

1942

LECTIUNI
DE
TRIGONOMETRIE PLANĂ
PENTRU CLASA VI.

DE
N. ABRAMESCU
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

Carte aprobată de Ministerul Instrucțiunii cu ordinul No. 503 din 27 Iunie 1930.



EDITURA LIBRĂRIEI SOCEC & Co., s. A. BUCUREȘTI

Taxa timbrului didactic de 5% pentru acest manual s'a plătit
direct Casei Corpului Didactic conf. deciziei No. 2459/924

1930. EDIȚIA I-a — Tipărită în 5000 exemplare

1947

Inr. A. 58.595

LECȚIUNI

DE

TRIGONOMETRIE PLANĂ

PENTRU CLASA VI.

N. ABRAMESCU
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

Carte aprobată de Ministerul Instrucțiunii cu ordinul No. 503 din 27 Iunie 1930.



70008

EDITURA LIBRĂRIEI SOCEC & Co., s. A. BUCUREȘTI

Taxa timbrului didactic de 5% pentru acest manual s'a plătit direct Casei Corpului Didactic conf. deciziei No. 2489/924

1930. EDIȚIA I-a — Tipărită în 5000 exemplare

BUCURESTI
Cota 79637
Inventar 70008

1956

RC 159/01

CONTROL 1953

B.C.U. Bucuresti



C70008

PREFAȚĂ.

Această nouă ediție a Trigonometriei diferă de precedentă prin aranjarea materiei, urmărind ca să fie cât mai accesibilă începătorilor. În acest scop, am expus mai întâi părțile elementare, însoțite de numeroase exemple, lăsând apoi pentru cei înaintați dezvoltările, pe care le-am indicat chiar în text și le-am expus unele cu litere mici.

Lucrarea pare prea dezvoltată pentru Licee, dar ceea ce mărește formatul sunt, nu numai numeroasele aplicații și exerciții, dar mai ales indicațiile date la fiecare din ele.

Voiu fi recunoscător aceluia care îmi vor indica erorile de calcul și îmi vor trimite judicioasele lor observații. Mulțumesc D-lui D. Constantinescu-Buzău pentru corectarea probelor și Casei Sococ & C-ie, București, pentru grija și sacrificiile făcute ca această lucrare să iasă cât mai bine.

N. ABRAMESCU

Profesor la Universitatea din Cluj

REFERAT ASUPRA TRIGONOMETRIEI.

Manualului de Trigonometrie, revăzut de D-l N. Abramescu, un distins autor de cărți didactice, nu i se poate reproșa nimic; poate doar că e mult mai bogat decât prevede programa analitică. Dar tocmai acest surplus de materie, care e risipit în tot corpul manualului, parte ca text parte ca aplicațiuni variate și parte ca indicațiuni la exerciții și exemple numeroase și foarte variate, face valoarea lui deosebită. Prin acest surplus, manualul devine o carte prețioasă și de mare interes pentru cei ce îndrăgesc matematica.

Expunerea, în tot cursul manualului, este, dealtfel ca în toate manualele didactice ale D-lui N. Abramescu, limpede și cristalizată în formule ce cuprind cuvinte puține.

Autorul dă o fericită interpretare și concretizare a noțiunii de funcție trigonometrică prin linia trigonometrică. Explică și analizează toate felurile de table construite și cari se găsesc în tablele de logaritmi ale lui Dupuis. Așa bunăoară explică și arată întrebuințarea tablelor „Lignes trigonométriques naturelles“, „Longueur des arcs de cercle pour le rayon 1“, „Tables des logarithmes des lignes trigonométriques“, etc.

Manualul întrunind calități didactice eminente, propun să fie aprobat potrivit art. II. al. I.

Referent
N. I. NICULESCU
Profesor București.

TABLA DE MATERII.

	<u>Pag.</u>
Prefața	I
<i>Introducere. Istoric</i>	1— 2
<i>Noțiuni in'roductive. Arce. Unghiuri.</i> Măsura lungimei arcului când unghiul este exprimat în grade. Măsura lungimei arcului când unghiul este exprimat în radiani. Relația dintre numărul de grade și numărul de radiani corespunzătoare aceluiași unghi la centru	3— 7
Exerciții	7— 8
<i>Liniiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite. Linii trigonometrice în primul cadran.</i> Funcțiuni trigonometrice. Linii trigonometrice. Sinus. Cosinus. Tangenta. Cotangenta. Secanta. Cosecanta. Relațiuni între liniile trigonometrice ale aceluiași unghi. Exprimarea liniilor trigonometrice cu una din ele. Relațiuni între liniile trigonometrice ale unghiurilor complimentare. Calculul câtorva linii trigonometrice	9—19
Exerciții	19—20
<i>Table trigonometrice</i> Table de linii trigonometrice. Table de logaritmi liniilor trigonometrice. Aplicații	20—30
Exerciții	30—32
<i>Relațiuni între elementele unui triunghi dreptunghic. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.</i> Calculul elementelor triunghiului dreptunghic. Cazul I. Se cunosc ipotenuza și un unghi ascuțit ale unui triunghi dreptunghic și se cer celelalte elemente. Exemplu. Cazul II. Se dau ipotenuza și o catetă. Exemplu. Cazul III. Se dau o catetă și unghiul opus. Exemplu. Cazul IV. Se dau cele două catete. Exemplu	32— 38
Exerciții	38
<i>Probleme care se reduc la rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.</i> Triunghiul isoscel. Exemple. Dreptunghiul. Poligoane regulate înscrise și circumscrise. Raza cercului înscris unui poligon regulat	38—42
Exerciții	42—43
<i>Calculul ariilor.</i> Aria triunghiului dreptunghic. Exemple. Aria triunghiului isoscel. Exemple. Aria poligoanelor regulate înscrise și circumscrise la un cerc	43—46
Exerciții	46—47
<i>Liniiile trigonometrice în cadranul întâi și al doilea. Liniiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite și obtuse.</i> Sinus. Cosinus. Tangenta. Cotangenta. Secanta. Cosecanta. Liniiile trigonometrice	

ale unghiurilor suplimentare. Relațiuni între liniile trigonometrice din cadranul al doilea. Liniile trigonometrice ale unghiurilor negative. Aplicații. Ecuatii trigonometrice	48—56
Exerciții	56
<i>Relațiuni fundamentale între elementele unui triunghi</i> Relația dintre două laturi și unghiurile opuse. Relația dintre trei laturi și două unghiuri. Relația dintre trei laturi și un unghi . . .	56—59
<i>Operațiuni asupra arcelor.</i> Adunarea arcelor. Demonstrarea geometrică a teoremei de adunare. Scăderea arcelor. Aplicații. Inmulțirea arcelor. Împărțirea arcelor	59—66
Exerciții	66—67
<i>Formule calculabile prin logaritmi.</i> Transformarea sumei și diferenței liniilor trigonometrice în produse. Exemple. Funcțiuni circulare directe și inverse. Aplicații	67—71
Exerciții	71—72
<i>Rezolvarea triunghiurilor oarecare.</i> Relația dintre suma și diferența a două laturi și între tangentele jumătăților sumei și diferenței unghiurilor opuse (Teorema tangentelor). Unghiuri în funcție de laturi. Cazurile de rezolvare. Cazul I. Se dau două unghiuri și o latură opusă la unul din unghiuri. Exemplu. Cazul II. Se dau două laturi și unghiul opus uneia dintre ele. Discuție. Exemple. Cazul III. Se dau două laturi și unghiul cuprins între ele. Exemplu. Cazul IV. Se dau laturile. Exemplu	72—81
Exerciții	81—85
<i>Calculul ariilor.</i> Aria triunghiului cărui a i se cunosc două laturi și unghiul cuprins între ele. Când se cunosc o latură și două unghiuri alăturate. Se cunosc laturile triunghiului. Rezolvarea unui triunghi cunoscându-i aria, suma a două laturi și latura a treia Exemple	85—89
Exerciții	89—90
<i>Razele cercului înscris și ale cercurilor exinscrise la un triunghi.</i> Raza cercului circumscris. Relațiuni între aceste raze . . .	91—97
Exerciții	97—100
<i>Relațiuni între elementele unui triunghi</i>	100—107
<i>Liniile trigonometrice ale unghiurilor oarecare.</i> Liniile trigonometrice ale arcelor din cadranul al treilea și al patrulea. Proiecția unui vector pe o axă. Variația liniilor trigonometrice. Reprezentarea grafică a variației liniilor trigonometrice	108—114
<i>Reducerea liniilor trigonometrice ale unghiurilor oarecare la liniile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite.</i> Unghiuri cuprinse între 90° și 180° . Unghiuri cuprinse între 180° și 270° . Unghiuri care diferă cu 180° . Unghiuri cuprinse între 270° și 360° . Unghiuri a căror sumă este 360° . Unghiuri care diferă cu 360° . Reducerea liniilor trigonometrice ale unghiurilor oarecare la acelea ale unghiului ascuțit. Reducerea la primul cadran. Exemple. Unghiuri care corespund la o linie trigonometrică dată. Exemple. Aplicații	114—120
Exerciții	120—121

<i>Aplicații.</i> Fiind dat $\cos a$, să se calculeze celelalte linii trigonometrice ale arcului $\frac{a}{2}$. Se dă $\sin a$ și se cer liniile trigonometrice ale arcului $\frac{a}{2}$. Se dă $\operatorname{tg} a$ și se cer liniile arcului $\frac{a}{2}$.	
Exprimarea rațională a sinusului, cosinusului unui unghi cu ajutorul tangentei jumătății unghiului	121—127
Exerciții	128—130
<i>Ecuatii trigonometrice.</i> Exemple	130—138
Exerciții	138—147
<i>Aplicațiuni la patrulater.</i> Patrulare oarecare. Rezolvarea patrulaterelor oarecare. Aria unui patrulater în funcțiune de laturi. Aria în funcțiune de diagonale	147—152
Exerciții	152—153
<i>Patrulare inscriptibile.</i> Calculul unghiurilor. Diagonalele. Relația dintre diagonale și laturi (Teorema lui Ptolomeu). Aria patrulaterului. Raza cercului circumscris. Unghiul diagonalelor .	153—157
<i>Aplicațiuni la calculul distanțelor și înălțimilor.</i> Distanța a două puncte accesibile, dar a căror distanță nu se poate măsura din cauza unui obstacol. Distanța dintre două puncte, unul fiind accesibil, celalt nu, însă se vede. Prelungirea unei drepte dincolo de un obstacol. Distanța a două puncte neaccesibile. Problema hărții. Înălțimea unui turn așezat deasupra planului orizontal. Înălțimea unui munte, terenul de la poalele lui fiind orizontal. Înălțimea unui munte, terenul de la poalele lui nefiind orizontal	157—163
Exerciții	163—164

INTRODUCERE. ISTORIC.

Trigonometria are ca scop calculul elementelor necunoscute ale triunghiurilor cu ajutorul unui număr suficient de elemente cunoscute. Și în Geometria plană se studiază rezolvarea triunghiurilor plane, dar aceasta se face cu ajutorul construcțiilor și măsurărilor, a căror precizie depinde de perfecția instrumentelor și de abilitatea calculatorului. Operațiunile geometriei se referă numai la laturi sau numai la unghiuri și nici odată nu intervin unghiurile odată cu laturile. Trigonometria însă stabilește relațiuni între laturi și unghiuri și cu ajutorul acestora se determină elementele necunoscute ale triunghiurilor cu preciziunea calcului.

Pentru aceasta, Trigonometria se folosește de rezultatele *Goniometriei*, care definește *funcțiunile goniometrice* (de unghiuri), stabilește relațiunile dintre ele, precum și metodele de calculare a valorilor lor. Aceste funcțiuni depinzând de unghiuri, exprimate printr'un arc de cerc sau prin echivalentul lui în grade, se numesc *circulare*, iar trigonometria care le aplică, se numește *trigonometrie circulară*, spre deosebire de alte trigonometrii, ca cea *îperbolică*, etc.

Trigonometria se împarte în *trigonometrie plană* și *trigonometrie sferică*. Trigonometria plană, de care ne ocupăm, cuprinde goniometria unghiurilor și rezolvarea triunghiurilor plane, precum și numeroase aplicațiuni.

Este imposibil de a fixa într'un mod precis origina Trigonometriei; se poate numai afirma că datează din timpuri foarte vechi. Preoții vechiului Egipt au fost depozitarii cunoștințelor umane, pe care legile instituțiunei lor îi obligau să le studieze și să le culegă. Vechile matematici ne-au fost transmise prin lucrările Grecilor, pe care preoții egipteni îi inițiaseră. Este probabil că Egiptenii cunoșteau principiile atât de simple ale Trigonometriei, cu care puteau rezolva probleme așa de naturale cum sunt, cunoașterea lărgimei unui râu fără a putea

fi măsurată direct, distanța vârfurilor a doi munți separați de o prăpastie, etc.

Se știe sigur, însă, că principiile Trigonometriei erau bine cunoscute de Greci, care le aplicau la măsurarea distanțelor pământești și la multe probleme din Astronomie. Numeroasele calcule necesare atâtor lucrări pe care le-a executat marele astronom *Hiparch* (din Niceea, Bithynia) făcură să nască (130 a. Chr.) între mâinile sale Trigonometria.

Cunoștințele operilor lui Hiparch ne-au fost transmise de *Ptolemeu* (125 d. Cr.), cel mai mare astronom al antichității, în a cărui mare lucrare, *Sintaxa matematică* (numită de Arabi și *Almagestul*), se găsește primul tratat de Trigonometrie plană și sferică, care ne este cunoscut.

În secolul XV nu se cunoștea altă ediție a lui Ptolemeu decât traducerea lăsată de Arabi, dar care era defectoasă din cauza nepriceperei celor ce o făcuse. *Purbach* (născut în Bavaria în 1421) restabili adevăratul sens și textul lui Ptolemeu. El introduse sinusul în Trigonometrie pentru a înlocui coardele și făcu prima tablă trigonometrică. Unii autori afirmă că introducerea sinusului se datorește lui *Mohamed-Ben-Géber*, print din Siria, numit și *Albategnius* (877—929).

Tratatul triumghiurilor, care este o trigonometrie completă a lui *Regiomontanus* (1436—1575), diferă puțin de trigonometria de azi.

Table trigonometrice au fost calculate, cu 11 zecimale, de *Joachim Reticus* (1514—1575) și *Barthelemi Pitiscus*, a cărui lucrare (făcută în 1610), cu 16 zecimale, poate servi pentru verificarea tabelor de azi.

După invenția logaritmilor de către *Neper* (1550—1617), logaritmii fură aplicați la calcule trigonometrice; primele table au fost alcătuite în 1625, iar *Henrion*, în 1626, a editat la Paris primele table cu 7 zecimale.

Cu progresul matematicilor, principiile Trigonometriei elementare nu mai fură considerate de cât cazuri speciale ale unei Științe mult mai generale și mai întinse. Funcțiunile circulare deveniră obiectul unui studiu mai înalt, care este din domeniul *Analizei matematice*.

NOȚIUNI INTRODUCTIVE. ARCE. UNGHIURI.

1. **Arce. Unghiuri.** Să considerăm, în cercul cu centru O și raza r (Fig. 1), unghiul la centru, a . Între acest unghi și arcul corespunzător AB , vom stabili o relație importantă în baza următoarei proprietăți.

Într'un cerc raportul a două arce oărcăcare este egal cu raportul unghiurilor la centru corespunzătoare. În adevăr, să considerăm arcele AB și CD , cărora le corespund unghiurile la centru $\angle AOB = a$, $\angle COD = b$ (Fig. 1). Fie CE măsura comună a arcelor AB și CE , care se cuprinde în AB de m ori și în CD de n ori. Ayem

$$(1) \quad \frac{\text{arc } AB}{\text{arc } CD} = \frac{m \cdot CE}{n \cdot CE} = \frac{m}{n}$$

Însemnând cu α unghiul la centru respunzător arcului CE , avem

$$(2) \quad \frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{m \cdot \alpha}{n \cdot \alpha} = \frac{m}{n}$$

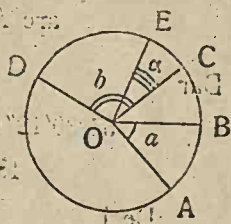


Fig. 1.

Comparând egalitățile (1) și (2), rezultă

$$(3) \quad \frac{\text{arc } AB}{\text{arc } CD} = \frac{\angle AOB}{\angle COD}$$

adică raportul a două arce este egal cu raportul unghiurilor la centru corespunzătoare.

Considerând ca unitate de arc, acel arc care corespunde unui unghi la centru egal cu unitatea, rezultă, din formula (3), că măsura unui arc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător.

2. **Măsura lungimei arcului când unghiul este exprimat în grade.** Să luăm ca unitate a unghiului, unghiul la centru, căruiua îi corespunde arcul pe cerc egal cu a 360-a parte din lungimea cercului; acesta se zice unghi de un grad; gradul se împarte în 60 minute și minuta în 60 secunde și se

notează respectiv cu următoarele semne $^{\circ}$, $'$, $''$, puse deasupra numerilor. De ex., $30^{\circ} 45' 26''$ se citește 30 grade, 45 minute, 26 secunde. În aceste condiții, însemnând cu n° și 360° , numărul de grade ce corespunde arcului AB și lungimei cercului de rază r , pe care este luat acest arc, avem, din formula (3),

$$\frac{\text{măs arc AB}}{2 \pi r} = \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}}$$

de unde

$$(4) \quad \text{măs arc AB} = \frac{\pi r n^{\circ}}{180^{\circ}}, \quad n^{\circ} = \frac{\text{măs arc AB}}{r} \times \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

Cu aceste formule se poate calcula lungimea unui arc de pe un cerc de raza r , când se cunoaște unghiul la centru corespunzător (măsurat în grade) și invers, fiind cunoscut arcu, se poate calcula unghiul la centru.

Exemplu. Să se afle lungimea arcului corespunzător unghiului la centru de $54^{\circ} 30' 12''$, raza cercului fiind de 6 dm. Avem, din formula (4),

$$\text{arc AB} = \frac{\pi r n^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{3,14 \times 6 \times 54^{\circ} 30' 12''}{180^{\circ}}$$

Dar

$$54^{\circ} 30' 12'' = [(54 \times 60 + 30) \times 60 + 12]'' = 196212'',$$

$$180^{\circ} = (180 \times 60 \times 60) = 648000''.$$

Deci

$$\text{arc AB} = \frac{3,14 \times 6 \times 196212}{648000} = \frac{3,14 \times 32,702}{18} = 5,704 \text{ dm.}$$

3. Măsura lungimei arcului când unghiul este exprimat în radiani. *Radian* este unghiul la centru căruia îi corespunde un arc egal cu raza cercului. Să înlocuim în formula (3) arcu CD cu raza r a cercului; atunci unghiul său la centru, COD, este egal cu 1 radian. Primul membru al acestei formule devine

$$\frac{\text{arc AB}}{r},$$

iar membrul al doilea fiind raportul dintre un unghi AOB și unitatea de măsură COD = radianul, este măsura n a unghiului AOB exprimată în radiani. Avem, deci, egalând ambii membrii,

$$(5) \quad \text{m\~{a}s } \sphericalangle AOB = \frac{\text{arc } AB}{r}, \quad n = \frac{\text{arc } AB}{r},$$

sau

$$(6) \quad \text{arc } AB = r \times \sphericalangle AOB, \quad \text{arc } AB = r \times n.$$

Cu formula (5) se calculează valoarea n a unghiului AOB, în radiani, când se cunoaște lungimea AB a arcului corespunzător unghiului la centru AOB în cercul cu raza r ; cu relația (6) se calculează lungimea arcului AB, corespunzător unghiului la centru AOB, exprimat în radiani.

Astfel, numărul n de radiani corespunzător unui arc AB, este $\frac{\text{arc } AB}{r}$, și se obține împărțind lungimea arcului AB cu raza r a cercului. Știind că unui arc de pe cercul cu raza r îi corespund n radiani, lungimea arcului AB este egală cu $n \times r$, adică cu produsul numărului n de radiani cu raza r a cercului.

4. Relația dintre numărul de grade și numărul de radiani corespunzătoare aceluiași unghi la centru. Să însemnăm cu n° și n numerile care exprimă câte grade și câți radiani corespund unghiului la centru OAB. Din formula (4), deducem

$$\frac{\text{arc } AB}{r} = \frac{\pi n^\circ}{180^\circ},$$

pe care comparând-o cu (5), obținem

$$(7) \quad n = \frac{\pi n^\circ}{180^\circ}, \quad n^\circ = \frac{180^\circ n}{\pi},$$

relațiuni care permit să calculăm valoarea n a unghiului în radiani când se cunoaște valoarea n° a aceluiași unghi în grade și invers.

Făcând în a doua din formulele (7) pe $n=1$, avem

$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3,1416},$$

relație care dă numărul de grade ce corespund unui unghi la centru egal cu un radian. Operația o facem în modul următor

$$\begin{array}{r|l} 1800000 & 31416 \\ \hline 229200 & 57^\circ \\ \hline 9288 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9288 \times 60 = 557280 \\ 557280 & 31416 \\ \hline 243120 & 17' \\ \hline 23208 & \end{array}$$

$$\frac{23208 \times 60}{31416} = 44'' \text{ aproape.}$$

Deci unui radian îi corespund $57^{\circ}17'44''$.

Numărul de grade care corespund unui unghi de 2 radiani este

$$(57^{\circ}14'44'') \times 2 = 114^{\circ}34'88'' = 114^{\circ}35'28''.$$

De asemenea, arcul care corespunde unui unghi egal cu $\frac{1}{2}$ radian, este $(57^{\circ}17'44'') : 2$, și se calculează astfel

$$\begin{array}{r} 57^{\circ} : 2 = 28^{\circ} \\ \hline 17 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1^{\circ} \times 60 = 60' \\ 60' + 17' = 77' \\ 77' : 2 = 38' \\ \hline 17 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1' \times 60 = 60'' \\ 60'' + 44'' = 104'' \\ 104 : 2 = 52'' \end{array}$$

Deci, unui arc egal cu $\frac{1}{2}$ radian, îi corespund $28^{\circ}38'52''$.

Considerând arcul de 360° , adică lungimea cercului, pentru a găsi câți radiani corespund acestui arc, ne servim de formula (5), adică împărțim lungimea cercului $2\pi r$ (unde $\pi = 3,1416$) cu aceea a razei r , și avem

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi = 2 \times 3,1416 = 6,2832 \text{ radiani.}$$

Deci, lungimei arcului de 360° corespund 2π radiani.

"	"	180°	"	π	"
"	"	90°	"	$\frac{1}{2}\pi$	"
"	"	45°	"	$\frac{1}{4}\pi$	"
"	"	1°	"	$\frac{\pi}{180}$	"

unde π se înlocuiește cu 3,1416.

Urmează deci că unghiurile, arcele, se pot exprima sau în grade, sau în radiani. Astfel, când se dă $a+b=90^{\circ}$, atunci a și b sunt exprimați în grade; iar, când se dă $a+b=\pi$, a și b sunt exprimați în radiani, π reprezentând numărul de radiani corespunzător la 180° .

Deci, fiind dat un unghi a , unghiul complementar al său, adică unghiul care împreună cu a fac 90° , este în grade $90^{\circ}-a$, sau în radiani $\frac{\pi}{2}-a$. În rezumat, când e vorba de unghiuri, în formule, π reprezintă 180° .

Exemplu. Să se afle unghiul la centru corespunzător arcului de 6,396 dm, raza cercului fiind de 8 dm.

Unghiul în radiani îl obținem din (5), iar în grade din (4).

Avem deci, în radiani,

$$n = \frac{\text{arcAB}}{r} = \frac{6,396}{8} = 0,7995 \text{ radiani,}$$

iar în grade,

$$n^\circ = \frac{\text{arcAB}}{r} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 0,7995 \times 57^\circ 17' 44'' = 45^\circ 48' 28''.$$

Acest ultim număr se mai putea deduce și din a doua din formulele (7).

EXERCITII.

1. Raza cercului fiind 1 cm, să se afle lungimile arcelor care corespund unghiurilor la centru de 1° ; $1'$; $1''$.

$$R. \frac{\pi}{180^\circ} = 0,0174; \frac{\pi}{180 \times 60} = 0,00029; \frac{\pi}{180 \times 60 \times 60} = 0,000005.$$

2. Să se afle lungimile arcelor ce corespund, unghiului la centru de 35° , raza cercului fiind 5 cm.; unghiului de $50^\circ 15'$, raza fiind 4,5 dm; unghiului de $3^\circ 9' 12''$, raza fiind de 9 m.

R. 3,05 cm; 3,94 dm; 0,495 m.

3. Aria unui cerc fiind $123,45 \text{ cm}^2$, să se afle arcul corespunzător unghiului la centru de $15^\circ 20'$.

R. Se efectuează câtul cu două zecimale dintre $123,45$ și $3,14$; se extrage rădăcina pătrată din acest cât și se află raza cercului. Arcul este 1,65 m.

4. Unghiul format de tangentele în două puncte ale cercului cu raza 720 m este de 135° ; să se afle lungimea arcului dintre cele două puncte.

R. Ducând razele punctelor de contact, se formează un patrulater, care are unghiul din centrul O egal cu suplimentul lui 135° . Se caută arc ce corespunde acestui unghi la centru. Se găsește 565,4 m.

5. Să se afle, în radiani și în grade, unghiul ce corespunde arcului de 9,6 dm în cercul cu raza 20,5 dm. Se va lua $\pi = 3,1416$.

R. 0,46829 rad.; $26^\circ 49' 54''$.

6. Suma lungimilor a două cercuri este 89,46 m; suma arcelor care corespund la două unghiuri la centru egale în cele două cercuri este 12,35 m. Să se afle unghiul de la centru.

R. Însemnând cu r și r' razele celor două cercuri și n° mărimea unghiului la centru, avem

$$2\pi r + 2\pi r' = 89,46, \quad \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi r' n^\circ}{180^\circ} = 12,35.$$

Se înlocuește $(r+r')$ din ecuația a doua cu valoarea sa din prima; se obține $n^\circ = 49^\circ 41' 54''$; 0,8674 rad. ($\pi = 3,1416$).

7. Lungimile a două cercuri sunt respectiv 66,5 cm și 30,15 cm. Raportul a două unghiuri la centru în aceste cercuri este $\frac{3}{4}$, iar suma

arcelor corespunzătoare este 19,51 cm. Să se afle unghiurile la centru.

R. Se calculează întâi razele cercurilor și se înlocuiesc în ecuația ce dă suma arcelor și se obține o ecuație între numerile de grade n și n' . Se rezolvă această ecuație și $n:n'=3:4$ și se găsește $87^{\circ}46'$; $65^{\circ}49'30''$.

8. Care este mai mare, unghiul de 144° sau cel de 2,5 rad.

R. Cel dintâi; 2,5 rad. = $143^{\circ}14'22''$.

9. Câte grade are unghiul de 0,1 rad.

R. $5^{\circ}43'47''$.

10. Unul din unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este de 1,15 rad. Să se calculeze câți radiani are celalt unghi ascuțit.

R. În 90° sunt $\frac{90^{\circ}}{57^{\circ}17'44''}$ rad. = $\frac{90}{3,1416} = 1,57$ rad. Celalt unghi are

$(1,57 - 1,15)$ rad. = 0,42 rad.

11. Două unghiuri ale unui triunghi oarecare au $\frac{1}{2}$ rad. și $\frac{2}{7}$ rad.; să se determine unghiul al treilea.

R. În 180° sunt $\frac{180^{\circ}}{57^{\circ}17'44''}$ rad. = $\frac{180}{3,1416}$ rad. = 3,1416 rad. Celalt unghi

este $(3,1416 - \frac{1}{2} - \frac{2}{7})$ rad. = 2,356 rad., $2,356 \times 1$ rad. = $2,356 \frac{180}{3,1416} = 135^{\circ}$.

12. În cercul cu raza 2,5 cm. un arc corespunde unui unghi de centru de 1,5 rad. Să se afle unghiul la centru ce corespunde aceluiaș arc în cercul cu raza 1 cm.

R. arcAB = $n \times r$, arc AB = $n' \times r'$; $1,5 \times 2,5 = n' \times 1$. 3,75 rad. $214^{\circ}51'52''$.

LINII TRIGONOMETRICE IN PRIMUL CADRAN.

LINIILE TRIGONOMETRICE ALE UNGHIURILOR ASCUȚITE.

5. **Funcțiuni goniometrice.** Să considerăm unghiul $XOY = \alpha$ (Fig. 2) și din două puncte oarecare B și B' ale laturii OY să ducem perpendicularele BA și $B'A'$ pe latura OX .

În triunghiul $OA'B'$, dreapta AB fiind paralelă cu latura $A'B'$, se știe că triunghiurile OAB și $OA'B'$ sunt asemenea. Deci laturile sunt proporționale, adică

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

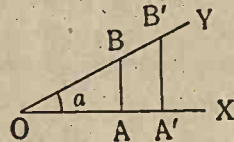


Fig. 2.

Egalând raportul al treilea cu al doilea, apoi raportul întâi cu al doilea, în fine raportul al treilea cu întâiul, avem

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}, \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}, \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}$$

Schimbând în aceste proporții locul termenilor mijlocii, obținem

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'}, \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}, \frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'}$$

Deci, oricum am lua punctele B și B' pe latura OY , rapoartele

$$\frac{AB}{OB}, \frac{OA}{OB}, \frac{AB}{OA}$$

au aceeași valoare și pentru punctul B și pentru B' , deci păstrează o valoare constantă.

Prin urmare, fiind dat unghiul $\alpha = XOY$, ducând dintr'un punct oarecare B al unei laturi perpendicula BA pe cealaltă latură a unghiului, rapoartele

$$\frac{AB}{OB}, \frac{OA}{OB}, \frac{AB}{OA}, \frac{OA}{AB}, \frac{OB}{OA}, \frac{OB}{AB}$$

sunt constante, oricare ar fi poziția punctului B pe latura unghiului dat.

Aceste rapoarte caracterizează mărimea unghiului a , care nu depinde de lungimea laturilor sale, astfel că, dacă unghiul a este dat, se pot calcula aceste rapoarte și invers, fiind dat unul din aceste șase rapoarte, se poate, cu ajutorul unei construcții geometrice de triunghi dreptunghic, să aflăm mărimea unghiului.

Dacă latura OX este fixă, iar latura OY se învârtete în jurul lui O, adică dacă unghiul a variază, atunci rapoartele considerate vor lua alte valori, vor varia cu unghiul a , sunt deci funcțiuni de unghiul a . De aceea aceste șase rapoarte se numesc *funcțiuni de unghi*, sau *funcțiuni goniometrice*.

Ele se numesc respectiv $\frac{AB}{OB}$ *sinus* a , $\frac{OA}{OB}$ *cosinus* a , $\frac{AB}{OA}$ *tangentă* a , $\frac{OA}{AB}$ *cotangentă* a , $\frac{OB}{OA}$ *secantă* a , $\frac{OB}{AB}$ *coscantă* a și se scriu

$$\frac{AB}{OB} = \sin a, \quad \frac{OA}{OB} = \cos a, \quad \frac{AB}{OA} = \operatorname{tg} a,$$

$$\frac{OA}{AB} = \operatorname{cotg} a, \quad \frac{OB}{OA} = \operatorname{sec} a, \quad \frac{OB}{AB} = \operatorname{cosec} a.$$

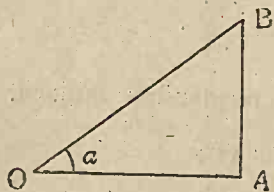


Fig. 3.

Observând că aceste șase rapoarte stau în legătură cu triunghiul dreptunghic format OAB (Fig. 3), ale cărui catete și ipotenuză sunt OA, AB, OB, putem zice că: *sin a este raportul catetei opuse către ipotenuză; cos a raportul catetei adiacente către ipotenuză; tg a raportul catetei opuse către cateta adiacentă; cotg a raportul catetei adiacente către cateta opusă; sec a raportul ipotenuzei către cateta adiacentă; cosec a raportul ipotenuzei către cateta opusă.*

Exemple. 1° Să se calculeze unghiul a , știind că $\sin a = \frac{3}{5}$. Pentru aceasta, luăm o lungime AB egală cu 3 (după o anumită scară de reducere); în A ridicăm o perpendiculară pe AB, iar din B ca centru și cu o rază egală cu 5, descriem un cerc ce taie această perpendiculară în O. Unghiul căutat este AOB.

2° Să se calculeze unghiul a , pentru care $\cos a = \frac{4}{5}$. Aceasta revine la construirea unui triunghi dreptunghiu, căruia i-se cunoaște o catetă și

ipotenuza. Luăm o dreaptă $OA = 4$; în A ridicăm o perpendiculară; fie B punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu cercul descris din O ca centru cu raza 5. Unghiul căutat este AOB.

3°. Să se calculeze unghiul a , pentru care $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}$. Problema revine la construirea unui triunghi dreptunghic, căruiu i-se cunosc catetele. Luăm pe laturile unui unghi drept lungimile $AO = 4$, $AB = 3$, iar unghiul căutat este AOB.

Observare. Prin procedeul de mai sus, aflăm valoarea unghiului, în mod grafic. Valoarea sa în grade, prin calcul, o vom afla mai departe.

6. **Linii trigonometrice.** Rapoartele prin care am definit funcțiunile goniometrice au o reprezentare grafică simplă, dacă alegem potrivit punctul B (Fig. 3) de pe latura unghiului a de unde ducem perpendiculara AB pe cealaltă latură.

În adevăr, dacă luăm distanța $OB = 1$, atunci rapoartele, care definesc, de ex., funcțiunile sinus a și cosinus a , devin (Fig. 3)

$$\sin a = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{1} = AB, \quad \cos a = \frac{OA}{OB} = OA.$$

Vedem, deci, că, luând ca unitate de măsură OB, atunci sinusul unghiului a este reprezentat de perpendiculara AB, iar *cosa* de segmentul OA.

Aceste segmente care reprezintă funcțiunile goniometrice se zic *linii trigonometrice*. Dar, ca să avem această reprezentare grafică simplă, a fost nevoie de a lua $OB = 1$, adică de a considera că unghiul dat a este unghi la centru în cercul cu centrul O în vârful unghiului, și cu raza $OB = 1$ (egală cu unitatea de măsură). Acest cerc cu raza egală cu unitatea se zice *cerc trigonometric*.

Să considerăm cercul cu centrul O (Fig. 4) și cu raza $OA = 1$ și fie AA' și BB' doi diametri perpendiculari. Să luăm în sensul direct (invers ca acele unui ceasornic) un unghi la centru $AOM = a$, care este măsurat în grade de arcul AM, A fiind origina și M extremitatea arcului.

Diametrii AA' și BB' împart cercul în patru cadrane; AOB este primul cadran, BOA' al doilea, A'OB' al treilea și B'OA

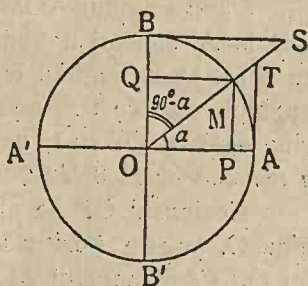


Fig. 4.

al patrulea, fiecare cadran având câte 90° , căci tot cercul are 360° . Vom presupune că orice unghi AOM are origina în A de unde socotim arcele corespunzătoare AM. Astfel, un unghi cu extremitatea M în primul cadran, cum este cazul figurei 4, este cuprins între 0° și 90° (este ascuțit); un unghi cu extremitatea în cadranul al doilea are cel mult 180° și este cuprins între 90° și 180° ; un unghi cu extremitatea în cadranul al treilea, adică M între A' și B', este cuprins între 180° și 270° ; și în fine, un unghi din cadranul al patrulea, cu extremitatea M între B' și A, este cuprins între 270° și 360° .

Vom considera mai întâi unghiuri AOM ascuțite, cu extremitatea M în primul cadran. Fie (Fig. 4) P și Q proiecțiile punctului M pe diametri OA și OB. Fie de asemenea, T și S intersecțiile razei OM cu tangentele în A și B la cercul O.

7. Sinus. Cosinus. Din definiția funcțiilor goniometrice, știm că (Fig. 4)

$$\sin a = \frac{PM}{OM}, \quad \cos a = \frac{OP}{OM}.$$

Cum am luat raza $OM = 1$, urmează

$$\sin a = PM, \quad \cos a = OP,$$

astfel că (în cercul trigonometric, raza egală cu unitatea) *sinusul unui unghi (arc) este perpendiculara lăsată din o extremitate a arcului pe diametrul ce trece prin cealaltă extremitate; cosinusul unui arc este distanța de la centrul cercului la piciorul sinusului, sau, proiecția OP a razei OM pe deametrul de origină OA.*

Cum (Fig. 4) $PM = OQ$, urmează că $\sin a = OQ$, adică sinusul se măsoară pe diametrul B'B, de la origina O, și este pozitiv când Q cade între O și B și negativ între O și B'.

Când unghiul $AOM = a$ este egal cu zero, punctul M este în A, sinusul unghiului a , adică segmentul PM, este egal cu zero. Dacă unghiul crește, segmentul PM crește, iar când unghiul este de 90° , punctul M vine în B, segmentul PM devine egal cu $OB = 1$, deci $\sin 90^\circ = 1$. Așa dar, *când unghiul a variază de la 0° la 90° , sina crește de la 0 la 1.*

Cosinusul OP se măsoară pe diametrul A'A, de la origina O, și este pozitiv la dreapta lui O și negativ la stânga lui O. Când unghiul AOM este egal cu zero, cosinusul, adică segmentul OP devine egal cu $OA = 1$. Dacă unghiul crește, segmentul OP se micșorează, deci *cosa descrește, iar când*

unghiul a este de 90° , OP devine egal cu 0, deci $\cos 90^\circ = 0$. Așa dar, când unghiul a crește de la 0° la 90° , $\cos a$ descreește de la 1 la 0.

8. **Tangenta.** Conform definiției, avem (Fig. 4)

$$\operatorname{tga} = \frac{PM}{OP}$$

Dar PM și AT fiind paralele, triunghiurile OPM și OAT sunt asemenea și deci

$$\frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT, \quad \operatorname{tga} = AT.$$

AT este linia trigonometrică a funcțiunii tangentă, astfel că *tangenta este segmentul din tangenta geometrică dusă în originea A a arcului la cercul trigonometric, și cuprins între această origină și punctul de intersecție al tangentei cu raza OM ce trece prin cealaltă extremitate a arcului.*

Tangenta trigonometrică se măsoară pe tangenta geometrică AT , de la originea A . Tangentele arcelor din primul cadran sunt măsurate de la A către T și sunt pozitive.

Când unghiul AOM este egal cu zero, M vine în A , atunci segmentul AT este nul, tangenta este egală cu zero, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$. Dacă unghiul crește, segmentul AT se mărește, iar când unghiul a se apropie de 90° , adică diferă de 90° cu o cantitate infinit de mică și pozitivă ϵ , raza OM devine paralelă cu tangenta în A la cerc, punctul lor T de intersecție este la infinit, și deci segmentul AT devine foarte mare, infinit de mare, și se notează cu ∞ . Deci $\operatorname{tg}(90^\circ - \epsilon)$ tinde către infinit și se scrie

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \epsilon) \rightarrow \infty.$$

Așa dar, arcul a variind de la 0° la 90° , tga crește de la 0 la ∞ .

9. **Cotangenta.** Prin definiție, avem (Fig. 4)

$$\operatorname{cota} = \frac{OP}{PM}$$

Dar $OP = QM$, $PM = OQ$. Deci

$$\operatorname{cotga} = \frac{QM}{OQ}$$

Din triunghiurile asemenea OMQ , OSB , deducem

$$\frac{QM}{OQ} = \frac{BS}{OB} = \frac{BS}{1} = BS,$$

deci $\cotga = BS$. Segmentul BS este linia trigonometrică a funcțiunei cotangentă și deci *cotangentă este segmentul din tangenta geometrică dusă prin extremitatea razei perpendiculare pe raza ce trece prin originea arcului și cuprins între punctul de contact și raza prelungită dusă prin extremitatea arcului considerat.*

Cotangentele se socotesc pe tangenta la cerc în punctul B , de la originea B , și sunt pozitive la dreapta lui B , adică, pentru arcele din primul cadran.

Când unghiul $AOM = a$ (Fig. 4) este foarte mic, raza OM este aproape paralelă cu tangenta BS , punctul lor S de intersecție este aruncat la infinit, segmentul BS devine infinit de mare. Dacă unghiul crește, segmentul BS se micșorează, iar când unghiul $a = 90^\circ$, BS devine egală cu zero, $\cotg 90^\circ = 0$. Așa dar, unghiul variind de la 0° la 90° , \cotga descrește de la ∞ (infinit) la 0 .

10. Secanta⁽¹⁾: Știm (Fig. 4) că

$$\operatorname{seca} = \frac{OM}{OP}$$

Triunghiurile OPM , OAT fiind asemenea, avem

$$\frac{OM}{OP} = \frac{OT}{OA} = \frac{OT}{1} = OT, \operatorname{seca} = OT.$$

Linia trigonometrică a secantei este OT . Deci, *secanta este segmentul OT , măsurat din centrul cercului, până la punctul de intersecție T al tangentei la cerc în originea A a arcului, cu prelungirea razei dusă prin extremitatea arcului.*

Secantele se socotesc pe razele OT ce unesc centrul O cu extremitatea M a arcului și sunt pozitive dacă punctele M și T sunt de aceeași parte a centrului O , adică, dacă pentru o întâlni tangenta în A trebuie să prelungim raza în același sens cu extremitatea M a arcului. Pentru arcele din cadranul întâi, seca este pozitivă.

Când unghiul $a = 0^\circ$, OT devine egală cu $OA = 1$, deci $\operatorname{sec} 0^\circ = 1$; dacă a crește, segmentul OT adică seca crește, iar când $a = 90^\circ$ raza OM devine paralelă cu tangenta în A , OT devine foarte mare, deci $\operatorname{sec} 90^\circ = \infty$. Așa dar, când a variază de la 0° la 90° , seca crește de la 1 la ∞ .

11. Cosecanta⁽¹⁾. Prin definiție, avem (Fig. 4)

$$\operatorname{coseca} = \frac{OM}{PM}$$

Dar $PM = OQ$. Deci

$$\operatorname{coseca} = \frac{OM}{OQ}$$

(1) Nu face parte din programul clasei VI.

Triunghiurile OMQ și OSB fiind asemenea, avem

$$\frac{OM}{OQ} = \frac{OS}{OB} = \frac{OS}{1} = OS, \text{ coseca} = OS.$$

OS este linia trigonometrică a cosecanei. Deci, *cosecanta este segmentul OS , măsurat din centrul cercului până la punctul de intersecție S al tangentei la cerc prin extremitatea razei perpendiculară pe raza ce trece prin origina arcului, cu prelungirea razei dusă prin extremitatea arcului.*

Cosecantele se socotesc pe razele OS ce unesc centrul O cu extremitatea M a arcului și sunt pozitive dacă, pentru a întâlni tangenta în B la cerc, trebuie să prelungim raza în același sens cu extremitatea arcului. Pentru arcele din cadrantul întâi, cosecantele sunt pozitive.

Când unghiul $a = 0^\circ$, raza QM este paralelă cu tangenta BS , segmentul OS este foarte mare, $\text{cosec } 0^\circ = \infty$. Dacă unghiul crește, segmentul OS descrește, și când $a = 90^\circ$, OS devine egal cu $OB = 1$, deci $\text{cosec } 90^\circ = 1$. Așa dar, când unghiul a variază de la 0° la 90° , cosecanta descrește de la ∞ la 1.

12. Relațiuni între liniile trigonometrice ale aceluiași unghi. Fiind dat un unghi $a = \angle AOB$ (Fig. 5), am văzut că rapoartele care definesc funcțiunile goniometrice nu depind de unitatea de lungime aleasă, așa că putem presupune că această unitate este OB , adică $OB = 1$. Să ducem BA perpendiculară pe cealaltă latură a unghiului.

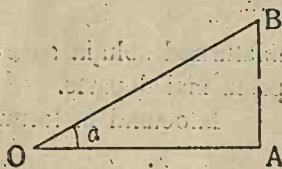


Fig. 5.

Considerând rapoartele care definesc funcțiunile goniometrice, vom stabili relațiuni între funcțiunile aceluiași unghi, adică relațiuni între liniile trigonometrice ale aceluiași unghi.

1°. Avem (Fig. 5)

$$\sin a = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{1} = AB, \cos a = \frac{OA}{OB} = OA,$$

$$\text{tga} = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin a}{\cos a}, \cot g a = \frac{OA}{AB} = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

$$\cot g a \times \text{tga} = \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin a}{\cos a} = 1, \cot g a = \frac{1}{\text{tga}}.$$

Deci

$$(I) \quad \text{tga} = \frac{\sin a}{\cos a}, \cot g a = \frac{\cos a}{\sin a}, \cot g a = \frac{1}{\text{tga}}.$$

De asemenea

$$\sec a = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\cos a}, \text{coseca} = \frac{OB}{AB} = \frac{1}{\sin a}.$$

Deci

$$(II) \quad \operatorname{seca} = \frac{1}{\operatorname{cosa}}, \quad \operatorname{coseca} = \frac{1}{\operatorname{sina}}$$

2^o. Din triunghiul dreptunghic OAB (Fig. 5), avem

$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2,$$

de unde

$$(III) \quad \cos^2 a + \sin^2 a = 1,$$

care este una din relațiile fundamentale ale Trigonometriei.

13. Exprimarea liniilor trigonometrice cu una din ele. Cu ajutorul relațiilor stabilite, putem găsi și altele între liniile trigonometrice ale aceluiași unghi.

