RÉSONANCE DES LIQUIDES

VITESSE DU SON DANS LES LIQUIDES

PAR

D. BUNGETZIANU
Professeur à la Faculté des Sciences de Bucarest

BUCAREST

IMPRIMERIE DE L'ÉTAT
1914

À la mémoire

de

Spiru Haret

l'homme de Science et d'État, qui a tant fait pour l'extension et le relèvement de l'enseignement public en Roumanie, je dédie ce travail, comme un modeste hommage de reconnaissance pour les facilités qui m'ont été procurées dans les laboratoires de Physique de l'Université de Bucarest, à la dotation et au développement desquels il a puissamment contribué.

L'auteur.

Juin, 1914.

Bucarest (Roumanie).

PRÉFACE

La question de la vitesse de propagation du son dans les liquides *occupe une place importante dans la Physique. La formule de Laplace lui donne une solution théorique complète et des recherches expérimentales lui ont été consacrées, à différentes époques, par quelques grands physiciens. L'expérience célèbre de Colladon et Sturm effectuée sur le lac de Génève, en 1826, apporte une vérification expérimentale remarquable à la formule de Laplace, dans le cas de l'eau. Pour d'autres liquides une pareille vérification directe n'a pu être réalisée. Les expériences de Wertheim, faites plus tard, en 1848, dans le but de déterminer par une* méthode indirecte *cette vitesse dans différents liquides et de donner, en même temps, une vérification de la même formule de Laplace pour d'autres liquides que l'eau occupent par leur nombre et par la simplicité de leurs conclusions une place prépondérante dans cette question. Malheureusement, les observations et les conclusions de ce physicien sont erronées, comme l'ont montré, 26 ans plus tard, en 1874, Kundt et Lehmann d'abord et Dvorax ensuite, et comme nous le montrerons nous aussi dans la première partie de notre travail. Mais la méthode de ces derniers physiciens ne permet pas une étude plus approfondie de la question et elle s'arrête seulement à la constatation de l'erreur des conclusions de Wertheim. Depuis les essais infructueux de Tito Martini, faits en 1882, la détermination de la vitesse du son dans les liquides par des* voies indirectes *n'a plus été tentée par aucun physicien et les résultats de Wertheim, de même que ceux de Kundt et Lehmann et de Dvorak, sont restés sans explication.*

En reprenant cette question, nous avons montré d'abord que les liquides compris à l'intérieur des tuyaux solides peuvent renforcer *un son donné, qui se propage dans leur masse, c'est-à-dire peuvent* résonner *en présence d'une source sonore extérieure, ou intérieure, tout à fait comme les gaz compris dans des tuyaux sonores. Par un dispositif expérimental spécial nous avons utilisé ensuite ce phénomène de* résonance *pour déterminer la vitesse du son dans différentes colonnes liquides. Les longueurs de ces colonnes comprises entre deux renforcements successifs du son, que nous nommons* colonnes de résonance *et qui ne sont que* les demi-longueurs d'onde *du son dans ces colonnes, varient selon le liquide et selon la nature et les dimensions du tub solide, où liquide est contenu. Nous avons fait de longues séries d'expériences* [1]*, afin d'étudier ces variations pour différents liquides et pour différents tubes. Grâce aux nombreuses données ainsi obtenues et aidé aussi par la théorie de l'Elasticité nous avons réussi à établir entre la vitesse du son dans la* colonne *liquide et la vitesse dans la* masse *liquide illimitée une relation, qui tient compte de tous les éléments de l'expérience: la compressibilité et la densité du liquide, l'élasticité et les dimensions du tuyau solide, qui contient le liquide. Cette formule, que nous avons vérifiée par divers moyens, a été ensuite employée à plusieurs applications intéressantes. Elle explique d'une manière complète tous les résultats des expériences faites antérieurement par les physiciens mentionnés ci-dessus. Notre étude indique une nouvelle voie—on pourrait dire l'unique voie connue jusqu'à présent—* générale *et* efficace *pour la détermination d'une* manière indirecte *de la vitesse du son dans les liquide. Elle résout complètement—nous l'espérons—le problème proposé.*

Les vibrations des gaz *dans des tuyaux sonores ont été, comme on sait, l'objet de nombreuses recherches théoriques et expérimentales de la part de bien des physiciens. Les vibrations* des

[1] Plusieurs centaines d'expériences et plusieurs milliers de calculs ont été effectués à l'occasion de ce travail.

Je remercie ici, particulièrement, Mr I. Bordea, le mécanicien des laboratoires de Physique de l'Université, pour le concours dévoué qu'il m'a constamment prêté aux expériences.

liquides *compris dans des tuyaux solides valaient, sans doute, une attention au moins égale et une étude systematique et plus approfondie que celles qui ont été faites jusqu'ici était due à ce phénomène, d'autant plus que la compressibilité des liquides et l'élasticité des solides y trouvent une application et une vérification des plus intéresantes. Ce travail répond à ce devoir.*

Ce travail a été exécuté dans les laboratoires de Physique de l'Université de Bucarest (Roumanie) avec les moyens encore modestes, dont disposent ces laboratoires. Plusieurs perfectionnements, que nous entrevoyons comme possibles dans le dispositif expérimental et qui sont nécessaires aussi bien pour une meilleure mise en pratique de notre méthode que pour la poursuite d'autres résultats intéressants en relation avec la vitesse du son dans les liquides, n'ont pu être momentanément réalisés, faute de moyens suffisants dans nos installations. Puisse ce travail servir à d'autres progrès dans l'étude des phénomènes physiques auxquels il est consacré !

L'auteur.

Juin, 1914.

Bucarest (Roumanie).

RÉSONANCE DES LIQUIDES

VITESSE DU SON DANS LES LIQUIDES

INTRODUCTION

MÉTHODES GÉNÉRALES POUR LA DÉTERMINATION DE LA VITESSE DU SON DANS LES LIQUIDES

Importance de la question

1. La vitesse de propagation du son dans les liquides peut être déterminée, de même que dans les gaz et les solides, de trois manières différentes: *a)* par la mesure directe; *b)* par le calcul à l'aide d'une formule théorique; *c)* par des méthodes indirectes.

a) La mesure directe, où l'on doit évaluer, d'une part, la distance entre deux points de la masse liquide et, d'autre part, le temps qu'une onde sonore met à parcourir cette distance, ne peut être effectuée que dans une masse considérable de liquide; aussi n'a-t-elle été employée que dans le cas de l'eau.

Des expériences, demeurées classiques, ont été faites dans ce but par Colladon & Sturm, en 1826, sur le lac de Genève[1]). Ces deux physiciens trouvent, par le dispositif expérimental décrit dans tous les traités de Physique[2]), que le temps employé par une onde sonore, produite sous l'eau, pour parcourir la distance de 13487 m. est égal à $9^s,4$ et en déduisent pour la vitesse du son dans l'eau de ce lac la valeur de 1435 m. par seconde $\left[\frac{13487}{9,4} = 1434^{m}, 79\right]$, pour une température moyenne de $8^0.1$.

Des expériences beaucoup moins rigoureuses faites à Marseille, en 1820, par Beudant ont donné en moyenne pour la vitesse du

---

1) Colladon & Sturm de Genève. Mémoire sur la compression des liquides. Vitesse du son des liquides — Annales de Chimie et de Physique (2), XXXVI p. 236; 1827. De même Pogg. Ann. Bd. XII, s. 183.

2) Ces expériences sont décrites dans presque tous les traités d'Acoustique. Voir par ex., les traités de M. Bouty (p. 106), Violle (p. 74), Basin (p. 17), etc. Dans tous ces traités on indique, à tort, l'année 1827 comme date des expériences de Colladon et Sturm sur le lac de Genève. En réalité, ces expériences ont été effectuées le 7, 15 et 18 Novembre *1826*, ainsi que cela résulte du mémoire original de ces physiciens, mémoire qui a été couronné par l'Académie de Sciences de Paris et qui a été publié l'année suivante 1827.

son dans l'eau de mer, la valeur de 1500 m. par seconde, à la température ordinaire [1]).

La mesure directe n'a pu être appliquée aussi à d'autres liquides.

b) Le calcul de la vitesse du son dans les liquides se fait à l'aide de la formule, établie d'abord par Laplace, ensuite par Poisson :

$$V = \sqrt{\frac{1}{\beta\,\delta}} \tag{1}$$

où β est le coefficient de compressibilité du liquide, δ la densité, c'est-à-dire la masse de l'unité de volume et V la vitesse de propagation du son, c'est-à-dire l'espace parcouru dans une seconde séxagésimale [2]).

Cette formule, qui peut être considérée comme une conséquence immédiate du principe suivant énoncé par Newton [3]) : *la vitesse de transmission d'une déformation dans un milieu élastique et homogène est égale à la racine carrée du rapport entre la variation absolue de la pression et la variation absolue de la densité,* peut se déduire facilement de la théorie de l'Elasticité [4]).

Elle peut être appliquée à tous les liquides. dont on connaît le coefficient de compressibilité et la densité.

Soit *d* le poids spécifique du liquide et *g* l'intensité de la gravitation ; la densité est donnée par la formule :

$$\delta = \frac{d}{g} \tag{2}$$

Si le coefficient de compressibilité β est déterminé, en prenant pour unité de pression *l'atmosphère*, c. à. d. la pression d'une colonne de mercure ayant pour longueur $0^m,76$ et comme surface de base 1^{m^2}, alors, le même coefficient s'exprimera, en prenant comme unité de pression le poids du m^3 d'eau distillée à 4^0 sur 1^{m^2}, par le nombre :

$$\frac{\beta}{0^m,76 \times \Delta} \tag{3}$$

où Δ désigne le poids spécifique du mercure de la colonne.

---

[1]) Cette température n'est pas indiquée dans les textes, mais probablement elle ne devait pas être trop basse, vu que l'un des observateurs devait tenir la tête plongée dans l'eau, durant l'expérience. Voir : Mémoire de Colladon & Sturm «Sur la compression des liquides»; Extrait des An. de Chim. et de Phys. pag. 63. De même Violle-Acoustique p. 73.

[2]) T. VIOLLE. Acoustique, p. 73. De même O. D. Chwolson, Acoustique, pg. 929. an. 1908.

[3]) Journal de Physique, 1-ère série, Tome IX p. 58; 1880.

[4]) O. D. CHWOLSON. Acoustique, Tome 1-er, 4-e fasc. p. 879 et 885. De même A. Wüllner, Physik, I Bd, § 76, pg. 251 ; § 88, pg. 299 et 301; § 113, pg. 381.

En introduisant ces valeurs (2) et (3) dans la formule (1), on obtient pour la vitesse du son, en mètres, après avoir exprimé l'accélération aussi en mètres :

$$(4) \qquad V = \sqrt{\frac{0.76 \times g \times \Delta}{\beta d.}}$$

On peut faire une vérification de cette formule, en comparant le résultat obtenu par elle pour *l'eau*, avec celui qui a été fourni par la mesure directe. C'est ce que firent Colladon & Sturm : en déterminant le coefficient de compressibilité à l'aide du piézomètre et le poids spécifique de l'eau du lac de Genève, à la température de $8^0,1$, à l'aide de la balance, ils ont trouvé pour la compressibilité, $\beta = 10^{-6} \times 49.5$ — l'unité de pression étant *l'atmosphère* sur le mètre carré, et *l'atmosphère* étant pour *eux* le poids d'une colonne de mercure de $0^m,76$ de hauteur, à *la température de* 10^0 — et pour la densité, $d = 1.00$, c. à. d. la même valeur que pour l'eau distillée à 4^0.

En prenant

$$g = 9^{m \cdot},8088$$

on a:

$$\delta = \frac{d}{g} = \frac{1.00}{9^m,8088}$$

En introduisant ces valeurs dans la formule précédente (4) et en prenant $\Delta = 13.544$, à 10^0, ils trouvent pour la vitesse théorique du son dans le lac :

$$(5) \quad V = 10^3 \sqrt{\frac{9.8088 \times 0.76 \times 13.544}{49{,}5 \times 1}} = 1428^m \text{ }^{1)}$$

c'est-à-dire presque le même nombre que celui qu'ils avaient obtenu par la mesure directe, $V = 1435^m$, par seconde, à la même température de $8^0.1$.

1) NOTE. — COLLADON & STURM prennent dans leurs calculs comme poids spécifique du mercure à 0^0 la valeur donnée par Dulong et Petit et considérée de leur temps comme la plus précise :

$$d = 13.568$$

tandis que les physiciens modernes utilisent celle qui à été obtenue plus tard par Regnault toujours à 0^0 :

$$d = 13.5956$$

De cette petite différence entre les valeurs de la *densité* du mercure à 0^0 il résulte aussi une différence entre les nombres qui donnent la pression correspondante à une atmosphère *en kg. sur* m^2 et par conséquent aussi entre les nombres de la vitesse du son en mètres. Ainsi, tandis qu'avec la densité de Régnault, la pression d'une atmosphère—c'est à dire la pression d'une colonne de

On voit d'après tout ce qui précède qu'il y a un parfait accord entre la théorie et l'expérience pour le cas *de l'eau*. Comme, d'autre part, il n'y a aucun motif à attribuer seulement à l'eau cette concordance, on

---

mercure de $0^m,76$ à 0^0 de température — est donnée par le nombre 10333 kg. sur m^2, avec la densité de Dulong & Petit la même pression est exprimée par un nombre plus petit, à savoir 10312 kg par m^2. Le poids d'une même colonne de mercure à 0^0 sur la même surface est donc exprimé par deux nombres différents, d'après l'expérimentateur. Si l'on prenait dans la formule (4) la densité de Regnault, on obtiendrait pour la vitesse du son un nombre qui serait avec 1428 dans le même rapport que les racines carrées des deux densités :

$$\sqrt{\frac{13.5956}{13.568}} = \sqrt{1.0020342} = 1.00101.$$

On peut voir facilement que ce rapport ne change pas de valeur avec la température et qu'il fait augmenter le nombre 1428 m., donné par (5) pour la vitesse, de 1m.5—ce qui n'a pas grande importance.

Ces valeurs différentes pour la *densité* du mercure ne modifient pas la compressibilité toutes les fois que cette dernière est rapportée simplement aux *colonnes* de mercure et non pas à la pression *en poids*.

On peut encore remarquer que les coefficients de compressibilité déterminés par Colladon & Sturm pour l'eau, le mercure, l'alcool, l'éther sulfurique, l'acide acétique, l'éssence de thérébentine, etc. sont rapportés à des pressions représentées par des colonnes de mercure de $0^m.76$ *à 10^0 de température*, et non à 0^0, comme on considère habituellement les pressions normales. Ils sont ainsi plus petits que s'ils étaient rapportés à des colonnes de mercure *à 0^0 de température*, puisqu'ils représentent des variations de volume sous une moindre pression. On peut déterminer facilement le rapport entre le coefficient de compressibilité β correspondant à une colonne de mercure à t^0 de température et le coefficient β_0 correspondant à une colonne de même hauteur à 0^0, en remarquant qu'il est égal à celui des pressions P et P_0, c'est-à-dire à celui des poids de deux colonnes de mercure prises à t^0 et 0^0 de température, ou bien, comme ces colonnes ont la même hauteur de $0^m,76$ et la même section s, que ce rapport est le même que celui des densités Δ et Δ_0 du mercure à t^0 et 0^0 :

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \frac{P}{P_0} = \frac{0.76 \times s \times \Delta}{0.76 \times s \times \Delta_0} = \frac{\Delta}{\Delta_0}$$

et puis, comme le rapport des densités est l'inverse de celui des volumes, on a :

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{v_0}{v} = \frac{1}{1 + mt}$$

d'où

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \frac{1}{1 + mt}$$

et par suite

$$\beta_0 = \beta\,(1 + mt)$$

m représentant le coefficient de dilatation cubique du mercure. En introduisant dans cette relation la valeur numérique de ce dernier coefficient entre 0^0—100^0, c'est-à-dire $m = 0,00018$ on a :

$$\beta_0 = \beta\,(1 + 0,00018\,t) = \beta + \beta \times 0,00018 \times t$$

Pour une différence de température $t = 10^0$ on a :

$$\beta_0 = \beta + \beta \times 0,0018$$

ce qui montre qu'on déduit le coefficient de compressibilité sous une colonne de mercure à 0^0 de celui relatif à une colonne à 10^0, en ajoutant au dernier le produit

$$\beta \times 0,0018$$

en conclut que la formule (1) peut donner avec exactitude la vitesse de propagation du son dans *tous* les liquides. La précision des résultats dépend nécessairement de l'exactitude avec laquelle sont déterminés les coefficients β et δ, qui figurent dans cette formule. Les valeurs de la densité δ peuvent être évaluées avec une très grande approximation et on les retrouve d'ailleurs les mêmes dans toutes les déterminations rigoureuses des différents physiciens. Par contre, il y a moins de précision dans la détermination du coefficient β, à cause de sa petitesse et des moyens d'expérimentation dont on dispose pour obtenir sa valeur; ainsi, dans presque toutes les déterminations faites jusqu'à présent par les divers expérimentateurs il n'y a que les deux premiers chiffres significatifs de ce coefficient qui inspirent quelque certitude et encore le dernier reste parfois douteux. Ce sont, donc, ces différences dans les valeurs de β, qui ameneront des écarts dans les valeurs de la vitesse du son dans le même liquide, obtenues à l'aide de la formule théorique (1).

Colladon & Sturm ont trouvé pour *l'eau distilée* non purgée d'air sous la pression d'une colonne de mercure de $0^m,76$ sur 1^{m^2}, *à* 10^0 :

$$\beta = 10^{-6} \times 50,5$$

La correction à ajouter à cette valeur pour obtenir le coefficient de compressibilité sous une colonne de mercure à 0^0 est :

$$\beta \times 0,0018 = 10^{-6} \times 50,5 \times 0,0018 = 10^{-6} \times 0,091 < 10^{-6} \times 0,1$$

La correction est donc plus petite que 10^{-7} et ne modifie même pas le troisième chiffre significatif à droite du coefficient β à 10^0.

Pour l'alcool, où β est beaucop plus grand, $\beta = 10^{-6} \times 94,5$, à 10^0, la correction devient aussi un peu plus grande : $10^{-6} \times 0,17$.

Ces différences dans la valeur de β, qui dépendent de la *température* à laquelle on considère la *colonne de mercure*, ne modifient pas la *vitesse* du son, obtenue par le calcul En effet, de la relation précédente :

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \frac{0,75 \times s \times \Delta}{0,75 \times s \times \Delta_0}$$

on déduit l'égalité des expresions :

$$\frac{0,75 \times s \times \Delta}{\beta} = \frac{0,75 \times s \times \Delta_0}{\beta_0}$$

qui entrent dans la formule de la vitesse :

$$V = \sqrt{\frac{g \times 0,76 \times \Delta}{\beta \times d}}$$

où le coefficient de compresibilité est rapporté au *poids* d'une colonne de mercure correspondent à une atmosphère.

On peut donc conclure de ces deux remarques précédentes, que la différence dans la *densité* du mercure à 0^0 *altère* très peu la *vitesse* du son, mais elle *n'altère* pas la *compressibilité*, tanque cette dernière n'est exprimée que par des colonnes de mercure. C'est le *contraire* qui arrive lorsqu'on considère la *colonne de mercure*, corespondant à une *atmosphère*, à des *températures différentes*.

Remarque. Comme on l'a déjà vu, le coefficient de compressibilité, pris par Colladon & Sturm dans le calcul de la vitesse du son dans l'eau du lac de Genève, à l'aide de la formule (1) et déterminé expérimentalement, est:

$$\beta = 10^{-6} \times 49{,}5$$

rapporté à une colonne de mercure de $0^{m.},76$ et à 10^0.

Mais tous les coefficients de compressibilité déterminés par ces physiciens étaient, comme on le sait, un peu trop grands; l'erreur provenait de la valeur trop grande attribuée à la compressibilité cubique du piézomètre, dont ils s'étaient servis. On doit les diminuer de:

$$10^{-6} \times 1.65$$ [1])

pour avoir leurs vraies valeurs.

---

[1]) On sait, que pour obtenir la compressibilité absolue d'un liquide on ajoute à sa compressibilité relative celle du vase qui le contient, ce dernier étant comprimé extérieurement et intérieurement par des pressions égales. Colladon & Sturm considéraient cette contraction cubique K égale à *trois fois* le coefficient de dilatation linéaire de la substance du vase. Ils employaient un piézomètre en verre. En mesurant directement la traction longitudinale d'une baguette de même verre que celui du piézomètre, ils trouvent comme coefficient de dilatation linéaire $\alpha = 10^{-6} \times 1{,}1$, l'unité de pression étant l'atmosphère sur le mètre carré. On en déduit

$$K = 3\alpha = 10^{-6} \times 3{,}3$$

et c'est cette quantité qu'on ajoutait à la compressibilité apparente du liquide.

On a démontré plus tard, à l'aide de la théorie de l'élasticité, que la compressibilité cubique d'un corps uniformément comprimé sur toute l'étendue de sa surface est exprimée par la formule

$$K = 3\alpha\,(1-2\,\sigma).$$

dans laquelle α est le coefficient de dilatation linéaire (ou de contraction) et σ le coefficient de Poisson.

Si l'on prend pour σ la valeur $\frac{1}{4}$, admise par la théorie et vérifiée, pour le verre, dans presque toutes les expériences, on trouve pour la contraction cubique du vase:

$$K = \frac{3\alpha}{2}$$

Donc la valeur de la contraction cubique n'est pas égale à 3α, mais bien à $\frac{3\alpha}{2}$. En prenant $K = 3\alpha$, Colladon & Sturm augmentaient la contraction du vase et, en conséquence, la compressibilité absolue du liquide de $\frac{3\alpha}{2}$.

D'où l'on conclut que, pour avoir des chiffres plus exacts, il faut retrancher $\frac{3\alpha}{2}$ de toutes les valeurs des coefficients de compressibilité des liquides obtenues par eux, et comme on avait $\alpha = 10^{-6} \times 1{,}1$, on aura à retrancher:

$$\frac{3\alpha}{2} = 10^{-6} \times \frac{3{,}3}{2} = 10^{-6} \times 1{,}65$$

C'est de cette correction relative à la compressibilité cubique du piézomètre qu'il est question plus haut et dont on s'est servi pour modifier, plus tard, le coefficient de compressibilité de l'eau du lac de Genève.

En tenant compte de cette diminution, le coefficient de l'eau devient:

$$\beta = 10^{-6} \times 47.85$$

Si, de plus, on exprime les pressions en *atmosphères habituelles* — des colonnes de mercure de $0^{m.},76$ de hauteur, prises à 0^0 — il faudra ajouter à cette valeur l'accroissement indiqué dans la note de la page 10.

$$\beta \times 0{,}0018 = 10^{-6} \times 47{,}85 \times 0{,}0018 = 10^{-6} \times 0{,}086$$

ce qui donne pour β:

$$\beta = 10^{-6} \times 47{,}94.$$

En calculant la vitesse du son dans le lac à l'aide de cette dernière valeur du coefficient de compressibilité, et en prenant la densité Δ de mercure égale à 13,596, on trouve, par la formule (4):

$$(6) \qquad V = 10^3 \sqrt{\frac{9{,}8088 \times 13{,}596 \times 0.76}{47{,}94}} = 1454^{m}\ ^{1)}$$

On voit que ce nombre diffère quelque peu de 1428^{m} calculé par Colladon & Sturm, ainsi que de 1435^{m} trouvé par eux par la mesure directe.

En donnant le nombre $1435^{m.}$ comme vitesse expérimentale du son dans le lac de Genève, Colladon et Sturm admettent pourtant, dans leur Mémoire, que ce nombre est susceptible d'une variation de $+25^{m}$, ou -15^{m}, de sorte qu'ils donnent comme limites 1419^{m}—1459^{m}, entre lesquelles ce nombre peut rester, sans cesser de représenter cette vitesse avec la même exactitude. Notre dernier résultat, 1454^{m}, obtenu avec le coefficient de compressibilité corrigé, étant compris entre les limites de cette concession, on peut affirmer que l'accord entre la théorie et l'expérience est encore maintenu.

Les considérations précédentes supposent, évidemment, que les coefficients de compressibilité déterminés par Colladon & Sturm pour l'eau du lac de Genève et autres liquides sont assez exacts, pour

[1]) Dans presque tous les traités de Physique (voir O. Chwolson T. I-ier, 3-e fasc. pag. 580; M. Bouty T. I-ier. Physique moléculaire, pag. 160) on voit le coefficient de compressibilité de Colladon et Sturm corrigé de la compressibilité cubique du piézomètre, mais dans aucun d'eux on ne voit pas la valeur de *la vitesse* du son dans l'eau calculée à l'aide de ce coefficient *corrigé*, à l'exception, toute fois, du traité de Müller — Pouillet (Lehrbuch der Physik B. I. pag. 422), qui indique le même nombre que celui que nous donnons ici par cette formule (6).

pouvoir être introduits sans crainte dans les calculs. Ce n'est, peut-être, pas le cas ici, car ils déduisent la compressibilité cubique de leur piézomètre à l'aide de mesures d'élasticité obtenues par la traction d'une baguette de verre, dont la densité et l'état moléculaire sont généralement différents de ceux du piézomètre même [1]). Des déterminations ultérieures, faites avec toutes les précautions possibles par des physiciens tout aussi éminents : Regnault, Grassi, Amagat, Röntgen, etc., ont prouvé que les coefficients de Colladon et Sturm ne sont pas tout à fait exacts ; leurs conclusions relativement à la vitesse du son pourraient être de la même incertitude.

Dans quelle mesure, alors, cet accord entre l'expérience et le calcul théorique peut-il être encore admissible ?

Pour répondre à cette question il faut d'abord rappeler que les valeurs obtenues par Colladon & Sturm pour les coefficients de compressibilité sont :

pour l'eau distillée non purgée d'air $\beta = 10^{-6} \times 50{,}5$, à 0^0
pour l'eau du lac de Génève $\beta = 10^{-6} \times 49{,}5$, à $8^0{,}1$

d'où il s'en suit que la différence de ces deux coefficients est $10^{-6} \times 1{,}0$ [2]).

Quelque soit la correction à faire pour accroître l'exactitude des valeurs absolues de ces coefficients, il est clair que leur diffé-

---

[1]) Voir M. Bouty. T. I-ier. Physique moléculaire pag. 161.

[2]) Colladon & Sturm considèrent l'eau distillée dans deux états différents : avec, ou sans air. Les valeurs qu'ils ont données pour le coefficient de compressibilité dans ees deux cas sont .

pour l'eau purgée d'air: $\beta = 10^{-6} \times 51{,}3$ et pour l'eau non purgée d'air $\beta = 10^{-6} \times 50{,}5$ et l'on voit que, contrairement à ce qu'on aurait été tenté de croire, le coefficient de l'eau *sans* air est plus grand que celui de l'eau *avec de l'air*. Beaucoup de traités de physique ne font pas cette distinction par raport à ces coefficients et parfois même ils donnent pour le coefficient de l'eau distillée avec de l'air la valeur de celui qui correspond à l'eau sans air [Voir O. D. Chwolson, Traité de Physique, T. I. 3-e fasc. pag. 580].

Colladon & Sturm on trouvé, comme on l'a déjà répété plus d'une fois, $\beta = 10^{-6} \times 49{,}5$ pour la compressibilité de l'eau du lac de Genève à $8^0{,}1$.

Par une petite *erreur* de calcul, ils ont indiqué comme coefficient de compressibilité pour l'eau distillé contenant de l'air la même valeur à 0^0 :

$$\beta = 10^{-6} \times 49{,}5$$

Ce nombre, quoique reproduit sans modification par tous les traités de Physique, *n'est* pourtant *pas exact*, comme cela résulte du tableau des expériences faites par ces physiciens et de l'analyse de ces expériences (pag. 29—32 du Mémoire de Colladon & Sturm.—Extrait des Ann. de Chim. et Phys. 1827). Le *vrai* coefficient de compressibilité de l'eau *non purgée* d'air à 0^0 de température résultant de ces experiences est *celui* que *nous avons indiqué :*

$$\beta = 10^{-6} \times 50{,}5$$

et qui a été utilisé dans les comparaisons précédentes.

rence relative ne sera jamais trop éloignée de $10^{-6} \times 1{,}0$; on peut donc dire que la compressibilité de l'eau du lac à $8^0{,}1$ est égale à celle de l'eau distillée *avec de l'air* à 0^0, moins cette différence. Quand on connaîtra la valeur précise de β à 0^0 pour l'eau *distillée*, on pourra donc passer à une valeur tout aussi précise pour l'eau *du lac*, en en retranchant la quantité $10^{-6} \times 1.0$.

Or, parmi les coefficients de compressibilité reconnus dans la Physique moléculaire comme étant les plus exacts, on doit citer, en premier lieu, ceux qui ont été déterminés par Grassi, Amagat, Röntgen, etc.

On a, d'après ces déterminations, pour le coefficient de *l'eau distillée à 0^0* non purgée d'air et par rapport à la pression atmosphérique normale :

$\beta = 10^{-6} \times 50{,}2$ d'après Grassi, qui introduit, dans le calcul de la compressibilité cubique du piézomètre, l'hypothèse de Wertheim, $\sigma = \frac{1}{3}$,

et

$\beta = 10^{-6} \times 51{,}1$ d'après Amagat et Röntgen, qui ne font aucune hypothèse sur σ dans la détermination de la contraction cubique du piézomètre.

En retranchant de ces valeurs la quantité :

$$10^{-6} \times 1{,}0$$

on obtient comme coefficient de compressibilité pour l'eau *du lac de Genève*, à $8^0{,}1$:

$\beta = 10^{-6} \times 49{,}2$ d'après Grassi,

ou bien

$\beta = 10^{-6} \times 50{,}1$ d'après Amagat & Röntgen.

A l'aide de ces coefficients on trouve pour la vitesse du son dans l'eau du lac de Genève :

$$V = 10^3 \sqrt{\frac{9{,}8088 \times 0{,}76 \times 13{,}596}{49{,}2}} = 1435^{m}{,}2, \text{ d'après Grassi,}$$

nombre qui coïncide exactement avec la valeur trouvée expérimentalement par Colladon & Sturm, ou

$$V = 10^3 \sqrt{\frac{9{,}8088 \times 0{,}76 \times 13{,}596}{50{,}1}} = 1422^{m},$$

d'après Amagat et Röntgen.

Ces valeurs de la vitesse, trouvées à l'aide des mesures les plus précises de la compressibilité, ne diffèrent, comme on voit, que très peu des valeurs précédentes, c'est-à-dire de celle qu'on trouve à l'aide du coefficient non modifié de Colladon & Sturm, et de celle qu'on a obtenue directement par l'expérience.

Avant de finir ces discussions, faisons encore la remarque que les analyses chymiques de l'eau du lac de Genève, qui était une eau très pure et claire, ont établ qu'elle ne contenait que très peu de substances étrangères non gazeuses (un kg. d'eau contenait à peine $0^{gr},164$ de résidus minéraux, c'est-à-dire moins de $\frac{1}{6000}$ du poids total). En outre, le poids spécifique de l'eau du lac à 4^0 est égal à 1,00015 et à 8^0 il est égal à *l'unité*. Donc, au point de vue de la *pureté* et de la *densité*, on peut considérer l'eau de ce lac à 8^0 identique à l'eau distillée à 4^0. Mais son coefficient de compressibilité ($10^{-6} \times 49{,}5$) étant plus petit que celui de l'eau distillée à 0^0 ($10^{-6} \times 50{,}5$) [1]) pourrait être considéré, – puisque la compressibilité de l'eau décroît avec la température – comme étant égal à celui de l'eau distillée, à une plus haute température, à 4^0 ou à 5^0, par exemple.

En vertu de ces considérations-ci, lorsqu'il s'agit de comparer la vitesse théorique du son dans l'eau à la vitesse expérimentale, les physiciens modernes identifient l'eau du lac de Genève, à $8^0{,}1$, avec l'eau distillée à 4^0, et ils lui attribuent exactement la même *densité* et la même *compressibilité* qu'à l'eau distillée même. Puis, pour le calcul *théorique* de la vitesse du son dans l'eau de ce lac – étant donné le peu d'exactitude des coefficients des Colladon & Sturm – ils employent habituellement comme coefficient de compressibilité celui de l'eau à 4^0 trouvé par Grassi :

$$\beta = 10^{-6} \times 49{,}9.$$

et ils obtiennent, à l'aide de la formule (4) :

$$V = 10^3 \sqrt{\frac{9{,}81 \times 13{,}59 \times 0{,}76}{49{,}9}} = 1425^{m}$$

[1]) D'après Colladon & Sturm.

valeur considérée comme représentant la vitesse théorique du son dans l'eau du lac à 8°,1 [1]).

Quoique ce procédé d'identifier l'eau du lac de Genève avec l'eau distillée à 4° ne dérive pas rigoureusement du mémoire de Colladon & Sturm, il conduit pourtant au même résultat que la marche logique exposée précédemmet, puisque le nombre trouvé, ne diffère que très peu de celui qu'on a obtenu par l'expérience: 1435^m.

En résumé, en prenant la densité de l'eau du lac de Genève égale à *l'unité*, on aura comme valeur *théorique* de la vitesse du son dans ce *lac* :

à l'aide du coefficient de compressibilité, *non* modifié, trouvé par Calladon & Sturm pour l'eau de ce *lac* . . . . $V = 1428^m$

à l'aide du coefficient *corrigé* de Colladon & Sturm pour l'eau du *lac* . . . . $V = 1454^m$

à l'aide du coefficient *déduit* de la compressibilité de l'eau *distillée à* 0°, donné par Grassi . . . . $V = 1435^m$

à l'aide du coefficient *déduit* de la compressibilité de l'eau *distillée à* 0°, indiqué par Amagat et Röntgen [2]) . . . . $V = 1422^m$

à l'aide du coefficient *direct* de l'eau *distillée à 4°*, trouvé par Grassi . . . . $V = 1425^m$

On constate que toutes ces valeurs de la vitesse *théorique* ne diffèrent que très peu du nombre 1435^m, qui représente la vitesse *expérimentale*, les différences étant comprises entre les limites des erreurs d'observation admises par Colladon & Sturm.

— Cette petite discussion était nécessaire pour montrer que les conclusions de Colladon & Sturm sur l'accord entre la théorie et la mesure, quant à la vitesse du son dans l'eau, se maintiennet dans tous les cas considérés, quoique les coefficients de compressibilité donnés par eux ne soient pas des plus exacts.

c) Les méthodes ind rectes, connues jusqu'à présent, pour la détermination de la vitesse du son dans les liquides sont peu nombreuses. Elles cherchent généralement à déterminer, ou bien la

[1]) Voir J. VIOLLE. Acoustique. p. 73. De même O. D. Chwolson, Traité de Physique T. I. 4e. fasc. Acoustique p. 930.

[2]) De toutes les mesures faites pour obtenir la compressibilité des liquides, celles d'Amagat paraissent les plus précises. En conséquence, le nombre 1422, obtenu à l'aide de son coefficient de compressibilité, représente, le plus exactement, la vitesse théorique du son dans l'eau du lac de Genève.

longueur d'onde, dans une masse liquide, correspondant à un son, dont on connaît le nombre des vibrations, ou bien, réciproquement, le *nombre des vibrations* d'un son, dont on connaît la longueur d'onde. A l'aide de ces deux éléments: *longueur d'onde* et *nombre de vibrations*, on peut déduire, ensuite, la vitesse du son dans le liquide considéré.

Supposons un son régulier, qui engendre une onde sonore dans le milieu homogène environnant. Soit N le nombre des vibrations complètes, effectuées pendant une seconde par une molécule vibrante et T la durée en secondes d'une vibration. Entre ces deux quantités on a la relation évidente :

$$NT = 1 \text{ sec.} \tag{1}$$

L'espace parcouru par l'onde sonore dans l'intervalle d'une période T, ou, plus généralement, la distance, dans le sens de la propagation, entre deux molécules successives en même phase de vibration, s'appelle, comme on sait, la *longueur d'onde* du son considéré et se représente, d'habitude, par la lettre λ. Si V est la vitesse de propagation uniforme de cette onde, on aura, par définition, la relation suivante entre λ et T:

$$\lambda = V.T = \frac{V}{N} \tag{2}$$

d'où

$$V = N.\lambda. \tag{3}$$

On voit donc, que, si l'on connaît la longueur λ pour un liquide quelconque et le nombre des vibrations N, correspondant à un son donné, on peut immédiatement en déduire, à l'aide de cette formule (3), la vitesse de propagation du son dans ce liquide.

Presque toutes les méthodes indirectes, imaginées jusqu'à présent, cherchent à déterminer la longueur d'onde, ou le nombre des vibrations d'un son, dans un liquide, soit à l'aide du phénomène de la *résonance*, soit par le phénomène de *l'interférence*. C'est ainsi, qu'en 1848, Wertheim [1]), en faisant parler les liquides dans des tuyaux d'orgue, et, plus tard, Kundt et Lehmann, en 1874, en

[1]) J. VIOLLE. Acoustique et Optique, p. 163 et 164. et O. D. Chwolson—Traité de Physique T. 1. 4-e fasc. Acoustique p. 1010.

produisant des ondes sonores dans une colonne liquide renfermée dans un tube de verre, sont parvenus à déterminer la longueur d'onde λ et le nombre de vibrations N pour certains sons, d'où ils ont essayé à déterminer la vitesse de propagation du son dans la *masse* des liquides considérés. Mais, ces méthodes, outre leur manque de généralité, se sont heurtées à des difficultés expérimentales imprévues, de sorte que le problème proposé resta encore ouvert et les résultats obtenus, bien plus faibles que l'on ne s'attendait, sont demeurés isolés et sans grande signification.

D'autres méthodes, fondées sur le phénomène de *la réfraction du son* à la surface de séparation entre l'air et le liquide, quoique d'un caractère plus général, donnèrent des résultats tout aussi peu exacts et tout aussi difficiles à réaliser [1]).

On peut donc dire, que, jusqu'à présent, on *ne possède pas* une *méthode indirecte* générale, donnant avec exactitude la vitesse du son dans les liquides et dont les résultats soient, en outre, susceptibles de vérifications expérimentales.

2. *La question a, cependant, une importance bien réelle.*

Nous avons vu que la formule théorique de Laplace a été vérifiée expérimentalement pour l'eau. On n'a pas encore réalisé des vérifications de ce genre aussi pour d'autres liquides. On sait, d'autre part, que les valeurs des coefficients de compressibilité, qui entrent dans la formule théorique, sont, en général, difficiles à déterminer. Quelle que soit la méthode indirecte, pouvant donner la vitesse du son dans les liquides par un procédé simple et suffisamment exact, sera donc bien accueillie non seulement pour apporter une vérification de la compressibilité des liquides soumis déjà à expérience, mais aussi pour déterminer la compressibilité d'autres liquides, dont on ne possède pas encore des mesures piézométriques.

La compressibilité absolue d'un liquide peut, ensuite, à son tour, servir à la détermination des compressibilités absolues d'autres liquides, et même de la compressibilité cubique des substances solides soumises à des pressions uniformes. Ainsi T. W. Richards en colla-

---

[1]) A. Wüllner. Physik. Bd. I, p. 385. De même O. D. Chwolson, Acoustique p. 943 et P. A. Daguin. Traité de Phisique T. 1-er p. 562, an. 1878.

boration avec d'autres physiciens [1]), a déterminé récemment, à l'aide de la compressibilité absolue du mercure et de l'huile de paraffine, la compressibilité cubique uniforme d'un grand nombre de substances solides telles que: le lithium, le sodium, le cuivre, le fer, le nickel, le silicium, le diamant, etc., et a trouvé l'occasion de rectifier, en même temps, pour quelques liquides, les valeurs trouvées par Amagat et autres, à l'aide des méthodes piézométriques ordinaires.

L'importance de la détermination de la vitesse du son par une méthode quelconque est, par conséquent, étroitement liée à celle de la *compressibilité* en général.

Cette propriété de la matière— la *compressibilité* — joue à son tour un rôle considérable dans les phénomènes de la nature. Rappelons-nous, en effet que parmi les faits, dont nous tirons la notion de *force moléculaire* des liquides et des solides et la mesure de cette force, la compressibilité occupe le premier rang.

Il est, en outre, fort probable qu'il doit y avoir une étroite liaison de dépendance entre la constitution intime des corps et leur état de compressibilité. Ainsi, d'après les travaux de T. W. Richards sur la compressibilité des solides, il résulte que les métaux alcalins: le lithium, le sodium, le potassium, le rubidium, et le caesium, ont leurs *coefficients de compressibilité cubique* à peu près *proportionnels* au *volume atomique* et réciproquement ($\beta = 10^{-7} K. \times V$, où β est le coefficient de compressibilité, V le volume atomique et K une constante comprise entre 6, 3 et 7 pour tout les métaux cités, sauf pour le caesium, où K = 8 — la pression étant exprimée en kg./cm²).

Pour les autres corps cette relation ne paraît plus être verifiée [2]).

---

[1]) The Compressibilities of the Elements and theyr periodic relations by Theodore William Richards, in collaboration with W. N. Stull, F. N. Brink and F. Bonnet Ir. Washington. Carnegie Institution 1907.

[2]) En dehors d'autres applications d'ordre pratique ou scientifique, mentionnons encore les indications précieuses, que l'étude de la compressibilité fournit quelquefois sur les propriétés chimiques des corps. Ainsi, Colladon & Sturm, en partant de la remarque que, sous des pressios égales, l'eau *contenant de l'air*, ou du gaz ammoniacal en dissolution (dens = 0,9), est *moins compressible* que *l'eau privée d'air*, en ont tiré la conclusion - admise aussi par les chimistes, — que ces gaz ne figurent pas dans l'eau, commes des simples mélanges, mais aussi en véritables combinaisons chimiques; enfin, à la suite des recherches dûes aux phisiciens américains, cités plus haut, il y aurait à conclure que presque toutes les substances solides ayant la *même compressibilité* forment en même temps des groupes caracterisés par les *mêmes propriétés chimiques*. [Loco citato p. 65].

Mentionons, enfin, que la compressibilité, comme propriété générale de la matière, intervient dans un grand nombre de phénomènes physiques et surtout dans celui de la propagation des vibrations dans les milieux élastiques pondérables, ou impondérables. Elle apparaît comme la mesure et l'expression la plus caractéristique de *l'élasticité*, dont »*le rôle dans la nature est*, suivant Lamé [1]), *tout aussi important que celui de la Gravitation universelle*«.

Ces considérations suffisent pour montrer que le problème, que nous offre l'étude de la vitesse du son dans les liquides, ne manque ni d'intérêt, ni de difficulté. C'est un problème digne de l'attention des physiciens et qui peut fournir l'occasion à des recherches bien intéressantes. Malgré cela, il n'y a que peu d'investigateurs, mais des plus estimés, qui lui ont voué leur pensée, sans toute fois réussir à lui donner une solution satisfaisante.

Je me propose dans ce travail d'indiquer une voie nouvelle pour l'étude de la vitesse du son dans les liquides, par des *méthodes indirectes*, et de mettre en discussion quelques expériences et formules, qui intéressent à la fois la compressibilité des liquides et l'élasticité des solides.

Je diviserai ce travail en trois parties. Dans la *première partie*, je donnerai un résumé des méthodes indirectes employées jusqu'à présent et je discuterai les résultats par elles obtenus. Dans *la seconde partie*, j'indiquerai d'abord le principe de la nouvelle méthode : »*résonance propre des liquides*« et le dispositif expérimental adopté pour nos recherches, et j'exposerai, ensuite, une série, longue et variée, d'expériences basées sur ce principe, signalant les faits les plus importants, qui se présenteront dans les différents cas. Dans *la troisième partie*, j'établirai et je discuterai une formule théorique, pouvant représenter analytiquement tous les résultats des expériences précédentes et donnant avec une très grand exactitude la vitesse du son dans un liquide quelconque.

---

[1]) M. G. Lamé. Théorie mathématique de l'Élasticité des corps solides. p. 2, an. 1852.

PREMIÈRE PARTIE

MÉTHODES INDIRECTES EMPLOYÉES JUSQU'À PRÉSENT POUR DÉTERMINER LA VITESSE DU SON DANS LES LIQUIDES.

3. Dans tous les ouvrages de Physique — traités et revues — on cite comme méthodes indirectes pour déterminer la vitesse du son dans les liquides d'abord les expériences de Wertheim, ensuite celles de Kundt et Lehmann, de même que celles de Dvorak et enfin celles de Tito Martini [1]).

Nous allons faire un résumé, par ordre chronologique, des résultats de toutes ces méthodes, en signalant les mérites et les insuffisances de chacune d'entre elles [2]).

Expériences de Wertheim

4. Wertheim publia ses expériences, en 1848, dans son «*Mémoire sur la vitesse du son dans les liquides*« [3]).

Dans ce mémoire, clairement exposé et bien documenté, il étudie: 1) la vitesse du son dans *l'air*; 2) la vitesse du son dans les *liquides*.

Il applique le même principe théorique et le même procédé d'expérimentation pour ces deux vitesses: dans *l'air* et dans les *liquides*. Ce n'est que dans le *calcul* des résultats, à l'aide des données de l'expérience, que la question commence à se différentier.

Wertheim utilise pour ses expériences le phénomène de *la résonance des tuyaux sonores*.

Principe. D'après la théorie élémentaire des tuyaux sonores on sait que la demi-longueur d'onde $\frac{\lambda}{2}$, correspondant au son fonda-

[1]) Journal de Phisique 2-e série I. vol. pag. 514, an. 1882.
» » » 2-e » III. » » 218 » 1884.

[2]) Jusqu'à la fin de l'année 1907, quand nos recherches expérimentales sur la même question: «*la vitesse du son dans les liquides par des méthodes indirectes*» touchaient à leur fin, il n'avait paru aucun travail nouveau traitant ce sujet. Or, à cette époque, nous avions déjà pris date pour nos recherches, par la communication faite à la *Société de Sciences de Bucarest* dans la séance du 5 Mars 1907. Voir le Bulletin de la Société des Sciences de Bucarest, No. 3 et 4, pag. 110, an. 1907.

[3]) Annales de Chimie et de Physique, 3-e série. Tome XXIII, pg. 434; an. 1848.

mental produit par un tuyau d'orgue, ouvert aux deux extrémités, est égale à la longueur l de ce tuyau.

$$(1) \qquad l = \frac{\lambda}{2}$$

ou, comme on a

$$(2) \qquad \lambda = \frac{V}{N}$$

— V désignant la vitesse du son dans le gaz du tuyau et N le nombre des vibrations de ce son —

$$l = \frac{V}{2N}$$

d'où :

$$(3) \qquad V = 2\,N.\,l.$$

Donc, si l'on détermine le nombre N des vibrations du son fondamental d'un tuyau, dont on connait la longueur l, on en déduit, à l'aide de cette relation, la vitesse du son dans le gaz du tuyau.

Mais l'expérience et une théorie analytique plus complète du phénomène [1]), ont démontré que la longueur l d'un tuyau ouvert est toujours plus petite que la moitié de la longueur d'onde du son fondamental de ce tuyau, de sorte que, pour avoir la valeur exacte de $\frac{\lambda}{2}$, on doit ajouter à la longueur l, une correction z, qui reste à être déterminée.

On aura, donc,

$$(4) \qquad \frac{\lambda}{2} = l + z \quad ,$$

quand la vitesse devient, d'après (2):

$$(5) \qquad V = 2N\,(l + z)\,;$$

et l'on voit que la valeur de la vitesse ainsi obtenue est plus

---

[1]) JAMES CHAPPUIS et ALPHONSE BERGET : Physique Générale. Tome III. Acoustique et Optique p. 107, an. 1909.

M. BRILLOUIN. — Journal de Physique, 2-e sér. T. VI. p. 205, an. 1887 et 4-e sér. T. V. p. 569, an. 1906.

grande que celle qui est donnée par la formule (3), où la valeur de la longueur d'onde n'est pas corrigée [1]).

Wertheim détermine cette correction z, en adaptant à la même embouchure des tuyaux de longueurs différentes et en les faisant émettre leurs sons fondamentaux. Il détermine, en même temps, la longueur de ces tuyaux et le nombre des vibrations correspondant aux sons respectifs. Soit x la correction à introduire à cause de perturbations produites à l'orifice inférieur et y la correction dûe aux perturbations de l'extrémité supérieure. Wertheim admet que ces corrections sont constantes pour une *même embouchure*, lorsque la longueur du tuyau sonore varie. La correction nécessaire aux tuyaux ouverts se compose donc de la somme de ces deux corrections:

$$z = x + y.$$

Soient l_1 et l_2 les longueurs de deux tuyaux ouverts de même embonchure et n_1 et n_2 les nombres respectifs de vibrations de leurs sons fondamentaux.

La valeur exacte de la vitesse du son dans l'air, sera, d'après la formule (5):

$$V = 2n_1 (l_1 + x + y) \text{ d'aprés le I-er tuyau}$$

et

$$V = 2n_2 (l_2 + x + y) \quad \text{» » II »}$$

d'où l'on déduit, par l'élimination de V, la valeur de la correction:

$$(6) \qquad z = x + y = \frac{l_2 n_2 - l_1 n_1.}{n_1 - n_2}$$

Prenons un troisième tuyau ouvert, de longueur l_3, et dont le son fondamental ait n_3 vibrations. Si l'on considère les données correspondant au I-er et III-ème tuyau et que l'on cherche la correction totale à l'aide de la formule (6), on trouve, d'après Wertheim, la même valeur que si l'on considérait le premier et le se-

[1]) Dulong avait essayé, le premier, à déterminer la vitesse du son dans les gaz à l'aide de la méthode des tuyaux sonores, mais sans corriger la longueur du tuyau. Les valeurs trouvées par lui étaient trop petites. Plus tard, en se servant du procédé de Bernoulli, il détermina la même vitesse en mesurant la distance entre deux positions d'un piston qui produisent le même son dans le tuyau sonore, c. à. d. la distance entre deux noeuds. Les valeurs ainsi obtenues furent beaucoup plus exactes. Mais il employa cette méthode surtout pour comparer les vitesses du son dans deux gaz différents, en observant que la position des noeuds dans un tuyau est indépendante de la nature des gaz, d'où l'on déduit que le rapport des vitesses du son dans les deux gaz est égal à celui des nombres de leurs vibrations.

[2]) J. Violle. — Acoustique, p. 137. an. 1888.

cond tuyau, ou bien le second et le troisième. Cette correction dépend, d'après lui, seulement de l'embouchure et non pas de la longueur des tuyaux.

On aura donc pour la demi-longueur d'onde de tout autre tuyau ouvert de même embouchure:

$$\frac{\lambda}{2} = l + (x + y),$$

ce qui constitue sa *longueur corrigée*.

Pour les tuyaux fermés on n'ajoute que la correction x dûe aux perturbations produites à l'ouverture inférieure et dont la valeur sera déterminée d'une manière analogue:

$$(7) \qquad x = \frac{l_2 n'_2 - l_1 n'_1}{n'_1 - n'_2}.$$

et devrait aussi rester indépendante de la longueur du tuyau pour une même embouchure.

Des formules (6) et (7) on pourrait déduire les corrections partielles x et y relatives aux ouvertures supérieure et inférieure, si besoin en est [1]).

Wertheim évalue le nombre des vibrations à l'aide de la sirène, ou bien à l'aide d'une corde d'un sonomètre. Il fait varier la pression de l'air dans la sirène, ou la longueur de la corde, jusqu'à ce que le son de l'appareil se met à l'unisson avec celui du tuyau. Wertheim trouve par ses études comparatives un parfait accord entre les résultats obtenus à l'aide de ces deux instruments. Dans ses observations, il préfère la corde, comme plus commode pour l'expérience. Considérant une longueur initiale pour laquelle on connaît le nombre des vibrations, il déplace un chevalet mobile de manière à produire un son de même hauteur que celui du tuyau. Si l est la longueur correspondant à ce son, il a le nombre N des vibrations simples donné par la formule:

$$(8) \qquad N = \frac{256000}{l} \text{ v. s.}$$

[1]) Bien des recherches, d'ordre théorique et expérimental, ont eté faites dans le but de déterminer ces corrections à ajouter à la longueur des tuyaux fermés, ou ouverts, pour obtenir la vraie valeur de $\frac{\lambda}{2}$. Citons, parmi les premières, les travaux de Lord Rayleigh (Theory of Sound), de Helmholtz (Journal de Crelle, B-d. 57, an. 1860), de Brillouin (Jornal de Physique Sér. II. T. 6, an 1887), etc. et parmi les secondes, les travaux de Sondhauss, König, Bosanquet, Cavaillé-Coll, etc. (J. Violle Acoustique, pag. 138, 143), à côté des travaux de Wertheim même.

C'est en employant ce nombre N, ainsi déterminé, et la longueur du tuyau corrigée, que Wertheim obtient la vitesse du son à l'aide de la formule (5).

Pour *les liquides* on applique le même principe et le même procédé que pour les gaz. Wertheim introduit, par pression, le liquide dans un tuyau d'orgue, qui se trouve plongé dans une masse de même liquide, et il réussit à le faire parler, comme dans le cas des gaz. Pour avoir la vraie longueur d'onde correspondant au son fondamental, on ajoute à la longueur du tuyau sonore une correction qu'on obtient, comme pour les gaz, en faisant parler, dans la masse liquide, des tuyaux de longueurs différentes appliqués à la même embouchure. On détermine aussi, de la même manière que pour les gaz, à l'aide d'une corde vibrante, le nombre des vibrations des sons obtenus. La vitesse du son dans la *colonne liquide* du *tuyau* est alors donnée par la même formule (5), où l'on introduit la longueur d'onde corrigée et le nombre respectif des vibrations.

Dispositif expérimental. L'appareil employé par Wertheim pour faire parler les liquides se compose de plusieurs parties : un vase prismatique A, élargi à la partie supérieure et renfermant le liquide, (ce vase était d'abord horizontal, mais, ensuite, on l'a rendu vertical, afin de réduire son volume), un réservoir de pression B, une pompe aspirante et refoulante P, un manomètre à mercure K et un autre

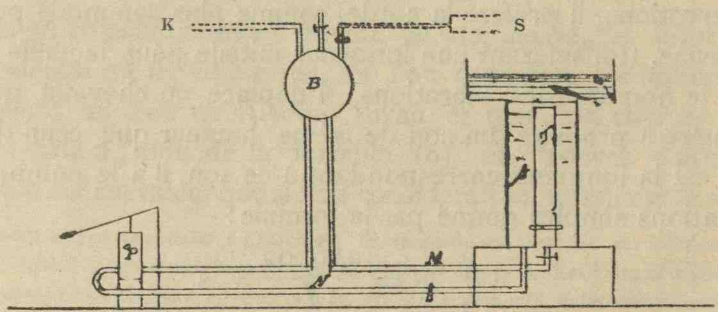


Fig. 1.

à eau, plusieurs vases communiquants, plusieurs tuyaux sonores et leurs accessoires, divers robinets de communication et d'autres conduites spéciales pour régler l'écoulement du liquide, etc.

On plonge entièrement dans le vase A un tuyau ouvert, dont on visse l'embouchure dans un trou de la paroi inférieure de ce vase. Un tube métallique M, partant de ce trou, établit la communication entre le tuyau et le réservoir B ; un robinet spécial règle la circulation du liquide. Un second tube métallique N, qui contient des robinets spéciaux, part d'un autre endroit du vase A et aboutit au même réservoir des pressions B ; sur le trajet de ce tube se trouve une pompe P.

En ouvrant les robinets et en faisant fonctionner la pompe P, l'eau du vase A passe par le tube N au réservoir B, d'où, à cause de la pression de l'air, retourne dans le même vase A par le tube M et pénètre dans le tuyau sonore par son embouchure inférieure.

Ce courant liquide, traversant la *lumière* du tuyau et venant se briser contre le *biseau*, détermine dans la colonne liquide intérieure, des vibrations, qui donnent naissance à un son.

La partie supérieure du réservoir est mise en communication avec le manomètre K, qui indique la pression respective.

En même temps, on détermine le nombre des vibrations n du son entendu, en déterminant la longueur l de la corde d'un sonomètre, qui produit un son de la même hauteur.

La colonne liquide donne pour une certaine pression le son fondamental du tuyau employé. On obtient les harmoniques de ce son, en faisant varier la pression dans le réservoir. Plus la pression est forte, plus les harmoniques sont élevées et leur hauteur musicale se détermine toujours à l'aide de la corde du sonomètre. Le son fondamental correspond à la pression la plus faible. Les harmoniques servent surtout à déterminer avec plus d'exactitude ce son fondamental de la colonne liquide, car d'habitude il s'obtient difficilement d'une manière directe. Le manomètre à mercure indique les pressions correspondant à chacun de ces sons. Ses indications servent à trouver la *loi de la variation des harmoniques* avec la *variation de ces pressions*.

On visse, maintenant, à la partie supérieure du tuyau employé un autre tuyau de même section et l'on obtient ainsi un tuyau sonore d'une longueur plus grande. On refait, à l'aide de ce tuyau, les même expériences, en produisant le son fondamental et les harmoniques et en notant pour chacun de ces sons les pressions respectives et le nombre des vibrations.

On recommence ensuite les mêmes opérations sur des tuyaux encore plus longs vissés sur la même embouchure et cela se répète plusieurs fois.

Les *sons fondamentaux* de tous ces tuyaux de longueurs connues servent à calculer, à l'aide de la formule (6), la correction nécessaire pour la longueur d'onde correspondant à la même embouchure de tous de ces tuyaux.

Wertheim emploie 4 embouchures A, B, C, D.

L'embouchure	A,	en	laiton,	ayant	le	diamètre intér.	=	40^{mm}	et	l'épaiss.	de	la	paroi	=	2^{mm}
»	B	»	»	»	»	»	»	=	20^{mm}	»	»	»	»	»	=	3^{mm}
»	C	»	»	»	»	»	»	=	10^{mm}	»	»	»	»	»	=	1^{mm}
»	D	»	»	»	»	»	»	=	20^{mm}	»	»	»	»	»	=	?

Les tuyaux fixés sur les embouchures A, B, et C, étaient tous en laiton; ceux qui se fixaient sur l'embouchure B étaient en verre.

Après avoir expérimenté, de cette manière, avec plusieurs tuyaux de même embouchure, on fait des observations pareilles avec des tuyaux d'une *autre* embouchure.

Ces séries d'expériences permettent d'obtenir toutes les quantités nécessaires au calcul des corrections et à la détermination des résultats définitifs concernant la vitesse du son dans les liquides. Tous les tuyaux utilisés par Wertheim dans ces expériences étaient des tuyaux *ouverts*. Les tuyaux fermés n'ont donné aucun résultat [1]).

[1]) Plusieurs remarques intéressantes, à côté de celles qui sont exposées dans le texte, ont été faites par Wertheim au cours de ses expériences. Il est bon d'en citer quelques-unes : 1) La quantité d'eau contenue dans le vase A, où est plongé le tuyau sonore et la hauteur de la colonne liquide au-dessus de l'extrémité supérieure de ce tuyau n'ont aucune influence sur les sons produits; il n'y a que la hauteur de la colonne liquide comprise à l'intérieur du tuyau, qui détermine ces sons ; 2) Wertheim constate, qu'en augmentant les pressions, le son fondamental et ses harmoniques supérieures commencent *à se répéter* de nouveau, aussi bien dans *l'eau* que dans *l'air;* cette répétition peut se produire même une *troisième* fois ; 3) Wertheim affirme aussi, qu'en exerçant de faibles pressions, il lui est arrivé d'entendre dans *l'eau* «*l'octave inférieure*» du son fondamental. Il explique ce phénomène comme résultat des vibrations «*transversales*», dont il admet l'existence dans *les liquides*, malgré l'opinion contraire de tous le physiciens. Ce fait n'a plus été remarqué par aucun autre expérimentateur ; s'il était exact, il serait d'une importance particulière et serait appelé à révolutionner la théorie de l'Acoustique.

Résultats des expériences de Wertheim.—Leur interprétation.

Nons ne nous arrêtons pas au tableau des chiffres donnés par Wertheim concernant les vibrations des sons obtenus dans ces expériences et d'où il ressort que le son fondamental déduit des harmoniques est toujours plus *élevé* que le son directement perçu; nous ne nous arrêtons pas, non plus, au tableau, qui indique les pressions nécessaires pour produire ces sons et d'où l'on ne pourrait tirer, qu'avec une grande indulgence, la loi proclamée par Wertheim que ces *pressions sont proportionnelles au carré des numéro d'ordre des harmoniques correspondantes*. Nous nous contentons seulement d'emprunter au tableau, qui contient le résultat final du calcul de la vitesse du son dans une colonne d'eau, quelques chiffres, obtenus à l'aide des données des diverses séries d'expériences.

Quelques chiffres des expériences de Wertheim donnant la vitesse du son dans une colonne d'eau de la Seine, entre 10^0—20^0 de température

L'embouchure	Longueur du tuyau	Longueur de la corde correspondant au son fondamental	Nombre des vibratrions	Vitesse du son corresp. à la long. du tuyau non corrigée	Correction des longueurs des tuyaux		Vitesse du son corrigée	
	mm	mm		m.		mm		m
A	I 332,5	80,5	3180,1	1057,5	37,8		1147,2	
„	II 666	153,0	1673,2	1114,5	31,7	moyen. = 28.5	1161,5	moyen. = *1154,6*
„	III 1000,5	228,0	1122,8	1125,3	16,0		1155,0	
A	I 332	91,0	2813,2	935,3	86		1158.7	
„	II 666	163,5	1564,8	1042,8	81	moyen. = 78,4	1165,5	moyeu. = *1161,6*
„	III 1000,5	238,0	1075,6	1076,2	68		1160,5	
A	I 332	98,2	2612,3	778,4	152,4		1161,1	
„	II 666	170,0	1505,9	947,0	148,4	moyen. = 146,5	1167,8	moyen. = *1164*
„	III 1000,5	224	1049,2	1010,4	138,4		1464,8	
B	I 97,5	26,5	9660	941,9	19,2		1184,0	
„	II 190,0	47,5	5383,5	1024,0	23,0	moyen. = 25 1	1158,7	moyen. = *1170,7*
„	III 281,0	67	3820,9	1076,1	33,2		1169,2	
D	I 507	110,0	2327,3	1179,9		moyen. = 3,5	1188,1	moyen. = *1188,1*
„	II 1231	266,0	962,4	1184,7			1188,1	
D	I 210	50,0	5120,0	1075		moyen. = 20	1177,6	moyen. = *1177,6*
„	II 325	76,0	3413,3	1109,4			1177,6	

La moyenne de toutes les observations donne pour la vitesse *corrigée* du son dans l'eau :

$$V = 1173^{m},4.$$

Remarques. Par rapport à tous ces calculs et expériences il y a plusieurs remarques à faire:

1) Le *son fondamental* d'un tuyau de longueur et d'embouchure données – comme c'est, p. ex., le tuyau de 332^{mm} et d'embouchure A – se trouve évalué par les vibrations d'une corde, dont on voit la longueur varier, suivant l'expérience, de $80^{mm},5$ à $98^{mm},2$, ce qui ne devait pas avoir lieu, la hauteur de ce son devant se maintenir toujours la même pour le même tuyau;

2) La vitesse *non corrigée* diminue, pour des tuyaux de même embouchure, quand la longueur de ces tuyaux décroît, c'est ce qui arrive aussi dans le cas de l'air;

3) Il y a une trop grande différence entre les valeurs des *corrections* à ajouter aux longueurs des tuyaux de même embouchure, ce qui est contraire à la théorie même de Wertheim; ainsi, on constate, que pour les tuyaux d'embouchure A, la valeur moyenne de cette correction varie entre $28^{mm},5$ et $146^{mm},5$, et pour les tuyaux d'embouchure D cette correction passe de $3^{mm},5$ à 20^{mm} Il suit de là que, du moins pour l'eau, ces corrections ne peuvent pas être considérées comme constantes pour la même embouchure et, en tout cas, elles ne paraissent pas être les seules à considérer;

4) On voit aussi, dans le tableau *complet* de Wertheim, des différences trop sensibles entre les *vitesses corrigées* du son, déduites au moyen de ses différents tuyaux; ainsi, dans la dernière colonne de son tableau, on trouve pour la valeur de cette vitesse des nombres qui vont de $1129^{m},7$ — $1208^{m},4$, ce qui constitue un écart peu acceptable;

5) Enfin, dans toutes ces expériences, on n'a pas tenu aucun compte de la *température*, dont l'influence cependant – comme on le montrera plus loin – n'est pas à dédaigner. C'est à cette influence surtout qu'on pourrait bien attribuer la trop grande différence, qu'on constate entre certains résultats, qu'on s'attendait à voir concorder [1]).

