LECȚIUNI

DE

GEOMETRIE ANALITICĂ

pentru Clasa VIII Reală

DE

NICULAE ABRAMESCU
PROFESOR LA LICEUL DIN GALAȚI

Carte aprobată de Onor. Minister al Cultelor și Instrucțiunii ipublice prin Ord. No. 227 din 12 Iunie 1912.

EDIȚIA I
TIPĂRITĂ IN 1000 EXEMPLARE

PLOEȘTI

„PROGRESUL", SOCIETATE ANONIMĂ PE ACȚIUNI

1912

PREFAȚA

Alcătuirea unui curs de Geometrie Analitică a fost de mult timp una din principalele mele ocupațiuni. Greutățile ce se întâmpină cu tipăritul și sacrificiile materiale ce trebue să le facă autorul unei cărți de matematici de curs superior (clasa VIII reală în special) m'au făcut să amân publicarea acestei Geometri și numai îndemnul câtorva colegi și lipsa unei asemenea cărți m'au hotărît să dau publicității lucrarea de față, care în cea mai mare parte este rezumatul lecțiunilor de Geometrie Analitică, pe care ni le făcea la Universitate D-l **G. Țiţeica.**

Planul urmat în alcătuirea acestei Geometrii este acelaș ca la Algebra *mea de clasa VIII reală : teoria expusă este însoțită de numeroase aplicațiuni imediate, din a căror serioasă cercetare, să iasă la iveală procedee pentru probleme similare, iar din rezolvarea exercițiilor, cărora li se dă o schiță de soluție, să rezulte o fixare a acestor procedee și o deprindere nu numai pentru rezolvare, dar și pentru alcătuirea de probleme mai grele, în rezumat pentru formarea gustului de matematici.*

După aparență, lucrarea pare prea dezvoltată pentru Licee; e drept că unele chestiuni de pol şi polară, construcţiuni geometrice asupra conicelor, schimbarea axelor de coordonate polare *nu fac parte din programul de Liceu; cauza care m'a determinat să adaug și aceste chestiuni a fost că sunt cerute la examenul de admitere în* Şcoala de Poduri şi Sosele, *și citirea acestora într'o carte prea dezvoltată și poate prea scumpă, ar fi fost dăunătoare începătorilor, care nu știu să aleagă partea importantă și necesară din expunerea dezvoltată din acele cărți. Ceeace mărește formatul prezentei lucrări sunt numeroasele aplicațiuni și exerciții, care sunt fundamentale pentru aceia care* *îşi vor formà o carieră matematică, şi cărora mai le este necesară încă o Culegere de probleme, pentru ca un elev care a erminat teoria, să nu ajungă în ridicula situaţie, de a nu puteà să rezolve probleme, care es din tipicul celor două trei expuse în teorie, zicând că n'a întâlnit de acestea în cartea lor.*

Inainte de a terminà, mă simt dator să aduc omagiile mele fostului meu profesor, D-l **G. Ţiţeica,** *care fiind membru în comisia pentru cercetarea cărţilor didactice, mi-a dat multe sfaturi, în ce priveşte expunerea.*

De asemenea, colegului meu, **S. Flavian,** *îi aduc viile mele mulţumiri pentru dezinteresata şi neobosita activitate ce a depus la corectarea probelor, graţie căreia execuţia tipografică (a Tipografiei „Progresul", Ploeşti) a lucrării de faţă este destul de satisfăcătoare.*

Niculae Abramescu
Profesor la Liceul din Galaţi

ERATA

Pag.	Rândul	In loc de :	Să se citească :
2	9 de sus în jos	numește	numesc
7	11 de jos în sus	egală	egal
7	2 de jos în sus	cerculni	cercului de centrul O
8	10 de sus în jos	$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \lambda$	$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda$
8	13 de sus în jos	punctul	punctele
9	11 de jos în sus	$\frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M'M_2}} = \mu$	$\frac{\overline{M_1M'}}{\overline{M'M_2}} = \mu$
17	9 de jos în sus	P_1OM_1,	P_1OM_1
19	3 de sus în jos	o linie dreaptă, paralelă cu dreapta: $y = m x$	
19	9 de sus în jos	$Ax + By + C + = 0$	$Ax + By + C = 0$
20	5 de jos în sus	$B = -(x - x_2)$	$B = -(x_1 - x_2)$,
22	1 de sus în jos	$(AB =/= 0)$	$(A, B, C =/= 0)$
23	15 de sus în jos	$C \equiv$	$D \equiv$
28	3 de sus în jos	$(x_0\ y_0)$	(x_0, y_0)
28	11 de sus în jos	$(x_{\cdot}\ y_{\cdot})$	(x_0, y_0)
30	11 de sus în jos	$(x_{,1}\ y_1)$	(x_1, y_1)
31	19 de jos în sus	$u(Ax + By + C) + v(Ax + By + C) + w(Ax + By + C) = 0$	$u(Ax + By + C) + v(A'x + B'y + C') + w(A''x + B''y + C'') = 0$
33	2 de jos în sus	$\lambda (A'x + B'y + C'$	$\lambda (A'x + B'y + C')$
36	1 de sus în jos	$Ax_2 + By_2 + D$	$Ax_2 + By_2 + C$
36	7 de sus în jos	$\overline{MA_1} : \overline{M_2 A_2} = 1$	$\overline{MA_1} : \overline{MA_2} = 1$
39	4 de jos în sus	$\cos \widehat{AM_0B}$	$\cos \widehat{CM_0P_0}$
40	12 de jos în sus	figurei	figurei,
43	15 de sus în jos	$Ax + By + C' = 0$	$Ax + By + C = 0$
43	9 de jos în sus	exterioară	exterioară.
45	9 de sus în jos	$A(x_1\ y_1)$	$A(x_1, y_1)$
45	13 de sus în jos	$ABC = + \frac{1}{2}$	$ABC = \pm \frac{1}{2}$
45	7 de jos în sus	$C(x_3\ y_3)$	$C(x_3, y_3)$
45	3 de jos în sus	$x_1\ y\ 1$	$x_1\ y_1\ 1$
48	17 de jos în sus	$a = -2$	$a = -2$,
50	5 de sus în jos	coordonare	coordonate

63	11 de jos în sus	$+ y = K$	$\pm y = K$
71	3 de jos în sus	$\frac{2 B'}{C}$	$\frac{2 B'}{C'}$
73	7 de jos în sus	simetrie	simetrice
86	2 de jos în sus	după	în
103	2 de jos în sus	$- R_2$	$- R^2$
110	9 de jos în sus	$- \mu y$	$- 2 \mu y$
114	8 de sus în jos	$y \frac{m}{2}$	$y - \frac{m}{2}$
115	2 de sus în jos	și	ai
124	7 de sus în jos	$b < a$	$b < a$;
128	11 de jos în sus	B_1,	B_1
132	10 de sus în jos	că	ca
138	6 de jos în sus	$M (x_0, y)$	$M (x_0, y_0)$
139	4 de jos în sus	$\frac{y_2^0}{b}$	$\frac{y_2^0}{b^2}$
168	12 de jos în sus	E.	E;
169	11 de jos în sus	a	o
169	9 de jos în sus	AF. AF′ = MO. MO,	AF. AF′ = MO. MO, căci în cazul nostru dreapta OD taie asimptotele în acelaș punct O.
169	1 de jos	paralelă	paralele
182	5 de jos în sus	OF	PF

TABLA DE MATERII

Lecțiuni de Geometrie Analitică pentru clasa VIII reală

Introducere.

1. **Geometria Analitică** studiază proprietăţile figurilor prin calcul. Intemeetorul Geometrii Analitice este *Descartes*, care a publicat un tratat la 1637.

Geometria analitică este *plană* şi în *spaţiu*, după cum studiază proprietăţile figurilor plane sau din spaţiu.

Geometria plană.

Sisteme de coordonate.

2. Poziţiunea unui punct M, din planul definit de două drepte Ox, Oy (Fig. 1), este cunoscută cu ajutorul a două cantităţi: OP$=x$, OQ$=y$, obţinuţe ducând din M paralele la Oy şi la Ox, şi care se numesc *coordonatele punctului* M. OP se numeşte *abscisa,* OQ *ordonata* punctului M, Ox,

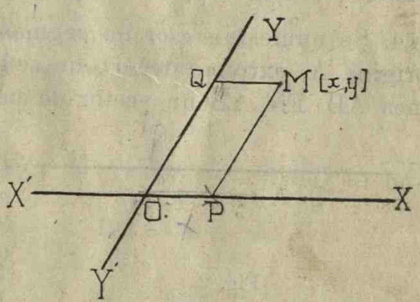


Fig. 1.

şi Oy *axele de coordonate,* O *origina* axelor; Ox se zice axa abscisele, sau a icşilor, oy axa ordonatelor, sau axa igrecilor.

Dacă Oy este perpendiculară pe Ox, axele de coordonate se zic *perpendiculare,* iar coordonatele (x, y) formeaza un *sistem de coordonate perpendiculare*, rectangulare, sau dreptunghiulare.

Dacă Oy este înclinată pe Ox, axele se zic *oblice*, iar coordonatele formează un *sistem de coordonate oblice*.

Atât coordonatele perpendiculare, cât şi cele oblice, se numesc *coordonate carteziene*, după numele lui *Descartes*, *Cartesius* pe latineşte.

3. Punctul O defineşte pe Ox şi Oy două sensuri: dela O spre x şi y se numesc sensuri pozitive, iar spre x' şi y' sensuri negative.

In fig. 1. atât abscisa cât şi ordonata sunt pozitive.

Dacă am voi să construim punctul de coordonate $(+2, -1)$, vom luà pe Ox, înspre dreapta, o lungime egală cu 2, şi pe Oy în jos, o lungime egală cu -1; paralelele duse prin aceste puncte la axe se taie în punctul M $(2, -1)$. Coordonantele se scriu alături de M, în paranteză, întâi abscisa, apoi ordonata, despărţite cu o virgulă.

Toate punctele de pe Ox au ordonatele nule şi deci pentru orice punct de pe Ox, avem $y = 0$. In acelaş mod, $x = 0$ însemnează toate punctele aşezate pe axa Oy, căci abscisele lor sunt toate egale cu zero. Coordonatele originii axelor vor fi $(0, 0)$

Vectori.

4. Se numeşte *vector* un segment de dreaptă, $\overline{AB}$, având origina A, extremitatea B, un sens dela A la B şi lungimea AB. Fie $\overline{AB}$ un vector de pe axa Ox. Insemnând cu (a, o), (b, o) coordonatele punctelor A şi B (Fig. 2), avem:

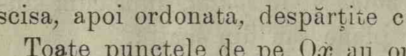


Fig. 2.

$$\overline{OA} = a, \ \overline{OB} = b,$$

şi deci lungimea vectorului $\overline{AB}$, de pe Ox, este:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = b - a.$$

Aşa dar, lungimea unui vector, de pe Ox, este egală cu *diferenţa dintre abscisa extremităţii şi a originii acelui vector*.

Considerând vectorul $\overline{BA}$, lungimea sa este:

$$\overline{BA} = \overline{BO} - \overline{AO} = (-b) - (-a) = a - b,$$

şi deci :

$$\overline{AB} = -\overline{BA},\ \overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

5. Să luăm pe axa Ox punctele A_1 (x_1, o), A_2 (x_2, o), ... A_n (x_n, o), având abscisele : $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$. Avem :

$$\overline{A_1 A_2} = x_2 - x_1,\ \overline{A_2 A_3} = x_3 - x_2, \dots \overline{A_{n-1} A_n} = x_n - x_{n-1}.$$

De uude :

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} = x_n - x_1.$$

Insă : $(x_n - x_1)$ reprezintă lungimea vectorului $\overline{A_1 A_n}$; deci :

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} = \boxed{\overline{A_1 A_n}}.$$

Dar :

$$\overline{A_1 A_n} = -\overline{A_n A_1};$$

prin urmare:

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} + \overline{A_n A_1} = 0.$$

6. **Exerciţiu.** *Fiind date punctele* A, B, C, D *pe o dreaptă, să se arate că avem :*

A(a) B(b) C(c) D(d)

$$\overline{AC}.\ \overline{BD} = \overline{AB}.\ \overline{CD} + \overline{AD}.\ \overline{BC}.$$

(c-a)(d-b) = (b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)

In adevăr, să luăm acea dreaptă ca axă Ox şi fie : a, b, c, d, abscisele punctelor : A (a, o), B (b, o), C (c, o), D (d, o).

Avem :

$$\overline{AC} = c - a,\ \overline{BD} = d - b,\ \overline{AB} = b - a,\ \overline{CD} = d - c$$

$$\overline{AD} = d - a,\ \overline{BC} = c - b.$$

Deci :

$$\overline{AB}.\ \overline{CD} + \overline{AD}.\ \overline{BC} = (b - a)(d - c) + (d - a)(c - b),$$

$$\overline{AC}.\ \overline{BD} = (c - a)(d - b).$$

Efectuând calculele, vom găsi aceiaşi valoare pentru ambele expresii şi deci :

$$\overline{AC}.\ \overline{BD} = \overline{AB}.\ \overline{CD} + \overline{AD}.\ \overline{BC}.$$

Unghiuri.

7. **Sens direct şi indirect.** Fie Ox o dreaptă care se învârteşte (Fig. 3) împrejurul punctului O până ajunge în OA. Se zice că unghiul xoA este pozitiv, sau deschis în sensul direct, când mişcarea ce a făcut-o Ox ca să ajungă în poziţia OA este de sens invers ca aceia ce o face acele unui ceasornic; în caz contrar, se zice că unghiul este negativ, sau este deschis în sens indirect (retrograd).

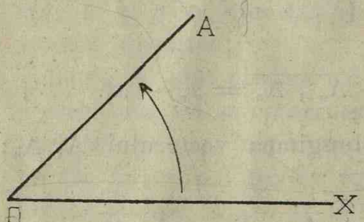


Fig. 3.

8. **Unghiul a două drepte** este unghiul făcut de direcţiile pozitive ale acelor drepte, măsurat în sens direct. Dacă dreptele sunt AB şi CD (Fig. 4), unghiul lor este DOB, făcut de direcţiile pozitive ale acelor drepte.

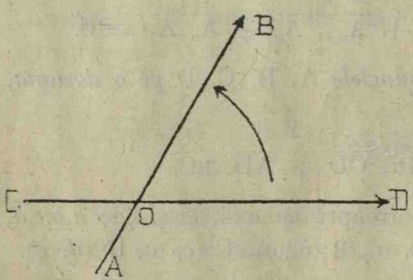


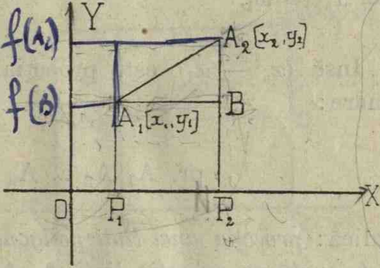
Fig. 4.

Proecţiuni.

8. Se numeşte proecţia unui punct M pe o axă Ox (Fig. 1), după o direcţie paralelă cu Oy, punctul P de intersecţie al dreptei Ox cu paralela MP dusă din M la Oy.

Proecţia ortogonală a unui punct este piciorul perpendicularei din acel punct pe axa de proecţiunè.

Fie $A_1\ A_2$ un vector aşezat în planul a două axe perpendiculare (Fig. 5). Insemnând cu (x_1, y_1), (x_2, y_2) coordonatele punctelor A_1 şi A_2; P_1, P_2 proecţiile ortogonale ale punctelor A_1, A_2 pe Ox, proecţia lui $\overline{A_1 A_2}$ pe Ox este: $\overline{P_1P_2} = \overline{A_1B}$.



Punctele P_1 şi P_2 având respectiv aceleaşi abscise, OP_1 şi OP_2, ca şi A_1, A_2, rezultă că:

Fig. 5.

$$\text{pr.}(A_1A_2)_{ox} = P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

Deci, *proecţia unui vector pe axa Ox este egală cu diferenţa dintre abscisa extremităţii şi abscisa originii acelui vector.*

Ducând prin A_1 paralela $A_1 B$ cu Ox, proecţia lui $\overline{A_1 A_2}$ pe Oy este egală cu: $\overline{BA_2} = y_2 - y_1$, căci: $\overline{BA_2} = \overline{P_2A_2} - \overline{P_2B} = y_2 - y_1$.

Deci, *proecţia unui vector pe Oy este egală cu diferenţa dintre ordonatele extremităţii şi originii.*

9. **Proecţia unei linii poligonale pe o axă este egală cu proecţia linii drepte care închide acea linie poligonală.**

Fie: $A_1A_2 \ldots A_n$ (Fig. 6) o linie poligonală şi (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n) coordonatele punctelor A_1, A_2, ... A_n. Proecţia acestei linii poligonale pe axa Ox este egală cu suma proecţiunilor liniilor $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ... $A_{n-1} A_n$ pe acea axă. Adică:

$$\text{pr. } A_1A_2 \ldots A_n = \text{pr.} \overline{A_1A_2} + \text{pr.} \overline{A_2 A_3} + \ldots + \text{pr.} \overline{A_{n-1} A_n}.$$

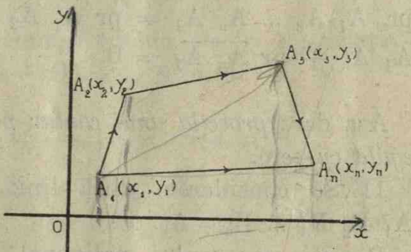


Fig. 6.

Insă:

$$\text{pr. } \overline{A_1 A_2} = x_2 - x_1, \text{ pr } \overline{A_2 A_3} = x_3 - x_2, \ldots \text{ pr. } \overline{A_{n-1} A_n} = x_n - x_{n-1}.$$

Deci:

$$\text{pr. } A_1 A_2 \ldots A_n = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_1.$$

Insă $(x_n - x_1)$ este proecţia vectorului $\overline{A_1 A_n}$. Prin urmare:

$$\text{pr. } A_1 A_2 \ldots A_n = \text{pr } \overline{A_1 A_n}$$

adică: *proecţia unei linii poligonale* $A_1 A_2 \ldots A_n$ *pe o axă este egală cu proecţia linii* $A_1 A_n$ *care închide acea linie poligonală.*

10. Să considerăm poligonul $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ (Fig. 6). Am văzut că proectând pe axa Ox, obţinem:

$$\text{pr. } A_1 A_2 \ldots A_n = \text{pr } \overline{A_1 A_n}.$$

Insă:

$$\text{pr. } \overline{A_1 A_n} = - \text{ pr. } \overline{A_n A_1}.$$

Deci:

$$\text{pr. } A_1 A_2 \ldots A_n A_1 = \text{pr } A_1 A_2 \ldots A_n + \text{pr } \overline{A_n A_1} = \text{pr. } \overline{A_1 A_n} + \text{pr } \overline{A_n A_1} = 0.$$

Aşa dar: *proecţia unui contur poligonal închis pe o axă este egală cu zero.*

11. Să considerăm două linii poligonale: $A_1 A_2 \ldots A_n$, $A_1 B_2 B_3 \ldots B_{n-1} A_n$.

Proecţia conturului poligonal închis $A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n B_{n-1} \ldots B_2 A_1$ pe o axă este zero. Deci:

$$\text{pr } A_1 A_2 \ldots A_n + \text{pr. } A_n B_{n-1} \ldots B_2 A_1 = 0,$$

sau:

$$\text{pr } A_1 A_2 \ldots A_n = - \text{pr } A_n B_{n-1} \ldots B_2 A_1 = \text{pr } A_1 B_2 \ldots B_{n-1} A_n.$$

Aşà dar: *proecţiile a două contururi, cari au aceiaşi origină şi aceiaşi extremitate, sunt egale.*

12 **Măsura proecţiunii unui vector pe o axă.** Fie $\overline{AB}$ un vector (Fig. 7) a cărui lungime este l şi care face cu Ox unghiul $\Theta = CAB$. Proecţia vectorului AB pe Ox este:

$$AC = AB \cos \Theta = l \cos \Theta,$$

iar proecţia pe axa Oy este: $l \sin \Theta$.

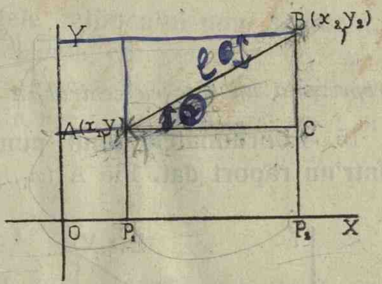


Fig. 7.

Probleme asupra punctului.

13. **Distanţa dintre două puncte.** Fie: A (x_1, y_1), B(x_2, y_2), două puncte (Fig. 7), ale căror coordonate sunt (x_1, y_1); (x_2, y_2). Ducând A C paralelă cu Ox, proecţia A C a lui A B pe Ox este: $(x_2 - x_1)$, sau $\overline{AB} \cos \Theta$: de asemenea, proecţia pe Oy este: $(y_2 - y_1)$, sau $\overline{AB} \sin \Theta$. Avem deci:

$$\overline{AB} \cos \Theta = x_2 - x_1,$$

$$\overline{AB} \sin \Theta = y_2 - y_1 \cdot$$

Ridicând la pătrat, adunând şi ţinând seamă de relaţia: $\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1$, rezultă:

$$\overline{AB}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Deci: *pătratul distanţei dintre două puncte este egal cu suma pătratelor diferenţelor absciselor şi ordonatelor acelor puncte.*

14. **Aplicaţii.** 1. *Distanţa dela un punct* M (x, y) *la origina axelor este:* $x^2 + y^2$. Dacă pnctul M variază în plan, rămânând mereu la aceiaşi distanţă r de origina O, adică, dacă punctul M (x, y) se află pe cercul cu centrul în O şi cu raza r, această proprietate geometrică se exprimă analitic, scriind că distanţa dela un punct oare care M (x, y) al cercului este egală cu r şi deci vom avea ecuaţia:

de centru O

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Se zice că cercul considerat este reprezentat de această ecuaţie, sau mai bine că *ecuaţia:*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

reprezintă un cerc cu centrul în origină şi cu raza **r**.

15. **Coordonatele unui punct care înparte o dreaptă într'un raport dat.** Fie A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) două puncte şi M (x, y) un punct care înparte dreapta AB (Fig. 8) în raportul:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda.$$

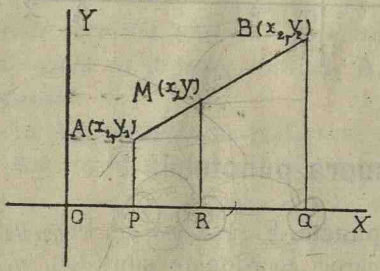


Fig. 8.

Ducând prin A, M, B paralelele la Oy, obţinem punctele P, R, Q.

Se ştie din Geometrie că:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}$$

Insă:

$$\overline{PR} = x - x_1, \quad \overline{RQ} = x_2 - x.$$

De unde, înlocuind, obţinem:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \; x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

In mod analog, proectând vectorul AMB pe Oy, după o direcţie paralelă cu Ox, găsim:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Deci, *coordonatele* $(\mathbf{x}, y)$ *ale punctului* M *care înparte dreapta definită de punctele* A $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$, B $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ *în raportul* $\overline{AM} : \overline{MB} = \lambda$, *sunt:*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad \text{(I)}$$

Aceste formule sunt independente de unghiul axelor.

16. **Aplicaţii.** I. **Coordonatele mijlocului unui segment.** Fie : (x_1, y_1), (x_2, y_2) coordonatele punctelor A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) care definesc un segment şi M (x, y) mijlocul acestui segment. Raportul λ în acest caz este egal cu 1 şi deci formulele (1) devin :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Sau : *coordonatele mijlocului unui segment sunt egale cu semisuma absciselor şi semisuma ordonatelor punctelor ce definesc acel segment.*

II. **Expresiunea coordonatelor a două puncte conjugate armonic în raport cu un segment dat.** Fie M (x, y), M′ (x', y') două puncte (Fig. 9) conjugate armonic în raport cu punctele M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2). Punctele M, M′ înpărţind pe $M_1 M_2$ în rapoartele :

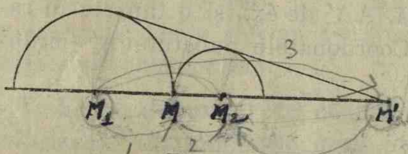


Fig. 9.

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \lambda, \quad \cancel{\frac{\overline{M_1M'}}{\overline{M'M_2}}} = \mu,$$

$\frac{M_1M'}{M'M_2} = \mu$

coordonatele acestor puncte sunt:

$$M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right), \quad M'\left(\frac{x_1 + \mu x_2}{1+\mu}, \frac{y_1 + \mu y_2}{1+\mu}\right).$$

Punctele M, M′ fiind conjugate armonic cu M_1, M_2, urmează că :

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -\frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M'M_2}}$$

sau :

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{M\,M_2}} = -\frac{\overline{M_1M'}}{\overline{M'M_2}}, \quad \lambda = -\mu.$$

Deci, cunoscând coordonatele unui punct M de pe $M_1 M_2$,

$$M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right),$$

acelea ale *conjugatului armonic*, M′, sunt:

$$\frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \quad \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}.$$

Verificare. Când M este mijlocul segmentului $M_1 M_2$ ($\lambda=1$), coordonatele conjugatului său armonic sunt :

$$\frac{x_1 - x_2}{0}, \quad \frac{y_1 - y_2}{0},$$

adică ambele infinit de mari, sau că acest conjugat armonic este aruncat la infinit. Acest rezultat analitic concordă cu teoria geometrică, căci se știe că este aruncat la infinit conjugatul armonic al mijlocului unui segment.

III. **Cunoscând coordonatele vârfurilor unui triunghiu, să se afle acelea ale centrului de greutate.**

Fie : A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3), G (x, y) vârfurile și centrul de greutate al triunghiului A B C. Se știe că punctul G se află pe o mediană, AA′ de ex., și o înparte în raportul : (AG : GA′) = 2. Coordonatele punctului A′ (mijlocul lui BC) fiind :

$$x' = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y' = \frac{y_2 + y_3}{2},$$

acelea ale lui G vor fi :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x'}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y'}{1+\lambda}, \lambda = \frac{\overline{AG}}{\overline{GA'}} = 2.$$

Deci coordonatele lui G vor fi:

$$x = \frac{x_1 + 2\frac{x_2 + x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

adică, *vom face suma absciselor și suma ordonatelor vârfurilor triunghiului și le vom înpărți cu 3.*

IV. **Fiind date trei puncte** A, B, C **în linie dreaptă și** M **un punct în planul lor, să se demonstreze relația (lui Stewart) :**

$$\overline{AM}^2.\overline{BC} + \overline{BM}^2.\overline{CA} + \overline{CM}^2.AB + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0.$$

In chestiuni de geometrie analitică, partea grea a problemei constă în alegerea axelor de coordonate. In cazul de față se indică să se ia dreapta ABC ca axă Ox și perpendiculara din M pe ea, ca axă Oy. (Fig. 10). Atunci coordonatele acestor *puncte date* vor fi notate cu primele litere ale alfabetului, adică: A (a, o), B (b, o), C (c, o), M (o, m).

Avem :

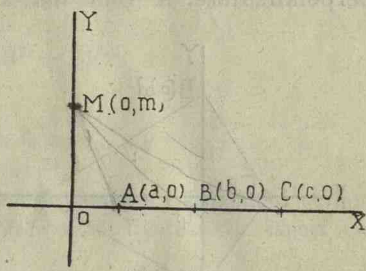
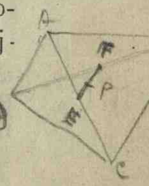


Fig. 10.

$$\overline{AM}^2 = a^2 + m^2,\quad \overline{BM}^2 = b^2 + m^2,\quad \overline{CM}^2 = c^2 + m^2,$$
$$\overline{BC} = c - b,\quad \overline{CA} = a - c,\quad \overline{AB} = b - a.$$

Vom înlocuì pe $\overline{AM}^2$, ... , $\overline{BC}$,... în relația de verificat cu valorile găsite și vom avea ca rezultat zero, și deci relația este demonstrată.

+ V. **Să se demonstreze că mijlocul dreptei care uneşte mijloacele diagonalelor unui patrulater are pentru coordonate mediile aritmetice ale coordonatelor vârfurilor.** Fie : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ coordonatele vârfurilor patrulaterului ABCD. Coordonatele mijloacelor diagonalelor AC, BD vor fi :



$$E\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right),\quad F\left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}\right)$$

Mijloc cele ale mijlocului acestei drepte E, F, vor fi : semisuma absciselor și semi-suma ordonatelor, adică :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_3}{2} + \frac{x_2 + x_4}{2}\right) = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \quad \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}.$$

Aceasta probează că aceste coordonate sunt mediile aritmetice ale coordonatelor vârfurilor, adică egale cu suma absciselor și suma ordonatelor, înpărțite cu numărul punctelor.

+ VI. **Să se arate că într'un patrulater ortodiagonal (cu diagonalele perpendiculare)** ABCD, **avem:**

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$$

Chestiunea constă în alegerea axelor; diagonalele fiind perpendiculare, le vom luà, AC ca Ox, BD ca Oy (Fig. 11).

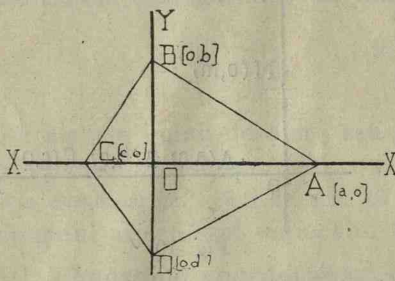


Fig. 11.

Coordonatele vârfurilor vor fi: A (a, o), B (o, b), C (c, o), D (o, d). N'avem de cât să calculăm distanțele $\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{BC}^2 = b^2 + c^2$, $\overline{CD}^2 = c^2 + d^2$, $\overline{AD}^2 = a^2 + d^2$, și relația:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$$

devine evidentă.

Exerciții.

1. Să se afle cum stau una în raport cu alta coordonatele unui punct al bisectoarei întâi, sau a doua a axelor de coordonate perpendiculare. (Bisectoarea unghiului $x\ Oy$ și a prelungirilor sale).

R. Abscisa și ordonata sunt egale și de acelaș semn; în cazul al doilea, abscisa și ordonata, egale și de semn contrar:

$$x = y; \quad x + y = 0.$$

2. Fiind cunoscute coordonatele (x,y) ale unui punct M, să se afle coordonatele punctului: 1⁰) simetric cu M în raport cu axa Ox; 2⁰) simetric cu M în raport cu axa Oy; 3⁰) simetric cu M în raport cu origina.

R. 1^0 (x,y), (x,—y); 2^0) (x,y), (—x,y); 3^0) (x,y), (—x,—y).

3. Să se afle lungimea laturilor triunghiului ale cărui vârfuri sunt punctele: (2,3), (4,—5), (—3,—6).

R. Se aplică formula distanței dintre 2 puncte.

$\sqrt{68}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{106}$.

4. Să se exprime că distanța dela un punct oarecare M (x,y) variabil la punctul A (2,3) este 4. Pe ce se mișcă punctul M?

R. $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 2^2$.

Pe un cerc cu centrul în (2,3) și cu raza 4.

5. Ce relație există între coordonatele unui punct variabil $M(x,y)$ care este la distanță egală de punctele A(2,3), B(4,5).

R. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-5)^2, x + y = 7$.

Toate aceste puncte se află pe perpendiculara pe mijlocul lui AB, iar între coordonatele (x,y) a oricărui punct a acestei perpendiculare, există relația: $x + y = 7$.

6. Să se afle coordonatele unui punct M egal depărtat de punctele: A(2,3), B(4,5), C(6,1). (Centrul cercului ABC).

R. Fie $M(x,y)$ coordonatele acelui punct; se va scrie:

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2.$$

De unde:

$$x + y = 7,\ 2x - y = 6;\ x = \frac{13}{3},\ y = \frac{8}{3}.$$

7. Să se afle coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului definit de punctele: (2,3), (4,5), (—3,—6). Să se figureze în raport cu două axe perpendiculare.

R. Se vor aplicà formulele: $\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}.$

$$\left(3,-1\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{11}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\frac{-3}{2}\right).$$

8. Se divide în trei părţi egale dreapta definită de punctele: A(2,3), B(4, — 5). Care sunt coordonatele punctului de diviziune, cel mai apropiat de A. Să se figureze.

R. Punctul M (x, y) divide dreapta în raportul: $\overline{AM} : \overline{MB} = 1 : 2$. Se înlocueşte în formulele:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\ \left(\frac{8}{3}, +\frac{1}{3}\right)$$

9. Să se arate că într'un trapez ABCD dreapta care uneşte mijloacele laturilor neparalele este egală cu semisuma bazelor.

R. Luăm ca Ox baza mare AD, iar ca Oy o perpendiculară pe baze. Coordonatele vârfurilor vor fi:

$A(a,o)$, $\cancel{D}(b,o)$, $C(p,d)$, $\cancel{B}(q,d)$.

Mijloacele lui AB şi CD au ca coordonate:

$$\left(\frac{a+q}{2},\ \frac{d}{2}\right);\ \left(\frac{b+p}{2},\ \frac{d}{2}\right).$$

Lungimea liniei considerate este:

$$\frac{b+p}{2} - \frac{a+q}{2} = \frac{(b-a)+(p-q)}{2}.$$

10. Să se afle distanţa punctelor:

$$A\ (x', y'),\ B\left(\frac{2x' + 2ay'}{1+a^2},\ \frac{2ax' + 2a^2y'}{1+a^2}\right).$$

R. $$\frac{\sqrt{(x'^2 + y'^2)(a^4 + 2a^2 + 1)}}{1+a^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

11. Să se probeze că dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse dintr'un patrulater se taie în mijlocul lor, căutând coordonatele mijloacelor acestor drepte.

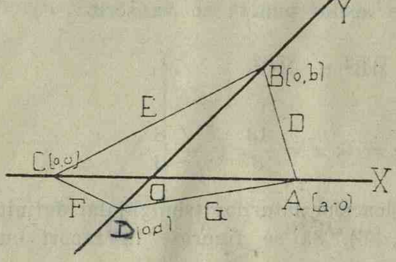


Fig. 12.

R. Patrulaterul fiind ABCD, se ia ca axe Ox şi Oy diagonalele AC, BD (Fig. 12). Se calculează coordonatele mijloacelor laturilor şi apoi ale mijloacelor dreptelor DF, EG, care vor fi:

$$\frac{a+c}{4}, \quad \frac{b+d}{4}.$$

S'ar fi putut rezolvà problema luându-se două axe perpendiculare oarecare, în raport cu care coordonatele vârfurilor ar fi: $(a_1\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$, $(a_3,\ b_3)$, $(a_4,\ b_4)$ şi se procedează la fel.

Reprezentarea curbelor prin ecuații.

17. Fie AB o curbă trasă în planul a două axe perpendiculare Ox, Oy (Fig. 13) și M (x, y) un punct al curbei, ale cărui coordonate sunt:

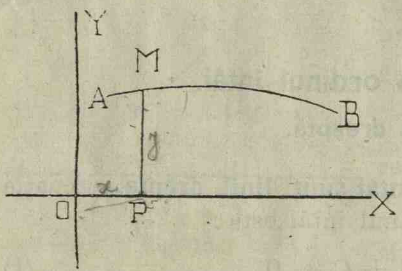


Fig. 13.

$$x = \overline{OP},\ y = \overline{PM}.$$

Când punctul M e determinat pe curbă, coordonatele sale sunt cunoscute, și când punctul variază pe curbă și coordonatele punctului M variază, așa că la fiecare valoare a lui $x = \overline{OP}$, corespunde o valoare determinată pentru y. Deci când punctul M se menține pe curbă, variația lui y depinde de a lui x; așa dar, y este o funcțiune de x,

$$y = f(x),$$

iar natura acestei funcțiuni depinde de forma curbei.

Așa dar, oricărei curbe din plan, putem admite că-i corespunde o ecuație : $f(x) = y$, sau mai bine :

$$F(x, y) = 0,$$

care se numește *ecuația curbei.*

Reciproc, orice ecuație de formă : $F(x, y) = 0$ *între coordonatele* (x, y) *ale unui punct din plan, reprezintă o curbă.* In adevăr, rezolvând ecuația dată, în raport cu y, avem :

$$y = f(x).$$

Deci, când x variază, la fiecare valoare a abscisei x, corespunde câte o valoare determinată f (x), pentru y, şi deci un punct anumit în plan. Unind toate aceste puncte astfel obţinute, vom avea o curbă, a cărei ecuaţie este: $y = f(x)$, sau: $F(x, y) = 0$.

Dacă ecuaţia $F(x, y) = 0$, este algebrică şi de gradul m, se zice că curba corespunzătoare este de *gradul* m, sau *de ordinul* m.

De ex., curba reprezentată de ecuaţia:

$$x^3 - 2xy^2 + 3x - 2 = 0$$

este de ordinul al treilea, căci ecuaţia curbei este de gradul al III-a, în raport cu x şi y.

Curbe de ordinul întâi.

Linia dreaptă.

18. **Curbele de ordinul întâi sunt linii drepte.** Ecuaţia generală a curbelor de ordinul întâi este:

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

(x, y) fiind coordonatele unui punct oarecare al curbei, iar A, B, C cantităţi date.

Pentru a vedea ce reprezintă ecuaţia (1), vom cerceta ce reprezintă formele simple ale ecuaţii (1), adică:

$$Ax + C = 0, \quad By + C = 0, \quad Ax + By = 0.$$

1⁰. $Ax + C = 0$; de unde deducem:

$$x = -\frac{C}{A},$$

ceeace probează câ orice punct al curbei reprezentative are abscisa totdeauna egală cu $-(C:A)$; deci această curbă este o dreaptă paralelă cu axa Oy. Prin urmare, ecuaţia: $x - a = 0$ reprezintă o paralelă la Oy la depărtarea a de de Oy. De asemenea, $x = 0$ reprezintă axa Oy.

2⁰. In mod analog, se vede că ecuaţia: $By + C = 0$, sau

$$y = -\frac{C}{B}; \; y - b = 0,$$

reprezintă o paralelă la axa Ox, la depărtarea $-\frac{C}{B}$, sau b, de axa Ox. De asemenea, $y=0$ reprezintă axa Ox.

3°. $Ax+By=0$. Această ecuaţie se mai poate scrie:

$$y=-\frac{A}{B}x,\ y=mx,\ (m=-\frac{A}{B}).$$

$-\frac{A}{B}=m$

Se vede că această curbă trece prin origina axelor de coordonate, căci ecuaţia curbei este verificată înlocuind pe x şi y cu (0, 0), coordonatele originii.

Considerând două puncte: $M_1(a_1, b_1)$, $M_2(a_2, b_2)$ ale acestei curbe (Fig. 14), între abscisele şi ordonatele acestor puncte avem, observând ecuaţia curbei:

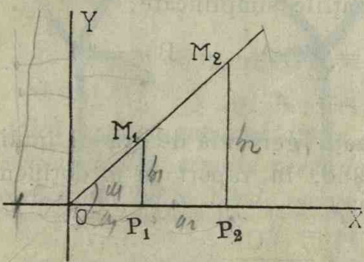


Fig. 14.

$$y=mx,$$

relaţiile:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$$b_1=ma_1,\ b_2=ma_2,$$

$$M_1P_1=m.OP_1,\ M_2P_2=m.OP_2.$$

De unde:

$$\frac{OP_1}{OP_2}=\frac{M_1P_1}{M_2P_2},$$

relaţie ce probează că triunghiurile dreptunghice OP_1M_1, OP_2M_2, au două laturi proporţionale şi unghiul cuprins între ele egal (cu 90°); deci aceste triunghiuri sunt asemenea şi prin urmare unghiurile $P_1OM_1 = P_2OM_2$, adică punctele O, M_1, M_2 sunt în linie dreaptă.

Aşà dar, două puncte oarecare, M_1 şi M_2 ale curbei:

$$y=mx,$$

sunt pe o linie dreaptă ce trece prin origină şi deci, această ecuaţie reprezintă o linie dreaptă ce trece prin origina axelor de coordonate.

Ca să construim, de ex., linia:

$$y=2x,$$

vom luà pe Ox, o abscisă $x=1$ şi pe perpendiculara pe Ox, ridicată în acest punct, o lungime egală cu 2 (căci: $y=2x$).