1^o. Fiind cunoscut sina să se afle celelalte linii trigonometrice. Din formula (III), deducem

$$(IV) \quad \cos^2 a = 1 - \sin^2 a,$$

$$\text{sau} \quad \operatorname{cosa} = \sqrt{1 - \sin^2 a},$$

înălțurând soluția $\operatorname{cosa} = -\sqrt{1 - \sin^2 a}$, pe care o vom interpreta mai departe.

Inlocuind în formulele (I), deducem

$$\operatorname{tga} = \frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{cosa}} = \frac{\operatorname{sina}}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}, \quad \operatorname{cotga} = \frac{\operatorname{cosa}}{\operatorname{sina}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\operatorname{sina}}$$

$$\text{Exemplu. } \operatorname{sina} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Avem}$$

$$\operatorname{cosa} = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tga} = \frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{cosa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\operatorname{cotga} = \frac{\operatorname{cosa}}{\operatorname{sina}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{seca} = \frac{1}{\operatorname{cosa}} = 2, \quad \operatorname{coseca} = \frac{1}{\operatorname{sina}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2^o. Se cunoaște cosa și se cere să se calculeze celelalte linii trigonometrice. Din (III), avem

$$(V) \quad \sin^2 a = 1 - \cos^2 a, \quad \operatorname{sina} = \sqrt{1 - \cos^2 a}.$$

Din (I), deducem

$$\operatorname{tga} = \frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{cosa}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\operatorname{cosa}}, \quad \operatorname{cotga} = \frac{1}{\operatorname{tga}} = \frac{\operatorname{cosa}}{\sqrt{1 - \cos^2 a}}.$$

Exemplu. $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Avem

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tga} = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1, \quad \operatorname{cotga} = \frac{1}{\operatorname{tga}} = 1,$$

$$\operatorname{seca} = \frac{1}{\cos a} = \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{coseca} = \frac{1}{\sin a} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

3°. Se dă tga și se cere să se calculeze celelalte linii trigonometrice. Din relația $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, împărțind cu $\cos^2 a$, deducem

$$\operatorname{tg}^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a},$$

de unde

$$(VI) \quad \cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}},$$

înlăturând soluția

$$\cos a = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}.$$

Din

$$\sin a = \frac{\sin a}{\cos a} \cos a,$$

deducem

$$\sin a = \operatorname{tga} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}},$$

(VII)

$$\sin a = \frac{\operatorname{tga}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}.$$

Exemplu. $\operatorname{tga} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Avem

$$\sin a = \frac{\operatorname{tga}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odată cunoscute $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, celelalte funcțiuni sunt inversele acestora.

14. Relațiuni între liniile trigonometrice ale unghiurilor complementare. Să considerăm (Fig. 6) unghiul $\angle AOM = a$. Atunci unghiul $\angle BOM = 90^\circ - a$ este complementul lui a și putem

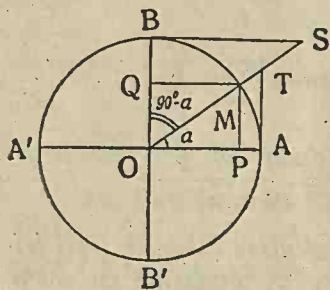


Fig. 6.

presupune că arcul corespunzător BM are origina în B și extremitatea M .

Ducând liniile trigonometrice ale acestor unghiuri, avem

$$(VIII) \left\{ \begin{array}{l} \sin(90^\circ - a) = QM = OP = \cos a, \\ \cos(90^\circ - a) = OQ = PM = \sin a, \\ \operatorname{tg}(90^\circ - a) = BS = \operatorname{cotg} a, \\ \operatorname{cotg}(90^\circ - a) = AT = \operatorname{tg} a, \end{array} \right.$$

$$\sec(90^\circ - a) = OS = \operatorname{cosec} a, \quad \operatorname{cosec}(90^\circ - a) = OT = \sec a.$$

Așa dar, cunoscând liniile trigonometrice ale unghiurilor mai mici ca 45° , putem găsi imediat pe acelea ale unghiurilor cuprinse între 45° și 90° . De ex.,

$$\cos 82^\circ 25' 47'' = \sin(90^\circ - 82^\circ 25' 47'') = \sin 7^\circ 34' 13''.$$

15. Calculul câtorva linii trigonometrice. Să considerăm unghiul a (Fig. 7), căruia îi corespunde sinusul MP . Prelungind dreapta PM până taie cercul trigonometric în M' , se vede că sinusul MP este jumătatea coardei MM' căreia îi corespunde unghiul la centru egal cu $2a$.

Deci, în cercul trigonometric, *sinusul unui unghi este egal cu jumătatea coardei care corespunde unui unghi îndoit.*

În baza acestei proprietăți, se pot calcula sinusurile unghiurilor mai mici ca 90° , dacă se cunosc lungimile laturilor poligoanelor regulate înscrise într'un cerc.

În adevăr, pentru unghiul de 30° , unghiul îndoit are 60° , căruia îi corespunde coarda ce reprezintă latura exagonului, căci $60^\circ = \frac{360^\circ}{6}$. Cum latura exagonului regulat înscris în cercul de raza R este egală cu raza, urmează că în cercul trigonometric, latura exagonului regulat înscris este egală cu 1. Sinusul fiind

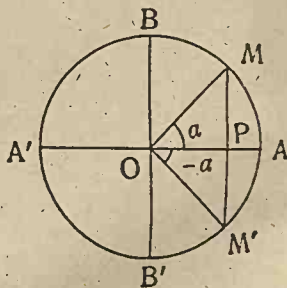


Fig. 7.

jumătatea coardei ce corespunde unghiului îndoit, urmează că $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Pentru 45° , coarda care corespunde arcului îndoit, de 90° , este egală cu latura pătratului înscris, căci $90^\circ = \frac{360^\circ}{4}$. Dar latura pătratului este $R\sqrt{2}$, iar în cazul $R = 1$, este $\sqrt{2}$. Deci $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Când $a = 60^\circ$, unghiul îndoit, de 120° , îi corespunde latura triunghiului echilateral, căci $120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$. Dar această latură fiind egală cu $R\sqrt{3}$, în cazul cercului trigonometric este $\sqrt{3}$. Deci $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pentru $\operatorname{tg} 45^\circ$, se poate observa ca $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Aceasta se mai poate vedea din cercul trigonometric, direct, observând (Fig. 6) că dacă $a = 45^\circ$, triunghiul dreptunghic AOT având unghiul AOT = 45° , urmează că și unghiul OTA = 45° . Triunghiul este isoscel, deci AT = OA = 1 și prin urmare $\operatorname{tg} 45^\circ = AT = 1$.

EXERCITIUL

1. Se dă $\sin a = \frac{3}{5}$, să se afle celelalte linii trigonometrice.

R. $\cos a = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}$; celelalte sunt inversele acestora.

2. Se dă $\cos a = \frac{1}{2}$; să se afle celelalte linii trigonometrice.

R. $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} a = \sqrt{3}$.

3. Se dă $\operatorname{tg} a = 1$, să se calculeze celelalte linii trigonometrice.

R. $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Se dă $\operatorname{seca} = \frac{2}{\sqrt{2}}$, să se afle celelalte linii trigonometrice.

R. Avem $\cos a = \frac{1}{\operatorname{seca}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, și astfel ajungem la o problemă tratată.

5. Se dă $\operatorname{cotg} a = \frac{4}{3}$, să se afle celelalte linii trigonometrice.

R. $\operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{cotg} a} = \frac{3}{4}$ și ajungem la o problemă cunoscută.

6. Să se stabilească relațiunea (identitatea)

$$\sec^2 a - \operatorname{tg}^2 a = 1.$$

R. $\frac{1}{\cos^2 a} - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = 1.$

7. Să se stabilească identitatea

$$\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \sec^2 a \operatorname{cosec}^2 a.$$

R. Se înlocuiesc în membrul întâi $\sec a$ și $\operatorname{cosec} a$; se fac calculele și se găsește $\frac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$. Se operează la fel cu membrul al doilea și se arată că rezultatele sunt identice.

8. Să se stabilească relația

$$\sin^2 a + \sin^2 a \operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg}^2 a.$$

R. Se calculează valoarea membrului întâi înlocuind pe $\operatorname{tg} a$ și se obține

$$\sin^2 a + \frac{\sin^4 a}{\cos^2 a} = \frac{\sin^2 a (\cos^2 a + \sin^2 a)}{\cos^2 a}.$$

Se arată că este egal cu valoarea membrului al doilea.

9. Să se stabilească identitatea

$$\operatorname{tg}^2 a - \sin^2 a = \sin^2 a \sec^2 a.$$

R. Membrul întâi devine, după înlocuirea lui $\operatorname{tg} a$,

$$\frac{\sin^2 a (1 - \cos^2 a)}{\cos^2 a}$$

10. Să se afle liniile trigonometrice ale unghiurilor $51^\circ 17' 45''$, $67^\circ 40'$ cu ajutorul acelorale unghiurilor mai mici ca 45° .

R. Complimentele unghiurilor date sunt respectiv

$$89^\circ 59' 60'' - 51^\circ 17' 45'' = 38^\circ 42' 15'', \quad 89^\circ 60' - 67^\circ 40' = 22^\circ 20'.$$

11. Să se afle unghiul ascuțit care verifică ecuația $\sin 2a = \cos a$.

R. $\sin 2a = \sin (90 - a)$, $2a = 90 - a$; $a = 30^\circ$.

12. Să se afle unghiul ascuțit care satisface ecuația

$$\operatorname{tg} (a + 15^\circ) = \operatorname{cotg} (a + 5^\circ).$$

R. $\operatorname{tg} (a + 15^\circ) = \operatorname{tg} (90 - a - 5^\circ)$; $a = 35^\circ$.

TABLE TRIGONOMETRICE.

16. Table de linii trigonometrice. Liniile trigonometrice se exprimă în cea mai mare parte cu fracțiuni zecimale, iar aproximația este cu atât mai mare cu cât luăm mai multe zecimale. De obicei se consideră numai cinci zecimale, iar valorile acestor numere goniometrice sunt date în table, numite *table trigonometrice*. În tablele lui *Dupuis*, se numesc „*Lignes trigonométriques naturelles*” și sunt la pag. 149.

În table se calculează de obicei liniile trigonometrice ale unghiurilor până la 45° , căci ale celor de la 45° la 90° sunt date imediat de liniile trigonometrice ale unghiurilor complementare.

Tablele sunt astfel întocmite, încât la stânga, de sus în jos, sunt trecute gradele, de la 0° la 45° , iar de jos în sus, la dreapta, se află gradele de la 45° până la 90° . Liniile trigonometrice ale unghiurilor complementare se pot calcula direct cu aceleași table; în adevăr, valorile, scrise în acelaș rând cu gradele, corespund, pentru gradele scrise în stânga, pe rând, liniilor sin, tang, cotg, cos, scrise deasupra, iar pentru gradele din dreapta corespund liniilor cos, cotg, tang și sin, scrise dedesubt. De ex., în tablele lui Dupuis, la pag. 150, numărul 0,375 corespunde lui $\sin 22^\circ$ și lui $\cos 68^\circ$, unghiul 22° fiind scris în stânga, iar unghiul 68° fiind scris în dreapta.

În unele table, cum sunt acele a lui Callet, liniile trigonometrice sunt calculate din 10 în 10 minute, cu șapte zecimale. În altele, sunt calculate din 15 în 15 minute, iar în cele a lui Dupuis, din 30 în 30 minute, cu trei zecimale.

În practică intervin următoarele două probleme. I. Să se afle linia trigonometrică a unui unghi dat.

1°. Dacă unghiul este în table, linia trigonometrică o aflăm direct din table. De ex.

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ 30' &= 0,350, & \cos 29^\circ &= 0,875, \\ \operatorname{tg} 65^\circ 30' &= 2,194, & \operatorname{cotg} 62^\circ &= 0,532. \end{aligned}$$

2°. Dacă unghiul nu este în table, cum ar fi $28^\circ 14' 20''$, și am voi a-i calcula sinusul, procedăm astfel. În tablele lui Dupuis, la pag. 150, avem la coloana sin

la 28°	corespunde	0,469
„ $28^\circ 14' 20''$		
„ $28^\circ 30'$	„	0,477

Dacă unghiul crește cu $30'$ numărul crește cu 8.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{„} & \text{„} & \text{„} & \text{„ } 14'20'' & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \frac{14'20'' \times 8}{30'} = \end{array}$$

$$= \frac{(14 \times 60 + 20) \times 8}{30 \times 60} = 3, \text{ aproximativ.}$$

Deci, $\sin 28^\circ 14' 20'' = 0,469 + 0,003 = 1,472$.

La fel procedăm pentru tangentă.

3°. Să calculăm acum $\cos 60^\circ 18' 10''$. Avem la pag. 150, tablele lui Dupuis,

la 66° corespunde 0,407—

„ $66^\circ 18' 10''$

„ $66^\circ 30'$ „ 0,399

Dacă unghiul crește cu $30'$ numărul descrește cu 8

„ „ „ „ $18' 10''$ „ „ $\frac{18' 10'' \times 8}{30'} = 4,$

aproximativ. Deci, $\cos 66^\circ 18' 10'' = 0,407 - 0,004 = 0,403$.

XXIV. Lignes trigonométriques naturelles.											
°	'	Sin.		Tang.		Cotg.		Cos.		'	°
		D	P	D	P	D	P	D	P		
15	o	0,259	8	0,268	9	3,732	126	0,966	2	o	75
	30	267	9	277	10	606	119	964	3	30	
16	o	276	8	287	9	487	111	961	2	o	74
	30	284	8	296	10	376	105	959	3	30	
17	o	292	9	306	9	271	99	956	2	o	73
	30	301	8	315	10	172	94	954	3	30	
18	o	309	8	325	10	3,078	89	951	3	o	72
	30	317	9	335	9	2,989	85	948	2	30	
19	o	326	8	344	10	904	80	946	3	o	71
	30	334	8	354	10	824	77	943	3	30	
20	o	342	8	364	10	747	72	940	3	o	70
	30	350	8	374	10	675	70	937	3	30	
21	o	358	9	384	10	605	66	934	4	o	69
	30	367	8	394	10	539	64	930	3	30	
22	o	375	8	404	10	475	61	927	3	o	68
	30	383	8	414	10	414	58	924	3	30	
23	o	391	8	424	11	356	56	921	4	o	67
	30	399	8	435	10	300	54	917	3	30	
24	o	407	8	445	11	246	52	914	4	o	66
	30	415	8	456	10	194	49	910	4	30	
25	o	423	8	466	11	145	48	906	3	o	65
	30	431	7	477	11	97	47	903	3	30	
26	o	438	8	488	11	050	44	899	4	o	64
	30	446	8	499	11	2,006	43	895	4	30	
27	o	454	8	510	11	1,963	42	891	4	o	63
	30	462	7	521	11	921	40	887	4	30	
28	o	469	8	532	11	881	39	883	4	o	62
	30	477	8	543	11	842	38	879	4	30	
29	o	485	7	554	12	804	37	875	5	o	61
	30	492	8	566	11	767	35	870	4	30	
30	o	0,500		0,577		1,732		0,866		o	60
		Cos.		Cotg.		Tang.		Sin.			9

La fel procedăm pentru cotangentă.

II. Să se afle unghiul corespunzător unei linii trigonometrice date.

1°. Pentru sinus procedăm în modul următor. Se observă, că $\sin 45^\circ = 0,707$. Deci, dacă se dă sinusul și se cere unghiul,

vedem dacă valoarea dată pentru sinus e mai mică sau mai mare ca 0,707. Dacă este mai mică, unghiul va avea mai puțin ca 45° , îl căutăm pe stânga paginei, corespunzător numărului din coloana deasupra căreia este scris sin; dacă e mai mare ca 0,707, atunci unghiul e mai mare ca 45° îl căutăm pe dreapta paginei tablelor, corespunzător numărului din coloana dedesubtul căreia este scris sin.

De ex., să se afle unghiul a , știind că $\sin a = 0,919$, Acest număr fiind mai mare ca 0,707, unghiul e mai mare ca 45° , îl căutăm pe dreapta, corespunzător unui număr din coloana dedesubtul căreia este scris sin. Fiindcă nu este în table, îl cuprindem între două numere din table, din coloana respectivă. Avem

la 0,917	corespunde	66° 30'	0,919—
„ 0,919			
„ 0,921	„	67°	0,917
Dacă numărul crește cu 4 unghiul crește cu 30'			0,002
„ „ „ „ 2 „ „		$\frac{30' \times 2}{4}$	= 15'.

Unghiul căutat este $66^\circ 30' + 15' = 66^\circ 45'$.

2°. Pentru cosinus procedăm invers ca la sinus. De ex., care este unghiul pentru care $\cos a = 0,871$. Deoarece numărul este mai mare ca 0,707, unghiul este mai mic decât 45° ; îl căutăm pe stânga paginei la coloana care are deasupra scris cos, raționând astfel

la 0,875	corespunde	29°	0,875—
„ 0,871			
„ 0,870	„	29° 30'	0,871
Dacă numărul scade cu 5 unghiul crește cu 30'			0,004
„ „ „ „ 4 „ „		$\frac{30' \times 4}{5}$	= 24'.

Unghiul căutat este $29^\circ + 24' = 29^\circ 24'$.

3°. Când se dă tangenta, procedăm astfel. De oarece $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, rezultă că dacă tga dată este mai mică decât 1, unghiul e mai mic decât 45° , îl căutăm pe stânga paginei, corespunzător numărului din coloana ce are deasupra scris tg; dacă e mai mare ca 1, unghiul e mai mare ca 45° , îl căutăm pe dreapta paginei, corespunzător numărului din coloana ce are scris dedesubt tg. Pentru cotg procedăm invers.

De ex., să se afle unghiul a pentru care $\operatorname{tga} = 0,310$. Îl

căutăm pe stânga paginei, căci 0,310 e mai mic decât 1. Avem

la 0,306	corespunde	17°	0,310—
„ 0,310			
„ 0,315	„	17° 30'	0,306
<hr/>			
Dacă numărul crește cu 9	unghiul crește cu	30'	0,004
„	„	4 × 30'	120'
		9	9
		= 800''	
		= $\frac{40'}{3} = \frac{40 \times 60''}{3} = 800''$	
		$\begin{array}{r l} 800'' & 60 \\ 200 & 13 \\ \hline 20 & \end{array} \quad 800'' = 13'20''.$	

Deci unghiul este 17° 13' 20''.

4°. Să se afle unghiul a , știind că $\cot a = 0,470$. Fiind mai mic decât 1, unghiul e mai mare ca 45°, îl găsim pe dreapta paginei, raționând astfel

la 0,477	corespunde	64° 30'	0,477—
„ 0,470			
„ 0,466	„	65°	0,470
<hr/>			
Dacă numărul scade cu 11	unghiul crește cu	30'	0,007
„	„	30 × 60'' × 7	12600''
		11	11
		= 19'5'', aprox.	
		$\begin{array}{r l} 12600'' & 11 \\ 16 & 1145'' \\ \hline 50 & 545 \\ & 19'' \\ & 5 \\ \hline 60 & \\ 5 & \end{array}$	

Unghiul căutat este 64° 30' + 19' 5'' = 64° 49' 5''.

17. **Table de logaritmi liniilor trigonometrice.** Aceste table cuprind logaritmii liniilor trigonometrice. Știm din Algebră că rolul logaritmului este de a reduce gradul operațiilor, înlocuind înmulțirea cu o adunare, împărțirea cu o scădere, etc. și deci de a face posibilă o mai mare economie a timpului; tablele de logaritmi liniilor trigonometrice mai au avantajul de a fi astfel întocmite, încât nu trebuie să căutăm separat linia trigonometrică în tablele corespunzătoare (cum am văzut mai sus) și apoi separat logaritmul acesteia în tablele de logaritmi numerilor algebrice, ci ele ne dau imediat logaritmul căutat fără să cunoaștem linia trigonometrică.

Tablele logaritmilor sunt la fel aranjate cu cele ale liniilor trigonometrice.

În practică intervin următoarele probleme.

I. Să se afle logaritmul linii trigonometrice care corespunde unui unghi dat. Tablele de logaritmi liniilor trigonometrice cuprind pe lângă mantisă și caracteristica logaritmului.

27°

32		Sin.	D	Tang.	D	Cotg.	Cos.	D		
1	0,53	0	1,65705	24	1,70717	31	0,29283	1,94988	6	60
2	1,07	1	5729	25	0748	31	9252	4982	6	59
3	1,60	2	5754	25	0779	31	9221	4975	7	58
4	2,13	3	5779	25	0810	31	9190	4969	7	57
5	2,67	4	5804	25	0841	31	9159	4962	6	56
6	3,20	5	5828	25	0873	32	9127	4956	6	55
7	3,73	6	5853	25	0904	31	9096	4949	7	54
8	4,27	7	5878	25	0935	31	9065	4943	6	53
9	4,80	8	5902	25	0966	31	9034	4936	7	52
		9	5927	25	0997	31	9003	4930	6	51
31									7	
1	0,52	10	5952	24	1028	31	8972	4923	6	50
2	1,03	11	5976	25	1059	31	8941	4917	6	49
3	1,55	12	6001	24	1090	31	8910	4911	7	48
4	2,07	13	6025	25	1121	32	8879	4904	7	47
5	2,58	14	6050	25	1153	31	8847	4898	6	46
6	3,10	15	6075	24	1184	31	8816	4891	7	45
7	3,62	16	6099	25	1215	31	8785	4885	6	44
8	4,13	17	6124	24	1246	31	8754	4878	7	43
9	4,65	18	6148	25	1277	31	8723	4871	7	42
25		19	6173	25	1308	31	8692	4865	6	41
1	0,42	20	6197	24	1339	31	8661	4858	7	40
2	0,83	21	6221	25	1370	31	8630	4852	6	39
3	1,25	22	6246	24	1401	31	8599	4845	7	38
4	1,67	23	6270	25	1431	31	8569	4839	7	37
5	2,08	24	6295	24	1462	31	8538	4832	6	36
6	2,50	25	6319	25	1493	31	8507	4826	6	35
7	2,92	26	6343	24	1524	31	8476	4819	7	34
8	3,33	27	6368	24	1555	31	8445	4813	6	33
9	3,75	28	6392	24	1586	31	8414	4806	7	32
24		29	6415	25	1617	31	8383	4799	7	31
1	0,4	30	1,66441		1,71648		0,28352	1,94793	6	30
2	0,8									
3	1,2									
4	1,6									
5	2,0									
6	2,4									
7	2,8									
8	3,2									
9	3,6									
			Cos.		Cotg.		Tang.		Sin.	

62°

O mare parte din liniile trigonometrice fiind mai mici ca 1, intervin și caracteristici negative, care sunt indicate cu o liniuță pusă deasupra caracteristicii.

1°. De ex., să se calculeze $\log \sin 27^\circ 20' 10''$. În tablele lui Dupuis, pag. 92, avem

27°20'	1,66197
26°20'10"	
27°21'	1,66221

Dacă unghiul crește cu $1' = 60''$ mantisa crește cu 0,00024

Deci dacă crește cu	60''	„	24	
„	„	„	10''	$\frac{24 \times 10}{60} = 4.$

Așa dar

$$\log \sin 27^\circ 20' 10'' = \bar{1},66197 + 0,00004 = \bar{1},66201.$$

La fel procedăm pentru tangentă.

2°. Să se calculeze $\log \cos 62^\circ 40' 20''$. Căutăm de jos în sus minutele pe dreapta, la coloana care are dedesubt scris *cos*. Avem

62°40'	1,66197
62°40'20"	
62°41'	1,66173

Dacă unghiul crește cu $1' = 60''$ mantisa scade cu 0,00024

„	„	„	„	60''	„	24	
„	„	„	„	20''	„	$\frac{24 \times 20}{60} = 8.$	

Deci $\log \cos 62^\circ 40' 20'' = \bar{1},66197 - 0,00008 = \bar{1},66189.$

La fel procedăm pentru cotangentă.

II. Să se calculeze unghiul căruia *i* se cunoaște logaritmul uneia din liniile sale trigonometrice.

1°. Să se calculeze *a* știind că $\log \sin a = \bar{1},66280$. În tablele lui Dupuis, la pag. 127, vedem că $\log \sin 44^\circ 60' = \log \sin 45^\circ = 1,84949$ și că mantisele unghiurilor mai mici cu 45° sunt mai mici ca 84949, iar ale unghiurilor mai mari ca 45° sunt mai mari ca 84949.

Deci, dacă mantisa dată este mai mică decât 84949, unghiul e mai mic ca 45° , gradele sunt deasupra paginei 92, minutele sunt pe stânga. Cuprindem mantisa dată între două mantise din tablele de la coloana ce are scris deasupra *sin* și avem

$\bar{1},66270$	27°23'	66280—
$\bar{1},66280$		
1,66295	27°24'	66270

Dacă mantisa crește cu 0,00025 unghiul crește cu $1' = 60''$ 10

Dacă mantisa crește cu 25 unghiul crește cu 60"

$$\begin{array}{ccccccc} " & " & " & " & 10 & " & " & " & " & " & " & \frac{60'' \times 10}{25} = 24'' \end{array}$$

Deci

$$a = 27^{\circ} 23' 24''$$

2°. Pentru cosinus procedem invers ca la sinus. De ex., să se calculeze a , știind că $\log \cos a = \bar{1},66178$. Mantisa dată fiind mai mică decât 84949, unghiul este mai mare ca 45° ; gradele sunt dedesubtul paginei, minutele pe dreapta. Cautând mantisa dată între două mantise din coloana ce are dedesubt scris cos, avem

$\bar{1},66197$	$62^{\circ} 40'$	$66197-$
$\bar{1},66178$			
$\bar{1},66173$	$62^{\circ} 41'$	66178

Dacă mantisa scade cu 0,00024 unghiul crește cu $1' = 60''$. 19

Mantisa scade cu 24 unghiul crește cu 60"

$$\begin{array}{ccccccc} " & " & " & 19 & " & " & " & " & " & " & " & \frac{60'' \times 19}{24} = 47'', \text{ aprox.} \end{array}$$

Unghiul a este egal cu $62^{\circ} 40' 47''$.

3. Să se calculeze a , știind că $\log \operatorname{tg} a = \bar{1},71350$. Deoarece $\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$, $\log \operatorname{tg} 45^{\circ} = 0$, și deci caracteristica logaritmului tangentei unui unghi mai mic decât 45° este negativă, iar a unghiurilor mai mari ca 45° este pozitivă.

Deci, dacă este negativă caracteristica, unghiul este mai mic decât 45° , gradele sunt deasupra paginei, minutele pe stânga și cuprindem mantisa între două mantise din coloana ce are deasupra scris tang. În cazul nostru, caracteristica este negativă, unghiul e mai mic decât 45° . Avem

$\bar{1},71339$	$27^{\circ} 20'$	$71350-$
$\bar{1},71350$			
$\bar{1},71370$	$27^{\circ} 21'$	71339

Dacă mantisa crește cu 0,00031 unghiul crește cu $1' = 60''$ 11

Mantisa crește cu 31 unghiul crește cu 60"

$$\begin{array}{ccccccc} " & " & " & 11 & " & " & " & " & " & " & " & \frac{60'' \times 11}{31} = 21'', \text{ aprox.} \end{array}$$

Deci

$$a = 27^{\circ} 20' 21''$$

4°. Să se calculeze a , știind că $\log \operatorname{cotg} a = 0,28950$. La cotangentă procedăm invers ca la tangentă. Dacă caracteristica

este pozitivă, unghiul este mai mic decât 45° , dacă este negativă, unghiul este mai mare decât 45° . Cuprindem mantisa între două mantise din coloana ce are deasupra scris cotg. Avem

0,28972	$27^\circ 10'$	28972 —
0,28950		
0,28941	$27^\circ 11'$	28950

Dacă mantisa scade cu 0,00031 unghiul crește cu $1' = 60''$ 22

Mantisa scade cu 31 unghiul crește cu $60''$

" " " 22 " " " $\frac{60'' \times 22}{31} = 42''$, aprox.

Deci $a = 27^\circ 10' 42''$.

18. Aplicații. I. Să se afle lungimea unui arc ce corespunde unui unghi dat și invers. Să se afle lungimea arcului de $39^\circ 14' 20''$. În Tablele lui Dupuis, la pag. 130, sunt date lungimile arcelor de cerc, când raza este egală cu unitatea (*Longueur des arcs de cercle*) și avem numărul corespunzător

39°	0,680678
14'	0,004072
20"	0,000097
39° 14' 20"	0,684847

Astfel că lungimea arcului de $39^\circ 14' 20''$ este 0,684847 radiani.

Dacă R este raza cercului pe care este considerat arcul, lungimea arcului este produsul $0,684847 \times R$.

Invers, să se afle arcul ce corespunde la 0,843295 radiani. Căutăm la coloanele grade o valoare imediat mai mică decât 0,843295;

0,843295 —	
0,837758	corespunde 48° .
0,005537	

La coloanele minute, căutăm o valoare imediat mai mică decât 0,005537;

0,005537 —	
0,005527	corespunde $19'$.
0,000010	

La coloanele secunde căutăm un număr mai mic decât 0,000010 și este chiar în table, căruia îi corespunde $2''$.

Deci arcul nostru are $48^\circ 19' 2''$.

II. Să se rezolve ecuația

$$y = 3,2 \sin \left(0,2648x + \frac{\pi}{6} \right),$$

în raport cu y , când $x = 1$ și în raport cu x , când $y = 1,971$.

1°. Pentru $x = 1$, avem

$$y = 3,2 \sin \left(0,2648 + \frac{\pi}{6} \right) = 3,2 \sin (0,2648 + 30^\circ).$$

Să vedem câte grade îi corespunde lui 0,2648 rad.; avem
0,264800 —
 0,261799 15°
 0,003001 —
 0,002909 10'
0,000092 19";
 0,2648 îi corespunde 15° 10' 19".

deci lui
 Avem.

$$y = 3,2 \sin(15^\circ 10' 19'' + 30^\circ) = 3,2 \sin 45^\circ 10' 19''.$$

XI. Longueur des arcs de cercle pour le rayon 1.							
Degrés.	Minutes.	Secondes.	Degrés.	Minutes.	Secondes.		
0	0,000 000	0,000 000	0,000 000	30	0,523 599	0,008 727	0,000 145
1	0,017 453	00 291	00 005	31	0,541 052	09 018	00 150
2	0,034 907	00 582	00 010	32	0,558 505	09 308	00 155
3	0,052 360	00 873	00 015	33	0,575 959	09 599	00 160
4	0,069 813	01 164	00 019	34	0,593 412	09 890	00 165
5	0,087 266	01 454	00 024	35	0,610 865	10 181	00 170
6	0,104 720	01 745	00 029	36	0,628 319	10 472	00 175
7	0,122 173	02 036	00 034	37	0,645 772	10 763	00 179
8	0,139 626	02 327	00 039	38	0,663 225	11 054	00 184
9	0,157 080	02 618	00 044	39	0,680 678	11 345	00 189
10	0,174 533	02 909	00 048	40	0,698 132	11 636	00 194
11	0,191 986	03 200	00 053	41	0,715 585	11 926	00 199
12	0,209 440	03 491	00 058	42	0,733 038	12 217	00 204
13	0,226 893	03 782	00 063	43	0,750 492	12 508	00 208
14	0,244 346	04 072	00 068	44	0,767 945	12 799	00 213
15	0,261 799	04 363	00 073	45	0,785 398	13 090	00 218
16	0,279 253	04 654	00 078	46	0,802 851	13 381	00 223
17	0,296 706	04 945	00 082	47	0,820 305	13 672	00 228
18	0,314 159	05 236	00 087	48	0,837 758	13 963	00 233
19	0,331 613	05 527	00 092	49	0,855 211	14 254	00 238
20	0,349 066	05 818	00 097	50	0,872 665	14 544	00 242
21	0,366 519	06 109	00 102	51	0,890 118	14 835	00 247
22	0,383 972	06 400	00 107	52	0,907 571	15 126	00 252
23	0,401 426	06 690	00 112	53	0,925 025	15 417	00 257
24	0,418 879	06 981	00 116	54	0,942 478	15 708	00 262
25	0,436 332	07 272	00 121	55	0,959 931	15 999	00 267
26	0,453 786	07 563	00 126	56	0,977 384	16 290	00 271
27	0,471 239	07 854	00 131	57	0,994 838	16 581	00 276
28	0,488 692	08 145	00 136	58	1,012 291	16 872	00 281
29	0,506 145	08 436	00 141	59	1,029 744	17 162	00 286

La pag. 151. Tablele lui Dupuis, Lignes trigonometriques naturelles,
 avem
 45° 0,707
 45° 10' 19"
 45° 30' 0,713
 30' 6

$$10' 19'' \dots \frac{6 \times 10' 19''}{30'} = \frac{6 \times (10 \times 60 + 19)}{30 \times 6} = 2, \text{ aprox.};$$

deci $\sin 45^\circ 10' 19'' = 0,707 + 0,002 = 0,709.$

Aşa dar $y = 3,2 \times 0,709 = 2,2688.$

2°. Pentru $y = 1,971$, avem ecuația

$$1,971 = 3,2 \sin \left(0,2648 x + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\sin \left(0,2648 x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1,971}{3,2} = 0,615 \text{ aprox.}$$

In Tablele lui Dupuis, la pag. 151, avem

0,609	37° 30'	0,615—
0,615			
0,616	38°	0,609
0,007	30'	0,006
7	30'	
6	30' × 6	
		7	

$$\frac{180'}{5} \left| \begin{array}{l} 7 \\ 25' \end{array} \right.; 5' = 5 \times 60'' = 300''; 300'' \left| \begin{array}{l} 7 \\ 43'' \end{array} \right.$$

Deci. lui 0,615 îi corespunde $37^\circ 30' + 25' 43'' = 37^\circ 55' 43''.$

Avem, vorbind numai de unghiuri ascuțite,

$$0,2648 x + 30'' = 37^\circ 55' 43''.$$

De unde $0,2648 x = 37^\circ 55' 43'' - 30'' = 7^\circ 55' 43''.$

Să vedem ce lungime corespunde lui $7^\circ 55' 43''$. Avem la pag. 130

7°	0,122173
55'	0,015999
43''	0,000208
7° 55' 43''	0,138380

Deci,

$$0,2648 x = 0,138380,$$

de unde

$$x = \frac{0,138380}{0,2648} = 0,522, \text{ aprox.}$$

Să găsim gradele se corespund lui 0,522. La pag. 130, avem

0,522000—		
0,506145	29°
0,015855—		
0,015708	54'
0,000147	30''.

Deci

$$x = 29^\circ 54' 30''.$$

EXERCITIUL

1. Să se calculeze $\sin 25^\circ 12'$, $\cos 25^\circ 12'$.
R. Se va căuta în Tablele lui Dupuis, Lignes trigonométriques naturelles; 0,426; 0,904.
2. Să se calculeze $\operatorname{tg} 54^\circ 35'$ și $\operatorname{cotg} 54^\circ 35'$.
R. 1,406; 0,711.

3. Să se calculeze valoarea expresiunii

$$\sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

când $a = 65^\circ$, $b = 20^\circ$. Să se compare cu $\sin 45^\circ$.

R. 0,707.

4. Să se afle cu ajutorul tabelor de logaritmi liniile trigonometrice

$$\sin 30^\circ 17' 35'', \quad \operatorname{tg} 63^\circ 7' 28'',$$

$$\cos 84^\circ 42' 53'', \quad \operatorname{cotg} 21^\circ 5' 43''.$$

R. Punem $y = \sin 30^\circ 17' 35''$. Se calculează $\log y = \log \sin 30^\circ 17' 35''$, care este egal cu $\bar{1},70279$ și pe urmă numărul y al cărui logaritm este $\bar{1},70279$.

Avem

$$\log \sin 30^\circ 17' \dots \dots \dots \bar{1},70267$$

$$\log \sin 30^\circ 17' 35''$$

$$\log \sin 30^\circ 18' \dots \dots \dots \bar{1},70288$$

$$\hline 1' = 60'' \dots \dots \dots 21$$

$$35'' \dots \dots \dots \frac{21 \times 35}{60} = 12, \text{ aprox.}$$

$$\log \sin 30^\circ 17' 35'' = \bar{1},70267 + 0,00012 = \bar{1},70279.$$

Să găsim numărul y al cărui logaritm este $\bar{1},70279$. La pag. 15, Tabele lui Dupuis, avem

$$\begin{array}{r} 70278 \dots \dots \dots 5044 \quad \quad \quad 70279 - \\ 70279 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70286 \dots \dots \dots 5045 \quad \quad \quad 70278 \\ \hline 8 \dots \dots \dots 1 \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

$$1 \dots \dots \dots \frac{1}{8} = 0,12.$$

La mantisa 70279 corespunde deci numărul 5044,12. Caracteristica fiind $\bar{1}$, rezultă că numărul y are 0 la partea întreagă, deci

$$y = 0,504412.$$

La fel cu celelalte: se găsește $\cos 84^\circ 42' 53'' = 0,092115$; $\operatorname{tg} 63^\circ 7' 28'' = 1,97318$; $\operatorname{cotg} 21^\circ 5' 43'' = 2,592$.

5. Să se afle unghiurile corespunzătoare următorilor logaritmi

$$\log \sin a = \bar{1},77569; \quad \log \cos a = \bar{1},71494; \quad \log \operatorname{tg} a = \bar{1},32107; \quad \log \operatorname{cotg} a = \bar{1},97500.$$

$$R. \quad 36^\circ 37' 38''; \quad 58^\circ 45' 11''; \quad 11^\circ 49' 46''; \quad 46^\circ 38' 53''.$$

6. Să se găsească unghiurile ascuțite care verifică ecuațiile

$$\sin a = \frac{3}{5}; \quad \cos a = 0,7; \quad \operatorname{tg} a = 3; \quad \operatorname{cotg} a = \frac{2}{3}.$$

R. Pentru $\sin a = \frac{3}{5}$, avem $\log \sin a = \log 3 - \log 5 = 0,47712 - 0,69897$,

$$\log \sin a = 0,47712 + 1 - 1 - 0,69897 = 0,47712 + 1 + (1 - 0,69897),$$

$$\log \sin a = 0,47712 + \bar{1} + 0,30103 = 0,47712 + \bar{1},30103 = 1,77815;$$

$$a = 36^\circ 52' 10''.$$

După cum se vede, am înlocuit pe $-\log 5 = -0,69897$ cu $\bar{1},30103$, adică am înlocuit un logaritm ce a avut semnul $-$ înainte cu un număr egal ce are înaintea sa semnul $+$. Aceasta se zice că am înlocuit pe

— $\log b$ cu $\text{colog } b$, și caracteristica cea nouă se obține adăugând o unitate la caracteristica logaritmului și apoi schimbând semnul rezultatului, iar mantisa cea nouă se obține scăzând ultima cifră însemnătoare a mantisei din 10 și celelalte din 9.

Pentru celelalte, avem $45^{\circ} 34' 23''$; $71^{\circ} 33' 54''$; $56^{\circ} 18' 34''$.

7. Să se afle unghiurile ascuțite care verifică ecuațiile trigonometrice

$$1^{\circ}) \operatorname{tg} a = 5 \sin a; \quad 2^{\circ}) 2 \operatorname{tg} a + 2 \operatorname{cotg} a = 5.$$

R. 1^o) $\frac{\sin a}{\cos a} = 5 \sin a$, $\sin a (1 - 5 \cos a) = 0$; $\sin a = 0$, $\cos a = \frac{1}{5}$; din $\sin a = 0$, rezultă $a = 0$; din $\cos a = \frac{1}{5}$, rezultă $a = 78^{\circ} 27' 47''$.

2^o) $\operatorname{tg} a + \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{5}{2}$; $2 \operatorname{tg}^2 a - 5 \operatorname{tg} a + 2 = 0$; $\operatorname{tg} a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = 2$ sau $\frac{1}{2}$; $a = 63^{\circ} 26' 5''$, sau $26^{\circ} 33' 54''$.

RELAȚIUNI ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI DREPTUNGHIIC.

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE.

16. **Calculul elementelor triunghiului dreptunghic.** Elementele triunghiului dreptunghic sunt două unghiuri ascuțite, a căror sumă este 90° , două catete și ipotenuza, care sunt legate cu teorema lui Pitagora. În baza acestor relații, este de ajuns să cunoaștem un unghi ca să-l aflăm pe celalt și două laturi ca să aflăm pe a treia. Cu ajutorul funcțiilor goniometrice numărul elementelor necesare pentru rezolvarea triunghiurilor dreptunghice se reduce la două.

Cazurile de rezolvare sunt următoarele.

17. **Cazul I. Se cunosc ipotenuza și un unghi ascuțit ale unui triunghi dreptunghic; să se afle celelalte elemente.** Să notăm cu a , b , c ipotenuza și catetele opuse unghiurilor A , B , C ale triunghiului dreptunghic ABC (Fig. 8). Conform definiției funcțiilor goniometrice, avem

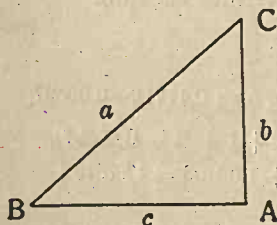


Fig. 8.

$$\sin ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a},$$

$$\cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a},$$

de unde urmează

$$b = a \sin ABC, \quad c = a \cos ABC,$$

sau, cu notațiile de mai sus,

(IX)

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B.$$

Deci, o catetă a triunghiului dreptunghic este egală cu produsul ipotenuzei cu sinusul unghiului opus sau cosinusul unghiului alăturat.

Prin urmare, fiind date a și B , celelalte elemente sunt date de

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B, \quad C = 90^\circ - B.$$

Dacă se cunoaște a și C , avem

$$b = a \cos C, \quad c = a \sin C, \quad B = 90^\circ - C.$$

Exemplu. $a = 578,25$ m, $B = 38^\circ 51' 23''$. Avem

$$C = 90^\circ - 38^\circ 51' 23'' = 51^\circ 8' 37'',$$

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B.$$

Deci

$$\log b = \log a + \log \sin B,$$

$$\log c = \log a + \log \cos B.$$

$\log a =$	5782 76208 +
$2,76212$	4

	5782,5 76212
--	------------------------

	5783 76215
--	----------------------

	1 7
--	---------------

	0,5 $7 \times 0,5 = 3,5$ aproape 4.
--	---

$\log \sin B =$	38° 51' 1,79746 +
-----------------	-----------------------------

$1,79752$	6
-----------	---

	38° 51' 23'' 1,79752
--	--------------------------------

	38° 52' 1,79762
--	---------------------------

	60'' 16
--	-------------------

	23'' $\frac{16 \times 23}{60} = 6$, aproape.
--	---

$\log \cos B =$	38° 51' 1,89142 -
-----------------	-----------------------------

$1,89138$	4
-----------	---

	38° 51' 23'' 1,89138
--	--------------------------------

	38° 52' 1,89132
--	---------------------------

	60'' 10
--	-------------------

	23'' $\frac{10 \times 23}{60} = 4$, aprox.
--	---

Deci

$$\log b = 2,76212 + 1,79752 = 2,55964,$$

$$\log c = 2,76212 + 1,89138 = 2,65350.$$

$$\begin{array}{r|l}
 b = & 55955 \dots\dots\dots 3627 \\
 362,775 & 55964 \dots\dots\dots 3627,75 \\
 & \underline{55967 \dots\dots\dots 3628} \\
 & 12 \dots\dots\dots 1 \\
 & 9 \dots\dots\dots \frac{9}{12} = 0,75;
 \end{array}$$

De asemenea, $c = 450,3$.

18. **Cazul II. Se dau ipotenuza a și o catetă b . Elementele necunoscute sunt c , B , C . Avem**

$$b = a \sin B,$$

de unde

$$\sin B = \frac{b}{a},$$

are da valoarea lui B . Unghiul $C = 90^\circ - B$.

Pentru c , ne servim de formula

$$c = a \sin C.$$

Exemplu. $a = 5678,7$ m, $b = 3456,4$ m. Avem

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \log \sin B = \log b - \log a.$$

$$c = a \sin C, \quad \log c = \log a + \log \sin C.$$

$$\begin{array}{r|l}
 \log a = & 5678 \dots\dots\dots 75420 + \\
 3,75425 & \dots\dots\dots 5
 \end{array}$$

$$5878,7 \dots\dots\dots 75425$$

$$5679 \dots\dots\dots 75427$$

$$\underline{1 \dots\dots\dots 7}$$

$$0,7 \dots\dots\dots 7 \times 0,7 = 4,9, \text{ aproape } 5.$$

$$\begin{array}{r|l}
 \log b = & 3456 \dots\dots\dots 53857 + \\
 3,53872 & \dots\dots\dots 5
 \end{array}$$

$$3456,4 \dots\dots\dots 53862$$

$$\underline{3457 \dots\dots\dots 53870}$$

$$1 \dots\dots\dots 13$$

$$0,4 \dots\dots\dots 13 \times 0,4 = 5, \text{ aproape.}$$

Avem

$$\log \sin B = \log b - \log a = 3,53862 - 3,75425 = \log b + \text{colog} a,$$

$$\log \sin B = 3,53862 + \text{colog} a.$$

Cologaritmul lui a , $\text{colog} a$, se obține adăugând 1 la caracteristica 3 a lui $\log a$, care face 4, și schimbând semnul

avem -4 , care se scrie $\bar{4}$, arătând prin aceasta că numai 4 este negativ. Mantisa cea nouă se obține scăzând ultima cifră însemnătoare 5 a mantisei 75425 din 10 și celelalte din 9 și cologarithmul este $\bar{4},24575$. Așa vom proceda ori de câte ori avem de scăzut un logaritm. Deci

$$\log \sin B = 3,53862 + \bar{4},24575 = \bar{1},78437.$$

B =	1,78428 37°29'
37°29'32"	1,78437
	1,78445 37°30'
	17 60"
	9 $\frac{60 \times 9}{17} = 32''$, aproape

$$C = 90^\circ - 37^\circ 29' 32'' = 52^\circ 30' 28''.$$

log sin C =	52°30' 1,89947 +
1,89951	4
	52°30'28" 1,89951
	52°31' 1,89956
	60" 9
	28" $\frac{9 \times 28}{60} = 4$, aproape.