---

[1]) Wertheim utilise son installation pour faire des expériences et des calculs analogues pour la détermination de la vitesse du son aussi dans *l'air*. Dans ce but, il retire le tuyau sonore du vase A et le pose sur un support extérieur S, en le mettant en communication par un tube

Ces remarques faites, on voit qu'en dernier lieu et comme résultat moyen de ses expériences, faites avec les tuyaux sonores, Wertheim trouve pour la valeur de la vitesse du son dans une *colonne* d'eau :

$$V_1 = 1173^m,4, \text{ à la température de } 15^0.$$

Or, Colladon et Sturm avaient trouvé par des mesures directes :

$$V = 1435^m, \text{ à une température de } 8^0,1.$$

Ces deux nombres présentent, comme on voit, une différence qui n'est pas négligeable. Le nombre donné par Wertheim est de beaucoup plus petit que celui de Colladon et Sturm.

Pour expliquer cette différence Wertheim remarque, qu'en prenant le rapport entre la vitesse trouvée par Colladon et Sturm

---

spécial avec la partie supérieure du réservoire B (voir page 26). On bouche ensuite le trou de la base inférieure du vase A, où se trouvait le tuyau sonore et on ne laisse communiquer ce vase A avec le réservoir B que par le tube N. Au moyen de la pompe on fait passer l'eau du vase A dans le réservoir B, où elle se ramasse, ne pouvant plus repasser par le tube M et chasse l'air par le tuyau sonore T, qui commence ainsi à vibrer.

On compte le nombre de vibrations des sons entendus, ainsi que les pressions correspondantes. On visse ensuite à la même embouchure des tuyaux de longueur différente, afin de déduire de leurs sons fondamentaux la correction correspondant à cette embouchure. Si N était le nombre de vibrations et $(l + z)$ la longueur corrigée du tuyau, la vitesse V à la température de l'expérience est donnée par la formule :

$$V = 2\,N\,(l + z)$$

d'où l'on passe à la vitesse V_0, correspondante à la température O^0, à l'aide de la relation :

$$V_0 = \frac{V}{\sqrt{1 + \alpha t}} = \frac{V}{\sqrt{1 + 0{,}00366t}}$$

Comme résultat de toutes ses expériences Wertheim trouve pour la vitesse du son dans *l'air* à O^0, $V_0 = 332^m,3$, valeur un peu plus grande que celle qui a été trouvée plus tard par Régnault dans l'air libre et qui est de $330^m,7$. Cette différence résulte probablement de ce fait surtout, que dans le calcul de V_0 on ne tient pas compte de l'humidité de l'air, qui n'était pas négligeable, car, avant d'entrer dans le tuyau, cet air balaie la surface du liquide du réservoir B.

Pour les sons produits dans un *liquide* il faut des pressions bien plus fortes que pour les sons produits dans l'air, à l'aide d'un même tuyau. Ainsi, pour obtenir dans l'eau le son fondamental d'un tuyau de 298^{mm} de longueur et d'embouchure A, il fallait une pression de . . . . 78^{mm} mercure = 1060^{mm} *d'eau*
tandis que pour obtenir dans l'air le son fondamental du même tuyau il ne fallait qu'une pression de . . . . 100^{mm} jusqu'à 196^{mm} *d'eau*,
c'est-à-dire une pression presque dix fois plus faible que la première.

dans la *masse illimitée* du lac de Genève et celle qui était déduite par lui pour des *colonnes* d'eau de dimensions réduites, il trouve :

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1435}{1173,4} = 1,223$$

ou bien, approximativement :

$$\frac{V}{V_1} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad \text{car la valeur de } \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2247,$$

diffère très peu de la valeur de ce rapport $\frac{V}{V_1}$ [1]).

Il se rappelle, en même temps, que la vitesse de propagation du son par des vibrations longitudinales dans des *masses solides* illimitées et homogènes diffère de la vitesse du son dans des *barres* prismatiques de même substance et le rapport de ces deux vitesses — si l'on tient compte des formules de l'élasticité [2]) et dans l'hypothèse que le coefficient de Poisson est égal à $\frac{1}{3}$ — est justement égal au $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Soutenu par la coïncidence de l'égalité de ces deux rapports — d'une part, le rapport de la vitesse du son dans une *mase illimitée d'eau* à celle dans une *colonne* d'eau, et d'une part, le rapport de la vitesse théorique dans une *masse solide* illimitée à la vitesse dans une *barre* prismatique de même substance — Wertheim assimile les liquides aux solides et leur attribue des propriétés identiques en ce qui concerne la propagation du mouvement vibratoire. Il admet, donc, qu'il y a dans tous les *liquides*, de même que dans les solides, deux sortes de vitesses de propagation du son : une, plus petite, dans les liquides contenus dans des tuyaux, et

---

1) La vitesse de 1435 m. pour le son dans le lac de Genève à 8°, 1 de température n'est pas la mieux choisie dans cette comparaison. Il faudrait considérer, pour plus de rigueur, la valeur 1446 de la vitesse dans l'eau distillée à 15° de température, ou bien dans l'eau de la Seine, employée par Wertheim dans ses expériences, vitesse obtenue à l'aide du coefficient de compressibilité donné par Grassi, $\beta = 10^{-6} \times 47,2$. On aurait alors le rapport $\frac{1466}{1173} = 1,2496$, dont la valeur s'écarte un peu plus de celle de $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

2) On trouvera dans les pages suivantes les formules respectives de l'élasticité.

une autre, plus grande, dans des masses illimitées, ayant entre elles le même rapport que pour les solides, égal au $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Or, la formation et la propagation de ces deux ondes sonores dans les *solides* suppose qu'en un point de la masse vibrante il n'y a pas d'égalité de pression dans tous les sens. Alors Wertheim, s'inspirant aussi d'une idée développée dans le même sens par Poisson, dans un Mémoire antérieur [1]), étend cette hypothèse aussi aux liquides et admet — contrairement aux principes de l'Hydrodynamique — que dans un point du liquide il n'y a pas, pendant la vibration, de pressions égales dans tous les sens et „qu'une colonne liquide vibrant longitudinalement produit le même son qu'une barre solide faite d'une substance, qui aurait la même *compressibilité cubique* que le liquide“.

Pour mieux se convaincre de l'exactitude de ses hypothèses, Wertheim étend ses expériences avec les tuyaux sonores aussi à d'autres liquides, différents de l'eau, dont il cherche à vérifier les résultats par des moyens analogues que pour l'eau. Mais, puisque pour ces autres liquides on ne possède pas pour la vitesse du son des nombres tirés de la mesure directe, comme pour l'eau, Wertheim compare le résultat de ses expériences avec le résultat obtenu par le calcul à l'aide de la formule théorique de Laplace, laquelle, — comme on l'a déjà prouvé par les discussions antérieures — peut donner, avec toute la précision voulue, la vitesse du son, à l'aide du coefficient de compressibilité β et de la densité δ, dans une masse liquide illimitée :

$$V = \sqrt{\frac{1}{\beta\delta}}$$

ou bien, en exprimant les pressions en $\frac{\text{Kgr.}}{\text{m}^2}$ et la vitesse en mètres :

$$\text{(L)} \qquad V = \sqrt{\frac{9{,}8088 \times 0{,}76 \times 13{,}596}{\beta.\delta}} = \sqrt{\frac{101{,}354}{\beta\delta}}$$

En faisant, donc, parler ces liquides dans des tuyaux sonores, Wertheim détermine d'abord la vitesse du son V_1 dans leurs colonnes, en admettant que la correction nécessaire aux longueurs des

[1]) Journal de l'École Polytechnique XX^e cahier.

tuyaux est la même que pour l'eau, et ensuite, en multipliant cette vitesse par $\sqrt{\frac{3}{2}}$ il considère le résultat :

$$\text{(W)} \qquad V = V_1 \sqrt{\frac{3}{2}}$$

comme représentant la vitesse du son dans la masse liquide illimitée déterminée indirectement.

En comparant, ensuite, pour un même liquide, le résultat ainsi obtenu à celui qui est donné par la formule (L), il trouve à peu près les mêmes valeurs, d'où il conclut à la justesse de ses hypothèses et à l'efficacité de sa méthode, qui peut, d'après lui, conduire toujours à des résultats exacts.

En réalité, Wertheim ne suit pas exactement ce procédé, car, après avoir trouvé par l'expérience la vitesse V_1 dans des colonnes liquides et après avoir calculé au moyen de la formule (W) la vitesse V, qui aurait lieu dans une masse illimitée, il remplace cette dernière vitesse dans le premier membre de (L) et déduit de l'équation ainsi formée le coefficient de compressibilité β, qui y entre :

$$\beta = \frac{9{,}8088 \times 0{,}76 \times 13.596}{\frac{3}{2} V_1^2 . \delta}$$

En comparant, ensuite, le résultat de ce calcul à la valeur trouvée directement pour le *coefficient de compressibilité* β, il constate presque toujours une concordance assez satisfaisante entre ces valeurs.

Quoique ces deux procédés : comparer les vitesses, ou comparer les coefficients de compressibilité déduits des mêmes formules et expériences, paraissent conduire aux mêmes conclusions, il est bon de remarquer que Wertheim choisit la voie la plus favorable à ses hypothèses. En effet, les coefficients de compressibilité, qui sont généralement exprimés par deux chiffres, ne peuvent pas présenter de trop grandes différences entre eux, tandis que les vitesses correspondant à ces coefficients peuvent offrir, comme on le verra, des différences assez sensibles entre elles; une variation très petite dans la valeur du coefficient de compressibilité modifie sensiblement la valeur de la vitesse respective du son et peut donner l'impression d'un désacord trop grand entre les nombres comparés et c'est cette impression défavorable que Wertheim paraît avoir voulu éviter, en comparant les compressibilités et non pas les vitesses obtenues par les deux méthodes.

Voici, pour *quelques liquides*, les *vitesses du* son et *les compressibilités* respectives, *déterminées* par *Wertheim par son procédé* [1]) :

	SUBSTANCES	Température	Densité	VITESSE DU SON — V_1 dans des colonnes	VITESSE DU SON — $V = V_1\sqrt{\frac{3}{2}}$ dans la masse illimitée d'après Wertheim	Compressibilité déduite de la vitesse du son de Wertheim	Compressibilité mesurée directement par Grassi
				m.	m.		
1	Eau de la Seine	15°	0,9996	1173,4	1437,1	$10^{-6}\times 49,1$	$10^{-6}\times 46,3$ à 18°
2	» » » . . .	40°	0,9931	1324,8	1622,5	38,8	44,0, à 53°
3	Eau de mer artificielle .	20°	1,0264	1187,0	1453,8	46,7	43,6
4	Solution de clorure de sodium	18°	1,1920	1275,0	1561,6	34,9	
5	Solution de carbonate de sodium.	22°,2	1,1828	1301,8	1594,4	33,7	29,7
6	Solution de nitrate de sodium	20°,09	1,2066	1363,5	1669,9	30,1	29,5
7	Alcool absolu	23°,0	0,7960	947,0	1159,8	94,7	99,1
8	Éther sulfurique . . .	0°,0	0,7529	946,3	1159,0	100,2	111,0
9	Essence de térébenthine	24°	0,8622	989,8	1212,3	80,0	

L'auteur remarque, que le son produit dans l'éther était à peine perceptible, d'où il suit que le résultat des expériences faites avec ce liquide n'est pas très rassurant. Quant aux autres substances, comme l'eau, les solutions salines et l'alcool, Wertheim trouve que leurs coefficients de compressibilité, obtenus par la voie de ses expériences et au moyen de la formule précédente, diffèrent très peu des coefficients de Grassi, trouvés par la méthode piézométrique, pour les mêmes substances. Il conclut de là, que la méthode indiquée par lui peut être employée avec la même confiance que la formule théorique et qu'elle donne la valeur de la vitesse du son dans les liquides avec la meilleure précision.

[1]) La détermination de la vitesse du son dans ces liquides est faite de la même manière que pour l'eau.

Avant de terminer ce résumé, citons quelques-unes des conclusions finales auxquelles s'arrête Wertheim dans ce long et méritoire travail.

1) La vitesse du son dans *l'air* est la même dans une colonne, que dans une masse indéfinie. Elle peut être déterminée à l'aide du son fondamental d'un tuyau d'orgue, pourvu qu'on tienne compte des perturbations produites aux extrémités.

2) Dans les *liquides* un tuyau d'orgue peut produire – quand son embouchure est bien conditionnée – le son fondamental et un grand nombre d'harmoniques. On déduit de ce son fondamental la vitesse du son dans une *colonne* liquide de section réduite, par le même calcul que pour l'air.

3) Pour un même *liquide*, le rapport de la vitesse du son dans une *masse* illimitée à la vitesse dans une *colonne* est égal au $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

4) Les vibrations d'une *colonne liquide* sont isochrones à celles d'une *barre solide* de même longueur et faite d'une substance qui aurait le même coefficient de compressibilité que le liquide. La loi de l'égalité des pressions dans tous les sens dans un liquide *ne se maintient* plus, pendant les vibrations et la loi moléculaire est la même, tant pour les liquides que pour les solides.

—C'est là le résumé des expériences de Wertheim pour la vitesse du son dans les liquides par des méthodes indirectes, expériences qui ont fait époque dans la littérature de la Physique et qui jouissent encore de nos jours d'assez d'autorité dans cette question [1]).

Défauts et difficultés des expériences de Wertheim. — Interprétation erronée de leurs résultats.

5) Les expériences et les résultats de Wertheim présentent bien des défauts, tant au point de vue des observations qu'au point de vue des déductions basées sur ces observations.

[1]) C'est intentionnellement qu'on a donné un trop grand développement à ce résumé, pour montrer combien la méthode de Wertheim est laborieuse et de qu'elle interprétation subtile et singulière ont besoin ses résultats pour donner une solution apparente au problème, dont elle s'occupe.

D'abord, son dispositif expérimental est compliqué et coûteux : un bassin pour le liquide, un réservoir de pression, des pompes aspirantes et refoulantes, des manomètres à mercure et à eau, divers tubes de communication et divers robinets, une sirène, ou un sonomètre, des tuyaux d'orgue spéciaux munis de divers accessoires, etc.

Et ensuite, malgré tout ce complexe d'appareils, le succès de l'expérience n'est pas toujours assuré. Pour qu'une expérience réussisse, il faut que les tuyaux sonores et les pressions remplissent des conditions spéciales. Un tuyau d'embouchure donnée ne se décide pas à parler toujours. L'auteur construit les lèvres de l'embouchure à l'aide de deux cols métalliques mobiles, qu'il approche ou écarte, jusqu'à ce qu'il obtienne une ouverture propre à faire sonner le tube. Ce tâtonnement est nécessaire pour chaque embouchure donnée. Et même lorsqu'on réussit à faire parler un tuyau, le son est souvent étouffé par d'autres sons connexes, qui proviennent des vibrations du corps du tuyau métallique lui-même, ou de ceux qui sont connus sous le nom de sons d'embouchure. »On sait, dit l'auteur, dans son mémoire, quelle incertitude règne dans toutes les règles pratiques sur l'embouchure d'un tuyau destiné à sonner dans *l'air*, ou dans un autre gaz..... Les difficultés et l'incertitude augmentent encore, lorsque le tuyau doit sonner dans un liquide ; les forces, relativement très grandes, qui sont mises en jeu, produisent facilement des sons d'embouchure, des sifflements dans la »lumière« et enfin, des sons provenant des vibrations des lèvres et du corps même du tuyau. Aussi, n'ai-je réussi qu'après un long tâtonnement à faire disparaître tous ces bruits, qui empêchent souvent le son de la colonne liquide de naître et d'être entendu et je prierai les personnes . . . Mais, quand les sons se produisent ils sont beaux, purs et intenses; les harmoniques sortent facilement et sont dans un accord parfait avec le son fondamental . . . «.

Dans certains liquides le son est faible et indécis. Ainsi, l'auteur avoue de n'avoir presque rien entendu dans les expériences faites avec l'éther ; les données sur ce liquide sont, donc, peu précises.

Il n'a pas réussi, non plus, à produire, ou à entendre des sons dans l'eau tiède. Les bulles d'air produites par l'échauffement du liquide se déposaient sur les lèvres latérales et sur les parois de l'embouchure et empêchaient la naissance du son. Il fallait, pour la réussite de l'expérience, que l'eau soit d'abord bouillie pendant plus de deux heures et qu'ensuite on maintienne l'appareil à une température plus élevée, en plongeant le bassin, qui contient le liquide, dans de l'eau chaude, dont on maintient la température constante. La plus légère poudre, ou impureté, dans le liquide, suffit pour gêner les vibrations dans le colonne liquide et, par conséquent, pour empêcher la naissance du son.

Parfois, de petites bulles d'air se fixent sur *la lumière* de l'embouchure et se comportent comme de véritables anches, en produisant des sons accessoires gênants, de différents timbres et intensités.

Après avoir obtenu un son à l'aide d'une certaine embouchure, on doit modifier la longueur du tuyau, en y ajoutant successivement d'autres tuyaux de même section, et on évalue les sons correspondants à chaque longueur, afin de déterminer la correction nécessaire au calcul de la longueur d'onde. Le tableau de la page 29 nous montre, que ces corrections diffèrent beaucoup entre elles, quoique d'après Wertheim elles auraient dû être constantes pour une même embouchure. Ainsi, pour le tuyau de 332^{mm} de longueur et d'embouchure A, cette correction varie, comme on l'a déjà vu, de 28 ^{mm} à la valeur quintuple, de 146 mm. Le calcul doit sûrement se ressentir de l'approximation faite, en considérant comme égales ces quantités, en réalité si différentes [2]).

La température, enfin, dans ces expériences est trop vaguement indiquée, quand on nous dit qu'elle était comprise entre 10^0—20^0. On verra par la suite, que son influence est à considerer dans des observations de ce genre.

Mais, en laissant de côté toutes les difficultés expérimentales, que présente cette méthode pour la détermination de la vitesse du son

---

[2]) NOTE.— Pour un tuyau de même longueur et de même embouchure, comme c'est, p. ex., celui de 332 mm., on a trouvé, comme on l'a déjà indiqué dans le tableau de la page 29, qu'à son ton fondamental correspond une longueur de corde, qui varie de 80.5 ^{mm} à 98,2 ^{mm}, ce qui donnerait, d'après la formule (8) de la page 25, comme vibrations complètes du son fondamental de ce tuyau, dans les expériences de Wertheim, des nombres qui varient de 1600 à 1300 c. à. d. des nombres, qui ont entre eux une différence de 300 vibrations complètes, ce qui est vraiment intolérable.

dans les liquides, on observe qu'elle ne peut pas être la plus générale. Tous les tuyaux, en effet, dont on s'est servi pour ces expériences, avaient l'ouverture de l'embouchure faite en laiton. Comment se comporteraient, alors, ces plaques métalliques dans des liquides qui attaquent les métaux, à savoir les acides, ou les solutions alcalines, qui produisent des actions chimiques? Et, puis, de quelle pression aurait-on besoin pour faire chanter dans ces tuyaux le *mercure*, qui est si lourd et si peu maniable? Si cette expérience pouvait réussir, pourquoi l'auteur de cette méthode n'a-t-il pas essayer d'entendre aussi le son de ce liquide?

En voilà donc, une foule d'inconvénients et de difficultés expérimentales, qui se rencontrent dans l'application de cette célèbre méthode.

Mais — chose plus sérieuse — après de si grandes installations et de si difficiles observations, les résultats trouvés furent loin de concorder avec ceux, auxquels on s'attendait. La vitesse obtenue:

$$V_1 = 1173{,}4^{m}$$

est de beaucoup inférieure à celle qui avait été trouvée directement par Colladon & Sturm dans l'eau du lac de Génève:

$$V = 1435^{m}, \text{à } 8^0{,}1 \text{ de température,}$$

et dont la valeur concorde avec celle qui se déduit au moyen du coefficient de compressibilité, donné par la formule de Laplace:

$$V = \sqrt{\frac{1}{\beta \delta}}$$

Les déterminations de Colladon et Sturm ont eu pour but, comme on le sait, d'un coté, de fixer expérimentalement la grandeur de cette vitesse et d'un autre, de vérifier, si le résultat de l'observation correspond à celui de la formule théorique. L'accord a été, comme on l'a déjà remarqué, très satisfaisant; donc, la mesure directe et la formule théorique conduisent au même résultat et elles peuvent se remplacer, l'une, l'autre.

Pour augmenter un peu plus la valeur trouvée pour sa vitesse, Wertheim imagine que la vitesse dans une colonne liquide libre serait inférieure à celle dans une masse illimitée — comme cela arrive dans le cas des solides — et, attribuant aux liquides les mêmes propriétés moléculaires qu'aux solides, il admet que le rapport de la vitesse dans une masse illimitée à la vitesse dans une colonne liquide est exactement le même que pour *les solides* et égal à la valeur du $\sqrt{\frac{3}{2}}$, valeur déduite de ses propres expériences, faites sur ces quelques-unes de ces dernières substances.

Mais, il est à remarquer que l'application, que fait Wertheim de ce facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ aux vitesses obtenues dans les colonnes liquides de ses tuyaux sonores, paraît trop artificielle et ne s'impose pas comme une nécessité issue du fait de l'existence de deux vitesses différentes du son dans les *solides*. Même, si on néglige le fait que par cela on introduit l'hypothèse, qui n'a jamais été confirmée, que dans les liquides en vibration les pressions exercées en un point ne sont pas égales dans toutes les directions, l'introduction de ce coefficient repose, en outre, sur un cercle vicieux, qui, ce me semble, n'a encore jamais été relevé.

6. Pour montrer en quoi consiste ce cercle vicieux, nous allons faire une petite excursion dans le domaine de l'Élasticité.

1⁰ Dans la théorie de l'Élasticité, la vitesse de propagation d'une onde par des vibrations longitudinales dans une *masse solide*, homogène, illimitée et d'élasticité constante, est donnée par la formule :

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{1}$$

et la vitesse de propagation par des vibrations longitudinales dans des *tiges solides prismatiques*, ou *cylindriques*, à faces latérales libres, par la formule :

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{2}$$

où ρ est la masse de l'unité de volume, λ et μ, les *constantes* dites de *constitution*, ou bien les *coefficients de Lamé* et E le *coefficient de l'élasticité* proprement dit, ou le coefficient de Young[1].

[1]) M. G. LAMÉ. Théorie mathématique de l'Élasticité des corps solids, pg. 141 et 142. De même J. VIOLLE, Acoustique, pg. 49, 75 et 79.

On sait qu'entre les constantes λ et μ, d'une part, et entre le coefficient d'élasticité E et le coefficient de Poisson σ (le rapport entre le coefficient de contraction transversale et le coefficient d'élongation longitudinale), d'autre part, il existe les relations suivantes [1]:

$$(3)\left\{\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-\sigma)}\\[2ex] 2\mu=\dfrac{E}{1+\sigma}\end{array}\right. \qquad (4)\ \lambda=2\mu\frac{\sigma}{1-2\sigma} \qquad (5)\left\{\begin{array}{l}\sigma=\dfrac{\lambda}{2\mu+2}\\[2ex] E=\mu\dfrac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\end{array}\right.$$

à l'aide desquelles on peut exprimer les vitesses précédentes en fonction de E et σ, ou réciproquement.

De certaines déterminations faites par lui-même pour les coefficients d'élasticité, Wertheim avait conclu que la valeur du coefficient de Poisson serait [2])

$$(6)\qquad \sigma=\frac{1}{3}$$

Pour cette valeur de σ on voit que les formules (4) et (5) donnent:

$$(7)\qquad \lambda=2\mu$$

et

$$(8)\qquad E=\frac{4\lambda}{3}$$

et les expressions des vitesses précédentes deviennent :

$$(9)\qquad V=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{4\lambda}{3\rho}}$$

pour la vitesse dans une *masse* illimitée par des vibrations longitudinales et

$$(10)\qquad a=\sqrt{\frac{4\lambda}{3\rho}}$$

pour la vitesse, toujours par des vibrations longitudinales, dans des *tiges* cylindriques, pouvant se dilater librement par leurs faces latérales.

---

[1]) J. Violle. Physique moléculaire. T. I, 1-ère partie, pg. 383.

[2]) Wertheim. Mémoire sur l'équilibre des corps solides, homogènes. Annales de Physique et de Chimie, 3-ème série. T. XXIII, pg. 53. ann. 1848.

En comparant ces deux vitesses, on déduit :

$$V = a\sqrt{\frac{3}{2}} \tag{11}$$

c'est-à-dire que la vitesse par des vibrations longitudinales dans une *masse solide*, homogène et illimitée, est égale à la vitesse dans une *tige* cylindrique de même substance multipliée par le facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$. C'est là, la conclusion de Wertheim pour les solides (avec l'hypothèse de $\sigma = \frac{1}{3}$), conclusion qu'il étend aussi aux *liquides*, en les identifiant aux solides au point de vue de leurs propriétés élastiques [1]).

---

[1]) NOTE.—Par la même théorie de l'élasticité on démontre, que dans une masse *solide* illimitée peut exister aussi une onde produite par des vibrations *transversales*, simultanément avec l'onde des vibrations longitudinales. Sa vitesse de propagation est, dans le cas général :

$$V' = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

et, dans l'hypothèse particulière de Wertheim pour $\lambda = 2\mu$, ou $\sigma = \frac{1}{3}$:

$$V' = \sqrt{\frac{\lambda}{2\varrho}}$$

Or, pour la vitesse de propagation de l'onde par des vibrations *longitudinales* on a :

$$V = \sqrt{\frac{2\lambda}{\varrho}} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{2\varrho}}.$$

On voit que le rapport de ces deux sortes de vitesses est :

$$\frac{V}{V'} = 2, \quad \text{d'où : } V = 2V'$$

c'est-à-dire que la vittesse par des vibrations *longitudinales* dans une masse illimitée et dans l'hypothèse de $\sigma = \frac{1}{3}$ est le double de la vitesse par des vibrations *transversales*, dans la même masse.

Wertheim admet, par analogie, que dans une *colonne solide cylindrique* il doit y avoir le *même rapport* entre les vitesses de deux ondes—par des vibrations longitudinales et par des vibrations transversales—et, appliquant ensuite ces mêmes conclusions *aux liquides*, il déduit que dans la colonne liquide d'un tuyau sonore il doit exister un son fondamental par des vibrations *longitudinales* et un autre par des vibrations *transversales* et que le rapport de leurs vitesses doit être égal à 2.

Désignant par n et n' les nombres respectifs des vibrations de ces sons fondamentaux et par v et v' leurs vitesses et remarquant qu'ils ont la même longueur d'onde—le double de la longueur du tuyau—on a :

$$\lambda = \frac{V}{n} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{V'}{n'}, \quad \text{donc} \quad \frac{V}{V'} = \frac{n}{n'}, \quad \text{ou bien, comme} \quad \frac{V}{V'} = 2, \quad n' = \frac{n}{2}$$

c'est-à-dire que le son fondamental, produit par des vibrations *transversales*, est à l'*octave inférieure* du son fondamental dû aux vibrations *longitudinales*. C'est ainsi que Wertheim explique l'apparition de ce son bas à l'octave inférieure du son fondamental normal, qu'il prétend avoir entendu dans les colonnes liquides des tuyaux sonores et dont on parle dans la note placée au bas de la page 28.

2^0 Rappelons encore de la théorie de l'élasticité, que le coefficient de contraction cubique d'un solide homogène, soumis à sa surface à des pressions uniformes, est donné, dans le cas général, par la formule :

$$\theta = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \tag{12}$$

Dans l'hypothèse de Wertheim, où $\lambda = 2\mu$, c'est-à-dire $\sigma = \frac{1}{3}$, ce coefficient devient :

$$\theta = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\lambda} \tag{13}$$

Remplaçons la valeur de λ tirée de cette formule dans l'expression (10), laquelle représente — dans la même hypothèse de Wertheim pour $\sigma = \frac{1}{3}$ — la vitesse de propagation par des vibrations longitudinales dans une *colonne solide*. On aura la formule :

$$a = \sqrt{\frac{1}{\theta . \rho}} \tag{14}$$

qui exprime cette vitesse du son dans une pareille colonne au moyen de la *contraction cubique* du solide soumis à des pressions uniformes.

Des conclusions du Mémoire de Wertheim il s'ensuit que les liquides et les solides ont les mêmes propriétés moléculaires et leurs phénomènes d'élasticité sont représentés par les mêmes formules. Appliquons alors la formule (14) aux liquides. Le second membre représente exactement la vitesse théorique du son dans une *masse* liquide illimitée, exprimée au moyen du coefficient de contraction cubique, ou de compressibilité θ — c'est la formule *de Laplace ;* le premier membre représente, d'après sa signification, la vitesse dans une *colonne* liquide, qui vibrerait de la même manière qu'une barre solide de même compressibilité, libre à se dilater latéralement. On voit, donc, que, comme suite des propres hypothèses de Wertheim, ce qu'il appelle vitesse dans une colonne cylindrique est égale à la vitesse dans une masse liquide illimitée, car on ne doit pas oublier, que l'expression théorique de la vitesse dans une masse liquide indéfinie, telle qu'elle apparaît dans le second membre de la formule (14), est acceptée aussi par Wertheim; elle représente en même temps la vitesse donnée par la mesure directe et Wertheim l'utilise souvent dans ses comparaisons [1]). En d'autres mots, *la vitesse théorique dans une masse liquide illimitée, d'après les formules mêmes de Wertheim, devrait être la même que la vitesse obtenue dans une colonne liquide*, soumise à des vibrations longitudinales.

C'est là une *première déduction*, qui résulte comme une conséquence nécessaire des hypothèses de Wertheim.

Or, la vitesse trouvée par Wertheim dans les expériences faites sur les colonnes liquides de ses tuyaux ne confirme pas cette égalité; elle est de beaucoup inférieure à la vitesse trouvée directement dans une masse illimitée. Quelle en est la cause? Elle réside, évidemment, ou bien dans le défaut de la méthode expérimentale, ou bien dans la mauvaise interprétation des résultats, par l'application de formules, qui ne conviennent pas aux expériences considérées. On verra, dans ce qui suit, que c'est surtout à cette dernière cause qu'on devra attribuer le désaccord des résultats.

3⁰ Malgré cette déduction théorique exprimée par (14), Wertheim admet que la vitesse du son dans une masse liquide illimitée est plus grande que la vitesse dans une colonne liquide et, en se servant des mêmes formules que pour les *solides*, il prend pour la première de ces deux vitesses la valeur trouvée plus haut:

$$(9) \qquad V = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{4\lambda}{3\rho}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \text{dans laquelle } a = \sqrt{\frac{4\lambda}{3\rho}} \qquad (10)$$

c'est-à-dire qu'il considère cette vitesse dans la *masse* comme le produit de la vitesse dans la *colonne* par le facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Pour vérifier cette hypothèse, il compare le résultat donné par le second membre de cette formule (9) à la valeur de la vitesse obtenue par la mesure directe, c'est-à-dire qu'il remplace V dans le premier membre de (9) par le nombre trouvé directement, ou bien par celui qui résulte de la formule théorique de Laplace, pour la vitesse

---

[1]) Wertheim emploie cette formule théorique pour calculer la compressibilité des liquides quand il veut vérifier les résultats obtenus par l'application de sa méthode.

du son dans une masse illimitée et prétend obtenir une égalité. Or, la valeur théorique de cette dernière vitesse est, comme on sait :

$$(15) \qquad U = \sqrt{\frac{1}{\beta\rho}}$$

β étant le coefficient de compressibilité du liquide et ρ sa densité.

Dans cette formule (15) remplaçons ce coefficient de compressibilité β en fonction de λ.

Remarquons, pour cela, que, d'après la définition et les propres idées de Wertheim, le coefficient de compressibilité β est égal à ce que nous avons désigné plus haut par θ—coefficient de contraction cubique d'un corp soumis à des pressions uniformes—et s'exprime, par conséquent, d'après (13), en fonction de λ, par la relation :

$$(16) \qquad \beta = \theta = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\lambda}$$

En introduisant cette valeur dans U, nous aurons la vitesse du son exprimée en fonction de λ :

$$(17) \qquad U = \sqrt{\frac{4\lambda}{3\rho}}$$

Or, comme vérification, on devrait avoir, d'après Wertheim, U égal à V de la relation (9) :

$$(18) \qquad U = V$$

En exprimant cette egalité, nous trouvons :

$$\sqrt{\frac{4\lambda}{3\rho}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{4\lambda}{3\rho}}$$

ou $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1$, ce qui est impossible.

Donc, en voulant égaler la vitesse dans une masse *solide* illimitée [le second membre de (9)] à la vitesse dans une masse *liquide* indéfinie [second membre de (17)], comme le fait Wertheim pour ses *vérifications* et en restant dans son hipothèse pour $\lambda = 2\mu$, ou $\sigma = \frac{1}{3}$, on arrive à un résultat absurde.

4° Croyant pouvoir éviter cette contradiction, ou, peut-être, sans même la remarquer, Wertheim prend dans la formule (15) pour la valeur du coefficient β en fonction de λ, ***non*** pas la valeur qui résulte de la formule (16)—conséquence de son hypothèse $2\mu = \lambda$ — mais celle qu'on obtient des formules générales de l'élasticité dans l'hypothèse que la constante de constitution μ ***est égale à zéro.***

Le coefficient de contraction cubique des solides soumis à des pressions uniformes, est, en effet, dans le cas général, comme on l'a déjà rappelé :

(19) $$\theta = \frac{3}{3\lambda + \mu}$$

Faisons dans cette formule $\mu = 0$, ce qui revient, d'après (5), à prendre $\sigma = \frac{1}{2}$.

On obtient :

(20) $$\theta = \frac{1}{\lambda}$$

Cette condition analytique $\mu = 0$ caractérise l'état d'élasticité des liquides ***parfaits***, c'est-à-dire des liquides dépourvus de frottement entre leurs molécules. Tous les physiciens acceptent cette même condition $\mu = 0$ comme étant caractéristique aussi des liquides ***réels*** et l'expérience directe, de même que les conséquences [1]) qui s'en suivent, confirme cette hypothèse (le son, par exemple, ne se transmet dans les liquides que par des vibrations longitudinales). [2]) Elle exprime, en même temps, la propriété connue, que les pressions en un point d'un liquide sont les mêmes dans tous les sens, soit à l'état d'équilibre, soit à l'état de mouvement. [3])

Dans cette hypothèse sur la valeur de μ, le coefficient θ, qui a la valeur ci-dessus :

$$\theta = \frac{1}{\lambda}$$

---

[1]) O. D. Chwolson. — Traité de Physique. T. I., 3-ème fasc. — État solide et liquide des corps — pag. 796.

[2]) La vitesse de propagation du son par des vibrations transversales dans une masse solide élastique s'exprime, comme on l'a déjà rappelé, par la formule :

$$V' = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

En faisant $\mu = 0$, c'est-à-dire, en admettant que la masse élastique est liquide, on aura $V' = 0$. Donc, il n'y a pas de vibrations transversales dans un liquide, ce que l'expérience aussi prouve.

[3]) J. Violle. — Physique moléculaire. T. I., 1-ère partie, pag. 384.

représente le coefficient de compressibilité cubique des *liquides* en fonction de λ, car il exprime la contraction de l'unité de volume d'une substance élastique par rapport à l'unité de pression sur l'unité de surface. Sa valeur numérique est nécessairement égale au coefficient de compressibilité désigné par β, lequel se déduit par des mesures piézomètriques faites sur les liquides, et dans lesquelles les variations des pressions se transmettent effectivement d'une manière égale en tous les points, conformément à la condition $\mu = 0$.

On a donc:

$$(21) \qquad \beta = \theta = \frac{1}{\lambda}$$

Si, maintenant, on introduit dans la formule (15) de la vitesse du son dans les liquides cette valeur du coefficient β en fonction de λ, on obtient:

$$(22) \qquad U = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$$

Considérons, d'un autre côté, la formule générale (1) qui donne la vitesse du son par des vibrations longitudinales dans une masse *solide* illimitée:

$$(1) \qquad V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Cette formule est appliquable à n'importe quel milieu élastique, dont on connaît les constantes de constitution λ et μ ; elle est donc appliquable aux liquides aussi. Faisons dans cette formule l'hypothèse $\mu = 0$, qui caractérise de tels milieux liquides. On obtient:

$$(23) \qquad V_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$$

qui représentera la vitesse du son dans une masse liquide indéfinie. En comparant les expressions (22) et (23), on voit qu'elles ont même valeur, exprimée en fonction de λ, c'est-à-dire:

$$(24) \qquad U = V_1$$

ce qui prouve que la vitesse théorique du son dans une masse *liquide indéfinie* peut se déduire de la vitesse dans une masse *so-*

lide illimitée, en attribuant à la constante μ, dans l'expression de cette dernière vitesse, la valeur caractéristique aux liquides, c'est-à-dire en faisant $\mu = o$ [1]).

[1]) NOTE. — Considérons une tige cylindrique de section réduite, faite d'une substance solide, soumise longitudinalement à une pression (ou traction) P sur l'unité de section et dont les parois *latérales* soient empêchées de se dilater (on contracter) latéralement. En ce cas, le coefficient de *contraction cubique* est :

$$\theta' = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \tag{1}$$

et la force latérale sur l'unité de surface, nécessaire à maintenir les parois fixes, est :

$$Q = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P \tag{2}$$

On voit que l'expression de la vitesse du son par des vibrations *longitudinales* dans la *masse* de ce solide contient justement ce coefficient d'élasticité θ'.

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} = \sqrt{\frac{1}{\theta' \varrho}} \tag{3}$$

S'il arrivait, que pour cette substance, la force Q, nécessaire à fixer les parois latérales, soit exactement égale à P, on voit, d'après (2), qu'alors on doit avoir pour cette substance $\mu = o$.

Or, c'est ce qui arrive dans le cas des liquides, considérés soit en colonne, soit en masse : une pression exercée dans un sens quelconque sur une colonne liquide fait naître des pressions *égales* sur toutes ses faces latérales. Or, pour $\mu = o$ on voit que le coefficient θ' devient $\theta = \frac{1}{\lambda}$, égal au coefficient de compressibilité cubique β (formule (21) du texte), sous de pressions uniformes, et la vitesse devient :

$$V = \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}} = \sqrt{\frac{1}{\beta \varrho}} \tag{4}$$

On peut donc passer de la vitesse dans une masse solide illimitée, exprimée par (3), à la vitesse dans une masse liquide, en attribuant au *coefficient de compressibilité* θ' la valeur correspondant aux liquides. Donc, la formule (3) est générale, c'est-à-dire qu'elle est appliquable aux solides, de même qu'aux liquides, et on voit, qu'en passant de la vitesse dans les solides à celle dans les liquides, au moyen de l'hypothèse $\mu = o$, on trouve des résultats exacts c'est-à-dire vérifiés par les mesures directes.

On observe que l'hypothèse de $\mu = o$ nous fait déduire la vitesse du son dans une *masse liquide* illimitée de la vitesse dans une *masse solide*, tandis que l'hypothèse de Wertheim pour $\lambda = 2\mu$ et l'assimilation qu'il établit entre les solides et les liquides fait déduire la *même vitesse* dans la *masse* liquide de la vitesse dans une *barre* (colonne) *solide*. Cette dernière déduction st, évidemment, moins logique et se fonde, en même temps, sur un fait, qui ne se réalise pas au cas des liquides: elle admet, en effet, que les faces latérales de la barre sont libres pendant la vibration, c'est-à-dire que les couches de cette barre peuvent se dilater, ou se contracter, latéralement, sans être gênées. Or, ces conditions spéciales ne peuvent être réalisées pour les liquides en vibration, contenus dans des tuyaux solides, car les parois de ces tuyaux opposent une résistence à leur dilatation latérale, de sorte que les circonstances dans lesquelles se produit le phénomène ne sont pas les mêmes pour les colonnes liquides et les colonnes solides.

L'hypothèse, donc, de $\mu = o$ est la plus compatible à la fois avec les phénomènes et avec le raisonnement et la voie qu'elle nous offre pour passer de la formule de la vitesse du son dans une *masse solide* à celle de la vitesse dans une *masse liquide* est la plus logique et la plus naturelle. C'est cette voie qui a été suivie par tous les autres physiciens et les résultats obtenus ont été confirmés par l'expérience.

Si, au contraire, on remplace dans la formule (23), déduite de la formule générale (1), le paramètre λ par sa valeur tirée de (21) en fonction de β, on a :

$$(25) \qquad v_1 = \sqrt{\frac{1}{\beta \rho}}$$

c'est-à-dire qu'on retrouve théoriquement au moyen de la vitesse dans la masse *solide*, la formule classique donnée par Laplace pour la vitesse de propagation du son dans les *liquides*, formule qui, d'ailleurs, peut être déduite directement de la théorie de la propagation des mouvements vibratoires, sans recourir aux constantes de constitution λ et μ et sans introduire ces constantes dans le raisonnement [1]).

C'est cette vitesse u, ou v_1, — donnée par (22), ou par (23) et obtenue dans l'hypothèse de $\mu = 0$ — que considère maintenant Wertheim comme la vraie valeur de la vitesse du son dans une masse liquide illimitée et la compare à la valeur (9) admise par lui comme valeur théorique de la même vitesse :

$$(9) \qquad v = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{4\lambda}{3\rho}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho}}$$

et déduite dans l'hypothèse de $\lambda = 2\mu$.

Et *c'est là que réside le cercle vicieux* du raisonnement de Wertheim et qui semble *n'avoir pas encore été remarqué* jusqu'à présent : pour *établir* les formules (9) et (10) et pour déduire que dans les liquides il y a deux sortes de vitesses, dont le rapport est le $\sqrt{\frac{3}{2}}$, il *admet* $\lambda = 2\mu$, mais, quand il s'agit de *vérifier* cette déduction, il emploie la valeur trouvée *dans l'hypothèse* de $\mu = 0$.

Ces deux hypothèses ne peuvent être conciliées, que si l'on admet, que, pour les liquides, μ et λ sont nuls à la fois, ce qui est impossible.

La contradiction apparaît aussi clairement, si on égale la valeur u de (22) — laquelle représente pour tout le monde scientifique, de même que pour Wertheim, la vitesse théorique et réelle du son dans les *liquides* — à la valeur v de (9) laquelle représente,

1) Voir les indications de la note (4), en bas de la page 1225 du *Bulletin de la Société des Sciences de Bucarest* No. 6, Décembre, 1910.

pour Wertheim *seul*, la même vitesse théorique. On obtient alors l'égalité :

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho}}$$

qui n'est satisfaite, que si $\lambda = 0$, d'où il suit aussi $\mu = 0$ [1]) – – ce qui est impossible – ou bien, si l'on admet $\sqrt{2} = 1$ – ce qui est absurde.

Donc, de quelque manière qu'on remplace le coefficient de compressibilité β en fonction de λ dans la formule de Laplace (15), soit par sa valeur obtenue dans l'hypothèse de Wertheim pour $\lambda = 2\mu$, soit par sa valeur obtenue dans l'hypothèse de $\mu = 0$, quand il s'agit d'égaler le résultat de cette formule à la valeur de la vitesse dans une masse illimitée donnée par Wertheim par sa formule (9), on arrive toujours à des résultats absurdes, ou impossibles.

C'est là la *seconde déduction*, que nous voulions tirer des hypothèses et des vérifications faites par Wertheim. Cette seule déduction théorique aurait suffi pour mettre à l'index toutes les expériences et conclusions de Wertheim, avant même de les soumettre aux vérifications numériques.

Pourtant, cette déduction n'a pas été faite – malgré toute la méfiance qu'inspirait la théorie de ces expériences – probablement, à cause de l'impossibilité, dans laquelle on se trouvait, de remplacer cette théorie par quelque chose de plus acceptable.

Le fait que les résultats de la méthode de Wertheim coïncident, pour *quelques* liquides, avec les valeurs données par la formule de Laplace, ***ne devait point être considéré*** – même si cette égalité avait subsisté pour tous les liquides – ***comme une vérification*** de la théorie de Wertheim, mais au contraire, comme une preuve de ***l'erreur*** de ces résultats, car la discussion précédente établit, que la suite nécessaire de sa théorie était précisément le ***non lieu d'une telle égalité.*** L'argument de quelques physiciens, qui cherchent à attribuer l'erreur de la théorie de

[1]) Conséquence de l'hypothèse de Wertheim pour $\lambda = 2\mu$.

Wertheim au nombre réduit de ses expériences [1]), ne peut pas résister à nos remarques.

— En résumant ces discussions – résultat de notre excursion dans le domaine de l'élasticité – on voit, que: 1) Conformément à ses hypothèses et à toute sa théorie, Wertheim aurait dû conclure que la vitesse du son dans une colonne liquide est égale à la vitesse dans une masse illimitée; mais ses expériences ne confirment pas cette conclusion. 2) En essayant d'apporter une vérification aux vitesses dans une *masse* liquide, obtenues, à l'aide de facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$, de ses vitesses dans une *colonne* liquide, par la comparaison avec les vitesses déduites par la formule classique de Laplace, Wertheim tourne dans un cercle vicieux et se trouve conduit à des résultats absurdes, ou impossibles.

De toutes ces considérations, soit relatives aux inconvénients d'ordre expérimental, soit relatives au désaccord théorique mentionné, on peut conclure que le problème de la détermination de la vitesse du son dans les liquides par la méthode de Wertheim n'est pas encore tranché, et que la manière, dont on introduit le facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ à la vitesse dans une colonne liquide pour obtenir la vitesse dans une masse illimtée, est forcée et contraire même à la théorie de Wertheim. Et pourtant, résultats et les raisonnements de Wertheim font encore autorité en la matière et sont cités dans tous les traités de physique avec un soin particulieur. Un de plus répandus et de plus appréciés de tels traités contient, sur ces expériences, des appréciations comme les suivantes, qui prouvent l'estime que les hommes de science accordent encore de nos jours au travail de Wertheim: „L'identité presque complète des résultats (par la méthode de Wertheim et par la formule de Laplace) peut être considerée comme une *démonstrations de la formule* et une *justification de l'hypothèse* de Wertheim. On pourra, donc, avec *toute confiance* appliquer à *tous les autres liquides* les deux derniers moyens (*formule théorique*, ou multi-

[1]) P. A. Daguin — Traité de Physique. P. I. pag. 702, an. 1878.

plication par le facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ de la vitesse *dans une colonne liquide*), qui devront se contrôler mutuellement [1])«.

Or, il arrive, que c'est justement d'un contrôle plus attentif des résultats de ces deux procédés, que ressort leur désaccord et la conviction que la méthode de Wertheim est insuffisante et impropre au but proposé. Elle ne résout pas la question, car elle se fonde sur des hypothèses fausses, et ne tient pas compte de tous les facteurs principaux, qui interviennent dans les expériences, sur lesquelles elle s'appuie.

7. Pourquoi—pourrait-on encore se demander, malgré tout ce que nous venons de dire – le procédé de Wertheim, qui consiste à multiplier les vitesses trouvées dans ses expériences par le facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$, donne-t-il pour la vitesse moyenne dans des milieux liquides illimités presque la même valeur que celle qui s'obtient directement, ou à l'aide du coefficient de compressibilité ? Cet accord a-t-il une raison scientifique quelconque, ou bien, est-il dû à un simple hasard ?

D'après les discussions précédentes et d'accord aussi avec les développements qui vont suivre, nous pouvons affirmer que ce n'est qu'un simple fait du hasard. Si, en effet, comme l'ont démontré plus tard Kundt et Lehmann [2]) et comme on le verra aussi dans nos expériences ultérieures, les tuyaux, dont s'est servi Wertheim avaient eu d'autres diamètres intérieurs et des parois d'une autre épaisseur, que celle qu'ils ont eue, alors les vitesses du son dans *les colonnes* liquides auraient été différentes de celles qu'il a trouvées et le produit de ces nouveaux nombres par le facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ n'aurait plus été égal à la valeur obtenue pour la vitesse du son dans les liquides par la mesure directe, ou par le calcul d'après la formule théorique de Laplace. Alors, les conclusions de Wertheim que le rapport de la vitesse dans une masse liquide à celle dans une colonne est égal au $\sqrt{\frac{3}{2}}$, n'aurait plus eu de point de dé-

---

1) M. Bouty. — Cours de Physique. Acoustique pg. 114 an. 1887.

2) Journal de Physique, 1e série, 5 vol., pg. 159, an. 1876 et Annales de Poggendorff. J. CLXII pg. 1, an. 1874.

part et, par cela même, aucune justification. Ces conclusions supposent que la vitesse dans des colonnes pour un liquide donné est la même avec n'importe quel tuyau, car, en la multipliant par le facteur constant $\sqrt{\frac{3}{2}}$, elle doit toujours donner la même valeur, qui est la vitesse dans la masse illimitée, vitesse qui a une valeur constante pour un même état physique du liquide. Or, l'expérience ne confirme pas cette supposition.

En poursuivant l'analyse des expériences de Wertheim, on verra qu'il ne s'est trouvé que pour l'eau que le produit de la vitesse dans des colonnes par la facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ soit égal à la vitesse dans la masse illimitée, tandis que pour d'autres liquides les valeurs dans la masse illimitée, obtenues par ce procédé, sont assez éloignées de celles qui sont données par la formule de Laplace. La manière, dont Wertheim a essayé de vérifier ses résultats obtenus avec ces liquides, est plutôt habile et superficielle, que convaincante.

Soit, en effet, $a, a_1, a_2, \ldots$ les vitesses du son dans des colonnes de différents liquides, $v, v_1, v_2, \ldots$ les vitesses dans des masses illimitées des mêmes liquides et $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ les facteurs par lesquels on doit multiplier les vitesses dans les colonnes pour obtenir celles dans les masses. On aura :

$$(1) \qquad v = \mu\, a;\ v_1 = \mu_1\, a_1;\ \ldots$$

Les valeurs $a, a_1, a_2, \ldots$ peuvent se calculer d'après les résultats des expériences de Wertheim.

Si l est la longueur corrigée du tuyau dans une expérience et si $n, n_1, n_2, \ldots$ représentent les nombres des vibrations des sons obtenus dans les colonnes de ce tuyau pour chacun des liquides considérés, alors les vitesses dans les colonnes sont, comme on le sait :

$$(2) \qquad a = 2\, l\, n;\ a_1 = 2\, l\, n_1;\ \ldots$$

Les valeurs de ces vitesses se trouvent données par Wertheim dans le tableau de ses résultats pour tous les liquides, qui ont servi à ses expériences [1]).

[1]) Quoique la vitesse dans une colonne liquide soit, dans ce tableau, la moyenne des vitesses obtenues avec plusieurs tuyaux, qui ont des longueurs et des sons différents, elle peut évidemment être considérée comme obtenue à l'aide d'un seul tuyau d'une longueur déterminée l et qui donne pour un même liquide un son de n vibrations.

On peut, d'un autre côté, calculer les vitesses réelles V, V_1, V_2,.... dans les masses des mêmes liquides, au moyen de la formule théorique connue :

$$(3) \qquad V^2 = \frac{0{,}76 \times 13{,}596 \times 9{,}8088}{\beta\, d} = \frac{101{,}354}{\beta\, d}$$

β étant le coefficient de compressibilité exprimé en atmosphères et d le poids spécifique du liquide.

Les coefficients de compressibilité β, β_1, β_2 ... ont été déterminés expérimentalement par Grassi, pour presque tous les liquides employés par Wertheim, peu de temps après les expériences de ce dernier et presque dans les mêmes conditions de densité et de température que celles, où ont été effectuées les expériences de Wertheim [1]).

On connaît ainsi pour presque tous les liquides de Wertheim et la vitesse réelle V dans la masse illimitée et la vitesse a dans la colonne. On peut donc calculer les rapports suivants pour tous ces liquides :

$$(4) \qquad \frac{V}{a} = \mu \;;\quad \frac{V_1}{a_1} = \mu_1 \;;\quad \frac{V_2}{a_2} = \mu_2 \;;\ \ldots$$

Essayons de voir si ces rapports ont, ou non, la même valeur, et quelle est-elle au juste ?

Mais d'abord précisons les vitesses en colonne, qui figurent dans ces rapports.

On sait que Wertheim se sert, dans ses expériences, de quatre embouchures en laiton A, B, C, D, de dimensions différentes. Aux trois premières il visse des tuyaux en laiton et à la dernière des tuyaux en verre, de différentes longueurs, et il fait ensuite parler les liquides contenus dans ces tuyaux. Ce qu'il entend par vitesse en colonne d'un certain liquide c'est la *moyenne* des résultats donnés par toutes les embouchures et par tous les tuyaux, résultats calculés au moyen des formules précédentes (2). Dans l'intérêt des discussions qui sont suivre, nous ne considérerons que les observations faites avec une *seule embouchare A*, et nous appelerons vitesse dans

---

[1]) GRASSI. Recherches sur la compressibilité des liquides. — Annales de Chimie et de Physique 3e série. T. XXXI, pg, 438, an. 1851.

une colonne liquide la *moyenne* des résultats obtenus avec des tuyaux vissés à cette unique embouchure. Ce choix est d'autant plus préférable, qu'il est plus rigoureux, car les vitesses trouvées dans des tuyaux de même embouchure sont plus concordantes entre elles, comme provenant des colonnes liquides de même section, contenues dans des tuyaux faits de la même substance, tandis que les moyennes des observations faites avec des tuyaux de diverses substances et vissés sur des embouchures à section différente présentent quelque fois entre elles des différences, qu'on ne pourrait négliger qu'avec trop d'indulgence [1]).

Donnons, maintenant, dans le tableau suivant, les valeurs des vitesses en colonne pour les différents liquides rencontrés dans les expériences de Wertheim et calculons, en même temps, les vitesses dans la masse illimitée d'après son procédé, en multipliant la vitesse dans les colonnes par le facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Calculons aussi la vitesse théorique du son par la formule de Laplace pour chacun de ces liquides et établissons ensuite le rapport entre cette vitesse théorique — vitesse réelle — et la vitesse dans des colonnes, trouvée par les observations de Wertheim.

---

1) La vitesse moyenne, p. ex., dans des colonnes d'eau de Seine, d'embouchure A et à 50^0 de température est d'après Wertheim de . . . . 1332m.
tandis que la vitesse moyenne pour le même liquide dans des colonnes d'embouchure D est de . . . . 1416m.
c'est-à-dire augmentée de 84m. par rapport à la première.

Dans les colonnes de solution de chlorure de sodium, d'embouchure B, la vitesse moyenne est de . . . . 1670m.
tandis que la vitesse moyenne dans des colonnes d'embouchure A pour la même solution est de . . . . 1554m.
c'est-à-dire d'une valeur de 116m. moindre que la première.

Dans des colonnes d'alcool absolu, d'embouchure D, et à 4^0 de température, la vitesse moyenne est de . . . . 1002m.
tandis que la vitesse moyenne dans des colonnes d'embouchure B est pour le même liquide de 890m
c'est-à-dire de 112m. moindre que la première.

Il en est de même pour tous les autres liquides.

TABLEAU

des vitesses du son dans des colonnes et des vitesses dans des masses liquides illimitées, de même que des rapports de ces deux vitesses, pour les substances dont s'est servi Wertheim dans ses expériences

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
No.	LA SUBSTANCE	Température t	Densité d	Vitesse a du son dans des colonnes d'embouchure A	Vitesse du son dans un milieu illimité d'après Wertheim $V = a\sqrt{\frac{3}{2}} = a \times 1,2247$	Coefficient de compressibilité du liquide d'après Grassi	Vitesse d'après la formule de Laplace. $V = \sqrt{\frac{101,354}{\beta d}}$	Rapport entre la vitesse théorique de Laplace V et la vitesse a dans des colonnes d'embouchure A	Vitesse moyenne a dans des colonnes de toutes sortes d'embouchures.	Rapport entre la vitesse de Laplace V, et la vitesse a de toutes les embouchures.
				a =	V =	$\beta = 10^{-6} \times$	V =	$\frac{V}{a} =$	a =	$\frac{V}{a} =$
1	L'eau à la temp .	15°	0,9996	1169m.	1431,7m.	47,2	1466m.	1,25	1173m.	1,25
2	» » » .	30°	0,9963	1242	1521,1	45,4	1497	1,21	1251	1,20
3	» » » .	50°	0,9893	1332	1631,3	44,2	1522	1,14	1349	1,13
4	Solution de chlorure de sodium .	18°	1,1920	1298	1589,7	26,6	1788	1,38	1275	1,40
5	Solution de carbonate de sodium .	22°,2	1,1828	1295	1586,0	29,7	1699	1,31	1302	1,30
6	Solution de nitrate de sodium . . .	20°,9	1,2066	1374	1683,4	29,5	1687	1,23	1363	1,24
7	Solution de chlorure de calcium.	22°,5	1.4322	1554	1903,2	20,5	1858	1,20	1616	1,15
8	Alcool absolu . .	4°	0,8097	966	1183,1	80,3	1248	1,29	934	1,34
9	» . .	23°	0,7960	966	1183,1	101,3	1121	1,16	947	1,18
10	Essence de térébenthine . . .	0°	0,8803	1055	1291,7	73,4	1252,8	1,19		1,27
						ou			984	
						71,4	1270	1,20		1,29
11	»	24°	0,8622	1017	1245,6	—	—	—	990	—
12	Éther sulfurique .	0°	0,7529	946	1158,9	111,0	1101	1,16		
						ou			946	1,16
						132	1010	1,07		

Sur les données de ce tableau, données extraites, avec de petites modifications, du Mémoire de Wertheim, „sur la *vitesse du son dans les liquides*" et du mémoire de Grassi „sur la *compressibilité des liquides*[1]), il est nécessaire d'ajouter quelques détails.

En dehors des substances ci-dessus, Wertheim a encore expé-

[1]) Les coefficients de compressibilité déterminés par Grassi sont indiqués en totalité dans son mémoire et aussi dans la Physique moléculaire de Bouty, T. I., fasc. 2, pag. 164, an. 1891; ainsi que dans : Tomassi-Formulaire Physico-Chimique, pag 392, an. 1891 et en nombre plus réduit dans Violle-Physique moléculaire. T. I., fasc. 2, pag. 525, an. 1884 ; dans Chwolson-Physique T. I., fasc. 3-e, pag. 582, an. 1907; dans Wüllner-Physik, Bd. I., seite 144, an. 1879 ; dans Daguin-Traité de Physik, T. I., pag. 657, an. 1878.

rimenté sur l'alcool ordinaire de densité d=0,8514, à 4^0 de température, de même que sur une solution de sulfate de sodium, à divers degrés de concentration. Nous avons omis ces deux liquides de notre tableau, car il n'existe pas encore de détermination expérimentale faite pour leur compressibilité; on ne peut donc pas calculer la vitesse réelle du son dans ces liquides et on ne peut, conséquemment, non plus, connaître la rapport de cette vitesse à celle qui nous intéresse, à la vitesse dans des colonnes.

Les données qui figurent dans la troisième et quatrième colonne de notre tableau sont exactement comme dans le tableau de Wertheim.

Les vitesses inscrites dans la cinquième colonne verticale sont, comme on l'a déjà dit, les moyennes des résultats obtenus seulement à l'aide des tuyaux en laiton d'embouchure A. Ces vitesses ne diffèrent pas beaucoup de celles que nous avons inscrites, pour comparaison, dans la 10-ème colonne du tableau [1]) et qui représentent les moyennes des résultats obtenus avec tous les tuyaux de toutes les quatre embouchures, moyennes, que Wertheim considère comme représentant la vitesse en colonne.

Les valeurs des coefficients de compressibilité inscrites dans la 7-ème colonne verticale diffèrent un peu des valeurs trouvées dans le mémoire de Grassi, ou dans d'autres traités de Physique [2]). Quelques-uns d'entre eux ont été déterminés par Grassi et autres physiciens à des températures et des densités différentes de celles qu'ont eues les substances dans les expériences de Wertheim. Les corrections que nous avons été obligés d'introduire à ces coefficients pour les faire correspondre à la même températures et à la même densité que celles des substances de Wertheim, justifient l'apparition de ces petites modifications dans notre tableau [3]).

---

[1]) Comme on le voit dans la 5-ème et 10-ème colonne du tableau, pour tous les liquides — excepté le chlorure de calcium et l'essence de térébenthine — la différence entre la moyenne des vitesses dans des colonnes, obtenues à l'aide de l'embouchure A, et entre la moyenne obtenue à l'aide de toutes les embouchures ne dépasse pas 32 m.

[2]) Voir P. DAGUIN. — Traité de Physique — Vol. I, pag. 657.

[3]) Tous les coefficients de compressibilité indiqués dans ce tableau ont été détérminés par Grassi, peu de temps après les expériences de Wertheim — quoique un compte-rendu plus détaillé des opérations faites pour leur détermination apparaît seulement en 1851 — excepté le coefficient de l'essence de térebenthine, qui avait été déterminé auparavant, en 1826, par Colladon & Sturm pour la température de 0^0.

Nous allons indiquer les calculs faits pour la détermination de ces corrections.

1) Pour *l'eau distillée* Grassi trouve :

$\beta = 10^{-6} \times 48,6$, à la temp. de $10,^0 8$, sous une pression de 1,3 atm.