Revenind la ecuaţia: $Ax + By = 0$, $y = m x$, şi observând figura 14, vedem, din triunghiul $OP_1 M_1$:

$$M_1 P_1 = OP_1 \cdot \operatorname{tg} P_1 OM_1, \quad b_1 = a_1 \operatorname{tg} P_1 O M_1,$$

$$m = \operatorname{tg} P_1 OM_1, \quad -\frac{A}{B} = \operatorname{tg} P_1 O M_1.$$

Deci, coeficientul m, din ecuaţia dreptei $y = mx$, este *egal cu tangenta trigonometrică a unghiului ce dreapta face cu axa Ox şi se numeşte coeficientul unghiular al dreptei.*

In rezumat, am văzut că ecuaţiile simplificate:

$$Ax + C = 0, \quad By + C = 0, \quad Ax + By = 0$$

reprezintă linii drepte.

19. Să considerăm acum ecuaţia generală de gradul întâi, $Ax + By + C = 0$. Rezolvând, în raport cu y, obţinem ($B =/= 0$):

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B};$$

Sau:
$$\boxed{y = m x + n,}$$

punând:
$$m = -\frac{A}{B}, \quad n = -\frac{C}{B}.$$

Se vede că la o valoare x_1, dată lui x, corespunde din egalitatea:

$$y = m x + n,$$

o valoare pentru y (Fig. 15) egală cu $P_1 M_2 \cancel{= y = m x + n}$ $= y_1 = m x_1 + n$, iar pentru curba: $y = mx$, o valoare $P_1M_1 = y = mx$. Diferenţa dintre ordonatele a două puncte corespunzătoare, pentru aceiaşi valoare a lui x, ale curbelor:

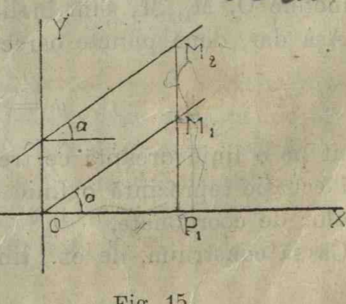


Fig. 15.

$$y = m x + n, \quad y = m x,$$

fiind totdeauna egală cu; $y_2 - y_1 = n$, urmează că şi ecuaţia : $y = m\,x + n$ reprezintă ca şi $y = m\,x$, tot o linie dreaptă, paralelă cu dreapta: $y=m\,x$, ~~o linie dreaptă, paralelă cu dreapta : $y = m\,x$.~~

Dreptele : $y = m\,x + n$, $y = m\,x$, fiind paralelele, fac acelaş unghi α cu axa Ox şi au acelaş coeficient unghiular, $m = \operatorname{tg} \alpha$.

Prin urmare, în general, *curbele de ordinul întâi*,

$$A\,x + B\,y + C = 0, \quad y = m\,x + n,$$

sunt linii drepte, al căror coeficient unghiular este :

$$\operatorname{tg} \alpha = m = -\frac{A}{B},$$

adică egal cu raportul dintre coeficienţii lui **x** *şi* **y**, *cu semn schimbat, din ecuaţia generală :* $A\,x + B\,y + C = 0$, *sau cu coeficientul lui* **x**, *când ecuaţia este adusă la forma :*

$$y = m\,x + n.$$

20. **Construirea dreptei** $A\,x + B\,y + C = 0$. O linie dreaptă fiind definită prin două puncte, e de ajuns, pentru a constuì dreapta, să cunoaştem două puncte ale ei. Cele mai uşor de calculat sunt punctele unde dreapta taie axele de coordonate. Orice punct aşezat pe $O\,x$ având ordonata zero, pentru a găsì abscisa punctului unde dreapta taie axa Ox, vom înlocuì în ecuaţia dreptei (unde presupunem $(C=/=0)$, pe y cu zero şi avem :

$$A\,x + C = 0, \qquad x = -\frac{C}{A}.$$

De asemenea, pentru a găsi unde dreapta taie axa Oy, vom face în ecuaţia dreptei $x=0$, şi ordonata punctului de intersecţie este dată de :

$$B\,y + C = 0, \quad y = -\frac{C}{B} = -\frac{C}{B}.$$

Unind punctele $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{B}{A}\right)$, se obţine dreapta cerută.

Exemplu. Să se construiască dreapta:

$$x - 2y + 1 = 0.$$

Vom face pe rând $x = 0$ şi $y = 0$ şi vom avea: $y = \frac{1}{2}$, $x = -1$, iar coordonatele punctelor unde această dreaptă taie axele de codrdonate, vor fi: $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

21. **Reciproc, ori ce dreaptă este reprezentată de o ecuaţie de forma:** $Ax + By + C = 0$. In adevăr, fie $M(x, y)$ un punct oarecare al dreptei, definită prin două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, date. Punctul $M(x, y)$ fiind pe M_1M_2, coordonatele vor fi de forma (§. 15):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{I}$$

unde: $\lambda = \overline{M_1M} : \overline{MM_2}$ este un parametru variabil.

Rezolvând ecuaţiile de mai sus, în raport cu λ, avem respectiv din prima şi a doua ecuaţie:

$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x - x_2}, \quad \lambda = \frac{y_1 - y}{y - y_2}.$$

Egalând aceste valori ale lui λ, obţinem:

$$\frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{y_1 - y}{y - y_2}, \tag{II}$$

sau, efectuând calculele,:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Deci, între coordonatele (x, y) ale unui punct oarecare al dreptei date, avem o relaţie de forma:

$$Ax + By + C = 0,$$

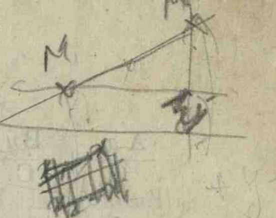
unde: $\quad A = y_1 - y_2, \quad B = -(x_1 - x_2), \quad C = x_1 y_2 - x_2 y_1.$

Relaţiile (I) *dau şi coordonatele unui punct al dreptei* M_1M_2, *în funcţie de un parametru varibil* λ.

22. **Aplicaţie.** *Ecuaţia unei drepte definită de două puncte.* Scriind relaţia (II) ~~supt~~ forma:

sub

$\frac{\quad}{x_2-x_1} = \frac{\quad}{y_2-y_1}$



$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

şi aplicând o proprietate a proporţiilor, avem:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).}$$

Rezultă de aci că *ecuaţia unei linii drepte definită prin două puncte:* $M_1 (x_1, y_1)$, $M_2 (x_2, y_2)$, *este:*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

iar coeficientul unghiular al acestei drepte este: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

adică: *raportul dintre diferenţa ordonatelor şi diferenţa absciselor celor două puncte care definesc dreapta, luate în aceiaşi ordine.*

Exemple. 1°. *Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin origină şi punctul* (a, b). Punctele: (x_1, y_1), (x_2, y_2), sunt în acest caz: $(0, 0)$ origina şi (a, b). Ecuaţia dreptei va fi:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1), \quad y = \frac{b}{a} x,$$

adică de forma: $y = m x$, ceeace trebuia să fie, căci aceasta este forma ecuaţii unei drepte ce trece prin origina axelor de coordonate.

2°. *Să se afle ecuaţia dreptei ce trece prin punctele:* $(2, -3)$ $(1, -2)$. Vom înlocui pe: (x_1, y_1), (x_2, y_2) în ecuaţia:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

şi avem:

$$y + 3 = \frac{-2 + 3}{1 - 2} (x - 2),$$

sau:

$$x + y + 1 = 0.$$

23. **Altă formă a ecuaţii linii drepte.** Scriind ecuaţia generală: $A x + B y + C = 0$ supt formele:

$$\frac{Ax}{C} + \frac{By}{C} + 1 = 0, \quad \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1, \ (A\,B \neq 0),$$

rezultă că ecuaţia linii drepte poate să fie şi de forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

punând:

$$a = -\frac{C}{A}, \ b = -\frac{C}{B}.$$

Cantităţile a şi b au însemări anumite. In adevăr, căutând punctele unde dreapta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

taie axele de coordonate, vom găsi că abscisa punctului unde dreapta dată taie pe Ox este egală cu a, iar ordonata punctului unde dreapta taie pe Oy este b. Sau că această dreaptă determină pe axe respectiv lungimile: a şi b.

Exerciţiu. Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctele: (2, 0), (0, 3) *aşezate pe axe.* Ecuaţia va fi:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

24. **Altă reprezentare parametrică a linii drepte.** *Altă metodă pentru a probà că o linie dreaptă este reprezentată de o ecuaţie de gradul întâi.* Să presupunem că o dreaptă este dată printr'un punct A şi unghiul α ce această dreaptă îl face cu axa Ox. Să ne propunem să găsim coordonatele unui punct oarecare al dreptei.

Fie: A (x_0, y_0) punctul dat al dreptei şi (x, y) coordonatele unui punct variabil M, a cărui distanţă la punctul A să o însemnăm cu: $\overline{AM} = r$.

Să scrim în două feluri proiecţile vectorului AM pe Ox şi Oy şi vom avea (§ 8):

$$x - x_0 = r\cos\alpha, \ y - y_0 = r\sin\alpha \qquad (1)$$

Deci, coordonatele punctului variabil M al dreptei sunt date de formulele:

$$x = x_0 + r\cos\alpha,\ y = y_0 + r\sin\alpha,$$

r fiind o distanţă AM variabilă a punctului M la punctul dat A.

Vom obţine toate punctele dreptei, făcând pe r să varieze de la $-\infty$ la $+\infty$ Coordonatele unui punct al dreptei conţin un parametru variabil **r** şi de aceia se zice că această reprezetare a linii drepte este parametrică.

Observare. Impărţind ecuaţiile (1), obţinem:

$$y - y_0 = (x - x_0)\ \mathrm{tg}\alpha,$$

care este o relaţie între coordonatele unui punct (x, y) al linii drepte, deci este ecuaţia acestei linii.

Am demonstrat deci, din nou, *că o linie dreaptă este reprezentată printr'o ecuaţie de gradul întâi.*

25 **Unghiul a două drepte.** Fie:

$$D \equiv Ax + By + C = o,\ D' \equiv A'x + B'y + C' = o$$

ecuaţiile a două drepte. Coeficienţii lor unghiulari sunt:

$$m = -\frac{A}{B} = \mathrm{tg}\Theta,\ m' = -\frac{A'}{B'} = \mathrm{tg}\,\Theta',$$

Θ şi Θ' fiind unghiurile acestor drepte cu axa Ox (Fig. 16).

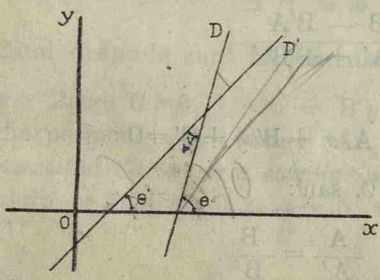


Fig. 16.

Insemnând cu V unghiul acestor două drepte, avem:

$\Theta = \Theta' + V$

$$V = \Theta - \Theta'$$

şi deci:

$$\mathrm{tg}V = \frac{\mathrm{tg}\,\Theta - \mathrm{tg}\Theta'}{1 + \mathrm{tg}\,\Theta\mathrm{tg}\,\Theta'} = \frac{m - m'}{1 + m\,m'}$$

Aşà dar, unghiul a două drepte (axele fiind perpendiculare):

$$y = \mathrm{m}\,x + \mathrm{n},\qquad y = \mathrm{m}'\,x + \mathrm{n}'$$

este dat de formula:

$$\mathrm{tg}\ V = \frac{m - m'}{1 + m\,m'},$$

sau, unghiul dreptelor:

$$Ax + By + C = 0, \qquad A'x + B'y + C' = 0$$

$$\operatorname{tg} V = \frac{-\frac{A}{B} + \frac{A'}{B'}}{1 + \frac{A}{B} \cdot \frac{A'}{B'}}, \quad \operatorname{tg} V = \frac{A'B - B'A}{AA' + BB'}.$$

Exerciţiu. Să se afle unghiul dreptelor:

$$\sqrt{3}\, x + y - a\sqrt{3} = 0, \quad \sqrt{3}\, x - y + a\sqrt{3} = 0.$$

Avem:

$$\operatorname{tg} V = \frac{m - m'}{1 + m m'} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$ $\frac{-2\sqrt{3}}{-2}$ $\sqrt{3}$

Deci: $\quad V = 60^0.$

26. **Aplicaţii. I. Condiţia ca două drepte să fie paralele** se găseşte, observând că în acest caz: $\operatorname{tg} V = 0$, şi deci:

$$\operatorname{tg} V = \frac{m - m'}{1 + m m'} = 0, \quad m - m' = 0; \quad m = m'.$$

Deci, *două drepte sunt paralele când coeficienţii lor unghiulari sunt egali.*

Considerând formula:

$$\operatorname{tg} V = \frac{A'B - B'A}{AA' + BB'},$$

dreptele:

$$A x + B y + C = 0, \quad A' x + B' y + C' = 0$$

sunt paralele, când $\operatorname{tg} V = 0$, sau:

$$A'B = B'A, \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

Urmează deci, că *două drepte paralele au coeficienţii lui* x *şi* y, *din ecuaţiile lor, proporţionali.*

Exerciţiu. Să se scrie ecuaţia generală a paralelelor la dreptele:

$$y = 3x + 5, \quad x - 2y + 1 = 0.$$

Pentru prima dreaptă, vom scrie ecuaţia unei drepte al cărei coeficient unghiular este egal cu 3.

Ecuaţia paralelelor la dreapta: $y = 3x + 5$, este:

$$y = 3x + \lambda,$$

λ fiind un parametru variabil.

Pentru ecuaţia: $x - 2y + 1 = 0$, care este de forma: $Ax + By + C = 0$, vom scrie o dreaptă ai cărei coeficienţi ai lui x şi y să fie proporţionali cu ai dreptei date; ecuaţia generală a tuturor paralelelor la dreapta:

$$x - 2y + 1 = 0$$

va fi:

$$x - 2y + \lambda = 0, \ (Ax + By + \lambda = 0),$$

λ fiind un parametru variabil.

II. **Condiţia ca două drepte să fie perpendiculare.** Când dreptele:

$$y = mx + n, \quad y = m'x + n'$$

sunt perpendiculare, $V = 90^o$, şi deci:

$$\operatorname{tg} V = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \infty, \ 1 + mm' = 0.$$

Prin urmare, condiţia ca două drepte să fie perpendiculare este ca între coeficienţii lor unghiulari să avem relaţia:

$$1 + mm' = 0.$$

Când dreptele sunt reprezentate de ecuaţiile:

$Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$, condiţia ca ele să fie perpendiculare, este: $AA' + BB' = 0$.

Exerciţiu. Să se scrie ecuaţia unei drepte oarecare perpendiculară pe dreapta: $3x - y = 5$: m fiind egal cu 3, atunci:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$$

şi deci ecuaţia perpendicularei pe dreapta dată este:

$$y = m'x + n, \ y = -\frac{1}{3}x + n.$$

27. **Intersecţia a două drepte.** Pentru a găsi punctul de intersecţie a două drepte:

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0,$$

vom căuta coordonatele acestui punct; aceste coordonate verificând ecuaţiile celor două drepte, vom rezolvà în raport cu x şi y. Deci, coordonatele punctului de intersecţie a acestor două drepte vor fi (presupunând determinantul sistemului diferit de zero):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C & B \\ -C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = \frac{BC'-CB'}{AB'-BA'}, \quad y = \frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}.$$

Dacă: $AB'-BA' \neq 0$, x şi y au valori finite, deci dreptele se taie într'un punct la distanţă finită.

Dacă: $AB'-BA' = 0$, sau:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

fără ca numărătorii lui x şi y să fie zero, x şi y sunt infinit de mari, dreptele se taie atunci la infinit, ele sunt paralele.

Am găsit din nou condiţia că două drepte sunt paralele când coeficienţii lui x şi y sunt proporţionali.

Dacă: $AB' - BA' = 0$, $BC'-CB' = 0$, atunci urmează că:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}, \quad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

deci (B şi $B' \neq 0$):

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \quad \frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}, \quad AC' - CA' = 0.$$

Prin urmare:

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0},$$

adică punctul de intersecţie este nedeterminat. In adevăr, având:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

ecuaţiile:

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

se reduc la una siugură şi deci dreptele date fiind reprezentate de aceiaşi ecuaţie, sunt confundate, au deci un număr nedeterminat de puncte comune (toate punctele comune).

$Ax+By+C=0$
$A'x+B'y+C'=0$

$Ax+By=C$
$A'x+B'y=C'$

dacă $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$

atunci punctul de intersecție e dat de valo

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -C & B \\ -C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \text{ și } y=\frac{\begin{vmatrix} A & -C \\ A' & -C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \text{ sau } x=\frac{C'B-CB'}{AB'-A'B} \text{ și } y=\frac{A'C-AC'}{AB'-A'B}$$

Probleme asupra linii drepte.

28 **Să se afle ecuaţia tutulor liniilor drepte care trec printr'un punct dat** A (x_0, y_0). Fie:

$$y = m x + n \qquad (a)$$

ecuaţia unei linii drepte ce trece prin acest punct. Coordonatele sale verificând ecuaţia dreptei, avem:

$$y_0 = m x_0 + n. \qquad (b)$$

Scăzând ecuaţiile (a) şi (b), avem:

$$y - y_0 = m (x - x_0),$$

care este ecuaţia generală a tutulor dreptelor ce trec prin punctul dat (x_0, y_0), m fiind un parametru variabil.

29. **Ecuaţia unei drepte ce trece printr'un punct dat şi paralelă cu o dreaptă dată.** Fie (x_0, y_0) punctul dat şi m coeficientul unghiular al dreptei cu care trebue să fie paralelă. Ecuaţia dreptei cerute va fi:

$$y - y_0 = m (x - x_0).$$

Exerciţii. 1°. *Să se scrie ecuaţia unei drepte ce trece prin punctul* (2, 0) *şi paralelă cu bisectoarea a doua a axelor de coordonate.* Aplicăm ecuaţia generală:

$$y - y_0 = m (x - x_0),$$

şi înlocuim m cu: -1, căci ecuaţia bisectoarei a doua este: $x + y = 0$ Ecuaţia dreptei cerute va fi:

$$y = -(x - 2), \quad x + y - 2 = 0.$$

2°. *Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin origină şi este* *perpendiculară pe dreapta care determină pe axele de coordonate lungimile* 2 *şi* 3.

Ecuaţia unei drepte ce trece prin origină este:

$$y = m x. \tag{1}$$

Ecuaţia dreptei date este:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \tag{2}$$

al cărei coeficient unghiular este:

$$m' = -\frac{3}{2}.$$

Dreptele (1) şi (2) fiind perpendiculare, avem:

$$1 + m m' = 0, \quad m = -\frac{1}{m'},$$

iar ecuaţia dreptei cerute este:

$$y = \frac{2}{3} x.$$

30. **Altă metodă pentru a scrie ecuaţia unei drepte ce trece prin două puncte** (x_1, y_1). (x_2, y_2). Fie: $Ax + By + C = 0$ ecuaţia dreptei cerute, A, B, C fiind necunoscuţi. Ecuaţia dreptei este verificată de coordonatele (x_1, y_1) (x_2, y_2), căci aceste puncte sunt pe dreaptă. Deci:

$$A x_1 + B y_1 + C = 0, \tag{3}$$
$$A x_2 + B y_2 + C = 0. \tag{4}$$

Ecuaţiile (3), (4) împreună cu: $Ax + By + C = 0$ formează un sistem de trei ecuaţii lineare omogene în raport cu A, B, C. Acest sistem admite soluţii toate nule, $A = B = C = 0$, când determinantul coeficienţilor este diferit de zero, sau soluţii nu toate nule, când acest determinant este egal cu zero. Insă, A, B, C nu pot fi toate nule, căci atunci dreapta cerută n'ar mai existà şi deci, ca să existe valori nu toate nule pentru A, B, C, trebue ca determinantul coeficienţilor să fie nul.

Deci:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aceasta este ecuaţia dreptei ce trece prin cele două puncte (x_1, y_1), (x_2, y_2). Dezvoltând-o, putem să o scrim supt formele :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \qquad \text{(I)}$$

sau :

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Prima formă (I) este bine să se memoreze, fiind foarte întrebuinţată.

31. **Condiţia ca trei puncte : (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) să fie colineare.** Va fi de ajuns să scrim că punctul (x_1, y_1) se află pe dreapta definită de celelalte două. Ecuaţia dreptei ce conţine punctele : (x_2, y_2), (x_3, y_3) fiind :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

condiţia ca cele trei puncte să fie colineare (în linie dreaptă), este :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observare. Vom obţine acelaş rezultat scriind că coeficientul unghiular al dreptei (x_1, y_1), (x_2, y_2), este acelaş (egal) cu al dreptei definită de punctele : (x_2, y_2), (x_3, y_3). Această condiţie este :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

32. **Să se afle condiţia ca trei drepte să fie concurente.** Fie :

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0,$$
$$\mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}' = 0,$$
$$\mathrm{A}''x + \mathrm{B}''y + \mathrm{C}'' = 0$$

ecuaţiile a trei drepte. Dacă ele sunt concurente, însemnează că există un punct comun lor şi deci coordonatele acestui punct (x, y) verifică aceste trei ecuaţii. Sistemul format de ecuaţiile acestor drepte este deci compatibil şi prin urmare determinantul coeficienţilor este nul, adică:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Aceasta este condiţia ca cele trei drepte să fie concurente.

Observare. Sistemul:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0, \\ A''x + B''y + C'' &= 0 \end{aligned}$$

fiind compatibil, urmează că ultima ecuaţie este o consecinţă a primelor două ecuaţii şi deci:

$$A''x + B''y + C'' \equiv l\,(Ax + By + C) + m\,(A'x + B'y + C'),$$

l şi m fiind două numere alese potrivit. De unde rezultă că dacă dreptele sunt concurente, să avem:

$$u\,(Ax + By + C) + v\,(A'x + B'y + C') + w\,(A''x + B''y + C'') \equiv 0. \qquad (\alpha)$$

Deci, pentru a cerceta dacă trei drepte sunt concurente, vom căută să vedem dacă există trei numere $u, v, w,$ astfel ca relaţia (α) să fie *identic* verificată. Nu există un procedeu general pentru determinarea lui $u, v, w,$ şi fiecare problemă de acest fel se rezolvă în alt mod. Totuşi, în corpul acestei lucrări, vom considera două, trei probleme de acest fel.

33. **Aplicaţii.** I. **Să se arate că mijloacele diagonalelor unui patrulater complect sunt colineare.** Fie patrulaterul complect A B C D E F (Fig. 17) ale cărui diagonale sunt: AC, BD, EF. Să luăm ca axe de coordonate: AD ca Ox şi AB ca Oy. Să însemnăm coordonatele punctelor D, F, B, E cu:

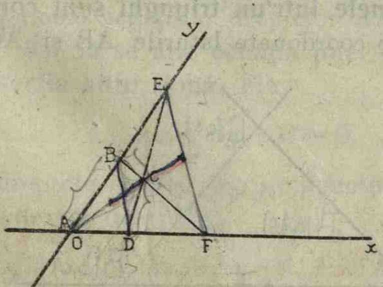


Fig. 17.

$$D\,(d, o),\ F\,(f, o),\ B\,(o, b),$$
$$E\,(o, e).$$

Pentru a găsì coordonatele vârfului C, vom rezolvà ecuaţiile :

$$\frac{x}{d}+\frac{y}{e}=1, \quad \frac{x}{f}+\frac{y}{b}=1,$$

ale dreptelor DE şi BF şi avem :

$$C\left[x=\frac{be(d-f)}{db-ef},\ y=\frac{fd(b-e)}{bd-ef}\right].$$

Să aflăm coordonatele mijloacelor M, N, P ale diagonalelor AC, BD, EF ; găsim :

$$M\left[\frac{be(d-f)}{2(bd-ef)}, \frac{fd(b-e)}{2(bd-ef)}\right],\ N\left(\frac{d}{2}, \frac{b}{2}\right),\ P\left(\frac{f}{2}, \frac{e}{2}\right).$$

Vom calculà determinantul :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{be(d-f)}{2(bd-ef)} & \frac{fd(b-e)}{2(bd-ef)} & 1 \\ \frac{d}{2} & \frac{b}{2} & 1 \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & 1 \end{vmatrix},$$

care se mai scrie :

$$\frac{1}{2(bd-ef)}\begin{vmatrix} be(d-f) & fd(b-e) & 2(bd-ef) \\ d & b & 2 \\ f & e & 2 \end{vmatrix}.$$

Se va arătà că acest determinant este egal cu zero, şi deci mijloacele diagonalelor vor fi colineare.

II. **Să se arate că medianele într'un triunghi sunt concurente.** Vom luà ca axe de coordonate laturile AB şi AC ale triunghiului ABC (Fig. 18). Să însemnăm coordonatele punctelor B şi C cu B (b, o), C (o, c). Să scrim ecuaţiile celor trei mediane. Coordonatele punctului A′, mijlocul lui BC, sunt:

$$A'\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

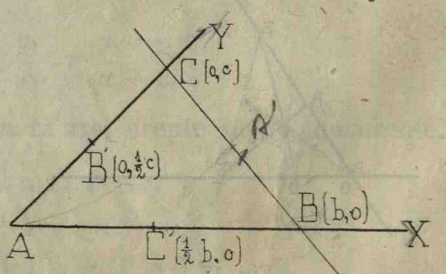


Fig. 18.

Ecuaţia medianei AA' este :

$$y = \frac{c}{b}x; \quad (AA') \; cx - by = 0.$$

Coordonatele punctelor B' şi C', mijloacele laturilor AC şi AB sunt :

$$B'(0, \frac{c}{2}), \quad C'(\frac{b}{2}, 0),$$

iar ecuaţiile medianelor BB' CC' sunt :

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{\frac{c}{2}} = 1, \quad \frac{x}{\frac{b}{2}} + \frac{y}{c} = 1,$$

sau :

$$(BB') \; cx + 2by - bc = 0,$$
$$(CC') \; 2cx + by - bc = 0.$$

Să formăm determinantul coeficienţilor medianelor AA', BB', CC' şi avem :

$$\begin{vmatrix} c & -b & 0 \\ c & 2b & -bc \\ 2c & b & -bc \end{vmatrix} = 0,$$

ceeace probează că aceste trei mediane sunt concurente.

Medianele se văd că sunt concurente aplicând observarea dela paragraful 32, căci avem :

$$(AA') - (BB') - (CC') \equiv 0.$$

Coeficienţii u, v, w, din acea observare, sunt în acest caz egali cu : 1, — 1, — 1 şi s'au dedus luând în considerare formele ecuaţiilor dreptelor AA', BB', CC'.

34. **Să se afle ecuaţia unei drepte ce trece prin intersecţia altor două.** Fie :

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

dreptele date şi (x_0, y_0) punctul lor de intersecţie. Să considerăm dreapta :

$$Ax + By + C + \lambda(A'x + B'y + C') = 0,$$

λ fiind un parametru variabil.

Punctul (x_0, y_0) aflându-se pe fiecare din dreptele date, urmează că:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0, \quad A'x_0 + B'y_0 + C' = 0$$

şi deci:

$$Ax_0 + By_0 + C + \lambda (A'x_0 + B'y_0 + C') = 0.$$

Această relaţie probează că punctul comun celor două drepte aparţine şi dreptei:

$$Ax + By + C + \lambda (A'x + B'y + C') = 0.$$

Această ecuaţie, când λ variază, reprezintă toate dreptele care trec prin intersecţia altor două.

35. **Aplicaţii.** I. **Să se afle ecuaţia dreptei ce trece prin intersecţia dreptelor:** $y - 2x - a = 0$, $y - 4x + a = 0$ **şi prin origina axelor de coordonate.** Ecuaţia dreptei ce trece prin intersecţia dreptelor date este:

$$y - 2x - a + \lambda (y - 4x + a) = 0.$$

Această dreaptă trebuind să treacă prin origină, ecuaţia ei este verificată când vom înlocui pe x şi y cu $(0, 0)$ şi deci:

$$-a + a\lambda = 0, \quad \lambda = 1.$$

Ecuaţia dreptei cerute este:

$$y - 2x - a + (y - 4x + a) = 0,$$
$$y - 3x = 0.$$

II. **Să se probeze că dacă ecuaţia unei drepte conţine un parametru variabil de gradul întâi, acea dreaptă trece printr'un punct fix.** Fie dreptele reprezentate de ecuaţia:

$$3x + (6 + \lambda) y - 2\lambda = 0,$$

care conţine parametrul variabil λ. Această ecuaţie se mai poate scrie:

$$3x + 6y + \lambda (y - 2) = 0,$$

şi deci reprezintă toate dreptele care trec prin punctul comun dreptelor cunoscute:

$$x + 2y = 0, \quad y - 2 = 0.$$

36. **Să se găsească raportul în care o dreaptă $D \equiv Ax + By + C = 0$ înparte segmentul $A_1\, A_2$, definit de punctele** $A_1\,(x_1, y_1)$, $A_2\,(x_2, y_2)$. Fie M punctul de intersecţie al dreptelor $A_1\, A_2$ şi D. Să căutăm valoarea raportului:

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_2}} = -\lambda.$$

Se ştie (§. 15) că valorile coordonatelor punctului M, aşezat pe dreapta $A_1\, A_2$, sunt:

$$x = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1+\lambda}.$$

Acest punct M fiind pe dreapta D, avem:

$$A\,\frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1+\lambda} + B\,\frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1+\lambda} + C = 0.$$

De unde:

$$-\lambda = \frac{A x_1 + B y_1 + C}{A x_2 + B y_2 + C}.$$

Deci valoarea raportului căutat va fi:

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_2}} = \frac{A x_1 + B y_1 + C}{A x_2 + B y_2 + C}. \qquad (a)$$

Dacă dreapta D este paralelă cu $A_1\, A_2$, punctul A_2 este pe paralela din A_1 dusă la D; paralela la dreapta $Ax + By + C = 0$ având ca ecuaţie:

$$Ax + By + C + \mu = 0,$$

pentru a trece prin $A_1\,(x_1, y_1)$, va trebui să avem:

$A x_1 + B y_1 + C + \mu = 0, \quad \mu = -(A x_1 + B y_1 + C)$

şi deci ecuaţia paralelei din A_1 la $Ax + By + C = 0$ este:

$$Ax + By + C - (A x_1 + B y_1 + C) = 0. \qquad (1)$$

$A_1\, A_2$ fiind paralelă cu D, A_2 este pe dreapta (1) şi deci coordonatele sale verifică această ecuaţie; deci:

$$A x_2 + B y_2 + C - (A x_1 + B y_1 + C) = 0,$$

sau:

$$A x_1 + B y_1 + C = A x_2 + B y_2 + C.$$

Observând relaţia (a), rezultă:

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_2}} = 1, \quad -\lambda \; ; \; \lambda = -1$$

ceea ce este adevărat, căci se ştie că dacă punctul M este la infinit pe dreapta $A_1 A_2$, raportul $\overline{MA_1} : \overline{MA_2} = 1$. Relaţia (a) este deci generală.

37. Separarea planului în regiuni de dreapta $Ax+By+C=0$. Dreapta $D \equiv Ax + By + C = 0$ (Fig. 19) înparte planul în două regiuni. Fie: $A_1 (x_1, y_1)$, $A_2 (x_2, y_2)$ două puncte aşezate de aceiaşi parte a dreptei D. Se ştie (§. 36) că raportul, în care dreapta D înparte pe $A_1 A_2$ este egal cu:

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_2}} = \frac{A x_1 + B y_1 + C}{A x_2 + B y_2 + C}.$$

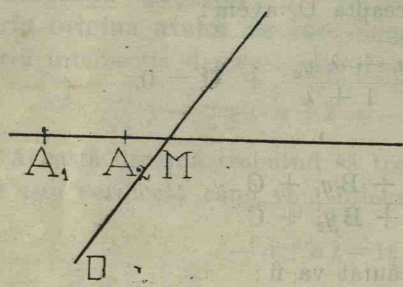


Fig. 19

Dacă A_1 şi A_2 sunt de aceiaşi parte a dreptei D, raportul $\overline{MA_1} : \overline{MA_2}$ este pozitiv şi deci:

$$\frac{A x_1 + B y_1 + C}{A x_2 + B y_2 + C} > 0,$$

ceea ce probează că: $Ax_1 + By_1 + C$, $A x_2 + B y_2 + C$ au aceleaşi semne.

In mod analog se vede că dacă A_1 şi A_2 sunt de o parte şi de alta a dreptei $D \equiv Ax + By + C = 0$, $\overline{MA_1} : \overline{MA_2} < 0$ şi deci: $A x_1 + B y_1 + C$, $A x_2 + B y_2 + C$ au semne contrare.

Prin urmare, polinonul $A x + B y + C$ este pozitiv pentru toate punctete situate de aceiaşi parte a dreptei $A x + B y + C = 0$, şi negativ pentru punctele aşezate de cealaltă parte a dreptei.

Așà dar fiind dată o dreaptă $Ax + By + C = 0$, eà împarte planul în două regiuni, astfel că înlocuind pe x şi y în $Ax + By + C$ cu coordonatele unui punct oarecare dintr'o regiune, rezultatul înlocuirii va aveà un semn, iar rezultatul înlocuirii a lui x şi y cu coordonatele oricărui punct din cealaltă regiune va aveà un semn contrar.

Exmple. 1^0. *Să se separe planul în regiuni și să se afle regiunea unde avem :*

$Ax+By+C>0, C=|=0.$

Pentru aceasta, construim dreapta $Ax + By + C=0$ (Fig. 20). Pentru toate punctele unde se află origina, expresiunea $Ax + By + C$ va aveà acelaș semn, care se obţine înlocuind pe x şi y cu $(0,0)$, coordonatele originii. Semnul depinde de acela al lui C. Dacă $C > 0$, semnul expresii $Ax + By + C$, în regiunea unde este origina este pozitiv şi în cealaltă regiunea va avea semnul minus. Dacă $C < 0$, în regiunea originii va avea semnul minus şi în cealaltă semnul plus.

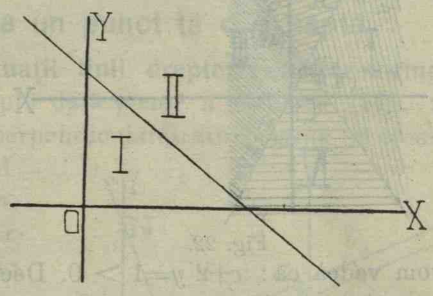


Fig. 20.

2) *Să să se afle regiunea planului unde avem în acelaşi timp*

$$2x + y - 2 > 0, \quad 3x - y + 1 < 0.$$

Vom construì dreptele (Fig. 21) :

$2x+y-2=0$, $3x-y+1=0$.

Aceste drepte au despărţit planul în patru regiuni şi avem :

Regiunea	I	II	III	IV
$2x+y-2$	$-$	$+$	$+$	$-$
$3x-y+1$	$-$	$-$	$+$	$+$

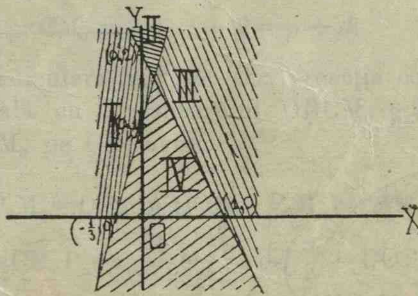


Fig. 21.

Deci numai pentru punctele regiunei II, avem :

$$2x + y - 2 > 0, \qquad 3x - y + 1 < 0.$$

3) *Să se afle regiunea planului unde avem:*

$$(x + 2y)(3x - 2y + 5) > 0.$$

Să construim dreptele (Fig. 22):

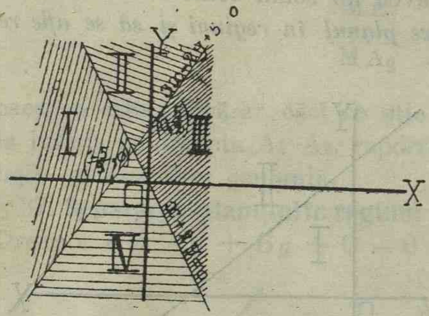


Fig. 22.

$x+2y=0, 3x-2y+5=0.$

Să vedem ce semne are expresiunea: $x+2y$ în cele două regiuni în care a înpărţit planul dreapta: $x+2y=0$. Pentru aceasta vom înlocuì pe x şi y cu coordonatele unui punct al axei Ox, adică: $x=1$, $y=0$; vom vedeà că: $x+2y=1 > 0$. Deci, pentru toate punctele acestei regiuni, are semnul $+$, pentru punctele celeilalte regiuni are semnul $-$.

Putem formà tabloul:

Regiunea	I	II	III	IV
$x + 2y$	$-$	$+$	$+$	$-$
$3x-2y+5$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+2y)(3x-2y+5)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Prin urmare, în regiunile I şi III expresiunea dată este pozitivă.

Distanța dela un punct la o dreaptă.

38. **Altă formă a ecuaţii linii drepte. Ecuaţia normală a linii drepte.** O dreaptă dată poate fi definită (Fig. 23) prin lungimea OD a perpendicularei din origină pe această dreaptă şi prin unghiul Θ ce-l fac această perpendiculară OD cu axa Ox.

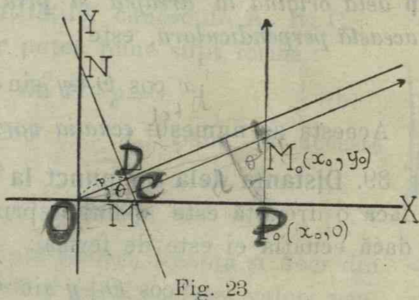


Fig. 23

In adevăr, fiind cunoscute distanța de la origină la dreaptă. lungimea $OD=p$, şi unghiul Θ, pentru a construi dreapta, vom duce un cerc cu centru în origină şi cu raza p, vom duce raza OD ce face cu Ox unghiul Θ şi tangenta la cerc în punctul D este dreapta cerută.

Acestea fiind stabilite, să însemnăm cu d distanța $\overline{CM_0}$, a punctului M_0 (x_0, y_0) dat pânăla dreapta considerată. Să proectăm conturul $ODCM_0$ pe dreapta OD şi vom avea :

$$\text{pr}\, OD + \text{pr}\, DC + \text{pr}\, CM_0 = p + 0 + d = p + d.$$

Lăsând din M_0 perpendiculara M_0P_0 pe Ox, proecția conturului OP_0M_0 este egală cu a conturului $ODCM_0$ (§ 9.). Proectând conturul OP_0M_0 pe OD, avem :

$$\text{pr.}\, OP_0M_0 = \text{pr}\, OP_0 + \text{pr}\, P_0M_0 = OP_0 \cos DOP_0 + P_0M_0 \cos \widehat{CM_0P_0}$$

$$\text{pr}\, OP_0M_0 = x_0 \cos\Theta + y_0 \cos \widehat{CM_0P_0} = x_0 \cos\Theta + y_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - DOP_0\right)$$

$$\text{pr}\, OP_0M_0 = x_0 \cos\Theta + y_0 \sin\Theta.$$

Insă : $\text{pr.}\, ODCM_0 = \text{pr}\, OP_0M_0$; deci:

De unde :

$$x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta = p + d.$$

$$x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta - p = d = \overline{CM_0}.$$

Această relaţie ne dă distanţa d dela M_0 (x_0, y_0) la dreapta definită prin cantităţile p şi Θ.

Dacă punctul M_0 este pe dreapta dată, distanţa sa d până la dreaptă este nulă şi deci relaţia :

$$x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta - p = 0,$$

între coordonatele unui punct M_0 al linii MN, reprezintă ecuaţia acestei drepte.

Prin urmare, *ecuaţia unei linii drepte, definită prin distanţa* p *dela origină la dreaptă şi prin unghiul* Θ *ce face ca* Ox *această perpendiculară*, este :

$$x \cos \Theta + y \sin \Theta - p = 0.$$

Aceesta se numeşte *ecuaţia normală* a linii drepte.

