropie wächst. Die Entropie gibt uns somit die Richtung an, in welcher thermische Prozesse von selbst ablaufen müssen. Die Größe k pflegt man die Boltzmannsche Konstante zu nennen.

§ 70. Flüssigkeiten — Lösungen — osmotischer Druck.

Die van der Waalsche Zustandsgleichung (§ 55) kann mit einiger Annäherung auch für Flüssigkeiten benützt werden. Die in ihr vorkommende Größe $\frac{a}{v^2}$ bedeutet eine Vergrößerung des äußeren Drucks. Da sie durch die Anziehungskräfte der Molekeln aufeinander hervorgerufen

wird, nennt man sie den „inneren Druck“ der Flüssigkeit. Dieser wird nur durch die in Erscheinung tretenden Kräfte an der Oberfläche (Bd. I, § 65) hervorgerufen. Im Inneren der Flüssigkeit können sich demnach die Molekeln gerade so bewegen, als wären keine Anziehungskräfte vorhanden, während das Ganze unter einem Druck p stände, der wie ein äußerer Druck wirkt, sich aber aus äußerem und innerem Druck zusammensetzt. Die Zustandsgleichung wird also

$$p(v - b) = RT.$$

Wir wollen sie folgendermaßen umwandeln.

$$p = \frac{RT}{v - b} = \frac{RT}{v \left(1 - \frac{b}{v}\right)} = \frac{RT}{v} \left(1 - \frac{b}{v}\right)^{-1} = \frac{RT}{v} (1 + \psi).$$

Nach dieser Gleichung entspricht ψ nur angenähert der Wirklichkeit. Es ist aber auch streng genommen eine Funktion von $\frac{b}{v}$, die allerdings noch nicht berechnet werden konnte.

Wir denken uns jetzt ein Gemenge zweier Gase unter sehr hohem Druck. Von dem einen Gas sei im Vergleich zum andern nur sehr wenig vorhanden. Der Druck wird sich zusammensetzen aus dem Anteil des verdünnten und jenem des stark verdichteten Gases. Der Anteil des verdünnten soll berechnet werden. Er ist gegeben durch die Bewegungsgröße, die von den Molekeln senkrecht gegen die Flächeneinheit der Wand auf diese in der Sekunde übertragen wird (§ 53). Der Einfachheit halber geben wir allen Molekeln des verdünnten Gases dieselbe Geschwindigkeit und teilen ihre Zahl in drei gleiche Teile. Ein Drittel bewege sich senkrecht zur Wand, die beiden anderen senkrecht zueinander parallel zur Wand. Letztere treffen die Wand nicht, kommen für den Druck also nicht in Betracht.

Jede Molekel lege zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen den Weg l zurück (§ 59). Die Zahl der Stöße, die eine Molekel in einer Sekunde erfährt, ist daher $\frac{c}{l}$. Wir

denken uns jetzt parallel zur Wand zwei Ebenen, die eine in der Entfernung des Halbmessers r einer Molekel, die andere in der Entfernung $r + l$ von der Wand. Aus dem Zwischenraum beider Ebenen schneiden wir einen Zylinder senkrecht zur Wand von der Grundfläche 1 cm^2 heraus. Das Volumen des Zylinders ist also l . Er enthält Nl Molekelmittelpunkte, wofür wir kurz sagen Nl Molekeln, wenn N die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit ist. Multiplizieren wir Nl mit der Zahl der Zusammenstöße, die eine Molekel in der Sekunde macht, so erhalten wir $\frac{Nlc}{l} = Nc$ als Zahl der Molekeln, die von unserem Zylinder

in der Sekunde ausfliegen. Nach dem Obigen bewegen sich davon nur ein Drittel parallel zur Normalen an die Wand. Von diesen wird die Hälfte die Wand wirklich treffen, da ihr Weg bis zur Wand ja zwischen 0 und l liegt. Die andere Hälfte, die gegen das Innere des Gases fliegt, trifft die Wand nicht. Die Zahl der in der Sekunde auf 1 cm^2 der

Wand auftreffenden Molekeln ist also $\frac{Nc}{6}$. Jede überträgt an die Wand die Bewegungsgröße $2mc$ (§ 53). Folglich ist der Druck

$$p = \frac{Nc}{6} \cdot 2mc = \frac{Nmc^2}{3}.$$

Das ist aber genau dieselbe Formel, die wir für den Druck eines verdünnten Gases (Gl. 43) überhaupt erhalten haben. Es ergibt sich also der wichtige Satz, daß ein verdünntes Gas in einem Gefäß denselben Druck ausübt, gleichgültig ob es allein vorhanden ist, oder ge-

meinsam mit einem zweiten Gas unter beliebig hohem Druck.

Das können wir ohne weiteres auf eine verdünnte Lösung anwenden. Sie erscheint als ein Gasgemenge im obigen Sinne, das unter einem sehr hohen Druck steht. Die gelöste Substanz entspricht dem verdünnten, das Lösungsmittel dem sehr stark komprimierten Gas. Die gelöste Substanz muß also einen Druck wie ein verdünntes Gas ausüben. Es ist der osmotische Druck, dessen gleiches Verhalten mit dem Gasdruck ja sowohl experimentell als auch theoretisch (thermodynamisch) festgestellt wurde.

§ 71. Kolloidale Lösungen.

Wir können die Gleichung für die Änderung des Drucks eines Gases mit der Höhe (Bd. I, § 64) nach dem vorhergehenden Paragraphen ohne weiteres auf Lösungen anwenden. Wie groß die Masse einer gelösten Molekel ist, spielt dabei keine Rolle. Es gelten unsere Überlegungen daher auch für die Teilchen einer kolloidalen Lösung.

Nach dem Boyle-Charlesschen Gesetz (§ 53) folgt

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{RT}{M}.$$

Für die Höhenformel läßt sich schreiben

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

oder integriert

$$\ln \varrho - \ln \varrho_0 = -\frac{Mg}{RT} z,$$

wenn $\varrho = \varrho_0$ für $z = 0$ gilt. Wir können ferner

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{N_0}{N}$$

setzen, wenn wir unter N_0 bzw. N die Zahl der Molekeln in

der Volumeinheit verstehen. Es folgt also

$$\ln \varrho_0 - \ln \varrho = \ln \frac{\varrho_0}{\varrho} = \ln \frac{N_0}{N} = \frac{M g}{R T} z.$$

Haben wir zwei Gase vom Molekulargewicht M bzw. M' und suchen wir jene Höhe z bzw. z' auf, für die $\frac{N_0}{N}$ denselben

Wert etwa 2 annimmt, so muß

$$\frac{M g z}{R T} = \frac{M' g z'}{R T}$$

oder

$$(53) \quad \frac{M}{M'} = \frac{z'}{z}$$

sein.

Bei Emulsionen müssen wir die gelösten Teilchen gegenüber jenen des Lösungsmittels für so groß annehmen, daß auf sie der Auftrieb der Flüssigkeit in Rechnung gesetzt werden muß. Die Emulsionsteilchen seien gleichartige Kugeln vom Radius r und der Dichte σ . Die Masse eines Teilchens ist somit $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \sigma$. Mit dieser Masse kommt es aber für die Höhenformel nicht in Betracht, sondern wir müssen seine Schwere um den Auftrieb vermindern, so daß seine scheinbare Masse $m' = \frac{4}{3} \pi r^3 (\sigma - \sigma')$ wird, wobei σ' die Dichte des Lösungsmittels ist. Wir haben also

$m' = m \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma}$ und ebenso $\varrho' = \varrho \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma}$. Wenden wir

demnach die Gleichung (53) so an, daß wir unter M das Molekulargewicht eines Gases, unter M' jenes eines gelösten Kolloids verstehen, so ist für dieses anstatt M' die Größe

$\frac{\sigma - \sigma'}{\sigma} M'$ einzuführen und es wird

$$\frac{M}{M'} = \frac{z'}{z} \cdot \frac{\sigma}{\sigma - \sigma'}.$$

M' ist das Produkt aus der Loschmidtschen Zahl (§ 63) und der Masse eines Kolloidteilchens. Letztere läßt sich experimentell bestimmen, desgl. die Höhen z' und z , so daß die experimentelle Untersuchung einer kolloidalen Lösung die Möglichkeit der Bestimmung der Loschmidtschen Zahl gibt, dieso (Perrin) tatsächlich in Übereinstimmung mit anderen Methoden (§ 63) gefunden wurde.