$\beta = 10^{-6} \times 46,2$, » » » $18,^0 0$, » » » 5,3 »

En remarquant que la compressibilité de l'eau décroît avec la température, on en déduit, par proportion : $\beta = 10^{-6} \times 47,2$, à la température de 15^0, valeur inscrite dans notre tableau. Cette valeur diffère très peu de celle qui a été trouvée par Regnault [1]) $\beta = 10^{-6} \times 47,0$ et est identique a celle qui est donnée par Wüllner [2]) pour la même température de 15^0 dans son traité de Physique ($\beta = 10^{-6} \times 47,2$).

Grassi trouve encore pour *l'eau* :

$\beta = 10^{-6} \times 45,2$ à la température de $34^0,5$, sous 5,6 atmosphères.

et

$\beta = 10^{-6} \times 44,0$ » » » » $53^0,0$, » » »

D'où l'on déduit, par proportions :

$\beta = 10^{-6} \times 45,4$ à la température de 30^0

et

$\beta = 10^{-6} \times 44,2$ » » » » 50^0

valeurs qui figurent dans la même tableau.

Ces valeurs ne diffèrent pas beaucoup de celles qui se déduisent des déterminations d'Amagat [3])

$\beta = 10^{-6} \times 46,8$ à la temp. de 20^0, sous une pression de 1—100 atm.

et

$\beta = 10^{-6} \times 44,9$ » » » » 50^0, » » » » » »

et qui conduisent à $\beta = 10^{-6} \times 46,1$ à la température de 30^0

2) Pour la solution *de chlorure de sodium* Grassi trouve [4]) :

$\beta = 10^{-6} \times 32,1$ à la temp. de $18^0,5$, s. une pres. de 2—7 atm. et p. la dens. = 1,1230,

et

$\beta = 10^{-6} \times 25,7$ » » » » $18^0,1$, » » » » 1—6 » » » » » = 1.2024.

c'est-à-dire presque à la même température que celle des expériences de Wertheim. On voit, que pour une même température, la compressibilité de cette solution décroît lorsque la densité croît. On en déduit, par proportion, le coefficient marqué dans notre tableau, $\beta = 10^{-6} \times 26,6$, pour la densité d = 1,1920 et à la température de 18^0, qu'avait cette solution, lors des expériences de Wertheim.

---

1) Voir VIOLLE, Physique moléculaire, T. I, fasc. 2, pag. 524, an. 1884.

2) Voir WULLNER, Physik. Bd. 1, pag. 382 ; an. 1879.

3) Voir Chwolson.—Traité de Physique, loc. cit. p. 586.

4) Voir son mémoire, ou bien Bouty, loc. cit.

3) Les solutions *de carbonate de sodium* et de *nitrate de sodium* qui figurent dans la 5-ème et 6-ème colonne horizontale avaient été choisies par Grassi de telle sorte qu'elle avaient exactement les mêmes *densités* que les solutions de Wertheim *aux températures des expériences de celui-ci*, c'est-à-dire que :

Le carbonate de sodium avait la densité = 1.1828, à la température de $22^0,2$ et le nitrate de sodium la densité = 1.2066, à la température de $20^0,9$, mais les températures des expériences de Grassi pour la détermination des *compressibilités* étaient un peu plus basses que celles de Wertheim, à savoir, pour le carbonate de sodium on avait :

$t = 16^0,6$ lorsqu'on a trouvé $\beta = 10^{-6} \times 29,7$, sous 6 atm.

et pour le nitrate :

$t = 18^0 1$, lorsqu'on a trouvé le coefficient $\beta = 10^{-6} \times 29,5$, sous 6 atm.

et lorsque, bien entendu, les densités étaient devenues un peu plus grandes, car les solutions froides deviennent plus concentrées. Or, il est prouvé par les expériences de Grassi, que le coefficient de compressibilité d'une solution augmente de très peu lorsque la température augmente, comme on le voit, par exemple, dans son Mémoire, à la solution de chlorure de sodium de densité d = 1,2024, à la température, de $18^0,1$, pour laquelle on a trouvé :

$\beta = 10^{-6} \times 25,7$, sous 1—6 atmosphères, à la tempér. de $18^0,1$

et

$\beta = 10^{-6} \times 26,2$, » 2—7 » » » » » $39^0,5$

et d'où l'on voit qu'à une augmentation d'un degré de température correspond l'augmentation de $10^{-6} \times 0,023$ pour le coefficient de compressibilité.

Il en résulterait que les coefficients de compressibilité de nos solutions devraient avoir des valeurs plus grandes à des températures plus élevées, où elles ont été employées dans les expériences de Wertheim, c'est-à-dire aux températures respectives de $22^0,2$ et de $20^0,9$. Nous ne connaissons pas ces augmentations, mais si nous les considérions à peu près égales à celles de la solution précédente de chlorure de sodium, nous aurions une augmentation à peine de $10^{-6} \times 0,1$ pour le coefficient de compressibilité du carbonate et une autre de $10^{-6} \times 0,06$, pour celui du nitrate de sodium, c'est-à-dire, des augmentations insignifiantes. Dans ces conditions nous pouvons admettre, avec une assez grande aproximation, que les valeurs données par Grassi pour les coefficients de compressibilité aux températures plus basses de ses expériences, représentent aussi les coefficients de compressibilité aux températures de quelques degrés plus élevées des expériences de Wertheim. Ce sont ces valeurs qui ont été inscrites aussi dans notre tableau.

4) Pour la solution *de chlorure de calcium* Grassi trouve :

$\beta = 10^{-6} \times 30,6$ pour la dens. = 1,218, à la temp. de $17^0,3$, sous 2—8 atm.

et

$\beta = 10^{-6} \times 20,7$ » » » = 1,417, » » » » $15^0,8$, » 1—7 »

On voit qu'il n'y a pas de trop grande différence de température pour ces deux solutions. En admettant que les expériences soient faites à la même température, la moyenne de ces deux-ci, $t = 16^0,5$, et en remarquant que la compressibilité décroît avec la densité de la solution, on en déduit, par proportion, pour la solution employée dans les expériences de Wertheim de densité $d = 1,4323$ et en supposant la même température de $16^0,5$:

$$\beta = 10^{-6} \times 20,0, \text{ pour } d = 1,4323, \text{ à } t = 16^0,5.$$

D'autre part, la compressibilité de cette solution de chlorure de calcium, comme celle de beaucoup d'autres, croit en même temps que la température, comme l'a montré Grassi justement pour cette même solution de densité $= 1,417$ pour la quelle il a trouvé :

$$\beta = 10^{-6} \times 20,7, \text{ à la température de } 15^0,8 \text{ sous } 1-7 \text{ atmosphères}$$

et

$$\beta = 10^{-6} \times 22,9, \text{ » » » » } 41^0,0 \text{ » } 1-6 \text{ »}$$

ce qui amène une augmentation de $10^{-6} \times 0,087$, pour un degré de température. Par proportions on en déduit pour notre solution et pour l'augmentation de $16^0,5-22^0,5$, le coefficient :

$$\beta = 10^{-6} \times 20,5 \text{ pour la densité } = 1,4322, \text{ à la température de } 22^0,5,$$

qui est marqué dans notre tableau. [1])

On voit de là que le coefficient de la solution de *chlorure de calcium* de densité $d = 1,4322$, à la température de $22^0,5$ telle qu'elle était dans les expériences de Wertheim, apparait, à la suite de ces discussions, comme étant presque égal à celui qui a été ctrouvé par Grassi pour la densité $= 1,417$, à la température de $15^0,9$ et qui est égal à $\beta = 10^{-6} \times 20,7$. C'est pourqui on indique, sans d'autres explications, dans presque tous les traités de physique, cette dernière valeur comme le coefficient de cette solution aussi dans les expériences de Wertheim.

5) La densité *de l'alcool absolu* employé par Grassi, $d = 0,810$, à la température de 0^0, ne diffère pas beaucoup de la densité de l'alcool employé par Wertheim, $d = 0,8097$, à la température de 4^0 et qui devient à la température de 23^0 égal à $d = 0,9760$ [2]).

---

[1]) Quoique la densité de cette solution diminue quand on passe de la température de $16^0,5$ à la température de $22^0,5$, cette diminution est très petite, à cause de la petitesse du coefficient de dilatation de la solution et donc on peut considérer le coefficient β comme ayant la même valeur pour les densités correspondant à ces deux températures.

[2]) Le coefficient de dilatation de l'alcool absolu de densité $= 0,8097$, est : $m = 0,0010414$ (voir Agenda du Chimiste, pg. 28, libr. Hachette, 1896).

Si on calcule la densité de l'alcool de Wertheim à la température de 23^0 en partant de la densité est $= 0,8097$, à 4^0, d'après la formule $d_t = \frac{d_4}{1 + m(t^0 - 4^0)}$, on trouve $d_{23} = 0,9740$, valeur peu différente de celle qui a été indiquée par Wertheim, $d = 0,9760$, à la même température de 23^0.

Le coefficient de compressibilité trouvé par Grassi est :
à la température de $7^0,3$:

$$\beta = 10^{-6} \times 83,9 \quad \text{sous} \quad 2—5 \quad \text{atmosphères}$$

et

$$\beta = 10^{-6} \times 85,4 \quad » \quad 9—4 \quad »$$

et à la température de $13^0,1$:

$$\beta = 10^{-6} \times 90,3 \quad » \quad 1—5 \quad »$$

et

$$\beta = 10^{-6} \times 99,1 \quad » \quad 8—9 \quad »$$

On voit que le coefficient croit en même temps que la pression, lorsque la température est constante, et pour la même pression, il croit avec la température.

Si l'on considère la valeur de ce coefficient sous de plus petites pressions, on voit qu'elle croit avec $10^{-6}\,[90,3—83,9] = 10^{-6} \times 6,4$, lorsque la température varie de $7^0,3—13^0,1$, c'est-à-dire qu'elle a une augmentation de $10^{-6} \times 1,104$ pour une variation d'un degré de température.

Par proportions on en déduit :

$$\beta = 10^{-6} \times 80,3, \text{ à la température de } 4^0 \text{ sous } 2 \text{ atmosphères}$$

et

$$\beta = 10^{-6} \times 101,3 \quad » \quad » \quad » \; 23^0 \quad » \quad 2 \quad »$$

valeurs inscrites dans notre tableau.

Par la même proportion on trouve pour cet alcool : $\beta = 10^{-6} \times 76,0$ à la température de 0^0.

Amagat [1]) trouve du même pour *l'alcool absolu :*

$$\text{et} \begin{cases} \beta = 10^{-6} \times 101 & \text{à la temp. de } 14^0, \text{ sous des pressions moyennes.} \\ \beta = 10^{-6} \times 76,9 & » \; » \; » \; » \; 0^0 \; » \; 1— 500 \text{ atm.} \\ \beta = 10^{-6} \times 56,5 & » \; » \; » \; » \; 0^0 \; » \; 100—1000 \; » \end{cases}$$

On voit que ces valeurs-ci correspondant à 14^0 et à 0^0 (dans les deux premières lignes) ne diffèrent pas beaucoup des valeurs de Grassi pour la temp. de 13^0, sous 9 atmosphères, et pour 0^0 sous de petites pressions. Mais on constate, qu'à la même température, la compressibilité de l'alcool décroit, lorsque la pression augmente; c'est le contraire de ce qu'avait trouvé Grassi.

Dans leurs expériences antérieures, Colladon et Sturm avaient trouvé pour l'alcool absolu (la densité n'est pas indiquée) des valeurs quelque peu différentes ; par exemple :

$$\text{à la température de } 11^0,6 \begin{cases} \beta = 10^{-6} \times 94,5, \text{ sous } 2 \text{ atmosphères} \\ \beta = 10^{-6} \times 87,4, \; » \; 24 \quad » \end{cases}$$

On voit que ces physiciens avaient constaté, de même qu'Amagat, et contrairement à Grassi, que la compressibilité de l'alcool décroit, lorsque la pression augmente.

[1]) Voir Chwolson loc. cit. pg. 583.

6. La compressibilité de *l'essence de térébenthine* (dont la densité n'est pas indiquée dans leur Mémoire), a été mesurée — comme on l'a déjà dit — par Colladon et Sturm et non pas par Grassi, et cela seulement pour la température de 0^0 [1]).

Les valeurs déduites du tableau de leurs observations, en tenant compte des corrections que comportent les déterminations de ces physiciens, sont :

$$\left\{\begin{array}{l} \beta = 10^{-6} \times 73{,}4 \text{ à la température de } 0^0\text{, sous } 1\text{—}26 \text{ atmosphères.} \\ \text{et} \\ \beta = 10^{-6} \times 71{,}4 \text{ » » » » } 0^0\text{, » } 3\text{—}26 \text{ » } \end{array}\right.$$ [2]).

La variation du volume de l'essence de térébenthine est, à ce qu'il parait, assez irrégulière sous la pression de trois premières atmosphères, à cause de sa viscosité, qui la fait adhérer aux parois du piézomètre, mais elle devient trés régulière pour des pressions plus grandes. C'est pourquoi les physiciens préfèrent la valeur de la compressibilité obtenue en omettant l'effet des trois premières pressions et en ne considérant que la variation entre 3—26 atmosphères, où se sont arrêtées les expériences de Colladon et Sturm. Nous avons inscrit dans notre tableau pour la compressibilité de cette substance les deux valeurs obtenues, soit en omettant, soit en tenant aussi compte — ce qui parait plus logique — des trois premières atmosphères.

7. La densité *de l'éther sulfurique*, $d = 0{,}7377$ à la température de 0^0, employé par Grassi, diffère un peu de la densité $d = 0{,}7529$, à la température de 4^0, de l'éther employé par Wertheim dans ses expériences. La correction à faire au coefficient de compressibilité donné par Grassi, à cause de cette différence, ne peut être appréciée, mais ce qui est certain, c'est qu'elle n'est pas bien grande. La valeur de ce coefficient est d'après Grassi, qui a expérimenté à plusieures températures :

$$\text{à } 0^0 \text{ de temp.} \left\{\begin{array}{l} \beta = 10^{-6} \times 111\text{, sous } 3{,}4 \text{ atmosphères.} \\ \beta = 10^{-6} \times 129\text{, » } 5{,}9 \text{ » } \\ \beta = 10^{-6} \times 132\text{, » } 7{,}2 \text{ » } \end{array}\right.$$

On voit qu'à cette température de 0^0, ce coefficient croit en même temps que la pression, comme on le constate d'ailleurs pour d'autres températures aussi.

La compressibilité de cette substance a été déterminée aussi par d'autres physiciens, mais leurs résultats ne sont pas tout à fait concordants. Ainsi, d'après Colladon et Sturm, on a :

$$\text{à la temp. de } 0^0 \left\{\begin{array}{l} \beta = 10^{-6} \times 131{,}4\text{, sous } 3\text{—}12 \text{ atmosphères.} \\ \text{et} \\ \beta = 10^{-6} \times 120\text{, » } 18\text{—}24 \text{ » } \end{array}\right.$$

---

[1]) Mémoire sur la compression des liquides, pg. 46, par. Colladon et Sturm. Extrait des Annales de Chimie et de Phisique, T. I, pg. 301 et 657.

[2]) Comme dans Daguin.—Traité de Physique, T. I, pg. 301 et 657.

tandis que d'après Amagat [1]) on a :

à la temp. de 0^0 $\begin{cases} \beta = 10^{-6} \times 132{,}9, \text{ sous } 50-100 \text{ atmosphères (valeur très rapprochée de celle donnée par Grassi et par Colladon et Sturm)} \\ \text{et} \\ \beta = 10^{-6} \times 107{,}2, \text{ sous } 1-500 \text{ atmosphères.} \end{cases}$

Cette différence de la compressibilité pourrait s'expliquer, soit par la différence de densité des liquides soumis à l'expérience, soit par la grandeur des pressions employées pour sa détermination. Il est, cependant, à remarquer que Collandon et Sturm, de même qu'Amagat, constatent que, pour la même température, la compressibilité de ce liquide décroit, lorsque la pression augmente, tandis que Grassi, par contre, soutient que la compressibilité augmente. C'est le même désaccord expérimental entre ces physiciens que celui qu'on a remarqué pour l'alcool.

Dans la douzième colonne horizontale de notre tableau nous avons inscrit les deux valeurs de compressibilité de l'éther sulfurique, données par Grassi, qui correspondent aux plus petites et aux plus grandes pressions de ses expériences.

— Ce sont là les explications que nous voulions donner pour le calcul des corrections et pour la justification des valeurs des coefficients de compressibilité inscrits dans notre tableau de la page 56. Comme on le voit, ces corrections ne sont déduites que des observations de Grassi, auxquelles Wertheim fait constamment appel pour soutenir ses déductions.

C'est au moyen de ces coefficients de compressibilité ainsi corrigés qu'on a calculé les vitesses théoriques du son dans la masse liquide illimitée, inscrites dans la 8-ème colonne verticale de ce tableau. D'après Wertheim ces vitesses théoriques devaient être égales aux produits des vitesses dans la *colonne* liquide, déduites de ses expériences (5-e col. vert.), par le facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$, produits inscrits dans la 6-ème colonne de ce tableau, ou bien le rapport de ces vitesses théoriques aux vitesses en colonnes devait être constant et égal au $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Mais avant de comparer ces vitesses, inscrites respectivement dans la 6-ème et 8-ème colonne, ou avant de regarder leur rapport, marqué dans la 9-e col. vert., il est nécessaire de faire la remarque suivante.

Remarque. En analysant de plus près les nombres du tableau des résultats de Wertheim et en tenant, en même temps, compte

[1]) Chwolson loc. cit.

de nos expériences personnelles, nous pouvons affirmer que les vitesses en *colonnes*, données par Wertheim pour les solutions de *nitrate de sodium* et de *chlorure de calcium*, de même que pour *l'alcool absolu*, ont toutes les chances d'être erronées.

1) Considérons, en effet, pour les *solutions de carbonate* et *de nitrate de sodium*, le produit de leurs coefficients de compressibilité et de leurs densités (voir respectivement la 5-e et 6-e colonne horizontale et 7-e et 4-e colonne verticale du tableau). Nous aurons:

$\beta d = 10^{-6} \times 29{,}7 \times 1{,}1828 = 10^{-6} \times 35{,}13$ pour le carbonate de sodium.

et

$\beta d = 10^{-6} \times 29{,}5 \times 1{,}2066 = 10^{-6} \times 35{,}59$ » » nitrate » »

On voit que ces deux produits sont presque égaux. On en déduit, d'après la formule (3) de la page 54, que la vitesse du son dans la masse de ces solutions est presque la même. Il faudrait, alors, que les vitesses observées dans des colonnes soient aussi les mêmes, la compressibilité de ces deux substances étant la même [1]) Or, on constate dans notre tableau (voir la 5e ou la 10e colonne verticale), que ces conditions ne sont pas satisfaites, et que la vitesse dans une colonne de *nitrate* de sodium, a = 1374,5 m. dépasse de beaucoup la vitesse dans une solution de *carbonate*, qui est a = 1295 m.

On en conclut, qu'au moins une des observations faites sur les colonnes de ces substances est erronée, si toutefois les deux ne le sont [2]).

En nous servant de la vitesse en colonne, donnée par Wertheim pour la solution de *chlorure de sodium*, dont la valeur a été vérifiée aussi par nos propres expériences comme assez exacte [3]), on peut prouver, par comparaison, que la vitesse dans la colonne de la solution de nitrate de sodium, a = 1374,5 m., indiquée dans le tableau de Wertheim, est représentée par un chiffre trop exagéré.

---

[1]) On verra, dans la troisième partie de cet ouvrage, que la vitesse dans la colonne d'un liquide contenu dans un tuyau sonore est influencée, entre autres, pas la compressibilité du liquide.

[2]) On montrera par nos expériences ultérieures, que, dans la colonne d'un même tuyau, les vitesses du son dans des solutions de *carbonate* et de *nitrate* de *sodium* de même densité, diffèrent très peu entre elles.

[3]) On verra aussi, dans la 3-e partie de cet ouvrage, de quelle manière nous avons pu faire cette vérification.

En vérité, on a, en faisant le produit de la compressibilité par la densité :

pour la solution de chlorure de sodium : $\beta\, d = 10^{-6} \times 26{,}6 \times 1.192 = 31{,}7072$
„ „ „ „ nitrate de „ $\beta\, d = 10^{-6} \times 29{,}5 \times 1{,}2066 = 35{,}5947$

d'où l'on voit, que le premier produit est moindre que le second ; il faudrait alors d'après la même formule (3) de la page 54 que la vitesse dans la *masse* liquide de chlorure de sodium soit plus grande que la vitesse dans le nitrate, comme cela est d'ailleurs calculé dans la 8e colonne verticale du tableau. On pourrait donc s'attendre à ce que la vitesse dans une *colonne* de solution de chlorure de sodium soit aussi plus grande que celle d'une solution de nitrate, car on se sert du même tuyau dans les deux expériences, et les compressibilités de ces deux substances n'offrent pas de trop grandes différences entre elles. Or, le tableau des observations de Wertheim montre, au contraire, que dans la colonne de chlorure la vitesse, $a = 1298$ m., est de beaucoup inférieure à celle du nitrate de sodium, $a = 1374{,}5$ m.[1]) Les observations de Wertheim se contredisent, donc, les unes les autres. Nous concluons de là — en sachant que le nombre qui représente la vitesse dans une colonne de chlorure de sodium est assez exact — que le nombre donné par Wertheim pour la vitesse en colonne dans la solution de nitrate de sodium est erroné[2]) et, en conséquence, cette substance peut être écartée de nos discussions.

2) Une remarque analogue s'applique à la solution de *chlorure de calcium.* Wertheim trouve, en effet, pour la vitesse dans la colonne de cette solution le nombre inscrit dans la 5e colonne du tableau, pour les tuyaux d'embouchure A. Comparons cette vitesse à celle de l'eau à la température de 15^0, obtenue avec les mêmes tuyaux et dont la valeur est assez exacte.

On a : pour l'eau à la temperature de 15^0 . . $a = 1169$ m.
et „ la solution de chlorure de calcium $a = 1554$ m.

---

[1]) D'après des calculs qu'on verra plus loin, la vitesse dans la colonne de la solution de *nitrate de sodium* ne devait pas dépasser le nombre de 1270 m. dans les expériences de Wertheim

[2]) Les erreurs s'expliquent par la nécessité, où l'on se trouvait d'introduire des *corrections*, si différentes à la longueur du tuyau sonore, de même que par la difficulté qu'on rencontre dans la détermination du son fondamental déduit des harmoniques supérieures, et aussi par l'observation peu précise de la température et par le peu de certitude que présente le nombre de vibrations du son dans les colonnes observées par Wertheim, etc.

Nous avons déterminé, nous aussi, la vitesse dans des colonnes liquides, contenues dans un tube en verre de dimensions bien connues et dans ces expériences nous avons considéré entre autres substances, l'eau à la température de 15^0, de même qu'une solution de chlorure de calcium, ayant justement la même densité que celle des expériences de Wertheim. Voici, par anticipation, les résultats de nos expériences, en comparaison avec ceux de Wertheim :

Vitesse dans des colonnes

SUBSTANCES	Résultats de nos expériences	Résultats de Wertheim	Rapport de ces vitesses	Différence de ces vitesses
L'eau à 15^0 de temp.	1362 m	1169 m	1,165	193 m
Solution de chlorure de calcium. . . .	1600 m	1554 m	1,029	46 m

On voit que pour l'eau le rapport de la vitesse trouvée par nous à celle de Wertheim est égal à 1,165, tandis que pour le chlorure de calcium ce rapport est bien plus petit et egal à 1.029. Or, cette solution a un coefficient de compressibilité, $\beta = 10^{-6} \times 20,5$, moindre que la moitié du coefficient de l'eau à 15^0 de température, $\beta = 10^{-6} \times 47,2$ et dans ce cas — on le montrera plus tard — ce rapport entre notre vitese et celle de Wertheim devrait être, non pas plus petit, mais plus grand, pour le chlorure de calcium, que pour l'eau [1]). On en déduit — puisque la méthode employée par nous et l'attention prêtée à nos observations garantissent l'exactitude de nos résultats — que la valeur de 1554 m. attribuée par Wertheim à la vitesse du son dans une colonne de chlorure de calcium est exagérée et par conséquent inexacte [2]).

On pourrait faire la même déduction, en considérant la différence, au lieu du rapport, entre les vitesses dans les colonnes d'eau et de chlorure de calcium, données par nous et par Wertheim. En effet, tandis que pour l'eau à la température de 15^0, il y a une dif-

[1]) Voir la III-e partie de cet ouvrage.

[2]) Les trop grandes différences, que présentent les nombres du tableau de Wertheim pour la vitesse dans la colonne de cette solution de chlorure de calcium et qui varient de 1554 à 1688, suivant les tuyaux employés, montrent aussi dans une certaine mesure, que ces nombres ne peuvent pas être exacts.

férence de 193 m., entre notre nombre et celui de Wertheim, pour le chlorure de calcium cette différence s'est réduit à moins que le quart de celle-ci. Les expériences étant faites à l'aide des mêmes tuyaux, cette constatation paraît peu acceptable, car si notre tuyau a, en comparaison avec celui de Wertheim, une si manifeste influence sur la vitesse du son dans une colonne d'eau, il n'y a pas de raison pour que cette influence ne se ressente pas dans presque la même mesure, aussi sur la solution de chlorure de calcium [1]).

Il s'ensuit, que le nombre indiqué par Wertheim pour la vitesse dans une colonne de solution de chlorure de calcium est excessif et par conséquent erroné. C'est pourquoi nous ometterons dorénavant de nos discussions aussi cette substance.

3) Formons maintenant aussi pour *l'alcool absolu à la temp. de* 4^0 *et* 23^0 le produit du coefficient de compressibilité et de la densité. On aura :

Pour l'alcool absolu à 4^0 : $\beta d = 10^{-6} \times 80{,}3 \times 0{,}8097 = 10^{-6} \times 65{,}0189$
„ „ „ à 23^0 : $\beta d = 10^{-6} \times 101{,}1 \times 0{,}796 = 10^{-6} \times 80{,}6348$

On voit, que le premier produit est inférieur au second. On déduit, en vertu de la même formule (3) de la page 54, citée plus haut, et d'après laquelle le carré de la vitesse du son dans les liquides est inversement proportionnelle au produit de la compressibilité par la densité, que la vitesse dans la *masse* illimitée est plus grande pour l'alcool à 4^0, que pour celui à 23^0 de température. Mais, si l'augmentation de la température, qui amène une augmentation de la compressibilité de l'alcool, fait diminuer la vitesse du son dans sa *masse* illimitée, il n'y a pas de raison pour que cette augmentation de compressibilité n'ait une influence pareille sur l'alcool aussi

---

1) Cette déduction devient plus évidente, si l'on considère surtout les nombres donnés par Wertheim pour l'eau et la solution de chlorure de calcium, comme résultat de *tous* ses tuyaux sonores et qui sont respectivement (voir la 10e col. vert. du tableau) pour l'eau 1173 m. et pour le chlorure 1616 m. La différence entre ces nombres et les notres pour les mêmes substances serait : pour l'eau 1362—1173 = 189 et pour le chlorure 1600—1616 = —16, ce qui fait voir que si cette différence est très sensible pour l'eau, elle disparaît pour le chlorure et même change de signe. L'influence, si manifeste, de notre tuyau par rapport à celui de Wertheim dans le cas de l'eau, s'annulerait complètement et changerait même de sens dans le cas du chlorure, ce qui est impossible.

contenu dans un tuyau [1]), et qu'elle ne produise dans la colonne de celui-ci une diminution de vitesse, lorsqu'elle augmente. Mais, nous voyons, que, d'après les expériences de Wertheim, la vitesse dans la colonne d'alcool garde la même valeur, a = 966, soit à la température de 4^0, soit à la température de 23^0 —dans le cas où nous ne considérons que les résultats obtenus avec la même embouchure A — et même que cette vitesse est plus petite pour 4^0, a = 934, et plus grande pour 23^0, a = 947, c'est-à-dire, juste le contraire de ce qu'on se serait attendu—si nous considérons les résultats moyens de toutes les embouchures—. On en déduit, que les nombres donnés par Wertheim pour la vitesse du son dans la colonne de l'alcool absolu sont erronés, ce qui sera d'ailleurs prouvé aussi par nos expériences ultérieures.

En tout cas, le nombre indiqué par lui, a = 966 (et à fortiori a = 934) pour la vitesse dans la colonne de l'acool à la température de 4^0, est de beaucoup inférieur à celui, qui correspon l à cette température. Quant au nombre a = 966, qui représente la vitesse dans une colonne à 23^0, il peut être accepté, avec une certaine réserve.

—Comme résultat de toutes ces discussions, nous concluons, que les nombres indiqués par Wertheim pour la vitesse du son dans une colonne de solution de *nitrate de sodium* et de *chlorure de calcium*, de même que pour celle de *l'acool absolu*, sont inexacts et ne peuvent donc pas servir de base à ses conclusions.

9. Ceci établi, regardons maintenant le rapport de la vitesse théorique du son dans une masse liquide à la vitesse dans une colonne pour les substances observées par Wertheim, rapport qui est calculé dans la 9-e colonne verticale de notre tableau de la page 56. D'après Wertheim, ce rapport devrait être le même pour toutes les substances et égal au $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}2247$. En examinant les valeurs trouvées, on voit que ce n'est que pour l'eau à 15^0 et à 30^0 de tem-

---

[1]) Du mémoire de Grassi, sur la compressibilité des liquides, il ressort que l'augmentation de la température produit une altération inappréciable de *l'élasticité* des tubes sonores en verre.

pérature [1]) et pour quelques autres substances que ce rapport approche cette valeur, 1,224, tandis que pour toutes les autres substances il s'en éloigne, par plus, ou par moins, d'une manière sensible.

On remarque, en outre, que parmi les trois ou quatre substances, exception faite pour l'eau, dont le rapport approche cette valeur du $\sqrt{\frac{3}{2}}$, figurent justement la solution de ***nitrate de sodium***, celle de ***chlorure de calcium*** et ***l'alcool absolu***, c'est-à-dire les substances, pour lesquelles la valeur des vitesses dans la colonne apparaît comme *erronée*, d'après notre discussion précédente.

En éliminant ces substances du nombre de celles qui méritent d'être considérées dans la discussion, il n'en reste aucune pour laquelle le rapport ci-dessus soit égal au $\sqrt{\frac{3}{2}}$, exception faite pour l'eau aux températures habituelles [2]), pour laquelle—comme on le verra

---

[1]) Il y a grande probabilité que la vitesse dans des colonnes, indiquée par Wertheim pour *l'eau à 50⁰* de température soit aussi erronée. En vérité, comparons les résultats de nos expériences faites sur des colonnes contenues dans un tube en verre aux résultats déduits des observations de Wertheim dans des tuyaux d'embouchure A, à différentes températures.

On a :

	Résultats de nos expériences	Résultats de Wertheim	Le rapport	La différence
L'eau à 15^0 de temp.	1362	1169	1,16	193
» » 30^0 » »	1404	1242	1,13	162
» » 50^0 » »	1441	1332	1,08	109

On voit que pour l'eau à 50^0, la différence entre notre vitesse et celle de Wertheim est trop petite par rapport aux différences des températures précedentes ; d'où l'on déduit que le nombre 1332, donné par Wertheim, est un peu trop grand. Mais c'est surtout à l'aide du rapport de ces vitesses qui—comme on le montrera plus tard—pour la température de 50^0 devrait être supérieur, ou au moins égal, à celui de la température de 30^0, qu'on conclut, avec plus de raison, que le nombre de Wertheim 1332 est trop fort.

[2]) Wertheim admet que la vitesse du son dans une masse d'eau illimitée à 15^0 de température est égale à la vitesse 1435 m. trouvée par Colladon et Sturm, par la mesure directe, dans l'eau du lac de Genève à 8^0 de température. Le rapport de cette vitesse à celle de Wertheim dans une colonne liquide est $\frac{1435}{1173} = 1,223$, c'est-à-dire très rapprochée du $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Or, d'une manière rigoureuse, Wertheim aurait dû considérer, pour sa comparaison, comme nous l'avons déjà remarqué, la vitesse du son dans une *masse d'eau à 15⁰*, car c'est pour cette température, et non pas pour celle de l'eau du lac à 8^0, qu'il avait trouvée le nombre 1173 m. comme vitesse dans des colonnes. La vitesse dans une masse d'eau à 15^0 est, d'après la formule théorique, 1466 m, et le rapport considéré devient alors : $\frac{1466}{1173} = 1,25$, c'est-à-dire qu'il a une valeur plus grande que le rapport précédent, et, par conséquent, moins favorable aux conclusions de Wertheim, C'est ce dernier rapport que nous avons inscrit dans notre tableau de la page 56, comme étant plus exact et en même temp plus rapproché des résultats de l'expérience.

aussitôt—cette coïncidence n'est qu'un simple fait du hasard. La conclusion, donc, de Wertheim, qu'on obtient la vitesse dans une masse liquide en multipliant la vitesse dans une colonne d'un tuyau *quelconque* par le même facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$, ne tient plus, même devant les résultats de ses propres expériences, tandis que notre affirmation que le *rapport de ces vitesses n'est égal au* $\sqrt{\frac{3}{2}}$ *pas même pour les substances de Wertheim*, l'eau excéptée, s'est trouve justifiée [1]).

10. Wertheim évite de vérifier ses conclusions exactement de cette manière et il essaie de prouver l'exactitude de son affirmation, en déterminant les *coefficients de compréssibilité* des liquides à l'aide de la formule qui donne la vitesse théorique dans les liquides :

$$\beta = \frac{101,354}{d.\ V^2}$$

et en comparant les valeurs ainsi calculées à celles qui sont déterminées par la mesure directe. Dans cette formule d est — comme on sait — le poids spécifique du liquide, V la vitesse dans la masse illimitée, *déduite d'après le procédé de Wertheim* par la multiplication de la vitesse dans des colonnes par $\sqrt{\frac{3}{2}}$, et β, le coefficient de compressibilité du même liquide, exprimé en atmosphères.

En réalité, Wertheim n'établit cette comparaison que pour quelques-unes de ces substances, comme l'eau à la température ordinaire, l'alcool absolu, l'éther sulfurique et l'essence de térébenthine, dont les compressibilités étaient connues au temps de ses expériences et il trouve une concordance très satisfaisante entre les coefficients ainsi calculés et ceux qui sont donnés par l'expérience [2]). Peu de temps après, Grassi détermine avec assez de

---

[1]) Si on considère comme vitesses dans des colonnes les *moyennes* des observations faites avec *tous les tuyaux* et *toutes les embouchures*, comme le fait Wertheim, on constate alors que le rapport de ces vitesses à celle dans la masse illimitée s'éloigne d'avantage de la valeur du $\sqrt{\frac{3}{2}}$, comme le montrent les nombres inscrits dans la 11e colonne verticale de notre tableau.

[2]) Wertheim avoue dans son mémoire [pag. 474. Annales de Physique et Chimie 3e série, T. XXIII, an. 1848] qu'il connaissait les déterminations de Grassi [déterminations annoncées à l'Académie des Sciences de Paris le même jour, où Wertheim présentait son mémoire] et qu'il a trouvé entre les nombres donnés par Grassi pour la compressibilité et ceux qui étaient déduits par lui à l'aide de la formule précédente, un accord plus satisfaisant qu'il ne se serait attendu, et cela, pour toutes ses substances. [Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. XXVII; pg. 153].

rigueur [1]) les coefficients de compressibilité de tous les liquides employés par Wertheim, dans l'intention de donner la plus large justification aux conclusions de ce dernier. D'autres physiciens établissent ensuite la même comparaison entre les coefficients obtenus au moyen des vitesses de Wertheim et les coefficients mesurés directement et ils paraissent entièrement satisfaits de l'accord constaté entre leurs valeurs [2]). Les idées de Wertheim acquièrent ainsi, dans cette question, un crédit indiscutable.

Calculons, nous aussi, ces coefficients au moyen de la formule précédente tout en ne considérant, pour les motifs déjà exposés, comme vitesse dans la colonne liquide, à l'aide de laquelle nous déduirons la vitesse V dans la masse illimitée, que le résultat des expériences faites seulement avec l'embouchure A, au lieu des moyennes des observations faites avec tous les tuyaux et toutes les embouchures et comparons ensuite les valeurs trouvées avec celles de la mesure expérimentale. Le choix judicieux, que nous avons fait plus haut des valeurs des coefficients de compressibilité déterminés par Grassi, et correspondant aux substances des expériences de Wertheim, était nécessaire pour cette comparaison-ci, de même que pour un calcul plus précis de la vitesse théorique dans une masse illimitée.

Donnons dans le tableau ci-dessous les valeurs des coefficients ainsi calculés, à côté de coefficients directement mesurés, et comparons en même temps les *vitesses théoriques* du son à celles qui sont *déduites* d'après le *procédé de Wertheim*, pour les substances employées dans ses expériences. Nous éliminerons de ce tableau les substances pour lesquelles on a prouvé, par les discussions précédentes, que la vitesse dans des colonnes était erronée.

---

[1]) Grassi introduit dans les formules, dont il se sert pour la détermination des coefficients de compressibilité, l'hypothèse que le coefficient de Poisson est égal à $\frac{1}{3}\left[\sigma = \frac{1}{3}\right]$ — comme l'admettait Wertheim — hypothèse par laquelle il s'introduit une petite inexactitude dans les valeurs de ces coefficients.

[2]) Voir Bouty. Cours de Physique. T. III, fas. I; Acoustique: pg. 114, an. 1887 — de même que P. A. Daguin; Traité de Physique, T. II, pg. 657, an. 1878 — ou Wüllner — Physik Bd I, seite 382, an. 1879, etc.

TABLEAU

des coefficients de compressibilité déduits à l'aide des vitesses de Wertheim et des coefficients mesurés directement, de même que des vitesses théoriques du son dans les liquides et des vitesses déduites d'après la méthode de Wertheim. Leurs différences.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
No.	SUBSTANCE	Température t	Densité d	Coefficient de compressibilité déduit à l'aide de la vitesse de Wertheim	Coefficient de compressibilité mesuré directement	Différence de ces coefficients de compressibilité	Vitesse du son dans la masse illimitée d'après Wertheim	Vitesse théorique du son à l'aide du coefficient de compres. directement mesuré	La différence de ces vitesses	Observations
				$\beta = 10^{-6} \times$	$\beta = 10^{-6} \times$	$10^{-6} \times$	V =	V =		On a considéré comme coefficients de compressibilité de l'alcool absolu et de l'éther les coefficients obtenus sous de petites pressions
1	L'eau à la temp. .	15^0	0,9996	49,46	47,2	+ 2,2	1431,7	1465,7	— 34,0	
2	» . » » » .	30^0	0,9963	43,96	45,4	— 1,4	1521,1	1496,9	+ 24,2	
3	» » » » .	50^0	0,9893	38,49	44,2	— 5,7	1631,4	1522,5	+108,9	
4	Solution de chlorure de sodium .	18^0	1,1920	33,64	26,6	+ 7,0	1589,7	1787,9	—198,2	
5	Solution de carbonate de sodium.	22^0	1,1828	34,06	29,7	+ 4,3	1586,04	1698,6	—112,6	
6	Alcool absolu à .	$23^0,2$	0,7960	90,97	101,3	—10,3	1183,10	1121	+ 62,1	
7	Essence de téréb.	0^0	0,8803	69,00	[71,4	— 2,4	—	[1270,0	+ 21,7	
					[73,4	— 4,4	1291,74	[1252,4	+ 39,3	
8	Éther sulfurique .	0^0	0,7529	100,22	111,0	—10,8	1158,98	1101,3	+ 57,6	

On voit de ce tableau que les coefficients de compressibilité calculés et les coefficients mesurés directement (voir la 4e et 5e col. vertic.) ont — avec une certaine indulgence — presque les mêmes valeurs; leurs différences (6e colonne) ne paraîssent pas trop grandes [1]). Si, au contraire, on compare les vitesses théoriques du son aux vitesses déduites d'après la règle de Wertheim (la 7e et 8e colonne), on constate, qu'en exceptant l'eau à la temperature de 15^0 et 30^0, de même que l'essence de térébenthine, ces vitesses présentent, pour toutes les autres substances, des différences sensibles, qui deviennent intolérables pour certaines d'entre elles (voir la 9e colonne) et qui font une impression peu favorable sur l'accord des deux méthodes: celle de Wertheim et la méthode théorique. C'est cette impression de désaccord, que Wertheim semble avoir voulu éviter, en préférant à la comparaison des vitesses du son la comparaison

[1]) Voir P. DAGUIN. — Traité de Physique J. I. pag. 703, an. 1878.

des coefficients de compressibilité, pour les substances employées dans ses observations. Cette comparaison était pourtant nécessaire pour pouvoir nous convaincre de la précision de sa méthode et de la solidité de ses conclusions.

---

11. On a donné un assez grand développement à la critique consacrée *aux mérites et aux défauts des expériences de Wertheim* plus grand, peut-être, qu'on se serait attendu; mais les expériences de Wertheim sont encore les plus sérieux essais faits jusqu'à présent en cette direction. Elles imposent, tant par le nombre des observations, que par la simplicité des conclusions, auxquelles elles s'arrêtent. Une analyse plus minutieuse leur était due, d'autant plus qu'on soupçonnait que ces conclusions s'appuyaient sur des erreurs, soit d'ordre théorique, soit d'ordre expérimental, sans pouvoir, toutefois, préciser, où elles se trouvaient. Nos discussions ont montré – nous l'espérons – que de telles erreurs existent un peu partout, tant dans la conception théorique, que dans l'exécution et dans l'intérprétation des expériences de ce savant. L'explication des résultats de ces expériences sera faite dans la troisième partie de cet ouvrage.

— Comme conclusion de tous les développements exposés jusqu'à présent, nous pouvons affirmer que les expériences et la méthode de Wertheim ne résolvent point le problème proposé. Dépourvue de simplicité et de précision, cette méthode représente plutôt un essai méritoire, mais manqué, qu'un moyen exact et efficace pour déterminer indirectement la vitesse du son dans les liquides. Cette méthode n'a plus été reprise par personne. La voie restait libre à des nouvelles investigations.

Expériences de Kundt et Lehmann

12. En résumant les expériences de Wertheim dans »*Fortschritte der Physik*, im Jahre 1848«, Helmholz – après avoir fait quelques calculs d'analyse mathématique, pour conclure, de même que Wertheim, que le rapport de la vitesse du son dans une masse

solide illimitée à la vitesse dans une tige de même substance est égal au $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (dans l'hypothèse que le coefficient de Poisson $\sigma = \frac{1}{3}$) – il ajoute, en ce qui concerne les liquides, les réflexions suivantes:

»Nous ne pouvons accepter l'explication que donne Wertheim à ses expériences, car la différence entre la vitesse du son dans une tige et la vitesse dans une masse *solide* illimitée dépend essentiellement de la possibilité qu'ont les tiges de se dilater latéralement, possibilité, dont ne jouissent pas les liquides contenus dans de tuyaux en laiton, ou en verre. D'un autre côté, les parois d'un tube en laiton ne sont pas absolument fixes par rapport à la masse liquide comprimée, comme cela arrive pour les gaz et pour l'air atmosphérique. Même pour ces derniers, le son baisse, si le tuyau est en bois et si les parois sont peu épaisses et cet abaissement s'accentue, si les parois sont faites d'une substance moins résistante, comme, par exemple, en parchemin. Un phénomène analogue doit, donc, se produire aussi pour les vibrations de l'eau contenue dans des tuyaux métalliques et une influence, due à la constitution du tuyau, doit certainement s'y manifester. Cette influence doit être *proportionnelle au rayon du tuyau et inversement proportionnelle à l'épaisseur de sa paroi* et au *coefficient d'élasticité de la substance*, dont il est construit.

Si les résultats des expériences de Wertheim pourront jamais s'expliquer de cette manière, cela incombe à l'avenir de la prouver.«

Pour pouvoir se rendre compte de la vérité des idées de Helmholtz et aussi pour indiquer une nouvelle méthode indirecte pour la détermination de la vitesse du son dans les liquides, Kundt et Lehmann exécutent une série d'expériences, en 1874, c'est-à-dire 26 ans après les expériences de Wertheim, d'après un procédé nouveau. Dans cet intervalle de temps, aucun essai plus important ne parut dans cette direction.

La méthode employée par ces physiciens pour la détermination de la vitesse du son dans les *liquides* est la même que celle qui avait été employée auparavant par Kundt pour déterminer la vitesse du son dans les *gaz*, c'est-à-dire la méthode dite des »*figures de* *poudre«*. Le principe et le dispositif expérimental sont les mêmes dans les deux cas.

Principe. On cherche à déterminer la longueur d'onde correspondant à un certain son produit dans le liquide, à l'aide du phénomène de l'interférence. On produit pour cela, dans une colonne liquide cylindrique, des ondes sonores directes et réfléchies qui donnent, par leur interférence, des noeuds et des ventres fixes. La distance entre deux noeuds consécutifs est égale, comme cela résulte de la théorie, à la moitié de la longueur d'onde du son respectif.

Si *d* est cette distance pour un son, dont le nombre de vibrations est *n*, on a, en désignant par *v* la vitesse de propagation du son dans ce liquide:

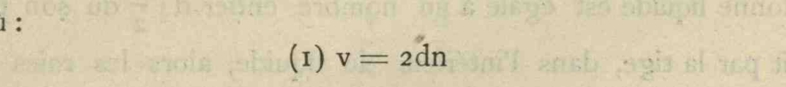
$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{n},$$

d'où :

$$(1)\ v = 2dn$$

La distance *d* se mesure expérimentalement et le nombre des vibrations *n* se détermine à l'aide du sonomètre, ou bien s'élimine au moyen d'une expérience faite dans l'air, pour le même son.

Dispositif expérimental. On prend un long tube en verre AA′, qui sera bouché aux deux extrémités et qui est pourvu de deux petits robinets r et r′, par lesquels on peut introduire à l'intérieur de l'eau, ou un liquide quelconque. L'extrémité A est bonchée par un piston en caoutchouc, ou par une membrane élastique. A l'autre extrémité A′ se trouve une garniture métallique, ou un bouchon



en caoutchouc ayant un trou à l'intérieur, par où l'on introduit une tige massive en verre, BB′, qui sert à faire vibrer le liquide contenu dans le tube AA′. Cette tige BB′ est fixée en A′, soit par son milieu, soit par un point éloigné de B d'un quart de sa longueur.

En la frottant dans le sens de la longueur, on obtient, ou le son fondamental, ou la seconde harmonique supérieure de cette tige, suivant le point où elle se trouve fixée. On remplit le tube AA′ d'eau, dans laquelle on a mis préalablement de la *limaille de fer*. En frottant longitudinalement la partie B′ de la tige il se produit un son d'une certaine hauteur et en même temps on remarque à l'extrémité B un mouvement vibrant des molécules du liquide, mouvement de même durée que celle du son entendu et qui se transmet au liquide contenu dans le tube AA′. Les ondes réfléchies en A et les ondes partant de B produisent, alors, par leur interférence dans la masse liquide, des noeuds et des ventres. La limaille de fer s'agite aux ventres et forme des raies distinctes de direction perpendiculaire à l'axe du tuyau, tandis qu'aux noeuds elle reste presque en repos et se ramasse en de petites dunes fixes. Si la longueur AB de la colonne liquide est égale à un nombre entier de $\frac{\lambda}{2}$ du son produit par la tige, dans l'intérieur du liquide, alors les raies des ventres et celles des noeuds se distinguent plus clairement et plus facilement. Pour que la longueur AB satisfasse à cette condition, on se sert du piston placé en A, qu'on enfonce, ou qu'on retire du tuyau, jusqu'à ce qu'on obtienne la position juste. Si l'extrémité A est fermée par une membrane, il y a alors en ce point un ventre et non pas un noeud, comme au cas du piston. En mesurant maintenant la distance entre deux noeuds, le long de la colonne liquide, on obtient la demi-longueur de l'onde correspondant au son produit par la tige BB′ dans cette colonne liquide, c'est-à-dire la quantité *d* contenue dans la formule précédente (1).

On remarque qu'une des conditions que Kundt et Lehmann trouve nécessaire à la vibration de l'eau enfermée dans le tube et par conséquent au succès de l'expérience, c'est que cette *eau ne contienne pas la moindre bulle d'air, ni en dissolution, ni adhérente aux parois du tube.* Cette condition diminue, évidemment, le nombre des expériences et des résultats qu'on peut attendre de cette méthode.

Faisons ensuite vibrer de la même manière la *même* tige BB′, fixée au même point de sa longueur, dans un autre tuyau analogue à AA′, mais qui contienne de l'air sec (ou un autre gaz) et une poudre légère, comme celle de silice, ou de magnésie. ou de la sciure de liège, à la place de l'eau. On obtient des noeuds et des ventres analogues à ceux de l'expérience précédente et on aura la demi-longueur d'onde, $\frac{\lambda}{2}$, dans *l'air* correspondant au même son de *n* vibrations de notre tige, en mesurant la distance entre deux noeuds consécutifs. On aura, en désignant par v' la vitesse de propagation du son dans l'air, une formule analogue :

$$d' = \frac{\lambda'}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{v'}{n},$$

ou bien

$$v' = 2d'n \tag{2}$$

Divisant l'égalité précédente par cette égalité-ci, on obtient par l'élimination de *n*,

$$\frac{v}{v'} = \frac{d}{d'}$$

d'où :

$$v = v' \cdot \frac{d}{d'} \tag{3}$$

formule qui montre, que la vitesse du son dans la *colonne liquide* est égale à la vitesse dans *l'air*, multipliée par le rapport des distances entre deux noeuds du même son produit dans l'eau et dans l'air.

Kundt et Lehmann considèrent la vitesse v' du son dans l'air égale à :

$$v' = 330{,}6 \times (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}} \text{ m.}$$

où $(1 + \alpha t)$ est le binôme de dilatation [$\alpha = 0{,}003665$ le coefficient de dilatation], t la température et 330,6 la vitesse en mètres du son dans l'air sec donnée par Regnault pour la température de 0^0. Le rapport $\frac{d}{d'}$ se détermine expérimentalement.

Résultats. Kundt et Lehmann emploient dans leurs expériences plusieurs tubes en verre ayant des diamètres intérieurs différents et dont les parois ont aussi d'épaisseurs différentes [1]). Ils ne font des déterminations que pour *l'eau purgée d'air*, car, à ce qu'il paraît, l'application de la méthode n'a pas réussi pour d'autres liquides. La température des expériences était approximativement de 18⁰.

Voici les résultats de ces expériences [2]) :

Eau à 18⁰.

No. du tube	Epaisseur de la paroi du tube	Diamètre intérieur	Vitesse dans la colonne liquide
1 . .	2mm.,2	28mm.,7	1040m.
2 . .	3 » ,0	34 » ,0	1227 »
3 . .	3 » ,0	23 » ,5	1262 »
4 . .	3 » ,5	21 » ,0	1357 » ,5
5 . .	5 » ,0	16 » ,5	1360 » ,2
6 . .	5 » ,0	14 » ,0	1383 » ,2

Des nombres de ce tableau on voit, que la vitesse trouvée pour les colonnes d'eau varie avec les tuyaux qui les contiennent et dépend des dimensions de ces tuyaux. Plus le diamètre intérieur décroît et l'épaisseur de la paroi croît, plus la vitesse dans la colonne augmente et réciproquement (comparez les vitesses correspondant aux tuyaux 3 et 6). Le discerne ment profond de Helmholtz au sujet de l'influence du tube sur la vitesse de son dans la colonne liquide reçoit, de la sorte, une éclatante confirmation.

Cette constatation détruit, en même temps, toutes les conclusions de Wertheim. D'après ce physicien la vitesse du son dans la colonne d'un certain liquide devait être la même, quel que fût le tuyau employé dans l'expérience. Les nombres inscrits dans ce tableau prouvent le contraire : la vitesse dans la colonne des tu-

[1]) Il n'est pas fait mention dans leur mémoire si les tubes en verre étaient tous de même provenance, ou non.

[2]) Journal de Physique. I-ère série, T. 5, pg. 159, an. 1876. De même Violle. — Cours de Physique—Acoustique, pg. 164, an. 1892 ; ou Chwolson — Traité de Physique. T. I, fasc. 4e. Acoustique, pg. 1010, an. 1908 ; ou P. A. Daguin. Traité de Physiqne, T. I, pg. 703, an 1878, etc.

yaux 5 et 6, dont les diamètres sont plus petits et les parois plus épaisses, est de beaucoup plus grande, que celle des tuyaux 1 et 2, dont les diamètres sont plus grands et les parois plus minces. Si on voulait calculer la vitesse dans la masse illimitée du liquide à l'aide de la règle de Wertheim, partant de la vitesse dans des colonnes, on obtiendrait évidemment des nombres variant avec le tuyau employé. Si l'on prenait, par exemple, la vitesse trouvée dans la colonne du tube No. 6 de ce tableau, on obtiendrait d'après sa règle, pour la vitesse dans la masse :

$$V = 1383{,}2 \times \sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1383{,}2 \times 1{,}224 = 1693^{m.}$$

nombre exorbitant par rapport à la valeur théorique $V = 1482$ [1]), correspondant à l'eau de cette expérience. *La règle de Wertheim n'a, donc, plus de sens.*

Quoique les nombres trouvés par Kundt et Lehmann pour la vitesse dans l'eau augmentent suivant les dimensions des tuyaux, on remarque, pourtant, qu'ils n'ont pu atteindre le nombre théorique 1482, correspondant à l'eau à 18^0 de température, probablement à cause des flexions, que subissent les tuyaux par la pression du liquide aux noeuds et aussi à cause d'une perte partiale de la force vive du liquide, absorbée par les vibrations des parois des tuyaux. Ce sont ces deux causes qui ont sûrement influencé aussi les résultats des expériences de Wertheim et qui ont fait baisser la vitesse du son dans l'eau jusqu'au chiffre trouvé par lui, 1173^{m}, dont le rapport à la vitesse dans la masse illimitée, égal *par hasard* au $\sqrt{\frac{3}{2}}$, l'a conduit à la fausse théorie énoncée par lui.

Défauts. Malgré sa simplicité, la méthode de Kundt et Lehmann présente beaucoup d'inconvenients, qui l'empêchent de résoudre le problème proposé.

Tout d'abord elle n'est pas générale, vu qu'elle ne peut être appliquée à beaucoup de liquides. Si, en effet, la limaille de fer a pu indiquer les noeuds et les ventres dans une colonne d'eau, elle ne

---

1) Pour l'eau à la température de 18^0 on a le coefficient de compressibilité $\beta = 10^{-6} \times 46{,}2$ d'après Grassi, et le poids spécifique $d = 0{,}99865$, et à ces données correspond la vitesse $V = \sqrt{\frac{101{,}354}{46{,}1376}} = 1482$ m.

peut évidemment plus avoir ce même rôle dans les acides, ou dans d'autres liquides, qui attaquent et disolvent le ter et par conséquent sa limaille.

De même dans les liquides lourds, comme le mercure, le brome, les solutions de iodure de plomb, etc., qui repoussent à la surface toute poudre légère contenue dans leur masse, il sera aussi impossible de reconnaître les noeuds et les ventres, produits durant leur vibration, à l'aide de cette limaille de fer. Tous les liquides de couleur brune, de même que les substances colorées et peu transparentes, permettront aussi difficilement de découvrir les noeuds et les ventres à l'aide de cette limaille, même si elle n'est pas attaquée [1]). De plus, dans l'eau même, ces positions n'ont pu être déterminées, que si l'eau *était purgée d'air*, ce qui ne constitue pas le cas le plus fréquent. Et puisque la présence de l'air empêche le succès de l'expérience, même dans le cas de l'eau, comment n'y aurait-il pas d'empêchement pareil pour tous les liquides qui contiennent de l'air, ou d'autres gaz en dissolution ?

En dehors de ces inconvenients, on doit encore observer, que la limaille de fer, ou toute autre poudre, introduite dans une masse liquide, produit sûrement une certaine altération de la nature du liquide et, dans ce cas, on n'expérimente plus sur une substance pure et homogène, mais sur un mélange hétérogène, et les résultats doivent, évidemment, en subir aussi une altération.

Enfin, les nombres trouvés par Kundt et Lehmann ne montrent rien autre chose, que ce que prévoyait aussi Hehmholtz, c'est-à-dire que la vitesse trouvée dans les colonnes d'eau varie suivant les dimensions des tuyaux, mais ils n'établissent aucun rapport entre cette variation et les dimensions des ces tuyaux, ni ne nous font voir s'il est, ou non, possible que la vitesse observée dans de tels tuyaux soit jamais egale à la vitesse théorique, ou expérimentale, dans la *masse* liquide illimitée.

On conclut de tout cela, que la méthode de Kundt et Lehmann, quoique simple comme principe, se borne, dans la pratique, simplement à la constatation, que pour l'eau *purgée d'air* – et probablement pour d'autres liquides aussi – la vitesse de propagation

---

[1]) On ne peut, non plus, reconnaître les noeuds et les ventres à l'aide de la limaille de fer dans des tuyaux dont les parois sont opaques, ou métalliques, de sorte que l'influence de la *substance* de ces tuyaux sur la vitesse du son dans une colonne liquide ne pourrait jamais être appréciée de cette manière.

du son dans des colonnes n'est pas la même pour tous les tuyaux. Mais quelle serait la vraie valeur de cette vitesse dans la *masse* illimitée d'un liquide, tirée de leurs observations, ou quel rapport existerait-il entre cette dernière vitesse et celle qu'on observe dans un tuyau quelconque, ces auteurs ne nous le disent point. Ils ne font, d'ailleurs, aucune étude systematique à cet égard, ni même dans le cas de l'eau.

Ils n'ont pas, du reste, appliqué leur méthode à aucun autre liquide qu'à l'eau, et cela, probablement, pas par un manque de bonne volonté.

Expériences de Dvorak

14. Les expériences de Dvorak[1]) pour la détermination de la vitesse du son dans les liquides ont été faites d'après le même principe et d'après la même méthode expérimentale que celle de Kundt et Lehmann. Elles conduisent à des résultats analogues.

La différence survient seulement au choix de la matière, qu'on mélange au liquide, et à la manière dont on fait vibrer les colonnes liquides. Pour mettre en évidence les noeuds et les ventres, au lieu de la limaille de fer, Dvorak emploie de la poudre à feu, dont on a préalablement éliminé le salpêtre par des lavages successifs.

Pour faire vibrer la colonne liquide, Dvorak essaya, dans une première série d'expériences, de frotter longitudinalement le tube même AB, qui contient le liquide et qui est fermé aux deux extrémités, mais dans ce cas les raies de poudre ne se dessinent pas assez régulièrement. Dans une seconde série d'expériences, il produit la vibration d'une manière différente : le tuyau, long d'à peu près 2 m., et placé horizontalement, a une des extrémités B fermée et l'autre A ouverte et recourbée verticalement en angle droit, jusqu'a une hauteur de 10 cm. de la partie horizontale. Le liquide, qui remplit le tuyau, monte un peu dans cette partie verticale. Si l'on souffle dans l'air qui se trouve à la partie supérieure de l'extrémité A, il se produit un son et, en même temps, la masse liquide qui se trouve dans la partie horizontale du tuyau commence à vibrer. — La poudre contenue dans le liquide se range en raies assez distinctes, mais les

1) Poggendorff's Annaleu.—T. CLIV, p 157, an. 1875: Ueber die Schallgeschwindigkeit des Wassers in Röhren. —Journal de Physique—I-ère série, T. 5, p. 195, an. 1876. V. Dvorak — Sur la vitesse du son dans les colonnes liquides—résumé par A. Terquem.

noeuds ne paraissent pas être équidistants. Cette circonstance fait croire Dvorak, que par ce procédé on ne pouvait pas obtenir des mesures précises. Mais, si on recourbe verticalement aussi l'autre

extrémité B, en la maintenant toujours *fermée*, et si l'on y fait pénetrer une grosse bulle d'air à la partie supérieure, alors, en soufflant en A, comme dans le cas précédent, les noeuds apparaissent réguliers et équidistants. La colonne liquide vibre assez énergiquement, en présentant deux ventres aux extrémités.

La distance entre deux noeuds consécutifs représente la demi-longueur d'onde pour le son produit, dans le liquide considéré.

Dvorak n'est pas d'accord avec Kundt et Lehmann sur la nécessité d'employer l'eau entièrement *purgée d'air*. Ses expériences lui réussissent aussi bien avec *l'eau bouillie* qu'avec l'eau *non purgée d'air*. Dans ce dernier cas, les bulles d'air contenues dans le liquide sont chassées par les vibrations moléculaires et s'amassent aux noeuds, en y formant de grosses bulles stationaires. Dvorak détermine la hauteur du son produit dans l'air de l'extrémité A, à l'aide du monocorde.

Voici les résultats de ses expériences [1]) faites sur *l'eau* dans des tubes en verre, à la température ordinaire :

Numéro du tuyau	Epaisseur de la paroi	Diamètre du tuyau	Vitesse du son
1 . . .	0mm.,82	17mm.,9	998m.
2 . . .	0 » ,63	11 » ,7	1046 »
3 . . .	0 » ,52	8 » ,46	1164 »
4 . . .	2 » ,00	15 » ,00	1213 »
5 . . .	2 » ,00	11 » ,00	1281 »

[1]) Journal de Physique, loco citato. T. Violle—Acoustique—loco citato.—O. D. Chwolson—Acoustique p. 1010 et 1013, an. 1908.

On voit, de ce tableau, que les vitesses dans des colonnes d'eau dépendent, cette fois encore, des dimensions des tuyaux qui contiennent ces colonnes, comme dans les expériences de Kundt et Lehmann. Elles augmentent si l'épaisseur des parois augmente, les diamètres intérieurs étant les mêmes (voir les tubes 2 et 5), ou si le diamètre intérieur décroît, les parois restant les mêmes [voir les tubes 4 et 5]. La valeur la plus élevée atteinte par Dvorak, 1281 m, est, de même que celle de Kundt et Lehmann, de beaucoup inférieure à 1482 m, vraie valeur de la vittesse du son dans l'eau à la température de 18⁰. Cette valeur extrème de Dvorak est, comme on le voit, inférieure même à celle de Kundt et Lehmann, probablement, à cause d'une résistance plus faible des parois de ses tuyaux.

La manière de Dvorak de faire vibrer la colonne liquide, quoique plus commode, étant pourtant moins énergique que celle de Kundt et Lehmann, restreint davantage l'application de cette méthode à d'autres liquides plus lourds que l'eau, comme ce seraient les solutions salines et autres.

Tous les défauts et les insufiisances remarquées dans les expériences de Kundt et Lehmann apparaissent aussi dans celles de Dvorak et les résultats de ce dernier n'avancent pas davantage la solution du problème traité.

Expériences de Tito Martini [1])

15. En 1882, c'est-à-dire, huit années après les expériences de Kundt et Lehmann, Tito Martini, faisant des recherches sur les sons produits par l'écoulement des liquides par de petits orifices, trouve l'occasion d'indiquer aussi un nouveau moyen pour déterminer indirectement la vitesse du son dans les liquides.

