



RPR

BIBLIOTECA  
CENTRALA A  
UNIVERSITĂȚII  
DIN  
BUCUREȘTI

Nº Curent 71311 Format m

Nº Inventar 52106 Anul

Sectia Depozit în Raftul 1

dennoch stehen alle Bände in innerem Zusammenhang miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ausführliche Verzeichnisse  
der bisher erschienenen Bände umsonst und postfrei

en,

gen

1.62

iriger

4.40;

D.

36.

np.

i 9

# Bibliothek zur Physik und Chemie

aus der Sammlung Göschen

---

- Radioaktivität von Prof. Dr. K. Przibram. Mit 31 Abb. . . . . Nr. 317
- Teilchenstrahlen (Korpuskularstrahlen) von Prof.  
Dr. H. Mork. Mit 59 Abbild. . . . . Nr. 1083
- Spektroskopie von Prof. Dr. Karl Wilh. Meißner. Mit 102 Fig. Nr. 1091
- Kristallographie von Prof. Dr. W. Bruhns. Neubearbeitet  
von Prof. Dr. P. Ramdohr. Mit 192 Abb. . . . . Nr. 210
- Einführung in die Kristallographie von Dr. Eberh. Buchwald.  
Mit 116 Fig. . . . . . Nr. 619
- Einführung in die geometrische Optik von Dr.  
W. Hinrichs . . . . . Nr. 532
- Geschichte der Physik von Professor A. Kistner. Mit  
16 Fig. 2 Bände . . . . . Nr. 293, 294
- Theoretische Physik von Professor Dr. G. Jäger. Mit  
127 Fig. 5 Bände . . . . . Nr. 76—78, 374, 1017
- Physikalische Messungsmethoden von Professor Dr.  
Wilh. Bährdt. Mit 54 Fig. . . . . . Nr. 301
- Physikalische Formelsammlung von Prof. G. Mahler.  
Neubearbeitet von Prof. K. Mahler. Mit 71 Fig. . . . . Nr. 136
- Physikalische Aufgabensammlung von Prof. G. Mahler.  
Neubearbeitet von Prof. K. Mahler. Mit den Resultaten. Nr. 243
- Einführung in die Differentialgleichungen der  
Physik von Prof. Dr. Ludwig Hopf . . . . . Nr. 1070
- Vektoranalysis von Prof. Dr. Siegfried Valentiner Mit 13 Fig. Nr. 354
- Luftelektrizität von Dr. Karl Köhler. Mit 19 Abb. . . . . Nr. 649
- Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht von Prof.  
Dr. A. Nippoldt. Mit 9 Tafeln und 13 Abb. . . . . Nr. 175
- Meteorologie von Prof. Dr. Albert Defant. Mit 38 Fig. u. 7 Taf. Nr. 54
- Geschichte der Chemie von Prof. Dr. Hugo Bauer.  
I. Von den ältesten Zeiten bis Lavoisier . . . . . Nr. 264  
II. Von Lavoisier bis zur Gegenwart . . . . . Nr. 265
- Grundbegriffe der Chemie v. Dr. E. Rablnowitsch. Mit 2 Fig. Nr. 804
- Allgemeine und physikalische Chemie von Prof. Dr.  
Hugo Kauffmann. 2 Bände. Mit 16 Fig. . . . . Nr. 71, 698
- Anorganische Chemie von Prof. Dr. Wilhelm Klemm.  
Mit 18 Fig. . . . . . Nr. 37

<b>Die Metalle und ihre Verbindungen von Prof. Dr. J. Koppel.</b>	
I. Alkalimetalle, Erdalkalimetalle, Magnesiumgruppe. Mit 8 Fig. . . . . .	Nr. 812
II. Kupfergruppe, Aluminiumgruppe, Titangruppe, Blei- gruppe. Mit 1 Fig. . . . . .	Nr. 813
III. Vanadiumgruppe, Chromgruppe, Mangan, Eisen- gruppe, Platingruppe. Mit 5 Fig. . . . . .	Nr. 814
<b>Die Nichtmetalle und ihre Verbindungen von Prof. Dr. A. Benrath.</b>	
I. Bor, Kohlenstoff, Silizium, Stickstoff. Mit 9 Fig.	Nr. 211
II. Wasserstoff, Sauerstoff, Halogene, Edelgase. Mit 24 Fig.	Nr. 212
<b>Organische Chemie von Dr. Wilhelm Schlenk jun. . . . .</b>	Nr. 38
<b>Stereochemie von Prof. Dr. E. Wedekind. Mit 44 Fig. . . . .</b>	Nr. 201
<b>Physiologische Chemie v. Dr. med. A. Legahn. 2 Bände. Nr. 240, 241</b>	
<b>Neuere Arzneimittel, ihre Zusammensetzung, Wir- kung und Anwendung von Prof. Dr. med. C. Bachem</b>	Nr. 669
<b>Kolloidchemie von Prof. Dr. E. Wedekind. Mit 9 Fig. . . . .</b>	Nr. 897
<b>Thermochemie von Prof. Dr. W. A. Roth . . . . .</b>	Nr. 1057
<b>Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel.</b>	
I. Allgemeine Elektrochemie. Mit 19 Fig. . . . . .	Nr. 252
II. Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leit- fähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. . . . . .	Nr. 253
III. Energie. Mit 18 Fig. und mehreren Tabellen . . . . .	Nr. 941
IV. Elektrolyse. Mit 41 Fig. und mehreren Tabellen . . . . .	Nr. 980
<b>Komplexchemie. Einführung in die Chemie der komplexen Verbindungen. Von Prof. Dr. L. Dede. Mit 5 Fig. . . . . .</b>	Nr. 981
<b>Homogene Katalyse I: Nicht-enzymatische Katalysen von Prof. Dr. H. v. Euler und Dr. A. Ölander. Mit 5 Figuren</b>	Nr. 1037
<b>— II: Enzymatische Katalysen von Dr. Karl Myrbäck. Mit 7 Figuren . . . . .</b>	Nr. 1038
<b>Elektrochemische Rechenaufgabensammlung mit einer kurzen Übersicht über die wichtigsten Lehrsätze und Konstanten. Von Professor Dr.-Ing. Gustav F. Hüttig . . . . .</b>	Nr. 892
<b>Stöchiometrische Aufgabensammlung von Prof. Dr. W. Bahrdt. Mit den Resultaten . . . . .</b>	Nr. 452
<b>Chemisch-techn. Rechnungen v. Chemiker H. Deegener. Mit 2 Fig. . . . . .</b>	Nr. 701
<b>Analytische Chemie von Dr. Johs. Hoppe. 2 Bände. Nr. 247, 248</b>	
<b>Maßanalyse. Theorie und Praxis der klassischen und der elektrochemischen Titrverfahren. Von Prof. Dr. Gerhart Jander u. Dr. Karl Friedrich Jahr. 2 Bände. Mit 32 Fig. Nr. 221, 1002</b>	
<b>Toxikologische Chemie von Prof. Dr. E. Mannheim. Ergänzt von Dr. Fr. X. Bernhard. Mit 5 Fig. . . . . .</b>	Nr. 465
<b>Agrikulturchemische Untersuchungsmethoden von Prof. Dr. E. Haselhoff . . . . .</b>	Nr. 470
<b>Die chemischen Pflanzenschutzmittel, ihre Anwendung und Wirkung von Dr. Ernst Vogt . . . . .</b>	Nr. 923

Sammlung Göschen

Inu.A.52.106.

237 916

# Theoretische Physik

I

Mechanik

237 918

Von

Dr. Gustav Jäger

Professor der Physik an der Universität Wien

Mit 25 Figuren

Sechste, verbesserte Auflage

HLK 9



Bèrlin und Leipzig

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Velt & Comp.

1930

1956

CONTR. CL. 1953

B.C.U. Bucuresti



C67177

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht  
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Biblioteca Centrală Universitară

BUCUREȘTI

Cota ... 71311 .....

Inventar ... 67177 .....

RC 239/01

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

# Inhalt.

Seite

Lehrbücher der Mechanik und Relativitätstheorie... 6

## Mechanik eines Massenpunkts.

1.	Grundbegriffe — Bewegung — Bahn — Weg .....	7
2.	Geschwindigkeit — gleichförmige und ungleichförmige Bewegung .....	7
3.	Beschleunigung — gleichförmig beschleunigte Bewegung .....	8
4.	Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung — resultierende Geschwindigkeit und Beschleunigung .....	9
5.	Parallelogramm der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen .....	10
6.	Beharrungsvermögen — Kraft — Massenpunkt — Kräfteparallelogramm .....	11
7.	Wurfbewegung — freier Fall .....	12
8.	Krummlinige Bewegung — Zentripetalbeschleunigung — Fliehkraft .....	15
9.	Das Pendel — schwingende Bewegung .....	17
10.	Pendel im widerstehenden Mittel — gedämpfte Schwingung — logarithmisches Dekrement .....	19
11.	Bewegungsgröße — Zeitintegral der Kraft — Impuls .....	21
12.	Stoß unelastischer und elastischer Kugeln .....	22
13.	Arbeit — Wegintegral der Kraft — kinetische Energie .....	24
14.	Kraftfunktion — Potential — Gesetz der Erhaltung der Energie .....	26
15.	Keplers Gesetze — Gravitationsgesetz .....	28
16.	Prinzip der virtuellen Verschiebungen .....	33
17.	Prinzip von d'Alembert .....	36
18.	Lagranges Bewegungsgleichungen erster Art .....	37
19.	Erhaltung der Energie — Fallbewegung auf willkürlicher Bahn .....	39

## Mechanik starrer Körper.

20.	Punktsystem .....	40
21.	Schwerpunkt — Massenmittelpunkt .....	41
22.	Schwerpunkt einer Linie .....	43
23.	Schwerpunkt einer Fläche .....	44
24.	Schwerpunkt eines Körpers .....	45
25.	Guldins Theorem .....	46
26.	Ortsveränderung eines starren Körpers .....	48

	Seite
§ 27. Kräftepaar .....	48
§ 28. Drehungsmoment — Trägheitsmoment .....	49
§ 29. Ähnlichkeiten zwischen geradliniger und drehender Bewegung — Drehimpuls .....	50
§ 30. Kräfte, welche nicht im Schwerpunkt eines starren Körpers angreifen .....	51
§ 31. Trägheitsmoment um eine beliebige Achse .....	52
§ 32. Physisches Pendel — reduzierte Pendellänge .....	53
§ 33. Reversionspendel .....	54
§ 34. Trägheitsmoment eines Parallelepipeds .....	55
§ 35. Trägheitsmoment einer Kugel .....	57
§ 36. Trägheitsellipsoid .....	58
§ 37. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt — Euler- sche Gleichungen .....	60
§ 38. Freie Achse .....	63
§ 39. Kreiselbewegung — Präzession — Nutation .....	65

### Mechanik nichtstarrer Punktsysteme.

§ 40. Prinzip der Erhaltung des Schwerpunkts .....	70
§ 41. Prinzip der Erhaltung der Flächenräume .....	71
§ 42. Lagranges Bewegungsgleichungen zweiter Art — generalisierte Koordinaten .....	72
§ 43. Gleichungen für die relative Bewegung eines Körpers auf der Erdoberfläche .....	73
§ 44. Fall und Wurf mit Berücksichtigung der Erddrehung .....	78
§ 45. Horizontalbewegung mit Berücksichtigung der Erddrehung .....	81
§ 46. Foucaults Pendelversuch .....	82

### Die spezielle Relativitätstheorie.

§ 47. Die Galileitransformationen .....	83
§ 48. Einsteins spezielle Relativitätstheorie — Lorentztransformationen .....	84
§ 49. Länge und Zeit .....	88
§ 50. Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten .....	89
§ 51. Das Kraftfeld .....	90
§ 52. Longitudinale und transversale Masse .....	91
§ 53. Der Impuls .....	94
§ 54. Energie und Masse .....	95
§ 55. Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation .....	97

### Elastizitätstheorie.

§ 56. Normal- und Tangentialspannungen .....	98
§ 57. Deformationen durch Normalspannungen — Längsdilatation — Querkontraktion — Volumsdilatation .....	99
§ 58. Deformationen durch Tangentialspannungen — Schiebungen .....	101
§ 59. Beziehungen zwischen Normal-, Tangentialspannungen und Schie- bungen .....	102
§ 60. Gleichgewicht und Bewegung elastischer Körper .....	106

## Hydromechanik.

	Seite
61. Hydrostatische Grundgleichungen .....	111
62. Abhängigkeit des Drucks von der Schwere in tropfbaren Flüssigkeiten — hydrostatisches Paradoxon .....	113
63. Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit .....	114
64. Barometrische Höhenformel .....	115
65. Kapillaritätskonstanten .....	116
66. Erste Hauptgleichung der Kapillarität .....	117
67. Oberflächenspannung .....	120
68. Zweite Hauptgleichung der Kapillarität .....	120
69. Steighöhe in Röhren und zwischen Platten .....	121
70. Blasen und Tropfen .....	122
71. Kapillarröhren .....	124
72. Hydrodynamische Grundgleichungen .....	125
73. Ausflußgeschwindigkeit einer tropfbaren Flüssigkeit .....	127
74. Ausflußgeschwindigkeit der Gase .....	129
75. Transformation der Eulerschen hydrodynamischen Grundgleichungen .....	130
76. Wirbelbewegung .....	135
77. Stationäre Bewegung einer idealen Flüssigkeit .....	137
78. Wasserwellen .....	140
79. Innere Reibung — Ausfluß aus engen Röhren .....	144
Register .....	148

**Lehrbücher der Mechanik und Relativitätstheorie.**

Zur Weiterbildung empfehlen wir:

- Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik. Leipzig 1922.
- Christiansen, Elemente der theoretischen Physik. 4. Aufl. Leipzig 1921.
- Haas, Einführung in die theoretische Physik. 3. u. 4. Aufl. Berlin u. Leipzig 1923/24.
- v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik. Leipzig 1911.
- v. Laue, Die Relativitätstheorie. 4. Aufl. Braunschweig 1921.
- Schaefer, Einführung in die theoretische Physik. I. Bd. 3. Aufl., II. Bd. 2. Aufl. Berlin u. Leipzig 1929.

# Mechanik eines Massenpunkts.

## § 1. Grundbegriffe — Bewegung — Bahn — Weg.

Mechanik ist die Lehre von den Bewegungserscheinungen, welche sich auf die Begriffe des Raums, der Zeit und der Masse zurückführen lassen.

Ein Punkt bewegt sich, wenn er zu verschiedenen Zeiten gegenüber einem festgelegten Raum verschiedene Lagen einnimmt. Die Verbindungslinie sämtlicher Lagen nennt man die Bahn des Punkts. Nach der Gestalt derselben unterscheiden wir geradlinige und krummlinige Bewegungen. Die Länge der Bahn, welche von dem Punkt in der Zeit  $t$  zurückgelegt wird, nennen wir den Weg  $s$ .

## § 2. Geschwindigkeit — gleichförmige und ungleichförmige Bewegung.

Weg und Zeit stehen also miteinander in Beziehung, was wir durch die Gleichung

$$s = f(t)$$

darstellen können.  $f(t)$  kann nun sehr mannigfaltig sein. Der einfachste Fall ist

$$s = f(t) = vt,$$

wobei  $v$  eine Konstante ist. Die Bewegung, welche dieser Gleichung entspricht, nennen wir eine gleichförmige, weil in gleichen Zeiten auch immer gleiche Wege zurückgelegt werden. Der Weg  $v$ , welcher in der Sekunde beschrieben wird, heißt die Geschwindigkeit des Punkts. Wir

messen also die Geschwindigkeit  $v$  durch das Verhältnis des Wegs zur zugehörigen Zeit,

$$v = \frac{s}{t}.$$

Da die Geschwindigkeit nur durch ein Verhältnis ausgedrückt wird, so ist bei deren Bestimmung die absolute Größe des Wegs bzw. der Zeit ganz gleichgültig. Unsere Definition der Geschwindigkeit gilt demnach auch für einen unendlich kleinen Weg  $ds$ , woraus

$$(1) \quad v = \frac{ds}{dt}$$

folgt. Auf diese Weise sind wir in der Lage, für einen ganz bestimmten Punkt der Bahn die Geschwindigkeit anzugeben, und erkennen weiter, daß sie sich von Punkt zu Punkt ändern kann; in letzterem Fall haben wir dann eine ungleichförmige Bewegung.

### § 3. Beschleunigung — gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Wir sahen, daß bei der ungleichförmigen Bewegung nicht nur der Weg, sondern auch die Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit ist. Wählen wir wiederum die einfachste Funktion, setzen wir also

$$v = b t,$$

unter  $b$  abermals eine Konstante verstanden, so erhält in jeder Sekunde die Geschwindigkeit den Zuwachs  $b$ , welchen wir die Beschleunigung nennen. Für unser gewähltes Beispiel ist die Beschleunigung also eine konstante Größe. Eine derartige Bewegung nennt man deshalb eine gleichförmig beschleunigte.

Auch die Beschleunigung

$$b = \frac{v}{t}$$

ist nur ein Verhältnis. Wir können deshalb hier ganz dieselbe Überlegung wie bei der Geschwindigkeit machen. Für eine bestimmte Zeit, oder an einem bestimmten Punkt der Bahn ist demnach die Beschleunigung durch den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit gegeben. Wir erhalten so mit Berücksichtigung von (1) die Gleichung

$$(2) \quad b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

und wir erkennen ohne weiteres, daß auch die Beschleunigung im allgemeinen eine Funktion der Zeit sein wird.

§ 4. Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung — resultierende Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Projizieren wir die jeweilige Lage eines sich bewegenden Punktes auf die drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so besitzen die drei Projektionen ebenfalls gewisse Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die Bahnen der Projektionen sind dabei die drei Achsen. Ihre Geschwindigkeiten  $u, v, w$  lassen sich genau wie oben entwickeln, ebenso ihre Beschleunigungen  $f, g, h$ . Wir erhalten somit

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt};$$

$$f = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad g = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad h = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Schließt die Tangente an einem Punkt der Bahn mit

den Achsen die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ein, so erkennt man ohne weiteres, daß

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \beta,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \gamma$$

ist. Gleicherweise erhält man die Beschleunigung nach den drei Achsen, indem man die wirkliche Beschleunigung mit dem Richtungskosinus der Bahn multipliziert. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Richtung der Beschleunigung nur bei geradliniger Bahn mit der Bahnrichtung zusammenfällt. Man erkennt dies ohne weiteres aus den letzten Gleichungen, wenn man sie, um die Komponenten der Beschleunigung zu erhalten, noch einmal nach der Zeit differenziert und dabei beachtet, daß die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ebenfalls Funktionen der Zeit sind.

Man sieht weiter ein, daß ein Punkt, welcher die Geschwindigkeiten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  parallel zu den drei Achsen gleichzeitig besitzen soll, nur eine Geschwindigkeit von ganz bestimmter Größe und Richtung im Raum haben kann. Man nennt diese letztere die resultierende Geschwindigkeit der Komponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Ganz dasselbe gilt wiederum auch für die Beschleunigung.

### § 5. Parallelogramm der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen.

Was für ein rechtwinkeliges Koordinatensystem gilt, können wir ohne weiteres auf ein schiefwinkeliges übertragen.

Haben wir bloß zwei Geschwindigkeiten (Beschleunigungen), welche gleichzeitig ein Punkt annehmen soll, so erhalten wir die resultierende Geschwindigkeit (Beschleunigung), wenn wir von dem Punkt aus zwei Gerade ziehen, welche in Richtung und Größe den Geschwindigkeiten (Beschleunigungen) entsprechen. Ergänzen wir diesen Winkel zu einem Parallelogramm, so gibt die von dem beweglichen Punkt aus gezogene Diagonale die Größe und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit (Beschleunigung) an.

### § 6. Beharrungsvermögen — Kraft — Massenpunkt — Kräfteparallelogramm.

Bewegt sich ein Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig vorwärts, so sagen wir, er sei frei von allen Kräften, hingegen er sei von Kräften beeinflusst, wenn die geradlinige, gleichförmige Bewegung gestört wird. Während uns die gleichförmige, geradlinige Bewegung zum Begriff des Beharrungsvermögens führt, nennen wir jede Ursache der Änderung einer derartigen Bewegung eine Kraft.

Die Erfahrung lehrt, daß nicht jeder Körper in gleicher Weise von ein und derselben Kraft beeinflusst wird. Während der eine eine große Beschleunigung erfährt, gewinnt der andere nur eine geringe. Wir schreiben diesen Unterschied der Masse der Körper zu. Je größer seine Masse, desto kleiner die Beschleunigung, welche dem Körper eine Kraft zu erteilen vermag. Das Produkt aus der Masse  $m$  und der Beschleunigung  $b$  kann daher als Maß der Kraft  $P$  gelten. Wir erhalten somit die wichtige Gleichung

$$P = m b = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Die Masse eines Körpers haben wir, abgesehen von gewissen Einschränkungen (§ 52), als eine von der Lage desselben und der Zeit völlig unabhängige Größe zu denken.

Ist der Körper geometrisch sehr klein, so können wir uns seine ganze Masse in einem Punkt vereinigt denken, den wir dann einen Massenpunkt nennen. Nur Massenpunkte wollen wir vorläufig der Betrachtung unterziehen.

Wie von einer Zerlegung und Zusammensetzung der Beschleunigungen, kann man auch von solchen der Kräfte sprechen, was uns unmittelbar auf das Kräfteparallelogramm und ähnliches führt. Wir können jede Kraft  $P$  in drei aufeinander senkrechte Komponenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  zerlegen, welche parallel den Achsen eines Koordinatensystems wirken. Das Maß der Teilkräfte ist dann gegeben durch

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

### § 7. Wurfbewegung — freier Fall.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine Kraft von bestimmter Richtung, so kann dessen Bewegung nur in einer Ebene stattfinden.

Eine solche Kraft ist die Schwerkraft. Legen wir durch die Bewegungsrichtung des Massenpunkts eine Vertikalebene, so fällt in diese auch die Richtung der Schwere. Auf den Punkt wirkt keine Kraftkomponente senkrecht zu dieser Ebene; er kann diese also nicht verlassen. Bloß unter dem Einfluß der Schwerkraft muß demnach die Bahn geworfener Körper eine ebene Kurve sein. Wir wollen in unsere Ebene ein rechtwinkeliges ebenes Koordinatensystem so legen, daß die  $x$ -Achse horizontal, die  $y$ -Achse vertikal ist.

Die Schwerkraft  $Y$  wirkt parallel zur  $y$ -Achse. Parallel zu dieser wird also die Bewegung des Körpers durch die Gleichung

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y$$

bestimmt. Parallel zur  $x$ -Achse haben wir

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Aus der Erfahrung wissen wir, daß die Schwerkraft sich innerhalb eines beschränkten Raumes weder mit der Zeit noch mit dem Ort ändert, und daß sie immer proportional der Masse  $m$  des Körpers ist, auf welchen sie wirkt. Wir können daher

$$Y = - m g$$

setzen, wenn die Konstante  $g$  die Beschleunigung der Schwere ist.  $Y$  ist negativ, weil die  $y$ -Achse nach oben gerichtet ist, während die Schwere entgegengesetzt nach unten wirkt. Unsere Bewegungsgleichungen reduzieren sich daher auf

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = - g.$$

Die Masse ist in den Gleichungen nicht vorhanden, d. h. die Bewegung ist für alle Massen dieselbe. Aus der ersten finden wir

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = a, \quad (4) \quad x = at + a',$$

aus der zweiten

$$(5) \quad \frac{dy}{dt} = -gt + b, \quad (6) \quad y = -\frac{gt^2}{2} + bt + b'.$$

Die vier Konstanten  $a$ ,  $a'$ ,  $b$  und  $b'$  ergeben sich aus den Anfangsbedingungen, d. h. aus der Lage, Geschwindigkeit

keit und Richtung des Körpers zur Zeit  $t = 0$ . Es ist demnach  $a$  die Geschwindigkeit parallel zur  $x$ -Achse,  $a'$  die Abszisse,  $b$  die Geschwindigkeit parallel zur  $y$ -Achse und  $b'$  die Ordinate unseres Körpers zu Beginn seiner Bewegung. Wir können durch passende Wahl des Koordinatensystems die Bewegung immer im Ursprung desselben beginnen lassen. Es ist dann  $a' = b' = 0$ . Es genügen jetzt zur Bestimmung der Lage des Punkts die Gleichungen

$$x = a t \quad \text{und} \quad y = b t - \frac{g t^2}{2}.$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen die Zeit  $t$ , so erhalten wir die Bahngleichung

$$y = \frac{b x}{a} - \frac{g x^2}{2 a^2}.$$

Es beschreibt daher ein geworfener Körper, welcher sich bloß unter dem Einfluß der Schwere befindet, eine Parabel.

$y$  wird außer im Anfang noch ein zweites Mal gleich Null, wenn  $x = \frac{2 a b}{g}$  wird. Dies ist die Wurfweite. Die Wurfhöhe hat der Körper nach Zurücklegung der halben Wurfweite erreicht, sie ist demnach  $y = \frac{b^2}{2 g}$ .

Die Gleichungen für den senkrechten Wurf erhalten wir aus jenen des schiefen, wenn wir einfach  $a = 0$  setzen. Für den horizontalen Wurf ist hingegen  $b = 0$  anzunehmen. Die Bewegungsgleichung wird dann

$$y = - \frac{g x^2}{2 a^2}.$$

Wählen wir schließlich  $a = b = 0$ , so ergeben (5) und (6) die Gesetze des freien Falls.

Zu gebräuchlichen Formeln gelangen wir auch, wenn wir anstatt der Komponenten  $a$  und  $b$  die Anfangsgeschwin-

digkeit  $c$  selbst und den Winkel  $\alpha$  einführen, welchen die Anfangsrichtung mit der  $x$ -Achse, d. i. dem Horizont, bildet. Es ist danach

$$a = c \cos \alpha, \quad b = c \sin \alpha,$$

die Wurfweite

$$x = \frac{2c^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha,$$

die Wurfhöhe

$$y = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Letztere erreicht also ihren größten Wert für  $\alpha = 90^\circ$ , d. h. wenn wir bei sonst gleicher Anfangsgeschwindigkeit den Körper senkrecht emporwerfen. Die Wurfweite läßt sich wegen

$$\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

auch

$$x = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha$$

schreiben. Ihr größter Wert wird für  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , d. i. bei  $45^\circ$  Elevation erreicht.

Jede kleinere Wurfweite kann man durch zwei verschiedene  $\alpha$  erzielen, da bei  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$  sich derselbe Wert für  $\sin 2\alpha$  ergibt, wie bei  $\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$ .

### § 8. Krummlinige Bewegung — Zentripetalbeschleunigung — Fliehkraft.

Die Beschleunigung, welche ein Massenpunkt in irgend-einem Punkt einer krummlinigen Bahn besitzt, können wir in eine Komponente, die mit der Tangente der Kurve

zusammenfällt, und in eine Komponente senkrecht darauf und zwar nach der Richtung der Normalen in der Schmiegungeebene zerlegen. Wir betrachten einen Massenpunkt, welcher sich von  $M$  (Fig. 1) nach  $M'$  bewegt. Seine Geschwindigkeit in  $M$  sei  $v$ , in  $M'$   $v'$ . Die Komponente der Geschwindigkeit parallel zur Richtung  $MN$  ist demnach in  $M'$   $v' \cos \varphi$ , senkrecht dazu  $v' \sin \varphi$ . Auf dem Weg von  $M$  nach  $M'$  verstreicht die Zeit  $\tau$ . Die Beschleunigung in der Richtung der Tangente ist sodann

$$b_t = \lim \frac{v' \cos \varphi - v}{\tau},$$

in der Richtung der Normalen

$$b_n = \lim \frac{v' \sin \varphi}{\tau},$$

da in  $M$  die Geschwindigkeit in der Richtung der Normalen gleich Null ist. Beim Grenzübergang wird  $\cos \varphi = 1$ ,  $\sin \varphi = \varphi = \frac{v\tau}{r}$ . Es ist demnach

$$b_t = \frac{dv}{dt}, \quad b_n = \frac{v^2}{r}.$$

Hat der Massenpunkt die Masse  $m$ , so können die auf ihn wirkenden Kräfte in eine Tangential- und eine Normalkraft zerlegt werden. Erstere wird gegeben sein durch

$$T = m \frac{d^2 s}{dt^2},$$

letztere durch

$$N = \frac{m v^2}{r}.$$

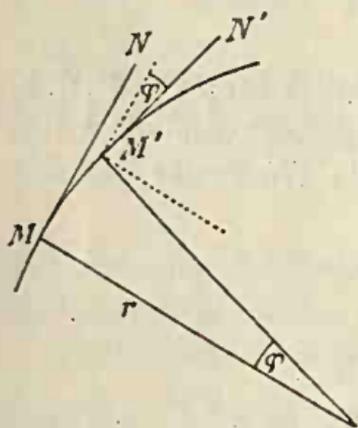


Fig. 1.

Diese nennt man auch Zentripetalkraft und die nach einem allgemeinen Prinzip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung dadurch hervorgerufene ebenso große Gegenkraft des beweglichen Massenpunkts dessen Fliehkraft.

### § 9. Das Pendel — schwingende Bewegung.

Eine kleine schwere Kugel von der Masse  $m$  sei an einem sehr dünnen festen Faden aufgehängt. Die Masse des Fadens soll gegen jene der Kugel vernachlässigt werden können. Bringen wir die Kugel aus ihrer Ruhelage und geben sie dann frei, so beginnt sie zu schwingen. Wir betrachten bloß die Schwingungen in einer Vertikalebene. Diese sind vorhanden, wenn die Kugel keinen seitlichen Stoß erhält (§ 7). Auf die Kugel in  $M$  (Fig. 2) wirkt die Schwerkraft

$$MN = -mg.$$

Diese zerlegen wir in eine Komponente in der Richtung des gespannten Fadens, welcher durch die Spannung des Fadens das Gleichgewicht gehalten wird, und in eine Komponente senkrecht darauf. Diese ist

$$MC = -mg \sin \varphi,$$

das ist die Kraft, welche die Kugel in die Ruhelage  $A$  zurückzutreiben sucht. Die Bewegungsgleichung wird daher sein

$$(7) \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

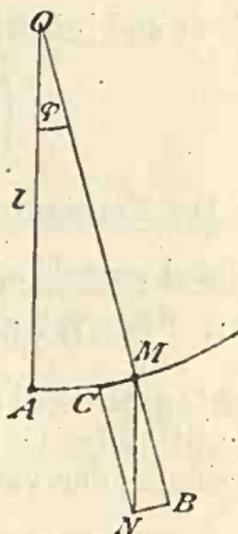


Fig. 2.



Hier ist der Weg  $s = l\varphi$ , wobei wir  $l$  die Pendellänge nennen. Wir wollen ferner nur kleine Schwingungen voraussetzen, so daß  $\sin \varphi = \varphi$  angenommen werden kann. Dann wird Gleichung (7)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Die Pendelbewegung ist von der Masse der Pendelkugel unabhängig.

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit  $\frac{d\varphi}{dt} dt$  und integrieren wir, so folgt

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l}\varphi^2 + A.$$

Die Konstante  $A$  wird  $\frac{g}{l}\varphi_0^2$ , wenn wir unter  $\varphi_0$  jenen Winkel verstehen, bei welchem die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$  wird. Das heißt:  $\varphi_0$  ist der größte Ausschlagswinkel des Pendels oder, wie man auch sagt, die Amplitude der Schwingung. Dieser Wert ergibt nach Trennung der Variablen

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} = t \sqrt{\frac{g}{l}} + B,$$

oder

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} + B \right).$$

Die Konstante  $B$  ergibt sich aus den Anfangsbedingungen. Ist für  $t = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , so muß  $\sin B = 1$ , d. h.  $B = \frac{\pi}{2}$  sein. Mithin ist

$$\varphi = \varphi_0 \cos \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

Diese Gleichung bestimmt die Bewegung des Pendels.

Wollen wir die Winkelgeschwindigkeit für eine beliebige Zeit  $t$  kennenlernen, so brauchen wir bloß den Winkel nach der Zeit zu differenzieren, also

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \sqrt{\frac{g}{l}} \varphi_0 \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

zu bilden.

Für  $\sqrt{\frac{g}{l}} t = \pi$  ist  $\varphi = -\varphi_0$ , d. h. das Pendel hat eine Schwingung von einer Seite zur andern gemacht. Die dazu benötigte Zeit, die Schwingungsdauer, ist also

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

### § 10. Pendel im widerstehenden Mittel — gedämpfte Schwingung — logarithmisches Dekrement.

Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß das Pendel in einem widerstehenden Mittel schwingt, und zwar soll der Widerstand  $w$  proportional der Geschwindigkeit der Pendelkugel sein. Wir können ihn also als eine negative Kraft von der Form

$$w = -\alpha \frac{ds}{dt}$$

darstellen. Die Pendelgleichung wird somit

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = - m g \sin \varphi - \alpha \frac{ds}{dt}.$$

Wir setzen wiederum nur kleine Schwingungen voraus, können also die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{g}{l} \varphi - \frac{\alpha}{m} \frac{d\varphi}{dt}$$

schreiben. Wir wollen  $\frac{g}{l} = a^2$ ,  $\frac{\alpha}{m} = 2b$  einführen. Es ergibt sich dann

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2b \frac{d\varphi}{dt} + a^2 \varphi = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\varphi = e^{\lambda t},$$

indem  $\frac{d\varphi}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$  und  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$  ist, so daß sich die Gleichung auf

$$\lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0$$

reduziert, woraus

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

folgt. Diese Größe ist nur reell, wenn  $b > a$  ist, d. h. wenn der Widerstand, den die schwingende Kugel erfährt, ein sehr großer ist. Dann kommt aber überhaupt keine Schwingung zustande, sondern die Kugel nähert sich einfach allmählich der Ruhelage.

Ist hingegen  $a > b$ , dann ist  $\lambda$  komplex, indem

$$\lambda = -b \pm i \sqrt{a^2 - b^2}$$

wird. Die Bewegung des Pendels ist in diesem Fall nach

bekanntem Regeln gegeben durch

$$\begin{aligned}\varphi &= A_1 e^{-bt + it\sqrt{a^2 - b^2}} + A_2 e^{-bt - it\sqrt{a^2 - b^2}} \\ &= e^{-bt} (C \cos \sqrt{a^2 - b^2} t + D \sin \sqrt{a^2 - b^2} t).\end{aligned}$$

Wir haben demnach eine schwingende Bewegung von immer kleiner werdender Amplitude, eine sogenannte gedämpfte Bewegung.

Die Schwingungsdauer ist jetzt

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}.$$

Sie ist also größer als beim widerstandsfreien Pendel.

Beginnt das Pendel mit einer Amplitude  $\varphi_0$  zu schwingen, so ist nach  $n$  Schwingungen die Amplitude

$$\varphi_n = \varphi_0 e^{-nb\tau}.$$

Daraus folgt

$$b = \frac{\ln \varphi_0 - \ln \varphi_n}{n\tau}.$$

Diese Größe nennt man das logarithmische Dekrement, doch wird auch das Produkt  $b\tau$  häufig so genannt.

### § 11. Bewegungsgröße — Zeitintegral der Kraft — Impuls.

Lassen wir eine Kraft  $K$  während einer kleinen Zeit  $dt$  auf eine Masse  $m$  wirken, so wird sich deren Geschwindigkeit ändern, und zwar wird die Änderung um so beträchtlicher ausfallen, je größer die Kraft und je größer  $dt$  ist. Die Gesamtänderung wird demnach dem Produkt  $K dt$  proportional gesetzt werden können. Für eine endliche Zeit erhalten wir dann den Gesamteinfluß der Kraft auf die be-

wegliche Masse  $m$ , wenn wir  $\int_0^t K dt$  bilden. Da nun

$$K = m \frac{d^2 s}{dt^2} = m \frac{dv}{dt},$$

so

$$\int_0^t K dt = m \int_0^t \frac{dv}{dt} dt = m v - m v_0,$$

wenn die Geschwindigkeit zu Beginn  $v_0$  und zu Ende der Zeit  $t$   $v$  war.

Die Größe  $m v$  nennt man die Bewegungsgröße der Masse  $m$ . Die Einwirkung der Kraft durch eine gegebene Zeit auf eine bewegliche Masse  $m$  kann demnach durch die Differenz der Bewegungsgrößen zu Beginn und zu Ende dieser Zeit gemessen werden. Die Kraft ist also unmittelbar durch den Zuwachs der Bewegungsgröße bestimmt, welchen das Bewegliche in der Sekunde erfährt.

Man nennt den Ausdruck  $\int_0^t K dt$  auch das Zeitintegral der Kraft oder den Impuls. Auch die Bewegungsgröße wird daher Impuls genannt.