39. **Distanţa dela un punct la o dreaptă.** Am văzut că dacă o dreaptă este definită prin câtimile p şi Θ, adică dacă ecuaţia ei este de forma :

$$x \cos \Theta + y \sin \Theta - p = 0,$$

distanţa dela punctul M_0 (x_0, y_0) la această dreaptă este :

$$\overline{CM_0} = d = x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta - p.$$

Presupunând că am luat sensul pozitiv, sensul $\overline{OD}$, (Fig. 23), se vede, că în cazul figurei, expresiunea :

$$x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta - p.$$

este o cantitate pozitivă, căci şi $\overline{CM_0}$, cu care este egală, a fost socotită în sensul pozitiv. In cazul figurei, se vede că punctul M_0 şi origina au fost de o parte şi de alta a dreptei AB.

Din contră, dacă origina axelor şi punctul Mo sunt de aceiaşi parte a dreptei AB, expresiunea :

$$x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta - p = -\overline{CM_0}$$

va fi negativă, căci în acest caz $\overline{CM_0}$ este de sens contrar cu cel pozitiv, al dreptei OD. Pentru a o aveà pozitivă, trebue deci să se ia semnul — înaintea ei.

Aşa dar, *distanţa pozitivă dela punctul* M_0 (x_0, y_0) *la dreapta:*

$$x \cos \Theta + y \sin \Theta - p = 0$$

va fi egală cu:

$$\pm (x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta - p),$$

luând semnul + când origina şi Mo sunt de o parte şi de alta a dreptei şi semnul —, când origina şi Mo sunt de aceiaşi parte a dreptei.

Să presupunem acum că dreapta dată are ca ecuaţie:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (a)$$

Să determinăm unghiul Θ şi distanţa p, dela origină, la dreapta dată, cu ajutorul cantităţilor cunoscute A, B, C.

Atunci ecuaţia dreptei s'ar putea pune supt forma:

$$x \cos \Theta + y \sin \Theta - p = 0, \qquad (b)$$

iar distanţa dela punctul Mo (x_0, y_0) până la această dreaptă ar fi dată de formula:

$$x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta - p. \qquad (1)$$

Egalităţile (a) şi (b) reprezintă aceiaşi dreaptă şi deci din ecuaţiile (a) şi (b) va trebuì să obţinem aceleaşi valori pentru coordonatele punctelor, unde dreptele reprezentate de (a) şi (b) tae axele de coordonate.

Considerând, în general, ecuaţiile:

$$A x + B y + C = 0,$$
$$A' x + B' y + C' = 0,$$

pentru ca ele să reprezinte aceiaşi dreaptă, e necesar şi suficient să obţinem aceleaşi valori pentru abscisele şi ordonatele celor două puncte, unde dreptele reprezentate taie axele de cordonate. Făcând respectiv în ecuaţiile lor: $x = o$ şi apoi $y = o$, obţinem:

$$-\frac{C}{B} = -\frac{C'}{B'}, \quad -\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'};$$

de unde:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Deci, condiţiile ca ecuaţiile:

$$A x + B y + C = o; \; A'x + B'y + C' = 0$$

să reprezinte aceiaşi dreaptă, sunt ca ecuaţiile să aibă coeficienţii proporţionali.

Scriind acestea pentru ecuaţiile (a) şi (b), deducem:

$$\frac{\cos\Theta}{A}=\frac{\sin\Theta}{B}=\frac{-p}{C}.$$

Aplicând teorema: *se obţine un raport egal cu două rapoarte egale făcând câtul dintre rădăcina pătrată a sumei pătratelor numărătorilor şi rădăcina pătrată a sumei pătratelor numitorilor celor două rapoarte date*, avem:

$$\frac{\cos\Theta}{A}=\frac{\sin\Theta}{B}=\frac{-p}{C}=\frac{\sqrt{\cos^2\Theta+\sin^2\Theta}}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Egalând fiecare raport cu ultimul, deducem:

$$\cos\Theta=\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\Theta=\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ p=\frac{\mp C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Inlocuind: cos Θ, sin Θ şi p în relaţia (1), *distanţa dela punctul* Mo (x_0, y_0) *la dreapta*:

$$A\,x+B\,y+C=0,$$

este:

$$d=\frac{\pm(A\,x_0+B\,y_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Vom luà înaintea acestei expresiuni semnul $+$ sau $-$, astfel în cât distanţa să fie reprezentată de un număr pozitiv.

Pentru a determinà semnul ce trebue luat, se va cercetà în ce regiune a planului este punctul Mo faţă de cele două regiuni în care dreapta:

$$A\,x+B\,y+C=0$$

înparte planul. Expresiunea distanţei trebuind să fie pozitivă, se va lemnul $+$ dacă Mo este în regiunea planului unde $Ax+By+C$ are semnul $+$ şi se va lua semnul $-$, dacă Mo este în regiunea unde $A\,x+B\,y+C$ are semnul $-$.

40. **Aplicaţii.** I. **Să se afle ecuaţia bisectoarelor a două drepte.** Fie:

$$Ax+By+C=0;\ A'x+B'y+C'=0,$$

ecuaţiile a două drepte, în raport cu două axe perpendiculare. Pentru a găsì ecuaţia unei bisectoare, a unghiului acestor drepte, va trebuì să scrim că distanţele unui punct oarecare al bisectoarei, de coordonate (x, y), la cele două drepte, sunt egale; deci:

$$\frac{A x + B y + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Luând semnul $+$, vom obţine ecuaţia unei bisectoare, iar pentru semnul $-$, ecuaţia celeilalte bisectoare, una fiind bisectoarea interioară şi alta cea exterioară.

Pentru a determinà care din bisectoare se obţine luând semnul $+$ sau $-$, se va substituì în expresiunile:

$$E = \frac{A x + B y + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

$$E' = \frac{A x + B y + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

care sunt primele membre ale ecuaţiilor bisectoarelor, coordonatele unui punct M al dreptei: $A x + B y + C = o$ şi a altui punct M′ al dreptei: $A'x + B'y + C' = o$. Dacă rezultatele înlocuirii în E vor fi de acelaş semn, urmează atunci că punctele M şi M′ sunt de aceiaşi parte a dreptei:

$$\frac{A x + B y + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} = 0,$$

iar aceasta este bisectoarea exterioară. Calculând rezultatele înlocuirilor în E′ ale coordonatelor punctelor M şi M′, se vor obţine rezultate de semne contrarii; deci M şi M′ sunt de o parte şi de alta a a dreptei:

$$\frac{A x + B y + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} = 0,$$

iar aceasta este bisectoarea interioară.

Exemplu. *Ecuaţia bisectoarelor unghiului ascuţit al dreptelor:*

$$3 x - 4 y + 4 = 0, \qquad x - 2 = 0,$$

va fi:

$$\frac{3x - 4y + 4}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{x - 2}{1},$$

sau:

$$3x - 4y + 4 = \pm 5(x - 2).$$

Pentru a vedeà care din dreptele:

$$3x - 4y + 4 - 5(x - 2) = 0, \quad 3x - 4y + 4 + 5(x - 2) = 0$$

este bisectoarea interioară şi care este cea exterioară, vom substitui în expresia:

$$3x - 4y + 4 - 5(x - 2)$$

pe rând coordonatele unui punct M al dreptei $3x - 4y + 4 = 0$ şi a unui punct M' al dreptei: $x - 2 = 0$, astfele ca punctele M şi M' să fie pe porţiunile acestor drepte care formează unghiul lor ascuţit. In cazul nostru (şi de obicei aşà se procedează în practică), punctele M şi M' le alegem tocmai punctele unde laturile: $3x - 4y + 4 = 0$, $x - 2 = 0$, ale unghiului, taie axa Ox. Vom avea:

$$M\left(-\frac{4}{3}, 0\right), \quad M'(2, 0).$$

Inlocuind în:

$$E = 3x - 4y + 4 - 5(x - 2),$$

întâi: $x = -\frac{4}{3}$, $y = 0$, avem:

$$E > 0;$$

înlocuind acum pe x cu 2, obţinem iarăşi:

$$E > 0;$$

Rezultatele fiind de acelaş semn, dreapta:

$$3x - 4y + 4 - 5(x - 2) = 0$$

este bisectoarea exterioară, iar:

$$3x - 4y + 4 + 5(x - 2) = 0$$

bisectoarea interioară.

II. **Suprafaţa unui triunghi în funcţiune de coordonatele vârfurilor.** Fie: A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3), vârfurile triunghiului dat. Insemnând cu d înălţimea vârfului A (distanţa lui A la BC), avem:

$$\text{Supr ABC} = \frac{1}{2}\ \text{BC. d.}$$

Insă:

$$\overline{BC}^2 = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2 \ ; \ BC = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}.$$

Ca să aflăm pe d, trebue să cunoaştem ecuaţia dreptei BC; această dreaptă trecând prin două puncte, ecuaţia ei va fi:

$$x\ (y_2 - y_3) - y\ (x_2-x_3) + x_2\ y_3 - x_3\ y_2 = 0.$$

Deci, distanţa punctului A (x_1, y_1) la această dreaptă va fi:

$$d = \frac{x_1\ (y_2-y_3) - y_1\ (x_2 - x_3) + x_2\ y_3 - x_3\ y_2}{\pm\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2-y_3)^2}}.$$

Inlocuind în formula suprafeţei, avem:

$$\text{Supraf. ABC} = \pm\frac{1}{2}\Big[x_1 (y_2-y_3) - y_1 (x_2 - x_3) + x_2\ y_3 - x_3\ y_2\Big].$$

Această egalitate se mai poate scrie şi supt formă de determinant:

$$\text{Supr ABC} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Semnul trebue ales astfel ca suprafaţa să fie pozitivă.

Observare. Când punctele A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) sunt colineare, suprafaţa triunghiului ABC este nulă şi deci condiţia ca punctele (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3) să fie colineare este:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exerciţii.

1. Să se afle ecuaţiile laturilor triunghiului ale cărui vârfuri sunt: (2, 3), (4,—5), (—3,—6).

R. $x-7y=3$, $9x-5y=3$, $4x+y=11$.

2. Să se afle ecuaţia dreptei ce trece prin punctele:

$$(a, b), \left(\frac{ma+na'}{m+n}, \frac{mb+nb'}{m+n}\right).$$

$$\text{R. } y-\frac{b'-b}{a'-a}x+\frac{ab'-ba'}{a'-a}=0, \quad y-b=\frac{b'-b}{a'-a}(x-a)$$

3. Să se afle distanţa dela origină la dreapta:

$$a(x-a)+b(y-b)=0.$$

R. $\sqrt{a^2+b^2}$

4. Să se afle ecuaţiile laturilor şi medianelor triunghiului:

$$(5, 0), \quad (1, 2), \quad (-3,-2).$$

R. $x+2y=5$, $x-4y=5$, $x-y+1=0$, (laturi)
$y=0$, $x=1$, $x-2y=1$ (mediane)

5. Să se arate că dreptele:

$$2x+3y=13, \quad 5x-y=7, \quad x-4y+10=0$$

se taie în punctul (2, 3).

R. Se arată că dreptele sunt concurente şi se rezolvă primele două ecuaţii.

6. Să se afle diagonalele patrulaterului ale cărui laturi sunt:

$$4x-y-3=0, \quad 2x+3y-5=0, \quad 5x+2y+4=0, \quad 2x+2y+1=0.$$

R. Se construesc aceste drepte şi se caută punctele lor de intersecţie. Găsim: (1, 1), (—2,3), $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ Se aplică apoi formula ecuaţiei dreptei ce trece prin două puncte.

7. Să se afle înălţimile triunghiului ale cărui vârfuri sunt:

$$(2, 1), \quad (3,-2), \quad (-4,-1).$$

R. Se va aplică ecuaţia unei drepte ce trece printr'un punct şi perpendiculară pe alta ce trece prin două puncte.

Se găseşte: $7x-y=13$, $3x+y=7$, $3y-x=1$.

8. Să se scrie ecuaţiile înălţimilor triunghiului al cărui laturi sunt: $x-2y=2$, $2x+y=2$, $x-y+1=0$.

R. Se va aplicà ecuaţia unei drepte ce trece prin intersecţia al tor două şi perpendiculară pe alta. Se află:

$$x-2y-2+\lambda(2x+y-2)=0;$$

$$-\frac{1+2\lambda}{-2+\lambda}=-1,\ \lambda=-3,$$

$$5x+5y-4=0.$$

9. Să se afle ecuaţiile perpendicularelor ridicate pe mijloacele laturilor triunghiului : (1, 2), (— 3, 1), (2, —1).

R. Se vor afla mijloacele laturilor şi se va scrie ecuaţia unei drepte ce trece printr'un punct şi perpendiculară pe alta ce trece prin două puncte.

$$y-\frac{1}{2}=\frac{-(2-1)}{-1-2}\left(x-\frac{3}{2}\right),\ y-\frac{3}{2}=-\frac{(1+3)}{2-1}(x+1),$$

$$y=\frac{-(-3-2)}{1+1}\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

10. Să se afle coordonatele vârfurilor triunghiului ale cărui laturi au ca ecuaţii:

$$x+y=1,\ x-2y=3,\ 3y-5x=15.$$

Să se afle ecuaţiile paralelelor duse prin vârfurile acestui triunghi la laturi.

R. $A\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, $C\left(-5\frac{4}{7},\ -4\frac{2}{7}\right)$.

11. Să se afle ecuaţiile dreptelor ce unesc mijloacele a două laturi oarecare ale triunghiului ale cărui laturi sunt:

$$4x-3y+1=0,\ 2x+y-7=0,\ x+3y+4=0.$$

R. Se caută coordonatele vârfurilor:

$$A(2, 3),\ B(-1, -1),\ C(5, -3)$$

Se va scrie coordonatele mijloacelor şi apoi a dreptelor ce trec printr'un punct şi paralelă cu o dreaptă. Se găseşte:

$$2x+6y-7=0,\ 4x-3y-14=0,\ 2x+y-2=0.$$

12. Să se afle ecuaţiile diagonalelor paralelogramului ale cărui laturi sunt:

$$x=a,\ x=a',\ y=b,\ y=b'.$$

R. Coordonatele vârfurilor sunt: A (a, b), B (a', b), C (a', b'), D (a, b'). Vom găsì:

$$(AC)\ x(b'-b) - y(a'-a) = ab' - b a',$$
$$(BD)\ x(b'-b) - y(a'-a) = a' b' - ab.$$

13. a şi b fiind coordonatele unui punct M din planul a două axe perpendiculare şi:

$$(a+2)x + (a+3b+5)y + 3 = 0,$$
$$(a+2)x - (2a+b-2)y - 2 = 0,$$

ecuaţiile a două drepte, să se afle locul poziţiilor ce trebue să ocupe M în plan, pentru ca dreptele date să fie: 1° paralele; 2° să coincidă.

R. 1° $(a+2)(3a+4b+3)=0$;
$a+2=0,\ 3a+4b+3=0.$

M (a, b) trebue să se afle sau pe paralela: $a+2=0$ la Oy, sau pe dreapta: $3a+4b+3=0$.

2°. Ca să coincidă:

$$\frac{a+2}{a+2} = -\frac{a+3b+5}{2a+b-2} = -\frac{3}{2}.$$

Egalitatea primelor două rapoarte dă:

$$(a+2)(3a+4b+3)=0,$$

iar acelor din urmă:

$$4a-3b-16=0.$$

Egalităţile sunt verificate pentru: $a=-2$, $b=-8$, deci un singur punct M.

14. Să se arate că într'un trapez, dreapta ce uneşte mijloacele M şi N ale bazelor şi cele două laturi neparalele sunt concurente.

R. Trapezul fiind OABC, se ia ca axe Ox şi Oy laturile OA şi OC. Se notează coordonatele punctelor date cu: A (a, o), B (b, d), C (o, c). Ecuaţiile dreptelor considerate sunt:

(OC) $x=o$, (AB) $d\,x+(a-b)\,y-a\,d=o$, (MN) $2\,d\,x+(a-b)\,y-a\,d=0$.
Se calculează determinantul coeficienţilor, sau se arată că AB şi MN taie pe Oy în acelaş punct.

15. Să se afle distanţele dela vârfurile triunghiului $(5,0)$, $(1,2)$, $(-3, -2)$ la laturile opuse.

$$\text{R. } \frac{6}{\sqrt{2}},\quad \frac{12}{\sqrt{17}},\quad \frac{12}{\sqrt{5}},$$

16. Să se demonstreze că înălţimile unui triunghi sunt concurente.

R. Fie: A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) vârfurile. Ecuaţia înălţimii din A este:

$$D_1 \equiv (x_2-x_3)(x-x_1) + (y_2-y_3)(y-y_1) = 0.$$

Ale celorlalte vor fi:

$$D_2 \equiv (x_3 - x_1)(x - x_2) + (y_3 - y_1)(y - y_2) = 0.$$

$$D_3 \equiv (x_1 - x_2)(x - x_3) + (y_1 - y_2)(y - y_3) = 0.$$

Adunând se obține:

$$D_1 + D_2 + D_3 \equiv 0.$$

ceea ce probează (§ 32, observare) că dreptele sunt concurente.

17. Să se arate că perpendicularele ridicate pe mijloacele laturilor unui triunghi sunt concurente.

R. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) vârfurile. Ecuațiile perpendicularelor sunt:

$$D_1 \equiv 2x(x_2 - x_3) + 2y(y_2 - y_3) + x_3^2 - x_2^2 + y_3^2 - y_2^2 = 0,$$

$$D_2 \equiv 2x(x_3 - x_1) + 2y(y_3 - y_1) + x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 = 0,$$

$$D_3 \equiv 2x(x_1 - x_2) + 2y(y_1 - y_2) + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0.$$

Se vede că:

$$D_1 + D_2 + D_3 \equiv 0.$$

18. Să se probeze că bisectoarele unui triunghi sunt concurente.

R. A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) Ecuațiile laturilor:

$$(BC)\ \Delta_1 \equiv (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2 y_3 - x_3 y_2 = 0,$$

$$(CA)\ \Delta_2 \equiv (y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y + x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0,$$

$$(AB)\ \Delta_3 \equiv (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Bisectoarele unghiului A sunt:

$$\frac{\Delta_2}{b} + \frac{\Delta_3}{c} = 0, \quad \frac{\Delta_2}{b} - \frac{\Delta_3}{c} = 0,$$

însemnând cu: a, b, c lungimile laturilor triunghiului.

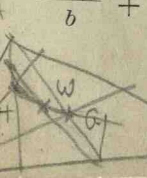
Bisectoarele interioare sunt:

$$\frac{\Delta_2}{b} - \frac{\Delta_3}{c} = 0, \quad \frac{\Delta_3}{c} - \frac{\Delta_1}{a} = 0, \quad \frac{\Delta_1}{a} - \frac{\Delta_2}{b} = 0,$$

căci rezultatele înlocuirii a lui x și y din ecuația bisectoarei unghiului A, de ex., cu coordonatele punctelor B și C, sunt de semne contrarii, B și C fiind de o parte și de alta a bisectoarei lui A.

Bisectoarele exterioare sunt:

$$\frac{\Delta_2}{b} + \frac{\Delta_3}{c} = 0, \quad \frac{\Delta_3}{c} + \frac{\Delta_1}{a} = 0, \quad \frac{\Delta_1}{a} + \frac{\Delta_2}{b} = 0.$$



Se probează că bisectoarele interioare sunt concurente adunând ecuaţiile lor.

Tot aşa se probează că două bisectore exterioare şi una interioară sunt concurente.

19. Să se afle ecuaţia bisectoarelor axelor de coordonate.

R. $x - y = 0$, $x + y = 0$.

20. Să se afle ecuaţia bisectoarelor unghiurilor triunghiului ale cărui vârfuri sunt: A $(a, 0)$, B $(-a, 0)$, C (b, c). Se presupune $b > 0$, $c > 0$.

R. Se construeşte triunghiul. Se găseşte:

$$(A)\ \frac{c\,x - y\,(b-a) - a\,c}{\sqrt{c^2 + (b-a)^2}} = y, \quad (B)\ \frac{c\,x - (b+a)\,y + a\,c}{\sqrt{c^2 + (b+a)^2}} = y,$$

$$(C)\ \frac{c\,x - y\,(b-a) - a\,c}{\sqrt{c^2 + (a-b)^2}} + \frac{c\,x - (a+b)\,y + a\,c}{\sqrt{c^2 + (a+b)^2}} = 0.$$

21. Să se afle bisectoarele unghiurilor triunghiului ale cărui laturi sunt:

$$3x + 2y - 2 = 0, \quad 2x + y - 4 = 0, \quad x - y - 1 = 0.$$

R. Se construesc dreptele şi se va cerceta rezultatele înlocuirii în ecuaţiile bisectoarelor.

22. Să se afle suprafaţa triunghiului ale cărui vârfuri sunt: $(a, 0)$, $(-a, 0)$, (b, c).

R.
$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -a & 0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\,a\,c$$

23. Se dau două axe perpendiculare Ox şi Oy şi două puncte A şi C pe Ox şi B pe Oy. Perpendiculara din C pe AB taie pe Oy în D. Să se arate că dreptele AD şi BC sunt perpendiculare.

R. A $(a, 0)$, C $(c, 0)$, B $(0, b)$. Se scrie ecuaţia dreptei dusă din C perpendiculară pe AB şi se găseşte coordonatele punctului D $\left(0, -\frac{a\,c}{b}\right)$. Se arată că între coeficienţii unghiulari ai dreptelor BC şi AD avem relaţia: $1 + m\,m' = 0$. D este ortocentrul triunghiului ABC.

24. O dreaptă AB se deplasează astfel ca suma inverselor segmentelor OA şi OB ce determină pe două axe de coordonate este constantă şi egală cu $1/K$. Să se demonstreze că aceste drepte AB trec printr'un punct fix, ale cărui coordonate să se caute.

R. A $(\lambda, 0)$, B $(0, \mu)$. Ecuaţia dreptei AB este:

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 1.$$

Avem:

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{K},$$

de unde se scoate $\frac{1}{\mu}$ şi se înlocueşte în ecuaţia dreptei. Se obţine:

$$Kx - Ky + \lambda (y - K) = o,$$

relaţie care probează că trec prin punctul fix (K, K), intersecţia dreptelor:

$$x - y = o, \quad y - K = o.$$

25. Se dă punctul A pe Ox şi C pe Oy (axe perpendiculare) şi se construeşte dreptunghiul OABC.

Să se demonstreze că perpendiculara din B pe AC trece printr'un punct fix, când punctele A şi B variind pe Ox şi Oy, avem:

$$OA + OC = K \text{ (constantă)}.$$

R. $A(\lambda, o)$, $B(o, \mu)$. $\lambda + \mu = K$ (1). Se înlocueşte valoarea lui λ dedusă din (1) în ecuaţia perpendicularei din B pe AC şi se obţine:

$$Kx - K^2 + \mu(-x - y + 2K) = o.$$

Trece prin punctul (K, K).

26. Se dă o dreaptă fixă AB, care taie pe Ox şi Oy în A şi B, astfel ca: $OA = OB = a$. Dintr'un punct M variabil pe AB se lasă proiecţiile pe Ox şi Oy în P şi Q. Să se arate că perpendiculara din M pe PQ trece printr'un punct fix, când M variază pe dreapta AB.

R. $M(\lambda, \mu)$. Se scrie că M se află pe AB şi deci: $\lambda + \mu = a$ Se înlocueşte în ecuaţia perpendicularei din M pe PQ valoarea lui μ dedusă din $\lambda + \mu = a$ şi se află că trece prin punctul comun dreptelor:

$$ay - a^2 = o, \quad x + y - 2a = o.$$

27. Să se probeze că suma distanţelor unui punct M al bazei BC a unui triunghi isocel ABC ($AB = AC$) la laturile AB şi AC este constantă.

R. Se ia ca axe Ox şi Oy baza BC şi înălţimea din A. Se notează: $B(a, o)$, $C(-a, o)$, $A(o, h)$, $M(\lambda, o)$.

Distanţele lui M la AB şi AC vor fi:

$$\frac{h\lambda - ah}{-\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \frac{-h\lambda - ah}{-\sqrt{a^2 + h^2}}$$

luând semuul —, căci origina şi punctul M sunt de aceiaşi parte a dreptelor AB şi AC, presupunând M între B şi C.

28. Să se probeze că suma distanţelor unui punct din interiorul unui triunghiu ABC echilateral la laturi este constantă.

R. Se ia ca axe baza BC şi înălţimea din A. Se notează:

$$B\left(\frac{a}{2}, o\right), C\left(-\frac{a}{2}, o\right), A\left(o, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), M(\lambda, \mu).$$

Distanţele lui M la AB, AC şi BC sunt:

$$\frac{2\lambda\sqrt{3} + 2\mu - a\sqrt{3}}{-\sqrt{12+4}}, \quad \frac{-\lambda\sqrt{3} + 2\mu - a\sqrt{3}}{-4}, \quad \mu.$$

S'a luat —, căci origina şi M sunt de aceiaşi parte a dreptelor AB, AC.

29. Să se afle ecuaţiile bisectoarelor dreptelor care trec prin origină şi au coeficienţii unghiulari: 2, $\frac{1}{2}$.

R. Ecuaţiile dreptelor sunt:

$$2x - y = o, \quad x - 2y = o.$$

Bisectoarele sunt: (interioară) $x - y = o$, (exterioară) $x + y = o$.

30. Să se afle ecuaţia bisectoarelor unghiului ascuţit al dreptelor: $3y - 4x - 1 = o$ şi Oy.

R. $$\frac{4x - 3y + 1}{5} = -x.$$

S'a luat —, căci rezultatele înlocuirii în ecuaţia bisectoarei, a coordonatelor punctelor unde dreapta taie pe Ox şi originii, trebuiau să aibă semne contrare, aceste două puncte fiind de o parte şi de alta a bisectoarei.

31. Să se arate că într'un triunghi dreptunghi dreapta care uneşte vârful unghiului drept cu centrul pătratului construit pe ipotenuză este bisectoarea unghiului drept.

R. Luăm ca axe Ox şi Oy laturile $OA = a$, $OB = b$ şi fie C centrul pătratului. Se notează cu m şi m' coficienţii unghiulari ai dreptelor AB şi AC care fac unghiul de 45°. Pentru a calcula pe m', se aplică formula:

$$\text{tg. } v = \frac{m - m'}{1 + m m'}, \qquad m' = \frac{b + a}{b - a}.$$

Se scrie ecuaţia dreptei AC, ce trece prin A şi coeficientul m'. Se scrie apoi ecuaţia dreptei BC, ce trece prin B şi perpendiculară pe AC şi se arată că coordonatele punctului C sunt egale, deci aparţine bisectoarei.

32. Se dau două axe oblice Ox și Oy și trei puncte A, B, C. Pe BC, CA, AB, respectiv ca diagonale, se construesc paralelograme cu laturile paralele cu axele de coordonate.

Să se arate că celelalte diagonale (afară de AB, BC, CA) ale paralelogramelor astfel construite, sunt concurente.

R. A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3). Se calculează coordonatele vârfurilor aceste paralelograme și se scrie ecuația unei drepte ce trece prin două puncte. Ecuațiile diagonalelor sunt:

$$x\,(y_1 - y_2) + y\,(x_1 - x_2) + x_2\,y_2 - x_1\,y_1 = 0,$$

$$x\,(y_2 - y_3) + y\,(x_2 - x_3) + x_3\,y_3 - x_2\,y_2 = 0,$$

$$x\,(y_3 - y_1) + y\,(x_3 - x_1) + x_1\,y_1 - x_3\,y_3 = 0.$$

33 Fiind cunoscute coordonatele unui punct M (x_1, y_1) și ecuația unei drepte $D = A\,x + B\,y + C = o$, să se afle coordonatele punctului M′ (x'_1, y'_1) simetricul lui M în raport cu dreapta D.

R. Se află coordonatele piciorului perpendicularei din M pe D, anume: (x_2, y_2). Pentru a calcula pe (x'_1, y'_1), ne servim de formulele:

$$x_2 = \frac{x_1 + x'_1}{2}, \quad y_2 = \frac{y_1 + y'_1}{2}.$$

Sau altfel: se scrie ecuația perpendicularei ridicată pe mijlocul lui M M′ și se identifică cu $Ax + By + C = o$. Din cele doua ecuații aflate, se găsește: (x'_1, y'_1).

34. Se dau două puncte fixe, A pe Ox, B pe Oy (axe perpendiculare). Se ia pe Ox și Oy, înspre OA și OB, lungimile $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \lambda$.

Să se arate că perpendiculara pe A′ B′, în mijlocul lui A′B′, trece printr'un punct fix când λ variază (A′ variază pe Ox).

R. A (a, o), B(o, b), A′ $(a + \lambda, o)$, B′ $(o, b + \lambda)$.

Ecuația perpendicularei este:

$$2ax - 2by - a^2 + b^2 + 2\lambda\,(x - y - a + b) = o.$$

Locuri Geometrice

41. Se ştie că un loc geometric este o reunire de mai multe puncte, care se bucură toate de aceiaşi proprietate. Pentru a găsì ecuaţia unui loc geometric, a unui punct M (x, y), trebue mai întâi să se fixeze axele de coordonate, ceeace constitue una din părţile importante ale problemei şi depinde de experienţa calculatorului.

Totuşi, în cazuri generale, se poate urmà o anumită regulă. Dacă din datele problemei se vede că locul geometric admite o axă de simetrie, se va luà acea dreaptă ca axă Ox; dacă va admite două axe de simetrie perpendiculare, se vor luà acele drepte ca axe Ox şi Oy; în fine, dacă punctele locului sunt simetrice în raport cu un punct, se va luà acel punct ca origină a axelor de coordonate.

42. Acestea fiind stabilite, pentru a găsì ecuaţia locului geometric, se va găsì o relaţie care leagă coordonatele (x, y) ale unui punct variabil al locului, exprimând prin ecuaţii definiţia geometrică a locului.

Exemplu. *Să se afle locul punctelor* M *egal depărtate de două puncte date.*

Vom luà ca axă Ox linia ce uneşte punctele date A şi B, iar ca axă Oy perpendiculara pe mijlocul dreptei AB. Coordonatele punctelor vor fi: A (a, o), B $(-a, o)$. Fie M (x, y) un punct al locului geometric. Pentru a găsì ecuaţia locului geometric descris de M, va trebuì să găsim o relaţie între coordonatele (x, y) ale acestui punct, ceeace se obţine scriind că:

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 ;$$

deci:

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2 + y^2.$$

De unde:

$$2\, a\, x = 0; \quad x = 0.$$

Ecuaţia locului geometric fiind $x = 0$, urmează că acest loc este o dreaptă, axa $0\, y$, perpendiculara pe mijlocul dreptei AB.

43. Când nu se poate obţine imediat ecuaţia locului geometric, e posibil să se observe că orice punct al locului geometric se află la intersecţia a două curbe variabile, dar care curbe stau în strânsă legătură amândouă.

Să presupunem că:

$$f(x, y, \lambda) = 0, \quad \varphi(x, y, \lambda) = 0, \qquad (1)$$

reprezintă ecuaţiile curbelor, variabile cu *parametrul variabil* λ, la a căror intersecţie este punctul locului geometric căutat. Coordonatele (x, y) ale acelui punct verifică ecuaţiile celor două curbe, ori care ar fi parametrul λ (care poate fi o lungime, un unghiu). Egalând valorile lui λ, scoase din ecuaţiile curbelor variabile, vom obţine o relaţie de forma:

$$R\,(x, y) = 0,$$

care este o relaţie între coordonatele unui punct oarecare al locului geometric, deci *este ecuaţia locului căutat.*

In loc de a scrie că valorile lui λ, scoase din ecuaţiile (1), sunt egale, este tot una, a rezolvà o ecuaţie în raport cu λ şi a scrie că rezultatul înlocuirei lui λ în cealaltă ecuaţie este zero, adică pentru a găsì ecuaţia locului geometric, vom *eliminà parametrul variabil între ecuaţiile* (1).

Exemplu. *Se dă un punct* A *pe* $o\,x$ *şi un punct* B *variabil pe* O y. *Se ia pe* O y *punctul* C, *astfel ca* $\overline{BC} = \overline{OB}$ *şi se cere să se găsească locul geometric al punctului de intersecţie al dreptei* AB *cu dreapta ce uneşte punctul* O *cu mijlocul dreptei* AC.

Axele fiind hotărîte, să notăm coordonatele punctului dat A cu (a, o) ale punctului variabil B cu (O, λ); coordonatele lui C vor fi $(0, 2\lambda)$ Să scrim ecuaţiile dreptelor AB şi OD (D fiind mijlocul lui AC). Avem:

$$\text{(AB)} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0. \qquad (2)$$

Coordonatele lui D fiind $\left(\frac{a}{2}, \lambda\right)$, ecuaţia dreptei OD va fi :

$$y = \frac{\lambda}{\frac{a}{2}} x. \tag{3}$$

Eliminând pe λ între ecuaţiile (2) şi (3), adică scoţând pe λ din ecuaţia (3) şi înlocuind în (2) găsim :

$$3x - a = 0,$$

care este ecuaţia locului geometric şi care reprezintă o linie dreaptă paralelă cu Oy.

44. Se mai poate ca ecuaţiile celor două curbe ce se întâlnesc în punctul al cărui loc geometric se caută, să conţie doi parametri variabili, λ şi μ, adică :

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0, \varphi(x, y, \lambda, \mu) = 0, \tag{4}$$

între aceşti parametri existând însă relaţia :

$$\psi(\lambda, \mu) = 0. \tag{5}$$

De fapt însă este un singur parametru variabil, căci, rezolvând ecuaţia (5), în raport cu μ, şi înlocuind în ecuaţiile (4), vom vedea că ecuaţiile curbelor ce definesc poziţia punctului al locului geometric, conţin numai pe λ şi deci fiind în cazul precedent (§. 43), pentru a găsi ecuaţia locului geometric, va trebui să eliminăm pe λ între ecuaţiile obţinute mai sus. Aceasta înseamnează că ecuaţia locului geometric se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (4) şi (5).

Exemplu. O *secantă variabilă tde laturile* Ox *şi* Oy *ale unui unghi dat în punctele* P *şi* Q *astfel că*: OP + OQ = **a** (constantă). *Să se afle locul geometric al intersecţii paralelelor duse prin* P *şi* Q *respectiv la* Oy *şi* Ox.

Să însemnăm coordonatele punctelor variabile cu : P (λ, o) Q (o, μ). Relaţia între λ şi μ este :

$$\lambda + \mu = a. \tag{6}$$

Ecuaţiile paralelelor din P şi Q sunt :

$$x = \lambda, \; y = \mu. \tag{7}$$

Locul geometric se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (6) şi (7); se obţine:

$$x + y = a,$$

care arată că locul geometric este o linie dreaptă.

45 **Aplicaţii.** I. *O dreaptă* AB *de lungime constantă se mişcă cu extremitatea* A *pe axa* O x *şi extremitatea* B *pe axa* Oy *(axele perpendiculare) Se duce prin* A *şi* B *paralele la axe care se taie în* M. *Să se afle locul geometric al punctului* M, *când* A *variază pe* O x.

Să însemnăm coordonatele lui A cu (λ, o), ale lui B cu (o, μ); scriind că $\overline{AB}^2 = \text{const} = l^2$, avem:

$$\lambda^2 + \mu^2 = l^2. \tag{8}$$

Ecuaţiile paralelelor fiind:

$$x = \lambda,\ y = \mu, \tag{9}$$

locul lui M se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (8) şi (9); de unde:

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

relaţie care probează că punctul M descrie un cerc cu centru în origină şi cu raza l.

II. *O dreaptă* PQ *variabilă întâlneşte laturile* OA *şi* OB *ale unui unghiu în punctele* P *şi* Q, *astfel că:* OP+OQ=K=c-tă. *Să se găsească locul geometric al punctului* M *care înparte segmentul* PQ *în raportul.* MP : MQ = m : n.

Fiindcă nu este vorba de perpendicularitate, vom luà ca axe Ox şi Oy laturile OA şi OB. Vom aveà: P (λ, o), Q (o, μ), cu condiţia:

$$\lambda + \mu = K. \tag{10}$$

Coordonatele (x, y) ale lui M sunt (§. 15);

$$x = \frac{\lambda + \frac{m}{n} \cdot 0}{1 + \frac{m}{n}}, \qquad y = \frac{0 + \frac{m}{n}\mu}{1 + \frac{m}{n}},$$

sau:

$$x = \frac{\lambda}{1 + \frac{m}{n}}, \qquad y = \frac{\frac{m}{n}\mu}{1 + \frac{m}{n}}. \qquad (11)$$

Locul geometric se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile (10) şi (11) ceeace se face uşor înlocuind în (10) pe λ şi μ din (11); vom avea:

$$\lambda = \frac{x\,(m+n)}{n}, \qquad \mu = \frac{y\,(m+n)}{m},$$

$$\frac{x}{n} + \frac{y}{m} = \frac{K}{m+n},$$

ceea ce probează că locul este o linie dreaptă.

III. *Se dau două puncte fixe* A *şi* B. *Să se afle locul geometric al punctelor* M, *ştiind că:* $\overline{MB}^2 - \overline{MA}^2 = K^2$.

Vom luà ca axă Ox dreapta AB şi ca Oy perpendiculara pe mijlocul lui AB. Coordonatele punctelor date vor fi: A (a, o), B$(-a, o)$. Exprimând analitic condiţia ce o înplineşte un punct M (x, y), avem imediat locul geometric:

$$[(x+a)^2 + y^2] - [(x-a)^2 + y^2] = K^2$$

sau:

$$4\,ax = K^2,$$

ecuaţie care probează că locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe AB.

IV. *Dintr'un punct variabil* M *se lasă perpendicularele* MP. MQ *pe laturile* OA, OB *ale unghiului* AOB. *Să se găsească locul ce trebue să-l descrie punctul* M *pentru ca dreapta* PQ *să fie paralelă cu o direcţie fixă.*

Vom luà ca axe: dreapta OA ca axă Ox şi perpendiculara pe ea în O ca axă Oy. Ecuaţia dreptei date OB, care trece prin origină, va fi:

$$y = ax. \qquad (12)$$

Fie (x_0, y_0) coordonatele punctului M. A găsì locul geometric, însemnează a găsì o relaţie între x_0, y_0. Fie m coeficientul unghiular al direcţii fixe. Va trebuì să găsim coordonatele punctelor P şi Q. Acele ale lui P sunt (x_0, o).

Pentru a găsì pe acele ale lui Q, vom scrie ecuația perpendicularei din M pe OB, care este:

$$y - y_0 = -\frac{1}{a}(x - x_0)$$

Coordonatele lui Q verifică această ecuație și aceea a dreptei OB, (12). Rezolvăm aceste două ecuații și avem:

$$ax - y_0 = -\frac{1}{a}(x - x_0),$$

$$x = \frac{x_0 + ay_0}{1 + a^2}, \quad y = \frac{a(x_0 + ay_0)}{1 + a^2}$$

Pentru a exprimà că dreapta PQ este paralelă cu direcția dată, va trebuì să scrim că coeficientul unghiular al acestei drepte este egal cu m, vom obține:

$$\frac{\dfrac{a(x_0 + ay_0)}{1 + a^2}}{\dfrac{x_0 + ay_0}{1 + a^2} - x_0} = m, \quad x_0(1 + ma) + y_0(a - m) = 0.$$

Am găsit deci că între coordonatele (x_0, y_0) ale unui punct M al locului, există relația:

$$x_0(1 + ma) + y_0(a - m) = 0.$$

ceeace probează că locul geometric este linia dreaptă ce trece prin origină,

$$x(1 + ma) + y(a - m) = 0.$$

V. ~~*Se dau două*~~ Se dau două *puncte fixe* D *și* E *așezate pe o paralelă la dreapta fixă* BC. *Se ia pe dreapta* DE *punctele* P *și* Q, *variabile, astfel că avem relația:*

$$\overline{DP} : \overline{QE} = K.$$

Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor BP *și* CQ.