§ 72. Die Brownsche Bewegung.

Wir haben in einer kolloidalen Lösung parallel zur x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems eine lineare Änderung der Konzentration. Wir setzen die Zahl der Teilchen in der Volumeinheit $N = N_0 - ax$; dann gehen in der Zeit t durch die Flächeneinheit einer zur yz -Ebene parallelen Ebene δat Teilchen (§ 62).

Diese Zahl können wir auch auf folgende Weise gewinnen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, sämtliche Teilchen legen parallel zur x -Achse in der Zeit t im Mittel den Weg ξ zurück und zwar die eine Hälfte nach links, die andere nach rechts. Die Zahl der Teilchen, die also von links nach rechts die yz -Ebene passieren, ist

$$\frac{1}{2} \int_{-\xi}^0 (N_0 - ax) dx = \frac{N_0 \xi}{2} + \frac{a \xi^2}{4}.$$

Gleicherweise gehen von rechts nach links

$$\frac{1}{2} \int_0^{\xi} (N_0 - ax) dx = \frac{N_0 \xi}{2} - \frac{a \xi^2}{4}$$

Teilchen. Subtrahieren wir die letzte Zahl von der früheren, so ergibt sich die Zahl der Teilchen, die wirklich von links

nach rechts gehen, die nach dem Obigen gleich $\delta a t$ ist, so daß wir erhalten

$$\frac{a \xi^2}{2} = \delta a t$$

oder

$$\overline{\xi^2} = 2 \delta t,$$

indem wir durch den Querstrich über ξ^2 andeuten, daß es sich um Mittelwerte handelt.

„Wir denken uns jetzt ein Elementarprisma von den Kanten α , β , γ parallel zu den Koordinatenachsen. An der linken Seitenfläche wirke der osmotische Druck p , an der rechten $p' = p + \frac{dp}{dx} \alpha$. Die Kraft, welche die Kolloidteilchen im Prisma nach rechts erfahren, ist

$$\beta \gamma (p - p') = - \frac{dp}{dx} \alpha \beta \gamma = - \frac{m \overline{c^2}}{3} \alpha \beta \gamma \frac{dN}{dx},$$

da ja $p = \frac{N m \overline{c^2}}{3}$ ist (§ 53).

Diese Kraft wirkt auf $\alpha \beta \gamma N$ Teilchen. Nennen wir die Kraft auf ein Teilchen K , so ist

$$\alpha \beta \gamma N K = - \frac{m \overline{c^2}}{3} \alpha \beta \gamma \frac{dN}{dx} = \frac{m \overline{c^2}}{3} \alpha \beta \gamma a$$

oder

$$NK = \frac{m \overline{c^2}}{3} a = \frac{RT}{n} a,$$

wenn wir berücksichtigen, daß $\frac{n m \overline{c^2}}{3} = RT$ ist, unter n die Zahl der Teilchen in einem Mol verstanden.

Bewegt sich eine Kugel vom Radius r in einer Flüssigkeit vom Reibungskoeffizienten η (Bd. I, § 79) unter dem Ein-

fluß einer Kraft K , so erlangt sie nach Stokes die Geschwindigkeit $\frac{K}{6\pi\eta r}$. Legen wir senkrecht zur Kraft eine Ebene, so wandern durch deren Einheit in der Sekunde $\frac{NK}{6\pi\eta r}$ Teilchen. Diese Zahl ist aber auch δa und wir erhalten die Gleichung

$$\frac{NK}{6\pi\eta r} = \delta a$$

oder

$$NK = \frac{RT}{n} a = 6\pi\eta r \delta a.$$

Daraus folgt für den Diffusionskoeffizienten

$$\delta = \frac{RT}{n} \cdot \frac{1}{6\pi\eta r}$$

oder, wenn wir beachten, daß $\overline{\xi^2} = 2\delta t$ ist, die Einstein'sche Gleichung

$$\overline{\xi^2} = \frac{1}{3\pi\eta r} \cdot \frac{RT}{n} t.$$

Bestimmen wir $\overline{\xi^2}$ experimentell, so können wir entweder durch Messung des Teilchenradius die Loschmidtsche Zahl, oder unter Voraussetzung der Kenntnis der Loschmidtschen Zahl die Bestimmung von $\overline{\xi^2}$ als eine Methode zur Bestimmung des Teilchenradius verwenden. Beides ist gemacht worden in befriedigender Übereinstimmung mit den Resultaten anderer Methoden“.



Register.

(Die beigetzten Zahlen geben die Seite des Buches an.)

- Abgeschlossenes System 59.
 Abkühlung der Erde 56.
 Absoluter Nullpunkt 58, 81, 84.
 — (Entropie, Wärmekapazität, spezifische Wärme, Ausdehnungskoeffizient, κ) 84.
 Absolute Temperatur 58, 69.
 Abweichungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz 91ff.
 Adiabate 65.
 Adiabatische Dehnung 76.
 — Zustandsänderung (Prozeß) 61ff., 75, 78.
 Affinität 81ff.
 d'Alembertsche Lösung der Saltengleichung 21ff.
 Amplitude 13, 19.
 Analogie zwischen Wärme- und Flüssigkeitsströmung 50.
 Anziehungskräfte der Molekeln 92.
 Arbeit und Wärme 58.
 Ausdehnungskoeffizient 75, 98.
 — des gespannten Kautschuks 77.
 — des Wasserstoffs 99.
 Äußere Arbeit 59.
 Äußere Wärmeleitungsfähigkeit 42.
 Avogadros Regel 89.
 Bernoullis Lösung der Saltengleichung 25ff.
 Boltzmannsche Konstante 123.
 Boltzmanns Entropiegleichung 121ff.
 Boyle-Charlessches Gesetz 57, 86ff.
 Brownsche Bewegung 128ff.
 Carnotscher Kreisprozeß 68.
 Chemische Reaktion 82.
 Chemische Verwandtschaft 81.
 Chemischer Prozeß 79.
 Clapeyron-Clausiusche Gleichung 73.
 Clausiuscher Kreisprozeß 63ff.
 Daltons Gesetz 90.
 Dampf 73.
 Dampfdruck 95.
 Dämpfung des Tons 18.
 Daniellsches Element 79.
 Dehnung und Temperatur 76.
 Differenztöne 17.
 Diffusion der Gase 108ff.
 Diffusionskoeffizient 110.
 Dissoziationsdruck 75.
 Dissoziationswärme 75.
 Dopplers Prinzip 13.
 Druck des gesättigten Dampfes 95.
 Durchmesser der Molekeln 111.
 Dynamische Theorie der Gase 85.
 Ebene Wellen 12.
 Eigenschwingung 19.
 Einseitig fixierte Saite 23
 Einsteinsche Gleichung der Brownschen Bewegung 130.
 Elastizitätsmodul 31.
 Elektrische Energie 79.
 Emulsionen 127.
 Energieprinzip (Energiegesetz) 59.
 Entropie 66ff.
 — beim absoluten Nullpunkt 81.
 Erster Hauptsatz 59.
 Flüssigkeiten 123 ff.
 Fortpflanzung des Schalls 11.
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Saitenwellen 24.
 — der Wärmewellen 48.
 — der Wellen in einem dreidimensionalen Körper 36.
 — des Schalls 11.
 Fouriers Theorie der Wärmeleitung 38ff.
 Freie Energie 78.
 — — eines galvanischen Elements 79.
 Galvanisches Element 79.
 Gasdruck 86ff.
 Gastheorie 85ff.
 Gasverflüssigung 96.
 Gay-Lussacsches Gesetz 90.
 Gebundene Energie 79.
 Gedämpfter Ton 18.
 Gedeckte Pfeife 33.
 Geradlinige Fortpflanzung des Schalls 11.
 Gesättigter Dampf 73, 74, 95.
 Geschwindigkeit der Gas-molekeln 90, 121.
 — des Schalls 111.
 Gesetz von Dalton 90.
 — von Gay-Lussac 90.
 Gespannter Kautschuk 77.
 Größe der Molekeln 111.
 Grundton 26, 31, 32.
 Harmonische Obertöne 27.