## § 12. Stoß unelastischer und elastischer Kugeln.

Vom Zeitintegral der Kraft können wir eine Anwendung beim Zusammenstoß zweier Kugeln machen. Wir setzen voraus, daß die Bewegung der Kugeln in der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte erfolgt. Ihre Bewegungsgrößen seien vor dem Zusammenstoß  $m c$  bezüglich  $m' c'$ . Sind die Kugeln vollkommen unelastisch, so wirken sie beim Zusammenstoß so lange aufeinander, bis sie dieselbe Geschwindigkeit  $u$  angenommen haben. Die

neuen Bewegungsgrößen sind also  $mu$  und  $m'u$ . Mithin hat die erste Kugel  $m(c - u)$  an Bewegungsgröße verloren, während die zweite  $m'(u - c')$  gewonnen hat. Beide Größen müssen einander gleich sein, da auf beide Kugeln ja dieselbe Kraft während derselben Zeit wirkt. Es ist also

$$m(c - u) = m'(u - c'),$$

oder die Geschwindigkeit nach dem Stoß

$$u = \frac{mc + m'c'}{m + m'}.$$

Sind die Kugeln vollkommen elastisch, so hört die Einwirkung derselben aufeinander bei gleichwerdender Geschwindigkeit noch nicht auf, da die elastischen Kräfte die Kugeln wieder auseinandertreiben. Und zwar ist das Zeitintegral vor und nach dem Gleichwerden der Geschwindigkeiten gleich groß. Sind die Endgeschwindigkeiten  $v$  und  $v'$ , so werden wir haben

$$m(c - u) = m'(u - c') = m(u - v) = m'(v' - u),$$

woraus dann folgt

$$v = 2 \frac{mc + m'c'}{m + m'} - c$$

und

$$v' = 2 \frac{mc + m'c'}{m + m'} - c'.$$

Bei gleichen Massen wird

$$v = c', \quad v' = c,$$

d. h. die Kugeln vertauschen, nach dem Stoß ihre Geschwindigkeiten. Ist  $m' = \infty$ ,  $c' = 0$ , was wir beim Stoß gegen eine feste Wand annehmen können, so wird

$$v = -c,$$

d. h. die Kugel wird mit unveränderter Geschwindigkeit zurückgeworfen.

## § 13. Arbeit — Wegintegral der Kraft — kinetische Energie.

Wirkt eine Kraft  $K$  auf ein Bewegliches, welches in der Richtung der Kraft den Weg  $ds$  zurücklegt, so nennt man  $K ds$  die Arbeit der Kraft  $K$  auf dem Weg  $ds$ . Das ist z. B. der Fall, wenn wir ein Gewicht von der Größe  $K$  um die Höhe  $ds$  heben.  $\int_{s_0}^{s_1} K ds$  ist demnach die Arbeit, welche die Kraft  $K$  von  $s_0$  bis  $s_1$  leistet. Es ist aber

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} K ds &= \int_{s_0}^{s_1} m \frac{d^2s}{dt^2} ds = m \int_{s_0}^{s_1} \frac{dv}{dt} ds = m \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{dt} dv \\ &= m \int_{s_0}^{s_1} v dv = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Die Größe  $\frac{m v^2}{2}$  nennen wir die lebendige Kraft oder die kinetische Energie der Masse  $m$ . Es ist demnach die Änderung der lebendigen Kraft des Beweglichen gleich der Arbeit, welche die Kraft auf dem Weg  $s_1 - s_0$  geleistet hat.

Den Ausdruck  $\int_{s_0}^{s_1} K ds$  nennt man das Wegintegral der Kraft.

Nun zeigt die Erfahrung, daß keine Arbeit geleistet wird, wenn eine Kraft senkrecht zur Bahn des bewegten Punktes steht. Zerlegen wir demnach eine Kraft  $K$ , deren Richtung mit der Bahn den Winkel  $\vartheta$  einschließt, in zwei Komponenten, deren eine  $K \cos \vartheta$  in die Richtung der Bahn fällt, während die andere  $K \sin \vartheta$  senkrecht dazu steht, so

leistet auf dem Weg  $ds$  nur erstere eine Arbeit von der Größe  $K \cos \vartheta ds$ .

Sind also Kraft und Weg nicht gleich gerichtet, so ist die geleistete Arbeit gleich dem Produkt aus Kraft und Weg multipliziert mit dem Kosinus des von den Richtungen beider eingeschlossenen Winkels.

Eine jede Kraft  $K$  können wir bekanntlich in drei senkrecht aufeinanderstehende Komponenten  $X, Y, Z$  zerlegen. Die Projektionen des Weges  $ds$  auf die Koordinatenachsen sind entsprechend  $dx, dy, dz$ . Lassen wir nun die Kraft  $K$  auf dem Wege  $ds$  wirken, so leisten die drei Kraftkomponenten die Arbeiten  $X dx, Y dy, Z dz$ . Wir können diese drei Größen addieren und zwischen den Grenzen  $s_0$  und  $s_1$  integrieren. Wie leicht ersichtlich, ergibt dies

$$\begin{aligned} & \int_{s_0}^{s_1} \left( X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{s_0}^{s_1} m \left( \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} \right) dt \\ &= \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]_{s_0}^{s_1} = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Auch so können wir die Beziehung zwischen Arbeit und lebendiger Kraft darstellen, was besonders dann am Platz ist, wenn gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt  $m$  einwirken und die verschiedenen Richtungen der Kräfte mit dem Weg des Beweglichen nicht zusammenfallen.

### § 14. Kraftfunktion — Potential — Gesetz der Erhaltung der Energie.

Es kommt in der Natur der Fall häufig vor, daß die drei Kraftkomponenten, welche auf einen Massenpunkt wirken, sich darstellen lassen durch

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Wir nennen dann die Funktion  $F$  die Kraftfunktion. Der negative Wert davon

$$H = -F$$

ist das Potential der Kräfte,

Durch Einführung dieser Begriffe können wir unsere Arbeitsgleichung folgendermaßen umgestalten. Es ist

$$\begin{aligned} & \int_{s_0}^{s_1} \left( X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{dF}{dt} dt = F_1 - F_0 = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Die geleistete Arbeit ist also nicht nur der Änderung der lebendigen Kraft, sondern auch der Änderung der Kraftfunktion gleich.

Führen wir das Potential ein, so ergibt sich

$$\frac{m v_1^2}{2} + H_1 = \frac{m v_0^2}{2} + H_0.$$

Die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie ist eine konstante Größe. Man muß nämlich das Potential einer Energie gleichwertig erachten, weshalb man es auch potentielle Energie oder Energie der Lage nennt, da sie ja durch die Lage des Massenpunkts, nämlich durch seine Koordinaten bestimmt ist. Der von uns zuletzt gewonnene Satz wird das Prinzip von der Erhaltung der Energie genannt.

Als Beispiel eines Potentials können wir die Funktion

$$H = m g z + \text{const.}$$

ansetzen, wenn wir unter  $g$  die Beschleunigung der Schwere auf die Masse  $m$  und unter  $z$  die Höhe verstehen, in welcher sich die Masse befindet. In der Tat ist dann

$$X = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad Y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad Z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -m g.$$

Ein Körper, welcher lediglich der Schwerkraft unterworfen ist, wird demnach der Gleichung gehorchen:

$$\frac{m v^2}{2} + m g z = \frac{m v_0^2}{2} + m g z_0 = \text{Const.}$$

Das heißt: in jeder bestimmten Höhe  $z$  hat der Körper auch immer eine ganz bestimmte Geschwindigkeit  $v$ .

Schreiben wir die Gleichung

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = m g (z_0 - z),$$

so sehen wir ohne weiteres, daß die zum Heben des Gewichts  $m g$  um die Höhe  $z_0 - z$  nötige Arbeit durch die Änderung der lebendigen Kraft beim freien Fall von  $z_0$  bis  $z$  bestimmt ist.

## § 15. Keplers Gesetze — Gravitationsgesetz.

Aus den Gesetzen, welche Kepler für die Planetenbewegung fand, schloß Newton, daß zwei Punkte von den Massen  $M$  und  $m$  und der Entfernung  $r$  eine Kraft in der Richtung  $r$  aufeinander ausüben, die gleich ist

$$K = - \frac{h M m}{r^2}.$$

Es ist dies das berühmte Gravitationsgesetz. Wir wählen das negative Vorzeichen, weil die Kraft den Abstand  $r$  zu verkleinern sucht;  $h$  nennt man die Gravitationskonstante.

Wir denken uns  $M$  fest und  $m$  vollkommen frei beweglich. Da für die Lage der Bahn nur die Anfangsrichtung der Bewegung von  $m$  und die Richtung der Kraft, welche in der Verbindungsgeraden beider Massen liegt, maßgebend ist, so findet die Bewegung in einer Ebene statt. Es genügt daher zur Bahnbestimmung ein ebenes Koordinatensystem, in dessen Ursprung die Masse  $M$  liegen soll.  $m$  habe die Koordinaten  $x, y$ , der Radiusvektor  $r$  schließe mit der  $y$ -Achse den Winkel  $\varphi$  ein; dann ist

$$x = r \sin \varphi, \quad y = r \cos \varphi.$$

Die Komponenten der Kraft parallel zur  $x$ - und  $y$ -Achse sind

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{h M m}{r^2} \sin \varphi = - \frac{h M m}{r^2} \frac{x}{r}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{h M m}{r^2} \cos \varphi = - \frac{h M m}{r^2} \frac{y}{r}. \end{array} \right.$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit  $y$ , die zweite mit  $x$  und subtrahieren sie voneinander, so erhalten wir

$$y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

oder 
$$\frac{d}{dt} \left( y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = 0$$

daher 
$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = 2c,$$

wobei  $c$  konstant ist.

Schreitet unsere Masse  $m$  in der Zeit  $dt$  um das Wegstück  $ds$  mit den Komponenten  $dx$  und  $dy$  vorwärts, so beschreibt dabei der Radiusvektor  $r$  die Fläche

$$\frac{y dx - x dy}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2}.$$

In der Zeiteinheit wird er demnach die Fläche

$$(9) \quad \frac{1}{2} \left( y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = \frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} = c$$

bestreichen. Man nennt deshalb die Größe  $c$  auch die Flächengeschwindigkeit der Masse  $m$ , die für unsern Fall eine konstante Größe ist.

Multiplizieren wir die Gleichungen (8) mit  $\frac{dx}{dt}$  bezüglich  $\frac{dy}{dt}$  und addieren sie, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] &= - \frac{h M m}{r^3} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= - \frac{h M m}{r^2} \frac{dr}{dt} = h M m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

da ja  $x^2 + y^2 = r^2$ , mithin

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}$$

ist.

Ferner ist

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2,$$

wobei also  $v$  die Geschwindigkeit der Masse  $m$  bedeutet. Sonach wird durch Integration

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{h M m}{r} + A.$$

Die Konstante  $A$  finden wir leicht aus den Anfangsbedingungen, für welche die Geschwindigkeit  $v_0$  und der Radiusvektor  $r_0$  gelten soll. Somit ist

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{h M m}{r_0} + A,$$

woraus folgt

$$(10) \quad \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \frac{h M m}{r} - \frac{h M m}{r_0}.$$

So gestaltet sich der Satz von der Erhaltung der Energie für unsern speziellen Fall.  $C - \frac{h M m}{r}$  ist demnach das Potential der Kraft  $-\frac{h M m}{r^2}$ , wobei  $C$  eine willkürliche Konstante ist.

Den unendlich kleinen Weg  $ds$  können wir nun in zwei Komponenten in der Richtung des Radiusvektor und senkrecht darauf zerlegen. Diese sind  $dr$  und  $r d\varphi$ , und es besteht die Beziehung

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r d\varphi)^2,$$

mithin auch

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Aus Gleichung (9) und (10) folgt nun leicht

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{2c}{r^2} = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{2hM}{r_0} + \frac{2hM}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}.$$

Diese Gleichung können wir noch verwandeln in

$$\pm \frac{\frac{2c}{r^2} dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2hM}{r_0} + \frac{h^2 M^2}{4c^2} - \left(\frac{hM}{2c} - \frac{2c}{r}\right)^2}} = d\varphi.$$

Wählen wir

$$v_0^2 - \frac{2hM}{r_0} + \frac{h^2 M^2}{4c^2} = \alpha^2,$$

$$\frac{hM}{2c} - \frac{2c}{r} = z,$$

so gewinnen wir die einfache Form

$$\pm \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 - z^2}} = d\varphi.$$

Das gibt integriert

$$\arccos \frac{z}{\alpha} = \varphi + C,$$

$$z = \alpha \cos(\varphi + C).$$

Setzen wir nun für  $z$  wieder seinen Wert ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$r = \frac{\frac{4c^2}{hM}}{1 - \frac{2c\alpha}{hM} \cos(\varphi + C)}.$$

Wir wollen den Winkel  $\varphi$  so wählen, daß für  $\varphi = 0$   $r$  ein Minimum wird. Dies ist der Fall, wenn wir die Konstante

$C = \pi$  setzen. Unsere Gleichung wird nun

$$(11) \quad r = \frac{\frac{4c^2}{hM}}{1 + \frac{2c\alpha}{hM} \cos \varphi}.$$

Je nachdem

$$\frac{2c\alpha}{hM} \begin{matrix} \leq \\ \equiv \\ \geq \end{matrix} 1$$

ist, haben wir in (11) die Gleichung einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel vor uns. Diese drei Kurven sind also an die Bedingung

$$v_0^2 - \frac{2hM}{r_0} \begin{matrix} \leq \\ \equiv \\ \geq \end{matrix} 0$$

geknüpft, was man leicht erhält, wenn man den Wert für  $\alpha$  wieder einführt.

Sind für eine Ellipse die beiden Halbachsen  $a$  und  $b$ , setzen wir  $a^2 - b^2 = e^2$  und  $\frac{e}{a} = \varepsilon$ , so gilt die Gleichung

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Die Fläche der Ellipse ist  $f = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ . In unserem Fall ist die Fläche aber auch gleich  $cT$ , wenn  $T$  die Umlaufzeit des Massenpunkts  $m$  um  $M$  ist. Es ist demnach

$$cT = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

oder

$$c^2 T^2 = \pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2).$$

Gleichung (11) ergibt aber

$$\frac{4c^2}{hM} = a(1 - \varepsilon^2),$$

mithin

$$c^2 T^2 = \pi^2 a^3 \frac{4 c^2}{h M}$$

oder

$$(12) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{h M}{4 \pi^2}.$$

Den von uns gerechneten Fall können wir auf die Planetenbewegung anwenden, wenn wir  $M$  als die Sonne,  $m$  als einen Planeten ansehen. Kepler fand dafür folgende Gesetze:

„1. Der Radiusvektor von der Sonne nach dem Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Würfel der halben großen Achsen ihrer Bahnen.“

Wir finden diese drei Gesetze in den Gleichungen (9), (11) und (12).

### § 16. Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Wirken auf einen Punkt verschiedene Kräfte nach verschiedenen Richtungen und geben wir ihm eine sehr kleine Verschiebung  $\delta s$ , so werden die Kräfte  $P$  dabei eine Arbeit  $\delta A$  leisten, welche nach § 13 gegeben ist durch

$$\delta A = \Sigma P \delta s \cos \vartheta,$$

wenn  $\vartheta$  der Winkel ist, welchen Kraft und Verschiebungsrichtung einschließen. Es ist also

$$\delta s \cos \vartheta = \delta p$$

die Projektion der Verschiebung auf die Richtung der Kraft.

Ist nun

$$\Sigma P \delta p = 0,$$

so wird bei der Verschiebung keine Arbeit geleistet, d. h. die Kräfte müssen in der Verschiebungsrichtung eine Resultierende gleich Null haben, sie müssen im Gleichgewicht sein.

Zerlegen wir die Kräfte nach den drei Achsen eines Koordinatensystems, so wird unser Gleichgewichtssatz

$$(13) \quad \Sigma P \delta p = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0.$$

Sollen die Kräfte nach allen Richtungen des Raums im Gleichgewicht sein, so muß

$$X \delta x = Y \delta y = Z \delta z = 0,$$

mithin auch

$$(14) \quad X = Y = Z = 0$$

sein, da wir ja die Verschiebung auch in einer der Koordinatenachsen vornehmen können, und dann die Projektionen auf die beiden anderen von selbst gleich Null werden. Die Kräfte heben sich also wirklich gegenseitig auf.

Dieses Prinzip für das Gleichgewicht eines Systems von Kräften nennt man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Es rührt von Lagrange her und kann etwa folgendermaßen formuliert werden: Ein System von Kräften befindet sich im Gleichgewicht, wenn bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Angriffspunkts keine Arbeit geleistet wird.

Ist der Punkt nicht nach allen Richtungen frei beweglich, sondern ist er genötigt, auf einer bestimmten Fläche oder Linie zu bleiben, so kann dies folgendermaßen in Rechnung gezogen werden. Die Gleichung der Fläche, welche der Punkt nicht verlassen kann, sei

$$F(x, y, z) = 0.$$

Geben wir daher dem Punkt eine Verschiebung  $\delta s$ , deren

Komponenten  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  sind, so muß auch die Gleichung

$$F(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) \\ = F(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0$$

erfüllt sein und damit auch

$$\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich mit (13) zu folgender vereinigen:

$$\left( X + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \right) \delta x + \left( Y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y + \left( Z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \right) \delta z = 0,$$

wobei  $\lambda$  ein willkürlicher Faktor ist.

Diese Gleichung kann wegen der Willkür des Koordinatensystems nur bestehen, wenn

$$(15) \quad \begin{cases} X + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ Y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ Z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Hätten wir die Bedingung gestellt, der Punkt müsse auf einer Linie bleiben, so wären zwei Bedingungsgleichungen, etwa  $f(x, y, z) = 0$  und  $f_1(x, y, z) = 0$  zu (13) hinzugekommen. Das Resultat wäre dann

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

$$Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0,$$

$$Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0.$$

$\lambda$  und  $\mu$  sind ganz willkürliche Faktoren, deren Wert sich aus den vorhandenen Kräften ermitteln läßt.

Nehmen wir an, ein Massenpunkt  $m$ , auf den nur die Schwerkraft wirkt, soll auf einer Kugelfläche bleiben, deren Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Es ist also

$$X = Y = 0, \quad Z = -mg, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Nach den Gleichungen (15) ist daher

$$2\lambda x = 2\lambda y = 0,$$

das heißt

$$x = y = 0.$$

Für  $z$  folgt jetzt aus der Kugelgleichung

$$z = \pm a.$$

Der Massenpunkt ist also bloß an zwei Punkten, nämlich auf dem obersten und untersten der Kugel, im Gleichgewicht. Danach ergibt sich auch der Wert von  $\lambda$  aus der Gleichung

$$-mg \pm 2\lambda a = 0.$$

### § 17. Prinzip von d'Alembert.

Dieses lautet: Sind die Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, nicht im Gleichgewicht, so können wir immer eine Kraft hinzufügen, welche ihnen das Gleichgewicht hält, und sodann das Prinzip der virtuellen Verschiebungen anwenden. Die Komponenten der zugefügten Kraft müssen natürlich der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt den

Komponenten der übrigen Kräfte sein. Sind letztere

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z,$$

so muß die hinzugefügte Kraft, welche das Gleichgewicht herstellen soll, die Komponenten  $-X$ ,  $-Y$ ,  $-Z$  haben. Dann läßt sich nach Gleichung (13) das Prinzip in die Form kleiden:

$$\left( X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left( Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z = 0,$$

woraus wiederum leicht die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen

$$(16) \quad X - m \frac{d^2 x}{dt^2} = Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} = Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

folgen.

### § 18. Lagranges Bewegungsgleichungen erster Art.

Stellen wir die Bedingung, daß der bewegliche Massenpunkt  $m$  auf einer Fläche

$$F(x, y, z) = 0$$

bleiben soll, so verwandeln sich mit Berücksichtigung von (16) die Gleichungen (15) nach Lagrange in

$$(16a) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z}, \end{array} \right.$$

was auf mehr Bedingungsgleichungen erweitert werden kann.

Das Beispiel des § 17 liefert uns also folgende Bewegungsgleichungen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \lambda x,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 \lambda y,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -m g + 2 \lambda z.$$

Nach diesen Gleichungen muß sich demnach ein Massenpunkt auf einer Kugelfläche bewegen, wenn er bloß der Schwerkraft unterworfen ist.

Wir nehmen nun an, die Bewegung finde bloß in der  $(x, z)$ -Ebene statt, und setzen

$$x = a \sin \varphi, \quad z = -a \cos \varphi,$$

d. h. wir zählen den Winkel  $\varphi$  von der negativen  $z$ -Achse aus. Es sei ferner  $x$  gegen  $z$  immer sehr klein, was nur möglich ist, wenn  $\sin \varphi$  sehr klein ist. Es kann dann

$$\sin \varphi = \varphi, \quad \cos \varphi = 1,$$

also

$$x = a \varphi, \quad z = -a$$

gesetzt werden, und wir erhalten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{2 \lambda}{m} \varphi$$

und

$$0 = -m g - 2 \lambda a.$$

Demnach ist  $\lambda = -\frac{m g}{2 a}$  und

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a} \varphi.$$

Das ist aber die aus § 9 bekannte Pendelgleichung, wobei wir unter  $a$  die Pendellänge zu verstehen haben. Tatsächlich ist ja auch die dort behandelte Pendelbewegung nichts anderes als ein spezieller Fall der Bewegung eines Punkts, welcher auf einer Kugelfläche zu bleiben gezwungen ist.

### § 19. Erhaltung der Energie — Fallbewegung auf willkürlicher Bahn.

Wir multiplizieren die Gleichungen (16 a) der Reihe nach mit  $\frac{dx}{dt}$  bezüglich  $\frac{dy}{dt}$  und  $\frac{dz}{dt}$  und addieren sie; erhalten also

$$\begin{aligned} & m \left( \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \right) \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} \left( \frac{m v^2}{2} \right) \\ &= X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} + \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned}$$

$\frac{m v^2}{2}$  ist die kinetische Energie des Massenpunkts, in dem wir unter  $v$  seine Geschwindigkeit verstehen. Multiplizieren wir beide Seiten unserer Gleichung mit  $dt$ , so gewinnen wir die Form

$$\begin{aligned} d \left( \frac{m v^2}{2} \right) &= X dx + Y dy + Z dz \\ &+ \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \right). \end{aligned}$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß der Klammerausdruck auf der rechten Seite der Gleichung verschwindet.

Wir führten ja früher  $F(x, y, z) = 0$  ein. Zu einer späteren Zeit haben wir

$$F(x + dx, y + dy, z + dz) = F(x, y, z) \\ + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber ohne weiteres, daß der mit  $\lambda$  multiplizierte Ausdruck in der Gleichung für  $d\left(\frac{m v^2}{2}\right)$  wegfällt und nur bleibt

$$d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz,$$

was nichts anderes als der bekannte Satz von der Erhaltung der Energie ist (§ 14), der somit auch dann gilt, wenn der Punkt gezwungen ist, auf einer bestimmten Fläche oder Linie zu bleiben. Wir können daher das Beispiel des § 14 noch dahin erweitern, daß wir sagen: Ein Körper, der nur der Schwerkraft unterworfen ist, hat in jeder bestimmten Höhe eine ganz bestimmte Geschwindigkeit. Wie beschaffen dabei die Bahn ist, auf welcher der Körper fällt oder steigt, ist ganz gleichgültig.

## Mechanik starrer Körper.

### § 20. Punktsystem.

Alle Lehrsätze, welche wir in den vorhergehenden Paragraphen für die Bewegung eines Massenpunkts kennengelernt haben, gelten auch für ein Punktsystem. Unter einem solchen versteht man einen Komplex von Massenpunkten, deren Bewegung durch gegenseitige als auch durch äußere Kräfte beeinflußt wird. Wir

brauchen zur Lösung eines speziellen Falls nur die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung aller vorkommenden Kräfte für einen jeden Punkt aufzustellen.

Erst an einem System materieller Punkte können wir so recht den Nutzen der verschiedenen Prinzipien erkennen. So genügt z. B. zur Gleichgewichtsbestimmung der einfachen Maschinen vollkommen das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

### § 21. Schwerpunkt — Massenmittelpunkt.

Ist die gegenseitige Lage der materiellen Punkte unveränderlich, so haben wir einen starren Körper vor uns. Auf diesen wirke nur die Schwerkraft, und wir stellen uns die Frage, ob es einen Punkt gibt, welcher unterstützt den Körper in jeder beliebigen Lage im Gleichgewicht hält.

Wir benutzen zur Beantwortung dieser Frage das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Nach § 17 muß für ein Punktsystem die Gleichung

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0$$

gelten. Für die Schwerkraft reduziert sich diese Gleichung auf

$$\Sigma Z \delta z = 0,$$

da diese ja nur parallel zur  $z$ -Achse wirkt, weshalb von vornherein

$$X = Y = 0$$

zu setzen ist.

Wir verlegen den Unterstützungspunkt in den Ursprung des Koordinatensystems und geben dem Körper nur eine kleine Drehung  $\delta\varphi$  um die  $y$ -Achse. Ein Punkt in der Entfernung  $r$  von der  $y$ -Achse von der Masse  $m$  und der

Abszisse  $x$  erhält die Verschiebung

$$\delta s = r \delta \varphi,$$

deren Komponente

$$\delta z = \delta s \frac{x}{r} = x \delta \varphi$$

ist. Die Schwerkraft leistet dabei die Arbeit  $- m g x \delta \varphi$ , welche für sämtliche vorhandenen Massenpunkte zusammen genommen gleich Null sein muß. Daraus folgt

$$\Sigma - m g x \delta \varphi = - g \delta \varphi \Sigma m x = 0,$$

also auch

$$\Sigma m x = 0.$$

Vollführen wir die Drehung um die  $x$ -Achse, so erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma m y = 0.$$

Da es nun für den Unterstützungspunkt gleichgültig sein soll, welche Lage immer der Körper einnimmt, so folgt, daß auch

$$\Sigma m z = 0$$

sein muß.

Selbstverständlich gibt es für jeden Körper einen Punkt, welcher diesen Bedingungen genügt. Man nennt ihn den Schwerpunkt des Körpers oder auch den Massenmittelpunkt; denn man kann sich in ihm die gesamte Masse des Körpers vereinigt denken, da nur dieser Punkt unterstützt zu werden braucht, um der Schwerkraft das Gleichgewicht zu halten.

Liegt der Schwerpunkt nicht im Ursprung des Koordinatensystems, sondern hat er die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$ , so können wir die Koordinaten der einzelnen Massenpunkte

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta$$

setzen. Wiederum muß dann gelten

$$\Sigma m x_1 = \Sigma m y_1 = \Sigma m z_1 = 0,$$

also auch

$$\Sigma m (x - \xi) = 0,$$

woraus folgt

$$\Sigma m x = \xi \Sigma m,$$

oder

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Das sind die Formeln, nach welchen man den Schwerpunkt des Körpers findet.

### § 22. Schwerpunkt einer Linie.

Haben wir einen linienförmigen Körper, etwa einen Draht, dessen Längeneinheit die Masse  $\mu$  besitzt, so ist für denselben

$$\Sigma m = \int \mu dl = \mu l,$$

$$\Sigma m x = \int \mu x dl = \mu \int x dl,$$

wenn wir unter  $l$  die Länge des Körpers verstehen. Danach wird

$$\xi = \frac{\int x dl}{\int dl} = \frac{\int x dl}{l}.$$

Es liege z. B. ein Kreisbogen von der Länge  $l$  und dem Öffnungswinkel  $2\varphi_0$  symmetrisch zur  $x$ -Achse in der  $(x, z)$ -Ebene. Für ihn ist  $x = r \cos \varphi$ ,  $dl = r d\varphi$ , daher

$$\int x dl = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} r^2 \cos \varphi d\varphi = 2 r^2 \sin \varphi_0$$

und

$$\xi = \frac{2 r^2 \sin \varphi_0}{l} = \frac{c r}{l},$$

wenn  $c$  die Länge der Sehne ist. Für den Halbkreis gilt somit, da  $c = 2r$  und  $l = \pi r$  ist,

$$\xi = \frac{2r}{\pi}.$$

### § 23. Schwerpunkt einer Fläche.

Nach demselben Vorgang wie bei einem linienförmigen Körper erhalten wir für einen flächenförmigen die Gleichung

$$\xi = \frac{\int x dF}{F},$$

wobei  $F$  die Fläche des Körpers bedeutet. Analoge Formeln ergeben sich für  $\eta$  und  $\zeta$ .

Wir wollen z. B. aus einer Parabel, deren Gleichung

$$z^2 = 2px$$

ist, eine Fläche ausschneiden, welche von den Strecken  $a, c$  und dem Parabelbogen (Fig. 3) begrenzt ist. Wir finden

$$F = \int_0^a z dx = \int_0^a \sqrt{2p} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} a \sqrt{a} = \frac{2}{3} ac,$$

ferner

$$\int x dF = \iint x dx dz = \int x z dx = \int x \sqrt{2p} \sqrt{x} dx = \frac{2}{5} \sqrt{2p} x^{\frac{5}{2}}.$$

Das ist zwischen den Grenzen 0 und  $a$  zu nehmen, daher

$$\int x dF = \frac{2}{5} a^2 c$$

und

$$\xi = \frac{\int x dF}{F} = \frac{3}{5} a.$$

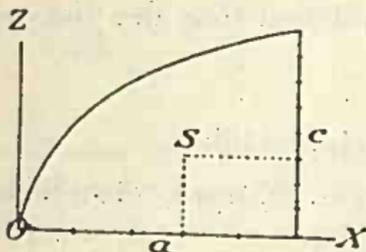


Fig. 3.

Gleicherweise finden wir

$$\zeta = \frac{3}{8} c.$$

Tragen wir  $\xi$  und  $\zeta$  als Abszisse und Ordinate auf, so haben wir den Schwerpunkt  $S$  (Fig. 3) gefunden.

### § 24. Schwerpunkt eines Körpers.

Für einen Körper ist

$$\xi = \frac{\int x dV}{V}, \quad \eta = \frac{\int y dV}{V}, \quad \zeta = \frac{\int z dV}{V},$$

wobei  $V$  das Volumen des Körpers bedeutet.

Als Beispiel für eine derartige Schwerpunktsberechnung möge folgende Aufgabe gelöst werden. Es ist der Schwerpunkt eines Kugelsegments zu bestimmen. Die Gleichung der Kugel sei

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Wir legen durch den Punkt  $A$  (Fig. 4) eine Ebene senkrecht zur  $x$ -Achse und in der Entfernung  $dx$  eine parallele dazu. Dadurch wird aus der Kugel eine Scheibe vom Volumen

$$\pi \overline{AC}^2 dx = \pi (a^2 - x^2) dx$$

herausgeschnitten. Das Volumen des Kugelsegments ist demnach

$$V = \pi \int_a^\alpha (a^2 - x^2) dx = \pi \left( \frac{2a^3}{3} - a^2 \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right),$$

wobei  $\alpha$  der kleinste Wert von  $x$  ist. Ferner haben wir zu

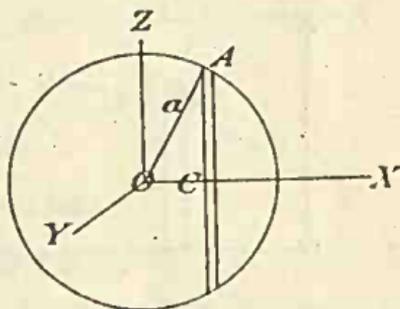


Fig. 4.

bilden

$$\begin{aligned} \xi V &= \iiint x \, dx \, dy \, dz = \int_0^a \pi x (a^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi \left( \frac{a^4}{4} - \frac{a^2 \alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} \right). \end{aligned}$$

Betrachten wir den Fall der Halbkugel, so  $\alpha = 0$ , dann

$$\xi = \frac{3a}{8}.$$

### § 25. Guldins Theorem.

Wenn die ebene Kurve  $AB$  (Fig. 5) um die Achse  $ox$  rotiert, so erzeugt sie eine Rotationsfläche vom Inhalt

$$O = 2\pi \int z \, dl.$$

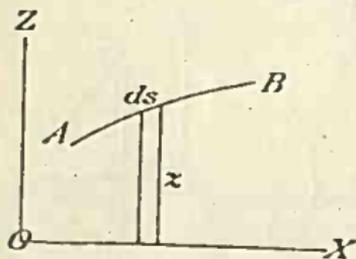


Fig. 5.

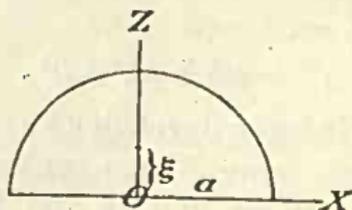


Fig. 6.

Für die Ordinate des Schwerpunkts gilt

$$\zeta = \frac{\int z \, dl}{l},$$

daher ist

$$O = 2\pi \zeta l.$$

Das heißt: alle Kurven von derselben Länge und demselben Schwerpunkt erzeugen Rotationskörper gleicher Oberfläche.

Es rotiere z. B. ein Halbkreis (Fig. 6). Die dadurch

entstehende Kugeloberfläche ist

$$4 \pi a^2 = 2 \pi \zeta \cdot \pi a = 2 \pi^2 a \zeta,$$

woraus

$$\zeta = \frac{2 a}{\pi}$$

folgt, was wir bereits im § 22 gefunden haben.

Durch die Rotation des Kreises (Fig. 7) erhält man einen Wulst. Dessen Oberfläche muß nach unserer Regel

$$O = 2 \pi b \cdot 2 \pi c = 4 \pi^2 b c$$

sein.

Lassen wir anstatt einer Kurve ein beliebig begrenztes Stück  $F$  der  $xz$ -Ebene um die  $x$ -Achse rotieren, so gilt für dessen Schwerpunktsordinate die Gleichung

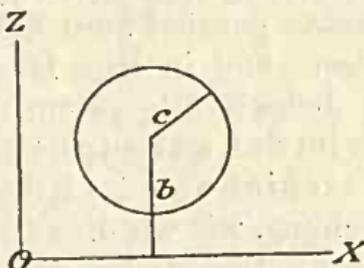


Fig. 7.

$$\zeta F = \int z dx dz.$$

Das Volumen des Rotationskörpers ist

$$\iint 2 \pi z dx dz = 2 \pi \zeta F.$$

Als Beispiele dafür können uns die bereits betrachteten Fälle dienen. Der Inhalt der durch Rotation des Halbkreises (Fig. 6) entstehenden Kugel ist

$$\frac{4 \pi a^3}{3} = 2 \pi \zeta \cdot \frac{\pi a^2}{2},$$

woraus folgt

$$\zeta = \frac{4 a}{3 \pi}.$$

Für den Inhalt des Wulstes (Fig. 7) ergibt sich

$$2 \pi b \cdot \pi c^2 = 2 \pi^2 b c^2.$$

Diese Beziehung zwischen Oberfläche und Inhalt eines Rotationskörpers und der Schwerpunktsordinate der erzeugenden Kurve resp. Fläche bildet den Inhalt des nach seinem Entdecker Guldin benannten Theorems.

### § 26. Ortsveränderung eines starren Körpers.

Jede Lagenänderung eines starren Körpers kann in zwei Vorgänge zerlegt werden, nämlich in eine Ortsveränderung des Schwerpunkts, wobei sich alle übrigen Punkte parallel zum Schwerpunkt und zu sich selbst bewegen, und in eine Drehung um den Schwerpunkt.

Jedes Kräftesystem, das eine Resultierende gibt, die nur im Schwerpunkt angreift, wird nur eine Parallelverschiebung des Körpers bewirken können, aber keine Drehung, wie wir dies am Beispiel der Schwerkraft gesehen haben. Umgekehrt dürfen Kräfte, welche nur eine Drehung des Körpers um den Schwerpunkt hervorbringen sollen, keine Komponente besitzen, welche im Schwerpunkt angreift.

### § 27. Kräftepaar.

Zwei Kräfte, welche gleich groß und entgegengesetzt gerichtet an zwei verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen, nennt man ein Kräftepaar. Dieses hat die Eigenschaft, keine Schwerpunktsbewegung bewirken zu können, was man unmittelbar aus einer virtuellen Parallelverschiebung des Körpers erkennt. Jede Kraft leistet dabei dieselbe Arbeit, aber in entgegengesetztem Sinn, d. h. die Gesamtarbeit ist gleich Null, bezüglich des Schwerpunkts befinden sich die Kräfte im Gleichgewicht. Die Drehung des Körpers muß um eine Achse vor sich gehen, welche durch den Schwerpunkt geht. Die Bestimmung ihrer Lage zur Ebene des Kräftepaars soll später (§ 37) erörtert werden.

## § 28. Drehungsmoment — Trägheitsmoment.

Infolge des Kräftepaars  $AB$  (Fig. 8) dreht sich ein Körper um die feste Achse  $O$ , welche senkrecht zur Bildebene zu denken ist.  $A$  und  $B$  seien die Angriffspunkte der Kräfte  $P$ . Ihr Abstand von  $O$  sei  $a$  und  $b$  und die Senkrechten von  $O$  auf  $P$  entsprechend  $p_1$  und  $p_2$ .

Wir lassen den Körper eine Drehung um den Winkel  $\delta\varphi$  machen. Dabei leisten die Kräfte  $P$  die Arbeit

$$P a \delta\varphi \cos \alpha = P p_1 \delta\varphi$$

und

$$P b \delta\varphi \cos \beta = P p_2 \delta\varphi.$$

Die Gesamtarbeit ist also

$$P (p_1 + p_2) \delta\varphi = P p \delta\varphi,$$

wenn wir mit  $p$  den Abstand  $A'B'$  der parallelen Kräfte bezeichnen.