Avem

$$\log c = \log a + \log \sin C = 3,75425 + \bar{1},89951 = 3,65376.$$

c =	65369 4505 +
4505,7	0,7
	65376 4505,7
	65379 4506
	10 1
	7 $\frac{7}{10} = 0,7$.

19. **Cazul III.** Se dau cateta b și unghiul B . Elementele necunoscute sunt C , c , a . Avem $C = 90^\circ - B$, $b = a \sin B$, $c = a \sin C$.

De unde

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad c = a \sin C,$$

care sunt formulele ce ne dau elementele a și apoi c .

Aplicând logaritmi, avem

$$\log a = \log b - \log \sin B,$$

$$\log c = \log a + \log \sin C.$$

Exemplu. $b = 573,42$, $B = 37^{\circ}29'12''$.

$\log b =$	5734 75846
2,75847	5734,2
	5735 75853
	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
	1 7
	0,2 $7 \times 0,2 = 1,4$, aproape 1.

$\log \sin B =$	37° 29' 1,78428
1,78431	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
	37° 29' 12" 1,75431
	32° 30' 1,78445
	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
	60" 17
	12" $\frac{17 \times 12}{60} = 3,4$, aproape 3.

Deci

$$\log a = \log b - \log \sin B = 2,75848 - 1,78431.$$

Aplicând cologarithmul, avem

$$\log a = 2,75847 + 0,21569 = 2,97416.$$

$a =$	97414 9422
942,24	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
	0,4
	97416 9422,4
	97419 9423
	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
	5 1
	2 $\frac{2}{5} = 0,4$,

$$C = 90^{\circ} - B = 90^{\circ} - 37^{\circ}29'12'' = 52^{\circ}30'48''.$$

$\log \sin C =$	52° 30' 1,89947
1,89954	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
	7
	52° 30' 48" 1,89954
	52° 31' 1,89956
	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
	60" 9
	48" $\frac{9 \times 48}{60} = 7,2$, aproape 7.

$$\log c = \log a + \log \sin C = 2,97416 + 1,89954 = 2,87370,$$

$c =$ 747,65	87367 7476 <div style="text-align: right; border-top: 1px solid black; padding-top: 2px;">0,5</div>
	87370 7476,5 87373 7477 <hr style="border: 0.5px solid black;"/>
	6 1 3 $\frac{3}{6} = 0,5$

20. Cazul IV. Se dau catetele b și c . Elementele necunoscute sunt B , C . Avem, conform definiții (Fig. 8),

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BA} = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{cotg} B = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b};$$

deci
(X)

$$b = c \operatorname{tg} B, \quad c = b \operatorname{cotg} B,$$

adică, o catetă este egală cu cealaltă catetă înmulțită cu tangenta unghiului opus, sau, o catetă este egală cu cealaltă catetă înmulțită cu cotangenta unghiului alăturat.

Exemplu. $b = 52,345$ m, $c = 28,843$ m. Avem

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad \log \operatorname{tg} B = \log b - \log c.$$

$\log b =$ 1,71888	5234 71883 + <div style="text-align: right; border-top: 1px solid black; padding-top: 2px;">5</div>
	5234,5 71888 5235 71892 <hr style="border: 0.5px solid black;"/>
	1 9 0,5 $9 \times 0,5 = 4,5$; aproape 5.
$\log c =$ 1,46005	2884 46000 + <div style="text-align: right; border-top: 1px solid black; padding-top: 2px;">5</div>
	2884,3 46005 2885 46015 <hr style="border: 0.5px solid black;"/>
	1 15 0,3 $15 \times 0,3 = 4,5$; aproape 5.

$$\log \operatorname{tg} B = \log b - \log c = 1,71888 - 1,46005,$$

Aplicând cologaritm, avem

$$\log \operatorname{tg} B = 1,71888 + \overline{2,53995} = 0,25883,$$



$$\begin{array}{r|l}
 B = & 25863 \dots\dots 61^{\circ}8' \\
 61^{\circ}8'40'' & 25883 \dots\dots 61^{\circ}8'40'' \\
 & 25893 \dots\dots 61^{\circ}9' \\
 & \hline
 & 30 \dots\dots\dots 60'' \\
 & 20 \dots\dots\dots \frac{60'' \times 20}{30} = 40''
 \end{array}$$

$$C = 90^{\circ} - 61^{\circ}8'40'' = 28^{\circ}51'20''.$$

EXERCITIIL

1. Să se afle înălțimea unui deal, cunoscând lungimea 236,502 m a șoselei drepte care merge în vârful lui și care este înclinată pe planul orizontal cu $38^{\circ}15'10''$.

R. 146,43 m.

2. O linie de cale ferată lungă de 1532 m merge drept până la înălțimea de 84 m; să se calculeze înclinarea linii ferate pe planul orizontal. Să se afle rampa acestei linii ferate, adică cu cât se ridică la un metru de drum orizontal.

R. Se cunoaște ipotenuza BC și AC a unui triunghi dreptunghic. Înclinarea e dată de unghiul $B = 3^{\circ}8'35''$. Petru a afla rampa, observăm că dacă la un drum orizontal lung cât AB se ridică cu 84 m, la un drum lung de 1 m., se va ridica cu $\frac{84}{AB} = \frac{AC}{AB} = \text{tg } B$; rampa este valoarea lui $\text{tg } B = 0,054$. La 100 metri se urcă cu 5,4 m.

3. Un turn înalt de 32 m aruncă o umbră de 50 m. Să se afle înclinarea razelor solare pe pământ.

R. Trebuie calculat unghiul opus catetei de 32 m, unui triunghi dreptunghic ale cărui catete sunt 32 m și 50 m. Se află $32^{\circ}37'8''$.

4. Un turn de 40 m înălțime este așezat vertical pe vârful unui deal. Dintr'un punct al planului orizontal se vede turnul sub $2^{\circ}34'17''$, iar vârful dealului se vede deasupra planului orizontal sub unghiul de $17^{\circ}21'14''$. Să se afle înălțimea dealului.

R. Însemnând cu x înălțimea dealului, s'au format două triunghiuri dreptunghice cu aceeași catetă orizontală, unul având cealaltă catetă de x m și celălalt triunghi cateta de $(x+40)$ m; unghiurile opuse acestor catete sunt respectiv $17^{\circ}21'14''$ și $17^{\circ}21'14'' + 2^{\circ}34'17''$. Egalând valorile catetei comună din cele două triunghiuri, se obține ecuația

$$x \cotg 17^{\circ}21'14'' = (x+40) \cotg 19^{\circ}54'31''.$$

Se află $x = 250$ m. aprox.

PROBLEME CARE SE REDUC LA REZOLVAREA TRIUNGHURILOR DREPTUNGHICE.

21. Triunghiul isoscel. Considerând înălțimea BD a unui triunghi isoscel ABC ($AB = BC$) (Fig. 9), triunghiul este împărțit în două triunghiuri dreptunghice ABD, BDC egale.

Pentru rezolvarea unui triunghi isoscel este de ajuns să se cunoască două elemente, o latură și un unghi și în fine baza și o latură.

Se observă că dacă se cunoaște un unghi al triunghiului isoscel, se cunosc și celelalte unghiuri și deci este indiferent care unghi este dat odată cu baza sau latura. Unghiul de la vârful triunghiului isoscel poate fi și obtus; aceasta nu modifică operațiile, fiindcă în calcule trebuie considerată jumătatea acestui unghi, adică tot un unghi ascuțit.

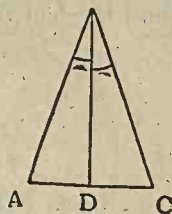


Fig. 22.

1. Se cunosc o latură $BC = d$ și unghiul opus bazei, $\angle ABC = \beta$. Se cere să se calculeze baza triunghiului isoscel și unghiul de la bază.

Din triunghiul dreptunghic BDC , avem valoarea unghiului de la bază

$$\angle DCB = 90^\circ - \angle DBC = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta.$$

Baza AC este înălțimea catetei DC , adică

$$AB = 2DC = 2BC \sin \angle DCB = 2d \sin \frac{\beta}{2}.$$

Exemplu. $d = BC = 34,7$ m, unghiul $\angle ABC = 64^\circ 24'$. Avem

$$\angle DCB = 90^\circ - \frac{1}{2} 64^\circ 24' = 90^\circ - 32^\circ 12' = 57^\circ 48',$$

$$AC = 2 \cdot 34,7 \sin 32^\circ 12'.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log(AC) = \log 2 + \log 34,7 + \log \sin 32^\circ 12',$$

$$\log(AC) = 0,30103 + 1,54033 + 1,72663 = 1,56799,$$

$$AC = 36,98 \text{ m.}$$

20. Se cunosc baza egală cu l și unghiul alăturat egal cu a . Să calculăm unghiul opus bazei și latura. Din fig. 9 se vede că unghiul opus bazei este dat de

$$\angle ABC = 2 \cdot \angle DBC = 2(90^\circ - a).$$

Din triunghiul DBC , avem

$$DC = BC \cos \angle DCB,$$

$$\frac{l}{2} = BC \cos a, \quad l = 2BC \cos a,$$

$$BC = \frac{l}{2 \cos a}.$$

Exemplu. $l = 62,8$ m, $a = 35^\circ 10' 36''$. Avem

$$\angle ABC = 2(90^\circ - 35^\circ 10' 36'') = 2 \cdot 54^\circ 49' 24'',$$

$$\angle ABC = 2(54^\circ + 49' + 24'') = 108^\circ + 98' + 48'' = 109^\circ 38' 48''.$$

$$BC = \frac{l}{2 \cos a} = \frac{62,8}{2 \cos 35^\circ 10' 36''}.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log BC = \log 62,8 - \log 2 - \log \cos 35^\circ 10' 36''.$$

$$\log BC = 1,79796 - 0,30103 - 1,91243.$$

Se aplică cologaritmi la logaritmi ce au - înainte și avem

$$\log BC = 1,79796 + 1,69897 + 0,08757,$$

$$\log BC = 1,58450,$$

$$BC = 38,415 \text{ m.}$$

3°. Se cunosc baza egală cu l și o latură d . Să se afle unghiurile. Din triunghiul DBC (Fig. 9) avem

$$\sin DBC = \frac{DC}{BC}, \quad \sin DBC = \frac{\frac{l}{2}}{d} = \frac{l}{2d},$$

$$\sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = \frac{l}{2d},$$

Odată calculat unghiul DBC, avem unghiul de la bază

$$\sphericalangle DCB = 90^\circ - \sphericalangle DBC.$$

Exemplu. $l = 29,23$ m. $d = 69,43$ m. Înlocuind în formula aflată, avem

$$\sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = \frac{l}{2d} = \frac{29,23}{2 \cdot 69,43}.$$

Deci

$$\log \sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = \log 29,23 - \log 2 - \log 69,43,$$

$$\log \sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = 1,46583 - 0,30103 - 1,84155,$$

$$\log \sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = 1,46583 + \bar{1},69897 + \bar{2},15845 = \bar{1},32325,$$

$$\frac{1}{2} \sphericalangle ABC = 12^\circ 9' 6'', \quad \sphericalangle ABC = 2 \times 12^\circ 9' 6'' = 24^\circ 18' 12'',$$

$$\sphericalangle DCB = 90^\circ - 12^\circ 9' 6'' = 77^\circ 50' 54''.$$

22. Dreptunghiul. Să considerăm un dreptunghi ABCD (Fig. 10), cu laturile $AB = a$, $BC = b$ și diagonala d . Diagonala AC îl împarte în triunghiurile egale ABC, DAC, iar unghiurile de la vârfurile A și C sunt împărțite în unghiurile α și β , care sunt complementare. Pentru rezolvarea dreptunghiului, avem nevoie numai de două elemente din unul sau celalalt triunghi dreptunghic.

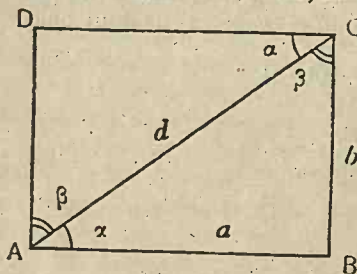


Fig. 10.

Probleme care intervin se rezolvă cu ajutorul relațiilor

$$a = d \cos \alpha, \quad b = d \sin \alpha,$$

$$d^2 = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Exemplu. Să se afle laturile dreptunghiului, când se cunosc diagonala $d = 42$ m. și unghiul $\alpha = 68^\circ 36' 15''$. Din triunghiul ABC, avem

$$a = d \cos \alpha = 42 \cos 68^\circ 36' 15'',$$

$$b = d \sin \alpha = 42 \sin 68^\circ 36' 15''.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log a = \log 42 + \log \cos 68^\circ 36' 15'' = 1,62325 + \bar{1},56207 = 1,18532,$$

$$a = 15,322 \text{ m.}$$

În mod analog, găsim $b = 39,105$ m.

23. Poligoanele regulate înscrise și circumscrise (*). Poligoanele re-

(* Nu face parte din program.

gulate înscrise și circumscrise cercului cu raza r , se descompun în triunghiurii soscele cu vârfurile în centrul cercului și cu bazele coarde și tangente la cerc. Pentru determinarea poligoanelor regulate, e de ajuns să cunoaștem, pe lângă raza cercului, numărul laturilor.

10. Fie $AB = a$ o latură a poligonului regulat de n laturi înscris în cercul cu centru O și raza r (Fig. 11). Unghiul de la centru este $\frac{360^\circ}{n}$ și fiindcă înălțimea OM este

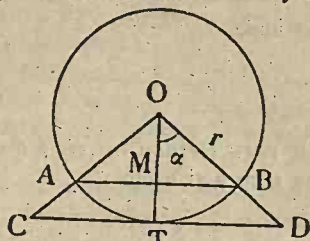


Fig. 11.

bisectoarea acestui unghi, rezultă că $a = \frac{180^\circ}{n}$.

Din triunghiul dreptunghic MOB , avem

$$MB = OB \sin \alpha, \quad \frac{a}{2} = r \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad a = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Cu această formulă calculăm latura poligonului regulat de n laturi înscris în cercul de raza r .

Exemplu. $r = 40$ cm.; să se afle latura octogonului regulat. Avem

$$a = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} = 2 \cdot 40 \sin \frac{180^\circ}{8} = 2 \cdot 40 \cdot \sin 22^\circ 30'.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log a = \log 80 + \log \sin 22^\circ 30' = \bar{1},90309 + 1,58284, \\ \log a = 1,48593; \quad a = 30,615 \text{ cm.}$$

20. *Poligon circumscris.* Fie $CD = b$ latura poligonului regulat de n laturi circumscris cercului cu raza r . T fiind punctul de contact cu cercul (Fig. 11), T este mijlocul lui CD , unghiul TOD este egal cu

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}.$$

Din triunghiul dreptunghic TOD , avem

$$TD = OT \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{b}{2} = r \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{b}{2} = r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n},$$

de unde

$$b = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Cu această formulă se calculează latura poligonului regulat de n laturi circumscris cercului cu raza r .

Exemplu. Pentru latura octogonului circumscris cercului de rază 40 cm., avem

$$b = 2 \cdot 40 \operatorname{tg} 22^\circ 30' = 80 \operatorname{tg} 22^\circ 30'.$$

$$\log b = \log 80 + \log \operatorname{tg} 22^\circ 30' = 1,90309 + \bar{1},61722 = 1,52031,$$

$$b = 33,137 \text{ cm.}$$

24. Raza cercului înscris și circumscris unui poligon regulat⁽¹⁾. Să ne propunem acum să rezolvăm problema inversă celei precedente și anume să calculăm raza r a cercului circumscris sau înscris unui poligon regulat dat, căruia i se cunoaște latura.

(1) Nu face parte din program.

Pentru raza cercului circumscris, avem relația stabilită

$$a = 2r \sin \frac{180^\circ}{n},$$

de unde

$$r = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

iar raza cercului înscris ρ o deducem din cealaltă formulă, unde înlocuim pe r cu ρ și avem

$$b = 2\rho \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n},$$

de unde b fiind latura poligonului, avem

$$\rho = \frac{b}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

Exemplu. Se dă latura unui pentagon regulat egală cu 2 cm. Să se afle razele cercului circumscris și înscris. Avem respectiv

$$r = \frac{2}{2 \sin \frac{180^\circ}{5}} = \frac{1}{\sin 36^\circ}, \quad \rho = \frac{2}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{5}} = \frac{1}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \operatorname{cotg} 36^\circ.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log r = \log 1 - \log \sin 36^\circ = -1,76922 = 0,23078,$$

$$r = 1,7 \text{ cm};$$

$$\log \rho = \log \operatorname{cotg} 36^\circ = 0,13874, \quad \rho = 1,376 \text{ cm}.$$

EXERCIȚII.

1. O ghiulea e văzută sub un unghi de 31° și are raza de 1,5 m. Să se afle distanța de la ochiul observatorului la centrul ghiulelei.

R. Ducând raza vizuală OA, tangentă în A la ghiulea, notând cu C centrul ghiulelei, se va calcula CO din triunghiul dreptunghic OAC, în care unghiul O este $\frac{1}{2}31^\circ$; $CO = \frac{1,5}{\sin 15^\circ 30'} = 5 \text{ m}$, aproape.

2. În dreptunghiul ABCD, se cunoaște unghiul diagonalelor AC, BD egal cu 35° și lungimea unei diagonale, 12,564 m. Să se calculeze laturile dreptunghiului.

R. O fiind centrul dreptunghiului, avem $\sphericalangle AOD = \sphericalangle OBA + \sphericalangle OAB$ (ca fiind exterior triunghiului AOB), $\sphericalangle AOD = \sphericalangle 2ABD$; $\sphericalangle ABD = 17^\circ 30'$. $AD = BD \sin 17^\circ 30'$, $AB = BD \cos 17^\circ 30'$; $AD = 3,778 \text{ m}$; $AB = 11,98 \text{ m}$.

3. În romb ABCD se cunosc unghiul $BAD = 50^\circ$ și diagonala $AC = 18 \text{ m}$. Să se calculeze latura rombului și cealaltă diagonală.

R. O fiind centrul rombului (intersecția diagonalelor), se rezolvă triunghiul dreptunghic AOB, în care $\sphericalangle BAO = 25^\circ$, $AO = 9 \text{ m}$. Se găsește $AB = 9,93$, $BO = 4,196$.

4. Se consideră un trapez ABCD (AB paralelă cu CD), în care se cunosc latura $BC = 80,4 \text{ m}$, cea mai mică din laturile paralele $DC = 36,8 \text{ m}$.

iar unghiurile alăturate bazei celei mari sunt $\sphericalangle PAB=45^\circ$, $\sphericalangle ABC=48^\circ 36'$. Să se calculeze celelalte laturi ale trapezului.

R. Se duce CE perpendiculară pe AB; $CE = CB \sin 48^\circ 36'$, $EB = CB \cos 48^\circ 36'$. Se duce DF perpendiculară pe AB; din triunghiul dreptunghic ADF, se calculează AF, AD; $AB = AF + FE + EB$ ($FE = DC$). Se obține $AB = 150,28$, $AD = 85,29$; înălțimea $DF = 60,31$.

5. Se consideră trapezul isoscel ABCD. (AB paralelă cu CD, $AD = BC$) în care se cunosc latura paralelă cea mică $CD = 10$ m, latura neparalelă $BC = 4,5$ m. și unghiul alăturat bazei mari, $\sphericalangle ABC = 48^\circ$. Să se afle baza mare a trapezului și celălalt unghi DCB.

R. Se duce CE perpendiculară pe AB; se calculează EB din triunghiul EBC. $AB = 2 \cdot EB + DC = 16,02$ m. Avem $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$, $\sphericalangle 2B + \sphericalangle 2C = 360^\circ$, $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$, $C = 180 - B = 132^\circ$.

6. O coardă subintinde un arc de 80° și e depărtată de centru de 20 m. Să se afle lungimea coardei și raza cercului.

R. O fiind centrul și C mijlocul coardei AB, se consideră triunghiul AOC; $AB = 2,20 \operatorname{tg} 40^\circ = 33,56$; raza este 26, aproape.

7. Să se afle coarda ce corespunde unghiului la centru de $28^\circ 34'$ în cercul cu raza 8,56 m.

R. 4,22 m.

8. Să se afle unghiul la centru corespunzător coardei de 6,8 m, raza cercului fiind 5 m.

R. $85^\circ 41' 17''$.

9. Raza cercului înscris într'un octogon regulat fiind 26 m, să se afle raza cercului circumscris.

R. 28,13 m.

CALCULUL ARILOR.

25. Aria triunghiului dreptunghic. În triunghiul dreptunghic baza și înălțimea fiind cele două catete b și c , expresiunea arii A este dată de

$$A = \frac{1}{2} bc.$$

Exemple. 10. Când se cunosc catetele $b = 32,5$ m, $c = 41,85$ m, aria este

$$A = \frac{1}{2} 32,5 \times 41,85.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log A = \log 32,5 + \log 41,85 - \log 2,$$

$$\log A = 1,51188 + 1,62170 - 0,30103,$$

$$\log A = 1,51188 + 1,62170 + 1,69897 = 2,83255,$$

$$A = 680 \text{ m}^2.$$

20. Dacă se cunosc ipotenuza $a = 117,8$ m și cateta $b = 48$ m, întâi se calculează cateta c cu formula

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

de unde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Aria triunghiului dreptunghic este

$$A = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 - b^2},$$

$$A = \frac{1}{2} b \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log A = \log b + \frac{\log(a+b) + \log(a-b)}{2} - \log 2.$$

În cazul nostru,

$$a + b = 165,8, \quad a - b = 69,8.$$

Avem

$$\log(a+b) = 2,21958, \quad \log(a-b) = 1,84386,$$

$$\log A = 1,68124 + \frac{2,21958 + 1,84386}{2} - 0,30103.$$

$$\log A = 1,68124 + \frac{4,06344}{2} + \bar{1},69897, \quad \log A = 3,41193,$$

$$A = 2581 \text{ m}^2, \text{ aprox.}$$

3°. Dacă se cunosc ipotenuza $a = 578,25 \text{ m}$, $B = 38^\circ 51' 23''$,
avem

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B,$$

deci

$$A = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B.$$

Și aplicând logaritmi, avem

$$\log A = 2 \log a + \log \sin B + \log \cos B - \log 2.$$

Avem, în cazul nostru,

$$2 \log a = 5,52424, \quad \log \sin B = \bar{1},79752, \quad \log \cos B = \bar{1},89138.$$

Deci

$$\log A = 5,52424 + \bar{1},79752 + \bar{1},89138 - 0,30103,$$

$$\log A = 5,52424 + \bar{1},79752 + \bar{1},89138 - \bar{1},69897,$$

$$\log A = 4,91211,$$

$$A = 81678 \text{ m}^2.$$

26. Aria triunghiului isocel. 1°. Considerând triunghiul isocel ABC ($AB = BC$), să presupunem că se cunosc o latură $BC = d$ și unghiul opus bazei, $\beta = \angle ABC$. BD fiind înălțimea vârfului B, avem pentru expresiunea arii

$$A = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Dar

$$AC = 2 DC = 2 BC \sin \frac{1}{2} \beta, \quad BD = BC \cos \frac{1}{2} \beta,$$

$$AC = 2 d \sin \frac{1}{2} \beta, \quad BD = d \cos \frac{1}{2} \beta;$$

deci

$$A = \frac{1}{2} 2 d \sin \frac{1}{2} \beta \cdot d \cos \frac{1}{2} \beta,$$

$$A = d^2 \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \beta.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log A = 2 \log d + \log \sin \frac{1}{2} \beta + \log \cos \frac{1}{2} \beta.$$

2°. Se cunosc baza $AC = l$ și unghiul alăturat $\sphericalangle DCB = \alpha$. Aria e dată de

$$A = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Dar

$$BD = DC \operatorname{tg} \sphericalangle DCA = DC \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \alpha.$$

Deci aria este egală cu

$$A = \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} l^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log A = 2 \log l + \log \operatorname{tg} \alpha - \log 4.$$

3°. Se cunosc baza $AC = l$ și o latură $BC = d$. Avem

$$A = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Dar

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 - \left(\frac{1}{2} AC\right)^2,$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \frac{1}{4} \overline{AC}^2.$$

Extrăgând rădăcina păstrată, avem

$$BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \frac{1}{4} \overline{AC}^2} = \sqrt{d^2 - \frac{1}{4} l^2},$$

$$BD = \sqrt{\left(d + \frac{1}{2} l\right) \left(d - \frac{1}{2} l\right)}.$$

Inlocuind în expresiunea arii, se obține

$$A = \frac{1}{2} l \sqrt{\left(d + \frac{1}{2} l\right) \left(d - \frac{1}{2} l\right)}.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log A = \log l + \frac{\log\left(d + \frac{1}{2} l\right) + \log\left(d - \frac{1}{2} l\right)}{2} - \log 2.$$

Exemplu. $l = 648,72$ m, $d = 376,8$ m. Avem

$$\log l = \log 648,72 = 2,81205$$

$$\log\left(d + \frac{1}{2} l\right) = \log 701,16 = 2,84582,$$

$$\log\left(d - \frac{1}{2} l\right) = \log 52,44 = 1,71966.$$

$$\log A = 2,81205 + \frac{2,84582 + 1,71966}{2} - 0,30103,$$

$$\log A = 2,81205 + 1,42291 + 0,82983 + 1,69897 = 4,79376,$$

$$A = 62195 \text{ m}^2.$$

27. Aria poligoanelor regulate înscrise și circumscrise la un cerc⁽¹⁾. Calculul arii poligoanelor regulate se reduce la acela al arii triunghiului isoscel.

În cazul *poligoanelor regulate circumscrise* (Fig. 12). Înălțimile triunghiurilor COD sunt egale cu raza cercului. Considerând deci un poligon regulat circumscris de n laturi unind centrul cu vârfurile poligonului, poligonul se împarte în n triunghiuri egale cu triunghiul COD. Dar mărirea laturei CD am văzut (No. 23) că este egală cu

$$CD = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Deci

$$\text{aria COD} = \frac{1}{2} CD \cdot OF = \frac{1}{2} \cdot 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \cdot r,$$

$$\text{aria COD} = r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Aria poligonului este

$$A = n \cdot r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

În cazul *poligoanelor regulate înscrise*, poligonul se împarte în n triunghiuri egale cu AOB. Latura AB este egală (No. 23) cu

$$AB = 2r \sin \frac{180^\circ}{n},$$

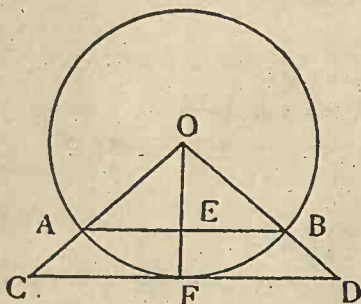


Fig. 12.

iar înălțimea OE o deducem din triunghiul OEB (Fig. 12),

$$OE = OB \cos \angle OEB = r \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

$$\text{Aria AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OE = \frac{1}{2} \cdot 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot r \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

$$\text{Aria AOB} = r^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Deci aria poligonului regulat de n laturi înscris în cercul cu raza r este

$$A = n \cdot r^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

EXERCIȚII.

1. Raportul catetelor AC și AB ale unui triunghi dreptunghic ABC este $\frac{1}{\sqrt{3}}$ și lungimea perpendicularei AD din vârful unghiului drept este 24,17 m. Să se afle aria triunghiului.

R. Notând cu $\alpha = \angle ABC$, avem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = 30^\circ$. Aria este

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AB^2 \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \frac{AB^2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{AD^2}{\sin^2 \alpha}; 674,571.$$

(1) Nu face parte din program.

2 Aria unui triunghi isoscel ABC ($AB=BC$) este 108 dm^2 și unghiul ABC dela vârf este $36^\circ 52' 10''$. Să se afle elementele necunoscute ale triunghiului.

R. BD fiind înălțimea, avem pentru arie

$$DC \cdot DB = 108, \quad BC \sin\left(\frac{1}{2}36^\circ 52' 10''\right) \cdot BC \cos\left(\frac{1}{2}36^\circ 52' 10''\right) = 108,$$

$$\overline{BC}^2 \sin\left(\frac{1}{2}36^\circ 52' 10''\right) \cos\left(\frac{1}{2}36^\circ 52' 10''\right) = 108,$$

$$\overline{BC}^2 = \frac{108}{\sin\left(\frac{1}{2}36^\circ 52' 10''\right) \cos\left(\frac{1}{2}36^\circ 52' 10''\right)},$$

$$2 \log BC = \log 108 - \log \sin\left(\frac{1}{2}36^\circ 52' 10''\right) - \log \cos\left(\frac{1}{2}36^\circ 52' 10''\right),$$

$$\log BC = \frac{1}{2}(2,03342 - \bar{1},49999 - \bar{1},97713) = \frac{1}{2}(2,03342 + 0,50001 + 0,02287)$$

$$\log BC = 1,27815, \quad BC = 18,974.$$

$$\log AC = \log 2 + \log BC + \log \sin 18^\circ 26' 5'' = 1,07917; \quad AC = 12, \text{ aproape.}$$

3. Aria unui decagon regulat este 10 m^2 . Să se afle razele cercului înscris și circumscris la acest decagon.

R. a fiind latura decagonului, r și ρ razele cercurilor circumscris și înscris, avem

$$10 = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{10}, \quad r^2 = \frac{10}{10 \operatorname{tg} 18^\circ} = \operatorname{cotg} 18^\circ, \quad 2 \log r = \log \operatorname{cotg} 18^\circ = 0,48822; \quad r = 1,7.$$

$$10 = n\rho^2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ, \quad \rho^2 = \frac{1}{\sin 18^\circ \cos 18^\circ}; \quad 2 \log \rho = -\log \sin 18^\circ - \log \cos 18^\circ = 0,53181; \quad \rho = 1,845.$$

4. Latura pentagonului fiind 45 cm , să se afle cu cât e mai mare aria lui decât aria cercului înscris.

R. $472,418 \text{ cm}^2$.

LINII TRIGONOMETRICE IN CADRANUL INTÂI ȘI AL DOILEA CADRAN.

LINIILE TRIGONOMETRICE ALE UNGHIURILOR ASCUȚITE ȘI OBTUSE.

28. Am definit în partea întâi liniile trigonometrice, presupunând că unghiul este ascuțit. Cu aceste noțiuni am putut rezolva problema triunghiului dreptunghic și alte probleme care se reduc la aceasta. În triunghiul oarecare intervin însă și unghiuri obtuse. Pentru a putea rezolva cu metodele trigonometriei, trebuie să definim liniile trigonometrice și pentru unghiuri obtuse.

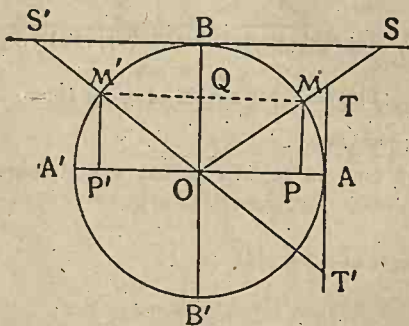


Fig 13.

Vom considera mai întâi unghiuri pozitive, adică acelea cum este AOM' (Fig. 13), care sunt obținute făcând să se învârtască dreapta OA în sensul pozitiv pentru a se așterne peste OM' . Să considerăm în cercul trigonometric (Fig 13) un unghi obtus $a = AOM'$, cuprins între 90° și 180° , adică extremitatea M' ,

a arcului corespunzător să fi în cadranul al doilea.

Să-i construim liniile trigonometrice ca și pentru cazul unui unghi mai mic de cât 90° .

29. **Sinus. Cosinus.** Din extremitatea M' a arcului să ducem perpendiculara $M'P'$ pe diametrul AA' ce trece prin originea arcului. Avem $P'M' = \sin a$, $OP' = \cos a$. Ducând paralela $M'Q$ cu AA' , se vede că $OQ = P'M' = \sin a$.

Deci, sinusurile unghiurilor obtuse, adică sinusurile arcelor cu extremitatea în cadranul al doilea, se măsoară pe diametrul $B'B$, de la O către B , adică sunt pozitive. Deci, sinusurile în cadranul al doilea sunt pozitive.

Cosinusurile OP' se măsoară pe diametrul AA' , de la O

către A' , în direcție negativă contrară celei pozitive OA , deci *cosinusurile în cadranul al doilea sunt negative*.

Când arcul crește de la 90° la 180° , sinusul descrește de la valoarea $OB=1$ până la zero, iar cosinusul OP' descrește de la zero la -1 , deci $\cos 180^\circ = -1$.

30. Tangenta. Cotangenta. Să ducem raza OM' prin extremitatea arcului și s'o prelungim până la tangentele duse în A și B la cercul trigonometric. Conform definiții, avem

$$AT' = \operatorname{tga}, \quad BS' = \operatorname{cotga}.$$

Tangentele arcelor din cadranul al doilea sunt măsurate de la A către T' , în direcție contrară celei pozitive, deci sunt negative. De asemenea, cotangentele fiind măsurate de la B către S' , sunt negative.

Deci, *tangentele și cotangele în cadranul al doilea sunt negative*.

Când unghiul a este mai mare ca 90° cu o cantitate foarte mică ε pozitivă, atunci tangenta sa este foarte mare dar este negativă, deci $\operatorname{tg}(90^\circ + \varepsilon) \rightarrow -\infty$, când $\lim \varepsilon = 0$. Când unghiul crește de la 90° la 180° , segmentele AT' se micșorează în lungime și când $a=180^\circ$, AT' devine egal cu zero, deci $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$. Așa dar, când unghiul a variază de la 90° la 180° , *tga crește de la $-\infty$ la 0*. Mai mult, trebuie observat, că $\operatorname{tg}(90^\circ - \varepsilon) \rightarrow \infty$, iar $\operatorname{tg}(90^\circ + \varepsilon) \rightarrow -\infty$.

Când unghiul a variază de la 90° la 180° , segmentele BS' cresc în lungime dar sunt negative, deci *cotangenta descrește de la 0 la $-\infty$* , adică $\operatorname{cotg} 90^\circ = 0$, $\operatorname{cotg}(180^\circ - \varepsilon) = -\infty$, când $\lim \varepsilon = 0$.

31. Secanta. Cosecanta⁽¹⁾. Avem (Fig. 13) $\operatorname{seca} = OT'$, iar $\operatorname{coseca} = OS'$. În cadranul al doilea, *secanta este negativă*, căci pentru a întâlni tangenta la cerc în A , prelungim raza OM' în direcție contrară cu extremitatea arcului. *Cosecanta este pozitivă*, căci prelungim raza în aceeași direcție cu extremitatea M' a arcului.

Când unghiul a variază de la 90° la 180° *secanta* OT' se micșorează în lungime, dar este negativă, deci crește, și anume $\operatorname{sec}(90^\circ + \varepsilon) \rightarrow -\infty$, $\operatorname{sec} 180^\circ = -1$, așa dar *crește de la $-\infty$ la -1* .

Cosecanta crește de la 1 la ∞ și anume $\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$, $\operatorname{cosec}(180^\circ - \varepsilon) \rightarrow \infty$, când $\lim \varepsilon = 0$.

32. Liniile trigonometrice ale unghiurilor suplimentare. Să considerăm în cercul trigonometric (Fig. 13) unghiul $AOM =$

(1) Nu face parte din program.

b. Paralela dusă prin M la diametrul AA' determină arcele egale $AM = A'M'$. Avem

$\text{arc}AM = b$, $\text{arc}AM' = 180^\circ - A'M' = 180^\circ - AM = 180^\circ - b$,
deci unghiurile AOM și AOM' sunt suplimentare.

Să construim liniile trigonometrice ale acestor unghiuri. Triunghiurile dreptunghice OPM și OP'M' având ipotenuzele $OM = OM'$ ca raze, și catetele $MP = M'P'$ ca paralele cuprinse între paralele, sunt egale. Deci $OP = OP'$ și unghiurile $AOM = A'OM'$.

De asemenea, în triunghiurile OAT și OAT' avem cateta OA comună; unghiurile $AOT = A'OM' = AOT'$. Deci, triunghiurile sunt egale, de unde urmează $AT = AT'$, $OT = OT'$.

În fine, triunghiurile dreptunghice OBS și OBS' sunt egale, căci au cateta OB comună și unghiurile $SOB = S'OB'$. Deci $BS = BS'$, $OS = OS'$.

De aci urmează

$$(XI) \quad \begin{aligned} \sin(180^\circ - b) &= M'P' = MP = \sin b, \\ \cos(180^\circ - b) &= OP' = -OP = -\cos b, \\ \text{tg}(180^\circ - b) &= AT' = -AT = -\text{tg} b, \\ \text{cotg}(180^\circ - b) &= BS' = -BS = -\text{cotg} b, \\ \text{sec}(180^\circ - b) &= OT' = -OT = -\text{sec} b, \\ \text{cosec}(180^\circ - b) &= OS' = OS = \text{cosec} b. \end{aligned}$$

Deci, liniile trigonometrice a două arce suplimentare sunt egale și de semne contrare, afară de sinus și cosecantă care au și același semn.

$$\text{De ex., } \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tg} 135^\circ = -\text{tg} 45^\circ = -1, \quad \text{cotg} 150^\circ = -\text{cotg} 30^\circ = -\sqrt{3}, \\ \text{sec} 105^\circ = -\text{sec} 75^\circ.$$

33. Relațiuni între liniile trigonometrice din cadranul al doilea. Să considerăm liniile trigonometrice ale unghiului $AOM' = a$ (Fig. 13) din cadranul al doilea.

1°. Din triunghiul dreptunghic $OM'P'$, avem

$$\overline{M'P'}^2 + \overline{OP'}^2 = \overline{OM'}^2, \quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

2°. Dreptele $M'P'$ și AT' fiind paralele, triunghiurile $OM'P'$ și OAT' sunt asemenea. Deci

$$\frac{M'P'}{AT'} = \frac{OP'}{OA}, \quad \frac{\sin a}{\text{tga}} = \frac{\cos a}{1},$$

$$\operatorname{tga} = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Însă în cadranul al doilea, $\sin a$ este pozitiv, $\cos a$ negativ, deci raportul din membrul al doilea este negativ. Dar și tga este negativ în cadranul al doilea și deci egalitatea stabilită este adevărată și în ce privește semnul.

3°. Triunghiurile dreptunghice $OM'P'$ și $S'BO$ au unghiurile ascuțite $P'OM' = OS'B$ ca alterne interne, deci sunt asemenea.

De unde

$$\frac{M'P'}{OB} = \frac{OP'}{BS'}, \quad \frac{\sin a}{1} = \frac{\cos a}{\cot a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

această egalitate fiind adevărată și încă privește semnul, căci în cadranul al doilea raportul din membru al doilea este negativ, dar și $\cot a$ este negativă.

Deci, relațiunile fundamentale între liniile trigonometrice sunt aceleași în cadranul al doilea ca și pentru arcele din cadranul întâi.

34. **Liniile trigonometrice ale unghiurilor negative.** Să considerăm în cercul trigonometric (Fig. 14) unghiul $AOM = a$ și din extremitatea M a arcului corespunzător să lăsăm perpendiculara MPM' pe diametrul AA' , până taie cercul în M' . Punctul M' este simetricul lui M față de diametrul AA' , iar arcele $AM = AM'$ și deci și unghiurile $AOM = M'OA$. Dar unghiul AOM' este socotit în sens contrar de cât unghiul AOM , deci valoarea sa este $-a$, este deci un unghi negativ.

Să considerăm liniile trigonometrice ale unghiului AOM' după însăși definiția lor. Avem

$$\sin(-a) = \sin AOM' = \frac{PM'}{OM'} = \frac{PM'}{1} = PM'.$$

Dar PM' este socotit în direcție contrară cu PM ; deci $PM' = -PM$ și prin urmare

$$\sin(-a) = PM' = -PM = -\sin a.$$

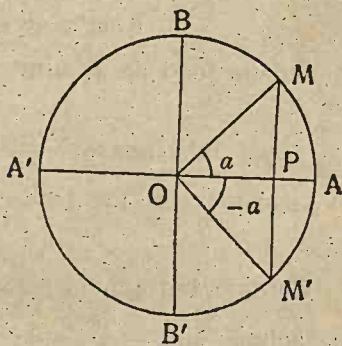


Fig. 14.

De asemenea,

$$\cos(-a) = OP = \cos a, \quad \operatorname{tg}(-a) = \frac{PM'}{OP} = \frac{-PM}{OP} = \frac{-\sin a}{\cos a} = -\operatorname{tga},$$

$$\operatorname{cotg}(-a) = \frac{OP}{PM'} = \frac{OP}{-PM} = \frac{\cos a}{-\sin a} = -\operatorname{cotg} a,$$

$$(XII) \quad \sec(-a) = \frac{OM'}{PO} = \frac{1}{\cos a} = \operatorname{seca},$$

$$\operatorname{cosec}(-a) = \frac{OM'}{PM'} = \frac{1}{-\sin a} = -\operatorname{cosec} a.$$

Deci, liniile trigonometrice a două unghiuri egale și de semne contrarii sunt egale și de semne contrarii, afară de \cos și \sec care au și același semn.

35. Aplicații. I. Să se găsească arcele x cuprinse între 0° și 180° , care verifică ecuația trigonometrică

$$5 \cos^2 x + 8 \sin x - 8 = 0,$$

și să se afle apoi valoarea celorlalte linii trigonometrice.

Înlocuind pe $\cos^2 x$ cu $1 - \sin^2 x$, ecuația devine

$$5(1 - \sin^2 x) + 8 \sin x - 8 = 0,$$

de unde

$$5 - 5 \sin^2 x + 8 \sin x - 8 = 0,$$

sau

$$5 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0.$$

Ecuația fiind de gradul al doilea în $\sin x$, rezolvând-o,

avem

$$\sin x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 15}}{5} = \frac{4 \pm 1}{5},$$

$$\sin x = \frac{4 + 1}{5} = 1, \quad \sin x = \frac{4 - 1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Considerând soluția $\sin x = 1$, rezultă $x = 90^\circ$. Pentru a doua soluție $\sin x = \frac{3}{5}$, aplicăm logaritmi, și avem

$$\log \sin x = \log \frac{3}{5} = \log 3 - \log 5 = 0,47712 - 0,69897,$$

$$\log \sin x = 0,47712 + \bar{1},30103 = \bar{1},77815,$$

de unde

$$x = 36^\circ 52' 10''.$$

Dar, pentru că x este dat prin $\sin x = \frac{3}{5}$, urmează ca și

arcul suplimentar lui $36^{\circ}52'10''$ verifică această ecuație, căci două arce suplimentare au același sinus. Deci, ecuația mai este verificată și de arcul

$$180^{\circ} - 36^{\circ}52'10'' = 179^{\circ}59'60'' - 36^{\circ}52'10'' = 143^{\circ}7'70''.$$

Soluțiile în $\sin x$ ale ecuației date au fost $\sin x = 1$ ($x = 90$) și $\sin x = \frac{3}{5}$. Pentru $\sin x = 1$, celelalte linii trigonometrice sunt $\cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = \infty$, $\operatorname{cot} x = 0$.

Pentru $\sin x = \frac{3}{5}$, avem

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x, \quad \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}, \\ \cos x &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Am obținut două valori, una $\cos x = \frac{4}{5}$, pentru $x = 36^{\circ}52'10''$, iar cealaltă $\cos x = -\frac{4}{5}$, pentru arcul $143^{\circ}7'50''$ suplimentar celui dintâi, ceea ce trebuia, căci cosinusurile a două arce suplimentare sunt egale și de semne contrarii.

Celelalte linii trigonometrice sunt

$$\operatorname{cot} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{cot} x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4},$$

valoarea $\frac{3}{4}$ corespunzând arcului din cadranul întâi, iar $-\frac{3}{4}$ celui din cadranul al doilea, suplimentului său. De asemenea,

$$\operatorname{cot} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{cot} x = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3},$$

$\frac{4}{3}$ și $-\frac{4}{3}$ corespunzând respectiv arcelor din cadranul întâi și suplimentului său.

II. Să se găsească arcele x cuprinse între 0° și 180° , care verifică ecuația trigonometrică

$$2 \sin^2 x - 5 \cos x - 4 = 0.$$

Să se calculeze apoi celelalte linii trigonometrice.

Înlocuind pe $\sin^2 x$ cu $1 - \cos^2 x$, ecuația devine

$$2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x - 4 = 0,$$

de unde

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0.$$

Ecuația fiind de gradul al doilea în $\cos x$, rezolvând-o, avem

$$\cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}.$$

Avem deci două cazuri de considerat

$$\cos x = \frac{-5 + 3}{4} = \frac{-1}{2}, \quad \cos x = \frac{-5 - 3}{4} = -2.$$

Cosinusul unui unghi fiind cuprins între -1 și $+1$, nu se poate să avem $\cos x = -2$. Rămâne numai de considerat

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

Dar, cosinusul fiind negativ, arcul x este în cadranul al doilea. Să calculăm deci $\cos y = \frac{1}{2}$ și atunci x este suplimentul lui y , $x = 180^\circ - y$. Însă pentru arcul y din cadranul întâi, avem

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y, \quad \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ adică } y = 60^\circ. \text{ Deci } x = 180^\circ - y = 120^\circ.$$

Celelalte linii trigonometrice sunt

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

și am luat numai semnul $+$ înaintea radicalului, căci x fiind în cadranul al doilea sinusul este pozitiv. Apoi

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

III. Să se afle arcele x , mai mici decât 180° , care verifică ecuația

$$4 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x = 1.$$

Să se afle apoi celelalte linii trigonometrice.