Vom luà ca axă Ox dreapta BC, iar ca Oy dreapta CD. Vom aveà:

B (b, o), D (o, d), E (e, d), P (λ, d),

λ fiind variabil. Pentru a găsì abscisa x_0 a punctului Q, ne servim de relația:

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{QE}} = K;$$

însă: $\overline{DP} = \lambda - o = \lambda$, $\overline{QE} = e - x_0$. Deci:

$$\frac{\lambda}{e - x_0} = K, \quad x_0 = \frac{eK - \lambda}{K}.$$

Coordonatele punctului Q sunt:

$$Q\left(\frac{eK - \lambda}{K},\ d\right).$$

Ecuațiile dreptelor BP și CQ vor fi:

$$(BP)\ y = \frac{d}{\lambda - b}(x - b), \quad (CQ)\ y = \frac{d}{\frac{eK - \lambda}{K}}x.$$

Sau:

$$\lambda y = by + dx - db, \quad \lambda y - eky + dkx = 0.$$

$\lambda y - by - dx + db = 0$

Eliminând pe λ între aceste ecuații, ceea ce se obține scăzându-le, avem:

$$by + dx - db = eky - dkx,$$
$$dx(1 + K) + y(b - ek) - db = 0,$$

ceea ce probează că locul geometric este o linie dreaptă.

VI. *Două drepte fixe* AO *și* OB *sunt tăiate de o dreaptă paralelă cu o direcțe fixă în punctele* M *și* N. *Să se afle locul geometric al punctului* P *care divide dreapta* MN *în raportul:* $\overline{PM} : \overline{PN} = K$.

Vom luà ca axă Ox dreapta OA, iar ca Oy, paralela dusă prin O la direcția fixă a dreptei MN. Ecuația dreptei date OB va fi:

$$y = ax,$$

iar a dreptei MN:

$$x = \lambda,$$

λ fiind variabil. Coordonatele puncteler M și N sunt:

$$M(\lambda, o), \quad N(\lambda, a\lambda).$$

Fie (x_0, y_0), coordonatele punctului P: avem:

$$x_0 = \lambda \tag{13}$$

iar din relația:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = K,$$

găsim:

$$\frac{-y_0}{a\lambda - y_0} = K \tag{14}$$

Locul geometric se obține eliminând λ între ecuațiile (13) și (14); de unde:

$$\frac{-y_0}{ax_0 - y_0} = K. \quad aKx_0 - y_0(K-1) = 0.$$

Intre coordonatele (x_0, y_0) ale unui punct al locului geometric există deci relația:

$$aKx_0 - y_0(K-1) = 0.$$

ceea ce probează că locul geometric este o linie dreaptă ce trece prin origină, a cărei ecuație este:

$$aKx - y(K-1) = 0.$$

VII. *Fiind dat un triunghi dreptunghic* OAB, *se construește pe* OA *și* OB *pătratele* OACD *și* OBGF *și se duc dreptele* AG, BC. *Se cere locul geometric al punctului* M *de întâlnire al acestor două drepte, cand ipotenuza* AB *se deplasează paralel cu ea însăși.*

Luăm ca axe coordonate Ox și Oy laturile fixe OA și OB. Fie:

$$y = ax + b$$

ecuația dreptei cu care este paralelă AB. Ecuația dreptei AB va fi:

$$y = ax + \lambda,$$

λ fiind un parametru variabil. Coordonatele punctelor A și B se obțin făcând în ecuația dreptei AB $y = 0$ și apoi $x = 0$; vom avea:

$$A\left(-\frac{\lambda}{a}, 0\right), \quad B(0, \lambda).$$

Dreptele CD şi AB fiind paralele cu axele, coordonatele punctului C vor fi:

$$C\left(-\frac{\lambda}{a}, \frac{\lambda}{a}\right)$$

De asemenea, coordonatele punctului G sunt:

$$G(-\lambda, \lambda).$$

Ecuaţiile dreptelor AG şi BD sunt deci:

$$(AG)\ y = \frac{\lambda}{-\lambda + \frac{\lambda}{a}}\left(x + \frac{\lambda}{a}\right),$$

$$(BC)\ y - \lambda = \frac{\frac{\lambda}{a} - \lambda}{-\frac{\lambda}{a}}\, x.$$

Sau:

$$y\,(1 - a) = ax + \lambda,\ y - \lambda = (a - 1)\, x.$$

Eliminând pe λ între aceste ecuaţii, ceea ce se obţine egalând valorile lui λ, avem:

$$x + ay = o,$$

ceea ce probează că locul geometric este o linie dreaptă ce trece prin origină şi perpendiculară pe direcţia dreptei AB.

VIII. *Se dau două puncte fixe pe Ox, A şi B şi un punct variabil* P *pe Oy. Se ridică în* A *şi* B *perpendiculare pe* PA *şi* PB, *care se tae în* M. *Se cere locul geometric al lui* M, *când* P *descrie axa Oy.*

Avem: A (a, o), B (b, o), P (o, λ). Coefecienţii unghiulari ai dreptelor PA şi PB fiind:

$$\frac{-\lambda}{a}, \frac{-\lambda}{b},$$

ecuaţiile perpendicularelor în A şi B pe PA şi PB sunt:

$$y = \frac{a}{\lambda}(x - a),\ y = \frac{b}{\lambda}(x - b).$$

Pentru a găsi locul geometric, vom elimina pe λ între aceste ecuaţii. Inpărţind membru cu membru, obţinem:

$$\frac{\lambda y}{\lambda y} = \frac{a(x-a)}{b(x-b)}.$$

De unde, sau :

Sau :

$$y = 0,$$

$$a(x-a) = b(x-b),$$

$$x = a + b.$$

Locul geometric este format din axa ox şi dintr'o dreaptă paralelă cu Oy, la depărtarea de origină egală cu $a+b$.
Axa ox corespunde cazului când $\lambda = \infty$, adică PA şi PB paralele.

Exerciţii.

1. Să se afle locul geometric al punctelor M, astfel cà diferenţa distanţelor sale la două drepte OA şi OB să fie constantă K.
R. Se ia ca axe Ox, Oy, dreptele OA şi perpendiculara în O. Să notăm ecuaţia dreptei OB cu :

$$y - a\,x = 0.$$

y y+ax<0

Locul este :

$$\frac{a\,x - y}{\sqrt{1+a^2}} \pm y = K,$$

drepte pararele cu bisectoarele unghiului AOB.

2. Intr'un triunghi ABC se duce o paralelă la baza BC care taie pe AB în D şi AC în E. Pe baza BC se dau punctele fixe P şi Q. Să se afle locul geometric al punctului de întâlnire al dreptelor PE, DQ.
R. Se ia BC ca Ox şi AB ca Oy. P $(p, 0)$, Q $(q, 0)$, C $(c, 0)$, A $(0, a)$. Se calculează coordonatele punctelor D şi E, scriind ecuaţia dreptei DE supt forma $y - \lambda = 0$, (λ variabil). Ecuaţiile dreptelor DQ, PE sunt :

$$(DQ) \equiv \frac{x}{q} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0, \quad (PE) \equiv (DE) + \mu\,(AC) = 0,$$

$$(PE) \equiv y - \lambda + \mu\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1\right) = 0.$$

Pentru a găsi pe μ se scrie că trece prin P (p, o).
Se găsește:

$$\mu = \frac{c\lambda}{p-c}.$$

$$(PE) \equiv y - \lambda + \frac{c\lambda}{p-c}\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1\right)$$

Se elimină λ între ecuațiile dreptelor (PE) și (DQ).
Se obține:

$$y = o, \; x\,(q - p + c)\,a + cqy - caq = 0.$$

3. Intr'un triunghi isoscel ABC (BC = AC) se duce o paralelă la baza AB care taie AC și BC în P și Q, iar înălțimea CO în H. Să se afle locul geometric al intersecții d eptei OP cu AH; al dreptelor OP și AQ; al dreptelor OQ și AH.

R. AB ca Ox, Inălțimea ca Oy, A (a, o), B $(-a, o)$, C (o, h), $(PQ) \equiv y - \lambda = o$. Se calculează coordonatele punctelor P și Q rezolvând ecuațiile dreptelor AC, BC, PQ.

Locurile geometrice se obțin eliminând λ între ecuațiile dreptelor OP, AQ; OP, AH; OQ, AH. Se va obține pe rând:

$$y = 0, \; \frac{x}{\frac{a}{3}} + \frac{y}{h} = 1; \; x = 0, \; y = h; \; y = 0, \; \frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{h} = 1.$$

4. Să se afle locul geometric al centrelor dreptunghiurilor MNPQ înscrise în triunghiul dat ABC. (M pe AC, N pe CB, Q și P pe AB.

R. Se ia ca axe Ox și Oy pe AB și înălțimea CO, A (a, o), B (b, o), C (o, h). Fie $y - \lambda = o$, ecuația unei drepte paralele cu AB, care taie pe AC în M și BC în N. Se vor calcula coordonatele punctelor M, N, P, Q și se va elimina λ între ecuațiile dreptelor PN, QM.
Se găsește dreapta:

$$\frac{x}{\frac{a+b}{2}} + \frac{y}{\frac{h}{2}} = 1.$$

5 Să se afle locul geometric al punctelor M, astfel ca raportul distanțelor sale la două drepte fixe să fie egal cu K.

R. Se va lua una din drepte ca Ox și perpendiculara pe ea în punctul lor de intersecție, ca Oy. Se va scrie ecuația celeilalte drepte ce trece prin origină, $y = ax$. Locul este format de două drepte ce trec prin origină:

$$\frac{ax - y}{\sqrt{1+a^2}} = \pm Ky.$$

6. Se dă o dreaptă fixă D și un puuct A. Se unește un punct vari-

abil P al dreptei D cu punctul A și se cere locul geometric al punctului M care împarte dreapta AP în raportul: PM : MA = K.

R. Se ia D ca Ox și perpendiculara din A pe D ca Oy. P (λ, o). A (o, a). Locul este o dreaptă paralelă cu D.

7. Dintr'un punct R variabil pe o dreaptă fixă D se lasă perpendicularele RP și RQ pe laturile OA și OB ale unui unghi dat. Să se afle locul geometric al punctului M, așezat pe PQ, astfel ca:

$$MP : MQ = K.$$

R. Se ia OA ca Ox și perpendiculara pe ea în O ca Oy. Se scrie ecuațiile dreptelor D și OB,

$$(D) \equiv Ax + By + C = o. \quad (OB) \equiv y - mx = 0.$$

R (λ, μ); deci: A λ + B μ + C = o. Se calculează coordonatele punctelor P și Q și pe urmă ale lui M. Se elimină λ, μ între: A λ + B μ + C = o și ecuațiile care dau coordonatele punctului M:

$$x = \frac{\lambda + K\dfrac{m\mu + \lambda}{1 + m^2}}{1 + K}, \quad y = \frac{Km\,(m\mu + \lambda)}{(1 + m^2)\,(1 + K)}$$

Locul este linia dreaptă:

$$\begin{vmatrix} 1 + m^2 + K & K\,m & x\,(1 + K)\,(1 + m^2) \\ K\,m & K\,m^2 & y\,(1 + K)\,(1 + m^2) \\ A & B & -C \end{vmatrix} = 0.$$

8. Fie P și Q punctele de intersecție ale unei drepte variabile cu laturile OA și OB ale unui unghi dat AOB. In punctele P și Q se ridică perpendiculare pe OA și OB care se taie în M. Să se afle locul geometric al punctului M, când secanta variind, avem: OP + OQ = K. (constantă).

R. Se ia OA ca Ox, perpendiculara în O ca Oy. P (λ, o). Fie α unghiul pe care OB îl face cu Ox și OQ = μ, Q (μ cos α, μ sin α); $\mu + \lambda = K$. Se elimină λ și μ între ecuațiile perpendicularelor și $\lambda + \mu = K$. Se găsește dreapta:

$$y - (K - x)\sin\alpha + \operatorname{cotg}\alpha\,[\,x - \cos\alpha\,(K - x)\,] = o.$$

9. Se dau două puncte fixe C și D așezate pe o paralelă la dreapta AB, definită prin punctele A și B. Se unește un punct P variabil cu C și D și fie M și N intersecțiile dreptei AB cu PC și PD. Să se afle locul punctului P știind că avem: $\overline{AM} : \overline{NB} = K$.

R. Se ia ca Ox dreapta A B, ca O y perpendiculara în A. B (b o), C (c, a), D (d, a); P (x_0, y_0), căci voind a se afla locul său geometric se va căuta relaţia între coordonatele sale; de aceea s'a notat coordonatele sale cu (x_0, y_0), iar nu cu parametri variabili, de oarece nu vom face eliminare de parametri variabili. Se scrie ecuaţiile dreptelor PC şi PD, se află coordonatele punctelor M şi N. Se înlocueşte în relaţia: $\overline{AM} : \overline{NB} = K$ şi locul geometric este dreapta:

$$ax_0(1 + K) + y_0(c + Kb - Kd) - Kab = 0.$$

Sisteme de drepte.

46. **Fascicole de drepte ce trec prin origină.** Fie D_1, D_2 două drepte ce trec prin origina axelor de coordonate; ecuaţiile lor fiind:

$$y - a_1 x = 0, \quad y - a_2 x = 0,$$

a_1, a_2 însemnând coeficienţii lor unghiulari, ecuaţia ambelor drepte va fi:

$$(y - a_1 x)(y - a_2 x) = 0,$$

$$y^2 - (a_1 + a_2) x y + a_1 a_2 x^2 = 0.$$

Adică, ecuaţia a două drepte ce trec prin origină este de forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

o ecuaţie omogenă şi de gradul al doilea în raport cu x şi y.

In general, ecuaţia a m drepte ce trec prin origină este omogenă şi de gradul m în raport cu x şi y.

Reciproc, fie:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = 0, \qquad (I)$$

o ecuaţie omogenă şi de gradul al treilea în raport cu x şi y. Vom arăta că această ecuaţie reprezintă trei drepte ce trec prin origina axelor de coordonate.

In adevăr, divizând ecuaţia (I) cu x^3, avem:

$$D\left(\frac{y}{x}\right)^3 + C\left(\frac{y}{x}\right)^2 + B\left(\frac{y}{x}\right) + A = 0.$$

Insemnând cu: $m = \dfrac{y}{x}$,

ecuaţia precedentă devine:

$$Dm^3 + Cm^2 + Bm + A = 0. \qquad \text{(II)}$$

Fie: m_1, m_2, m_3 rădăcinile acestei ecuaţii de gradul III-a în raport cu m. Ecuaţia (II) care reprezintă aceiaşi curbă ca ecuaţia (I), se poate deci pune supt forma:

$$D\,(m - m_1)\,(m - m_2)\,(m - m_3) = 0.$$

Inlocuind pe m cu $(y : x)$, obţinem:

$$\left(\frac{y}{x} - m_1\right)\left(\frac{y}{x} - m_2\right)\left(\frac{y}{x} - m_3\right) = 0,$$

Sau: $(y - m_1\,x)\,(y - m_2\,x)\,(y - m_3\,x) = 0.$ (III)

Prin urmare, ecuaţia (I) se poate pune supt forma (III) şi se descompune în:

$$y - m_1\,x = 0,\; y - m_2\,x = 0.\; y - m_3\,x = 0,$$

adică reprezintă trei drepte ce trec prin origină, iar coeficienţii lor unghiulari sunt rădăcinile ecuaţii:

$$D\,m^3 + C\,m^2 + B\,m + A = 0.$$

Exemplu. *Să se construiască dreptele reprezentate de ecuaţia*:

$$2\,y^2 - 3\,xy + x^2 = 0.$$

Ecuaţia coeficienţilor unghiulari fiind:

$$2\,m^2 - 3\,m + 1 = 0,$$

avem, rezolvând-o,:

$$m_1 = \frac{1}{2},\quad m_2 = 1,$$

iar ecuaţiile acestor drepte sunt:

$$y - \frac{1}{2}\,x = 0,\; y = x.$$

47. **Unghiul a două drepte:** $A\,x^2 + Bxy + Cy^2$. Se ştie că V fiind unghiul acestor drepte, avem:

$$\operatorname{tg} V = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1\,m_2}$$

$1 - m_1 m_2 = 0 \quad m_1 = -$

Insă, m_1 şi m_2 sunt rădăcinile ecuaţii:

$$Cm^2 + Bm + A = 0$$

şi deci:

$$m_1 - m_2 = \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{C}, \quad m_1 m_2 = \frac{A}{C}.$$

Inlocuind avem:

$$\operatorname{tg} V = \frac{\pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{C}}{1 + \frac{A}{C}} = \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{A + C}$$

Semnele $+$ şi $-$ corespund celor două unghiuri ale dreptelor date.

48. **Aplicaţii.** I. **Să se afle condiţia ca dreptele:** $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ **să fie perpendiculare.** Ştim că în acest caz avem:

$$1 + m_1 m_2 = 0,$$

deci:

$$A + C = 0.$$

II. **Să se afle ecuaţia bisectoarelor dreptelor:**

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

Fie V_1 şi V_2 unghiurile acestor drepte cu axa Ox, aşa că:

$$m_1 = \operatorname{tg} V_1, \; m_2 = \operatorname{tg} V_2,$$

m_1 şi m_2 fiind daţi de ecuaţia:

$$Cm^2 + Bm + A = 0.$$

Insemnând cu Θ unghiul bisectoarei interioare, de ex, cu Ox, şi cu $\mu = \operatorname{tg} \Theta$, avem:

$$\Theta = \frac{V_1 + V_2}{2}, \; 2\,\Theta = V_1 + V_2$$

Deci:

$$\operatorname{tg} 2\,\Theta = \operatorname{tg}(V_1 + V_2) = \frac{\operatorname{tg} V_1 + \operatorname{tg} V_2}{1 - \operatorname{tg} V_1 \operatorname{tg} V_2}.$$

Sau, dezvoltând, :

$$\frac{2\ \mathrm{tg}\ \Theta}{1-\mathrm{tg}^2\ \Theta}=\frac{m_1+m_2}{1-m_1 m_2}=\frac{-\frac{B}{C}}{1-\frac{A}{C}}=\frac{B}{A-C}$$

Inlocuind pe tgΘ cu μ, avem :

$$\frac{2\ \mu}{1-\mu^2}=\frac{B}{A-C},$$

de unde obţinem ecuaţia:

$$B\ \mu^2+2\ \mu\ (A-C)-B=0,$$

care dă cele două valori μ', μ'' ale coeficienţilor unghiulari ai celor două bisectoare.

Ecuaţia fascicolului de bisectoare va fi deci :

$$B\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\ \left(A-C\right)\frac{y}{x}-B=0,$$

sau:

$$B\ y^2+2\ (A-C)\ xy-B\ x^2=0.$$

Exemplu. Ecuaţia bisectoarelor dreptelor:

A B C

$$x^2-5\ xy+2\ y^2=0,$$

este :

$$5\ (y^2-x^2)+2\ x\ y=0.$$

$y = mx$

$x = \frac{y}{m} = \frac{h}{m_i}$

49. **Condiţia ca patru drepte ce trec prin origină să formeze un fascicol armonic.** Fie : m_1, m_2, m_3, m_4 coeficienţii unghiulari a patru drepte :

$$y-m_i\ x=0,\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

ce trec prin origină şi formează un fascicol armonic.

O paralelă, $y=h$, cu axa Ox, va întâlni razele acestui fascicol în punctele : M_1, M_2, M_3, M_4, care formează o diviziune armonică, adică ;

$$\frac{M_2\ M_1}{M_2\ M_3}=-\frac{M_4\ M_1}{M_4\ M_3}.\qquad \text{(a)}$$

Insă, din ecuaţiile dreptelor, abscisele punctelor M_1, M_2, M_3, M_4 sunt:

$$\frac{h}{m_1}, \ \frac{h}{m_2}, \ \frac{h}{m_3}, \ \frac{h}{m_4};$$

deci:

$$\overline{M_2 M_1} = \frac{h}{m_1} - \frac{h}{m_2} \text{ etc.}$$

De unde. relaţia (a) devine:

$$\frac{\frac{h}{m_1} - \frac{h}{m_2}}{\frac{h}{m_3} - \frac{h}{m_2}} + \frac{\frac{h}{m_1} - \frac{h}{m_4}}{\frac{h}{m_3} - \frac{h}{m_4}} = 0$$

Şi dezvoltând, simplificând cu h, cu m_3 şi m_1, avem:

$$2\,(m_1\, m_3 + m_2\, m_4) = (m_1 + m_3)\,(m_2 + m_4), \qquad \text{(b)}$$

care este relaţia dintre coeficienţiii unghiulari ai dreptelor ce formează un fascicol armonic. (O M_1 şi O M_3 conjugate armonic cu O M_2, O M_4).

Când cele patru drepte sunt reprezentate de ecuaţiile:

$$A\,x^2 + 2\,B\,xy + C\,y^2 = 0, \quad A'x^2 + 2\,B'xy + C'y^2 = 0,$$

şi voim să găsim condiţia ca cele două dintâi drepte să fie conjugate cu cele două din urmă, vom înlocui în (b) pe m, m_3 din ecuaţia:

$$C\,m^2 + 2\,B\,m + A = 0.$$

şi pe m_2, m_4 din ecuaţia:

$$C'm^2 + 2\,B'm + A' = 0.$$

Vom obţine condiţia cerută, adică:

$$2\left(\frac{A}{C} + \frac{A'}{C'}\right) = \frac{2\,B}{C} \cdot \frac{2\,B'}{C'},$$

sau:

$$AC' + CA' = 2\,B\,B'.$$

Exerciţii.

1. Fiind dat fascicolul:

$$A x^3 + B x^2 y + C x y^2 + D y^3 = 0,$$

să se afle condiţia ca axa Ox şi una din aceste drepte să fie bisectoarele unghiurilor formate de celelalte două.

R. Ox şi OD_3 fiind bisectoare, urmează că $D = 0$, $m_1 + m_2 = 0$, $B = 0$. Dreptele sunt:

$$A x^3 - C x y^2 = 0.$$

2. Să se afle condiţia ca axa Ox şi una din dreptele fascicolului:

$$A x^3 + B x^2 y + C x y^2 y + D y^3 = 0,$$

Să fie conjugate armonic în raport cu celelalte două.

R. $2 (m_1 m_2 + m_3 m_4) = (m_1 + m_2)(m_3 + m_4), \qquad m_4 = 0.$

$$(m_1 + m_2) \cdot m_3 = 2 m_1 m_2,$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = -\frac{C}{D},$$

$$(m_1 + m_2) m_3 + m_1 m_2 = \frac{B}{D},$$

$$m_1 m_2 m_3 = -\frac{A}{D}.$$

$$3 m_1 m_2 = \frac{B}{D}, \quad m_3 = -\frac{3A}{B}, \quad m_1 + m_2 = -\frac{2B^2}{9AD}.$$

$$\frac{2B^2}{9AD} + \frac{3A}{B} = \frac{C}{D}.$$

3. Find dat fascicolul de drepte:

$$A x^4 + B x^3 y + C x^2 y^2 + D x y^3 + E y^4 = 0,$$

să se afle condiţia:

a) ca două din razele fascicolului să fie perpendiculare;
b) ca fascicolul să fie format din două perechi de drepte perpendiculare.

R. a) $$m_1 m_2 = -1,$$

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = -\frac{D}{E},$$

$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + m_1 m_2 + m_3 m_4 = \frac{C}{E},$$

$$m_1 m_2 (m_3 + m_4) + m_3 m_4 (m_1 + m_2) = -\frac{B}{E},$$

$$m_1 m_2 m_3 m_4 = \frac{A}{E}.$$

Se calculează : $m_1 m_2 = -1$, $m_3 m_4 = -\frac{A}{E}$,

$$m_1 + m_2 \ , \ m_3 + m_4,$$

şi înlocuind în a treia, obţinem :

$$(B+D)(BE + AD) + (C+A+E)(A-E)^2 = 0.$$

b) $m_1 m_2 = -1$, $m_3 m_4 = -1$. $A = E$, $B = -D$.

Ecuţia coeficienţilor unghiulari este:

$$A\left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right) - B\left(m - \frac{1}{m}\right) + C = 0.$$

Se pune :

$$m - \frac{1}{m} = z,$$

şi se rezolvă.

4. OD_1, OD_2, OD_3 fiind dreptele :

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = 0,$$

să se afle condiţia astfel ca OD_1 şi OD_2 să fie simetrie în raport cu Ox, iar unghiul dreptelor OD_1, OD_2 să fie egal cu al dreptelor OD şi Ox.

simetrice

R. $m_1 + m_2 = 0$, $\quad m_3 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$BC = AD$, $\quad m_1 = -\frac{A + C}{D}$, $\quad m_2 = \frac{A+C}{D}$, $\quad m_3 = \frac{-C}{D}$.

Se mai obsearvă că dreapta OD_1 este bisectoarea unghiului dreptelor Ox şi OD_3, sau că unghiurile $D_3 O D_1 = D_1 O x = x O D_2$.

Cercul.

50. **Ecuaţia cercului.** Pentru a găsì ecuaţia cercului se întrebuinţează metoda generală care constă în a exprimà algebric proprietatea geometrică care defineşte curba.

Astfel, un cerc cu centrul în C (a, b) şi cu raza R, este locul geometric al punctelor M (x, y) egal depărtate de punctul C. Axele fiind **perpendiculare,** ecuaţia acestui cerc este:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

sau dezvoltând:

A C D E F

$$x^2 + y^2 - 2\,a\,x - 2\,b\,y + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \qquad (2)$$

Prin urmare, fiind dată ecuaţia generală de gradul al doilea:

$$f(x, y) = Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,D\,x + 2\,Ey + F = 0. \qquad (3)$$

condiţiile ca acestă ecuaţie să reprezinte un cerc, se găsesc exprimând că această ecuaţie şi (2) sunt de aceiaşi formă, adică:

$$A = C, \quad B = 0,$$

sau, *coeficienţii lui* **x²** *şi* **y²** *din ecuaţia* (3) *să fie egali, iar termenul cu* **xy** *să lipsească.*

51. **Determinarea centrului şi razei unui cerc.** Fie:

$$Ax^2 + Ay^2 + 2\,Dx + 2\,E\,y + F = 0$$

ecuaţia unui cerc. Această ecuaţie se poate pune sub forma:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}\,x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0. \qquad (I)$$

sau :

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A}.$$

Comparând această ecuaţie cu (1), care este a unui cerc cu centrul în (a, b) şi de rază R, se deduce că centrul cercului reprezentat de ecuaţia (I), are coordonatele:

$$\left(-\frac{D}{A},\ -\frac{E}{A}\right),$$

iar raza sa este dată de relaţia :

$$R^2=\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A}.$$

Prin urmare, fiind dat cercul

$$x^2+y^2+2\,a\,x+2\,b\,y+c=0. \qquad \text{(II)}$$

coordonatele centrului său vor fi : $(-a,\ -b)$, iar raza r este dată de;

$$r^2=a^2+b^2-c,$$

adică, *coordonatele centrului sunt jumătăţile coeficienţilor lui* **x** *şi* **y** *din ecuaţia cercului adusă la forma* (II), *iar pătratul razei este egal cu suma pătratelor coordonatelor aflate, minus termenul liber.*

Exemplu. Să se construiască cercul:

$$x^2+y^2-2x-y-1=0.$$

Coordonatele centrului sunt :

$$\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$$

iar raza este dată de:

$$R^2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{9}{4};\qquad R=\frac{3}{2}$$

52 **Intersecţia unei drepte cu un cerc.** Fie:

$$f(x, y)\equiv x^2+y^2+2\,a\,x+2\,b\,y+c=0.$$

ecuaţia unui cerc şi M_0 (x_0, y_0) un punct dat în plan prin care trece o dreaptă care face cu Ox unghiul cunoscut Θ. Vom cercetà în câte puncte taie această dreaptă cercul.

Fie M (x, y) un punct comun dreptei şi cercului. Insemnând cu $\overline{M_0 M} = r$, distanţa dela punctul dat M_0 până la punctul M, coordonatele punctului M (x, y) vor fi (§. 24):

$$x = x_0 + r \cos \Theta, \qquad y = y_0 + r \sin \Theta$$

Punctul M se va cunoaşte când se va determinà valoarea lui r; pentru aceasta, vom scrie că valorile coordonatelor punctului M verifică ecuaţia cercului (căci punctul M aparţine şi cercului). Avem:

$$(x_0 + r \cos \Theta)^2 + (y_0 + r \sin \Theta)^2 + 2a(x_0 + r \cos \Theta) + 2b(y_0 + r \sin \Theta) + c = 0.$$

De unde obţinem:

$$r^2 + 2r(x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta + a \cos \Theta + b \sin \Theta) + x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = 0$$

Această ecuaţie fiind de gradul al doilea în raport cu r, avem două valori pentru r, anume r' şi r'', astfel că sunt două puncte M′ şi M″ comune cercului şi dreptei date, iar coordonatele acestor puncte de intersecţie sunt:

$$M'(x_0 + r' \cos \Theta, y_0 + r' \sin \Theta), \quad M''(x_0 + r'' \cos \Theta, y_0 + r'' \sin \Theta).$$

Prin urmare, în general, o dreaptă taie un cerc în două puncte.

53 **Puterea unui punct faţă de un cerc.** Am văzut că o dreaptă ce trece prin punctul dat M_0 (x_0, y_0) şi face cu Ox unghiul Θ, taie cercul:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

în două puncte:

$$M'(x_0 + r' \cos \Theta, y_0 + r' \sin \Theta), \quad M''(x_0 + r'' \cos \Theta, y_0 + r'' \sin \Theta),$$

astfel că: $r' = \overline{M_0 M'}$, $r'' = \overline{M_0 M''}$ sunt rădăcinele ecuaţii:

$$r^2 + 2r(x_0 \cos \Theta + y_0 \sin \Theta + a \cos \Theta + b \sin \Theta) + x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = 0.$$

Produsul rădăcinilor acestei ecuaţii fiind:

$$x_0^2 + y_0^2 + 2\,ax_0 + 2\,by_0 + c,$$

rezultă că:

$$\overline{M_0M'}\cdot\overline{M_0M''} = x_0^2 + y_0^2 + 2\,ax_0 + 2\,by_0 + c.$$

Această relaţie probează că ori ce secantă vom duce prin punctul $M_0\,(x_0, y_0)$, produsul distanţelor dela punctul M_0 la cele două puncte de intersecţie ale secantei cu cercul este constant.

Acest produs se numeşte *puterea punctului* $M_0\,(x_0, y_0)$ *în raport cu cercul* dat şi se obţine înlocuind în ecuaţia cercului coordonatele curente x şi y prin coordonatele punctului M_0.

54. **Ecuaţia tangentei într'un punct al unui cerc.** Fie $M_0\,(x_0, y_0)$ un punct al cercului:

$$f\,(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2\,ax + 2\,by + c = 0;$$

prin urmare:

$$x_0^2 + y_0^2 + 2\,ax_0 + 2b\,y_0 + c = 0.$$

Să găsim ecuaţia tangentei în punctul M_0 la cerc. Dacă s'ar cunoaşte coeficientul unghiular: $m = \operatorname{tg}\alpha$, al acestei drepte, ecuaţia tangentei va fi:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0).$$

Pentru a determină pe m, vom scrie că această dreaptă taie cercul în două puncte confundate în M_0. Aceasta o putem face în modul următor. Să însemnăm cu:

$$x = x_0 + r\cos\alpha,\quad y = y_0 + r\sin\alpha,\quad r = \overline{M_0M}.$$

coordonatele unui punct M de intersecţie al acestei drepte cu cercul. Coordonatele sale verifică ecuaţia cercului şi deci avem:

$$(x_0 + r\cos\alpha)^2 + (y_0 + r\sin\alpha)^2 + 2\,a\,(x_0 + r\cos\alpha) + 2\,b\,(y_0 + r\sin\alpha) + c = 0;$$

de unde obţinem ecuaţia:

$$r^2 + 2r\,(x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha + a\cos\alpha + b\sin\alpha) + x_0^2 + y_0^2 + 2\,a x_0 + 2\,b y_0 + c = 0, \quad (1)$$

care dă valorile lui r, corespunzătoare punctelor de intersecţie.
Insă avem:

$$x_0^2 + y_0^2 + 2\,a x_0 + 2b\,y_0 + c = 0,$$

căci punctul M_0 (x_0, y_0) este pe cerc, şi deci ecuaţia (1) devine:

$$r^2 + 2r\,[(x_0 + a)\cos\alpha + (y_0 + b)\sin\alpha] = 0.$$

Aşà dar, o valoare a lui r este egală cu zero, ceea ce trebuià, căci unul din puncte de intersecţie se confundă cu M_0.

Pentru ca dreapta considerată să fie tangentă în M_0, trebue ca şi cel deal doilea punct de intersecţie să se confunde cu M_0, adică şi cealaltă valoare a lui r să fie zero; aceasta are loc când:

$$(x_0 + a)\cos\alpha + (y_0 + b)\sin\alpha = 0.$$

De unde:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{x_0 + a}{y_0 + b}.$$

Coeficientul unghiular al tangentei fiind determinat, ecuaţia tangentei în M_0, (x_0, y_0) este:

$$y - y_0 = -\frac{x_0 + a}{y_0 + b}(x - x_0), \quad (2)$$

având în vedere condiţia:

$$x_0^2 + y_0^2 + 2\,a\,x_0 + 2\,b\,y_0 + c = 0, \quad (3)$$

care arată că punctul M_0 este pe cerc.

Făcând calculele în ecuaţia (2), avem:

$$x_0\,x + y_0\,y + a\,x + b\,y - x_0^2 - y_0^2 - a\,x_0 - b\,y_0 = 0.$$

Ţinând seamă de relaţia (3), ecuaţia tangentei în M_0 (x_0, y_0) la cercul:

$$x^2 + y^2 + 2\,ax + 2\,by + c = x.x + y.y + a\,(x + x) + b\,(y + y) + c = 0,$$

este:

$$x_0\,x + y_0\,y + a(x_0 + x) + b(y_0 + y) + c = 0,$$

iar regula după care se formează ecuaţia acestei tangente din ecuaţia cercului este evidentă.

Observare. Coeficientul unghiular al tangentei în M_0 (x_0, y_0) fiind :

$$- \frac{x_0 + a}{y_0 + b},$$

urmează ca tangenta este perpendiculară pe raza punctului M_0 şi că valoarea coeficientului unghiular este :

$$- \frac{f'_x (x_0, y_0)}{f'_y (x_0, y_0)},$$

care este o verificare a celor ştiute, că *valoarea coeficientului unhiular al tangentei la curba :*

$$f (x, y) = 0$$

este :

$$y' = - \frac{f'_x}{f'_y},$$

iar la o curbă :

$$y = f (x),$$

coeficientul unghiular al tangentei este :

$$y' = f' (x).$$

Exemplu. Ecuaţia tangentei în punctul (1, 1) al cercului :

$$x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0,$$

este :

$$y - 1 = - \frac{1 - 1}{1 + \frac{1}{2}} (x - 1),$$

sau :

$$x. 1 + y. 1 - (1 + x) + \frac{1}{2} (1 + y) - 1 = 0,$$

$$y - 1 = 0.$$

55. **Intersecţia a două cercuri.** Fie O şi O′ două cercuri cu centrele în punctele O şi O′ şi cu razele R şi R′; să însemnăm cu $d = OO'$, distanţa centrelor.

Să luăm ca axă $O\,x$ linia centrelor, OO', ca axă $O\,y$ perpendiculara în O pe OO'.

Ecuațiile celor două cercuri sunt:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \; (x - d)^2 + y^2 - R'^2 = 0 \qquad (a)$$

Pentru a găsi punctele lor de intersecție, va trebui să cunoaștem coordonatele acestor puncte. Vom rezolva deci ecuațiile acestor cercuri, în raport cu x și y. Ecuația a doua poate fi însă înlocuită prin aceea ce se obține scăzând ecuațiile (a), adică:

$$2\,d\,x - d^2 - R^2 + R'^2 = 0, \qquad (b)$$

sau:

$$x = \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2\,d}$$

Ecuația (b) reprezintă o dreapta D paralelă cu axa $O\,y$. Problema revine deci la găsirea punctelor de intersecție ale cercului O cu dreapta D. O dreaptă însă taie, în general, un cerc în două puncte și anume, dacă distanța dela centrul cercului la dreaptă este mai mică de cât raza, atunci dreapta taie cercul în două puncte reale; dacă distanța este mai mare ca raza, dreapta nu taie cercul, sau, după cum se mai zice, dreapta taie cercul în două puncte imaginare; dacă, în sfârșit, distanța centrului la dreaptă este egală cu raza cercului, dreapta taie cercul în două puncte confundate într'unul singur, dreapta e tangentă la cerc.

Distanța de la origină la această dreaptă fiind:

$$\pm \frac{R'^2 - R^2 - d^2}{2\,d},$$

pentru ca dreapta să taie cercul O, va trebui să avem:

$$\pm \frac{R'^2 - R^2 - d^2}{2\,d} < R,$$

sau:

$$\frac{d^2 + 2\,d\,R + R^2 - R'^2}{2\,d} > 0, \quad \frac{d^2 - 2\,d\,R + R^2 - R'^2}{2\,d} < 0.$$

Presupunând $d > 0$, ceea ce totdeauna putem face, trinomul:

$$d^2 + 2\,d\,R + R^2 - R'^2$$

este pozitiv, când d este exterior intervalului rădăcinilor, adică:

$$d > R' - R;$$

iar pentru ca să avem:

$$d^2 - 2\,d\,R + R^2 - R'^2 < 0,$$

trebue:

$$d < R + R'.$$

Aşa dar, cercurile O şi O' se vor tăia în două puncte reale, când dreapta D va tăia cercul O, sau când:

$$d > R' - R, \qquad d < R + R',$$

adică: distanţa centrelor să fie mai mică ca suma razelor, sau mai mare ca diferenţa lor.

56. **Polara unui punct faţă de un cerc.** Să găsim ecuaţia polarei punctului M_0 (x_0, y_0) în raport cu cercul:

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2\,a\,x + 2\,b\,y + c = 0.$$

Fie (Fig. 24) M_1 (x_1, y_1) un punct al polarei punctului M_0; punctele M_1 şi M_0 sunt conjugate armonic în raport cu punctele de intersecţie $M'(x', y')$, M'' (x'', y'') ale dreptei M_1M_0 cu cercul. Insă coordonatele unui punct al dreptei M_1 M_0, definită

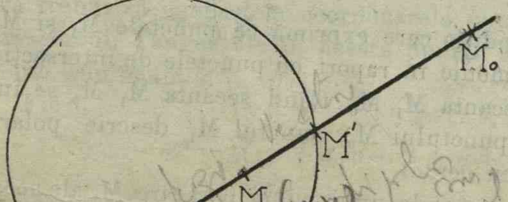


Fig. 24.

prin punctele M_1 şi M_0, fiind:

$$x = \frac{x_1 + \lambda\,x_0}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda\,y_0}{1 + \lambda},$$

pentru ca acest punct să fie unul din punctele M′ sau M″, trebue ca ecuaţia cercului să fie verificată de coordonatele acestui punct, adică:

$$f\left(\frac{x_1 + \lambda x_0}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_0}{1 + \lambda}\right) = 0.$$

Dezvoltând, obţinem:

$$\lambda^2 (x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c) + 2\lambda\left[x_1 x_0 + y_1 y_0 + a(x_1 + x_0) + b(y_1 + y_0) + c\right] + x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + c = 0.$$

Această ecuaţie fiind de gradul al doilea în raport cu λ, valorile lui λ corespunzătoare punctelor M′ şi M″ sunt rădăcinile λ' şi λ'' ale acestei ecuaţii. Coordonatele punctelor M′ şi M″ vor fi:

$$M'\left(\frac{x_1 + \lambda' x_0}{1 + \lambda'}, \frac{y_1 + \lambda' y_0}{1 + \lambda'}\right) \quad M''\left(\frac{x_1 + \lambda'' x_0}{1 + \lambda''}, \frac{y_1 + \lambda'' y_0}{1 + \lambda''}\right).$$

Insă punctele M_1 şi M_0 fiind conjugate în raport cu M′ şi M″ şi punctele M′ şi M″ sunt conjugate armonic în raport cu M_1 şi M_0; deci (§. 16, II):

$$\lambda' = -\lambda'', \quad \lambda' + \lambda'' = 0,$$

sau:

$$x_0 x_1 + y_0 y_1 + a(x_0 + x_1) + b(y_0 + y_1) + c = 0. \tag{1}$$

Aceasta este condiţia care exprimă că punctele M_1 şi M_0 sunt conjugate armonic în raport cu punctele de intersecţie ale cercului cu secanta $M_1 M_0$. Când secanta $M_1 M_0$ se învârteşte în jurul punctului M_0, punctul M_1 descrie polara lui M_0 în raport cu cercul.