- Harmonische Schwingung 15.
 Helmholtzsche Gleichung 80.
 Ideales Gas 57, 63, 69.
 Innere Arbeit 59.
 — Energie 59.
 Innerer Druck der Gase und Flüssigkeiten 124.
 Innere Reibung der Gase 103ff.
 Interferenz der Schallwellen 15ff.
 Interferenzröhre 16.
 Isentropische Zustandsänderung 68.
 Isochorer Prozeß 79, 80, 83.
 Isotherme 64, 94.
 — Zustandsänderung (Prozeß) 64, 78.
 Kalorie 58.
 Kalorische Maschine 66.
 Kalorisches Arbeitsäquivalent 59.
 Kanonische Verteilung 113.
 Kautschuk 77.
 Kinetische Theorie der Flüssigkeiten 123ff.
 — Theorie der Gase 85ff.
 — — der Lösungen 126.
 Klänge 7, 27.
 Knoten 27.
 Kolloidale Lösungen 126ff.
 Kräfte der Molekeln 92.
 Kreisprozeß 63ff.
 Kritische Temperatur (kritischer Druck, kritisches Volumen) 94ff.
 Kugelwelle 11.
 Lebensbedingungen auf der Erde 57.
 Lehrbücher der Akustik 6.
 — der Wärmelehre 6.
 Longitudinalschwingungen in Saiten 29.
 — in Stäben 28ff.
 Longitudinalwellen 32, 36.
 Loschmidtsche Zahl 111.
 Lösungen 126.
 Maxwells Gesetz 115ff.
 Mechanisches Perpetuum mobile 69.
 Mechanische Theorie der Gase 85.
 Mechanisches Wärmeäquivalent 58.
 Mechanische Wärmetheorie 57ff.
 Metalldrähte und spezifische Wärme 78.
 Mitschwingen 19.
 Mittlere Geschwindigkeit der Molekeln 119ff.
 — relative Geschwindigkeit der Molekeln 102.
 Mittleres Geschwindigkeitsquadrat der Molekeln 120.
 Mittlere Weglänge 103, 107, 108.
 Molekelgröße 111.
 Molekularkräfte 92.
 Negativer Druck in Flüssigkeiten 96.
 Nernstsches Wärmetheorem 80.
 Obertöne 26, 31, 32.
 Offene Pfeife 32.
 Ökonomischer Koeffizient 66.
 Osmotischer Druck 126.
 Periodische Bewegung 7.
 — Temperaturänderung unter der Erdoberfläche 48.
 Perpetuum mobile 69.
 Pfeifen 32ff.
 Phase der Schwingung 14.
 Planwellen 11, 34.
 — in einem dreidimensionalen festen Körper 34ff.
 Punktförmige Schallquelle 10.
 Quinckes Interferenzröhre 16.
 Reflexion der Wellen 12, 13.
 — des Schalls 12.
 Regel von Avogadro 89.
 Reibungskoeffizient der Gase 106.
 Relative Geschwindigkeit der Molekeln 102.
 Resonanz 19.
 Reversibler Kreisprozeß 63.
 Reversibles galvanisches Element 79.
 Saiten 19ff.
 Satz von der Erhaltung der Energie 59.
 Schallbewegung in der Luft 7ff., 63.
 Schallerregung 7.
 Schallgeschwindigkeit 11.
 Schallquelle 10.
 Schallreflexion 12.
 Schmelzpunkt 75.
 Schmelzwärme 75.
 Schwebungen 16.
 Schwebungsdauer 17.
 Schwingende Bewegung 7, 17.
 — Saiten 19ff.
 — Stäbe 22ff.
 Spannung der Saite 20.
 Spannungskoeffizient 97.
 Spezifische Wärme 37, 60, 82.
 — — bei konstantem Druck 61, 71, 100.
 — — bei konstantem Volumen 61, 70, 100.
 — — bei konstantem Zug 77.
 — — bei konstanter Länge 77.
 — — der Gase 60, 99.
 — — des gesättigten Dampfs 74.
 Stationärer Zustand der Wärmeströmung 43.
 Statistik 111ff.
 Statistische Wahrscheinlichkeit 112.
 Stokessches Gesetz 130.
 Stoßzahl der Molekeln 101ff., 107.
 Temperatur 37.
 Temperaturgefälle 40.
 — in der Erdrinde 51ff.
 Temperaturgrad 37.

- Temperaturleitungs-
 fähigkeit 42, 46, 49.
 Thermometer 37.
 Thermometrisches Lei-
 tungsvermögen 42.
 Thermometrische Sub-
 stanz 69.
 Ton 13, 18.
 Töne der gedeckten Pfeife
 33.
 — der offenen Pfeife 34.
 — der Saiten 25ff.
 — des beiderseits freien
 Stabs 30.
 — des einseitig befestig-
 ten Stabs 32.
 Tondämpfung 18.
 Tonhöhe 14, 18.
 Transversalschwingungen
 der Saite 19, 21.
 Transversalwellen in
 festen Körpern 36.
 Überhitzte Flüssigkeit 96.
 Übersättigter Dampf 95.
 Umkehrbarer Kreispro-
 zess 63, 68.
- Unendlich lange Saite 22.
 Ursache des Schalls 7.
- Van der Waals'sche Zu-
 standsgleichung 91ff.
 Verdampfungswärme
 72ff.
 Verflüssigung der Gase
 96.
 Verhältnis der spezi-
 fischen Wärmen 62, 78,
 (Theorie) 100.
 Verteilungsgesetz der Ge-
 schwindigkeiten der
 Gasmolekeln 118.
 Vollständiges Differen-
 tial 67, 69, 70.
- Wahrscheinlichste Ge-
 schwindigkeit der Mo-
 lekeln 119.
 Wärmebewegung in
 Gasen 85.
 Wärmehalt der Gase 89.
 Wärmeleitung 37ff.
 Wärmeleitung der Gase
 107.
- Wärmeleitung in einem
 isotropen Körper 50.
 — in einem Ring 44ff.
 — in einem Stab 38ff.
 — in einer Kugel 50ff.
 Wärmeleitungsfähigkeit
 39, 44, 46, 49.
 — der Erdrinde 49.
 — der Gase 107.
 Wärmemenge 37.
 Wärmetönung 79.
 Wärme und Arbeit 58.
 Weglänge der Gasmole-
 keln 107.
 Wellenbewegung 7.
 Widerstehendes Mittel
 18.
- Zahl der Zusammenstöße
 einer Molekel 103, 107.
 Zustand eines Körpers
 57.
 Zustandsgleichung 57.
 — idealer Gase 57, 93.
 — von van der Waals
 91ff.
 Zweiter Hauptsatz 67.

Die Philosophie der Raum-Zeit-Lehre

Von

Professor Dr. Hans Reichenbach

1928. Groß-Oktav. VI, 380 Seiten.

Mit 50 Figuren und einer Tafel im Text.