Înlocuind $\cotgx = \frac{tgx}{1}$, ecuația devine

$$4 \operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} - 1 = 0, \quad 4 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Ecuația obținută fiind de gradul al doilea în $\operatorname{tg} x$, avem

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8}.$$

Avem două cazuri de considerat

$$\operatorname{tg} x = \frac{1+7}{8} = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1-7}{8} = \frac{-3}{4}.$$

În cazul întâi, $\operatorname{tg} x = 1$, arcul $x = 45^\circ$. În cazul al doilea, $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, urmează că arcul x este în cadranul al doilea. Să calculăm arcul y din cadranul întâi, pentru care $\operatorname{tg} y = \frac{3}{4}$, și atunci $x = 180^\circ - y$. Aplicând logaritmi, avem

$$\log \operatorname{tg} y = \log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = 0,47712 - 0,60206,$$

$$\log \operatorname{tg} y = 0,47712 + 1,39794 = 0,87506, \quad y = 36^\circ 52' 10''.$$

$$\text{Deci} \quad x = 180^\circ - y = 143^\circ 7' 50''.$$

Să aflăm celelalte linii trigonometrice, când $\operatorname{tg} x = 1$, și $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$. În primul caz, $\operatorname{tg} x = 1$, se știe că $x = 45^\circ$, $\sin x = \cos x$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cotgx = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Când $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, pentru a afla pe $\sin x$ și $\cos x$, aplicăm formulele cunoscute (No. 13, 30)

$$\sin a = \frac{\operatorname{tga}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}.$$

Dar, am văzut că la stabilirea acestor formule, prin extragerea rădăcinii pătrate, intervenea dublul semn, \pm , înaintea rădicalului, ceea ce trebuia. În adevăr, arcul x pentru care $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ fiind în cadranul al doilea, avem $\sin x > 0$, iar $\cos x < 0$, și cum $\operatorname{tg} x < 0$, urmează că trebuie să luăm

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}},$$

astfel ca raportul cu care este egal $\sin x$ să fie pozitiv, iar raportul ce dă pe $\cos x$ să fie negativ.

Înlocuind pe $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, avem

$$\sin x = \frac{-\frac{3}{4}}{-\sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos x = \frac{1}{-\sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = -\frac{1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$$

EXERCIȚII.

1. Să se calculeze cu ajutorul logaritmiilor

$$\sin 149^\circ 42' 25'', \cos 95^\circ 17' 7'', \operatorname{tg} 116^\circ 52' 32''.$$

R. $y = \sin 149^\circ 42' 25'' = \sin(180^\circ - 149^\circ 42' 25'') = \sin 30^\circ 17' 35''$,

$$\log y = \log \sin 30^\circ 17' 35'' = \bar{1},70279, y = 0,504112.$$

$\cos 95^\circ 17' 7'' = -\cos 84^\circ 42' 53'', z = \cos 84^\circ 42' 53'' = 0,092115$,

$$\cos 95^\circ 17' 7'' = -0,092115; \operatorname{tg} 116^\circ 52' 32'' = -1,97318.$$

2. Să se rezolve ecuația

$$4(1 + \cos x) = 3 \sin^2 x.$$

$x < 180^\circ$. Să se afle celelalte linii trigonometrice.

$$\text{R. } 3 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0; \cos x = -1, \cos x = -\frac{1}{3}.$$

$$\cos x = -1, x = 180^\circ. \cos y = \frac{1}{3}, x = 180^\circ - y;$$

$$\log \cos y = -\log 3 = \bar{1},52288, y = 70^\circ 31' 43'', x = 109^\circ 28' 17''.$$

$$\text{Pentru } \cos x = -\frac{1}{3}, \sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}.$$

3. Să se calculeze $x < 180^\circ$, pentru care avem $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{5}$.

$$\text{R. } \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{5}, y = 19^\circ 6' 23'', x = 180^\circ - y.$$

RELAȚIUNI FUNDAMENTALE ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI.

36. Un triunghi oarecare ABC are trei laturi care se notează cu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ și trei unghiuri $\sphericalangle CAB = A$, $\sphericalangle ABC = B$, $\sphericalangle BCA = C$. Aceste trei unghiuri pot fi toate ascuțite, sau unul obtus și două ascuțite. Suma unghiurilor este 180° astfel că dacă cunoaștem două dintre ele, pe al treilea îl aflăm scăzând suma lor din 180° .

În rezolvarea triunghiurilor oarecare avem deci de considerat trei laturi și două unghiuri, și pentru al putea rezolva, avem nevoie de trei elemente. Celelalte două elemente necunoscute le calculăm cu relațiile ce există între laturile și unghiurile triunghiului oarecare.

Nu pot exista mai mult de trei relații distincte între laturile a, b, c , și unghiurile A, B, C , ale unui triunghi oarecare, căci, dacă ar fi, de ex., patru relații distincte între elementele a, b, c, A, B, C , eliminarea elementelor A, B, C , ar conduce la o relație între laturile a, b, c . Ar urma că, dacă se cunosc două laturi ale unui triunghi, să se poată afla și a treia; dar aceasta este absurd.

În cele ce urmează vom stabili relațiile fundamentale dintre elementele unui triunghi oarecare.

37. În orice triunghi laturile sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse. Să considerăm triunghiul ABC și fie CD înălțimea din C . Avem două cazuri de considerat.

1^o. Unghiurile A și B ascuțite (Fig. 15). În acest caz punctul D este situat între A și B . Din triunghiurile dreptunghice ADC și CDB , avem respectiv $CD = AC \sin A$, $CD = CB \sin B$, pe care egalându-le, avem

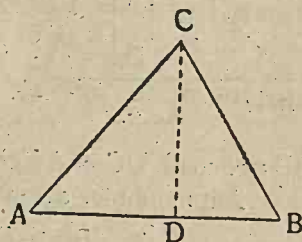


Fig. 15.

$$AC \sin A = CB \sin B,$$

sau

$$b \sin A = a \sin B,$$

de unde

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

2^o. Când A este obtus și B ascuțit (Fig. 16), avem din triunghiurile ADC, CDB ,

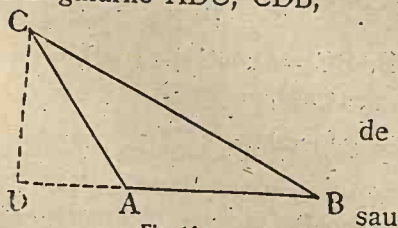


Fig. 16.

$$CD = AC \sin DAC =$$

$$b \sin(180^\circ - A) = b \sin A,$$

$$CD = CB \sin B = a \sin B,$$

de unde, egalându-le, obținem

$$b \sin A = a \sin B,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Relația obținută este deci adevărată în toate cazurile și are loc între două laturi și sinusurile unghiurilor opuse.

În mod analog, obținem

$$\frac{b}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

iar toate se pot scrie sub forme de rapoarte,

$$(XIII) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

care exprimă că într'un triunghi oarecare *laturile sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse*.

Aceste relațiuni se mai zic și *teorema sinusurilor*.

38. Relația dintre trei laturi și două unghiuri.

I. Vom stabili mai întâi *relația între cele trei laturi și două unghiuri* pentru ca apoi să găsim relațiunile căutate. Avem două cazuri de considerat.

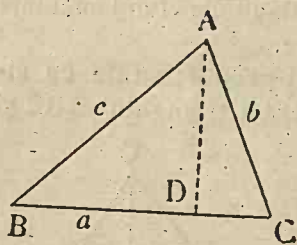


Fig. 17.

1^o. Când unghiurile B și C sunt ambele ascuțite (Fig. 17). Fie AD înălțimea din vârful A al triunghiului ABC. Avem din triunghiurile dreptunghice ADB, ADC, $BD = AB \cos B$,

$$BD = c \cos B, \quad DC = AC \cos C, \quad DC = b \cos C.$$

Adunându-le, avem

$$BD + DC = c \cos B + b \cos C,$$

sau

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

2^o. Când unghiul B este obtus și C ascuțit, avem (Fig. 18)

$$DC = AC \cos C = b \cos C,$$

$$DB = AB \cos DBA =$$

$$c \cos (180^\circ - ABC) = -c \cos B.$$

Scăzându-le avem

$$DC - DB = b \cos C + c \cos B, \quad BC = b \cos C + c \cos B,$$

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Deci relațiunea stabilită este generală.

Așa dar am găsit relațiile

(XIV)

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

$$b = c \cos A + a \cos C,$$

$$c = a \cos B + b \cos A,$$

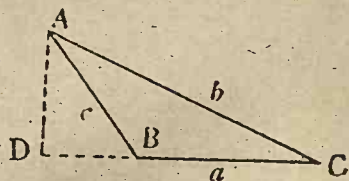


Fig. 18.

care se pot deduce una din alta prin permutări circulare (Fig. 19), înlocuind în prima, de ex., pe a, b, c cu b, c, a , pe A, B, C , cu B, C, A , etc., cum arată sensul săgeților.

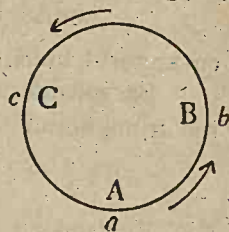


Fig. 19.

Aceste relații exprimă că într'un triunghi o latură este egală cu suma celorlalte două, înmulțite fiecare respectiv cu cosinusul unghiului ce accastă latură face cu latura considerată.

II. Din aceste relații se pot deduce altele în modul următor. Să le înmulțim, prima cu a , a doua cu b , a treia cu c ; avem

$$a^2 = ab \cos C + ac \cos B,$$

$$b^2 = bc \cos A + ba \cos C,$$

$$c^2 = ac \cos B + bc \cos A.$$

Să le adunăm acum pe primele două obținute; avem

$$a^2 + b^2 = ab \cos C + ac \cos B + bc \cos A + ba \cos C,$$

sau

$$a^2 + b^2 = 2ab \cos C + ac \cos B + bc \cos A.$$

Ținând seamă de ultima din noile relații obținute, avem

$$a^2 + b^2 = 2ab \cos C + c^2,$$

de unde

(XV)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Aceasta este o relație dintre trei laturi a, b, c și unghiul C , și fiindcă conține $\cos C$, se zice teorema cosinus.

Permutând circular pe a, b, c, A, B, C , mai obținem relațiile

(XVI)

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \end{cases}$$

care se exprimă zicând că în orice triunghi pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, minus de două ori produsul acelor laturi prin cosinusul unghiului cuprins între ele.

Operațiuni asupra arcelor.

39. În aplicațiile Trigonometriei intervin liniile trigonometrice ale sumei, diferenței, multiplilor și fracțiunilor de unghiuri. Suntem deci conduși să stabilim acestea cu ajutorul liniilor trigonometrice ale arcelor date.

40. Adunarea arcelor. I. A și B fiind două unghiuri ale

unui triunghi oarecare, să calculăm

$$\sin(A+B), \cos(A+B), \operatorname{tg}(A+B), \operatorname{cotg}(A+B)$$

cu ajutorul liniilor trigonometrice ale unghiurilor A și B .

Să considerăm relațiile cunoscute între laturile și unghiurile triunghiului

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Egalând cu k valoarea comună a acestor rapoarte, avem

$$\frac{a}{\sin A} = k, \quad a = k \sin A, \quad b = k \sin B, \quad c = k \sin C.$$

Înlocuind pe a, b, c cu valorile lor în relația

$$c = a \cos B + b \cos A,$$

avem

$$k \sin C = k \sin A \cos B + k \sin B \cos A,$$

și simplificând cu k , obținem

$$(1) \quad \sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

Dar, din relația $A+B+C = 180^\circ$, avem

$$C = 180^\circ - (A+B), \quad \sin C = \sin(A+B).$$

Înlocuind în (1) pe $\sin C$ cu egalul său, obținem

$$(2) \quad \sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A,$$

care este prima relație căutată, ce dă valoarea lui $\sin(A+B)$ în funcțiune de sinusul și cosinusul unghiurilor A și B .

II. Am văzut cum am obținut relația (1)

$$\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

La fel puteam avea și

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B,$$

care se poate scrie

$$\sin A - \cos B \sin C = \sin B \cos C.$$

Înlocuind aici pe $\sin C$ cu valoarea sa din (1), obținem

$$\sin A - \cos B (\sin A \cos B + \sin B \cos A) = \sin B \cos C.$$

Dezvoltând, avem

$$\sin A - \sin A \cos^2 B - \cos B \sin B \cos A = \sin B \cos C,$$

$$\sin A (1 - \cos^2 B) - \cos B \sin B \cos A = \sin B \cos C,$$

$$\sin A \sin^2 B - \cos B \sin B \cos A = \sin B \cos C.$$

Unghiul B fiind cuprins între 0° și 180° , $\sin B \neq 0$, deci putem simplifica cu $\sin B$, și avem

sau
$$\sin A \sin B - \cos B \cos A = \cos C,$$

$$\cos C = \sin A \sin B - \cos B \cos A.$$

Dar $C = 180^\circ - (A+B)$, deci

$$\cos C = -\cos(A+B).$$

Înlocuind în pe $\cos C$ în relația de mai sus, avem

$$-\cos(A+B) = \sin A \sin B - \cos B \cos A,$$

și schimbând semnele, obținem

$$(3) \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

care este a doua relație căutată, ce dă valoarea lui $\cos(A+B)$ în funcțiune de sinusul și cosinusul unghiurilor A și B .

III. Pentru a obține pe $\operatorname{tg}(A+B)$, să împărțim relațiile (2) și (3) și avem

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}.$$

Împărțind ambii termeni ai fracției cu $\cos A \cos B$, obținem

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}},$$

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{1 - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}},$$

$$(4) \quad \operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}.$$

IV. Pentru $\operatorname{cotg}(A+B)$, împărțim relația (3) cu (2), și obținem

$$\operatorname{cotg}(A+B) = \frac{\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B - 1}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}.$$

41. Demonstrarea geometrică a teoremei de adunare.

Am obținut liniile trigonometrice ale sumei a două unghiuri pe cale algebrică. În cele ce urmează vom da o demonstrație geometrică a formulilor obținute.

I. Fie (Fig. 20) $AB = a$, $BC = b$. Să ducem CI perpendi-

culară pe OB și IL, BP, CQ perpendiculare pe A'A, iar IH perpendiculară pe CQ.

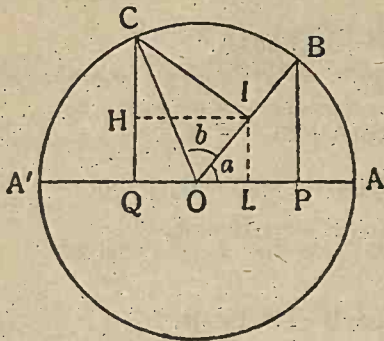


Fig. 20.

Se vede că

$$BP = \sin a, OP = \cos a,$$

$$OI = \cos b, CI = \sin b,$$

$$CQ = \sin(a+b),$$

$$\text{Dar } CQ = CH + HQ,$$

$$CQ = CH + IL,$$

$$(5) \quad \sin(a+b) = CH + IL.$$

Triunghiurile CHI și OBP sunt asemenea, căci au unghiurile egale (ca având laturile perpendiculare). Deci

$$\frac{CH}{OP} = \frac{CI}{OB}, \quad CH = \frac{OP \cdot CI}{OB}, \quad CH = \cos a \sin b.$$

Apoi, triunghiurile OLI și OBP având IL paralelă cu BP, sunt asemenea. De unde

$$\frac{IL}{BP} = \frac{OI}{OB}, \quad IL = \frac{BP \cdot OI}{OB}, \quad IL = \sin a \cdot \cos b.$$

Înlocuind în (5) pe CH și IL ca valorile găsite, avem

$$(6) \text{ (XVII)} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

II. De asemenea, avem (Fig. 20)

$$QO = QL - OL, \quad QO = HI - OL.$$

Cum $\cos(a+b) = OQ$, urmează că QO care este de sens contrar cu OQ, va fi egală cu $-OQ$ și deci $QO = -\cos(a+b)$ și înlocuind în relația ce dă pe QO, avem

$$(7) \quad -\cos(a+b) = HI - OL.$$

Din triunghiurile asemenea CHI și OBL, obținem

$$\frac{HI}{BP} = \frac{CI}{OB}, \quad HI = \frac{BP \cdot CI}{OB}, \quad HI = \sin a \sin b.$$

În mod analog, din triunghiurile asemenea OLI și OPB, avem

$$\frac{OL}{OP} = \frac{OI}{OB}, \quad OL = \frac{OP \cdot OI}{OB}, \quad OL = \cos a \cos b.$$

Înlocuind în (7) pe HI și OL cu valorile găsite mai sus, obținem

$$-\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b,$$

sau, schimbând semnele,

$$(8) \text{ (XVIII)} \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Am obținut deci, pe cale geometrică valorile $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ în funcție de liniile trigonometrice ale arcelor a și b .

Formulele (6) și (8) ne exprimă teorema de adunare pentru sinus și cosinus.

42. **Scăderea arcelor.** Schimbând în formulele (6) și (8) pe b în $-b$, avem

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \sin a \sin(-b) + \sin(-b) \cos a, \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b). \end{aligned}$$

Dar $\sin(-a) = -\sin a$, $\cos(-a) = \cos a$, $\sin(-b) = -\sin b$, $\cos(-b) = \cos b$. Deci relațiile precedente devin

$$(XIX) \quad \begin{aligned} \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a, \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Aceste relații ne dau \sin și \cos diferenței a două unghiuri a și b cu ajutorul \sin și \cos unghiurilor a și b .

Pentru a găsi pe cea referitoare la tangentă, sau putem împărți aceste relații, sau să înlocuim în

$$(XX) \quad \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b}$$

pe b cu $-b$ și avem

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}(-b)}, \quad (XXI) \quad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b}.$$

În mod analog, obținem

$$\operatorname{cotg}(a-b) = \frac{\operatorname{cotg}a \operatorname{cotg}b + 1}{\operatorname{cotg}b - \operatorname{cotg}a}.$$

43. **Aplicații.** I. Să se calculeze $\sin 75^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\operatorname{tg} 75^\circ$.
Avem $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2 \cdot 2} + \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1),$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2 \cdot 2} + \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1).$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{3-1} = 2+\sqrt{3}.$$

II (*). În mod analog se calculează liniile trigonometrice ale unei sume de mai multe unghiuri. De ex.,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \\ &\quad \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma, \\ \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \cos \gamma + \\ &\quad + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \sin \gamma, \\ \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma + \\ &\quad \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.\end{aligned}$$

Tot astfel

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) &= \operatorname{tg}[(\alpha + \beta) + \gamma] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \gamma}, \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg} \gamma},\end{aligned}$$

simplificând cu $1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$, avem

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha}.$$

44. Înmulțirea arcelor. În expresiunile liniilor trigonometrice a sumei a două unghiuri,

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a, \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b,\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

să facem $b = a$. Avem

$$\begin{aligned}\sin 2a &= 2 \sin a \cos a, \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a, \\ \operatorname{tg} 2a &= \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.\end{aligned}$$

Mai putem exprima sub alte forme $\cos 2a$. În adevăr, avem

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a, \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1,\end{aligned}$$

(*) Nu face parte din program.

adică

$$(XXIII) \quad \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a, \quad \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1.$$

Cum am presupus $a + b < 180^\circ$, urmează că $2a < 180^\circ$,
adică unghiul a este ascuțit.

Observare (*). Dacă am voi să calculăm liniile trigonometrice ale
unghiului $3a$, procedăm astfel

$$\begin{aligned} \sin 3a &= \sin(2a + a) = \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a, \\ \sin 3a &= (2 \sin a \cos a) \cos a + (\cos^2 a - \sin^2 a) \sin a, \\ \sin 3a &= 2 \sin a \cos^2 a + \sin a \cos^2 a - \sin^3 a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a, \\ \sin 3a &= 3 \sin a (1 - \sin^2 a) - \sin^3 a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a, \\ \sin 3a &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a. \end{aligned}$$

De asemenea,

$$\begin{aligned} \cos 3a &= \cos(2a + a) = \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a, \\ \cos 3a &= (\cos^2 a - \sin^2 a) \cos a - (2 \sin a \cos a) \sin a, \\ \cos 3a &= \cos^3 a - 3 \sin^2 a \cos a = \cos^3 a - 3(1 - \cos^2 a) \cos a, \\ \cos 3a &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a. \end{aligned}$$

Tot astfel,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 3a &= \operatorname{tg}(2a + a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \operatorname{tg} a}, \\ \operatorname{tg} 3a &= \frac{2 \operatorname{tg} a + (1 - \operatorname{tg}^2 a) \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a - 2 \operatorname{tg}^2 a} = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}. \end{aligned}$$

45. *Impărțirea arcelor.* 1°. Fiind cunoscut $\cos a$, să ex-
primăm cu ajutorul acestuia liniile trigonometrice ale unghiului
pe jumătate $\frac{1}{2} a$.

Avem formula fundamentală

$$(9) \quad \cos^2 b + \sin^2 b = 1$$

și pe cea arătată mai sus

$$(10) \quad \cos^2 b - \sin^2 b = \cos 2b.$$

Adunând aceste două relații, se obține

$$2 \cos^2 b = 1 + \cos 2b.$$

Făcând în aceasta pe b egal cu $\frac{1}{2} a$, avem

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} a = 1 + \cos 2 \frac{1}{2} a,$$

(* Nu face parte din program.

$$(XXIV) \quad 2 \cos^2 \frac{1}{2} a = 1 + \cos a.$$

De unde

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 + \cos a}{2},$$

$$(XXV) \quad \cos \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

Scăzând relațiile (9) și (10), avem

$$2 \sin^2 b = 1 - \cos^2 b.$$

Făcând pe $b = \frac{1}{2} a$, obținem

$$(XXVI) \quad 2 \sin^2 \frac{1}{2} a = 1 - \cos a,$$

$$(XXVII) \quad \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}.$$

Împărțind formulele (XXVII) și (XXV), avem

$$\frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}},$$

$$(XXVIII) \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

EXERCIȚII.

1. Să se calculeze $\cos 75^\circ$, $\operatorname{tg} 105^\circ$ cu ajutorul liniilor trigonometrice ale arcelor 30° , 45° , 60° .

$$R. \quad 75^\circ = 45^\circ + 30^\circ, \quad 105^\circ = 60^\circ + 45^\circ; \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1),$$

$$\operatorname{tg} 105^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}.$$

2. Știind că $\cos a = \frac{1}{9}$ și că unghiul este cuprins între 90° și 180° , să se calculeze $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

$$R. \quad \frac{a}{2} \text{ este cuprins între } 45^\circ \text{ și } 90^\circ; \quad \sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. Să se verifice identitățile

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin(a-b) \cos b + \sin b \cos(a-b), \\ \cos a &= \cos(a+b) \cos b + \sin(a+b) \sin b.\end{aligned}$$

R. Sau se dezvoltă membrii al doilea, sau se observă că $a = (a-b) + b$ și $a = (a+b) - b$ pentru a doua.

4. Să se verifice identitatea

$$\sin 2a = (1 - \cos 2a) \cot a.$$

R. $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$.

Să se verifice identitatea

$$\cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$$

R. Se înlocuiește $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$.

6. Să se verifice identitatea

$$\sin(a+b) \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

R. Se dezvoltă $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$ și se obține $\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \sin^2 a)$.

7. $\cos a + \cos(120^\circ - a) + \cos(120^\circ + a) = 0$.

R. Însemnând cu E valoarea membrului întâi, avem dezvoltând

$$E \equiv \cos a + 2 \cos 120^\circ \cos a = \cos a - 2 \cos 60^\circ \cos a = \cos a - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos a = 0.$$

8. $\operatorname{tg}(45^\circ + a) - \operatorname{tg}(45^\circ - a) = 2 \operatorname{tg} 2a$.

R. Se dezvoltă, și avem

$$\frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a} - \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a} = \frac{(1 + \operatorname{tg} a)^2 - (1 - \operatorname{tg} a)^2}{(1 + \operatorname{tg} a)(1 - \operatorname{tg} a)} = 2 \frac{2 \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = 2 \operatorname{tg} 2a.$$

9. $4 \sin a \cos^3 a - 4 \cos a \sin^3 a = \sin 4a$.

R. $4 \sin a \cos a (\cos^2 a - \sin^2 a) = 2 \sin 2a \cos 2a = \sin 4a$.

10. $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a$.

R. $E \equiv (\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} a) - \operatorname{tg} 2a = \frac{\sin 3a}{\cos 3a} - \frac{\sin a}{\cos a} - \operatorname{tg} 2a =$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(3a-a)}{\cos 3a \cos a} - \operatorname{tg} 2a &= \frac{\sin 2a}{\cos 3a \cos a} - \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\sin 2a (\cos 2a - \cos 3a \cos a)}{\cos a \cos 2a \cos 3a} = \\ &= \frac{\sin 2a [\cos(3a-a) - \cos 3a \cos a]}{\cos a \cos 2a \cos 3a} = \frac{\sin 2a (\cos 3a \cos a + \sin 3a \sin a - \cos 3a \cos a)}{\cos a \cos 2a \cos 3a} = \\ &= \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 3a.\end{aligned}$$

FORMULE CALCULABILE PRIN LOGARITMI.

Una din aplicațiunile interesante a teoremei de adunare a liniilor trigonometrice, este transformarea sumelor sau diferen-

țelor ce figurează în expresiunile trigonometrice, în produse și cături, care se pot calcula prin logaritmi. Dacă această operație e posibilă, formulele se zic calculabile prin logaritmi.

46. Transformarea sumei și diferenței liniilor trigonometrice în produse. I. În formulele

$$(1) \quad \begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a, \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a, \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, \end{aligned}$$

să punem

$$a+b=p, \quad a-b=q.$$

De unde, prin adunare și scădere, avem

$$a = \frac{p+q}{2}, \quad b = \frac{p-q}{2}.$$

Adunând și scăzând primele două din relațiile (1), avem

$$(2) \quad \begin{aligned} \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin a \cos b, \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2 \sin b \cos a, \end{aligned}$$

Adunând și scăzând ultimele două din relațiile (1), obținem

$$(3) \quad \begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b, \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Înlocuind în (2) și (3) pe $(a+b)$, $(a-b)$, a și b cu valorile lor cu ajutorul lui p și q , obținem

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

(XXIX)

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

Aceste relațiuni exprimă că: suma sinusurilor a două arce este egală cu de două ori sinusul semisumei arcelor înmulțit prin cosinusul semidiferenței lor. Diferența sinusurilor a două arce este egală cu de două ori sinusul semidiferenței arcelor (dintre arcul întâi și al doilea) înmulțit prin cosinusul semisumei. Suma cosinusurilor a două arce este egală cu

de două ori cosinusul semi sumei arcelor înmulțit cu cosinusul semidiferenței. Diferența cosinusurilor a două arce este egală cu minus de două ori sinusul semi sumei arcelor înmulțit prin sinusul semidiferenței lor (dintre arcul întâi și al doilea).

Aceste ultime patru relații ne permit a transforma o sumă de două sinusuri sau cosinusuri într'un produs de factori.

II. Pentru tangentă, avem

$$\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b},$$

$$\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}.$$

La fel,

$$\operatorname{tga} - \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b},$$

$$\operatorname{cotga} + \operatorname{cotb} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}, \quad \operatorname{cotga} - \operatorname{cotb} = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}.$$

II. Se pot indica o mulțime de exemple de astfel de transformări. Vom considera numai unele din cele mai importante.

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \operatorname{cotg} \frac{a-b}{2},$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2},$$

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{2 \cos \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2},$$

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = \frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{-2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}} = -\operatorname{cotg} \frac{a+b}{2} \operatorname{cotg} \frac{a-b}{2},$$

$$\sin a + \cos b = \sin a + \sin(90^\circ - b) =$$

$$2 \sin \frac{a+90^\circ-b}{2} \cos \frac{a-90^\circ+b}{2},$$

$$1 + \sin a = \sin 90^\circ + \sin a = 2 \sin \frac{90^\circ+a}{2} \cos \frac{90^\circ-a}{2},$$

$$1 - \sin a = \sin 90^\circ - \sin a = 2 \sin \frac{90^\circ-a}{2} \cos \frac{90^\circ+a}{2}.$$

$$1 + \cos a = \cos 0^\circ + \cos a = 2 \cos \frac{0^\circ + a}{2} \cos \frac{0^\circ - a}{2} =$$

$$2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2 \cos^2 \frac{a}{2},$$

$$1 - \cos a = \cos 0^\circ - \cos a = -2 \sin \frac{0^\circ + a}{2} \sin \frac{0^\circ - a}{2} =$$

$$-2 \sin \frac{a}{2} \sin \left(-\frac{a}{2}\right) = 2 \sin^2 \frac{a}{2},$$

$$1 + \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} a = \frac{\sin(45^\circ + a)}{\cos 45^\circ \cos a} =$$

$$\frac{\sin(45^\circ + a)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a} = \frac{2 \sin(45^\circ + a)}{\sqrt{2} \cos a},$$

$$1 - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} a = \frac{\sin(45^\circ - a)}{\cos 45^\circ \cos a} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ - a)}{\cos a}.$$

47. **Funcțiuni circulare directe și inverse.** Considerând unghiul a , $\sin a$, de ex., se zice o funcțiune circulară directă. Punând, în general, $y = \sin x$, y se zice o funcțiune circulară directă, iar x se zice arc $\sin y$ (arcul al cărui sinus este y) și este o funcțiune circulară inversă.

Tot așa, când avem $y = \operatorname{tg} x$, x se zice arc $\operatorname{tg} y$, sau arcul a cărui tangentă este y . Când avem $y = \cos x$, x se zice arc $\cos y$ și x este o funcțiune circulară inversă de y .

48. **Aplicații. I. Să se verifice identitatea**

$$(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4 \cos^2 \frac{a-b}{2}.$$

Înlocuind sumele prin produse, avem

$$\left(2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}\right)^2 =$$

$$4 \cos^2 \frac{a-b}{2} \left(\cos^2 \frac{a+b}{2} + \sin^2 \frac{a+b}{2}\right) = 4 \cos^2 \frac{a-b}{2}.$$

II. Dacă $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, să se arate că avem identitatea condițională

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$E \equiv \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma,$$

$$E \equiv 2 \sin \left(\frac{180^\circ - \gamma}{2}\right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} =$$

$$\begin{aligned}
& 2\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \\
E & \equiv 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right], \\
E & \equiv 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{180-(\alpha+\beta)}{2}\right] = \\
& 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right], \\
E & \equiv 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \\
E & \equiv 2\cos\frac{\gamma}{2}2\cos\frac{\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}}{2}, \\
E & \equiv 4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{-\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

III. Să se arate că având în vedere numai unghiuri ascuțite, avem

$$\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5} = 90^\circ.$$

Insemnăm cu

$$\alpha = \arcsin\frac{3}{5}, \quad \beta = \arcsin\frac{4}{5};$$

de unde

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{3}{5}.$$

Membrul întâi al egalității este $(\alpha + \beta)$. Luând sinusul acestui unghi, avem

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{25}{25} = 1,$$

ceea ce probează că unghiul $(\alpha + \beta)$ este 90° , căci sinusul său este egal cu 1.

EXERCITII.

1. Să se probeze, în cazul unghiurilor ascuțite,

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

R. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$. Se ia tangenta membrului întâi și avem

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1; \quad \alpha + \beta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

2. Să se arate că avem

$$\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha}$$

3. Să se probeze că avem

$$\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

R. $E \equiv [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)],$

$$E \equiv 2\sin \frac{(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)}{2} \cos \frac{(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)}{2} = 2\sin \beta \cos \alpha.$$

4. Să se arate că dacă $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, avem

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

R. $E \equiv (\cos \alpha - 1) + \cos \beta + \cos \gamma = -2\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} =$

$$-2\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2},$$

$$E \equiv 2\sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right] = 2\sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right).$$

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR OARECARE.

49. Am văzut că am obținut între elementele unui triunghi oarecare relațiuni fundamentale. Acestea au fost găsite nu întâmplător, ci din nevoia de a rezolva unele din cazurile referitoare la triunghiurile oarecare, când se dau anumite elemente și se cer celelalte.

Considerând și alte cazuri de rezolvare a triunghiurilor, se mai întâlnesc și alte relațiuni, unghiuri în funcție de laturi pe care la vom stabili în cele ce urmează.

50. Relația dintre suma și diferența a două laturi și între tangentele jumătăților sumei și diferenței unghiurilor opuse. Din relațiile cunoscute

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

deducem

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B'}$$

și transformând termenii raportului al doilea în expresiuni calculabile prin logaritmi, avem

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}$$

Dar

$$\frac{A+B}{2} = \frac{180-C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2};$$

deci
$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \operatorname{cotg} \frac{C}{2},$$

așa că formula precedentă devine

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}$$

sau

$$(XXX) \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

În mod analog se obțin

$$(XXXI) \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C+A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{C-A}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \operatorname{cotg} \frac{B}{2}.$$

Formulele stabilite se mai zic *formulele lui Napier*.

51. Unghiuri în funcție de laturi. Din formula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

avem

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Știm însă că

$$(1) \quad 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}, \quad 1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}.$$

Înlocuind, avem

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$(2) \quad 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$$

Înlocuind pe $\cos A$ în formula a doua din (1), avem

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$(3) \quad 2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c - a)(b + c + a)}{2bc},$$

Să însemnăm cu $2p$ perimetrul triunghiului ABC, adică

$$2p = a + b + c.$$

Scăzând $2a$ din ambii membrii, avem

$$2p - 2a = a + b + c - 2a,$$

sau

$$2(p - a) = -a + b + c,$$

În mod analog obținem

$$(4) \quad p - b = \frac{a - b + c}{2}, \quad p - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

Înlocuind valorile lui $a + b + c = 2p$, $-a + b + c = 2(p - a)$, $a - b + c = 2(p - b)$, $a + b - c = 2(p - c)$, relațiile (2) și (3) devin

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2(p - c)2(p - b)}{2bc}, \quad 2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p2(p - a)2p}{bc}.$$

sau

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p - b)(p - c)}{bc}, \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p - a)}{bc}.$$

Extrăgând rădăcina pătrată, avem

$$(XXXII) \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}.$$

Împărțindu-le, deducem

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc} \cdot \frac{bc}{p(p - a)}}$$

$$(XXXIII) \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

și altele analoge

$$(XXXIV) \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

52. **Cazul I.** Să se rezolve un triunghi când se cunosc două unghiuri și o latură opusă la unul din unghiuri. Fie că se cunosc unghiurile B, C și latura c . Avem $A = 180^\circ - (B + C)$, iar latura b o calculăm cu relația

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

de unde

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

Pentru latura a , aplicăm relația

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

de unde

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C,$$

$$\log a = \log c + \log \sin B - \log \sin C,$$

de unde putem calcula pe a și b .

Exemplu. În triunghiul ABC se cunosc $B = 55^\circ 43' 18''$, $C = 72^\circ 12' 35''$ și $c = 788$ m; să se calculeze unghiul A și laturile a și b .

Avem

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - 127^\circ 55' 53'' = 52^\circ 4' 7'',$$

$$a = \frac{788 \sin 52^\circ 4' 7''}{\sin 72^\circ 12' 35''}, \quad b = \frac{788 \sin 55^\circ 43' 18''}{\sin 72^\circ 12' 35''}.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log a = \log 788 + \log \sin 52^\circ 4' 7'' - \log \sin 72^\circ 12' 35'',$$

$$\log b = \log 788 + \log \sin 55^\circ 43' 18'' - \log \sin 72^\circ 12' 35''.$$

Dar

$$\log 788^\circ = 2,89653,$$

$$\log \sin 52^\circ 4' 7'' = \bar{1},89694,$$

$$\log \sin 55^\circ 43' 18'' = \bar{1},91714,$$

$$\log \sin 72^\circ 12' 35'' = \bar{1},97872.$$

Deci

$$\log a = 2,89653 + \bar{1},89694 - \bar{1},97872,$$

$$\log a = 2,89653 + \bar{1},89694 + 0,02128 = 2,81475,$$

$$a = 652,74 \text{ m.}$$

De asemenea,

$$\log b = 2,89653 + \bar{1},91714 - \bar{1},97872,$$

$$\log b = 2,89653 + \bar{1},91714 + 0,02128 = 2,83495,$$

$$b = 683,83.$$

53. **Cazul II.** Să se rezolve un triunghi când ce cunosc două laturi și unghiul opus uneia dintre ele. Dacă se cunosc a, c, A , aplicăm formula

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

de unde

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}.$$

Însemnând cu C unghiul ascuțit al cărui sinus este dat de formula aceasta, vedem că și $(180^\circ - C)$ are același sinus ca și C , și deci se obțin, în general, în acest caz, două valori pentru C , un unghi ascuțit și unul obtus. Să vedem care din aceste două soluții corespund cazului considerat.

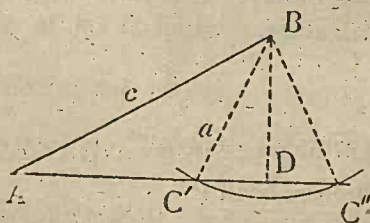


Fig. 21.

Construcția geometrică a unui astfel de triunghi se face în modul următor. În punctul A (Fig. 21) se face unghiul dat A ; se ia pe una din laturi lungimea $AB = c$ și din punctul B ca centru, cu o rază egală cu lungimea laturii a , se descrie un cerc care, sau taie a doua latură a unghiului A în două puncte C' și C'' , sau este tangent acestei laturi în punctul D , sau nu o taie, după cum a este mai mare ca BD , sau $a = BD$, sau $a < BD$. Prin urmare, corespund două triunghiuri, în general, sau ABC' , sau ABC'' , sau numai unul ABD , sau nici unul.

Unghiul C fiind dat cu relația

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a},$$

trebuie observat de la început că problema este posibilă numai dacă

$$c \sin A < a,$$

căci numai atunci raportul $\frac{c \sin A}{a}$ este mai mic decât 1 și astfel valoarea lui C există; în caz contrar, $c \sin A > a$, atunci $\frac{c \sin A}{a} > 1$, $\sin C > 1$, ceea ce este absurd. Aceasta înseamnă că, pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca $a > c \sin A$, $a > BD$.

Avem deci mai multe cazuri de considerat. 1°. Dacă $a > c$ (Fig. 22), în cazul când A este ascuțit, avem soluția ABC'' , iar în cazul când unghiul A este obtus, corespunde triunghiul $C'AB$. Așa dar, dacă $a > c$, elementele triunghiului se determină numai într'un fel (univoc).

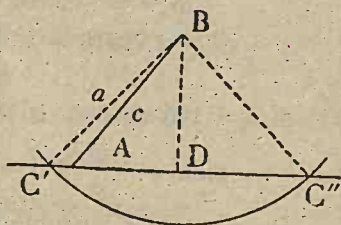


Fig. 22.

2°. Dacă $a = c$, sau $a = c \sin A$, rezolvarea triunghiului oarecare se reduce la rezolvarea triunghiului isoscel sau drept-unghic.

3°. Dacă $a < c$ și $a < c \sin A$, ar urma $\frac{a}{\sin A} < c$, și cum $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, ar trebui ca $\frac{c}{\sin C} < c$, $\frac{1}{\sin C} < 1$, $\sin C > 1$, ceea ce nu se poate. Aceasta se poate vedea și geometric, căci dacă $a < c$, $a < c \sin A$, atunci (Fig. 22) $BC' < BD$, și deci cercul descris din B ca centru cu raza $BC' = a$ nu taie pe AD .

4°. Dacă $a < c$, dar $a > c \sin A$ (Fig. 21), rezolvarea triunghiului oarecare nu e univocă, de oarece unghiul C poate fi ascuțit sau obtus, corespund deci două soluții pentru C , deci două triunghiuri, ABC' sau ABC'' .

Odată aflat unghiul C , unghiul B este dat de

$$B = 180^\circ - (A + C),$$

iar b cu formula

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

Exemple. 1) $a = 53,6$, $c = 35,2$, $A = 71^\circ 15'$. De oarece $a > c$, problema are o soluție. Avem

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}, \quad \sin C = \frac{35,2 \sin 71^\circ 15'}{53,6},$$

$$\log \sin C = \log 35,2 + \log \sin 71^\circ 15' - \log 53,6$$

$$\log \sin C = 1,54654 + \bar{1},97632 - 1,72916,$$

$$\log \sin C = 1,54654 + \bar{1},97632 + \bar{2},27084 = 1,79370.$$

De unde $C = 38^\circ 27' 10''$, iar $B = 70^\circ 17' 50''$.

Latura b este dată de

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

de unde

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A,$$

$$\log b = 1,72916 + \bar{1},97380 - \bar{1},97632,$$

$$\log b = 1,72916 + \bar{1},97380 + 0,02368 = 1,72664,$$

$$b = 53,287.$$

2) $a = 105$ m, $c = 110$ m, $A = 58^\circ$. Avem formulele

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}, \quad B = 180^\circ - (A + C), \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

De oarece $a < c$, problema poate să aibă două soluții. Pentru C aplicăm formula

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a},$$

și aplicând logaritmi, avem

$$\log \sin C = \log c + \log \sin A - \log a,$$

$$\log \sin C = 2,04139 + \bar{1},92842 - 2,02119,$$

$$\log \sin C = 2,04139 + \bar{1},92842 + \bar{3},97881 = \bar{1},94862,$$

de unde

$$C' = 62^\circ 40' 34'', \quad C'' = 117^\circ 19' 26''.$$

Deci

$$B' = 59^\circ 19' 26'', \quad B'' = 4^\circ 40' 35'',$$

Latura b este dată cu formula

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

de unde

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A.$$

Avem pentru cazul $B' = 59^\circ 19' 26''$,

$$\log b' = \log a + \log \sin B' - \log \sin A,$$

$$\log b' = 2,02119 + \bar{1},93454 - \bar{1},92842.$$

$$\log b' = 2,02119 + \bar{1},93454 + 0,07158 = 2,02731,$$

$$b' = 1064,9 \text{ m.}$$

Pentru cazul $B'' = 4^\circ 40' 34''$, avem

$$\log b'' = \log a + \log \sin B'' - \log \sin A,$$

$$\log b'' = 2,02119 + \bar{2},91118 - \bar{1},92842,$$

$$\log b'' = 2,02119 + \bar{2},91118 + 0,07158 = 1,00395,$$

$$b'' = 10,09 \text{ m.}$$

54. **Cazul III.** Să se rezolve un triunghi când se cunosc două laturi și unghiul cuprins între ele. Fie că se dau laturile b , c și unghiul A . Ne servim de formula

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2},$$

cu care aflăm diferența $\frac{B-C}{2}$. De oarece cunoaștem $\frac{B+C}{2} =$

$$\frac{180^\circ - A}{2}, \text{ cunoaștem } \frac{B}{2} - \frac{C}{2} \text{ și } \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \text{ și deci adunând și scăzând}$$

aflăm direct pe B și C .

Pentru calculul lui a , ne servim de formula

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

Exemplu $b = 1109,75$, $c = 1489,62$, $A = 47^\circ 9' 50''$.