Coordonatele (x_1, y_1) ale unui punct oarecare M_1 ale acestei polare verificând relaţia (I), rezultă că ecuaţia polarei punctului M_0 (x_0, y_0), în raport cu cercul:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

este:

$$x_0 x + y_0 y + a(x_0 + x) + b(y_0 + y) + c = 0.$$

Observare. Ecuaţia polarei unui punct M_0 (x_0, y_0) este tocmai ecuaţia tangentei în M_0 (x_0, y_0) la cerc, când punctul

M_0 este pe cerc; deci, polara unui punct al unui cerc, în raport cu acest cerc, este tangenta în acel punct la cerc.

57. **Aplicaţie.** *Să se găsească coordonatele polului* P (x_0, y_0) *a cărui polară în raport cu cercul:*

$$x^2 + y^2 + 2\,a\,x + 2\,b\,y + c = 0$$

este reprezentată de ecuaţia:

$$A\,x + B\,y + C = 0.$$

Polara punctului P (x_0, y_0) fiind:

$$x_0\,x + y_0\,y + a\,(x_0 + x) + b\,(y_0 + y) + c = x\,(a + x_0) + y\,(b + y_0) + a\,x_0 + b\,y_0 + c = 0,$$

pentru a găsi coordonatele polului, vom scrie că ecuaţiile dreptei date şi polarei reprezintă aceiaşi dreaptă, adică au coeficienţii proporţionali. Deci:

$$\frac{x_0 + a}{A} = \frac{y_0 + b}{B} = \frac{a\,x_0 + b\,y_0 + c}{C}.$$

Rezolvând aceste două ecuaţii, găsim coordonatele polului (x_0, y_0).

58. **Tangente duse dintr'un punct la un cerc.** Pentru a găsi ecuaţiile tangentelor duse dintr'un punct la un cerc, va trebui să cunoaştem coordonatele punctelor de contact cu cercul. Tangentele în aceste puncte de contact la cerc sunt cele căutate.

Fie:

$$x^2 + y^2 + 2\,a\,x + 2\,b\,y + c = 0$$

ecuaţia unui cerc şi P (x_1, y_1) un punct dat.

Insemnând cu $(x'\ y')$ coordonatele unui punct de contact a unei tangente duse din P la cerc, ecuaţia tangentei la cerc în acest punct este:

$$x'x + y'y + a\,(x' + x) + b\,(y' + y) + c = 0.$$

Pentru ca această tangentă să fie cea căutată, trebue să treacă prin punctul P (x_1, y_1) şi deci să avem:

$$x'x_1 + y'y_1 + a\,(x' + x_1) + b\,(y' + y_1) + c = 0. \qquad (1)$$

Prin urmare coordonatele (x', y') ale punctului de contact verifică ecuaţia (1) şi aceia a cercului:

$$x'^2 + y'^2 + 2\,a\,x' + 2\,b\,y' + c = 0. \qquad (2)$$

Rezolvând ecuaţiile (1) şi (2) în raport cu x' şi y', găsim două valori pentru x' şi două pentru y' şi deci două puncte de contact: (x', y'), (x'', y'').

Aşa dar, dintr'un punct P (x_1, y_1) se pot duce în general la un cerc două tangente, ale căror ecuaţii sunt:

$$x'x + y'y + a\,(x' + x) + b\,(y' + y) + c = 0'$$
$$x''x + y''y + a\,(x'' + x) + b\,(y'' + y) + c = 0.$$

Observare. Se mai puteà găsì coordonatele punctelor de contact ale tangentelor, observând că polara punctului P în raport cu cercul, este dreapta care uneşte punctele de contact ale cercului cu cele două tangente duse din punctul P la cerc. Deci, se scrie ecuaţia polarei punctului P (x_1, y_1) şi anume:

$$x_1x + y_1y + a\,(x_1 + x) + b\,(y_1 + y) + c = 0$$

şi se rezolvă această ecuaţie şi aceia a cercului în raport cu x şi y, care sunt tocmai ecuaţiile (1) şi (2) de mai sus. Valorile (x', y'), (x'', y'') corespund celor două puncte de contact, adică de intersecţie ale polarei cu cercul.

Exemplu. Să se găsească ecuaţiile tangentelor duse din punctul P (2, 1) la cercul:

$$x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y + 4 = 0.$$

Ecuaţia polarei punctului P fiind:

$$2\,x + y - (2 + x) + 2\,(1 + y) + 4 = x + 3\,y + 4 = 0,$$

rezolvând ecuaţiile cercului şi polarei, coordonatele punctelor de contact sunt:

$$x' = -1,\ y' = -1;\ x'' = 3,2,\ y'' = -2,4.$$

Tangentele vor avea ecuaţiile:

$$x\,x' + y\,y' - (x' + x) + 2\,(y' + y) + 4 = 0,$$
$$x\,x'' + y\,y'' - (x'' + x) + 2\,(y'' + y) + 4 = 0.$$

59. **Tangente paralele cu o direcţie dată.** Fiind dat cercul:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

să găsim ecuaţia tangentelor, duse la acest cerc, paralele cu dreapta:

$$y = m x + n.$$

Fie:

$$y = m x + \lambda$$

ecuaţia unei drepte paralelă cu dreapta dată. Pentru ca această dreaptă să fie tangentă la cerc, trebue ca să taie cercul în două puncte confundate. Inlocuind în ecuaţia cercului pe y cu: $m x + \lambda$, scoasă din ecuaţia dreptei, avem:

$$x^2 (1 + m^2) + 2 m \lambda x + \lambda^2 - R^2 = 0.$$

Scriind că această ecuaţie are o rădăcină dublă, găsim:

$$m^2 \lambda^2 - (1 + m^2)(\lambda^2 - R^2) = 0,$$

de unde:

$$\lambda^2 = R^2 (1 + m^2), \ \lambda = \pm R \sqrt{1 + m^2}.$$

Ecuaţiile celor două tangente sunt deci:

$$y = m x \pm R \sqrt{1 + m^2}.$$

60. **Tangente duse dintr'un punct** P (x_1, y_1) **la cercul:** $x^2 + y^2 = R^2$. Pentru a găsì ecuaţia tangentelor duse din punctul P la acest cerc, vom găsì ecuaţia ce dă direcţiile acestor tangente.

Insemnând cu (§ 59):

$$y = m x \pm R \sqrt{1 + m^2}$$

ecuaţia unei tangente la cercul dat, paralelă cu direcţia m, pentru ca această dreaptă să fie tangenta dusă din P (x_1, y_1) la cerc, trebue ca să treacă prin punctul P (x_1, y_1) şi deci să avem:

$$y_1 = m x_1 \pm R \sqrt{1 + m^2}.$$

De unde:

$$m^2 (x_1^2 - R^2) - 2 m x_1 y_1 + y_1^2 - R^2 = 0,$$

care este ecuaţia ce dă cele două valori m', m'' ale coeficienţilor unghiulari ale tangentelor duse din P (x_1, y_1) la cerc. Ecuaţiile celor două tangente vor fi:

 $m' = \frac{y-y_1}{x-x_1}$

$$y-y_1 = m'(x-x_1),$$

$$y-y_1 = m''(x-x_1),$$

adică drepte ce trec prin punctul P (x_1, y_1) şi paralele cu direcţiile m' şi m''.

Aplicaţie. *Să se găsească locul punctelor de unde se poate duce tangente perpendiculare la cercul* $x^2+y^2=R^2$. Fie (x_1, y_1) un punct al locului geometric. Ecuaţia coeficienţilor unghiulari ai tangentelor fiind (§. 60) :

$$m^2(x_1^2-R^2)-2\,mx_1\,y_1+y_1^2-R^2=0,$$

condiţia, ca dreptele ai căror coeficienţi unghiulari sunt m' *şi* m'' (rădăcinile acestei ecuaţii), să fie perpendiculare, este :

$$m'\,m''+1=0, \quad \frac{y_1^2-R^2}{x_1^2-R^2}+1=0.$$

De unde :

$$x_1^2+y_1^2-2\,R^2=0.$$

care probează că locul punctelor P (x_1, y_1) de unde se duce la cercul $x^2+y^2-R^2=0$ tangente perpendiculare, este cercul :

$$x^2+y^2-2\,R^2=0.$$

61. **Centre de asemănare la două cercuri. Tangente comune la două cercuri.** Fie :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \quad (x-a')^2+(y-b')^2=R'^2$$

ecuaţiile a două cercuri de centre C (a, b), C′ (a', b') şi de raze R şi R′. Insemnând cu S′(x', y'), S″ (x'', y'') centrele de asemănare extern şi intern a acestor două cercuri, pentru a găsì coordonatele acestor centre de asemănare, să observăm că T şi T′ fiind punctele de contract ale tangentelor, triunghiurile S′CT, S′C′T′, obţinute ducând tangenta comună exterioară din S′, sunt asemenea, deci:

$$\frac{CS'}{C'S'}=\frac{R}{R'}, \quad \frac{CS'}{S'C'}=\frac{-R}{R'}.$$

Cunoscând raportul ~~după~~ în care punctul S′ înparte dreapta CC′, coordonatele sale vor fi :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{a - \frac{R}{R'} a'}{1 - \frac{R}{R'}} = \frac{aR' - a'R}{R' - R}, \quad y = \frac{bR' - b'R}{R' - R}.$$

In acelaş mod se găsesc coordonatele:

$$\frac{aR' + a'R}{R' + R}, \quad \frac{bR' + b'R}{R' + R}$$

al centrului de asemănare intern.

Observare. Din expresia coordonatelor punctelor S′ şi S″, se vede că aceste puncte sunt conjugate armonic în raport cu centrele acestor cercuri.

Ecuaţia unei tangente comune se scrie căutând mai întâi coordonatele punctelor de contact, adică intersecţiile unuia din cercuri, C, de ex., cu polara lui S′, în raport cu acest cerc şi apoi scriind tangentele la acest cerc în punctele găsite.

62. **Axul radical a două cercuri.** Se ştie că axul radical a două cercuri C, C′

$$C \equiv x^2 + y^2 + 2\,ax + 2\,by + c = 0,$$
$$C' \equiv x^2 + y^2 + 2\,a'x + 2\,b'y + c' = 0,$$

este locul punctelor care au puteri egale faţă de aceste două cercuri.

$M_0\ (x_0, y_0)$ fiind un punct al locului geometric, ecuaţia acestui loc va fi:

$$x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = x_0^2 + y_0^2 + 2\,a'x_0 + 2b'y_0 + c'.$$

Scriind în loc de (x_0, y_0) x şi y, ceeace însemnează ca ori ce punct $M(x, y)$ al locului se bucură de aceiaşi proprietate ca şi $M_0\ (x_0, y_0)$, ecuaţia axului radical este:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c',$$

sau dreapta:

$$2x\ (a - a') + 2y\ (b - b') + c - c' = 0.$$

Această ecuaţie a axului radical se vede că se poate obţine scăzând membru cu membru ecuaţiile celor două cercuri date.

Se mai observă, din ecuaţiile cercurilor şi axului radical, că această dreaptă este perpendiculară pe linia centrelor şi trece prin punctele comune de intersecţie ale celor două cercuri, adică coincide cu coarda comună a acelor cercuri, dacă cercurile sunt secante.

In general, ecuaţia:

$$x^2+y^2+2ax+2by+c+\lambda(x^2+y^2+2a'x+2b'y+c')=0, \quad (1)$$

unde λ este un parametru variabil, reprezintă o familie de cercuri care trec toate prin punctele de intersecţie ale celor două cercuri, adică sunt o familie de cercuri care au acelaş ax radical.

Printre curbele reprezentate de ecuaţia (1), există şi:

$$x^2+y^2+2ax+2by+c-(x^2+y^2+2a'x+2b'y+c')=0$$

care se obţine dând lui λ valoarea -1 şi este tocmai ecuaţia coardei comune, sau a axului radical acelor două cercuri.

Exemplu. Axul radical al cercurilor

$$x^2+y^2-6x-10y+30=0,$$

$$x^2+y^2+2x-4y-4=0$$

se obţine scăzând ecuaţiile şi se obţine:

$$8x+6y-34=0,$$

$$4x+3y-17=0.$$

63. **Aplicaţii.** 1. *Să se afle ecuaţia cercurilor ce trec prin origina axelor de coordonate şi punctul* (4,—5).

Ecuaţia cercurilor ce trec prin origină este:

$$x^2+y^2+2\lambda x+2\mu y=0,$$ $x^2+y^2+2\lambda x+2\mu y=0$

$x^2+y^2+2ax+2by=0$

λ şi μ find necunoscute; scriind că acest cerc trece prin punctul (4,—5), avem: unde (a, b) sunt coordonatele centrului.

$$4^2+(-5)^2+2\lambda(+4)+2\mu(-5)=0.$$

De unde:

$$2\lambda = \frac{10\mu - 41}{4},$$

iar ecuaţia cercurilor va fi:

$$x^2 + y^2 + \frac{10\mu - 41}{4} x + 2\mu y = 0$$

II. *Să se afle ecuaţia cercului cu centrul în punctul* (3,—2) *şi tangent dreptei:* $2x + 3y - 36 = 0$.

λ = R (raza)

a = 2 b

a' = 3 b'

Ecuaţia cercului căutat va fi:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = \lambda^2.$$

Raza λ a acestui cerc se determină scriind că este egală cu distanţa dela centru la dreapta dată. Să găseşte:

$$\lambda = \frac{2.3 + 3(-2) - 36}{\sqrt{4+9}} = -\frac{36}{\sqrt{13}}.$$

$$R = \frac{a.a' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ecuaţia cercului este:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = \frac{36^2}{13}.$$

III. *Să se afle ecuaţia unui cerc tangent axei Oy în origina axelor.*

Insemnând cu A (a, o) centrul cercului, raza este egală cu a, iar ecuaţia cercului este:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

IV. *Să se afle ecuaţia unui cerc care trece prin origină, prin punctul* (2, o) *şi tangent cercului:*

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16 = r^2$$

Ecuaţia cercului căutat e de forma

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Trecând prin origină, ecuaţia este verificată pentru (0, 0); deci:

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

iar ecuaţia cercului devine:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Trecând şi prin punctul (2, 0), urmează că:

$$4 - 4\,\alpha = 0, \qquad \alpha = 1$$

şi deci ecuaţia cercului este:

$$x^2 + y^2 - 2\,x - 2\,\beta\,y = 0.$$

Fiind tangent cercului:

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16,$$

distanţa centrelor este egală cu suma sau diferenţa razelor; deci:

$$r \pm 4 = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - \beta)^2},$$

unde înlocuind pe r cu $\sqrt{1 + \beta^2}$, obţinem:

$$\sqrt{1 + \beta^2} \pm 4 = \sqrt{25 - 6\,\beta + \beta^2}.$$

Ridicând la pătrat avem:

$$\pm\, 4\sqrt{1 + \beta^2} = 4 - 3\,\beta;$$

ridicând din nou la pătrat şi rezolvând ecuaţia de gradul al doilea în β, găsim:

$$\beta = 0, \; \beta = -\frac{24}{7}.$$

Prin urmare, sunt două cercuri care corespund enunciului:

$$x^2 + y^2 - 2\,x = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2\,x + \frac{48}{7}\,y = 0.$$

Observare. Se mai putea găsi condiţia că cercurile să fie tangente, scriind că distanţa unuia din centrele cercurilor la axul lor radical (tangenta comună) este egală cu raza acelui cerc.

V. *α şi β fiind coordonatele unui punct P din plan să se găsească curba pe care trebue să se găsească punctul P, astfel ca dreptele*

$$2\,x - \alpha\,y = \beta, \qquad \beta\,x - 3\,y = \alpha,$$

să se taie pe bisectoarea întâi a axelor de coordonate.

a.b
a⊤b
a⊥b

Va trebui să scrim că dreptele

$$2\,x - \alpha\,y - \beta = 0,$$
$$\beta\,x - 3\,y - \alpha = 0,$$
$$x - y \quad = 0$$

sunt concurente. Deci:

$$\begin{vmatrix} 2 & -\alpha & -\beta \\ \beta & -3 & -\alpha \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

de unde

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha - 3\,\beta = 0.$$

Puuctul P (α, β) trebue să descrie cercul:

$$x^2 + y^2 - 2\,x - 3y = 0,$$

ce trece prin origină.

VI. *Fiind date punctele fixe* A *şi* B, *să se afle locul geometric al punctelor* M, *astfel că unghiul* AMB *să fie constant.*

Luăm ca Ox dreapta AB şi ca Oy perpendiculara pe mijlocul lui AB. Să notăm cu A (a, o), B $(-a, o)$ punctele date. Coordonatele punctului M să le însemnăm cu (x, y) căci se cere locul punctului M, o relaţie între x şi y şi nu este nevoe de eliminat aceste cantităţi. Dacă ar fi trebuit să le eliminăm, le notam cu literile λ, μ, .., α, β, γ, ...

Să scrim că unghiul AMB e constant, adică tangenta acestui unghi este egală cu K. Coeficienţii unghiulari ai dreptelor AM şi MB sunt:

$$m = \frac{y}{x - a}, \qquad m' = \frac{y}{x + a}.$$

Ecuaţia locului se obţine înlocuind în relaţia

$$\mathrm{K} = \mathrm{tg\ AMB} = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

De unde:

$$\frac{\dfrac{y}{x - a} - \dfrac{y}{x + a}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2 - a^2}} = \mathrm{K},$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2a}{K} y - a^2 = 0.$$

Locul geometric al punctului M este un cerc cu centrul pe Oy, trecând prin A şi B.

VII. *Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care taie două cercuri date la capetele unui diametru (axele lor radicale sunt diametre).* Fie:

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2\,a'\,x - 2\,b'\,y + c' = 0$$

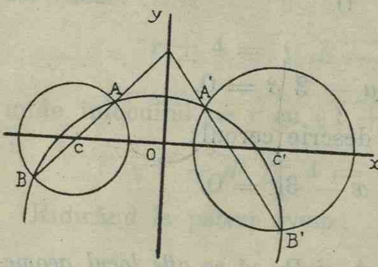


Fig. 25.

ecuaţiile a două cercuri date. Să luăm ca Ox linia centrelor şi ca Oy axul radical al lor; deci $b = 0$, $b' = 0$. Axul radical al cercurilor date este

$$2\,x\,(a - a') + c' - c = 0$$

Ca această dreaptă să fie axa Oy, trebue să aibă o ecuaţie de forma

$$x = 0$$

şi deci

$$c' - c = 0, \qquad c = c'.$$

Ecuaţiile cercurilor date sunt:

$$\mathrm{C} \equiv x^2 + y^2 - 2\,ax + c = 0,$$
$$\mathrm{C}' \equiv x^2 + y^2 - 2\,a'x + c = 0.$$

Fie:

$$\mathrm{C}_1 \equiv x^2 + y^2 - 2\,\alpha\,x - 2\,\beta\,y + \gamma = 0$$

ecuaţia unui cerc cu centrul în punctul (α, β) şi care să taie cercurile C şi C′ la capetele diametrelor AB, A′B′ (Fig. 25). Aceasta se exprimă analitic, scriind că axul radical al cercurilor C_1 şi C trece prin centrul cercului C şi că axul radical al cercurilor C_1 şi C′ trece prin centrul cercului C′

Axele radicale ale cercurilor C şi C_1, C′ şi C_1 fiind:

$$2\,x\,(\alpha - a) + 2\,\beta\,y - \gamma + c = 0,$$
$$2\,x\,(\,\alpha - a') + 2\,\beta\,y - \gamma + c = 0,$$

vom scrie că prima ecuaţie e verificată pentru $x = a$, $y = 0$, iar a doua, pentru $x = a'$, $y = 0$. Obţinem deci

$$2\,a\,(\alpha - a) - \gamma + c = 0,$$
$$2\,a'\,(\alpha - a') - \gamma + c = 0.$$

Va trebuì să eliminăm pe γ între aceste două ecuaţii, care conţin coordonatele α ale unui punct al locului geometric.

Scăzând, avem

$$\alpha - (a + a') = 0.$$

relaţie care probează că locul geometric al centrului (α, β) cercului variabil, este dreapta:

$$x - (\,a + a') = 0.$$

VIII. *Fie* O *unul din punctele comune a două cercuri secante* C *şi* C'. *O dreaptă variabilă dusă prin* O *le taie în* P *şi* P'. *Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului* PP', *când secanta* PP' *se învârteşte în jurul lui* O.

Luând axul lor radical ca axă Oy şi perpendiculara în O ca axă Ox, ecuaţiile cercurilor sunt :

$$C \equiv x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by = 0,$$
$$C' \equiv x^2 + y^2 - 2\,a'x - 2\,by = 0.$$

Ecuaţia unei secante ce trece prin origină este

$$y = \lambda x.$$

Coordonatele punctelor P şi P' se obţin rezolvând pe rând ecuaţia unui cerc şi a secantei. Se obţine :

$$P\left(\frac{2a + 2b\lambda}{1 + \lambda^2},\ \lambda\,\frac{2a + 2b\lambda}{1 + \lambda^2}\right),\ P'\left(\frac{2a' + 2b\lambda}{1 + \lambda^2},\ \lambda\frac{2a' + 2b\lambda}{1 + \lambda^2}\right)$$

Coordonatele mijlocului M ale segmentului PP' sunt :

$$x = \frac{a + a' + 2\,b\lambda}{1 + \lambda^2},\quad y = \frac{a + a' + 2\,b\lambda}{1 + \lambda^2}\,\lambda. \qquad (1)$$

Locul lui M se obţine eliminând pe λ între aceste ecuaţii. Inpărţindu-le, avem :

$$y = \lambda x, \quad \lambda = \frac{y}{x}.$$

Inlocuind pe λ într'una din ecuaţiile (1), găsim, după ce am simplificat cu y (adică am înlăturat porţiunea din locul geometric format de axa Ox),

$$x^2 + y^2 - (a + a')\, x - 2\, by = 0;$$

deci locul geometric este un cerc ce trece prin origină şi are acelaş ax radical cu cercurile date.

IX. *Fie* CD *polara unui punct fix* P *în raport cu un cerc* O *variabil ce trece prin două puncte fixe* A *şi* B. *Insemnând cu* E *centrul acestui cerc, să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a polarei* CD *cu dreapta* EP.

Luând ca Ox dreapta AB şi perpendiculara pe mijlocul ei ca axă Oy, să notăm : A $(a, 0)$, B $(-a, 0)$, F $(0, \lambda)$, λ variabil. Ecuaţia cercului cu centrul în E şi trecând prin A şi B este :

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = a^2 + \lambda^2,$$

sau :

$$x^2 + y^2 - 2\, \lambda\, y - a^2 = 0. \qquad \text{(I)}$$

Punctul P fiind dat, coordonatele sale sunt (p, q).

Polara acestui punct faţă de cercul (I) este :

$$p\, x + q\, y - \lambda\, (q + y) - a^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Ecuaţia dreptei EP fiind :

$$y - \lambda = \frac{q - \lambda}{p}\, x, \qquad \text{(III)}$$

locul geometric se obţine eliminând pe λ între (II) şi (III).

Aceasta se face scoţând din (II) pe λ şi înlocuind în (III). Avem pentru ecuaţia locului geometric :

$$p\, x^2 + p\, y^2 - (q^2 + p^2 + a^2)\, x + a^2\, p = 0,$$

care probează că acest loc este un cerc cu centrul în punctul :

$$\left(\frac{p^2 + q^2 + a^2}{2\, p},\quad 0\right)$$

şi cu raza egală cu:

$$R^2 = \frac{(p^2 + q^2 + a^2)^2}{4\,p} - a^2\,p.$$

X. *Să se afle ecuaţia cercului circumscris triunghiului ale cărui laturi sunt reprezentate de ecuaţiile*

$$y = 3, \quad x + y + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0.$$

In general, fie

$$D_1 = 0,\ D_2 = 0,\ D_3 = 0$$

ecuaţiile a trei drepte. Ecuaţia

$$D_1\,D_2 + \lambda\,D_2\,D_3 + \mu\,D_3\,D_1 = 0$$

reprezintă o curbă ce trece prin punctele comune dreptelor D_1 şi D_2, D_2 şi D_3, D_3 şi D_1, adică prin vârfurile triunghiului format de aceste trei drepte.

In cazul nostru o curbă circumscrisă triunghiului formal de dreptele

$$y - 3 = 0, \quad x + y + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0$$

este

$$(y-3)(x+y+1) + \lambda(x+y+1)(x-y-1) + \mu(x-y-1)(y-3) = 0,$$

λ şi μ fiind doi parametri variabili. Dezvoltând, avem:

$$\lambda\,x^2 + (1+\mu)\,xy - (1-\lambda-\mu)\,y^2 - 3\,x\,(1+\mu)$$
$$+ 2\,(-1-\lambda+\mu)\,y - 3 - \lambda + 3\,\mu = 0.$$

Pentru ca această curbă să fie un cerc, trebue să avem

$$\lambda = 1 - \lambda - \mu, \quad 1 + \mu = 0;$$

de unde

$$\mu = -1,\ \lambda = 1.$$

Ecuaţia cercului este:

$$x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0.$$

XI. T *fiind punctul de contact al unei tangente variabile la un cerc* O, *să însemnăm cu* C *punctul unde această tangentă taie un diametru fix* AB *al cercului* O. *Să se afle locul geometric al piciorului perpendicularei lăsate din* O *pe bisectoarea unghiului ascuţit* OCT, *când punctul* T *variază pe cercul* O.

Luând diametrul AB ca Ox şi perpendiculara în O ca Oy, ecuaţia cercului O este:

$$x^2+y^2=a^2,\quad OA=a,\quad A(a, o),\quad B(-a, o).$$

Insemnând cu Θ unghiul AOT, *coordonatele unui punct variabil al acestui cerc, se pot exprimà în funcţiune de un parametru variabil*, anume

$$T(x=a\cos\Theta,\quad y=a\sin\Theta)$$

Ecuaţia tangentei în T la cerc fiind

$$x\cos\Theta+y\sin\Theta-a=0,$$

coordonatele punctului C sunt

$$C\left(\frac{a}{\cos\Theta}, 0\right).$$

Ecuaţia bisectoarei unghiului OCT este

$$x\cos\Theta+y\sin\Theta-a\pm y=0.$$

Pentru a vedeà semnul ce trebue luat, vom înlocuì coordonatele origini şi ale punctului T; rezultatele înlocuirii sunt:

$$-a,\quad \pm a\sin\Theta.$$

Presupunând T deasupra axei Ox ($\Theta<\pi$), va trebuì să luăm semnul $+$, iar ecuaţia bisectoarei este:

$$x\cos\Theta+y(\sin\Theta+1)-a=0. \tag{1}$$

Ecuaţia perpendicularei din origină pe această dreaptă este:

$$y-\frac{1+\sin\Theta}{\cos\Theta}x=0 \tag{2}$$

Locul geometric al punctului de intersecţie al dreptelor (1) şi (2) se obţine eliminând pe Θ între aceste ecuaţii, ţinând seamă şi de:

$$\sin^2\Theta+\cos^2\Theta=1. \tag{3}$$

Rezolvând ecuaţiile (1) şi (2) în raport cu $\cos\Theta$ şi $\sin\Theta$, avem:

$$\cos \Theta = \frac{a\,x}{x^2+y^2}, \quad \sin \Theta = \frac{ay}{x^2+y^2} - 1.$$

Inlocuind în (3), obţinem:

$$\frac{a^2\,x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{a^2 y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 - \frac{2\,ay}{x^2+y^2} = 1.$$

De unde:

$$\frac{a^2\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2\,ay}{x^2+y^2} = 0.$$

Inlăturând curba:

$$x^2+y^2 = 0,$$

ecuaţia locului geometric este:

$$a - 2\,y = 0,$$

care reprezintă o linie dreaptă paralelă cu Ox. Se constată că numai o porţiune din dreaptă care este interioară cercului corespunde locului geometric.

XII. *Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor trecând prin punctul dat* A *şi tăind ortogonal cercul dat* O.

Luăm ca Ox dreapta OA şi ca Oy perpendiculara în O. Coordonatele lui A sunt $(a, 0)$, iar ecuaţia cercului O este

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Fie:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \lambda^2$$

ecuaţia unui cerc C, care trecând prin A $(a, 0)$, urmează:

$$(a-\alpha)^2 + \beta^2 = \lambda^2.$$

Ecuaţia acestui cerc este deci:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (a-\alpha)^2 + \beta^2$$

sau:

$$C \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - a^2 + 2a\alpha = 0.$$

Condiţia ca cercurile O şi C să fie ortogonale este:

$$\overline{OC}^2 = R^2 + \lambda^2,$$

adică, $C(\alpha, \beta)$ fiind centrul, să avem:

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2 + (a - \alpha)^2 + \beta^2.$$

Dezvoltând, obţinem:

$$R^2 + a^2 - 2a\alpha = 0.$$

Aceasta fiind o relaţie între coordonatele centrului $C(\alpha, \beta)$ variabil, este ecuaţia locului descris de punctul C. Deci, acest loc este o linie dreaptă:

$$R^2 + a^2 - 2ax = 0,$$

a cărei ecuaţie se obţine înlocuind în ecuaţia găsită pe α cu x.

XIII. *Fie*

$$y - 2x - a = 0, \quad y - 4x + a = 0$$

ecuaţiile a două drepte; să se scrie ecuaţia dreptei A *ce trece prin origina axelor şi intersecţia lor.* 1) *Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului format de* Ox, A, *şi* $y - 2x - a = 0$. 2). *Presupunând* a *variabil, să se afle locul geometric descris de centrul cercului precedent.*

Ecuaţia dreptei ce trece prin intersecţia dreptelor date, este:

$$y - 2x - a + K(y - 4x + a) = 0.$$

Trecând prin origină, (0, 0), urmează:

$$K = 1;$$

deci, ecuaţia dreptei A este:

$$A \equiv y - 3x = 0.$$

1) Ecuaţia unei curbe ce trece prin vârfurile triunghiului format de dreptele

$$y - 3x = 0, \quad y = 0, \quad y - 2x - a = 0,$$

este:

$$\lambda(y - 3x)y + \mu y(y - 2x - a) + (y - 3x)(y - 2x - a) = 0.$$

Dezvoltând, găsim:

$$6x^2 - xy(5 + 3\lambda + 2\mu) + y^2(1 + \lambda + \mu) + 3ax - a(1 + \mu)y = 0.$$

Pentru ca această curbă să fie cerc, trebue să avem

$$6 = 1 + \lambda + \mu,\quad 5 + 3\,\lambda + 2\,\mu = 0,$$

de unde:

$$\lambda = -15,\quad \mu + 20,$$

iar ecuaţia cercului circumscris triunghiului considerat, este:

$$6\,x^2 + 6\,y^2 + 3\,a\,x - 21\,a\,y = 0,$$

sau

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{2}\,x - \frac{7\,a}{2}\,y = 0.$$

2) Coordonatele centrului acestui cerc fiind:

$$x = -\frac{a}{4},\quad y = \frac{7\,a}{4}, \tag{1}$$

locul geometric descris de acest punct, se obţine eliminând parametrul variabil a între ecuaţiile (1). Se obţine:

$$7\,x + y = 0,$$

care probează că locul geometric este o linie dreaptă ce trece prin origină.

Observare. Ecuaţia cercului se puteà găsì şi astfel: Se calculează coordonatele $(0, 0)$, $(-\frac{a}{2}, 0)$, $(a, 3\,a)$ ale vârfurilor triunghiului format de dreptele considerate, ceea ce se obţine rezolvând două câte două ecuaţiile acestor drepte. Ecuaţia unui cerc oarecare fiind

$$x^2 + y^2 - 2\,\alpha\,x - 2\,\beta\,y + \gamma = 0,$$

se scrie că această ecuaţie este verificată când se înlocueşte (x, y) cu $(0, 0)$, $(-\frac{a}{2}, 0)$, $(a, 3\,a)$ şi se găsesc valorile lui α şi β.

XIV. *Se dau trei puncte colineare* A, B, C. *Să se afle locul geometric al punctelor de contact al cercurilor ce trec prin punctele* A *şi* B *cu tangentele duse din* C *la aceste cercuri.*

Luând ca axă Ox linia ABC şi ca Oy perpendiculara în mijlocul lui AB, să însemnăm cu (o, λ) coordonatele centrului unui cerc variabil ce trece prin A (a, o), B $(-a, o)$ şi fie C (c, o). Ecuaţia cercului este:

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + a^2,$$

sau

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0. \tag{1}$$

Punctele de contact ale unei tangente duse dintr'un punct la un cerc sunt la intersecţia cercului cu polara acelui punct în raport cu cercul. Va trebui să scriem ecuaţia polarei punctului C (c, o), care este:

$$cx - \lambda(y + 0) - a^2 = 0,$$

sau

$$cx - \lambda y - a^2 = 0 \tag{2}$$

şi să eliminăm parametrul λ între ecuaţiile (1) şi (2). Inlocuind în (1) valoarea lui λ dedusă din (2), obţinem un cerc

$$x^2 + y^2 - 2cx + a^2 = 0,$$

cu centrul în punctul C.

XV. *O dreaptă AB de lungime constantă d, se reazemă pe laturile OP şi OQ ale unghiului dat POQ, A fiind pe OP şi B pe OQ. Se cere locul geometric al punctului M de intersecţie ale perpendicularelor ridicate ín A pe OP şi în B pe OQ, când dreapta variază în poziţie.*

Să luăm ca Ox bisectoarea interioară a unghiului POQ şi ca Oy bisectoarea exterioară. Dreptele OP şi OQ fiind simetrice în raport cu Ox, ecuaţiile lor sunt:

$$(OP)\ y - ax = 0, \qquad (OQ)\ y + ax = 0.$$

Fie: A $(\lambda, a\lambda)$, B $(\mu, -a\mu)$ coordonatele punctelor date; λ şi μ sunt doi parametri variabili, între cari există relaţia

$$\overline{AB}^2 = d^2, \quad d^2 = (\lambda - \mu)^2 + a^2(\lambda + \mu)^2. \tag{1}$$

Ecuaţiile perpendicularelor în A şi B pe OP şi OQ sunt:

$$y - a\lambda = -\frac{1}{a}(x - \lambda), \tag{2}$$

$$y + a\mu = \frac{1}{a}(x - \mu). \tag{3}$$

Locul geometric se obţine eliminând pe λ şi μ între (1), (2), (3). Rezolvând (2) şi (3) în raport cu λ şi μ şi înlocuind în (1), ecuaţia locului este:

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2 (1 + a^2)^2}{4 a^2},$$

care reprezintă un cerc cu centrul în origină.

XVI. *Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care taie ortogonal două cercuri date.*

Luăm linia centrelor cercurilor date C şi C′ ca axă Ox, iar axul lor radical ca Oy; ecuaţiile cercurilor sunt:

$$C \equiv x^2 + y^2 - 2\,ax + c = 0,$$

$$C' \equiv x^2 + y^2 - 2\,a'x + c = 0.$$

Fie:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$$

ecuaţia unui cerc oarecare. Ca să taie ortogonal cercurile date, trebue să avem:

$$(a - \alpha)^2 + \beta^2 = a^2 - c + \varrho^2, \qquad \text{(I)}$$

$$(a' - \alpha)^2 + \beta^2 = a'^2 - c + \varrho^2 \qquad \text{(II)}$$

Ecuaţiile care ne dau coordonatele centrului sunt:

$$x = \alpha,\ y = \beta. \qquad \text{(III)}$$

Pentru a găsì locul geometric, va trebuì să eliminăm pe α, β între ecuaţiile (I), (II), (III). Scădem ecuaţiile (I) şi II şi obţinem, înlocuind acolo pe α cu x,

$$4\,ax = 0,$$

sau:

$$x = 0;$$

deci locul geometric este axa Oy, axul radical al cercurilor date.

XVII. *Se dă un punct A variabil pe Ox şi un punct B variabil pe Oy, astfel că:* OA + OB = K. 1) *Să se afle locul geometric al mijlocului dreptei* AB; 2) *Să se arate că cercul circumscris triunghiului* AOB *trece încă printr'un punct fix (cercurile* AOB *au acelaş ax radical).*

Să notăm:

$$A\ (\lambda, 0),\ B\ (0, \mu),\ \lambda + \mu = K.$$

1) Coordonatele mijlocului lui AB sunt:

$$x = \frac{1}{2}\lambda, \quad y = \frac{1}{2}\mu,$$

deci locul geometric al acestui punct se obţine eliminând parametri λ şi μ între aceste ecuaţii şi $\lambda + \mu = K$.

Se obţine linia dreaptă:

$$x + y = \frac{1}{2} K.$$

2) Cercul AOB are centrul său la mijlocul lui AB, $\left(\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\mu\right)$ şi deci ecuaţia sa este:

$$\left(x - \frac{1}{2}\lambda\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\mu\right)^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\mu^2,$$

sau

$$x^2 + y^2 - \lambda x - \mu y = 0.$$

De oarece

$$\lambda + \mu = K,$$

urmează că:

$$\mu = K - \lambda,$$

pe care înlocuind-o în ecuaţia cercului, avem:

$$x^2 + y^2 - Ky - \lambda(x - y) = 0.$$

Din această relaţie se vede că aceste cercuri trec prin punctele comune curbelor:

$$x^2 + y^2 - Ky = 0, \qquad x - y = 0,$$

adică punctele fixe:

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}K, \quad \frac{1}{2}K\right)$$

Se zice atunci că cercurile au acelaş ax radical, dreapta ce uneşte aceste puncte.

Se vede că linia centrelor

$$x + y = \frac{1}{2} K,$$

a acestor cercuri este perpendicnlară pe axul radical al cercurilor.

XVIII. *Se dă un punct fix* A *în planul a două axe perpendiculare* Ox *şi* Oy. *O secantă variabilă ce trece prin* A *taie pe* Ox *în* N. *Se ia pe* Oy *punctul* P *astfel ca* OP = ON. *Din* P *se lasă o perpendiculară pe* AN *care taie pe* AN *în* M. *Să* *se afle locul geometric al punctului* M, *când secanta se învârteşte în jurul lui* A.

Insemnând cu (a, b) coordonatele punctului A, ecuaţia secantei AN este:

$$y - b = \lambda (x - a). \qquad \text{(I)}$$

Coordonatele punctului N sunt:

$$N \left(\frac{a \lambda - b}{\lambda}, 0 \right),$$

iar acele ale lui P sunt:

$$P \left(0, \frac{a\lambda - b}{\lambda} \right).$$

Ecuaţia perpendicularei din P pe AN este:

$$x + \lambda (y - a) + b = 0. \qquad \text{(II)}$$

Va trebui să eliminăm pe λ între ecuaţiile (I) şi (II). Ecuaţia locului geometric este:

$$x^2 + y^2 + (b - a) x - (a + b) y = 0$$

care reprezintă un cerc ce trece prin origină.

Z XIX. *Să se afle locul geometric al punctelor* M *de unde se pot duce la un cerc tangente care fac între ele un unghi dat.*

M (x_0, y_0) fiind un punct al locului geometric, să găsim ecuaţia care dă coeficienţii unghiulari ai tangentelor duse din M la cercul:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

O tangentă la acest cerc de direcţie m, având ca ecuaţie,

$$y = m x \pm R \sqrt{1 + m^2},$$

să scrim că această dreaptă trece prin punctul M (x_0, y_0), ceeace revine a scrie că este chiar una din tangentele duse din M la cerc. Avem:

$$y_0 = m x_0 \pm R \sqrt{1 + m^2}.$$

Ridicând la pătrat, obţinem:

$$(y_0 - m x_0)^2 = R^2 (1 + m^2).$$

De unde:

$$m^2 (x_0^2 - R^2) - 2 m x_0 y_0 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

Aceasta este ecuaţia ce dă coeficienţii unghiulari ai tangentelor duse din M (x_0, y_0) la cerc. Insemnând cu m' şi m'' coeficienţii acestor tangente şi cu v unghiul tangentelor, va trebuì să avem:

$$v = \text{Const}, \quad \operatorname{tg} v = K, \quad K = \frac{m' - m''}{1 + m' m''}.$$

Insă:

$$m' - m'' = \frac{2 R \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - R^2}}{x_0^2 - R^2}, \quad m' m'' = \frac{y_0^2 - R^2}{x_0^2 - R^2}.$$

Relaţia de mai sus devine:

$$K = \frac{2 R \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - R^2}}{x_0^2 + y_0^2 - 2 R^2},$$

care se descompune în:

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{2 R^2 \sqrt{1 + K^2}\,(\sqrt{1 + K^2} \pm 1)}{K^2}.$$

Aceasta probează că locul punctelor M se compune din două cercuri concentrice.