Voici, en résumé, la manière d'opérer et les résultats des expériences de ce physicien :

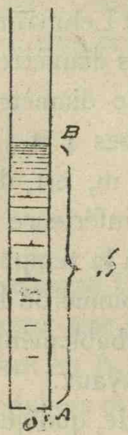
On prend un tube vertical en verre, assez long, d'un diamètre intérieur de 2 — 6 cm. et fermé à son extrémité inférieure par un

---

[1]) TITO MARTINI. — Dei suoni prodotti all' efflusso dei liquidi. Atti del R. Instituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti 5-e ser. T. VIII ; 1882 et 6-e série. T. II, 1883.

De même — Journal de Physique 2-e série, T. I ; pg. 514, an. 1882 et 2-e série, T. III, pg. 218, an. 1884, résumé par E. Gripon.

disque métallique de 2 mm. d'épaisseur, ayant, au centre, un orifice d'un diamètre égal à cette épaisseur. On remplit ce tube d'eau, ou



d'un autre liquide, qu'on laisse ensuite couler par l'orifice inférieur. On remarque qu'à certains moments de l'écoulement, lorsque la colonne liquide atteint certaines hauteurs au-dessus de l'orifice, on entend un son distinct, qui est d'autant plus bas que la hauteur de la colonne est plus réduite. Ce son ne varie pas d'une manière continue, comme le fait le son d'une sirène, mais il passe par des sauts brusques d'une hauteur à une autre, comme les sons d'un tuyau d'orgue, quoique la colonne liquide décroît d'une manière continue.

Voici plusieurs constatations qui ont été faites sur ces sons.

1) Savart, qui a été un des premiers à signaler ce phénomène, avait formulé la loi suivante: *le nombre de vibrations des différents sons qu'on entend pendant l'écoulement est proportionnel à la racine carrée du poids de la colonne liquide,* contenue dans le tube au-dessus de l'orifice. – Tito Martini affirme que la loi de Savart se vérifie avec une assez grande approximation.

2) On sait que la *vitesse d'écoulement* d'un liquide par de petits orifices est, d'après le théorème de Toricelli, proportionnelle à la racine carrée du poids de la colonne liquide qui se trouve au-dessus de l'orifice. L'expérience nous apprend encore, que les gouttes qui forment la veine liquide, ont, pendant leur chute, des changements de forme périodiques, auxquels sont dûs les renflements et les rétrécissements qu'on observe le long de la veine et qui produisent au contact de l'air un son particulier – le son de la veine – et l'on admet, d'après Savart, que le nombre des vibrations de ces sons est proportionnel à la vitesse de l'écoulement, c'est-à-dire à la racine carrée du poids de la colonne liquide, que est au-dessus de l'orifice. Tito Martini admet, d'accord avec d'autres physiciens, que les vibrations de la veine liquide se transmettent par les parois du tuyau, en même temps, au liquide contenu dans le tuyau et à l'air qui se trouve à la partie supérieure du liquide. Le son qui se fait en-

tendre à un certain moment de l'écoulement a la même période que le son de la veine liquide. Ces suppositions expliquent, alors, à la fois la formation du son entendu, ainsi que la loi de Savart, car si les vibrations de ce son sont égales à celles de la veine liquide, elles sont alors proportionnelles à la vitesse de l'écoulement et par conséquent proportionnelles aussi à la racine carrée du poids de la colonne liquide, comme l'exige cette loi.

D'un autre côté, on sait qu'une colonne liquide peut produire un son de période bien déterminée, comme l'a montré Wertheim; elle pourrait, donc, vibrer aussi par résonance, toutes les fois qu'une onde sonore, de même période que celle du son qu'elle produit, pénètre dans sa masse. Tito Martini admet, que le son entendu à un certain moment de l'écoulement a la même hauteur que le son de la veine liquide et ne peut se faire entendre, que s'il est lui-même un des sons propres de la colonne en ce moment, et il trouve par des observations que *les longueurs de ces colonnes liquides sont proportionnelles au nombre des vibrations du son entendu*[1]). S'il arrive que la colonne *d'air*, qui est au-dessus du liquide, soit en résonance avec le son produit par l'écoulement, en même temps que la *colonne liquide*, alors l'intensité de ce son est sensiblement augmentée.

Tito Martini trouve que *la nature du tuyau n'a aucune influence sur la hauteur de la colonne*, qui produit un son donné, si le diamètre de l'orifice reste invariable. Pour assurer le succès de l'expérience, il trouve qu'il est nécessaire de *chasser toutes les bulles d'air* adhérentes aux paroix; autrement, la hauteur du son est altérée, ou bien ce son ne se produit même pas.

3) Tito Martini profite de ces expériences pour comparer entre elles les vitesses de propagation du son dans différents liquides. Soit un son de n vibrations, donné par une colonne d'eau qui s'écoule et soit h la hauteur de cette colonne au-dessus de l'orifice.

---

[1]) Une colonne liquide de longueur déterminée, peut produire, de même qu'un tuyau d'orgue, plusieurs sons. Dans sa comunication de 1882, Tito Martini affirme que les sons des colonnes liquides de ses expériences se succédaient comme les harmoniques d'un tuyau ouvert, tandis que dans son étude ultérieure, de 1883, il affirme que ces harmoniques ressemblaient à celles d'un tuyau fermé. Ses observations sont donc sur ce point incertaines.

Suppossons, qu'en nous servant d'un tube identique au premier, nous entendons le *même* son avec un autre liquide, par exemple, avec l'alcool absolu, et soit h' la hauteur de la colonne correspondante, pour ce liquide. Tito Martini admet que pour le même son, *les vitesses de propagation*, V et V', dans la masse de *deux liquides différents sont proportionnelles aux hauteurs des colonnes* correspondantes, c'est-à-dire qu'on a :

$$(1) \qquad \frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}$$

Si l'on suppose connue la vitesse du son dans l'eau, on peut déduire la vitesse dans tout autre liquide par cette relation.

Pour vérifier ses résultats et pour montrer l'exactitude de sa méthode, Tito Martini calcule, à l'aide de la vitesse trouvée par lui, pour quelques liquides, les coefficients de compressibilité de ces liquides, au moyen de la formule connue :

$$\beta = \frac{101{,}354}{dV^2}.$$

et employée aussi par Wertheim, et il compare les coefficients ainsi déterminés à ceux qui avaient été trouvés par les mesures directes.

Voici le résultat de ces expériences pour quelques liquides :

SUBSTANCE	Densité	Température	Vitesse	Coefficient de compressibilité
Alcool absolu .	0,808	16°	1232	$10^{-6} \times 82{,}9$
Éther sulfurique	0,727	13°	1144	$10^{-6} \times 106{,}5$
Pétrole	0,800	16°,5	1354	$10^{-6} \times 69{,}58$

Tito Martini remarque que les nombres de ce tableau concernant les vitesses sont à peu près identiques à ceux qui avaient été trouvés par Wertheim, et que les coefficients de compressibilité sont très rapprochés de ceux de Grassi. Il en conclut que sa méthode a toutes les chances d'être exacte.

Défauts et contradictions. Laissons de côté l'inconvénient qui provient de ce que le disque métallique de l'extrémité inférieure du tuyau ne pourrait être mis en contact avec certaines liquides, qui attaquent les métaux, passons aussi sur la difficulté qu'on éprouve à saisir le meilleur moment où le son est le plus intense et à obtenir par là la plus juste hauteur de la colonne liquide, pour ne nous arrêter que sur la difficulté qu'on rencontre surtout à distinguer les sons renforcés par la résonance de *l'air* contenu dans le tuyau des sons renforcés par la résonance de la colonne *liquide.* Il est très difficile, en effet, de combiner les longueurs de ces deux colonnes de telle sorte que l'une et l'autre soient renforcées au même moment par le son de la veine liquide, qui le produit. D'autre part, la résonance de la colonne liquide est toujours plus faible — dans les conditions de cette expérience — que la résonance de la colonne d'air du tuyau, et il est bien probable, que la plus grande partie des sons considérés par Tito Martini comme étant renforcés par la colonne liquide, ne fussent en réalité que des sons renforcés par la colonne d'air, pendant l'écoulement.

A l'appui de ce qui précède viennent les contradictions qu'on trouve dans ses observations. Soit, en effet, n et h le nombre de vibrations et la hauteur de la colonne liquide au-dessus de l'orifice inférieur, correspondant au son entendu à un certain moment, et n', h' les éléments analogues correspondant à un autre son, produit à un autre moment, pour le même liquide. Les poids des colonnes liquides correspondants étant proportionnels aux hauteurs de ces colonnes, on a, d'après la loi de Savart, vérifiée aussi par Tito Martini :

$$\frac{n}{n'} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h'}}. \tag{2}$$

Or, Tito Martini nous apprend, par les résultats des ses observations, résumés ci-dessus au No. 2, que les longueurs des colonnes liquides correspondant aux sons entendus sont proportionnelles aux nombres de vibrations de ces sons. On aurait, donc, alors :

$$\frac{h}{h'} = \frac{n}{n'} \tag{3}$$

Ces deux conclusions (2) et (3) sont, comme on voit, en contradiction et elles dénotent de grosses confusions dans les observations.

Outre cela, puisque Tito Martini admet que le son entendu ne peut être qu'un des sons propres de la colonne liquide, il s'ensuit que la longueur de cette colonne doit être justement égale à la moitié de la longueur d'onde de ce son dans le liquide considéré, si la colonne liquide se comporte comme un tuyau ouvert (comme le croyait au commencement Tito Martini), ou bien égale à un quart de la longueur d'onde, si cette colonne se comporte comme un tuyau fermé (comme l'a cru une année plus tard ce même physicien).

Soient, donc, deux sons, dont l'un, plus *élevé*, et auquel corresponde une colonne liquide h et une longueur d'onde λ, et l'autre, plus *bas*, ayant comme colonne h' et comme longueur d'onde λ'. On aura, dans l'hypothèse que ces deux colonnes se comportent comme un tuyau ouvert :

$$h = \frac{\lambda}{2}$$

$$h' = \frac{\lambda'}{2}$$

Or $h' < h$, car, d'après (2), ou (3), à un son plus *bas* correspond une colonne liquide plus *petite* ; il s'ensuit donc que $\lambda' < \lambda$, c'est-à-dire que la longueur d'onde dans le liquide du son qui est plus *bas* est *moindre* que la longueur d'onde du son plus *élevé*, ce qui est impossible. Les observations de Tito Martini n'ont donc plus de sens.

D'un autre côté, l'hypothèse admise par ce physicien – que les vitesses de propagation du son dans la masse des deux *liquides différents* sont proportionnelles aux longueurs des colonnes correspondant au même son produit par leur écoulement du même tuyau, hypothèse, qui lui a servi de point de départ dans les comparaisons et le calcul de quelques-unes de ces vitesses, – est inexacte, comme on le prouvera par ce qui va suivre. On prouvera aussi, par la même occasion, que la *nature* du tuyau n'est pas sans influence sur la hauteur de la colonne qui produit un son donné, contrairement encore à ce que croyait ce même physicien.

Les contradictions choquantes, remarquées dans les expériences de Tito Martini, font donc croire que les sons qu'il a entendus sont plutôt dûs à la résonance de la colonne *d'air* qu'à celle de la colonne liquide, et la coïncidence entre quelques-unes des vitesses dans les substances de ses expériences et entre les vitesses indiquées par Wertheim pour ces mêmes substances, ne peut plus être une garantie, vu les défauts des observations de ce dernier savant.

Les expériences de Tito Martini n'introduisent, donc, que des confusions dans l'étude de la question qui nous préoccupe. Elles ne mériteraient même pas d'être citées parmi les méthodes indirectes pour la détermination de la vitesse du son dans les liquides, si l'auteur, dans la publication de ses recherches, n'avait pas insisté sur leur application aussi à la détermination de cette vitesse.

Nous terminons par là la première partie de cet ouvrage, c'est-à-dire, la récapitulation, que nous nous étions proposée, des méthodes connues jusqu'à présent pour la détermination, par des voies indirectes, de la vitesse du son dans les liquides et des résultats obtenus par ces méthodes. Il résulte, de tout ce qui vient d'être dit, que, si les expériences de Wertheim ont eu le principal mérite, de nous montrer seulement que les liquides peuvent chanter, ainsi que les gaz et les solides, les expériences de Kundt et Lehmann n'ont fait que détruire la légende de Wertheim—d'après laquelle on pouvait obtenir la vraie vitesse du son dans une masse liquide par la voie du chant dans des tuyaux d'orgue et au moyen du facteur $\sqrt{\frac{1}{2}}$ — et nous laisser, en même temps, la conviction que leur méthode avec «*les figures de poudre*« n'est pas, non plus, à même de résoudre avec succès le problème de la recherche de cette vitesse dans les liquides. De nouvelles recherches s'imposaient, donc, pour le progrès de cette question.

DEUXIÈME PARTIE

RÉSONANCE DES LIQUIDES.

Différences entre les méthodes employées jusqu'à présent et notre méthode.

18. Nous commençons maintenant à exposer, dans cette seconde partie de ce travail, nos propres expériences et calculs, au moyen desquels nous tâcherons de déduire, en dernier lieu, la vitesse du son dans toute masse liquide illimitée.

Nous exposerons, à cet effet, premièrement les expériences relatives à *la résonance propre des liquides* dans des colonnes cylindriques, car c'est sur ce phénomène que s'appuie entièrement la méthode de nos observations, ainsi que la déduction qu'on en tire relativement à la vitesse du son dans la masse liquide.

Mais, tout d'abord, essayons d'esquisser les différences caractéristiques, qui existent entre les méthodes déjà exposées et notre méthode.

Dans toutes les méthodes – les précédentes comme la nôtre – on cherche à déterminer d'abord la vitesse V du son dans une *colonne liquide* à l'aide de la formule, déjà employée :

$$V = \lambda . n$$

où n représente le nombre des vibrations et λ la longueur d'onde du son dans le liquide de l'expérience.

La différence entre ces diverses méthodes provient surtout de la manière, dont on détermine ces éléments n et λ.

Wertheim se donne d'avance la *longueur d'onde* λ, en se donnant la longueur rectifiée du tuyau sonore, qui contient la colonne liquide, et détermine par l'expérience le nombre n de vibrations du son produit par cette même colonne. On a vu, par nos discussions précédentes, ce qu'il en reste d'exact de toutes ses observations relatives à la vitesse du son dans des *masses* liquides illimitées.

Kundt et Lehmann, par contre, connaissent d'avance *le nombre des vibrations n* du son employé, en connaissant la longueur de la tige en verre, qui produit les vibrations longitudinales dans la colonne liquide et ils cherchent à déterminer ensuite, au moyen des „*figures de poudre*", la longueur d'onde λ correspondant à ce son, pour la colonne considérée. On a déjà examiné la valeur de cette méthode et on a vu combien peu elle contribuait à la détermination du son dans des *masses* liquides illimitées.

Tito Martini ne considère connus d'avance ni l'un, ni l'autre de ces deux éléments. Il essaie de surprendre et de marquer, à un certain moment de l'écoulement d'un liquide par un petit orifice, une colonne de hauteur telle, qu'elle puisse renforcer le son de la veine liquide de ce moment. La détermination précise de cette hauteur n'est pas bien facile et exige des conditions spéciales d'observation, qui manquaient à Tito Martini. Ce sont surtont ces difficultés expérimentales qui ont produit les confusions signalées dans ses expériences et dont nous ne retenons aucun résultat précis. D'ailleurs, les recherches faites par ce physicien sur la vitesse du son dans les liquides se réduisent simplement à la *comparaison* des vitesses dans deux liquides différents, comparaison établie en vertu d'un principe qui est inexact.

Dans nos expériences nous nous donnerons d'avance, de même que Kundt et Lehmann, le *nombre n de vibrations* en considérant un son *déterminé* qui se propage dans une colonne liquide et nous chercherons à déterminer la longueur d'onde dans cette colonne, au moyen de la *résonance propre*, ou, mieux, de la *résonance libre du liquide.*

La différence qui existe entre notre procédé et celui de Kundt et Lehmann c'est que, pour fixer la longueur d'onde, nous employons, au lieu des *figures de poudre*, le phénomène de la *résonance*, et, pour faire vibrer la colonne liquide nous nous servons d'un son invariable et continu, non pas d'un son intermittent.

Nos expériences diffèrent aussi de celles de Wertheim, car nous considérons connu d'avance le nombre de vibrations et non pas la longueur d'onde, comme le fait ce physicien. Nous en différons encore par le rôle que nous imposons à la colonne liquide. Cette colonne est considérée par Wertheim comme étant *source sonore* en même temps que *résonateur*. Ce double rôle complique le phénomène et impose la nécessité d'introduire un tas de corrections, difficiles à déterminer, pour pouvoir fixer la longueur d'onde λ et le nombre de vibrations n [1]).

Dans nos expériences nous séparerons ce double rôle et nous attribuerons à la colonne liquide seulement le rôle, bien plus simple, de *résonateur*.

Pour nous, le liquide, dans lequel nous cherchons la longueur d'onde, sera un milieu élastique où se propage un son donné et où nous tâcherons de limiter une colonne cylindrique de hauteur telle, qu'elle puisse renforcer le son qu'elle propage, c'est-à-dire qu'elle soit pour ce son un résonateur pareil aux boîtes de résonances des diapasons, ou bien, aux résonateurs sphériques de Helmholz, qui servent à l'analyse des sons.

Parce que notre méthode s'appuie sur le phénomène de la *résonance*, nous pensons, que quelques mots explicatifs sur ce phénomène ne seront pas déplacés.

Résonance des corps

19. Tous les corps élastiques de la nature, solides, liquides et gaz, peuvent présenter des mouvements vibratoires, effectués par leurs molécules, car tous, ils peuvent transmettre le son avec plus ou moins d'intensité. Comme une conséquence de cette propriété,—et d'accord aussi avec l'expérience — tous les corps peuvent produire aussi des sons, car le son n'est qu'une vibration périodique des molécules matérielles.

Mais, si un corps peut transmettre n'importe quel son, il ne peut, en échange, produire *qu'un seul*, ou, un *nombre limité de sons*, dont les hauteurs, c'est-à-dire les périodes de vibration, dépendent de la constitution et du volume du corps, ainsi que de la forme

---

[1]) C'est à cause de cette complication que Wertheim trouve pour le son fondamental d'une colonne liquide un nombre de vibrations par seconde, qui varie de 1300—1600 (voir la note de la page 38—ce qui est impossible—, ou il a l'illusion d'entendre, dans la série des harmoniques, un son qui est à *l'octave inférieure* du son fondamental de ses tuyaux sonores, phénomène qui n'a plus été observé par aucun autre physicien.

par laquelle il est limité du milieu environnant et de la manière dont on le fait vibrer. C'est un phénomène analogue à celui que présente un pendule composé, qui ne peut faire que des oscillations d'une certaine durée, dont la valeur dépend de la masse du corps, ainsi que de la position de son axe de suspension, quoique — considéré comme un support élastique — il puisse transmettre, aux corps solides en contact avec lui, les oscillations de toute autre pendule, quelle que soit leur période.

Ainsi, une colonne d'air contenue dans un tuyau, ou une corde tendue, de même qu'un diapason, ou une barre prismatique d'acier fixée à une de ses extrémités, peuvent transmettre tout son qui les frappe, tandis que cette même colonne, ou corde, de même que le diapason, ou la barre prismatique, lorsqu'on les fait vibrer par une déformation quelconque, ne peuvent émettre qu'un seul, ou un nombre déterminé de sons.

Il y a une différence essentielle entre les mouvements vibratoires d'un corps, qui propagent le son et ceux qui le produisent. Tandis que pour les premiers les condensations et les dilatations maxima changent continuellement de place à l'intérieur du corps, pour les derniers, ces régions sont fixes et le mouvement vibratoire moléculaire devient *une onde vibrante stationnaire*. Ainsi, dans une colonne d'air, ou dans une plaque métallique, de même que dans une cloche, qui sonnent elles-mêmes, il se forme des régions nodales et des ventres, qui ont des positions invariables, tandis que ces mêmes régions se déplacent continuellement, si les corps ne font que transmettre à travers leur masse des sons produits à leur extérieur. Dans ce dernier cas, une molécule vibrante peut effectuer des vibrations de période quelconque, car elle peut transmettre des sons de n'importe quelle hauteur ; dans le premier cas, les mêmes molécules n'effectuent que des vibrations simples, ou complexes, de période bien déterminée, commune à toutes les molécules, ou seulement à des parties séparées.

La vibration stationnaire est la résultante de l'onde directe, due à une déformation initiale, et des ondes réfléchies sur les surfaces qui limitent le corps. Pour qu'une vibration stationnaire puisse prendre naissance à l'intérieur d'un corps, on doit admettre que les vibrations des molécules, qui ont été dérangées de leur état initial et qui exécutent de petites oscillations d'amplitude décroissante, avant de reprendre la position d'équilibre, doivent avoir des périodes d'oscillation telles que l'impulsion due aux mouvements réfléchis puisse faire croître leurs déplacements, c'est-à-dire puisse les surprendre dans la même phase de vibration que celle que ces mouvements réfléchis provoqueraient eux-mêmes ; alors seulement le déplacement initial peut se maintenir et durer un temps appréciable. Mais cela impose une relation nécessaire entre la période de vibration des molécules, la vitesse de propagation du son dans la masse du corps et les dimensions de cette masse. C'est cette relation qui détermine la valeur de la période de vibration du corps entier, et, par conséquent, la hauteur du son produit par le corps.

L'expérience nous montre (il suffit de se rappeler les expériences des flammes manométriques, ou les vibrations d'un phonographe inscrites sur un cylindre couvert de fumée) qu'il peut exister dans un corps plusieurs états vibratoires stationnaires : les uns, où la vibration *est simple et de même période pour toutes les molécules* et auxquels correspondent *des sons simples*, *propres* au corps – c'est le cas le plus intéressant – les autres, où il existe une vibration *relative* entre les points de certaines régions, vibration de période différente de celle de la région elle-même, et auxquels correspondent des *sons complexes* et des bruits, émis par le corps.

On le démontre aussi théoriquement, par les formules de l'Élasticité [1]), que parmi les états vibratoires que peut prendre un corps, en vertu des tensions moléculaires, et à la suite d'une déformation initiale, il existe un, ou plusieurs, pour lesquels toutes ses molécules ont *des vibrations simples de même période* ; — ce sont les états qui correspondent aux *sons simples*, *propres* au corps, et qui constituent le cas le plus facile à étudier. Les valeurs des *périodes* de vibration de ces états ne se succèdent pas d'une manière continue ; il y a entre elles des différences finies

---

[1]) Voir H. POINCARÉ. — Théorie de l'Élasticité, pag. 97 et seq., an, 1892. De même, O. D. CHWOLSON. — Traité de Physique. T. I, fasc. 4e, Acoustique, pag. 914 et 917 ; année 1908.

de sorte que l'on peut dire, que les vibrations propres d'un corps de dimensions finies forment *un spectre discontinu*, par analogie avec le spectre discontinu des radiations lumineuses d'une source de lumière. Les autres états vibratoires du corps peuvent être considérés comme résultant de la superposition de plusieurs états vibratoires simples, de périodes différentes, qui sont entre elles dans un rapport quelconque.

20. On peut, généralement, produire une vibration sonore dans un corps, de deux manières: ou bien en troublant son état d'équilibre par des moyens mécaniques et en l'abandonnant ensuite à ses tensions moléculaires, ou bien à l'aide d'une onde vibratoire qui provient d'une source extérieure.

1. Un solide peut-être déformé par traction, flexion, torsion, ou par des chocs ; un liquide, ou un gaz, est déformé par compression brusque et intermittente. Les physiciens ne voient pas clairement comment on devrait, en général, déformer un corps, pour qu'en vibrant il émette un de ses sons simples et non pas un son complexe. Il y a des cas, où la forme géométrique du corps nous indique les moyens les plus propres à employer pour obtenir de telles vibrations. Ainsi, une barre prismatique en métal, de section rectangulaire, frottée longitudinalement, produira un son propre, simple, par des vibrations longitudinales, de même que le frottement avec un archet de l'un quelconque des côtés de la section rectangulaire produira un son simple par des vibrations transversales, dont la période varie avec le côté frotté. Si l'on donne maintenant sur l'une des faces latérales de la barre un coup sec, la déformation produite peut être décomposée en trois autres, dirigées suivant les trois dimensions de la barre et le son entendu peut être considéré comme un son complexe, provenant de la superposition des sons simples correspondant à chacune des trois déformations partielles.

A chaque déformation élémentaire d'un solide correspond un travail des tensions moléculaires, de valeur bien déterminée. On remarque que, si les déformations les plus propres pour produire des sons simples se réalisent difficilement dans la pratique, au moins au point de vue théorique on peut dire, que les déformations auxquelles correspondent *des sons simples, propres*, d'un corps, sont celles pour lesquelles *le travail des tensions moléculaires est un minimum* [1]. Alors, *la variation* du travail des tensions moléculaires étant nulle, la vibration peut se maintenir un peu plus longtemps. Pour toutes les autres déformations le travail moléculaire perd ce caractère et le son produit est complexe. Lorsqu'on fait vibrer, par exemple, une corde, qui produit le son fondamental et que la trajectoire absolue décrite par chaque point est une ligne droite, alors le travail de la tension est minimum et le son fondamental est simple ; mais si les trajectoires absolues de certains points sont des courbes plus compliquées, correspondant aux harmoniques supérieures, alors le travail des tensions est plus grand et le son est complexe.

2. On peut encore faire vibrer un corps par des déformations dues à une *onde sonore*, qui le frappe et qui provient d'une source sonore extérieure. Supposons que cette source soit formée par une série de diapasons, qui produisent successivement des sons simples et dont les périodes de vibration varient d'une manière continue. Le corps reçoit les vibrations successives qui lui arrivent de ces centres sonores et il les transmet au milieu environnant ; mais pour certaines vibrations de l'onde incidente, qui ont une période bien déterminée, le corps acquiert lui-même une vibration stationnaire. Cette période est justement la période d'un des sons simples que peut émettre lui-même le corps de notre expérience. On dit alors que le corps est un résonateur du son du diapason correspondant. On voit donc, qu'un corps ne peut avoir de vibration stationnaire et ne peut résonner en présence d'un son, qui se propage dans le milieu environnant, que si la période de ce son est une des périodes des sons simples que peut produire le corps lui-même.

Le corps est plus prompt à vibrer dans ce dernier cas, puisque l'énergie des tensions moléculaires, qui se développe par la propagation du son dans sa masse, passe par un *minimum*, car, durant cette propagation, la période de la vibration moléculaire est justement la période du son *propre* du corps, c'est-à-dire qu'elle correspond à une déformation pour laquelle le *travail* des tensions élastiques est *un minimum*. En outre, le corps peut amplifier la vibration

[1] H. Poincaré. — Loco citato pag. 103 et O. D. Chwolson. — Loco citato pag. 1031.

incidente, car toutes les ondes incidentes le trouvent dans la même phase de vibration synchrone et leurs effets s'ajoutent les uns aux autres. Le corps renforce de cette manière le son propagé, en sommant les vibrations incidentes; c'est pourquoi on dit habituellement, que „*le corps absorbe les vibrations qu'il produit*".

Puisque le son extérieur est renforcé seulement si sa période est égale à l'un des sons simples, propres, du corps résonateur, il doit y avoir entre cette période et le volume, la constitution et la forme, qui limite le résonateur de l'espace environnant, la même relation que celle qui existe entre ces derniers éléments et la période d'un des sons simples, propres à ce résonateur. La détermination de cette relation dans les différents cas, qui peuvent se présenter, a fait l'objet des recherches de plusieurs grands physiciens [1]).

Si le son extérieur est complexe et s'il contient plusieurs des sons simples de notre corps, alors celui-ci renforcera chacun des sons composants, lui appartenant, en faisant pourtant ressortir celui dont l'amplitude est plus grande. Tout *résonateur* est, par conséquent, aussi *un analyseur de sons*, dans le sens qu'il fait ressortir au moins un de ses propres sons simples, quand celui-ci figure dans un son complexe.

Comme conséquence de ces conditions il résulte, qu'une colonne d'air, contenue dans un tube, ou dans une boîte de résonance, renforce le son d'un diapason seulement si la période de celui-ci est égale à celle d'un des sons propres de cette colonne d'air, comme il résulte de même qu'une corde peut vibrer en présence d'une autre corde, ou d'un diapason, ou bien qu'une veine liquide amplifie sa vibration, ou qu'une flamme sensible devient plus animée en présence d'un son extérieur, seulement quand celui-ci contient des vibrations de même période que celle des propres vibrations de ces corps mêmes. Dans les mêmes conditions se trouvent les analyseurs sphériques et cylindriques de Helmholtz, par la résonance desquels on

[1]) H. Helmholtz. Lehrb. d. Tonempfindungen.
Theorie d. Luftschwingungen in Röhren.—Journal de Crelle I 57.
Lord. Rayleigh.—Theory of Sound I. 2. pf. 70, an. 1896.
M. Brilouin.—Résonateurs —Jour. de Physique 2—1 ser. T. VI pg. 222, an 1887.
P. Lébédeff.—Wid. An. T. 62, pg. 158, an 1897.
P. Duhem.—Élasticité. Acoustique, T. I, pg. 269, an 1891, etc.

constate la présence des sons simples de période déterminée, dans un son complexe, comme ce serait la voix humaine, ou un autre son d'intensité appréciable.

Remarquons, à l'occasion de cet exemple, que l'air contenu dans un tube, ou dans un résonateur de Helmholtz, n'est autre chose qu'une partie de l'air environnant, dans lequel se propage le son donné, partie limitée d'avance à une certaine forme et dont les sons simples sont à l'unisson avec le son qui se propage en ce moment.

Au lieu de supposer — comme on l'a fait jusqu'à présent — que l'onde sonore, qui émane d'un centre et se répand dans le milieu environnant, a une période variable, et que le corps que cette onde atteint, a une forme invariable, afin de voir quelle est la période du son au moment de la résonance, supposons, au contraire, que le son extérieur a une période constante, tandis que le corps que l'onde sonore frappe, a une forme et des dimensions variables. On peut alors trouver, pour le corps, des dimensions telles que le son considéré soit renforcé par résonance ; mais ce phénomène n'aura lieu que si l'un des sons simples du corps, de forme et dimensions ainsi déterminées, aura la même période que le son extérieur. Le corps résonateur peut être de même nature, ou de nature différente de celle du milieu dans lequel se propage l'onde sonore.

Ainsi, en faisant varier la longueur de la colonne d'air contenu dans un tube en présence d'un diapason, qu'on fait vibrer à l'extrémité de ce tube, (la variation s'obtient à l'aide d'un piston, ou d'un liquide qu'on introduit dans le tube), on arrive à obtenir une colonne qui renforce le son du diapason, c'est-à-dire une colonne qui devient le résonateur de ce diapason. Nous réalisons de la sorte, ici, les mêmes conditions que dans le cas précédent, c'est-à-dire, nous limitons du milieu, dans lequel se propage le son, une portion de forme telle, qu'un de ses sons simples soit à l'unisson avec le son, qui se propage dans ce milieu.

C'est avec des dispositifs analogues et dans le même sens que nous dirigerons dorénavant nos recherches aussi sur la résonance d'un *liquide*. Nous nous arrangerons de manière qu'une onde sonore de période fixe se propage dans une masse liquide – comme elle se propageait dans l'air–et nous chercherons à isoler de cette masse une portion cylindrique du liquide dans des conditions telles, qu'elle puisse renforcer le son propagé, c'est-à-dire qu'elle soit un résonateur de ce son et, par conséquent, qu'elle ait parmi ses sons propres aussi ceux de l'onde sonore. Quand nous isolons une colonne *d'air* dans un tube en présence d'un diapason qui vibre, nous ne faisons pas autre chose.

C'est là le *principe* de *notre nouvelle méthode* et ce sont là les considérations qui nous ont conduits à le formuler.

Wertheim avait montré qu'une colonne liquide peut avoir des sons propres, en la faisant *parler ;* nous montrerons qu'elle en a, en la faisant *résonner*. Lui, il avait produit dans le liquide une vibration stationnaire par des moyens *mécaniques ;* nous la produiront par des *ondes sonores*. Le premier moyen peut provoquer dans la colonne liquide des sons *complexes ;* le second n'en produit que de *simples*.

Les avantages de ce dernier procédé sur le premier ressortent d'eux-mêmes.

— Quoique ces faits, concernant les liquides, paraissent bien faciles en théorie, *personne n'avait encore montré* qu'elles sont aussi réalisables dans la pratique. C'est justement là l'objet de nos recherches.

Nous ferons à cet effet deux sortes d'expériences : les unes *démonstratives*, pour prouver la possibilité d'une résonance de la colonne liquide en présence d'un son extérieur; les autres, *de précision*, afin d'étudier le phénomène de cette résonance par des mesures précises, et dans divers cas, en faisant varier, soit les liquides soumis à l'expérience, soit les tubes, au moyen desquels nous isolerons de la masse de ces liquides des colonnes susceptibles de résonance.

Expériences démonstratives.

Résonance dans l'air.

A. *Tuyaux ouverts.*

Nous effectuerons, d'abord, quelques expériences de résonance dans l'air, dans le but d'indiquer, par analogie, la marche que nous suivrons dans l'étude de la résonance dans les liquides et de signaler, en même temps, quelques particularités communes à ces deux sortes d'expériences.

Ces résonances seront produites dans des colonnes cylindriques d'air contenues les unes dans des tuyaux ouverts aux deux extrémités, les autres dans des tuyaux fermés à l'une des extrémités.

21. Considérons plusieurs tuyaux en carton, ouverts aux deux bouts, de diamètres à peu près égaux, afin qu'ils pénètrent, avec frottement, les uns dans les autres et qu'ils puissent former un tuyau unique, de longueur variable. Faisons vibrer à l'une de ses extrémités un diapason (détaché de sa boîte de résonance), et varions graduellement la longueur du tuyau, cette longueur étant au commencement aussi petite que possible. Il y aura un moment, où l'on entendra le son du diapason renforcé; à ce moment, la colonne d'air contenue dans le tube résonne, c'est-à-dire produit un son de même hauteur que celui du diapason et ce son vient s'ajouter au son du diapason et le renforce. La longueur correspondante du tuyau s'obtient à l'aide d'une règle divisée en millimètres, sur laquelle est placé le tuyau.

Continuons à allonger le tuyau unique en faisant sortir les divers tuyaux superposés; nous entendrons plusieurs fois le même renforcement — la même résonance — produit par les colonnes d'air intérieures, dont nous mesurons les longueurs à l'aide de la même règle. Nous appellerons *colonne de résonance* de l'air du tuyau, pour le diapason considéré, la longueur de la colonne limitée par deux positions correspondant à deux résonances successives. La longueur de cette colonne est égale à la demi-longueur d'onde $\frac{\lambda}{2}$ du diapason considéré.

Voici le résultat d'une série d'observations faites dans l'air atmosphérique avec deux tuyaux de diamètres différents et avec trois diapasons de différentes hauteurs.

Tuyaux en carton ouverts aux deux extrémités

Température de l'air entre 17°—19°

No	LE DIAPASON	Diamètres intérieurs du tuyau	Distance de l'extrémité du tuyau à la I résonance.	Intervalle entre la I—II résonance	Intervalle entre la II—III résonance	Intervalle entre la III—IV résonance	Moyenne des colonnes de résonance excepté celle de l'extrémité
			$\frac{\lambda}{2} =$	$\frac{\lambda}{2} =$	$\frac{\lambda}{2} =$	$\frac{\lambda}{2} =$	
1	Mi_5 2560 vibr. s.	25—29 mm	121 mm.	133 mm.	135 mm.	133 mm.	133,7mm.
2	» » » »	35-38 »	116 »	131 »	133 »	135 »	133 »
3	Do_5 2048 vibr. s.	24—30 »	150 »	168 »	166 »	164 »	166 »
4	» » » »	34—38 »	142 »	169 »	163 »	—	166 »
6	Sol_4 1536 vibr. s.	24—29 »	216 »	222 »	224 »	—	223 »
5	» » » »	35—38 »	203 »	225 »	223 »	--	224 »

Ces mesures ne peuvent pas être trep précises à cause de la manière dont on les a obtenues. On ne les a indiquées qu'à titre de procédé.

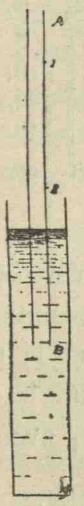
Elles montrent pourtant, que les colonnes de résonance, qui se succèdent après la première résonance, ont pour un même son presque les mêmes valeurs, soit que le diamètre du tuyau reste le même, soit qu'il varie. Ainsi, pour le son Mi_5 les longueurs des colonnes de résonance, qui suivent la première, ont pour le tuyau No. 1 et 2 presque la même valeur, en moyenne $133{,}3^{mm.}$; la même remarque s'applique pour les colonnes qui correspondent au son Sol_4 dans les tuyaux No. 5 et 6, et dont les valeurs sont presque égales à la moyenne de $223{,}5^{mm.}$

La première colonne d'air limitée entre l'extrémité du tuyau et la première position de résonance, et dont la longueur se trouve marquée dans la 4e colonne verticale du tableau, est, pour chaque son et pour chaque tuyau, moindre que les colonnes de résonance suivantes. La différence entre la longueur de cette *première* colonne de résonance et les suivantes est due aux perturbations, qui se produisent aux extrémités du tuyau et cette différence augmente en même temps que le diamètre de celui-ci, pour le même son, comme cela se voit, par exemple, pour Mi_5, où elle est de

12,7$^{mm.}$ (133,7—121=12,7), pour le tuyau de diamètre moyen de 27$^{mm.}$ et passe à la valeur plus grande de 17$^{mm.}$ (133—116), pour le tuyau de diamètre moyen de 36,5$^{mm.}$. D'autres observations sur ce phénomène seront faites à l'occasion des expériences qui vont suivre, relativement à la résonance de l'air dans des tuyaux fermés et où les mesures ont pu être prises avec plus de précision.

B. *Tuyaux fermés à une extrémité.*

22. Prenons un tube en verre ouvert aux deux extrémités et fixons-le verticalement à un cathétomètre, à la place habituelle de la lunette, présentement enlevée.



Plongeons ce tube, par son extrémité inférieure B, dans un vase rempli d'eau, jusqu'à ce que l'extrémité supérieure A atteigne la surface du liquide ; cette position sera connue à l'aide des divisions du cathétomètre. Plaçons au-dessus de l'extrémité A un diapason en vibration (sans boîte de résonance) et, en manoeuvrant à la crémaillère du point où le tube est fixé au cathétomètre, faisons sortir lentement de l'eau le tube en verre. L'air limité par l'extrémité ouverte du tube et par la surface de l'eau de son intérieur forme une colonne fermée à l'extrémité inférieure.

En retirant, en partie, le tube du vase, nous trouverons une première position dans laquelle nous entendrons la première résonance de la colonne d'air, position qu'on lit aux divisions du cathétomètre. En continuant à retirer le tube, une seconde résonance se fera entendre et puis d'autres encore, correspondant aux positions II, III, etc., que nous marquerons par des lectures cathétomètriques. A l'aide de ces lectures on obtient les distances entre deux renforcements successifs, en tenant compte, s'il est nécessaire, de la dépression du liquide dans le vase produite par le relèvement successif du tube. Nous obtenons de la sorte, pour le son considéré, plusieurs colonnes de résonance le long du tube limitées par deux positions successives où se produit une résonance, de même que nous avons une première colonne de résonance limitée par l'extrémité supérieure du tube et par la position de la première résonance.

Voici le résultat d'une série d'expériences faites avec plusieurs tuyaux de diamètres différents.

Tuyaux en verre fermés à l'une des extrémités

Température de l'air des colonnes entre 17°—20°

1	2	3	4	5	6	7	8	9
No.	LE DIAPASON	Diamètre du tuyau	Longueur totale du tuyau	Intervalle entre l'extrémité supérieure et la première résonance	Intervalle entre la I—II résonance	Intervalle entre la II et III résonance	Moyenne des colonnes de résonance comprise entre la I—III résonance	Valeur de $\frac{\lambda}{4}$, déduite de la moyenne des colonnes de résonance le long du tube, entre la I—III résonance
				$\frac{\lambda}{4} =$	$\frac{\lambda}{2} =$	$\frac{\lambda}{2} =$	$\frac{\lambda}{2} =$	$\frac{\lambda}{4} =$
1	Mi_5 2560 vibr. simples	28.8 mm.	644 mm.	54,2mm.	132,6	133,5	133,1	66,5mm.
2	» » » »	38.7 »	548 »	52 »	134	133,6	133,8	66,9 »
3	Sol_4 1356 » »	22 »	692 »	102,6 -	223,2	222,8	223	111,5 »
4	» » » »	35.5 »	656 »	95,3 »	223,6	222,9	223,2	111,6 »
5	» » » »	38.7 »	548 »	96 »	223,5	222,5	223	111,5 »
6	La_3 870 » »	22 »	692 »	188,2 »	394,6	—	394,6	197,3 »

Il résulte de ce tableau, de même que du précédent, que les longueurs des colonnes de résonance qui suivent la première résonance, c'est-à-dire les longueurs entre la I—II, II—III résonance, etc, ont, pour un même son, les mêmes valeurs, soit que le tube est le même, soit qu'il varie, c'est ce qu'on constate pour le diapason Mi_5 avec les tubes No. 1 et 2 et pour le son Sol_4 avec les tubes No. 3, 4 et 5.

Nous appellerons la colonne d'air, limitée par l'extrémité supérieure A du tube et par la position de la première résonance, »colonne de résonance *de l'extrémité*« et les colonnes suivantes, limitées par deux positions succesives de résonance, »colonnes de résonance *le long du tube*«. Dans notre tableau on voit que la valeur moyenne des colonnes de résonance *le long du tube* est pour le son Mi_5, dans les tubes No. 1 et 2, de $133{,}5^{mm.}$ — la même que pour des tuyaux ouverts — et pour le son Sol_4, dans les tuyaux No. 3, 4 et 5 cette valeur est de $223^{mm.}$ — égale aussi à la valeur correspondante des tuyaux ouverts.

En comparant les nombres inscrits dans la 5e et la 9e colonne verticale, on constate que la longueur de la colonne de résonance *de l'extrémité* est, pour tous les tuyaux, moindre que la moitié de la moyenne des colonnes de résonance le *long du tube*, dont la valeur est inscrite dans la 8-e colonne verticale.

23. Ces résultats tirés de l'expérience sont d'accord avec aussi la théorie. En vérité, conformément aux principes énoncés plus haut, le son du diapason qu'une colonne d'air renforce par résonance, est un des sons simples de cette colonne. Or, d'après la théorie sur la formation des sons dans les tuyaux sonores, on sait, que la longueur corrigée d'un tuyau qui parle est égale à un nombre entier, pair ou impair, de $\frac{\lambda}{2}$ du son produit dans l'air, si le tuyau et ouvert, et que cette longueur est égale à un nombre impair de $\frac{\lambda}{4}$ pour des tuyaux fermés à une extrémité.

Si l est la longueur du tuyau ouvert, x sa correction totale, k un nombre entier quelconque et si l_1, x_1, k_1 sont les éléments analogues d'un tuyau fermé, pour un certain son du tuyau, on aura les relations:

$$(1) \qquad l+x=k\frac{\lambda}{2}=2k\frac{\lambda}{4} \quad (k=1,\ 2, \ldots) \quad \text{pour le tuyau ouvert}$$

et

$$(2) \qquad l_1+x_1=(2k_1+1)\frac{\lambda}{4} \quad (k_1=0,\ 1,\ 2, \ldots) \quad \text{pour le tuyau fermé.}$$

Si l'on allonge, maintenant, graduellement le tuyau pour qu'on reproduise le même son, on a, en désignant par l' et l'_1 les longueurs correspondantes et en admettant que les corrections sont indépendantes des longueurs du tuyau :

$$(3) \qquad l'+x=(k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{pour le tuyau ouvert}$$

$$(4) \qquad l'+x_1=[1+2(k_1+1)]\frac{\lambda}{4} \quad \text{pour le tuyau fermé.}$$

En retranchant respectivement les relations (1) et (2) de (3) et (4), on obtient:

$$(5) \qquad l'-l=\frac{\lambda}{2} \quad \text{pour le tuyau ouvert}$$

et

$$(6) \qquad l'_1-l_1=\frac{\lambda}{2} \quad \text{pour le tuyau fermé.}$$

ce qui montre que l'allongement du tuyau, soit ouvert, soit fermé nécessaire pour reproduire le même son, est egal à la moitié de la longueur d'onde de ce son dans la masse vibrante. Les colonnes de résonance *le long* du tube, trouvées dans nos expériences précédentes, sont donc égales à $\frac{\lambda}{2}$ du son des diapasons respectifs, dans l'air, et par suite egales entre elles, comme on l'à déjà constaté.

Si dans l'égalité (1) on fait $k=1$ et dans (2) $k_1=0$, on a:

(7) $l+x=\frac{\lambda}{2}$ pour le tuyau ouvert

et

(8) $l_1+x_1=\frac{\lambda}{4}$ pour le tuyau fermé,

ce qui montre qu'il faut ajouter les corrections respectives x et x_1 à la longueur du tuyau ouvert ou fermé, pour obtenir la moitié, ou le quart, de la longueur d'onde du premier son propre – le son fondamental – émis par chacun de ces tuyaux.

La détermination de ces corrections n'est pas facile et elle a fait l'objet de beaucoup de recherches savantes, aussi bien empiriques que théoriques [1]. Ces corrections ne sont plus nécessaires pour déterminer la valeur exacte de $\frac{\lambda}{2}$, si on réussit, par l'allongement du tuyau, à reproduire une seconde fois, au moins, le son fondamental, car, d'après ce qu'on vient de voir cet allongement est lui-même égal à $\frac{\lambda}{2}$ correspondant à ce son.

Helmholtz [2]), dans un mémoire classique publié en 1860, traite le problème de la formation des sons dans une colonne d'air contenue dans un tuyau, sous l'influence d'une onde vibratoire, qui vient d'une source sonore quelconque, comme un problème de dynamique des fluides, à l'aide de la théorie du potentiel, sous la forme sous laquelle on l'applique à l'Électricité et au Magnétisme. Il conclut que l'amplitude d'un mouvement vibratoire stationnaire, qui se produit dans une telle colonne, est maximum, c'est-à-dire que la colonne résonne, quand la longueur corrigée du tuyau – dont les parois sont supposées assez résistantes pour ne pas céder aux pressions et pour ne pas vibrer – est égale à un multiple quelconque de $\frac{\lambda}{2}$ du son propagé, si le tuyau est ouvert, ou égale à un multiple impair de $\frac{\lambda}{4}$, si le tuyau est fermé, c'est-à-dire il établit, pour la résonance d'une colonne d'air, les mêmes conditions que celles qui sont exprimées par les égalités précédentes (1) et (2), et qui sont déduites de la théorie élémentaire des tuyaux sonores.

[1]) VIOLLE — Acoustique, p. 132 et 138.

[2]) H. HELMHOLTZ — Théorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Journal de A. L. Crelle — Bd. 57, pg. 1; an. 1860.

Cette théorie de Helmholtz laisse — c'est à remarquer — arbitraire la place que doit occuper la source sonore; elle peut être à l'intérieur, ou à l'extérieur du tuyau.

Helmholtz déduit de ses formules que la correction x_1 pour un tuyau *fermé* à une extrémité est indépendante de la longueur d'onde du son, dans l'hypothèse que cette longueur d'onde soit très grande par rapport au diamètre du tube et il trouve commune valeur théorique de cette correction :

$$x_1 = \frac{\pi}{4} R = 0{,}785 \text{ R}$$

où R représente le rayon du tube cylindrique [1]).

Par des recherches empiriques, Wertheim avait trouvé auparavant que ces corrections, qu'il admet aussi indépendantes de la longueur d'onde, ont comme valeur moyenne :

$x_1 = 0{,}764$ R, pour les tuyaux ouverts à une seule extrémité, c'est-à-dire presque la même valeur que celle donnée par Helmholtz,

et $x = 0{,}663$ R [2]) pour chaque extremité d'un tuyau ouvert aux deux bouts.

Les physiciens ne se sont pas encore mis d'accord sur la valeur de cette correction; les uns, comme Zamminer [3]), soutiennent que sa valeur augmente avec la longueur d'onde, d'autres, comme Bosanquet, prétendent, au contraire, qu'elle décroît, quand cette longueur d'onde croit [4]).

Dans tous les cas, il est à remarquer que si l'on calcule cette correction, relative aux tuyaux fermés, à l'aide de la formule

$$x_1 = \frac{\lambda}{4} - l_1$$

déduite de (8) et si l'on applique ces calculs aux résultats des expériences faites par *nous* sur la résonance dans des tuyaux *fermés,* et indiqués dans le tableau précédent, on constate que les valeurs trouvées sont à peu près égales à celles qiu se déduisent, pour les mêmes tuyaux, à l'aide de la formule de Helmholtz indiquée plus haut.

Avant de quitter ces considérations, inspirées par le résultat de nos expériences sur la résonance dans l'air, il est bon de mentionner que le physicien A. Kalähne [5]), en modifiant une méthode indiquée par Bernoulli et Dulong, a determiné, dans ces derniers temps, la vitesse du son dans l'air, en se servant justement du phénomène de la résonance dans une colonne d'air variable. A cet effet il a déterminé la longueur d'onde $\frac{\lambda}{2}$ du son d'un diapason extérieur dont il connaissait le nombre de vibrations, en faisant varier la colonne d'air pour reproduire les mêmes résonances, comme dans nos expériences précédentes. Cette méthode a été aussi employée

---

[1]) Loco citato pg. 57.

[2]) G. WERTHEIM. Mémoire sur les vibrations sonores de l'air. Annales de Physique et de Chimie. 3-e série. T. XXXI, pg. 385, an 1851.

[3]) Journal de Crelle. Loco citato, pg. 11.

[4]) T. VIOLLE — Acoustique, pg. 138.

[5]) Journal de Physique 4-e série, T. II, pag. 764, an. 1903 et T. IV, pag. 413, an. 1907.

pour déterminer la vitesse du son à différentes températures, et cela en élevant la température du tuyau sonore à l'aide d'un fil métallique, qui entoure ce tuyau et par lequel passe un courant électrique.

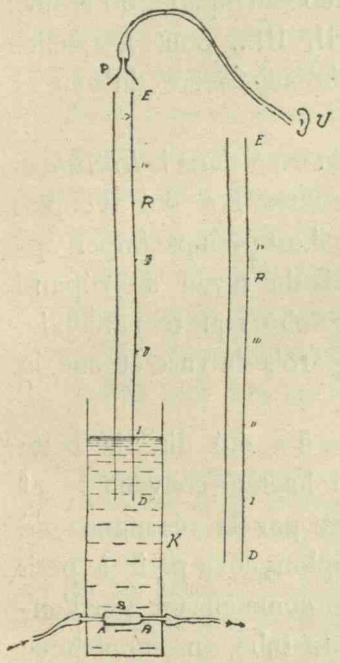
Remarque. Si, dans nos expériences sur la résonance dans des tuyaux fermés, on remplace le diapason posé à l'extrémité du tuyau AB par une autre source sonore, placée à une certaine distance du tuyau et si l'on retire ce dernier du vase, afin de varier la longueur de la colonne d'air de son intérieur, on constate alors, que pour des positions, qui se suivent à des distances égales, on obtient encore des renforcements successifs du son. Pour que la perception de ces résonances, évidement faibles, soit plus nette, lorsque la source sonore est éloignée, on peut se servir d'un porte-voix renversé au-dessus de l'extrémité supérieure du tuyau de résonance, la partie évasée de ce porte-voix étant tournée vers le tuyau, tandis que le sommet de sa partie conique est engagé dans un tube de caoutchouc, dont l'extrémité libre est introduite dans l'oreille. Si le son de notre source sonore est complexe, on entend alors, par résonance, ses différents sons simples, pour des positions déterminées de la colonne d'air dans le tuyau résonateur. Le son est ainsi analysé minutieusement et on réalise, de la sorte, un *analyseur* des sons formé d'un simple tube cylindrique.

Remarquons encore, avant de commencer les expériences avec les liquides, que c'est surtout dans le cas où le centre sonore est éloigné du tuyau, que la colonne d'air, qui résonne dans le tube en verre, apparaît comme une portion de la masse illimitée de l'air, où se propage l'onde sonore produite par ce centre, circonscrite dans des conditions telles qu'elle puisse donner naissance à son intérieur à une onde vibratoire stationnaire d'amplitude maximum, c'est-à-dire que le phénomène apparaît tel qu'il a été décrit, lorsqu'on a rappelé les notions générales sur la résonance. C'est l'image de ce phénomène qui nous conduira dorénavant aussi dans les recherches sur la résonance des liquides dans des colonnes cylindriques.

Résonance dans les liquides.

24. Faisons maintenant dans les *liquides* les mêmes expériences que celles qu'on a faites dans l'air. Produisons dans la masse liquide un mouvement vibratoire, qui se propage d'un centre sonore et, au moyen d'un tube à parois résistantes, cherchons à isoler de cette masse des colonnes cylindriques, qui puissent renforcer, si c'est possible, le son qui se propage dans ces colonnes. Le dispositif employé sera le même que dans l'air.

Prenons, pour cela, un tube sonore à anche S, fait en bois, de petites dimensions, que nous recouvrirons d'une enveloppe métallique imperméable, pour empêcher l'eau de pénétrer à son intérieur. Aux extrémités A et B de ce petit tuyau sonore sont étroitement adaptés deux longs tubes en caoutchouc, qui sont entourés à ces extrémités d'une couche de paraffine, afin de prévenir la pénétration de l'eau à l'intérieur. En introduisant dans ce tube sonore, par le tube en caoutchouc d'une des extrémités A, de l'air sous pression, à l'aide d'une soufflerie, la languette se met à vibrer et le tuyau parle. L'air comprimé de l'intérieur s'échappe par le tube en caoutchouc de l'autre extrémité B. C'est ce petit tube à anche S qui constitue *la source sonore.* Le son qu'elle produit est très aigu ; dans nos expériences il approchait le la_5, de la cinquième gamme. Nous le désignerons pour cela par la_5, quoiqu'il ne corresponde pas exactement à ce ton.



On va plonger ce petit tuyau sonore S, dans un vase K, assez large et profond, rempli d'eau, en ayant soin de le placer sur des rondelles en caoutchouc, afin d'empêcher la transmission directe de ses vibrations au fond et aux parois du vase.

Mais, avant d'introduire ce petit tube sonore S dans le liquide, nous allons faire avec lui une expérience de résonance d'abord dans *l'air*, en employant pour cela la colonne d'air contenue dans le tube en verre DE, fixé au cathétomètre, dont nous nous sommes servis dans les précédentes expériences de résonance, relatives aux tuyaux fermés à l'une de leurs extrémités.

Plaçons le tuyau sonore S en un point quelconque T de l'espace et faisons-le vibrer; approchons, en même temps, l'extrémité inférieure D du tube en verre DE, fixé au cathétomètre, de la surface du liquide contenu dans le vase K et commençons à plonger le tube dans le liquide.

Nous entendrons à divers moments les résonances produites par la colonne d'air du tube, comprise entre son extrémité supérieure E et la surface du liquide. Marquons de bas en haut, par de petits traits sur le tube, le niveau du liquide dans ce tube, à ces moments-là. En faisant sortir ensuite le tube du liquide, on trouve les positions marquées par les traits I, II, III... pour lesquelles la colonne d'air, comprise entre l'extrémité supérieure du tube et ces traits, résonne pour le son ci-dessus.

Introduisons après cela le petit tube sonore S dans le *liquide* et faisons-le vibrer à l'aide de la soufflerie, comme il a été dit plus haut. Au dehors, le son s'entend à peine ; il est presque imperceptible. L'onde sonore produite par les parois du tuyau se répand dans la masse liquide et ne se propage en dehors que très affaiblie, à cause des réflexions intérieures sur les parois du vase et sur la surface du liquide.

Cherchons maintenant à isoler, comme il a été dit, de cette masse liquide une colonne cylindrique de hauteur convenable et voyons s'il est possible de renforcer le son par la résonance de cette même colonne *liquide*. Pour cela replongeons petit à petit notre tube en verre DE dans le liquide, en commençant par l'extrémité inférieure D, et écoutons avec le tube en caoutchouc du pavillon P attaché au haut de ce tube en verre. Le son commence à se manifester, accompagné d'un cortège de bruits, et à divers moments nous entendons distinctement des résonances se reproduire d'une manière successive dans l'intérieur du tube. On observe que ces résonances se produisent juste au moment où le niveau du liquide vient successivement à la hauteur des traits I, II...., marqués sur le tube, dans les expériences antérieures pour la résonance dans *l'air*, lorsque le tube sonore S se trouvait hors du liquide. Nous concluons de là que les résonances formées à présent, quoique plus faibles, sont produites toujours par la colonne *d'air* du tube en verre ED, car elles se révèlent dans les mêmes positions que précédemment. Les vibrations du liquide se communiquent aux parois du tube et par elles à la colonne d'air de son intérieur et déterminent les mêmes phénomènes que dans le cas de l'onde aérienne [1]). Si, pourtant, on écoute attentivement, lorsque le tube plonge dans le liquide, on saisit encore un renforcement du son dans une position différente de celles qui sont marquées sur le tube, c'est-à-dire dans une position R intermédiaire entre les précédentes. Comme ce renforcement ne correspond plus aux positions de résonance de la colonne *d'air* du tube DE, il ne peut, probablement, être produit que par la *résonance de la colonne liquide* contenue dans le tube et comprise entre son extrémité inférieure D et le niveau du liquide dans son intérieur, à ce moment-là. D'ailleurs, le caractère de ce son, plus sec, plus vitreux et plus prompt, indique qu'il est d'une provenance autre que celle des sons entendus par la résonance de l'air. C'est la *résonance propre* des colonnes liquides, qu'on soupçonnait, mise en évidence de cette manière-ci. Elle n'avait été montrée, *sous cette forme*, à notre connaissance, *par personne, jusqu'à présent* [2]). Au début, dans les conditions de nos expériences, cette résonance du liquide était très faible et seule une oreille attentive pouvait

---

[1]) Ce sont les renforcements du son par la coloone d'air du tuyau qui ont été, probablement, considérés par Tito Martini, dans ses recherches, comme des résonances du liquide et c'est à cause de cette confusion qu'il est arrivé aux conclusions incertaines, dont on a parlé dans les discussions faites sur les recherches de ce physicien, dans la première partie de cet ouvrage. Son affirmation, que le son renforcé, durant l'expérience, était d'autant plus bas qu'il s'écoulait plus de liquide et par conséquent qu'il se formait une colonne *d'air* plus grande à l'intérieur du tuyau, est fort à l'appui de cette probabilité. On ne voit pas, en tout cas, de quelle manière il a éliminé de ces observations les perturbations produites par ces renforcements sur les mesures qu'il a prises.

[2]) Jusqu'au commencement de l'année 1908, époque à laquelle nous avions fini la série de nos expériences *sur la résonances dans les liquides*, il n'avait paru aucun autre ouvrage, dans le pays, ou à l'étranger, qui montrât ce phénomène de la résonance dans les liquides sous la forme, sous laquelle, nous le présentons ici, et qui l'appliquât à l'étude de la vitesse du son dans des *masses* liquides illimitées, comme nous le ferons plus loin.

Par nos communications faites à la *Société des Sciences de Bucarest* à plusieurs reprises et surtout dans *la séance du 5 Mars 1907*, nous avions montré le principe et le dispositif de nos expériences, de même que plusieurs résultats obtenus à l'aide de ce principe et, par cela, *nous avions pris date sur l'originalité de ces recherches.*

l'entendre, surtout que pour la saisir, il fallait déplacer le tube en verre, de haut en bas et réciproquement, avec une certaine vitesse, car autrement on ne pouvait percevoir rien de précis.

C'est, peut-être, en premier lieu, cette difficulté qu'on éprouve à distinguer un son relativement faible et court dans le chaos de tant de sons qu'on entend dans un liquide, où parle un petit tuyau sonore et que nous explorons avec un tube cylindrique, qui a constitué un obstacle pour mettre en évidence plus tôt l'existence de cette résonance dans l'eau; mais, ce qui paraît avoir manquer aussi, c'était une idée directrice dans l'ordre des recherches.

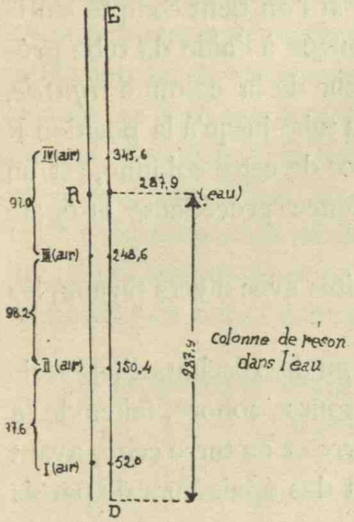
Si ce renforcement du son, qui s'interpose entre deux positions de résonance de l'air compris dans la colonne au-dessus du liquide, est véritablement dû à la résonance du liquide et, s'il se produit au moment où le tube en verre plonge dans le liquide jusque, par exemple, à une distance R, alors la longueur de la colonne liquide isolée de la masse liquide vibrante et propre à renforcer le son de cette masse, c'est-à-dire capable de devenir un résonateur par rapport à ce son, est évidemment RD, comprise entre l'extrémité inférieure D du tube et cette position intermédiaire R. On l'appelle, de même que pour l'air, »*colonne de résonance dans le liquide à l'extrémité du tube*«.

Nous donnons ci-après les chiffres correspondant aux distances successives entre l'extrémité inférieure D d'un tube en verre et les positions des diverses résonances successives, obtenues dans une de nos premières series d'expériences :

			Différence
De l'extr. infér. du tube jusqu'à la	I résonance dans l'air	= 52,8$^{mm.}$	97,6$^{mm.}$
» » » » » » »	II » » »	= 150,4 »	98,2 »
» » » » » » »	III » » »	= 248,6 »	97 »
» » » » » » »	pos. R de rés. d. le liq.	= 287,9$^{mm.}$	
» » » » » » »	IV résonance dans l'air	= 345,6 »	

Les distances étant mesurées au cathétomètre et les positions de résonance étant vérifiées par des observations réitérées, il s'ensuit que les résultats sont exacts autant que possible.

On remarque que la distance comprise entre les diverses positions successives de résonance de la colonne *d'air* est à peu près la même le long du tube, et égale à la valeur moyenne de 97,6$^{mm.}$, valeur qui représente la demi-longueur d'onde $\frac{\lambda}{2}$ du son de notre tube sonore dans *l'air*. On constate, en même temps, qu'entre la III et IV position de résonance dans l'air, à une distance DR $= 287{,}9^{mm}$ de l'extrémité inférieure du tube, il se produit encore un renforcement d'un caractère spécial, mentionné ci-dessus, qui est dû, comme on l'a dit et comme on le justifiera à nouveau, un peu plus bas, à la résonance de la colonne liquide contenue dans le tube entre son extrémité inférieure et cette position R et dont la hauteur est, par conséquent, $287{,}9^{mm}$. On voit que par ces observations on obtient à la fois la longuer $\frac{\lambda}{2}$ du son dans *l'air*, le long du tube, et la colonne de résonance *du liquide* de l'extrémité de ce même tube.