Ein Massenpunkt  $m$  im Abstand  $r$  von der Drehungsachse beschreibt den Weg

$$s = r \delta\varphi.$$

Die Kraft, welche auf ihn wirkt, ist gegeben durch

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = m r \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Das Produkt aus Kraft und Weg ergibt sodann die geleistete Arbeit  $m r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \delta\varphi$ . Die Summe davon für alle

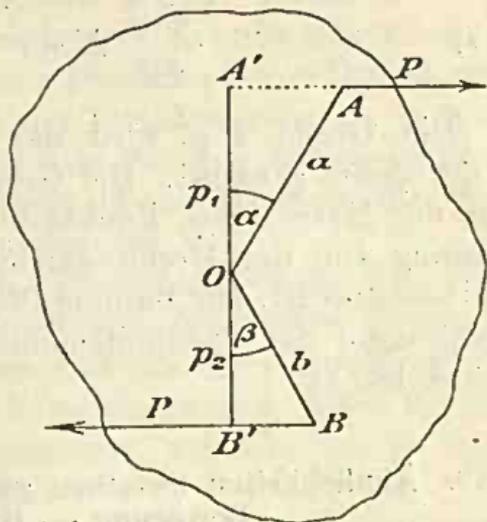


Fig. 8.

Massenpunkte muß gleich der Arbeit des Kräftepaars sein:

$$\Sigma m r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \delta \varphi = P p \delta \varphi$$

oder

$$(17) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \Sigma m r^2 = P p .$$

Die Größe  $P p$  wird das Drehungsmoment des Kräftepaars genannt. Die Größe  $m r^2$ , d. h. das Produkt aus der Masse eines Punkts in das Quadrat seiner Entfernung von der Drehungsachse nennt man sein Trägheitsmoment. Die Summe aller Trägheitsmomente  $\Sigma m r^2$  heißt dann das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse  $O$ .

### § 29. Ähnlichkeiten zwischen geradliniger und drehender Bewegung — Drehimpuls.

Falls  $\varphi$  der Drehungswinkel ist, welchen ein Körper in einer bestimmten Zeit beschreibt, so können wir in Analogie zur geradlinigen Bewegung  $\frac{d\varphi}{dt}$  seine Winkelgeschwindigkeit und  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  seine Winkelbeschleunigung nennen.

Für eine bestimmte Lage der Drehungsachse ist das Trägheitsmoment eine konstante Größe. Wir erfahren dann aus Gleichung (17), daß das Drehungsmoment einfach proportional der Winkelbeschleunigung zu setzen ist. Wir können also die drehende Bewegung eines Körpers mit der Bewegung eines Massenpunkts in vollständige Analogie bringen, wenn wir die Begriffe der Masse, Beschleunigung und Kraft durch jene des Trägheitsmoments, der Winkelbeschleunigung und des Drehungsmoments ersetzen. Das Zeitintegral (§ 11) des Drehungsmoments ist das

Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit, das man mit dem Namen Drehimpuls bezeichnet.

Die Analogie geht noch weiter. Projizieren wir die Fläche, welche der Radiusvektor eines Massenpunkts bei der Drehung um einen gewissen Winkel beschreibt, auf die drei Ebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so können wir die so erhaltenen Flächen als von Drehungen herrührend ansehen, welche der Punkt um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse macht. Es sind das also die drei Komponenten, während umgekehrt die ursprüngliche Drehung die Resultierende dieser drei Komponenten ist.

Dasselbe gilt auch für das Drehungsmoment  $P p$ . Wir können es durch ein Rechteck von den Seiten  $P$  und  $p$  darstellen. Die Projektionen auf die drei Koordinatenebenen bilden dann wieder Parallelogramme, deren Fläche die Größe der Drehungsmomente um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse darstellt.

Unsere Gleichung (17) sagt gar nichts darüber aus, wo die Angriffspunkte der Kräfte zu liegen haben und wie diese gerichtet sind. Daraus geht ohne weiteres hervor, daß man ein Kräftepaar, ohne seine Wirkung zu ändern, in jeder Weise verschieben kann, wofür nur die Normale zu seiner Ebene immer dieselbe Richtung behält.

### § 30. Kräfte, welche nicht im Schwerpunkt eines starren Körpers angreifen.

Wir lassen nun ganz allgemein eine Kraft  $K$  (Fig. 9) in einem beliebigen Punkt  $A$  eines starren Körpers von der Masse  $M$  angreifen. Im Schwerpunkt  $S$  bringen wir zwei neue Kräfte  $K'$  und  $K''$  an, welche entgegengesetzt gerichtet, im übrigen jedoch der Kraft  $K$  parallel und gleich sein sollen. Infolge der Kraft  $K' = K$  wird der Körper eine fortschreitende Bewegung erhalten, für welche wir

die Gleichungen aufstellen können, als wäre die ganze Masse  $M$  im Schwerpunkt vereinigt. Gleichzeitig erhält der Körper aber auch durch das Kräftepaar  $K A S$  eine Drehung um den Schwerpunkt, wie sie im § 27 erörtert wurde.

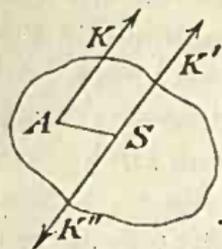


Fig. 9.

Die Kraft  $K$  habe die Komponenten  $X, Y, Z$ , der Angriffspunkt die Koordinaten  $x, y, z$ . Die Kraft  $X$  erzeugt somit um die  $y$ -Achse ein Drehungsmoment  $Xz$ , um die  $z$ -Achse das Moment  $-Xy$ .

Ähnlich verhält es sich mit den Kräften  $Y$  und  $Z$ , so daß wir um die  $x$ -Achse das Drehungsmoment

$$Zy - Yz$$

und gleicherweise um die  $y$ -Achse das Moment

$$Xz - Zx$$

und um die  $z$ -Achse

$$Yx - Xy$$

erhalten. Wir müssen nämlich ein Drehungsmoment positiv oder negativ setzen, je nachdem es, gegen den Ursprung des Koordinatensystems betrachtet, eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers oder eine entgegengesetzte hervorbringt.

### § 31. Trägheitsmoment um eine beliebige Achse.

Wir hängen einen Körper so auf, daß er sich nur um eine Achse senkrecht zur Bildebene  $A$  (Fig. 10) drehen kann. Wir suchen bezüglich dieser Achse das Trägheitsmoment  $\sum m r^2$ .

Den Schwerpunkt  $O$  machen wir zum Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Die  $z$ -Achse geht also durch  $A$  und es sei  $OA = d$ . Dann ist

$$r^2 = r_1^2 + d^2 - 2 r_1 d \cos \alpha,$$

und das Trägheitsmoment

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m r_1^2 + d^2 \Sigma m - 2 d \Sigma m r_1 \cos \alpha.$$

Nun ist aber  $\Sigma m = M$ , d. i. gleich der Masse des Körpers, während

$$\Sigma m r_1 \cos \alpha = \Sigma m z = 0$$

ist, da die Koordinatenachse durch den Schwerpunkt geht. Es bleibt also

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m r_1^2 + M d^2.$$

Das Trägheitsmoment um eine willkürliche Achse setzt sich also aus zwei Trägheitsmomenten zusammen. Das eine  $M d^2$  wäre vorhanden, wenn wir uns die gesamte Masse des Körpers im Schwerpunkt vereinigt dächten. Dazu kommt noch ein Trägheitsmoment bezüglich einer Achse, die durch den Schwerpunkt des Körpers geht und zur eigentlichen Drehungsachse parallel ist.

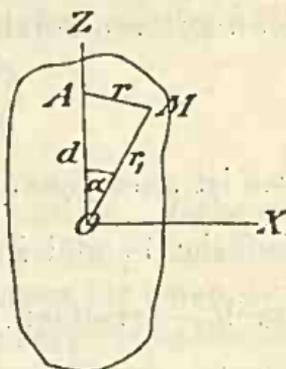


Fig. 10.

### § 32. Physisches Pendel — reduzierte Pendellänge.

Ein starrer Körper soll sich nur um die  $y$ -Achse drehen können. Das Drehungsmoment ist dann nach §30  $Xz - Zx$ . Drehende Kraft sei nur die Schwere. Ein Massenpunkt besitzt daher die Kraftkomponenten

$$X = 0, \quad Z = -m g,$$

die ein Drehungsmoment  $m g x$  erzeugen. Das gesamte Drehungsmoment des Körpers wird also

$$\Sigma m g x = g M \xi$$

sein, wenn  $M$  seine Masse und  $\xi$  die Schwerpunktsabszisse ist.

Nach (17) gilt nun die Gleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = g M \xi,$$

wenn wir das Trägheitsmoment des Körpers  $\Sigma m r^2 = K$  setzen. Ist der Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsachse  $a$  und schließt sein Radiusvektor mit der  $z$ -Achse den Winkel  $\varphi$  ein, so  $\xi = a \sin \varphi$ , der Winkel mit der negativen  $z$ -Achse  $\psi = \pi - \varphi$ . Die Gleichung wird jetzt

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = - \frac{g M a}{K} \sin \psi .$$

Das ist aber genau dieselbe Gleichung, wie wir sie für das einfache Pendel in § 9 erhalten haben, wenn wir  $\frac{g M a}{K}$  durch  $\frac{g}{l}$  ersetzen. Wir nennen daher einen in dieser Weise schwingenden Körper ein physisches Pendel im Gegensatz zum einfachen oder mathematischen Pendel.

Dieses hat eine Schwingungsdauer

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} ,$$

das physische hingegen

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{g M a}} .$$

Für gleiche Schwingungsdauer muß also

$$l = \frac{K}{M a}$$

sein, weshalb man diese Größe auch die reduzierte Pendellänge nennt.

### § 33. Reversionspendel.

Wir wissen bereits, daß das Trägheitsmoment

$$K = T + M a^2$$

ist, wobei wir unter  $T$  das Trägheitsmoment bezüglich einer parallelen Achse durch den Schwerpunkt verstehen.

Die reduzierte Pendellänge ist demnach

$$l = \frac{K}{M a} = \frac{T}{M a} + a .$$

Zur Bestimmung von  $a$  erhalten wir eine quadratische Gleichung

$$(18) \quad a^2 - a l + \frac{T}{M} = 0 .$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien  $a_1$  und  $a_2$ . Ziehe ich daher um den Schwerpunkt zwei Kreise in der  $(x, z)$ -Ebene mit den Radien  $a_1$  und  $a_2$ , so hat der Körper für jeden Aufhängepunkt, der in eine solche Kreisperipherie fällt, dieselbe Schwingungsdauer, deren reduzierte Pendellänge, wie aus (18) folgt,  $l = a_1 + a_2$  ist.

Sucht man daher zwei Punkte auf, welche mit dem Schwerpunkt in einer Geraden liegen, vom Schwerpunkt verschiedene Entfernung haben, aber gleiche Schwingungsdauer besitzen, so ist der Abstand dieser Punkte die reduzierte Pendellänge. Ein solches Pendel nennt man ein Reversionspendel, und es dient dazu, die Beschleunigung der Schwere  $g$  zu ermitteln.

Kenne ich den Schwerpunkt, so ist mir auch  $a_1$  und  $a_2$ , folglich auch nach der Gleichung

$$\frac{T}{M} = a_1 a_2 ,$$

welche aus (18) folgt, das Trägheitsmoment bekannt.

### § 34. Trägheitsmoment eines Parallelepipeds.

Wir nehmen den Mittelpunkt des Parallelepipeds als Ursprung eines Koordinatensystems an, dessen Achsen parallel den Kanten des Parallelepipeds liegen. Die Drehachse falle

mit der  $y$ -Achse zusammen. Das Trägheitsmoment  $\Sigma m r^2$  ist daher gegeben durch

$$T = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \int_{-c}^{+c} \rho (x^2 + z^2) dx dy dz = \frac{8abc\rho}{3} (a^2 + c^2) \\ = \frac{M}{3} (a^2 + c^2),$$

wenn wir die Kanten des Parallelepipeds  $2a$ ,  $2b$  und  $2c$  nennen, ein Massenteilchen

$$m = \rho dx dy dz$$

setzen, wobei  $\rho$  also die Masse der Volumeinheit, die Dichte des Körpers ist, und überlegen, daß  $r^2 = x^2 + z^2$  ist.

Wir nehmen nun an, das Prisma sei sehr schmal, so daß  $a$  gegenüber  $c$  vernachlässigt werden kann. Dann ist

$$T = \frac{M c^2}{3}.$$

Für dieses Prisma suchen wir zwei Aufhängepunkte, die ein Reversionspendel ergeben. Nach Gleichung (18) haben wir

$$a^2 - la + \frac{c^2}{3} = 0,$$

$$a = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - \frac{4c^2}{3}}}{2}.$$

Ist die Gesamtlänge des Stabes  $2c = L$ , so erhalten wir für  $a$  nur dann einen möglichen Wert, wenn

$$\frac{L^2}{3} < l^2.$$

Ferner muß aber auch

$$\frac{L}{2} > a$$

sein, woraus für ein Pendel von gegebener Schwingungsdauer ganz bestimmte Grenzen der Stablänge folgen. Für ein Sekundenpendel liegen dieselben ungefähr zwischen 150 und 170 cm.

### § 35. Trägheitsmoment einer Kugel.

Der Mittelpunkt der Kugel sei der Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Wegen der allseitigen Symmetrie ist natürlich für jede Achse durch den Mittelpunkt das Trägheitsmoment dasselbe. Für eine Kugelschale vom Radius  $r$  gilt daher

$$T = \sum m (y^2 + z^2) = \sum m (x^2 + z^2) = \sum m (x^2 + y^2).$$

Alle drei Summen addiert, ergibt

$$3 T = 2 \sum m (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \sum m r^2,$$

oder

$$T = \frac{2}{3} \sum m r^2.$$

Dehnen wir dieses Resultat auf die Vollkugel aus, so können wir

$$m = 4 \pi \rho r^2 dr$$

setzen, und es wird

$$\sum m r^2 = 4 \pi \rho \int_0^r r^4 dr = \frac{4}{5} \pi \rho$$

wenn  $r$  jetzt der Radius der Vollkugel ist. Die Masse dieser Kugel ist

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho r^3.$$

Das Trägheitsmoment der Vollkugel kann daher auch geschrieben werden

$$T = \frac{2}{3} \sum m r^2 = \frac{2}{5} M r^2.$$

Hängen wir demnach eine Kugel an einem sehr dünnen Draht von der Länge  $L$  auf, dessen Masse gegenüber jener



der Kugel vernachlässigt werden kann, so wird die reduzierte Pendellänge

$$l = \frac{K}{Ma} = \frac{\frac{2}{5} M r^2 + (L+r)^2 M}{M(L+r)} = L+r + \frac{2}{5} \frac{r^2}{L+r}.$$

Es ist die reduzierte Pendellänge also größer als die Entfernung des Kugelmittelpunkts vom Aufhängepunkt, doch wird der Unterschied für eine kleine Kugel sehr gering.

### § 36. Trägheitsellipsoid.

Die Achse  $OA$  (Fig. 11) werde als Drehungsachse gewählt. Sie bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel  $\alpha$ ,

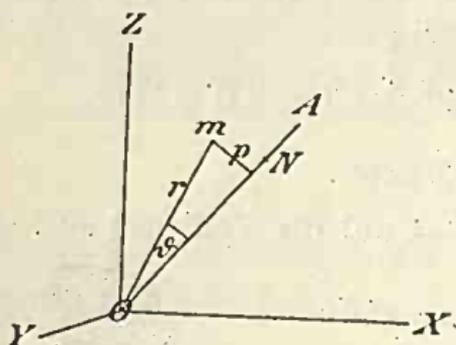


Fig. 11.

$\beta$ ,  $\gamma$ . Ein Massenpunkt  $m$  habe die Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , also  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , und es schließe  $r$  mit  $OA$  den Winkel  $\vartheta$  ein.  $p$  sei die Entfernung des Punktes  $m$  von der Drehachse. Dann ist das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} \Sigma m p^2 &= \Sigma m r^2 \sin^2 \vartheta \\ &= \Sigma m (r^2 - r^2 \cos^2 \vartheta). \end{aligned}$$

Wir wissen weiter, daß

$$\cos \vartheta = \frac{x}{r} \cos \alpha + \frac{y}{r} \cos \beta + \frac{z}{r} \cos \gamma,$$

wonach wir für das Trägheitsmoment erhalten

$$\begin{aligned} K &= \Sigma m (r^2 - r^2 \cos^2 \vartheta) \\ &= \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2 - x^2 \cos^2 \alpha - y^2 \cos^2 \beta - z^2 \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta). \end{aligned}$$

Bedenken wir noch, daß

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

also

$$x^2 - x^2 \cos^2 \alpha = x^2 \cos^2 \beta + x^2 \cos^2 \gamma$$

usw. ist, so können wir das Trägheitsmoment leicht auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} K &= \cos^2 \alpha \sum m (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta \sum m (z^2 + x^2) \\ &+ \cos^2 \gamma \sum m (x^2 + y^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m y z \\ &- 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum m z x - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m x y. \end{aligned}$$

Wir wollen nun von  $O$  aus auf der Achse  $OA$  die Strecke

$$ON = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

abschneiden. Es ist daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{ON}^2} &= A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2 D \cos \beta \cos \gamma \\ &- 2 E \cos \gamma \cos \alpha - 2 F \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Wir haben hier  $\sum m (y^2 + z^2) = A$  usw. gesetzt.

Für  $N$  seien die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$ , also  $\overline{ON} \cos \alpha = \xi$ , usw. Dann folgt für unsere Gleichung, wenn wir beide Seiten mit  $\overline{ON}^2$  multiplizieren,

$$1 = A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 - 2 D \eta \zeta - 2 E \zeta \xi - 2 F \xi \eta.$$

Das ist die Gleichung eines Ellipsoids. Ein Hyperboloid kann sie nicht darstellen, weil sonst auch Trägheitsmomente von beliebig kleiner Größe vorhanden sein müßten, was ein Widerspruch wäre.

Fallen die Koordinatenachsen mit den Achsen des Ellipsoids zusammen, so erhalten wir eine einfachere Gleichung, welche nur die Glieder mit  $\xi^2, \eta^2$  und  $\zeta^2$  enthält.

Für einen jeden Körper ist also für jede beliebige Drehungsachse durch obiges Ellipsoid das Trägheitsmoment gegeben, weshalb man es auch das Trägheitsellipsoid nennt. Dasselbe kann für spezielle Fälle natürlich auch ein

Rotationsellipsoid oder eine Kugel sein. Die drei Achsen des Ellipsoids nennt man die Hauptachsen des Trägheitsmoments oder kürzer die Hauptachsen der Trägheit.

§ 37. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt — Eulersche Gleichungen.

Wir machen den festen Punkt, um welchen die Drehung des Körpers stattfinden soll, zum Koordinatenursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Winkelgeschwindigkeit  $w$  habe die Komponenten  $p, q, r$ . Die Bewegung, welche ein Punkt infolge einer kleinen Drehung um die  $x$ -Achse macht, ergibt sich leicht aus Fig. 12. In derselben ist die  $x$ -Achse senkrecht zur Bildebene gedacht. In der Zeit  $dt$  gelange der Punkt  $M$  nach  $M'$ . Diesen Weg zerlegen wir in die Komponenten  $MP$  parallel zur  $y$ -Achse

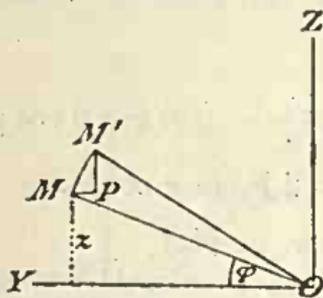


Fig. 12.

und  $PM'$  parallel zur  $z$ -Achse. Nun ist

$$\overline{MP} = -\overline{MM'} \cdot \sin \varphi = -\overline{OM} p dt \sin \varphi = -z p dt,$$

da  $\overline{OM} \sin \varphi = z$  die Ordinate des Punktes  $M$  ist. Gleichermassen ergibt sich parallel zur  $z$ -Achse

$$\overline{PM'} = y p dt.$$

Auf analoge Weise können wir die Drehungen um die  $y$ - und  $z$ -Achse in Bewegungen parallel zu den drei Achsen zerlegen.

Infolge sämtlicher drei Drehungen wird also der Punkt eine Geschwindigkeit  $\frac{dx}{dt}$  parallel zur  $x$ -Achse usw. erlangen,

welche wir leicht erhalten, wenn wir den gesamten Weg parallel zur Achse durch die Zeit  $dt$  dividieren. Das Ergebnis ist

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry,$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - pz,$$

$$\frac{dz}{dt} = py - qx.$$

Erinnern wir uns nun, daß das Drehungsmoment um die  $x$ -Achse durch  $Zy - Yz$  (§ 30) gegeben ist, wobei

$$Y = \sum m \frac{d^2y}{dt^2} \text{ und } Z = \sum m \frac{d^2z}{dt^2},$$

so können wir die Bewegungsgleichungen des Körpers finden, wenn wir unsere

Werte für  $\frac{dx}{dt}$  usw. benutzen.

Wir bilden vorerst

$$\begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= py^2 - qxy - rxz + pz^2 \\ &= p(y^2 + z^2) - x(qy + rz) \\ &= p(x^2 + y^2 + z^2) - x(px + qy + rz) \\ &= p\rho^2 - x(px + qy + rz), \end{aligned}$$

wobei  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$  gesetzt wurde.

Durch Differentiation dieser Gleichung nach  $t$  erhalten wir nun

$$y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$= \frac{dp}{dt} \rho^2 - \frac{dx}{dt} (px + qy + rz) - x \left( x \frac{dp}{dt} + y \frac{dq}{dt} + z \frac{dr}{dt} \right).$$

Das Glied

$$p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} + r \frac{dz}{dt} = 0 .$$

Es sind nämlich  $\frac{p}{w}$ ,  $\frac{q}{w}$ ,  $\frac{r}{w}$  die Richtungskosinus der Drehungsachse, und das vernachlässigte Glied stellt demnach nichts anderes als die mit  $w$  multiplizierte Geschwindigkeit parallel dieser Achse dar. Eine solche Geschwindigkeit ist aber nicht vorhanden.

Wir setzen nun anstatt  $\frac{dx}{dt}$  wieder seinen Wert  $qz - ry$  ein, multiplizieren aus, summieren über sämtliche Massenpunkte und lassen die Koordinatenachsen mit den drei Hauptträgheitsachsen zusammenfallen. Für diesen Fall werden alle Glieder, welche die Koordinaten nicht als Quadrate enthalten, gleich Null, und es bleibt uns nur

$$\Sigma m \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \frac{dp}{dt} \Sigma m (y^2 + z^2) + qr \Sigma m (y^2 - z^2) .$$

Nennen wir nun die Drehungsmomente um die drei Achsen  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , die Trägheitsmomente  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , so erhalten wir die drei Gleichungen

$$(19) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = L , \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = M , \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = N . \end{cases}$$

Wir können nämlich  $\Sigma m (y^2 - z^2) = \Sigma m (x^2 + y^2 - x^2 - z^2) = C - B$  setzen.

Diese Gleichungen wurden von Euler aufgestellt. Sie setzen voraus, daß die Hauptträgheitsachsen mit den Ko-

ordinatenachsen zusammenfallen. Das wird aber, wenn die Drehungsachse mit der Zeit ihre Lage ändert, im allgemeinen nicht der Fall sein. Dem können wir jedoch ausweichen, wenn wir einfach nach dem Vorgang Eulers während der Rotation des Körpers das Koordinatensystem sich ebenfalls so bewegen lassen, daß die aufgestellte Bedingung erhalten bleibt.

### § 38. Freie Achse.

Ein Körper drehe sich sehr rasch um die  $z$ -Achse, habe hingegen sehr geringe Winkelgeschwindigkeiten um die  $x$ - und  $y$ -Achse. Es ist also  $r$  gegen  $p$  und  $q$  sehr groß, so daß wir das Produkt  $p q$  gegen  $r$  vernachlässigen können. Ferner soll an unserm Körper kein Drehungsmoment angreifen, also  $L = M = N = 0$  sein. Wir erhalten dann aus den Gleichungen (19)

$$C \frac{dr}{dt} = 0,$$

$$r = \text{const.}$$

Setzen wir nun

$$\frac{C - B}{A} r = \lambda, \quad \frac{A - C}{B} r = \mu,$$

so ergibt sich weiter

$$\frac{dp}{dt} + \lambda q = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} + \mu p = 0.$$

Differenzieren wir die erste Gleichung nach  $t$ , so

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \lambda \frac{dq}{dt} = 0,$$

und für  $\frac{dq}{dt}$  seinen Wert aus der zweiten Gleichung eingesetzt

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \lambda \mu p.$$

Nach dieser Gleichung ist  $p$  eine periodische Funktion der Zeit, wenn  $\lambda \mu$  negativ ist, eine exponentielle, wenn  $\lambda \mu$  positiv (§§ 9, 10). In letzterem Fall wird unsere Gleichung aber wertlos, da wir sie ja unter der Bedingung abgeleitet haben, daß  $p$  immer klein bleibe. Wir haben also lediglich zu untersuchen, wann  $\lambda \mu = \frac{(C - B)(A - C)r^2}{AB}$  negativ ist. Dies trifft in zwei Fällen zu, entweder wenn  $C > \frac{A}{B}$ , oder wenn  $C < \frac{A}{B}$  ist. Das eine Mal ist also die Rotationsachse die größte Hauptachse der Trägheit, das andere Mal die kleinste.

In diesen beiden Fällen kann ein rasch rotierender Körper kleine Stöße und sonstige Störungen erleiden, ohne daß dadurch seine Rotationsachse eine wesentliche Lagenänderung erleidet, sondern sie macht nur kleine Schwankungen um ihre ursprüngliche Lage. Ein solcher Körper behält also seine Lage im wesentlichen bei; wir sagen, er rotiert um eine freie Achse.

Jeder Rotationskörper hat als Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid. Wir können daher, wenn wir die Achse des Körpers als Drehungsachse mit der Winkelgeschwindigkeit  $r$  wählen,  $A = B$  setzen und erhalten strenge

$$C \frac{dr}{dt} = 0.$$

Die Achse eines solchen Körpers können wir also nach Belieben drehen und wenden, ohne seine Winkelgeschwindigkeit zu verändern.

## § 39. Kreiselbewegung — Präzession — Nutation.

Ein rechtwinkeliges Koordinatensystem  $OXYZ$  (Fig. 13) legen wir fest, so daß die  $Z$ -Achse vertikal steht.  $O$  sei der Unterstützungspunkt des Kreisels. Er drehe sich um die Achse  $OC$ , welche die eine Achse des beweglichen Koordinatensystems sein und mit  $OZ$  den Winkel  $\vartheta$  einschließen soll.  $OA$  und  $OB$  seien die beiden andern Achsen. Die Gerade, in welcher die  $AB$ -Ebene die  $XY$ -Ebene schneidet,

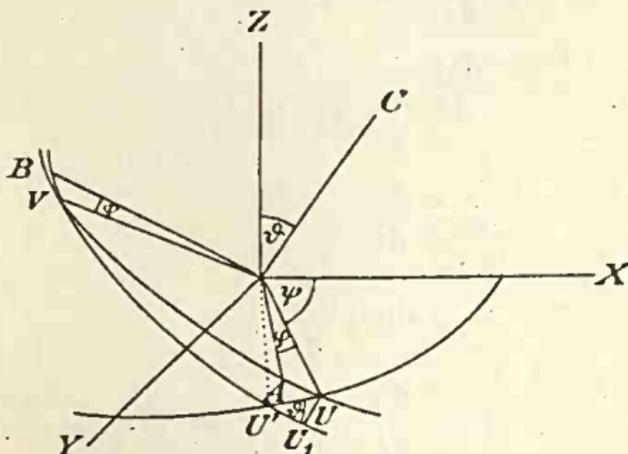


Fig. 13.

nennen wir  $OU$ , eine zweite Gerade senkrecht auf  $OU$  in der  $AB$ -Ebene  $OV$ .  $OU$  bilde mit  $OX$  den Winkel  $\psi$ , mit  $OA$  den Winkel  $\varphi$ ; diesen Winkel bildet auch  $OV$  mit  $OB$ . Es gehören nun zu den Achsen  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  die Winkelgeschwindigkeiten des Kreisels  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ; zu den Achsen  $OU$  und  $OV$  die Winkelgeschwindigkeiten  $u$  und  $v$ .

Bei einer Drehung um  $OC$  ändert sich in der Zeit  $dt$  bloß der Winkel  $\varphi$  um  $r dt$ , bei der Drehung um  $OU$  nur der Winkel  $\vartheta$  um  $u dt$ , bei der Drehung um  $OV$  der Winkel  $\psi$  um

$$\overline{UU'} = \frac{\overline{UU_1}}{\sin \vartheta} = \frac{v dt}{\sin \vartheta},$$

der Winkel  $\varphi$  um

$$-\overline{U_1 U'} = -\overline{U U'} \cos \vartheta = -\frac{v dt}{\sin \vartheta} \cos \vartheta.$$

Wir erhalten demnach folgende Winkelgeschwindigkeiten:

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{v \cos \vartheta}{\sin \vartheta},$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = u,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v}{\sin \vartheta},$$

oder

$$u = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$v = \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta.$$

Die Winkelgeschwindigkeiten  $p$  und  $q$  setzen sich bloß aus den Winkelgeschwindigkeiten  $u$  und  $v$  zusammen, welche um Achsen in derselben Ebene  $O U A V B$  vorhanden sind. Danach ist

$$p = u \cos \varphi + v \sin \varphi,$$

$$q = v \cos \varphi - u \sin \varphi.$$

Wir bilden nun die kinetische Energie  $K$  unseres Kreisel. Sie ist gleich der Summe der Energien um drei aufeinander senkrechte Achsen (§§ 13, 29) und wird dargestellt durch das halbe Produkt aus dem Trägheitsmoment in das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, also

$$K = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2).$$

Wir setzen voraus, der Kreisel sei ein Rotationskörper, somit  $A = B$  und

$$K = \frac{1}{2} A (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2 = \frac{1}{2} A (u^2 + v^2) + \frac{1}{2} C r^2.$$

Führen wir die Winkel  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  ein, so wird

$$K = \frac{A}{2} \left[ \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} C r^2.$$

Auf unsern Kreisel wirke nur die Schwerkraft. Dieselbe erzeugt ein Drehungsmoment  $M g a \sin \vartheta$ , wenn  $M$  die Masse,  $a$  der Abstand des Schwerpunkts vom Unterstützungspunkt  $O$  des Kreisels ist.

Die geleistete Arbeit muß immer gleich der Änderung der kinetischen Energie sein, also

$$dK = M g a \sin \vartheta d\vartheta,$$

was integriert

$$K = C_1 - M g a \cos \vartheta = C_1 - D \cos \vartheta$$

ergibt, wenn wir  $M g a = D$  einführen. Setzen wir den Wert für  $K$  ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{2} A \left[ \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} C r^2 = C_1 - D \cos \vartheta$$

und da  $\frac{1}{2} C r^2$  ebenfalls konstant ist, indem wir ja kein Drehungsmoment um die  $OC$ -Achse haben, so wird unsere Gleichung

$$(20) \quad \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = C_2 - \frac{2D}{A} \cos \vartheta.$$

Die Schwere kann natürlich kein Drehungsmoment um eine Vertikalachse hervorbringen. Es muß deshalb die Komponente des Drehimpulses (§ 29) des Kreisels bezügl. einer Vertikalachse eine konstante Größe bleiben. Für unser Beispiel ergibt dies

$$C r \cos \vartheta + A v \sin \vartheta = C_3,$$

und für  $v$  seinen obigen Wert wieder eingesetzt,

$$(21) \quad A \sin^2 \vartheta \frac{d\psi}{dt} + C r \cos \vartheta = C_3,$$

Für  $t = 0$  bilde die Kreiselachse mit der  $Z$ -Achse den Winkel  $\vartheta_0$ . Ferner sei  $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$  und  $\frac{d\psi}{dt} = 0$ . Für diese Werte wird Gleichung (20)

$$C_2 = \frac{2D}{A} \cos \vartheta_0$$

und Gleichung (21)

$$C_3 = C r \cos \vartheta_0.$$

Mit Einführung dieser Ausdrücke für die Konstanten  $C_2$  und  $C_3$  in die Gleichungen (20) und (21) erhalten wir nun

$$(22) \quad \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \frac{2D}{A} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta),$$

$$(23) \quad \sin^2 \vartheta \frac{d\psi}{dt} = \frac{C r}{A} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta).$$

Aus Gleichung (22) folgt, daß beständig  $\cos \vartheta_0 > \cos \vartheta$  sein muß, da alle übrigen Größen dieser Gleichung positiv sind. Damit folgt aber nach (23) auch für  $\frac{d\psi}{dt}$  ein positiver Wert, d. h. die Achse des Kreisels dreht sich beständig im selben Sinn um die Vertikalachse. Aus (22) und (23) können wir leicht finden

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \pm \sqrt{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \left[ \frac{2D}{A} - \frac{C^2 r^2}{A^2 \sin^2 \vartheta} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \right]}.$$

Es wird demnach mit wachsender Zeit  $\vartheta$  zuerst zunehmen, bis es einen gewissen Wert erreicht hat, bei welchem  $\frac{d\vartheta}{dt}$  gleich Null, weiterhin dann negativ wird. Das negative

Vorzeichen der Wurzel springt wieder in das positive um, sobald  $\vartheta$  wieder  $\vartheta_0$  geworden ist.  $\vartheta$  ist daher eine periodische Funktion der Zeit. Dasselbe finden wir aber dann auch für den Winkel  $\psi$ . Unsere Kreiselachse macht zwei Bewegungen. Die Winkelbewegung  $\frac{d\vartheta}{dt}$  nennen wir die Nutation,  $\frac{d\psi}{dt}$  die Präzession des Kreisels.

Ist der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt, so ist  $a=0$ , also auch  $D=0$ , dann muß konstant  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$  und  $\frac{d\psi}{dt} = 0$  bleiben. Ein solcher Kreisel zeigt weder Präzession noch Nutation im obigen Sinn. In gleicher Weise kann  $\vartheta$  von  $\vartheta_0$  um so weniger verschieden werden, je größer die Winkelgeschwindigkeit  $r$  des Kreisels ist. Wir können daher bei einem rasch rotierenden Kreisel zwar die Präzession, nicht aber die Nutation beobachten.

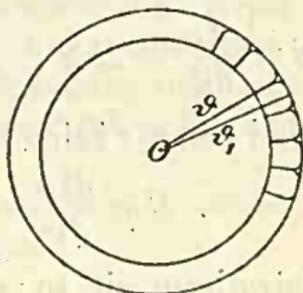


Fig. 14.

Bilden wir durch Division von  $\frac{d\vartheta}{dt}$  durch  $\frac{d\psi}{dt}$  den Ausdruck  $\frac{d\vartheta}{d\psi}$ , so erhalten wir die Gleichung der Bahn, welche der Schwerpunkt beschreibt. Projizieren wir dieselbe auf eine Horizontalebene, so nimmt sie, wie wir aus der Diskussion der Gleichung leicht erkennen, die in Fig. 14 wiedergegebene Gestalt an.

Unsere Erde ist ebenfalls ein Kreisel, und da die Anziehungskraft der Sonne, weil die Erde keine vollkommene Kugel ist, ihren Angriffspunkt nicht in deren Schwerpunkt hat, so zeigt auch die Erdachse die bekannte Erscheinung der Präzession und Nutation.

## Mechanik nichtstarrer Punktsysteme.

### § 40. Prinzip der Erhaltung des Schwerpunkts.

Wir erwähnten bereits, daß wir alle Lehrsätze, welche wir für einen Massenpunkt gefunden haben, ohne weiteres auf ein System von Punkten anwenden können, falls wir nur für jeden einzelnen auch alle auf ihn wirkenden Kräfte in unseren Formeln berücksichtigen (§ 20). Wir werden daher die Bewegungsgleichungen eines Punktsystems schreiben können

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma X, \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma Y, \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Sind nun gar keine Kräfte vorhanden, so ist

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Integrieren wir, so resultiert

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma m x = M \frac{d\xi}{dt} = C.$$

Ähnliche Gleichungen ergeben sich für die übrigen Koordinaten. Wir sehen daraus, daß die Geschwindigkeit und Richtung des Schwerpunkts (§ 21) unseres Systems völlig unverändert bleibt, sobald keine Kräfte auf die Punkte einwirken.

Wir können aber diesen Satz noch erweitern.  $\Sigma X$  usw. wird nämlich ebenfalls gleich Null, wenn nur innere Kräfte vorhanden sind, d. h. Kräfte, welche die Punkte des Systems aufeinander ausüben. Die Komponenten einer jeden solchen Kraft kommen dann immer zweimal, einmal positiv und einmal negativ, in den Summen vor, sie tilgen sich also gegenseitig. Der Satz, daß sich der Schwerpunkt

eines Systems, auf welches keine äußeren Kräfte einwirken, mit konstanter Richtung und Geschwindigkeit bewegt, nennt man das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunkts.

Dasselbe läßt sich auf unzählige bekannte Bewegungserscheinungen anwenden. Ist der Schwerpunkt von vornherein in Ruhe, so bleibt er es auch weiterhin. Feuere wir aus einem sehr leicht beweglichen Geschütz ein Geschöß ab, so erhält das Geschütz den sogenannten Rückstoß. Der gemeinsame Schwerpunkt von Geschöß und Geschütz bleibt bei vollständig freier Beweglichkeit beider vor und nach dem Schuß unbeweglich an derselben Stelle. Explodiert ein fliegendes Geschöß, so bewegt sich der Schwerpunkt sämtlicher Sprengstücke bei Vernachlässigung des Luftwiderstands genau so weiter, als es das unversehrte Geschöß getan hätte.