Avem $c + b = 2599,37$, $c - b = 379,87$, $\frac{1}{2} A = 23^\circ 34' 55''$,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-B) = \frac{c-b}{c+b} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

Deci

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-B) = \log(c-b) + \log \operatorname{cotg} \frac{A}{2} - \log(c+b),$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-B) = 2,57963 + 0,36000 - 3,41487,$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-B) = 2,57963 + 0,36000 + \bar{4},58512 = \bar{1},52476.$$

De unde

$$\frac{C}{2} - \frac{B}{2} = 18^\circ 30' 34''.$$

Dar știm că

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 66^{\circ}25'5''$$

Deci adunând și scăzând, avem

$$2\frac{B}{2} = B = 47^{\circ}54'31'', C = 84^{\circ}55'39''.$$

Pentru calculul lui a , avem

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B},$$

$$\log a = \log b + \log \sin A - \log \sin B,$$

$$\log a = 3,04522 + \bar{1},86528 - \bar{1},87045,$$

$$\log a = 3,04522 + \bar{1},86528 + 0,12955 = 3,04005,$$

de unde

$$a = 1096,6.$$

55. Cazul IV. Să se calculeze unghiurile A, B, C , când se cunosc laturile a, b, c ale triunghiului ABC .

Pentru aceasta ne servim de formulele (XXXIII) (No. 51)

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Exemplu. $a = 543,9$, $b = 597,6$, $c = 625,9$. Trebuie de la început observat că laturile a, b, c trebuie să verifice relația $a < b + c$, adică o latură să fie mai mică decât suma celorlalte două, căci altfel triunghiul ABC nu există. În cazul de față condiția fiind indeplinită, vom calcula elementele

$$2p = a + b + c, p = \frac{a + b + c}{2} = 883,7,$$

$$p - a = 339,8, p - b = 286,1, p - c = 257,8.$$

Avem

$$\log p = 2,94630, \log(p-a) = 2,53122,$$

$$\log(p-b) = 2,45652, \log(p-c) = 2,41128.$$

Aplicând logaritmi la ambii membri ai formulei (XXXIII) (No. 51), care ne dă pe A , avem

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\log(p-b) + \log(p-c) - \log p - \log(p-a)}{2},$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{2,45652 + 2,41128 - 2,94630 - 2,53122}{2},$$

$$\operatorname{logtg} \frac{A}{2} = \frac{2,45652 + 2,41128 + \bar{3},05370 + \bar{3},46878}{2},$$

$$\operatorname{logtg} \frac{A}{2} = \frac{\bar{1},39028}{2} = \frac{-2 + 1,39028}{2} = -1 + 0,69514,$$

$$\operatorname{logtg} \frac{A}{2} = \bar{1},69514,$$

de unde

$$\frac{A}{2} = 26^{\circ}21'47'', \quad A = 52^{\circ}43'34''.$$

De asemenea,

$$\operatorname{logtg} \frac{B}{2} = \frac{\log(p-c) + \log(p-a) - \log p - \log(p-a)}{2},$$

$$\operatorname{logtg} \frac{B}{2} = \frac{2,41128 + 2,53122 - 2,94630 - 2,45652}{2},$$

$$\operatorname{logtg} \frac{B}{2} = \frac{2,41128 + 2,53122 + \bar{3},05370 + \bar{3},54348}{2},$$

$$\operatorname{logtg} \frac{B}{2} = \frac{\bar{1},53968}{2} = \frac{-2 + 1,53968}{2} = \bar{1},76984,$$

$$\frac{B}{2} = 30^{\circ}28'56'', \quad B = 60^{\circ}57'52''.$$

În fine

$$\operatorname{logtg} \frac{C}{2} = \frac{\log(p-a) + \log(p-b) - \log p - \log(p-c)}{2},$$

$$\operatorname{logtg} \frac{C}{2} = \bar{1},81508, \quad \frac{C}{2} = 33^{\circ}9'17'', \quad C = 66^{\circ}18'34''.$$

EXERCITIUL

1. Să se rezolve un triunghi când se dau $A = 57^{\circ}32'7''$, $B = 73^{\circ}42'50''$
 $a = 25432,46$ m.

$$R. C = 48^{\circ}45'3''; \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}; \quad b = 28933,3 \text{ m}, \quad c = 22633,5 \text{ m}.$$

2. Să se rezolve un triunghi când se dau $a = 65,792$, $b = 98,045$,
 $A = 28^{\circ}51'48''$.

$$R. a < b, \text{ două soluții; } B' = 46^{\circ}0'8'', \quad C' = 105^{\circ}8'3''; \quad B'' = 133^{\circ}59'52'' \\ C'' = 17^{\circ}8'19''; \quad c' = 131,563 \text{ m}, \quad c'' = 40,165 \text{ m}.$$

3. Să se rezolve un triunghi când se dau $b = 61,686$, $c = 51,956$,
 $A = 24^{\circ}26'56''$.

$$R. B = 99^{\circ}20'17'', \quad C = 56^{\circ}12'47'', \quad a = 25,874.$$

4. Să se rezolve un triunghi când se dau $a = 456,4$, $b = 518,5$, $c = 592,3$.

R. $A = 47^{\circ}57'14''$, $B = 57^{\circ}31'34''$, $C = 74^{\circ}31'12''$.

5. Să se rezolve un triunghi când se dau perimetrul triunghiului $2p = 9$ m și unghiurile $A = 67^{\circ}22'48''$, $B = 18^{\circ}55'28''$.

R. Avem

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

și înlocuind în $a + b + c = 2p$, avem

$$\frac{c \sin A}{\sin C} + \frac{c \sin B}{\sin C} + c = 2p,$$

și aducând la același numitor,

$$\frac{c(\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin C} = 2p,$$

de unde

$$c = \frac{2p \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

Știm că (No. 48, II) $\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$,

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Înlocuind și reducând, avem

$$c = \frac{p \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}, \quad \frac{C}{2} = 90^{\circ} - \frac{A+B}{2}.$$

În mod analog obținem

$$a = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}, \quad b = \frac{p \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

În cazul problemei date, se aplică logaritmi expresiilor ce dau pe a , b , c , și avem

$$C = 93^{\circ}41'44'', \quad a = 3,7, \quad b = 1,3, \quad c = 4.$$

6. Se da $c = 14$ m, $b - a = 2$ m, $B - A = 14^{\circ}15'$; să se afle celelalte elemente.

R. Pornim de la relațiile sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

de unde avem

$$\frac{b-a}{\sin B - \sin A} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{b-a}{2 \sin \frac{B-A}{2} \cos \frac{B+A}{2}} = \frac{c}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}};$$

dar $\frac{B+A}{2} = 90^{\circ} - \frac{C}{2}$, $\cos \frac{B+A}{2} = \sin \frac{C}{2}$. Simplificând rămâne

$$(1) \quad \frac{b-a}{c} = \frac{\sin \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

În mod analog se obține

$$(2) \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$

Pentru calculul lui C se aplică logaritmi formulii (1) și avem

$$\log \cos \frac{C}{2} = \log c + \log \sin \frac{B-A}{2} - \log(b-a)$$

Se calculează apoi $A+B$ și în fine A și B . Suma $(a+b)$ se calculează cu (2).

În cazul problemei date, se găsește $A=53^{\circ}7'9''$, $B=67^{\circ}22'9''$, $C=59^{\circ}30'42''$; $b=15$ m, $a=13$ m.

7. Se cunosc unghiul $C=59^{\circ}29'24''$, latura $c=14$ m și diferența a două laturi $a-b=2$ m. Să se rezolve triunghiul.

$$R. \text{ Avem } \quad p-b = \frac{a-b+c}{2}, \quad p-a = \frac{-a+b+c}{2},$$

$$\sin^2 \frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{ab}, \quad at = \frac{(p-a)(p-b)}{\sin^2 \frac{C}{2}}$$

Cunoscând $a-b$ și ab se pot calcula a și b . Unghiurile le aflăm cu teorema sinusurilor.

În cazul nostru, avem $a=13$, $b=15$, $A=53^{\circ}7'48''$, $B=67^{\circ}22'48''$.

8. Să se calculeze laturile și unghiurile unui triunghi ABC căruia se cunosc înălțimile $h_a=12,92$, $h_b=11,2$, $h_c=12$ (').

R. Fie AH_a , BH_b , CH_c , înălțimile triunghiului ABC (Fig. 23). Triunghiurile dreptunghice BH_bC , AH_aC , sunt asemenea fiindcă au unghiul C comun. Urmează asemănarea laturilor, adică

$$\frac{BC}{BH_b} = \frac{AC}{AH_a}, \quad \frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a},$$

sau

$$ah_a = bh_b.$$

În mod analog, găsim

$$ak_a = ch_c.$$

Înlocuind în formula

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}}$$

pe

$$b = \frac{ah_a}{h_b}, \quad c = \frac{ah_a}{h_c}$$

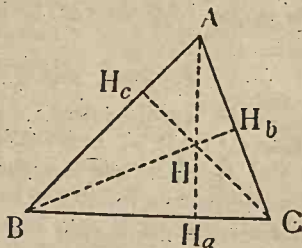


Fig. 23.

(') Începând cu acesta, xemplele următoare nu fac parte din program.

avem

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\left(a - \frac{aha}{hb} + \frac{aha}{hc}\right) \left(a + \frac{aha}{hb} - \frac{aha}{hc}\right)}{\left(a + \frac{aha}{hb} + \frac{aha}{hc}\right) \left(-a + \frac{aha}{hb} + \frac{aha}{hc}\right)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(hb \ hc - ha \ hc + ha \ hb) (hb \ hc + hc \ ha - ha \ hb)}{(hb \ hc + hc \ ha + ha \ hb) (-hb \ hc + hc \ ha + ha \ hb)},$$

care ne dă unghiul A. Se obțin formule analoage pentru B și C.

În cazul nostru, $A = 53^{\circ}7'48''$, $B = 67^{\circ}22'48''$, $C = 59^{\circ}29'24''$; $a = 13$, $b = 15$, $c = 14$.9. Să dă $b = 198 \text{ m}$, $c = 252 \text{ m}$ și mediana $AA' = m_a$ (dreapta care unește vârful cu mijlocul laturii opuse) egală cu 185 m . Să se afle latura a și unghiurile (Fig. 24).

$$R. \text{ Avem } c^2 = \overline{BA'}^2 + \overline{AA'}^2 - 2 \overline{BA'} \cdot \overline{AA'} \cos \angle BB'A,$$

$$b^2 = \overline{A'C}^2 + \overline{AA'}^2 - 2 \overline{A'C} \cdot \overline{AA'} \cos \angle CA'A,$$

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - a \cdot m_a \cos \angle BA'A,$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - a \cdot m_a \cos \angle AA'C.$$

$$\text{Dar } \angle AA'C = 180^{\circ} - \angle AA'B; \text{ deci} \\ \cos \angle BA'A = -\cos \angle AA'C,$$

și adunând, avem

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2,$$

de unde

$$a^2 = 2(b^2 + c^2) - 4m_a^2, \quad a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - 4m_a^2}.$$

Unghiurile le calculăm apoi din triunghiurile ABA' , ACA' , în care se cunosc toate laturile, cu formula

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\rho - b)(\rho - c)}{\rho(\rho - a)}}.$$

În cazul nostru, $a = 261,75$, unghiurile sunt $A = 69^{\circ}57'38''$, $B = 45^{\circ}19'18''$, $C = 64^{\circ}45'4''$.10. Să se afle elementele necunoscute ale unui triunghi, în care se cunosc laturile $a = 5,2$, $b = 4,7$, iar unghiul C cuprins între ele este jumătatea unghiului B opus la cea mai mică latură.R. α fiind unghiul C, avem $B = 2\alpha$, $A = 180^{\circ} - 3\alpha$. Scriem că laturile sunt proporționale cu sinusurile și avem

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(180 - 3\alpha)}, \quad \frac{b}{a} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin 3\alpha},$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}, \quad \frac{b}{a} = \frac{2 \cos \alpha}{3 - 4 \sin^2 \alpha}, \quad \frac{b}{a} = \frac{2 \cos \alpha}{4 \cos^2 \alpha - 1},$$

ecuație care dă $\cos \alpha = 0,84798$, $\alpha = 32^{\circ}06'59''$.11. Baza $BC = 1120 \text{ m}$, iar $B = 18^{\circ}26'48''$, $C = 45^{\circ}31'20''$. Cu cât trebuie prelungită baza BC, astfel ca noul triunghi ABD să fie isoscel ($AB = AD$).

R. Din triunghiul CAD, în care unghiul CDA = $18^{\circ}26'48''$, avem

$$\frac{CD}{\sin CAD} = \frac{AC}{\sin CDA}, \quad CD = \frac{AC \sin(45^{\circ}31'20'' - 18^{\circ}26'48'')}{\sin 18^{\circ}26'48''}$$

Din triunghiul ACB, avem

$$\frac{AC}{\sin CBA} = \frac{BC}{\sin BAC}, \quad AC = \frac{1120 \sin 18^{\circ}26'48''}{\sin(18^{\circ}26'48'' + 45^{\circ}31'20'')}$$

$$CD = \frac{1120 \sin 27^{\circ}4'32''}{\sin 63^{\circ}58'8''}, \quad CD = 567,4.$$

12. Fie $\sphericalangle BAC = 104^{\circ}15'$ unghiul unui triunghi ABC. Să considerăm două drepte ce trec prin vârful A, care împart unghiul A în trei părți egale și care taie latura BC în punctele D și E. Știind că $AD = 9$ m. iar $AE = 7$ m, să se calculeze elementele triunghiului ABC.

R. În triunghiul ADE se cunosc laturile AD, AE și unghiul DAE = $34^{\circ}45'$. De aci se calculează cu formula tangentelor unghiurile dela baza DE. Se cunosc deci și unghiurile AEC, ADB, iar din triunghiurile AEC, ADB se calculează AC, unghiul C, AB, unghiul B. Latura BC = 28,264.

CALCULUL ARIILOR.

56. Aria unui triunghi ABC (Fig. 25) este egală cu jumătatea produsului bazei AB prin înălțimea CD,

$$S = \text{aria ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2}.$$

Expresiunea trigonometrică a arii triunghiului are diferite forme după elementele date care definesc triunghiul.

1°. Se cunosc două laturi și unghiul cuprins între ele. Din triunghiul dreptunghic ADC (Fig. 25), avem

$$CD = \text{aria AC} \sin A = b \sin A.$$

Înlocuind în expresia arii, avem

$$S = \text{aria ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{cb \sin A}{2}$$

În mod analog, găsim pentru aria triunghiului

$$(XXXV) \text{ aria ABC} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ca \sin B}{2}.$$

Exemplu. $b = 74,8$ m, $c = 37,5$ m, $A = 63^{\circ}35'30''$. Avem

$$\text{aria } S = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{74,8 \cdot 37,5 \sin 63^{\circ}35'30''}{2}.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log S = \log 74,8 + \log 37,5 + \log \sin 63^{\circ}35'30'' - \log 2,$$

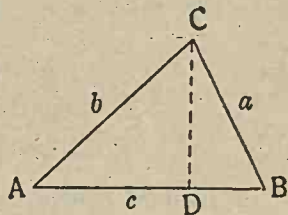


Fig. 25.

$$\log S = 1,87390 + 1,57403 + \bar{1},95214 - 0,30103,$$

$$\log S = 1,87390 + 1,57403 + \bar{1},95214 + \bar{1},69897,$$

$$\log S = 3,09904,$$

$$\text{aria } S = 1256,14 \text{ m}^2.$$

2°. *Se cunosc o latură și două unghiuri alăturate.* Fie că se dă latura a și unghiurile B și C . Am văzut că aria triunghiului e

$$S = \frac{a b \sin C}{2}$$

Să înlocuim pe b în funcțiune de elementele cunoscute a , B , C . Avem, după teorema sinusurilor,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

de unde

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

Înlocuind, expresia arii devine

$$S = \frac{a \sin C}{2} \cdot \frac{a \sin B}{\sin A},$$

sau

$$(XXXVI) \quad S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}, \quad S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin [180^\circ - (B + C)]}$$

În mod analog, obținem

$$S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}, \quad S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}.$$

Exemplu. $a = 439,258 \text{ m}$, $B = 72^\circ 50' 39''$, $C = 64^\circ 25' 48''$.
Avem

$$S = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A}, \quad A = 180^\circ - (B + C) = 42^\circ 43' 33''.$$

Aplicând logaritmi, avem

$$\log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \sin C - \log \sin A - \log 2,$$

$$\log S = 2 \cdot 2,64272 + \bar{1},98024 + \bar{1},95524 - \bar{1},83155 - 0,30103,$$

$$\log S = 5,28544 + \bar{1},98024 + \bar{1},95524 + 0,16845 + 1,69897,$$

$$\log S = 5,08834, \quad S = 122557,14 \text{ m}^2.$$

3°. *Se cunosc laturile a , b , c .* Știm că aria este

$$S = \frac{a c \sin A}{2}.$$

Înlocuind pe $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$, iar pe $\sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$ în funcțiune de laturi (formulele XXXIII, No. 51)

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

avem

$$S = \frac{bc}{2} 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = bc \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$S = bc \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2}},$$

$$S = bc \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{bc}},$$

(XXXVII)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

care dă aria triunghiului în funcțiune de laturi.

Exemplu. $a = 543,9$ m, $b = 597,6$ m, $c = 625,9$ m. Aplicând logaritmi la expresia arii, avem

$$\log S = \frac{\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)}{2},$$

$$p \cdot \frac{a+b+c}{2} = 883,7; \quad p-a = 339,8; \quad p-b = 286,1; \quad p-c = 257,8,$$

$$\log S = \frac{2,94630 + 2,53122 + 2,45652 + 2,41128}{2} = 5,17266,$$

$$S = 148824 \text{ m}^2.$$

57. **Observare.** (1) Formulele arii le putem folosi la rezolvarea triunghiului dacă aria este unul din elementele cunoscute. De ex., cunoscând aria S a triunghiului, suma laturilor $a + b = m$ și latura c , elementele necunoscute le aflăm în modul următor.

Avem

$$2S = ab \sin C,$$

$$\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{p(p-c)}{bc}.$$

Înlocuind pe ab cu egalul său de mai sus,

(1)

$$ab = \frac{2S}{\sin C}.$$

avem

$$\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{p(p-c)}{\left(\frac{2S}{\sin C}\right)} = \frac{p(p-c) \sin C}{2S}.$$

(1) Nu face parte din program.

Înlocuim pe

$$\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

și obținem

$$\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{p(p-c)2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2S}$$

Simplificând cu $\cos \frac{C}{2}$, avem

$$\cos \frac{C}{2} = \frac{p(p-c) \sin \frac{C}{2}}{S}$$

sau împărțind cu $\sin \frac{C}{2}$,

$$(2) \quad \cotg \frac{C}{2} = \frac{p(p-c)}{S}$$

După ce am calculat pe C , înlocuim în (1) și avem ecuația

$$ab = \frac{2S}{\sin C},$$

care împreună cu ecuația dată prin enunț,

$$a + b = m,$$

ne dau valorile lui a și b . Al doilea unghi al triunghiului îl aflăm aplicând teorema sinusurilor.

Exemplu. $S = 182,996 \text{ m}^2$, $a + b = 45 \text{ m}$, $c = 18 \text{ m}$. Pentru a afla unghiul C , înlocuim în formula (2) și avem

$$\cotg \frac{C}{2} = \frac{p(p-c)}{S} = \frac{31,5 \cdot 13,5}{182,996}$$

Aplicând logaritmi, găsim

$$\log \cotg \frac{C}{2} = \log 31,5 + \log 13,5 - \log 182,996,$$

$$\log \cotg \frac{C}{2} = 1,49831 + 1,13033 - 2,26244,$$

$$\log \cotg \frac{C}{2} = 1,49831 + 1,13033 - 2,26244 = 0,36620,$$

$$C = 46^{\circ}34'2''.$$

Înlocuind în (1), avem

$$ab = \frac{2S}{\sin C} = \frac{2 \cdot 182,996}{\sin 46^{\circ}34'2''};$$

de unde

$$\log(ab) = \log 365,992 - \log \sin 46^{\circ}34'2'',$$

$$\log(ab) = 2,56347 - 1,86105 = 2,56347 + 0,13895,$$

$$\log(ab) = 2,70242, \quad ab = 503,999.$$

Cunoscând suma $a + b = 45$ și produsul, ab , putem forma ecuația de gradul al doilea care dă pe a și b ,

$$X^2 - 45X + 503,999 = 0,$$

de unde se găsesc rădăcinile

$$X' = a = 24 \text{ m}, X'' = b = 21 \text{ m}.$$

EXERCİȚII.

1. Să se ducă o paralelă MN la baza AB a triunghiului ABC, astfel ca aria trapezului AMNB să fie egală cu $\frac{2}{3}$ din aria triunghiului MCN.

Aplicație pentru $AB = 53,4 \text{ m}$; $\sphericalangle BAC = 50^\circ 25' 25''$; $\sphericalangle ABC = 62^\circ 40' 50''$.

R. M fiind pe AC și N pe CB, poziția paralelei MN este determinată de lungimea $CM = x$. Avem

$$\text{aria AMNB} = \frac{2}{3} \text{ aria MCN}, \frac{5}{3} \text{ aria MCN} = \text{aria ABC},$$

$$\frac{\text{aria ABC}}{\text{aria MCN}} = \frac{5}{3}.$$

Dar

$$\text{aria ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB \sin ACB, \text{ aria MCN} = \frac{1}{2} MC \cdot NC \sin MCN; \text{ deci}$$

$$\frac{\text{aria ABC}}{\text{aria MCN}} = \frac{AC \cdot CB}{MC \cdot NC} = \left(\frac{AC}{MC}\right) \left(\frac{CB}{NC}\right).$$

Triunghiurile CMN și CAB fiind asemenea, atunci

$$\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC}$$

și avem

$$\frac{\text{aria ABC}}{\text{aria MCN}} = \left(\frac{AC}{MC}\right) \left(\frac{AC}{MC}\right) = \left(\frac{AC}{MC}\right)^2,$$

adică raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului a două laturi omoloage.

Relația de mai sus devine

$$\left(\frac{AC}{MC}\right)^2 = \frac{5}{3}, \frac{x^2}{b^2} = \frac{3}{5}.$$

Aplicând teorema sinusurilor, avem

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

și deci

$$x^2 = \frac{3}{5} b^2 = \frac{3}{5} \frac{c^2 \sin^2 B}{\sin^2 C},$$

$$x = c \sqrt{\frac{3}{5} \frac{\sin B}{\sin C}}.$$

Avem

$$C = 180^\circ - (A + B) = 65^\circ 53' 45'',$$

$$\log x = \log c + \frac{\log 3 - \log 5}{2} + \log \sin B - \log \sin C,$$

$$\log x = 1,72754 + \frac{0,47712 - 0,69897}{2} + 1,94864 - 1,96369,$$

$$\log x = 1,60157; x = 39,954 \text{ m}.$$

2. În triunghiul ABC se dă unghiul $C = 69^{\circ}10'12''$ și $AC = 177,285$ m, $BC = 89,214$ m. Să se determine pe latura AC punctul M, astfel ca dacă P este proiecția sa pe dreapta AB, să avem $aria AMP = \frac{1}{2}$ aria ABC.

R. $AM = x$. Avem $x AP \cdot \sin A = \frac{1}{2} ab \sin C$, $2x^2 \sin A \cos A = ab \sin C$
 $x^2 = \frac{ab \sin C}{2 \sin A \cos A}$. Totul revine să calculăm pe A. Se aplică formula

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B-A) = \frac{b-a}{b+a} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

Se găsește $\frac{1}{2} (B-A) = 25^{\circ}36'33''$ și cum știm $\frac{1}{2} (B+A) = 55^{\circ}24'54''$, avem $A = 29^{\circ}48'21''$. Pentru x , se aplică logaritmiile,

$$2 \log x = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2 - \log \sin A - \log \cos A,$$

$$\log x = 2,15158; x = 141,76 \text{ m.}$$

3. Să se calculeze laturile unui triunghi a cărui suprafață este 74281 m^2 , și ale cărui unghiuri sunt respectiv $93^{\circ}49'38''$; $47^{\circ}35'24''$; $38^{\circ}34'58''$.

R. Formula suprafeței este

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A},$$

de unde

$$a^2 = \frac{\sin B \sin C}{2 S \sin A};$$

la fel cu b , c . Se aplică logaritmiile și se găsește

$$a = 567,37 \text{ m}, b = 419,85; c = 354,63 \text{ m.}$$

4. Se dă un unghi $A = 44^{\circ}20'12''$. Prin punctul B luat pe una din laturile unghiului A la distanța $AB = 107$ m, să se ducă o dreaptă AB, astfel ca aria triunghiului ABC să fie de 6527 m^2 . Se cere lungimea dreptei AC și valoarea unghiului ABC.

R. Chestiunea revine să se calculeze B și b într'un triunghi, când se cunosc A, c , S. Avem $b = \frac{2S}{c \sin A}$ care dă pe $b = 174,567$ m. Unghiul B îl aflăm cu formula

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B-C) = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2};$$

și găsim $B = 98^{\circ}19'37''$.

5. Aria unui triunghi ABC este $S = 21931 \text{ m}^2$, iar unghiurile $A = 46^{\circ}25'$, $B = 78^{\circ}40'$. Să se afle cu cât trebuie prelungită latura AB pentru ca triunghiul obținut să fie isoscel.

R. AB fiind latura ce trebuie prelungită până în D, avem

$$BD = \frac{BC \sin(78^{\circ}40' - 46^{\circ}25')}{\sin 46^{\circ}25'} = \frac{\sin 32^{\circ}15'}{\sin 46^{\circ}25'} \sqrt{\frac{2S \cdot \sin 46^{\circ}25'}{\sin 78^{\circ}40' \sin 126^{\circ}05'}}. BD = 148,959.$$

RAZELE CERCLUI INSCRIS ȘI ALE CEROURILOR EX- INSCRISE LA UN TRIUNGHI. RAZA CERCLUI CIRCUMSCRIS.

58. Raza cercului înscris. Să înscriem în triunghiul ABC un cerc și fie C', A', B' punctele sale de contact (Fig. 26) cu laturile AB, BC, CA. Centrul său I este la intersecția bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC și este egal depărtat de laturile triunghiului, astfel că raza r a cercului înscris este egală cu $IA' = IB' = IC'$.

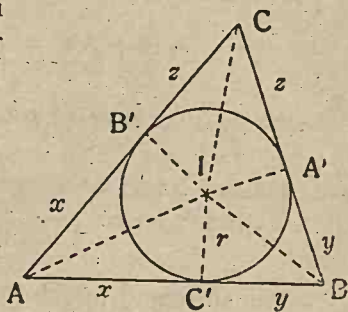


Fig. 26.

Înainte de a afla raza cercului înscris, să calculăm segmentele $AB' = AC' = x$, $C'B = BA' = y$,

$$A'C = CB' = z,$$

ce determină punctele de contact al cercului înscris pe laturile triunghiului ABC. Avem

$$AC' + C'B = c, \quad BA' + A'C = a, \quad CB' + B'A = b,$$

sau

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b.$$

Adunându-le, obținem

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2p,$$

sau

$$x + y + z = p.$$

Însă $AC' + C'B = c$, $x + y = c$; deci din relația precedentă, înlocuind pe $x + y$ cu c , avem

$$c + z = p, \quad z = p - c.$$

sau

$$A'C = CB' = p - c.$$

În mod analog, obținem

$$AC' = AB' = p - a, \quad C'B = BA' = p - b.$$

Să observăm acum că dreptele AI, BI, CI fiind bisectoare, unghiurile $IAB' = IAC' = \frac{1}{2}A$, $IBC' = IBA' = \frac{1}{2}B$, $ICA' = ICB' = \frac{1}{2}C$.

Expresiunea razei cercului înscris are diferite forme după datele care definesc triunghiul ABC.

I. Se cunosc o latură și două unghiuri. Dacă se dau a , B , C , din triunghiurile IBA' , ICA' (Fig. 26), avem

$$A'B = r \cotg \frac{B}{2}, \quad A'C = r \cotg \frac{C}{2}.$$

Adunându-le, obținem

$$A'B + A'C = r \cotg \frac{B}{2} + r \cotg \frac{C}{2},$$

$$a = r \left(\cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} \right),$$

de unde

$$r = \frac{a}{\cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2}}$$

Transformând numitorul, avem

$$r = \frac{a}{\frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}} = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}$$

Dar

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}.$$

Deci

$$(1) \quad r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

În mod analog se obțin relațiile

$$r = \frac{b \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}}, \quad r = \frac{c \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Exemple. 1) Se dau $B = 58^\circ 19'$, $C = 47^\circ 13'$, $a = 38$ dm. Pentru aflarea lui r se aplică formula (1), luând logaritmi și se găsește $r = 9,35$ dm.

2) Se dau $B = 58^\circ 19'$, $C = 47^\circ 13'$, $r = 14,8$ dm. Pentru a afla laturile a , b , c , ale triunghiului, se aplică formulele (1) și se găsesc $a = 60,38$ dm, $b = 53,34$ dm, $c = 46$ dm.

II. Se cunosc perimetrul, o latură și unghiul opus acestei

laturi. De ex., $2p$, a , A . Din triunghiul dreptunghic AIC' , avem

$$IC' = AC' \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

$$(2) \quad r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

În mod analog, se obțin

$$r = (p - b) \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \quad r = (p - c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Exemplu. $2p = 44$ m, $A = 87^\circ 16'$, $a = 18$ m. Aplicând formula (2), avem $r = 3,813$.

III. *Se cunosc laturile a , b , c .* Să scriem că aria triunghiului ABC (Fig. 26) este egală cu suma ariilor triunghiurilor AIB , BIC , CIA . Avem

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2} (a + b + c) = \frac{r}{2} 2p,$$

$$(3) \quad S = pr,$$

de unde

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}},$$

$$(4) \quad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Exemplu. $a = 15$ m, $b = 10$ m, $c = 8$ m. Aplicând logaritmi la formula (4), se găsește $r = 2,231$.

59. **Razele cercurilor exînscrise.** Să ducem bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C din triunghiul ABC . I_a fiind

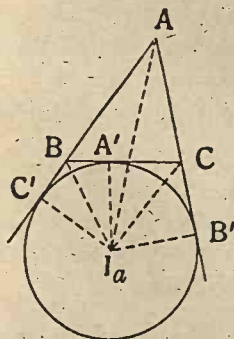


Fig. 27.

punctul lor de intersecție (Fig. 27), să ducem perpendicularele $I_a A'$, $I_a B'$, $I_a C'$ pe laturile BC , CA , AB . I_a fiind pe bisectoarea unghiului B , avem $I_a B' = I_a A'$; de asemenea, fiind pe bisectoarea unghiului C , urmează $I_a B' = I_a A'$. Deci $I_a B' = I_a C'$, relație care probează că punctul I_a este egal depărtat de laturile unghiului A , sau că este pe bisectoarea unghiului A , cu alte cuvinte, bisectoarea interioară a unghiului A și bisectoarele exterioare ale celorlalte două unghiuri B și C se taie în ace-

laș punct, I_a , exterior triunghiului și egal depărtat de laturile triunghiului ABC . Acest punct I_a este centrul unui cerc tangent

la laturile triunghiului ABC în punctele A', B', C', de aceea se zice cerc ezinscris în triunghiul ABC. Raza sa este $r_a = I_a A' = I_a B' = I_a C'$.

În mod analog se obțin încă două cercuri ezinscrise corespunzătoare vârfurilor B și C.

Putem și aci să calculăm segmentele $BA' = BC' = x$, $CA' = CB' = y$, $AB' = AC' = z$, pe care le determină pe laturile triunghiului ABC punctele de contact A', B', C' ale cercului ezinccris. Avem

$$x + y = a, \quad z - y = b, \quad z - x = c.$$

Adunând, obținem

$$2z = a + b + c, \quad z = AC' = AB' = p.$$

Deci

$$y = z - b = p - b, \quad x = z - c = p - c.$$

Se pot găsi diferite expresii pentru raza r_a cercului ezinccris corespunzător vârfului A.

1^o. Din triunghiul $I_a AB'$, avem

$$I_a B' = AB' \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

În mod analog, se găsesc

$$r_b = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \quad r_c = p \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

2^o. Să observăm (Fig. 27) că aria triunghiului ABC este dată de

$$ABC = I_a BA + I_a CA - I_a BC.$$

De unde

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot I_a C' + \frac{1}{2} CA \cdot I_a B' - \frac{1}{2} BC \cdot I_a A',$$

$$S = \frac{r_a c}{2} + \frac{r_a b}{2} - \frac{r_a a}{2} = \frac{r_a}{2} (-a + b + c) = \frac{r_a}{2} (p - a),$$

$$S = r_a (p - a).$$

De aci se poate deduce r_a ,

(5)

$$r_a = \frac{S}{p - a},$$

$$r_a = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

În mod analog, se găsesc

$$(6) \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}.$$

60. **Raza cercului circumscris.** Să însemnăm cu R raza cercului cu centrul O circumscris triunghiului ABC (Fig. 28). Unghiul BOC fiind la centru, este îndoitul unghiului A înscris în cerc, căruia îi corespunde ca măsură jumătatea arcului BC . Însemnând cu D piciorul perpendicularei din O pe coarda BC , știm că $BD = DC = \frac{a}{2}$, iar unghiul $DOC = \frac{1}{2}BOC = A$.

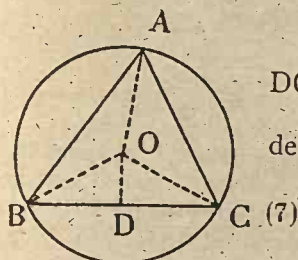


Fig. 28.

Din triunghiul dreptunghic ODC , avem

$$DC = OC \sin DOC, \quad \frac{a}{2} = R \sin A,$$

deci

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad (7)$$

relație, care dă valoarea razei cercului circumscris.

În mod analog se obțin

$$\frac{a}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

și deci

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Expresiunea razei cercului circumscris are diferite forme după datele problemei.

1°. *Se cunosc o latură a și unghiul opus A .* Raza e dată de relația (7),

$$R = \frac{a}{2 \sin A}.$$

Când $a = 12\text{m}$, $A = 63^\circ 10'$, se aplică logaritmi și avem $R = 6,724\text{m}$.

2°. *Se cunosc laturile $a = 13$, $b = 15$, $c = 14$.* Pentru a găsi expresia razei, înlocuim în (7) pe $\sin A$ cu $2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ și avem

$$R = \frac{a}{4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{a}{4 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$$

$$(8) \quad R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

sau

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Cu formula (8) se calculează raza R când se cunosc laturile triunghiului. În cazul $a = 13$, $b = 15$, $c = 14$, se găsește $R = 8,125$.

61. Relațiuni între razele cercurilor înscris, exînscrie și circumscris (1). 1°. Din relațiile (3), (5), (6) deducem

$$(9) \quad r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

De unde

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S}, \quad \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}, \quad \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}, \quad \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$

Adunând ultimele trei relații, obținem

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-(a+b+c)}{S}$$

sau

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p}{S}$$

și înlocuind pe $\frac{p}{S}$ cu egalul său $\frac{1}{r}$, rezultă

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

core este o relație între razele cercurilor înscris și exînscrie unui triunghi.

2°. Înmulțind relațiile (9), avem

$$r r_a r_b r_c = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^4}{S^2} = S^2$$

sau

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$$

3°. Adunând relațiile (9), avem

$$E = r_a + r_b + r_c - r = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p}$$

$$E = S \frac{(p-b)(p-c)p + (p-a)(p-c)p + (p-a)(p-b)p - (p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Desvoltând, ordonând după puterile lui p și reducând,

(1) Nu face parte din program.

avem

$$E = S \frac{2p^3 - p^2(a+b+c) + abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$E = S \frac{2p^3 - p^2 \cdot 2p + abc}{S^2} = \frac{abc}{S},$$

deci

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{abc}{S}.$$

Dar

$$R = \frac{abc}{4S},$$

deci

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

EXERCİȚII (1).

1. În triunghiul ABC se dau unghiurile $B = 39^\circ 37' 24''$, $C = 69^\circ 17''$ iar înălțimea vârfului A egală cu 14,03 m. Să se afle laturile triunghiului și raza cercului înscris și a cercului circumscris.

R. Se duce înălțimea $AD = 14,03$ m. Din triunghiurile dreptunghice ADC, ABD se calculează $AC = 15$ m, $AB = 22$ m.

$$BC = BD + DC = AD(\cotg B + \cotg C) = AD \frac{\sin 108^\circ 54' 24''}{\sin 69^\circ 17' \sin 39^\circ 37' 24''},$$

$$BC = 22,24 \text{ m.}$$

$$\text{Aria este } S = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AD^2}{2} \frac{\sin 71^\circ 05' 36''}{\sin 69^\circ 17' \sin 39^\circ 37' 24''}, \quad S = 156,12 \text{ m}^2.$$

Raza cercului înscris [N, 58, (1)]

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = AD \frac{\sin \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}, \quad r = 2,26 \text{ m}; \quad R = \frac{a}{2 \sin A}, \quad R = 11,76 \text{ m.}$$

2. Cunoscând perimetrul $2p = 24$ m, unghiurile $B = 38^\circ 36'$, $C = 45^\circ 28'$, să se afle raza cercului înscris, raza cercului circumscris, aria triunghiului și laturile.

R. 1°. Pentru raza cercului înscris, avem [No 58, (1)]

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \quad r \cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

și de unde, înmulțind cu $2 \sin \frac{A}{2}$, avem

$$2r \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \quad r \sin A = 2a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

și analog,

(1) Nu face parte din program.

$$r \sin B = 2b \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \quad r \sin C = 2c \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Să adunăm aceste relațiuni și avem

$$r(\sin A + \sin B + \sin C) = 4\rho \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Dar se știe (No 48, II) că $A + B + C = 180^\circ$ și

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Înlocuind în relația precedentă, obținem

$$(10) \quad r = \frac{4\rho \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \rho \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

În cazul numeric dat, se găsește $r = 2,225$.

2°. Pentru raza cercului circumscris, considerăm relațiile

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

Adunându-le, avem

$$a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C),$$

unde, înlocuind pe $\sin A + \sin B + \sin C$, obținem

$$(11) \quad R = \frac{a + b + c}{2(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{2\rho}{8 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

$$R = \frac{\rho}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

În cazul numeric, se află $R = 4,693$ m.

3°. Împărțind relațiile (10) și (11), rezultă

$$\frac{r}{R} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \quad r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

4°. Laturile le obținem astfel. Avem

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

de unde

$$(12) \quad a = \frac{2\rho \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2\rho 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

$$a = \frac{\rho \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Se găsește pentru laturi, 8,57 m; 8,738 m; 6,69 m.

5°. Pentru aria S procedăm astfel. Știm că

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A},$$

unde înlocuind pe a cu formula (12), avem

$$S = \frac{\rho^2 \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} \frac{\sin B \sin C}{\sin A} = \frac{\rho^2 \sin^2 \frac{A}{2} 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}$$

$$S = \rho^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

În cazul numeric, $S = 26,694 \text{ m}^2$.

3. Laturile unui triunghi fiind $a = 145 \text{ m}$, $b = 25 \text{ m}$, $c = 150 \text{ m}$, să se calculeze aria, raza cercului înscris și a cercului circumscris.

R. $S = 1800 \text{ m}^2$; $r = 11,25 \text{ m}$; $R = 75,52 \text{ m}$; $A = 73^\circ 44' 23''$;
 $B = 9^\circ 31' 39''$; $C = 96^\circ 43' 58''$.

4. Perimetrul unui triunghi este de 406 m , o latură de 195 m și unghiul opus acestei laturi este $112^\circ 37' 12''$. Să se afle razele cercului înscris, circumscris, aria și elementele necunoscute ale triunghiului.

R. Din $\frac{a}{\sin A} = 2R$, aflăm $R = 105,62 \text{ m}$. Cu formula

$$r = (\rho - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

aflăm $r = 12 \text{ m}$.

Pentru arie procedăm astfel. Știm că

$$2S = bc \sin A, \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \rho(\rho - a).$$

Înlocuind pe bc în prima formulă, avem

$$2S = \frac{\rho(\rho - a)}{\cos^2 \frac{A}{2}} \sin A = \frac{\rho(\rho - a) 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}}$$

$$S = \frac{\rho(\rho - a) \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \rho(\rho - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

În cazul numeric, $S = 2436 \text{ m}^2$.

5. Să se afle elementele triunghiului, în care se cunosc $B = 68^\circ 46'$, $C = 51^\circ 24'$ și diferența segmentelor, $CD - DB = 56 \text{ m}$, în care înălțimea vârfului A împarte latura BC .

R. Cele două segmente sunt $CD = b \cos C$, $DB = c \cos B$. Însemnăm cu d diferența segmentelor, $CD - DB = d$, avem $d = b \cos C - c \cos B$. Înlocuind pe c cu valoarea sa din $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, avem $d = b \frac{\sin(B - C)}{\sin B}$. De unde a-

flăm pe $b = \frac{d \sin B}{\sin(B - C)}$, $b = 174,8$; apoi $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{d \sin C}{\sin(B - C)} = 146,6 \text{ m}$

Pe ru a , aplicăm $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, de unde $a = \frac{d \sin A}{\sin(B - C)} = 162,21 \text{ m}$. Aria

$$S = \frac{bc \sin A}{2}, \quad S = \frac{d^2 \sin A \sin B \sin C}{2 \sin^2(B - C)} = 11103,6 \text{ m}^2. \quad \text{Raza } r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} =$$

$45,95 \text{ m}$. Raza $R = \frac{a}{2 \sin A} = 93,81 \text{ m}$.

6, Să se arate că între razele cercurilor extinscise, avem

$$ra \cdot rb + rb \cdot rc + rc \cdot ra = p^2.$$

R. Se observă că $ra \cdot rb = p(p - c)$.

RELAȚIUNI ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI⁽¹⁾.

62. În afară de relațiunile stabilite între diferitele elemente ale unui triunghi, se pot găsi nenumărate alte relațiuni între aceleași elemente. Vom expune, ca o recapitulare a materii studiate, câteva din cele mai simple și cunoscute din relațiunile între elementele unui triunghi.

1°. Să se arate că într'un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$), avem

$$\cos^2 B + \cos^2 C = 1, \quad \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin B \cos C.$$

În adevăr, unghiurile B și C fiind complimentare, avem $\cos^2 B + \cos^2 C = \cos^2 B + \cos^2 (90 - B) = \cos^2 B + \sin^2 B = 1$; de asemenea,

$$\begin{aligned} \cos^2 B - \cos^2 C &= \cos^2 B - \sin^2 B = 1 - 2 \sin^2 B = \\ &= 1 - 2 \sin B \sin B = 1 - 2 \sin B \cos C. \end{aligned}$$

2°. Să se arate că într'un triunghi dreptunghic avem

$$\cotg \frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}.$$

În adevăr, avem

$$\frac{c + a}{b} = \frac{a \cos B + a}{a \sin B} = \frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2 \cos^2 \frac{B}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = \cotg \frac{B}{2}.$$

3°. În orice triunghi dreptunghic avem

$$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{2(a^2 - bc)}{(a + b)(a + c)}.$$

În adevăr,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B} = \frac{a - c}{a + c}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{a - b}{a + b}.$$

deci

$$E = \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{a - c}{a + c} + \frac{a - b}{a + b} = \frac{(a - c)(a + b) + (a - b)(a + c)}{(a + c)(a + b)}$$

$$E = \frac{2(a^2 - bc)}{(a + c)(a + b)}.$$

(1) Nu face parte din program.

4°. În orice triunghi dreptunghic avem

$$\cos(2C-B) = \frac{c}{a^3}(3a^2 - 4c^2).$$

În adevăr,

$$\cos(2C-B) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3C\right) = \sin 3C = \sin C(3 - 4\sin^2 C).$$

Dar $\sin C = \frac{c}{a}$, deci

$$\cos(2C-B) = \frac{c}{a}\left(3 - 4\frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{c}{a^3}(3a^2 - 4c^2).$$

5°. Se dau catetele unui triunghi dreptunghic, $b = m^2 - n^2$, $c = 2mn$. Să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ în funcție de m și n . Avem

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{c}{a}}{1 + \frac{c}{a}}} = \sqrt{\frac{a - c}{a + c}} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{(a + c)^2}} = \frac{b}{a + c}.$$

Dar $a^2 = b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2$; deci $a = m^2 + n^2$.

Deci

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2 + 2mn} = \frac{(m - n)(m + n)}{(m + n)^2} = \frac{m - n}{m + n}.$$

În mod analog

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}} = \frac{c}{a + b},$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{2mn}{(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2)} = \frac{n}{m}.$$

6°. Să se arate că un triunghi este dreptunghic, dacă în-
tre unghiurile sale avem relațiile

$$\text{I. } \sin C = \cos A + \cos B, \quad \text{II. } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C},$$

$$\text{III. } \operatorname{tg} B = \frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)}.$$

I. Pentru prima, avem

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

de unde simplificând $\sin\frac{C}{2} \neq 0$, rămâne

$$\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2};$$

de unde

$$\frac{C}{2} = \pm \frac{A-B}{2}, \quad C = \pm(A-B),$$

$$\pi - (A+B) = \pm(A-B).$$

Deci,

$$\pi - (A+B) = A-B, \quad A = \frac{\pi}{2};$$

sau

$$\pi - (A+B) = -(A-B), \quad B = \frac{\pi}{2}.$$

Triunghiul este dreptunghic căci are, sau unghiul A, sau unghiul B de 90° .

II. Din a doua deducem

$$\sin A = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

$$\text{De unde } 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}, \quad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{A}{2} = 45^\circ, \quad A = 90^\circ.$$

III. Din a treia, avem

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)},$$

$$\sin B \sin A = \cos B \cos(C-B) - \sin B \sin(C-B),$$

$$\sin B \sin A = \cos(B+C-B), \quad \sin B \sin A = \cos C,$$

$$\sin B \sin A = \cos[\pi - (A+B)] \sin B \sin A = -\cos(A+B),$$

$$\sin B \sin A = -\cos A \cos B + \sin A \sin B, \quad \cos A \cos B = 0.$$

de unde rezultă $\cos A = 0$, sau $A = 90^\circ$, sau $B = 90^\circ$.

7°. Să se arate că un triunghi ABC este isoscel când avem

$$a = 2b \cos C.$$

În adevăr, înlocuind laturile a și b prin cantități proporționale $\sin A$ și $\sin B$, avem

$$\sin A = 2 \sin B \cos C.$$

Dar $A = 180^\circ - (B + C)$. Deci

$$\sin(B + C) = 2 \sin B \cos C,$$

de unde

$$\sin B \cos C + \sin C \cos B = 2 \sin B \cos C,$$

$$\sin C \cos B - \sin B \cos C = 0, \sin(C - B) = 0, C - B = 0, C = B.$$

80. Să se arate că într'un triunghi oarecare, avem

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Avem

$$E = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 + 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$E = \cos^2 A + \cos^2 B \cos^2 C - \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 + 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C)^2 - \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 B + \cos^2 C - 1,$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C)^2 + \cos^2 B (1 - \cos^2 C) - (1 - \cos^2 C),$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C)^2 - (1 - \cos^2 B) (1 - \cos^2 C),$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C)^2 - \sin^2 B \sin^2 C,$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C + \sin B \sin C) (\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C),$$

$$E = [\cos A + \cos(B - C)] [\cos A + \cos(B + C)],$$

$$E = 2 \cos \frac{A+B-C}{2} \cos \frac{A-B+C}{2} 2 \cos \frac{A+B+C}{2} \cos \frac{A-B-C}{2}$$

$$\text{Dar } A+B+C = \pi, \text{ deci } \frac{A+B+C}{2} = 90^\circ, \cos \frac{A+B+C}{2} = 0$$

$E = 0$, astfel că relația este stabilită.