Si l'on répète l'expérience avec un tube en verre de dimensions différentes de celles du précédent, la source sonore dans le liquide étant toujours la même, on obtient encore des renforcements du son le long du tube et, par un procédé analogue au précédent, on constate que ces renforcements sont tous dûs à la résonance de l'air du tube, un seul excepté, compris entre deux positions successives de ces résonances et qui est dû à la résonance de la colonne liquide. On constate, en même temps, que la longueur de la colonne liquide correspondant à cette dernière résonance, et mesurée à partir de l'extrémité inférieure du tube, est différente de la précédente. Voilà un exemple avec un tube toujours en verre, mais d'un diamètre plus petit que le précédent, et dont les parois sont plus épaisses.

		Différence
Dist. de l'extr. infér. du tube à la I résonance dans l'air	$= 16$	
» » » » » » » » II » » »	$= 113{,}8$	$97{,}8^{mm.}$
» » » » » » » » III » » »	$= 212$	$98{,}2$ »
» » » » » » » » IV » » »	$= 310{,}6$	$98{,}6$ »
» » » » » » » » pos. R de rés. d. le liq.	$= \mathbf{332}^{mm.}$	
» » » » » » » » V résonance dans l'air	$= 408{,}8$	$98{,}2$ »

On voit de ces mesures aussi, que les distances entre les positions successives de résonance de la colonne d'air du tube sont presque égales entre elles et égales à leur moyenne, $\frac{\lambda}{2} = 98{,}2$ mm., dont la valeur est à peu près la même – si l'on tient compte de la température – que celle qui avait été trouvée à l'aide du tube précédent, mais on constate que la longueur de la colonne *liquide*, comptée depuis l'extrémité inférieure du tube jusqu'à la position R de renforcement du son par la résonance de cette colonne, est un peu ***plus grande*** que celle de l'expérience précédente et égale à 332$^{mm.}$.

Des expériences analogues ont été faites avec divers tuyaux, les uns en verre, les autres un terre cuite.

Nous donnons ci-dessous un petit tableau des résultats d'une série d'expériences dans l'eau, pour la même source sonore, faites de la même manière et avec des tuyaux en verre et en terre cuite, ayant des longueurs, ainsi que des diamètres et des épaisseurs de parois différentes.

Résonances dans l'eau ordinaire avec différents tuyaux

Température ordinaire.

	No.	Température de l'air	Colonne de résonance dans *l'air*	Longueur du tube	Diamètre moyen intérieur du tube	Epaisseur des parois	Température de l'eau	Colonne de résonance dans *l'eau* à l'extrémité du tube
			$\frac{\lambda}{2}=$ mm.	mm.	mm.	mm		mm.
Tubes en verre	1	17°.5	97.6	544	38.7	1.2	17°	287.8
	2	18°.8	98.1	645	28.3	1.8	»	333.2
	3	20°.0	98.2	902	28.8	1.8	»	332
	4	17°.7	97.6	693	21	2	»	349.2
Tubes en terre cuite	1	17°.3	97.5	607	37.1	2.2	17°	285.7
	2	18°.0	98	595	23.0	2.5	17°.5	363

On voit de ce tableau que: 1) Les colonnes de résonance dans *l'air* ont des valeurs presque identiques pour les différents tubes – comme on s'y attendait, d'ailleurs – les petits écarts étant dûs aux différences de température. 2) Les colonnes de résonance dans *l'eau* diffèrent entre elles suivant les tubes employés dans l'expérience et suivant les dimensions de ces tubes. Ces colonnes sont plus grandes dans les tubes qui ont le diamètre plus petit et les parois plus épaisses, comme on le voit, par exemple, aux tubes en terre cuite et aux tubes en verre No. 1 et No. 4. Ces faits avaient été signalés aussi par Kundt et Lehmann, mais seulement dans *l'eau purgée d'air* et moyennant une méthode, qui n'aurait pu nous fournir aucune indication sur la résonance dans *des tubes en terre cuite*, comme cela arrive dans nos expériences. 3) La longueur des tubes n'influe pas sur la valeur de la colonne de résonance dans l'eau comme on le voit aux tubes en verre No. 2 et 3, qui ont persque le même diamètre et la même épaisseur de parois, mais qui sont de longueurs différentes et pour lesquels on constate que les colonnes de résonance dans l'eau ont presque la même valeur.

Résonance dans l'eau chauffée et dans une dissolution de sel

25. Pour mieux nous convaincre que le renforcement du son perçu entre deux résonances successives de la colonne d'air, qui se trouve dans le tube au-dessus du liquide, est, en vérité, dû à la colonne liquide limitée par les parois du tube jusqu'à son extrémité inférieure, varions la nature du liquide, tout en gardant les mêmes tuyaux et la même source sonore dans la masse liquide.

Nous ferons pour cela des expériences dans de *l'eau chauffée* et dans de l'eau qui contient *du sel de cuisine en dissolution*, avec quelques-uns des tuyaux, dont nous nous sommes déjà servis dans les expériences précédentes.

Voici le résultat de ces expériences, dans lesquelles nous désignons les tubes par le numéro d'ordre du tableau précédent.

Eau chauffée à 34° de température

	No.	Températ. de l'air	Moyenne de la colonne de réson. dans *l'air*	Longueur du tuyau	Diamètre intérieur du tuyau	Épaisseur de la paroi	Température du liquide	Colonne de résonance dans le *liquide* à l'extr. du tuyau.
			mm.	mm.	mm.	mm.		mm.
Tuyaux en verre	2	21°	98.6	645	28.3	1.8	34°	338.7
	3	21°.6	99.1	902	28.8	1.8	35°	338.2
Tuyau en terre cuite	1	21°	98.8	607	37.1	2.2	33°	292.7

On voit que les nombres trouvés pour la colonne de résonance dans *l'eau chauffée à la température de 34⁰* sont tous un peu plus grands que les nombres trouvés avec les mêmes tuyaux dans l'eau à la température ordinaire. La colonne de résonance qui nous préoccupe varie avec le *liquide;* c'est donc à lui qu'elle est due.

Eau contenent 10 $^0/_0$ de son poids du sel ordinaire

	No.	Température de l'air	Moyenne de la colonne de résonance dans *l'air*	Longueur du tuyau	Diamètre intérieur du tuyau	Épaisseur de la paroi	Température du liquide	Colonne de résonance dans le *liquide*
			mm.	mm.	mm.	mm.		mm.
Tuyaux en verre	2	$19^0.8$	98.2	645	28.3	1.8	19^0	339.2
	4	$20^0.5$	98.5	693	21	2.0	19^0	356
Tuyau en terre cuite	2	$20^0.5$	98.4	595	23	2.5	19^0	370.8

On voit aussi cette fois, que les colonnes de résonance dans l'eau qui contient du sel se modifient pour tous les tuyaux dans le même sens, en augmentant un peu par rapport à celles de l'eau ordinaire. Elles ne peuvent donc être atribuées qu'à la résonance du *liquide.*

En réunissant dans un seul tableau comparatif les résultats obtenus dans *l'eau à la température ordinaire,* dans *l'eau chauffée* et dans *l'eau* contenant du *sel,* pour les tuyaux communs, employés dans ces expériences, on aura les chiffres suivants :

Colonnes de résonance dans l'eau à la température ordinaire, dans l'eau chauffée et dans l'eau contenant du sel de cuisine

	No.	Colonne de résonance dans l'eau ordinare à 17⁰ de température	Colonne de résonance dans l'eau chauffée à 34⁰ de température	Colonne de résonance dans l'eau contenant 10⁰/₀ du sel, à 19⁰ de température
		mm.	mm.	mm.
Tuyaux en verre	2	333.2	338.7	339.2
	3	332	338.2	—
	4	349.2	—	356
Tuyaux en terre cuite	1	285.7	292.7	
	2	363.0	—	370.8

On voit de ces données, que pour les mêmes tuyaux, la résonance attribuée au liquide change sa position, pour un même son, dans le même sens, quand on varie le liquide; elle *augmente*, par rapport à l'eau ordinaire, aussi bien dans l'eau chauffée, que dans l'eau qui contient du sel en dissolution.

Il est, donc, maintenant établi, d'une manière indubitable, que cette résonance est due, en vérité, à la résonance de la colonne *liquide* et non pas à une autre cause, et que l'eau a, par conséquent, sa résonance propre — ce qu'on voulait démontrer.

Ceci est le résultat de notre première série *d'expériences démonstratives.*

D'autres expériences sur la résonance dans des colonnes liquides de différentes natures

26. Si le phénomène de la résonance dans les liquides se produit de la même manière que dans l'air — ce qui devrait avoir lieu à la suite de nos précédentes déductions théoriques — et si l'on fait croître la colonne liquide comprise à l'intérieur du tuyau qui pénètre dans la masse vibrante, on doit alors rencontrer plusieurs positions de résonance, comme dans le cas de l'air.

Pour vérifier cette déduction, effectuons des expériences dans un vase plus profond et avec des tuyaux plus longs que ceux des expériences précédentes, pour pouvoir former des colonnes liquides de longueur au moins double de la longueur de la première colonne de résonance de l'extrémité du tube obtenue jusqu'à présent. Puisque pour l'eau ayant du sel on dissolution, par exemple, la longuer de la première colonne de résonance était, dans le tuyau en terre cuite No. 2, de 370,8$^{mm.}$, il fallait que la profondeur du vase et la longueur du tuyau explorateur soient au moins plus grandes que le double de cette valeur, c'est-à-dire plus grandes que 742$^{mm.}$, pour pouvoir reproduire au moins une fois la résonance du liquide respectif. Appliquons, en même temps, ces expériences à d'autres liquides qu'à l'eau ordinaire, pour voir le sens dans lequel varient leurs colonnes de résonance, lorsque la source sonore et les tuyaux restent les mêmes.

Voici un tableau des résultats de ces nouvelles expériences faites avec *l'eau ordinaire*, *la benzine*, et *l'alcool ordinaire*, dans lequel on n'indiquera plus, pour notre son, les longueurs de la colonne de résonance dans *l'air*, car ces longueurs sont connues pour différentes températures et encore parce que leur variation peut facilement être calculée pour toute température, si l'on connaît sa valeur pour une température déterminée [1]).

Colonnes de résonance dans l'eau ordinaire, dans la benzine et dans l'alcool ordinaire

	Tuyaux en verre			*Eau ordinaire* à la tempér. moyenne de 18°		*Benzine* à la température moyenne de 19°		*Alcool ordinaire* à la tempér. moyenne de 19°	
No.	Longueur du tuyau	Diamètre intérieur du tuyau	Epaisseur de la paroi	Colonne entre l'extrémité du tuyau et la Ie résonance	Colonne entre la I—II résonance	Colonne entre l'extrémité du tuyau et la Ie résonance	Colonne entre la I—II résonance	Colonne entre l'extrémité du tuyau et la Ie résonance	Colonne entre la I—II résonance
					$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_{la_5}=$		$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_{la_5}=$		$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_{la_5}=$
1	90.3 cm.	28 mm.	2 mm	340.4 mm.	342.8 mm.	298.8 mm.	301.9	—	—
2	130.5 »	24.8 »	1.8 »	339.2 »	343.3 »	—	—	—	—
3	100 »	17.8 »	2.8 »	375 »	376.7 »	316.8 »	317.2	332.2	337
4	133.5 »	16.4 »	2.7 »	376.8 »	379.1 »	—	—	—	—
5	100.7 »	13.3 »	3.0 »	389.8 »	391 »	320.8 »	321.2	—	—
6	109 »	13.8 »	3.7 »	393 »	397 »	323.6 »	325	337	341.5

Remarquons, d'abord, que les colonnes liquides de résonance, telles que nous les obtenons dans nos expériences, se comportent comme des colonnes d'air contenues dans des tuyaux *ouverts aux deux bouts*. En vérité, l'extrémité inférieure de la colonne liquide étant en contact avec la masse liquide contenue dans le vase, où se propage le mouvement vibrant, a, au moment de la résonance, une amplitude de vibration maximum; d'un autre côté, son extrémité supérieure étant à la surface du liquide, est toujours en contact avec l'air extérieur et, en ce point, l'onde sonore de la colonne, en passant d'un milieu plus dense dans un autre moins dense—l'air—

[1]) Si v et v' représentent les vitesses du son dans l'air à la température de t et t' degrés et si n est les nombre de vibrations de ce son, nous avons alors les longueurs d'onde respectives $\lambda=\frac{v}{n}$, $\lambda'=\frac{v'}{n}$, d'où l'on tire $\lambda' = \lambda\,\frac{v'}{v}$, ce qui montre qu'on déduit λ' à la température t', en multipliant λ par le rapport des vitesses du son correspondant aux température t' et t.

éprouve *une réflexion sans changement de signe* et acquiert ainsi une amplitude aussi maximum. Au moment de la résonance, la colonne liquide vibre donc comme une colonne d'air dans un tuyau sonore ouvert aux deux bouts et, par conséquent, sa longueur rectifiée est égale à un nombre entier de $\frac{\lambda}{2}$ du son dans cette *colonne liquide*. La reproduction successive des résonances s'obtient, de même que dans l'air, par l'augmentation succesive de la longueur de la colonne d'une quantité égale à ce $\frac{\lambda}{2}$ du son respectif. Il s'ensuit que la distance entre deux positions *successives* de résonance de cette colonne sera égale à un $\frac{\lambda}{2}$ du son renforcé. Nous appellerons cette distance «colonne de résonance *le long du tube*«, ou bien *demi-longueur d'onde du son dans cette colonne liquide*, et nous la désignons dans nos expériences par $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_{la_5}$, en indiquant par là que le son employé est rapproché du son *La* de la 5^e gamme. Cette longueur ne diffère pas beaucoup de celle de la »colonne de résonance de *l'extrémité du tube*«; cette dernière colonne pourrait représenter aussi la longueur $\frac{\lambda}{2}$, mais modifiée un peu, à cause des perturbations que subit l'onde aux extrémités. La différence entre ces deux colonnes de résonance—le *long du tube* et à son *extrémité* – constitue la correction nécessaire à la *première* colonne de résonance dans le tube pour obtenir la valeur exacte de $\frac{\lambda}{2}$ du son considéré.

De notre dernier tableau on constate que: 1) Les résonances dans les colonnes liquides se *reproduisent* effectivement le long de la colonne. 2) La distance entre la prèmiere et la seconde résonance est, généralement, un peu *plus grande* que la distance de l'extrémité du tuyau à la première résonance, ce qu'on avait observé aussi à la résonance des colonnes d'air. L'intervalle entre deux résonances successives le long du tube ne diffère que très peu de la colonne de résonance de l'extrémité du tube, ce qui prouve que la perturbation aux extrémités de cette colonne n'est pas trop grande dans le liquide. Dans les expériences qui vont suivre, on verra que tous les intervalles entre deux résonances successives, qui se manifestent le long du tube, sont égaux entre eux, comme étant égaux, d'après ce qu'on vient de dire, à $\frac{\lambda}{2}$ du son dans la colonne respective. 3) La colonne de résonance varie avec *la nature du* *liquide* dans un même tuyau; ainsi, pour la benzine elle est moindre que pour l'alcool ordinaire et pour ce dernier liquide, moindre que pour l'eau. 4) La grandeur de la colonne de résonance, c'est-à-dire la longueur de $\frac{\lambda}{2}$ pour un liquide donné, dépend, comme on l'à déjà remarqué, de la substance du tube, dans lequel se forme cette colonne et, pour la même substance, cette grandeur dépend du diamètre et de l'épaisseur des parois du tube, comme on le voit dans notre tableau, soit pour les tuyaux No. 2 et 4, qui ont, à la fois, des dimensions différentes pour leurs sections et des valeurs différentes pour leurs colonnes de résonance, soit pour les tuyaux No. 3 et 4, qui ont presque les mêmes dimensions pour leurs sections et auxquels correspondent aussi des colonnes de résonance qui diffèrent peu entre elles. 5) La longueur du tuyau ne parait avoir aucune influence sur la longueur de la colonne de résonance. 6) Enfin, *la vitesse du son dans une colonne liquide*, calculée d'après la longueur d'onde du son dans cette colonne, diffère selon le tuyau de l'expérience.

En nous réservant, de mettre en évidence, dans ce qui va suivre, les avantages que présente cette méthode, par rapport aux méthodes déjà connues, pour la détermination de la *longueur d'onde dans une colonne liquide*, correspondant à un son déterminé, nous pouvons conclure, pour le moment, qu'il reste indubitablement établi que *tous* les *liquides peuvent résonner*, de même que les gaz et les solides, par leur *propre résonance* et que la demi-longueur d'onde du son correspondant à cette résonance peut être mesurée avec précision. C'est ce que nous voulions prouver par ces expériences préliminaires.

Expériences de précision.

Dispositif expérimental.

27. Après avoir montré, par les expériences précédentes, la possibilité de la résonance libre des liquides dans des colonnes cylindriques, faisons à présent une étude systématique de cette résonance et mesurons avec précision les colonnes de résonance, qui se présentent dans différents cas.

Pour cela, nous adopterons un dispositif expérimental plus commode que le précédent, et qui, tout en étant plus propre aux observations des colonnes de résonance d'un liquide, nécessite, en même temps, une petite quantité de ce liquide. Dans ce but nons modifierons aussi bien la source sonore, que la manière de former les colonnes liquides soumises aux vibrations.

Source sonore. Remarquons, dès le début, qu'il nous faut des sons très aigus, si nous voulons reproduire plusieurs fois une colonne de résonance le long d'un tube. D'autre part, la longueur des tuyaux solides ne doit pas être trop grande, car cela serait incommode pour les observations; les tuyaux dont la longueur dépasse 1 $^{m.}$,50, ou 2 $^{m.}$, deviennent peu pratiques.

Considérons les sons Sol et Ré de la 5^{e} gamme et le La de la 4^{e} gamme. Leur demi-longueur d'onde *dans l'air* à la température *ordinaire* de 15^{0} est, approximativement :

$$\frac{\lambda}{2} = 110^{mm.} \text{ pour } Sol_5$$

$$\frac{\lambda}{2} = 147^{mm.} \quad \text{»} \quad Ré_5$$

$$\frac{\lambda}{2} = 195^{mm.} \quad \text{»} \quad La_4$$

Si l'on considère le rapport de la vitesse du son dans l'eau, prise dans la masse illimitée, à la vitesse dans l'air à la même température, donné par :

$$\frac{V_{eau}}{V_{air}} = \frac{1466}{340} = 4,29$$

on trouve pour la demi-longueur d'onde des mêmes sons, *dans l'eau*, en sachant que les longueurs d'onde pour le même son sont proportionnelles aux vitesses de propagation du son dans ces deux milieux :

$$\frac{\lambda}{2} = 472^{mm.} \text{ pour } Sol_5$$

$$\frac{\lambda}{2} = 631^{mm.} \quad \text{»} \quad Ré_5$$

$$\frac{\lambda}{2} = 837^{mm.} \quad \text{»} \quad La_4.$$

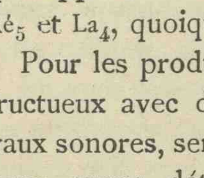
Supposons qu'on produit avec ces sons des colonnes de résonance dans l'eau, dans un tuyau long de $1^{m.},50$. Si l'on admettait que la longueur de la colonne de résonance dans ce tuyau est égale à $\frac{\lambda}{2}$ du son dans la masse liquide illimitée — ce qui n'est qu'approximativement vrai — on verrait que dans ce *tuyau de $1^{m.},50$* :

La colonne de résonance de La_4 peut être contenue une seule fois.
» » » » » $Ré_5$ » » » deux fois.
» » » » » Sol_5 » » » trois »

Pour un autre tuyau, plus long, les mêmes résonances peuvent, bien entendu, se reproduire un nombre de fois encore plus grand.

Nous avons justement choisi, pour nos expériences, des sons qui approchent les précédents. Nous les désignerons par Sol_5, $Ré_5$ et La_4, quoiqu'en réalité ils en diffèrent un peu.

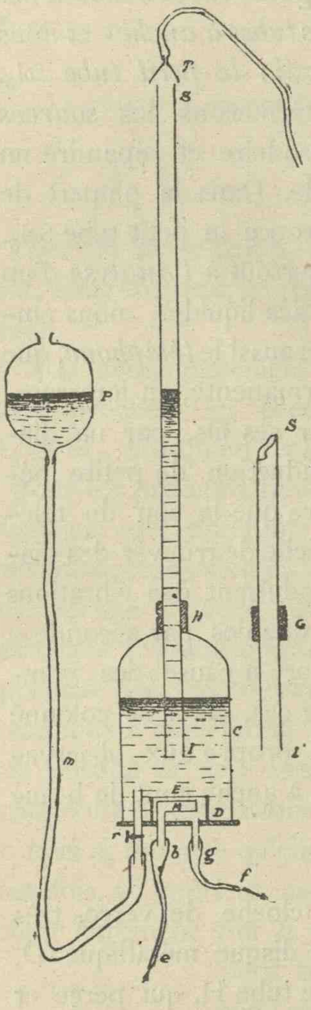
Pour les produire, nous avons construit—après maints essais infructueux avec différents instruments de musique—de petits tuyaux sonores, semblabes aux tubes à anche, de la manière suivante : nous avons détaché de l'instrument de musique, appelé vulgairement l'»harmonica«, la languette métallique dont le son approche Sol_5, en coupant pour cela une petite portion de la lame métallique à laquelle est fixée cette languette ; nous avons introduit ensuite et fixé cette portion portant la languette dans une échancrure de dimensions convenables, faite dans un petit prisme en bois *d*, de sorte qu'elle en ferme complètement le trou, laissant toutefois, à l'intérieur, assez de place à la languette *a* pour pouvoir vibrer librement. Sur la face opposée à la languette est fixé un petit tube métallique b, qui communique d'un côté avec l'échancrure de prisme et de l'autre avec l'extérieur. En soufflant dans ce tube, l'air s'amasse dans le trou et, en sortant, il fait vibrer la languette, qui produit un son aigu et faible, d'un timbre métallique agréable.



On construit, de la même manière, deux autres petits tuyaux avec deux autres languettes détachées de l'»harmonica« et qui produisent des sons rapprochés de $Ré_5$ et de La_4. A l'aide d'une soufflerie, qui communique avec *b* par un tube en caoutchouc, nous faisons vibrer la languette *a* et nous obtenons des sons continus et délicats, dont on peut déterminer avec précision le nombre de vibrations. Nous appellerons ces petits tubes sonores des »petites *clarinettes*«, ou mieux, des »*petits tubes à anche*« et nous les désignerons d'après leur son respectif: *le petit tube* Sol_5, Re_5 et La_4. Ces petits tubes à anche formerons les ***sources sonores***, dont nous nous servirons pour produire et répandre un mouvement vibrant dans une masse liquide. Dans la plupart de nos expériences il sera employé de préférence le petit tube Sol_5.

Dans quelques expériences, destinées surtout à ***l'analyse*** d'un son complexe par la voie de la résonance des liquides, nous emploierons quelquefois comme source sonore aussi le ***téléphone***, que nous maintiendrons dans une vibration permanente, en interrompant le courant électrique, qui passe par ses fils, par un diapason, ou un trembleur d'une bobine d'induction de petite période. Pour nos expériences il est nécessaire que le son du téléphone soit très haut. Mais, puisqu'il est difficile de trouver des diapasons, entretenus électriquement, qui produisent des vibrations très rapides – au moins 1000 vibrations doubles par seconde – afin de faire vibrer un téléphone, et encore à cause des nombreuses résonances qu'on entend dans ce cas, dans la colonne liquide, le téléphone n'est pas tout-à-fait propre aux observations de précision. Les petits tubes sonores à anche sont de beaucoup préférables.

Vase qui contient le liquide. Prenons une cloche de verre, très épaisse C et posons-la par sa base sur un disque métallique D, recouvert d'une rondelle de caoutchouc. Le tube H, qui perce et surmonte cette cloche, est ouvert et pourvu d'une garniture métallique à laquelle on peut visser, à l'aide d'une garniture pareille, un tuyau ouvert aux deux bouts. Un col métallique, qui est placé sur la base supérieure de ce tube H, est pourvu de trois bras, auxquels sont attachées trois tiges verticales, dont on visse les extrémités d'en bas au disque inférieur D. A l'aide de ce système métallique la cloche est fortement pressée contre le disque inférieur, fixé à son tour à un support solide. Il y a au milieu du disque inférieur D une grande ouverture carrée, au-dessus et sur les bords de laquelle on place une boîte E en ébonite, ouverte à la partie inférieure, et qu'on visse à ce disque. A l'intérieur de cette boîte on placera la *source sonore* A — un des petits tuyaux à anche, dont on a parlé plus haut. Elle est soutenue, à sa partie inférieure, par une petite plaque fixée au disque métallique D. Cette plaque est percée par deux petits tubes : le tube *b* du tuyau sonore, qui communique avec une soufflerie, par le tube de caoutchouc *e*, et le tube métallique *g*, qui fait communiquer l'air intérieur dela boîte E avec l'extérieur, par le tube en caoutchouc gf. Sous cette même boîte d'ébonite on place aussi le téléphone, lorsqu'on emploie cet appareil comme source sonore. Le disque inférieur D est encore percé en un certain point, en dehors des bords de la boîte en ébonite, par un petit tube métallique *r*, qui fait communiquer l'intérieur de la cloche C avec l'extérieur. Un long tube de caoutchouc *m* met en communication ce petit tube *r* avec un vase transportable P, contenant de l'eau. De cette manière, le liquide contenu dans ce vase extérieur peut pénétrer sous la cloche C et, de là, dans le tuyau ouvert aux deux bouts SI, vissé à la cloche par sa partie inférieure.



Tuyaux pour former les colonnes liquides. Pour former les colonnes liquides de résonance, nous nous servirons dans nos expériences de tubes *en verre* et de tubes *en fer*, à côté des tubes en terre cuite, employés dans les expériences précédentes.

La longueur ordinaire de ces tuyaux est de $1{,}50^{m}$; pourtant, on employera quelquefois des tuyaux de 2^{m} à $2{,}50^{m}$ de longueur. Les dimensions des sections de ces tuyaux sont très variées. On fixe chaque tuyau au col H de la cloche, à l'aide d'une garniture métallique mobile, qui ferme hermétiquement la cloche et qu'on peut faire passer d'un tuyau à l'autre. Le tuyau a à l'intérieur de la cloche une position telle que son extrémité inférieure soit distante de 3 à $4^{mm.}$ au-dessus de la boîte d'ébonite. Pendant l'expérience, chaque tuyau de résonance est pourvu d'un petit entonnoir T, fixé à son extrémité supérieure. La partie effilée de cet entonnoir communique avec l'oreille de l'observateur par un tube en caoutchouc, qui sert à transmettre les sons faibles, qui se manifestent durant l'expérience à l'intérieur du tuyau SI.

Le vase extérieur P, qui contient le liquide, est transportable et il peut être déplacé de haut en bas et réciproquement.

Manière d'Opérer.

28. La manière d'opérer avec ce dispositif ressort de sa description même. On remplit le vase P d'eau, ou d'un autre liquide, qui pénètre, par le tube de communication *mr*, à l'intérieur de la cloche C, où il se maintient à un niveau inférieur, à cause de la pression intérieure de l'air, qui, ne pouvant sortir dehors — car la fermeture est hermétique —, se trouve comprimé entre la surface du liquide et la paroi supérieure de la cloche. Le liquide enfermé sous la cloche pénètre aussi dans le tube fixe SI et s'y élève, en vertu du principe des vases communiquants, au même niveau que dans le vase P.

À l'aide d'une soufflerie on fait vibrer le petit tube sonore, qui se trouve sous la boîte d'ébonite E. L'air comprimé à l'intérieur de cette boîte sort, en vibrant, par le tube en caoutchouc gf. Ses vibrations se transmettent, en même temps, par les parois de la boîte, au liquide contenu sous la cloche et à l'intérieur du tube SI. On réalise, de la sorte, un mouvement ***vibratoire*** dans une masse liquide. La colonne liquide du tube représente une partie de cette masse. La hauteur de cette colonne varie avec la position du vase extérieur P. Si on lève, ou baisse, ce vase, on fait varier la longueur de la colonne. En relevant petit à petit le vase P, la colonne liquide du tube SI se met aussi à monter graduellement. Si l'on écoute avec le tube en caoutchouc de l'entonnoir T, l'on entend des renforcements du son, qui se reproduisent le long du tube. Les uns sont dûs — comme on le sait — à la résonance de l'air du tube, les autres à la résonance du liquide, qui s'élève dans le tube.

Dans les expériences qu'on fait avec ce dispositif, on remarque que les résonances de la colonne *d'air* sont, généralement, de beaucoup plus faibles, que celles qui sont produites par la colonne *liquide*. Cela tient, probablement, à ce que la surface de contact entre le tube en verre et le liquide du vase est plus petite avec le dispositif actuel qu'avec le précédent; le tube en verre reçoit, dans ce cas, un nombre plus réduit de vibrations et, par suite, il transmet à la colonne d'air de son intérieur, au moment de la résonance, aussi un nombre plus restreint d'impulsions, c'est-à-dire une moindre quantité de force vive. D'autre part, la boîte, qui contient la source sonore, présente aussi, maintenant, une plus petite surface de contact avec le liquide, que par le dispositif précédent, lorsque cette source y était complètement plongée, ce qui produit encore une certaine diminution dans l'énergie vibratoire communiquée à la masse liquide et au tube en verre. Quant à la résonance du *liquide* il est à remarquer, que, grâce aux vibrations de la languette de notre petit tube sonore, — vibrations qui se font de bas en haut — la colonne liquide reçoit des impulsions parallèles à son axe longitudinal et ces impulsions peuvent alors se composer, au moment de la résonance, en une résultante plus intense. Il s'ensuit que cette colonne *liquide* peut à son tour transmettre des impulsions plus fortes aux parois du tube, qui peut ainsi produire, par l'intermédiaire de l'air de son intérieur, une sensation auditive plus forte, et cela d'autant plus que la partie de ce tube en verre, qui sort de la cloche, étant maintant en contact seulement avec l'atmosphère du dehors, ne reçoit plus sur son côté extérieur, pendant que la colonne liquide monte à l'intèrieur, aucune impulsion vibratoire du dehors, qui serait de sens opposé à celle qui vient de la part du liquide, et qui pourrait ainsi contrecarrer l'effet des vibrations intérieures, comme cela arrive avec le dispositif précédent.

Quel que soit le mécanisme de la formation de ces résonances dans le liquide, on constate que, grâce à leur caractère plus vivace et plus vitreux, on peut toujours les reconnaître et les suivre, sans les confondre, tout le long du tube. Pour déterminer l'endroit où elles se forment, nous marquerons sur le tube, durant l'expérience, d'un fin trait de crayon, ou de craie bien aiguisée, le niveau du liquide intérieur du tube, aussi bien pour le premier renforcement, que pour les suivants, si la hauteur du son de notre source sonore et la longueur du tube solide, qui contient le liquide, permettent leur reproduction. Si, maintenant, nous faisons descendre la colonne liquide de haut en bas, ces renforcements se reproduisent de nouveau aux mêmes endroits. L'erreur, qu'on peut commettre dans la détermination de ces positions de résonance, dans une expérience soignée, ne peut dépasser un millimètre. Si, à présent, on dévisse le tube et l'on mesure, en millimètres, la distance entre deux traits succesifs, on obtient la longueur de la colonne de résonance, tant à l'extrémité, que le long du tube. La valeur de cette dernière représente – d'après ce qui précède – la demi-longueur d'onde $\frac{\lambda}{2}$ du son *dans la colonne liquide du tuyau considéré.* Puisque, comme on vient de le dire, l'erreur commise en marquant les positions de résonance ne peut dépasser 1 mm., nous obtenons la longueur d'onde dans la colonne liquide avec une précision, que nulle autre méthode antérieure, employée pour cette même détermination, n'avait encore atteinte [1]).

Toutes les expériences qui vont suivre pour la détermination des colonnes de résonance dans les liquides, c'est-à-dire de la longueur d'onde dans de telles colonnes, ne seront effectuées qu'avec *ce dispositif* et suivant ce dernier procédé.

Il est à remarquer que, dans le dispositif des expériences précédentes, le vase contenant le liquide était fixe et le tube explorateur, qui déterminait les colonnes liquides, était mobile, tandis qu'avec le dispositif actuel c'est le vase P contenant le liquide qui est mobile et

---

[1]) On a bien vu les nombreuses corrections que Wertheim était obligé de faire à ses tuyaux sonores pour trouver le $\frac{\lambda}{2}$ des colonnes liquides de ses expériences et combien peu il a réussi dans ses essais. De même, quiconque a fait des expériences pour déterminer la longueur d'onde dans l'air, d'après la méthode de Kundt, sait de quelle approximation on doit user pour fixer les noeuds à l'aide des «figures de poudre». Il doit être d'autant plus difficile de fixer ces noeuds dans des colonnes liquides.

le tube, où se forment les colonnes de résonance, fixe. Les avantages du dernier dispositif sur le premier peuvent être promptement distingués : tout d'abord, on peut, sans aucun inconvénient, employer, pour les colonnes liquides, des tuyaux de toute longueur, en les fixant étroitement à la cloche et, par conséquent, on peut obtenir un plus grand nombre de colonnes de résonance, ce qu'on n'aurait pu faire par le dispositif précédent ; ensuite, on peut, d'un côté, utiliser une quantité de liquide très petite, et, d'un autre, avoir pour ce liquide une surface de contact avec l'air extérieur qui soit très réduite — égale à la section intérieure du tube — ce qui constitue un avantage appréciable surtout dans les expériences avec des liquides rares, ou avec des liquides qui dégagent des vapeurs nuisibles ; enfin, par le sens des vibrations, qui s'éffectuent dans la colonne liquide parallèlement à l'axe du tube, on peut, comme on l'a déjà fait remarquer, obtenir des résonances bien plus intenses dans une pareille colonne [1]).

Colonnes de résonance dans divers liquides, observées dans les mêmes tuyaux.

Citons à présent le résultat de quelques expériences faites avec les mêmes tubes, d'après ce dernier dispositif, mais dans des colonnes de différents liquides : *de l'eau distillée, alcool absolu, pétrole et mercure*, expériences dans lesquelles apparaissent, le long du tube, trois colonnes de résonance, qu'on peut mesurer avec beaucoup de précision.

Nous nous servirons pour cela de plusieurs tubes en verre de même provenance et de même longueur, mais ayant des rayons intérieurs et extérieurs différents. Les expériences seront faites avec la même source sonore Sol_5, et seront toutes effectuées, ou réduites, à la température de $21^0, 5$.

[1]) Si l'on supposait que dans notre premier dispositif expérimental, le vase, contenant le liquide et la source sonore, monte, tandis que le tube de verre attaché au cathétomètre reste fixe, alors on constaterait que la colonne vibrante, qui pénètre dans le tube, augmente et produit des résonances successives. C'est justement ce résultat qu'on a obtenu à l'aide du dispositif actuel. Quoique les avantages de ce dernier lui assure une préférence incontestable, pourtant c'est au premier que revient le mérite de nous avoir indiqué le moyen intuitif de prouver expérimentalement, et pour la première fois, *la résonance libre des liquides.*

Voici leurs résultats.

No.	Dimens. des tuyaux			Résonances dans *l'eau distillée*				Résonance dans *l'alcool absolu*			
	Longueur du tuyau	Diam. intér. du tuyau	Épais. de la paroi	De l'extr. infér. à la I réson.	De la I—II réson.	De la II—III réson.	Moyenne des colon. de réson. de la I—III réson.	De l'extr. infér. à la I réson.	De la I—II réson.	De la II—III réson.	Moyenne des colon. de réson. de la I—III résonance.
		mm.		mm.	$\frac{\lambda}{2}$ = mm	$\frac{\lambda}{2}$ = mm.	$\frac{\lambda}{2}$ = mm.	mm	$\frac{\lambda}{2}$ = mm	$\frac{\lambda}{2}$ = mm.	$\frac{\lambda}{2}$ = mm.
1	1.50m.	20.8	3.6	424	426	424.6	425.3	358	361	359.5	360.2
2	» »	17.9	5.0	438	440	438.2	439.1	361	366,4	365.2	365.8
3	» »	14.4	3.7	436	438	438	438.0	362	365	364.2	364.6

No.	Dimens. des tuyaux			Réson. dans *le pétrole* (de Buştenari)				Résonance dans *le mercure*			
	Longueur du tuyau	Diam. intér. du tuyau	Épais. de la paroi	De l'extrém. infér. jusqu'à la I réson.	De la I—II réson.	De la II—III réson.	Moyenne des colon. de réson de la I—III réson.	De l'extr. infér. jusqu'à la I réson.	De la I — II réson.	De la II — III réson.	Moyenne des colon. de réson. de la I—III résonance.
		mm.		mm.	$\frac{\lambda}{2}$ = mm	$\frac{\lambda}{2}$ = mm.	$\frac{\lambda}{2}$ = mm		$\frac{\lambda}{2}$ = mm.	$\frac{\lambda}{2}$ = mm.	$\frac{\lambda}{2}$ = mm
1	1.50m.	20.8	3.6	405	409.7	408.7	409.2	227	233	231	232
2	» »	17.9	5.0	416	420.8	418.8	419.8	251	258	256.4	257.2
3	» »	14.4	3.7	416	417.8	418.2	418.0	248	252	254	253

De ces tableaux on voit, que des trois colonnes obtenues avec chaque liquide dans les différents tubes, celle de l'extrémité du tube est toujours un peu plus petite que celle qui est produite le long du tube. Il y a donc, toujours, de petites perturbations qui se produisent à l'extrémité de la colonne de résonance — de même que dans l'air — et qui altèrent un peu la valeur de $\frac{\lambda}{2}$, correspondant à la colonne de cette première résonance. On voit encore que les colonnes, le long du tube, à partir de la I$^{\text{ère}}$ à la III-$^{\text{ème}}$ résonance diffèrent très peu entre elles, de sorte qu'on peut les considérer presque égales pour chaque tuyau et leurs valeurs moyennes, indiquées dans la colonne verticale respective représentent le $\frac{\lambda}{2}$ (la moitié de la longueur d'onde) du liquide considéré, pour le son de notre source et pour le tuyau de l'expérience. La ***valeur*** que nous attribuerons dorénavant à $\frac{\lambda}{2}$ de chaque colonne liquide ne sera que *la moyenne des colonnes de résonance le long du tube*, à partir de la première résonance, la première colonne de l'extrémité étant exclue de cette moyenne, à cause des perturbations de l'onde vibratoire en cet endroit. On verra dans ce qui va suivre, que les différences entre ces colonnes de résonance, le long du tube, proviennent surtout des inégalités du diamètre intérieur et de l'épaisseur de la paroi du tuyau respectif.

Si l'influence de l'inégalité des dimensions du tube introduit des différences appréciables dans la valeur de $\frac{\lambda}{2}$ d'une colonne, la nature du liquide en introduit d'autres plus fortes, c'est ce que l'on voit plus clairement dans le tableau comparatif suivant, où l'on a inscrit les *valeurs moyennes* des longueurs d'onde des quatre liquides précédents soumis à l'expérience.

No. du tube	Longueur du tuyau	Diamètre intérieur du tuyau	Epaisseur de la paroi	Eau distillée	Alcool absolu	Pétrole	Mercure
	m	mm	mm	$\frac{\lambda}{2}$ = mm	$\frac{\lambda}{2}$ = mm	$\frac{\lambda}{2}$ = mm	$\frac{\lambda}{2}$ = mm
1	1.50	2.08	3.6	425.3	360.2	409.2	232
2	»	1.79	5.0	439.1	365.8	419.8	257.2
3	»	1.44	3.7	438.0	364.6	418	253

On y voit que la longueur d'onde la plus grande, dans chaque tube, est celle de l'eau distillée, et la plus petite celle du mercure, dont la valeur dépasse à peine la moitié de celle de l'eau. La longueur d'onde du mercure est la plus petite de toutes celles, que nous avons rencontrées jusqu'à présent dans nos expériences.

Avantages de notre méthode.

30. Les avantages que présentent notre méthode et notre dispositif expérimental sur toutes les méthodes appliquées jusqu'à présent, pour la détermination de la *longueur d'onde* d'un son dans une colonne liquide, ressortent, avec assez d'évidence, des expériences déjà décrites, malgré leur nombre restreint, : 1) On peut déterminer toujours cette *longueur d'onde* dans un liquide, en

mesurant la *colonne de résonance* le long du tube. L'opération s'accomplit avec une *facilité* remarquable, qu'on ne rencontre dans aucune des méthodes antérieures, et avec une *précision* d'autant plus grande que l'on considère un plus grand nombre de résonances le long du tube, ce qui est toujours possible. Dans nos expériences ultérieures, on verra, que ces colonnes de résonance se reproduisent avec des longueurs toujours égales, lorsque le diamètre et l'épaisseur des parois sont uniformes tout le long du tube. 2) Si l'on élimine dans ces expériences la *première* colonne de résonance de l'extrémité du tube, ce qu'on aura toujours soin de faire, on n'a plus besoin *d'aucune correction* pour rectifier la valeur de $\frac{\lambda}{2}$. Les perturbations produites, soit par les pressions, soit par les frottements et qui se rencontrent dans les méthodes antérieures, sont évitées chez nous. 3) Nous pouvons déterminer la longueur d'onde dans *tout liquide*, quelle que soit sa nature, ce que n'avaient pu réaliser ni Wertheim, ni Kundt et Lehmann, puisque nous pouvons toujours trouver des tubes, qui puissent renfermer, sans être altérés, des colonnes de ces liquides. Ainsi, nous avons déterminé la longueur d'onde dans des colonnes liquides bien différentes entre elles, et même dans du mercure, ce qu'on n'avait même pas pu essayer par les méthodes appliquées jusqu'à nos jours. 4) Nous pouvons expérimenter avec des tubes faits *de différentes substances*, de verre ou de métal, opaques ou transparents, et nous pouvons, de la sorte, observer l'influence de leur nature sur la longueur d'onde de la colonne. Nous pouvons aussi varier *les dimensions* des tuyaux de même substance, pour voir les modifications, qui en résultent, pour les colonnes de résonance. Ce n'est qu'en réalisant la possibilité d'étudier séparément l'influence de chacun de ces facteurs sur la colonne de résonance, qu'on peut espérer établir, avec plus de chances d'exactitude, une relation entre la longueur d'onde dans une colonne et celle dans une masse liquide illimitée, pour le même son donné, et, par conséquent, une relation entre les vitesses du son dans ces deux états différents du liquide. 5) Nous verrons, enfin, que dans une colonne liquide vibrante on entend, par résonance, encore d'autres sons contenus dans le son fondamental de la source sonore—ce qui prouve que cette colonne *analyse un son complexe*. C'est là encore un nouveau mérite à reconnaître à notre méthode.

Pour l'étude de la vitesse de propagation du son dans les liquides, il *n'existe pas*, jusqu'à présent, une *autre méthode plus simple et plus féconde* que celle que nous venons d'exposer.

Nous allons maintenant procéder à des mesures systématiques pour les colonnes de résonance dans différents liquides et avec différents tuyaux. Nous commencerons par des mesures dans l'eau distillée et nous continuerons ces mesures dans des solutions salines et dans d'autres liquides, comme l'alcool absolu, l'éther sulfurique, la solution ammoniacale, le mercure, etc.

Mais ces déterminations seront d'abord précédées de quelques indications concernant premièrement le nombre des vibrations de nos sources sonores Sol_5, $Ré_5$ et La_4, et ensuite la propriété des colonnes liquides d'analyser un son complexe.

Détermination du nombre des vibrations de nos petits tubes sonores Sol_5, $Ré_5$, La_4

31. Nous déterminerons le nombre des vibrations d'une de nos sources sonores de deux manières différentes: *a)* par la résonance dans l'air et *b)* à l'aide du sonomètre.

a) *Nombre des vibrations obtenu par la résonance de l'air.* Nous employons pour cette détermination un procédé analogue à celui dont nous nous sommes servi pour déterminer les colonnes de résonance dans l'air et dont il a été question à la page 103.

Nous déterminons ces colonues à l'aide de notre dispositif actuel. Nous ôtons le petit tube sonore de la boîte d'ébonite et nous le faisons vibrer dans l'air libre, auprès de l'extrémité supérieure du tube SI de notre appareil. Au moyen du vase mobile P nous faisons monter le liquide dans ce tube, en limitant ainsi entre la surface du liquide et l'extrémité du tube des colonnes d'air de longueurs variables. En faisant ensuite descendre graduellement la colonne liquide de l'extrémité supérieure du tube, nous entenderons des renforcements successifs du son, renforcements dont nous marquons les positions sur le tube et nous en déduisons la longueur l de la colonne de résonance dans l'air, le long du tube, c'est-à-dire le $\frac{\lambda}{2}$ du son de notre source sonore dans *l'air du tube.*

Si nous représentons par U la vitesse de propagation du son dans la colonne d'air du tube et par n le nombre des vibrations de la source sonore, nous avons :

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{U}{2n}$$

d'où l'on déduit :

$$n = \frac{U}{2l} \qquad (1)$$

Si l'expérience a lieu à la température de t^0 et que l'on tient compte de l'humidité de l'air, nous aurons, comme on le sait, en désignant par U_0 la vitesse du son dans l'air sec du tube et à O^0 de température :

$$U = U_0(1+\alpha t)^{\frac{1}{2}}\left(1 + 0{,}19\frac{f}{H}\right) \qquad (2)$$

où $\alpha = 0{,}00366$ est le coefficient de dilatation de l'air, f la tension de la vapeur à la température t et H la pression atmosphérique au moment de l'expérience.

Mais la vitesse U_0 dans un *tube* est généralement quelque peu inférieure à la vitesse V_0 à la température o^0 dans *l'air libre,* si le diamètre du tube est plus petit que le quart de la longueur d'onde du son considéré [1]), de sorte que, si ε est la différence entre les deux vitesses, on a :

$$U_0 = V_0 - \varepsilon$$

et donc

$$U = (V_0 - \varepsilon)(1+\alpha t)^{\frac{1}{2}}\left(1 + 0{,}19\frac{f}{H}\right) \qquad (3)$$

En calculant U à l'aide de cette formule et en substituant la valeur trouvée dans la formule (1), où l'on connaît déjà, par l'expérience précédente, la longueur de la colonne de résonance l, on obtient le nombre cherché n des vibrations de notre source sonore.

---

[1]) Voir J. VIOLLE. Acoustique ; page 161, an. 1892.

La valeur de l'écart ε n'est pas commode à trouver, quand on ne connaît pas le nombre des vibration du son considéré, comme c'est notre cas. Nous l'avons déduit par une série de discussions, ayant à la base les expériences de Kundt, faites dans le but de voir, si la formule de Helmholz relative à la diminution de la vitesse du son dans des tuyaux étroits [1]) est, ou non, vérifiée, et nous l'avons trouvé, pour nos sources sonores et pour un tube de diamètre intérieur égal à 30,9 mm., qui a servi à nos expériences de résonance dans l'air:

$\varepsilon = 0^{mm},48$ pour le petit tube sonore Sol_5

$\varepsilon = 0^{mm},56$ » » » » » $Ré_5$

$\varepsilon = 0^{mm},65$ » » » » » La_4 [2])

Nous avons calculé la tension f de la vapeur dans l'air vibrant à l'intérieur du tuyau de résonance d'après la formule employée en Météorologie:

$$f = f' - 0{,}00079\ H\,(t - t') \qquad (t' > 0) \tag{4}$$

où f' représente la tension de la vapeur d'eau exprimée en millimètres de mercure, à la température t', donnée par un thermomètre *humide* (thermomètre ayant son réservoir recouvert d'une toile mouillée et qui garde un état stationnaire, lorsque la tension de la vapeur du liquide devient égale à celle de la vapeur de l'atmosphère ambiante), t la température de l'air, donnée par un thermomètre ordinaire et H la préssion barométrique exprimée en millimètres de mercure.

Nous avons ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer

---

[1]) Pour la vitesse U d'un son dans un tuyau de diamètre $2\,R$, Helmholz indique la formule :

$$U = V - \frac{\eta}{2R}\sqrt{\frac{\lambda V}{\pi}},$$

où V représente la vitesse dans l'air libre, λ la longueur d'onde du son, et η un coefficient constant. (Voir VIOLLE, Acoustique page 68).

La vérification de l'exactitude de cette formule a donné lieu à de nombreuses recherches avec résultats contradictoires.

[2]) Pour un tuyau de diamètre intérieur égal à 22 mm et pour les mêmes petits tubes sonores on a trouvé :

$\varepsilon = 0{,}68$ mm pour Sol_5

$\varepsilon = 0{,}79$ mm » $Ré_5$

$\varepsilon = 0{,}91$ mm » La_4

la vitesse U de (3), où l'on prend, d'après Regnault, $V_0 = 333{,}6^m$, et, par conséquent, pour déterminer aussi le nombre de vibrations n.

— Citons un exemple d'une pareille détermination, faite à l'aide d'un tube de résonance de diamètre intérieur égal à $30{,}9^{mm}$ et dans lequel les longueurs d'onde de nos petits tubes sonores, données par l'observation, étaient :

pour le petit tube sonore Sol_5 $l = 110{,}18$ (la moyenne de 5 colon. de résonance)
" " " " " $Ré_5$ $l = 148{,}8$ (" " 4 " " ")
" " " " " La_4 $l = 199{,}18$ (" " 3 " " ")
quand la température du thermomètre sec était $t = 20^0{,}7$
et " " " " " humide " $t' = 20^0$ (l'air du tube était presque saturé par le contact avec la surface du liquide et avec les parois humides du tube), et la pression barométrique $H = 761^{mm}$. À l'aide de ces données on trouve, pour le petit tube sonore Sol_5 — en remarquant que les tables des tensions donnent : $f' = 17{,}4^{mm}$, d'où il résulte d'après (4), $f = 17{,}0^{mm}$ —

d'abord
$$1 + 0.19\frac{f}{H} = 1{,}00427$$
et ensuite
$$V_0 - \varepsilon = 330{,}6^m - 0{,}48^m = 330{,}12^m$$
et
$$(1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}} = (1 + 0{,}00366 \times 20{,}7)^{\frac{1}{2}} = 1{,}037$$
quand
$$U = 330{,}12 \times 1{,}037 \times 1{,}00427 = 343{,}796^m$$

On trouve aussi pour les sons $Ré_5$ et La_4, en tenant compte des écarts ε correspondant à ces sons :

$$U = 343{,}7129$$
$$U = 343{,}6192$$

Avec ces valeurs pour la vitesse du son dans l'air vibrant de notre tube on obtient, en considérant pour chaque petit tube sonore la colonne de résonance respective indiquée plus haut :

$n = \dfrac{V}{2l} = \dfrac{343{,}796}{2 \times 110{,}18} = 1560{,}1$ vibr. comp. pour le petit tube sonore Sol_5

$n = \dfrac{V}{2l} = \dfrac{343{,}7129}{2 \times 148{,}8} = 1154{,}95$ " " " " " " " $Ré_5$

$n = \dfrac{V}{2l} = \dfrac{343{,}6192}{2 \times 199{,}18} = 862{,}58$ " " " " " " " La_4

Afin de déterminer de la manière la plus précise possible les vibrations de ces petits tubes sonores à anche, ainsi que s'assurer si le nombre de ces vibrations varie, ou non, avec le temps, on a fait des déterminations analogues, avec plusieurs tuyaux de résonance, à des époques et à des températures différentes. La valeur moyenne de toutes ces déterminations, prises vers la température de 21^0, coïncide presque avec les nombres indiqués plus haut pour touts nos petits tubes sonores.

On a remarqué, pourtant, une petite variation du nombre des vibrations avec la température, car le nombre des vibrations de la source Sol_5, par exemple, paraît croître de 2,5 v. c., lorsque la température descend de 24^0 à 9^0 — c'est-à-dire paraît avoir une augmentation de 0,166 v. c. pour une diminution d'un degré de température et réciproquement.

b) ***Détermination des vibrations à l'aide du monocorde.*** On a employé à cet effet un sonomètre pourvu d'une fine corde d'acier, bien tendue, et on a limité, sur cette corde, une longueur telle que le son qu'elle produit, coïncide avec la note La_3 du diapason normal. On a obtenu ce résultat, en faisant diminuer petit à petit le nombre des battements, qu'on entendait à la production simultanée des deux sons, jusqu'à leur disparition complète. On a limité ensuite une autre portion de cette même corde, afin de produire un son à l'unisson avec notre petit tube sonore à anche. C'est ce qui était plus difficile à réaliser, car les sons de ce petit tube étaient aigus et de faible intensité par rapport au son de la corde; cependant plusieurs séries d'observations ont pu donner des résultats bien concordants.

Si l et l' sont les longueurs de la corde correspondant au son du diapason normal et à celui de notre petit tube sonore, on a, vu que le rapport des nombres de vibrations de ces cordes est l'inverse de celui de leurs longueurs:

$$\frac{n'}{n} = \frac{l}{l'}, \quad \text{d'où} \quad n' = n\,\frac{l}{l'}$$

L'expérience nous donne : $l = 441{,}8^{mm}$ pour le diapason la_3 — dont le nombre des vibrations est $n = 435$ — et $l' = 123{,}2$ pour le petit tube sonore Sol_5. Il en résulte :

$$n' = 435 \times \frac{441{,}8}{123{,}2} = 1559{,}9 = 1560 \text{ v. c., à } 21^0{,}5 \text{ de temp.}$$

c'est-à-dire le même nombre que celui qui a été obtenu par la résonance.

On a obtenu, de la même manière, pour les vibrations de deux autres petits tubes sonores, des nombres sensiblement égaux à ceux des expériences précédentes. Il est inutile de les reproduire.

En tout cas, les valeurs, que nous allons employer dans nos calculs, sont celles qui ont été obtenues par la résonance dans l'air. Les déterminations faites à l'aide du monocorde ne nous ont servi qu'à titre de contrôle.

Rapport des colonnes de résonance dans un liquide, contenu dans le même tube, pour deux sons différents.

32. Soit l et l' les longueurs des colonnes de résonance dans la *même colonne liquide* correspondant à deux sons différents de vibrations n et n'. Nous aurons :

$$l = \frac{V}{2n}, \quad l' = \frac{V}{2n'}, \quad \text{d'ou} \quad \frac{l}{l'} = \frac{n'}{n}$$

Si l'on considère les résonances des mêmes sons dans l'air d'un même tuyau —qui peut être différent du précédent— et si l'on désigne par l_1, l'_1 les longueurs des colonnes respectives et V_1 la vitesse du son dans l'air de cette colonne, on aura de même :

$$\frac{l_1}{l'_1} = \frac{n'}{n} \text{ [1]}$$

On déduit de là :

$$\frac{l}{l'} = \frac{l_1}{l'_1},$$

c'est-à-dire que le rapport des colonnes de résonance dans *le liquide* — le tube et la température étant les mêmes —est égal au rapport des colonnes des *mêmes* sons, dans *l'air*, considérées à la même température.

L'expérience vérifie ces résultats — comme cela se voit dans le tableau qui suit et dans lequel on a inscrit le rapport des colonnes de résonance dans *l'eau*, obtenues avec divers tuyaux, d'épaisseurs et de diamètres intérieurs différents, et correspondant aux sons, de nos petits tubes à anche. Le rapport des colonnes dans *l'air*, correspondant aux mêmes sons, garde, comme on sait, pour tous les tubes de résonance, la même valeur. Calculés d'après les colonnes obtenues dans les expérience précédentes ces rapports sont, pour nos petits tubes à anche :

$$\frac{\lambda re'_5}{\lambda sol_5} = \frac{148{,}8}{110{,}18} = 1{,}350 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda la_4}{\lambda re_5'} = \frac{199{,}18}{148{,}8} = 1{,}338$$

[1]) Il ne faut pas croire que cette égalité est rigoureusement exacte pour tous les tuyaux. Si le tube est étroit, alors le rapport des colonnes de résonance de deux sons n'est pas précisément égal à l'inverse du rapport des vibrations, car les vitesses de ces deux sons, n'étant pas, dans ce cas, tout à fait les mêmes, elles ne s'éliminent plus par la division.

Rapport des colonnes de résonance dans l'eau correspondant à deux sons différents

Tube	Diamètre intérieur	Épaisseur de la paroi	Température	Colonne de la musique Sol_5	Colonne de la musique $Ré_5$	Colonne de la musique La_4	Rapport entre la colonne $Ré_5$ et la colonne Sol_5	Rapport entre la colonne La_4 et la colonne $Ré_5$
				$\left(\frac{\lambda}{2}\right)Sol_5 =$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)Ré_5 =$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)La_4 =$	$\frac{\lambda ré_5}{\lambda sol_5} =$	$\frac{\lambda la_4}{\lambda ré_5} =$
1	21.6	7.1	7°.5	430.5	577.8	—	1.342	—
2	18.6	6.7	21°.0	442.7	596.76	797	1.348	1.335
3	22.6	4.6	21°.5	433.37	585.23	—	1.352	—
4	17.9	5.1	—	439.5	596.6	793.6	1.355	1.332
5	13.8	3.1	—	435	587.3	783	1.351	1.331

On voit que les rapports des colonnes λ $ré_5$ à λ sol_5 et de λ la_4 à λ $ré_5$, dans *l'eau* sont presque les mêmes pour tous les tubes et ils ont les valeurs moyennes :

$$\frac{\lambda\ ré_5}{\lambda\ sol_5} = 1{,}35 \text{ et } \frac{\lambda\ la_4}{\lambda\ ré_5} = 1{,}33$$

égales aux valeurs des rapports précédents des colonnes respectives dans *l'air.*

Une colonne liquide analyse un son

33. On remarque dans beaucoup d'expériences, qu'à côté du son fondamental de la source sonore on entend, en même temps, par la résonance de la colonne liquide, les harmoniques de ce son. Citons, comme exemple, quelques analyses faites à l'aide de l'eau ou d'autres liquides.

a) *Analyse du son faite à l'aide de l'eau.* En faisant vibrer le petit tube à anche Sol_5 dans un tube de verre de diamètre intérieur de $17{,}9^{mm}$, avec une épaisseur de paroi de $5{,}06^{mm}$ et à $20^0{,}9$ de température, on a entendu, en même temps que le son fondamental, plusieurs de ses harmoniques : *l'octave*, la *double octave*, la *tierce majeure* de cette double octave, qui se répétaient plusieurs fois.

b) *Analyse du son faite à l'aide de l'alcool absolu.* Avec la même source sonore Sol_5, dans un tube, dont le diamètre intérieur est de $14{,}38^{mm}$ et l'épaisseur de la paroi de $5{,}8^{mm}$, on a entendu dans une colonne d'alcool absolu le son fondamental de la source en même temps que les harmoniques: la *quinte de l'octave supérieure* et la *double octave,* dans plusieurs positions équidistantes.

Nous indiquons ci-après, dans un petit tableau les colonnes de résonance correspondant à ces sons :

Source sonore Sol.

		Interv. de la I—II résonance	Interv. de la II — III résonance	Interv. de la III—IV résonance	Interv. de la IV—V résonance	Interv. de la V—VI résonance	Interv. de la VI—VII résonance	Moyenne des intervallés
Dans l'eau	Son fondamental	438.6	437	—	—	—	—	437.8
	Octave.................	218.6	219	—	—	—	—	218.8
	Double octave....	111.2	110.4	109.7	108.9	109.3	109	109.75
	Tierce majeure de la double octave...............	88.6	86.2	87.8	87.6	87.5	87.4	87.5
Dans l'alcool absolu	Son fondamental	358	360	—	—	—	—	359
	Quinte de l'octave supérieure	119.7	119.5	118.8	118.7	119.4	119.7	119.13
	Double octave	90	90	89	89.8	89.8	89.6	89.70

On voit que les intervalles entre les différentes positions des renforcements de ces harmoniques, le long de la colonne, sont presque égaux entre eux et que leurs valeurs moyennes, c'est-à-dire les longueurs du $\frac{\lambda}{2}$ respectif – inscrites dans la dernière colonne verticale – sont entre elles et à $\frac{\lambda}{2}$ du son fondamental, pour les deux liquides, dans *les rapports* indiqués *par la théorie* à savoir : λ oct. $= \frac{\lambda \text{ son fond.}}{2}$; λ double oct. $= \frac{\lambda \text{ son fond.}}{4}$; λ quinte oct. $= \frac{\lambda \text{ son fond}}{3}$, λ tierce maj. double oct. $= \frac{\lambda \text{ son fond.}}{5}$. En même temps que les harmoniques ci-dessus, on en a toujours entendu d'autres, dont les positions et les intervalles n'ont pas été marqués, comme n'étant pas utiles aux recherches actuelles.

c) *Analyse du son faite à l'aide du mercure.* Lorsqu'on emploie comme source sonore le son d'un téléphone, ce son est décomposé soit par une colonne d'eau, soit par une colonne de mercure en de nombreuses harmoniques, qui rendent incertaine l'observation précise de leurs positions. Ainsi, on doit rappeler que dans une expérience, où les vibrations du téléphone étaient interrompues par un diapason, on a pu compter dans l'eau jusqu'à dix harmoniques du son fondamental, commençant par la quinte de ce son et allant jusqu'à la quinte de la double octave. Toutes ces harmoniques avaient les longueurs de leurs colonnes de résonance dans des rapports égaux avec ceux qu'indique la théorie. Citons aussi l'expérience dans laquelle une colonne *de mercure* faisait entendre au moins 5 harmoniques du son fondamental, et où les demi-longueurs d'onde correspondantes étaient :

pour $\frac{\lambda}{2}$ son fond $= 1056^{mm.}$ pour $\frac{\lambda}{2}$ tiere oct. sup. $= 442^{mm.}$

» $\frac{\lambda}{2}$ quinte son fond$=704^{mm.}$ » $\frac{\lambda}{2}$ quinte oct. sup. $= 351^{mm.}$

» $\frac{\lambda}{2}$ oct. sup. $= 528^{mm.}$ » $\frac{\lambda}{2}$ double oct. $= 265^{mm.}$

Les rapports *théoriques* entre les longueurs d'onde de ces diverses harmoniques se maintiennent toujours entre les nombres, qui leur correspondent dans ces expériences, comme il est facile de le vérifier. Cela est une conséquence, ou mieux, une nouvelle confirmation du résultat précédent, où l'on avait constaté que le rapport des colonnes liquides de résonance correspondant à deux sons quelconques est égal au rapport inverse des nombres de leurs vibrations.

Lorsque l'expérience est convenablement arrangée les colonnes liquides analysent un son complexe avec une sensibilité remarquable, qui dépasse de beaucoup celle des autres appareils de ce genre.