Auf dem Satz der Erhaltung des Schwerpunkts basieren alle sogenannten Reaktionserscheinungen.

#### § 41. Prinzip der Erhaltung der Flächenräume.

Das Drehungsmoment, welches ein Punktsystem um die  $x$ -Achse eines Koordinatensystems erhält, läßt sich durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \Sigma (Z y - Y z) &= \Sigma m \left( \frac{d^2 z}{dt^2} y - \frac{d^2 y}{dt^2} z \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Sigma m \left( \frac{dz}{dt} y - \frac{dy}{dt} z \right) \end{aligned}$$

darstellen (§ 30). Sind keine äußeren Kräfte vorhanden, so sind nach dem vorigen Paragraphen die Komponenten  $Y$  und  $Z$  gleich Null, daher ist

$$\Sigma m \left( \frac{dz}{dt} y - \frac{dy}{dt} z \right) = C.$$

$\frac{dz}{dt} y - \frac{dy}{dt} z$  ist nichts anderes als die doppelte Fläche, welche der Radiusvektor in der Zeiteinheit beschreibt, oder kurz die doppelte Flächengeschwindigkeit. Analog nennen wir den Ausdruck  $m \left( \frac{dz}{dt} y - \frac{dy}{dt} z \right)$  das doppelte Flächenmoment des Punktes  $m$  bezügl. der  $X$ -Achse (§ 15). Wir erhalten demnach den Satz, daß die Summe aller Flächenmomente beim Fehlen äußerer Kräfte eine konstante Größe ist. Man nennt dies das Prinzip der Erhaltung der Flächenräume.

Ein Beispiel dafür lernten wir in der Planetenbewegung kennen. Infolge der Erhaltung der Flächenräume fällt eine Katze immer auf die Füße. Indem sie nämlich während des Fallens mit den Füßen eine drehende Bewegung beschreibt, zwingt sie ihren Körper, sich entgegengesetzt zu drehen.

#### § 42. Lagranges Bewegungsgleichungen zweiter Art — generalisierte Koordinaten.

Nach dem Prinzip von d'Alembert gilt für ein System von Massenpunkten folgende Gleichung:

$$\Sigma \left[ \left( X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left( Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0$$

(§ 18). Wir führen nun anstatt der Koordinaten  $x, y, z$  beliebige andere Größen, die sogenannten generalisierten Koordinaten  $\varphi, \psi, \dots$  ein, welche mit den ursprünglichen Koordinaten durch Gleichungen verbunden sind. Die Zahl der generalisierten Koordinaten muß natürlich gleich der Zahl der rechtwinkligen sein, da die Bewegung eines Systems

ja immer durch eine bestimmte Minimalzahl von Koordinaten gegeben ist, die dann voneinander völlig unabhängig sind. Man pflegt deshalb diese Zahl auch die Zahl der Freiheitsgrade des Systems zu nennen (Bd. V, § 14). Es sei also

$$x = f(\varphi, \psi \dots),$$

$$y = f_1(\varphi, \psi \dots)$$

usw. Danach wird

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial x}{\partial \psi} \delta \psi + \dots$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für  $\delta y$  und  $\delta z$ .

Wir können demnach folgende Gleichung bilden:

$$\begin{aligned} m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta \varphi \right. \\ &+ \left. \frac{\partial x}{\partial \psi} \delta \psi + \dots \right) + m \frac{d^2 y}{dt^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial y}{\partial \psi} \delta \psi + \dots \right) + \dots \\ &= m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \delta \varphi + \dots \\ &= m \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \delta \varphi - m \left( \frac{dx}{dt} \frac{\partial^2 x}{dt \partial \varphi} \right. \\ &+ \left. \frac{dy}{dt} \frac{\partial^2 y}{dt \partial \varphi} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial^2 z}{dt \partial \varphi} \right) \delta \varphi + \dots \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

usw., so

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \dot{\psi} + \dots,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}.$$

Es ist demnach

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} \right),$$

daher weiter

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left( \frac{m v^2}{2} \right),$$

da ja

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$$

ist, wenn wir unter  $v$  die Geschwindigkeit des Punktes  $m$  verstehen.

Für die lebendige Kraft  $\frac{m v^2}{2}$  wollen wir den Buchstaben  $L$  einführen. Man sieht leicht ein, daß

$$m \left( \frac{dx}{dt} \frac{\partial^2 x}{dt \partial \varphi} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial^2 y}{dt \partial \varphi} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial^2 z}{dt \partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{m v^2}{2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

ist. Mit Berücksichtigung alles dessen können wir unsere obige Gleichung demnach schreiben:

$$m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) \delta \varphi + \dots$$

Ähnliche Gleichungen ergeben sich natürlich für die übrigen Massenpunkte.

Führen wir die potentielle Energie  $V$  des Systems als Funktion von  $\varphi, \psi \dots$  ein, so läßt sich die Arbeit, welche die Kräfte bei einer virtuellen Verschiebung leisten (§ 14),

$$\text{auch darstellen durch } -\delta V = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta \varphi - \frac{\partial V}{\partial \psi} \delta \psi - \dots$$

und es gilt die Gleichung

$$\sum m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta \varphi - \frac{\partial V}{\partial \psi} \delta \psi - \dots$$

Beziehen wir die kinetische Energie  $L$  auf sämtliche Massenpunkte, so erhalten wir nach der Überlegungsweise, die im § 17 benützt wurde, schließlich die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0,$$

.....

die man die Bewegungsgleichungen von Lagrange zweiter Art nennt.

Die Kräfte, die auf die einzelnen Massenpunkte wirken, lassen sich darstellen durch  $X = - \frac{\partial V}{\partial x} \dots$ . Man pflegt daher die Größen  $-\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ ,  $-\frac{\partial V}{\partial \psi}$ , ... auch die generalisierten Kräfte zu nennen. Analog spricht man von generalisierten Geschwindigkeiten ( $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$ , ...) usw., die natürlich im allgemeinen nicht Kräfte, Geschwindigkeiten usw. im gewöhnlichen Sinne sind.

§ 43. Gleichungen für die relative Bewegung eines Körpers auf der Erdoberfläche.

Ein Punkt der Erdachse sei der Ursprung eines festen Koordinatensystems  $O\xi\eta\zeta$ , die  $\xi$ -Achse gehe durch den Südpol. Es dreht sich also die Erde um diese Achse im positiven Sinn. Die Koordinaten eines Punktes  $M$  bezogen auf dieses feste Koordinatensystem seien  $\xi, \eta, \zeta$ . Fest mit der Erde verbunden denken wir uns jetzt ein zweites Koordinatensystem  $Ox'y'z'$ , welches mit dem ersten den Ursprung gemeinsam hat. Ferner fällt die  $y'$ -Achse mit der  $\xi$ -Achse zusammen, die  $x'$ -Achse wird hingegen zu einer bestimmten Zeit mit der  $\eta$ -Achse einen bestimmten Winkel  $\alpha$  einschließen, welchen auch die  $z'$ -Achse mit der  $\zeta$ -

Achse bildet.  $\alpha$  ändert sich beständig mit der Drehung der Erde. Es ist  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$  nichts anderes als die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung. Auf das neue Koordinatensystem bezogen wird also

$$\xi = x' \cos \alpha + z' \sin \alpha,$$

$$\eta = y',$$

$$\zeta = z' \cos \alpha - x' \sin \alpha.$$

Wir verschieben nun das bewegliche Koordinatensystem parallel zu sich selbst in der Richtung der  $z'$ -Achse, bis der Ursprung auf die Erdoberfläche zu liegen kommt. Er hat dabei die Strecke  $p$  zurückgelegt; und wir wollen nun die neue Lage des Koordinatensystems mit  $o x'' y'' z''$  bezeichnen. Die neuen Koordinaten  $x'', y'', z''$  des Punktes  $M$  stehen also mit den früheren in folgender Beziehung:

$$x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z'' + p,$$

$$\xi = x'' \cos \alpha + (p + z'') \sin \alpha,$$

$$\eta = y'',$$

$$\zeta = (p + z'') \cos \alpha - x'' \sin \alpha.$$

Wir drehen jetzt das ganze Koordinatensystem um die  $x''$ -Achse, bis die  $z''$ -Achse vertikal steht. Der Winkel  $\psi$ , um welchen zu drehen ist, ist demnach nichts anderes als die nördliche Breite des Ursprungs unseres Koordinatensystems. Die jetzige Lage sei  $o x y z$  mit den zugehörigen Koordinaten  $x, y, z$ , welche also folgenden Bedingungen unterliegen. Es ist

$$x'' = x, \quad y'' = y \cos \psi - z \sin \psi, \quad z'' = z \cos \psi + y \sin \psi,$$

folglich

$$\xi = x \cos \alpha + (p + z \cos \psi + y \sin \psi) \sin \alpha,$$

$$\eta = y \cos \psi - z \sin \psi,$$

$$\zeta = (p + z \cos \psi + y \sin \psi) \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Aus diesen Gleichungen wollen wir nun

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

bilden.

Die Winkelgeschwindigkeit unserer Erde ist so klein, daß wir das Quadrat derselben  $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \omega^2$  in unserer Formel vernachlässigen können. Damit vernachlässigen wir allerdings auch die durch die Erdrotation auftretenden Fliehkräfte, die jedoch durch die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt wieder aufgehoben werden. Mit Rücksicht darauf erhalten wir, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} (p + z \cos \psi + y \sin \psi) \frac{d\alpha}{dt} \\ - 2 x \left(\frac{dz}{dt} \cos \psi + \frac{dy}{dt} \sin \psi\right) \frac{d\alpha}{dt}.$$

Mit Zuhilfenahme dieser Gleichung für  $v^2$  bilden wir nun die Bewegungsgleichungen von Lagrange, indem wir als Koordinaten die  $x, y, z$  einführen. Für diesen Fall ist  $-\frac{\partial V}{\partial x} = X$  die Kraft nach der  $x$ -Achse usw. Wir erhalten demnach

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = X$$

usf., wenn wir  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$  setzen. Wir geben der Einfachheit halber unserem Punkt  $M$  die Masse Eins. Seine lebendige Kraft ist also  $L = \frac{v^2}{2}$ . Beachten wir noch, daß  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$  ist, da ja die Rotation der Erde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  vor sich geht, so können wir folgende

Gleichungen bilden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = X = \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \omega \left( \frac{dz}{dt} \cos \psi + \frac{dy}{dt} \sin \psi \right),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = Y = \frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \omega \frac{dx}{dt} \sin \psi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = Z = \frac{d^2 z}{dt^2} - 2 \omega \frac{dx}{dt} \cos \psi.$$

#### § 44. Fall und Wurf mit Berücksichtigung der Erddrehung.

Auf unseren Massenpunkt wirke nur die Schwerkraft; dann ist  $X = Y = 0$ ,  $Z = -g$ . Die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Bewegungsgleichungen werden demnach

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -2 \omega \cos \psi \frac{dz}{dt} - 2 \omega \sin \psi \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 \omega \sin \psi \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + 2 \omega \cos \psi \frac{dx}{dt}. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\frac{dx}{dt} = -2 \omega \cos \psi \cdot z - 2 \omega \sin \psi \cdot y + a,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \omega \sin \psi \cdot x + b,$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + 2 \omega \cos \psi \cdot x + c.$$

Führen wir nun diese Ausdrücke in die obigen Gleichungen ein und vernachlässigen wir wieder alle Glieder

mit  $\omega^2$ , so

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \cos \psi (c - gt) - 2\omega \sin \psi \cdot b,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2a\omega \sin \psi,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2a\omega \cos \psi.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} = -2\omega \cos \psi \left( ct - \frac{gt^2}{2} \right) - 2\omega \sin \psi \cdot bt + a_1,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2a\omega \sin \psi \cdot t + b_1,$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + 2a\omega \cos \psi \cdot t + c_1,$$

was abermals integriert ergibt:

$$x = -\omega \cos \psi \left( ct^2 - \frac{gt^3}{3} \right) - \omega \sin \psi \cdot bt^2 + a_1 t + a_2,$$

$$y = a\omega \sin \psi \cdot t^2 + b_1 t + b_2,$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + a\omega \cos \psi \cdot t^2 + c_1 t + c_2.$$

Es sei nun für  $t = 0$  der Körper in der Höhe  $h$  in relativer Ruhe, also  $x = y = 0$ ,  $z = h$ , folglich  $a_2 = b_2 = a_1 = b_1 = c_1 = b = c = 0$ ,  $c_2 = h$ ,  $a = 2\omega \cos \psi \cdot h$ . Dann bleibt von unseren Gleichungen nur

$$x = \omega \cos \psi \cdot \frac{gt^3}{3},$$

$$y = 0,$$

$$z = h - \frac{gt^2}{2}$$

übrig, indem wir die Glieder mit  $\omega^2$  wieder vernachlässigen. Wir haben also die gewöhnlichen Fallgesetze, jedoch fällt der Körper nicht vertikal, sondern er erhält eine kleine Abweichung nach Osten, da ja die  $x$ -Achse nach Osten gerichtet ist.

Werfen wir den Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach oben, so gestalten sich, wie leicht zu finden, unsere Gleichungen folgendermaßen:

$$x = -\omega \cos \psi \left( c t^2 - \frac{g t^3}{3} \right),$$

$$y = 0,$$

$$z = c t - \frac{g t^2}{2}.$$

Nach der Zeit  $t = \frac{2c}{g}$  kommt der Körper wieder auf die Erde. Dann ist  $x = -\frac{1}{3} \omega c t^2 \cos \psi$ , d. h. der Körper fällt westlich vom Aufstiegort nieder.

Multiplizieren wir die Gleichungen (24) der Reihe nach mit  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  und addieren sie, so ergibt dies

$$\frac{d \left( \frac{v^2}{2} \right)}{dt} = -g \frac{dz}{dt},$$

d. h. wir erhalten für das Energieprinzip dieselbe Gleichung, als wäre gar keine Erdrotation vorhanden (§ 14). Es läßt sich also durch keinen Mechanismus, der auf der Erde selbst ruht, die lebendige Kraft der Erddrehung in Arbeit umsetzen.

§ 45. Horizontalbewegung mit Berücksichtigung der Erddrehung.

Wir wollen jetzt bloß die Bewegung in einer Horizontalebene betrachten. Wir setzen deshalb  $\frac{dz}{dt} = 0$ . Es bleibt uns dann von den Gleichungen (24) nur

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -2 \omega \sin \psi \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 \omega \sin \psi \cdot \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

Bewegt sich der Punkt nach Osten, so ist  $\frac{dx}{dt}$  positiv, er erhält eine Beschleunigung nach Süden, d. h. er weicht von der geraden Bahn nach rechts ab. Ist  $\frac{dx}{dt}$  negativ, so erfolgt eine Ablenkung nach Norden, also wiederum nach rechts. Dasselbe geschieht bei der Bewegung nach Süden und Norden, wobei  $\frac{dy}{dt}$  positiv beziehlich negativ ist. Es erlangt dadurch der Punkt eine Beschleunigung nach Westen, beziehungsweise nach Osten.

Wir haben also das Resultat, daß, wohin immer sich ein Körper auf der nördlichen Halbkugel bewegt, er infolge der Erddrehung eine Ablenkung nach rechts erhält; auf der südlichen Halbkugel ist  $\psi$  negativ, daher die Ablenkung nach links.

Das hat einen gewissen Einfluß auf die Bewegung der Winde. Auch will man damit erklären, daß das eine Ufer der Flüsse mehr ausgewaschen wird als das andere.

## § 46. Foucaults Pendelversuch.

Aus den Gleichungen (25) wollen wir folgende bilden:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \omega \sin \varphi \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right),$$

oder integriert

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = (x^2 + y^2) \omega \sin \varphi + C.$$

Wir haben hier wieder  $\frac{dz}{dt} = 0$  angenommen. Desgleichen soll  $C = 0$ , d. h. eine Flächengeschwindigkeit bezogen auf den als ruhendes System angenommenen Fixsternhimmel nicht vorhanden sein.

Setzen wir  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , so können wir die doppelte Flächengeschwindigkeit auch folgendermaßen darstellen:

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \rho^2 \omega \sin \varphi.$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \sin \varphi.$$

Das heißt: können wir ein System unabhängig von der Erddrehung fixieren, so scheint dieses sich mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega \sin \varphi$  um eine Vertikalachse zu drehen.

Eine solche fixierte Lage hat z. B. die Schwingungsebene eines Pendels. Dieselbe scheint sich also im Lauf der Zeit zu drehen, und es wies ja Foucault bekanntlich auf diese Weise die Erdrotation nach.

## Die spezielle Relativitätstheorie.

### § 47. Die Galileitransformationen.

Wir denken uns zwei rechtwinklige Koordinatensysteme  $S$  und  $S'$  (Fig. 15). Die  $x$ -Achse des Systems  $S$  falle mit der  $x'$ -Achse des Systems  $S'$  zusammen.  $S'$  bewege sich relativ zu  $S$  mit der Geschwindigkeit  $v$  in der Richtung der  $x$ -Achse. Ein Punkt habe im System  $S$  die Koordinaten  $x, y, z$ , analog  $x', y', z'$  im System  $S'$ . Zur Zeit  $t = 0$  falle  $O'$  mit  $O$  zusammen.

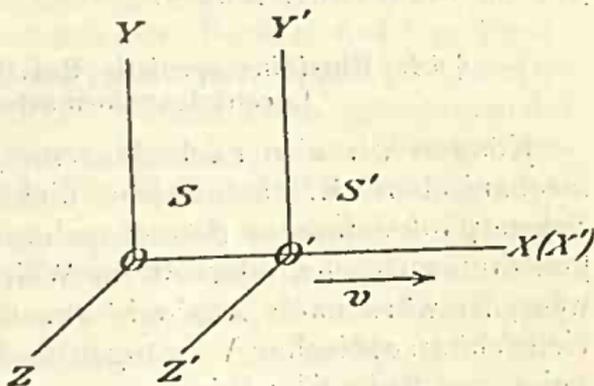


Fig. 15.

Für den Punkt  $O'$  ist dann  $x = vt, y = z = x' = y' = z' = 0$ . Für jeden andern Punkt ist

$$(26) \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt im System  $S$  lauten

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z$$

(§ 6). Nun folgt aber aus den Gleichungen (26), den sogenannten Galileitransformationen, daß

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

ist, so daß für das System  $S'$  genau dieselben Gesetze der Mechanik gelten wie für das System  $S$ . Wir können daher

an den Bewegungsvorgängen in  $S'$  nicht erkennen, ob es relativ in Ruhe ist, oder ob es sich mit einer beliebigen konstanten Geschwindigkeit gegen  $S$  bewegt. Alle Erscheinungen der Mechanik verlaufen, bezogen auf ein ruhendes oder auf ein mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegendes Koordinatensystem, in genau derselben Weise.

#### § 48. Einsteins spezielle Relativitätstheorie — Lorentztransformationen.

Können wir also nach dem vorigen Paragraphen aus mechanischen Erscheinungen nicht erkennen, ob der Schwerpunkt unseres Sonnensystems ruht oder sich mit konstanter Geschwindigkeit im Weltenraum vorwärts bewegt, so wäre nach Analogie akustischer Erscheinungen vielleicht an optischen Vorgängen die Möglichkeit des Nachweises von Ruhe oder Bewegung gegeben. Fahren wir durch die Luft, so entfernt sich eine von uns ausgehende Schallwelle in der Richtung unserer Bewegung langsamer von uns als in entgegengesetzter. Wir beobachten verschiedene Schallgeschwindigkeiten. Auf das Licht übertragen müßte sich bei der Bewegung durch den Äther die Lichtgeschwindigkeit in der Bewegungsrichtung kleiner ergeben als in der entgegengesetzten Richtung. Der im 4. Bdch. zu besprechende Michelsonsche Versuch hat aber folgendes ergeben. Wir können auch an optischen Erscheinungen nicht erkennen, ob ein System sich in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befindet.

Aus diesem Resultat zog A. Einstein den Schluß, daß nicht nur bei rein mechanischen, sondern bei sämtlichen physikalischen Vorgängen man nicht erkennen kann, ob sie in einem ruhenden oder mit konstanter Geschwindigkeit bewegten System stattfinden. Danach sind die Gleichungen der Galileitrans-

formationen so zu erweitern, daß sie dem genannten Einsteinschen „Relativitätsprinzip“ genügen.

Es ist dies möglich, wenn wir nicht nur das Geschehen im Raum, sondern auch in der Zeit als rein relativ auffassen. Wenn wir daher im System  $S$  (Fig. 15) einen Punkt durch Angabe von  $x, y, z$  und der Zeit  $t$  festlegen, so geschieht dies im System  $S'$  durch die analogen Größen  $x', y', z'$  und  $t'$ , wobei  $t'$  nicht identisch mit  $t$  ist. Nach Einsteins Prinzip müssen wir die Lichtgeschwindigkeit als eine konstante Größe  $c = 3,10^{10}$  cm auffassen, in welchem der beiden Systeme  $S$  oder  $S'$  wir sie auch messen. Wenn wir somit in dem Moment, wo in Fig. 15  $O$  und  $O'$  sich decken, von dort ein Lichtsignal ausgehen lassen, so wird dies für einen Beobachter in  $O$  eine Kugelwelle um  $O$  erzeugen, deren Radius  $r = ct$  ist. Gleicherweise wird eine analoge Kugelwelle für einen Beobachter in  $O'$  vorhanden sein vom Radius  $r' = ct'$ .

Wir erkennen ohne weiteres, daß die Galileitransformationen gelten, sobald wir die relative Geschwindigkeit  $v$  verschwindend klein gegen  $c$  annehmen. In diesem Fall wird sich bei endlichem Radius der Kugelwelle  $O'$  von  $O$  so wenig entfernt haben, daß  $OO'$  gegen  $r$  vernachlässigt werden kann und beide Kugelwellen als zusammenfallend angesehen werden können. Für diesen Fall kann  $t' = t$  gesetzt werden. Es müssen somit die neuen Transformationsgleichungen die Eigenschaft haben, daß sie für unendlich kleine  $v$  in die Gleichungen

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

übergehen, was wir noch umformen können in

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'.$$

Einstein setzt nun voraus, daß die gestrichenen Buchstaben durch lineare Transformationen der ungestrichenen dargestellt werden können und umgekehrt, nur daß

dann  $-v$  durch  $v$  zu ersetzen ist. Wir wollen also vorerst annehmen, daß

$$(27) \quad x' = \beta (x - v t)$$

gesetzt werden kann. Es muß dann

$$(27a) \quad x = \beta (x' + v t')$$

sein. Wir betrachten jetzt jenen Punkt unserer Kugelwelle der auf der positiven  $x$ -Achse liegt. Für diesen ist

$$x = c t$$

und gleicherweise nach dem früheren

$$x' = c t'.$$

Daraus folgt

$$t = \frac{x}{c}, \quad t' = \frac{x'}{c}.$$

Diese Werte für  $t$  und  $t'$  setzen wir in die früheren Gleichungen ein, erhalten somit

$$x' = \beta x \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad x = \beta x' \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Durch Multiplikation der linken und rechten Seiten dieser Gleichungen erhalten wir die neue Gleichung

$$x x' = \beta^2 x x' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

woraus

$$(28) \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

folgt.  $\beta$  ist also wirklich eine für jeden bestimmten Fall konstante, nur von  $v$  und  $c$  abhängige Größe, wie es unsere Voraussetzungen verlangen. Setzen wir den Wert von  $x'$  der Gleichung (27) in die Gleichung (27a) ein, so finden wir

leicht

$$t' = \beta \left( t - \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} \frac{x}{v} \right).$$

Nun ergibt sich aber aus Gl. (28), daß

$$\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} = 1 - \frac{1}{\beta^2} = 1 - \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{v^2}{c^2},$$

folglich

$$t' = \beta \left( t - \frac{v x}{c^2} \right)$$

und weiter

$$t = \beta \left( t' + \frac{v x'}{c^2} \right)$$

ist, indem wir die gestrichenen mit den ungestrichenen Buchstaben vertauschen und nach der früheren Festsetzung  $-v$  an Stelle von  $v$  einführen.

Aus der allgemeinen Symmetrie um die  $x$ -Achse erkennen wir, daß für  $y$  und  $z$  die gleichen Transformationen gelten, ferner erkennen wir, da  $y$  und  $z$  in den Gleichungen für  $x'$  und  $t'$  nicht vorkommen, daß auch in den Transformationen für  $y$  und  $z$  die Größen  $x$ ,  $x'$ ,  $t$  und  $t'$  nicht auftreten können. Wir können daher schreiben

$$y' = b y, \quad z' = b z$$

und nach den Forderungen der Relativität

$$y = b y', \quad z = b z',$$

wobei  $b$  für jeden bestimmten Fall eine konstante Größe sein muß. Durch Multiplikation von  $y'$  mit  $y$  erhalten wir aber

$$y y' = b^2 y y',$$

folglich ist  $b = 1$ . Wir können also folgende Gleichungen

aufschreiben

$$(29) \quad \begin{cases} x' = \beta (x - v t), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \beta \left( t - \frac{v x}{c^2} \right), \end{cases}$$

wenn wir die gestrichenen Buchstaben durch die ungestrichenen ausdrücken. Umgekehrt haben wir

$$(29a) \quad \begin{cases} x = \beta (x' + v t'), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \beta \left( t' + \frac{v x'}{c^2} \right). \end{cases}$$

Die Gleichungen (29) und (29a) wurden auf Grund einer ganz anderen Betrachtungsweise zuerst von H. A. Lorentz aufgestellt, weshalb man sie die „Lorentztransformationen“ nennt.

### § 49. Länge und Zeit.

Im System  $S'$  (Fig. 15) ruhe ein Stab in der  $x'$ -Achse. Sein Anfangspunkt sei in  $O'$ , sein Endpunkt in  $x' = l$ . Diese Länge ergibt sich für einen Beobachter, der in  $S'$  ruht. Wir fragen nach der Länge des Stabs für einen in  $S$  ruhenden Beobachter. Für  $t=0$  falle  $O'$  mit  $O$  zusammen. Dann liegt auch der Anfangspunkt des Stabs in  $O$  und der Endpunkt hat die Abszisse  $x = \beta (x' + v t')$ , wobei nach der letzten der Gleichungen (29a)  $t = 0 = \beta \left( t' + \frac{v x'}{c^2} \right)$ , also  $t' + \frac{v x'}{c^2} = 0$  oder  $t = -\frac{v x'}{c^2}$  ist. Wir ersehen aus diesem

Beispiel, inwiefern  $t$  und  $t'$  nicht identisch sind. Mit dem letzten Wert für  $t'$  erhalten wir

$$x = \frac{x'}{\beta} = \frac{l}{\beta}.$$

Der bewegte Stab erscheint also gegenüber dem ruhenden verkürzt. Wir nennen diese Verkürzung die „Lorentzkontraktion“. Sie zu beobachten ist wegen ihrer Kleinheit bei den praktisch in Betracht kommenden Geschwindigkeiten ausgeschlossen. Bei Lichtgeschwindigkeit schrumpft die Länge auf Null zusammen. Jeder Körper wird zu einer unendlich dünnen Scheibe, die senkrecht auf der  $x$ -Achse steht.

Im System  $S'$  sollen in Zeitabständen von  $\Delta t'$  Zeichen gegeben werden. Ein Beobachter in  $S$  nimmt dann nach Gleichung (29a)

$$\Delta t = \beta \Delta t'$$

wahr. Das heißt: Für den ruhenden Beobachter im System  $S$  erfolgen die Zeichen langsamer als für jenen in  $S'$ . Die bewegte Uhr erscheint uns langsamer zu gehen. Diese sogenannte „Einsteinsche Zeitdilatation“ ist praktisch ebenfalls so gering, daß sie nicht wahrgenommen werden kann.

### § 50. Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

Nach den Gleichungen (29a) können wir bilden

$$\frac{x}{t} = \frac{\beta (x' + v t')}{\beta \left( t' + \frac{v x'}{c^2} \right)} = \frac{\frac{x'}{t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{x'}{t'}}.$$

Wir nennen

$$\frac{x'}{t'} = v'$$

die Geschwindigkeit eines Punkts parallel zur  $x'$ -Achse im System  $S'$ .  $\frac{x}{t}$  setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit des Systems  $S'$  und der Geschwindigkeit  $v'$ . Wie man sieht, geschieht das nicht durch eine gewöhnliche Addition, sondern wir finden die resultierende Geschwindigkeit

$$u = \frac{v + v'}{1 + \frac{v v'}{c^2}}$$

Es ist dies das Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Nach diesem ist die resultierende Geschwindigkeit sonach immer kleiner als die Summe  $v + v'$ . Ferner kann  $u$  nie größer als  $c$  werden; denn setzen wir  $v = c$ , so bleibt auch  $u$  für jedes hinzukommende  $v'$  gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Eine Überlichtgeschwindigkeit gibt es nicht.

### § 51. Das Kraftfeld.

Wir denken uns einen Massenpunkt, auf den eine Kraft wirkt. Deren Richtung und Größe läßt sich durch einen Vektor darstellen. Bewegen wir den Punkt in der jeweiligen Richtung des Vektors, so beschreibt er eine Linie, die den Namen Kraftlinie führt. Sie hat die Eigenschaft, daß in jedem ihrer Punkte die zugehörige Tangente mit der Richtung der Kraft zusammenfällt. Man kann sich den Raum also ganz mit Kraftlinien erfüllt denken. Wir nennen ihn dann ein Kraftfeld. Die Zahl der Kraftlinien läßt sich so wählen (Bd. III, § 16), daß ihre Dichte, d. i. die Zahl der Linien, die durch die Flächeneinheit einer auf der Kraftrichtung senkrechten Fläche gehen, die Größe der Kraft wiedergibt. Ein besonderer Fall ist das homogene Feld. In einem solchen sind die Kraftlinien geradlinig, zueinander

parallel und haben an allen Punkten des Felds dieselbe Dichte.

Die Kraftlinien eines homogenen Felds seien parallel zur  $x$ -Achse (Fig. 15) und bezüglich des Systems  $S$  in Ruhe. Die Liniendichte, d. i. die Zahl der Linien, welche durch die Flächeneinheit einer auf der  $x$ -Achse senkrechten Ebene gehen, definiere die Größe der Kraft  $X$ . Im System  $S'$  sei die entsprechende Kraft  $X'$ . Da Dimensionen senkrecht zur  $x'$ -Achse keine Längenänderungen erfahren, ändert sich die Kraftliniendichte nicht und es ist somit

$$X' = X.$$

Wir denken uns jetzt ein homogenes Feld parallel zur  $y$ -Achse, seine Intensität sei  $Y$ . Wir begrenzen die Flächeneinheit in einer zur  $y$ -Achse senkrechten Ebene so, daß wir ein Quadrat von 1 cm Seitenlänge mit seinen Seiten parallel zur  $x$ - bezügl.  $z$ -Achse legen. Für das gestrichene System verkürzen sich (§ 49) die Seiten parallel zur  $x$ -Achse im

Verhältnis  $\frac{1}{\beta}$ . Im gestrichenen System erhöht sich daher

die Zahl der Kraftlinien pro Flächeneinheit im Verhältnis  $\beta:1$ . Das heißt: Im System  $S'$  ist die Feldintensität

$$Y' = \beta Y.$$

### § 52. Longitudinale und transversale Masse.

Wir denken uns in  $O'$  (Fig. 15) den Massenpunkt  $m_0$ . Wir haben also eine in  $S'$  ruhende Masse  $m_0$ . Auf den Massenpunkt wirke parallel zur  $x'$ -Achse die Kraft  $X'$ . Er wird also von  $O'$  aus eine Bewegung in der  $x'$ -Achse vollführen. Die Gleichung dafür ist

$$m_0 \frac{d^2 x'}{dt'^2} = X'.$$

Infolge der Lorentzkontraktion können wir  $dx' = \beta dx$

beziehungsweise  $d^2 x' = \beta d^2 x$  schreiben und erhalten die Gleichung

$$m_0 \beta \frac{d^2 x}{dt^2} = X'.$$

Nun ist

$$\frac{d^2 x}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \left( \frac{dx}{dt'} \right) = \frac{d}{dt'} \left( \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} \right) = \beta \frac{d}{dt'} \left( \frac{dx}{dt} \right),$$

da nach der letzten der Gleichungen (29a)

$$\frac{dt}{dt'} = \beta \left( 1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)$$

und  $\frac{dx'}{dt'} = 0$  ist, indem wir den Punkt zu Beginn der Wirkung der Kraft  $X'$  betrachten, wo er noch keine Geschwindigkeit im System  $S'$  besitzt. Ferner ist

$$\frac{d}{dt'} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt dt'} = \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dt'} = \beta \frac{d^2 x}{dt^2},$$

folglich

$$\frac{d^2 x}{dt'^2} = \beta^2 \frac{d^2 x}{dt^2}$$

und

$$m_0 \beta \frac{d^2 x}{dt'^2} = m_0 \beta^3 \frac{d^2 x}{dt^2} = X',$$

wofür wir nach dem vorigen Paragraphen auch

$$m_0 \beta^3 \frac{d^2 x}{dt^2} = X$$

schreiben können. Danach gilt nicht ohne weiteres die Newtonsche Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X,$$

wobei  $m$  als die konstante Masse des Körpers aufgefaßt werden muß, sondern diese ist eine Funktion der Geschwindigkeit von der Form

$$m = m_0 \beta^3,$$

wobei  $m_0$  die sogenannte „Ruhmasse“ ist.

Anders wird die Beziehung zwischen  $m$  und  $m_0$ , wenn wir eine Kraft senkrecht zur  $x$ -Achse in Betracht ziehen. Wir können dann schreiben

$$m_0 \frac{d^2 y'}{dt'^2} = Y'.$$

Nun ist aber, da  $y' = y$  [Gl. (29)],

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y'}{dt'^2} &= \frac{d^2 y}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \left( \frac{dy}{dt'} \right) = \frac{d}{dt'} \left( \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} \right) = \beta \frac{d}{dt'} \left( \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \beta \frac{d^2 y}{dt dt'} = \beta \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dt'} = \beta^2 \frac{d^2 y}{dt^2}, \end{aligned}$$

folglich

$$m_0 \beta^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = Y' = \beta Y$$

(§ 51) oder

$$m_0 \beta \frac{d^2 y}{dt^2} = Y.$$

In diesem Fall haben wir also

$$m = m_0 \beta$$

zu setzen. Wir haben somit zu unterscheiden, ob die Kraft in der Richtung der Bewegung oder senkrecht dazu wirkt. Im ersten Fall haben wir an Stelle der Masse die Größe  $m_0 \beta^3$ , im zweiten  $m_0 \beta$  einzuführen. Man pflegt  $m_0 \beta^3$  deshalb die longitudinale,  $m_0 \beta$  die transversale Masse zu nennen.

## § 53. Der Impuls.

Wir bilden das Zeitintegral (§ 11) bezüglich der Kraft  $X$ , die auf einen Massenpunkt von der Ruhmasse  $m_0$  wirkt und der parallel zur  $x$ -Achse die Geschwindigkeit  $v$  besitzt. Es ist dann nach dem vorigen Paragraphen

$$\begin{aligned} \int X dt &= m_0 \int \beta^3 \frac{d^2 x}{dt^2} dt = m_0 \int \frac{\frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dt \\ &= m_0 \int \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \text{konst.} \\ &= m_0 \beta v + \text{konst.} \end{aligned}$$

Auf denselben Massenpunkt wirke jetzt die Kraft  $Y$ , die also senkrecht zur Geschwindigkeit  $v$  des Punkts steht. Dann ist das Zeitintegral (§ 52)

$$\int Y dt = m_0 \beta \int \frac{d^2 y}{dt^2} dt = m_0 \beta \int \frac{dw}{dt} dt = m_0 \beta w + \text{konst.},$$

wenn  $w$  die Geschwindigkeit parallel zur  $y$ -Achse bedeutet. Wir erhalten also in jedem Fall den richtigen Ausdruck für den Impuls, wenn wir die Formel der „klassischen“ Mechanik noch mit  $\beta$  multiplizieren.

Wir können auch so sagen: Wir erhalten den richtigen Impuls, wenn wir

$$(30) \quad m = m_0 \beta$$

setzen, d. h. wenn wir als Masse die mit  $\beta$  multiplizierte Ruhmasse annehmen. Aus dem Impuls gewinnen wir dann die Bewegungsgleichungen, wenn wir bilden

$$\frac{d}{dt} (m_0 \beta v) = X, \quad \frac{d}{dt} (m_0 \beta w) = Y.$$

## § 54. Energie und Masse.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine Kraft, so bewegt sich der Punkt in einer Ebene, die durch die Richtungen der Geschwindigkeit und der Kraft bestimmt ist. Wir legen in diese Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Änderung  $dL$  der kinetischen Energie des Punkts ist dann durch die Arbeit gegeben, die die Kraft leistet (§ 13). Wir haben also

$$dL = dA = X dx + Y dy.$$

Nach § 53 können wir nun schreiben

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left( m_0 \beta \frac{dx}{dt} \right) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt} \left( m_0 \beta \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= m_0 \beta \left( \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + m_0 \frac{d\beta}{dt} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \\ &= m_0 \beta v \frac{dv}{dt} + m_0 v^2 \frac{d\beta}{dt} = \frac{m_0 v \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0 \frac{v^3}{c^2} \frac{dv}{dt}}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \\ &= \frac{m_0 v \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( 1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{m_0 v \frac{dv}{dt}}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

folglich

$$(31) \quad L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \text{konst.}$$

Die Konstante können wir bestimmen, indem wir die Energie des ruhenden Punkts gleich Null setzen. Daraus folgt

konst. =  $-m_0 c^2$  und

$$(32) \quad L = m_0 c^2 (\beta - 1).$$

Entwickeln wir  $\beta$ , schreiben also

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots,$$

so kann  $L$  auch dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} L &= m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1\right) \\ &= \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{3 m_0 v^4}{8 c^2} + \dots \end{aligned}$$

Für praktische Fälle können wir das zweite Glied schon als verschwindend klein ansehen und erhalten so die „klassische“ Formel der kinetischen Energie.