90. Să se arate că într'un triunghi oarecare avem

$$\cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} = \cotg \frac{A}{2} \cotg \frac{B}{2} \cotg \frac{C}{2}.$$

Avem

$$E = \cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} =$$

$$\frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}},$$

$$E = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \left(\sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right).$$

Se înlocuește $\sin \frac{C}{2}$ prin $\cos \frac{A+B}{2}$, dezvoltând, făcând reducerile, se găsește $E = \cotg \frac{A}{2} \cotg \frac{B}{2} \cotg \frac{C}{2}$.

10°. Să se arate că într'un triunghi oarecare, avem

$$a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2.$$

Înlocuim $\cos C$ și $\cos B$ în funcțiunile de laturi, date de formulele

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

Făcând înlocuirile în membrul întâi și apoi reducerile, obținem $(b^2 - c^2)$.

11°. În orice triunghi, avem

$$b \cos B + c \cos C = a \cos(B - C).$$

$$\text{Știm că} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

De unde

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

pe care înlocuindu-le în primul membru, avem

$$E = \frac{a \sin B \cos B}{\sin A} + \frac{a \sin C \cos C}{\sin A} = \frac{a}{2 \sin A} (\sin 2B + \sin 2C),$$

$$E = \frac{a}{\sin A} \sin \frac{2B+2C}{2} \cos \frac{2B-2C}{2} = \frac{a \sin(B+C) \cos(B-C)}{\sin A}$$

$$E = a \cos(B - C).$$

12°. În orice triunghi, avem

$$1 - \tg \frac{1}{2} B \tg \frac{1}{2} C = \frac{2a}{a+b+c}.$$

Înlocuind pe $\tg \frac{B}{2}$ și $\tg \frac{C}{2}$, avem

$$1 - \tg \frac{B}{2} \tg \frac{C}{2} = 1 - \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} =$$

$$1 - \frac{p-a}{p} = \frac{p-p+a}{p} = \frac{a}{p}.$$

13°. În orice triunghi, avem

$$a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0.$$

Înlocuim pe a cu $2R \sin A$, căci se știe

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Însemnând cu E primul membru, avem

$$E = R [2 \sin A \sin(B-C) + 2 \sin B \sin(C-A) + 2 \sin C \sin(A-B)],$$

$$E = R \{ \cos[A-(B-C)] - \cos[A+(B-C)] + \cos[B-(C-A)] - \cos[B+(C-A)] + \cos[C-(A-B)] - \cos[C+(A-B)] \}$$

$$E = R [\cos(A-B+C) - \cos(A+B-C) + \cos(B-C+A) - \cos(B+C-A) + \cos(C-A+B) - \cos(C+A-B)] = 0.$$

14°. În orice triunghi, avem

$$\frac{b-c}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} + \frac{c-a}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{a-b}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}} = 0.$$

Știm că $r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, de unde

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{p}{r_a}.$$

Înlocuind, primul membru devine

$$E = \frac{p(b-c)}{r_a} + \frac{p(c-a)}{r_b} + \frac{p(a-b)}{r_c}.$$

Dar, $S = r_a(p-a)$, de unde $r_a = \frac{S}{p-a}$. Deci

$$E = \frac{p(b-c)(p-a)}{S} + \frac{p(c-a)(p-b)}{S} + \frac{p(a-b)(p-c)}{S} = 0.$$

15°. În orice triunghi, avem

$$2S = \frac{a^2}{\cotg B + \cotg C} = \frac{b^2}{\cotg C + \cotg A} = \frac{c^2}{\cotg A + \cotg B}.$$

$$\text{Se va înlocui } \cotg B + \cotg C = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C},$$

și se obține formula cunoscută

$$2S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A}.$$

16^o. *In orice triunghi, avem*

$$a^2 \cotg A + b^2 \cotg B + c^2 \cotg C = 4S.$$

Înlocuim $\cotg A = \frac{\cos A}{\sin A}$, apoi $\frac{a}{\sin A} = 2R$ și avem

$$E = 2R(a \cos A + b \cos B + c \cos C) =$$

$$2R \left(a \frac{b^2 + c^2 - a}{2bc} + b \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ca} + c \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right),$$

$$E = \frac{R}{abc} \left[a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) \right],$$

$$E = \frac{R}{abc} (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Dar

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4},$$

de unde

$$E = \frac{abc}{abc} 16S^2 = 4S.$$

17^o. *In orice triunghi, avem*

$$2R + 2r = a \cotg A + b \cotg B + c \cotg C.$$

Însemnând cu E membrul a doilea, avem

$$E = \frac{a}{\sin A} \cos A + \frac{b}{\sin B} \cos B + \frac{c}{\sin C} \cos C =$$

$$2R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Dar

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Deci

$$E = 2R \left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right),$$

$$E = 2R \left[1 + 4 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \right],$$

$$E = 2R \left[1 + \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \right] = 2R \left[1 + \frac{4S^2}{abc p} \right],$$

$$E = 2R \left(1 + \frac{4S}{abc} \cdot \frac{S}{p} \right) = 2R \left(1 + \frac{r}{R} \right) = 2R + 2r.$$

18^o. *În triunghiul dreptunghic ABC (A = 90°), avem*

$$r r_a = r_b r_c.$$

Avem

$$rr_a = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = (p-b)(p-c),$$

$$\begin{aligned} rra &= \frac{a-b+c}{2} \frac{a+b-c}{2} = \frac{[a-(b-c)][a+(b-c)]}{4} = \\ &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4} \end{aligned}$$

$$rr_a = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4} = \frac{b^2 + c^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4} = \frac{bc}{2} = S.$$

De asemenea

$$r_b r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}} \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}} = p(p-a),$$

$$r_b r_c = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} =$$

$$\frac{b^2 + c^2 + 2bc - (b^2 + c^2)}{4},$$

$$r_b r_c = \frac{bc}{2} = S.$$

Deci

$$rr_a = r_b r_c.$$

19°. În triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$), avem

$$r_a - r = r_b + r_c.$$

În adevăr, ținând seamă că $a^2 = b^2 + c^2$, $2S = bc$, avem

$$r_a - r = \frac{S}{p-a} - \frac{S}{p} = S \frac{p-(p-a)}{p(p-a)} = \frac{Sa}{p(p-a)} = a.$$

$$\text{Apoi } r_b + r_c = S \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) = S \frac{a}{(p-b)(p-c)} = a.$$

Deci

$$r_a - r = r_b + r_c.$$

LINIILE TRIGONOMETRICE ALE UNGHIIURILOR OARECARE.

Am studiat până acum liniile trigonometrice ale unghiurilor mai mici ca 180° . Cum în aplicațiile Trigonometriei intervin și unghiuri mai mari ca 180° , vom studia liniile trigonometrice ale unghiurilor din cadrantul al treilea, adică cuprinse între 180° și 270° , apoi ale unghiurilor din cadrantul al patrulea, cuprinse între 270° și 360° . În fine, vom arăta cum liniile trigonometrice ale oricărui unghi se reduc la acelea ale unghiurilor mai mici ca 45° .

63. **Liniile trigonometrice ale arcelor din cadrantul al treilea și al patrulea.** Să considerăm în cercul trigonometric (Fig. 29) unghiul AOC în cadrantul al treilea, căruia îi corespunde arcul $ABA'C = a$, și unghiul AOD în cadrantul al patrulea, cărui îi corespunde arcul $ABA'B'D = b$, a și b fiind numărul de grade.

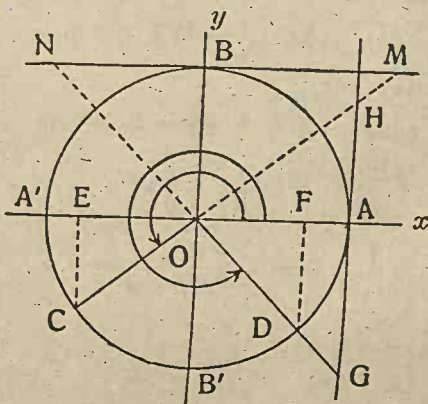


Fig. 29.

$\sec b = OG$, $\operatorname{cosec} b = BN$.

Sinusurile în cadranele al treilea și al patrulea măsurându-se pe diametrul BB' (Fig. 29), de la O către B' , sunt negative.

Cosinusul în cadrantul al treilea se măsoară de la O către

Să construim liniile trigonometrice ale acestor unghiuri, ca și pentru cele mai mici ca 180° . Ducem perpendicularele CE , DF pe diametrul AA' , și prelungim razele OC și OD până la tangentele în A și B la cerc.

Avem

$$\begin{aligned} \sin a &= CE, \cos a = OE, \operatorname{tga} = AH, \operatorname{cotga} = BM, \operatorname{seca} = OH, \\ \operatorname{coseca} &= OM, \sin b = FD, \cos b = OF, \operatorname{tgb} = AG, \operatorname{cotgb} = ON, \end{aligned}$$

A' , este negativ; în cadranul al patrulea, de la O către A , este pozitiv.

Tangenta în cadranul al treilea, se măsoară pe tangenta geometrică în A , deasupra diametrului AA' , este pozitivă, în cadranul al patrulea, de la A către G , dedesubtul diametrului AA' , este negativă. Ceea ce trebuia, căci $tga = \frac{\sin a}{\cos a}$, și cum în cadranul al treilea, $\sin a < 0$, $\cos a < 0$, raportul lor, $tga > 0$; iar în cadranul al patrulea, $\sin b < 0$, $\cos b > 0$, deci raportul lor $tgb < 0$.

Cotangenta în cadranul al treilea, se măsoară pe tangenta în B la cerc, la dreapta lui B , este pozitivă; în cadranul al patrulea, la stânga lui B , este negativă. Trebuia să fie astfel, căci $\cotga = \frac{\cos a}{\sin a}$, și în cadranul al treilea, raportul $\cotga > 0$, iar în al patrulea cadran, $\cotgb = \frac{\cos b}{\sin b} < 0$.

Secanta în cadranul al treilea, se obține prelungind raza OC în sens contrar cu extremitatea C a arcului, este negativă; în cadranul al patrulea, se prelungeste în același ca extremitatea D a arcului până la G tangenta în A la cerc, este pozitivă. Așa trebuia, căci $\operatorname{coseca} = \frac{1}{\cos a}$, și $\cos a < 0$ în cadranul al treilea, deci $\frac{1}{\cos a} < 0$, iar în cadranul al patrulea $\cos b > 0$, deci $\frac{1}{\cos b} > 0$.

Cosecanta în cadranul al treilea se obține prelungind raza OC în sens contrar cu extremitatea C până la M tangenta în B la cerc, este deci negativă; în cadranul al patrulea, în sens contrar cu extremitatea D a arcului, este negativă. Se mai vede și din cauză că $\operatorname{coseca} = \frac{1}{\sin a}$, și $\sin a < 0$, în cadranele al treilea și al patrulea.

Observare. Din cele expuse se vede că *relațiunile fundamentale ale Trigonometriei*,

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \quad tga = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \cotga = \frac{\cos a}{\sin a},$$

sunt adevărate și pentru unghiurile din cadranele al treilea și al patrulea, căci ele au loc și în valoare absolută și în semn.

64. Proiecția unui vector pe o axă. Un vector AB

este un segment de dreaptă, care are o origină A, o extremitate B, o mărime egală cu măsura segmentului AB și un sens de la A la B. Un vector se notează astfel \vec{AB} , sau \overline{AB} .

Unghiul unui vector OC (Fig. 29) cu o axă OA, este unghiul cu care trebuie învârtită în sens direct axa OA până se așterne peste OC.

Considerând figurile 13 și 29, se vede că pentru toate valorile unghiului a , avem că raportul dintre proiecția OE (Fig. 29) a vectorului OC pe AA' și acest vector OC, este egal cu $\cos a$. Deci $OE = OC \cos a$, aică *proiecția unui vector pe o axă este egală cu produsul aceluși vector prin cosinusul unghiului format de vector cu axa de proiecție.*

65. Variația liniilor trigonometrice. Presupunând că se consideră arcele cuprinse între 0° și 360° , semnele liniilor trigonometrice în cele patru cadrane se văd pe tabloul

a	$\sin a$	$\cos a$	tga	cotga	seca	coseca
Cadr. I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Pentru studiul variației liniilor trigonometrice să însemnăm cu A, A' și B, B' intersecțiile cercului trigonometric cu doi diametri perpendiculari Ox și Oy (Fig. 30). P fiind un punct al cercului, să însemnăm cu Q proiecția sa pe Ox și cu T, S intersecțiile dreptei OP cu tangentele în A și B la cerc. Însemnând cu a unghiul OAP, conform definiției liniilor trigonometrice, avem

$$QP = \sin a, OQ = \cos a, AT = \operatorname{tga}, OT = \operatorname{seca}, BS = \operatorname{cotga}, OS = \operatorname{coseca}.$$

Se vede că $\cos a$ și $\sin a$ sunt coordonate punctului P al cercului față de axele Ox, Oy .

1°. *Variația liniilor trigonometrice pentru cazul unghiurilor din primul cadran* este imediată și se poate vedea că, dacă a crește de la 0° la 90° , $\sin a$ (Fig. 30) crește de la 0 la 1; $\cos a = OQ$ descrește de la 1 la 0; $\operatorname{tg} a = AT$ crește de la 0 la ∞ , când OP este paralelă cu tangenta în A ; $\operatorname{cot} a = BS$ descrește de la ∞ , când OP este paralelă cu tangenta în B , până la 0 când P vine în B ; $\operatorname{seca} = \frac{1}{\cos a}$ crește de la 1, când T vine

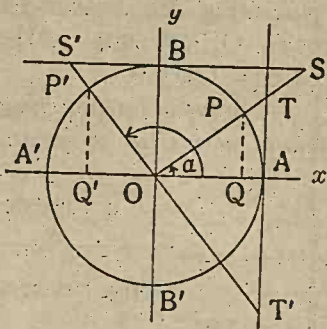


Fig. 30.

în A , până la ∞ , când OP este paralelă cu AT ; $\operatorname{coseca} = \frac{1}{\sin a}$ descrește de la ∞ , când P vine în A , până la 1 când P vine în B .

Avem deci tabloul

a	crește de la 0° la 90°
$\sin a$	crește de la 0 la 1
$\cos a$	descrește „ 1 „ 0
$\operatorname{tg} a$	crește „ 0 „ ∞
$\operatorname{cot} a$	descrește „ ∞ „ 0
seca	crește „ 1 „ ∞
coseca	descrește „ ∞ „ 1

2°. Când punctul P' vine în *cadranul al doilea* (Fig. 30), unghiul a este cuprins între 90° și 180° . Avem

$$\sin a = Q'P' > 0, \quad \cos a = OQ' < 0, \quad \operatorname{tg} a = AT' < 0, \\ \operatorname{cot} a = BS' < 0, \quad \operatorname{seca} = OT' < 0, \quad \operatorname{coseca} = OS' > 0.$$

Variația liniilor trigonometrice pentru unghiurile din cadranul al doilea, cuprinse între 90° și 180° , se urmărește ușor pe tabloul

a	crește de la 90° la 180°
$\sin a$	descrește de la 1 la 0
$\cos a$	descrește „ 0 „ -1
$\operatorname{tg} a$	crește „ $-\infty$ „ 0
$\operatorname{cot} a$	descrește „ 0 „ $-\infty$
seca	crește „ $-\infty$ „ -1
coseca	crește „ 1 „ ∞

3°. Când se consideră unghiuri AOC din *cadranul al treilea* (Fig. 29), cuprinse între 180° și 270° , avem $\sin a = EC < 0$, $\cos a = OE < 0$, $\operatorname{tg} a = AH > 0$, $\operatorname{cotg} a = BM > 0$, $\sec a = OH < 0$, $\operatorname{cosec} a = OM < 0$.

Variația liniilor trigonometrice ale unghiurilor din cadranul al treilea se poate urmări pe tabloul

a	crește	de la 180° la 270°
$\sin a$	descrește	de la 0 la -1
$\cos a$	crește	" -1 " 0
$\operatorname{tg} a$	crește	" 0 " ∞
$\operatorname{cotg} a$	descrește	" ∞ " 0
$\sec a$	descrește	" -1 " $-\infty$
$\operatorname{cosec} a$	crește	" $-\infty$ " -1

4°. Pentru unghiuri AOD din *cadranul al patrulea* (Fig. 29), cuprinse între 270° și 360° , avem

$\sin a = FD < 0$, $\cos a = OF > 0$, $\operatorname{tg} a = AG < 0$, $\operatorname{cotg} a = BN < 0$,

$\sec a = OG > 0$, $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = ON < 0$.

Variația liniilor trigonometrice ale unghiurilor din cadranul al patrulea se vede din tabloul

a	crește	de la 270° la 360°
$\sin a$	crește	de la -1 la 0
$\cos a$	crește	" 0 " 1
$\operatorname{tg} a$	crește	" $-\infty$ " 0
$\operatorname{cotg} a$	descrește	" 0 " $-\infty$
$\sec a$	descrește	" ∞ " 1
$\operatorname{cosec} a$	descrește	" -1 " $-\infty$

Vedem deci, că *sinusul unui unghi ia valori numai între -1 și $+1$; cosinusul, de asemenea între -1 și $+1$; tangenta și cotangenta, orice valori, dela $-\infty$ la ∞ ; secanta și cosecanta numai valori între $-\infty$ și -1 și între 1 și ∞ .*

Tabloul general al variații este următorul

α	$0 \dots 90^\circ$	$90^\circ \dots 180^\circ$	$180^\circ \dots 270^\circ$	$270^\circ \dots 360^\circ$
$\sin \alpha$	0 crește 1	1 descr. 0	0 descr. -1	-1 crește 0
$\cos \alpha$	1 descr. 0	0 descr. -1	-1 crește 0	0 crește 1
$\operatorname{tg} \alpha$	0 crește ∞	$-\infty$ crește 0	0 crește ∞	$-\infty$ crește 0
$\operatorname{cotg} \alpha$	∞ descr. 0	0 descr. $-\infty$	∞ descr. 0	0 descr. $-\infty$
seca	1 crește ∞	$-\infty$ crește -1	-1 descr. $-\infty$	∞ descr. 1
coseca	∞ descr. 1	1 crește ∞	$-\infty$ crește -1	-1 descr. $-\infty$

66. **Reprezentarea grafică a variații liniilor trigonometrice.** Să reprezentăm în raport cu două axe de coordonate Ox și Oy variația funcțiilor trigonometrice. Pentru aceasta vom considera ca abscise măsurile unghiurilor exprimate în

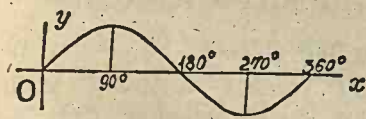


Fig. 31. — Sinusoida.

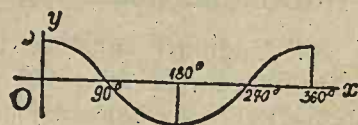


Fig. 32. — Cosinusoida.

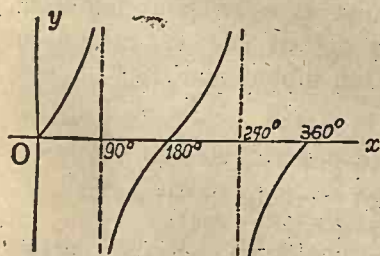


Fig. 33. — Tangentoida.

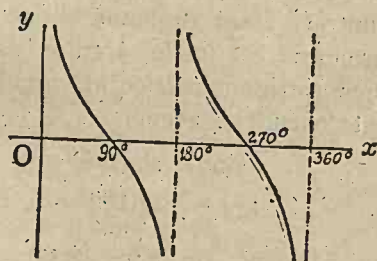


Fig. 34. — Cotangentoida

radiani, iar ca ordonate valorile funcțiilor trigonometrice corespunzătoare. Se obține astfel la fiecare valoare a unghiului un punct în planul axelor Ox , Oy . Unind aceste puncte cu o

trăsătură continuă, se obține o curbă care este reprezentarea grafică a variațiunii funcțiunei trigonometrice considerate.

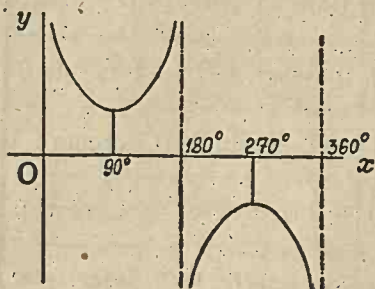


Fig. 35

Curba variații cosecanelor.

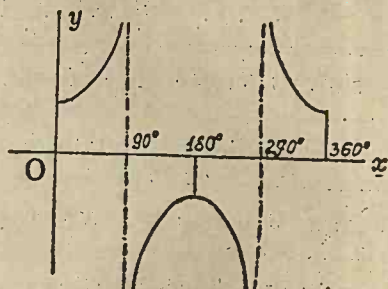


Fig. 36.

Curba variații secantei.

Operând astfel, să obținem curbele care reprezintă variațiile funcțiilor trigonometrice studiate. Pentru tangenta și cotangenta e destul a figura curba reprezentativă numai în interiorul $(0, 180^\circ)$, iar pentru celelalte funcțiuni trigonometrice, în intervalul $(0, 360^\circ)$, căci vom vedea că funcțiunile fiind periodice, în toate celelalte intervale curba se reproduce.

REDUCEREA LINIILOR TRIGONOMETRICE ALE UNGHIIURILOR OARECARE LA LINIILE TRIGONOMETRICE ALE UNGHIIURILOR ASCUȚITE.

67. Unghiuri cuprinse între 90° și 180° . Fiind dat un unghi a cuprins între 90° și 180° , ceea ce se poate scrie $90^\circ < a < 180^\circ$, să considerăm unghiul său suplimentar, $180^\circ - a$. Acesta este mai mic de cât 90° , și cum știm că liniile trigonometrice a două unghiuri suplimentare sunt egale și de semn contrar, afară de sinus și cosecantă care au și acelaș semn, urmează că liniile arcului dat a se pot calcula cu ajutorul liniilor trigonometrice ale arcului său suplimentar, $180^\circ - a$, care este ascuțit și avem

$$\begin{aligned} \sin a &= \sin(180^\circ - a), & \cos a &= -\cos(180^\circ - a), \\ \operatorname{tg} a &= -\operatorname{tg}(180^\circ - a), & \operatorname{cotg} a &= -\operatorname{cotg}(180^\circ - a). \end{aligned}$$

De ex., $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ$, $\operatorname{tg} 140^\circ = -\operatorname{tg} 40^\circ$, $\operatorname{cotg} 150^\circ = -\operatorname{cotg} 30^\circ$, $\sec 105^\circ = -\sec 75^\circ$, $\operatorname{cosec} 100^\circ = \operatorname{cosec} 80^\circ$.

68. Unghiuri cuprinse între 180° și 270° . Unghiuri care diferă cu 180° . Să considerăm un unghi AOC (Fig. 37.) în

cadranul al treilea, cuprins între 180° și 270° și să ducem liniile lui trigonometrice. Însemnând cu M punctul unde raza OC taie din nou cercul, se vede că însemnând cu a unghiul \widehat{AOM} , atunci unghiul $\widehat{AOC} = 180^\circ + a$. Deci unghiurile \widehat{AOC} și \widehat{AOM} diferă cu 180° .

Se vede că triunghiurile dreptunghice OCD și OMP sunt egale. Deci $PM = CD$, și ținând seamă de semne, urmează că

$$\sin a = -\sin(180^\circ + a).$$

Tot din egalitatea triunghiurilor, mai rezultă $OP = OD$, sau luând în considerare semnele, avem

$$\cos a = -\cos(180^\circ + a).$$

Apoi AT fiind tangenta ambelor unghiuri \widehat{AOM} și \widehat{AOC} , rezultă

$$\operatorname{tga} = \operatorname{tg}(180^\circ + a).$$

De asemenea, BS este cotangenta aceluiași unghiuri și deci

$$\operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg}(180^\circ + a).$$

În fine se vede, ținând seamă de semne, că

$$\operatorname{seca} = -\operatorname{sec}(180^\circ + a), \operatorname{coseca} = -\operatorname{cosec}(180^\circ + a).$$

Deci, *iniile trigonometrice ale unghiurilor care diferă cu 180° sunt egale și de semne contrare, afară de tangenta și cotangenta care au și același semn.*

Se observă că

$$\operatorname{tg}(180^\circ + a) = \operatorname{tga}, \operatorname{cotg}(180^\circ + a) = \operatorname{cotg} a,$$

ceea ce probează că măriră unghiul cu 180° , sau π , tangenta și cotangenta nu se schimbă. Aceasta se mai zice că *tangenta și cotangenta sunt funcțiuni periodice*, având ca perioadă unghiul 180° sau π (în radiani).

Deci

$$\operatorname{tg}(a + \pi) = \operatorname{tga}, \operatorname{cotg}(a + \pi) = \operatorname{cotg} a,$$

$$\operatorname{tg}(a + 2\pi) = \operatorname{tg}(a + \pi) = \operatorname{tga}, \operatorname{cotg}(a + 2\pi) = \operatorname{cotg} a,$$

$$\operatorname{tg}(a + n\pi) = \operatorname{tga}, \operatorname{cotg}(a + n\pi) = \operatorname{cotg} a,$$

n fiind un număr întreg și pozitiv (π radiani).

Sau,

$$\operatorname{tg}(a + n \cdot 180^\circ) = \operatorname{tga}, \operatorname{cotg}(a + n \cdot 180^\circ) = \operatorname{cotg} a.$$

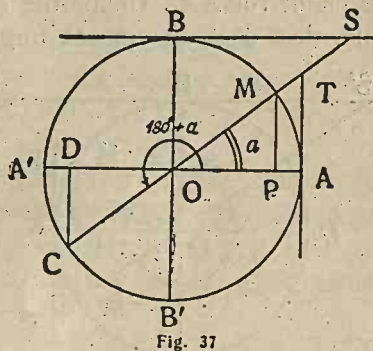


Fig. 37

De ex., $\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 250^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ$.

69. **Unghiuri cuprinse între 270° și 360° .** Unghiuri a căror sumă este 360° . Să considerăm unghiul AOM' din cadrantul al patrulea (Fig. 38) și să ducem perpendiculara $M'M$ pe diametrul AA' . Unghiurile ascuțite AOM și AOM' sunt egale, deci dacă se notează unghiul $AOM = \alpha$, atunci unghiul din cadrantul al patrulea $AOM' = 360^\circ - \alpha$.

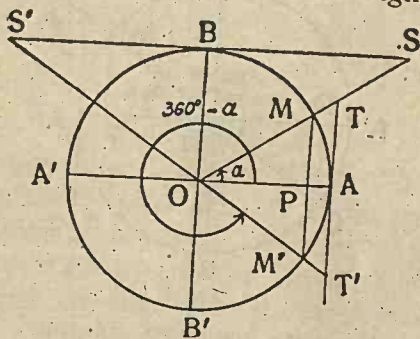


Fig. 38.

Triunghiurile dreptunghice MPO și $M'PO$ sunt egale, căci au ipotenuzele $OM = OM'$ ca raze și unghiurile ascuțite $MOA = AOM'$. Deci $MP = PM'$. De asemenea triunghiurile OAT și OAT' sunt egale, ca și OBS , OBS' .

Considerând liniile trigonometrice ale unghiurilor $360^\circ - \alpha = AOM'$ și $\alpha = AOM$, avem

$$\sin(360^\circ - \alpha) = PM' = -PM = \sin \alpha, \quad \cos(360^\circ - \alpha) = OP = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = AT' = -AT = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{cotg}(360^\circ - \alpha) = BS' = -BS$$

$$= -\operatorname{cotg} \alpha, \quad \operatorname{sec}(360^\circ - \alpha) = OT' = OT = \operatorname{sec} \alpha, \quad \operatorname{cosec}(360^\circ - \alpha) = OS' = -OS = -\operatorname{cosec} \alpha.$$

Deci liniile trigonometrice ale unghiurilor din cadrantul al patrulea se exprimă cu ajutorul celor din cadrantul întâi. Sau, *unghiurile care diferă cu 360° sunt egale și de semn contrarii, afară de cosinus și secantă care au și același semn.*

De ex., $\sin 320^\circ = -\sin 40^\circ$, $\cos 300^\circ = \cos 60^\circ$, $\operatorname{tg} 310^\circ = -\operatorname{tg} 50^\circ$.

70. **Unghiuri care diferă cu 360° .** Considerând un unghi α (Fig. 39), unghiul $360^\circ + \alpha$ se obține făcând ocolul odată în jurul lui O și apoi descriind unghiul α până Ox să așterne peste OA .

Rezultă deci că liniile trigonometrice ale unghiului $(360^\circ + \alpha)$ sunt aceleași ca ale unghiului α adică

$$\sin(360^\circ + \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\operatorname{cosec}(360^\circ + \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha.$$

Deci, dacă mărim unghiul cu 360° , toate liniile trigonometrice se reproduc, nu se schimbă. Se zice că *liniile trigonometrice* (funcțiunile trigonometrice) *sunt periodice și au perioada 360° , sau 2π (radiani)*. Adică

$$\begin{aligned}\sin(k \cdot 360^\circ + \alpha) &= \sin \alpha, \dots \\ \operatorname{cosec}(k \cdot 360^\circ + \alpha) &= \operatorname{cosec} \alpha, \dots \\ \sin(2k\pi + \alpha) &= \sin \alpha, \dots \\ \operatorname{cosec}(2k\pi + \alpha) &= \operatorname{cosec} \alpha.\end{aligned}$$

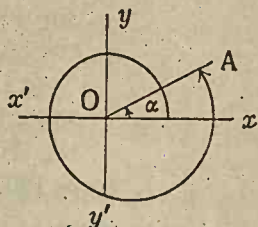


Fig. 39.

Observare. Perioada funcțiilor periodice sinus, cosinus, secanta, cosecanta este egală cu 360° sau 2π , pe când a funcțiilor tangenta și cotangenta, este 180° sau π .

71. Reducerea liniilor trigonometrice ale unghiurilor oarecare la acelea ale unghiului ascuțit. Reducerea la primul cadran. Fiind dat un unghi oarecare a , dacă este mai mare ca 360° , îl împărțim cu 360° și fie că am găsit câtul k și restul b , adică

$$a = k \cdot 360^\circ + b.$$

Urmează, conform celor de mai sus, că liniile trigonometrice ale unghiului a sunt egale cu acelea ale unghiului b . Unghiul b poate avea a doua latură în unul din cele patru cadrane. În fiecare din ultimele trei cazuri liniile trigonometrice ale unghiului b se reduc la acelea ale unghiului ascuțit, astfel că și pentru unghiul dat a , liniile sale trigonometrice se pot exprima cu acelea ale unghiului ascuțit. Această operație se zice reducerea la primul cadran.

Exemple. 1^o. Să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului $a = 840^\circ$. Avem $840^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 120^\circ$. Deci liniile trigonometrice ale unghiului 840° sunt egale cu acelea ale unghiului 120° . Dar 120° este în cadranul al doilea, suplimentar cu 60° .

$$\begin{aligned}\text{Deci } \sin 840^\circ &= \sin 120^\circ = \sin 60^\circ, \quad \cos 840^\circ = -\cos 60^\circ, \\ \operatorname{tg} 840^\circ &= -\operatorname{tg} 60^\circ, \quad \operatorname{cotg} 840^\circ = -\operatorname{cotg} 60^\circ, \\ \operatorname{sec} 840^\circ &= -\operatorname{sec} 60^\circ, \quad \operatorname{cosec} 840^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ.\end{aligned}$$

Am redus calculul liniilor trigonometrice ale unghiului 840° la acelea ale unghiului 60° , din primul cadran.

2^o. Să considerăm unghiul de 1305° . Avem

$$1305^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 225^\circ,$$

deci liniile trigonometrice ale unghiului 1305° sunt egale cu acelea ale unghiului 225° . Dar

$$225^\circ = 180^\circ + 45^\circ.$$

Deci

$$\begin{aligned}\sin 1305^\circ &= \sin 225^\circ = -\sin 45^\circ, \\ \cos 1305^\circ &= \cos 225^\circ = -\cos 45^\circ, \\ \operatorname{tg} 1305^\circ &= \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ, \\ \operatorname{cotg} 1305^\circ &= \operatorname{cotg} 225^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ, \\ \operatorname{sec} 1305^\circ &= \operatorname{sec} 225^\circ = -\operatorname{sec} 45^\circ, \\ \operatorname{cosec} 1305^\circ &= \operatorname{cosec} 225^\circ = -\operatorname{cosec} 45^\circ.\end{aligned}$$

Liniile trigonometrice ale unghiului 1305° s'au redus la acelea ale unghiului 45° .

3°. Fie unghiul 1770° . Avem

$$1770^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 330^\circ,$$

deci liniile trigonometrice ale unghiului considerat sunt egale cu acelea ale unghiului 330° . Dar

$$330^\circ = 360^\circ - 30^\circ.$$

Deci

$$\begin{aligned}\sin 1770^\circ &= \sin 330^\circ = -\sin 30^\circ, \\ \cos 1770^\circ &= \cos 330^\circ = \cos 30^\circ, \\ \operatorname{tg} 1770^\circ &= \operatorname{tg} 330^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ, \\ \operatorname{cot} 1770^\circ &= \operatorname{cotg} 330^\circ = -\operatorname{cotg} 30^\circ, \\ \operatorname{sec} 1770^\circ &= \operatorname{sec} 330^\circ = \operatorname{sec} 30^\circ, \\ \operatorname{cosec} 1770^\circ &= \operatorname{cosec} 330^\circ = -\operatorname{cosec} 30^\circ.\end{aligned}$$

Observare. Reducerea la unghiuri mai mici decât 45° . Am văzut că liniile trigonometrice ale unui unghi oarecare se reduc la acelea ale unui unghi ascuțit. Știind relațiunile ce există între liniile trigonometrice a două unghiuri complimentare (No. 14), se pot reduce aceste funcțiuni la acelea ale unghiurilor mai mici decât 45° . De exemplu, $\sin 1730^\circ = \sin 290^\circ = \sin(360^\circ - 70^\circ) = -\sin 70^\circ = -\cos 20^\circ$.

72. *Unghiuri care corespund la o linie trigonometrică dată. 1°. Fiind dată valoarea lui $\sin \alpha$, să găsim forma generală a unghiurilor care au acelaș sinus ca și α . Am văzut că α fiind o valoare care răspunde problemei, atunci și $180^\circ - \alpha$, sau $\pi - \alpha$, suplimentul să are acelaș sinus. Adăugându-le la fiecare câte un multiplu al lui 360° , adică $k \cdot 360$, sau $2k\pi$, urmează că și arcele*

$$2k\pi + \alpha, 2k\pi + \pi - \alpha$$

au acelaș sinus ca și α . Forma generală a unghiurilor ce au acelaș sinus ca și unghiul α este

$$2k\pi + \alpha, (2k + 1)\pi - \alpha,$$

k fiind un întreg oarecare.

De ex., $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. O valoare este 30° ; forma generală a unghiurilor al căror sinus este egal cu $\frac{1}{2}$ este

$$2k\pi + 30^\circ, (2k+1)\pi - 30^\circ.$$

Făcând pe $k=0, 1, 2, \dots$, avem unghiurile $30^\circ, \pi - 30^\circ; 2\pi + 30^\circ, 3\pi - 30^\circ; \dots (\pi = 180^\circ)$.

2°. Să se afle forma generală a unghiurilor ce au acelaș cosinus ca un unghi dat. Fiind cunoscută valoarea lui $\cos \alpha$, urmează că și $-\alpha$ are acelaș cosinus ca unghiul α . Deci

$$2k\pi + \alpha, 2k\pi - \alpha,$$

sau

$$2k\pi \pm \alpha$$

este forma generală a unghiurilor ce au acelaș cosinus ca și unghiul α , k fiind un întreg oarecare.

De ex. unghiurile al căror cos este egal cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sunt date de formula

$$2k\pi \pm 45^\circ,$$

k fiind un întreg oarecare.

3°. Forma generală a unghiurilor care au aceeași tangentă ca un unghi dat. Dacă se cunoaște $\operatorname{tg} \alpha$, înseamnă că și $\alpha + \pi, \alpha + 2\pi, \dots, \alpha + k\pi, \dots$ au aceeași tangentă ca și α . Deci forma generală a acestor unghiuri a căror tangentă este egală cu $\operatorname{tg} \alpha$, este

$$k\pi + \alpha,$$

k fiind un întreg oarecare.

73. Aplicații. 1) Am văzut că fiind dat $\sin a$, valorile lui $\cos a$ sunt date de relația

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

De unde

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a, \cos a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 a},$$

adică, la o valoare dată lui $\sin a$, corespund două valori pentru $\cos a$.

Aceasta se poate explica în modul următor. Fiind cunoscută valoarea lui $\sin a$, urmează că toate arcele ce au acelaș sinus ca cel dat sunt exprimate cu formulele

$$2k\pi + a, (2k+1)\pi - a,$$

k fiind un întreg oarecare. Dând lui k valorile $0, 1, \dots$ avem

$$k=1, a, \pi - a; k=2, 2\pi + a, 2\pi + \pi - a; \dots$$

Dar unghiurile obținute pentru $k=1, 2, \dots$, diferind de unghiurile a și $(\pi - a)$ cu un multiplu de 2π , au aceeași funcțiuni trigonometrice ca și a și $(\pi - a)$. Rămâne deci de considerat numai a și $(\pi - a)$, ale căror consinusi sunt

$$\cos a, \cos(\pi - a) = -\cos a,$$

astfel că se vede că la o valoare a lui $\sin a$ corespund două valori egale și de semn contrar, $\cos a$, și $-\cos a$ pentru funcțiunea cosinus.

2) Am văzut, de asemenea, că fiind dată valoarea lui $\operatorname{tg} a$, pentru $\sin a$ și $\cos a$ avem formulele

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}, \quad \cos a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}};$$

deci la o valoare dată a lui $\operatorname{tg} a$, corespund două valori egale și de semn contrar pentru $\sin a$ și $\cos a$.

Îată cum se poate explica acest rezultat. Fiind cunoscută valoarea $\operatorname{tg} a$, arcele care au aceeași tangentă sunt date de formula

$$k\pi + a,$$

k fiind întreg oarecare. Dând valorile $0, 1, 2, \dots$, avem

$$k=0, a; k=1, \pi + a; k=2, 2\pi + a, \dots$$

Valorile unghiurilor, începând de la $k=2$, diferă de a și $\pi + a$ cu un multiplu al lui 2π ; deci cu aceleași funcțiuni trigonometrice ca și unghiurile a și $(\pi + a)$. Astfel, pentru sinus și cosinus corespund valorile

$$\sin a, \sin(\pi + a) = -\sin a,$$

$$\cos a, \cos(\pi + a) = -\cos a,$$

adică egale și de semn contrarii și se vede că la o valoare a lui $\operatorname{tg} a$ corespund două valori egale și de semn contrarii pentru $\sin a$ și $\cos a$

EXERCITII.

1. Să se afle liniile trigonometrice ale unghiului $(a + 90^\circ)$ cu ajutorul acelorale ale unghiului a .

R. Se consideră triunghiul dreptunghic OAB , B fiind proiecția lui A pe Ox . Se ia pe perpendiculara în O pe OA lungimea $OC = OA$ și fie D proiecția lui C pe Ox . Unghiurile $\angle BOA = a$, $\angle BOC = 90^\circ + a$. Triunghiurile OAB și OCD sunt egale. Avem

$$\sin(90^\circ + a) = \frac{DC}{OC} = \frac{OB}{OA} = \cos a, \quad \cos(90^\circ + a) = -\sin a, \dots$$

Se pot găsi aceste rezultate și pe baza celor obținute. În adevăr, se vede că $(90^\circ + a)$ și $(-a)$ sunt unghiuri complementare. Deci

$$\sin(90^\circ + a) = \cos(-a) = \cos a, \quad \cos(90^\circ + a) = \sin(-a) = -\sin a,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + a) = \operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a, \quad \sec(90^\circ + a) = -\operatorname{cosec} a,$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ + a) = \sec a.$$

2. Să se afle liniile trigonometrice ale unghiului $(a + 270^\circ)$ cu ajutorul acelorale ale unghiului a .

R. Fie B proiecția pe Ox a unui punct A din cadranul xOy și OC perpendiculara pe OA , astfel ca unghiul format de OA și OC să fie 270° . Fie D proiecția lui C pe Ox . Unghiurile $\angle xOA = a$, $\angle xOC = a + 270^\circ$.

$$\sin(270^\circ + a) = \sin[180^\circ + (90^\circ + a)] = -\sin(90^\circ + a) =$$

$$-\cos(-a) = -\cos a, \quad \cos(270^\circ + a) = \sin a, \quad \operatorname{tg}(270^\circ + a) = -\operatorname{cotg} a, \dots$$

Se poate și geometric, conform definiții liniilor trigonometrice, considerând triunghiurile OAB, COD și ținând seamă de sensul vectorilor. De ex.,

$$\sin(270^\circ + a) = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} = \frac{-\overline{OB}}{\overline{OA}} = -\cos a, \text{ etc.}$$

3. Să se arate că $\sin(270^\circ - a) = -\cos a$, $\cos(270^\circ - a) = -\sin a$.

R. A fiind un punct în primul cadran, B proiecția lui pe Ox, OC o dreaptă în cadranul al treilea, astfel ca unghiul ascuțit $\text{CO}y' = \text{BOA}$, $\text{OC} = \text{OA}$, D proiecția lui C pe Ox, unghiurile $\text{BOA} = a$, $\text{BOC} = 270^\circ - a$. Se consideră triunghiurile AOB, COD.

Sau, în baza celor stabilite,

$$\sin(270^\circ - a) = \sin[180^\circ + (90^\circ - a)] = -\sin(90^\circ - a) = -\cos a, \text{ etc.}$$

4. Să se reducă la primul cadran unghiurile 1970° , 1660° , 3180° .

R. $1970^\circ = 5 \cdot 360^\circ + (180^\circ - 10^\circ)$; $1660^\circ = 4 \cdot 360^\circ + (180^\circ + 40^\circ)$; $3180^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 300^\circ$.

APLICAȚII (1).

74. Fiind cunoscut $\cos a$, să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului pe jumătate, $\frac{1}{2}a$. Am văzut (No. 45) că

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}, \quad \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}.$$

Extrăgând rădăcina pătrată și ținând seamă că liniile trigonometrice pot avea ambele semne, urmează

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}, \quad \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

$$\text{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

Acestea sunt formulele care ne dau liniile trigonometrice ale unghiului $\frac{a}{2}$, când se cunoaște $\cos a$.

Observare. Se poate ușor arăta pentru ce la o valoare dată lui $\cos a$, corespund, cu formulele de mai sus, două valori pentru $\sin \frac{1}{2}a$, $\cos \frac{1}{2}a$, $\text{tg} \frac{1}{2}a$, după cum să ia semnul + sau - înaintea radicalului. În adevăr, când se dă $\cos a$, știm (No. 72) că forma generală a arcelor ce au același cosinus, este

$$2k\pi \pm \alpha.$$

(1) Nu face parte din program.

Trebuind a lua jumătatea acestor unghiuri, forma generală a lor este

$$k\pi \pm \frac{1}{2}\alpha,$$

k fiind un întreg oarecare. Dând lui k diferite valori, avem

$$k=0, \frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha; k=1, \pi + \frac{1}{2}\alpha, \pi - \frac{1}{2}\alpha;$$

$$k=2, 2\pi + \frac{1}{2}\alpha, 2\pi - \frac{1}{2}\alpha; \dots$$

Având în vedere că liniile trigonometrice sunt periodice, cu perioada 2π , sau 360° , rezultă că unghiurile, ale căror linii trigonometrice ar putea să fie distincte, sunt

$$\frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha, \pi + \frac{1}{2}\alpha, \pi - \frac{1}{2}\alpha.$$

$$\text{Dar } \sin\left(\pi + \frac{1}{2}\alpha\right) = -\sin\frac{1}{2}\alpha, \quad \sin\left(\pi - \frac{1}{2}\alpha\right) = \sin\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos\left(\pi + \frac{1}{2}\alpha\right) = -\cos\frac{1}{2}\alpha, \quad \cos\left(\pi - \frac{1}{2}\alpha\right) = -\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{1}{2}\alpha\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{1}{2}\alpha\right) = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha.$$

Vedem deci că pentru fiecare linie trigonometrică se obțin numai câte două valori distincte, egale respectiv cu $\pm \sin\frac{1}{2}\alpha$, $\pm \cos\frac{1}{2}\alpha$, $\pm \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, și așa am explicat cum pentru o valoare dată lui $\cos\alpha$ corespund câte două valori distincte pentru $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$.

75. Fiind cunoscută valoarea lui $\sin\alpha$, să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului $\frac{1}{2}\alpha$. Avem

$$2\sin\beta\cos\beta = \sin 2\beta,$$

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Adunând sau scăzând aceste relațiuni, găsim

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta = 1 + \sin 2\beta,$$

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta - 2\sin\beta\cos\beta = 1 - \sin 2\beta.$$

Sau

$$(\cos\beta + \sin\beta)^2 = 1 + \sin 2\beta,$$

$$(\cos\beta - \sin\beta)^2 = 1 - \sin 2\beta.$$

De unde

$$\begin{aligned}\cos\beta + \sin\beta &= \pm\sqrt{1 + \sin 2\beta}, \\ \cos\beta - \sin\beta &= \pm\sqrt{1 - \sin 2\beta}.\end{aligned}$$

Înlocuind pe β cu $\frac{1}{2}\alpha$, avem

$$(9) \quad \begin{aligned}\cos \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha &= \pm\sqrt{1 + \sin\alpha}, \\ \cos \frac{1}{2}\alpha - \sin \frac{1}{2}\alpha &= \pm\sqrt{1 - \sin\alpha}.\end{aligned}$$

Adunând și scăzând aceste relații, obținem

$$\begin{aligned}2 \cos \frac{1}{2}\alpha &= \pm\sqrt{1 + \sin\alpha} \pm \sqrt{1 - \sin\alpha}, \\ 2 \sin \frac{1}{2}\alpha &= \pm\sqrt{1 + \sin\alpha} \mp \sqrt{1 - \sin\alpha},\end{aligned}$$

care ne dau valorile lui $\cos \frac{1}{2}\alpha$ și $\sin \frac{1}{2}\alpha$, când se cunoaște $\sin\alpha$.