Exerciţii

1. Să se construiască cercurile:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0, \quad 2x^2 + 2y^2 - x = 0,$$
$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y + 19 = 0,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y-6}{8-x}$$

2. Să se afle ecuaţia cercului ce trece prin origină şi determină pe axele Ox şi Oy, lungimile $OA = 2a$, $OB = 2b$.

R. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$.

3. Să se afle ecuaţia cercului cu raza egală cu 13 şi care este tangent dreptei

$$5x + 12y - 124 = 0$$

în punctul de abscisă 8.

R. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 13^2$.

Se calculează coordonatele (8, 7) ale punctului de contact; se scrie apoi că distanța dela centrul (α, β) la dreaptă este egală cu 13 și că perpendiculara din centru pe dreaptă trece prin (8, 7).

$$5\alpha+12\beta-124=\pm 169, \quad 12\alpha-5\beta=61.$$

4. Să se afle ecuația cercului ce trece prin punctele (2,0), (—2,0) și tangent dreptei:

$$3x - 4y + 6 = 0$$

Să se explice pentruce se obține o singură soluție?

R. $x^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+4.$

Se scrie că distanța centrului la dreaptă este egală cu raza. Se obține:

$$\lambda = -\frac{8}{3}.$$

Punctul (—2,0) aparține dreptei date.

5. Se dau două puncte fixe A și B și un punct C variabil pe un cerc cu centrul în A și având raza R. Să se afle locul geometric al mijlocului M al segmentului BC.

R. $B(a, 0)$; $x^2+y^2-R^2=0$, $C(\lambda, \mu)$; $\lambda^2+\mu^2=R^2$.

Coordonatele mijlocului sunt:

$$x = \frac{a+\lambda}{2}, \quad y = \frac{\mu}{2}.$$

Se elimină λ și μ. Locul este cercul:

$$4x^2 + 4y^2 - 4ax + a^2 - R^2 = 0.$$

6. Să se afle polara punctului (4,5) în raport cu cercul:

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y = 8.$$

R. $5x + 6y - 48 = 0.$

7. Să se afle polul dreptei: $3x + 4y - 7 = 0$ în raport cu cercul: $x^2 + y^2 - 14 = 0.$

R. (6, 8).

8. Să se afle polul dreptei: $2x + 3y - 6 = 0$ în raport cu cercul: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 12.$

R. (— 11, — 16).

9. Să se afle ecuația unui cerc de rază R tangent la axele de coordonate.

R. $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2.$

10. Să se afle ecuațiile tangentelor în punctele unde cercul:

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = o$$

taie axa Oy.

R. $x+y\sqrt{3}=5\sqrt{3}-6, \quad x-y\sqrt{3}=-5\sqrt{3}-6.$

11. Un cerc trece prin punctul (3,5) și taie axa Oy în punctele A, B, astfel că: OA = 4, OB = − 2. Să se afle ecuația cercului, centrul și raza.

R. $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$

Se face $x = o$, și se scrie că ecuația obținută are rădăcinile 4 și − 2. Se scrie că trece și prin (3,5).

$$9x^2 + 9y^2 - 48x - 18y - 72 = o,$$

$$\left(\frac{8}{3}, 1\right), \quad R=\frac{\sqrt{145}}{3}.$$

12. Să se scrie ecuația cercului ce trece prin punctul (0,2) și este tangent în origină la dreapta: $y + 2x = o$.

R. $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$. Trece prin (0,2), deci $\beta=1$. Se scrie tangenta în origină și se identifică cu: $2x+y=0$. Avem:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

13. Să se afle ecuația cercului cu centrul în punctul (3,1) și tangent la dreapta: $3x + 4y + 7 = 0$.

R. $(x-3)^2+(y-1)^2=R^2$. Se scrie că distanța dela (3,1) la dreaptă este egală cu R. Se obține:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y = 6.$$

14. Să se afle ecuația cercului cu centrul în (3,1) și tangent cercului:

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0.$$

R. $(x-3)^2+(y-1)^2=R^2.$

Se scrie că distanța punctului (3,1) la axul radical al cercurilor este egală cu R. Se obține:

$$R=\sqrt{2}\,(1-\sqrt{5}).$$

15. Se dau două cercuri de aceiași rază, centrul unuia fiind pe celălalt cerc. Să se afle ecuațiile tangentelor duse în unul din punctele de intersecție ale cercurilor și unghiul acestor tangente.

R. Se ia ca Ox linia centrelor și ca Oy coarda comună. Ecuațiile cercurilor sunt:

$$(x-a)^2 + y^2 = 4a^2, \quad (x+a)^2 + y^2 = 4a^2.$$

Se scrie tangentele în punctele $(0, a\sqrt{3})$, $(0, -a\sqrt{3})$. Unghiul lor este de 120°.

16. Să se arate că axele radicale a trei cercuri, luate două câte două, sunt concurente într'un punct, numit *centru radical al cercurilor*. Să se caute coordonatele acestui punct.

R. Cercurile sunt:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0,$$

$$C_2 \equiv x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0,$$

$$C_3 \equiv x^2 + y^2 + 2a_3x + 2b_3y + c_3 = 0.$$

Axele radicale sunt:

$$C_1 - C_2 = 0,\ C_2 - C_3 = 0,\ C_3 - C_1 = 0.$$

Avem: $(C_1 - C_2) + (C_2 - C_3) + (C_3 - C_1) = 0.$

Se rezolvă:

$$C_1 = C_2, \quad C_2 = C_3$$

şi se află coordonatele centrului radical.

17. Se dau o dreaptă D şi un cerc C. Dintr'un punct M variabil al dreptei D ca centru şi cu o rază cât tangenta dusă la cercul C, se descrie un cerc C′. Să se arate că cercurile C′ trec printr'un punct fix.

R. Se ia D ca Oy şi perpendiculara din centrul cercului C ca Ox. Avem M $(0, \lambda)$ şi:

$$C \equiv x^2 + y^2 + 2ax + b = 0,$$

$$C' \equiv x^2 + (y - \lambda)^2 - (\lambda^2 + b) = 0,$$

$$C' \equiv x^2 + y^2 - 2\lambda y - b = 0.$$

Se ţine socoteală că puterea unui punct este egală cu pătratul tangentei. Cercurile C′ trec prin punctul comun curbelor:

$$x^2 + y^2 - b = 0, \quad y = 0.$$

18. M fiind punctul de contact al unei tangente variabile la un cerc de diametru AB, fie C şi D punctele unde această tangentă taie tangentele fixe în punctele A şi B. Să se arate: *a)* că produsul AC . BD este constant; *b)* că triunghiul COD este dreptunghic în O.

R. $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $M(\alpha, \beta)$, $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$ (1).

Se scrie tangentele în A şi B şi se calculează coordonatele punctelor C şi D:

$$C\left(a,\ \frac{a^2-a\,\alpha}{\beta}\right),\qquad D\left(-\,a,\ \frac{a^2+a\,\alpha}{\beta}\right),$$

$$AC.\ BD = \frac{a^2-a\alpha}{\beta}.\ \frac{a^2+a\ \alpha}{\beta} = \frac{a^2\ (a^2-\alpha^2)}{\beta^2}$$

Se observă (1). $\quad AC.\ BD = a^2.$

Se arată că între coeficienții unghiulari ai dreptelor OC, OD există relația de perpendicularitate.

19. Fie AB o coardă fixă a unui cerc dat și M un punct variabil al acestui cerc. Din mijlocul coardei AM se lasă o perpendiculară pe BM care o taie în P. Se cere locul geometric al punctului P.

R. $\quad A\ (a,o),\ B\ (-a,o).\quad x^2 + y^2 - 2\,by - a^2 = O.$

Ecuația unei drepte variabile BM este:

$$y = \lambda\ (x+a). \tag{1}$$

Coordonatele lui M se obțin din rezolvarea ecuații (1) și a cercului și după ce am divizat cu $x + a$, avem:

$$M\left(\frac{a+2\ b\lambda-a\lambda^2}{1+\lambda^2},\ \frac{2a+2b\lambda}{1+\lambda^2}\ \lambda\right)$$

Se calculează coordonatele mijlocului segmentului AM și perpendiculara din acel punct pe BM are ca ecuație:

$$\lambda y + x - b\lambda - a = 0. \tag{2}$$

Eliminăm λ între (1) și (2) și găsim cercul:

$$x^2 + y^2 - by - a^2 = O.$$

20. Baza AB a unui triunghi este fixă, iar unghiul C constant. Să se afle locul geometric al punctului de întâlnire al înălțimilor triunghiului ABC.

R. $\quad A\ (a,\ o),\ \ B\ (-a,\ o).\ $ C descrie cercul dat:

$$x^2 + y^2 - 2\,dy - a^2 = O.$$

Ecuația unei drepte variabile AC este:

$$y = \lambda\ (x-a).$$

Coordonatele lui C sunt:

$$C\ \left(\frac{a\,\lambda^2+2d\,\lambda-a^2}{1+\lambda^2},\quad \lambda\ \frac{2d\,\lambda-2\,a^2}{1+\lambda^2}\right).$$

$$(BC)\quad y\,(a\lambda+d)-x\,(d\lambda-a)-a\,(d\lambda-a)=0.$$

Perpendiculara din A pe BC are ecuaţia:

$$d\,x-a\,y-ad=\lambda\,(a^2-ax-dy) \qquad (1)$$

Perpendiculara din B pe AC are ecuaţia:

$$\lambda\,y+a+x=0.$$

Eliminând λ între (1) şi (2), găsim cercul:

$$x^2+y^2+2dy-a^2=0.$$

21. Fiind date două axe perpendiculare Ox şi Oy şi un punct A pe Ox, se ia pe Oy punctul D, iar pe perpendiculara în A pe Ox punctul C, astfel ca OD = 2 AC. Se cere să se afle locul geometric al proiecţiunii punctului O pe DC, când punctul D variază pe Oy.

R. $A(a,\,0)$, $C(a,\,\lambda)$, $D(0,\,2\lambda)$. Se elimină λ între ecuaţiile:

$$\lambda x+ay-2a\lambda=0, \qquad y=\frac{a}{\lambda}x.$$

Locul este cercul:

$$x^2+y^2-2ax=0.$$

22. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc care trec printr'un punct fix P.

R. $x^2+y^2=R^2$, $P(a,o)$. Se scrie ecuaţia unei secante ce trece prin P şi se elimină parametrul variabil între această ecuaţie şi aceia a perpendicularei din centrul cercului pe această coardă. Locul este cercul:

$$x^2+y^2-ax=0.$$

23. Fie AT o tangentă fixă şi BT o tangentă variabilă la un cerc de rază R. Să se afle locul centrului cercului circumscris triunghiului ABT.

R. Se ia AT ca Oy şi diametrul lui A ca Ox. Cercul are ecuaţia: $x^2+y^2-2Rx=0$. B $(\lambda,\,\mu)$, $\lambda^2+\mu^2-2R\lambda=0$. (1) Se calculează coordonatele lui T. Se elimină λ şi μ între ecuaţia (1) şi a perpendicularei din T pe AB. Se găseşte:

$$x-\frac{R}{2}=0.$$

24. Să se afle locul geometric al mijlocului dreptei AB, ale cărei extremităţi sunt A pe Ox, B pe Oy, ştiind că $AB = \text{const.}$

R. $A(\lambda, 0)$, $B(0, \mu)$, $AB = K$. Coordonatele mijlocului sunt:

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \frac{\mu}{2}.$$

Locul este cercul.

$$x^2 + y^2 = \frac{K^2}{4}.$$

25. Fie C centrul unui cerc variabil tangent în A la dreapta AB. Din B se duce o tangentă la cercul C şi fie M punctul de contact. Să se afle: 1⁰ Locul geometric al lui M. 2⁰. Locul intersecţii dreptelor CB şi AM.

R. Se ia ca Ox şi ca Oy dreptele AB şi AC (perpendiculara în A pe Ox). $C(0, \lambda)$, $B(a, 0)$. 1⁰. Se elimină λ între ecuaţia cercului şi a polarei lui B. 2⁰. Se elimină λ între ecuaţiile dreptelor CB şi polarei AM. Se găseşte;

$$1^0)\ x^2 + y^2 - 2ax = 0; \quad 2^0)\ x^2 + y^2 - ax = 0.$$

26. Fie M un punct variabil al unui cerc de diametru AB, cu centrul în O, astfel că $OA = 2a$. 1⁰) Insemnând cu α şi β coordonatele punctului M, să se scrie ecuaţiile cercurilor circumscrise triunghiurilor MOA şi MOB. 2⁰) Să se arate că distanţele centrelor P şi Q ale acestor cercuri la dreapta AB au un produs constant. 3⁰) Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a dreptelor AP şi BQ.

R. Se ia AB ca Ox şi perpendiculara în O ca Oy. Se notează ordonatele punctelor P şi Q cu λ şi μ.

$$(MOA)\quad (x-a)^2 + (y-\lambda)^2 = a^2 + \lambda^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 4a^2.$$

$$1^0)\ x^2 + y^2 - 2ax - 2\lambda y = 0, \qquad x^2 + y^2 + 2ax - \overset{2}{\mu} y = 0,$$

cu condiţiile:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha - 2\lambda\beta = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + 2a\alpha - 2\mu\beta = 0;$$

$$\lambda = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha}{2\beta}, \quad \mu = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2a\alpha}{2\beta}, \quad \lambda = \frac{a(2a-\alpha)}{\beta}, \quad \mu = \frac{a(2a+\alpha)}{\beta}.$$

$2^0)\ \lambda\mu = a^2.$

$3^0)\ x^2 + y^2 = 4a^2$, chiar cercul de diametru AB.

27. Să se afle locul punctelor M, astfel că A şi B fiind două puncte date, să avem:

$$a\,\overline{MA}^2 + b.\,\overline{MB}^2 = K^2,$$

a, b, K fiind cantități date.

R. $A(d, 0)$, $B(-d, 0)$, $M(x,y)$.

$$a[(x-d)^2+y^2]+b\,[(x+d)^2+y^2]=K^2.$$

28. Să se scrie ecuația bisectoarei unghiului ascuțit ce face cu Oy dreapta: $3x-4y+4=0$. Să se scrie apoi ecuația cercului tangent în origină la dreapta ce face cu Ox unghiul α și trecând prin punctul unde bisectoarea de mai sus taie pe Ox. Presupunând α variabil, să se afle locul geometric al centrului cercului precedent.

R. Punctul unde bisectoarea taie axa Ox sunt $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+\frac{1}{4}$. Se scrie tangenta în origină și se identifică cu: $y=x\operatorname{tg}\alpha$. Avem: $\lambda=\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

$x^2+y^2+x-y\cot\alpha=0$. Locul centrelor este: $x=-\frac{1}{2}$.

29. Se unește un punct M al axului radical a două cercuri de centre A și B cu centrele și se ridică perpendiculare în A pe AM și B pe BM. Se cere locul geometric al punctului de intersecție a acestor perpendiculare, când M variază pe axul radical.

R. Ox este AB, Oy este axul radical. $M(0, \lambda)$. Locul este:

$$x=a+b.$$

30. Se dau punctele A, B, C, D pe o dreaptă. Se duce un cerc O tangent în A dreptei AB și un cerc O′ trecând prin B și C și care taie cercul O în punctele M și N. Să se arate că cercul circumscris triunghiului DMN taie dreapta AB într'un punct fix.

R. $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, $D(d, 0)$.

$$(O)\equiv x^2+y^2-2uy=0,\quad (O')\equiv x^2+y^2-(b+c)x+2Vy+bc=0$$

$$(DMN)\ x^2+y^2-(b+c)x+2Vy+bc+\lambda(x^2+y^2-2uy)=0.$$

Se scrie că acest cerc trece prin $D(d, 0)$. Se face $y=0$

$$\lambda=\frac{(b+c)d-d^2-bc}{d^2}.$$

31. Să se arate că axul radical a două cercuri este echidistant de polarele unuia din centrele de asemănare.

R. Se ia axul radical ca Oy, linia centrelor ca Ox.

$$x^2+y^2-2ax+c=0,\quad x^2+y^2-2bx+c=0.$$

Se calculează coordonatele centrului de asemănare extern:

$$u=\frac{Rb-R'a}{R-R'},$$

R şi R′ fiind razele cercurilor. Se arată că abscisele punctelor unde polarele taie axa Ox sunt egale şi de semn contrar.

32. Să se scrie ecuaţia unui cerc ce trece prin A (a, b) şi tangent dreptelor: $x + y = 0$, $x - y = 0$.

R. $(x-\lambda)^2+y^2=R^2$. $R^2 = \frac{\lambda^2}{2}$, scriind că distanţa centrului la $x - y = 0$ este R. Avem condiţia:

$$a^2 + b^2 - 2\lambda b + \frac{\lambda^2}{2} = 0.$$

Sunt două cercuri:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda' y + \frac{\lambda'^2}{2} = 0, \quad x^2 + y^2 - 2\lambda'' + \frac{\lambda''^2}{2} = 0.$$

33. Fie A şi B două puncte variabile pe Ox şi Oy astfel că:

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{K}.$$

Se duce din O o perpendiculară pe AB. Să se afle locul geometric al piciorului perpendicularei pe AB, când AB variază.

R. A $(\lambda, 0)$, B $(0, \mu)$. $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{K}$

Locul este cercul:

$$x^2 + y^2 - K(x + y) = 0.$$

34. Tangenta într'un punct variabil al unui cerc de centru O taie un cerc dat în punctele A şi B. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor circumscrise triunghiului OAB.

R. O(o,o). O′ (a,o).

$$x^2 + y^2 - R^2 = o, \ C \equiv x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0.$$

$(OAB) \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$. Se scrie că axul radical al cercurilor C′ şi OAB este tangenta cercului O.

α şi β fiind cordonatele centrului, locul este cercul:

$$\frac{a^2 - r^2}{\sqrt{4(\alpha-a)^2 + 4\beta^2}} = R^2.$$

35. Fiind dat un punct A şi o dreaptă D, să se afle locul geometric al punctului M, astfel ca: $\overline{MA}^2 = m$PM, P fiind proecţia lui M pe D. Să se determine m astfel ca cercul găsit să fie tangent cercului de diametru OA.

R. A (a, o), D $\equiv oy$. M (x, y).

$$x^2 + y^2 - 2ax - my + a^2 = 0.$$

Se scrie că distanţa centrului cercului de diametru OA la axul radical al cercurilor, este egală cu raza cercului OA.

36. O secantă OB variabilă ce trece prin origină taie o paralelă D la Ox în punctul B. Perpendiculara în B pe OB taie pe Ox în C. Se duce CM ce face cu Ox unghiul $OCM = 2\,xOB$. Se lasă din O perpendiculara OM pe CM. Se cere locul punctului M.

R. $D \equiv y - a = 0.$ $OB \equiv y - x \operatorname{tg} \alpha = 0.$ $C\left(\frac{a}{\sin\alpha}, 0\right)$

$CM \equiv y = \left(x - \frac{a}{\sin\alpha}\right) \operatorname{tg} 2\,\alpha.$ Se elimină α între ecuaţiile dreptelor CM, OM şi $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Locul este:

$$x^2 + y^2 = 4a^2.$$

37. Fiind date patru puncte A, B, C, D care formează o diviziune armonică, toate cercurile ce trec prin două puncte conjugate A şi C, taie ortogonal cercul de diametru BD.

R. $D(-d,o)$, $B(d,o)$, $C(c,o)$, $A(a,o)$. O fiind mijlocul lui BD, avem relaţia: $\overline{OB}^2 = OA.\,OC$,

$$d^2 = a\,c.$$

Se va scrie ecuaţia unui cerc ce trece prin A şi C,

$$x^2 + y^2 - (a+c)\,x + 2\,\lambda\,y + a\,c = 0.$$

$(BD)\ x^2 + y^2 = d^2.$

38. Se dă un cerc de centru C şi două puncte fixe A şi B. O secantă variabilă dusă prin A taie cercul O în M şi M'. Să se arate că cercul circumscris triunghiului BMM' trece prin două puncte fixe şi să se afle locul geometric al centrelor acestor cercuri.

R. $A(a, o)$, $B(b, o)$. Oy este perpendiculara din C pe AB.

$$(C) \equiv x^2 + y^2 - 2cy + d = o.$$

$$AMM' \equiv y - \lambda\,(x - a) = 0.$$

$$(BMM') \equiv x^2 + y^2 - 2\,c\,y + d + K\,[\,y - \lambda\,(x - a)\,] = 0.$$

Se scrie că trece prin B.

$$K = \frac{b^2 + d}{\lambda\,(b - a)}.$$

Cercurile B M M' trec prin punctele comune curbelor:

$$(b - a)\,(x^2 + y^2 - 2\,cy + d) - (b^2 + d)\,(x - a) = o,\ y = 0.$$

Un punct fix este B b, o). Celălalt se obţine făcând $y = o$ şi divizând cu $x - b$.

39. Intr'un triunghi ABC se duce o paralelă la latura BC care taie AB în D și AC în E. Să se arate că axul radical al cercurilor descrise pe BE și CD ca diametre este înălțimea vârfului C.

R. C (c, o), B (b, o), A (o, a). DE $\equiv y - m = o$

Coordonatele centrelor cercurilor sunt:

$$\frac{1}{2}\left(b + c - \frac{c\,m}{a}\right),\ \frac{m}{2};\ \frac{1}{2}\left(b + c - \frac{b\,m}{a}\right),\ \frac{m}{2}.$$

Ecuația cercului de diametru BE va fi:

$$\left[x - \frac{1}{2}\left(b + c - \frac{mc}{a}\right)\right]^2 + \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(c - \frac{cm}{a} - b\right)^2 + \frac{m^2}{4}.$$

$\left(y - \frac{m}{2}\right)^2$

40. Locul geometric al polului unei drepte date în raport cu o familie de cercuri concentrice.

R. Ecuația cercurilor va fi: $x^2 + y^2 = \lambda^2$. Fie (α, β) coordonatele polului dreptei date $Ax + By + C = o$ în raport cu un cerc. Se ia polara și se identifică ecuația polarei cu aceia a dreptei; pe urmă se elimină λ. Locul ese fără eliminare: $B\alpha - A\beta = o$.

41. Să se afle ecuația generală a cercurilor ce trec prin origină, astfel că tangenta în origină la un cerc să facă cu Ox unghiul dat α. Să se arate că polara unui punct fix față de toate aceste cercuri trece printr'un punct fix.

R. $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y = o$. Se scrie coeficientul unghiular al tangentei in origină și se egalează cu $tg\ \alpha = K$. Ecuația cercurilor este:

$$x^2 + y^2 + 2\mu\,(Kx - y) = 0.$$

Polara punctului $P\,(a, b)$ va conține parametrul μ la gradul întâi.

42. Să se afle locul geometric al punctului de întâlnire a polarei unui punct fix P în raport cu cercurile ce trec prin două puncte fixe, cu diametrul acestui punct.

R. Punctele fixe (a, o), $(-a, o)$. P (p, q). Cercurile:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0.$$

Locul geometric se obține eliminând λ între ecuația polarei și dreptei ce unește centrul cu P.

Se obține cercul:

$$px^2 + py^2 - (p^2 + q^2 + a^2)\,x + pa^2 = 0.$$

43. Să se afle locul geometric al punctelor de unde se poate duce la un cerc tangente perpendiculare.

R. M. (x_0, y_0) un punct al locului și $x^2 + y^2 = R^2$ cerul dat. Se formează ecuația ce dă coeficienții unghiulari ~~și~~ ai tangentelor duse din M (x_0, y_0). Locul geometric este cercul:

$$x_0^2 + y_0^2 = 2\,R^2.$$

Schimbarea axelor de coordonate.

De multe ori rezultatul unei probleme în Geometria Analitică este mai simplu și mai elegant, dacă, în loc de a fi luat ca axe de coordonate cele considate, să fi luat alt sistem de axe.

De ex., ecuația :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = o,$$

în raport cu două axe perpendiculare, are forma următoare :

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

dacă vom pune :

$$X = x - a, \quad Y = y - b.$$

De asemenea, fiind dată curba :

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 - K^2 = o,$$

în raport cu două axe perpendiculare, ecuația acestei curbe se prezintă mai simplu, dacă o scrim :

$$(x-1)^2 - y^2 - K^2 \equiv (x+y-1)\ (x-y-1) - K^2 = o.$$

Punând :

$$X = x + y - 1, \quad Y = x - y - 1,$$

ecuația curbei considerate va aveà forma :

$$XY = K^2.$$

I. **Deplasarea axelor paralel cu ele. Translația axelor.** (x, y) fiind coordonatele unui punct M în raport cu două axe Ox, Oy, să transportăm axele paralel cu ele înși-le în punctul A (a, b) și să ne propunem a găsi coordonatele X, Y ale punctului M în raport cu noile axe AX, AY. (Fig. I).

Pentru aceasta, vom proectà conturul OAM pe Ox şi Oy şi avem:

pr OA + pr. AM = pr. OM.

Insă:

pr. OA = OR = a, pr AM = AP = X, pr. OM = OQ = x.

Deci înlocuind, vom aveà:

$$x = a + X.$$

Proectând de asemenea şi pe Oy, găsim:

$$y = b + Y.$$

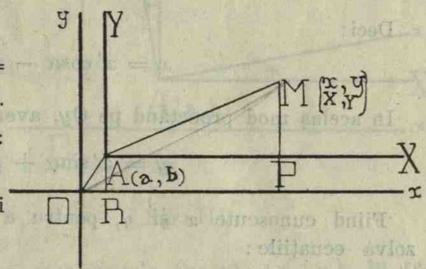


Fig. I.

Prin urmare coordonatele (X, Y) ale lui M (x, y), în raport cu axele AX, AY sunt date de relaţiile:

$$x = a + X, \quad y = b + Y.$$

oricare ar fi semnele acestor coordonate.

Exemplu. *Ce devine ecuaţia:*

$$x^2 - 2y^2 - 6x + 4y + 6 = 0,$$

transportând axele Ox, Oy *paralel cu ele în punctul* A (3,1).

Vom înlocuì în ecuaţia curbei:

$$x = 3 + X, \quad y = 1 + Y,$$

găsim:

$$X^2 - 2Y^2 = 1.$$

II. **Rotaţiunea axelor împrejurul originii de un unghiu** α. Fiind cunoscute coordonatele (x, y) ale unui punct M în raport cu vechiul sistem de axe perpendiculare Ox, Oy, să găsim coordonatele punctului M (x', y') în raport cu axele Ox', Oy', învârtite în jurul originei cu unghiul α. Insemnând cu P şi P′ proecţiile punctului M pe Ox şi Ox' (Fig. II), avem:

$$\text{pr. } \overline{OP} + \text{pr. } \overline{PM} = \text{pr. } \overline{OP'} + \text{pr. } \overline{P'M}. = \text{pr } \overline{OM}$$

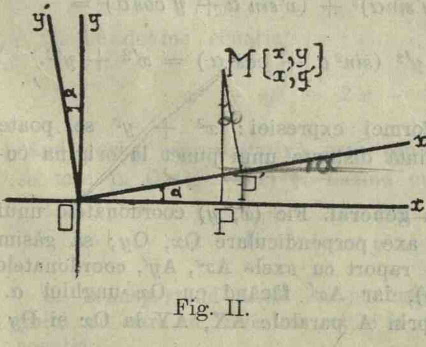


Fig. II.

Proectând pe Ox, găsim:

$$\text{pr. } \overline{OP} = x, \text{ pr } \overline{PM} = 0, \text{ pr } \overline{OP'} = x'\cos\alpha,$$

$$\text{pr. } \overline{P'M} \equiv \overline{P'M}\cos(Ox, P'M) = y'\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -y'\sin\alpha.$$

Deci:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha.$$

In acelaş mod proectând pe Oy, avem:

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Fiind cunoscute x şi y, pentru a calculà pe x', y', vom rezolvà ecuaţiile:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

şi avem:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Exemplu. *Să se arate că învârtind axele perpendiculare în jurul originei cu orice unghi, şi însemnând cu* (x, y), (x', y') *coordonatele unui punct în raport cu sistemul dat şi cu noul sistem de axe, avem:*

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

Ştim că:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Inlocuind, avem:

$$x^2 + y^2 = (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 =$$

$$x'^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + y'^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = x'^2 + y'^2.$$

Această neschimbare a formei expresiei: $x^2 + y^2$ se poate explicà, observând că reprezintă distanţa unui punct la origina comună a axelor.

III. **Schimbarea axelor în general.** Fie (x, y) coordonatele unui punct M în raport cu două axe perpendiculare Ox, Oy; să găsim coordonatele punctului M în raport cu axele Ax', Ay', coordonatele nouei origini fiind A (a, b), iar Ax' făcând cu Ox unghiul α.

Pentru aceasta să ducem prin A paralele AX, AY la Ox şi Oy;

X, Y fiind coordonatele lui M în raport cu acest sistem, avem:

$x = a + X,\ y = b + Y.$

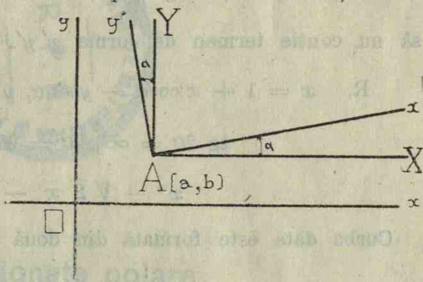


Fig. III.

Insă axele Ax', Ay' se obțin din AX, AY învârtindu-le cu unghiul α.

Deci:

$$X = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$Y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Prin urmare relațiile între coordonatele (x, y), (x', y'), în raport cu vechiul sistem și noul sistem Ax', Ay', sunt:

$$x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Pentru a obține pe x', y' în funcțiune de x și y, vom rezolvà ecuațiile de mai sus în raport cu x' și y'.

Exerciții.

1. Ce devin ecuațiile:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 2 = 0,$$

$$2x^2 - 3y^2 - 8x - 6y + 6 = 0,$$

când curbele ce reprezintă sunt raportate la axe paralele cu cele date și tăindu-se în punctul $(2, -1)$.

R. $X^2 + Y^2 + 2Y + 5 = 0$

$2X^2 - 3Y^2 = 1.$

2. Ce devine ecuația:

$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0.$$

când curba reprezentativă este raportată la axele $O'x'$, $O'y'$, ce se taie în $O'(1, -1)$ și făcând cu Ox unghiul 45^0.

R. $$x'y' + \frac{1}{2} = 0.$$

3. Transportând axele în punctul $(1, 1)$, să se determine unghiul cu care să învârtim axele în jurul acestui punct, pentru ca ecuația:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$$

să nu conție termen de forma $x'y'$.

R. $x = 1 + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \; y = 1 + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \infty, \; 2\alpha = 90^0, \; \alpha = 45^0.$$

$$x'^2 - \sqrt{2}\, x' - 1 = 0.$$

Curba dată este formată din două drepte paralele.

Coordonate polare

Poziția unui punct M în plan poate fi definită prin distanța r a acestui punct la un punct fix O numit *pol* și prin unghiul Θ ce-l face dreapta OM cu o dreaptă fixă OX, numită *axă polară*. (Fig. IV). Cantitățile:

$$r,\ \Theta$$

se numesc coordonatele polare ale punctului M. Unghiul Θ variază dela 0^0 la 360^0; r se mai numește și *raza vectoare* a punctului M.

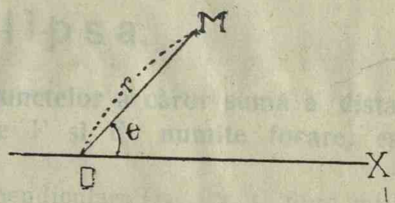


Fig. IV.

Prin urmare, unui sistem de coordonate polare (r, Θ) îi corespunde un singur punct M, pe când unui punct M îi corespunde o infinitate de coordonate, date de expresiile:

$$r,\quad 2\,K\,\pi + \Theta;\ -r,\ (2\,K + 1)\,\pi - \Theta,$$

K fiind un număr întreg oarecare. Se alege dintre acestea numai valorile r și $\Theta < 2\,\pi$.

Transformarea coordonatelor polare în coordonate perpendiculare și reciproc. Fie M (r, Θ) un punct ale cărui coordonate polare sunt r și Θ. (Fig. IV). Insemnând cu (x, y) coordonatele lui M în raport cu axele perpendiculare Ox, Oy, avem:

$$x = r\cos\Theta,\ y = r\sin\ \Theta.$$

Prin urmare, fiind cunoscute coordonatele polare, cele perpendiculare sunt date de relațiile de mai sus.

Invers, fiind cunoscute cele rectangulare, observăm că:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

iar Θ este dat de ecuațiile:

$$\cos\Theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\Theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Exemplu. $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Avem:

$$r = 1\ ; \cos\Theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sin Θ fiind pozitiv, iar *cos* $\Theta < 0$, arcul Θ este cuprins între 90^0 și 180^0 și deci:

$$\Theta = 180^0 - 60^0 = 120^0.$$

Fiind cunoscută ecuația unei curbe în coordonate rectangulare, pentru a-i găsì ecuația ei în coordonate polare se înlocuește x și y cu $r\cos\Theta$, $r\sin\Theta$.

Studiul propietăților curbelor de ordinul al doilea după ecuațiile simplificate.

Cele trei conice.

Elipsa.

64. **Elipsa este locul punctelor a căror sumă a distanţelor la două puncte fixe F şi F', numite focare, este constantă.**

Vom luà două axe perpendiculare Ox, Oy, O fiind mijlocul lui FF', iar axa Ox să fie FF'. Insemnând cu 2 c distanța focarelor, avem prin definiție:

$$MF + MF' = 2\,a.$$

Dacă x şi y sunt coordonatele unui punct al elipsei, ecuația curbei este:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2\,a \qquad (1)$$

Ridicând la pătrat, avem:

$$2\,(x^2+y^2+c^2)+2\,\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4\,c^2\,x^2}=4\,a^2,$$

sau:

$$\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4\,c^2\,x^2}=2\,a^2-(x^2+y^2+c^2).$$

Ridicând din nou la pătrat, obținem:

$$x^2\,(a^2-c^2)+a^2\,y^2=a^2\,(a^2-c^2)$$

sau:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \qquad (2)$$

Considerând triunghiul MFF′, avem :

$$FF' < MF + MF',$$
$$FF' < 2\,a.$$

Insă : $FF' = 2\,c$; deci :

$$2\,c < 2\,a,\; c < a.$$

Aşa dar putem pune :

$$a^2 - c^2 = b^2,\; b < a. \tag{3}$$

ecuaţia locului geometric devine :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_2}{b^2} = 1.} \tag{4}$$

Aceasta este ecuaţia elipsei (Fig. 26).

65. **Forma curbei.** Ecuaţia curbei fiind :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

se vede că schimbând pe x cu $-x$ şi y cu $-y$, ecuaţia rămâne neschimbată. Deci, dacă punctul M (x, y) se află pe curbă, atunci şi punctele : $M'(x,-y)$, $M''(-x,y)$, $M'''(-x,-y)$, se vor găsì pe curbă. Punctul M′ fiind simetricul lui M în raport cu Ox, M″ simetricul lui M în raport cu Oy, M‴ simetricul lui M în raport origina O, rezultă că elipsa este simetrică în raport cu Ox, în raport cu Oy şi în raport cu O. Va fi de ajuns deci să construim curba în unghiul xoy, căci pentru a construi curba întreagă, vom luà simetrica ramurei din unghiul xoy în raport cu Ox, Oy şi punctul O.

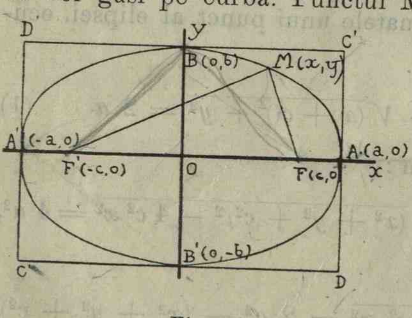


Fig. 26

Rezolvând ecuaţia elipsei în raport cu y, avem :

$$y = \pm\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Pentru ca y să existe, trebue să avem:

$$a^2 - x^2 > 0,$$

sau:

$$-a < x < a.$$

Deci, curba este cuprinsă între paralele:

$$CD \equiv x - a = 0, \quad C'D' \equiv x + a = 0.$$

De asemenea, rezolvând ecuaţia în raport cu x, vom găsì că trebue să avem:

$$-b < y < b,$$

sau că elipsa este cuprinsă între dreptele:

$$CD' \equiv y - b = 0, \quad C'D \equiv y + b = 0.$$

Prin urmare, elipsa este interioară dreptunghiului CD' C'D (Fig. 26).

Să construim ramura:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

când x variază de la O până la a. Mai întâi se observă că y descreşte, când x creşte; când $x = 0$, $y = b$, obţinem punctul B; dacă x creşte, y descreşte şi când $x = a$, $y = o$; obţinem punctul A. Luând simetrica acestei ramuri construite, în raport cu Oy, Ox, O, se obţine forma elipsei (Fig. 26).

Punctele A, A', B, B' se zic *vârfurile elipsei*. AA' şi BB' se numesc *axa mare* şi *axa mică a elipsei.*

Pentru a construì focarele F şi F', ale căror coordonate sunt (c, o), $(-c, o)$, ne servim de relaţia:

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

De unde:

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2};$$

deci: $OC = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2}$ adică, distanţa de la *origină, care este centrul curbei, până la focare* (aşezate pe axa mare) *este cateta unui triunghi dreptunghic, în care ipotenuza este* OA $= a$, *iar cealaltă catetă este* OB$=b$. Distanţa FF' se numeşte *distanţa focală. Pentru a construì focarele, vom descrie* *cercul din* B *ca centru şi cu raza* a, *care taie axa* Ox *în* F *şi* F'.

Exemplu. Să se construiască elipsa :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Avem : A (5, o), A' (—5, o), B (o, 4), B' (o, —4). Focarele sunt : F (c=3, o), F' (—3, o).

66. **Elipsa este proiecţia ortogonală a unui cerc pe un plan.** Fie un cerc de diametru AA', pe care să-l proectăm pe un plan ce face cu planul cercului unghiului α, dat de:

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}, \ AA' = 2\,a, \ b < a.$$

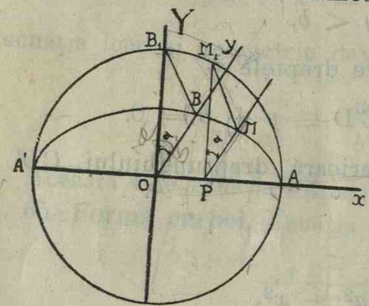


Fig. 27

Considerând pe cerc punctul B_1, extremitatea diametrului perpendicular pe OA (Fig. 27), şi alt punct M_1, proiecţiile lor pe planul elipsei să le însemnăm cu B şi M ; proiecţiile punctelor B_1 şi M_1 pe OA fiind O şi P, avem :

$$OB_1 = a, \quad B_1OB = \alpha, \quad OB = OB_1 \cos\alpha = a\,\frac{b}{a} = b,$$

$$\frac{MP}{M_1P} = \frac{b}{a}. \qquad \text{(I)}$$

Considerând sistemele de axe (Ox, Oy), (Ox, OY), coordonatele punctului M_1 în raport cu aceste sisteme, sunt :

$$x = \overline{OP}, \ y = \overline{PM}; \ x = OP, \ Y = \overline{PM_1}.$$

Punctul M_1 (x, Y) descrie cercul :

$$x^2 + Y^2 = a^2;$$

din relaţia (I) rezultă :

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}, \ Y = \frac{a}{b}\,y \qquad \text{(II)}$$

înlocuind pe Y în ecuaţia cercului, vom avea :

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2$$

sau :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aceasta este ecuaţia locului descris de M, care probează *că proecţia cercului de diametru* AA′ $= 2a$ *pe un plan ce trece prin acest diametru şi care face cu planul cercului un unghi al cărui cosinus este* $\frac{b}{a}$, *este o elipsă a cărei axă mare este* AA′, *iar jumătatea axei mici* b.