Es mag bemerkt werden, daß für  $v = c$   $L = \infty$  wird, woraus wir die Folgerung in § 50 machen können, daß man einem Massenpunkt keine „Überlichtgeschwindigkeit“ erteilen kann.

Die Gleichungen (30) und (32) ergeben

$$L = (m - m_0) c^2$$

oder

$$m - m_0 = \mu = \frac{L}{c^2}.$$

$\mu$  bedeutet eine Massenvermehrung infolge Bewegung, d. h. eine Massenzunahme infolge Zunahme der kinetischen Energie. Es liegt nahe, jede Masse derart zu definieren, daß sie einer Energie dividiert durch  $c^2$  gleich ist. Es läuft dies darauf hinaus, daß wir in der Gleichung (31) die Konstante

gleich Null setzen. Es wird dann

$$L = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right),$$

wobei das erste Glied die Energie der Ruhmasse darstellt das zweite die klassische Form der Energie gibt.

### § 55. Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation.

Das spezielle Relativitätsprinzip sagt aus, daß alle Naturgesetze dieselben sind, ob wir die Erscheinungen auf ein ruhendes oder auf ein gleichförmig bewegtes System beziehen. Die rotierenden Körper scheinen durch die auftretenden Fliehkräfte einen sogenannten absoluten Raum zu benötigen. Ähnliches tritt ein bei Systemen, die gegeneinander zwar keine drehende aber eine beschleunigte Bewegung ausführen. Das von uns betrachtete Relativitätsprinzip sagt zwar aus, daß es keine Möglichkeit gibt, aus den Naturerscheinungen auf unserer Erde zu erkennen, ob wir uns im Weltenraum in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befinden, wohl könnte dies aber möglich sein, wenn wir rotierende oder beschleunigte Bewegungen in Betracht zögen. A. Einstein baute seine Relativitätstheorie aber so aus, daß die Naturgesetze auf ein beliebig bewegtes System bezogen sich nicht ändern. Diese Fortentwicklung der speziellen nannte er die allgemeine Relativitätstheorie. Sie enthält gleichzeitig eine Theorie der Gravitation. Experimentell bestätigte Folgerungen sind die Perihelbewegung des Merkur, die Ablenkung der Lichtstrahlen der Fixsterne durch das Schwerfeld der Sonne, deren Beobachtung bei Sonnenfinsternissen möglich ist. Die Folgerung, daß alle Vorgänge im Schwerfeld verlangsamt erscheinen, wurde durch die Verschiebung der Spektrallinien des Sonnenlichts gegen das rote Ende des Spektrums bestätigt.

Hätten wir in einem kräftefreien Raum einen Kasten, der sich normal zu seinem Boden gleichförmig beschleunigt bewegt, so würden alle Gegenstände dieses Raums eine Kraft analog der Schwerkraft senkrecht gegen den Boden erfahren. Im Innern des Raums könnten wir nicht entscheiden, ob es sich um Trägheits- oder Gravitationskräfte handelt. Jede geradlinige Bewegung würde im Kasten betrachtet zur parabolischen analog der Wurfbahn eines Körpers im Schwerfeld. Aber auch die Bahn eines Lichtstrahls müßte im Kasten sich als gekrümmt erweisen. Identifizieren wir also das Gravitations- mit einem Schwerfeld (Einsteinsches Äquivalenzprinzip), so ergibt sich die Folgerung der Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerfeld.

Nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip sind, wie erwähnt, die Naturgesetze so zu formulieren, daß sie, bezogen auf ein bewegtes System, die gleichen bleiben. Unter dieser Voraussetzung wird dann der Begriff eines absoluten Raums völlig hinfällig. Mit dem uns zur Verfügung stehenden Darstellungsraum sowie den beschränkten Darstellungsmitteln sind wir jedoch nicht in der Lage, den lückenlosen Gedankengang der allgemeinen Relativitätstheorie wiederzugeben.

---

## Elastizitätstheorie.

### § 56. Normal- und Tangentialspannungen.

Wirken auf einen elastischen Körper Zug- und Druckkräfte, so wird er deformiert und in seinem Innern treten Spannungen auf. Fassen wir ein Elementarparallelepiped, dessen Kanten parallel den drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind, ins Auge, so werden wir die

Kräfte, welche auf eine Fläche des Parallelepipeds wirken, immer in eine Normal- und eine Tangentialkraft zerlegen können. Die Größe der Kraft wird proportional der Größe des Flächenelementes sein, auf welches sie wirkt. Wir können daher auch von der Kraft per Flächeneinheit sprechen. Diese Kräfte per Flächeneinheit wollen wir im folgenden in Betracht ziehen.

Die Kraft, welche normal zu einem Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, wirkt, wollen wir mit  $X_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Normalkräfte parallel zur  $y$ - und  $z$ -Achse  $Y_y$  bzw.  $Z_z$  schreiben. Die Tangentialkraft, welche in das Flächenelement selbst hineinfällt, können wir immer in zwei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen. Nehmen wir z. B. die Tangentialkraft, welche ein Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, angreift, so erhalten wir eine Komponente parallel zur  $y$ - und eine parallel zur  $z$ -Achse. Wir wollen sie dementsprechend mit  $Y_x$  und  $Z_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Tangentialkräfte, welche auf ein Element wirken, das senkrecht zur  $y$ -Achse steht, mit  $X_y$  und  $Z_y$ , die für ein Flächenelement senkrecht zur  $z$ -Achse mit  $X_z$ ,  $Y_z$  bezeichnen. Man pflegt gewöhnlich die Kräfte per Flächeneinheit  $X_x, Y_y, Z_z$  die Normalspannungen, die Kräfte  $X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y$  die Tangentialspannungen zu nennen.

### § 57. Deformationen durch Normalspannungen —

#### Längsdilatation — Querkontraktion — Volumsdilatation.

Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Dehnung eines Prismas proportional der dehnenden Kraft. Gleichzeitig zeigt sich, daß neben der Dehnung eine Querkontraktion eintritt, welche zwar kleiner als die Dehnung, aber proportional derselben ist. Denken wir uns einen Würfel von 1 cm Kantenlänge, die Kanten parallel den Achsen

Hätten wir in einem kräftefreien Raum einen Kasten, der sich normal zu seinem Boden gleichförmig beschleunigt bewegt, so würden alle Gegenstände dieses Raums eine Kraft analog der Schwerkraft senkrecht gegen den Boden erfahren. Im Innern des Raums könnten wir nicht entscheiden, ob es sich um Trägheits- oder Gravitationskräfte handelt. Jede geradlinige Bewegung würde im Kasten betrachtet zur parabolischen analog der Wurfbahn eines Körpers im Schwerfeld. Aber auch die Bahn eines Lichtstrahls müßte im Kasten sich als gekrümmt erweisen. Identifizieren wir also das Gravitations- mit einem Schwerfeld (Einsteinsches Äquivalenzprinzip), so ergibt sich die Folgerung der Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerfeld.

Nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip sind, wie erwähnt, die Naturgesetze so zu formulieren, daß sie, bezogen auf ein bewegtes System, die gleichen bleiben. Unter dieser Voraussetzung wird dann der Begriff eines absoluten Raums völlig hinfällig. Mit dem uns zur Verfügung stehenden Darstellungsraum sowie den beschränkten Darstellungsmitteln sind wir jedoch nicht in der Lage, den lückenlosen Gedankengang der allgemeinen Relativitätstheorie wiederzugeben.

---

## Elastizitätstheorie.

### § 56. Normal- und Tangentialspannungen.

Wirken auf einen elastischen Körper Zug- und Druckkräfte, so wird er deformiert und in seinem Innern treten Spannungen auf. Fassen wir ein Elementarparallelepiped, dessen Kanten parallel den drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind, ins Auge, so werden wir die

Kräfte, welche auf eine Fläche des Parallelepipeds wirken, immer in eine Normal- und eine Tangentialkraft zerlegen können. Die Größe der Kraft wird proportional der Größe des Flächenelementes sein, auf welches sie wirkt. Wir können daher auch von der Kraft per Flächeneinheit sprechen. Diese Kräfte per Flächeneinheit wollen wir im folgenden in Betracht ziehen.

Die Kraft, welche normal zu einem Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, wirkt, wollen wir mit  $X_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Normalkräfte parallel zur  $y$ - und  $z$ -Achse  $Y_y$  bzw.  $Z_z$  schreiben. Die Tangentialkraft, welche in das Flächenelement selbst hineinfällt, können wir immer in zwei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen. Nehmen wir z. B. die Tangentialkraft, welche ein Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, angreift, so erhalten wir eine Komponente parallel zur  $y$ - und eine parallel zur  $z$ -Achse. Wir wollen sie dementsprechend mit  $Y_x$  und  $Z_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Tangentialkräfte, welche auf ein Element wirken, das senkrecht zur  $y$ -Achse steht, mit  $X_y$  und  $Z_y$ , die für ein Flächenelement senkrecht zur  $z$ -Achse mit  $X_z$ ,  $Y_z$  bezeichnen. Man pflegt gewöhnlich die Kräfte per Flächeneinheit  $X_x, Y_y, Z_z$  die Normalspannungen, die Kräfte  $X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y$  die Tangentialspannungen zu nennen.

### § 57. Deformationen durch Normalspannungen — Längsdilatation — Querkontraktion — Volumsdilatation.

Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Dehnung eines Prismas proportional der dehnenden Kraft. Gleichzeitig zeigt sich, daß neben der Dehnung eine Querkontraktion eintritt, welche zwar kleiner als die Dehnung, aber proportional derselben ist. Denken wir uns einen Würfel von 1 cm Kantenlänge, die Kanten parallel den Achsen

Hätten wir in einem kräftefreien Raum einen Kasten, der sich normal zu seinem Boden gleichförmig beschleunigt bewegt, so würden alle Gegenstände dieses Raums eine Kraft analog der Schwerkraft senkrecht gegen den Boden erfahren. Im Innern des Raums könnten wir nicht entscheiden, ob es sich um Trägheits- oder Gravitationskräfte handelt. Jede geradlinige Bewegung würde im Kasten betrachtet zur parabolischen analog der Wurfbahn eines Körpers im Schwerfeld. Aber auch die Bahn eines Lichtstrahls müßte im Kasten sich als gekrümmt erweisen. Identifizieren wir also das Gravitations- mit einem Schwerfeld (Einsteinsches Äquivalenzprinzip), so ergibt sich die Folgerung der Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerfeld.

Nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip sind, wie erwähnt, die Naturgesetze so zu formulieren, daß sie, bezogen auf ein bewegtes System, die gleichen bleiben. Unter dieser Voraussetzung wird dann der Begriff eines absoluten Raums völlig hinfällig. Mit dem uns zur Verfügung stehenden Darstellungsraum sowie den beschränkten Darstellungsmitteln sind wir jedoch nicht in der Lage, den lückenlosen Gedankengang der allgemeinen Relativitätstheorie wiederzugeben.

---

## Elastizitätstheorie.

### § 56. Normal- und Tangentialspannungen.

Wirken auf einen elastischen Körper Zug- und Druckkräfte, so wird er deformiert und in seinem Innern treten Spannungen auf. Fassen wir ein Elementarparallelepiped, dessen Kanten parallel den drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind, ins Auge, so werden wir die

Kräfte, welche auf eine Fläche des Parallelepipeds wirken, immer in eine Normal- und eine Tangentialkraft zerlegen können. Die Größe der Kraft wird proportional der Größe des Flächenelementes sein, auf welches sie wirkt. Wir können daher auch von der Kraft per Flächeneinheit sprechen. Diese Kräfte per Flächeneinheit wollen wir im folgenden in Betracht ziehen.

Die Kraft, welche normal zu einem Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, wirkt, wollen wir mit  $X_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Normalkräfte parallel zur  $y$ - und  $z$ -Achse  $Y_y$  bzw.  $Z_z$  schreiben. Die Tangentialkraft, welche in das Flächenelement selbst hineinfällt, können wir immer in zwei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen. Nehmen wir z. B. die Tangentialkraft, welche ein Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, angreift, so erhalten wir eine Komponente parallel zur  $y$ - und eine parallel zur  $z$ -Achse. Wir wollen sie dementsprechend mit  $Y_x$  und  $Z_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Tangentialkräfte, welche auf ein Element wirken, das senkrecht zur  $y$ -Achse steht, mit  $X_y$  und  $Z_y$ , die für ein Flächenelement senkrecht zur  $z$ -Achse mit  $X_z$ ,  $Y_z$  bezeichnen. Man pflegt gewöhnlich die Kräfte per Flächeneinheit  $X_x, Y_y, Z_z$  die Normalspannungen, die Kräfte  $X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y$  die Tangentialspannungen zu nennen.

### § 57. Deformationen durch Normalspannungen — Längsdilatation — Querkontraktion — Volumsdilatation.

Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Dehnung eines Prismas proportional der dehnenden Kraft. Gleichzeitig zeigt sich, daß neben der Dehnung eine Querkontraktion eintritt, welche zwar kleiner als die Dehnung, aber proportional derselben ist. Denken wir uns einen Würfel von 1 cm Kantenlänge, die Kanten parallel den Achsen

Hätten wir in einem kräftefreien Raum einen Kasten, der sich normal zu seinem Boden gleichförmig beschleunigt bewegt, so würden alle Gegenstände dieses Raums eine Kraft analog der Schwerkraft senkrecht gegen den Boden erfahren. Im Innern des Raums könnten wir nicht entscheiden, ob es sich um Trägheits- oder Gravitationskräfte handelt. Jede geradlinige Bewegung würde im Kasten betrachtet zur parabolischen analog der Wurfbahn eines Körpers im Schwerfeld. Aber auch die Bahn eines Lichtstrahls müßte im Kasten sich als gekrümmt erweisen. Identifizieren wir also das Gravitations- mit einem Schwerfeld (Einsteinsches Äquivalenzprinzip), so ergibt sich die Folgerung der Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerfeld.

Nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip sind, wie erwähnt, die Naturgesetze so zu formulieren, daß sie, bezogen auf ein bewegtes System, die gleichen bleiben. Unter dieser Voraussetzung wird dann der Begriff eines absoluten Raums völlig hinfällig. Mit dem uns zur Verfügung stehenden Darstellungsraum sowie den beschränkten Darstellungsmitteln sind wir jedoch nicht in der Lage, den lückenlosen Gedankengang der allgemeinen Relativitätstheorie wiederzugeben.

---

## Elastizitätstheorie.

### § 56. Normal- und Tangentialspannungen.

Wirken auf einen elastischen Körper Zug- und Druckkräfte, so wird er deformiert und in seinem Innern treten Spannungen auf. Fassen wir ein Elementarparallelepiped, dessen Kanten parallel den drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind, ins Auge, so werden wir die

Kräfte, welche auf eine Fläche des Parallelepipeds wirken, immer in eine Normal- und eine Tangentialkraft zerlegen können. Die Größe der Kraft wird proportional der Größe des Flächenelementes sein, auf welches sie wirkt. Wir können daher auch von der Kraft per Flächeneinheit sprechen. Diese Kräfte per Flächeneinheit wollen wir im folgenden in Betracht ziehen.

Die Kraft, welche normal zu einem Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, wirkt, wollen wir mit  $X_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Normalkräfte parallel zur  $y$ - und  $z$ -Achse  $Y_y$  bzw.  $Z_z$  schreiben. Die Tangentialkraft, welche in das Flächenelement selbst hineinfällt, können wir immer in zwei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen. Nehmen wir z. B. die Tangentialkraft, welche ein Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, angreift, so erhalten wir eine Komponente parallel zur  $y$ - und eine parallel zur  $z$ -Achse. Wir wollen sie dementsprechend mit  $Y_x$  und  $Z_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Tangentialkräfte, welche auf ein Element wirken, das senkrecht zur  $y$ -Achse steht, mit  $X_y$  und  $Z_y$ , die für ein Flächenelement senkrecht zur  $z$ -Achse mit  $X_z$ ,  $Y_z$  bezeichnen. Man pflegt gewöhnlich die Kräfte per Flächeneinheit  $X_x, Y_y, Z_z$  die Normalspannungen, die Kräfte  $X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y$  die Tangentialspannungen zu nennen.

### § 57. Deformationen durch Normalspannungen — Längsdilatation — Querkontraktion — Volumsdilatation.

Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Dehnung eines Prismas proportional der dehnenden Kraft. Gleichzeitig zeigt sich, daß neben der Dehnung eine Querkontraktion eintritt, welche zwar kleiner als die Dehnung, aber proportional derselben ist. Denken wir uns einen Würfel von 1 cm Kantenlänge, die Kanten parallel den Achsen

Hätten wir in einem kräftefreien Raum einen Kasten, der sich normal zu seinem Boden gleichförmig beschleunigt bewegt, so würden alle Gegenstände dieses Raums eine Kraft analog der Schwerkraft senkrecht gegen den Boden erfahren. Im Innern des Raums könnten wir nicht entscheiden, ob es sich um Trägheits- oder Gravitationskräfte handelt. Jede geradlinige Bewegung würde im Kasten betrachtet zur parabolischen analog der Wurfbahn eines Körpers im Schwerfeld. Aber auch die Bahn eines Lichtstrahls müßte im Kasten sich als gekrümmt erweisen. Identifizieren wir also das Gravitations- mit einem Schwerfeld (Einsteinsches Äquivalenzprinzip), so ergibt sich die Folgerung der Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerfeld.

Nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip sind, wie erwähnt, die Naturgesetze so zu formulieren, daß sie, bezogen auf ein bewegtes System, die gleichen bleiben. Unter dieser Voraussetzung wird dann der Begriff eines absoluten Raums völlig hinfällig. Mit dem uns zur Verfügung stehenden Darstellungsraum sowie den beschränkten Darstellungsmitteln sind wir jedoch nicht in der Lage, den lückenlosen Gedankengang der allgemeinen Relativitätstheorie wiederzugeben.

---

## Elastizitätstheorie.

### § 56. Normal- und Tangentialspannungen.

Wirken auf einen elastischen Körper Zug- und Druckkräfte, so wird er deformiert und in seinem Innern treten Spannungen auf. Fassen wir ein Elementarparallelepiped, dessen Kanten parallel den drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind, ins Auge, so werden wir die

Kräfte, welche auf eine Fläche des Parallelepipeds wirken, immer in eine Normal- und eine Tangentialkraft zerlegen können. Die Größe der Kraft wird proportional der Größe des Flächenelementes sein, auf welches sie wirkt. Wir können daher auch von der Kraft per Flächeneinheit sprechen. Diese Kräfte per Flächeneinheit wollen wir im folgenden in Betracht ziehen.

Die Kraft, welche normal zu einem Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, wirkt, wollen wir mit  $X_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Normalkräfte parallel zur  $y$ - und  $z$ -Achse  $Y_y$  bzw.  $Z_z$  schreiben. Die Tangentialkraft, welche in das Flächenelement selbst hineinfällt, können wir immer in zwei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen. Nehmen wir z. B. die Tangentialkraft, welche ein Flächenelement, das senkrecht zur  $x$ -Achse steht, angreift, so erhalten wir eine Komponente parallel zur  $y$ - und eine parallel zur  $z$ -Achse. Wir wollen sie dementsprechend mit  $Y_x$  und  $Z_x$  bezeichnen. Analog werden wir die Tangentialkräfte, welche auf ein Element wirken, das senkrecht zur  $y$ -Achse steht, mit  $X_y$  und  $Z_y$ , die für ein Flächenelement senkrecht zur  $z$ -Achse mit  $X_z$ ,  $Y_z$  bezeichnen. Man pflegt gewöhnlich die Kräfte per Flächeneinheit  $X_x, Y_y, Z_z$  die Normalspannungen, die Kräfte  $X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y$  die Tangentialspannungen zu nennen.

### § 57. Deformationen durch Normalspannungen — Längsdilatation — Querkontraktion — Volumsdilatation.

Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Dehnung eines Prismas proportional der dehnenden Kraft. Gleichzeitig zeigt sich, daß neben der Dehnung eine Querkontraktion eintritt, welche zwar kleiner als die Dehnung, aber proportional derselben ist. Denken wir uns einen Würfel von 1 cm Kantenlänge, die Kanten parallel den Achsen

eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Es wirke auf ihn lediglich die Normalspannung  $X_x$ , welche wir normal zur linken und rechten Seitenfläche in entgegengesetzter Richtung wirkend annehmen müssen. Die Kanten parallel zur  $x$ -Achse erfahren dadurch eine Verlängerung, die sogenannte Längsdilatation

$$x_x = \frac{X_x}{E},$$

hingegen jene, die senkrecht zur  $x$ -Achse stehen, das sind die Kanten parallel zur  $y$ - bzw.  $z$ -Achse, eine Verkürzung, die Querkontraktion

$$y_y = z_z = - \frac{k X_x}{E},$$

wobei  $k$  ein Bruch ist, der nach der Erfahrung zwischen  $1/2$  und  $1/4$  liegt und die Konstante  $E$  gewöhnlich der Elastizitätsmodul genannt wird.

Wirken auf den Würfel die drei Spannungen  $X_x, Y_y, Z_z$ , so erfahren die Kanten parallel zur  $x$ -Achse die Verlängerung

$$(33) \quad x_x = \frac{X_x}{E} - k \frac{(Y_y + Z_z)}{E}.$$

Analog ist die Verlängerung der Kanten parallel zur  $y$ -Achse

$$y_y = \frac{Y_y}{E} - \frac{k(X_x + Z_z)}{E}$$

und parallel zur  $z$ -Achse

$$z_z = \frac{Z_z}{E} - \frac{k(X_x + Y_y)}{E}.$$

Während im neutralen Zustande unser Würfel den Inhalt von einem Kubikzentimeter hat, ist sein Volumen nach Einwirkung der Normalspannungen

$$(1 + x_x)(1 + y_y)(1 + z_z) = 1 + x_x + y_y + z_z,$$

da wegen der Kleinheit der Dehnungen Produkte derselben vernachlässigt werden können. Die Volumszunahme

$$(34) \quad \theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

nennt man die Volumsdilatation.

§ 58. Deformationen durch Tangentialspannungen — Schiebungen.

Wir denken uns einen Elementarwürfel (Fig. 16) eines elastischen Körpers. Soll er unter dem Einfluß der Tan-

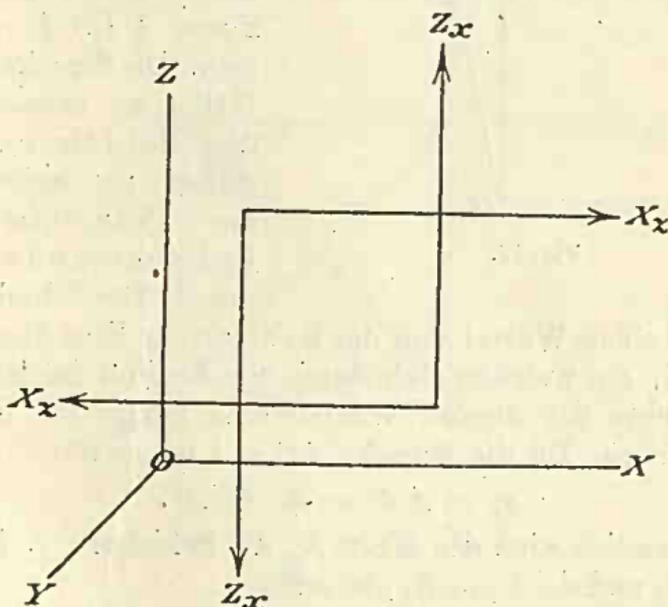


Fig. 16.

gentialspannungen im Gleichgewichte sein, so genügen die Spannungen  $X_z$  nicht, da dieselben, wie man sieht, ein Drehungsmoment ergeben würden. Es müssen daher auch die Tangentialspannungen  $Z_x$  vorhanden sein, welche ein entgegengesetzt gerichtetes Drehungsmoment ergeben. Nur wenn

$$X_z = Z_x$$

ist, wird Gleichgewicht vorhanden sein. Analog muß immer gelten

$$X_y = Y_x \text{ und } Y_z = Z_y.$$

Die Tangentialkräfte deformieren ebenfalls den Körper. Stände ein Würfel von der Kantenlänge Eins nur unter dem Einfluß der Tangentialkraft  $X_z$  (Fig. 17), indem seine untere

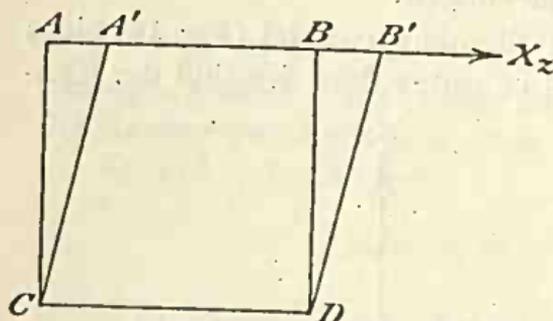


Fig. 17.

Fläche etwa festgehalten würde, so würde die Seitenfläche  $ABCD$  die Form  $A'B'CD$  annehmen. Die Strecke  $AA' = BB' = x_z$  nennen wir die Schiebung oder Scherung, indem man die Tangentialkräfte auch scherende Kräfte nennt. Die Schiebung  $x_z$

gibt für einen Würfel von der Kantenlänge Eins direkt den Weg an, um welchen sich durch den Einfluß der Kraft  $X_z$  die Punkte der oberen Würfelfläche relativ zur unteren verschieben. Da die Strecke  $AC = 1$  ist, so ist

$$x_z = AA' = \sphericalangle ACA'.$$

Gleicherweise wird die Kraft  $Z_x$  die Schiebung  $z_x$  hervorbringen, und da  $X_z = Z_x$ , so auch

$$x_z = z_x$$

und analog

$$x_y = y_x, \quad y_z = z_y.$$

### § 59. Beziehung zwischen Normal-, Tangentialspannungen und Schiebungen.

Denken wir uns einen Würfel unter dem Einfluß der Tangentialspannungen  $X_z$  und  $Z_x$ , so nimmt die Seitenfläche  $ABCD$  parallel zur  $(x, z)$ -Ebene des Koordinaten-

systems (Fig. 18) die Form  $A'B'C'D'$  an. Diese Deformation können wir in einem Körper aber auch noch auf andere Weise, nämlich durch Normalspannungen erzielen.  $EFGH$  (Fig. 19) sei der Querschnitt eines quadratischen Prismas von der Höhe Eins. Parallel den Seiten  $EG, FH$  sei die Normalspannung  $N$  vorhanden. Es wirkt somit auf die Fläche  $GH$  nach abwärts ein Zug  $N \cdot \overline{GH}$ , ein gleich

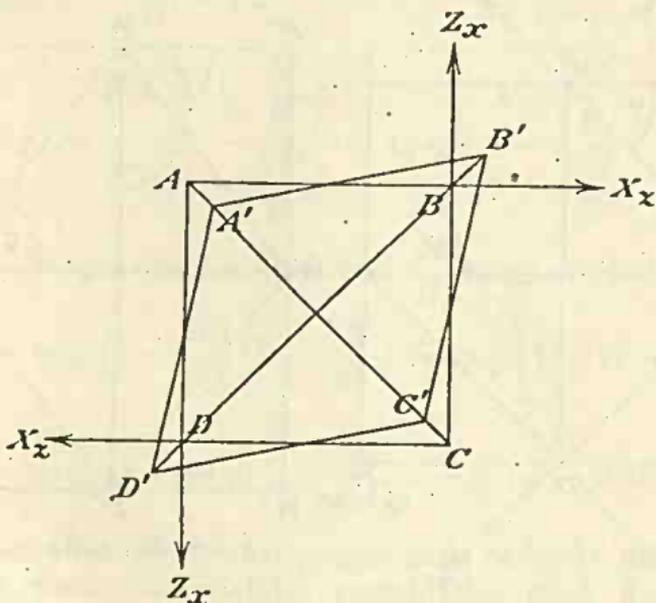


Fig. 18.

großer in entgegengesetzter Richtung auf  $EF$ . Dadurch erleidet das Quadrat  $EFGH$  eine Deformation und geht über in das Rechteck  $E'F'G'H'$ , während sich das Quadrat  $ABCD$  in den Rhombus  $A'B'C'D'$  verwandelt. Dieselbe Deformation erzielen wir, wenn wir den Zug, der an der Fläche  $GD$  angreift, gleichmäßig über  $AD$  verteilen. Diesen Zug können wir bezüglich  $AD$  in eine Tangential- und eine Normalspannung zerlegen, die gleich groß sind, da der Win-

kel  $\varphi = 45^\circ$ . Dasselbe, was wir mit der Fläche  $AD$  taten, können wir bei den Flächen  $AB$ ,  $BC$  und  $CD$  wiederholen. Wir erhalten so vier einander im Gleichgewicht haltende Normalkräfte, die keine Schiebung hervorrufen können, ferner die durch Pfeile angedeuteten Tangentialspannungen  $T$ , welche also die Schiebung verursachen.

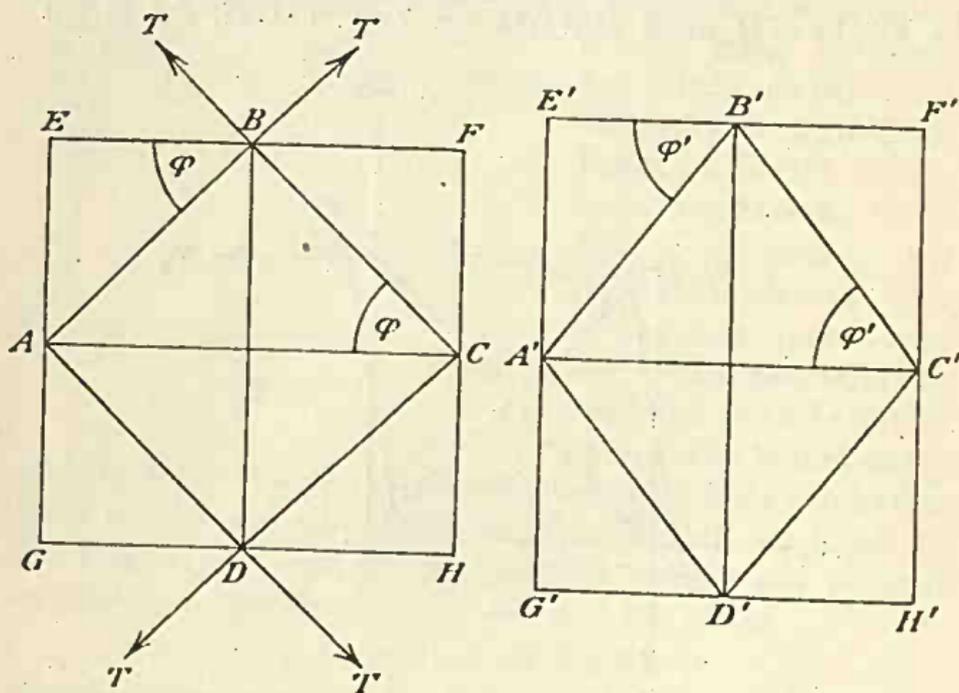


Fig. 19.

Die ursprüngliche Normalspannung  $N$ , welche auf die Fläche  $EB$  die Kraft  $N \cdot \overline{EB}$  ausübt, wird per Einheit der Fläche  $AB$  eine Kraft  $S$  zur Folge haben, welche gegeben ist durch

$$N \cdot \overline{EB} = S \cdot \overline{AB} = S \cdot \overline{EB} \cdot \sqrt{2},$$

oder

$$S = \frac{N}{\sqrt{2}}.$$

Somit ist die Komponente

$$T = S \cos \frac{\pi}{4} = \frac{S}{\sqrt{2}} = \frac{N}{2}.$$

Durch die Deformation des Quadrates  $EFGH$  in das Rechteck  $E'F'G'H'$  geht der Winkel  $\varphi$  in  $\varphi'$  über. Es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{EA}{EB} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\overline{EA} \left(1 + \frac{N}{E}\right)}{\overline{EB} \left(1 - \frac{kN}{E}\right)} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{1 + \frac{N}{E}}{1 - \frac{kN}{E}}.$$

(§ 48). Wegen der Kleinheit von  $\frac{N}{E}$  können wir schreiben

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \frac{N}{E}\right) \left(1 + \frac{kN}{E}\right) = \operatorname{tg} \varphi \left[1 + (1+k) \frac{N}{E}\right],$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi = d(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = 2 d\varphi = (1+k) \frac{N}{E},$$

was man alles sofort erhält, wenn man bedenkt, daß  $\varphi'$  und  $\varphi$  sehr wenig voneinander verschieden sind, daß ferner  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , also  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ,  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}$  ist. Es ergibt sich somit

$$d\varphi = (1+k) \frac{N}{2E} = \frac{(1+k)}{E} T,$$

da wir ja  $T = \frac{N}{2}$  fanden.

Durch eine Drehung um  $45^\circ$  können wir das Quadrat  $ABCD$  (Fig. 19) mit dem Quadrat (Fig. 18) zur Deckung bringen und sehen ohne weiteres, daß die Tangentialspannung  $T$  dann mit  $X_x$  bzw.  $Z_x$ , die Winkelverände-

zung  $d\varphi$  mit der Schiebung  $x_z = z_x$  identisch wird. Danach erhalten wir also

$$(35) \quad x_z = z_x = \frac{1+k}{E} X_z = \frac{1+k}{E} Z_x;$$

ebenso ergibt sich

$$y_z = z_y = \frac{1+k}{E} X_y = \frac{1+k}{E} Y_x$$

und

$$y_z = z_y = \frac{1+k}{E} Y_z = \frac{1+k}{E} Z_y.$$

### § 60. Gleichgewicht und Bewegung elastischer Körper.

Auf ein Elementarparallelepiped eines elastischen isotropen Körpers — nur für solche haben wir unsere Untersuchungen angestellt — sollen Normal- und Tangentialspannungen und außerdem äußere Kräfte wirken. Letztere seien, wie etwa die Schwerkraft, proportional der Masse des Körpers. Nennen wir die Komponenten der äußeren Kräfte auf die Masseneinheit  $X, Y, Z$ , so wirkt parallel zur  $x$ -Achse auf unser Prisma die äußere Kraft  $\rho \alpha \beta \gamma X$ , wenn wir mit  $\rho$  die Dichte des Körpers, mit  $\alpha, \beta, \gamma$  die Prismenkanten bezeichnen, welche parallel den Achsen des Koordinatensystems zu denken sind. Es wirkt ferner auf die linke Seite des Prismas infolge der Normalspannung  $X_x$  die Kraft  $-\beta \gamma X_x$ , auf die rechte analog  $\beta \gamma X_x'$ . Da wir die Spannungen als stetige Funktionen der Koordinaten auffassen, so ist

$$X_x' = X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} \alpha,$$

also

$$X_x' - X_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} \alpha,$$

woraus für das Prisma die Kraft  $\alpha\beta\gamma \frac{\partial X_x}{\partial x}$  resultiert. Ganz ebenso steht es mit den Tangentialspannungen  $X_y$  und  $X_z$ . Sie ergeben die Kräfte  $\alpha\beta\gamma \frac{\partial X_y}{\partial y}$  und  $\alpha\beta\gamma \frac{\partial X_z}{\partial z}$ . Für den Fall des Gleichgewichtes muß die Summe aller dieser Kräfte gleich Null, für den Fall der Bewegung gleich der Masse multipliziert mit der Beschleunigung des Elementarparallelepipeds sein. Im ersten Falle erhalten wir somit

$$\alpha\beta\gamma \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X \right) = 0,$$

oder

$$(36) \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0.$$

Im Falle der Bewegung muß der vorletzte Ausdruck gleich  $\alpha\beta\gamma\rho \frac{d^2\xi}{dt^2}$ , oder es muß

$$(37) \quad \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X$$

sein, indem wir mit  $\frac{d^2\xi}{dt^2}$  die Beschleunigung parallel zur  $x$ -Achse bezeichnen, während  $\alpha\beta\gamma\rho$  die Masse des Volumenelementes ist. Dabei haben wir angenommen, daß nicht nur, wie wir im § 58 bewiesen haben, im Ruhezustand, sondern auch bei der Bewegung für jeden Punkt des Körpers

$$X_z = Z_x$$

usw. gilt. Daß dies tatsächlich zutrifft, ergibt uns sofort die Fig. 16. Hat der Elementarwürfel daselbst die unendlich kleine Kantenlänge  $\alpha$ , so ist das Drehungsmoment der  $X_z$  gleich  $\alpha^3 X_z$ , jenes der  $Z_x$  gleich  $\alpha^3 Z_x$ . Das Trägheitsmoment des Würfels ist  $\sum m r^2$  (§ 28), wird also, wie man

leicht findet, von der Größenordnung  $\alpha^5$ . Sollen demnach keine unendlich großen Winkelbeschleunigungen vorkommen, so ist das nur möglich, wenn  $X_x$  und  $Z_x$  im physikalischen Sinne einander gleich sind.