Rămâne numai de hotărât ce semne trebuie luate în fața radicalilor din membrul al doilea al relațiilor (9). Iată cum se procedează. Se observă cum stau, una față de cealaltă, funcțiunile $\cos \frac{1}{2}\alpha$ și $\sin \frac{1}{2}\alpha$ și se ia în fața radicalilor $\sqrt{1 + \sin\alpha}$, $\sqrt{1 - \sin\alpha}$.

semnele ce le au expresiile $\cos \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha$, $\cos \frac{1}{2}\alpha - \sin \frac{1}{2}\alpha$.

Exemple. 1. Să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului 15° , când se cunoaște $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Observăm că

$\sin 15^\circ < \cos 15^\circ$, amândouă fiind pozitive; deci $\cos 15^\circ + \sin 15^\circ > 0$, $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ > 0$. Trebuie deci să se ia semnul $+$ la radicalii din membrul al doilea din (9). Avem

$$\cos 15^\circ + \sin 15^\circ = \sqrt{1 + \sin 30^\circ} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}},$$

$$\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \sqrt{1 - \sin 30^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}}.$$

Adunând și scăzând, găsim

$$2\cos 15^\circ = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}}, \quad 2\sin 15^\circ = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}},$$

de unde

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right), \quad \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right).$$

2. Să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului 175° , când se cunoaște $\sin 350^\circ$. Unghiul 175° este în cadrantul al doilea, $\sin 175^\circ > 0$, $\cos 175^\circ < 0$, iar în valoarea absolută, avem

$$|\cos 175^\circ| > |\sin 175^\circ|.$$

Deci

$$\cos 175^\circ + \sin 175^\circ < 0, \quad \cos 175^\circ - \sin 175^\circ < 0,$$

așa că în formulele (9) trebuie să luăm la primul radical semnul $-$, iar la al doilea, semnul $-$. Avem

$$\cos 175^\circ + \sin 175^\circ = -\sqrt{1 + \sin 350^\circ},$$

$$\cos 175^\circ - \sin 175^\circ = -\sqrt{1 - \sin 350^\circ}.$$

Adunând și scăzând aceste relații, avem

$$2\cos 175^\circ = -\sqrt{1 + \sin 350^\circ} - \sqrt{1 - \sin 350^\circ},$$

$$2\sin 175^\circ = -\sqrt{1 + \sin 350^\circ} + \sqrt{1 - \sin 350^\circ},$$

cu care se pot calcula $\cos 175^\circ$ și $\sin 175^\circ$.

76. Se dă $\operatorname{tg} a$ și se cere să se calculeze $\sin \frac{1}{2}a$, $\cos \frac{1}{2}a$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$. Dacă am ști $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$, atunci valorile lui $\sin \frac{1}{2}a$ și $\cos \frac{1}{2}a$ sunt date de relațiile

$$\sin \frac{1}{2}a = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a}}, \quad \cos a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a}}.$$

Trebuie deci să calculăm pe $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$, când se cunoaște tga .

Avem

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta},$$

de unde

$$(1 - \operatorname{tg}^2\beta)\operatorname{tg} 2\beta = 2\operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{tg} 2\beta - \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg}^2\beta = 2\operatorname{tg}\beta.$$

Sau

$$\operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg}^2\beta + 2\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg} 2\beta = 0.$$

Făcând pe $\beta = \frac{1}{2}a$, această ecuație devine

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a \operatorname{tga} + 2\operatorname{tg} \frac{1}{2}a - \operatorname{tga} = 0$$

Această ecuație fiind de gradul al doilea în raport cu

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$, rezolvând-o, avem

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tga}}}{\operatorname{tga}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tga}}$$

Deci, la o valoare dată pentru tga , corespund două valori pentru $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$,

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tga}}, \quad \frac{-1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tga}}$$

Înlocuind aceste două valori ale lui $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$ în formulele

$$\sin \frac{1}{2}a = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a}}, \quad \cos \frac{1}{2}a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a}},$$

și ținând seamă și de dublul semn, \pm , înaintea radicalilor, urmează că vor corespunde câte patru valori pentru $\sin \frac{1}{2}a$, și $\cos \frac{1}{2}a$, când se dă tga .

Se poate ușor arăta că trebuia să fie patru valori pentru $\sin \frac{1}{2}a$ de ex., când se cunoaște tga . În adevăr, fiind dată valoarea lui tga , urmează că unghiurile care au aceeași tangentă ca și tga sunt date de formula

$$k\pi + a,$$

k fiind un întreg oarecare. Dând lui k valorile $k=0, 1, 2, \dots$, avem

$$k=0, a; \quad k=1, \pi + a; \quad k=2, 2\pi + a; \quad k=3, 3\pi + a; \\ k=4, 4\pi + a, \dots$$

Trebuind să luăm jumătatea unghiului, aceste jumătăți sunt

$$\frac{1}{2}a; \quad \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}a; \quad \pi + \frac{1}{2}a, \quad \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}a; \quad 2\pi + \frac{1}{2}a, \dots$$

Unghiurile, începând de la al cincilea, diferă de primele patru unghiuri cu multiplii de 2π și deci liniile lor trigonometrice sunt aceleași ca ale primelor patru unghiuri. Așa, pentru sinus, valorile sinusului sunt

$$\sin \frac{1}{2}a, \quad \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}a\right), \quad \sin\left(\pi + \frac{1}{2}a\right), \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}a\right),$$

și astfel se vede că la o valoare dată pentru tga corespund patru valori pentru sinusul unghiului $\frac{1}{2}a$.

Exemplu. $\operatorname{tga} = 1$. Avem

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tga}} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Ne servim de formulele

$$\sin \frac{1}{2}a = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a}}, \quad \cos \frac{1}{2}a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a}}.$$

Înlocuind pe $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$ cu valorile sale $-1 \pm \sqrt{2}$, avem de ex., pentru $\sin \frac{1}{2}a$,

$$\sin \frac{1}{2}a = \frac{-1 + \sqrt{2}}{\pm \sqrt{1 + (-1 + \sqrt{2})^2}}, \quad \sin \frac{1}{2}a = \frac{-1 - \sqrt{2}}{\pm \sqrt{1 + (-1 - \sqrt{2})^2}}.$$

Avem

$$\sin \frac{1}{2}a = \frac{-1 + \sqrt{2}}{\pm \sqrt{1 + 1 - 2\sqrt{2} + 2}} =$$

$$\frac{-1 + \sqrt{2}}{\pm \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\pm \sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}},$$

$$\sin \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\pm \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\pm 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} =$$

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\pm \sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos \frac{1}{2}a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + (-1 + \sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\pm \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} =$$

$$\frac{1}{\pm \sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\pm \sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\cos \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - 2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\pm \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

La fel se obțin alte valori înlocuind pe $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ cu valoarea $(-1-\sqrt{2})$.

77. Expriimarea rațională a sinusului și cosinusului unui unghi cu ajutorul tangentei jumătăței unghiului. Formulele

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

dau sub formă nerațională (cu radicali) valorile lui $\sin\beta$, $\cos\beta$ cu ajutorul lui $\operatorname{tg}\beta$. Vom căuta a găsi expresiunile sinusului și cosinusului sub formă rațională cu ajutorul tangentei jumătăței unghiului.

Pentru aceasta să considerăm

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = 2 \frac{\operatorname{tg}\beta}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

$$\sin 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}.$$

(10) De asemenea,

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}\right)^2,$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta} - \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta},$$

(11)

$$\cos 2\beta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Făcând în formulele (10) și (11) pe $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ avem

$$(12) \quad \sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

De asemenea avem

$$(13) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

Formulele (12) și (13) ne dau, sub formă rațională, valorile $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ cu ajutorul tangentei unghiului $\frac{1}{2}\alpha$.

EXERCİȚII

1. Știind că $\cos \alpha = \frac{1}{9}$ și că unghiul α este cuprins între 270° și 360° , să se calculeze $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$.

R. $\frac{1}{2}\alpha$ este cuprins între 135° și 180° ; deci $\sin \frac{1}{2}\alpha > 0$, $\cos \frac{1}{2}\alpha < 0$.
 $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{2}{3}$, $\cos \frac{1}{2}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2. Știind că $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ și că unghiul α este cuprins între 360° și 540° , să se calculeze $\sin \frac{1}{2}\alpha$, $\cos \frac{1}{2}\alpha$.

R. Unghiul $\frac{\alpha}{2}$ este cuprins între 180° și 270° și $|\sin \frac{\alpha}{2}| < |\cos \frac{\alpha}{2}|$,

$$\sin \frac{\alpha}{2} < 0, \cos \frac{\alpha}{2} < 0, \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} < 0, \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} < 0;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 + \sin \alpha}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

3. Știind că $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$, să se calculeze $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$.

R. Se întrebuințează formulele (12) (13). Se găsește

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

4. Știind că $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$, să se calculeze $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

R. Se va calcula întâi $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{-1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1} =$

$$\frac{(-1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}})(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{(4 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)^2}}{(\sqrt{2})^2 - 1} =$$

$$-\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{(4 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} = -\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{4 + \sqrt{2}}.$$

În fine, $\sin \frac{1}{2}\alpha$, $\cos \frac{1}{2}\alpha$ cu formulele

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}}, \quad \cos \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}}.$$

5. Știind că $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n}$ să se calculeze $x = m \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

$$R. \quad x = m \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = m \frac{2\frac{m}{n}}{1 + \frac{m^2}{n^2}} + \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{1 + \frac{m^2}{n^2}}$$

$$x = m \frac{2mn}{m^2+n^2} + \frac{n(n^2-m^2)}{m^2+n^2} = n.$$

6. Să se verifice identitatea

$$\cotg(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha \cos\alpha + \sin\beta \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}.$$

R. $\sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$. Avem

$$E \equiv \frac{\sin\alpha \cos\alpha + \sin\beta \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\beta}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)},$$

$$E \equiv \frac{1}{2} \frac{2 \sin \frac{2\alpha + 2\beta}{2} \cos \frac{2\alpha - 2\beta}{2}}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} = \cotg(\alpha - \beta).$$

7. Să se verifice identitatea

$$\sin 3\alpha \sin^2 \alpha + \cos 3\alpha \cos^2 \alpha = \cos^2 2\alpha.$$

R. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

$$E \equiv 4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 3(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha),$$

$$E \equiv (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)[4(\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 3(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)],$$

$$E \equiv \cos 2\alpha \{4[(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] - 3\} = \cos 2\alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha),$$

$$E \equiv \cos 2\alpha (1 - \sin^2 2\alpha) = \cos^2 2\alpha.$$

8. Să se verifice identitatea

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots + \sin[\alpha + (n-1)\beta]$$

$$= \frac{\sin \left[\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right] \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

R. Însemnând cu S primul membru al acestei identități, înmulțim cu $2 \sin \frac{\beta}{2}$, și avem

$$2S \sin \frac{\beta}{2} = 2 \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2} + 2 \sin(\alpha + \beta) \sin \frac{\beta}{2} + \dots + 2 \sin[\alpha + (n-1)\beta] \sin \frac{\beta}{2},$$

Dar

$$2 \sin p \sin q = \cos(p - q) - \cos(p + q).$$

Deci

$$2S \sin \frac{\beta}{2} = \cos \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) - \cos \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) +$$

$$\cos \left(\alpha + \beta - \frac{\beta}{2} \right) - \cos \left(\alpha + \beta + \frac{\beta}{2} \right) +$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\cos \left[\alpha + (n-1)\beta - \frac{\beta}{2} \right] - \cos \left[\alpha + (n-1)\beta + \frac{\beta}{2} \right].$$

Adunând, rămân, în membrul al doilea, numai termenii extremi și avem

$$2S \sin \frac{\beta}{2} = \cos \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) - \cos \left[\alpha + (n-1)\beta + \frac{\beta}{2} \right].$$

De unde

$$2S \sin \frac{\beta}{2} = -2 \sin \frac{\alpha - \frac{\beta}{2} + \alpha + (n-1)\beta + \frac{\beta}{2}}{2} \sin \frac{\alpha - \frac{\beta}{2} - \left[\alpha + (n-1)\beta + \frac{\beta}{2} \right]}{2}$$

$$2S \sin \frac{\beta}{2} = -2 \sin \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right) \sin \frac{-\frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} - (n-1)\beta}{2}$$

$$2S \sin \frac{\beta}{2} = -2 \sin \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right) (-1) \sin \frac{n\beta}{2}$$

$$S = \frac{\sin \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right) \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

ECUAȚII TRIGONOMETRICE (1).

78. **Generalități.** Am văzut că liniile trigonometrice ale unghiului oarecare le putem exprima cu ajutorul liniilor trigonometrice ale unghiului ascuțit. Pe de altă parte, cunoscând o linie trigonometrică a unui unghi, cu ajutorul ei putem afla celelalte linii ale aceluși unghi. De aceea este destul a calcula valorile unei linii trigonometrice pentru unghiul ascuțit. Mai mult, e de ajuns să calculăm valorile pentru unghiuri cuprinse între 0° și 45° , căci sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta unui unghi cuprins între 45° și 90° sunt egale cu cosinusul, sinusul, cotangenta, tangenta unghiului complimentar, cuprins între 0° și 45° . De aceea, în tablele goniometrice (*Dupuis, Lignes trigonométriques naturelles*, p. 149) sunt calculate numai valorile liniilor trigonometrice pentru unghiuri dela 0° la 45° .

Pentru a calcula logaritmul unei linii trigonometrice a unui unghi mai mare ca 90° , reducem mai întâi acel unghi la cel ascuțit corespunzător și căutăm logaritmul acestuia. Evident că luăm logaritmii numai ai acelor linii trigonometrice care sunt pozitive, căci numai numerile pozitive au logaritmi.

De ex., $\log \sin 150^\circ = \log \sin 30^\circ = 1,69897$; $\log \operatorname{tg} 250^\circ =$
 $\log \operatorname{tg} 70^\circ = 0,43893$.

Dacă, acum, se dă valoarea linii trigonometrice și se cere unghiul, se aplică logaritmul și apoi cu ajutorul tabelor logaritmice, aflăm unghiul.

Exemple. 1) Se dă $\sin \alpha = 0,52992$ și se cere unghiul α . Aplicând logaritmii, avem

$$\log \sin \alpha = \log 0,52992 = 1,72421,$$

$$\alpha = 32^\circ.$$

(1) Nu face parte din program.

Fiind dat unghiul prin valoarea sinusului său, forma generală a unghiurilor corespunzătoare problemei, este

$$2k\pi + \alpha, (2k+1)\pi - \alpha,$$

sau, în cazul nostru,

$$2k\pi + 32^\circ, (2k+1)\pi - 32^\circ$$

k fiind întreg oarecare. Dând lui k valorile 0, 1, 2, 3, ..., obținem $k=0, 32^\circ, \pi - 32^\circ = 148^\circ$; $k=1, 2\pi + 32^\circ = 392^\circ, 3\pi - 32^\circ = 508^\circ$; ..., care sunt unghiurile al căror sinus este egal cu 0,52992.

2) Să considerăm acum cazul când se cere unghiul α dat de relația $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Unghiul β , dat de relația $\cos \beta = \frac{3}{5}$, este suplimentar cu α , sau diferă cu 180° , căci au cosinusurile egale și de semne contrare. Deci

$$\alpha = 180^\circ \pm \beta, \alpha = 2k\pi + 180^\circ \pm \beta = (2k+1)\pi \pm \beta.$$

Să calculăm deci pe β dat de ecuația

$$\cos \beta = \frac{3}{5},$$

și apoi unghiul căutat α îl aflăm cu relația de mai sus. Aplicând logaritmi, avem

$$\log \cos \beta = \log \frac{3}{5} = \log 3 - \log 5,$$

$$\log \cos \beta = 0,47712 - 0,69897 = 0,47712 + \bar{1},30103 = \bar{1},77815.$$

De unde $\beta = 53^\circ 7' 49''$.

Valoarea lui α este dată de $(2k+1)\pi \pm 53^\circ 7' 49''$. Pentru cazul $k=0$, avem $\alpha = 180^\circ - 53^\circ 7' 49'' = 126^\circ 52' 11''$.

Observare. În tablele logaritmice nu sunt calculați logaritmi funcțiilor secantă și cosecantă, deoarece $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, așa că, aplicând logaritmi, avem $\log \sec \alpha = -\log \cos \alpha$, $\log \operatorname{cosec} \alpha = -\log \sin \alpha$ și cum $\log \sin \alpha$ și $\log \cos \alpha$ sunt dați în table, urmează că și logaritmi funcțiilor secantă și cosecantă vor fi cunoscuți tot cu aceleași table.

I. Să se rezolve ecuația $\sin(45^\circ - 3x) = \cos(2x - 60^\circ)$.

Înlocuind cosinusul unui unghi cu sinusul unghiului complementar, ecuația devine

$$\sin(45^\circ - 3x) = \sin[90^\circ - (2x - 60^\circ)],$$

$$\sin(45^\circ - 3x) = \sin(150^\circ - 2x) = \sin[180^\circ - (150^\circ - 2x)] = \sin(30^\circ + 2x).$$

Arcele $45^\circ - 3x$ și $30^\circ + 2x$ având sinusurile egale, ele sunt sau egale sau suplimentare, sau, mai general, verifică relațiile

$$(1) \quad 45^\circ - 3x = 2k\pi + (30^\circ + 2x),$$

$$(2) \quad 45^\circ - 3x = (2k + 1)\pi - (30^\circ + 2x),$$

k fiind un întreg oarecare.

Din întâia, avem $3x + 2x = 45^\circ - 30^\circ - 2k\pi$,

$$\text{de unde} \quad 5x = 15^\circ - 2k\pi,$$

sau, înlocuind pe $-k$ cu h , avem

$$x = 2h\frac{\pi}{5} + 3^\circ,$$

h fiind un întreg oarecare.

Din ecuația (2), dezvoltând, avem

$$3x - 2x = 45^\circ + 30^\circ - (2k + 1)\pi,$$

$$\text{sau} \quad x = 75^\circ - 2k\pi - \pi,$$

$$x = 75^\circ - 180^\circ - 2k\pi,$$

de unde

$$(4) \quad x = -105^\circ - 2k\pi = -105^\circ + 2h\pi,$$

h fiind un întreg oarecare.

Expresiunile (3) și (4) ne dau toate soluțiile ecuației considerate.

II. Să se rezolve ecuația

$$2 \sin^2 x - 5 \cos x - 4 = 0.$$

Înlocuind pe $\sin^2 x$ cu $1 - \cos^2 x$, ecuația devine

$$2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x - 4 = 0,$$

de unde

$$2 - 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 4 = 0,$$

sau

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0.$$

Ecuația fiind de gradul al doilea în $\cos x$, rezolvând-o avem

$$\cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}.$$

Avem deci două cazuri de considerat

$$\cos x = \frac{-5 + 3}{4} = \frac{-1}{2}, \quad \cos x = \frac{-5 - 3}{4} = -2.$$

Cosinusul unui unghi fiind cuprins între -1 și $+1$, nu se poate să avem $\cos x = -2$. Rămâne numai de considerat

$$\cos x = \frac{-1}{2},$$

de unde $x = 120^\circ$. Toate unghiurile care au acelaș cosinus egal cu $\frac{-1}{2}$ sunt date de

$$x = 2k\pi \pm 120^\circ,$$

sau

$$x = k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ,$$

k fiind un întreg oarecare.

III. Să se rezolve ecuația

$$\cotg x = 2 \cos x.$$

Înlocuind $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$, ecuația devine

$$\frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cos x,$$

de unde

$$\cos x = 2 \cos x \sin x,$$

sau

$$\cos x - 2 \cos x \sin x = 0$$

$$\cos x (1 - 2 \sin x) = 0.$$

Acest produs de doi factori este nul când unul din factori se anulează. Deci,

$$\cos x = 0, \quad 1 - 2 \sin x = 0.$$

Din $\cos x = 0$, rezultă că $x = 90^\circ$, iar forma generală a unghiurilor este

$$(5) \quad x = 2k\pi \pm 90^\circ, \quad x = k \cdot 360^\circ \pm 90^\circ.$$

k fiind întreg oarecare.

Din $1 - 2 \sin x = 0$, rezultă

$$\sin x = \frac{1}{2},$$

deci $x = 30^\circ$. Forma generală a unghiurilor este

$$(6) \quad \begin{cases} x = 2k\pi + 30^\circ, \\ x = (2k + 1)\pi - 30^\circ, \end{cases}$$

k fiind un întreg oarecare.

Soluțiile ecuației considerate sunt date de expresiile (5) și (6)

IV. Să se afle unghiul x pentru care avem

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ca verificare, se vede că avem

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

astfel că suntem siguri că problema are soluție. Pentru a o găsi, să observăm că din ecuația

$$\sin x = -\frac{1}{2},$$

dacă ne mărginim numai la unghiurile mai mici ca 360° , rezultă

$$x = 180^\circ + 30^\circ, \quad x = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ,$$

Să vedem care din aceste valori ale lui x verifică și ecuația a doua

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Trebue să alegem pe aceea, care are cosinusul negativ, căci $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$.

Dar $x = 210^\circ$ dă $\cos x = \cos 210^\circ < 0$, pe când $\cos 330^\circ > 0$. Singura soluție care verifică deodată ambele ecuații este

$$x = 210^\circ = 180^\circ + 30^\circ = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

V. Să se rezolve ecuația

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}.$$

Știm că sinusul și cosinusul unui unghi se exprimă rațional cu ajutorul tangentei unghiului pe jumătate, înlocuind, avem

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2},$$

unde punând $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, avem

$$\frac{1 - y^2}{1 + y^2} + \frac{2y}{1 + y^2} = \sqrt{2},$$

sau

$$1 - y^2 + 2y = (1 + y^2)\sqrt{2}.$$

$$y^2(\sqrt{2} + 1) - 2y + \sqrt{2} - 1 = 0.$$

Rezolvând-o în y , avem

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}}{\sqrt{2} + 1}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (2 - 1)}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1}$$

$$y = \sqrt{2} - 1, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Deși este ușor de știut cât este unghiul $\frac{x}{2}$, căci tangenta lui este $\sqrt{2} - 1$, adică $22^{\circ}30'$, să presupunem că n'am ști aceasta, și totuși voim a afla valoarea lui x , care se cere, și care cu ajutorul altei funcțiuni trigonometrice este mai ușor de aflat.

Pentru aceasta, să exprimăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ cu ajutorul lui $\operatorname{tg} x$, și avem

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1 - (\sqrt{2} - 1)^2}$$

de unde

$$\operatorname{tg} x = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1 - (2 + 1 - 2\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2(\sqrt{2} - 1)} = 1.$$

Iată că mai ușor se află unghiul $x = 45^{\circ}$, fiindcă se știe că $\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$.

Deci forma generală a unghiurilor x este dată de ecuația $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$, adică $22^{\circ}30'$, și pentru că este dată cu ajutorul unei tangente, avem

$$\frac{x}{2} = k\pi + 22^{\circ}30',$$

astfel că

$$\begin{aligned} x &= 2k\pi + 2 \cdot 22^{\circ}30', \\ x &= 2k\pi + 45^{\circ}, \end{aligned}$$

k fiind un întreg oarecare.

Ca verificare, pentru cazul $k=0$, avem $x=45^{\circ}$ și înlocuind în ecuația dată, obținem

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

VI. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(45^{\circ} + x) = 2.$$

Dezvoltând pe $\operatorname{tg}(45^\circ + x)$, avem

$$\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} x} = 2,$$

sau

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2.$$

Punând $\operatorname{tg} x = y$, avem ecuația

$$y + \frac{1 + y}{1 - y} = 2,$$

sau

$$y^2 - 4y + 1 = 0.$$

Rezolvând în raport cu y , avem

$$y = 2 \pm \sqrt{3},$$

deci două soluții

$$\operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}, \operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}.$$

Fiindcă nu se vede imediat ce valoare are unghiul x după valoarea tangentei sale, să calculăm $\sin 2x$, căci știm pentru căteva unghiuri sinusurile lor ($\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Avem pentru $\operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}$,

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{1 + (2 + \sqrt{3})^2} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3}$$

$$\sin 2x = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{4(2 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

Deci $2x = 30^\circ$ sau $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ iar $x = 15^\circ$ sau 75° .
Deoarece $\operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3} > 1$, urmează că $x > 45^\circ$, deci trebuie a lua pentru x ,

$$x = 75^\circ.$$

Forma generală a unghiurilor x , date cu ajutorul tangentei, $\operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}$, fiind

$$k\pi + a,$$

în cazul nostru este

$$k\pi + 75^\circ = k \cdot 180^\circ + 75^\circ.$$

Pentru cealaltă soluție, $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$, avem, deasemenea,

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 + (2 - \sqrt{3})^2}.$$

Deci $2x=30^\circ$ sau 150° , și deci $x=15^\circ$ sau 75° . Dar, cum $\operatorname{tg}x = 2 - \sqrt{3} < 1$, $x < 45^\circ$; deci trebuie luată soluția $x=15^\circ$, iar forma generală este

$$x = 15^\circ + k\pi = 15^\circ + k \cdot 180^\circ,$$

k fiind un întreg oarecare.

Observare. Dacă n'am fi putut să aflăm ușor valoarea unghiului cum a fost în cazul actual, atunci se calculează numeric valorile lui $\operatorname{tg}x$,

$$\operatorname{tg}x = 2 + \sqrt{3}, \operatorname{tg}x = 2 - \sqrt{3},$$

înlocuind pe $\sqrt{3}$ cu aproximație (dată de Tablele lui Dupuis, p. 147). Avem pentru prima

$$\operatorname{tg}x = 2 + \sqrt{3} = 2 + 1,732 = 3,732.$$

Pentru a calcula pe x , aplicăm log aritmi și avem

$$\operatorname{log} \operatorname{tg}x = \operatorname{log} 3,732 = 0,57104,$$

de unde revenind la unghiuri, avem $x = 75^\circ$, aproape. Sau, mai bine căutăm în Tablele lui Dupuis, la Lignes trigonométriques naturelles, care este unghiul când se cunoaște tangenta sa și avem $x = 75^\circ$ aproape.

Soluția cealaltă e dată de

$$\operatorname{tg}x = 2 - \sqrt{3} = 2 - 1,732 = 0,268.$$

De unde

$$\operatorname{log} \operatorname{tg}x = \operatorname{log} 0,268 = \bar{1},42813,$$

și aproximativ,

$$x = 15^\circ.$$

Forma generală a soluțiilor este deci

$$x = k \cdot 180 + 15^\circ, x = k \cdot 180 + 75^\circ.$$

VII. Să se rezolve ecuația

$$4(1 + \sin x) = 3\cos^2 x.$$

Înlocuind $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, avem ecuația

$$3\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0.$$

Rezolvând-o în raport cu $\sin x$, avem

$$\sin x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3},$$

$$\sin x = -1, \quad \sin x = -\frac{1}{3}.$$

Considerând soluția $\sin x = -1$, unghiul $x = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$, deci forma generală, fiindcă este dat cu un sinus, este

$$x = 2k\pi + 270^\circ \quad x = (2k + 1)\pi - 270^\circ,$$

sau

$$(7) \quad x = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, \quad x = (2k + 1)180^\circ - 270^\circ,$$

k fiind un întreg oarecare.

Pentru a doua soluție $\sin x = -\frac{1}{3}$, operăm astfel. Calculăm unghiul z , pentru care avem

$$\sin z = \frac{1}{3};$$

atunci unghiul x este egal cu $180^\circ + z$. Aplicând logaritmul, avem

$$\log \sin z = \log \frac{1}{3} = -\log 3 = -0,47712 = \bar{1},52288,$$

$$z = 19^\circ 28' 16''.$$

Deci

$$x = 180^\circ + z = 199^\circ 28' 16''.$$

Unghiul x fiind dat cu un sinus, forma generală a acestor unghiuri este

$$2k\pi + 199^\circ 28' 16'', \quad (2k + 1)\pi - 199^\circ 28' 16'',$$

sau în grade,

$$(8) \quad k \cdot 360^\circ + 199^\circ 28' 16'', \quad (2k + 1)180^\circ - 199^\circ 28' 16'',$$

k fiind întreg oarecare.

Soluția generală a ecuației considerate este dată de formulele (7) și (8).

EXERCITIUL

1, Să se rezolve ecuația $\sin x = -\frac{2}{3}$.

$$R. \sin y = \frac{2}{3}, \quad y = 41^\circ 48' 38''; \quad x = 2K\pi + 221^\circ 48' 38'', \\ x = (2K + 1)\pi - 221^\circ 48' 38''.$$

2. Să se rezolve ecuația $\cos y = -\frac{4}{5}$.

$$R. \cos y = \frac{4}{5}, \quad y = 36^\circ 52' 12''; \quad y = 2K\pi \pm (180^\circ - 36^\circ 52' 12'') = \\ 2K\pi \pm 143^\circ 7' 48''.$$

3. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{5}$.

R. $\operatorname{tgy} = \frac{\sqrt{3}}{5}$. $y = 19^{\circ}6'23''$; $x = K\pi + (180^{\circ} - 19^{\circ}6'23'') = K\pi + 160^{\circ}53'37''$.

4. Să se rezolve ecuația $\operatorname{sec}x = \frac{4}{3}$.

R. $\operatorname{cos}x = \frac{3}{4}$; $x = 2K\pi + 41^{\circ}24'35''$.

5. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0.$$

R. $x = 2K\pi + 60^{\circ}$.

6. Să se afle unghiul x pentru care avem în acelaș timp

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

R. 330° sau $\frac{11\pi}{6}$.

7. Să se afle unghiurile pozitive mai mici ca 900° care satisfac ecuații

$$\cos^2x = \frac{1}{2}.$$

R. $\operatorname{cos}x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pentru $\operatorname{cos}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 2K\pi + 45^{\circ}$; $K=0$, $x = 45^{\circ}$;

$K=1$, $x = 360^{\circ} + 45^{\circ}$, $x = 360^{\circ} - 45^{\circ}$; $K=2$, $x = 720^{\circ} + 45^{\circ}$, $x = 720^{\circ} - 45^{\circ}$.

Pentru $\operatorname{cos}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 180^{\circ} - 45^{\circ} = 135^{\circ}$, $x = 2K\pi + 135^{\circ}$, $K=0$, 135° ; $K=1$, $360^{\circ} + 135^{\circ}$, $360^{\circ} - 135^{\circ}$; $K=2$, $720^{\circ} + 135^{\circ}$, $720^{\circ} - 135^{\circ}$.

8(1). Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{cos}x - \sin x = -\sqrt{2}.$$

R. Afară de procedeul aplicat ecuației V (No. 78), mai putem rezolva ridicând la patrat ambii membrii. Avem

$$\operatorname{cos}^2x + \sin^2x - 2\sin x \operatorname{cos}x = 2, \quad \sin 2x = -1; \quad 2x = 2K\pi + 270^{\circ},$$

$x = K \cdot 180^{\circ} + 135^{\circ}$, K fiind un număr cu soț sau zero. Valorile pentru K , nepereche corespund ecuației $\operatorname{cos}x - \sin x = \sqrt{2}$.

9. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg}2x = 3\operatorname{tg}x.$$

R. Se înlocuiește $\operatorname{tg}2x$ în funcție de $\operatorname{tg}x$. Avem sau $\operatorname{tg}x = 0$, sau

$$\operatorname{tg}x = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}. \text{ Deci, } x = K \cdot 180^{\circ}, \text{ sau } x = K\pi + \frac{\pi}{6}.$$

10. Să se găsească cea mai mică valoare a lui x dată de ecuația

$$\sin^2x = \frac{\sin^{\circ}15^{\circ}42'46'' \times \operatorname{tg}^{\circ}208^{\circ}9'23''}{\sqrt{\operatorname{cos}82^{\circ}59'28''} \times \sqrt[3]{0,1817}}$$

(1) Începând cu acesta, exemplele următoare nu fac parte din program.

R. Se reduce la primul cadran și se aplică logaritmi; avem

$$3 \log \sin x = 3 \log \sin 15^{\circ} 42' 46'' + 5 \log \operatorname{tg} 28^{\circ} 9' 23'' + \\ - \frac{1}{2} \log \cos 82^{\circ} 59' 28'' - \frac{1}{3} \log 0,1817,$$

$$3 \log \sin x = 3 \times \bar{1},43267 + 5 \times \bar{1},72853 - \frac{1}{2} \times \bar{1},08644 - \frac{1}{3} \times \bar{1},25935,$$

$$3 \log \sin x = \bar{2},29301 + \bar{2},64265 + \frac{0,91356}{2} + \frac{0,74065}{3},$$

$$3 \log \sin x = \bar{3},64432,$$

$$\log \sin x = \frac{\bar{3} + 0,64432}{3} = \bar{1} + 0,21477 = \bar{1},21477,$$

$$x = 9^{\circ} 26' 15''.$$

11. Să se calculeze valoarea lui x dată de ecuația

$$x = \sqrt{(345,2)^2 + (15,43)^2}.$$

R. Câtimea de sub radical e de forma $a^2 + b^2$, care se poate scrie

$$a^2 + b^2 = a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right). \text{ Se pune } \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha \text{ și expresia devine } a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \\ \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}. \text{ În cazul nostru, avem}$$

$$x^2 = (345,2)^2 \left[1 + \left(\frac{15,43}{345,2}\right)^2\right].$$

Punem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15,43}{345,2}$ și aplicând logaritmi, avem $\log \operatorname{tg} \alpha =$
 $\log 15,43 - \log 345,2$; de unde $\alpha = 2^{\circ} 33' 33''$. Expresia este

$$x^2 = \frac{(345,2)^2}{\cos^2 \alpha}, \quad x = \frac{345,2}{\cos \alpha}.$$

Se aplică logaritmi și se găsește $\log x = 2,53851$, $x = 345,55$.

12. Să se calculeze x dat de ecuația

$$x^2 = (29,85)^2 - (17,53)^2.$$

R. Avem $x^2 = (29,85)^2 \left[1 - \left(\frac{17,53}{29,85}\right)^2\right]$. Se pune $\cos \alpha = \frac{17,53}{29,85}$;

$$\alpha = 54^{\circ} 2' 14''.$$

Atunci $x^2 = (29,85)^2 (1 - \cos^2 \alpha) = (29,85)^2 \sin^2 \alpha$, $x = 29,85 \sin \alpha$. Se aplică logaritmi și se afla $x = 24,16$.

13. Să se calculeze valoarea expresiunii

$$x = m \sin a + n \cos a,$$

unde $a = 35^{\circ} 40'$, $m = 12,56$, $n = 10,38$.

R. Avem

$$x = m \left(\sin a + \frac{n}{m} \cos a \right) = m (\sin a + \operatorname{tg} \beta \cos a), \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{n}{m};$$

$$x = m \left(\sin a + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cos a \right) = \frac{m}{\cos \beta} \sin(a + \beta).$$

$$\log x = \log m + \log \sin(a + \beta) - \log \cos \beta; \beta = 39^{\circ}34'18'', x = 15,756.$$

14. Să se calculeze valoarea expresiunii

$$x = m + n \operatorname{tg} a,$$

unde $m = 10$, $n = 12$, $a = 30^{\circ}$.

$$R. \quad x = n \left(\frac{m}{n} + \operatorname{tg} a \right); \text{ se spune } \frac{m}{n} = \operatorname{tg} \beta.$$

$$x = n(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} a) = \frac{n \sin(\beta + a)}{\cos \beta \cos a};$$

$$\log x = \log n + \log \sin(\beta + a) - \log \cos \beta - \log \cos a.$$

$$\beta = 39^{\circ}48'20'', x = 16,93, \text{ aprox.}$$

15. Să se calculeze valoarea expresiunii

$$x = m + n \sin a,$$

unde $m = 30$, $n = 18$, $a = 20^{\circ}$.

$$R. \quad x = n \left(\frac{m}{n \cos a} \cos a + \sin a \right) = n(\cos a \operatorname{tg} \beta + \sin a), \operatorname{tg} \beta = \frac{m}{n \cos a}$$

$$x = n \left(\cos a \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \sin a \right) = \frac{n \sin(a + \beta)}{\cos \beta}; \beta = 60^{\circ}35'6'', x = 36,15, \text{ aprox.}$$

16. Să se discute ecuația $2 \sin^2 x - 3 \sin x + \lambda = 0$, λ fiind un parametru variabil.

R. Ecuația fiind de gradul al doilea în $\sin x$, realizantul este $R = 3^2 - 4 \cdot 2 \lambda$, $R = 9 - 8 \lambda$. Rădăcinile fiind sinusul unui unghi, sunt cuprinse între -1 și $+1$. În loc de a pune condiția ca o ecuație de gradul al doilea să aibă rădăcinile cuprinse în intervalul $(-1, +1)$, este mai ușor a transforma ecuația dată în alta, care să aibă rădăcinile sale y legate de ale ecuației date de relația

$$y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1},$$

astfel că, dacă știm că rădăcinile $\sin x$ ale ecuației date sunt cuprinse între -1 și $+1$, atunci rădăcinile y ale ecuației transformate vor avea semnul expresii

$$y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}.$$

Dar avem

$$y = \frac{(\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(\sin x + 1)^2};$$

deci semnul lui y depinde numai de $(\sin x - 1)(\sin x + 1)$, căci numitorul lui y fiind un pătrat perfect are semnul plus. Însă semnul expresii $(\sin x - 1)(\sin x + 1) = (u - 1)(u + 1)$, $u = \sin x$, când se înlocuiește u cu valori cuprinse între -1 și $+1$, este negativ [căci se știe că un trinom de gradul al doilea $(u - 1)(u + 1)$ are semn contrar cu termenul său de gradul cel mai înalt, u^2 , când se înlocuiește u cu valori cuprinse între acelea ce anulează trinomul și care sunt $-1, +1$].

Așa dar, în loc de a scrie că ecuația dată are rădăcinile $\sin x$ cuprinse între -1 și $+1$, vom scrie că ecuația ce dă pe y are rădăcinile negative.

Înlocuind pe $\sin x$ cu valoarea sa din relația

$$y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}, \quad y \sin x + y = \sin x - 1.$$

adică

$$\sin x = \frac{1+y}{1-y},$$

în ecuația dată

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + \lambda = 0,$$

avem

$$2 \left(\frac{1+y}{1-y} \right)^2 - 3 \frac{1+y}{1-y} + \lambda = 0.$$

Desvoltând, avem

$$2(1+y)^2 - 3(1+y)(1-y) + \lambda(1-y)^2 = 0,$$

sau, făcând toate calculele și aranjând, obținem

$$f(y) = y^2(5+\lambda) + 2y(2-\lambda) + \lambda - 1 = 0,$$

care este ecuația ce dă valorile lui y .

La orice rădăcină negativă a acestei ecuații corespunde o valoare pentru $\sin x$ cuprinsă între -1 și $+1$, deci acceptabilă și la o rădăcină pozitivă a ecuației $f(y) = 0$ nu corespunde o valoare pentru $\sin x$ cuprinsă între -1 și $+1$, deci neacceptabilă pentru ecuația dată.

Realizantul ecuației $f(y) = 0$ este

$$(2-\lambda)^2 - (5+\lambda)(\lambda-1) = 9-8\lambda,$$

analog cu realizantul ecuației date, astfel că ambele ecuații au rădăcini reale în același timp.

Produsul rădăcinilor ecuației $f(y) = 0$ este

$$P = y' y'' = \frac{\lambda-1}{\lambda+5} = \frac{(\lambda-1)(\lambda+5)}{(\lambda+5)^2},$$

iar semnul său depinde de trinomiul $(\lambda-1)(\lambda+5)$. Pentru valori ale lui λ exterioare intervalului $(-5, 1)$, produsul este pozitiv, iar pentru valori cuprinse în acest interval, produsul este negativ.

Suma rădăcinilor ecuației $f(y) = 0$ este

$$S = y' + y'' = \frac{-2(2-\lambda)}{\lambda+5} = \frac{2(\lambda-2)}{\lambda+5} = 2 \frac{(\lambda-2)(\lambda+5)}{(\lambda+5)^2},$$

și semnul său depinde de trinomiul $(\lambda-2)(\lambda+5)$. Deci, pentru valori ale lui λ exterioare intervalului $(-5, 2)$ suma este pozitivă, iar pentru cele interioare, suma este negativă.

Realizantul fiind $R = 9-8\lambda$, dacă $\lambda < \frac{9}{8}$, $R = -8\left(\lambda - \frac{9}{8}\right)$ este pozitiv, iar dacă $\lambda > \frac{9}{8}$, $R < 0$.

Avem deci tabloul discuții date

λ	Realizantul	Produsul P	Suma S	Rădăcinile y	Rădăcinile $\sin x$
$-\infty$	+	+	+	Reale, ambele pozitive	Nu există valori pentru $\sin x$
-5	+	-	-	Reale, una pozitivă, una negativă	Una acceptabilă pentru $\sin x$
1	+	+	-	Reale, ambele negative	Două acceptabile pentru $\sin x$
$\frac{9}{8}$	-	+	-	imaginare	Nici una
2	-	+	+	imaginare	Nici una
∞					

Deci, când $-5 < \lambda < 1$, numai o rădăcină y este negativă, o singură valoare acceptabilă pentru $\sin x$; când $1 < \lambda < \frac{9}{8}$, ambele rădăcini y fiind negative, corespund două valori acceptabile pentru $\sin x$.

17. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x + y = 60^\circ; \quad \sin x + \sin y = 0,9.$$

R. Se înlocuiește $\sin x + \sin y$ cu $2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, de unde, aplicând logaritmi se calculează $\cos \frac{x-y}{2}$ și deci și $(x-y)$. Cunoscând $(x+y)$ și $(x-y)$, se află $x = 55^\circ 50' 30''$, $y = 4^\circ 9' 30''$.

La fel se rezolvă sistemele

$$\begin{aligned} x - y = a, \quad \sin x + \sin y = b; \quad x + y = a, \quad \sin x - \sin y = b, \\ x - y = a, \quad \sin x - \sin y = b; \quad x \pm y = a, \quad \cos x \pm \cos y = b. \end{aligned}$$

18. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x + y = 45^\circ, \quad \sin x \sin y = 0,12,$$

R. Avem $\cos(x+y) = \cos 45^\circ$; de unde se calculează $\cos x \cos y$. Ținând seamă de a doua, se află $\cos(x-y)$ și deci $(x-y)$. Se găsește

$$x = 31^\circ 52' 7'', \quad y = 13^\circ 7' 53''.$$

La fel se rezolvă sistemele

$$x - y = a, \quad \sin x \sin y = b; \quad x \pm y = a, \quad \cos x \cos y = b.$$

19. Să se rezolve sistemul

$$x + y = 80^\circ, \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{2}.$$

R. Din ecuația a doua avem

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}.$$

Se înlocuiesc termenii raportului întâi cu formulele calculabile prin logaritmi, de unde se găsește $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{5 \cotg \frac{x+y}{2}}$, $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 9^\circ 31' 35''$.

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 40^\circ; \text{ adunând și scăzând, se obține } x = 49^\circ 31' 35'', y = 30^\circ 28' 25''$$

La fel se rezolvă sistemele

$$x - y = a, \frac{\sin x}{\sin y} = b; \quad x \pm y = a, \frac{\cos x}{\cos y} = b.$$

20. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x + y = 45^\circ, \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0,9.$$

R. Se înlocuiește $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$, de unde se calculează $\cos x \cos y$.

Se știe că $2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, de unde se află $\cos(x-y)$; $x = 37^\circ 36' 8'', z = 7^\circ 23' 52''$.

La fel se rezolvă sistemele

$$x - y = a, \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b; \quad x - y = a, \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = b.$$

Se putea și astfel rezolva problema dată, aplicând tangenta lui $(x \pm y)$ și apoi luând ca necunoscute $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{tg} y$, pe care le găseam ca o ecuație de gradul al doilea, căreia i se știe suma rădăcinilor, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0,9$ și produsul $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0,1$; această ecuație este $z^2 - 0,9z + 0,1 = 0$, pe care rezolvând-o, avem valorile lui $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}(0,9 \pm \sqrt{0,41})$.

21. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x + y = 70^\circ, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0,4.$$

R. Din a doua ecuație, avem

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{0,4}{1}, \quad \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{1 + 0,4}{1 - 0,4} = \frac{1,4}{0,6} = \frac{0,7}{0,3},$$

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{7}{3}$$

Aplicând logaritmi, se calculează $\log \cos(x-y)$ și deci și $(x-y)$; de unde $x = 53^\circ 31' 40'', y = 16^\circ 28' 20''$.

Se mai putea, aplicând $\operatorname{tg}(x+y)$ și luând ca necunoscute $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$.