Geheftet M. 18.—, gebunden M. 20.—

Aus den Urteilen:

„Es ist nicht möglich, im Rahmen einer solchen Besprechung den Inhalt eines so umfassenden und grundlegenden Buches voll im einzelnen und lückenlos zu würdigen. Das Buch ist in jeder Hinsicht ein Werk von größter wissenschaftlicher Bedeutung und verdient allgemeinstes Interesse in dem Kreise aller Mathematiker, Physiker und Philosophen.“

Physikalische Zeitschrift

„Das ausgezeichnete Werk verdient einen großen Leserkreis, denn es kann viel zur Verbreitung wichtiger Einsichten und auch zur Aufklärung häufiger Mißverständnisse beitragen.“

Die Naturwissenschaften



Verlag

Walter de Gruyter & Co., Berlin W. 10

Genthiner Straße 38

Empfindliche Galvanometer für Gleich- und Wechselstrom

Von **Dr. Otto Werner**

1928. Groß-Oktav. VIII, 208 Seiten. Mit 23 Abbildungen und 17 Tabellen.

Geheftet M. 13.—, gebunden M. 14.—

Aus dem Inhalt:

I. Galvanometer für Gleichstrom. II. Galvanometer für Wechselstrom. III. Indirekte Methoden zur Messung kleiner Ströme. IV. Zusatzeinrichtungen. V. Das Galvanometer in den Schaltungen.

Aerodynamik des Fluges

Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie.

Von **Harry Schmidt**

Professor an der Gewerbehochschule Köthen
Privatdozent an der Universität Leipzig

1929. Groß-Oktav. VIII, 258 Seiten. Mit 81 Figuren.

Geheftet M. 15.—, gebunden M. 16.50

Aus dem Inhalt:

Einleitung. I. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik. II. Wirbelfreie Flüssigkeitsbewegungen. III. Funktionentheoretische Hilfsmittel. IV. Allgemeine Theorie des Auftriebs unendlich breiter Tragflächen. V. Spezielle Ausführungen zur Theorie der unendlich breiten Tragfläche. VI. Wirbelbewegungen. VII. Die Prandtl'sche Tragflügeltheorie. — Literaturhinweise. — Register.

Wir liefern unter Bezugnahme auf diese Anzeige ausführliche Prospekte kostenlos.



Walter de Gruyter & Co., Berlin W. 10
Genthiner Straße 38



Literatur zur Physik

Mit einem Anhang: Mathematische Literatur
für den Physiker

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 35

Lehrbuch der Physik. Von Eduard Riecke, weiland Geheimer Regierungsrat, o. Professor an der Universität Göttingen. Zu eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen herausgegeben von Professor Dr. Ernst Lecher †, Vorstand des I. Physikalischen Instituts der Universität Wien, und Dr. Adolf Smekal, o. Professor an der Universität Halle a. S. Siebente, verbesserte und um eine Darstellung der Atomphysik vermehrte Auflage. Groß-Oktav.

I. Band: Mechanik und Akustik. Wärme. Optik. Mit 458 Figuren im Text. XVI, 656 Seiten. 1923 RM. 12.60, geb. RM. 14.—

II. Band: Magnetismus und Elektrizität. Atomphysik. Mit einem Bildnis von E. Lecher † und 319 Figuren im Text. XVI, 725 Seiten. 1928. RM. 15.—, geb. RM. 17.—

Lehrbuch der Physik. Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule zu München. Von H. Ebert, weill. Professor an der Technischen Hochschule München.

I. Band. Mechanik. Wärmelehre. Mit 168 Abbildungen. Zweite Auflage. Groß-Oktav. XX, 661 Seiten. 1917. Anastatischer Neudruck. 1920. RM. 20.—, geb. RM. 21.50

II. Band, I. Teil. Die elektrischen Energieformen. Fertiggestellt und herausgegeben von Professor C. Heinke. Mit 341 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. XX, 687 Seiten. 1920 RM. 22.—, geb. RM. 24.—

II. Band, II. Teil. Die strahlende Energie. Fertiggestellt und herausgegeben von Professor C. Heinke. Mit 196 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. XII, 416 Seiten. 1923 RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Clemens Schaefer, Professor an der Universität Breslau.

I. Band. Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929 RM. 45.—, geb. RM. 48.—

II. Band. Theorie der Wärme. Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 88 Figuren im Text. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. 1929. Groß-Oktav. X, 660 Seiten RM. 28.—, geb. RM. 30.—

III. Band, 1. Teil. Elektrodynamik und Optik. Mit 235 Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 918 Seiten. 1932. RM. 37.50, geb. RM. 40.—
2. Teil. Atom- und Quantenphysik. Erscheint 1937.

„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“
Annalen der Physik.

Einführung in die theoretische Physik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien.

I. Band. Fünfte und sechste, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 67 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 396 Seiten. 1930. R.M. 8.50, geb. R.M. 10.—

II. Band. Fünfte und sechste, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 85 Abbildungen im Text und auf sechs Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 448 Seiten. 1930 R.M. 8.50, geb. R.M. 10.—

„Der Vorzug des Buches liegt zweifellos in dem Umstande, daß es dem Verfasser gelingt, den Leser unter Vermeidung jedes überflüssigen Wissensballastes bis an die Probleme der modernen theoretisch-physikalischen Forschung heranzuführen. Es gibt gewiß kein anderes Buch ähnlichen Umfangs, das den Studierenden gleichzeitig mit den Elementen der theoretischen Physik und mit den wichtigsten modernen Forschungsergebnissen, wie Röntgenspektroskopie, Kristallanalyse, Isotopenbestimmung usw., vertraut macht.“

Theoretische Physik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. 5 Bände.

I. Mechanik. Mit 25 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 76) Geb. R.M. 1.62

II. Schall und Wärme. Mit 7 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 133 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 77) Geb. R.M. 1.62

III. Elektrizität und Magnetismus. Mit 35 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 78) Geb. R.M. 1.62

IV. Optik. Mit 44 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 374) Geb. R.M. 1.62

V. Wärmestrahlung, Elektronik und Atomphysik. Mit 16 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 130 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 1017) Geb. R.M. 1.62

Kleiner Grundriß der theoretischen Physik. Kleine, besonders bearbeitete Ausgabe der Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Arthur Haas, Professor für Physik a. d. Univ. Wien. Mit 22 Figuren. Oktav. VII, 183 Seiten. 1934 Geb. R.M. 5.30

Dieser „Kleine Grundriß“ ist für die Leser bestimmt, die die Physik nicht als Hauptstudium, sondern nur als Ergänzung eines anderen Faches betreiben und deshalb auf die umfangreiche, zweibändige, schon in 6. Auflage vorliegende „Einführung in die theoretische Physik“ desselben Verfassers verzichten können. Für Studierende der Physik selbst soll der „Kleine Grundriß“ als erste Einleitung oder als Repetitorium dienen. Selbstverständlich ist der „Kleine Grundriß“ ein in sich abgeschlossenes, einheitliches und selbständiges Buch. Das Hauptgewicht wurde auf die Verständlichmachung der Grundlagen der theoretischen Physik gelegt — auf die Grundgleichungen der Bewegung und des elektromagnetischen Feldes sowie auf die fundamentalen Prinzipie der Wärmelehre und der Atomphysik. Die modernen Probleme sind stark herausgestellt. Für die Benutzung des Grundrisses werden besondere Vorkenntnisse nicht vorausgesetzt; es genügt die Kenntnis der Grundideen der Differential- und Integralrechnung sowie der wichtigsten Ergebnisse der Experimentalphysik.