Nach Gleichung (33) (§ 57) können wir bilden

$$X_x = E x_x + k (X_x + Y_y + Z_z) - k X_x,$$

aus den Gleichungen (33) und (34)

$$0 = x_x + y_y + z_z = \frac{1 - 2k}{E} (X_x + Y_y + Z_z).$$

Danach ergibt sich für die frühere Gleichung

$$X_x = \frac{k E \theta}{(1 + k)(1 - 2k)} + \frac{E x_x}{1 + k},$$

oder

$$(38) \quad X_x = \lambda \theta + 2\mu x_x,$$

wenn wir

$$\frac{k E}{(1 + k)(1 - 2k)} = \lambda, \quad \frac{1}{2} \frac{E}{1 + k} = \mu$$

setzen. Gleicherweise erhalten wir

$$Y_y = \lambda \theta + 2\mu y_y, \quad Z_z = \lambda \theta + 2\mu z_z.$$

Ferner ergeben die Gleichungen (35) (§ 59) für die Tangentialspannungen

$$(39) \quad \begin{cases} X_y = Y_x = 2\mu x_y = 2\mu y_x, \\ X_z = Z_x = 2\mu x_z = 2\mu z_x, \\ Y_z = Z_y = 2\mu y_z = 2\mu z_y. \end{cases}$$

Wir denken uns nun wieder ein Elementarparallelepiped eines elastischen Körpers. Im neutralen Zustande habe es die Kanten  $\alpha, \beta, \gamma$ . Nach der Deformation soll der Anfangspunkt der Kante  $\alpha$  einen Zuwachs der  $x$ -Koordinate um  $\xi$ , der Endpunkt um  $\xi'$  erfahren haben. Die Kante  $\alpha$  hat da-

durch eine Verlängerung  $\xi' - \xi$  erlangt, und wir können wiederum

$$\xi' = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \alpha$$

setzen, so daß also

$$\xi' - \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \alpha$$

die Verlängerung von  $\alpha$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  daher die Verlängerung der Längeneinheit, d. h. die Dehnung parallel zur  $x$ -Achse ist. Analog erhalten wir für die Dehnung parallel zur  $y$ - und  $z$ -Achse die Ausdrücke  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  und  $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ . Wir können somit die Gleichung (38) und die zugehörigen auch schreiben:

$$X_x = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$Y_y = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$Z_z = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Desgleichen ist

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Ist infolge der Tangentialspannung  $X_z$  (Fig. 17) der Punkt  $A$  um die Strecke  $AA' = x_z$  verschoben worden, so können wir, da  $x_z$  nichts anderes als die Tangente des Winkels  $ACA'$  gleich  $\frac{\partial \xi}{\partial z}$  ist,

$$x_z = z_x = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

oder auch

$$x_z = z_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

setzen. Danach lassen sich die Gleichungen (39) auch schreiben:

$$X_y = Y_x = \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right),$$

$$X_z = Z_x = \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right),$$

$$Y_z = Z_y = \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right),$$

und wir finden unmittelbar

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right),$$

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} \right).$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta \xi + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta \xi, \end{aligned}$$

wenn wir unter  $\Delta \xi$  den Ausdruck  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$  verstehen. Sonach erhalten wir nach Gleichung (36) für

das Gleichgewicht eines elastischen Körpers die Beziehungen

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta \xi + \rho X = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta \eta + \rho Y = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta \zeta + \rho Z = 0,$$

für die Bewegung hingegen

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta \xi + \rho X, \\ \rho \frac{d^2 \eta}{dt^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta \eta + \rho Y, \\ \rho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta \zeta + \rho Z. \end{array} \right.$$

Um spezielle Beispiele sowohl des Gleichgewichts als der Bewegung elastischer Körper zu berechnen, ist es oft angezeigt, nicht von den allgemeinen Gleichungen auszugehen, sondern, wie wir z. B. in der Akustik sehen werden, die Gleichungen für die Kräfte direkt aus der Gestalt des Körpers zu entwickeln. [Als Beispiel für die Anwendung der Gleichung (40) siehe Bd. II § 26.]

## Hydromechanik.

### § 61. Hydrostatische Grundgleichungen.

In der Hydromechanik behandeln wir die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten und Gase.

Legen wir durch irgendeine ruhende Flüssigkeit eine Ebene, so wird auf sie von jeder Seite, und zwar senkrecht zu ihr, ein Druck ausgeübt. Dieser Druck  $p$  per Flächeneinheit ist von der Richtung der Ebene unabhängig, d. h. er ist nach allen Richtungen gleich groß.

Denken wir uns ein Elementarparallelepiped der Flüssigkeit, dessen Kanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  parallel den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind. Die Kräfte, welche parallel zur  $x$ -Achse wirken, sind der Druck  $p$ , welcher auf der linken Seite  $\beta\gamma$  lastet, entgegengesetzt der Druck  $p'$  auf der rechten Seite und dann die  $x$ -Komponente der äußeren Kräfte. Diese sollen, wie etwa die Schwerkraft, proportional der Masse der Flüssigkeit sein und ihre Komponenten auf die Masseneinheit seien  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Dann wirkt also auf unser Element parallel zur  $x$ -Achse die Kraft  $\rho\alpha\beta\gamma X$ , wenn  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit ist. Alle Kräfte sollen im Gleichgewicht, d. h. es muß

$$p\beta\gamma - p'\beta\gamma + \rho\alpha\beta\gamma X = 0$$

sein. Wir nehmen nun an, der Druck  $p$  sei eine Funktion der Koordinaten, so

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} \alpha.$$

Führen wir diesen Wert in unsere Gleichung ein, dividieren wir durch  $\alpha\beta\gamma$  und überlegen wir, daß wir in ganz ähnlicher Weise auch bei den übrigen Komponenten vorgehen können, so ergeben sich die Gleichungen

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen bedingen das Gleichgewicht einer Flüssigkeit, weshalb man sie die hydrostatischen Grundgleichungen nennt.

Wir können unsere Gleichungen auch aus der Gleichung (36) für das Gleichgewicht eines festen elastischen Körpers gewinnen, wenn wir bedenken, daß in Flüssigkeiten scherende Kräfte vernachlässigt werden können. Gleichung (36) wird dann

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \rho X = 0.$$

$X_x$  ist eine Normalspannung. Den Druck  $p$  können wir als negative Normalspannung einführen. Unsere Gleichung wird also

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X = 0,$$

was mit den Gleichungen (41) identisch ist.

Haben die Kräfte ein Potential  $\psi$ , ist mithin  $X = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  usw., so nehmen unsere Gleichungen die Form

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

usf. an und lassen sich in

$$dp = -\rho d\psi$$

zusammenziehen.

§ 62. Abhängigkeit des Drucks von der Schwere in tropfbaren Flüssigkeiten — hydrostatisches Paradoxon.

Lassen wir die  $z$ -Achse vertikal nach oben gehen und führen wir als äußere Kraft nur die Schwere ein, so ist

$$X = Y = 0, \quad Z = -g.$$

Unsere Gleichungen werden

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Für tropfbare Flüssigkeiten können wir die Dichte als vom Druck unabhängig ansehen; die Integration der Gleichungen ergibt daher

$$p = \text{const.}$$

für alle Punkte einer Horizontalebene, welche man auch eine Niveauebene nennt, und

$$p = c - \rho g z$$

für die Abhängigkeit des Drucks von der Höhe.

Die Oberfläche der Flüssigkeit muß daher eine Horizontalebene sein. Legen wir sie in die  $x y$ -Ebene, so ist

$$p = -\rho g z,$$

d. h. der Druck ist proportional der Tiefe. Die Form des Gefäßes spielt in den Gleichungen gar keine Rolle, d. h. sie ist für den Druck der Flüssigkeit vollständig gleichgültig, eine Erscheinung, die man das hydrostatische Paradoxon nennt.

Dasselbe Resultat erhalten wir natürlich auch, wenn wir die Gleichung  $dp = -\rho dz$  integrieren. Da  $\rho$  konstant, so ist

$$(42) \quad p = c - \rho z,$$

während  $z = g z$  ist.

### § 63. Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit.

Dreht sich ein teilweise mit Flüssigkeit angefülltes zylindrisches Gefäß um seine Achse, so rotiert bald die ganze Flüssigkeit mit und bildet dabei eine einwärts gewölbte Oberfläche. Lassen wir ein Koordinatensystem, dessen  $z$ -Achse die Zylinderachse ist, in gleicher Geschwindigkeit mit

dem Gefäß rotieren, so können wir die Flüssigkeit in bezug auf dieses System als ruhend ansehen und unsere Gleichungen darauf anwenden. Ist die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so erlangt ein Teilchen infolge der Fliehkraft die Beschleunigungen

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g.$$

Für diese Kräfte haben wir das Potential

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 + g z,$$

wenn wir  $x^2 + y^2 = r^2$  einführen. Nach Gleichung (42) ist somit der Druck

$$p = c + \rho \left( \frac{1}{2} \omega^2 r^2 - g z \right).$$

Die Flächen konstanten Drucks oder die Niveauflächen und damit auch die Oberfläche sind Rotationsparaboloide.

#### § 64. Barometrische Höhenformel.

Wollen wir die hydrostatischen Grundgleichungen auf Gase anwenden, so haben wir zu bedenken, daß bei diesen die Beziehung zwischen Druck und Dichte durch das Boyle'sche Gesetz

$$\frac{p}{\rho} = R$$

gegeben ist, wobei  $R$  eine Konstante bedeutet.

Lassen wir bloß die Schwerkraft mit dem Potential  $\psi = g z$  wirken, so wird die Gleichung  $dp = -\rho d\psi$  sich verwandeln in

$$dp = -\rho g dz = -\frac{\rho g}{R} dz,$$

oder

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} dz.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\ln p = -\frac{g}{R} z + \ln C,$$

$$p = C e^{-\frac{g}{R} z}.$$

Für  $z = 0$  sei  $p = p_0$ . Dann wird

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{R} z}.$$

Nach dieser Gleichung nimmt der Luftdruck mit wachsender Höhe ab.

### § 65. Kapillaritätskonstanten.

Man nimmt an, daß die kleinsten Teilchen einer Flüssigkeit Anziehungskräfte, die sogenannten Kapillarkräfte, aufeinander ausüben, die allerdings nur auf sehr kleine Entfernungen wirksam sind. Das hat zur Folge, daß ein Teilchen im Innern einer Flüssigkeit sich so verhält, als wären derartige Kräfte nicht vorhanden, weil sie nach allen Richtungen gleichmäßig wirken, sich daher gegenseitig aufheben. Die Teilchen an der Oberfläche erfahren jedoch einen Zug gegen das Innere der Flüssigkeit. Es ist daher eine Arbeit zu leisten, um ein Flüssigkeitsteilchen aus dem Innern an die Oberfläche zu bringen. Die Vergrößerung der Oberfläche erfordert Arbeit.

Befindet sich eine Flüssigkeit in einem Gefäß, so ist sie im allgemeinen teils von der freien Oberfläche, teils von den Gefäßwänden begrenzt. Diese dem Gefäß und der Flüssigkeit gemeinsame Fläche nennen wir die gemein-

same Oberfläche. Wollen wir die freie Oberfläche um die Flächeneinheit vergrößern, so haben wir die Arbeit  $\alpha$  zu leisten, ebenso bei der Vergrößerung der gemeinsamen Oberfläche um die Flächeneinheit die Arbeit  $\beta$ .  $\alpha$  und  $\beta$  nennt man die Kapillaritätskonstanten der Flüssigkeit.

### § 66. Erste Hauptgleichung der Kapillarität.

Um die Gleichgewichtsfigur der freien Oberfläche einer Flüssigkeit zu finden, benutzen wir wieder das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Wir denken uns ein Gefäß gefüllt mit einer Flüssigkeit. Wir machen eine virtuelle Verschiebung der freien Oberfläche, ohne dabei die gemeinsame Oberfläche zu verändern. Arbeit werden also leisten der äußere Druck (Luftdruck), die Schwerkraft und die Kapillarkräfte.

Auf der Oberfläche der Flüssigkeit laste der Druck  $P$ . Einer Verschiebung  $\delta n$  in der Richtung der Normalen entspricht demnach die Arbeitsleistung der Kräfte.

$$- \int P \delta n dO .$$

Diese Arbeit ist gleich Null, wenn, wie wir annehmen wollen, sowohl der Druck  $P$  als auch das Volumen der Flüssigkeit konstante Größen sind. Es ist dann

$$\int P \delta n dO = P \int \delta n dO = 0 ,$$

da ja

$$\int \delta n dO = 0$$

nichts anderes als die Volumsänderung ist.

Wir legen durch unsere Flüssigkeit eine Horizontalebene als  $(x, y)$ -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Über dem Flächenelement  $dF$  dieser Ebene befinde sich eine Flüssigkeitssäule von der Höhe  $z$ . Bei der virtuellen Verschiebung werde das obere Ende unserer Flüssigkeitssäule um  $\delta z$  gehoben, sie erfährt also eine Volumsver-

mehrung  $dF \delta z$ . Da das gesamte Volumen der Flüssigkeit unverändert bleiben soll, muß sich an irgendeiner andern Stelle die Flüssigkeit senken derart, daß  $dF \delta z + dF' \delta z' = 0$  ist. Wenn wir  $\delta z$  als positiv ansehen, wird also  $\delta z'$  negativ sein.

Die Arbeit, welche von der Schwere geleistet wird, können wir uns so berechnen, daß wir annehmen, die beiden Flüssigkeitssäulen bilden kommunizierende Röhren, die in der  $(x, y)$ -Ebene durch ein Horizontalrohr verbunden sind. Die Arbeit der Schwere ist dann

$$- \rho g z dF \delta z - \rho g z' dF' \delta z' = - \rho g (z - z') dF \delta z.$$

Dieser Ausdruck enthält nur die Differenz der Flüssigkeitshöhen. Es ist somit gleichgültig, in welcher Höhe sich die  $(x, y)$ -Ebene befindet, was die obige Annahme zur Berechnung der Arbeit der Schwere rechtfertigt. Die Gesamtarbeit ist also gegeben durch

$$(43) \quad \int - \rho g z \delta z dF.$$

Die Arbeit der Kapillarkräfte ist (§ 65)

$$(44) \quad - \alpha \delta O,$$

wenn wir unter  $\delta O$  die Änderung der freien Oberfläche bei der virtuellen Verschiebung verstehen.

Für ein Oberflächenelement  $dO$  können wir nach einem Lehrsatz der Geometrie zwei senkrecht aufeinander stehende Ebenen angeben, deren eine die Kurve des größten, die andere jene des kleinsten Krümmungsradius des Flächenelements enthält. Diese Radien seien  $r$  und  $r'$ . Wir lassen sie von den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten aus die Winkel  $d\varphi$  bzw.  $d\psi$  beschreiben und erhalten so das Oberflächenelement

$$dO = r r' d\varphi d\psi.$$

Verschieben wir das Element nach der Normalen um  $\delta n$ ,

so erhalten wir das neue Element

$$dO' = (r + \delta n)(r' + \delta n) d\varphi d\psi = r r' d\varphi d\psi \left(1 + \frac{\delta n}{r} + \frac{\delta n}{r'}\right).$$

Der Zuwachs des Oberflächenelements ist mithin

$$dO' - dO = dO \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n,$$

oder

$$(45) \quad \delta O = \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n dO.$$

Das zur Flüssigkeitssäule über  $dF$  gehörige Oberflächenelement  $dO$  bildet mit  $dF$  einen Winkel, der gleich dem Winkel der Normalen  $\varphi$  (Fig. 20)

ist. Folglich ist

$$dF = dO \cos \varphi.$$

Desgleichen ist

$$\delta n = \delta z \cos \varphi,$$

daher

$$dF \delta z = dO \delta n.$$

Die Summe der Ausdrücke (43) und (44) ist die Gesamtarbeit der Kräfte bei der virtuellen Verschiebung.

Mit Rücksicht auf Gleichung (45) haben wir also

$$-\int \rho g z \delta z dF - \alpha \delta O = -\int \rho g z \delta z dF$$

$$-\alpha \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n dO = 0,$$

oder nach der letzten Bemerkung

$$\begin{aligned} & \int \rho g z \delta z dF + \alpha \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n dO \\ &= \int \left[ \rho g z + \alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \right] \delta z dF = 0. \end{aligned}$$

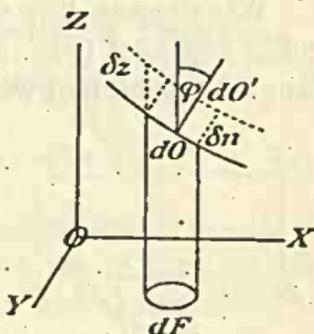


Fig. 20.

mehrung  $dF \delta z$ . Da das gesamte Volumen der Flüssigkeit unverändert bleiben soll, muß sich an irgendeiner andern Stelle die Flüssigkeit senken derart, daß  $dF \delta z + dF' \delta z' = 0$  ist. Wenn wir  $\delta z$  als positiv ansehen, wird also  $\delta z'$  negativ sein.

Die Arbeit, welche von der Schwere geleistet wird, können wir uns so berechnen, daß wir annehmen, die beiden Flüssigkeitssäulen bilden kommunizierende Röhren, die in der  $(x, y)$ -Ebene durch ein Horizontalrohr verbunden sind. Die Arbeit der Schwere ist dann

$$- \rho g z dF \delta z - \rho g z' dF' \delta z' = - \rho g (z - z') dF \delta z.$$

Dieser Ausdruck enthält nur die Differenz der Flüssigkeitshöhen. Es ist somit gleichgültig, in welcher Höhe sich die  $(x, y)$ -Ebene befindet, was die obige Annahme zur Berechnung der Arbeit der Schwere rechtfertigt. Die Gesamtarbeit ist also gegeben durch

$$(43) \quad \int - \rho g z \delta z dF.$$

Die Arbeit der Kapillarkräfte ist (§ 65)

$$(44) \quad - \alpha \delta O,$$

wenn wir unter  $\delta O$  die Änderung der freien Oberfläche bei der virtuellen Verschiebung verstehen.

Für ein Oberflächenelement  $dO$  können wir nach einem Lehrsatz der Geometrie zwei senkrecht aufeinander stehende Ebenen angeben, deren eine die Kurve des größten, die andere jene des kleinsten Krümmungsradius des Flächenelements enthält. Diese Radien seien  $r$  und  $r'$ . Wir lassen sie von den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten aus die Winkel  $d\varphi$  bzw.  $d\psi$  beschreiben und erhalten so das Oberflächenelement

$$dO = r r' d\varphi d\psi.$$

Verschieben wir das Element nach der Normalen um  $\delta n$ ,

so erhalten wir das neue Element

$$dO' = (r + \delta n)(r' + \delta n) d\varphi d\psi = r r' d\varphi d\psi \left(1 + \frac{\delta n}{r} + \frac{\delta n}{r'}\right).$$

Der Zuwachs des Oberflächenelements ist mithin

$$dO' - dO = dO \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n,$$

oder

$$(45) \quad \delta O = \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n dO.$$

Das zur Flüssigkeitssäule über  $dF$  gehörige Oberflächenelement  $dO$  bildet mit  $dF$  einen Winkel, der gleich dem Winkel der Normalen  $\varphi$  (Fig. 20)

ist. Folglich ist

$$dF = dO \cos \varphi.$$

Desgleichen ist

$$\delta n = \delta z \cos \varphi,$$

daher

$$dF \delta z = dO \delta n.$$

Die Summe der Ausdrücke (43) und (44) ist die Gesamtarbeit der Kräfte bei der virtuellen Verschiebung.

Mit Rücksicht auf Gleichung (45) haben wir also

$$-\int \rho g z \delta z dF - \alpha \delta O = -\int \rho g z \delta z dF$$

$$-\alpha \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n dO = 0,$$

oder nach der letzten Bemerkung

$$\begin{aligned} & \int \rho g z \delta z dF + \alpha \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n dO \\ &= \int \left[ \rho g z + \alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \right] \delta z dF = 0. \end{aligned}$$

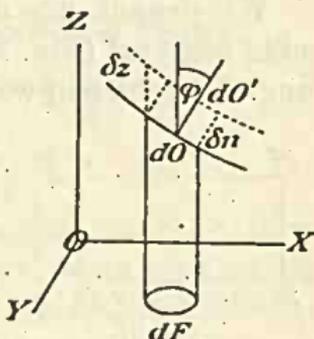


Fig. 20.

Da

$$\int \delta z dF = 0$$

ist, so genügen wir unserer Gleichung, wenn wir

$$(46) \quad \rho g z + \alpha \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) = c$$

setzen, wobei die Konstante  $c$  aus bekannten Werten von  $r$ ,  $r'$  und  $z$  gefunden werden muß.

Gleichung (46) nennt man die erste Hauptgleichung der Kapillarität.

### § 67. Oberflächenspannung.

Wir denken uns die Oberfläche einer Flüssigkeit rechteckig begrenzt (Fig. 21). Die Seiten  $AB$  und  $CD$  seien 1 cm lang. Verschieben wir  $CD$  um die Strecke  $ds$ , so vergrößern wir die Oberfläche  $ABCD$  um  $ds$ , müssen somit eine Arbeit  $\alpha ds$  leisten. Folglich muß auf  $CD$  in der Richtung  $CA$  eine Kraft wirken, die wir die Oberflächenspannung  $S$  nennen. Ihre Größe ist also

$$S = \alpha.$$

Die Flüssigkeitsoberfläche ist wie eine gespannte Haut zu betrachten. Denken wir uns eine beliebige Linie in ihr, so wirkt senkrecht dazu per Längeneinheit die Kraft  $S$ .

### § 68. Zweite Hauptgleichung der Kapillarität.

In Fig. 22 treffe im Punkt  $C$  die Oberfläche  $CD$  einer Flüssigkeit unter dem Winkel  $i$ , dem Randwinkel, die Gefäßwand  $AB$ . Die Flüssigkeit schneidet also die Gefäßwand in einer Geraden, welche senkrecht zur Bildebene durch den Punkt  $C$  gehend zu denken ist. Per Längeneinheit dieser Geraden wirkt in der Richtung  $CD$  infolge der

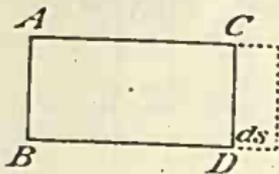


Fig. 21.

Oberflächenspannung die Kraft  $\alpha$ . Da man aber für die gemeinsame Oberfläche genau dieselbe Überlegung machen kann, so wirkt auf die Längeneinheit der Peripherie der Oberfläche der Flüssigkeit in der Richtung  $CA$  auch noch die Kraft  $\beta$ . Für das Gleichgewicht der Flüssigkeit an der Gefäßwand kommen nur jene Kraftkomponenten in Betracht, welche parallel zur Wand wirken, deshalb muß

$$\alpha \cos i + \beta = 0$$

sein. Das ist die zweite Hauptgleichung der Kapillarität.

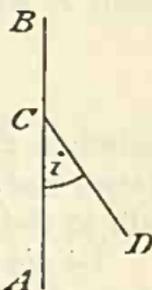


Fig. 22.

§ 69. Steighöhe in Röhren und zwischen Platten.

Wir können die erste Hauptgleichung in der Form

$$\rho g z = -\alpha \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) + c$$

schreiben. Dabei ist der Krümmungsradius  $r$  positiv, wenn er innerhalb der Flüssigkeit liegt, wenn wir also eine konvexe Oberfläche haben. Dies ist bei Quecksilber in einer Glasröhre der Fall. Ist die Röhre eng genug, so können wir die Oberfläche des Quecksilbers, den Meniskus, als Halbkugel ansehen, deren Radius mit jenem der Röhre übereinstimmt. Wählen wir die Quecksilberoberfläche in einem weiten Gefäß als  $xy$ -Ebene, so ist für dieselbe  $z = 0$ ,  $r = r' = \infty$ , also  $c = 0$ , und wir erhalten

$$\rho g z = -\alpha \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right).$$

Für eine enge Röhre vom Radius  $r$ , die wir in das Quecksilber eintauchen, wird diese Gleichung

$$\rho g z = -\frac{2\alpha}{r}.$$

Haben wir zwei parallele ebene Platten vom Abstand  $2r$ , so bildet die Quecksilberoberfläche eine Zylinderfläche, deren einer Krümmungsradius gleich  $r$ , während der andere gleich  $\infty$  ist. Für diese Anordnung erhalten wir demnach

$$\rho g z = -\frac{\alpha}{r}.$$

Zwischen zwei Platten, deren Abstand gleich dem Durchmesser einer Röhre ist, steht also die Quecksilberoberfläche halb so tief unter dem normalen Niveau als in der Röhre.

Ist die Oberfläche nicht konvex, sondern konkav, so liegen die Krümmungsradien außerhalb der Flüssigkeit. Wir müssen sie dann als negativ ansehen, d. h. eine benetzende Flüssigkeit steigt in einer engen Röhre, und zwar ist die Steighöhe verkehrt proportional dem Krümmungsradius und im obigen Sinn doppelt so groß als zwischen zwei Platten. Dies alles gilt jedoch nur dann, wenn wir den Durchmesser der Röhre gegenüber der Steighöhe vernachlässigen können. Eine genauere Formel werden wir im § 71 kennen lernen.

### § 70. Blasen und Tropfen.

Wir betrachten die Gestalt der Oberfläche längs einer geraden Wand. Wir erhalten eine Zylinderfläche, der eine Krümmungsradius ist daher  $r' = \infty$ . Für die Leitlinie  $OC$  der Zylinderfläche (Fig. 23) gilt

$$r d\varphi = ds$$

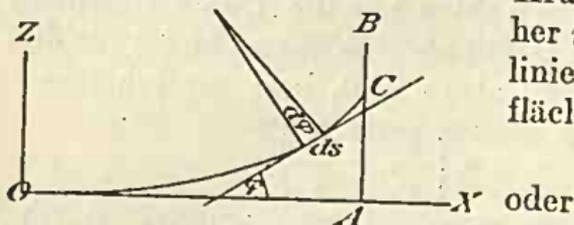


Fig. 23.

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Da aber nach unserer ersten Hauptgleichung  $\rho g z = \frac{\alpha}{r}$ ,

so auch

$$\rho g z = \alpha \frac{d\varphi}{ds} = \alpha \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \alpha \cos \varphi \frac{d\varphi}{dx}.$$

Wir haben ferner  $\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ , also

$$\rho g z \frac{dz}{dx} = \alpha \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi}{dx} = \alpha \sin \varphi \frac{d\varphi}{dx}.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$\frac{\rho g z^2}{2} = -\alpha \cos \varphi + C.$$

Für  $z = 0$  wird auch  $\varphi = 0$ , daher  $C = \alpha$  und

$$\frac{\rho g z^2}{2} = \alpha (1 - \cos \varphi).$$

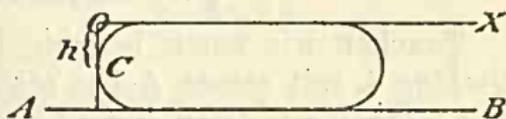


Fig. 24.

Für den Punkt an der Gefäßwand erkennt man ohne weiteres, daß der Winkel  $\varphi$  das Komplement des Randwinkels  $i$  ist. Die Erhebung  $z_1$  der Flüssigkeit am Rand über das normale Niveau ist also durch

$$\frac{\rho g z_1^2}{2} = \alpha (1 - \sin i)$$

gegeben. Infolge der quadratischen Form der Gleichung erkennt man jedoch nicht, ob die Erhebung positiv oder negativ ist, aber wir wissen, daß eine Erhebung nur bei benetzenden Flüssigkeiten vorhanden ist.

Eine nichtbenetzende Flüssigkeit auf eine ebene Unterlage gebracht bildet einen Tropfen. Ist er so groß, daß wir seine Höhe gegenüber seinem Durchmesser vernachlässigen können, so läßt sich auf ihn unsere Gleichung anwenden. Im Punkt  $C$  (Fig. 24) stehe die Tangente an die Durchschnittskurve des Tropfens senkrecht. Der Winkel  $\varphi$  ist  $90^\circ$ ,

$\cos \varphi = 0$ . Der Punkt  $C$  liegt daher um  $h$  tiefer als der höchste Punkt des Tropfens. Wir erhalten für ihn die Formel

$$h^2 = \frac{2\alpha}{\rho g},$$

nach welcher wir die Kapillaritätskonstante berechnen können. Die Fig. 24 können wir umkehren und haben dann den Fall einer Luftblase unter einer Glasplatte, welche die Flüssigkeit oben abschließt. Solche Blasen ergeben also ebenfalls ein Mittel zur Berechnung der Konstanten  $\alpha$ .

### § 71. Kapillarröhren.

Tauchen wir einen beliebig begrenzten Zylinder vom Umfang  $L$  mit seiner Achse senkrecht in eine Flüssigkeit und machen wir jetzt, indem wir entweder die Flüssigkeit oder den Zylinder heben oder senken, eine virtuelle Verschiebung, so muß für den Fall des Gleichgewichts die Summe sämtlicher Arbeiten gleich Null sein.

Bei einer Kapillarröhre vom Radius  $r$  können wir folgendermaßen verfahren. Wir heben die Flüssigkeit in derselben um  $\delta h$ . Dabei erhalten wir eine Vergrößerung der gemeinsamen Oberfläche  $2\pi r \delta h$ . Die Arbeit ist  $-2\pi \beta r \delta h$ . Die Arbeit, um die Flüssigkeitssäule vom Gewicht  $G$  zu heben, ist  $G \delta h$ , und für den Fall des Gleichgewichts muß

$$-2\pi \beta r \delta h - G \delta h = 0$$

sein, was wir auch so schreiben können:

$$G = -2\pi \beta r.$$

Haben wir keinen Kreiszyylinder, so brauchen wir bloß  $2\pi r$  durch den Umfang  $L$  zu ersetzen und erhalten die allgemeinere Formel

$$G = -\beta L = \alpha \cos i \cdot L,$$

welch letztere Beziehung unmittelbar aus der zweiten Hauptgleichung folgt.

Benetzt eine Flüssigkeit die Gefäßwand vollkommen, so können wir  $i = 0$ ,  $\cos i = 1$  setzen. Dann wird für einen Kreiszyylinder

$$G = 2\pi r \alpha.$$

Für ein genügend enges Rohr läßt sich der Meniskus als Halbkugel auffassen. Nennen wir die Höhe des tiefsten Punkts des Meniskus über dem normalen Niveau  $h$ , so ist das gehobene Gewicht

$$\begin{aligned} \rho g (\pi r^2 h + \pi r^2 \cdot r - \frac{2}{3} \pi r^3) &= \rho g (\pi r^2 h + \frac{1}{3} \pi r^3) \\ &= 2\pi r \alpha, \end{aligned}$$

oder

$$h + \frac{1}{3} r = \frac{2\alpha}{\rho g r}.$$

Es ist dies eine genauere Formel für die Steighöhe von Flüssigkeiten in Kapillarröhren.

Nach ganz demselben Vorgang läßt sich das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit berechnen, wenn man eine kreisrunde Platte aus ihr herauszieht, was eine Methode ergibt, mit Hilfe der Wage die Kapillaritätskonstante zu bestimmen, indem man das Gewicht sucht, welches zum Abreißen einer Platte von der Flüssigkeitsoberfläche erforderlich ist.

Ebenso können wir einen Einfluß der Kapillarkräfte auf den Stand des Ariometers nachweisen, da das Gewicht desselben scheinbar um das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit vermehrt wird.

## § 72. Hydrodynamische Grundgleichungen.

Ein Elementarparallelepiped von den Kanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  parallel zu den 3 Achsen eines Koordinatensystems hat die Masse  $\rho \alpha \beta \gamma$ . Die Kraft, welche parallel der  $x$ -Achse auf

dasselbe wirkt, kann also gemessen werden durch

$$\rho \alpha \beta \gamma \frac{d^2 x}{dt^2} = \rho \alpha \beta \gamma \frac{du}{dt},$$

wenn wir mit  $u, v, w$  die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit bezeichnen. Die Kräfte auf die Masseneinheit seien wieder dieselben wie in § 61, also  $X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ . Wir erhalten demnach

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

was nach den Bemerkungen des § 61 auch aus der Elastizitätsgleichung (37) zu gewinnen ist. Es ist nun

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieses Werts in unsere Gleichung erhalten wir

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \end{aligned} \right.$$

wobei die zwei letzten Gleichungen analog der ersten gebildet sind. Zu diesen Gleichungen kommt noch die sogenannte Kontinuitätsgleichung. Sämtliche Gleichungen nennt man die Eulerschen Grundgleichungen der Hydrodynamik.

Die Kontinuitätsgleichung gibt uns die Massenänderung oder, wenn man will, die Dichtenänderung an einem bestimmten Ort an. Dieselbe ist für die Zeit  $dt$  in unserem Elementarparallelepiped gleich  $\alpha \beta \gamma \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ , und sie muß gleich sein der in das Volumelement während der Zeit  $dt$  einströmenden Flüssigkeit vermindert um die während derselben Zeit ausströmende. Von links strömt durch die Fläche  $\beta \gamma$  die Menge  $\beta \gamma \rho u dt$  ein, rechts  $\beta \gamma \rho' u' dt$  aus. Ähnlich verhält es sich mit der oberen und unteren, vorderen und hinteren Fläche des Parallelepeds.

Nun ist

$$\rho' u' = \rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \alpha,$$

daher

$$\beta \gamma \rho u dt - \beta \gamma \rho' u' dt = -\alpha \beta \gamma \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dt.$$

Der Gesamtmassenzuwachs ist daher

$$\alpha \beta \gamma \frac{\partial \rho}{\partial t} dt = -\alpha \beta \gamma dt \left[ \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right],$$

woraus wir die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

erhalten.

§ 73. Ausflußgeschwindigkeit einer tropfbaren Flüssigkeit.

Wir machen in den Boden eines Gefäßes ein Loch, aus welchem senkrecht nach unten die Flüssigkeit strömen soll. In die Richtung des Strahls legen wir die  $z$ -Achse. Es ist dann  $X = Y = u = v = 0$ ,  $Z = g$ . Die Gleichungen (47)

reduzieren sich demnach auf

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Ist die Größe des Lochs im Vergleich zum Querschnitt des Gefäßes zu vernachlässigen, so können wir für eine bestimmte Zeit das Flüssigkeitsniveau als konstant, also auch den ganzen Strömungsvorgang als stationär ansehen. Dann wird  $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ , und es bleibt uns nur

$$w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = g,$$

was integriert ergibt

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} = gz + C.$$

Wir legen die  $xy$ -Ebene in die Flüssigkeitsoberfläche. Im Gefäß hat die Flüssigkeit eine so geringe Geschwindigkeit nach abwärts, daß wir  $w^2 = 0$  setzen können. Ein beliebiger Punkt der Flüssigkeit habe die Ordinate  $z_1$ . Es herrscht dort der hydrostatische Druck  $p = \rho g z_1$ . Zur Bestimmung der Konstanten  $C$  haben wir also  $g z_1 = g z_1 + C$ , woraus  $C = 0$  und

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} = gz$$

folgt.

Unmittelbar unter der Öffnung ist der Druck auf die Flüssigkeit gleich Null. Für diesen Punkt setzen wir  $z = h$ . Wir erhalten daher

$$\frac{w^2}{2} = hg \quad \text{oder} \quad w = \sqrt{2gh},$$

das bekannte Ausflußgesetz von Torricelli.

Es läßt sich natürlich dieses Gesetz auch ohne weiteres aus dem Prinzip von der Erhaltung der Energie ableiten. Es muß ja die lebendige Kraft der Teilchen beim Ausfluß gleich der Arbeit sein, welche die Schwere beim Wandern der Teilchen von der Flüssigkeitsoberfläche bis zum Ausfluß leistet. Dies ergibt dann für die Ausflußgeschwindigkeit einfach die Geschwindigkeit, wie sie die Fallgesetze verlangen.

### § 74. Ausflußgeschwindigkeit der Gase.

Wir nehmen an, ein Gefäß enthalte komprimierte Luft, welche durch ein feines Loch in dünner Wand ausströmt. Die Ausströmungsrichtung sei die  $x$ -Achse, äußere Kräfte seien nicht vorhanden. Dann haben wir nach den Gleichungen (47), vorausgesetzt, daß wir die Strömung wiederum als stationär ansehen können,

$$u \frac{du}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0.$$

Nach Boyle ist

$$\frac{p}{\rho} = R,$$

(§ 64), also

$$u \frac{du}{dx} = - \frac{R}{p} \frac{dp}{dx},$$

oder integriert

$$\ln p = - \frac{u^2}{2R} + \ln C.$$

Im Innern des Gefäßes sei  $p = p_1$  und  $u = 0$ , außerhalb  $p = p_0$ . Dann wird  $C = p_1$ , also

$$\ln \frac{p_1}{p} = \frac{u^2}{2R},$$

wonach wir für die Ausströmungsgeschwindigkeit  $u_0$  die Gleichung

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = \frac{u_0^2}{2R}$$

erhalten. Wir lassen nun zwei verschiedene Gase unter ganz denselben Bedingungen ausströmen. Die Ausströmungsgeschwindigkeiten seien  $u_0$  und  $u_0'$ . Die zugehörigen  $R$  sind demnach  $\frac{p}{\rho}$  und  $\frac{p'}{\rho'}$ , woraus die Gleichungen folgen:

$$\frac{u_0^2}{2R} = \frac{u_0'^2}{2R'}$$

$$\frac{u_0^2}{u_0'^2} = \frac{R}{R'} = \frac{\rho'}{\rho}$$

Es verhalten sich die Quadrate der Ausflußgeschwindigkeiten wie umgekehrt die Dichten, ein Gesetz von Graham, nach welchem Bunsen seine bekannte Methode, die Dichte der Gase zu bestimmen, begründete.