La fel se rezolvă sistemul

$$x - y = a, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b.$$

22. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x + y = 45^\circ, \quad \operatorname{tg} x \cotg y = \frac{5}{6}.$$

R. Din ecuația a doua, avem

$$\frac{\cos x \sin y}{\sin x \cos y} = \frac{6}{5}, \quad \frac{\cos x \sin y - \sin x \cos y}{\cos x \sin y + \sin x \cos y} = \frac{6-5}{6+5}$$

$$\frac{\sin(y-x)}{\sin(y+x)} = \frac{1}{11}$$

Aplicând logaritmi, se găsește $\sin(y-x) = \frac{\sqrt{2}}{24}$; $y-x = 3^\circ 41' 8''$,

$x = 20^\circ 39' 26'', y = 24^\circ 20' 34''$.

23. Să se rezolve sistemul

$$2\cos x \cos y = 1, \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2.$$

R. Se înlocuiește primul membru al ecuației a doua, cu formula calculabilă prin logaritmi, de unde $\sin(x+y) = 1$, $x+y = 90^\circ$. Din ecuația întâi, avem $2 \cos x \sin x = 1$, $\sin 2x = 90^\circ$, $x = y = 45^\circ$.

24. Să se rezolve sistemul

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \quad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{4}{3}.$$

R. $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{tg} y$ sunt rădăcinile ecuației $z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}$; $x = y = 26^\circ 33' 54''$.

25. Să se elimine x între ecuațiile

$$\sin x + \cos x = a, \quad \sec x + \operatorname{cosec} x = b.$$

R. A elimina pe x între aceste ecuații înseamnă a egala valorile lui x date de fiecare din cele două ecuații, sau a înlocui în ecuația a doua pe x cu valoarea dată de ecuația întâi. Ridicând la patrat prima ecuație, avem

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = a^2, \quad 1 + \sin 2x = a^2, \quad \sin 2x = a^2 - 1.$$

Din a doua, ținând seamă de prim, avem

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = b, \quad \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = b, \quad \sin 2x = \frac{2a}{b}.$$

Egalând aceste două valori ale lui $\sin 2x$, avem

$$a^2 - 1 = \frac{2a}{b}.$$

care este rezultatul eliminării lui x , sau, condiția ca cele două ecuații date să fie compatibile.

26. Să se elimine x între ecuațiile

$$\sin x + \cos x = a, \quad \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x = b.$$

R. Din prima, $\sin 2x = a - 1$. Din a doua, $b \sin 2x \cos 2x = 1$, de unde

$$\cos 2x = \frac{1}{b \sin 2x} = \frac{1}{b(a-1)}. \quad \text{Se înlocuiește în relația } \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1, \text{ și}$$

$$\text{avem rezultatul eliminării, } (a-1)^2 + \frac{1}{b^2(a-1)^2} = 1.$$

27. Să se arate că dacă unghiul α tinde către zero, raportul $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ inde către 1.

R. Considerând liniile trigonometrice ale unghiului α (Fig. 40), se vede că $MP < \operatorname{arc} AM < AT$, adică

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha.$$

De unde

$$\sin \alpha < \alpha < \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

și divizând cu $\sin \alpha$, avem

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}.$$

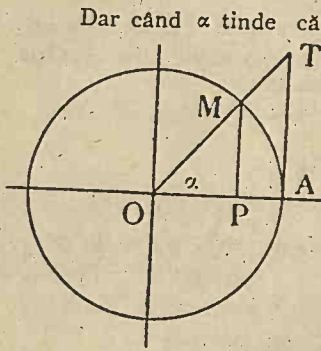


Fig. 40.

Factorii $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ și $\frac{1}{\cos \alpha}$ tind fiecare către 1.

29. Să se afle adevărata valoare a expresii

$$\frac{x \sin x}{1 - \cos x},$$

când x tinde către zero.

R. Avem

$$E = \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \frac{x \sin x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{x 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2},$$

$$E = 2 \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \left(\frac{x}{2}\right)} \cos \frac{x}{2}.$$

Când x tinde către zero, $\frac{x}{2}$ tinde către zero și $\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}} \rightarrow 1$. Deci E tinde către 2.

30. Să se afle pentru $x=0$ adevărata valoare a expresii

$$\frac{\sin mx}{\sin nx}.$$

R. Avem

$$E = \frac{\sin(mx)}{\sin nx} = \frac{(mx)}{mx} \frac{(nx)}{(nx)} \frac{1}{(nx)} = \frac{\sin(mx)}{(mx)} \cdot \frac{(nx)}{\sin(nx)} \cdot \frac{m}{n}.$$

Când x tinde către zero, expresia tinde către $\frac{m}{n}$.

31. Să se afle adevărata valoare a expresii

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h},$$

când h tinde către zero.

R. Avem

$$E = \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} = \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\left(\frac{h}{2} \right)} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right).$$

Primul raport tinde către 1, al doilea factor către $\cos x$; E tinde către $\cos x$.

32. Să se afle adevărata valoare a expresii

$$\frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

când $\alpha = \beta$.

R. Avem

$$E = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)(\cos \alpha - \cos \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} (-2) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$E = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Când $\alpha = \beta$, E tinde către $-2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin 2\alpha$.

33. Să se afle adevărata valoare a expresii

$$\frac{\sin(\alpha - 30^\circ)}{1 - 2 \sin \alpha}$$

pentru $\alpha = 30^\circ$.

$$R. E = \frac{\sin(\alpha - 30^\circ)}{2 \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha \right)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha - 30^\circ}{2} \cos \frac{\alpha - 30^\circ}{2}}{2(\sin 30^\circ - \sin \alpha)} = \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right)}{2 \sin \frac{30^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ + \alpha}{2}}$$

$$E = -\frac{1}{2} \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ \right)}. \text{ Când } \alpha = 30^\circ, \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right) = 1,$$

iar E tinde către $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

APLICAȚIUNI LA PATRULARE⁽¹⁾.

79. Un studiu asupra calcului poligoanelor, în special al patrulaterelor, adică o „*Poligonometrie*“, sau chiar o *Tetragonometrie* nu există aparte. Rezolvarea poligoanelor este numai una din aplicațiile Trigonometriei, fiindcă orice figură rectilinie se poate descompune în triunghiuri.

Ne vom ocupa de patrulare oarecare și patrulare in-scriptibile într'un cerc.

⁽¹⁾ Nu face parte din program.

PATRULATERE OARECARE⁽¹⁾.

80. Rezolvarea patrulaterelor oarecare. Vom stabili mai întâi câte și ce elemente determină un patrulater oarecare.

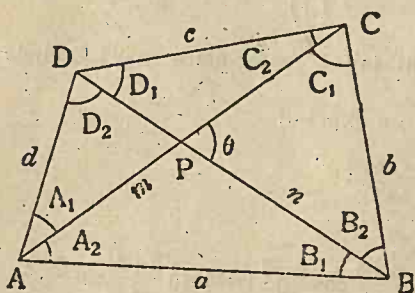


Fig. 41.

Să considerăm patrulaterul ABCD (Fig. 41) și să notăm laturile sale cu $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, iar diagonalele cu $AC=m$, $BD=n$. Unghiurile le vom însemna cu A, B, C, D , iar între ele avem relația $A+B+C+D=360^\circ$, sau 2π .

Diagonalele împart unghiurile în câte două unghiuri, pe care le vom nota, pentru unghiul A, cu A_1 și A_2 , pentru B, cu B_1, B_2 , etc.

Fiecare diagonală împarte patrulaterul în câte două triunghiuri. Dacă unul dintre triunghiuri este determinat prin trei elemente, pentru determinarea celuiilalt, ce are cu primul o latură comună, este de ajuns să cunoaștem încă două elemente noi. Astfel, ambele triunghiuri și deci și patrulaterul, sunt determinate prin *cinci elemente*.

Cunoscând însă trei unghiuri ale patrulaterului, în baza relații dintre unghiuri, cunoaștem și unghiul al patrulea. Deci, dintre cele cinci elemente, numai *trei pot fi unghiuri, celelalte două trebuie să fie laturi*. De altă parte, două dintre elementele necesare trebuie să fie unghiuri, fiindcă dacă am cunoaște numai un unghi și patru laturi, am avea, sau două soluții, sau nici una.

În adevăr, fiind cunoscute a, b, c, d și unghiul B, am putea construi sau patrulaterul ABCD, ABCD₁, (Fig. 42), sau nu avem nici un patrulater, cum arată figura 43.

I. Să presupunem cunoscute trei laturi a, b, c și două unghiuri. B și C.

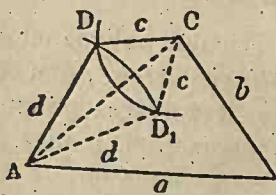


Fig. 42.

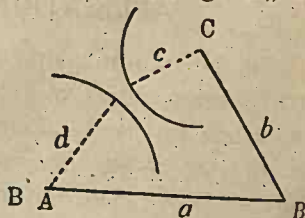


Fig. 43.

Pentru rezolvarea acestui patrulater, observăm (Fig. 41)

că $C_1 + A_2 = 180^\circ - B$, iar din triunghiul ABC, avem

$$\operatorname{tg} \frac{C_1 - A_2}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{B}{2}.$$

Putem afla deci unghiurile C_1 și A_2 , deci și unghiul $C_2 = C - C_1$. Pentru a calcula pe A_1 și D , aflăm din triunghiul ABC diagonala

$$m = AC = \frac{a \sin B}{\sin C_1},$$

iar apoi, din triunghiul ACD,

$$\operatorname{tg} \frac{D - A_1}{2} = \frac{m-c}{m+c} \operatorname{cotg} \frac{C_2}{2}.$$

În fine, latura

$$d = \frac{c \sin C_2}{\sin A_1}.$$

Exemplu. $a = 10\text{m}$, $b = 7\text{m}$, $c = 5\text{m}$, $B = 87^\circ 24'$, $C = 65^\circ 18'$.
Avem

$$A_2 + C_1 = 46^\circ 18', \operatorname{tg} \frac{C_1 - A_2}{2} = \frac{3 \operatorname{cotg} 43^\circ 42'}{17},$$

$$\operatorname{logtg} \frac{C_1 - A_2}{2} = 0,47712 + 0,01971 - 1,23045 = \bar{1},26638;$$

$$\frac{C_1 - A_2}{2} = 10^\circ 27' 45'', \frac{C_1 + A_2}{2} = 23^\circ 09'.$$

$$A_2 = 35^\circ 50' 15'', C_1 = 56^\circ 45' 45'', C_2 = 8^\circ 32' 14''.$$

$$m = \frac{10 \sin 87^\circ 24'}{\sin 56^\circ 45' 45''}, \operatorname{log} m = 1,07713, m = 11,944.$$

$$\operatorname{tg} \frac{D - A_1}{2} = \frac{6,944 \operatorname{cotg} 4^\circ 16' 7''}{16,944}, \operatorname{logtg} \frac{D - A_1}{2} = 0,73962,$$

$$\frac{D - A_1}{2} = 79^\circ 40' 40''.$$

$$d = \frac{5 \sin 8^\circ 32' 15''}{\sin 6^\circ 3' 12''}, \operatorname{log} d = 0,84749, d = 7,0386 \text{ m}.$$

$$D = 165^\circ 24' 32'', A_1 = 6^\circ 3' 12'', A = 41^\circ 53' 27''.$$

II. Se dau două laturi a , d și trei unghiuri, A , C , D .
Unghiul B este dat de $= 360^\circ - (A + C + D)$.

Din triunghiul ABD, avem

$$\operatorname{tg} \frac{D_2 - B_1}{2} = \frac{a-d}{a+d} \operatorname{cotg} \frac{A}{2},$$

de unde aflăm $\frac{D_2 - B_1}{2}$, iar suma lor este $\frac{D_2 + B_1}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$.

Aflăm astfel B_1 , B_2 , deci și B_2 , D_1 .

Din același triunghi, avem

$$n = \frac{a \sin A}{\sin D_2}, \quad n = \frac{d \sin A}{\sin B_1}.$$

Din triunghiul BCD, obținem

$$b = \frac{n \sin D_1}{\sin C} = \frac{a \sin A \sin D_1}{\sin C \sin D_2}$$

$$c = \frac{n \sin B_2}{\sin C} = \frac{a \sin A \sin B_2}{\sin C \sin D_2}$$

Exemplu. $a = 6$ m, $d = 2,5$ m, $A = 59^\circ 20'$, $C = 98^\circ 50'$,
 $D = 140^\circ 30'$. Să se afle laturile b și c . Avem

$$B = 360^\circ - 298^\circ 40' = 61^\circ 20'.$$

$$\operatorname{tg} \frac{D_2 - B_1}{2} = \frac{3,5 \operatorname{cotg} 29^\circ 40'}{8,5}, \quad \operatorname{log} \operatorname{tg} \frac{D_2 - B_1}{2} = \bar{1},85907,$$

$$\frac{D_2 - B_1}{2} = 35^\circ 51' 45'', \quad \frac{D_2 + B_1}{2} = 60^\circ 20', \quad D_2 = 96^\circ 11' 45'',$$

$$B_1 = 24^\circ 28' 15'', \quad B_2 = 36^\circ 51' 45'', \quad D_1 = 44^\circ 18' 15''.$$

$$b = \frac{6 \sin 59^\circ 20' \sin 44^\circ 18' 15''}{\sin 98^\circ 50' \sin 96^\circ 11' 45''}, \quad \operatorname{log} b = 0,56458, \quad b = 3,669 \text{ m.}$$

$$c = \frac{6 \sin 59^\circ 20' \sin 36^\circ 51' 45''}{\sin 98^\circ 50' \sin 96^\circ 11' 45''}, \quad \operatorname{log} c = 0,49862, \quad c = 3,1519 \text{ m.}$$

81. *Aria unui patrulater în funcție de laturi.* Din triunghiul ABC (Fig. 41), avem

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B,$$

iar din triunghiul ACD,

$$m^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D.$$

Egalând valorile lui m^2 , avem

$$(1) \quad a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos B - 2cd \cos D.$$

Ariile acestor triunghiuri fiind

$$2 \text{ aria } ABC = ab \sin B, \quad 2 \text{ aria } ACD = cd \sin D,$$

avem pentru aria S a patrulaterului

$$4S = 4 \text{ aria } ABC + 4 \text{ aria } ABD = 2ab \sin B + 2cd \sin D,$$

(2)

$$4S = 2ab \sin B + 2cd \sin D.$$

Ridicând la pătrat relațiile (1) și (2) și adunând, avem

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + (\pm S)^2 = (2ab \cos B - 2cd \cos D)^2 + (2ab \sin B + 2cd \sin D)^2,$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16S^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cos(B+D).$$

Dar

$$\cos(B+D) = 2\cos^2 \frac{B+D}{2} - 1.$$

Inlocuind, expresiunea precedentă devine

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16S^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \left(2\cos^2 \frac{B+D}{2} - 1 \right)$$

$$16S^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2},$$

$$16S^2 = (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) - 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2},$$

$$16S^2 = [(a+b)^2 - (c-d)^2][(c+d)^2 - (a-b)^2] - 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2},$$

$$16S^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d-a+b)(c+d+a-b) - 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}.$$

Introducând notațiile

$$a+b+c+d=2p, \quad -a+b+c+d=2(p-a), \quad a-b+c+d=2(p-b),$$

$$a+b-c+d=2(p-c), \quad a+b+c-d=2(p-d),$$

avem

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2},$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}}.$$

care este o formulă analogă cu aceea pentru aria triunghiurilor.

Exemplu. Se dau $a=12$ m, $b=7$ m, $d=5$ m, $B=54^\circ 15'$, $D=129^\circ 30'$. Să se calculeze aria patrulaterului.

Pentru a afla latura c , determinăm pe $AC=n$ din triunghiul ABC, în care se cunosc două laturi a , b și unghiul cuprins B. Apoi, din triunghiul ACD, în care se cunosc d , D , $AC=n$, aflăm pe $c=5,758$.

Înlocuim în (3) pe $p-a=2,879$, $p-b=7,879$, $p-c=9,12$, $p-d=9,879$, pentru a calcula aria S , observăm că se poate scrie

$$(4) \quad S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \sqrt{1 - \frac{abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

Să punem

$$\frac{abcd \cos \frac{B+D}{2}}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \cos^2 \varphi,$$

și se calculează valoarea lui φ cu ajutorul tabelor de logaritmi.

Expresia (4) devine

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi},$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \sin \varphi.$$

Aplicând logaritmi avem

$$\log S = \frac{\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) + \log(p-d)}{2} + \log \sin \varphi,$$

de unde se calculează $S = 45,18 \text{ m}^2$.

82, **Aria unui patrulater în funcțiune de diagonale.**
P fiind punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului ABCD (Fig. 41), să însemnăm cu θ unghiul BPC al acestor diagonale. Aria patrulaterului este dată de

$$S = \text{aria APB} + \text{aria BPC} + \text{aria CPD} + \text{aria DPA},$$

$$S = \frac{1}{2} AP \cdot PB \sin \theta + \frac{1}{2} BP \cdot PC \sin \theta + \frac{1}{2} CP \cdot DP \sin \theta + \frac{1}{2} DP \cdot AP \sin \theta,$$

$$S = \frac{1}{2} \sin \theta \cdot (AP + PC) (BP + PD),$$

și deci

$$(5) \quad S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \theta, \quad S = \frac{1}{2} m n \sin \theta.$$

Exemplu. $a=12 \text{ m}$, $b=7 \text{ m}$, $d=5 \text{ m}$, $B=54^\circ 15'$, $D=129^\circ 30'$.
Diagonala $AC=m$ o aflăm din triunghiul ABC, în care se cunosc două laturi și unghiul cuprins. Se calculează întâi unghiurile A_2 și C_1 , apoi m . Se calculează apoi c și C_2 din triunghiul ACD, în care se cunosc d , m , D . Se cunoaște deci C . Din triunghiul CBD se calculează $BD=n$, iar $\theta=A_2+B_1$. În fine se aplică formula (5). $S = 45,18 \text{ m}^2$.

EXERCITIIL

1. Într'un patrulater oarecare două unghiuri opuse sunt egale și laturile $a=9 \text{ cm}$, $b=7 \text{ cm}$, $c=8 \text{ cm}$, $d=5 \text{ cm}$. Să se afle unghiurile și aria patrulaterului.

R. Se egalează expresiile diagonalei opusă unghiurilor egale, și se obține

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab - cd)} + \frac{41}{46}, \quad C = A = 26^\circ 58';$$

$$\operatorname{tg} \frac{B_2 - D_1}{2} = \frac{c - b}{c + b} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{D_2 - B_1}{2} = \frac{a - d}{a + d} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

$B_1 = 92^\circ 3' 16''$, $D_1 = 60^\circ 58' 44''$, $B_2 = 69^\circ 43' 16''$, $D_2 = 83^\circ 18' 44''$, $S = 23,353 \text{ cm}^2$.

2. Diagonalele fiind de 87 m, 58 m, iar unghiul dintre ele $67^\circ 18' 20''$, să se calculeze aria patrulaterului.

R. $S = 5345 \text{ m}^2$.

3. Să se afle laturile, unghiurile necunoscute și aria patrulaterului în care se cunosc două laturi vecine, 65 m, 92 m, unghiul dintre ele, $65^\circ 40'$ și un unghi alăturat de $154^\circ 30' 25''$, iar diagonala care taie unghiul întâi de 136 m.

R. Pentru o parte din unghiul opus unghiului întâi dat, avem

$$\sin x = \frac{65 \sin 154^\circ 30' 25''}{37}, \quad x = 11^\circ 52' 14''. \text{ Partea a doua a aceluiași unghi și}$$

$$\text{unghiul al patrulea le aflăm din } \operatorname{tg} \frac{D - \gamma}{2} = \frac{41 \operatorname{cotg} 25^\circ 31' 19''}{228}, \quad \gamma = 42^\circ 28' 10'',$$

$D = 86^\circ 29' 11''$. Celelalte două laturi sunt 105,95 m, 79,77 m. $S = 5980,94 \text{ m}^2$.

4. Aria unui teren în formă de trapez este de 4290 m^2 , una din diagonale îl împarte într'un triunghi echilateral și unul oarecare, astfel că ariile acestora stau în raportul $\frac{6}{5}$. Să se afle laturile și unghiurile trapezului.

R. ABCD fiind trapezul (AB paralel CD) și ABC triunghiul echilateral, avem aria ABD : aria BDC = 6 : 5, aria ABD + aria BDC = 4290;

deci aria ABD = 2340 m^2 , aria BDC = 1950 m^2 . Dar aria ABD = $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$; de

unde $a = 73,51 \text{ m}$. În triunghiul BDC, se cunosc aria, latura $BD = a$ și înălțimea h a lui B, egală cu înălțimea lui D, din triunghiul ABD. Din

$c \frac{h}{2} = \text{aria BDC}$, se calculează c . Unghiul $B_1 C = DBA = 60^\circ$. Din expresia

arii triunghiului BDC = $\frac{1}{2} BD \cdot DC \sin 60^\circ$, calculăm $DC = 61,26 \text{ m}$. Din

triunghiul BDC în care se cunosc două laturi și unghiul cuprins, se calculează întâi unghiul C și CBD cu teorema tangentelor, apoi se calculează $BC = 66,66 \text{ m}$; $C = 68^\circ 57' 49''$, $DBC = 51^\circ 3' 11''$.

PATROLATERE INSCRIPTIBILE⁽¹⁾.

83. Un patrulater care se poate înscrie într'un cerc, sau, cum se mai zice, un patrulater inscriptibil, se bucură de proprietatea, că suma unghiurilor opuse este egală cu 180° . Deci, intervenind o condiție simplă și deci o relație între elementele unui patrulater oarecare, numărul elementelor independente și necesare pentru rezolvirea patrulaterului inscriptibil se reduce la patru, iar a unghiurilor independente la două, căci suma unghiurilor opuse este egală cu 180° .

(1) Nu face parte din program.

Problemele ce se pot pune asupra patruleterelor inscriptibile sunt: determinarea unghiurilor, diagonalelor, a ariei patruleterului și a razei cercului circumscris, presupunând cunoscute laturile.

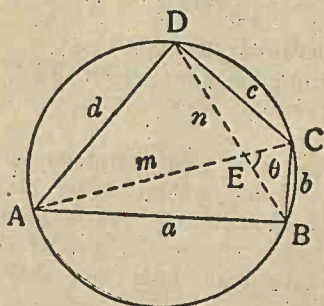


Fig. 44.

84. **Calculul unghiurilor.** Să considerăm patruleterul inscriptibil ABCD (Fig. 44) și fie a, b, c, d laturile sale, A, B, C, D unghiurile și m și n diagonalele.

Triunghiurile BAD, BCD, dau

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A,$$

$$n^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C.$$

Egalând aceste valori, avem

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C.$$

Dar A fiind suplimentar cu C, urmează că avem $\cos C = -\cos A$, deci relația precedentă devine

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A,$$

de unde

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

Să înlocuim valoarea aceasta în relațiile cunoscute

$$2\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A, \quad 2\cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A.$$

Avem

$$2\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{2(ad + bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)}{2(ad + bc)}$$

$$(6) \quad 2\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(ad+bc)} = \frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{2(ad+bc)}$$

$$2\cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{2(ad + bc) + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$$

$$(7) \quad 2\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(ad+bc)} = \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)}$$

$$(8) \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}$$

Punând $a+b+c+d=2p$, avem

$$-a+b+c+d=2(p-a), \quad a-b+c+d=2(p-b),$$

$$a+b-c+d=2(p-c), \quad a+b+c-d=2(p-d),$$

Deci expresiunile (6), (7), (8) devin

$$2\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2(p-d)2(p-a)}{2(ad+bc)} = \frac{2(p-a)(p-d)}{ad+bc},$$

$$2\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2(p-b)(p-c)}{2(ad+bc)}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}.$$

Cum unghiul $\frac{A}{2}$ este mai mic ca 90° , căci considerăm un poligon convex, $\sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$ sunt pozitive, deci

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Formule analoage dau unghiul B.

85. **Diagonalele.** Să considerăm din nou formulele

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A, \quad n^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A.$$

De unde

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - n^2}{2ad}, \quad \cos A = \frac{n^2 - b^2 - c^2}{2bc}.$$

Egalând valorile lui $\cos A$, avem

$$\frac{a^2 + d^2 - n^2}{2ad} = \frac{n^2 - b^2 - c^2}{2bc},$$

$$(a^2 + d^2 - n^2)bc = (n^2 - b^2 - c^2)ad,$$

$$n^2(bc + ad) = (a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad,$$

$$n^2(bc + ad) = (ab + cd)(ac + bd),$$

$$n^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}, \quad n = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}}.$$

În mod analog,

$$m = \sqrt{\frac{(bc + da)(bd + ca)}{cd + ba}}.$$

Observare. Avem

$$m \cdot n = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}} \sqrt{\frac{(bc + da)(bd + ca)}{cd + ba}} = \sqrt{(ac + bd)^2},$$

$$m \cdot n = a \cdot c + b \cdot d,$$

care este relația dintre diagonalele și laturile unui patrulater înscrisibil (stabilită de Ptolomeu).

86. Aria patrulaterului. Avem

$$S = \text{aria } ABCD = \text{aria } BAD + \text{aria } BCD.$$

Dar

$$\text{aria } BAD = \frac{1}{2} a \cdot d \sin A, \text{ aria } BCD = \frac{1}{2} b \cdot c \sin C = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A.$$

Deci

$$S = \frac{1}{2} (ad + bc) \sin A.$$

$$\text{Însă } \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}. \text{ Deci}$$

$$S = (ad + bc) \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} =$$

$$(ad + bc) \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}},$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

87. Raza cercului circumscris. Din triunghiul BAD, avem

$$R = \frac{n}{2 \sin A} = \frac{n}{4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}},$$

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}}}$$

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$

88. Unghiul θ al diagonalelor este dat de relația care exprimă aria unui patrulater în funcțiune de diagonale,

$$S = \frac{1}{2} mn \sin \theta.$$

De unde

$$\sin \theta = \frac{2S}{m \cdot n},$$

unde înlocuind pe m , n , S cu valorile lor în funcțiune de laturile patrulaterului avem, valoarea lui $\sin \theta$ deci și pe θ .

Exemplu. $a=169$ m, $b=195$ m, $c=52$ m, $d=150$ m. Cu

ajutorul formulelor găsite, aplicând logaritmi, avem $A = 81^{\circ} 37'44''$, $B = 67^{\circ}26'24''$, $C = 98^{\circ}22'16''$, $D = 112^{\circ}33'36''$, $m = 156,26$, $n = 179,44$, $S = 17555,62 \text{ m}^2$, $R = 90,686 \text{ m}$.

APLICAȚII LA CALCULUL DISTANȚELOR ȘI ÎNĂLȚIMILOR.

89. Cele mai interesante din multele și variatele aplicații ale Trigonometriei, sunt aplicațiile la calculul distanțelor dintre două puncte, când numai un punct este accesibil și aplicațiile la probleme de determinări de înălțimi, când piciorul înălțimei este accesibil sau nu, și în fine, aplicația la aflarea unui punct din plan, care este strâns legat de trei puncte date în plan.

În măsurări pe teren distanțele până la 20 m, le măsurăm cu metrul etalon, iar cele dela 20 în sus. cu panglica de măsurat. Unghiurile le măsurăm, pe uscat, cu *teodolitul*, iar pe apă, cu *sextantul*.

90. Să se afle distanța dintre două puncte accesibile, dar a căror distanță nu se poate măsura din cauza unui obstacol. Să însemnăm acele puncte

cu A și B separate cu un obstacol (Fig. 45). Aceste puncte fiind accesibile, alegem pe teren un punct C de unde să putem vedea punctele A și B, măsurăm apoi distanțele $AC = b$ și $BC = a$, și în fine unghiul ACB al razelor vizuale AC și CB. Din triunghiul ACB, în care cunoaștem două laturi b și a și unghiul cuprins între ele, putem afla lungimea laturei AB, care reprezintă distanța dintre punctele A și B, distanță care, însă, nu se putea măsura direct pe teren.

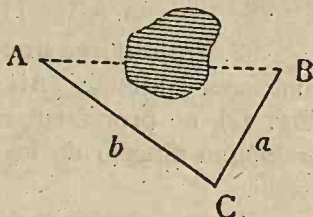


Fig. 45.

cuprins între ele, putem afla lungimea laturei AB, care reprezintă distanța dintre punctele A și B, distanță care, însă, nu se putea măsura direct pe teren.

Exemplu. Să se afle lungimea unei păduri, cunoscând distanțele de la doi pomi din margini la un punct fixat în câmp, $a = 1565 \text{ m}$, $b = 1483 \text{ m}$ și unghiul $C = 116^{\circ}23'$ format de razele vizuale duse de la acest punct la cei doi pomi mărginași.

În triunghiul ABC se cunosc două laturi și unghiul cuprins. Se calculează A și B cu formulele

$$\frac{A+B}{2} = 90^{\circ} - \frac{C}{2}, \quad \text{tg } \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cotg \frac{C}{2},$$

apoi se află $AB = 2590,5 \text{ m}$, care reprezintă lungimea pădurei.

91. Distanța dintre două puncte, unul fiind accesibil,

celalt nu, însă se vede. Fie A punctul neaccesibil, B punctul accesibil și ne propunem a măsura distanța AB (Fig. 46). Pentru aceasta alegem pe teren punctul C, din care să putem vedea punctul A și astfel ca să putem măsura distanța $BC=a$. Măsurăm apoi și unghiurile B și C.

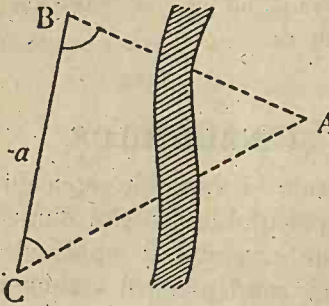


Fig. 46.

Din triunghiul ABC, avem

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \quad \frac{AB}{\sin C} = \frac{a}{\sin[180^\circ - (B+C)]}$$

de unde

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin[180^\circ - (B+C)]}$$

Exemplu. Să se afle depărtarea dintre două turnuri A și B între care curge un râu, cunoscând distanța $a=562,5$ m dela turnul B la un punct C de pe acelaș mal și unghiurile sub care se văd din B și C distanțele CA, BA, $B=8^\circ 46' 10''$, $C=56^\circ 28' 50''$.

Se găsește $AB=1120,13$ m.

92. Prelungirea unei drepte dincolo de un obstacol. Fiind

cunoscută distanța $AB=c$ (Fig. 47), ne propunem să o prelungim dincolo de un obstacol.

Pentru aceasta alegem un punct C pe teren, din care putem vedea punctele A și B, precum și locul unde trebuie prelungită AB. Măsurăm unghiurile A și B. Din triunghiul ABC calculăm pe $BC=a$.

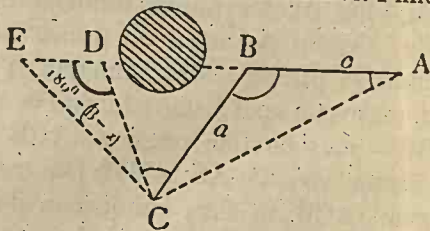


Fig. 47.

$$(1) \quad a = \frac{c \sin A}{\sin[180^\circ - (A+B)]}$$

Fixăm înspre partea unde vrem să prelungim dreapta AB o direcție CD și măsurăm unghiul $DCB=\alpha$. În triunghiul DCB cunoaștem latura $CB=a$, unghiul $DBC=180^\circ-B$. Unghiul ABC fiind exterior triunghiului DCB, este egal cu suma unghiurilor nealăturate, adică

de unde

$$B = \alpha + CDB,$$

$$CDB = B - \alpha.$$

Însemnând cu DE prelungirea dreptei AB, urmează că unghiul

$$EDC = 180^\circ - CDB = 180^\circ - (B - \alpha).$$

Din triunghiul CDB, avem

$$\frac{CD}{\sin DBC} = \frac{CB}{\sin CDB}, \quad \frac{CD}{\sin(180^\circ - B)} = \frac{a}{\sin(B - \alpha)},$$

$$CD = \frac{a \sin B}{\sin(B - \alpha)}.$$

Înlocuind pe a cu valoarea sa (1), avem

$$CD = \frac{c \sin A \sin B}{\sin(B - \alpha) \sin[180^\circ - (A + B)]}.$$

Așa fiind, pe direcția CD se ia punctul D, astfel ca CD să fie egală cu valoarea aflată, iar în punctul D se duce o dreaptă DE care să facă cu DC unghiul $180^\circ - (B - \alpha)$. DE este prelungirea dreptei AB.

Exemplu. La săparea unei tunel drept, având într-o parte a dealului direcția liniei ferate, să se afle continuarea acestei direcții dincolo de deal. Să presupunem că distanța a două puncte de pe direcția dată a liniei ferate este $c = 1,5$ km; fie C punctul din care se vede de amândouă părți ale dealului și unghiurile $B = 102^\circ 52'$, $A = 47^\circ 25'$, iar unghiul $\alpha = 51^\circ 30'$.

Se obține $CD = \frac{1,5 \sin 47^\circ 25' \sin 77^\circ 08'}{\sin 51^\circ 22' \sin 29^\circ 43''}$, $CD = 2,7806$ km,
 $EDC = 128^\circ 38'$.

93. Distanța a două puncte neaccesibile. Fie A și B (Fig 48) punctele neaccesibile, a căror distanță vrem s'o măsurăm. Alegem două puncte pe teren C și D, din care să vedem punctele A și B. Măsurăm distanța $CD = d$ și unghiurile $BCA = \alpha_1$, $ACD = \alpha_2$, $BDC = \beta_1$, $BDA = \beta_2$. Din triunghiul BDC, avem

$$BC = \frac{CD \sin \beta_1}{\sin[180^\circ - (\beta_1 + \alpha_1 + \alpha_2)]},$$

$$BC = \frac{d \sin \beta_1}{\sin[180^\circ - (\beta_1 + \alpha_1 + \alpha_2)]}.$$

Din triunghiul ACD, avem

$$\frac{AC}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{DC}{\sin[180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2)]}$$

$$AC = \frac{d \sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin[180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2)]}.$$

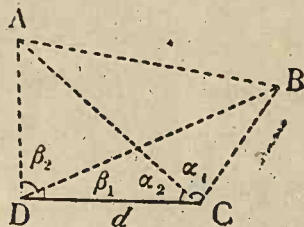


Fig. 48.

De asemenea, unghiul $ACB = \alpha_1$, este cunoscut. În triunghiul ACB cunoscând laturile AC și CB și unghiul α_1 , cuprins între ele, se pot calcula unghiurile CAB, ABC , apoi latura AB adică distanța dintre cele două puncte neaccesibile.

Exemplu. A și B fiind două puncte dincolo de malul unui râu, pentru a calcula distanța acestor puncte, calculăm elementele necesare problemei și anume $d = 75$ m, $\alpha_1 = 66^\circ 29'$, $\alpha_2 = 42^\circ 10'$, $\beta_1 = 42^\circ 29'$, $\beta_2 = 59^\circ 17'$.

Se găsește $AB = 127,06$ m.

94. **Problema hărții.** Cunoscând trei puncte pe teren A, B, C , să se afle poziția unui al patrulea punct, M , din care se văd distanțele AB și BC sub unghiurile α și β (Fig. 49).

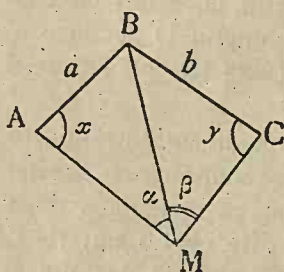


Fig. 49.

În mod geometric, poziția punctului M este la intersecția segmentelor de cercuri descrise pe AB și BC capabile de unghiurile α și β .

Problema se poate rezolva cu ajutorul Trigonometriei, luând ca necunoscute unghiurile $MAB = x$, $MBC = y$. Pentru a afla aceste unghiuri, să observăm că suma lor este dată de

$$x + y + \alpha + \beta + B = 360^\circ,$$

de unde

$$x + y = 360^\circ - B - \alpha - \beta.$$

Pentru a calcula diferența $(x - y)$ măsurăm pe teren distanțele $AB = a$, $BC = b$ și unghiul $ABC = B$. Din triunghiurile ABM, BCM , avem

$$BM = \frac{a \sin x}{\sin \alpha}, \quad BM = \frac{b \sin y}{\sin \beta}.$$

Egalând aceste valori, obținem

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

de unde

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

Să punem

(3)

$$\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \operatorname{tg} \varphi$$

și să calculăm numeric unghiul φ cu ajutorul tabelor de logaritmi.

Avem

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1},$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1},$$

$$\frac{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ),$$

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ),$$

Dar din (2), avem

$$(5) \quad \frac{x+y}{2} = 180^\circ - \frac{B + \alpha + \beta}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = -\operatorname{tg} \frac{B + \alpha + \beta}{2}.$$

Formula (4) devine

$$(6) \quad \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} \frac{B + \alpha + \beta}{2} \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi).$$

Cu ajutorul ecuațiilor (5) și (6) se calculează x și y . Se vor putea deci construi dreptele MA și CM , și deci punctul M este cunoscut.

Problema este nedeterminată când ecuația (6) se reduce la forma

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{0}{0},$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) = 0, \operatorname{tg} \frac{B + \alpha + \beta}{2} \rightarrow \infty.$$

Acesta are loc când

$$\varphi = 45^\circ, B + \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Dar, dacă $\varphi = 45^\circ$, relația (3) devine

$$b \sin \alpha = a \sin \beta,$$

sau

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha},$$

de unde se vede că cercurile circumscrise triunghiurilor ABM , BCM au aceeași rază, adică patrulaterul $ABCM$ este înscritibil.

De asemenea, din relația $B + \alpha + \beta = 180^\circ$, urmează de asemenea că unghiurile opuse B și $M = \alpha + \beta$ sunt suplimentare, că patrulaterul ABCM este inscripțibil.

Deci, problema este nedeterminată când suma $\alpha + \beta$ este egală cu $180^\circ - B$.

Exemple. 1^o. $a = 725\text{m}$, $b = 529\text{m}$, $\beta = 39^\circ 47'$, $\alpha = 43^\circ 42'$, $B = 132^\circ 35'$. Se găsește $\varphi = 51^\circ 55' 17''$, $x = 51^\circ 30'$, $y = 92^\circ 44'$, $MA = 1050,3\text{m}$, $MB = 825,8\text{m}$, $MC = 609,07\text{m}$, calculate din triunghiurile ABM, BCM, aplicând teorema sinusurilor.

2^o. $a = 170$, $b = 200$, $B = 114^\circ 40' 8''$, $\alpha = 30^\circ 9'$, $\beta = 46^\circ 17' 13''$; $\varphi = 39^\circ 15' 58''$, $x = 38^\circ 31' 14''$, $y = 130^\circ 22' 24''$, $BM = 210,8$.

95. Să se afle înălțimea unui turn al cărui picior e accesibil, dar așezat deasupra planului orizontal. Fie BC

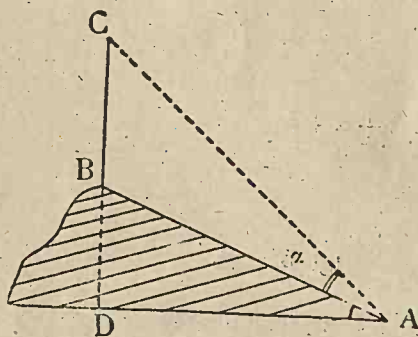


Fig. 50

înălțimea turnului de care ne putem apropia (Fig. 50). Măsurăm distanța $AB = c$ și unghiurile α și β .

În triunghiul dreptunghic ACB, unghiul $DCA = 90^\circ - (\alpha + \beta)$.

Din triunghiul ABC, rezultă

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha} \text{ de unde } BC = \frac{AB \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$BC = \frac{c \sin \alpha}{\sin 90^\circ - (\alpha + \beta)} = \frac{c \sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}$$

Exemplu. Să se afle înălțimea BC a unui turn așezat pe un deal, dacă lungimea drumului drept ce duce la turn este $c = 45\text{ m}$ și unghiurile sub care se văd din A turnul și dealul fiind $\alpha = 18^\circ 20'$, $\beta = 22^\circ 55'$.

Se găsește $BC = 18,83\text{m}$.

96. Să se afle înălțimea unui munte, terenul delapoalele lui fiind orizontal. Considerăm direcția BC, a cărei prelungire trece prin piciorul P al înălțimii necunoscute (Fig. 51) și măsurăm distanța $BC = a$ și unghiurile α și β sub care se vede înălțimea muntelui, din punctele C și B.

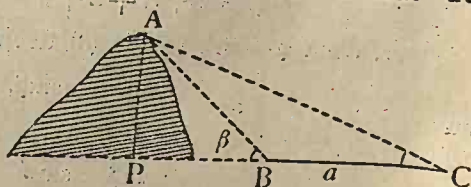


Fig. 51

Din triunghiul ABC, avem

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin BAC}, \quad AB = \frac{a \sin \alpha}{\sin BAC}$$

Dar, unghiul β fiind exterior triunghiului ABC, rezultă $\beta = A + \alpha$, de unde $BAC = \beta - \alpha$ și deci

$$AB = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Din triunghiul APB, avem

$$AP = AB \sin \beta = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Exemplu. $a = 65$ m, $\beta = 68^{\circ}17'$, $\alpha = 42^{\circ}53'$. Se găsește AP = 95,8 m.

97. Să se afle înălțimea unui deal, terenul de la poalele lui nefiind orizontal. Considerăm o distanță BC pe teren și o măsurăm; fie a lungimea ei (Fig. 52). Să măsurăm unghiurile α , sub care se vede din C înălțimea dealului, și β și γ , formate de razele vizuale BA și CA cu BC.

Din triunghiul ABC, avem

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin CAB}$$

$$AC = \frac{a \sin \beta}{\sin[180^{\circ} - (\gamma + \beta)]}$$

$$AC = \frac{a \sin \beta}{\sin(\gamma + \beta)}$$

Din triunghiul dreptunghic APC, avem

$$AP = AC \sin \alpha, \quad AP = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\gamma + \beta)}$$

care dă înălțimea dealului.

Exemplu. $a = 225$ m, $\beta = 41^{\circ}19'25''$, $\gamma = 52^{\circ}27'18''$, $\alpha = 47^{\circ}40'48''$. Se găsește AP = 108,32 m.

Observare. La toate înălțimile calculate trebuie adăugată înălțimea instrumentului cu care am măsurat unghiurile.

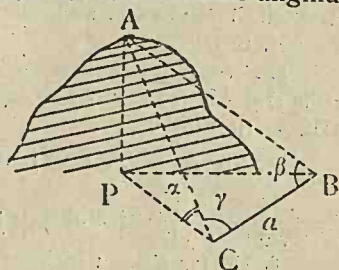


Fig. 52.

EXERCIȚII.

1. Să se afle distanța a două localități despărțite printr'un lac, ambele fiind vizibile dintr'un loc, ale cărui distanțe la cele două localități sunt egale cu 2,8 Km și 1,7 Km, iar unghiul dintre aceste două distanțe fiind $61^{\circ}55'39''$.

R. 2,5 Km.

2. O tranșee dreaptă AB este lungă de 1593,5 m. Un observator din capătul A vede un tun C al inamicului, astfel că raza vizuală AC face cu direcția AB unghiul $65^{\circ}51'20''$. De la capătul B observând același tun C, unghiul ABC este de $76^{\circ}32'40''$. Să se afle distanța tunului la tranșee (distanța se măsoară pe perpendiculara din C pe AB).

R. Se calculează mai întâi BC; însemnând cu D piciorul perpendicului din C pe AB, din triunghiul BCD, se calculează $CD = \frac{AB \sin A \sin B}{\sin C} = 2317,78 \text{ m.}$

3. Să se afle distanța dintre două vapoare A și B pe mare, cunoscând unghiurile calculate din punctele C și D de pe mal, $BCD = 40^{\circ}$, $ACD = 69^{\circ}$, $ADC = 38^{\circ}30'$, $BDC = 70^{\circ}30'$, știind că distanța $CD = 150 \text{ m.}$

R. 82,747 m.

4. Un aeroplan inamic C e observat în același timp din locurile A și B depărtate cu 2,4 Km, unul de altul. Unghiul de elevație al aeroplanului măsurat din A (adică unghiul făcut de raza vizuală AC cu orizontala ce trece prin A) este $54^{\circ}48'$; unghiul $CAB = 85^{\circ}16'$; unghiul CBA, format de direcția AB cu raza vizuală dusă din B la aeroplan este $56^{\circ}30'$. Să se afle înălțimea în acel moment al aeroplanului.

R. 2,6425 Km.

5. Se dă unghiul $BAC = 38^{\circ}45'$. Să se ducă o dreaptă care să taie pe AB în D și AC în E, astfel ca unghiul $ADE = 59^{\circ}16'30''$, iar aria triunghiului ADE să fie 248650 m^2 .

R. Fie $AD = x$, $AE = y$; avem $xy \sin 38^{\circ}45' = 2.248650$, $\frac{x}{\sin E} = \frac{y}{\sin D}$

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot S \sin E}{\sin A \sin D}}, \quad S \text{ fiind aria; } x = 956,66 \text{ m, } y = 830,52 \text{ m.}$$

6. Un far CF, cu piciorul în C este văzut din punctele A și B, așezate pe același plan-orizantal cu C (planul ABC fiind perpendicular pe dreapta CF), sub unghiurile de elevație $CAF = 45^{\circ}$, $CBF = 30^{\circ}$. Să se afle înălțimea CF a farului, știind că distanța $AB = 240 \text{ m}$, iar direcțiile AC și CB sunt perpendiculare.

$$R. x = CF; \quad AC = \frac{x}{\operatorname{tg} 45^{\circ}}, \quad CB = \frac{x}{\operatorname{tg} 30^{\circ}}, \quad \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2; \quad x = 120 \text{ m.}$$



VERIFICAT
2017

VERIFICAT
1