Das Naturbild der neuen Physik. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren im Text. Oktav. V, 129 Seiten. 1932. R.M. 5.—, geb. R.M. 6.—

Atomtheorie. Von Dr. phil. Arthur Haas, Professor für Physik an der Universität in Wien. Mit 81 Figuren im Text und auf 5 Tafeln. Dritte, völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Groß-Oktav. VIII, 292 Seiten. 1936 R.M. 8.50, geb. R.M. 10.—

Die Welt der Atome. Zehn gemeinverständliche Vorträge. Von Arthur Haas, Dr. phil., a. o. Professor für Physik an der Universität Wien. Mit 37 Figuren im Text und auf 3 Tafeln. Oktav. XII, 130 Seiten. 1926. R.M. 4.80, geb. R.M. 6.—

Künstliche Verwandlung der Elemente (Zertrümmerung der Atome). Von Dr. Hans Pettersson in Göteborg (Schweden). Aus dem Schwedischen übersetzt von Elisabeth Kirsch. Mit 59 Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 151 Seiten. 1929 RM. 8.—, geb. RM. 9.—

Die Umwandlungen der chemischen Elemente. Von Dr. Arthur Haas, Professor der Physik an der Universität Wien. Mit 31 Abbildungen. Oktav. VIII, 118 Seiten. 1935 RM. 4.30, geb. RM. 5.—

Unter den wissenschaftlichen Leistungen der letzten drei Jahre (1932 bis 1934) haben vielleicht wenige so viel Interesse in weitesten Kreisen erweckt wie die umwälzenden Entdeckungen, die in dieser Zeit der physikalischen Forschung glückten: die Auffindung neuer Urbausteine der Materie (Neutron und Positron), der experimentelle Nachweis der Entstehung von Materie aus Licht, die Feststellung und Isolierung des schwereren Wassers, die ungeahnten und durch neue Methoden ermöglichten Erfolge der Atomzertrümmerung und die künstliche Erzeugung von Radioaktivität.

Von diesen neuen Entdeckungen berichtet zusammenfassend, kurz und möglichst leicht verständlich das Büchlein von Haas in der Form von fünf Vorträgen: I. Die Materialisation des Lichtes — II. Die Grundstoffarten — III. Die Mittel der Atomzertrümmerung — IV. Die Ergebnisse der Atomzertrümmerung — V. Die künstliche Radioaktivität. 31 Abbildungen, fast durchweg Wiedergaben nach Photographien, gewähren einen anschaulichen Einblick in die Welt der Atome.

Experimentalphysik. Von Professor Robert Lang, Rektor des Realgymnasiums in Stuttgart.

I. Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper. Dritte Auflage. Mit 125 Figuren im Text. 146 Seiten. 1927. (Sammlung Göschen Bd. 611) Geb. RM. 1.62

II. Wellenlehre und Akustik. Mit 69 Figuren im Text. Zweite Auflage. 96 Seiten. 1920. (Sammlung Göschen Bd. 612) Geb. RM. 1.62

III. Wärmelehre. Mit 55 Figuren im Text. 98 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 613) Geb. RM. 1.62

IV. Lehre vom Licht. Mit 90 Figuren im Text. 110 Seiten. 1925. (Sammlung Göschen Bd. 614) Geb. RM. 1.62

Methoden der praktischen Analysis. Von Professor Dr. Fr. A. Willers, Mit 132 Figuren. Groß-Oktav. 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12.) RM. 20.—, geb. RM. 21.50

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen Anwendungen. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 37 Abbildungen im Text. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. VI, 147 Seiten. 1929 RM. 5.—, geb. RM. 6.—

Vektoranalysis. Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Sammlung Göschen Bd. 354) Geb. RM. 1.62

Ein für Studium und Praxis mit Erfolg benutztes Hilfsmittel zur Lösung technischer Aufgaben.

Punkt- und Vektor-Rechnung. Von Dr. Alfred Lotze, a. o. Prof. für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. Groß-Oktav. 132 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13.)

RM. 12.—, geb. RM. 13.—

Die Grundlagen der Physik. Synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie. Von Dr. Hugo Dingler, Professor an der Universität München. Zweite Auflage. Oktav. XIV, 336 Seiten. 1923.

RM. 4.—, geb. RM. 5.—

Aus dem Inhalt: Das Geltungsproblem. Das Zweckprinzip. Die Logik. Raum und Zeit. Kausalität. Die Mechanik.

Physik und Hypothese. Versuch einer induktiven Wissenschaftslehre nebst einer kritischen Analyse der Fundamente der Relativitätstheorie. Von Dr. Hugo Dingler, Professor an der Universität München. Oktav. XI, 200 Seiten. 1921 RM. 3.—, geb. RM. 4.—

Wörterbuch der Physik. Von Professor Dr. Felix Auerbach. Mit 267 Figuren. Oktav. X, 466 Seiten. 1920 Geb. RM. 4.50

Ein unentbehrliches Nachschlagewerk für Wissenschaft und Praxis der Physiker, Chemiker, Mediziner und Techniker.

Physikalische Formelsammlung. Von G. Mahler, † Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Sechste Auflage, besorgt von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen in Württemberg. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 136) Geb. RM. 1.62

Das Buch gibt fertige Resultate und ermöglicht einen raschen Überblick über die Teilgebiete der Physik.

Physikalische Aufgabensammlung. Von G. Mahler, † Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Neu bearbeitet von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen. Fünfte, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1936. (Sammlung Göschen Bd. 243) Geb. RM. 1.62

Zum Studium und Selbststudium für den Anfänger und zum Gebrauch in der Ingenieurpraxis.

Physikalische Tabellen. Von Dr. A. Leick. Zweite Auflage, neubearbeitet von Prof. Dr. W. Leick in Berlin-Lichterfelde. 96 Seiten. 1920. (Sammlung Göschen Bd. 650) Geb. RM. 1.62

Physikalische Messungsmethoden. Von Professor Dr. Wilhelm Bahrdt in Berlin-Lichterfelde. Mit 54 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 147 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 301) Geb. RM. 1.62

Einführung in die Differentialgleichungen der Physik. Von Professor Ludwig Hopf. Mit 49 Abbildungen. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1070) Geb. RM. 1.62

Kristallographie. Von Dr. W. Bruhns, weil. Professor an der Bergakademie Clausthal. Dritte Auflage, neubearbeitet von Dr. P. Ramdohr, o. Professor an der Universität Berlin. Mit 192 Abbildungen. 109 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 210) Geb. RM. 1.62

Einführung in die Kristalloptik. Von Dr. Eberhard Buchwald, Professor an der Technischen Hochschule Danzig. 3., neubearb. Auflage. Mit 116 Fig. 134 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 619) Geb. RM. 1.62

Einführung in die geometrische Optik. Von Dr. W. Hinrichs in Berlin-Wilmersdorf. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 56 Figuren. 1924. (Sammlung Göschen Bd. 532) Geb. RM. 1.62

Das Buch gibt die Grundlagen des Gebiets bis zur Brechung durch ein zentriertes System von Kugelflächen und zu den einfachsten Linsenfällen. Jedem Abschnitt sind Übungsbeispiele beigegeben.

Radioaktivität. Von Dr. Karl Przibram, Professor an der Universität Wien. Mit 31 Abbildungen. 142 Seiten. 1932. (Sammlung Göschen Bd. 317). Geb. RM. 1.62

Röntgenstrahlen. (Physik, Technik und Anwendung.) Von Dr. phil. nat. Richard Herz in Frankfurt a. M. Mit 48 Figuren im Text und 36 Abbildungen auf 16 Tafeln. 1926. (Samml. Göschen Bd. 950) Geb. RM. 1.62

Das Buch wendet sich an Ärzte, Röntgenassistenten, Ingenieure, Techniker und vor allem an Studierende der Medizin und Naturwissenschaften.

Teilchenstrahlen (Korpuskularstrahlen). Von Dr. H. Mark, Professor an der Universität Wien. Mit 59 Abbildungen. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1083) Geb. RM. 1.62

Luftlektrizität. Von Prof. Dr. Karl Kähler, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter am Preussischen Meteorologisch-Magnetischen Observatorium in Potsdam. Zweite Auflage. Mit 19 Abbildungen. 134 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 649) Geb. RM. 1.62

Inhalt: Das natürliche Feld der Erde. Das elektrische Teilvermögen der Atmosphäre. Die elektrischen Ströme in der Luft. Die radioaktiven Vorgänge in der Atmosphäre. Elektrische Wirkungen des Sonnenlichts. Ursprung der Luftlektrizität.