### § 75. Transformation der Eulerschen hydrodynamischen Grundgleichungen.

Die Flüssigkeitsmenge, welche in einem Elementarparallelepiped enthalten ist, wird infolge der verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten in den einzelnen Punkten der Flüssigkeit mit der Zeit ihre Gestalt nicht beibehalten können, was zur Folge hat, daß neben der fortschreitenden auch noch eine drehende Bewegung der Flüssigkeit in Betracht zu ziehen ist. Es sei z. B.  $ABCD$  (Fig. 25) die der  $xz$ -Ebene parallele Fläche des Flüssigkeitselements mit den Seiten  $dx$  und  $dz$ . Die Geschwindigkeit  $u$  parallel

zur  $x$ -Achse sei in  $B$  größer als in  $A$ , die Geschwindigkeit  $w$  parallel zur  $z$ -Achse größer in  $D$  als in  $A$ . Nach der Zeit  $dt$  hat daher unser Rechteck die Gestalt  $AB'C'D'$  angenommen. Es hat sich die Seite  $AB = dz$  um den Winkel  $\alpha$ , die Seite  $AD = dx$  um  $-\beta$  gedreht. Wir können daher als mittlere Drehung des gesamten Rechtecks um die  $y$ -Achse  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  setzen.

Nun ist

$$\alpha dz = (u' - u) dt,$$

wenn wir unter  $u$  die Geschwindigkeit der Flüssigkeit parallel zur  $x$ -Achse in  $A$ , unter  $u'$  dieselbe Größe in  $B$  verstehen. Es ist also

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial z} dt$$

und analog

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial x} dt.$$

Die mittlere Drehung um die  $y$ -Achse in der Zeit  $dt$  ist demnach

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dt.$$

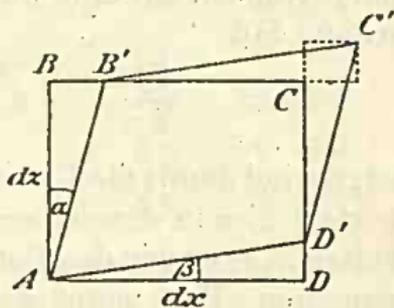


Fig. 25.

Durch zyklische Vertauschung der Buchstaben finden wir dann für den mittleren Drehungswinkel um die  $x$ -Achse  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dt$ , um die  $z$ -Achse  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$ . Dividieren wir die Drehungswinkel durch die Zeit  $dt$ , so erhalten wir die Winkelgeschwindigkeiten des Flüssigkeitselements um die drei Achsen

$$(48) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \eta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Werden diese drei Größen Null, so findet in der Flüssigkeit keine Rotation der Teilchen um sich selbst statt. Für diesen Fall muß demnach

$$(49) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

sein. Können wir eine Funktion  $\varphi$  angeben von der Eigenschaft, daß

$$u = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ist, so sind damit die Gleichungen (49) erfüllt. Die Funktion  $\varphi$  steht hier in demselben Verhältnis zu den Geschwindigkeiten  $u, v, w$ , wie das Potential einer Kraft zu deren Komponenten. Man nennt daher nach v. Helmholtz  $\varphi$  auch das Geschwindigkeitspotential.

In der ersten der hydrodynamischen Grundgleichungen (47)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

können wir nach den Gleichungen (48)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} - 2\zeta$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2\eta$$

setzen und erhalten dann

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} + 2(w\eta - v\zeta) = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Zwei ähnliche Gleichungen erscheinen bezüglich der beiden anderen Achsen. Beachten wir noch, daß

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial x}$$

ist, wenn wir  $u^2 + v^2 + w^2 = c^2$  einführen, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\eta - v\zeta) = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\zeta - w\xi) = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\xi - u\eta) = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir differenzieren nun die zweite dieser Gleichungen nach  $z$ , die dritte nach  $y$ , beachten, daß nach den Gleichungen (48)

$$2 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

und erhalten so durch Subtraktion der zweiten von der dritten der Gleichungen (50) bei konstantem  $\rho$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (v\xi - u\eta) - \frac{\partial}{\partial z} (u\zeta - w\xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right).$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit — nur mit solchen befassen wir uns hier — ist die Kontinuitätsgleichung (§ 72)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichungen (48) ergeben

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Damit können wir unsere Gleichung verwandeln in

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} - \xi \frac{\partial u}{\partial x} - \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Fassen wir ein ganz bestimmtes Flüssigkeitsteilchen ins Auge, so sind seine Winkelgeschwindigkeiten Funktionen der Zeit  $t$  und der Koordinaten  $x, y, z$ . Ist daher zu einer bestimmten Zeit  $t$

$$\xi = f(t, x, y, z),$$

so haben wir nach Verlauf der Zeit  $dt$

$$\xi = f(t + dt, x + u dt, y + v dt, z + w dt).$$

Daraus folgt

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

und wir erhalten schließlich

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right)$$

und ähnliche Ausdrücke für  $\frac{d\eta}{dt}$  und  $\frac{d\zeta}{dt}$ .

Haben die Kräfte ein Potential  $V$  (§ 14), so daß

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

ist ferner zu irgendeiner Zeit

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

d. h. ist keine Rotation der Flüssigkeitsteilchen vorhanden, so tritt in einer idealen Flüssigkeit — das ist eine ohne innere Reibung — nie eine drehende Bewegung der Teilchen ein. Hingegen werden jene Teilchen, welche rotieren, nie ihre Rotationsbewegung verlieren.

### § 76. Wirbelbewegung.

Wir denken uns eine Flüssigkeit, welche so um die  $z$ -Achse rotiert, daß alle Teilchen einer konzentrischen Zylinderfläche denselben Bewegungszustand haben. Ist in der Entfernung  $r$  von der  $z$ -Achse die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit  $\omega$ , so ist

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\omega - y \frac{d\omega}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\omega - \frac{y^2}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr},$$

da wegen  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$  ist. Desgleichen wird

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \omega + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr},$$

folglich wird

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega + \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr}.$$

Es soll nun für  $r < r_0$   $\zeta = \zeta_0$  und für  $r > r_0$   $\zeta = 0$  sein, wobei  $\zeta_0$  und  $r_0$  Konstanten bedeuten. Innerhalb des Zylinders vom Radius  $r_0$  haben wir demnach

$$\zeta_0 = \omega + \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr},$$

was wir umformen können in

$$\frac{2 dr}{r} + \frac{d\omega}{\omega - \zeta_0} = 0.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\ln r^2 + \ln(\omega - \zeta_0) = \ln A$$

oder

$$r^2(\omega - \zeta_0) = A,$$

$$\omega = \zeta_0 + \frac{A}{r^2}.$$

Da in der  $z$ -Achse selbst die Rotationsgeschwindigkeit nicht unendlich werden soll, so haben wir  $A = 0$  zu setzen. Wir erhalten also

$$\omega = \zeta_0.$$

Das heißt: der Flüssigkeitszylinder vom Radius  $r_0$  rotiert wie ein fester Körper um die  $z$ -Achse.

Setzen wir hingegen  $\zeta = 0$ , so haben wir die Gleichung

$$\omega + \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr} = 0$$

zu lösen. Dies ergibt

$$\omega = \frac{C}{r^2}.$$

Da wir eine Unstetigkeit ausschließen, so müssen für  $r = r_0$  die beiden  $\omega$  einander gleich werden, d. h. es muß

$$\zeta_0 = \frac{C}{r_0^2}$$

sein. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Flüssigkeit um die  $z$ -Achse bewegt, ist sonach

$$r\omega = \frac{C}{r} = \frac{\zeta_0 r_0^2}{r}.$$

Wir haben also wohl zu unterscheiden zwischen der Gesamtbewegung der Flüssigkeit und der rotierenden Bewegung der einzelnen Teilchen um sich selbst.

§ 77. Stationäre Bewegung einer idealen Flüssigkeit.

Ist die Geschwindigkeit und deren Richtung in jedem Punkt einer Flüssigkeit von der Zeit unabhängig, so nennen wir dies einen stationären Zustand. Für diesen wird also

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

werden. Wir führen nun das Geschwindigkeitspotential und für die Kräfte das Potential  $V$  ein, multiplizieren die Gleichungen (47) der Reihe nach mit  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , addieren und integrieren sie und erhalten so

$$\frac{c^2}{2} + V + \frac{p}{\rho} = C,$$

wobei  $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$  bedeutet. Wirkt nur die Schwere, so ist

$$V = gz,$$

daher der Druck

$$p = \rho \left( C - gz - \frac{c^2}{2} \right).$$

Diese Gleichung wollen wir benützen, um den Druck zu berechnen, welchen eine Flüssigkeit, die parallel zur  $x$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $u_0$  fließt, ausübt, wenn wir in dieselbe einen kreiszylindrischen Stab vom Radius  $R$  stecken. Die Stabachse bilde die  $z$ -Achse eines Koordinatensystems. Es wird natürlich dadurch in der Umgebung des Stabs die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Flüssigkeit geändert. Denken wir uns den Stab jedoch unendlich lang, so wird sich diese Änderung nur auf  $u$  und  $v$ ,

nicht aber auf  $w$  beziehen. Es bleibt also  $w = 0$ , und wir brauchen bloß den Vorgang in der  $x y$ -Ebene der Betrachtung zu unterziehen.

Wir setzen  $x^2 + y^2 = r^2$ . Nach der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

muß also für das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

existieren, welche sich in unserm Fall auf

$$(51) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

reduziert, da ja  $w = 0$  ist.

Diese Bedingungsgleichung wird erfüllt durch

$$\varphi = \Phi - u_0 x,$$

wenn für  $r = \infty$   $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$  wird, und die Beziehung besteht

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Wir haben dann in der Tat im obigen Sinne nur eine Strömung parallel zur  $x$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $u_0$ . Es wird sich im späteren zeigen, daß die Funktion

$$\Phi = \frac{A x}{r^2},$$

mithin

$$\varphi = \frac{A x}{r^2} - u_0 x$$

allen gestellten Anforderungen genügt. Vorerst sieht man durch Differentiation ohne weiteres, daß Gleichung (51) erfüllt ist.

Senkrecht zur Oberfläche des Zylinders kann natürlich keine Geschwindigkeitskomponente vorhanden sein, d. h. es muß

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_R = 0$$

sein. Wir wollen  $\frac{x}{r} = \cos \gamma$  setzen und erhalten so

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos \gamma - r u_0 \cos \gamma,$$

mithin

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_R = -\frac{A}{R^2} \cos \gamma - u_0 \cos \gamma = 0.$$

Daraus folgt

$$A = -u_0 R^2$$

und

$$\varphi = -u_0 x \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right),$$

daher

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{2 u_0 x^2 R^2}{r^4},$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2 u_0 R^2 x y}{r^4}.$$

Für die Oberfläche des Zylinders erhalten wir nun

$$c_R^2 = u_R^2 + v_R^2 = \frac{4 u_0^2 y^2}{R^2}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für den Druck ein, so ergibt dies schließlich

$$p = \rho \left( C - g z - \frac{c_R^2}{2} \right) = \rho \left( C - g z - \frac{2 u_0^2 y^2}{R^2} \right).$$

Es wird demnach auf die linke Seite des Zylinders genau derselbe Druck wie auf die rechte ausgeübt. Dasselbe ist der Fall, wenn sich in ruhender Flüssigkeit der Zylinder parallel zu sich selbst fortbewegt. Er erfährt dann gar keinen Widerstand. Man kann übrigens für jeden beliebigen Körper diese auffallende Erscheinung nachweisen. Allerdings muß die Flüssigkeit eine ideale sein, d. i. eine solche, die keine innere Reibung (§ 79) besitzt.

### § 78. Wasserwellen.

Wir denken uns Wasserwellen, welche in der Richtung der  $x$ -Achse fortschreiten. Die Wasserteilchen machen also nur Bewegungen parallel zur  $x$ - und  $z$ -Achse. Es verwandelt sich daher die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

wegen  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  in

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

oder, wenn wir das Geschwindigkeitspotential einführen,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Wir untersuchen nun, ob die Wellenbewegung eine harmonische sein kann. Wir setzen demnach

$$\varphi = \mathfrak{B} \cos a(x - ct),$$

wobei  $\mathfrak{B}$  eine Funktion von  $z$  allein darstellen soll. Es ist also

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -a^2 \mathfrak{B} \cos a(x - ct),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{d^2 \mathfrak{B}}{dz^2} \cos a(x - ct).$$

Beide Gleichungen addiert müssen Null geben, was zur Folge hat

$$\frac{d^2 \mathfrak{z}}{dz^2} = a^2 \mathfrak{z}.$$

Als Lösung dieser Gleichung haben wir

$$\mathfrak{z} = A e^{az} + B e^{-az}.$$

Am Boden des Gefäßes, d. h. für  $z = 0$  kann nun keine Bewegung parallel zur  $z$ -Achse stattfinden, es muß hier  $w = 0$ , also auch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

sein. Es ist aber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a (A e^{az} - B e^{-az}) \cos a (x - ct).$$

Soll dies für  $z = 0$  ebenfalls Null werden, so muß

$$A = B$$

sein, woraus resultiert

$$\varphi = A (e^{az} + e^{-az}) \cos a (x - ct).$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit  $c$  bedienen wir uns der hydrodynamischen Grundgleichungen (47), in welchen wir die Geschwindigkeiten durch die entsprechenden Ableitungen ihres Potentials ersetzen wollen. Ferner wollen wir annehmen, daß wir es nur mit kleinen Amplituden zu tun haben, so daß wir die Produkte  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  usw. vernachlässigen können. Wir erhalten dann

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

und zwei analoge Gleichungen nach den beiden anderen Richtungen des Koordinatensystems. Unter  $V$  verstehen wir das Potential der Kräfte  $X, Y, Z$ . Durch Integration erhalten wir also

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + \frac{p}{\rho} = C.$$

Auf die Flüssigkeit wirke bloß die Schwere. Dann ist  $V = gz$  und

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} = C.$$

Da wir nur kleine Amplituden annehmen, so können wir den Druck an irgendeiner Stelle der Flüssigkeit als unabhängig von der Zeit ansehen, so daß wir durch Differentiation nach  $t$  die Gleichung

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

erhalten. Nun ist aber

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

mithin

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Aus unserer Lösung für  $\varphi$  finden wir jetzt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -a^2 c^2 A (e^{az} + e^{-az}) \cos a(x - ct)$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a A (e^{az} - e^{-az}) \cos a(x - ct).$$

Setzen wir hier für  $z$  eine beliebige Höhe  $h$  der Flüssigkeit ein und bilden mit den so erhaltenen Werten die Gleichung

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ , so erhalten wir daraus den Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  für die betreffende Höhe  $h$  der Flüssigkeit. Dieser ist gegeben durch

$$c^2 = \frac{g}{a} \cdot \frac{e^{ah} - e^{-ah}}{e^{ah} + e^{-ah}}.$$

Den Wert für  $a$  können wir sehr leicht finden, wenn wir die Wellenlänge  $\lambda$  einführen. Wächst nämlich  $x$  um  $\lambda$ , so muß sich derselbe Zustand wiederholen. Es muß also  $a\lambda = 2\pi$ , folglich

$$a = \frac{2\pi}{\lambda}$$

sein, woraus folgt

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}.$$

Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängig, was zur Folge hat, daß Dispersion der Wellen eintritt. Ferner ändert sie sich mit der Höhe der Flüssigkeit. Jede Störung in einer Flüssigkeit wird daher bei der Fortpflanzung sofort ihre Gestalt ändern, wenn sie nicht einer harmonischen Kurve entspricht. Ist  $h$  gegenüber  $\lambda$  sehr groß, so wird

$$c = \sqrt{\frac{g\gamma}{2\pi}}.$$

Diese Formel gilt demnach an der Oberfläche tiefer Gewässer. Es ist dort also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen einfach der Wurzel aus der Wellenlänge proportional.

### § 79. Innere Reibung — Ausfluß aus engen Röhren.

Eine bewegte Flüssigkeit, welche in einem Gefäß sich selbst überlassen wird, kommt allmählich zur Ruhe. Die Ursache davon ist die innere Reibung der Flüssigkeit. Strömen nämlich zwei parallele Flüssigkeitsschichten mit verschiedener Geschwindigkeit, so übt die schnellere auf die langsamere eine Beschleunigung, die langsamere auf die schnellere eine Verzögerung aus.

Wir nehmen der Einfachheit halber ebene Schichten an. Die Geschwindigkeit ändere sich von Schicht zu Schicht in linearem Verhältnis. Nach Newton ist dann die innere Reibung

$$(52) \quad R = -\eta f \frac{du}{dz}.$$

Diese Gleichung besagt folgendes. Ändert sich die Geschwindigkeit  $u$  der Schichte senkrecht zu ihrer Bewegungsebene im Verhältnis  $\frac{du}{dz}$ , so übt auf eine Ebene von der Größe  $f$  die darunter befindliche Flüssigkeitsschicht in der Richtung der Bewegung einen Zug  $-\eta f \frac{du}{dz}$  aus.  $\eta$  ist eine Konstante der Flüssigkeit. Man nennt sie die Reibungskonstante oder den Reibungskoeffizienten.

Wir wollen den Einfluß der inneren Reibung auf die Bewegung von Flüssigkeiten in engen Röhren untersuchen. Bezüglich der Röhrenachse sei alles symmetrisch angeordnet. Wir bilden uns einen Elementarzylinder, indem wir um die Achse zwei Zylinderflächen vom Radius  $r$  und  $r + dr$  legen. Die Länge des Zylinders sei  $\xi$ . Die Bewegung der Flüssigkeit sei stationär, d. h. die Summe aller Kräfte, welche an unserem Zylinder angreifen, muß Null

sein. Auf die linke Seite des Zylinders, dessen Achse wir uns horizontal denken, wirke der Druck  $p$ , das ergibt die Kraft  $2\pi r dr \cdot p$ . Von der rechten Seite her haben wir die Kraft  $-2\pi r dr p'$ . Nun ist

$$p' = p + \frac{dp}{dx} \xi,$$

mithin der resultierende Druck

$$2\pi r dr (p - p') = -2\pi r \xi \frac{dp}{dx} dr.$$

Zu dieser Kraft kommen noch die Reibungskräfte. Für die innere Zylinderfläche haben wir nach Gleichung (52)

$$R = -2\pi r \xi \eta \frac{du}{dr},$$

für die äußere

$$R' = R + \frac{dR}{dr} dr.$$

Beide Kräfte wirken aber in entgegengesetztem Sinn, weshalb wir sie voneinander zu subtrahieren haben, wonach wir erhalten

$$R - R' = -\frac{dR}{dr} dr = 2\pi \xi \eta \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) dr.$$

Die Summe aller Kräfte, welche an unserem Elementarzylinder angreifen, ist also

$$-2\pi r \xi \frac{dp}{dx} dr + 2\pi \xi \eta \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) dr = 0,$$

woraus folgt

$$r \frac{dp}{dx} - \eta \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

Da der Druck  $p$  von  $r$  völlig unabhängig angenommen werden soll, so genügt für unsere Gleichung

$$\frac{dp}{dx} = a,$$

was zur Folge hat, daß

$$a r - \eta \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

und integriert

$$\frac{a r^2}{2} - \eta r \frac{du}{dr} = C$$

wird. Schreiben wir diese Gleichung

$$\frac{a r}{2} - \eta \frac{du}{dr} = \frac{C}{r}$$

und integrieren nochmals, so bleibt

$$\frac{a r^2}{4} - \eta u = C \ln r + D.$$

Für  $r = 0$  kann nun die Geschwindigkeit  $u$  nicht unendlich groß werden, es muß also  $C = 0$  sein. Ferner sei die Geschwindigkeit an der Röhrenwand Null, d. h. für  $r = r_1$  ist

$u = 0$ , daher  $D = \frac{a r_1^2}{4}$ . Demnach wird unsere Gleichung

$$u = - \frac{a}{4\eta} (r_1^2 - r^2).$$

Diese Formel für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit können wir nun benutzen, um die Ausflußmenge zu bestimmen. Durch das Querschnittselement  $2\pi r dr$  wird in der Sekunde das Flüssigkeitsvolumen

$$2\pi u r dr = - \frac{\pi a}{2\eta} (r_1^2 - r^2) r dr$$

fließen. Durch den ganzen Querschnitt strömt daher die Menge

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi a}{2\eta} \int_0^{r_1} (r_1^2 - r^2) r dr &= -\frac{\pi a}{2\eta} \left[ \frac{r_1^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{r_1} \\
 &= -\frac{\pi a r_1^4}{8\eta} = \frac{\pi (p_1 - p_0) r_1^4}{8\eta l},
 \end{aligned}$$

wenn wir unter  $p_1$  den Druck am Anfang, unter  $p_0$  jenen am Ende verstehen, und  $l$  die Länge der Röhre ist, da ja dann

$a = -\frac{p_1 - p_0}{l}$  wird. Die von uns gewonnene Gleichung

enthält das Gesetz von Poiseuille, nach welchem die Ausflußmenge der 4. Potenz des Radius und dem Druckunterschied am Anfang und Ende der Röhre direkt, ihrer Länge verkehrt proportional ist.



# Register.

(Die beigetzten Zahlen geben die Seite des Buches an.)

- Ablenkung des Lichts im Schwerefeld 97.  
 Absoluter Raum 98.  
 Additionstheorem der Geschwindigkeiten 90.  
 Äquivalenzprinzip 98.  
 d'Alembertsches Prinzip 36.  
 Amplitude 18.  
 Anfangsbedingungen 13.  
 Anfangsgeschwindigkeit 14.  
 Anfangsrichtung 15.  
 Bahn 7.  
 Barometrische Höhenformel 115.  
 Beharrungsvermögen 11.  
 Beschleunigung 8.  
 Bewegung 7.  
 — elastischer Körper 106ff.  
 — eines Massenpunkts auf einer Kugelfläche 38.  
 — eines starren Körpers um einen festen Punkt 60.  
 — relativ zur Erdoberfläche 75.  
 Bewegungsgröße 22.  
 Bunsens Gasdichtenbestimmung 130.  
 Deformation durch Normalspannung 99ff.  
 — durch Tangentialspannung 101.  
 Dehnung 99.  
 Dispersion der Wellen 134.  
 Drehimpuls 51, 67.  
 Drehung 48, 49.  
 Drehungsmoment 50, 67.  
 Einsteins Äquivalenzprinzip 98.  
 Einsteins spezielle Relativitätstheorie 84.  
 — Zeitdilatation 89.  
 Elastischer Stoß 23.  
 Elastizitätsmodul 100.  
 Elastizitätstheorie 98ff.  
 Energie 24, 27, 95.  
 — der drehenden Bewegung 66.  
 — der Ruhmasse 97.  
 Energieprinzip 27.  
 Erhaltung der Energie 27, 40.  
 Erste Hauptgleichung der Kapillarität 120.  
 Eulersche Gleichungen der Drehbewegung 62.  
 — der Hydrodynamik 126.  
 Fall 14.  
 Fallabweichung infolge der Erddrehung 79.  
 — nach Osten 80.  
 Fallbewegung auf willkürlicher Bahn 40.  
 Feldintensität 91.  
 Flächengeschwindigkeit 29.  
 Fliehkraft 17.  
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen 143.  
 Foucaults Pendel 82.  
 Freie Achse 63.  
 — Oberfläche 116.  
 Freier Fall 14.  
 Freiheitsgrad 73.  
 Galileitransformation 83.  
 Gedämpfte Schwingung 19.  
 Gemeinsame Oberfläche 117.  
 Generalisierte Geschwindigkeit 75.  
 — Koordinaten 72.  
 Generalisierte Kraft 75.  
 Geschwindigkeit 7.  
 Geschwindigkeitspotential 132.  
 Gesetz von der Erhaltung der Energie 27, 30.  
 Gleichförmige Bewegung 7.  
 Gleichförmig beschleunigte Bewegung 8.  
 Gleichgewicht 34.  
 — eines Massenpunkts auf einer Kugelfläche 36.  
 — einfacher Maschinen 41.  
 Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit 115.  
 Grahams Transpirationsgesetz 130.  
 Gravitation 28.  
 Gravitationsgesetz 28.  
 Gravitationskonstante 28.  
 Gravitationstheorie 97.  
 Guldins Theorem 46.  
 Hauptachsen der Trägheit 60.  
 Hauptgleichungen der Kapillarität 117ff.  
 Helmholtz' Geschwindigkeitspotential 132.  
 Höhenformel 116.  
 Homogenes Feld 90.  
 Horizontalbewegung und Erddrehung 81.  
 Horizontaler Wurf 14.  
 Hydrodynamik 125ff.  
 Hydrodynamische Grundgleichungen 126.  
 Hydromechanik 111ff.  
 Hydrostatische Grundgleichungen 111ff.  
 Hydrostatischer Druck 114.

- Hydrostatisches Paradoxon 114.
- Ideale Flüssigkeit 135.
- Impuls 22, 94.
- Innere Reibung 144ff.
- Isotroper Körper 106.
- Kapillarität 117.
- Kapillaritätskonstanten 117.
- Kapillarkräfte an Blasen und Tropfen 122ff.
- Kapillarröhren 124.
- Keplers Gesetze 33.
- Kinetische Energie 24.
- und Erdrotation 80.
- Klassische Mechanik 94.
- Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung 9ff.
- der Kraft 12.
- Konstanz der Lichtgeschwindigkeit 85.
- Kontinuitätsgleichung 127.
- Kraft 11.
- Kräfte, die nicht im Schwerpunkt angreifen 51.
- Kräftepaar 48.
- Kräfteparallelogramm 11.
- Kraftfeld 90.
- Kraftfunktion 26.
- Kraftlinie 90.
- Kreisbewegung 65.
- Krummlinige Bewegung 15.
- Lagranges Bewegungsgleichungen erster Art 37.
- zweiter Art 72.
- Längsdilatation 100.
- Lebendige Kraft 24.
- Lehrbücher der Mechanik 6.
- der Relativitätstheorie 6.
- Logarithmisches Dekrement 21.
- Longitudinale Masse 93.
- Lorentzkontraktion 89.
- Lorentztransformation 88.
- Luftdruck und Höhe 116.
- Masse 7, 11, 91.
- Massenmittelpunkt 42.
- Massenpunkt 12.
- Mechanik des Massenpunkts 7ff.
- nicht starrer Punktsysteme 70ff.
- starrer Körper 40ff.
- Meniskus 121.
- Merkurbewegung 97.
- Negative Kraft 19.
- Newtons Gravitationsgesetz 28.
- Niveaufläche 114, 115.
- Normalbeschleunigung 16.
- Normalkraft 16, 99.
- Normalspannungen 99ff.
- Nutation 69.
- Oberflächenspannung 120.
- Ortsveränderung eines starren Körpers 48.
- Parallelogramm der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen 10.
- Parallelverschiebung 48.
- Pendel 17ff., 39.
- im widerstehenden Mittel 19ff.
- Perihelbewegung des Merkur 97.
- Physisches Pendel 53, 58.
- Planetenbewegung 28, 33.
- Poiseuillesches Gesetz 147.
- Potential 26, 30, 113.
- Potentielle Energie 27.
- Prinzip der Erhaltung der Flächenräume 71.
- — des Schwerpunkts 70.
- — Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung 17.
- — virtuellen Verschiebungen 33, 41.
- von d'Alembert 36.
- von der Erhaltung der Energie 27, 30.
- Präzession 69.
- Punktsystem 40.
- Querkontraktion 99.
- Raum 7.
- Reaktionserscheinungen 71.
- Reduzierte Pendellänge 54, 58.
- Reibungskoeffizient 144.
- Reibungskonstante 144.
- Relativitätsprinzip 85.
- Relativitätstheorie 83ff.
- Resultierende Geschwindigkeit und Beschleunigung 9.
- Reversionspendel 54.
- Rotierende Flüssigkeit 115.
- Rotverschiebung der Spektrallinien im Schwerfeld 97.
- Ruhelage 17.
- Ruhmasse 93.
- Satz von der Erhaltung der Energie 27, 30.
- Scherende Kraft 102.
- Scherung 102.
- Schiebung 102ff.
- Schwerkraft 12.
- Schwerpunkt 42.
- einer ebenen Fläche 44.
- einer Halbkugel 46.
- einer Linie 43.
- einer Parabelfläche 44.
- eines Körpers 45.
- eines Kreisbogens 43.
- eines Kugelsegments 46.
- Schwingende Bewegung 17.
- Schwingungsdauer 19, 21.
- Sekundenpendel 57.
- Senkrechter Wurf 14.
- Spezielle Relativitätstheorie 83ff.
- Starrer Körper 41.
- Stationäre Bewegung der Flüssigkeiten 137ff.
- Stationärer Zustand 137.
- Steighöhe in Kapillarröhren 122, 125.
- zwischen Platten 122.
- Stoß von Kugeln 22.

- Tangentialbeschleunigung 16.  
 Tangentialkraft 16, 99.  
 Tangentialspannungen 99.  
 Toricellis Ausflußgesetz 128.  
 Trägheitsellipsoid 58.  
 Trägheitsmoment 50.  
 — einer Kugel 57.  
 — eines Parallelepipeds 46.  
 — um eine beliebige Achse 52.  
 Transformation der hydrodynamischen Gleichungen 130ff.  
 Transversale Masse 93.  
 Überlichtgeschwindigkeit 90, 96.  
 Unelastischer Stoß 22.
- Ungleichförmige Bewegung 7.  
 Virtuelle Verschiebung 33.  
 Volumsdilatation 101.  
 Wasserwellen 140ff.  
 Weg 7.  
 Wegintegral der Kraft 24.  
 Wellen 140ff.  
 Wellenlänge 143.  
 Widerstand 19.  
 Widerstehendes Mittel 19.  
 Windbewegung 81.  
 Winkelbeschleunigung 50.  
 Winkelgeschwindigkeit 18, 50, 82.  
 — der Flüssigkeitselemente 131.  
 Wirbelbewegung 135ff.
- Wulst, Oberfläche und Inhalt 47.  
 Wurfbewegung 12.  
 Wurfhöhe 15.  
 Wurf mit Berücksichtigung der Erddrehung 80.  
 Wurfweite 15.  
 Zeit 7, 89.  
 Zeitdilatation 89.  
 Zeitintegral der Kraft 22.  
 — des Drehmoments 50.  
 Zentripetalbeschleunigung 15.  
 Zentripetalkraft 17.  
 Zweite Hauptgleichung der Kapillarität 121.  
 Zylinder in stationär strömender Flüssigkeit 138ff.

# Die Philosophie der Raum-Zeit-Lehre

Von

**Professor Dr. Hans Reichenbach**

1928. Groß-Oktav. VI, 380 Seiten.

Mit 50 Figuren und einer Tafel im Text.

Geheftet M. 18.—, gebunden M. 20.—

*Aus den Urteilen:*

„Es ist nicht möglich, im Rahmen einer solchen Besprechung den Inhalt eines so umfassenden und grundlegenden Buches voll im einzelnen und lückenlos zu würdigen. Das Buch ist in jeder Hinsicht ein Werk von größter wissenschaftlicher Bedeutung und verdient allgemeinstes Interesse in dem Kreise aller Mathematiker, Physiker und Philosophen.“

Physikalische Zeitschrift

„Das ausgezeichnete Werk verdient einen großen Leserkreis, denn es kann viel zur Verbreitung wichtiger Einsichten und auch zur Aufklärung häufiger Mißverständnisse beitragen.“

Die Naturwissenschaften



Verlag

Walter de Gruyter & Co., Berlin W.10

Genthiner Straße 38

# Empfindliche Galvanometer für Gleich- und Wechselstrom

Von **Dr. Otto Werner**

1928. Groß-Oktav. VIII, 208 Seiten. Mit 23 Abbildungen und 17 Tabellen.

Geheftet M. 13.—, gebunden M. 14.—

Aus dem Inhalt:

I. Galvanometer für Gleichstrom. II. Galvanometer für Wechselstrom. III. Indirekte Methoden zur Messung kleiner Ströme. IV. Zusatzeinrichtungen. V. Das Galvanometer in den Schaltungen.

## Aerodynamik des Fluges

Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie

Von **Harry Schmidt**

Professor an der Gewerbehochschule Köthen  
Privatdozent an der Universität Leipzig

1929. Groß-Oktav. VII, 258 Seiten. Mit 81 Figuren.

Geheftet M. 15.—, gebunden M. 16.50

Aus dem Inhalt:

Einleitung. I. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik. II. Wirbelfreie Flüssigkeitsbewegungen. III. Funktionentheoretische Hilfsmittel. IV. Allgemeine Theorie des Auftriebs unendlich breiter Tragflächen. V. Spezielle Ausführungen zur Theorie der unendlich breiten Tragfläche. VI. Wirbelbewegungen. VII. Die Prandtl'sche Tragflügeltheorie. — Literaturhinweise. — Register.

*Wir liefern unter Bezugnahme auf diese Anzeige ausführliche Prospekte kostenlos.*



Walter de Gruyter & Co., Berlin W. 10  
Genthiner Straße 38



# Literatur zur Physik

Mit einem Anhang: Mathematische Literatur  
für den Physiker

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 35

**Lehrbuch der Physik.** Von Eduard Riecke, weiland Gehelmer Regierungsrat, o. Professor an der Universität Göttingen. Zu eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen herausgegeben von Professor Dr. Ernst Lecher †, Vorstand des I. Physikalischen Instituts der Universität Wien, und Dr. Adolf Smekal, o. Professor an der Universität Halle a.S. Siebente, verbesserte und um eine Darstellung der Atomphysik vermehrte Auflage. Groß-Oktav.

I. Band: Mechanik und Akustik. Wärme. Optik. Mit 458 Figuren im Text. XVI, 656 Seiten. 1923 . . . . . RM. 12.60, geb. RM. 14.—

II. Band: Magnetismus und Elektrizität. Atomphysik. Mit einem Bildnis von E. Lecher † und 319 Figuren im Text. XVI, 725 Seiten. 1928. RM. 15.—, geb. RM. 17.—

**Lehrbuch der Physik.** Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule zu München. Von H. Ebert, weil. Professor an der Technischen Hochschule München.

I. Band. Mechanik. Wärmelehre. Mit 168 Abbildungen. Zweite Auflage. Groß-Oktav. XX, 661 Seiten. 1917. Anastatischer Neudruck. 1920. RM. 20.—, geb. RM. 21.50

II. Band, I. Teil. Die elektrischen Energieformen. Fertiggestellt und herausgegeben von Professor C. Heinke. Mit 341 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. XX, 687 Seiten. 1920 . . . . . RM. 22.—, geb. RM. 24.—

II. Band, II. Teil. Die strahlende Energie. Fertiggestellt und herausgegeben von Professor C. Heinke. Mit 196 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. XII, 416 Seiten. 1923 . . . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

**Einführung in die theoretische Physik.** Von Dr. Clemens Schaefter, Professor an der Universität Breslau.

I. Band. Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929 . . . . . RM. 45.—, geb. RM. 48.—

II. Band. Theorie der Wärme. Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 88 Figuren im Text. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. 1929. Groß-Oktav. X, 660 Seiten . . . . . RM. 28.—, geb. RM. 30.—

III. Band, 1. Teil. Elektrodynamik und Optik. Mit 235 Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 918 Seiten. 1932. RM. 37.50, geb. RM. 40.—  
2. Teil. Quantentheorie. Groß-Oktav. Mit 88 Abb. im Text. VII, 510 Seiten. 1937 . . . . . RM. 26.—, geb. RM. 28.—

*„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“*  
Annalen der Physik.

**Einführung in die theoretische Physik,** mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien.

I. Band. Fünfte und sechste, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 67 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 396 Seiten. 1930. RM. 8.50, geb. RM. 10.—

II. Band. Fünfte und sechste, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 85 Abbildungen im Text und auf sechs Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 448 Seiten. 1930 . . . . . RM. 8.50, geb. RM. 10.—

„Der Vorzug des Buches liegt zweifellos in dem Umstande, daß es dem Verfasser gelingt, den Leser unter Vermeidung jedes überflüssigen Wissensballastes bis an die Probleme der modernen theoretisch-physikalischen Forschung heranzuführen. Es gibt gewiß kein anderes Buch ähnlichen Umfanges, das den Studierenden gleichzeitig mit den Elementen der theoretischen Physik und mit den wichtigsten modernen Forschungsergebnissen, wie Röntgenspektroskopie, Kristallanalyse, Isotopenbestimmung usw., vertraut macht.“

Monatshefte für Mathem. u. Physik.

Theoretische Physik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. 5 Bände.