Cercul descris pe axa mare a elipsei, se numeşte *cercul principal al elipsei.*

67. **Elipsa definită ca alt loc geometric. Construcţia elipsei prin puncte.** Fiind date două cercuri concentrice de raze a, b (Fig. 28), să ducem prin origină o secantă, care le taie în M_1 şi M_2. Paralelele din M_2 la Ox şi din M_1 la Oy se taie în M. Să găsim locul geometric al punctului M.

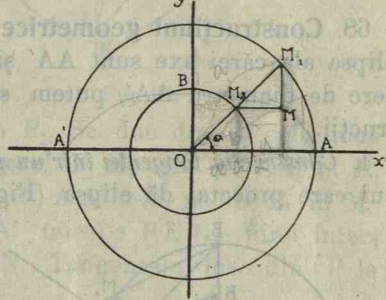


Fig. 28

Însemnând cu α unghiul variabil xOM_1, coordonatele punctelor M_1 şi M_2 sunt : M_1 $(a \cos \alpha,\ a \sin \alpha)$, M_2 $(b \cos \alpha,\ b \sin \alpha)$; deci coordonatele lui M sunt :

$$x = a \cos \alpha, \quad y = b \sin \alpha.$$

Să eliminăm pe α între aceste două ecuaţii. Avem :

$$\cos \alpha = \frac{x}{a}, \ \sin \alpha = \frac{y}{b};$$

înlocuind în :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

ecuaţia locului descris de M va fi :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

adică o elipsă a cărei axă mare este AA′, cu cercul director, cercul de diametru AA′.

De aci, rezultă o construcție a elipsei :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Vom descrie două cercuri concentrice cu razele a, b și ducând o secantă variabilă prin centrul lor, vom obține punctele M_1 și M_2; paralela la Ox prin M_2 și la Oy prin M_1 se taie în M, un punct al elipsei date.

Tot de acì mai rezultă *că putem exprimà coordonatele* (x, y) *ale unui punct al elipsei :*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

în funcțiune de un parametru variabil α, și anume :

$$x = a\cos\alpha,\quad y = b\sin\alpha.$$

68. **Construcțiuni geometrice asupra elipsei.** Considerând elipsa ale cărei axe sunt AA′ și BB′ ca proecțiunea unui cerc de diametru AA′, putem să facem mai multe construcții.

I. *Construcția tangentei într'un punct al elipsei.* Fie AA′ cercul care proectat dă elipsa (Fig 29). Să considerăm punctul M_1 a cărei proecție este punctul M al elipsei. Pentru a găsi acest punct, trebue să cunoaștem proecția B a punctului B_1. Proecția dreptei $B_1 M_1$ R fiind BR, punctul M se află la intersecția acestei drepte cu perpendiculara M_1P pe AA′.

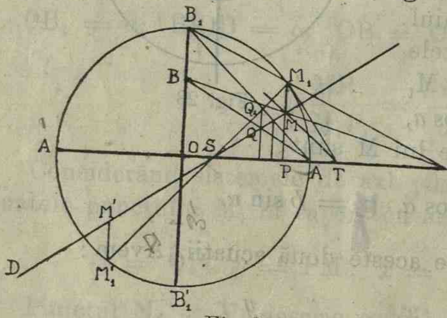


Fig 29.

Tangenta la elipsă în M este proecția tangentei M_1 T la cerc în M_1, adică dreapta MT.

II. *Construcția punctelor de intersecție a unei drepte cu o elipsă.* Să găsim punctele de intersecție ale unei drepte D cu o elipsă al cărei cerc director este cercul de diametru AA′ (Fig. 29). Proecția dreptei B_1 A fiind B A, să însemnăm cu Q punctul unde se taie dreptele D și BA. Punctul Q_1, corespunzător în planul cercului, se obține ducând prin Q perpendiculară pe OA, care taie pe $B_1 A$ în Q_1. Unind pe Q_1 cu punctul S unde D a tăiat pe A A′, se obține dreapta D_1 în planul cercului, a cărei proecție este D; D_1 taie cercul în M_1 și M'_1. Aflăm punctele M, M′ corespunzătoare lui M_1 și M'_1, ducând din M_1, M'_1 perpendiculare pe AA′ care vor tăia dreapta D în punctele M și M′. Acestea sunt punctele unde dreapta D a tăiat elipsa.

III. *Construcția tangentei dusă dintr'un punct la elipsă.* Fie P un punct în planul elipsei al cărei cerc director este cercul de diametru AA′, sau ale cărei axe sunt AA′ și BB′. Tangentele duse din P la elipsă, se obțin astfel (Fig. 30): PB′ taie pe AA′ în S; se duce B'_1 S ce taie perpendiculara din P pe AA′ în P_1. Se duc din P_1 cele două tangente $P_1 M_1$ și $P_1 N_1$ la cerc. $B'_1 M_1$ taie pe AA′ în R, iar perpendiculara din M_1 pe A A′ taie pe B′ R în M; perpendiculara din N_1 pe AA′ taie pe P E (E fiind intersecția lui $P_1 N_1$ cu A A′) în N. Tangentele duse din P la elipsă sunt P M și P N.

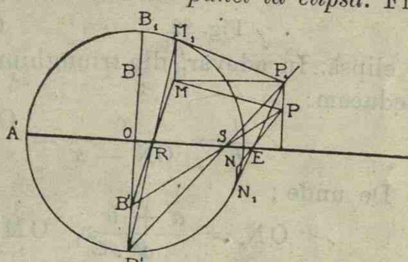


Fig. 30.

IV. *Să se ducă la elipsă tangente paralele cu o direcție dată.* Vom duce prin centrul O al elipsei paralela O D cu direcția dată. Pentru a găsi dreapta OD_1, a cărei proecție este OD, (Fig. 31), ducem dreapta BA′ care taie pe OD în S; paralela la OB prin S taie pe $A'B'_1$ în S_1; $O S_1$ este OD_1. Ducem tangentele M_1 R, M'_1 R′ la cerc paralele cu $O D_1$; paralelele din M_1 și M'_1 la O B se taie cu paralelele din R și R′ la OD în M și M′. Tangentele paralelele cu direcția dată sunt R M, R′M′.

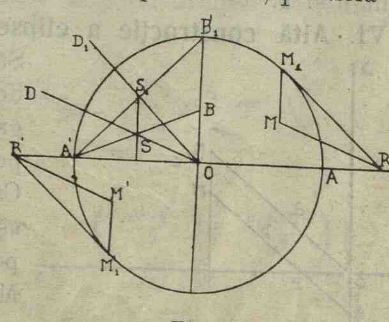


Fig. 31.

V. Construcţia elipsei printr'o trăsătură continuă. Să considerăm o dreaptă de lungime constantă $MN = a + b$, şi pe ea un punct fix P, astfel că $MP = a$, $PN = b$. Dacă MN se mişcă cu extremităţile N pe Ox, M pe Oy (Fig. 32), punctul $P(x, y)$, ale cărui coordonate sunt: $OA = x$, $OB = AP = y$, va descrie o elipsă. In adevăr, din triunghiurile asemenea MBP, PAN, deducem:

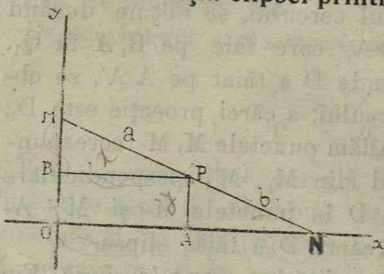


Fig. 32.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{ON - x} = \frac{OM - y}{y}.$$

De unde:

$$ON = \frac{a+b}{\cancel{b}\ a}x, \quad OM = \frac{a+b}{b}y.$$

Inlocuind în relaţia:

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = (a+b)^2,$$

se obţine:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Punctul P descrie prin urmare o elipsă ale cărei axe de simetrie sunt dreptele Ox şi Oy, iar lungimile axelor $2a$, $2b$.

Dacă deci, o linie metalică MN se mişcă între două axe Ox şi Oy perpendiculare, vârful unui creion P, fixat într'o deschidere P a linii MN, va descrie elipsa ale cărei axe sunt a şi b.

VI. Altă construcţie a elipsei când se cunosc axele. Să considerăm o linie AM de lungime constantă şi egală cu a şi punctul B fix pe această linie aşa ca $MB = b$. Când dreapta AM se mişcă aşa ca punctul A să se afle pe Oy, iar B pe Ox, punctul M va descrie elipsa de axe a şi b. In adevăr, paralela la Oy prin M taie pe Ox în

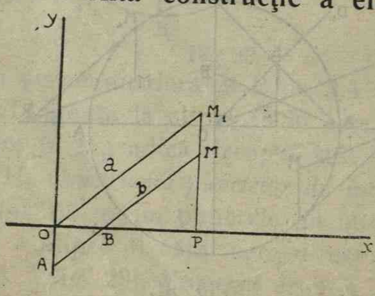


Fig. 33.

P, iar paralela din O la AM, în M_1. M_1 descrie cercul director, iar între M_1P şi MP, avem relaţia:

$$\frac{M_1 P}{M P} = \frac{a}{b}.$$

care probează (§. 66) că M descrie elipsa al cărei cerc director este cercul cu centrul în O şi cu raza OM_1.

69. **Tangenta într'un punct al elipsei.** Fie M_0 $(x_0\ y_0)$ un punct al elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

deci:

$$\frac{x_0{}^2}{a^2} + \frac{y_0{}^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ecuaţia unei drepte ce trece prin M_0 fiind:

$$y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha,$$

pentru că această dreaptă să fie tangentă la elipsă în M_0, trebue ca să taie elipsa în două puncte confundate în M_0.

Coordonatele (x, y) ale unui punct M al acestei drepte, definită prin punctul M_0 $(x_0\ y_0)$ şi unghiul α, sunt:

$$x = x_0 + r\cos\alpha,\ y = y_0 + r\sin\alpha,\ r = \overline{M_0M}.$$

Pentru a găsì punctele de intersecţie ale acestei drepte cu elipsa, vom scrie că un punct (x, y) al dreptei se află pe elipsă; deci:

$$\frac{(x_0 + r\cos\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + r\sin\alpha)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

De unde:

$$r^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right) + 2\,r\left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2} + \frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right) +$$

$$+ \frac{x_0{}^2}{a^2} + \frac{y_0{}^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Aşa dar, sunt două valori r', r'' şi deci două puncte de intersecţie:

$$M' (x_0 + r'\cos\alpha, y_0 + r'\sin\alpha);\ M'' (x_0 + r''\cos\alpha,\ y_0 + r''\sin\alpha),$$

Prin urmare, *o dreaptă taie o elipsă îa două puncte.*

Punctul M_0 (x_0, y_0) fiind pe elipsă, avem:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0,$$

şi deci ecuaţia (1) devine:

$$r^2 \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right) + 2\,r \left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2} + \frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right) = 0,$$

care probează că o rădăcină, $r' = 0$, sau că un punct de intersecţie al dreptei date cu elipsa este M_0 Pentru că dreapta să fie tangentă, trebuie ca şi cel de al doilea punct să se confunde cu M_0, adică şi cealaltă rădăcină $r'' = 0$. Deci:

$$\frac{x_0\cos\alpha}{a^2} + \frac{y_0\sin\alpha}{b^2} = 0.$$

De unde:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{x_0\ b^2}{y_0\ a^2}.$$

Aşa dar, ecuaţia tangentei în M_0 (x_0, y_0) la elipsă va fi:

$$y - y_0 = -\frac{x_0\ b^2}{y_0\ a^2}\ (x - x_0),$$

cu condiţia:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (2)$$

Dezvoltând, avem:

$$y\ y_0\ a^2 + x\ x_0\ b^2 - a^2\ y_0^2 - b^2\ x_0^2 = 0,$$

sau, ţinând seamă de ecuaţia (2),

$$x\ x_0\ b^2 + y\ y_0\ a^2 = a^2\ b^2.$$

Divizând cu $a^2\ b^2$, ecuaţia tangentei în M_0 (x_0, y_0) va fi:

$$\frac{x\ x_0}{a^2} + \frac{y\ y_0}{b^2} - 1 = 0,$$

împreună cu relaţia (2).

70. **Tangentă paralelă cu o direcţie dată.** Fie m coeficientul unghiular al direcţiei date. Ecuaţia tangentei la elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$C = \frac{Q}{T}$

paralelă cu direcţia m, va fi:

$$y = mx + n,$$

rămânând să determinăm pe n, pentru ca cele două puncte de intersecţie ale acestei drepte cu elipsa să fie confundate. Inlocuind în ecuaţia elipsei pe y, avem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(m\,x + n)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

sau:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + \frac{2\,m\,n\,x}{b^2} + \frac{n^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Condiţia ca această ecuaţie să aibă două rădăcini confundate este:

$$\frac{m^2\,n^2}{b^4} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{b^2} - 1\right) = 0;$$

de unde:

$$n^2 = a^2m^2 + b^2, \quad n = \pm\sqrt{a^2\,m^2 + b^2}.$$

Deci, ecuaţiile celor două tangente la elipsă, paralele cu direcţia m, sunt:

$$y = m\,x + \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \quad y = m\,x - \sqrt{a^2\,m^2 + b^2}$$

71. **Polara unui punct faţă de elipsă. Directoare. Excentricitate.** M_0 $(x_0\ y_0)$ fiind un punct în planul elipsei, să găsim ecuaţia polarei acestui punct, adică, locul geometric al punctelor conjugate armonic cu M_0, în raport cu punctele de intersecţie ale elipsei cu o secantă variabilă ce trece prin M_0. Fie M (x, y) un punct al polarei; dreapta MM_0 taie elipsa în două puncte M' (x', y'), M'' (x'', y''), ale căror coordonate sunt de forma:

$$\frac{x_0 + \lambda' x}{1 + \lambda'}, \quad \frac{y_0 + \lambda' y}{1 + \lambda'}; \quad \frac{x_0 + \lambda'' x}{1 + \lambda''}, \quad \frac{y_0 + \lambda'' y}{1 + \lambda''}.$$

Pentru a găsì valorile lui λ' şi λ'', vom scrie că punctul:

$$\frac{x_0 + \lambda x}{1 + \lambda}, \quad \frac{y_0 + \lambda y}{1 + \lambda}$$

este pe elipsă; de unde:

$$\frac{(x_0 + \lambda x)^2}{(1 + \lambda)^2 a^2} + \frac{(y_0 + \lambda y)^2}{b^2 (1 + \lambda)^2} - 1 = 0;$$

sau:

$$\lambda^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + 2\lambda \left(\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1\right) + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Aceasta este ecuaţia care dă valorile λ', λ'' corespunzătoare punctelor de intersecţie M′ şi M″. Condiţia ca aceste puncte să fie conjugate armonic cu M_0, M, este:

$$\frac{\overline{M'M_0}}{\overline{M'M}} = - \frac{\overline{M''M_0}}{\overline{M''M}}, \quad \lambda' + \lambda'' = 0.$$

Scriind că suma rădăcinilor λ', λ'' este zero, avem:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0.$$

care este ecuaţia polarei punctului M_0 (x_0, y_0) în raport cu elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Printre secantele ce trec prin M_0, două sunt tangentele din M_0 la elipsă; pentru acestea, punctele M′, M″ se confundă cu punctele de contact, iar conjugatele armonice ale lui M_0 faţă de M′ şi M″ sunt chiar punctele de contact. *De acì rezultă o construcţie geometrică a polarei: Ducem din M_0 tangentele la elipsă şi dreapta care uneşte punctele de contact este polara lui M_0, faţă de elipsă.*

Directoare la elipsă sunt polarele focarelor; directoarele sunt două drepte perpendiculare pe axa mare. Ecuaţiile lor sunt:

$$\frac{cx}{a^2} + 1 = 0, \quad \frac{cx}{a^2} - 1 = 0.$$

Raportul $\frac{c}{a}$ se numeşte *excentricitatea* elipsei.

Pentru a găsì polul (x_0, y_0) *al unei drepte:*

$$Ax + By + C = 0,$$

față de elipsa :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

vom scrie polara lui (x_0, y_0) : (Forma dedublată)

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$$

și vom identifică ecuația polarei cu a dreptei date; de unde:

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{A} = \frac{\frac{y_0}{b^2}}{B} = \frac{-1}{C}.$$

Rezolvând ecuațiile aflate, găsim coordonatele polului :

$$x_0 = \frac{-a^2 A}{C}, \; y_0 = \frac{-b^2 B}{C}.$$

72. **Ecuația tangentelor duse dintr'un punct la elipsă.** Să găsim ecuația tangentelor duse din M_0 (x_0, y_0) la elipsa :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Să căutăm punctele de contact. Dacă M' $(x'\, y')$ este un punct de contact, ecuația tangentei în M' la elipsă va fi :

$$\frac{x' x}{a^2} + \frac{y' y}{b^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

cu condiția :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{2}$$

Scriind că tangenta (1) trece prin M_0 (x_0, y_0), avem :

$$\frac{x' x_0}{a^2} + \frac{y' y_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{3}$$

Se vede că această ecuație probează că punctele de contact M' (x', y') se găsesc pe polara :

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0.$$

a lui M_0 (x_0, y_0) faţă de elipsă.

Pentru a găsì pe (x', y'), vom rezolvà ecuaţiile (2) şi (3); înlocuind în (2) pe y' cu valoarea sa din (3), se obţine o ecuaţie de gradul II-a în x' şi deci vom avea două valori pentru x', două pentru y'; coordonatele punctelor de contact (x', y'), (x'', y''), sunt astfel cunoscute, iar ecuaţiile tangentelor duse din M_0 la elipsă, vor fi:

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x''x}{a^2} + \frac{y''y}{b^2} - 1 = 0.$$

Determinarea direcţiilor tangentelor din M_0. Mai putem găsì ecuaţiile tangentelor duse din M_0 (x_0, y_0) la elipsă, determinând direcţiile acestor tangente. Am văzut că ecuaţia unei tangente la elipsă, a cărei direcţie este m, va fi:

$$y = mx \pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2}.$$

Pentru a găsì valorile lui m, vom scrie că această dreaptă este tangenta dusă din M_0 (x_0, y_0), sau că trece prin acest punct. Deci:

$$y_0 = mx_0 \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}; \quad y_0 - mx_0 = \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}.$$

Ridicând la pătrat, găsim ecuaţia:

$$m^2 (x_0^2 - a^2) - 2 mx_0 y_0 + y_0^2 - b^2 = 0^2, \qquad \text{(I)}$$

care va da coeficienţii unghiulari ai celor două tangente din M_0.

Pentru ca această ecuaţie să aibă două rădăcini, trebue:

$$x_0^2 y_0^2 - (x_0^2 - a^2)(y_0^2 - b^2) \geqq 0,$$

sau:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \geqq 0.$$

Primul membru al acestei neegalităţi este primul membru al ecuaţii elipsei.

Pentru a rezolvà această neegalitate, să considerăm în general curba $f(x, y) = 0$ şi două puncte $A (x_0, y_0)$, $B (x_1, y_1)$ din planul ei. Coordonatele unui punct M al dreptei AB sunt de forma:

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{-\overline{AM}}{\overline{BM}}$$

λ variind de la 0 la ∞, când M descrie segmentul AB. Punctul M este pe curba $f(x, y) = 0$, când λ verifică ecuația:

$$F(\lambda) = f\left(\frac{x_0 + \lambda x_1}{1+\lambda}, \frac{y_0 + \lambda y_1}{1+\lambda}\right) = 0.$$

Pentru fiecare rădăcină a acestei ecuații corespunde un punct de intersecție al curbei date cu segmentul AB. Să substituim în $F(\lambda)$ pe 0 și ∞; pentru $\lambda = 0$, rezultatul înlocuirii este $f(x_0, y_0)$; pentru $\lambda = \infty$,

$$\frac{x_0 + \lambda x_1}{1+\lambda}, \quad \frac{y_0 + \lambda y_1}{1+\lambda},$$

se reduc la x_1, y_1 și deci rezultatul înlocuirii este $f(x_1, y_1)$.

Prin urmare, dacă $f(x_1, y_1)$ și $f(x_0, y_0)$ au acelaș semn, ecuația $F(\lambda) = 0$ are un număr cu soț de rădăcini între 0 și ∞, și deci segmentul AB taie curba dată într'un număr cu soț de puncte, sau în nici un punct, așezate între A și B.

Dacă însă $f(x_0, y_0)$ și $f(x_1, y_1)$ au semne contrarii, ecuația $F(\lambda) = 0$ are cel puțin o rădăcină reală între 0 și ∞ și deci segmentul AB taie curba dată cel puțin într'un punct sau într'un număr fără soț de puncte, așezate între A și B și reciproc.

De aci urmează că dacă A și B sunt două puncte, pe care unindu-le, nu traversăm curba $f(x, y) = 0$, adică ambele puncte A și B așezate în interiorul sau exteriorul curbei date, rezultatele substituirii în $f(x, y)$ a coordonatelor acestor puncte au acelaș semn. Prin urmare, dacă $f(x, y)$ are un semn, când înlocuim pe x și y cu coordonatele unui punct A dintr'o regiune în care curba $f(x, y) = 0$ înparte planul, rezultatul înlocuirii în $f(x, y)$ a coordonatelor unui alt punct B din aceiași regiune cu A, va avea acelaș semn.

Din contră, dacă A și B unite, se traversează curba $f(x, y) = 0$, cu alte cuvinte A ar fi în interior, de ex., iar B în exteriorul curbei, rezultatele substituirii în $f(x, y)$ a coordonatelor acestor puncte, vor avea semne contrare.

Așa dar, o curbă $f(x, y) = 0$, în cazul nostru elipsa, înparte planul în două regiuni; *pentru punctele regiunii interioare,* *primul membru al ecuații elipsei are un semn, iar pentru punctele regiunei exterioare, semn contrar.* Pentru a determinà aceste semne, se vede în ce regiune este origina şi ce semn are rezultatul înlocuirii.

Pentru elipsă, în regiunea interioară, expresiunea $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ *va aveà acelaş semn, pentru toate punctele* (x, y) *din această regiune, adică semnul —, dat de origină* $(x = 0. \; y = 0)$; *pe curbă acea expresie este zero, iar în regiunea exterioară elipsei, expresia :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0,$$

adică este pozitivă.

Revenind la discuția rădăcinilor ecuații ce dă coeficienții unghiulari ai tangentelor, putem spune : 1) Dacă punctul M_0 (x_0, y_0) este exterior elipsei, avem :

$$\frac{x_0{}^2}{a^2} + \frac{y_0{}^2}{b^2} - 1 > 0,$$

deci se pot duce două tangente.

2) Dacă, M_0 este pe curbă,

$$\frac{x_0{}^2}{a^2} + \frac{y_0{}^2}{b^2} - 1 = 0,$$

şi deci se poate duce numai o singură tangentă.

1) In sfârşit, dacă M_0 este interior elipsei,

$$\frac{x_0{}^2}{a^2} + \frac{y_0{}^2}{b^2} - 1 < 0,$$

şi deci nu se poate duce nici o tangentă din acest punct.

Pentru a găsì chiar ecuația tangentelor duse din M_0 (x_0, y_0) *la elipsă,* vom scrie ecuația unei drepte ce trece prin M_0,

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

şi vom înlocuì în (I) pe m cu valoarea scoasă din această ecuație,

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Vom avea ecuaţia comună a tangentelor:

$$(y - y_0)^2 (x_0^2 - a^2) - 2\, x_0\, y_0\, (x - x_0)(y - y_0)$$
$$+ (y_0^2 - b^2)(x - x_0)^2 = 0,$$

care descompusă în doi factori de gradul întâi, ne dă ecuaţiile în parte ale celor două tangente duse din M_0. Această ecuaţie se mai scrie şi supt forma:

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$
$$- \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)^2 = 0.$$

73. **Aplicaţie.** *Să se găsească locul punctelor* M_0, *de unde se poate duce două tangente perpendiculare la elipsă.* Ecuaţia ce dă coeficienţii unghiulari ai acestor tangente fiind:

$$m^2 (x_0^2 - a^2) - 2\, m\, x_0\, y_0 + y_0^2 - b^2 = 0,$$

condiţia ca cele două tangente să fie perpendiculare este:

$$m'\, m'' + 1 = 0,$$

de unde:

$$\frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} + 1 = 0,$$

sau:

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

Deci punctul M (x_0, y_0) descrie un cerc a cărui rază este $\sqrt{a^2 + b^2}$. Acesta este *cercul lui Monge* al elipsei.

74. **Ecuaţia normalei la elipsă.** Fie M_0 (x_0, y_0) un punct al elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Deci:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Normală se numeşte dreapta perpendiculară în M_0 pe tangenta în M_0 la elipsă. Ecuaţia tangentei fiind:

$$y - y_0 = - \frac{x_0\, b^2}{y_0\, a^2} (x - x_0),$$

acea a normalei în $M_0\ (x_0, y_0)$, va fi:

$$y - y_0 = \frac{dy_0}{bx_0}\ (x - x_0)$$

75 **Diametrii. Diametrii conjugaţi.** Să găsim ecuaţia diametrului conjugat coardelor paralele cu direcţia: $m = \operatorname{tg}\alpha$, α fiind unghiul acestor coarde cu Ox. $M_0\ (x_0, y_0)$ fiind mijlocul unei coarde de direcţie m, coordonatele unui punct al acestei drepte sunt:

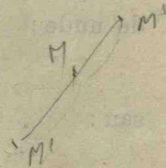
$$x = x_0 + r\cos\alpha, \quad y = y_0 + r\sin\alpha, \quad r = \overline{M_0 M}.$$

Scriind că acest punct este pe elipsă, se obţine:

$$r^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right) + 2\,r\left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2} + \frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right)$$
$$+ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Scriind că M_0 este mijlocul coardei $M'M''$, punctele $M'M''$ fiind corespunzătoare valorilor r' şi r'', avem:

$$r' + r'' = 0,$$



de unde:

$$\frac{x_0\cos\alpha}{a^2} + \frac{y_0\sin\alpha}{b^2} = 0.$$

Locul punctului $M_0\ (x_0, y_0)$, mijlocul coardelor de direcţie $m = \operatorname{tg}\alpha$,

este:

$$y_0 = -\frac{b^2}{a^2\operatorname{tg}\alpha}\,x_0.$$

Deci ecuaţia diametrului conjugat D al coardelor de direcţie m, este:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}\,x,$$

adică o dreaptă ce trece prin centru. Coeficientul unghiular m' al acestei drepte fiind:

$$m' = -\frac{b^2}{a^2\,m},$$

rezultă că între coeficienţii unghiulari m, m', ai coardelor şi diametrului, există relaţia:

$$m\,m' = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad (1)$$

Considerând coardele paralele, de direcţie m', ecuaţia diametrului conjugat D' cu aceste coarde, va fi:

$$y = -\frac{b^2}{a^2\,m'}x,$$

iar coeficientul unghiular al acestui diametru este:

$$-\frac{b^2}{a^2\,m'} = m$$

ceeace rezultă, observând relaţia (1).

Diametrii, D şi D', astfel că unul din ei să fie conjugat coardelor paralele cu celalt, se numesc *diametrii conjugaţi.*

76 **Construcţia a doi diametrii conjugaţi.** Printre coardele de direcţie m, sunt şi tangentele la elipsă paralele cu această direcţie. Insemnând cu M', M″ punctele de contact ale acestor tangente, mijloacele acestor coarde sunt M' şi M″ şi deci diametrul conjugat direcţii coardelor considerate, va fi dreapta M'M″. *De aci rezultă o construcţie a diametrului* D' *conjugat diametrului* D. Fie OM un diametru; ducem tangenta în M la elipsă; dreapta OM' paralelă cu această tangentă, este diametrul conjugat cu D.

77. **Demonstrare geometrică a relaţii ce există între coeficienţii unghiulari ai doi diametrii conjugaţi.** Vom considerà elipsa ca proecţia unui cerc. Fie AA', BB' axele unei elipse al cărei cerc director este cercul de diametru AA' (Fig. 34). Doi diametrii perpendiculari OM_1, OM'_1, în cerc, sunt astfel că unul din ei este locul mijloacelor coardelor paralele cu celalt. Proectând aceşti doi diametrii perpendiculari, coardele paralele se vor proectà după drepte paralele ale căror mijloace sunt proiecţiile mijloacelor coardelor din spaţiu şi deci vom obţine doi diametrii, OM, OM'. conjugaţi, ai elipsei, căci se obţin după proiec-

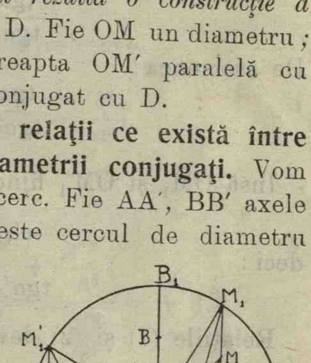


Fig. 34.

ţie tot două drepte, astfel că unul din ei este locul mijloacelor coardelor paralele cu celalt.

Să însemnăm cu α şi α' unghiurile AOM, AOM'; deci: $m = tg\alpha$, $m' = tg\alpha'$. Fie P şi P' proecţiile lui M_1 şi M'_1 pe A A'. Ştim că între ordonatele: MP şi M_1 P ale unui punct al elipsei şi al cercului (§ 66) există relaţia:

$$\frac{MP}{M_1P} = \frac{b}{a}.$$

Să găsim relaţia dintre unghiurile $AOM_1 = \alpha_1$, $AOM'_1 = \alpha'_1$, din planul cercului şi α, α' din planul elipsei. Avem:

$$MP = OP\ tg\alpha, \quad M_1P = OP\ tg\alpha_1.$$

De unde:

$$\frac{MP}{M_1P} = \frac{tg\alpha}{tg\alpha_1}.$$

Insă:

$$\frac{MP}{M_1P} = \frac{b}{a};$$

deci:

$$\frac{tg\alpha}{tg\alpha_1} = \frac{b}{a}. \tag{1}$$

De asemenea:

$$\frac{tg\alpha'}{tg\alpha'_1} = \frac{b}{a}. \tag{2}$$

Insă OM_1 şi OM'_1 fiind perpendiculare,

$$\alpha'_1 = 90 + \alpha_1;$$

deci:

$$tg\alpha'_1 = -\ cotg\alpha_1.$$

Relaţiile (1) şi (2) devin:

$$\frac{tg\alpha}{tg\alpha_1} = \frac{b}{a}, \quad \frac{tg\alpha'}{cotg\alpha_1} = -\frac{b}{a}.$$

Inmulţindu-le între ele, obţinem:

$$tg\,\alpha\ tg\,\alpha' = -\frac{b^2}{a^2},$$

sau:

$$m\,m' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Aceasta este relaţia între coeficienţii unghiulari a doi diametrii conjugaţi:

$$y = m x, \; y = m'x = -\frac{b^2}{a^2 \, m} x.$$

78. **Proprietăţile metrice asupra diametrilor.** Fie $(x' \; y')$, coordonatele unui punct M′ al unei elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

I. Să ne propunem a calculà coordonatele (x'', y'') ale punctului M″ al elipsei, astfel ca OM′ şi OM″ să fie doi diametrii conjugaţi.

Avem:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Intre coeficienţii unghiulari:

$$\frac{y'}{x'}, \quad \frac{y''}{x''}.$$

ai celor doi diametrii conjugaţi, avem relaţia:

$$m m' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{y'}{x'} \cdot \frac{y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

De unde deducem:

$$\frac{\frac{y''}{b}}{\frac{x'}{a}} = \frac{\frac{x''}{-a}}{\frac{y'}{b}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{y''^2}{b^2} + \frac{x''^2}{a^2}}}{\pm\sqrt{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}}} = \pm 1.$$

Dublul semn corespunde extremităţilor celor doi diametrii. Luând semnul $+$, avem formulele lui *Chasles*:

$$y'' = \frac{b}{a} x', \quad x'' = \frac{-a}{b} y',$$

care ne dau *coordonatele (x'', y'') ale capătului diametrului conjugat în funcţiune de coordonatele (x', y') ale primului diametru.*

II. Fie OM', OM'' doi diametrii conjugaţi şi $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$; am văzut că:

$$x'' = -\frac{a}{b} y', \quad y'' = \frac{b}{a} x'.$$

Avem:

$$\overline{OM''}^2 = x''^2 + y''^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2;$$

deci:

$$\overline{OM'}^2 + \overline{OM''}^2 = x'^2 + y'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2 = x'^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + y'^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right),$$

$$\overline{OM'}^2 + \overline{OM''}^2 = (a^2 + b^2) \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right).$$

Ţinând seamă de ecuaţia:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

rezultă:

$$\overline{OM'}^2 + \overline{OM''}^2 = a^2 + b^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2. \qquad (I)$$

Să calculăm suprafaţa triunghiului OM'M''. Ştim (§. 40, II) că suprafaţa unui triunghi ale cărui vârfuri sunt: O(o, o), $M'(x' y')$, $M''(x'', y'')$, este:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x' y'' - y' x'').$$

Inlocuind pe x'', y'', după formulele lui Chasles, avem:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} x'^2 + \frac{a}{b} y'^2\right) = \frac{1}{2}\, a\, b \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right) = \frac{1}{2} a\, b, \qquad (II)$$

Observând formulele (I) şi (II), putem enunţa teoremele lui *Apollonius*: I. *Suma pătratelor a doi semidiametri conjugaţi este constantă şi egală cu suma pătratelor semiaxelor* ; II) *Suprafaţa triunghiului format de centru şi capetele a doi diametrii conjugaţi este constantă şi egală cu jumătatea suprafeţei dreptunghiului construit pe axe.*

79. **Suprafaţa elipsei.** Pentru a găsì suprafaţa elipsei, vom reamintì teorema următoare: *Suprafaţa unui triunghi din spaţiu fiind* S, *iar aceia a proecţii acestui triunghi pe un plan*

fiind S_1, *dacă* α *este unghiul format de planul triunghiului cu planul pe care se face proecţiunea, avem:*

$$S_1 = S \cos \alpha.$$

Ca să demonstrăm această teoremă, considerăm (Fig. 35) triunghiul din spaţiu $AB_1\ C_1$, a cărei proecţie pe planul figurei este triunghiul ABC; dreptele $B_1\ C_1$, BC întâlnindu-se pe planul figurei în D, avem:

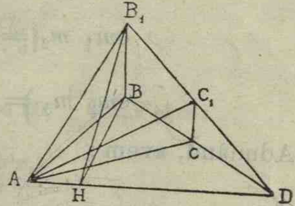


Fig. 35.

$$\text{Supr. } ABC = \text{Supr. } ABD - \text{Supr. } ADC.$$

Insă, α fiind unghiul format de planele ABD, $AB_1\ D$, adică unghiul format de perpendicularele BH şi B_1H pe AD, avem:

$$\text{Supr. } ABD = \frac{1}{2} AD \times BH = \frac{1}{2} AD \times B_1 H \cos BHB_1 = \frac{1}{2} AD.\ B_1 H \cos \alpha,$$

$$\text{Supr. } AB_1\ D = \frac{1}{2} AD.\ B_1 H.$$

Deci: $\quad \text{Supr. } ABD = \text{Supr } AB_1\ D \cos \alpha.$

De asemenea:

$$\text{Supr. } ACD = \text{Supr. } AC_1\ D \cos \alpha.$$

De unde:

$$\text{Supr. } ABC = \text{Supr. } AB_1\ D \cos \alpha - \text{Supr. } AC_1\ D \cos \alpha.$$

$$\text{Supr. } ABC = (\text{Supr. } AB_1 D - \text{Supr. } AC_1\ D) \cos \alpha = \text{Supr. } AB_1\ C_1 \cos \alpha.$$

Pentru a găsi suprafaţa elipsei, vom împărţi cercul principal al elipsei, în foarte multe triunghiuri $OM_1\ M_2$, $OM_2\ M_3$,.., având toate acelaş vârf O, iar celelalte două vàrfuri M_1, M_2 pe cerc. Cosinusul unghiului format de planul cercului cu planul elipsei fiind $\frac{b}{a}$, să proectăm toate triunghiurile

$OM_1 M_2$, $OM_2 M_3$,... pe planul elipsei şi vom obţine triunghiurile $om_1 m_2$, $om_2 m_3$,... ale căror suprafeţe vor fi:

$$om_1 m_2 = OM_1 M_2 . \frac{b}{a},$$

$$om_2 m_3 = OM_2 M_2 . \frac{b}{a}, ...$$

Adunând, avem:

$$Om_1m_2 + Om_2m_3 + .. = \frac{b}{a} \left(OM_1M_2 + OM_2M_3 + ... \right)$$

Insă, când punctele M_1, M_2,... sunt foarte apropiate şi m_1, m_2,... vor fi foarte apropiate, iar sumele:

$$Om_1m_2 + Om_2m_3 + ...,$$

$$OM_1M_2 + OM_2M_3 + ...,$$

sunt tocmai suprafaţa elipsei şi a cercului. Vom avea deci la limită:

$$S = \text{Supr. elipsei} = \frac{b}{a} \text{ Supr. Cerc.},$$

sau:

$$S = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi a b.$$

Prin urmare, suprafaţa elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

este:

$$\pi a b.$$

Exerciţii.

1. Intr'un punct M variabil al unei elipse se duce tangenta care taie tangentele la extremităţile axei mari AA' în punctele P, P'.

I) Să se demonstreze că produsul $AP. A'P'$ este constant.

II) F, şi F' fiind focarele, să se arate că dreptele PF, $P'F'$ se taie pe normala la elipsă în M.

III) Să se arate că cercul de diametru PP' trece prin focare.

R. $M (x_0, y_0)$. $AP = \frac{b^2 (a - x_0)}{ay_0}$, $A'P' = \frac{b^2 (a + x_0)}{ay_0}$. $AP. AP' = b^2$.

Să scrie ecuaţiile dreptelor PF, P′F′, ($c^2 = a^2 - b^2$) şi se vede că coordonatele punctului lor comun sunt:

$$\left(\frac{-cx_0}{a}, \frac{-cy_0}{a-c}\right).$$

Centrul cercului de diametru PP′ este $\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right)$, iar raza:

$$R^2 = \frac{a^4y_0^2 + b^4x_0^2}{a^2y_0^2}.$$

2. F, F′ fiind focarele elipsei ale cărei axe sunt a şi b, să se calculeze distanţele de la un punct M al elipsei la focare. (MF, MF′ se numesc raze vectoare) în funcţiune de abscisa punctului M (x_0, y_0).

II Să se scrie ecuaţiile directoarelor elipsei date.

III Să se găsească locul geometric al punctelor P astfel că raportul distanţelor acestor puncte la focarul F şi directoarea corespunzătoare să fie constant şi egal cu $\frac{c}{a}$ ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

R. $\overline{MF}^2 = y_0^2 + (c - x_0)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2) + (c - x_0)^2.$

I) $MF = a - \frac{c}{a}x_0$, $MF' = a + \frac{c}{a}x_0$.

II) $\frac{cx}{a^2} - 1 = 0$, $\frac{cx}{a^2} + 1 = 0$.

III) Locul este chiar elipsa dată.

3. Se dă dreapta AA′ = 2 a şi punctul F pe această dreaptă. Pe perpendiculara în P pe dreapta AA′, se ia punctul M, aşa că:

$$\frac{\overline{MP}^2}{PA.\ PA'} = K^2.$$

I) Să se afle locul geometric al punctului M, când P descrie dreapta AA′.

II) Fie R, R′ punctele de intersecţie ale dreptelor MA, MA′ cu perpendiculara pe mijlocul 0 al dreptei AA′. Să se arate că OR.OR′= const.

R. A (a, o) A′$(-a, o)$. M (x_0, y_0). Locul o elipsă. Ecuaţia locului:

$$\frac{y_0^2}{(a - x_0)(a + x_0)} = K^2. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{K^2a^2} = 1.$$

$$RO = \frac{ay_0}{a - x_0}, \quad OR' = \frac{ay_0}{a + x_0}. \quad OR.\ OR' = a^2K^2.$$

4. I) Să se arate că produsul distanţelor focarelor la o tangentă oarecare la elipsă, este constant şi egal cu b^2.

II) Să se afle locul geometric al proecţii focarelor pe tangente.