Röntgenspektroskopie und Kristallstrukturanalyse. Von Prof. Dr. Arthur Schleede und Dr. Erich Schneider. Zwei Bände. Groß-Oktav. 1929.

I. Band: Mit 249 Figuren und 57 Tabellen im Text. VIII, 336 Seiten. RM. 18.50, geb. RM. 20.—

II. Band: Mit 553 Figuren und 40 Tabellen im Text. IV, 344 Seiten. RM. 22.50, geb. RM. 24.—

Das vorliegende Werk behandelt — auf einem Minimum an Voraussetzungen aufbauend — Theorie und Praxis der Röntgenspektroskopie und Kristallstrukturanalyse. Zur Beherrschung dieser Methoden ist jedoch eine so große Zahl verschiedenartigster Kenntnisse und Fertigkeiten (Röntgenstrahlen, Hochspannung, Vakuum, Atomtheorie usw.) erforderlich, daß es denen, die sie auf irgendein Spezialproblem anwenden wollen, zur gründlichen Einarbeitung zumeist an Zeit gebricht. Hier greift das vorliegende Werk ein, das den Gegenstand nach der praktischen und theoretischen Seite erschöpfend behandelt.

Spektroskopie. Von Dr. Karl Wilh. Meißner, o. Professor d. Experimentalphysik an der Universität Frankfurt a. M. Mit 102 Figuren. 1935. (Sammlung Göschen Bd. 1091) Geb. RM. 1.62

Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht. Von Prof. Dr. A. Nippoldt, Direktor des Magnetischen Instituts der Universität Berlin. Mit 9 Tafeln und 13 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 175) Geb. RM. 1.62

Einführung in die Theorie der Wärme. Von Dr. Heinrich Mache, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 96 Textfiguren. Groß-Oktav. VIII, 319 Seiten. 1921 RM. 8.—, geb. RM. 9.—

Aus dem Material von Vorlesungen entstanden und auf einem Minimum von mathematischen und physikalischen Kenntnissen aufbauend, ist das Werk eine Einführung zur streng wissenschaftlichen Behandlung dieses Themas.

Die Physik der Verbrennungerscheinungen. Von Dr. Heinrich Mache, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 43 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln. Groß-Oktav. V, 133 Seiten. 1918.

RM. 3.—, geb. RM. 3.80

Empfindliche Galvanometer für Gleich- und Wechselstrom. Von Dr. Otto Werner. Mit 23 Abbildungen und 17 Tabellen. Groß-Oktav. VIII, 208 Seiten. 1928 RM. 13.—, geb. RM. 14.—

Der Verfasser erörtert Aufbau, Arbeitsweise und Empfindlichkeitsarten der Galvanometerkonstruktionen sowohl für Gleich- als auch für Wechselstrom und gibt Gesichtspunkte für die Galvanometerauswahl und kritische Vergleiche der Galvanometertypen.

Vorlesungen über Thermodynamik. Von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Neunte Auflage. Groß-Oktav. X, 288 Seiten. 1930 . . Geb. RM. 11.50

Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung. Vorlesungen zur Einführung in die theoretische Physik, gehalten im Sommersemester 1914 an der Universität Leipzig. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 45 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 216 Seiten. 1914. RM. 7.50

Die Prinzipie der Dynamik. Von Dr. Clemens Schaefer, o. Professor an der Universität Breslau. Mit 6 Figuren im Text. Groß-Oktav. IV, 76 Seiten. 1919 RM. 2.50

„Das ausgezeichnete Werk behandelt in eingehender, elementarer Weise die Fragen der Ableitung und Äquivalenz der verschiedenen mechanischen Prinzipien.“
Monatshefte für Mathematik und Physik.

Geschichte der Physik. Von A. Kistner, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe i. B.

I. Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 126 Seiten. 1919. (Sammlung Götschen Bd. 293) Geb. RM. 1.62

II. Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Zweite, erweiterte Auflage. 149 Seiten. 1919. (Sammlung Götschen Bd. 294)

Geb. RM. 1.62

Wilhelm von Siemens. Ein Lebensbild. Gedenkblätter zum 75 jährigen Bestehen des Hauses Siemens & Halske. Von August Rothh. Mit 5 Tafeln in Lichtdruck. Oktav. V, 224 Seiten. 1922 . . RM. 2.60, geb. RM. 4.—

Die Biographie gibt zugleich ein Bild der Entwicklung der Siemenswerke und ein Stück Geschichte der deutschen Technik.

Einführung in die Elektrotechnik. Hochschulvorlesungen von Dr. C. Heinke, Geh. Reg.-Rat, o. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule München. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 560 Abbildungen. Oktav. 490 Seiten. 1924 Geb. RM. 18.—

Grundlagen der Elektronenoptik. Von Dr. W. Glaser. Ca. 224 Seiten. 1937. Mit ca. 100 Fig. Geb. ca. RM. 10.—

Über das außerordentlich interessante Gebiet der Optik kontinuierlicher Mittel und speziell der Elektronenoptik fehlte bisher eine zusammenfassende Darstellung in Lehrbuchform.

Nicht nur dem Theoretiker, sondern vielmehr auch jedem Praktiker wird dieses Lehrbuch willkommen sein, da vor allem das elektrische und magnetische Elektronen-Mikroskop und seine Anwendungsmöglichkeiten beschrieben werden. (Oscillograph, Bildwandler, Fernsehen.)

Die geschickte Textanordnung und das instruktive Bildmaterial machen das Buch für weite Kreise vorzüglich verwendbar.

Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung. Von Dr. E. Hiedemann. Ca. 200 Seiten. Mit über 100 Fig. . . . Geb. ca. RM. 10.—

In dieser knappen Monographie kommt ein erfahrener Theoretiker und Praktiker zu Wort.

Bei der noch unübersehbaren Auswirkungsmöglichkeit des Ultraschalles wird sich jeder Physiker, Mathematiker und Chemiker, vor allem aber auch jeder Biologe und Mediziner mit diesem Material beschäftigen müssen. Das Buch wird hier Führer sein und zur Weiterarbeit auf allen Gebieten der Naturwissenschaften in stärkstem Maße anregen.

Lehrbuch der Elektrotechnik. Von Professor E. Stöckhardt, Diplomingenieur und Studienrat. Dritte, umgearbeitete Auflage. Mit mehreren hundert Abbildungen. Oktav. VIII, 327 Seiten. 1925 Geb. RM. 13.—

Elektrotechnik. Einführung in die Starkstromtechnik. Von Prof. I. Herrmann. (Samml. Götschen Bd. 196—198, 657.)

I. Die physikalischen Grundlagen. Sechste, neubearb. Auflage. Mit 88 Figuren und 16 Tafeln. 128 Seiten. 1933 . . . Geb. RM. 1.62

- II. Die Gleichstromtechnik. Fünfte, neubearb. Auflage. Mit 121 Figuren und 16 Tafeln. 135 Seiten. 1928 Geb. RM. 1.62
- III. Die Wechselstromtechnik. Fünfte Auflage. Mit 153 Figuren und 16 Tafeln. 184 Seiten. 1929 Geb. RM. 1.62
- IV. Die Erzeugung und Verteilung der elektrischen Energie. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 99 Figuren im Text und 16 Tafeln mit 42 Abbildungen. 118 Seiten. 1932 Geb. RM. 1.62

Die Schwingung als Vortriebsfaktor in Natur und Technik. Gedanken eines Ingenieurs über das Problem der schwingenden Propulsion in Technik und Biologie. Von Hans Schramm. Mit 54 Abbildungen. Oktav. VI, 91 Seiten. 1927 RM. 4.—

MATHEMATISCHE LITERATUR FÜR DEN PHYSIKER

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. Neue Ausgabe. Lexikon-Oktav. VIII, 743 Seiten. 1932 Geb. RM. 15.—

Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.

Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen, bearbeitet nach den Vorlesungen von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Prof. a. d. Technischen Hochschule zu Dresden, o. Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 3 Bände. Jeder Band ist einzeln käuflich. Geb. je RM. 3.80

- I. Vektorrechnung und analytische Geometrie.
- II. Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. — Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung.
- III. Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. — Differentialgleichungen, Differentialgeometrie. — Funktionen einer komplexen Veränderlichen. — Probleme der Variationsrechnung.

Dieses neue billige Lehrbuch ist aus der Vorlesungspraxis heraus entstanden und gibt in klarem Aufbau eine hervorragende Einführung in die höhere Mathematik. Die bekannte pädagogische Meisterschaft Kowalewski's, die in allen Mathematikerkreisen größte Anerkennung gefunden hat, bewährt sich auch in diesem Werk, das sich würdig seinen früheren Lehrbüchern anschließt.

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut, Berlin. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909 Geb. RM. 20.—

Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben Geb. je RM. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1930 Geb. RM. 26.—
Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer und französischer Ausgabe vor Geb. je RM. 26.—

Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Regierungsrat Professor A. Adler. Zweite Auflage. 117 Seiten und 1 Tafel. 1929. (Samml. Göschen Bd. 423) Geb. RM. 1.62

Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut, Berlin. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912 Geb. RM. 7.—

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. August, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Neunundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. August, weiland Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 Seiten. 1931 Geb. RM. 2.—

„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein.“
Allgemeine Vermessungs-Nachrichten.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haussner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neue Auflage. 1934. (Samml. Göschen Bd. 81) Geb. RM. 1.62

„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten.“
Zeitschrift d. Osterr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Dr. Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927 Geb. RM. 1.50

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Einundvierzigste bis fünfundvierzigste Auflage. Oktav. 216 Seiten. 1935 Geb. RM. 6.80

„Die wohl allseitig bekannten Küsterschen Rechentafeln sind dem Chemiker, der sich ihrer einmal bedient hat, zum ungern entbehrenen Werkzeug geworden, das sich in seiner bewährten Anordnung des Stoffes zu einem wirklich nützlichen und fast notwendigen Hilfsbuch entwickelt hat. Die Neuausgabe erscheint wie üblich nach dem neuesten Stande der Forschung.“
Zeitschrift für angewandte Chemie.

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Kellchi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1931. RM. 9.—

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit, die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschieden großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die

Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.

Mathematische Formelsammlung. Von Professor O. Th. Bürklen †. Vollständig umgearbeitete Neuauflage von Dr. F. Ringleb. Mit 37 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. 272 Seiten. 1936. (Sammlung Göschen Bd. 51) Geb. RM. 1.62

„Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche wohlgeignet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze System der Elementarmathematik zu geben.“ Fortschritte der Mathematik.

Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Von Dr. Günther Schulz. Mit 10 Abbild. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 1110.) Geb. RM. 1.62

Höhere Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

I: Lineare Gleichungen. Zweite, verbesserte Auflage. 152 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 931) Geb. RM. 1.62

II: Gleichungen höheren Grades. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Fig. 160 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 932) Geb. RM. 1.62

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der ‚allgemeinen‘ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definition der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“
Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterr.

Aufgabensammlung zur höheren Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. 160 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1082) Geb. RM. 1.62

Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 301 Seiten. 1932. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8) Geb. RM. 11.50

Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. VIII, 243 S. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9) RM. 8.—, geb. RM. 9.50

Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.

Praxis der Gleichungen. Von Professor Dr. C. Runge. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. V, 172 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2) RM. 6.— geb. RM. 7.—

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholm'schen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. 1925 RM. 14.—, geb. RM. 15.50

„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“
Schulwart.

Differentialrechnung. Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat I. R. in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 94 Figuren und 189 Beispielen. 191 Seiten. 1936. (Samml. Göschen Bd. 87) Geb. RM. 1.62

Integralrechnung. Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. R. in Dresden. Mit 63 Figuren und 190 Beispielen. 176 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 88) Geb. RM. 1.62

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Professor Dr. A. Witting. Mit 58 Figuren und 405 Beispielen und Aufgaben. 136 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 146) . . . Geb. RM. 1.62

Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten. Von Dr. H. Dölp. Neu bearbeitet von Dr. Eugen Netto. 18. Auflage. Oktav. 214 Seiten 1935. (Verlag von Alfred Töpelmann.) Berlin W 35 RM. 1.95

Das Bändchen stellt eine elementare Aufgabensammlung zur Differential- und Integralrechnung mit eingefügten Erläuterungen dar. Der erste Abschnitt, Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen, bringt die Differentiation der elementaren Funktionen, einschließlich implizite Funktionen, die Ermittlung der Werte unbestimmter Formen, Maxima und Minima, Taylor'sche Reihe. Der zweite Abschnitt, Integralrechnung, führt das Integral als unbestimmtes ein, entwickelt die Integrationsformeln im Bereiche der elementaren Funktionen und geht dann kurz auf das bestimmte Integral ein. Schließlich werden noch verhältnismäßig ausführlich geometrische Anwendungen der Infinitesimalrechnung gebracht: Tangentenbestimmung, singuläre Punkte, Krümmung; Quadratur, Rektifikation, Kubatur.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Prof. Dr. A. Witting, Mit 32 Figuren und 305 Beispielen. 118 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 147) Geb. RM. 1.62

Integralgleichungen. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. Groß-Oktav. 302 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Bd. 18) RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Elementare Reihenlehre. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) Geb. RM. 1.62

Das Bändchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und führt deshalb z. B. der Erörterung über das Cauchy'sche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gauß'sche an.

Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 3 Figuren im Text. 140 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 1027) Geb. RM. 1.62

Fouriersche Reihen. Von Dr. W. Rogosinski, Professor an der Universität Königsberg. Mit 4 Figuren. 135 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1022) Geb. RM. 1.62

Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. Von Dr. Josef Lense, o. ö. Professor der Technischen Hochschule München. Mit 30 Abbildungen. 178 Seiten. 1933 Geb. RM. 9.50

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hohelsel. Zweite, verbesserte Auflage. 159 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 920) Geb. RM. 1.62

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 197 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10) RM. 9.—, geb. RM. 10.50

Partielle Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 1003) Geb. RM. 1.62

Partielle Differentialgleichungen. Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. 1929. VIII, 228 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14) RM. 11.—, geb. RM. 12.—

Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Von Professor Dr. G. Hoheisel. 148 Seiten. 1933. (Sammlung Göschens Bd. 1059) Geb. RM. 1.62

Integralgleichungen. Von Dr. Guido Hoheisel, a. o. Prof. an der Universität Greifswald. 136 Seiten. 1936. (Sammlung Göschens Bd. 1099). Geb. RM. 1.62

Elemente der Funktionstheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Prof. an der Universität Tübingen. Mit 23 Fig. 144 Seiten. 1937. (Samml. Göschens Bd. 1109.) Geb. RM. 1.62

Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Fünfte, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschens Bd. 668) Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 138 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 703) Geb. RM. 1.62

„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen.“
Monatsschrift für Mathematik und Physik.

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 877) Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschens Bd. 878) Geb. RM. 1.62

Elliptische Funktionen. Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Das Buch will dem Studierenden und Fachmann die elliptischen Funktionen als Glied eines großen Organismus verstehen lehren, der mit den einfachsten analytischen Funktionen, den rationalen, beginnt und schließlich zu den Riemannschen Funktionensystemen emporwächst.

Elliptische Funktionen. Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren im Text. XII, 356 Seiten, Neudruck. 1930. (Samml. Schubert Bd. 30) Geb. RM. 20.—

II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren im Text. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61) Geb. RM. 7.80

Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschens Bd. 901) Geb. RM. 1.62

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926. (Samml. Göschens Bd. 944) Geb. RM. 1.62

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.

I. Teil: Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58) Geb. RM. 4.—

II. Teil: Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59) Geb. RM. 4.—

„Wer in die Potentialtheorie eindringen will, findet in dem leichtverständlichen Buch einen zuverlässigen und angenehmen Führer.“
Zeitschrift f. d. mathem. u. naturwiss. Unterricht.