Étude de la résonance dans l'eau distillée

Nous étudierons la variation de la colonne de résonance dans l'eau distillée, d'une manière plus spéciale, cherchant à voir : 1) la variation de la colonne avec la *température* ; 2) la manière dont cette colonne dépend des *dimensions des tuyaux* faits de la même substance ; 3) la variation de la colonne dans des tuyaux de *différentes substances.*

Influence de la température sur la colonne de résonance dans l'eau distillée

34. L'influence de la température sur la longueur de la colonne de résonance dans l'eau distillée est loin d'être négligeable. Pour la déterminer on a fait des expériences à des températures variant de 1^0 à 40^0, avec le *même* tube de verre de dimensions bien déterminées. Pour expérimenter, il n'était pas suffisant de chauffer le liquide à une certaine température, car la masse du tube, en absorbant, ou en émanant de la chaleur, durant l'observation, déterminait une variation dans la température de la colonne. Pour éviter ces inconvénients, longtemps avant le moment de commencer l'expérience, on mettait l'appareil et le liquide dans un endroit, qui avait une température déterminée, presque égale à celle que nous voulions avoir pour notre expérience. Ainsi, pour les températures basses, les expériences ont été faites *pendant l'hiver* dans l'air libre, tandis que pour des températures élevées, comme celle de 40^0, p. ex., on a chauffé une chambre jusqu'à la température *inaccoutumée de* 33^0 et on a fait les observations près du poêle. Ce n'est qu'ainsi qu'on pouvait maintenir, d'une manière satisfaisante, la température constante dans la colonne liquide.

Pour lire cette température, on introduisait sous la cloche de l'appareil, avant d'y visser le tube de verre et à la fin des observations, lorsqu'on ôtait ce tube, un thermomètre qui donnait le $^1/_{10}$ de degré. On prenait aussi la température de la colonne liquide, en y introduisant, au commencement et à la fin de l'expérience, par la partie supérieure du tube, le même thermomètre. La *moyenne* de ces quatre lectures était considérée comme étant la *température de l'expérience*. Les différences entre les quatre températures n'atteignaient même pas un degré. S'il en était autrement, on répétait l'expérience.

Nous donnons ici le résultat de ces observations faites avec la source sonore Sol_5, dans un tube de verre ayant des parois très épaisses, tube que nous désignerons par I_5 de la catégorie P, puisqu'il fait partie d'une série de tubes qui seront ainsi désignés, dans les recherches qui vont suivre. Nous ne donnerons que la moyenne des colonnes de résonance observées le long du tube, sans indiquer séparément la grandeur de chacune de ces colonnes.

TABLEAU

donnant les colonnes de résonance dans l'eau distillée à différentes températures

Dimensions du tube $\begin{cases} \text{Longueur} & = 1{,}5^{\text{m.}} \\ \text{Diamètre intérieur} & = 21{,}5^{\text{mm.}} \\ \text{Epaisseur de la paroi} & = 7{,}14^{\text{mm.}} \end{cases}$

Source sonore Sol_5

No.	Tempéra-ture	Colonne de résonance
		$\frac{\lambda}{2}$ = mm.
1	$1^0{,}2$	423,2
2	$4^0.4$	425.9
3	$8^0{,}6$	431,5
4	$10^0{,}6$	432,6
5	$15^0{,}5$	437,7
6	$20^0.2$	441,8
7	$26^0{,}5$	448,5
8	$32^0{,}5$	451,3
9	$39^0{,}8$	456,6

Dans ce tableau on voit, que si la température croît de 1^0 à 40^0 la colonne de résonance varie dans le même sens. L'accroissement moyen, vers le milieu de cet intervalle, est de $0{,}92^{\text{mm}}$ pour un degré de température.

35. Soit y la longueur de la colonne de résonance à la température *t*. On observe qu'on peut alors représenter, avec assez d'exactitude, la grandeur de cette colonne de résonance à différentes températures, par la formule empirique suivante, de troisième degré en t:

$$(1) \qquad y = a + bt + ct^2 - dt^3$$

où a, b, c, d ont les valeurs numériques:

$$(2) \qquad \begin{cases} a = 422.4 & \text{mm.} \\ b = 0.901 & » \\ c = 0.0052 & » \\ d = 0.00015 & » \end{cases}$$

de sorte que la formule (1) peut s'écrire:

$$(3) \qquad y = 422^{\text{mm}},4 + 0.901 \times t + 0.0052 \times t^2 - 0.00015 \times t^3$$

Cette formule reproduit, en effet, avec beaucoup d'exactitude les colonnes trouvées aux différentes températures, auxquelles on a fait des observations.

On a ainsi :

pour $t = 1^0$	y calculé	$= 423,3$	et y observé	$= 423,1$	
» $t = 10^0$	y »	$= 432$	» y »	$= 432,1$	(par proportion)
» $t = 20^0$	y »	$= 441,3$	» y »	$= 441,6$	» »
» $t = 30^0$	y »	$= 450,1$	» y »	$= 450,4$	» »
» $t = 40^0$	y »	$= 457,2$	» y »	$= 456,8$	» »

Ainsi qu'on le voit, la coïncidence entre les températures calculées et observées est très satisfaisante.

On obtient la grandeur de la colonne correspondant à un *autre son*, à la même température et dans le *même* tube, en multipliant, d'après ce qui précède, les deux membres de l'expression (1) par l'inverse du rapport du nombre des vibrations de ce nouveau son au nombre de vibrations de notre source Sol_5.

Nous indiquerons plus tard la manière, dont on peut obtenir, pour un *autre tube*, la grandeur de la colonne pour le même son et pour une température t.

En multipliant les deux membres de l'expression (1) par le double du nombre de vibrations de notre source sonore Sol_5 ($2n = 2 \times 1560 = 3120$) on trouve, d'après la formule $V = 2\,nl$, la vitesse dans la colonne d'eau distillée à toute température, comprise entre les limites de cette formule. On voit alors, que *cette vitesse dans la colonne de résonance croît avec la température.* Ainsi, dans notre expérience, elle est :

$V = 1348^m$ à 10^0 de température
et
$V = 1377^m$ à 20^0 » »

On savait que la vitesse du son dans une *masse* liquide illimitée va en augmentant avec la température ; on constate maintenant, par la expérience, que cela est encore exact pour la vitesse dans *une colonne.*

Wertheim ne tenait aucun compte, dans ses expériences, de cette influence de la température sur la variation de la vitesse, c'est ce qui a contribué aux erreurs de ses données, ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer ailleurs.

— Prenons la première dérivée par rapport à t de la *fonction y* de (1) et annulons-la.

Nous avons :

$$y' = b + 2\,ct - 3\,d\,t^2 = 0$$

d'où

$$(4) \qquad t = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 3bd}}{3d}$$

Cette fonction admet donc un ***maximum*** et un ***minimum*** correspondant aux valeurs de la température, qui rendent nulle cette dérivée.

En calculant les racines (4) à l'aide des valeurs numériques des constantes données par (2), on trouve que :

pour $t_1 = 57^0{,}77$ la colonne de résonance passe par un maximum
et
» $t_2 = -34^0{,}6$ » » » » » » » minimum.

On remarque que cette dernière valeur n'a aucun sens pour nous.

En représentant graphiquement la variation de la colonne de résonance d'après cette fonction (1) et, en admettant que la formule est aussi exacte en dehors de 40^0, on voit que cette colonne et, par conséquent, aussi la vitesse du son à son intérieur, va en ***augmentant jusque vers 58⁰***, et, ensuite, elle ***décroît*** constamment jusqu'à 100^0 de température, quand elle doit avoir, à la pression normale, une valeur limite, celle de la vapeur d'eau.

Ce serait intéressant de faire des expériences à des températures plus élevées que celles de nos observations, pour voir en quelle mesure nos prévoyances se réalisent. Nous ne savons pas au juste, si pour des températures plus élevées que 40^0 la fonction (1) représente encore avec la même exactitude la variation de la colonne de résonance, mais, en tout cas, nous verrons dans ce qui va suivre, qu'elle nous servira aussi bien à faire des remarques intéressantes sur la compressibilité des liquides, qu'à étudier la variation avec la température de la vitesse du son dans une ***masse liquide illimitée.***

Remarque. Dans le tableau des expériences faites pour étudier la variation de la colonne de résonance dans l'eau avec la température, on a vu que l'accroissement moyen de la colonne est à peu près de $0{,}9^{mm.}$ pour 1^0 de température. Si nous voulons connaître cet *accroissement* pour une colonne de résonance y' d'un autre tube, il faut multiplier $0{,}9^{mm.}$ par le rapport entre la longueur de la colonne de résonance y' de ce tube et la longueur y, en admettant pour cela que les variations des colonnes pour 1^0 sont proportionnelles à la grandeur de ces colonnes. Nous aurons ainsi la variation pour 1^0 égale à $0{,}9 \frac{y'}{y}$. La colonne dans le tube de notre expérience étant $y=441{,}6$, à la température de 20^0, on voit que, d'après cette formule, nous aurons :

pour la colonne $y'=420$, la variation pour $1^0 = 0{,}858$
» » » $y'=430$ » » » $1^0 = 0{,}875$
» » » $y'=410$ » » » $1^0 = 0{,}895$

Plus tard nous nous servirons de ces nombres pour trouver la correction à l'aide de laquelle nous puissions avoir la colonne de résonance dans un tube, à une température quelconque, quand nous connaissons, cette colonne à une température donnée.

Variation des colonnes de résonance dans l'eau distillée avec les dimensions des tubes

36. *Choix des tubes.* Pour voir de quelle manière varient les colonnes de résonance avec les dimensions des tubes, nous nous sommes procuré des tubes de verre de même provenance, formant trois catégories. Les tubes de la première catégorie avaient, ou devaient avoir, le même diamètre intérieur de $22^{mm.}$, tandis que l'épaisseur des parois était variable et augmentait de $3^{mm.}$ à $7^{mm.}$, variant de millimètre en millimètre. De la seconde catégorie faisaient partie les tubes qui avaient, ou devaient avoir, le même diamètre intérieur de $18^{mm.}$ et dont les parois avaient, ou devaient avoir, une épaisseur variant de millimètre en millimètre, de $3^{mm.}$ à 7^{mm}. Enfin, les tubes de la troisième catégorie avaient, ou, devaient avoir le diamètre intérieur de $14^{mm.}$ et l'épaisseur des parois comprise entre $3^{mm.}$ et $6^{mm.}$ et variant de millimètre en millimètre.

Ces tubes, qu'on avait spécialement commandés à Paris, seront désignés par la dénomination de »tubes *de la catégorie* P« et nous les marquerons : ceux de la première catégorie par I_1, I_2, I_3, ..., ceux de la seconde catégorie par II_1, II_2, II_3, ..., et enfin, ceux de la troisième catégorie par III_1, III_2, III_3, ..., etc. Les indices se réfèrent à l'épaisseur des parois. Tous ces tubes avaient la même longueur de 1,50$^{m.}$

On a vu jusqu'ici que les colonnes de résonance varient dans nos expériences avec l'épaisseur des parois et le diamètre intérieur du tube. Nous avons fait ce choix pour nos tubes dans l'intention de voir quelle est l'influence qu'exerce l'épaisseur de la paroi pour les tubes de même diamètre, (les tubes appartenant à chaque catégorie, prise séparément), ou bien, quelle est l'influence qu'exerce le diamètre pour des tubes de même épaisseur (les tubes qui ont les mêmes indices, dans chaque catégorie).

Avant d'entreprendre des expériences avec ces tubes, nous avons déterminé, avec le plus de précision possible, le diamètre intérieur et extérieur de chacun d'eux. L'épaisseur de la paroi se déduisait des valeurs de ces diamètres.

Dimensions des tubes. Nous avons déterminé le diamètre intérieur de deux manières : 1) à l'aide d'un compas d'épaisseur, ou *compas à coulisse ;* 2) par la pesée d'une colonne de mercure comprise à l'intérieur du tube. Puisque cette dernière opération était très laborieuse à cause de la grandeur de la masse du mercure, qui entre dans le tube, on ne l'a employée que dans des expériences, d'un nombre plus restreint, qui exigeaient plus de soins.

On mesure les *diamètres extérieurs* à chaque extrémité, à l'aide d'un compas d'épaisseur, qui donne le $^1/_{10}$$^{mm.}$, en mesurant extérieurement le tube, dans quatre directions différentes, c'est-à-dire en mesurant la longueur de 4 diamètres, qui font entre eux un angle d'à peu près 45^0 et en prenant, ensuite, la moyenne de ces longueurs. Nous avons ainsi le diamètre moyen extérieur de chaque extrémité du tube.

On mesure aussi, en millimètres et en $^1/_{10}$$^{mm.}$, de la même manière, à l'aide du compas à coulisse, le *diamètre intérieur*, en prenant, pour chaque extrémité du tube, la moyenne de quatre diamètres intérieurs. Si ces dernières mesures nous montraient les mêmes valeurs pour le diamètre intérieur de chacune de deux extrémités, on admettait alors, que le tube avait constamment le même diamètre intérieur, quoique cette déduction s'est quelquefois démentie, alors que le tube, se cassant, montrait à son intérieur une variation appréciable du diamètre.

Comme on le sait, il se forme dans chaque tube plusieurs colonnes de résonance. Nous avons toujours éliminé celle de l'extrémité du tube, pour ne considérer que les autres, deux, ou plusieurs, qui en restaient. Mais le diamètre intérieur et extérieur de nos tubes nous intéressaient justement le long de ces colonnes de résonance, que nous gardions. Voilà pourquoi, afin d'obtenir le diamètre *extérieur* correspondant à nos colonnes de résonance, nous mesurons toujours, et de la même manière qu'aux extrémités, la grandeur de ce diamètre, à l'endroit de chaque résonance, ou, pour ainsi dire, le long de la portion utile du tube, et nous prenons ensuite la moyenne de ces mesures. Si l'extrémité des colonnes de résonance vient, par exemple, aux traits I, II et III, marqués sur le tube, nous déterminons alors le diamètre moyen *extérieur*, pour chacune de ces positions et nous prenons la moyenne entre la valeur de I et II, ensuite la moyenne entre II et III et, à la fin, la moyenne de ces dernières valeurs, qui sera considérée par nous comme représentant *le diamètre moyen extérieur de la colonne de résonance respective*. Mais souvent on se contente, tant pour le diamètre intérieur que pour le diamètre extérieur, de la moyenne des valeurs de la I-ère et de la III-ème résonance.

Si, à la suite des mesures qu'on fait aux extrémités, on ne trouve pas la même valeur pour le diamètre *intérieur* du tube, nous admettons alors que la surface intérieure du tube est conique, s'élargissant de l'extrémité la plus étroite vers la plus large, et nous déterminons ensuite le rayon intérieur correspondant à chaque résonance, en nous servant pour cela de la *différence* des diamètres aux *extrémités*, qui donne la diminution du diamètre intérieur pour la longueur totale du tube. La manière, dont on fabrique ces tubes (en les soufflant), justifie cette hypothèse sur la forme conique de leur surface intérieure.

Soit l la longueur totale du tube. Si h est la distance de l'extrémité la plus large de ce tube à la position d'une résonance et si ρ représente la *diminution* du rayon intérieur, quand on passe d'une extrémité à l'autre, alors la diminution x de ce rayon, au point de notre résonance, est, comme il est facile de le voir :

$$x = h \frac{\rho}{l}$$

C'est de cette manière que nous avons *calculé* la diminution du rayon intérieur et, par conséquent, le diamètre correspondant à chaque résonance, qui se manifeste aux positions I, II, III, et c'est avec ces valeurs que nous avons déterminé la moyenne du diamètre intérieur, d'une manière analogue à celle qui a été employée pour le diamètre extérieur. C'est cette valeur que nous considérons comme *diamètre moyen intérieur de la colonne de résonance* et que nous employons dans nos calculs.

A la suite d'une pareille détermination, on comprend bien, que les diamètres intérieurs et extérieurs des colonnes liquides contenues dans un même tube peuvent présenter de petites différences entre eux, selon le liquide soumis à l'expérience, car ces colonnes occupent, pour chaque liquide, des positions différentes le long du tube, auxquelles peuvent correspondre des diamètres intérieurs et extérieurs, qui présentent entre eux quelques petites différences.

Il faut d'ailleurs rappeler, que presque tous nos tubes, ayant été commandés en vue de ces recherches, ne présentaient pas, de toute leur longueur, de trop grands écarts, par rapport à l'égalité de leurs diamètres intérieurs et extérieurs. Toutefois, on a pris toutes les précautions, pour que les valeurs de ces diamètres correspondant aux colonnes de résonance, soient les meilleures possibles.

On indiquera à temps les mesures des diamètres intérieurs faites par la pesée des colonnes de mercure.

Nous nommerons »*extrémité inférieure*« du tube celle qui pénètre dans la cloche, et »*extrémité supérieure*« celle qui reste au dehors.

Si $d' = 2r'$ est le diamètre moyen extérieur – déterminé comme on l'a dit – pour une colonne de résonance et $d = 2r$ le diamètre intérieur, on a, en désignant par e l'épaisseur de la paroi :

$$d' = d + 2e$$

Représentons par x *le rapport de l'épaisseur au rayon intérieur ;* on aura de cette dernière égalité :

$$\frac{d'}{d} = 1 + \frac{2e}{d} = 1 + \frac{e}{r} = 1 + x$$

ce qui montre, qu'on obtiendra toujours ce rapport x, en retranchant l'unité du rapport des deux diamètres : extérieur et intérieur.

Nous reviendrons bientôt sur ce rapport pour le considérer de plus près.

Observons, enfin, qu'on peut toujours savoir par des expériences préliminaires, quelles sont les positions des colonnes de résonance pour chaque tube et on peut, par conséquent, déterminer, par les méthodes indiquées, la grandeur des diamètres correspondant à ces colonnes, avant de procéder aux mesures de précision.

Manière de mesurer les colonnes de résonance. Toutes les observations avec nos tubes ont été faites, ou réduites – par la correction indiquée dans la remarque de la page 144 – à la même température de $21,5^0$. La détermination de la colonne de résonance, dans un liquide, a été toujours faite sans considérer la première colonne de résonance de l'extrémité du tube. L'évaluation de la longueur de cette colonne de résonance se fait habituellement ainsi: on prend la moyenne des valeurs de la I et de la II *colonne*, ainsi que la moyenne de la colonne comprise entre la I et III *résonance* et on divise leur somme par 2. La valeur ainsi trouvée est ce que nous appelons la *longueur de la colonne de résonance*, ou le $\frac{\lambda}{2}$ du liquide pour le son considéré.

Donnons un exemple d'une telle détermination :

Tube I_3 de la catégorie P

Eau distillée — Source Sol_5

Température sous la cloche au commencem. de l'expér.	= 21,4	moyenne 21,5	moyenne 21,52
» » » » à la fin »	= 21,6		
» de la colonne d'eau au commencem. »	= 21,5	moyenne 21,55	
» » » » » à la fin »	= 21,6		

Température de l'expérience $= 21^0,5$

		Distance	
De l'extr. du tube à la	— I résonance . . .	$431^{mm.}$	
de la	I — II » . . .	434	moyenne 434,1
» »	II — III » . . .	434,2	
» »	I — III » . . .	868,6, d'où $\frac{868,6}{2} = 434,3$	

$$\text{Moyenne totale} = \frac{434,1 + 434,3}{2} = 434,2^{\,mm}$$

C'est cette dernière moyenne qui donne $\frac{\lambda}{2} = 434,2^{mm}$ du *son* employé, dans le *liquide* et le *tube* considérés.

C'est de la même manière qu'on a procédé dans *toutes* les observations et dans *toutes* les déterminations des *colonnes de résonance* faites dans nos expériences.

Résultats des observations faites dans l'eau distillée avec les tubes de verre de la catégorie P.

37. Toutes ces explications faites, réunissons à présent, dans un tableau général, les chiffres qui donnent la grandeur des diamètres de nos tubes de la catégorie P, l'épaisseur de leurs parois et le résultat *des mesures des colonnes de résonance* déterminées dans *l'eau dislillée*, d'après la méthode précédemment exposée, pour la *source sonore* Sol_5. Nous répartissons ces résultats en trois catégories, d'après les diamètres des tubes employés.

Tableau donnant les diamètres des tubes de verre de la catégorie P et les longueurs des colonnes de résonance dans l'eau distillée, déterminées avec ces tubes

Petit tube sonore Sol_5

Tubes de verre de la catégorie P	Extrémité supérieure		Extrémité inférieure		A la I résonance		A la III résonance		Moyenne des diamètres de la I et III rés.		Epaisseur moyenne de la paroi	Longueur de la colonne de résonance à la tempér. de 21°5
	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur		
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	$\frac{\lambda}{2}=$ mm.
I_1	28.00	21.08	28.00	20.62	28.00	20.75	28.00	21.01	28.00	20.88	3.56	425.3
I_2	30.08	21.85	29.08	20.67	29.36	21.01	29.94	21.68	29.65	21.34	4.15	430.7
I_3	31.80	22.50	32.08	22.77	32.00	22.71	31.84	22.59	31.92	22.65	4.64	432.4
I_4	33.20	21.78	33.92	21.77	33.71	21.78	33.29	21.78	33.50	21.78	5.86	437.6
I_5	35.45	21.08	36.60	22.25	36.26	21.91	35.58	21.22	35.92	21.56	7.18	442.7
												$\frac{\lambda}{2}=$
II_1	24.00	18.6	24.10	18.93	24.07	18.84	24.02	18.66	24.05	18.75	2.65	417
II_2	26.02	18.25	26.00	18.00	26.01	18.07	26.02	18.21	26.01	18.14	3.94	434.1
II_3	28.00	17.82	28.07	18.10	28.05	18.02	28.01	17.86	28.03	17.94	5.04	439.1
II_4	29.35	17.90	29.45	17.30	29.42	17.47	29.36	17.83	29.39	17.65	5.87	442.2
II_5	32.40	19.05	31.07	18.55	31.94	18.73	32.21	18.92	32.08	18.83	6.62	443.8
												$\frac{\lambda}{2}=$
III_1	20.30	13.87	20.00	14.00	20.08	13.96	20.26	13.89	20.17	13.97	3.10	435
III_2	21.60	14.65	22.35	14.50	22.11	14.54	21.64	14.64	21.88	14.59	3.65	438.1
III_3	23.4	13.8	23.7	14.87	23.61	14.56	23.43	13.93	23.52	14.25	4.64	442.5
III_4	25.77	13.90	26.22	14.87	26.06	14.53	25.91	14.18	25.98	14.35	5.82	446.7

On voit de ce tableau, que dans chaque catégorie de tubes — où le diamètre intérieur a, par un choix spécial de ces tubes, presque la même valeur — la longueur $\frac{\lambda}{2}$ de la *colonne de résonance croît avec l'épaisseur de la paroi* du tube et qu'entre deux tubes dont les parois ont même épaisseur, c'est à celui qui a *le petit diamètre que correspond la plus grande valeur de* $\frac{\lambda}{2}$ comme, cela se voit, par exemple. aux tubes I_4, II_4, et III_4, qui ont presque la même épaisseur des parois $5{,}8^{mm}$, mais dont les diamètres intérieurs vont en diminuant. C'est d'ailleurs ce qu'on avait constaté, sans recherches systématiques, dans d'autres expériences, déjà exposées.

Remarque. Il semblerait de là, que la longueur de la colonne de résonance, dans des tuyaux de même substance, dépend de deux paramètres indépendants l'un de l'autre, *le rayon intérieur* et *l'épaisseur de la paroi* et que de toutes les données de ces observations nous ne pourrions déduire que la constation qualitative — pour ainsi dire — de l'influence de ces deux éléments sur la longueur d'onde dans les colonnes liquides.

Mais, faisons pour chaque tube le *rapport entre le rayon intérieur et l'épaisseur de la paroi* et inscrivons dans le tableau suivant les valeurs de *ce rapport* x à côté des *colonnes de résonance respectives* du liquide :

Tableau donnant le rapport entre l'épaisseur de la paroi du tube et le rayon intérieur, et les colonnes de résonance dans l'eau distillée, avec les tubes de verre de la catégorie P, pour le son de notre source sonore sol_5.

TUBES	Rapport entre l'épais. de la paroi et le rayon intér. $x = \frac{d'}{d} - 1$	Longueur de la colonne de résonance à la température de 21°.5
I_1 . .	$x =$ 0.3409	$\frac{\lambda}{2} =$ 425.3mm.
I_2 . .	0.3894	430.7
I_3 . .	0.4092	432.4
I_4 . .	0.5381	437.6
I_5 . .	0.6661	442.7
II_1 . .	$x =$ 0.2826	$\frac{\lambda}{2} =$ 417
II_2 . .	0.4339	434.1
II_3 . .	0.5622	439.1
II_4 . .	0.6650	442.2
II_5 . .	0.7038	443.8
III_1. .	$x =$ 0.4439	$\frac{\lambda}{2} =$ 435
III_2. .	0.4997	438.1
III_3. .	0.6516	442.5
III_4. .	0.8093	446.7

En comparant les valeurs du rapport x et celles des demi-longueurs d'onde $\frac{\lambda}{2}$ correspondantes, qui figurent dans ce tableau, on voit que : 1) *Ces valeurs croissent, ou décroissent, en même temps;* à la valeur maximum du rapport x correspond la plus grande valeur de $\frac{\lambda}{2}$ – comme cela se voit au tube III_4 – de même qu'à la valeur minimum de x correspond aussi la plus petite valeur de $\frac{\lambda}{2}$ – comme cela se voit au tube II_1. 2) *Aux valeurs égales*, ou presque égales, du *rapport x*, quelle que soit la catégorie à laquelle appartient le tube respectif, correspondent en même temps *des valeurs égales*, ou presque égales, pour la *longueur* $\frac{\lambda}{2}$, — comme cela se voit aux tubes I_5, II_4 et III_3, qui ont en même temps presque le même rapport, $x = 0,66$, et aussi la même valeur pour la colonne de résonance, $\lambda = 442,4$, de même qu'aux tubes II_2 et III_1 qui ont des valeurs très rapprochées, tant pour le rapport x (respectivement $x = 0.434$ et $x = 0,444$), que pour la longueur des colonnes de résonance correspondantes (respectivement $\frac{\lambda}{2} = 434,1$ et $\frac{\lambda}{2} = 435$).

Cette remarque est très importante : elle montre que *la variation de la colonne de résonance* dans des tuyaux de différentes dimensions, mais de même substance, *ne dépend que du rapport x entre l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur du tube*, et non pas de chacun de ces éléments, séparément. Cela facilite énormément les recherches, *car la colonne de résonance* apparaît maintenant comme étant fonction *d'une seule variable*, et non pas de deux, si, bien entendu, on fait des expériences avec le même liquide et dans des tubes de même nature.

Observons que ce point important a été obtenu à l'aide des *nombres*, c'est-à-dire de la *mesure*.

Comme suite de cette constatation nous pouvons : 1) dire d'avance, suivant la valeur du rapport x, lequel de deux tubes, faits de la même substance et ayant des dimensions *quelconques* pour leurs sections, donnera dans un liquide la plus grande colonne de résonance, et 2) affirmer que deux tubes, ayant la même valeur pour le rapport x, sont, ou non, faits de la même substance, suivant qu'ils donnent, ou non, la même colonne de résonance dans le même liquide.

Toutes nos expériences suivantes confirment ces faits. Le rôle du rapport x est donc très important dans l'étude de la résonance des liquides.

Variation de la colonne de résonance dans l'eau distillée avec des tubes de différentes substances.

38. Pour montrer l'influence de la substance du tube sur la grandeur de la colonne de résonance dans l'eau distillée, nous prendrons d'abord des tubes toujours en verre, mais d'une autre provenance que les précédents, et ensuite des tubes *de fer*.

Ces tubes de verre étaient des tubes qu'on nomme *de niveau*, ayant des parois résistantes et qu'on emploie aux machines à vapeurs pour déterminer le niveau de l'eau dans la chaudière. Quelques-uns de ces tubes étaient de fabrication allemande, provenant de Schmiedfeld (Thuringe), d'autres étaient de fabrication anglaise, provenant de Londres. Nous désignerons les premiers par la dénomination de *tubes de la catégorie T*, et les autres par la dénomination de *tubes de la catégorie L.*

Le verre des tubes employés dans les expériences précédentes et fabriqués à Paris était un silicate double, assez pur, de sodium et calcium, de couleur blanchâtre.

Le verre des tubes dits de *niveau* était aussi un silicate double, mais moins pur; sa couleur d'un vert-azuré indiquait la présence du fer dans sa composition. La résistance de ces derniers tubes était beaucoup plus grande que celle des premiers.

Nous ne citerons que quelques expériences faites avec ces tubes de provenance allemande, ou anglaise. De la série des tubes allemands nous ne considérerons que deux, que nous désignerons par : *tube No. 1 et 2 de la catégorie T ;* de la série anglaise nous en considérerons trois, que nous désignerons par : *tube No. 1, 2 et 3 de la catégorie L.*

A. *Expériences faites avec des tubes de verre dits de niveau.*

a) *Tubes de la catégorie T.* Nous avons choisi les deux tubes de cette catégorie de telle sorte que le rapport entre l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur soit presque le même pour les deux, malgré la différence qui existe entre les dimensions des sections, considérées séparément pour chacun d'eux.

Les diamètres intérieurs et extérieurs ont été mesurés, ou calculés, d'après le procédé indiqué plus haut, à l'endroit de chaque résonance, qu'on a écoutée de la même manière que pour les tubes de le catégorie *P*.

Nous donnons ici d'abord les *dimensions de ces tubes* et les valeurs *du rapport* x de *l'épaisseur au rayon intérieur* et ensuite *les colonnes de résonances* qui leur correspondent.

Tubes No. 1 et 2 de la catégorie T.

Source sonore Sol_5. Température 24°

Tube	DIMENSIONS										Moyenne de diam. intér. et extér. de la I et la II. résonance		Rap. x déduit de la valeur moyenne des diam.	RÉSONANCES			
	Extrém. supérieure		Extrém. inférieure		A la première résonance		A la II résonance		A la III résonance					De l'extrem. infér. jusqu'à la I réson.	De la I—II résonance	De la II–III résonance	Moyenne de la I—III résonance
	Diam. extérieur	Diam. intérieur	Diam. extérieur	Diam. intérieur	Diam. extérieur	Diam. intérieur	Diam. extérieur	Diam. intérieur	Diam. extérieur	Diam. intérieur							
	mm										mm.	mm.	x =		$\frac{\lambda}{2}=$ mm	$\frac{\lambda}{2}=$ mm	$\frac{\lambda}{2}=$ mm
1	24.42	15.95	24.00	16.77	24.14	16.50	24.26	16.24	24.41	15.97	24.27	16.24	0.4944	437	440.5	443	441.7
2	21.2	14.47	21.60	21.49	21.49	14.39	21.38	14.42	21.27	14.47	21.38	14.43	0.4816	436	441	440	440.5

On voit, que le rapport x entre l'épaisseur de la paroi et la valeur moyenne du rayon intérieur a, pour les deux tubes, presque la même valeur et qu'en même temps les longueurs d'onde $\frac{\lambda}{2}$ correspondantes ne sont pas trop loin l'une de l'autre. Mais formons à l'aide des données de ce petit tableau le rapport x correspondant séparément à chaque colonne de résonance, et considérons, en même temps, la grandeur de ces colonnes le long du tube. On aura:

TUBE	Rapport x entre épaisseur de la paroi et le rayon intérieur			Colonnes de résonance		
	Pour la colonne de la I–II résonance	Pour la colonne de la II—III résonance	Pour les colonnes de la I—III résonance	Entre la I - II résonance	Entre la II—III résonance	Col. moyen. entre la I—III résonance
	x =	x =	x =	$\frac{\lambda}{2}=$ mm.	$\frac{\lambda}{2}=$ mm.	$\frac{\lambda}{2}=$ mm.
No. 1 . .	0.4783	0.5108	0.4944	440.5	443	441.7
» 2 . .	0.4880	0.4763	0.4816	441.0	440	440.5

On voit dans ce tableau, que pour le tube No. 1 les valeurs du rapport x augmentent quelque peu, quand on passe de la première à la seconde colonne de résonance, mais en même temps augmentent aussi ces colonnes ; on constate le contraire pour le tube No. 2. La variation de la colonne le long du tube est donc déterminée par la variation du rapport x correspondant à cette colonne. C'est ainsi qu'on explique les petites variations des différentes colonnes de résonance le long du tube, variations qu'on avait mentionnée dans les expériences précédentes.

Bien plus ; si l'on regarde attentivement ce tableau on remarque que le rapport x *de la première colonne* du tube No. 1 est presque identique à celui qui correspond à *la deuxième colonne* du tube No. 2. On voit, en même temps, que *la longueur* $\frac{\lambda}{2}$ *de la première colonne* du tube No. 1 est de même presque *identique* à la longueur $\frac{\lambda}{2}$ de la *deuxième colonne* du tube No. 2. La correspondance entre ces deux grandeurs, le rapport x et la longueur de la colonne de résonance, se vérifie donc d'une manière remarquable. Les valeurs moyennes de x et de $\frac{\lambda}{2}$, pour les colonnes comprises entre la I et III résonance, sont, évidemment, intermédiaires entre les valeurs correspondant à chacune des deux colonnes.

— Considérons à présent le tableau de la page 151 qui donne les colonnes de résonance pour les tubes précédents de *la catégorie P*, à $21^0,5$ de température. On y voit que la colonne de résonance du tube II_3 est : $\frac{\lambda}{2} = 439,1$. En tenant compte de la correction de 0,91 mm. pour 1^0 de température, cette dernière colonne aura à 24^0 – température des expériences actuelles avec les tubes de la catégorie T – la valeur : $\frac{\lambda}{2} = 441,4$.

En comparant cette valeur à celle du tube No. 1 de cette *catégorie* T et en considérant aussi les valeurs respectives du rapport x, nous avons :

pour le tube II_3 de la catég. P, $x = 0,5622$ et $\frac{\lambda}{2} = 441,4$ à 24^0

" " " No. 1 " " " T, $x = 0,4944$ " $\frac{\lambda}{2} = 441,7$ " "

c'est-à-dire on constate que les colonnes de résonance de ces deux tubes ont les mêmes valeurs, mais que le rapport x du dernier tube est un peu plus petit que celui du premier. Cette différence entre les rapports x provient de la différence des substances, dont les tubes sont faits. Si ces substances étaient identiques, les deux tubes devraient avoir la même valeur pour le rapport x, vu qu'il ont la même valeur pour leurs colonnes de résonance. La différence des substances s'affirme donc par la différence entre les valeurs de ce rapport x.

b) Tubes de la catégorie L. Les diamètres intérieurs de ces tubes étaient beaucoup plus petits que ceux des tubes précédents, de sorte que nous avons eu moins d'inconvénients à les déterminer à l'aide des colonnes de mercure. Pour cela, on a successivement pesé les colonnes de mercure contenues dans le tube sur des longueurs égales à celles des colonnes de résonance de l'eau distillée du même tube. Connaissant le poids p d'une telle colonne et admettant que la section du tube était circulaire, on a déduit le rayon du tube moyennant la formule:

$$r^2 = \frac{p}{\pi \delta l}$$

où l est la longueur de la colonne, δ le poids spécifique du mercure et r le rayon du tube.

Pour obtenir des colonnes de mercure de longueurs voulues, on marquait d'abord sur le tube les positions correspondant aux résonances trouvées par des expériences préliminaires, faites dans l'eau; on fixait, ensuite, le tube verticalement et on y versait du mercure jusqù'à ce qu'il arrivait au signe supérieur. En laissant, après cela, le mercure couler par l'extrémité inférieure, munie, pour la circonstance, d'un petit entonnoir à robinet, on arrêtait l'écoulement, succesivement, au point de chaque position de résonance et on obtenait ainsi des quantités de mercure, dont les longueurs correspondaient aux diverses colonnes de résonance.

Indiquons, à présent, quelques chiffres obtenus à l'occasion d'une telle détermination, faite pour un des tubes de la catégorie L.

Tube No. 1 de la catégorie L.

Température du mercure	$t = 24^0,2$
Longueur de la colonne de mercure	$l = 446,5$
Poids de cette colonne	$p = 178,517$ gr.
Densité du mercure à 0^0 de temp.	$\delta_0 = 13,596$

Densité du mercure à la température de notre expérience, calculée d'après la formule $\delta = \delta_0 \frac{1}{1+mt}$, $\delta = 13,5368$.

En remplaçant ces valeurs dans l'expression précédente, on trouve d'abord :

$$\pi\,\delta = 3.1416 \times 13.5368 = 42.5272$$

ensuite

$$r^2 = \frac{p}{\pi \delta l} = \frac{178.577}{42.527 \times 446,5} = 9.401$$

d'où $r = 3.066^{mm.}$, et par conséquent $2r = 6.132^{mm.}$

On voit que le diamètre du tube est assez réduit. C'était un des tubes les plus étroits avec lesquels on avait expérimenté.

C'est d'une manière analogue qu'on a déterminé le rayon, pour diverses longueurs le long du tube. Voici les valeurs des quatre rayons correspondant à quatre colonnes succesives – la longueur des tubes en question permettant d'obtenir avec eux même quatre résonances dans l'eau –.

Distance		Longueur de la colonne	Poids de la colonne de merc.	Diam. intér. 2r cor. à chaque colonne
De l'extr. infér.—	I résonance	$446,5^{mm.}$	178.517 gr.	$6.132^{mm.}$
de la	I— II »	447.5	177.475	6.107
» »	II—III »	448.5	170.350	5.977
» »	III—IV »	449	170.405	5.975

Si on laisse de côté la colonne de l'extremité inférieure et si on fait *la moyenne des diamètres* correspondant aux trois dernières colonnes, on obtient pour le diamètre moyen intérieur du tube :

$$2r = 6,02^{mm.}$$

Le diamètre extérieur moyen a été déterminé de la manière déjà indiquée, en le mesurant avec le compas à coulisse, à l'endroit de chaque résonance, et en prenant, d'abord, la moyenne de chaque couple de valeurs trouvées et, ensuite, la moyenne générale. La valeur ainsi obtenue pour le diamètre extérieur de ce même tube a été

$$2r' = 10.575^{mm.}$$

On déduit de là la valeur du rapport entre l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur :

$$x = \frac{2r'}{2r} - 1 = 0.7566$$

C'est de la même manière qu'on a déterminé aussi les diamètres et le rapport x corespondant aux deux autres tubes de la catégorie L.

La détermination des colonnes de résonance dans le liquide a été faite suivant le procédé déjà connu.

Voici les valeurs des dimensions des trois tubes de cette catégorie et les longueurs des colonnes de résonance respectives.

Tubes de verre de la catègorie L.

Dimensions de ces tubes et colonnes de résonance dans l'eau distillée

Source sonore Sol $_5$ Température 21^0.5

TUBE	Diamètre moyen extérieur	Diamètre moyen intérieur	Rapport entre l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur du tube	Colonne de résonance
			x =	$\frac{\lambda}{2}$ = mm.
No. 1 .	10.575 mm.	6.02 mm.	0.7566	447.6
» 2 .	14.5562 »	8.9409 »	0.6280	444.7
» 3 .	16.8329 »	11.5628 »	0.4557	437.5

— Si l'on considère, comme toute à l'heure, le tableau de la page 151, on y voit que le tube I_4 *de la catégorie P* a juste la même colonne de résonance que le tube No. 3 de ce tableau-ci, bien que les valeurs du rapport x pour ces deux tubes présentent une différence. Ainsi on a :

Pour le tube I_4 de la catégorie P $\frac{\lambda}{2} = 437._6$ et $x = 0.5381$, à $21_0.5$

» » » No. 3 » » » L $\frac{\lambda}{2} = 437._5$ » $x = 0.4557$ »

On voit que la différence entre les *substances* de ces deux tubes, dans lesquels on a les mêmes colonnes de résonance, se manifeste, ainsi que dans le cas précédent, par la différence des valeurs du rapport x.

B. *Colonnes de résonance dans des tubes de fer*

39. Les résonances qu'on entend dans les colonnes d'eau, à l'aide des tubes de fer, sont aussi claires, et même plus intenses, que celles qu'on entend avec les tubes de verre. Nous avons fait des exépriences pour trouver la longueur de ces colonnes, en employant trois tubes de fer ayant les diamètres intérieurs et extérieurs relativement réduits et assez égaux. On déterminait la grandeur des diamètres extérieurs au moyen du compas à coulisse, et on calculait les diamétres intérieurs de la même manière que

pour les tubes de verre. Pour expérimenter, on fixait les tubes, au moyen d'une garniture spéciale, à la cloche de notre appareil, à la place qu'occupaient les tubes de verre. Puisque dans les expériences actuelles les parois des tubes sont opaques, on ne peut plus marquer la position de la résonance, au moment de sa production, par l'observation directe de la colonne liquide, comme cela se pratiquait pour les tubes de verre. On a surmonté cette difficulté, en fixant, à côté et parallèlement au tube de fer, un tube de verre et en le faisant communiquer par un petit tube métallique ayant la forme d'un T, d'un côté avec la cloche de l'appareil et de l'autre avec le tube de caoutchouc du vase mobile P, de sorte que le liquide, qui pénétrait dans la cloche et, par conséquent, aussi dans le tube de fer, pénétrait aussi dans le tube de verre et il y montait en même temps qu'il s'élevait dans le tube de fer. Si le débit de l'eau était convenablement réglé, alors, au moment de la résonance, la hauteur de la colonne liquide dans le tube de fer était la même que dans le tube de verre. La distance entre deux positions de renforcement du son dans le tube de fer pouvait, pas conséquent, être évaluée avec précision à l'aide du tube de verre. On a ainsi les colonnes de résonance tout le long de notre tube métallique.

Dans le petit tableau qui suit, nous donnons les dimensions de trois tubes de fer, le rapport entre l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur et la longueur des colonne de résonance observées avec eux dans l'eau distillée. Les observations ont été faites à la même température, ou bien elles y ont été réduites par la même correction que celle qui a été employée aux tubes de verre.

Colonnes de résonance dans les tubes de fer

Source sonore Sol_5. Température 23⁰.

TUBE	Extrémité supérieure		Extrémité inférieure		A la I résonance		A la III résonance		Moyenne des diamètres de la I—III res.		Rapport entre l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur moyen	Colonne de résonance
	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur	Diamètre extérieur	Diamètre intérieur		
											x =	$\frac{\lambda}{2}$ = mm
No. 1 .	16.72	10.90	16.82	11.10	16.79	11.04	16.73	10.91	16.76	10.97	0.5273	460.7
» 2 .	20.95	14.12	20.85	14.47	20.88	14.45	20.94	14.43	20.91	14.44	0.4479	457.7
» 3 .	26.30	20.00	26.20	19.82	26.23	19.88	26.29	19.99	26.26	19.93	0.3175	454.5

On peut faire ici, à l'occasion de ces tubes de fer, la même remarque, par rapport à la variation de la colonne de résonance, que celle qu'on a faite pour les tubes de verre, c'est-à-dire que cette colonne varie dans le même sens que le rapport x.

— En examinant encore le tableau, de la page 151 qui donne les colonnes de résonance, dans l'eau, obtenues avec les tubes de verre de la *catégorie* P, on voit que la valeur du rapport x est presque la même pour le tube de verre III_1-que pour le tube de fer No. 2 des expériences actuelles. En réduisant la colonne de résonance du tube de verre à la même température que celle du tube de fer, et en comparant les données correspondant à ces deux tubes, on a:

pour le tube de verre III_1 de la catégorie P, $x = 0.4439$ et $\frac{\lambda}{2} = 436.4$

et

» » » » » No. 2 de fer $x = 0.4479$ et $\frac{\lambda}{2} = 457.7$

On voit donc, que la valeur du rapport x étant presque la même pour les deux tubes, la colonne de résonance du tube de fer dépasse de $21^{mm}.3$, celle qui a été signalée pour le tube de verre. L'influence de la *substance* du tube est affirmée par là, de la manière la plus évidente. La résistance des parois du tube de fer étant plus grande, détermine une augmentation bien plus sensible de la colonne de résonance du liquide.

Comme conclusion de toutes les expériences faites jusqu'ici pour étudier les colonnes de résonance avec de l'eau distillée, nous retenons ceci: *la colonne de résonance dans l'eau distillée croît avec la température, croît avec la rapport entre l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur du tube et croît aussi avec la résistance de la substance du tube.*

Résonances dans des solutions salines

40. Après avoir étudié la variation qu'éprouve la colonne de résonance de l'eau distillée avec les dimensions et la nature du tube, une étude sur la variation de cette colonne en rapport avec *la nature du liquide* n'est pas dépourvue d'intérêt.

Pour le moment, nous nous contenterons d'exposer, succintement, le résultat des observations faites sur quelques solutions salines et quelques autres liquides, comme l'alcool absolu et le mercure, en nous réservant de faire plus tard une description plus détaillée d'une autre série d'expériences faites dans cette direction.

Les expériences dans les solutions salines ont été faites dans l'intention de voir la manière dont varie la colonne de résonance, d'abord dans *des solutions de même sel*, mais de *densités*, c'est-à-dire de *concentrations* variables, et ensuite dans des solutions de *différents sels, mais de même concentration.*

Les expériences ont été faites avec des solutions de *chlorure de sodium*, *chlorure de baryum*, *chlorure de calcium* et *sulfate de cuivre*, en employant des solutions à quatre degrés différents de concentration. Toutes les expériences ont été faites avec le même tube de verre I_5 de la *catégorie* P et à la même température de $21{,}5^0$. Avec les solutions de chlorure de baryum et de sulfate de cuivre on a encore expérimenté à des températures différentes de la précédente[1]).

Le degré de concentration de la solution a été déterminé par les méthodes ordinaires, en considérant les pertes de poids que l'on constate en pesant un cylindre de verre, de volume connu, par exemple de 10 c. c., successivement dans la solution et dans l'eau distillée, à la température de l'expérience.

On s'est toujours arrangé de manière que la *densité* des solutions soit prises à la température de $21^0{,}5$, à laquelle ont été faites aussi les observations sur la résonance. Aux densités prises à une température quelque peu différente on a ajouté une correction déduite à l'aide du coefficient de dilatation de la solution respective, ou de celui d'une solution de densité à peu près pareille à celle de notre solution.

D'autre part, si la température à laquelle on a observé la *résonance* de la solution n'était pas exactement la température de $21^0{,}5$, on introduisait les corrections nécessaires pour réduire à cette température la colonne de résonance trouvée ; ces correc-

[1]) Les sels employés dans ces expériences étaient des sels du commerce. Ils ne pouvaient, donc, pas être chimiquement purs.

tions ont été déterminées, soit à l'aide de la différence que présentent entre elles les observations faites à deux températures différentes, soit par le calcul, au moyen d'une formule dont nous parlerons bientôt.

- Donc, toutes les densités, et, par suite, les concentrations des solutions, de même que toutes les colonnes de résonance ont été déterminées, ou réduites, à la même température de $21^0,5$.

Dans les tableaux qui suivent nous donnons le résultat de ces déterminations, ne mettant en évidence que les concentrations au lieu des densités, et cela en vue de quelques remarques intéressantes que nous insérerons ci-après.

Tube I_5 de la catégorie P.

Température $21,5^0$. Source sonore Sol_5.

	No.	Concentration	Colonne de résonance $\frac{\lambda}{2}=$ mm
Solution de chlorure de sodium	1	0.0662	466.6
	2	0.1259	486.1
	3	0.1791	502.2
	4	0.1971	508.2
Solution de chlorure de calcium	1	0.0661	456.7
	2	0.1271	469.0
	3	0.1788	479.5
	4	0.1942	482.5

	No.	Concentration	Colonne de résonance $\frac{\lambda}{2}=$ mm
Solution de chlorure de baryum	1	0.0662	445.8
	2	0.1256	449.2
	3	0.1970	452.7
	4	0.2125	453.0
Solution de sulfate de cuivre	1	0.0663	448
	2	0.1238	452.8
	3	0.1410	454.3
	4	0.1615	457.4

En rappelant que la colonne de résonance dans l'eau distillée à $21^0,5$ est, avec le même tube I_5 de la catégorie P : $\frac{\lambda}{2}=442^{mm.},7$, on déduit de ce tableau : 1) que la colonne de résonance *est plus grande dans une solution que dans l'eau distillée ;* 2) que cette colonne de résonance croît avec *le degré de concentration* de la solution, et 3) que la grandeur de la colonne de résonance diffère *pour la même concentration avec la nature du sel de la solution,* comme on le constate en comparant entre eux les nombres situés sur les mêmes lignes horizontales de ces tableaux, où figurent les mêmes concentrations. Des quatre solutions soumises à l'expérience, on remarque que c'est la solution du chlorure de sodium qui nous offre la plus grande colonne de résonance et celle du chlorure de baryum, la plus petite, pour la même concentration.

Outre ces expériences faites à la même température, on a fait encore, avec quelques solutions, des expériences à d'autres températures que celle de $21^0.5$. Nous donnons ici les résultats obtenus dans ce cas pour les solutions de *chlorure de baryum* et de *sulfate de cuivre*.

	No.	Température	Concentration	Colonne de résonance $\frac{\lambda}{2}=$ mm.
Solution de chlorure de baryum	1	$14^0.7$	0.1058	445.2
	2	$32^0.7$	0.1021	456.5

	No.	Température	Concentration	Colonne de résonance $\frac{\lambda}{2}=$ mm.
Solution de sulfate de cuivre	1	$5^0.4$	0.0677	433
	2	$12^0.5$	0.0681	441.4

Dans ces expériences on a tâché de maintenir, autant que possible, à des températures différentes, presque la même concentration pour chacune de ces deux solutions. On voit que, en admettant la *concentration constante*, la colonne de résonance pour *chaque solution croît avec la température* — phénomène analogue à celui qu'on a remarqué dans les expériences faites avec l'eau distillée.

Remarques. En examinant plus attentivement les valeurs des colonnes de résonance des solutions précédentes, nous avons été conduits à faire deux remarques intéressantes:

Première remarque. On constate que la longueur des colonnes de résonances d'une solution peut être donnée, à la même température, en fonction de sa concentration, par la formule:

$$(s)\quad y^2 = \alpha^2 + \beta x$$

où y représente la longueur de cette colonne, x, la concentration et α et β, deux constantes indépendantes de la concentration.

Si l'on fait $x=0$, c'est-à-dire si l'on suppose la concentration nulle, on a $y=\alpha$, ce qui montre que α n'est autre chose que la colonne de résonance dans l'*eau distillée*, à la température de l'expérience; il résulte de là qu'elle garde la même valeur pour toutes les solutions prises à la même température. La constante β varie avec la nature du sel de la solution, et l'on obtient sa valeur, en exprimant que la formule (s) est satisfaite par les données d'une expérience.

Vérifions cette formule pour les données de trois des solutions précédentes : *le chlorure de calcium, le chlorure de sodium* et *le sulfate de cuivre.*

a) *Chlorure de calcium.* On a trouvé qu'à la température de $21^0,5$, la colonne de résonance dans l'eau distillée, avait dans le tube I_5, une longueur :

$$\frac{\lambda}{2} = 442.7^{\mathrm{mm}}$$

On a donc $\alpha = 442.7$ et $\alpha^2 = 442.7^2 = 195983.29$

L'expérience prouve que, si $x = 0.1942$, on a $y = 482.5$, donc $y^2 = 232806.25$ et l'on trouve :

$$\beta = 189613.6$$

La formule (s) devient dans ce cas :

$$y^2 = 195983.3 + 189613.6\ x \tag{1}$$

En calculant, à présent, les valeurs de y pour les autres degrés de concentration de cette solution et en comparant les valeurs obtenues à celles qui ont été données par l'expérience, on trouve :

pour $x = 0.0661$,	par la formule	$y = 456.6$	et par l'expérience $y = 456.7$
» $x = 0.1271$	» » »	$y = 469.1$	» » » $y = 469.0$
» $x = 0.1788$	» » »	$y = 479.5$	» » » $y = 479.5$

c'est-à-dire, on constate que les résultats de l'observation et ceux de l'expérience sont presque identiques.

b) *Chlorure de sodium.*

Si l'on considère comme données initiales $\left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \text{lorsque } y = 442.7 \\ \text{et} \\ x = 0.1259 \quad \text{» } y = 486 \end{array}\right.$

On trouve :

$$y^2 = 195983.3 + 319428.2\,x$$

En calculant, au moyen de cette formule, les valeurs de y correspondant aux autres concentrations, on constate que :

pour $x = 0.0662$	la formule donne	$y = 466$	et l'expérience $y = 466.6$
» $x = 0.1791$	» » »	$y = 503.2$	» » $y = 502.2$
» $x = 0.1971$	» » »	$y = 508.8$	» » $y = 508.2$

c'est-à-dire une concordance des plus satisfaisantes.

c) *Sulfate de cuivre.* Considérant aussi pour les solutions de ce sel la formule :

$$y^2 = 195983.3 + 74665\,x$$

On constate que :

pour $x = 0.0662$	la formule donne	$y = 448.2$	et l'expérience	$y = 448.0$
» $x = 0.1238$	» » »	$y = 452.9$	» »	$y = 452.8$
» $x = 0.1410$	» » »	$y = 454.1$	» »	$y = 454.3$
» $x = 0.1614$	» » »	$y = 456.1$	» »	$y = 457.4$

On voit, donc, de toutes ces vérifications, qu'il y a une concordance très satisfaisante entre les résultats obtenus par la formule et ceux de l'observation, du moins dans les limites de nos expériences et pour la température de $21^0.5$ degrés.

Deuxième remarque. La constante β qui figure dans la formule :

$$(s)\ y^2 = \alpha^2 + \beta x$$

paraît *être indépendante de la température.*

Appliquons, en effet, cette formule aussi aux observations faites avec notre dernière solution de sulfate de cuivre à la température de $5^0,4$ et de $12^0,5$ et indiquées à la page précédente 163, en gardant pour β *la même valeur que pour la température de* $21^0,5$, c'est-à-dire $\beta = 74665$.

Puisque α représente la longueur de la colonne de résonance dans l'eau distillée à la même température que celle de notre solution et puisque au moyen de la formule de la page 142 on peut obtenir la valeur de α pour ces diverses températures on aura :

$$\alpha = 427.4, \text{ à } 5^0,4$$

et

$$\alpha = 434.8 \text{ » } 12^0,5$$

Notre formule (s) devient, alors :

$$y^2 = 427.4^2 + 74665.\,x, \text{ pour la tempér. de } 5^0.4$$

et

$$y^2 = 434.8^2 + 74665.\,x, \text{ » » » » } 12^2.5$$

Pour les concentrations de nos solutions, indiquées à la page 163 mentionnée plus haut et correspondant à ces températures, on trouve que :

pour $x = 0.0677$ la form. donne $y = 433.2$ et l'exp. $y = 433.0$, à $5^0.4$

et

» $x = 0.0681$ » » » $y = 440.6$ » » $y = 441.4$, » $12^2.5$

On voit que les valeurs de la colonne de résonance de cette solution, sont données par notre formule (s) assez exactement et, par conséquent, le coeficient β qui y figure, peut être considéré comme constant, c'est-à-dire comme *indépendant de la température*. Ce coefficient peut etre donc regardé comme une *constante caractéristique du sel* contenu dans la solution, car sa valeur ne varie qu'avec le sel. Ce serait intéressant de connaître *la signification de cette constante* β, trouvée à l'aide du son. Il se pourrait qu'elle ne dépende, pour un même tube, que *du poids moléculaire* du sel considéré.

Résonance dans l'alcool absolu

41. On a fait avec l'alcool des expériences analogues à celles qui ont été faites avec l'eau. On a cherché d'abord la variation de la colonne de résonance avec la température et ensuite on a étudié la variation de cette colonne avec les dimensions des tubes. Voici le résultat de ces observations :

Variation de la colonne de résonance avec la température

Tube III_3 de la catégorie P. Source sonnore Sol_5.

Température	Colonne de résonance $\frac{\lambda}{2}=$
$2^0.5$	$383.0^{mm.}$
$12^0.5$	373.1
$21^0.5$	368.4
$30^0.1$	359.1

En regardant ces nombres, on voit que la colonne de résonance *décroît dans l'alcool absolu avec la température* — le contraire de ce qu'on avait trouvé pour l'eau. La diminution moyenne par degré de température est, pour ce tube, d'à peu près $0.8^{mm.}$

On constate le même phénomène aussi pour *l'éther.*

La *variation* de la colonne avec les *dimensions des tubes* se fait dans le même sens que pour l'eau distillée. La colonne *croît avec le rapport x* de l'épaisseur de la paroi au rayon intérieur et réciproquement. Voici quelques résultats obtenus avec des tubes de verre de la catégorie P, les expériences ayant eu lieu à la même température de 16^0.

Tubes de la catégorie P Source sonore Sol_5 Temp. 16°.

Tube	Rapport x	Colonne de résonance $\frac{\lambda}{2}=$
II_1	0.2812	$361^{mm.}$
II_4	0.6714	373.1
III_4	0.8083	375

Les valeurs du rapport x ne sont pas tout-à-fait les mêmes que celles qui ont été obtenues pour l'eau avec ces mêmes tubes ; la cause en a été mentionnée à l'occasion de la mesure des dimensions des tubes. Pour l'alcool et l'éther on constate, qu'à partir d'une certaine valeur du rapport x, les variations de la colonne de résonance sont très petites ; la colonne paraît *rester stationnaire* quoique le *rapport x augmente*.

Résonances dans le mercure.

42. Les observations sur la résonance dans le mercure sont difficiles à faire. Les mouvements de haut en bas et réciproquement, qui'il faut imprimer au vase mobile P, ne sont pas trop commodes, alors que ce vase est rempli de mercure. La pression trop grande, qu'exerce ce liquide sur la boîte d'ébonite et sur le tube de caoutchouc du vase P, provoque de fréquents accidents, surtout lorsque la colonne de mercure monte un peu haut dans le tube de résonance.

On a évité la difficulté qu'on éprouvait à se procurer une quantité suffisante de mercure pour remplir la cloche – dont la capacité était d'à peu près $2^1/_2$ litres – de même que l'inconvénient qui provenait de la pénétration du mercure par à coup dans la cloche et dans le tube de résonance, en introduisant dans la cloche, avant l'expérience, une quantité d'eau, qui, avec une certaine quantité de mercure pouvait remplir complètement cette cloche et empêchait, de la sorte, le mercure de varier son niveau dans la cloche pendant l'expérience, en lui permettant toutefois de se mouvoir librement et régulièrement dans le tube de verre. En s'y prenant de cette manière on n'a eu besoin que d'une quantité relativement petite de mercure et on a pu faire des observations concordantes. Parfois, on a substitué à l'eau, la paraffine, ce qui est encore plus préférable, car le mercure restait alors plus pur, durant l'expérience.

Voici quelques résultats obtenus avec quelques tubes de verre de la catégorie P et avec les tubes de la catégorie L :

Source sonore Ré$_5$. Tempér. 22^0.

	TUBE	Rapport x	Colonne de résonance
			$\frac{\lambda}{2}=$ mm.
Tubes de la catégorie P.	II_1.	0.2800	273
	I_2.	0.4105	324
	II_3.	0.5576	347
	II_5.	0.7042	362
	III_4.	0.8000	368

Source sonore Ré$_5$. Tempér. 22^{0}5.

	TUBE	Rapport x	Colonne de résonance
			$\frac{\lambda}{2}=$ mm.
Tubes de la catégorie L.	No. 1..	0.740	381
	» 2..	0.621	369.8
	» 3..	0.559	336.0

On voit, cette fois encore, que la *colonne de résonance croît* avec le rapport x. Cette augmentation est plus grande pour le mercure que pour tous les autres liquides. L'effet de la résistance du tube se manifeste plus fortement dans ce cas que dans d'autres, ce qui prouve aussi que la pression du mercure sur les parois des tubes est plus considérable que celle des autres liquides [1]).

Des observations faites à deux températures différentes (10^0 et 25^0) n'ont laissé voir aucune variation dans la colonne de résonance. Donc, *l'influence de la température* sur la vitesse de propagation du son dans la colonne de *mercure* paraît être *très faible.*

Des recherches de cet ordre *n'ont pu être faites avec le mercure par aucune des méthodes existantes* jusqu'à nos jours. Les nôtres paraissent être *les premières*, dans cette voie.

[1]) Les vibrations de la colonne liquide fatiguaient beaucoup les tubes de verre, et l'effet se ressentait surtout dans le cas des vibrations du mercure Beaucoup de nos tubes de verre se sont cassés durant les expériences, et cela non pas à la suite de quelques chocs accidentels, mais spontanément et sans motif apparent. La manière dont ces tubes se cassaient était fort curieuse : ils se brisaient tout d'un coup en petits morceaux ayant des contours plus ou moins uniformes, ce qui prouvait l'effet des vibrations prolongées et régulières sur leur masse, vibrations qui déterminaient des régions d'une certaine forme, commune à tous les morceaux.

Rapport des colonnes de résonance de deux liquides différents dans le même tube.

43. Avant de finir la série de ces expériences, observons que le résultat des expériences faites avec le mercure nous conduit à une remarque intéressante. Faisons le rapport des colonnes de résonance dans *l'eau et dans le mercure*, observées dans le même tube, et répétons l'opération pour plusieurs tubes de la catégorie P. Puisque les colonnes de résonance dans le mercure ont été obtenues avec le petit *tube sonore Ré*$_5$ tandis que celles dans l'eau étaient obtenues avec le petit tube à anche Sol$_5$, nous ferons d'abord correspondre ces dernières au même petit tube sonore Ré$_5$, en multipliant les colonnes obtenues pour Sol$_5$ par le rapport 1,35 des vibrations de ces deux sons, trouvé dans un chapitre antérieur.

Nous aurons, en nous rapportant aux tableaux respectifs, qui donnent les longueurs de $\frac{\lambda}{2}$ dans l'*eau* et dans le *mercure* pour les tubes considérés :

Tube	$\frac{\lambda \text{ eau}}{\lambda \text{ mercure}} =$
II_1	$1.35 \times \frac{417}{273} = 1.35 \times 1.53$
I_3	$1.35 \times \frac{432.4}{324} = 1.35 \times 1.33$
II_5	$1.35 \times \frac{443.8}{362} = 1.35 \times 1.23$
III_4	$1.35 \times \frac{446.7}{368} = 1.35 \times 1.21$

Il résulte de ces nombres-ci que ce rapport *n'est pas constant ;* il varie avec le tube, en diminuant constamment quand le paramètre x du tube croît. On arrivera à la même constatation, si l'on considérait les observations faites avec *l'alcool absolu* et *l'eau.* Nous avons vu, en effet, que la colonne de résonance dans l'alcool croît très peu, lorsque le paramètre x du tube augmente, à partir d'une valeur assez grande, tandis que pour l'eau ses variations sont encore appréciables. Le rapport des colonnes de ces deux liquides — l'alcool et l'eau — ne peut donc être constant pour tous les tubes, puisque l'un de ses termes varie d'une manière sensible, tandis que l'autre est presque invariable.

Il résulte de là que le principe admis par Tito Martini «*qu'on peut considérer le rapport des colonnes de résonance dans un tube quelconque comme étant constant pour deux liquides, c'est-à-dire indépendant de la nature du tube, et égal au rapport des vitesses* dans *la masse illimitée*», — principe en vertu duquel il a cherché à déduire, par une voie indirecte, la vitesse du son dans tout autre liquide, ayant comme point de comparaison la vitesse dans l'eau — est détruit par le résultat de ces constatations.