I. Mechanik. Mit 25 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 76) . . . . . Geb. RM. 1.62

II. Schall und Wärme. Mit 7 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 133 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 77) Geb. RM. 1.62

III. Elektrizität und Magnetismus. Mit 35 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 78) Geb. RM. 1.62

IV. Optik. Mit 44 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 374) . . Geb. RM. 1.62

V. Wärmestrahlung, Elektronik und Atomphysik. Mit 16 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 130 Seiten. 1930. (Sammlung Göschen Bd. 1017) . . . . . Geb. RM. 1.62

Kleiner Grundriß der theoretischen Physik. Kleine, besonders bearbeitete Ausgabe der Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Arthur Haas, Professor für Physik a. d. Univ. Wien. Mit 22 Figuren. Oktav. VII, 183 Seiten. 1934 . . . . . Geb. RM. 5.30

Dieser „Kleine Grundriß“ ist für die Leser bestimmt, die die Physik nicht als Hauptstudium, sondern nur als Ergänzung eines anderen Faches betreiben und deshalb auf die umfangreiche, zweibändige, schon in 6. Auflage vorliegende „Einführung in die theoretische Physik“ desselben Verfassers verzichten können. Für Studierende der Physik selbst soll der „Kleine Grundriß“ als erste Einleitung oder als Repetitorium dienen. Selbstverständlich ist der „Kleine Grundriß“ ein in sich abgeschlossenes, einheitliches und selbständiges Buch. Das Hauptgewicht wurde auf die Verständlichmachung der Grundlagen der theoretischen Physik gelegt — auf die Grundgleichungen der Bewegung und des elektromagnetischen Feldes sowie auf die fundamentalen Prinzipie der Wärmelehre und der Atomphysik. Die modernen Probleme sind stark herausgestellt. Für die Benutzung des Grundrisses werden besondere Vorkenntnisse nicht vorausgesetzt; es genügt die Kenntnis der Grundideen der Differential- und Integralrechnung sowie der wichtigsten Ergebnisse der Experimentalphysik.

Das Naturbild der neuen Physik. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren im Text. Oktav. V, 129 Seiten. 1932. RM. 5.—, geb. RM. 6.—

Atomtheorie. Von Dr. phil. Arthur Haas, Professor für Physik an der Universität in Wien. Mit 81 Figuren im Text und auf 5 Tafeln. Dritte, völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Groß-Oktav. VIII, 292 Seiten. 1936 . . . . . RM. 8.50, geb. RM. 10.—

Die Welt der Atome. Zehn' gemeinverständliche Vorträge. Von Arthur Haas, Dr. phil., a. o. Professor für Physik an der Universität Wien. Mit 37 Figuren im Text und auf 3 Tafeln. Oktav. XII, 130 Seiten. 1926. RM. 4.80, geb. RM. 6.—

Künstliche Verwandlung der Elemente (Zertrümmerung der Atome). Von Dr. Hans Pettersson in Göteborg (Schweden). Aus dem Schwedischen übersetzt von Elisabeth Kirsch. Mit 59 Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 151 Seiten. 1929 . . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.—

**Die Umwandlungen der chemischen Elemente.** Von Dr. Arthur Haas, Professor der Physik an der Universität Wien. Mit 31 Abbildungen. Oktav. VIII, 118 Seiten. 1935 . . . . . RM. 4.30, geb. RM. 5.—

*Unter den wissenschaftlichen Leistungen der letzten drei Jahre (1932 bis 1934) haben vielleicht wenige so viel Interesse in weitesten Kreisen erweckt wie die unwäzrenden Entdeckungen, die in dieser Zeit der physikalischen Forschung glückten: die Auffindung neuer Urbausteine der Materie (Neutron und Positron), der experimentelle Nachweis der Entstehung von Materie aus Licht, die Feststellung und Isolierung des schweren Wassers, die ungeahnten und durch neue Methoden ermöglichten Erfolge der Atomzertrümmerung und die künstliche Erzeugung von Radioaktivität.*

*Von diesen neuen Entdeckungen berichtet zusammenfassend, kurz und möglichst leicht verständlich das Büchlein von Haas in der Form von fünf Vorträgen: I. Die Materialisation des Lichtes — II. Die Grundstoffarten — III. Die Mittel der Atomzertrümmerung — IV. Die Ergebnisse der Atomzertrümmerung — V. Die künstliche Radioaktivität. 31 Abbildungen, fast durchweg Wiedergaben nach Photographien, gewähren einen anschaulichen Einblick in die Welt der Atome.*

**Experimentalphysik.** Von Professor Robert Lang, Rektor des Realgymnasiums in Stuttgart.

I. Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper. Dritte Auflage. Mit 125 Figuren im Text. 146 Seiten. 1927. (Sammlung Göschen Bd. 611) Geb. RM. 1.62

II. Wellenlehre und Akustik. Mit 69 Figuren im Text. Zweite Auflage. 96 Seiten. 1920. (Sammlung Göschen Bd. 612) . . . . . Geb. RM. 1.62

III. Wärmelehre. Mit 55 Figuren im Text. 98 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 613) . . . . . Geb. RM. 1.62

IV. Lehre vom Licht. Mit 90 Figuren im Text. 110 Seiten. 1925. (Sammlung Göschen Bd. 614) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Methoden der praktischen Analysis.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 132 Figuren. Groß-Oktav. 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücher Bd. 12) . . . . . RM. 20.—, geb. RM. 21.50

**Vektoranalysis** in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen Anwendungen. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 37 Abbildungen im Text. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. VI, 147 Seiten. 1929 . . . . . RM. 5.—, geb. RM. 6.—

**Vektoranalysis.** Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Sammlung Göschen Bd. 354) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Ein für Studium und Praxis mit Erfolg benutztes Hilfsmittel zur Lösung technischer Aufgaben.*

**Punkt- und Vektor-Rechnung.** Von Dr. Alfred Lotze, a. o. Prof. für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. Groß-Oktav. 132 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücher Bd. 13.)

RM. 12.—, geb. RM. 13.—

**Die Grundlagen der Physik.** Synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie. Von Dr. Hugo Dingler, Professor an der Universität München. Zweite Auflage. Oktav. XIV, 336 Seiten. 1923.

RM. 4.—, geb. RM. 5.—

*Aus dem Inhalt: Das Geltungsproblem. Das Zweckprinzip. Die Logik. Raum und Zeit. Kausalität. Die Mechanik.*

**Physik und Hypothese.** Versuch einer induktiven Wissenschaftslehre nebst einer kritischen Analyse der Fundamente der Relativitätstheorie. Von Dr. Hugo Dingler, Professor an der Universität München. Oktav. XI, 200 Seiten. 1921 . . . . . RM. 3.—, geb. RM. 4.—

**Wörterbuch der Physik.** Von Professor Dr. Felix Auerbach. Mit 267 Figuren. Oktav. X, 466 Seiten. 1920 . . . . . Geb. RM. 4.50

*Ein unentbehrliches Nachschlagewerk für Wissenschaft und Praxis der Physiker, Chemiker, Mediziner und Techniker.*

**Physikalische Formelsammlung.** Von G. Mahler, † Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Sechste Auflage, besorgt von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen in Württemberg. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 136)

Geb. RM. 1.62

*Das Buch gibt fertige Resultate und ermöglicht einen raschen Überblick über die Teilgebiete der Physik.*

**Physikalische Aufgabensammlung.** Von G. Mahler, † Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Neu bearbeitet von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen. Fünfte, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1936. (Sammlung Göschen Bd. 243)

Geb. RM. 1.62

*Zum Studium und Selbststudium für den Anfänger und zum Gebrauch in der Ingenieurpraxis.*

**Physikalische Messungsmethoden.** Von Professor Dr. Wilhelm Bahrdt in Berlin-Lichterfelde. Mit 54 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 147 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 301)

Geb. RM. 1.62

**Einführung in die Differentialgleichungen der Physik.** Von Professor Ludwig Hopf. Mit 49 Abbildungen. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1070)

Geb. RM. 1.62

**Kristallographie.** Von Dr. W. Bruhns, weil. Professor an der Bergakademie Clausthal. Dritte Auflage, neu bearbeitet von Dr. P. Ramdohr, o. Professor an der Universität Berlin. Mit 192 Abbildungen. 109 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 210)

Geb. RM. 1.62

**Einführung in die Kristalloptik.** Von Dr. Eberhard Buchwald, Professor an der Technischen Hochschule Danzig. 3., neu bearb. Auflage. Mit 116 Fig. 131 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 619)

Geb. RM. 1.62

**Einführung in die geometrische Optik.** Von Dr. W. Hinrichs in Berlin-Wilmersdorf. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 56 Figuren. 1924. (Sammlung Göschen Bd. 532)

Geb. RM. 1.62

*Das Buch gibt die Grundlagen des Gebiets bis zur Brechung durch ein zentriertes System von Kugelflächen und zu den einfachsten Linsenfällen. Jedem Abschnitt sind Übungsbeispiele beigegeben.*

**Radioaktivität.** Von Dr. Karl Przibram, Professor an der Universität Wien. Mit 31 Abbildungen. 142 Seiten. 1932. (Sammlung Göschen Bd. 317).

Geb. RM. 1.62

**Röntgenstrahlen.** (Physik, Technik und Anwendung.) Von Dr. phil. nat. Richard Herz in Frankfurt a. M. Mit 48 Figuren im Text und 36 Abbildungen auf 16 Tafeln. 1926. (Samml. Göschen Bd. 950)

Geb. RM. 1.62

*Das Buch wendet sich an Ärzte, Röntgenassistenten, Ingenieure, Techniker und vor allem an Studierende der Medizin und Naturwissenschaften.*

**Teilchenstrahlen (Korpuskularstrahlen).** Von Dr. H. Mark, Professor an der Universität Wien. Mit 59 Abbildungen. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1083)

Geb. RM. 1.62

**Luftlektrizität.** Von Prof. Dr. Karl Kähler, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter am Preußischen Meteorologisch-Magnetischen Observatorium in Potsdam. Zweite Auflage. Mit 19 Abbildungen. 134 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 649)

Geb. RM. 1.62

*Inhalt: Das natürliche Feld der Erde. Das elektrische Teilvermögen der Atmosphäre. Die elektrischen Ströme in der Luft. Die radioaktiven Vorgänge in der Atmosphäre. Elektrische Wirkungen des Sonnenlichts. Ursprung der Luftelektrizität.*

**Röntgenspektroskopie und Kristallstrukturanalyse.** Von Prof. Dr. Arthur Schlegel und Dr. Erich Schneider. Zwei Bände. Groß-Oktav. 1929.

I. Band: Mit 249 Figuren und 57 Tabellen im Text. VIII, 336 Seiten.

RM. 18.50, geb. RM. 20.—

II. Band: Mit 553 Figuren und 40 Tabellen im Text. IV, 344 Seiten.

RM. 22.50, geb. RM. 24.—

Das vorliegende Werk behandelt— auf einem Minimum an Voraussetzungen aufbauend — Theorie und Praxis der Röntgenspektroskopie und Kristallstruktur-analyse. Zur Beherrschung dieser Methoden ist jedoch eine so große Zahl verschiedenartigster Kenntnisse und Fertigkeiten (Röntgenstrahlen, Hochspannung, Vakuum, Atomtheorie usw.) erforderlich, daß es denen, die sie auf irgendein Spezialproblem anwenden wollen, zur gründlichen Einarbeitung zumeist an Zeit gebricht. Hier greift das vorliegende Werk ein, das den Gegenstand nach der praktischen und theoretischen Seite erschöpfend behandelt.

**Spektroskopie.** Von Dr. Karl Wilh. Meißner, o. Professor d. Experimentalphysik an der Universität Frankfurt a. M. Mit 102 Figuren. 1935. (Sammlung Göschen Bd. 1091) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht.** Von Prof. Dr. A. Nippoldt, Direktor des Magnetischen Instituts der Universität Berlin. Mit 9 Tafeln und 13 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 175) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Einführung in die Theorie der Wärme.** Von Dr. Heinrich Mache, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 96 Textfiguren. Groß-Oktav. VIII, 319 Seiten. 1921 . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.—  
*Aus dem Material von Vorlesungen entstanden und auf einem Minimum von mathematischen und physikalischen Kenntnissen aufbauend, ist das Werk eine Einführung zur streng wissenschaftlichen Behandlung dieses Themas.*

**Die Physik der Verbrennungsercheinungen.** Von Dr. Heinrich Mache, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 43 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln. Groß-Oktav. V, 133 Seiten. 1918. RM. 3.—, geb. RM. 3.80

**Empfindliche Galvanometer für Gleich- und Wechselstrom.** Von Dr. Otto Werner. Mit 23 Abbildungen und 17 Tabellen. Groß-Oktav. VIII, 208 Seiten. 1928 . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.—  
*Der Verfasser erörtert Aufbau, Arbeitsweise und Empfindlichkeitsarten der Galvanometerkonstruktionen sowohl für Gleich- als auch für Wechselstrom und gibt Gesichtspunkte für die Galvanometerauswahl und kritische Vergleiche der Galvanometertypen.*

**Vorlesungen über Thermodynamik.** Von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Neunte Auflage. Groß-Oktav. X, 288 Seiten. 1930 . . . Geb. RM. 11.50

**Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung.** Vorlesungen zur Einführung in die theoretische Physik, gehalten im Sommersemester 1914 an der Universität Leipzig. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 45 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 216 Seiten. 1914. RM. 7.50

**Die Prinzipie der Dynamik.** Von Dr. Clemens Schaefer, o. Professor an der Universität Breslau. Mit 6 Figuren im Text. Groß-Oktav. IV, 76 Seiten. 1919 . . . . . RM. 2.50

*„Das ausgezeichnete Werk behandelt in eingehender, elementarer Weise die Fragen der Ableitung und Äquivalenz der verschiedenen mechanischen Prinzipien.“*  
*Monatshefte für Mathematik und Physik.*

**Geschichte der Physik.** Von A. Kistner, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe i. B.

I. Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 126 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 293) . . . . . Geb. RM. 1.62

II. Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Zweite, erweiterte Auflage. 149 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 294)

Geb. RM. 1.62

**Wilhelm von Siemens.** Ein Lebensbild. Gedenkblätter zum 75 jährigen Bestehen des Hauses Siemens & Halske. Von August Roth. Mit 5 Tafeln in Lichtdruck. Oktav. V, 224 Seiten. 1922 . . . RM. 2.60, geb. RM. 4.—

*Die Biographie gibt zugleich ein Bild der Entwicklung der Siemenswerke und ein Stück Geschichte der deutschen Technik.*

- Einführung in die Elektrotechnik.** Hochschulvorlesungen von Dr. C. Heinke, Geh. Reg.-Rat, o. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule München. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 560 Abbildungen. Oktav. 490 Seiten. 1924 . . . . . Geb. RM. 18.—
- Lehrbuch der Elektrotechnik.** Von Professor E. Stöckhardt, Diplomingenieur und Studienrat. Dritte, umgearbeitete Auflage. Mit mehreren hundert Abbildungen. Oktav. VIII, 327 Seiten. 1925 . . . . . Geb. RM. 13.—
- Elektrotechnik.** Einführung in die Starkstromtechnik. Von Prof. I. Herrmann. (Samml. Göschen Bd. 196—198. 657.)
- I. Die physikalischen Grundlagen. Sechste, neubearb. Auflage. Mit 88 Figuren und 16 Tafeln. 128 Seiten. 1933 . . . Geb. RM. 1.62
- II. Die Gleichstromtechnik. Sechste, neubearb. Auflage. Mit 121 Figuren und 16 Tafeln. 135 Seiten. 1938 . . . . . Geb. RM. 1.62
- III. Die Wechselstromtechnik. Sechste, neubearb. Auflage. Mit 147 Figuren und 16 Tafeln. 184 Seiten. 1938 . . . . . Geb. RM. 1.62
- IV. Die Erzeugung und Verteilung der elektrischen Energie. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 99 Figuren im Text und 16 Tafeln mit 42 Abbildungen. 118 Seiten. 1932 . . . . . Geb. RM. 1.62
- Die Schwingung als Vortriebsfaktor in Natur und Technik.** Gedanken eines Ingenieurs über das Problem der schwingenden Propulsion in Technik und Biologie. Von Hans Schramm. Mit 54 Abbildungen. Oktav. VI, 91 Seiten. 1927 . . . . . RM. 4.—

In Vorbereitung befinden sich:

**Grundlagen der Elektronenoptik.** Von Dr. W. Glaser, Dr.-Ing. Bodo von Borries und Dr. E. Ruska. Mit ca. 100 Abbildungen. ca. 320 Seiten. Geb. ca. RM. 11.—

*Über das außerordentlich interessante Gebiet der Optik kontinuierlicher Mittel und speziell der Elektronenoptik fehlte bisher eine zusammenfassende Darstellung in Lehrbuchform.*

*Nicht nur dem Theoretiker, sondern vielmehr jedem Praktiker wird dieses Lehrbuch willkommen sein, da vor allem das elektrische und magnetische Elektronen-Mikroskop und seine Anwendungsmöglichkeiten beschrieben werden (Oscillograph, Bildwandler, Fernsehen).*

*Die geschickte Textanordnung und das instruktive Bildmaterial machen das Buch für weite Kreise vorzüglich verwendbar.*

**Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung.** Von Dr. E. Hiedemann. Ca. 200 Seiten mit über 100 Abbildungen. Geb. ca. RM. 10.—

*In dieser knappen Monographie kommt ein erfahrener Theoretiker und Praktiker zu Wort.*

*Bei der noch unüberschaubaren Auswirkungsmöglichkeit des Ultraschalles wird sich jeder Physiker, Mathematiker und Chemiker, vor allem aber auch jeder Biologe und Mediziner mit diesem Material beschäftigen müssen. Das Buch wird hier Führer sein und zur Weiterarbeit auf allen Gebieten der Naturwissenschaft in stärkstem Maße anregen.*

# MATHEMATISCHE LITERATUR FÜR DEN PHYSIKER

**Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik.** Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. Neue Ausgabe. Lexikon-Oktav. VIII, 743 Seiten. 1932 . . . . . Geb. RM. 15.—

*Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.*

**Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen,** bearbeitet nach den Vorlesungen von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Prof. a. d. Technischen Hochschule zu Dresden, o. Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 3 Bände. Jeder Band ist einzeln käuflich. . . . . Geb. je RM. 3.80

- I. Vektorrechnung und analytische Geometrie.
- II. Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. — Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung.
- III. Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. — Differentialgleichungen, Differentialgeometrie. — Funktionen einer komplexen Veränderlichen. — Probleme der Variationsrechnung.

*Dieses neue billige Lehrbuch ist aus der Vorlesungspraxis heraus entstanden und gibt in klarem Aufbau eine hervorragende Einführung in die höhere Mathematik. Die bekannte pädagogische Meisterschaft Kowalewski's, die in allen Mathematikerkreisen größte Anerkennung gefunden hat, bewährt sich auch in diesem Werk, das sich würdig seinen früheren Lehrbüchern anschließt.*

**Neue Rechentafeln.** Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut, Berlin. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909 . . . . . Geb. RM. 20.—

Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben . . . . . Geb. je RM. 20.—

**Dr. A. L. Crelles Rechentafeln,** welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII; 501 Seiten. Folio. 1930 . . . . . Geb. RM. 22.—

Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer und französischer Ausgabe vor . . . . . Geb. je RM. 22.—

**Rechen-Resultate.** Tabellen zum Ablesen der Resultate von Multiplikationen und Divisionen bis  $100 \times 1000 = 100\,000$  in Bruchteilen und ganzen Zahlen sowie für Rechnen mit Zahlen jeder Größe, Radizieren (Wurzelsuchen) nach vereinfachtem Verfahren. Von F. Triebel, Technischem Oberinspektor der Reichsdruckerei I. R. Sechste Auflage, 21.—25. Tausend. Mit Seitenregistern. 200 Seiten. (Verlag von M. Krayn, Berlin). . . . . Geb. RM. 18.—

**Fünfstellige Logarithmen.** Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Regierungsrat Professor A. Adler. Zweite Auflage. 117 Seiten und 1 Tafel. 1929. (Samml. Göschen Bd. 423) Geb. RM. 1.62

*Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstellige Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.*

**Fünfstellige Logarithmentafeln** der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters,

Observator am Astronomischen Recheninstitut, Berlin. Lexikon-Oktav. IV. 82 Seiten. 1912

**Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln.** Von Professor Dr. E. F. August, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Neunundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. August, weiland Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII. 204 Seiten. 1931

„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein.“ Geb. RM. 2.—

**Vierstellige Tafeln und Gegentafeln** für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haussner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neue Auflage. 1938. (Samml. Göschen Bd. 81)

„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten.“ Allgemeine Vermessungs-Nachrichten. Geb. RM. 1.62

**Vierstellige Logarithmentafeln.** Von Dr. Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927

**Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker.** Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem Instituts der Universität Marburg. Einundvierzigste bis fünfundvierzigste Auflage. Oktav. 216 Seiten. 1935

„Die wohl allseitig bekannten Küsterschen Rechentafeln sind dem Chemiker, der sich ihrer einmal bedient hat, zum ungern entbehren Werkzeug geworden, das sich in seiner bewährten Anordnung des Stoffes zu einem wirklich nützlichen und fast notwendigen Hilfsbuch entwickelt hat. Die Neuausgabe erscheint wie üblich nach dem neuesten Stande der Forschung.“ Zeitschrift für angewandte Chemie. Geb. RM. 6.80

**Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen  $e^x$  und  $e^{-x}$**  mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1931.

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit, die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschiedenen großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch. Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“ Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure. RM. 9.—

**Mathematische Formelsammlung.** Von Professor O. Th. Bürklen †. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. Ringleb. Mit 37 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. 272 Seiten. 1936. (Sammlung Göschen Bd. 51)

„Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche wohlgeeignet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze System der Elementarmathematik zu geben.“ Fortschritte der Mathematik. Geb. RM. 1.62

**Formelsammlung zur praktischen Mathematik.** Von Dr. Günther Schulz. Mit 10 Abbild. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 1110.) Geb. RM. 1.62

Höhere Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

I: Lineare Gleichungen. Zweite, verbesserte Auflage. 152 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 931) . . . . . Geb. RM. 1.62

II: Gleichungen höheren Grades. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Fig. 160 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 932) Geb. RM. 1.62

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der „allgemeinen“ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definition der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“

*Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterr.*

**Aufgabensammlung zur höheren Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. 160 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1082) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Algebra I: Die Grundlagen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 301 Seiten. 1932. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8) . . . . . Geb. RM. 11.50

**Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. VIII, 243 S. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9) . . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.50

*Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.*

**Praxis der Gleichungen.** Von Professor Dr. C. Runge. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. V, 172 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2) . . . . . RM. 6.— geb. RM. 7.—

**Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra.** Von Professor Dr. Hermann Schubert. Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. 139 Seiten. Neudruck. 1931. (Sammlung Göschen Bd. 48) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Einführung in die Determinantentheorie** einschließlich der Fredholm'schen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. 1925 . . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“

*Schulwart.*

**Differentialrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. R. in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 94 Figuren und 189 Beispielen. 191 Seiten. 1936. (Samml. Göschen Bd. 87) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. R. in Dresden. Mit 63 Figuren und 190 Beispielen. 176 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 88) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.** Von Professor Dr. A. Witting. Mit 58 Figuren und 405 Beispielen und Aufgaben. 136 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 146) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Mit 32 Figuren und 305 Beispielen. 118 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 147) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung** nebst den Resultaten. Von Dr. H. Dölp. Neu bearbeitet von Dr. Eugen Netto. 18. Auflage. Oktav. 214 Seiten 1935. (Verlag von Alfred Töpelmann.) Berlin W 35 . . . . . RM. 1.95

*Das Bändchen stellt eine elementare Aufgabensammlung zur Differential- und Integralrechnung mit eingefügten Erläuterungen dar. Der erste Abschnitt, Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen, bringt die Differentiation der elementaren Funktionen, einschließlich implizite Funktionen,*

die Ermittlung der Werte unbestimmter Formen, Maxima und Minima, Taylor-  
sche Reihe. Der zweite Abschnitt, Integralrechnung, führt das Integral als un-  
bestimmtes ein, entwickelt die Integrationsformeln im Bereiche der elementaren  
Funktionen und geht dann kurz auf das bestimmte Integral ein. Schließlich  
werden noch verhältnismäßig ausführlich geometrische Anwendungen der In-  
finitesimalrechnung gebracht: Tangentenbestimmung, singuläre Punkte, Krüm-  
mung; Quadratur, Rektifikation, Kubatur.

**Integralgleichungen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der  
Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. Groß-Oktav. 302 Seiten.  
1930. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathe-  
matik, Bd. 18) . . . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

**Elementare Reihenlehre.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der  
Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml.  
Göschens Bd. 943) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Das Bändchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infini-  
tesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und fügt deshalb z. B.  
der Erörterung über das Cauchysche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch  
solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gaußsche an.*

**Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen.** Von  
Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 3 Figuren  
im Text. 140 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 1027) Geb. RM. 1.62

**Fouriersche Reihen.** Von Dr. W. Rogosinski, Professor an der Universität  
Königsberg. Mit 4 Figuren. 135 Seiten. 1930. (Samml. Göschens  
Bd. 1022) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik.** Von Dr. Josef Lense,  
o. ö. Professor der Technischen Hochschule München. Mit 30 Abbil-  
dungen. 178 Seiten. 1933 . . . . . Geb. RM. 9.50

**Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hohelsel. Zweite,  
verbesserte Auflage. 159 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 920)  
Geb. RM. 1.62

**Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der  
Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearbeitete Auf-  
lage. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 197 Seiten. (Göschens Lehrbücherei  
Bd. 10) . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50

**Partielle Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hohelsel. 159 Seiten.  
1928. (Samml. Göschens Bd. 1003) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Partielle Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der  
Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage.  
Mit 8 Figuren. 1929. VIII, 228 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14)  
RM. 11.—, geb. RM. 12.—

**Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differential-  
gleichungen.** Von Professor Dr. G. Hohelsel. 148 Seiten. 1933. (Samml-  
ung Göschens Bd. 1059) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Integralgleichungen.** Von Dr. Guido Hohelsel, a. o. Prof. an der Univer-  
sität Greifswald. 136 Seiten. 1936. (Sammlung Göschens Bd. 1099).  
Geb. RM. 1.62

**Elemente der Funktionstheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Prof. an der  
Universität Tübingen. Mit 23 Fig. 144 Seiten. 1937. (Samml. Göschens  
Bd. 1109.) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität  
Tübingen.  
Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funk-  
tionen. Mit 8 Figuren. Fünfte, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1937.  
(Samml. Göschens Bd. 668) . . . . . Geb. RM. 1.62  
Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie.

Mit 7 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 138 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 703) . . . . . Geb. RM. 1.62

*„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen.“*  
*Monatsschrift für Mathematik und Physik.*

**Aufgabensammlung zur Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 877) . . . . . Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 878) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Elliptische Funktionen.** Von Dr. R. Königl. o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücher Bd. 11) . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

*Das Buch will dem Studierenden und Fachmann die elliptischen Funktionen als Glied eines großen Organismus verstehen lehren, der mit den einfachsten analytischen Funktionen, den rationalen, beginnt und schließlich zu den Riemannschen Funktionensystemen emporwächst.*

**Elliptische Funktionen.** Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren im Text. XII, 356 Seiten, Neudruck. 1930. (Samml. Schubert Bd. 30) . . . . . Geb. RM. 20.—

II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren im Text. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61) . . . . . Geb. RM. 7.80

**Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.** Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.

I. Teil: Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58) . . . . . Geb. RM. 4.—

II. Teil: Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59) . . . . . Geb. RM. 4.—

*„Wer in die Potentialtheorie eindringen will, findet in dem leichtverständlichen Buch einen zuverlässigen und angenehmen Führer.“*  
*Zeitschrift f. d. mathem. u. naturwiss. Unterricht.*

**Numerische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.*

**Graphische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Der Verfasser versucht einem weiteren Kreise die immer noch zu wenig benutzten zeichnerischen Methoden bekanntzumachen. Er setzt dabei so wenig Vorkenntnisse wie möglich voraus.*

**Praktisches Zahlenrechnen.** Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.*

**Mathematische Instrumente.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschel Bd. 922) . . . Geb. RM. 1.62

*Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.*

**Ebene und sphärische Trigonometrie.** Von Prof. Dr. F. Bohnert in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten. 1919. (Samml. Schubert Bd. 3) . . . . . Geb. RM. 4.40

**Ebene und sphärische Trigonometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren. Vierte Auflage. 171 Seiten. 1934. (Samml. Göschel Bd. 99) . . . . . Geb. RM. 1.62

*„Der Verfasser hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht bloß alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst.“*

*Archiv der Mathematik und Physik.*

**Nichteuklidische Geometrie.** Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschel Bd. 970) Geb. RM. 1.62

*Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorgedrungen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.*

**Nichteuklidische Geometrie.** Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM 7.—

*Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.*

**Kreis und Kugel.** Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 S. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50

**Projektive Liniengeometrie.** Von Dr. Robert Sauer, Prof. an der Techn. Hochschule Aachen Mit 36 Abbildungen. 194 Seiten. Groß-Oktav. 1937. (Göschel Lehrbücherei Bd. 23.) . . . . . Geb. RM. 9.—

**Projektive Geometrie.** Von Professor Er. Karl Doehlemann. Neue einbändige Ausgabe von Dr. H. Timerding, Prof. an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 37 Figuren. 131 Seiten. 1937. (Samml. Göschel Bd. 72) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Aufgabensammlung zur projektiven Geometrie.** Von Dr. H. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 65 Figuren. 140 Seiten. 1933. (Sammlung Göschel Bd. 1060) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.** Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923 . . . . . Geb. RM. 14.50

II. Mit 110 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XI, 582 Seiten. 1922. RM. 15.—, geb. RM. 16.50

*Die besprochenen Probleme werden alle mit großer Ausführlichkeit behandelt. Die am Schluß beigefügten Formeltafeln und Regeln erhöhen den Wert des Werkes, das nicht nur einführen, sondern auch zu selbständigen Forschungen anregen soll.*

**Grundlagen der Geometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. 143 Seiten. 1930. (Göschel Lehrbücherei Bd. 17) . . . . . RM. 6.50, geb. RM. 7.80

Hessenbergs Vorlesungen über die „Grundlagen der Geometrie“ stellen eine besonders einfache und lesbare Einführung in die geometrische Grundlagenforschung dar. Sie werden darum allen denen willkommen sein, die zwar der Sache selbst Interesse entgegenbringen, aber mit der sonstigen Grundlagenliteratur nicht recht fertig geworden sind. Auch der Kenner wird ihnen manche Anregung entnehmen. Die ersten beiden Kapitel sind so einfach gehalten, daß sie selbst mathematischen Arbeitsgemeinschaften an höheren Schulen Stoff liefern können. Der Schwerpunkt des Buches liegt in den Erörterungen über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie und seine Sonderfälle, den Desarguesschen und Pascalschen Satz.

**Differentialgeometrie I:** Raumkurven und Anfänge der Flächentheorie. Von Dr. Rudolf Rothe, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 32 Abbildungen. 132 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 1113). . . . . Geb. RM. 1.62

**Affine Differentialgeometrie.** Von Dr. Erich Salkowski, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Groß-Oktav. Mit 23 Figuren. 200 Seiten. 1934. (Göschens Lehrbücherei Bd. 22) . . . . . Geb. RM. 1.62

Die vorliegende Darstellung ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser an den Technischen Hochschulen Hannover und Berlin gehalten hat. Das Ziel dieses neuen Bandes von Göschens Lehrbücherei ist, den Anfänger, dem nur die Grundtatsachen der Vektorrechnung und der Differentialgeometrie geläufig sein müssen, mit den Begriffsbildungen der Tensorrechnung vertraut zu machen, die für das Verständnis der neueren differential-geometrischen und mathematisch-physikalischen Forschung unentbehrlich sind. Dabei wurde darauf Bedacht genommen, von den einfachsten, allgemein bekannten Tatsachen ausgehend und in dauernder Verbindung mit der geometrischen Anschauung den Formelapparat der Ricci-Rechnung allmählich so zu entwickeln, daß er den Lernenden nicht als ein analytisches Kunststück entgegentritt, sondern sich als ein naturgemäßes Hilfsmittel der geometrischen Forschung aufbaut. Aus diesem Grunde wurde die Untersuchung auf die einfachsten Gegenstände beschränkt und grundsätzlich nur zweidimensionale analytische Gebilde betrachtet.

**Darstellende Geometrie.** Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena.

Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 142) . . . . . Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 143) . . . . . Geb. RM. 1.62

Dritter Teil: Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 65 Figuren im Text. 144 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 144) . . . . . Geb. RM. 1.62

Vierter Teil: Freie und gebundene Perspektive, Photogrammetrie, kotierte Projektion. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 76 Figuren im Text. 144 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1063.)  
Geb. RM. 1.62

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände.

Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubflächen. Vierte, erweiterte Auflage. Neudruck. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. 1932 . . . . . Geb. RM. 18,90  
II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. Neudruck. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1932. Geb. RM. 8,55  
III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 . . . . . RM. 10,80, geb. RM. 12.—

**Darstellende Geometrie.** Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65) Geb. RM. 6.—  
II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Figuren. 340 Seiten. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66) . . . . . Geb. RM. 7,50

**Elementargeometrie der Ebene und des Raumes.** Von Professor Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. Groß-Oktav. 252 S. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16) RM. 13.—, geb. RM. 14,50

**Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor der reinen Mathematik an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 16 Figuren. Groß-Oktav. 290 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Bd. 19)  
RM. 15,50, geb. RM. 17.—

**Geometrische Transformationen.** Von Dr. Karl Doehlemann, well. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. Groß-Oktav. 254 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Bd. 15) RM. 13.—, geb. RM. 14,50

*Entsprechend dem Programm von „Göschens Lehrbücherei“ wurden aus dem Gesamtgebiete der geometrischen Transformationen diejenigen Kapitel in nicht zu abstrakter Weise dargestellt, die sowohl für den Mathematiker wie für den technischen Wissenschaftler wesentlich sind. Aus diesem Grunde wurde neben der analytischen Darstellung die zeichnerische Auswertung berücksichtigt.*

**Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. Mit 10 Figuren. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschens Bd. 508 und 871) Geb. je RM. 1,62

**Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik.** Von Prof. Dr. M. Pirani. Zweite, verbesserte Auflage, besorgt durch Dr. I. Runge. Mit 71 Abbild. 149 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 728)  
Geb. RM. 1,62

**Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien.** Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Bauwerksschule in Erfurt. 2 Teile. (Samml. Göschens Bd. 603 u. 695)  
Geb. je RM. 1,62

**Vorlesungen über graphische Statik.** Von Professor Dr. Fr. Schur. Herausgegeben unter Mitwirkung von Wolfgang Vogt. Mit zahlreichen Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 219 Seiten. 1915  
RM. 7.—, geb. RM. 8,20

**Statik. I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper.** Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher in Hannover. Mit 47 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 178) . . . . . Geb. RM. 1.62

**II. Teil: Angewandte (techn.) Statik.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 61 Abbildungen. Sechster Neudruck. 149 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 179) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Ballistik.** Von Dr. Theodor Vahlen, o. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik in Berlin. Mit 53 Abbildungen. Groß-Oktav. XII, 231 Seiten. 1922 . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.—

**Hydraulik.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck: Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.*

**Elastizitätslehre für Ingenieure.** Von Professor Dr.-Ing. Max Ensslin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) . . . . . Geb. je RM. 1.62

*Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger.*

*Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.*

**Etymologisches Wörterbuch der Naturwissenschaften und Medizin.** Sprachliche Erklärung der wichtigeren Ausdrücke und Namen der Anatomie, Astronomie, Biologie, Botanik, Chemie, Geographie, Geologie, Medizin, Mineralogie, Naturphilosophie, Paläontologie, Physik, Psychologie und Zoologie. Von Dr. C. W. Schmidt. Oktav. VII, 138 Seiten. 1923.

Geb. RM. 2.—

*Das Büchlein wendet sich in erster Linie an Nichthumanisten, wird aber auch von Studierenden mit griechischer und lateinischer Vorbildung mit Vorteil gebraucht.*

---

Fachkataloge und Prospekte auf Wunsch kostenlos

---

---

VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO.  
IN BERLIN W 35 UND LEIPZIG

II. 1938.

Buchdruckerei Otto Beigel G. m. b. H., Leipzig

# Geistige Arbeit

Zeitung aus der wissenschaftlichen Welt

**Die Geistige Arbeit** nennt sich bewußt  
Zeitung aus der wissenschaftlichen Welt

weil sie nicht nur einem Gebiet der Forschung dienen will, sondern einen **Gesamtüberblick über die wissenschaftliche Arbeit des In- und Auslandes** gibt.

Den **Wissenschaftler** unterrichtet sie über die Arbeitsergebnisse und Forschungsprobleme der Nachbar-disziplinen,

dem **Laien** schafft sie einen Zugang zu den Fragen wissenschaftlicher Forschung, dient ihm zur Orientierung auf allen Wissensgebieten und bietet ihm geistige Anregung.

Die „Geistige Arbeit“ will also nicht eine „Fachzeit-schrift“ sein, sondern einen Querschnitt geben durch das wissenschaftliche und geistige Leben. Zu diesem Zweck bringt die Zeitschrift u. a. regelmäßige Berichte über Leistungen, Fortschritte und Probleme einzelner Gebiete der Wissenschaft, über die historische Ent-wicklung, den Stand und die Organisation in- und ausländischer Forschung, sie bringt biographische und historische Rückblicke und gibt eine Übersicht über die wichtigsten Neuerscheinungen durch zusammen-hängende Besprechungen.

**Die „Geistige Arbeit“ erscheint**

zweimal monatlich, jeweils am 5. und 20.

**Sie kostet** vierteljährlich 1.50.

**Preis der Einzelnummer 25 Pfennig.**

Probenummer **kostenlos** durch jede Buchhandlung.

VERLAG WALTER DE GRUYTER & CO.,  
BERLIN W 35.

1987

VERIFICAT  
2007