Numerische Integration. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) Geb. RM. 1.62

Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.

Graphische Integration. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801) Geb. RM. 1.62

Der Verfasser versucht einem weiteren Kreise die immer noch zu wenig benutzten zeichnerischen Methoden bekanntzumachen. Er setzt dabei so wenig Vorkenntnisse wie möglich voraus.

Praktisches Zahlenrechnen. Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405) Geb. RM. 1.62

Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.

Mathematische Instrumente. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922) . . . Geb. RM. 1.62

Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.

Nichteuklidische Geometrie. Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970) Geb. RM. 1.62

Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorge drungen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.

Nichteuklidische Geometrie. Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.

Kreis und Kugel. Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 S. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50

Projektive Liniengeometrie. Von Dr. Robert Sauer, Prof. an der Techn. Hochschule Aachen. Mit 36 Abbildungen. Groß-Oktav. 1937. (Göschens Lehrbücher Bd. 23.) Im Druck.

Projektive Geometrie. Von Dr. Timerding, Prof. an der Technisch. Hochschule Braunschweig. Mit 59 Figuren. 132 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 72) Geb. RM. 1.62

- Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.** Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923 Geb. RM. 14.50
 II. Mit 110 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XI, 582 Seiten. 1922. RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Die besprochenen Probleme werden alle mit großer Ausführlichkeit behandelt. Die am Schluß beigelegten Formeltafeln und Regeln erhöhen den Wert des Werkes, das nicht nur einführen, sondern auch zu selbständigen Forschungen anregen soll.

- Grundlagen der Geometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. 143 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 17) RM. 6.50, geb. RM. 7.80

Hessenbergs Vorlesungen über die „Grundlagen der Geometrie“ stellen eine besonders einfache und lesbare Einführung in die geometrische Grundlagenforschung dar. Sie werden darum allen denen willkommen sein, die zwar der Sache selbst Interesse entgegenbringen, aber mit der sonstigen Grundlagenliteratur nicht recht fertig geworden sind. Auch der Kenner wird ihnen manche Anregung entnehmen. Die ersten beiden Kapitel sind so einfach gehalten, daß sie selbst mathematischen Arbeitsgemeinschaften an höheren Schulen Stoff liefern können. Der Schwerpunkt des Buches liegt in den Erörterungen über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie und seine Sonderfälle, den Desarguesschen und Pascalschen Satz.

- Darstellende Geometrie.** Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena.

Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 142) Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 143) Geb. RM. 1.62

Dritter Teil: Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 65 Figuren im Text. 144 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 144) Geb. RM. 1.62

Vierter Teil: Freie und gebundene Perspektive, Photogrammetrie, kolterte Projektion. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 76 Figuren im Text. 144 Seiten. 1933. (Sammlung Göschens Bd. 1063.) Geb. RM. 1.62

- Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. Neudruck. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. 1932 Geb. RM. 18.90
 II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. Neudruck. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1932. Geb. RM. 8.55
 III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 RM. 10.80, geb. RM. 12.—

Darstellende Geometrie. Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65) Geb. RM. 6.—
II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Figuren. 340 Seiten. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66) Geb. RM. 7.50

Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Von Professor Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. Groß-Oktav. 252 S. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor der reinen Mathematik an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 16 Figuren. Groß-Oktav. 280 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Bd. 19)
RM. 15.50, geb. RM. 17.—

Geometrische Transformationen. Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. Groß-Oktav. 254 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Bd. 15) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Entsprechend dem Programm von „Göschens Lehrbücherei“ wurden aus dem Gesamtgebiete der geometrischen Transformationen diejenigen Kapitel in nicht zu abstrakter Weise dargestellt, die sowohl für den Mathematiker wie für den technischen Wissenschaftler wesentlich sind. Aus diesem Grunde wurde neben der analytischen Darstellung die zeichnerische Auswertung berücksichtigt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. Mit 10 Figuren. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschens Bd. 508 und 871) Geb. je RM. 1.62

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Prof. Dr. M. Pirani. Zweite, verbesserte Auflage, besorgt durch Dr. I. Runge. Mit 71 Abbild. 149 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 728)
Geb. RM. 1.62

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Bauwerksschule in Erfurt. 2 Teile. (Samml. Göschens Bd. 603 u. 695)
Geb. je RM. 1.62

Vorlesungen über graphische Statik. Von Professor Dr. Fr. Schur. Herausgegeben unter Mitwirkung von Wolfgang Vogt. Mit zahlreichen Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 219 Seiten. 1915
RM. 7.—, geb. RM. 8.20

Statik. I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper. Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher in Hannover. Mit 47 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 178) Geb. RM. 1.62

II. Teil: Angewandte (techn.) Statik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 61 Abbildungen. Sechster Neudruck. 149 Seiten. 1922. (Samml. Göschens Bd. 179) Geb. RM. 1.62

Ballistik. Von Dr. Theodor Vahlen, o. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik in Berlin. Mit 53 Abbildungen. Groß-Oktav. XII, 231 Seiten. 1922 RM. 9.—, geb. RM. 10.—

Flakschuß und Wetter. Ein Unterrichtsbuch für den Flakartilleristen und Deutschlands studierende Jugend. Von Lt. d. R. Dr. P. Lautner, Reg.-Rat und Ballistiker der Flakartillerieschule Wustrow. Ca. 182 Seiten Umfang mit ca. 50 Figuren Preis ca. RM. 5.—

Festigkeitslehre. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 56 Figuren und 1 Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten und 1 Tafel. 1923. (Samml. Göschen Bd. 288) Geb. RM. 1.62

In dem Band gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die Fundamentalsätze der elastischen Kräfte in ihrer Anwendung auf die einfacheren Fälle der Festigkeit, soweit sie für die gewöhnlichen Aufgaben des praktischen Lebens in Frage kommen.

Hydraulik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) Geb. RM. 1.62

Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.

Elastizitätslehre für Ingenieure. Von Professor Dr.-Ing. Max Ensslin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) Geb. je RM. 1.62

Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger.

Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.

Etymologisches Wörterbuch der Naturwissenschaften und Medizin. Sprachliche Erklärung der wichtigeren Ausdrücke und Namen der Anatomie, Astronomie, Biologie, Botanik, Chemie, Geographie, Geologie, Medizin, Mineralogie, Naturphilosophie, Paläontologie, Physik, Psychologie und Zoologie. Von Dr. C. W. Schmidt. Oktav. VII, 138 Seiten. 1923.

Geb. RM. 2.—

Das Büchlein wendet sich in erster Linie an Nichthumanisten, wird aber auch von Studierenden mit griechischer und lateinischer Vorbildung mit Vorteil gebraucht.

Fachkataloge und Prospekte auf Wunsch kostenlos

**VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO.
IN BERLIN W 35 UND LEIPZIG**

III. 1937.

Buchdruckerel Otto Regel G.m.b.H., Leipzig

Geistige Arbeit

Zeitung aus der wissenschaftlichen Welt

**Die Zeitschrift aller,
die am geistigen Neuaufbau teilnehmen,**

Ein unentbehrlicher Führer

für alle, die einen Gesamtüberblick und laufende Orientierung über die weitverzweigten Einzelgebiete der Wissenschaft zu erhalten wünschen,

Ein Vermittler

aller wirklich zeitnahen und aktuellen Wissenschaftsprobleme,

Ein Pfeiler

in der Brücke, die zwischen Volk und Wissenschaft geschlagen werden soll.

Die „Geistige Arbeit“ erscheint

zweimal monatlich, jeweils am 5. und 20.

Sie kostet vierteljährlich 1.50.

Preis der Einzelnummer 25 Pfennig.

Probenummer **kostenlos** durch jede Buchhandlung.

VERLAG WALTER DE GRUYTER & CO.,
Berlin, W 35, Woyrschstraße 13 (ehem. Genthiner Straße)

1987

VERIFICAT
2007