Expériences faites dans des tubes concentriques.

44. Pour voir si la pression qu'exerce le liquide en vibration sur les parois du tube est une des causes qui produit la diminution de la longueur d'onde dans une colonne liquide, par rapport à la longueur d'onde dans la *masse* illimitée, et qui amène, par conséquent, aussi la diminution de la vitesse dans la colonne, nous avons entrepris une série d'expériences dans les conditions suivantes : nous avons introduit dans un large tube de verre qui est fixé à la cloche de l'appareil, un autre, plus étroit, et de même longueur, que nous avons convenablement appuyé contre les parois intérieures du premier, de sorte que ces deux tubes deviennent concentriques, en laissant un espace circulaire libre entre leurs parois. Le liquide, qui montait dans la cloche, pouvait pénétrer en même temps dans le tube étroit et dans l'espace circulaire.

En fermant hermétiquement l'extrêmité supérieure de cet *espace circulaire* et en déplaçant le vase mobile P, le liquide ne pouvait pas pénétrer dans cet espace, à cause de la pression de l'air qui s'y trouvait, et ne montait que dans le tube étroit. On avait, donc, le moyen d'entendre les résonances dans le tube étroit, de deux manières : en maintenant l'espace circulaire vide et en ne faisant monter le liquide que dans le tube étroit du milieu, ou bien, en laissant pénétrer le liquide à la fois par le tube étroit et par l'espace circulaire. Dans ce dernier cas, les résonances se produisaient comme d'habitude, dans la colonne du tube étroit, mais on constatait, que la longueur de la *colonne de résonance était toujours plus grande* que celle qui était obtenue, alors que le liquide montait seulement dans le tube du milieu. Puisque, dans ce cas, où la colonne de résonance augmente, le liquide vibrait aussi dans l'espace circulaire, il produisait des pressions qui s'exerçaient sur le côté extérieur du tube étroit du milieu, en même temps qu'à l'intérieur de ce tube se produisaient d'autres pressions, dues aux vibrations du liquide qui y était contenu. Ces pressions de directions opposées, c'est-à-dire sur le côté extérieur et intérieur du tube étroit, quoique de grandeurs différentes, amoindrissaient évidemment leur effet — comme cela arrive dans un piézomètre — et la colonne liquide du tube étroit vibrait presque comme si elle était contenue dans un vase à parois rigides, ou comme dans une masse liquide illimitée. Grâce à cette rigidité relative, le tube absorbe une moindre partie de la force vive contenue dans la masse vibrante du liquide et l'onde sonore acquiert ainsi une plus grande valeur.

Voici quelques exemples de ces essais :

Résonance dans des tubes concentriques

	No.	TUBE	COLONNE DE RÉSONANCE		
			Quand le liquide ne passe que par le tube étroit du milieu	Quand le liquide passe par le tube du milieu et par l'espace circulaire	Augmentation de la colonne
			$\frac{\lambda}{2}=$	$\frac{\lambda}{2}=$	
Eau distillée	1	Tube No. 1 de la catégorie L, intér. au tube I_4 de la catég. P	mm. 447	mm. 459	mm. 12
Tube sonore Sol_5	2	Tube No. 3 de la catégorie L, situé à l'intérieur d'un tube de fer.	437	445	8
	3	Tube No. III_2 de la catégorie P, à l'intérieur d'un tube de verre plus large.	438	448	10
Mercure Tube sonore La_4	1	Tube No. 1 de la catégorie L, intérieur au tube II_3 de la catégorie P.	514	544	30

On voit de ce tableau que les augmentations de la colonne de résonance dans le tube concentrique sont appréciables, quand le liquide monte aussi dans l'espace circulaire, surtout dans les expériences faites avec le mercure.

Dans quelques-unes de ces expériences, la colonne liquide de l'espace circulaire était, pour ainsi dire, suspendue à l'extrémité supérieure du tube [1]), c'est-à-dire qu'elle restait fixe dans cet espace, pendant que le liquide vibrant circulait dans le tube concentrique. Les résultats ont été les mêmes que dans le cas où le liquide circulait à la fois dans cet espace circulaire et dans le tube étroit du milieu.

D'autres expériences similaires, faites avec divers tubes et liquides, ont donné des résultats analogues.

Nous finissons avec cette remarque le court résumé [2]) de nos expériences sur *la résonance dans des colonnes liquides*, destiné à cette seconde partie de notre travail. Nous n'y avons pas fait trop attention au calcul de la *vitesse* du son dans ces colonnes liquides, puisqu'il était superflu – cette vitesse variant, comme on l'a déjà démontré, de la même manière que la colonne de résonance –. Mais de tels calculs seront faits avec plus d'utilité dans ce qui va suivre. Jusqu'alors, et en quittant ces expériences, nous gardons au moins la conviction que notre méthode se prête largement aux investigations et que, grâce à son application judicieuse, on a déjà pu obtenir quelques éléments noveaux et utiles à l'étude de la vitesse du son dans des *masse* liquides illimitées. C'est ce qui constituait le premier but de ces recherches.

---

[1]) On n'avait pour cela qu'à boucher hermétiquement avec de la cire à cacheter l'extrémité supérieure de *l'espace concentrique*, quand le liquide était monté jusqu'à cette extrém té; alors, grâce à la pression de l'air, la colonne liquide se maintient verticale, dans cet espace, tandis que dans le tube concentrique du milieu elle peut se déplacer, en élevant, ou en abaissant son niveau, d'après la position du vase extérieur P.

[2]) On a fait plusieurs centaines d'expériences, à l'occasion de ces recherches. D'autres résultats nouveaux et différants de ceux qui ont été exposés dans ce travail seront publiés ailleurs.

TROISIÈME PARTIE

VITESSE DU SON DANS LES LIQUIDES

Relation théorique entre la vitesse dans la colonne liquide et la vitesse dans la masse liquide illimitée

45. Toutes les expériences précédentes ont eu pour but de déterminer, dans un liquide, la longueur de la colonne de résonance correspondant à un son donné et contenue dans un tube à parois solides. On a vu que cette colonne de résonance, c'est-à-dire la demi-longueur d'onde de ce son dans la colonne liquide considérée, varie avec *le tube* et avec *le liquide.*

Si, donc, on considère la longueur y de la colonne de résonance correspondant à l'une de nos sources sonores, par exemple à Sol_5, et si n est le nombre des vibrations complètes par seconde de cette source, alors on voit que la *vitesse* du son dans la *colonne* liquide, calculée d'après la formule :

$$W = 2ny$$

varie aussi, pour le même liquide, avec le tube au moyen duquel on détermine cette colonne de résonance. Cette valeur ne représente donc pas la vitesse réelle du son *dans la masse* illimitée de ce liquide.

On a vu que dans *des tubes faits de la même substance*, la longueur de la colonne de résonance varie, pour un certain liquide, avec le *rapport de l'épaisseur du tube à son rayon intérieur*, et dans des tubes qui ont *une valeur commune pour ce rapport*, la longueur de cette colonne varie *avec la substance des tubes*, si *le liquide est le même*, ou bien, *avec le liquide*, si les tubes sont faits de la *même substance.*

On peut alors se demander : de quelle manière la *colonne de résonance* correspondant à un son donné dépend-elle de *ce rap-*

port entre l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur, *de la substance du tube et de la nature du liquide*, ou bien, par quelle relation cette *colonne de résonance* se trouve-t-elle liée à ces *divers facteurs* et à la *vitesse réelle* du son dans la *masse illimitée* du liquide?

C'est une pareille relation que nous nous proposons de trouver pour les colonnes de résonance, c'est-à-dire pour les demi-longueurs d'onde déterminées dans les colonnes liquides par nos expériences antérieures.

Pour cela, nous prenons comme point de départ un principe établi par Newton [1]) relatif à la propagation d'une déformation dans les milieux élastiques et comme point d'appui quelques-unes des formules de l'Élasticité.

Le principe de Newton est le suivant [1]): „*La vitesse de propagation d'une déformation dans les milieux élastiques est égale à la racine carrée du rapport entre la variation absolue de la pression et la variation absolue de la densité dans la masse du corps*".

En vertu de ce principe, on a, en désignant par V la vitesse de propagation, et par δp et $\delta\rho$ les variations de pression et de densité, dues à une déformation élastique :

$$(\alpha) \qquad V^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho}.$$

Si l'on applique ce principe aux gaz, aux solides et aux liquides, considérés en masses libres, on obtient immédiatement l'expression connue de la vitesse de propagation du son dans ces milieux.

Pourquoi, alors, ne pourrait-on pas appliquer le même principe aussi à nos expériences sur la résonance des *colonnes* liquides contenues dans des tubes solides élastiques ? Essayons de le faire.

Soit, en un point de la masse liquide vibrante, p et ρ, la densité et la pression dans un volume v, à l'état d'équilibre, et Δp, Δv et $\Delta\rho$ les variations infiniment petites de pression, de volume et de densité, produites par une déformation élastique.

---

[1]) Voir le Journal de Physique 1-ère série. T. IX, pg. 58, an. 1880.

Pour la masse de ce volume, on a, évidemment:

$$(\rho + \Delta\rho)\,(v - \Delta v) = \rho v$$

d'où, en négligeant le produit infiniment petit de second ordre $\Delta\rho . \Delta v$:

$$\rho . \Delta v = v . \Delta\rho$$

ou :

$$(1) \qquad \frac{1}{\Delta\rho} = \frac{1}{\rho} . \frac{v}{\Delta v}$$

En multipliant les deux membres par la variation Δp, on a:

$$(2) \qquad \frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \frac{1}{\rho} . \frac{v . \Delta p}{\Delta v} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\frac{\Delta v}{v} . \frac{1}{\Delta p}}\right]$$

Nous considérons ces variations de volume, de pression et de densité comme ayant lieu dans une de nos *colonnes liquides* pendant la vibration.

D'après Newton, le premier membre représente le carré de la vitesse de propagation de la perturbation, produite dans la masse élastique, à laquelle correspondent ces variations de volume, de préssion et de densité, c'est-à-dire, pour notre cas, dans la *colonne liquide*.

Soit W la vitesse de propagation du son, que nous observons dans une de nos *colonnes liquides* soumises à la résonance et qui n'est point égale—comme on l'a déjà vu—à la vitesse absolue (réelle) du son dans le liquide pris en *masse* illimitée. C'est une vitesse *relative*, ou *apparente*. Admettons que la différence entre ces deux vitesses ne serait due qu'au fait que les parois du tube solide élastique cèdent aux pressions développées par la vibration du liquide, ces parois n'ayant pas une rigidité suffisante, comme cela arrive dans les expériences de résonance avec les gaz [1]). Dans ce cas, la variation du volume dans un point de la masse liquide est un peu plus grande qu'elle ne le serait dans une masse illimitée, ou dans un vase absolument rigide, alors que la *variation de préssion* dans ce point *serait la même*. On peut donc considérer la variation

[1]) Nos expériences faites avec les tubes concentriques ont mis en évidence ces pressions.

effective du volume Δv comme étant composée de deux parties Δv_1 et Δv_2, c'est-à-dire:

$$(3) \qquad \Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$$

Δv_1 étant la variation qu'aurait le liquide dans un vase *absolument rigide* et Δv_2 la variation produite, au même point, par le changement du *volume du vase* à cause de son élasticité.

On a alors:

$$(4) \qquad \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{1}{\Delta p} = \frac{\Delta v_1}{v} \cdot \frac{1}{\Delta p} + \frac{\Delta v_2}{v} \cdot \frac{1}{\Delta p} = \beta + \omega$$

en mettant:

$$(5) \qquad \beta = \frac{\Delta v_1}{v} \cdot \frac{1}{\Delta p}$$

et

$$(6) \qquad \omega = \frac{\Delta v_2}{v} \cdot \frac{1}{\Delta p}$$

On voit que β représente, d'après son expression, le *coefficient de compressibilité absolue du liquide* (la variation absolue de l'unité de volume du liquide rapportée à la variation de pression) et que ω est la variation de l'unité de volume dans *un point du vase*, par rapport à la variation de pression. En introduisant l'expression (4) dans la formule (2), nous obtenons:

$$(7) \qquad \frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta v_1}{v} \cdot \frac{1}{\Delta p} + \frac{\Delta v_2}{v} \cdot \frac{1}{\Delta p}} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\beta + \omega} = \frac{1}{\rho\beta}\left[\frac{1}{1 + \frac{\omega}{\beta}}\right]$$

La vitesse, qui figure dans le premier membre, est celle qu'on obtient dans le liquide dans les conditions de l'expérience, c'est-à-dire la vitesse *apparente* W observée dans nos *colonnes*, car c'est dans ces colonnes que nous supposons effectuées ces variations de volume, de densité et de pression. On a donc:

$$(\alpha) \qquad W^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$$

La vitesse *absolue* V dans la *masse* illimitée du liquide est donnée par la formule de Laplace:

$$(\beta) \qquad V^2 = \frac{1}{\rho\beta}$$

où β est le coefficient de compressibilité absolue du liquide et ρ sa densité.

On peut donc, alors, écrire:

$$W^2 = \frac{1}{\rho\beta} \cdot \frac{1}{\left[1+\frac{\omega}{\beta}\right]} = V^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{\omega}{\beta}} \tag{8}$$

d'où:

$$V^2 = W^2\left[1+\frac{\omega}{\beta}\right]. \tag{9}$$

C'est-à-dire que le carré de la vitesse absolue du son dans la *masse* liquide est égal au carré de la vitesse apparente dans la *colonne*, multipliée par le facteur:

$$U^2 = 1 + \frac{\omega}{\beta} \tag{10}$$

Dans nos expériences précédentes, on obtenait la vitesse dans la *colonne* liquide en multipliant la *grandeur de la colonne de résonance*, – c'est-à-dire la demi-longueur d'onde du son dans cette colonne – déduite de l'observation, et *que nous désignons maintenant par y*, par le double du nombre des vibrations, 2n, du son renforcé, à savoir:

$$W = y \cdot 2n$$

tandis que la vitesse absolue du même son dans une *masse* liquide est donnée par la formule analogue :

$$V = \lambda n = \frac{\lambda}{2}. 2n$$

où $\frac{\lambda}{2}$ désigne la *demi-longueur d'onde* du même son, dans la *masse illimitée* [1]). En introduisant les valeurs de ces vitesses dans la relation précédente (9), on trouve :

$$\lambda^2 = (2y)^2\left[1+\frac{\omega}{\beta}\right] \tag{11}$$

ce qui constitue une relation entre *la colonne de résonance* du liquide contenu dans un tube élastique et la *longueur d'onde* de notre son dans la *masse* liquide illimitée.

[1]) Nous désignerons dorénavant par y la demi-longueur d'onde du son dans la *colonne* liquide et par $\frac{\lambda}{2}$ la demi-longueur du même son dans la *masse* liquide illimitée.

Le problème se réduit maintenant à la détermination du facteur :

$$(10) \qquad U^2 = 1 + \frac{\omega}{\beta}$$

où β représente, comme on l'a déjà dit, *la compressibilité absolue du liquide* de l'expérience, et ω le rapport entre *la variation de l'unité du volume du tube solide élastique* et la *variation de pression* Δp, qui provoque cette variation de volume.

C'est l'expérience qui nous donne le coefficient β; il reste à déterminer la valeur de ω.

Si l'on suppose que la variation du volume d'un tube cylindrique n'est due qu'aux dilatations radiaires, c'est-à-dire dans le sens du rayon, sans qu'il y ait *des tensions longitudinales* — comme cela a lieu effectivement dans nos expériences, car les pressions s'exercent toujours normalement aux parois du tube—on peut alors exprimer cette variation de volume par des formules déduites de la théorie de l'élasticité.

Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$v = \pi r^2 h.$$

Si, par la déformation symétrique du cylindre, le rayon devient $r + \delta r$, le volume devient, en désignant par Δv_2 sa variation et en *négligeant les infiniment petits du second ordre :*

$$v + \Delta v_2 = \pi h (r + \delta r)^2 = \pi r^2 h \left[1 + 2\frac{\delta r}{r}\right] = v\left[1 + 2\frac{\delta r}{r}\right],$$

d'où l'on déduit la variation de l'unité de volume :

$$(12) \qquad \frac{\Delta v_2}{v} = 2\frac{\delta r}{r}.$$

L'expression (6) de ω devient alors :

$$(13) \qquad \omega = \frac{\Delta v_2}{v}\frac{1}{\Delta p} = 2\frac{\delta r}{r} \cdot \frac{1}{\Delta p}$$

où δr est la variation du rayon, due à la variation Δp de la pression.

Au moyen des formules générales de l'élasticité [1]), on peut

[1]) Voir LAMÉ «Théorie mathématique de l'Elasticité» pg. 184.
Voir aussi ERNESTO CESARO, «Teoria matematica della Elasticita», pg. 196.

établir que dans la variation d'un cylindre élastique soumis à des pressions intérieures et extérieures, uniformes, et qui n'éprouve pas de tensions longitudinales, la variation du rayon intérieur r est:

$$(14) \qquad \frac{\delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[c'(1-2\sigma) + \frac{c''}{r^2}\right](1+\sigma)^{1)}$$

où r représente le rayon intérieur du cylindre, σ, le coefficient de Poisson, E, le coefficient d'élasticité de la substance, dont le cylindre est constitué, et c' et c'', des constantes ayant la forme:

$$c' = \frac{p_1 r_1^2 - p r^2}{r_1^2 - r^2}$$

$$c'' = \frac{(p_1 - p) r_1^2 r^2}{r_1^2 - r^2}$$

où r et r_1 représentent le rayon intérieur et extérieur du cylindre, et p et p_1, les variations des pressions exercées intérieurement et extérieurement sur les parois de ce cylindre [2]).

Si $p_1 = 0$ – c'est-à-dire si la variation de la pression extérieure est nulle – et si l'accroissement de la pression intérieure est $p = \Delta p$ – comme dans le cas de notre tube cylindrique pendant la vibration de la colonne liquide—alors ces constantes deviennent [3]) :

$$c' = \frac{-\Delta p \cdot r^2}{r_1^2 - r^2}$$

$$c'' = \frac{-\Delta p \cdot r_1^2 r^2}{r_1^2 - r^2}$$

et l'expression (14) donne:

$$(15) \qquad \frac{1}{\Delta p} \cdot \frac{\delta r}{r} = \frac{1}{E}\left[(1-2\sigma) r^2 + r_1^2\right] \frac{(1+\sigma)}{r_1^2 - r^2}.$$

---

[1]) Cette formule donne aussi la variation du rayon r d'une couche intérieure *quelconque* du cylindre soumis aux pressions uniformes.

[2]) Les pressions p et p_1 représentent dans l'expression de c' et c'' des *variations* de pression (accroissements ou diminutions), car c'est grâce à ces variations de pression que le solide éprouve une déformation, c'est-à-dire un nouvel état d'équilibre, où le rayon et le volume ont respectivement les variations δr et Δv_2.

[3]) Nous avons calculé ces constantes dans le cas particulier de la déformation du cylindre par des dilatations radiaires, en nous servant des formmules générales trouvées dans les traités d'Élasticité mentionnés plus haut.

On a alors pour ω :

$$(16) \qquad \omega = \frac{2\delta r}{\Delta p \, . \, r} = \frac{2}{E}\left[1 - 2\sigma)r^2 + r_1^2\right]\frac{(1+\sigma)}{r_1^2 - r^2}.$$

Il s'ensuit, d'après (9), que le coefficient par lequel on doit multiplier le carré de la vitesse observée dans la *colonne* liquide, pour obtenir le carré de la vitesse *absolue*, coefficient qui, d'ailleurs, d'après (11), est le même que celui par lequel on doit multiplier le carré du double de la longueur y de la *colonne de résonance*, dans le tube cylindrique, pour avoir le carré de la longueur d'onde λ correspondant à la vitesse réelle dans la *masse* liquide, devient d'après la formule (10) :

$$(17) \qquad U^2 = 1 + \frac{\omega}{\beta} = 1 + \frac{2}{\beta E}\left[r^2(1 - 2\sigma) + r_1^2\right]\frac{(1+\sigma)}{r_1^2 - r^2}.$$

Si on y introduit l'épaisseur e de la paroi du tube, on obtient, en observant que

$$r_1 = r + e, \quad \text{d'où} \quad r_1^2 = r^2 + 2re + e^2,$$

la formule :

$$U^2 = 1 + \frac{2}{\beta E}\left[r^2(1 - 2\sigma) + r^2 + 2re + e^2\right]\frac{(1+\sigma)}{2re + e^2}$$

$$= 1 + \frac{2}{\beta E}\left[2r^2(1-\sigma) + 2re\left(1 + \frac{e}{2r}\right)\right]\frac{1+\sigma}{2re\left(1 + \frac{e}{2r}\right)}$$

ou bien, en divisant les deux termes de la fraction par $2r^2$ et en désignant par :

$$(18) \quad x = \frac{e}{r} \text{ — } \textit{le rapport de l'épaisseur de la paroi au rayon :}$$

$$U^2 = 1 + \frac{\omega}{\beta} = 1 + \frac{2}{\beta E}\left[1 - \sigma + x\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right]\frac{(1+\sigma)}{x\left(1 + \frac{x}{2}\right)}$$

ou bien encore :

$$(19) \qquad U^2 = 1 + \frac{2}{\beta E}(1+\sigma)\left[1 + \frac{1-\sigma}{x\left(1 + \frac{x}{2}\right)}\right]$$

Si l'on introduit cette valeur du coefficient U^2 dans la formule (9) ou (11), on obtient la *relation cherchée entre la vitesse absolue du son et la vitesse dans la colonne*, ou entre *la longueur* *d'onde* dans la ***masse illimitée*** et la *colonne de résonance du liquide dans un tube solide élastique :*

$$(20) \qquad \lambda^2 = (2y)^2 \left\{ 1 + \frac{2}{\beta E}(1+\sigma)\left[1 + \frac{1-\sigma}{x\left(1+\frac{x}{2}\right)}\right]\right\}$$

Dans cette formule le coefficient de compressibilité β dépend seulement du liquide de l'expérience, E et σ de la substance du tube solide, qui contient la colonne liquide, tandis que le rapport x ne dépend que des dimensions de la section droite du tube.

C'est là la relation que nous déduisons comme conséquence du principe de Newton appliqué à nos expériences et dans l'unique hypothèse des déformations radiaires du tube solide contenant le liquide.

Cette relation (20) est de la forme:

$$(21) \qquad \lambda^2 = (2y)^2 \left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]$$

où

$$(22) \qquad \begin{cases} a = \dfrac{2(1+\sigma)}{\beta E} \\ b = 1 - \sigma \\ z = x\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) \quad \text{et } x = \text{le rapport } \dfrac{\text{épaisseur}}{\text{rayon intér.}} \end{cases}$$

On voit que cette formule contient tous les facteurs, qui ont une influence sur la colonne de résonance dans un liquide: *La compressibilité du liquide, la substance du tube et les dimensions de sa section droite.*

La réflexion si profonde de Helmholtz, faite à l'occasion du compte-rendu des expériences de Wertheim et mentionnée à la page 74 à savoir que : „l'influence du tube sur la longueur d'onde dans une colonne liquide qui parle doit dépendre du coefficient d'élasticité de ce tube, de même que du rayon et de l'épaisseur de sa paroi", se trouve justifiée d'une manière éclatante dans cette formule.

Remarquons, enfin, que nos expériences sur la résonance des liquides avaient prouvé que l'influence des dimensions du tube sur la vitesse dans la colonne liquide n'apparaît que par le *rapport* x entre *l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur.* La formule à laquelle nous sommes arrivés le prouve aussi.

Vérification de notre formule :

$$(\mathrm{f}) \qquad \lambda^2 = (2y)^2\left[\ 1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right], \quad \text{où} \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{2(1+\sigma)}{\beta E} \\ b = 1 - \sigma \\ z = x\left(1 + \dfrac{x}{2}\right). \end{array}\right.$$

Pour connaître le degré d'exactitude dont cette formule représente la relation entre la vitesse ***dans la colonne*** et la vitesse ***absolue***, nous allons la soumettre à plusieures vérifications.

Première vérification

46. Remarquons que si l'on expérimente sur un liquide avec plusieurs tubes faits de la même substance, mais ayant des dimensions différentes pour leurs sections droites, alors il n'y a que la colonne de résonance y et le rapport x et par suite z, qui varient, tandis que les paramètres a, b et λ restent constants dans notre formule.

Soit y_1, y_2, y_3 les colonnes de résonance dans trois tubes dont x_1, x_2, x_3 sont les rapports respectifs entre l'épaisseur de la paroi et le rayon et z_1, z_2, z_3, les valeurs correspondantes. On peut alors former le système suivant de trois équations :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda^2 = (2y_1)^2\left(1 + a + \dfrac{ab}{z_1}\right) \\ \lambda^2 = (2y_2)^2\left(1 + a + \dfrac{ab}{z_2}\right) \\ \lambda^2 = (2y_3)^2\left(1 + a + \dfrac{ab}{z_3}\right) \end{array}\right.$$

à l'aide duquel il semblerait pouvoir déduire les valeurs de trois inconnues λ, a et b, c'est-à-dire la longueur d'onde et par conséquent la vitesse dans la ***masse*** liquide, le coefficient σ, ainsi que le produit β E, correspondant au liquide et au tube de l'expérience.

On remarque cependant que ce système est homogène et du premier degré par rapport à λ^2, $(1+a)$ et (ab), de sorte que, pour qu'il admette pour ces quantités, considérées comme inconnues des solutions différentes de zéro, il faut qu'il y ait entre les valeurs expérimentales y_1, y_2, ... z_1 ... la relation suivante, déduite de l'annulation du *déterminant* des coefficients de ces inconnues, c'est-à-dire :

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} y_1^2 & \frac{y_1^2}{z_1} & 1 \\ y_2^2 & \frac{y_2^2}{z_2} & 1 \\ v_3^2 & \frac{y_3^2}{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Cela montre que si notre relation (f) est compatible avec les expériences, il doit y avoir un système de trois valeurs (y_1z_1), (y_2z_2), (y_3z_3) qui vérifie cette relation (2).

Mettons ce déterminant (2) sous une autre forme, en divisant d'abord ses lignes respectivement par y_1, y_2, y_3, et puis en les multipliant par z_1, z_2, z_3 ; on obtient successivement :

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{y_1^2} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{y_2^2} \\ 1 & \frac{1}{z_3} & \frac{1}{y_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & 1 & \frac{z_1}{y_1^2} \\ z_2 & 1 & \frac{z_2}{y_2^2} \\ z_3 & 1 & \frac{z_3}{y_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & 1 & \frac{z_1}{y_1^2} \\ z_2 - z_1 & 0 & \frac{z_2}{y_2^2} - \frac{z_1}{y_1^2} \\ z_3 - z_1 & 0 & \frac{z_3}{y_3^2} - \frac{z_1}{y_1^2} \end{vmatrix} = 0$$

d'où

$$(z_2 - z_1)\left[\frac{z_3}{y_3^2} - \frac{z_1}{y_1^2}\right] = (z_3 - z_1)\left[\frac{z_2}{y_2^2} - \frac{z_1}{y_1^2}\right]$$

ou bien :

$$(3)\qquad \frac{z_1 - z_2}{\frac{z_1}{y_1^2} - \frac{z_2}{y_2^2}} = \frac{z_1 - z_3}{\frac{z_1}{y_1^2} - \frac{z_3}{y_3^2}} = p.$$

Essayons à présent de voir si les données de nos observations vérifient cette expression (3). Pour cela considérons les résultats obtenus avec les tubes de verre de la catégorie L, dont les diamètres intérieurs ont été mesurés par des colonnes de mercure (page 156). Avec ces tubes on avait trouvé pour le rapport x, et par conséquant pour $z = x(1 + \frac{x}{2})$, de même que pour les colonnes de résonances y, les valeurs suivantes :

$$x_1 = 0.756, \quad \text{d'où} \quad z_1 = x_1\left(1 + \frac{x1}{2}\right) = 1.04176 \quad \text{et} \quad y_1 = 447.6$$

$$x_2 = 0.628, \quad \text{»} \quad z_2 = x_2\left(1 + \frac{x2}{2}\right) = 0.82519 \quad \text{»} \quad y_2 = 444.7$$

$$x_3 = 0.450, \quad \text{»} \quad z_3 = x_3\left(1 + \frac{x3}{2}\right) = 0.55125 \quad \text{»} \quad y_3 = 437.5$$

En faisant avec ces valeurs les calculs indiqués dans notre déterminant (3) on aura successivement :

$$z_1 - z_2 = 0.21657 \qquad z_1 - z_3 = 0.49051$$

$$\frac{z_1}{y_1^2} = 10^{-6} \times 5.19987 \qquad \frac{z_1}{y_1^2} - \frac{z_2}{y_2^2} = 10^{-6} \times 1.02723$$

$$\frac{z_2}{y_2^2} = 10^{-6} \times 4.17264 \qquad \frac{z_1}{y_1^2} - \frac{z_3}{y_3^2} = 10^{-6} \times 2.31986$$

$$\frac{z_3}{y_3^2} = 10^{-6} \times 2.88001$$

Le premier membre de l'expréssion (3) devient alors :

$$p = \frac{z_1 - z_2}{\frac{z_1}{y_1^2} - \frac{z_2}{y_2^2}} = 10^6 \frac{0.21657}{1.02723} = 10^6 \times 0.2108$$

et le second :

$$p = \frac{z_1 - z_3}{\frac{z_1}{y_1^2} - \frac{z_3}{y_3^2}} = 10^6 \frac{0.49051}{2.31986} = 10^6 \times 0.2114$$

On voit que les valeurs numériques des deux membres de cette formule (3) sont presque les mêmes. La coïncidence est très satisfaisante, si l'on pense aux erreurs inévitables dues à l'inégalité du diamètre intérieur et des parois des tubes, de même qu'aux difficultés éprouvées à l'occasion des différentes mesures. Cette coïncidence prouve, non seulement que notre formule paraît être juste, mais encore que la méthode d'observation jouit d'une sensibilité remarquable, vu que ses résultats sont aussi concordants.

Pour le moment nous laisserons de côté d'autres justifications faites avec d'autres systèmes de valeurs fournies par nos expériences, pour passer à des nouvelles vérifications pour la même formule.

Seconde vérification

47. On peut encore vérifier la formule (f) à l'aide des résultats des observations de Wertheim[1]). Nous possédons, en effet, les valeurs de la vitesse dans des colonnes d'eau et d'autres liquides trouvées par Wertheim à l'aide de ses tuyaux sonores et en même temps nous pouvons calculer la vitesse dans la *masse* illimitée, pour les mêmes liquides, par la formule théorique de Laplace. Nous pouvons, par conséquent, former le rapport de ces deux vitesses, comme il a été indiqué dans le tableau de la page 56, où *a* désigne la vitesse dans les colonnes que nous représentons à présent par W.

D'un autre côté on peut *calculer* ce rapport, pour les mêmes observations, à l'aide de *notre formule*, car on a, d'après ce qui précède :

$$\frac{V}{W}=\left(1+\frac{\omega}{\beta}\right)^{1/2}=U=\left[1+a\left(1+\frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}$$

et on peut déterminer les paramètres a, b, z qui figurent dans le second membre de cette formule et dont les valeurs sont, comme on le sait :

$$\begin{cases} a=\dfrac{2(1+\sigma)}{\beta E} \\ b=1-\sigma \\ z=x\left(1+\dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

On doit encore se rappeler que la valeur de la vitesse dans une colonne liquide, qui figure dans le tableau mentionné, représente la moyenne des observations faites seulement avec les tubes *d'embouchure* A, et non pas la moyenne des observations faites avec les tubes de toutes les embouchures, comme l'avait fait Wertheim.

Nous avons fait ce choix aussi bien dans le but d'introduire plus de rigueur dans les calculs — car les différences entre les valeurs obtenues avec des tubes de diverses embouchures n'étaient pas toujours, comme on l'a déjà montré, négligeables — que dans le but de pouvoir faire maintenant une comparaison entre les résultats des observations de Wertheim et les résultats donnés par notre formule. Tous les éléments qui figurent dans l'expression des paramètres

[1]) Nons ne considérerons pour cela, bien entendu, que les observations de Wertheim qui ont été trouvées exemptes d'erreurs.

a, b, z sont connus pour l'embouchure A et, par conséquent, pour tous les tubes de laiton qu'on y visse. On a donc – voir la page 28 – pour cette embouchure A :

$$\text{diamètre intérieur} = 40^{\text{mm.}}$$

$$\text{épaisseur de la paroi} = 2^{\text{mm.}}$$

d'où
$$x = \text{rap.} \frac{\text{épaisseur paroi}}{\text{rayon intér.}} = \frac{2}{20} = 0.1$$

Pour la valeur du coefficient d'élasticité E du laiton, dont étaient fabriqués les tubes, on peut prendre la valeur qu'a préférée Wertheim dans ses discussions faites à l'occasion de ses recherches sur la valeur du coefficient de Poisson σ [1]) :

$$E = 9277 \ {}^{\text{kgr.}}/_{\text{mm}^2}$$

et pour le coefficient de compressibilité β des liquides de Wertheim on prend les valeurs marquées dans le tableau mentionné plus haut, valeurs choisies à la suite de nos longues discussions, comprises dans la 1-ère partie de ce travail.

Si on se rappelle que le coefficient de compressibilité en ${}^{\text{kgr.}}/_{\text{mm.}^2}$ s'exprime par $\frac{10^6 . \beta}{10333}$ en fonction du coefficient de compressibilité β en atmosphère par m.^{2} et que la valeur du coefficient σ admise par Poisson est :

$$\sigma = \frac{1}{4} = 0.25 \ ^{2)}$$

on aura pour ces données les calculs suivants :

$$b = 1 - \sigma = 0{,}75$$

$$z = x\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 0.105$$

$$\frac{b}{z} = \frac{0.75}{0.105} = \frac{750}{105}; \quad 1 + \frac{b}{z} = \frac{855}{105}$$

$$a = \frac{2(1+\sigma)\,10333}{10^6\beta E} = \frac{2 \times 1.25 \times 10333}{10^6\beta \times 9277} = \frac{25832{,}5}{10^6\beta \times 9277}$$

$$a\left(1 + \frac{b}{z}\right) = \frac{855}{105} \times \frac{25832.5}{10^6\beta \times 9277} = \frac{1}{.10^6\beta} \times 22.6744 = \frac{N}{10^6\beta}$$

où
$$N = 22.6744$$

[1]) Mémoire sur l'équilibre des corps homogènes. — Annales de Physique et de Chimie. T. XXIII, an. 1848, page 52.

[2]) Dans une communication faite à la Société des Sciences de Bucarest dans la séance du 8 Mars 1910 (Voir le Bulletin de la Société, No. 3, de l'année 1910), nous avons prouvé que les calculs faits par Wertheim dans son «Mémoire sur l'équilibre des corps homogènes» sont le plus souvent erronés, d'où il suit que ses conclusions tirées en faveur de la valeur $\frac{1}{3}$ pour le coefficient σ de Poisson ne sont pas sérieuses. C'est pourquoi nous avons préféré la valeur théorique $\frac{1}{4}$ de ce coefficient.

quand le rapport cherché devient:

$$U=\left[1+a\left(1+\frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}=\left[1+\frac{N}{10^6\beta}\right]^{1/2}.$$

Nous calculerons ce rapport pour les liquides de Wertheim, en introduisant dans son expression les valeurs des coefficients de compressibilité β correspondant à ces liquides.

Nous donnons ici le résultat de ce calcul, en reproduisant en partie le tableau de la page 56 pour mettre en regard les valeurs trouvées directement pour le rapport des vitesses en question à l'aide des données de Wertheim et les valeurs *calculées* selon notre formule.

Nous éliminerons de ce tableau les substances pour lesquelles nous avons prouvé, par la discussion comprise dans la remarque de la page 63, que les observations de Wertheim étaient erronées.

TABLEAU

des valeurs du rapport entre la vitesse dans la masse et la vitesse dans la colonne, ***déterminées directement*** pour les liquides de Wertheim et *calculées* au moyen de ***notre formule***

No.	SUBSTANCE	Température t	Coefficient de compressibilité $10^6.\beta$	Vitesse dans des colonnes d'embouchure A, d'après Wertheim a=W	Vitesse théorique d'après la formule de Laplace V	Rapport direct entre la vitesse théorique et la vites. dans la colonne trouvée par Wertheim $U=\frac{V}{a}=\frac{V}{W}$	Même rapport d'après notre formule: $U=\left[1+\frac{N}{10^6.\beta}\right]^{1/2}$
		$t^0=$	$10^6.\beta=$	a=	V=	$\frac{V}{a}=$	$U=\frac{V}{W}=$
1	L'eau à la température.	15°	47.2	1169	1466	1.25	1.22
2	» » » » .	30°	45.4	1242	1497	1.21	1.22
3	Solution de chlorure de sodium	18°	26.6	1298	1788	1.38	1.36
4	Solution de carbonate de sodium	22°.2	29.7	1295	1699	1.31	1.33
5	Alcool absolu.	23°	101.3	966	1121	1.16	1.11
6	Essence de térébenthine.	0°	73.4	1055	1252	1.19	1.14
7	Éther sulfurique . . .	0°	111 sous 3 atm.	946	1101	1.16	1.10
			et 132 sous 7 atm.	946	1010	1.07	1.08

D'après Wertheim, la valeur du rapport entre la vitesse dans la masse et la vitesse dans la colonne liquide devait être la même, égale au $\sqrt{\frac{3}{2}}$, pour tous les liquides.

En regardant ce tableau on voit que ce résultat ne se réalise pas, la valeur du rapport $\frac{V}{a}$ étant autre que $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1.224$. On voit, en même temps, que le facteur U, calculé d'après *notre formule* (dernière colonne), facteur par lequel on doit multiplier la vitesse dans la colonne pour obtenir la vitesse dans la masse illimitée pour les liquides de Wertheim, est, le plus souvent, presque égal à la valeur du rapport effectif $\frac{V}{a}$, déduit par l'observation directe et marqué dans l'avant-dernière colonne du même tableau.

Cela constitue une *nouvelle justification* apportée indirectement à notre formule, à l'aide des résultats même des expériences de Wertheim, et par conséquent une nouvelle preuve de son exactitude.

Troisième vérification

48. Faisons subir à notre formule :

$$(f) \qquad \lambda^2 = (2y)^2\left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]$$

où

$$\begin{cases} a = \dfrac{2(1+\sigma)}{\beta E} \\ b = 1 - \sigma \\ z = x\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

une nouvelle et intéressante vérification, de la manière suivante :

Procédons à une expérience de résonance dans un liquide, dont on connaît le coefficient de compressibilité β, avec un tube de dimensions et de substance connues, c'est-à-dire un tube dont on détermine le rapport x de l'épaisseur de la paroi au rayon intérieur et par conséquent z, et le coefficient d'élasticité E. L'expérience nous donne la colonne de résonance y, pour ce tube, correspondant au son employé. On peut prendre pour σ la valeur attribuée à ce coefficient par Poisson, c'est-à-dire $\sigma = \frac{1}{4} = 0,25$, surtout dans le cas où le tube, dont on se sert, est de verre, car presque toutes les déterminations expérimentales, faites jusqu'à présent, ont prouvé que pour le verre la valeur de σ diffère peu de $\frac{1}{4}$ [1]).

On connaît ainsi tous les éléments qui figurent dans le second membre de notre expression (f); on peut donc obtenir la valeur de ce membre.

Faisons une seconde expérience de résonance dans le même liquide, en employant la même source sonore, mais avec un autre tube de substance et de dimensions différentes des précédentes. On aura d'autres valeurs pour y, E et z, tout en gardant pour σ la même valeur $\frac{1}{4}$. La valeur du second membre de l'expression (f), calculée avec ces nouvelles données, doit être égale à la première, si la *formule est exacte*, car cette valeur doit représenter, ainsi que la première, la longueur d'onde de notre son dans la masse *illimitée* du même liquide et elle est, par conséquent, proportionnelle à la vitesse de propagation du son dans cette masse.

Les données de nos expériences vérifient cette déduction avec une exactitude surprenante.

Détermination du coefficient d'élasticité. Avant d'essayer cette vérification, il faut rappeler que le coefficient d'élasticité E d'un tube solide, soit de verre, soit de métal, employé pour la résonance d'un liquide, a toujours été déterminé, dans nos expériences, par des vibrations longitudinales, d'après la méthode de Kundt. En provoquant des vibrations longitudinales dans un pareil tube, dont la longueur l est connue, on détermine d'abord à l'aide des *figures de poudre*, la longueur d'onde du son produit dans l'air du tube de Kundt — „le tube à poudre«. Si v est la vitesse du son dans l'air de ce tube et si d représente la distance entre deux noeuds de l'onde vibratoire dans l'air de ce tube, la vitesse de propagation V du son par vibrations longitudinales dans la substance

---

[1]) I. Violle.—Physique moléculaire T. I, fasc. 1, pag. 447.
O. D. Chwolson. — Traité de physique. T. I. fasc. 3, pag. 796.

de notre tube vibrant est donnée – comme on le sait – par la formule:

$$(1) \qquad V = v \frac{l}{d}$$

La valeur de la vitesse v du son dans l'air de l'intérieur du tube de Kundt a été déterminée de la même manière que celle qui a été employée à l'occasion de la détermination du nombre de vibrations de nos sources sonores (pag. 133). Puisque le »tube à poudre«, où se produit le mouvement vibratoire, était habituellement assez large et puisque le son produit par le tube vibrant était toujours très élevé, on n'a plus éprouvé la nécessité d'introduire dans le calcul de cette vitesse v la correction de Helmholtz, relative à la diminution de la vitesse du son à cause de la petitesse du rayon du tube.

En connaissant par cette formule (1) la vitesse de propagation V du son produit par des vibrations longitudinales dans la mase de notre tube, employé à la résonance dans les liquides, on obtient le coefficient d'élasticité E de ce tube, par la formule connue:

$$V^2 = \frac{E}{\delta}$$

où δ représente la masse de l'unité de volume et d'où l'on déduit, après avoir remplacé la densité δ par le poids spécifique *d* de la substance du tube:

$$(2) \qquad E = \frac{V^2 d}{g}$$

g étant l'accélération de la gravitation, qu'on a considérée égale à 9.81 $^{m.}$ La valeur du coefficient d'élasticité, obtenue de cette manière et exprimée habituellement par des $^{kgr.}/_{mm^2}$, est introduite dans le calcul de la valeur du second membre de notre formule (f), de même que les autres quantités relatives aux dimensions du tube et à la compressibilité du liquide, qui figurent dans cette formule.

Citons un exemple de calculs nécessaires à la détermination du coefficient d'élasticité d'un tube quelconque, employé à l'observation de nos colonnes de résonance.

Tube de verre II_1 de la catégorie P.

Données des mesures et de l'expérience :

Longueur totale du tube . . . . $l = 1500^{mm.}$

Distance entre deux noeuds dans l'expérience des vibrations longitudinales du tube . . . . $d = 108.368^{mm.}$

Température de l'air vibrant à l'intérieur du »tube à poudre« . $t = 21^0.9$

» du thermomètre *humide* dans l'air de ce tube . $t' = 14^0$

Pression barométrique. . . . . $H = 744.2^{mm.}$

Tension f' de la vapeur d'eau à 14^0 de temp., exprimée en mm. de mercure . . . . $f' = 11{,}9^{mm.}$

Tension f de la vapeur d'eau qui se trouve dans l'air vibrant, calculée d'après la formule :

$$f = f' - 0.00079\,(t - t')\,H$$

où f représente la tension à la température indiquée par le thermomètre humide. . . . . $f = 7.26^{mm.}$

Vitesse du son dans *l'air* du tube de Kundt, calculée à l'aide de ces données, d'après la formule :

$$v = 330{,}6\,(1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}}\left(1 + 0.19\frac{f}{H}\right)$$

où $\alpha = 0.00366$ et $t = 21^0.9$. . . . . $v = 344.31^{m.}$

Vitesse du son produit par des vibrations longitudinales dans le *tube* de verre, calculée d'après la formule déjà citée :

$$V = v\,\frac{l}{d} = \frac{344.31 \times 1500}{108.386}$$

$$V = 4766^{m.}$$

Densité du verre dont le tube est fabriqué, déterminée par la méthode du flacon et par rapport à l'eau à 4^0 — la détermination étant faite pour un fragment de notre tube à la température de $21^0.5$, température très rapprochée de celle à laquelle a eu lieu l'expérience des vibrations longitudinales. . . . . $d = 2{,}8538$

Coefficient d'élasticité du verre de ce tube — déterminé avec ces données et à l'aide de la formule :

$$E = \frac{V^2 d}{g} = \frac{\overline{4766}^2 \times 2.8538}{9.81}$$

$$E = 6607^{kgr.^2}/_{mm.^2}$$

C'est ainsi qu'on a déterminé les coefficients d'élasticité *de tous* les tubes avec lesquels on a observé les colonnes de résonance dans les liquides et dont on s'est servi pour vérifier notre formule.

Ces déterminations ont prouvé que les coefficients d'élasticité des tubes *de même provenance* n'avaient pas toujours la même valeur, comme on aurait été porté à le croire. De là la nécessité de déterminer ce coefficient séparément pour chaque tube.

Réunissons, à présent, dans un tableau, les valeurs de ces coefficients d'élasticité et les vitesses trouvées à l'aide des vibrations longitudinales pour la plupart des tubes employés dans nos expériences.

Dans toutes les déterminations soit des densités de la substance, soit de la vitesse par des vibrations longitudinales et donc du coefficient d'élasticité du tube, on a cherché de maintenir la température constante et autant que possible égale à 21^0.5, température égale à celle des expériences faites sur la résonance dans les colonnes liquides.

TABLEAU

donnant les *coefficients d'élasticité* et les vitesses par vibrations longitudinales pour les tubes employés dans nos expériences sur la résonance dans des colonnes liquides

Température des expériences 21^0.5.

CATÉGORIE DES TUBES	Tube	Vitesse du son par des vibr. longit. dans le tube	Densité de la substance du tube	Coefficient d'élasticité en kgr./mm.^{2}	CATÉGORIE DES TUBES	Tube	Vitesse du son par des vibr. longit. du tube	Densité de la substance du tube	Coefficient d'élasticité en kgr./mm.^{2}
		V=	d=	E=			V=	d=	E=
Tubes de verre de la catégorie P	I_5	4860.0	2.7906	6718	Tubes de verre de la catégorie L	No 1	5386.5	2.5276	7482
	II_1	4527.8	2.9499	6166		No. 2	5394.1	2.5286	7501
	II_3	4765	2.8538	6607	Tubes de verre de la catégorie T	No. 1	5397	2.52108	7485
	III_1	4781	2.7906	6502		No. 2	5320	2 5490	7354
	III_2	4878	2.7906	6771	Tubes de fer	No. 1	4725.1	7.6886	17493
	III_3	4860	2.7906	6718		No. 2	4798	7.54368	17700

On remarque dans ce tableau que les tubes de verre de la catégorie L et T, ainsi que les tubes de fer, ont leurs coefficients d'élasticité plus grands que les tubes de verre de la catégorie P. Or, d'après nos expériences précédentes, on a vu que pour un même rapport x les colonnes de résonance de ces tubes sont de même supérieuresà celles des tubes de la catégorie P. On voit, donc, que la grandeur de ces colonnes varie dans le même sens que l'élasticité du tube.

A l'aide de ces coefficients d'élasticité et des résultats des observations faites pour *l'eau distillée*, calculons à présent la valeur du second membre de notre formule (f) pour chaque tube et réunissons les résultats dans un seul tableau comparatif.

Presque toutes les expériences de résonance ont été faites, comme on l'a déjà dit, à la même température de $21.^0 5$. Les observations qui n'ont pas été faites à cette température – comme celles, par exemple, où l'on a employé les tubes de verre de la catégorie T et les tubes de fer (voir pg. 154 et 159) – y ont été réduites à l'aide des corrections indiquées à la page 145 et se sont ces dernières valeurs qu'on a inscrites dans le tableau.

Pour tous les tubes nous avons attribué au coefficient σ la valeur donnée par Poisson $\sigma = 0,25$, valeur que l'expérience même confirme assez bien pour le verre.

Quel que soit le tube, la valeur du coefficient de compressibilité β est la même, celle qui correspond à l'eau distillée à $21^0.5$ de température. Pour fixer cette valeur, nous considérerons comme point de comparaison les valeurs attribuées à ce coefficient par Amagat et Röntgen et correspondant à des températures voisines à la nôtre.

Amagat trouve que le coefficient de compressibilité de l'eau distillée est: [1])

$\beta = 10^{-6} \times 51.1$ à 0^0 de température
$\beta = 10^{-6} \times 46.8$ » 20^0 » »
$\beta = 10^{-6} \times 44.9$ » 50^0 » »

On en déduit par proportion :

de la variaton du coefficient entre 0^0 et 20^0, une variation de 0.215 correspondant à 1^0
» » » » » » 20^0 » 50^0, » » » 0.063 » » »

On peut donc considérer 0.14 comme variation moyenne correspondant à 1^0 dans le voisinage de la température de 20^0. Avec cette correction on trouve une diminution de 0.21 dans la valeur de la compressibilité, lorsque la température varie de 20 à 21.5 degrès. On peut donc considérer :

$\beta = 10^{-6} \times 46.6$ comme *coefficient de compressibilité de l'eau à $21^0,5$ de température.*

---

[1]) Voir O. D. Chwolson. — Traité de Physique T. I. fasc. 3, pg. 586, an. 1907.

Si l'on considérait les valeurs attribuées au même coefficient de compressibilité de l'eau par Roentgen :

$$\beta = 10^{-6} \times 48.1 \quad \text{à} \quad 9^0 \text{ de température}$$
$$\beta = 10^{-6} \times 46.7 \quad " \quad 18^0 \quad " \quad "$$

on trouverait une variation de 0.155 correspondant à 1^0 et on déduirait la diminution de 0.54 pour la compressibilité dans l'intervalle de 18^0 à $21^0.5$ degrés de température, quand on aura le coefficient :

$$\beta = 10^{-6} \times 46.2 \text{ correspondant à la même } \textit{température} \text{ de } 21^0.5$$

Dans tous nos calculs nous préférerons la valeur précédente $\beta = 10^{-6} \times 46.6$ déduite par Amagat, puisque ses déterminations semblent plus rigoureuses et d'ailleurs cette valeur se rapproche beaucoup du coefficient de Roentgen.

Dans le tableau qui suivra, nous aurons donc en fait de valeurs communes dans les calculs pour tous les tubes :

$$\sigma = 0.25, \quad b = 1 - \sigma = 0.75, \quad \text{et} \quad \beta = 10^{-6} \times 46.6, \text{ à } 21^0.5$$

tandis que les autres paramètres : x — et par conséquent z — y et E, varieront avec le tube de l'expérience.

Observons, enfin, que, dans le calcul des termes contenus dans notre formule (f), les coefficients β et E doivent être exprimés par les mêmes unités, de sorte que, si le coefficient d'élasticité E est donné en $^{kgr.}/_{mm.^2}$, alors aussi le coefficient de compressibilité β doit être exprimé au moyen des mêmes unités; donc, si β est donné en atmosphères$/_{m.^2}$, il deviendra $\frac{\beta.10^6}{10333}$ en $^{kgr.}/_{mm.^2}$ et la constante a, qui renferme le produit de ces coefficients, deviendra avec ces unités :

$$a = \frac{2(1+\sigma)10333}{10^6\beta E}$$

ou encore, puisque $\sigma = 0.25$:

$$a = \frac{2.5 \times 10333}{10^6\beta E} = \frac{25832.5}{10^6\beta E},$$

β étant la compressibilité du liquide, exprimée en atmosphères, et E, la valeur de l'élasticité du tube en $^{kgr.}/_{mm.^2}$.

TABLEAU

donnant les valeurs du second membre de notre formule :

$$\lambda = 2y\left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}$$

pour les tubes avec lesquels on a déterminé les colonnes de résonance dans l'eau distillée

Température 21°.5. Source sonore Sol 5.

	TUBE	Rapport x entre l'épaisseur de la paroi et le rayon intérieur	Valeur de l'expression $z=x\left(1+\frac{x}{2}\right)$	Colonne de résonance y	Coefficient d'élasticité du tube	Valeur de la constante $a = \frac{2(1+\sigma)10333}{10^6\beta E}$	Valeur de la somme $1+\frac{b}{z}$	Valeur de la somme : $\left[1+a+\frac{ab}{z}\right]$	Valeur de la racine carrée $U=\left[1+a\left(1+\frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}$	Valeur du produit $\frac{\lambda}{2}=y\left[1+a\left(1+\frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}$
		x=	z=	y=	E=	a=	$\left(1+\frac{b}{z}\right)=$	$\left[1+a\left(1+\frac{b}{z}\right)\right]=$	$\left[1+a\left(1+\frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}=$	$\frac{\lambda}{2}=$
Tube de verre de la catégorie P.	I_5.	0.666	0.88778	442.7	6718	0.08251	1.8448	1.15222	1.07341	475.20
	II_1.	0,2826	0.32278	417	6166	0.08990	3.3233	1.29877	1.13963	475.23
	II_3.	0.5625	0.72070	439.1	6607	0.08390	2,04065	1.17121	1.08305	475.57
	III_2.	[1]) 0.506	0.63402	438.1	6770	0.08188	2.1829	1.17874	1.08568	475.64
	III_3.	0.6516	0.86389	442.5	6718	0.08251	1.86815	1.15415	1.07431	475.38
									Moyenne...	475.41
Tubes de verre de la catégorie T.	No. 1.	0.4944	0.61661	439.5	7485	0.07406	2.21587	1.164 1	1.0789	474.2
	No. 2.	0.4832	0.59994	433.8	7354	0.07538	2.2537	1.16993	1.08166	474.06
									Moyenne...	474.13
Tubes de verre de la catégorie L.	No. 1.	0.7566	1.04282	447.6	7480	0.07413	1.71920	1.12748	1.0618	475.25
	No. 2.	0.6280	0.82519	44[illegible].7	7500	0.07391	1.90887	1.14109	1.0628	475.02
	No. 3	0.450	0.55121	437.5	7500	0.07391	2.36054	1.17447	1.0836	474.14
									Moyenne...	474.81
Tube de fer.	No. 1.	0.5273	0.66630	459.4	1749	0.03169	2.1256	1.06737	1.0331	474.61

Il résulte de ce tableau que *la valeur du second membre* de notre formule *est presque la même* aussi bien pour les tubes d'une même catégorie, c'est-à-dire de même substance, que pour les tubes de catégories différentes, c'est-à-dire de substances différentes. La coïncidence de ces valeurs est une preuve nouvelle et importante de l'exactitude de notre formule, surtout si l'on pense

[1]) La valeur du rapport x de ce tube diffère un peu de celle qui a été indiquée dans le tableau de la pag. 151, où l'on avait x=0.4997, car le tube se cassant plus tard en plusieurs morceaux on a pu obtenir le diamètre intérieur, aux extrémités de ces morceaux, par des mesures directes. La valeur inscrite dans ce tableau est le résultat de ces mesures—et elle est préférable-tandis que celle du tableau cité est le résultat d'un calcul, où l'on a employé seulement les valeurs des diamètres des extrémités du tube entier.

à toutes les petites erreurs qu'on a certainement commises durant les observations.

La valeur moyenne du résultat des tubes de toutes les catégories considérées est:

$$\frac{\lambda}{2} = 474{,}74 \text{ mm.}$$

où λ représente, selon sa signification, la *longueur d'onde* dans la *masse* illimitée du liquide.

En calculant avec cette valeur la *vitesse* dans la *masse* illimitée d'eau distillée d'après la formule:

$$V = \frac{\lambda}{2}(2n)$$

on trouve, en sachant que pour notre source sonore

$$2n = 2 \times 1560 = 3120 \text{ v. c.}:$$

$$V = 1481{,}1^{\text{m.}}.$$

tandis que la même vitesse *calculée* d'après la formule de Laplace pour le coefficient de compressibilité $\beta = 10^{-6}46{,}6$ et la densité $d = 0{,}9979$, est:

$$V = 1476.3 \text{ m}$$ [1]).

La différence entre ces deux valeurs n'est que de 4.8 m. c'est-à-dire négligeable.

La coïncidence de ces résultats donne, donc, à notre formule une vérification des plus sérieuses.

Quatrième vérification

48 bis. La précédente vérification de notre formule revient, en somme, à la détermination de la longueur d'onde λ dans la masse illimitée de l'eau, à l'aide des colonnes liquides de résonance observées dans des tubes solides. Mais on peut procéder à la vérification de la même formule aussi d'une manière en quelque sorte inverse: on peut prendre comme connue la longueur d'onde λ et se proposer de déterminer par le calcul la colonne de résonance y pour un liquide et un tube donné.

---

1) À cette vitesse dans la *masse* liquide correspond pour la demi-longueur d'onde la valeur $\frac{\lambda}{2} = 473.18$ mm.

Tirons, en effet, de notre formule (f) la valeur de la colonne de résonance.

Nous avons :

$$(g) \qquad y = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}}$$

$$\text{où} \begin{cases} a = \dfrac{2(1+\sigma)\,10333}{10^6 \beta E}, \text{ en } {}^{\text{kgr.}}/_{\text{mm}^2} \\ b = 1 - \sigma \\ z = x\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

Tout ce qui entre dans le second membre de cette formule (g) nons sera connu, si nons connaissons la compressibilité β et la densité *d* du liquide, de même que les constantes *x* et E du tube de l'expérience.

Nous pouvons, en effet, déduire, d'abord, la longueur d'onde λ pour un son, dont le nombre *n* de vibrations nous est donné, par la formule :

$$(1) \qquad \lambda = \frac{V}{n}$$

où la vitesse V du son dans la masse liquide se calcule, en mètres, par la formule de Laplace :

$$(2) \qquad V^2 = \frac{10{,}333 \times 9{,}8088}{\beta d} = \frac{101{,}3543}{\beta d}$$

et en suite, nons pouvons, déterminer pour le tube, dont nous allons nous servir à l'expérience, le rapport *x* de l'épaisseur de la paroi au rayon intérieur et le coefficient d'élasticité E par le procédé indiqué plus haut. Nous avons ainsi tous les éléments qui se trouvent dans le second membre de cette formule (g), où nous prenons, comme toujours, $\sigma = \frac{1}{4}$, et nous pouvons, par conséquent *calculer à priori*, la longueur de la colonne de résonance *y*, que devrait donner notre liquide dans le tube et pour le son considéré.

Faisons, après cela, une expérience avec ce tube dans le liquide en question, et comparons la valeur de la colonne de résonance ainsi trouvée avec la valeur calculée. D'après le résultat obtenu on jugera de l'exactitude de la formule.

Toutes les expériences faites par nous dans ce but ont montré qu'entre ces deux valeurs il y a toujours une concordance remarquable.

Nous en citerons ici deux, faites sur l'eau distillée à $21^0,5$, avec deux tubes de verre, pris au hasard et ayant, par conséquant, une provenance et une composition quelconque.

Voici les calculs et les résultats de l'expérience pour ces deux tubes :

Premier tube

Données des mesures et résultats des formules.

Longueur totale du tube en verre . . . . $l = 1232^{mm.}$

Rapport x de l'épaisseur au rayon intérieur . . . . $x = 0,1269$

d'où $z = x\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ . . . . $z = 0,13495$

Distance entre deux noeuds dans l'expérience des vibr. long. du tube . . . . $d = 82,233^{mm.}$

Température de l'air vibrant dans l'intérieur du tube »à poudre« de Kundt . . . . $t = 21^0,5$

Température du thermomètre *humide* dans l'air de ce tube . $t' = 13^0,7$

Pression barométrique. . . . . $H = 742,6^{mm.}$

Tension f′ de la vapeur d'eau à $13^0,7$, exprimée en mm. de mercure . . . . $f' = 11,6$

Tension f de la vapeur d'eau qui se trouve dans l'air vibrant du tube, calculée d'après la formule :

$$f = f' - 0,00079(t-t')H. \;\dots\dots\; f = 7,03^{mm.}$$

Vitesse du son dans *l'air* du tube »à poudre«, calculée à l'aide de ces données, d'après la formule :

$$v = 330,6\,(1 + \alpha t)^{1/2}\left(1 + 0,19\frac{f}{H}\right) \;\dots\dots\; v = 344,013^{m.}$$

Vitesse du son produit par des vibr. longit. dans le *tube de verre*, à $21^0,5$ calculée, d'après la formule :

$$V = v\frac{l}{d} \;\dots\dots\dots\dots\; V = 5154^{m.}$$

Densité du verre dont ce tube est fabriqué—déterminée pour un fragment de ce tube, à la tempér. de $21^0,5$ . . . . $d = 2,4768$

Coefficient d'élasticité de ce tube, déterminé à l'aide de ces données par la formule :

$$E = V^2 \frac{d}{g} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; E = 6707.55^{kgr}/_{mm^2}$$

Coefficient de compressibilité de l'eau distillée à $21^0,5$ en atm. $/m^2$ . . . . $\beta = 10^{-6} \times 46,6$

Densité de l'eau à la temp. de $21^0,5$ . . . . $d = 0,99793$

Vitesse du son dans la *masse* liquide, à $21^0,5$, d'après la formule de Laplace :

$$V^2 = \frac{101,354}{\beta d} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; V = 1476^{m.}34$$

Nombre de vibrations complètes de la source sonore Sol_5. . $n = 1560^{v.c}$

Demi longueur d'onde de ce son dans la *masse* liquide, d'après la formule :

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{V}{2n} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{\lambda}{2} = 473,18^{mm.}$$

Avec ces données on obtient successivement pour les quantités qui entrent dans le second membre de notre formule (g), et pour $\sigma = 0,25$:

$$1 + \frac{b}{z} = 1 + \frac{0,79}{0,13495} = 6,5576$$

$$a = \frac{2(1 + \sigma)\, 10333}{10^6 \beta E} = 0,082645$$

d'où

$$1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right) = 1,541953$$

et par conséquent :

$$U = \left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]^{1/2} = 1,24173$$

En calculant, maintenant, la valeur de la colonne de résonance par la formule d'en-haut

$$y = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{U}$$

on trouve :

$$y_{cal.} = \frac{473.18}{1.2417} = 381,1^{mm.}$$

Or l'expérience donne pour le même tube de verre avec de l'eau distillée à $21^0,5$:

$$y_{obs.} = 381,5$$

c'est-à-dire une valeur presque identique.

Second tube

Données des mesures et résultats des formules:

Longueur totale du tube. . . . . $l = 1400^{mm.}$

Rapport x de l'épaisseur de la paroi au rayon intérieur . $x = 0,3126$

Valeur de $z = x\left(1 + \frac{x}{2}\right)$. . . . . $z = 0,36146$

Distance entre deux noeuds dans l'expérience des vibrations longitudinales du tube . . . . $d = 89^{mm.}$

Vitesse du son dans *l'air* du „tube à poudre", calculée d'après la formule indiquée plus haut. . . . . . . $v = 344,518^{m.}$

Vitesse du son par vibrations longitudinales dans *le tube* de verre destiné à l'expérience de resonance dans le liquide, déterminée à $21^0,5$, d'après la formule $V = v\frac{l}{d}$ . . $V = 5424^{m.},8$

Densité du verce de ce tube à la température de $21^0,5$. . $d = 2,5556$

Coefficient d'élasticité de ce tube pour la temperature de $21^0,5$ . . . . $E = 7652,2$ en $^{kgr}/_{mm^2}$

Vitesse du son dans la *masse* de l'eau distillée à $21^0,5$ et *demi-longueur d'onde* dans cette masse pour la source sonore Sol_5 les mêmes que celles d'en haut, à savoir : $V = 1476,34$

et . . . . $\frac{\lambda}{2} = 473,18$

Avec ces données on trouve successivement :

$$1 + \frac{b}{z} = 1 + \frac{0,75}{0,3126} = 3,07492$$

$$a = \frac{2(1+\sigma)\,10333}{10^6\beta E} = 0,072444$$

et

$$1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right) = 1,22276$$

d'où

$$U = \left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]^{1/2} = 1,1055$$

quand on obtient, par notre formule (g), pour la colonne de résonance respective :

$$y_{cal.} = \frac{473,18}{1,1055} = 428^{mm.}$$

valeur presque égale à celle que fournit aussi l'expérience et qui est:

$$y_{obs.} = 428,4^{mm.}$$

On remarque que la densité et le coefficient d'élasticité, de même que le rapport de l'épaisseur de la paroi au rayon intérieur, pour ce second tube de verre, ont des valeurs bien différentes de celles qui correspondent au premier tube et toute fois la concordance entre les colonnes de résonance *observées* et les colonnes *calculées* est pour les deux tubes aussi satisfaisante que possible.

Ces résultats confirment donc pleinement l'exactitude de notre formule [1]).

Cinquième verification

49. Nous vérifierons une fois de plus la formule:

$$\text{(f)} \qquad \lambda^2 = (2y)^2\left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]$$

où

$$\begin{cases} a = \dfrac{2(1+\sigma)}{\beta E} \\ b = 1 - \sigma \\ z = x\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

de la manière suivante:

---

1) Notre formule peut prendre aussi la forme :

$$y = \frac{10^3}{2n}\left[\frac{101,354}{d\left[\beta + \frac{2(1+\sigma)\ 10333}{10^6 E}\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]}\right]^{1/2} \text{ en mm,}$$

qu'on obtient en éliminant λ et v entre les équations (g), (1) et (2) qui figurent au commencement de cette quatrième vérification. Nous avons cependant gardé notre formule sans lui faire subir cette modification, parce que nous connaissions déjà la grandeur de la longueur d'onde λ pour notre liquide et nous avons pu ainsi l'utiliser directement dans nos calculs.

Multiplions les deux membres de cette formule par le carré du nombre de vibrations de la source sonore employée dans l'expérience. Le produit du premier membre par ce facteur représentera le carré de la *vitesse* du son dans la *masse* illimitée du liquide:

$$V^2 = \left(2n\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

On peut donc écrire:

$$V^2 = (2ny)^2\left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]$$

En y remplaçant *a* et *b* par leurs valeurs et en exprimant la vitesse en mètres—car les colonnes de résonance y sont exprimées en millimètres — on a:

$$\text{(I)} \qquad V^2 = \left(\frac{2ny}{10^3}\right)^2\left[1 + \frac{2(1+\sigma)}{\beta E}\left(1 + \frac{1-\sigma}{z}\right)\right]$$

Puis, comme le coefficient d'élasticité E est donné en $^{kgr.}/_{mm.^2}$ et β en atmosphères$/_{m^2}$, on aura pour le produit de ces deux coefficients *exprimé en* $^{kgr.}/_{mm.^2}$ la valeur :

$$\frac{\beta E . 10^6}{10333} = \frac{\beta E 10^3}{10.333}.$$

Notre formule deviendra alors :

$$\text{(II)} \qquad V^2 = \left(\frac{2ny}{10^3}\right)^2\left[1 + \frac{10.333 \times 2(1+\sigma)}{10^3 \times \beta \times E}\left(1 + \frac{1-\sigma}{z}\right)\right]$$

Mais cette même vitesse du son dans *la masse* liquide est donnée, en *mètres*, par la formule de Laplace:

$$\text{(III)} \qquad V^2 = \frac{10.333}{\beta . \delta} = \frac{10.333 \times g}{\beta d}$$

où le coefficient de compressibilité β du liquide est exprimé en atmosphères$/_{m^2}$, et où *d* représente le poids spécifique de ce liquide et $g = 9.81$, l'intensité de la gravitation.

En éliminant la vitesse V entre les équations (II) et (III) on obtient une relation, d'où l'on déduit :

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\beta}{10.333} = \frac{g}{d \times \left(\frac{2ny}{10^3}\right)^2} - \frac{2(1+\sigma)}{10^3 . E}\left(1 + \frac{1-\sigma}{z}\right)$$

Cette formule nous donne *la compressibilité* β – exprimée en atmosphères/m² – d'un liquide dont on connaît le poids spécifique *d* et pour lequel on a déterminé la colonne de résonance *y*, avec un tube caracterisé par l'élasticité E – exprimée en kgr./mm.² – de même que par le rapport x dont dépend la variable z.

Si l'on considère les expériences faites avec notre source sonore Sol_5, on a :

$$\frac{2n}{10^3} = \frac{2 \times 1560}{10^3} = 3.12$$

de sorte que l'expression précédente devient, si l'on y introduit aussi les valeurs correspondantes de *g* et de σ, c'est-à-dire $g = 9.81$ et $\sigma = 0.25$:

$$\text{(V)} \qquad \frac{\beta}{10.333} = \frac{9.81}{d \times \overline{3.12}^2 \times y^2} - \frac{2.5}{10^3 . E}\left(1 + \frac{0.75}{z}\right)$$

Cette expression est de la forme :

$$\text{(VI)} \qquad \beta = \frac{A}{d \times y^2} - B$$

où

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} A = 10.333 \dfrac{9.81}{\overline{3.12}^2} \text{— constante numérique pour la } \textit{même source sonore} \\ B = \dfrac{2.5 \times 10.333}{10^3 . E}\left(1 + \dfrac{0.75}{z}\right) \text{— paramètre variant avec} \end{cases}$$

la substance et les dimensions du tube de résonance.

Cette relation (V) résulte, comme on le voit, de la combinaison de notre formule théorique (f) et de la formule de Laplace. Toute vérification expérimentale qu'on pourra lui apporter sera en même temps une vérification de ces deux dernières formules.

Pour prouver combien notre formule initiale (f) est exacte, déterminons le coefficient d'élasticité β, d'après cette relation (V), pour quelques liquides soumis à notre expérience et comparons le résultat ainsi obtenu à celui qui est donné par la mesure expérimentale.

Nous ne considérerons, pour le moment, que deux liquides : l'eau distillée à la température de 4^0 et le mercure à 20^0.

Remarques. Mais faisons tout d'abord quelques observations d'ordre général :

a) En expérimentant avec *le même tube* sur plusieurs liquides, les constantes A et B de la formule précédente (VI) gardent, d'après leur signification, la même valeur ; il n'y a que y et d, qui figurent au dénominateur du premier terme du second membre de cette formule, qui varient.

On observe encore que si l'on opère avec un ***même liquide*** à ***différentes températures*** dans ***un tube de verre***, alors le paramètre B garde presque la même valeur, car, d'abord, par la dilatation, toutes les dimensions du tube variant proportionnellement, le rapport x entre l'épaisseur de la paroi et le rayon — et par conséquent aussi z — de même que le coefficient σ ne varient pas, et ensuite le coefficient d'élasticité E du verre varie très peu avec la température entre des limites assez éloignées, comme cela a été prouvé par Grassi pour des températures comprises entre 0^0 et 53^0 [1]). En maintenant donc la température de l'expérience entre ces limites on peut admettre que pour les tubes de verre ce coefficient B est constant.

b) Pour *l'alcool absolu* (voir page 166) nous avons trouvé que la colonne de résonance y décroît, dans un même tube, quand la température augmente. Puisque la densité d décroît aussi dans ces conditions, il s'ensuit que le produit $d \times y^2$, qui figure au dénominateur de A, décroît et que par conséquent la ***compressibilité de l'alcool croît avec la température***. Les expériences de Grassi, Amagat, Jamin, ainsi que celles qui ont été faites par d'autres physiciens, ont montré que réellement la compressibilité de l'alcool, de même que celle de l'éther, décroît, lorsque la température croît, comme le prévoit notre formule.

---

1) Voir Grassi. — Recherches sur la compressibilité des liquides.
Annales de Physique et de Chimie 3-ème série. T. XXXI, page 437, année 1851.

c) Dans les ***solutions salines***, comme on l'a déjà vu, la colonne de résonance y croît en même temps que la concentration, c'est-à-dire avec la densité (voir pag. 162). Il s'ensuit que le produit $d \times y^2$ de notre formule (VI) croît et partant que la compressibilité absolue de ces solutions décroît avec la concentration. Les expériences de Grassi [1]) ont prouvé ce fait, pour une longue série de solutions.

d) On a vu que pour ***le mercure*** la variation de la colonne de résonance y est très faible lorsque la température varie entre 10^0 et 25^0. Le coefficient β varie donc seulement à cause de la variation de la densité d, et comme cette dernière décroît, lorsque la température croît, il en résulte que la compressibilité du mercure, d'après notre formule, croît avec la température—de même que pour l'alcool.—Cela a été démontré expérimentalment par Carnazzi [2]), qui a prouvé que le coefficient de compressibilité du mercure varie de

$$\beta = 10^{-6} \times 3{,}8 \quad \text{à} \quad 22^0$$

à

$$\beta = 10^{-6} \times 4{,}0 \quad \text{à} \quad 88^0$$

et ensuite à $\beta = 10^{-6} \times 4{,}5$ à 150^0

Les déductions tirées de notre formule sont donc confirmées partout de point en point par l'expérience.

e) De notre formule on ne peut voir comment varie la compressibilité de ***l'eau*** que si la température est comprise entre 0^0 et 4^0, car entre ces limites la densité d, ainsi que la colonne y, croissent avec la température, et par conséquent, le coefficient β décroît, ce qui est d'accord avec l'expérience; mais, à partir de 4^0, puisque la densité d décroît, tandis que la colonne y continue à croître, on ne peut plus connaître l'effet de ces deux influences de sens contraire qu'après une discussion minutieuse, qui trouvera sa place un peu plus tard, où l'on discutera aussi la variation de la ***vitesse*** du son avec la température dans une masse illimitée d'eau.

Après toutes ces remarques d'un caractère — pour ainsi dire — qualitatif sur la concordance que présentent les déductions tirées de notre formule avec les résultats de l'expérience, revenons aux preuves

---

1) Grassi—Loco citato.

2) P. Carnazzi—Journal de Physique 4-e série T. IV, pag. 299—année 1905.

fournies par la voie des mesures, pour établir son exactitude et calculons la compressibilité dans les deux cas précédemment cités : celui de *l'eau distillée à 4^0* et celui *du mercure à 20^0*.

50. *Compressibilité de l'eau distillée à 4^0 de température.* Nous avons fait des observations dans l'eau distillée vers 4^0 de température, avec plusieurs tubes. Choisissons entre toutes celles qui ont été faites aves le tube I_5 de la catégorie P. En répétant les observations deux fois, à des époques différentes, les résultats ont été les suivants :

$$y = 425.9 \quad \text{à} \quad 4^0.4$$

ct

$$y = 426.8 \quad \text{à} \quad 4^0.8$$

qui, réduits à 4^0 de température, à l'aide des corrections connues, deviennent :

$$y = 425.5 \quad \text{à} \quad 4^0$$

et

$$y = 426.1 \quad \text{à} \quad 4^0$$

On peut donc considérer comme valeur de la colonne de résonance dans ce tube et à cette température, la moyenne de ces valeurs, c'est-à-dire :

$$y = 425.8 \quad \text{à} \quad 4^0$$

Les expériences et les mesures faites avec ce tube ont fourni pour les constantes qui entrent dans le calcul de la compressibilité les données suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} x = 0.666, & \text{d'où } z = 0.88778 \text{ (voir le tableau de la page 195).} \\ E. = 6718 & \\ y = 425.8 & \\ d = 1, & \text{densité de l'eau à } 4^0 \end{array}\right.$$

En introduisant ces nombres dans notre formule :

$$\text{(V)} \qquad \frac{\beta}{10{,}333} = \frac{9.81}{d \times (3.12\ y)^2} - \frac{2.5}{10^3 \times E}\left(1 + \frac{0.75}{z}\right),$$

on trouve successivement :

$$\frac{9.81}{d \times \overline{3.12y}^2} = \frac{9.81}{\overline{3.12}^2 \times \overline{425.8}^2} = 10^{-6} \times 5.5584$$

et

$$\frac{2.5}{10^3 \cdot E}\left(1+\frac{0.75}{z}\right)=\frac{2.5}{10^3\times 6718}\left(1+\frac{0.75}{0.88778}\right)=10^{-6}\times 0.68652$$

lorsque

$$\frac{\beta}{10.333}=10^{-6}\times 4.8719$$

et donc

$\beta = 10^{-6}\times 50{,}34$ — qui est la valeur du *coefficient de compressibilité de l'eau à 4^0 de température calculée d'après notre formule.*

Voyons à présent quelle est sa valeur donnée par l'expérience. Grassi avait touvé pour ce coefficient, par des mesures expérimentales :

$$\beta = 10^{-6}\ 49.9 \quad \text{à } 4^0$$

D'après les déterminations d'Amagat, qui avait trouvé, comme on l'a déjà montré ailleurs :

$$\beta = 10^{-6}\times 51.1 \quad \text{à } 0^0$$
et $$\beta = 10^{-6}\times 46.8 \quad \text{à } 20^0$$

on déduit, par proportion, la variation de 0.215 pour 1^0 et on obtient :

$$\beta = 10^{-5}\times 50.24 \quad \text{à } 4^0$$

De même, d'après les déterminations de Röntgen, citées à la page 194, à savoir :

$$\beta = 10^{-6}\times 51.2 \quad \text{à } 0^0$$
et
$$\beta = 10^{-6}\times 48.1 \quad \text{à } 9^0$$

on déduit par proportion :

$$\beta = 10^{-6}\times 49.83 \quad \text{à } 4^0$$

Enfin, d'après les tableaux et les nombres donnés par Amagat à l'occasion de ses études sur »*le maximum de la densité de l'eau et les lois relatives à la compressibilité et à la dilatation de l'eau*« [1]), où la compressibilité est donnée pour chaque degré de température, il résulte que :

$\beta = 10^{-6}\times 50.64$ à 4^0 sous une pression de 1—94 atmosphères
et
$\beta = 10^{-6}\times 49.66$ » 4^0 » » » » 1—146 »

[1]) Journal de Physique 3-e série P. II, pag. 449, année 1893, et Comptes-rendus de 1893 (Janv.—Juin) T. CXVI, pag. 946.

On voit donc que la valeur donnée par notre formule,

$$\beta = 10^{-6} \times 50.34$$

figure parmi les meilleures valeurs obtenues expérimentalement.

51. *Compressibilité du mercure vers 20⁰ de température.* Les observations sur la résonance du mercure ont été faites aussi avec plusieurs tubes de verre et avec plusieurs sources sonores. Citons les résultats obtenus dans les expériences faites avec les tubes de verre No. 1 et No. 2 de la catégorie L.

Avec le tube No. 1 de la catégorie L et avec la source sonore Sol_5, on a trouvé pour la longueur de la colonne de résonance dans le mercure :

$$y = 280^{mm.} \quad à \quad 20^0 \;{}^{1)}$$

Les données pour ce tube sont :

$$\begin{cases} x = 0.7566, \text{ d'où } z = 1.04282 \\ y = 280^{\ mm.} \\ E = 7480 \text{ en } {}^{kgr.}/_{mm.^2} \\ d = 13.546, \text{ densité du mercure à } 20^0. \end{cases}$$

En introduisant ces valeurs dans notre formule (V), on trouve successivement :

$$\frac{9.81}{d\times(3.12\times y)^2} = \frac{9.81}{13.546\times(3.12\times 280)^2} = 10^{-7}\times 9.4893$$

et

$$\frac{2.5}{10^3.E}\left(1+\frac{b}{z}\right) = \frac{2.5}{10^3\times 7480}\left(1+\frac{0.75}{1.04282}\right) = 10^{-7}\times 5.7460$$

d'où

$$\frac{\beta}{10.333} = 10^{-7}\times 3.7433$$

et donc

$$\beta = 10^{-6}\times 3.87$$

qui est presque la même valeur que celle donnée par Amagat [2])

$$\beta = 10^{-6}\times 3.9$$

pour le même coefficient de compressibilité du mercure, et obtenue par des mesures piézométriques directes et par des moyens complexes et coûteux.

Avec le tube No. 2 de la catégorie L et avec la source sonore

---

[1]) Ce nombre ne figure pans dans le tableau de la page 168, qui contient les résultat des expériences avec la source sonore Re_5, mais il figure dans la liste de nos expériences sur le mercure avec la source sonore Sol_5.

[2]) Journal de Physique 2-e série, T. VIII page 197, année 1889.

Ré$_5$, on a trouvé pour la colonne de résonance du mercure, vers 20^0, la longueur :

$$y = 369.8^{\text{mm.}}$$

Les données correspondant à ce tube sont :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0.628, \qquad \text{d'où } z = 0.82519. \\ y = 369.8 \\ E = 7500 \text{ en } {}^{\text{kgr.}}/_{\text{mm.}} \\ d = 13.546, \text{ densité du mercure à } 20^0 \end{array}\right.$$

En introduisant ces nombres dans le second membre de notre formule (IV) et en nous rappelant que le nombre de vibrations complètes de la source sonore Ré$_5$ est :

$$n = 1155, \qquad \text{d'où} \qquad 2n = 2310$$

on obtient successivement pour les deux termes :

$$\frac{9.81}{d \times \left[\frac{2ny}{10^3}\right]^2} = \frac{9.81}{13.546 \times (2.31 \times 369.8)^2} = 10^{-7} \times 9{,}9243$$

$$\frac{2.5}{10^3 . E}\left[1 + \frac{b}{z}\right] = \frac{2.5}{10^3 \times 7500}\left[1 + \frac{0.75}{0.82519}\right] = 10^{-7} \times 6.3629$$

lorsque

$$\frac{\beta}{10.333} = 10^{-7} \times 3.5614$$

et donc

$$\beta = 10^{-6} \times 3.68$$

c'est-à-dire presque la même valeur que la précédente. On peut donc considérer la moyenne de ces deux résultats :

$$\beta = 10^{-6} \times 3.78$$

comme représentant, d'après nos expériences et ***notre formule***, le coefficient de compressibilité ***du mercure*** vers 20^0.

On sait combien ce coefficient était incertain avant les déterminations d'Amagat et de Tait. Plusieurs physiciens ont consacré plus tard leurs expériences à la détermination la plus rigoureuse de ce coefficient. Les valeurs obtenues par eux sont assez concordantes. Ainsi :

De Metz	trouve :	$\beta = 10^{-6} \times 3.74$	à	20^0 [1]
Carnazzi	„	$\beta = 10^{-6} \times 3.80$	„	22^0
Th. W. Richards	„	$\beta = 10^{-6} \times 3.71$	„	20^0 [2]

[1]) O. D. Chwolson.—Traité de Physique T. I., fasc. 3-e, pag. 582—3, année 1907.

[2]) The Compressibilités of the Elements par Théodore William Richards, W. N. Sull, etc.—Washington—Carnegie Institution, 1907.

On voit que la valeur du même coefficient, trouvée par nous,

$$\beta = 10^{-6} \times 3.78,$$

avec des moyens bien plus simples, se classe parmi les meilleures déterminations expérimentales.

On constate donc ici, de même que dans les expériences faites pour l'eau distillée, une concordance très satisfaisante entre les valeurs obtenues à l'aide de notre formule et celles qui sont données par la mesure directe.

Cette concordance entre les valeurs calculées et les valeurs expérimentales des compressibilités de deux liquides — *l'eau* et le *mercure* — si différents au point de vue de leurs propriétés, ne peut pas être attribuée au hasard. Elle constitue sûrement un fort témoignage en faveur de *l'exactitude de notre formule* et de la précision de notre méthode d'observation. ——

Comme dernière conclusion tirée de ces multiples et différentes vérifications auxquelles nous venons de soumettre *notre formule théorique*, déduite du principe de Newton énoncé au commencement de ce chapitre, nous pouvons affirmer que cette formule rend, avec la meilleure précision possible, toutes les particularités du *phénomène de la résonance dans les colonnes liquides* et constitue une *relation* des plus *exactes* entre la *vitesse* dans la *masse* illimitée et la *vitesse* dans la *colonne*, relation permettant de suivre très exactement les variations réciproques de ces deux grandeurs.— Par cela même nous venons d'atteindre le but final poursuivi par nos recherches, exposées dans ce travail.

Conséquences et applications

52. En considérant maintenant notre formule :

$$(f) \qquad \lambda = 2\,y\left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}$$

où
$$\begin{cases} a = \dfrac{2(1+\sigma)10333}{10^6\beta E} \text{ en } {}^{\text{kgr.}}/_{\text{mm}^2} \\ b = 1 - \sigma \\ z = x\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

comme exacte, nous allons nous en servir pour en déduire quelques conséquences et en faire quelques applications.

Si on multiplie les deux membres de cette formule par le nombre des vibrations du son employé à l'expérience, on passe, comme on l'a déjà vu, de la relation entre les longueurs d'onde à la relation entre les vitesses W et V dans la colonne et dans la masse liquide :

$$(h) \qquad V = W\left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}$$

dont nous nous servirons aussi dans ce qui va suivre.

Première conséquence.— Considérons les substances suivantes employées par Wertheim dans ses expériences sur la vitesse du son dans les liquides[1] :

une solution de *nitrate de sodium*	ayant la dens.	$d = 1{,}2066$	et la compres.	$10^6\beta = 29.5$	à $20^\circ{,}9$
» » » *chlorure de calcium*	» » »	$d = 1{,}4322$	» » »	$10^6\beta = 20{,}5$	» $22^0{,}5$
et de *l'alcool absolu*	» » »	$d = 0{,}8097$	» » 1	$10^6\beta = 80{,}3$	» 4^0

et calculons par la formule $w = \frac{V}{U}$ — déduite de (h) et où $U = \left[1 + a\left(1 + \frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}$ —la vitesse du son que Wertheim aurait dû observer dans les colonnes liquides de ces substances comprises à l'intérieur de ses tuyaux d'orgue d'embouchure A.

Il suffit pour cela de calculer la valeur du facteur U pour cette embouchure et la vitesse V dans la *masse* liquide pour les sub-

[1]) Voir le tableau de la page 56 avec les observations de Wertheim.

stances en question. Or la valeur de ce facteur U a déjà été déterminée pour les expériences de Wertheim à l'occasion de la *seconde vérification* de notre formule *(f)*, quand on a trouvé[1]) :

$$U = \left[1 + \frac{22{,}6744}{10^6\beta}\right]^{1/2}$$

et la valeur de la vitesse V se calcule par la formule de Laplace, tant de fois citée :

$$V^2 = \frac{101{,}3543}{\beta d} \text{ m}$$

En faisant ces calculs et en comparant les vitesses ainsi obtenues avec les vitesses trouvées par Wertheim pour ces substances dans ses tuyaux d'embouchur A, on a le résultat suivant :

SUBSTANCE	Température	Densité	Compressibilité	Vitesse dans la *masse* liquide d'après la formule de Laplace	Valeur du facteur $U = \left[1+a\left(1+\frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}$	Vitesse dans la colonne liquide des tubes de Wertheim d'après *notre formule*	Vitesse dans la colonne liquide trouvée par Wertheim	Différence entre la vitesse d'après notre formule et la vitesse de Wertheim
		d=	$10^6\beta=$	V=	U=	W=		
Nitrate de sodium	29°,9	1,2066	29,5	1687 m	1,329	1268,86 m	1374 m	− 105,14 m
Chlorure de calcium	22°,5	1,4322	20,5	1857,98 m	1,45123	1280,3 m	1554 m	− 273,7
Alcool absolu	4°	0,8097	80,3	1258,54 m	1,13242	1102,54	966 m	+ 136,54

On voit que les différences entre les vitesses du son pour les colonnes de ces substances dans les tuyaux de Wertheim obtenues par *notre formule* et les vitesses données par *Wertheim* pour les mêmes substances sont bien trop grandes. Comme nous admettons que notre formule est exacte, il s'en suit que les nombres donnés par Wertheim pour les substances en question sont erronés et donc inacceptables. C'est pourquoi, entre autres raisons, nous avons exclu ces substances de nos discussions faites dans la *première partie* de ce travail et relatives aux observations de ce physicien[2]).

[1]) Voir les pages 186 et 187.

[2]) Voir la page 68.

On verrait par un calcul analogue que la vitesse dans la colonne liquide indiquée par Wertheim pour l'eau à 50^0 degrés de température et comprise dans ses tuyaux d'orgue est aussi erronée.

Seconde conséquence. — Mettons pour abréger la notation :

$$(1) \qquad k = \frac{2(1+\sigma)\,10333}{10^6 E}\left(1+\frac{b}{z}\right)$$

On voit alors qu'on peut écrire :

$$a\left(1+\frac{b}{z}\right)=\frac{k}{\beta}$$

et par conséquent

$$(2) \qquad U=\left[1+a\left(1+\frac{b}{z}\right)\right]^{1/2}=\left[1+\frac{k}{\beta}\right]^{1/2}$$

d'où

$$(3) \qquad \lambda^2=(2y)^2\left[1+\frac{k}{\beta}\right]$$

On remarque que la quantité k ne dépend que de la nature et des dimensions du tube de l'expérience, tandis que β — coeffcient de compressibilité — dépend seulement du liquide.

Supposons maintenant que nous avons déterminé avec un tube T et pour un son donné les colonnes de résonance y et y_1 dans *deux liquides différents* L et L_1 de compresssibilité β et β_1. Nous avons, en désignant par λ et λ_1 les longueurs d'onde dans les *masses* de ces deux liquides, et en remarquant que le paramètre k, qui ne dépend que du tube, garde la même valeur pour les deux liquides :

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda^2=(2y)^2\left[1+\frac{k}{\beta}\right] \\ \lambda_1^2=(2y_1)^2\left[1+\frac{k}{\beta_1}\right] \end{cases}$$

Prenons ensuite un second tube T^1 et faisons avec lui des expériences sur les mêmes liquides L et L_1 et pour le même son que précédemment. En désignant par y^1 et y_1^1 les colonnes de résonance observées dans ces liquides, pris dans le même ordre, et par k^1 la valeur du paramètre (1) pour ce second tube et en remarquant que les longueurs d'onde dans les *masses* de nos liquides sont les mêmes que dans la première expérience, on a :

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda^2 = (2y^1)^2 \left[1 + \frac{k^1}{\beta}\right] \\ \lambda_1^2 = (2\, y_1^1)^2 \left[1 + \frac{k^1}{\beta_1}\right] \end{cases}$$

Formons le rapport des égalités (4) relatives au premier tube et extrayons en même temps la racine carrée ; nous avons :

$$(6) \quad \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{y}{y_1} \left| \frac{1 + \frac{k}{\beta}}{1 + \frac{k}{\beta_1}} \right|^{1/2}$$

d'où

$$(7) \quad \frac{y}{y_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \left[\frac{1 + \frac{k}{\beta_1}}{1 + \frac{k}{\beta}} \right]^{1/2}$$

ou bien, parce que le rapport des longueurs d'onde correspondant au même son est égal au rapport des vitesses :

$$(8) \quad \frac{W}{W_1} = \frac{V}{V_1} \left| \frac{1 + \frac{k}{\beta_1}}{1 + \frac{k}{\beta}} \right|^{1/2}$$

V et V_1 désignant les vitesses dans la *masse* et W et W_1 les vitesses dans la *colonne* de nos deux liquides.

On obtient de même des égalités (5) relatives au second tube T^1 les relations analogues :

$$(9) \quad \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{y^1}{y_1^1} \left[\frac{1 + \frac{k^1}{\beta}}{1 + \frac{k^1}{\beta_1}} \right]^{1/2}$$

et

$$(10) \quad \frac{W^1}{W_1^1} = \frac{V}{V_1} \left[\frac{1 + \frac{k^1}{\beta_1}}{1 + \frac{k^1}{\beta}} \right]^{1/2}$$

On voit de la formule (8) que le rapport $\frac{W}{W_1}$ des vitesses du son observées dans les *colonnes* de deux liquides compris dans un même tube T n'est pas égal au rapport $\frac{V}{V_1}$ des vitesses dans les *masses* de ces deux liquides. L'un de ces rapport est égal à l'autre multiplié par un facteur qui dépend à la fois du tube et des liquides considérés. On constate la même chose de la formule (10) pour le second tube T^1. Or, Tito Martini croyait que ces deux rapports — celui des vitesses dans les colonnes des deux liquides à l'intérieur d'un même tube solide et celui des vitesses dans les masses illimitées de ces liquides — sont égaux et avait pris leur égalité comme principe de ses déterminations relatives à la vitesse du son dans les liquides [1]). On voit maintenant que ce *principe est erroné.*

Des relations précédentes (6) et (9), qui ont leurs premiers membres égaux, on déduit :

$$(11) \qquad \frac{y}{y_1}\left|\frac{1+\frac{k}{\beta}}{1+\frac{k}{\beta_1}}\right|^{1/2}=\frac{y^1}{y^1_1}\left|\frac{1+\frac{k^1}{\beta}}{1+\frac{k^1}{\beta_1}}\right|^{1/2}$$

ou encore, on remplaçant le rapport des colonnes de résonance par le rapport des vitesses :

$$(12) \qquad \frac{W}{W_1}\left|\frac{1+\frac{k}{\beta}}{1+\frac{k}{\beta_1}}\right|^{1/2}=\frac{W^1}{W^1_1}\left|\frac{1+\frac{k^1}{\beta}}{1+\frac{k^1}{\beta^1}}\right|^{1/2}$$

Cela montre que le rapport $\frac{W}{W_1}$ des vitesses de son dans les deux liquides observées dans les colonnes du premier de nos tubes T *n'est pas égal* au rapport $\frac{W^1}{W^1_1}$ des vitesses dans les colonnes du second tube T^1 pour les mêmes liquides L et L_1, contrairement à ce qu'avait admis aussi Tito Martini, qui croyait que le rapport des vitesses observées dans les colonnes de deux liquides compris dans un tube solide est ***indépendant*** du tube [2]). Nous avions montré ailleurs [3]) à l'aide des mesures experimentales *l'inéxactitude de ce principe ;* on arrive maintenant, comme on le voit, aussi par une voie théorique, à la même constatation.

Troisième conséquence. En considérant les premières égalités des relations précédentes (4) et (5), on a :

$$\lambda^2=(2\,y)^2\left[1+\frac{k}{\beta}\right]=(2\,y^1)^2\left[1+\frac{k^1}{\beta}\right]$$

[1]) Voir la page 89.
[2]) » » » 85 et 86.
[3]) » » » 169.

d'où l'on déduit le rapport :

$$(13) \qquad \rho^2 = \left(\frac{y^1}{y}\right)^2 = \frac{1 + \frac{k}{\beta}}{1 + \frac{k^1}{\beta}}$$

qui constitue une relation entre les colonnes de résonance du *même liquide* L dans *deux tubes différents* T et T^1, à l'aide de laquelle on peut trouver l'une de ces colonnes comprise dans un tube, en connaissant la colonne comprise dans l'autre.

En considérant, ensuite, les secondes égalités des mêmes relations (4) et (5), on déduit aussi le rapport :

$$(14) \qquad \rho_1^2 = \left(\frac{y_1^1}{y_1}\right)^2 = \frac{1 + \frac{k}{\beta_1}}{1 + \frac{k^1}{\beta_1}}$$

En faisant la différence de ces deux rapport, on trouve :

$$(15) \qquad \rho^2 - \rho_1^2 = \frac{\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_1}\right)\left(k - k^1\right)}{\left(1 + \frac{k^1}{\beta}\right)\left(1 + \frac{k^1}{\beta_1}\right)}$$

Admettons maintement que $k > k^1$; alors on voit, d'après (13), que $y^1 > y$, c'est-à-dire que la colonne de résonance du premier liquide L dans le second tube T^1 est plus grande que la colonne de résonance du *même* liquide dans le premier tube T. Cette remarque se vérifie pour toutes nos expériences [1]).

Admettons aussi que $\beta > \beta_1$, c'est-à-dire que le premier liquide L a une compressibilité plus grande que le second L_1. Cette condition s'exprime aussi par l'inégalité :

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\beta_1}.$$

Si ces *deux conditions* : $k > k^1$ et $\beta > \beta_1$ sont remplies à la fois, on voit de (15) que :

(16) $\rho_1 > \rho$, ou, ce qui est la même chose : (17) $\dfrac{y_1^1}{y_1} > \dfrac{y^1}{y}$,

c'est-à-dire que le rapport des colonnes de résonance du second liquide L_1 dans les deux tubes T^1 et T est plus grand que

---

[1]) Voir le tableau de la page 195.

le rapport des colonnes de résonance du premier liquide L dans les mêmes tubes T^1 et T.

Faisons une petite application de cette conclusion.

Supposons que le premier liquide L soit de *l'eau distillée* à 15^0 et que le second liquide L soit une solution de *chlorure de calcium* identique à celle qui a été employée par Wertheim dans ses expériences et prenons comme premier tube T un des tubes en laiton de *Wertheim* d'embouchure A et comme second tube T^1 *notre tube de verre* I_5 de la catégorie P, utilisé dans nos expériences.

On considérera comme source sonore notre source Sol_5.

Pour nous, alors :

y désigne la colonne de réson. de *l'eau* à 15^0 dans le tube de *Wertheim* pour notre source Sol_5.
y^1 » » » » » » » » » » *notre* tube de verre I_5 » » » »
y_1 » » » » » » du *chlorure de calcium* dans le tube de *Wertheim* » »
y^1_1 » » » » » » » » » » » *notre* tube I_5 » »
β sera la compressibilité de *l'eau* et β_1 celle du *chlorure de calcium*.

Nous ne connaissons pas les colonnes de résonance y et y_1 dans le tube de Wertheim, mais nous n'en avons pas besoin. Ce qui nous intéresse c'est la rapport $\frac{y^1}{y}$, qui, d'après (13), est égal à $\left(\frac{1+\frac{k}{\beta}}{1+\frac{k^1}{\beta}}\right)^{1/2}$ et cette expression peut se calculer.

Faisons ce calcul.

Nous avons mis :

$$k=\frac{2(1+\sigma)\,1033}{10^6E}\left(1+\frac{1-\sigma}{z}\right)$$

Calculons ce paramètre de même que l'expresion $\left(1+\frac{k}{\beta}\right)^{1/2}$ pour chacun de deux tubes, le nôtre I_5 et celui de Wertheim, et premièrement dans le cas de l'eau et ensuite dans le cas du chlorure de calcium, en prenant, comme toujours, $\sigma=0,25$.

Nous avons comme données [1]) :

$E=9277$ en $^{kgr.}/_{mm.^2}$; $x=0,1$, d'où $z=x\left(1+\frac{x}{2}\right)=0,105$ pour le tube de laiton de Wertheim;

$E=6718$ » » $x=0,666$ d'où $z=x\left(1+\frac{x}{2}\right)=0,88778$ pour notre tube de verre I_5.

En effectuant les calculs avec ces données, on trouve pour *l'eau distillée* à 15^0, dont la compressibilité est $\beta=10^{-6}47,2$:

$$k=\frac{22,6744}{10^6},\ \frac{k}{\beta}=0,48039,\ \left(1+\frac{k}{\beta}\right)^{1/2}=1,21671 \text{ pour le tube de Wertheim}$$

et

$$k^1=\frac{7,09376}{10^6},\ \frac{k^1}{\beta}=0,15029,\ \left(1+\frac{k^1}{\beta}\right)^{1/2}=1,07225 \text{ pour notre tube } I_5.$$

---

[1]) Voir pour ces données la page 186 et le tableau de la page 195.

On voit, d'abord, de ces résultats, que $k > k^1$ c'est-à-dire que, d'après (13), la colonne de résonance de l'eau dans le tube de Wertheim aurait été plus petite que dans notre tube I_5 pour notre source sonore Sol_5 et donc pour toute autre source et on trouve, ensuite, toujours pour *l'eau,* le rapport:

$$(18) \quad \rho = \frac{y^1}{y} = \left| \frac{1 + \frac{k}{\beta}}{1 + \frac{k^1}{\beta}} \right|^{1/2} = \frac{1,2167}{1,0722} = 1,1344.$$

Considérons après cela une solution de *chlorure de calcium* de densité $d = 1,4322$ et de compressibilité $\beta = 10^{-6} 20,5$ à $22^0,5$, comme celle des expériences de Wertheim, et prenons le rapport $\rho_1 = \frac{y_1^1}{y_1}$ des colonnes de résonance que donnerait cette solution dans notre tube I_5 et dans le tube de Wertheim d'embouchure A. Or, ce rapport étant égal au rapport des vitesses du son dans ces colonnes, on peut écrire:

$$(19) \qquad \rho_1 = \frac{W_1^1}{W_1}$$

W_1^1 et W_1 étant les vitesses dans la colonne de cette solution comprise respectivement dans notre tube I_5 et dans le tube de Wertheim.

Comparons maintenant ce rapport ρ_1 correspondant à la solution de *chlorure de calcium* au rapport précédent ρ correspondant à *l'eau destillée* à 15^0.

Puisque la compressibilité de cette solution de chlorure de calcium, $\beta_1 = 10^{-6} 20,5$, est plus petite que la compressibilité de l'eau distillée à 15^0, $\beta = 10^{-6} 47,2$, on voit que la condition d'en haut $\beta > \beta_1$ est remplie à côté de l'inégalité $k > k^1$. Il s'en suit alors que :

$$\rho_1 > \rho$$

ou, en remplaçant ρ_1 et ρ par leurs valeurs de (18) et (19), que :

$$(20) \qquad \frac{W_1^1}{W_1} > 1,1344.$$

Il résulte de là que la vitesse W_1 dans la colonne du chlorure de calcium observée dans le tube de Wertheim doit satisfaire à la condition :

$$(21) \qquad W_1 < \frac{W_1^1}{1,1344}$$

où W_1^1 représente, comme on vient de le dire, la vitesse dans la même solution observée dans la colonne de notre tube I_5. Or la valeur de cette dernière vitesse, calculée par notre formule initiale $W_1^1 = \frac{V_1}{U_1^1}$ — où la vitesse dans la masse de chlo-

rure de calcium est $V_1 = 1858^m$ et le facteur $U_1^1 = 1,1602$—se trouve $W_1^1 = 1601^m$ [1]).
Il vient donc :

$$W_1 < \frac{1601}{1,1344}$$

ou, en effectuant la division :

$$(22) \qquad W_1 < 1411^m$$

Cela veut dire que la vitesse observée par Wertheim dans ses tuyaux d'embouchure A aurait dû être pour la solution de ***chlorure de calcium*** inférieure à 1411^m. Or la vitesse donnée par Wertheim pour cette solution est égale à 1554^m, c'est-à-dire de beaucoup supérieure au nombre exigé par cette condition-ci. Le nombre de Wertheim est donc erroné et par conséquent inacceptable [2]).

On pourrait voir par une discussion analogue que les vitesses indiquées par Wertheim pour la solution de ***nitrate de sodium*** dans les colonnes de ses tuyaux d'orgue et pour *l'eau* à 50^0 sont aussi *erronées*, tandis que les vitesses données pour les solutions de *chlorure de sodium* et de *carbonate de sodium* sont assez *exactes*.

Applications

53. En combinant notre formule (h) avec la formule de Laplace relative à la vitesse du son dans les liquides, nous avons trouvé précédemment [3]) l'expression suivante pour le coefficient de compressibilité d'un liquide soumis à nos expériences de résonance :

$$(\mathrm{i}) \qquad \beta = \left[\frac{g}{\left(\frac{2ny}{10^3}\right)^2 . d} - \frac{2(1+\sigma)}{10^3 . E} \left(1 + \frac{1-\sigma}{z} \right) \right] 10.333$$

où *g* représente l'intensité de la gravitation exprimée en mètres *d* la densité du liquide, *n* le nombre de vibrations de la source

---

1) La vitesse $V_1 = 1858^m$ dans la masse de cette solution de *chlorure de calcium* se trouve calculée dans la *Première conséquence* de notre formule fondamentale, page 212.

La valeur du facteur U_1^1 pour la même solution et pour notre tube I_5 se calcule d'aprè la formule : $U^1 = \left(1 + \frac{k^1}{\beta_1}\right)^{1/2}$, où l'on a : $k^1 = \frac{7,09376}{10^6}$ et $\beta_1 = 10^{-6} 20,5$.

Avec ces nombres on trouve $U_1^1 = 1,1602$.

2) C'est sur ces conséquences-ci de notre formule théorique que s'appuient surtout les conclusions de nos discussions des pages 66 et les suivantes de la 1-ère partie de ce travail.

3) Voir la pag. 203.

sonore, y la colonne de résonance exprimée en mm., E le coefficient d'élasticité du tube solide exprimé en $^{kgr.}/_{mm.^2}$ et β le coefficient de compressibilité du liquide en atmosphères sur m^2, σ et z ayant leurs significations habituelles.

Cette formule (i) est de la forme:

$$\text{(j)} \qquad \beta = \frac{A}{d \, . \, y^2} - B$$

où

$$\text{(k)} \quad \begin{cases} A = \dfrac{10{,}333 \times g}{\left(\dfrac{2n}{10^3}\right)^2} \\ \text{et} \\ B = \dfrac{2(1+\sigma)10{,}333}{10^3.E}\left(1+\dfrac{1-\sigma}{z}\right). \end{cases}$$

Pour notre source sonore Sol_5, dont le nombre de vibrations doubles est $n = 1560$, et pour notre tube de verre I_5, pour lequel nous avons $E = 6718$ $^{kgr.}/_{mm.^2}$ et $z = 0{,}88778$ [1]), ces quantités A et B deviennent, en prenant $\sigma = 0{,}25$ et $g = 9^m{,}8088$:

$$\text{(l)} \quad \begin{cases} A = 10{,}411975 \\ B = 10^{-6} \times 7{,}0939 \end{cases}$$

quand on a pour le coefficient de compressibilité la valeur :

$$\text{(m)} \qquad \beta = \frac{10{,}411975}{d \, . \, y^2} - 10^{-6} \times 7{,}0939.$$

Nous allons appliquer maintenant cette formule (m) d'abord à la détermination des coefficients de *compressibilité* de quelques *solutions salines* et ensuite à l'étude de *la variation de la compressibilité* et de la *vitesse du son* dans *l'eau distillée* avec la température.

Première application

54. Considérons une solution de *chlorure de calcium* ayant $40{,}99^0/_0$ de sel, à laquelle correspond *la densité* $d = 1.417$, à $15^0{,}8$ et dont le coefficient de compressibilité, déterminé par Grassi, est $\beta = 10^{\;6}.20{,}7$ et proposons nous de calculer le même coefficient à l'aide de notre formule précédente (m).

[1]) Voir le tableau de la page 195.

Nous ne connaissons pas la colonne de résonance y que cette solution aurait dans notre tube I_5 et pour la source sonore Sol_5, car nous n'avons fait aucune expérience de résonance avec ce liquide. Nous pouvons toute fois déterminer cette colonne de la manière suivante. Nous avons vu à l'occasion de nos expériences sur les *solutions salines* que la colonne de résonance d'une telle solution est liée à la concentration par la relation [1]) :

$$(1) \qquad y^2 = \alpha^2 + \beta x$$ [2])

où α représente la colonne de résonance de *l'eau distillée* à la température de la solution, x la concentration de cette solution et β un facteur *indépendant* de la *température* et de la *concentration* et qui ne dépend, pour un même tube, que de la nature du sel contenu dans la solution [3]).

Pour les solutions de *chlorure de calcium* de différentes concentrations sur lesquelles nous avons expérimenté la valeur de ce dernier facteur a été trouvée :

$$(2) \qquad \beta = 189613{,}6$$ [4])

Cette valeur, qui dépend seulement de la nature du sel, convient aussi à notre solution actuelle.

La colonne de résonance α pour l'eau distillée à la température de $15^0{,}8$, qui est la température de notre solution de chlorure de calcium, se trouve, d'après nos expériences et notre formule de la page 142 :

$$(3) \qquad \alpha = 437{,}9 \text{ mm.}$$

Enfin, la concentration étant la différence entre la densité $d = 1{,}417$ de la solution et la densité de l'eau distillée à la température de $15^0{,}8$ correspondant à cette solution, sera, en sachant que cette dernière densité est, d'apres les tables de Rossetti $e = 0{,}99905$:

$$x = d - e = 0{,}41795.$$

[1]) Voir la page 163.

[2]) Les lettres β et x qui entrent dans cette formule et qui y représentent un facteur constant et la concentration ont été employées jusqu'ici, et le seront encore, pour désigner aussi le coefficient de compressibilité et le rapport de l'épaisseur du tube solide au rayon intérieur. Il faut se garder de confondre ces deux sortes de significations.

[3]) Voir la page 165.

[4]) Voir la page 164.

Avec ces données on a successivement :

$$\alpha^2 = 191756{,}41$$
$$\beta x = 79249{,}00412$$

et
$$y^2 = \alpha^2 + \beta x = 271005{,}4141$$

qui est le carré de la colonne de résonance que nous aurions obtenue, si nous nous avions expérimenté sur la solution en question de chlorure de calcium, dans le tube et avec la source sonore indiqués ci-dessus et d'où l'on déduit le produit :

$$y^2 d = 384014.61$$

En introduisant ce dernier produit dans notre formule d'en haut (m) et en effectuant les calculs qui y sont indiqués, nous trouvons pour le coefficient de compressibilité :

$$\beta = \frac{A}{y^2 d} - B = \frac{10{,}411978}{384014{,}61} - 10^{-6} \times 7{,}0939$$

c'est-à-dire:

$$\beta = 10^{-6} . 20{,}02.$$

Or, la valeur trouvée par Grassi pour le même coefficient est :

$$\beta = 10^{-6} . 20{,}7.$$

On voit que ces deux valeurs concordent d'une manière très satisfaisante.

Deuxième application

55. Considérons, en second lieu, une solution de *chlorure de sodium* ayant 15, 32 % de sel, à laquelle correspond la densité $d = 1{,}123$, à $18^0{,}5$, et qui a, d'après Grassi, le coefficient de compossibilité $\beta = 10^{-6}.32{,}1$.

Calculons aussi par notre formule (m) ce coefficient. Nous procédons comme dans le cas précédent. Pour déterminer la colonne de résonance de cette solution dans notre tube I_5 et pour le son Sol_5 nous nous servirons de la même relation que plus haut :

$$y^2 = \alpha^2 + \beta x$$

où α représentera la colonne de résonance de *l'eau distillée* à la température de $18^0{,}5$ de la solution, x la concentration et β un coefficient indépendant de la température et de la concentration et dépendant seulement de la nature du sel contenu dans la solution.

Dans nos expériences sur les solutions de *chlorure de sodium* la valeur de ce dernier coefficient a été trouvée [1]) :

$$\beta = 319428,2$$

La colonne de résonance de l'eau distillée à la température de $18^0,5$, d'après nos expérience et notre formule de la page 142 est:

$$\alpha = 440,3 \text{ mm.}$$

Enfin, la concentration étant la différence entre la densité $d = 1,123$ de la solution et la densité $e = 0,998557$ de l'eau distillée à $18^0,5$, sera:

$$x = d - e = 0,124443.$$

Avec ces nombres on trouve successivement :

$$\alpha^2 = 193864,09$$
$$\beta x = 39750,6035$$
$$y^2 = 233614,6935$$

et
$$y^2 d = 262349,28.$$

En introduisant ce dernier produit dans notre formule (m), nous obtenons pour le coefficient de compressibilité :

$$\beta = \frac{A}{y^2 d} - B = \frac{10.411975}{262349,28} - 10^{-6}.7,0939 = 10^{-6}.32,6$$

c'est-à-dire presque la même valeur que celle donnée par Grassi :

$$\beta = 10^{-6}.10.32,1$$

— La concordance des valeurs de la compressibilité de ces substances déterminées à l'aide de notre formule (i) avec les valeurs données par la mesure directe, malgré toutes les petites erreurs inévitables qui accompagnent la détermination des quantités E, n, x, σ, qui entrent dans le calcul, constitue une *vérification expérimentale*, non seulement pour nos formules, mais aussi pour la *formule de Laplace*, car la relation (i) est, comme on l'a vu, le résultat de la combinaison entre la formule de Laplace et notre formule initiale (f), et toute vérification expérimentale apportée à la formule (i) constitue, en même temps, une vérification des deux

[1]) Voir la page 164.

relations d'où cette formule résulte. C'est là un des résultats de notre méthode, qui mérite d'être signalé.

Troisième application

56. Comment varie la *compressibilité de l'eau distillée* avec la *température?*

Pour répondre à cette question nous rappelerons d'abord — ce que nous avons établi ailleurs [1])—que la colonne de résonance de l'eau distillée contenue dans un tube de verre croît avec la température et que la longueur y de cette colonne peut être rendue en fonction de la température t par la formule empirique :

$$\text{(l)}\quad y = a + bt + ct^2 - dt^3$$

$$\text{où}\quad \begin{cases} a = 422{,}4 \\ b = 0{,}901 \\ c = 0{,}0052 \\ d = 0{,}00015 \end{cases}$$

pour notre tube de verre I_5.

Les résultats de cette formule sont d'un accord très satisfaisant avec ceux de l'expérience pour les températures comprises entre 0^0 et 40^0, où elle a pu être vérifiée. Admettons que cet accord se maintienne aussi à des températures plus élevées. Nous avons vu alors que cette colonne y admet un ***minimum*** pour la température $t = -34^0{,}6$ — ce qui n'a aucun sens pour nous — et un ***maximum*** pour la température :

$$t = 57^0{,}77.$$

La valeur de la colonne correspondant à ce maximum est:

$$y_{max.} = 462{,}88 \text{ mm.}$$

On voit donc qu'à partir de 0^0 jusqu'à $57^0.77$ la colonne de résonance de l'eau dans nôtre tube I_5 croît continuellement pour commencer ensuite à décroître pour des températures supérieures à cette dernière.

Reprenons maintenant notre formule d'en haut relative à la compressibilité des liquides:

$$\text{(j)}\quad \beta = \frac{A}{y^2.d} - B$$

[1]) Voir les pages 142—144.

où les quantités A et B sont, dans le cas général :

$$\begin{cases} A = \dfrac{9{,}8088 \times 10{,}333}{\left(\dfrac{2n}{10^3}\right)^2} \\ \text{et} \\ B = \dfrac{2(1+\sigma)10{,}333}{10^3.E}\left(1 + \dfrac{1-\sigma}{z}\right) \end{cases}$$ [1]

On remarque que la quantité A peut être regardée comme une constante numérique, indépendante de la température, tant que le nombre *n* des vibrations de la source sonore reste invariable pendant que la température dans la colonne liquide varie—ce qui est toujours possible d'obtenir par un dispositif convenable.

Dans le paramètre B l'expression $z = x\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ reste invariable, quand la température change. En effet, le rapport x de l'épaisseur de la paroi du tube au rayon intérieur, qui entre dans cette expression, dépend seulement du rapport des deux rayons—intérieur et extérieur—du tube et les variations de ces rayons, produites par la dilatation thermique, qui laisse le tube semblable à lui-même, sont proportionnelles aux longueurs de ces rayons, de sorte que le rapport de ces longueurs garde la même valeur. Le coefficient d'élasticité E du tube de *verre* varie, d'après les expériences de Grassi [2], d'une manière insensible entre 0^0 et 53^0 ; on peut donc admettre que ses variations restent encore inappréciables aussi pour des températures supérieures et peu éloignées de cette dernière. Le coefficient σ de Poisson, enfin, rapport de la contraction transversale à l'augmentation longitudinale du tube sous l'action de l'unité de poids sur l'unité de surface, est pour le verre à peu près constant et égal à 0,25 à différentes températures. Il résulte de tout cela que la quantité B peut être regardée comme invariable par rapport à la température, pour le même tube de verre.

Si donc nous considérons maintenant les quantités A et B comme constantes dans notre formule ci-dessus (j), nous voyons que la compressibilité β ne dépend que du produit y^2d du carré de la colonne de résonance par la densité de liquide. Si ce produit croît avec la température, β décroît, et réciproquement. Voyons la variation de ce produit.

---

[1]) On remarque que cette lettre B représente la même quantité que celle que nous avons désignée plus haut par k.

[2]) *Annales de Chimie et Physique*, T. 31, page 475. An. 1851.

Dans l'intervalle de 0^0 à 4^0 la densité d de l'eau croît, de même que la colonne de résonance y; donc le produit y^2d *croît* et par conséquent β *décroît*.

Après avoir passé par son *maximum* à la température de $57^0,77$, la colonne y décroît, et la densité d, qui diminue constamment après 4^0, décroît aussi; donc le produit y^2d *décroît* et β *croît*.

On voit donc que le produit y^2d, considéré comme une fonction de la température, *croît* entre 0^0 et 4^0 et *décroît* après $57^0,77$; il doit alors passer nécessairement par un *maximum* dans cet intervalle entre 4^0 et $57^0,77$, quand β doit passer un *minimum*.

Comme nous ne connaisson pas pour l'eau la fonction d de la température, nous allons calculer ce produit y^2d de proche en proche pour différents degrés de chaleur et voir où est le moment, où il passe par un maximum.

Voici dans ce tableau le résultat de ce calcul pour notre tube de verre I_5, où l'on a inscrit aussi la valeur de la compressibilité surtout au voisinage de son *minimum*, en tenant compte des valeurs

$$A = 10{,}411975$$
$$B = 10^{-6}.7{,}0939$$

correspondant à ce tube et pour la source sonore Sol_5.

TEMPÉRATURE	Densité d	Colonne de résonance y	Produit y^2d	Compressibilité d'après la formule $\beta = \frac{A}{y^2d} - B$
				$10^6\beta =$
0^0 . . .	0,99987	422,4 mm.	178398,7	51,269
4^0 . . .	1,0000	425,8	181305,6	50,334
10^0 . . .	0,999747	432,	186576,7	48,711
20^0 . . .	0,998259	441,3	199406,6	46,460
40^0 . . .	0,99235	457,16	207396,4	43,109
50^0 . . .	0,98819	461,70	210649,4	42,277
54^0 . . .	0,98627	462,59	211058,7	42,2382
55^0 . . .	0,98578	462,73	*211074,3* max.	*42,2346* min.
56^0 . .	0,98530	462,82	211053,5	42,2394
57^0 . . .	0,98482	462,87	210999,0	42,252
$57^0,77$. . .	0,98444	*462,88$_5$* max.	210928,6	42,269
60^0 . . .	0,98338	462,78	210606,0	42,344
70^0 . . .	0,97794	459,50	206482,5	43,332
80_0 . . .	0,97194	450,96	197658,5	45,583
90^0 . . .	0,96556	436,26	183768,1	49,564

On voit de ce tableau que le produit y^2d passe par un maximum pour la température

$$t = 55^0$$

la valeur de ce *maximum* étant $y^2d = 211074{,}3$.

La *compressibilité* qui décroît constamment à partir de 0^0 —comme il a été montré plus haut et comme il ressort aussi des chiffres de ce tableau—passe donc pour la même température de 55^0 par un *minimum*, qui est :

$$\beta_{\text{min.}} = 10^{-6} 42{,}23.$$

C'est-là le résultat de nos expériences de résonance et de nos formules (l) et (j). Amagat avait trouvé par des mesures directes que la compressibilité de l'eau distillée admet effectivement un *minimum* et il avait placé ce minimum vers 50^0. Plus tard les physiciens Vicentini et Avenarius et leurs collaborateurs trouvent, toujours par des mesures expérimentales, que ce *minimum* a lieu à 61^0, c'est-à-dire à une température bien plus élevée [1]). On voit que notre chiffre de 55^0 obtenu pour le même *minimum*, par une voie tout à fait nouvelle, donne une température intermédiaire entre celles qui ont été indiquées par ces habiles expérimentateurs.

Quatrième application

57. Comment varie la *vitesse* du son dans la *masse* de l'eau distillée avec la *température?*

D'après la formule de Laplace :

$$V^2 = \frac{101{,}3543}{\beta d}$$

qui donne la vitesse du son dans une *masse* liquide, on voit que la variation de cette vitesse avec la température dépend de la variation du produit βd du coefficient de compressibilité par la densité du liquide. Étudions donc cette variation.

---

1) O. D. Chwolson. Physique. T. Ier, fasc. 3e, page 583 et 586. An. 1907.

Pour l'eau distillée nous venons de voir que la compressibilité décroît continuellement de 0^0 jusqu'à 55^0; la densité, par contre, croît d'abord jusqu'à 4^0, puis décroît constamment quand la température augmente.

On voit de là que dans l'intervalle de 4^0 à 55^0 la compressibilité β aussi bien que la densité d vont toutes les deux en décroîssant; leur produit βd *décroît* alors aussi et donc la vitesse V *croît* entre ces deux températures.

Mais dans l'intervalle de 0^0 à 4^0 la compressibilité β décroît, tandis que la densité d croît; on ne sait plus alors *à priori* quelle est la marche de leur produit. La même incertitude règne pour des températures supérieures à 55^0, où, par contre, β croît et d décroît simultanément.

Pour nous fixer sur la variation de ce produit dans ces deux intervalles, reprenons notre précédente formule (j), qui donne le coefficient de compressibilité et où les quantités A et B peuvent être regardées comme constantes par rapport à la température :

$$\text{(j)} \quad \beta = \frac{A}{y^2 d} - B$$

Multiplions les deux membres par la densité d. On a :

$$\text{(k)} \quad \beta d = \frac{A}{y^2} - Bd.$$

Le premier terme $\frac{A}{y^2}$ du second membre décroît entre 0^0 et 4^0, car la colonne y croît continuellement dans cet intervalle. Le second terme Bd, par contre, croît, car la densité d de l'eau croît de 0^0 à 4^0. On voit alors que de $\frac{A}{y^2}$, qui diminue sans cesse, se retranche le terme Bd, qui augmente sans cesse; la différence entre ce deux termes ne fait, évidemment, alors que décroître et donc le produit βd *décroît* constamment dans cet intervalle de température. La vitesse V *croît* d'après cela, de 0^0 à 4^0, et, comme elle *croît* aussi, d'après les précédentes, de 4^0 à 55^0, il résulte qu'elle *croît* continuellement avec la température *depuis* 0^0 *jusqu'à* 55^0.

A partir de ce dernier moment, comme le coefficient β commence à croître et que d continue à décroître, on ne peut plus conclure de cette formule (k) si leur produit continue à décroître, ou s'il commence à augmenter. Pour le voir prenons la dérivée du second membre de (k), considéré comme une fonction de la température. On a :

$$(n) \quad (\beta d)'_t = -2A\frac{y'_t}{y^3} - Bd'_t.$$

Puisque pour l'eau distillée la densité *d* décroît continuellement après 4^0 il résulte que la dérivée d'_t est toujours négative pour des températives supérieures à 4^0 et que conséquemment le terme $-Bd'_t$ est toujours positif pour de telles températures. Le signe du terme $2\frac{Ay'_t}{y^3}$ dépend de celui de y'_t. Puisque la colonne de résonance y croît, d'après les précédentes, de 0^0 jusqu'à $57^0,77$ la dérivée y'_t est positive jusqu'à ce dernier moment, où elle s'annule, et commence ensuite à devenir négative. Il s'en suit que le terme $-2A\frac{y'_t}{y})$ —après s'être annulé pour $57^0,77$—devient positif après cette dernière température et comme le terme $-Bd'_t$ est aussi positif, il résulte que le second membre de (n) est certainement positif après $57^0 77$, comme il l'est aussi même pour cette température-ci. Il s'en suit que le produit βd croît sûrement pour et après $57^0,77$, car sa dérivée reste alors positive. Puisque jusqu'à 55^0 il a *diminué* constamment et qu'après $57^0,77$ il ***croît*** sûrement, il s'en suit que dans l'intervalle de 55^0 jusqu'à $57^0,77$ il a passé par un *minimum* et donc que la *vitesse* V a passé par un *maximum*.

La vitesse du son dans l'eau distillée présente donc cette particularité intéresante que, tout en augmentant avec la température, elle admet un *maximum* bien localisé, qui, d'après nous, serait placé entre 55^0 et $57^0,77$ et au delà duquel elle diminue constamment quand la température monte.

Pour fixer d'une manière plus approchée la position de ce maximum entre 55^0 et $57^0,77$, calculons le produit βd pour quelques températures succesives pour et en dehors de cet intervalle et voyons à quel moment il parait atteindre sa moindre valeur. En effectuant ces calculs, qui nous sont facilités par les chiffres du tableau précédent, où le coefficient de compressibilité β est donné pour différentes températures, on trouve :

TEMPÉRATURE	Densité d	Compressibilité $10^6\beta$	Produit $10^6\beta d$	Vitesse du son V
0^0 . . .	0,99987	51,270	51,263	1406,1 m.
4^0 . . .	1,00000	50,334	50,334	
10^0 . . .	0,99975	48,711	48,699	1442,6
40^0 . . .	0,99235	43,109	42,779	1539,2
50^0 . . .	0,98819	42,277	41,778	1557,6
55^0 . .	0,98578	*42,235* m n.	41,634	
56^0 . . .	0,98530	42,239	41,618	
57^0 . . .	0,98482	42,252	*41,6106* min.	*1560,7* max.
57^0,77. . .	0,98444	42,269	41,6109	
60^0 . .	0.98338	42,344	41,640	1560,1
70^0 . . .	0,97794	43,332	42,376	1546.5

On voit de là que la température qui correspond au *minimum* du produit βd est très près de 57^0. La vitesse V passe donc pour la même température par un *maximum*, qui est :

$$V_{max.} = 1560,7 \text{ m.}$$

Pour l'eau distillée on savait que la *densité* et la *compressibilité* presséntent des changements de sens dans leur variation avec la tempétature entre 0^0 et 100^0 et sous des pressions ordinaires. On voit maintenant que la *vitesse du son* aussi présente un pareil changement de signe entre les mêmes limites de température et dans les mêmes conditions de pression. C'est une nouvelle particularité à ajouter à celles qui caractérisent ce liquide et qu'on *ne rtouve mentionnée* dans *aucun traité* de physique. ——

Nous arrêtons là la liste des conséquences et des applications de nos formules relatives à la résonance des liquides, destinées à ce chapitre. D'autres applications des mêmes formules trouveront leur place ailleurs.

TABLE DES MATIÈRES

TROISIÈME PARTIE