R. Ecuaţia unei tangente se va scrie:

$$y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 + b^2}$$

I) P, P′, fiind proecţiile focarelor pe tangentă, avem :

$$FP.\ F'P' = b^2.$$

II) Locul lui *P* se obţine eliminând m între ecuaţia tangentei şi perpendicularei din F pe ea. Se găseşte cercul director :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

5. Se dă un cerc de centru O şi diametru AA′= 2 R. Dintr'un punct M al acestui cerc, ca centru, se descrie un cerc tangent în N dreptei AA′, care va tăià cercul dat în punctele C şi D. Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a dreptelor MN şi CD.

R. A (R,o), A′ (— R,o). M (x_0, y_0). Cercul de centru M are ca ecuaţie:

$$x^2 + y^2 - 2\,x_0x - 2\,y_0y + x_0^2 = 0$$

CD este axul radical al cercului dat şi celui cu centru în M. Locul este elipsa :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{4\,y^2}{R^2} = 1.$$

6. M fiind un punct variabil al unei elipse cu focarele F şi F′, se duce dreapta FM şi perpendiculara din centru pe tangenta în M la elipsă. Sá se afle locul geometric al punctului de intersecţie a acestor două drepte, când M descrie elipsa.

R. $x^2 + y^2 - cx = 0.$

7. Din fiecare punct M al unui cerc O se lasă perpendiculare MN pe o dreaptă D. Se cere locul mijlocului dreptei MN.

R. D $\equiv$ Ox. Cercul : $(x - o)^2 + (y-a)^2 = R^2$.

Locul este elipsa :

$$x^2 + (2\,y - a)^2 = R^2.$$

Transportând axele paralel în $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, elipsa are ca ecuaţie :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 1.$$

8. O dreaptă AB de mărime constantă $(a+b)$ se reazemă pe două drepte perpendiculare Ox şi Oy, A fiind pe Ox, B pe Oy. Se cere locul punctului M al dreptei AB, ştiind că AM $= a$, BM $= b$, a şi b fiind constante, când AB variază ca poziţie.

R. A (α,o), B(o,β). M (x,y). $\alpha^2 + \beta^2 = (a + b)^2$.

$$x = \frac{\alpha}{1 + \frac{a}{b}},\ y = \frac{\frac{a}{b}\,\beta}{1 + \frac{a}{b}}.$$

Locul este elipsa :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0.$$

9. Să se afle locul geometric al punctelor, astfel că suma pătratelor distanţelor la două drepte OD şi OD′ să fie constantă şi egală cu K^2.

P. Se ia ca Ox şi Oy bisectoarele unghiului DOD′, OD $= y - ax = 0$. Locul este elipsa:

$$\frac{2\, a^2 x^2}{K^2 (1 + a^2)} + \frac{2\, y^2}{K^2 (1 + a^2)} = 1.$$

10. Să se găsească locul mijloacelor coardelor unei elipse, ştiind că aceste coarde trec printr'un punct P.

R. P (p, q). Fie M_0 (x_0, y_0) mijlocul unei coarde. Se scrie coordonatele unui punct M $(x_0 + r \cos \alpha,\ y_0 + r \sin \alpha)$ al acestei drepte şi arătând că este pe elipsă, se pune condiţia că ecuaţia ce dă valorile lui r, are suma rădăcinilor zero. Se înlocueşte în relaţia găsită pe:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{q - y_0}{p - x_0},$$

căci dreapta M_0P este definită prin două puncte, al cărei coeficient unghiular $\operatorname{tg}\alpha$ este dat de relaţia de mai sus. Locul lui M_0 este elipsa: $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - b^2 p\, x_0 - a^2 q\, y_0 = 0.$

11. O coardă a unui cerc se deplasează paralel cu o direcţie fixă. Prin extremităţile ei se duc paralele cu două direcţii date.

Să se afle locul geometric al punctelor de întâlnire a acestor paralele.

R. Se ia ca origină centrul cercului, iar ca Ox paralela prin O cu direcţia coardelor. R fiind raza cercului, m, m' direcţiile paralelelor, $y = \lambda$ ecuaţia unei paralele cu Ox, se va duce prin punctele ei de intersecţie cu cercul paralele şi se elimină λ între ecuaţiile lor.

$$\frac{y - \lambda}{m} = x - \sqrt{R^2 - \lambda^2}, \qquad \frac{y - \lambda}{m'} = x + \sqrt{R^2 - \lambda^2}.$$

Locul este elipsa:

$$(m - m')^2 x^2 + \left(y - \frac{2\, m\, m'\, x}{m + m'} \right)^2 = R^2.$$

12. Să se afle locul geometric al punctelor de unde se poate duce la elipsă două tangente, astfel că dreptele ce unesc centrul elipsei cu punctul lor de contact, să fie doi diametrii conjugaţi.

R. Ecuaţia ce dă coeficienţii unghiulari ai tangentelor duse din M_0 (x_0, y_0) este:

$$m^2 (x_0^2 - a^2) - 2\, m\, x_0\, y_0 + y_0^2 - b^2 = 0,$$

Se ţine seamă că tangentele din M_0 sunt paralele cu diametrii conjugaţi. Locul este elipsa:

$$\frac{x_0^2}{2\,a^2} + \frac{y_0^2}{2\,b^2} = 1.$$

13. Fiind dată o elipsă cu axa mare AA′ şi cercul său director (cercul de diametru AA′), se duce printr'un punct M al elipsei o perpendiculară pe AA′, ce taie cercul în punctul N (M şi N fiind amândouă de aceiaşi parte a lui AA′). Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a normalei în M la elipsă şi normalei în N la cerc.

R. M $(a \cos \psi,\ b \sin \psi)$, N $(a \cos \psi,\ a \sin \psi)$. Locul este cercul:

$$x^2 + y^2 = (a + b)^2.$$

14. Se consideră o elipsă raportată la axele sale Ox, Oy şi două puncte D şi D′ pe Oy, astfel ca: OD $=$ OD′ $= d$; fie M $(x_0,\ y_0)$ un punct variabil pe elipsă,

1º. Dreapta DM taie pe Ox în N; să se afle locul geometric al punctului R de întâlnire al dreptelor OM şi D′N.

R. M (x_0, y_0), D (o, d). Ecuaţia locului geometric este:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\,x}{d + 2y}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{d\,y}{d + 2y}\right)^2 = 1.$$

15. Să se afle locul geometric al intersecţii perpendicularei din focarul. F pe tangentă în M, cu dreapta OM.

R. Directoarea corespunzătoare focarului F.

X 16 Locul intersecţii tangentelor la capetele a doi diametrii conjugaţi ai elipsei este o elipsă.

R. OM′, OM″ doi diametrii conjugaţi. M′ (x', y'), M″(x'', y''). Se calculează cu formulele lui *Chasles* coordonatele (x'', y'') cu ajutorul lui (x', y')

Se scrie ecuaţiile tangentelor în M′ şi M″: $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = 0$, etc.

Locul este:

$$\frac{x^2}{2\,a^2} + \frac{y^2}{2\,b^2} = 1.$$

X 17. Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie al perpendicularei din focarul F pe tangenta în M la o elipsă cu linia ce uneşte centrul cu punctul de contact al tangentei.

R. Directoarea corespunzătoarea focarului F.

Iperbola

80. **Iperbola este:** *Locul punctelor a căror diferență a distanțelor la două puncte fixe* F *și* F′, *numite* **focare,** *este constantă și egală cu* 2**a**.

Să însemnăm cu $2c$ *distanța focală* FF′ și să luăm ca axe Ox și Oy, dreapa FF′ și perpendiculara în mijlocul ei O. $M(x, y)$ fiind un punct al locului căutat, ecuația curbei va fi:

$$MF - MF' = 2a,$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Ridicând la pătrat și făcând operațiile, avem:

$$2(x^2 + y^2 + c^2) - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 4a^2.$$

sau:

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 2a^2.$$

Ridicând din nou la pătrat și aranjând, se obține aceiași ecuație ca la elipsă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Insă, în triunghiul FMF′, avem:

$$FF' > MF - MF'.$$

De unde:

$$2c > 2a, \quad c > a,$$

și deci putem pune:

$$a^2 - c^2 = -b^2, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Așa dar ecuația locului geometric este:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Aceasta este ecuaţia iperbolei.

Ecuaţia curbei, conţinând puterile cu soţ ale lui x şi y, este verificată şi pentru valorile: $(-x, y)$, $(-x, -y)$, $(x, -y)$, ceea ce probează că iperbola este o curbă simetrică în raport cu axa Oy, punctul O, axa Ox. Origina O se numeşte *centrul de simetrie al curbei*, Ox se zice *axa focală*, iar Oy *axa nefocală*.

Căutând punctele de intersecţie ale iperbolei cu axele de coordonate, se vede că numai Ox taie curba în puncte reale, ale căror coordonate sunt: $(a, 0)$, $(-a, 0)$, şi se numesc *vârfurile iperbolei*.

Axa Ox care taie curba se numeşte *axă transversă*, iar Oy *axă netransversă*, sau *imaginară*.

81. **Forma curbei. Asimptote.** Rezolvând ecuaţia (1) în raport cu y, avem:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Vom construi numai ramura:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

cuprinsă în unghiul xOy, adică făcând pe x să varieze de la 0 la $+\infty$. Insă pentru ca y să existe, trebue:

$$x^2 - a^2 \geqq 0, \quad x > a, \quad x < -a.$$

Deci curba este exterioară regiunei determinată de dreptele CC_1, $C'C'_1$ (Fig. 36):

$$x - a = 0, \quad x + a = 0.$$

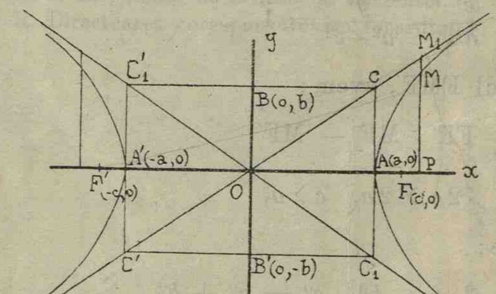


Fig. 36.

Când $x = a$, obţinem punctul $A(a, 0)$; făcând pe x să crească, şi y creşte, iar când $x = \infty$ şi $y = \infty$.

Să căutăm limita raportului:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

când $x = \infty$. Această limită fiind $\frac{b}{a}$, urmează că iperbola se apropie, când x creşte nemărginit, de dreapta OC:

$$y = \frac{b}{a} x.$$

Să considerăm diferenţa:

$$d = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

a ordonatelor a două puncte M_1 şi M ale dreptei OC şi iperbolei, corespunzătoare la aceiaşi valoare a lui $x = OP$. Când x creşte, se vede că această diferenţă se micşorează, iar când x tinde către infinit, avem:

$$\lim_{x=\infty} d = \frac{b}{a} \lim \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$\frac{b}{a} \lim \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

deci:

$$\lim_{x=\infty} d = 0.$$

Prin urmare, curba se apropie de dreapta OC,

$$y = \frac{b}{a} x,$$

şi când x creşte nemărginit, această dreaptă atinge curba, sau este tangentă iperbolei la infinit. Dreapta:

$$y = \frac{b}{a} x$$

se numeşte o *asimptotă a iperbolei.*

Considerând ramurile simetrice cu cea studiată, se vede că iperbola mai are o asimptotă, dreapta OC_1:

$$y = -\frac{b}{a} x$$

Asimptotele iperbolei sunt diagonalele dreptunghiului $CC'_1 C'C_1$, construit ducând paralele prin extremităţile A şi A' ale axei mari, pe care se ia lungimile:

$$AC = AC_1 = A'C'_1 = A'C' = b.$$

Luând simetrica ramurei construite în raport cu Ox, Oy, O, se obţine toată iperbola (Fig. 36).

Când asimptotele:

$$y = \frac{b}{a} x, \ y = -\frac{b}{a} x$$

ale unei iperbole sunt perpendiculare, adică:

$$a = b,$$

iperbola se zice *echilateră*; iar ecuaţia ei, raportată la axe, este:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Exemplu. *Să se construiască iperbola:*

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Avem: $a = 4$, $b = 3$. Construim asimptotele astfel: figurăm punctele A (4, o), A′ (—4, o), B (o, 3), B′ (o,—3); construim dreptunghiul $CC'_1C'C_1$ (Fig. 36); diagonalele dreptunghiului sunt asimptotele iperbolei. Pentru a construi focarele F (c, o), F′ $(-c, o)$, ne servim de formula:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

care probează că distanţa OF este ipotenuza triunghiului dreptunghic, ale cărui catete sunt OA, OB, adică OC; deci descriind un cerc din O ca centru şi cu OC ca rază, el va tăia axa transversă în focarele iperbolei, F şi F′.

82. **Iperbola definită ca alt loc geometric. Construcţia iperbolei prin puncte.** *Se dă un cerc cu diametru* AA′ $= 2a$ *şi o dreaptă* D *perpendiculară pe* AA′ *şi depărtată de centrul* O *cu distanţa* **b.** *Prin* O *se duce o rază variabilă* OM *a cercului* O, *care taie dreapta* D *în* N. *Tangenta în* M *la cerc taie diametrul* AA′ *în* P. *Paralela din* M *la* AA′ *şi perpendiculara în* P *pe* AA′ *se taie în* R. *Să se afle locul geometric al punctului* R, *când raza* OM *variază.*

Luăm AA′ ca Ox şi perpendiculara în O ca Oy. Să însemnăm cu φ unghiul variabil x OM. Avem, însemnând cu Q intersecţia dreptelor AA′ şi D,:

$$OP = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad NQ = b\,\mathrm{tg}\varphi.$$

Coordonatele punctului R vor fi:

$$(R). \quad x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = b\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Ca să elinimăm pe φ, procedăm astfel:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1.$$

Deci, locul punctului R este iperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ale cărei semi axe sunt: a, b.

De aci, deducem *reprezentarea parametrică a iperbolei:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

anume, exprimarea coordonatelor unui punct al curbei, în funcţiune de un parametru variabil φ,

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = b\,\mathrm{tg}\varphi.$$

De asemenea, enunciul problemei de faţă *este o metodă pentru construirea prin puncte a iperbolei ale cărei semi axe sunt* **a** *şi* **b**.

83. **Ecuaţia tangentei într'un punct al iperbolei.** $M_0\ (x_0, y_0)$ fiind un punct al iperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

pentru a obţine ecuaţia tangentei în acest punct, vom proceda analog ca la elipsă (§ 69) şi ecuaţia ce dă valorile lui r, corespunzătoare punctelor de intersecţie ale iperbolei cu o dreaptă ce trece prin M_0, va fi:

$$r^2\left[\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right]+2r\left[x_0\frac{\cos\alpha}{a^2}-y_0\frac{\sin\alpha}{b^2}\right]+\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1=0.$$

Prin urmare, *o dreaptă taie o iperbolă în două puncte la distanţă finită, în general*, afară de cazul:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2}=0,$$

adică:
$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{b}{a},$$

când dreapta considerată este paralelă cu una din asimptote, când unul din puncte este la distanţă finită şi altul la infinit ($r=\infty$).

Scriind că cele două puncte de intersecţie se confundă cu M_0, vom avea:

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1=0,\quad \frac{x_0\cos\alpha}{a^2}-\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}=0,\quad tg\alpha=\frac{b^2x_0}{a^2y_0},$$

iar *ecuaţia tangentei la iperbolă în* M_0 (x_0, y_0) este:

$$y-y_0=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0),\quad\left[\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1=0\right],$$

sau:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0,\quad\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1=0\right).$$

84. **Tangente paralele cu o direcţie dată.** Procedând ca la elipsă (§. 70) ecuaţia tangentelor la iperbolă paralele cu direcţia m, va fi:

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

Va corespunde numai o singură tangentă, când direcţia m este *asimptotică* (dreaptă de direcţia m paralelă cu una din asimptote), în care caz, tangenta este chiar acea asimptotă.

In general, însă se pot duce la iperbolă două tangente paralele cu direcţia m, când această direcţie nu este asimptotică.

85. **Polara unui punct faţă de iperbolă. Directoare.**

Printr'un procedeu analog ca la § 71, se va obţine ecuaţia:

$$\frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} - 1 = 0,$$

a polarei punctului $M_0\ (x_0, y_0)$ în raport cu iperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Polarele focarelor $F\ (c, 0)$, $F'\ (-c, 0)$, sunt:

$$\frac{c\,x}{a^2} - 1 = 0, \quad \frac{c\,x}{a^2} + 1 = 0,$$

şi se numesc *directoarele iperbolei.*

Pentru găsirea polului unei drepte date, se procedează ca la elipsă.

86. **Ecuaţia tangentelor duse dintr'un punct la iperbolă.**

Punctele de contact ale tangentelor duse din $M_0\ (x_0, y_0)$ la o iperbolă:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

sunt (x', y'), (x'', y''), ale căror coordonate sunt rădăcinile ecuaţiilor (§ 72):

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x_0\,x'}{a^2} - \frac{y_0\,y'}{b^2} - 1 = 0,$$

sau, punctele de intersecţie ale iperbolei cu polara lui M_0. Ecuaţiile celor două tangente vor fi:

$$\frac{x\,x'}{a^2} - \frac{y\,y'}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x\,x''}{a^2} - \frac{y\,y''}{b^2} - 1 = 0.$$

Ecuaţia care dă *coeficienţii unghiulari* ai celor două tangente, duse din $M_0\ (x_0, y_0)$, este urmând ca la elipsă:

$$m^2\,(x_0^2 - a^2) - 2\,m\,x_0\,y_0 + y_0^2 + b^2 = 0.$$

Condiţia de realitate ale rădăcinilor acestei ecuaţii, este:

$$x_0^2\,y_0^2 - (x_0^2 - a^2)\,(y_0^2 + b^2) \geq 0,$$

sau:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \leqq 0$$

Ca şi în cazul elipsei, *iperbola împarte planul în două regiuni* (din punct de vedere elementar ar fi trei); într'o regiune, expresiunea:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

are un semn, pe curbă valoarea ei este zero, în cealaltă regiune, semn contrar. In regiunea unde se află origina, va aveà semnul ce se obţine făcând $x = y = 0$, adică:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 < 0,$$

în cealaltă regiune va avea semnul $+$.

Prin urmare, când punctul M_0 (x_0, y_0) este în regiunea unde se află origina (centrul) se pot duce două tangente; când M_0 este în cealaltă regiune, nu se poate duce nici una; când M_0 este pe curbă se duce numai o singură tangentă.

Aplicaţie. *Locul punctelor de unde se poate duce la iperbolă tangente perpendiculare,* este cercul:

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2,$$

concentric cu iperbola care există numai pentru $a > b$, adică dacă unghiul a simptomelor care conţine iperbola este ascuţit; cercul se reduce la un punct când $a = b$ (iperbolă echilateră). In orice alt caz nu există puncte de unde să se ducă la iperbolă tangente perpendiculare.

87. **Ecuaţia normalei la iperbolă** în punctul M_0 (x_0, y_0) este:

$$y - y_0 = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}(x - x_0), \quad \frac{x_0^2}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

88. **Diametrii. Diametrii conjugaţi.** Locul mijloacelor coardelor paralele, adică diametrul conjugat coardelor de direcţie m, care se obţine ca la elipsă (§ 75), va fi:

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Toţi diametrii deci trec prin centrul iperbolei. Coeficientul unghiular m' al acestui diametru fiind:

$$\frac{b^2}{a^2\,m},$$

rezultă că între coeficienţii unghiulari m şi m' există relaţia:

$$\boxed{m\,m' = \frac{b^2}{a^2}}$$

Considerând coardele de direcţie m', adică paralele cu diametrul D, diametrul D′ conjugat acestor coarde va fi:

$$y = \frac{b^2}{a^2\,m'}\,x,$$

şi deci între coeficienţii unghiulari a doi diametrii conjugaţi, D şi D′, există relaţia:

$$m\,m' = \frac{b^2}{a^2},$$

iar unul din ei este locul mijloacelor coardelor iperbolei, paralele cu celalt diametru.

Pentru a vedea poziţia a doi diametrii conjugaţi D şi D′ ai iperbolei, să însemnăm cu α şi α' unghiurile lor cu Ox; avem:

$$\operatorname{tg}\alpha.\ \operatorname{tg}\alpha' = \frac{b^2}{a^2} > 0.$$

Deci dacă unul din diametrii este în unghiul $x\,o\,y$, ($\alpha < 90$), şi celalt diametru este tot în unghiul xoy, căci din relaţia de mai sus, se găseşte:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{b^2}{a^2\,\operatorname{tg}\alpha} > 0,\ \alpha' < 90^0.$$

Mai mult, *dacă unul din diametrii*, de ex.:

$$y = mx,$$

taie iperbola, celalt:

$$y = \frac{b^2}{a^2\,m}\,x,$$

nu mai întâlneşte iperbola şi este un diametru imaginar, căci punctele de intersecţie sunt imaginare. Mai clar, asimptota:

$$y = \frac{b}{a} x$$

este cuprinsă în unghiul format de cei doi diametri conjugaţi.

Când iperbola este echilateră, ecuaţia ei fiind:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

cei doi diametrii conjugaţi sunt:

$$y = mx,\ y = \frac{1}{m} x;\ \operatorname{tg} \alpha = m,\ \operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{m} = \operatorname{cotg} \alpha$$

Deci:

$$\alpha' = 90^0 - \alpha,\ 45^0 = \frac{\alpha + \alpha'}{2},$$

care probează că bisectoarea axelor Ox, Oy este bisectoarea celor doi diametrii conjugaţi, sau că *cei doi diametrii sunt simetrici în raport cu* această bisectoare, care este *asimptota iperbolei.*

89. **Ecuaţia iperbolei echilatere raportată la asimptotele ei.** Ecuaţia unei iperbole echilatere raportată la axele ei fiind:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

asimptotele ei vor fi:

$$x - y = 0, \quad x + y = 0,$$

adică bisectoarele axelor.

Pentru a raportà iperbola echilateră la asimptotele ei, va fi de ajuns să învârtim axele Ox, Oy împrejurul originei cu unghiul $\alpha = 45^0$. Formulele de transformare vor fi:

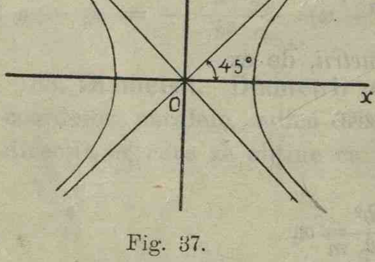


Fig. 37.

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha,$$

$$y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha,$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (X - Y),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} (X + Y),$$

iar ecuaţia iperbolei devine:

$$\frac{1}{2}(X - Y)^2 - \frac{1}{2}(X + Y)^2 = a^2,$$

sau :

$$X\,Y = -\frac{a^2}{2}.$$

Schimbând sensul axei OX, ecuaţia iperbolei raportată la asimptotele ei va fi :

$$X\,Y = \frac{a^2}{2}$$

90. **Iperbole conjugate.** Iperbolele :

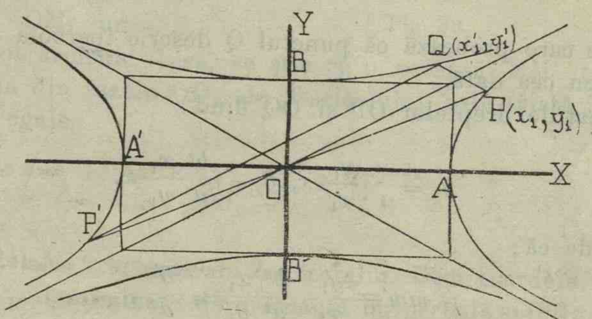


Fig. 38.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0,$$

care au aceleaşi asimptote, se zic *iperbole conjugate*. Axa transversă a uneia este axa netransversă a celeilalte. Iperbola conjugată are o altă însemnare. Considerând (Fig. 38) punctul P (x_1, y_1) şi simetricul său în raport cu centru P' $(-x_1, -y_1)$ să ducem prin P şi P' paralelele:

$$y - y_1 = -\frac{b}{a}(x - x_1), \; y + y_1 = \frac{b}{a}(x + x_1)$$

la asimptotele iperbolei date; aceste drepte se vor tăià în punctul Q, ale cărui coordonate se obţin adunând şi scăzând ecuaţiile lor,

$$x_1' = \frac{a}{b} y_1, \; y'_1 = \frac{b}{a} x_1$$

De unde

$$x_1 = \frac{a}{b} y'_1,\ y_1 = \frac{b}{a} x'_1.$$

Punctul P $(x_1\ y_1)$ descrie iperbola dată şi deci :

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Inlocuind pe x_1 şi y_1, deducem:

$$\frac{x'^2_1}{a^2} - \frac{y'^2_1}{b^2} + 1 = 0,$$

relaţie care probează că punctul Q descrie iperbola conjugată cu cea dată.

Ecuaţiile dreptelor OP şi OQ fiind :

$$y = \frac{y_1}{x_1} x,\ y = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1} x,$$

se vede că :

$$mm' = \frac{y_1}{x_1} . \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1} = \frac{b^2}{a^2},$$

şi deci OP şi OQ sunt doi diametrii conjugaţi.

Prin urmare, *iperbola conjugată cu cea dată este locul geometric al extremităţilor diametrilor imaginari ai iperbolei considerate.*

91. **Proprietăţi ale asimptotelor şi diametrilor conjugaţi.**

I. *Doi diametrii conjugaţi formează cu asimptotele un fascicol armonic.* Coeficienţii unghiulari m_1, m_2, m_3, m_4 ai acestor drepte fiind :

$$m_1 = m,\ m_3 = \frac{b^2}{a^2\ m},\quad m_2 = \frac{b}{a},\quad m_4 = -\ \frac{b}{a},$$

relaţia :

$$2\ (m_1\ m_3 + m_2\ m_4) = (m_1 + m_3)\ (m_2 + m_4)$$

este verificată şi teorema este demonstrată.

II. *O secantă oarecare, neparalelă cu o asimptotă, determină în iperbolă şi între asimptote, coarde care au acelaş mijloc.* Fie

MM′ o coardă în iperbolă, al cărei mijloc este N: diametrul conjugat direcţii coardelor paralele cu MM′ (Fig. 39), este ON. Ducând prin O paralela O D_1 cu M M′, dreptele OD, OD_1 sunt doi diametrii conjugaţi deci formează cu asimptotele OM'_1, OM_1 un fascicol armonic. Insă, se ştie că o secantă MM′ paralelă cu una din razele OD_1 ale fascicolului, este tăiată în două părţi egale :

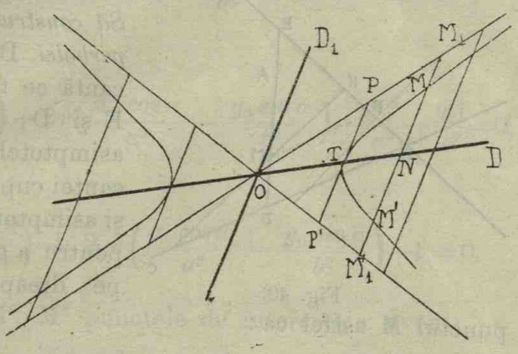


Fig. 39.

$$M_1 N = N M'_1,$$

de celelalte trei raze ale fascicolului. Deci coardele MM′ şi M_1 M'_1, determinate de o secantă în iperbolă şi între asimptote, au acelaş mijloc.

III. O consecinţă a acestei proprietăţi este că: *porţiunile* M_1 M, M'_1 M′, *determinate pe o secantă de o iperbolă şi asimptotele sale şi cuprinse între curbă şi asimptote sunt egale.*

IV. O altă consecinţă este că : *porţiunea unei tangente cuprinsă între asimptote are mijlocul său în punctul de contact.* In adevăr, în acest caz (Fig. 39) extremităţile M, M′ şi mijlocul N al coardei, ce secanta PP′ ar determinà în iperbolă, sunt confundate cu punctul de contact T.

92. **Construcţiuni geometrice asupra iperbolei.** I. **Să se construiască un punct al iperbolei şi tangenta în acest punct.** *Vom presupune totdeauna că iperbola este definită prin asimptotele sale şi un punct,* căci chiar dacă e dată prin axele sale, asimptotele se pot construì uşor, iar unul din vârfurile axei mari este un punct cunoscut.

Fie așà dar A un punct al iperbolei ale cărei asimptote sunt : OC și OC′ (Fig. 40). *Să construim un punct al iperbolei.* Ducem prin A o secantă ce taie asimptotele în E și D; după proprietatea asimptotelor, porțiunile secantei cuprinse între iperbolă și asimptote sunt egale; deci pentru a găsi punctul așezat pe dreapta ED, vom luà punctul M astfel ca:

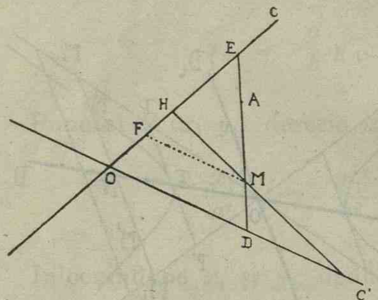


Fig. 40.

$$DM = AE.$$

Pentru a duce tangenta în acest punct M, ne servim de proprietatea că tangenta determină între asimptote un segment, al căruì mijloc este punctul de contact. Va trebuì să ducem prin M o dreaptă mărginită la asimptote, al cărei mijloc să fie M. Pentru acesta, ducem prin M paralela MF la asimptota C′O și vom luà pe cealaltă asimptotă punctul H, așà că: FH = OF. Tangenta în M la iperbolă este HM.

93. II. **Să se afle punctele de intersecție ale unei drepte cu o iperbolă.** Pentru a găsì această construcție, vom rezolvà următorea problemă: Fie $M_0 (x_0, y_0)$ un punct al iperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ecuația comună a asimptotelor curbei este:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Să ducem prin $M_0 (x_0, y_0)$ o dreaptă al cărei unghiu cu Ox este α. Insemnând cu $M (x, y)$ un punct oarecare al acestei drepte, să găsim ecuația ce dă valorile lui $r = \overline{M_0M}$, corespunzătoare punctelor de intersecție ale acestei drepte cu asimptotele. Inlocuind pe x și y cu:

$$x = x_0 + r\cos\alpha, \quad y = y_0 + r\sin\alpha,$$

în ecuația asimptotelor, avem:

$$\frac{(x_0 + r\cos\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + r\sin\alpha)^2}{b^2} = 0.$$

De unde :

$$r^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right) + 2r\left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2} - \frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right) + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0,$$

sau :

$$r^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right) + 2r\left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2} - \frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right) + 1 = 0.$$

Insemnând cu M′, M″ punctele de intersecţie, avem :

$$\overline{M_0M'} = r', \qquad \overline{M_0M''} = r'',$$

$$\overline{M_0M'}.\ \overline{M_0M''} = r'r'' = \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}$$

De aci rezultă următoarea proprietate : **Dintr'un punct M_0 oarecare al unei iperbole, se duce o paralelă cu o direcţie dată, care tae asimptolele în M′ şi M″. Produsul $\overline{M_0M'}.\ \overline{M_0M''}$ este constant, ori care ar fi poziţia punctului M_0 pe iperbolă.**

1⁰. Acestea fiind stabilite, să revenim la *construcţia punctelor de intersecţie ale unei drepte* D, *neparalelă cu asimptotele, cu iperbola definită prin asimptotele sale* OC, OC′ *şi punctul* A (Fig. 41).

Fie E şi E′, B şi B′ punctele de intersecţie ale asimptotelor OC şi OC′ cu dreapta D şi paralela ei dusă prin A. După proprietatea de mai sus, dacă însemnăm cu M unul din punctele de intersecţie ale dreptei D cu iperbola avem :

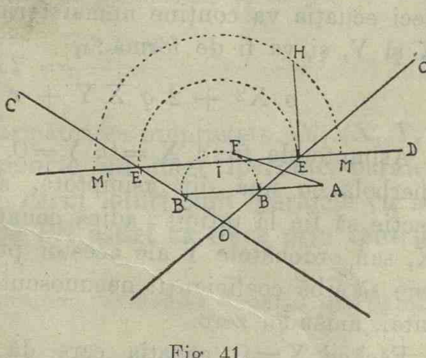


Fig. 41.

$$AB.\ AB' = ME.\ ME'.$$

Vom întrebuinţă pentru găsirea lui M următoarea construcție: fie F punctul de contact al tangentei duse din A la cercul de diametru BB′. Lungimea AF este cunoscută, fiindcă avem:

$$\overline{AF}^2 = AB. AB'.$$

Ridicăm în E o perpendiculară EH = AF, pe dreapta D. I fiind centrul cercului de diametru EE′, iar P și Q punctele de intersecție ale acestui cerc cu HI, avem:

$$\overline{EH}^2 = HP. HQ,$$

sau:

$$\overline{EH}^2 = \overline{AF}^2 = AB. AB' = HP. HQ,$$

Descriem din I ca centru, și cu raza IH, un cerc ce taie pe D în M și M′. Lungimile HP și HQ sunt respectiv egale cu ME și ME′; de unde:

$$AB. AB' = ME. ME',$$

relație care probează că M și M′ sunt punctele de intersecție ale dreptei D cu iperbola. (EM=E′M′).

2°. Pentru a găsi punctele de intersecție ale iperbolei cu o dreaptă D paralelă cu o asimptotă, trebue mai întâi a scrie **ecuația iperbolei raportată la asimptotele sale ca axe de coordonate oblice.**

Ecuația iperbolei va fi de gradul II-a în raport cu X și Y. Curba fiind simetrică în raport cu centrul, care este origina axelor OX, OY, ecuația iperbolei va trebui să fie satisfăcută când vom înlocui pe X și Y cu — X, — Y; deci ecuația va conține numai termeni de gradul al II-a în X și Y, și va fi de forma:

$$p\,X^2 + 2\,q\,XY + r\,Y^2 + s = 0$$

Asimptotele fiind X = 0, Y = 0, va trebui ca intersectând iperbola cu una din asimptote, ambele puncte de intersecție să fie la infinit; adică ecuația care va da abscisele X, sau ordonatele Y ale acestor puncte de intersecție, trebue să aibă coeficienții necunoscutei la gradul al doilea și întâi, amândoi zero.

Făcând X = 0, ecuația care dă ordonatele punctelor de intersecție ale iperbolei cu asimptota OY, este:

$$r\,Y^2 + s = 0;$$

iar
ocentelor

deci : $r=0$. In acelaş mod, făcând $Y=0$, găsim: $p=0$.

Ecuaţia iperbolei va fi de forma :

$$2\,q\,XY + s=0, \quad XY = -\frac{s}{2\,q}.$$

Schimbând sensul axei OX, ceeace se obţine înlocuind X cu — X, ecuaţia este:

$$XY = \frac{s}{2\,q}, \quad XY = K^2.$$

Pentru a găsì valoarea constantei K, cu ajutorul cantităţilor a, b, vom luà intersecţia iperbolei cu prima bisectoare, $X=Y$, axa transversă a iperbolei, şi vom găsì (K, K) coordonatele punctului A de intersecţie. Tangenta în a acest punct la iperbolă, care este paralelă cu bisectoarea doua: $X = -Y$, taie axa OX în punctul C, a cărui abscisă este $2\,K$. Considerând triunghiul dreptunghic OAC, avem:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2,$$

sau:

$$4\,K^2 = a^2 + b^2;$$

de unde:

$$K^2 = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Ecuaţia iperbolei raportată la asimptotele ei va fi :

$$XY = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Să demonstrăm acum următoarea proprietate: $M_1\,(X_1, Y_1)$, $M_2\,(X_2, Y_2)$ **fiind două puncte ale unei iperbole, paralelogramul** $M_1NM_2\,P$ **ale cărui laturi sunt paralele cu asimptotele, are diagonala** PN **astfel că trece prin centrul iperbolei** (Fig. 42).

Coordonatele acestor puncte verificând ecuaţia iperbolei:

$$XY = \frac{a^2+b^2}{4},$$

avem :

$$X_1\,Y_1 = X_2\,Y_2.$$

Construind paralelogramul $M_1 NM_2 P$, coordonatele punctelor P și N sunt:

$$P(X_1, Y_2), \quad N(X_2, Y_1)$$

și deci ecuația dreptei PN va fi:

$$Y - Y_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{X_2 - X_1}(X - X_1).$$

Făcând $X = Y = 0$, obținem:

$$Y_2 (X_1 - X_2) = - X_1 (Y_1 - Y_2).$$

sau:

$$X_2 Y_2 = X_1 Y_1,$$

relație care există, deoarece punctele M_1 și M_2 fiind pe iperbolă. Ecuația diagonalei NP fiind verificată de coordonatele originii, rezultă că această dreaptă trece prin centrul iperbolei.

Acestea fiind stabilite, *să ne propunem a construì punctele de intersecție ale unei iperbole, cu o dreaptă paralelă cu una din asimptote* (Fig. 42).

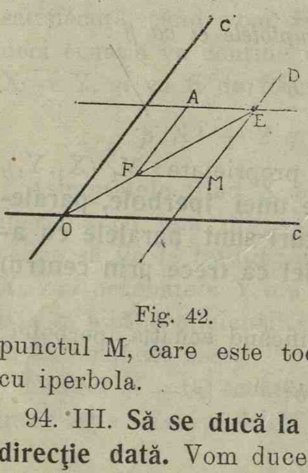


Fig. 42.

Diagonalele fiind OC, OC', să ducem prin A o paralelă la OC, care va tăià dreapta D în E; unim O cu E și dreapta OE va fi diagonala paralelogramului considerat în proprietatea precedentă. Pentru a construì paralelogramul, ducem prin A o paralelă la OC', care va tăià pe OE în F. Paralela din F la OC taie dreapta D în punctul M, care este tocmai intersecția acestei drepte cu cu iperbola.

94. III. **Să se ducă la o iperbolă tangente paralele cu o direcție dată.** Vom duce prin centrul O al iperbolei defi-

nită prin asimptolele OC, OC_1 o dreaptă OD_1 paralelă cu direcţia dată (Fig. 43). Ştim că printre coardele paralele cu o direcţie dată sunt şi tangentele la iperbolă paralele cu acea direcţie; deci diametrul conjugat direcţii coardelor paralele cu OD_1, trece prin punctele de contact ale tangentelor paralele cu OD_1. Să construim diametrul OD conjugat cu OD_1.

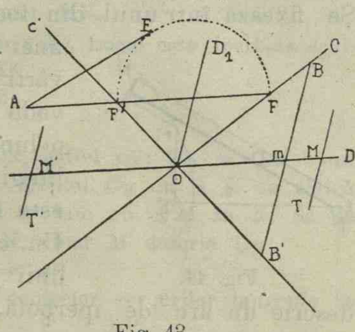


Fig. 43.

Pentru aceasta ducem o paralelă cu OD_1, care taie asimptotele în B şi B'. Dreapta Om, ce uneşte centrul cu mijlocul dreptei BB' este diametrul OD conjugat cu OD_1. Pe această dreaptă sunt punctele de contact M şi M' ale iperbolei cu tangentele paralele cu OD_1. Ducem prin punctul A, dat al iperbolei, o paralelă cu OD, şi fie F şi F' punctele de intersecţie ale ei cu asimptotele; ducând tangenta AE din punctul A la cercul de diametru FF', avem:

$$\overline{AE}^2 = AF.\ AF'.$$

Ştim însă, că dacă am fi dus prin alt punct M al iperbolei o paralelă cu AF şi am fi considerat punctele ei de intersecţie cu asimptotele, am fi avut relaţia:

$$AF.\ AF' = MO.\ MO,$$ căci în cazul nos
dreapta OD taie as
tele în acela punct

Insă:

$$\overline{AE}^2 = AF.\ AF';$$

deci $$\overline{AE}^2 = \overline{MO}^2, \qquad AE = MO.$$

Deci, pentru a găsi punctul M, luăm pe OD lungimea $OM = AE$. De asemenea simetricul M' al lui M în raport cu O, este un alt punct care satisface relaţia de mai sus. Dreptele MT, $M'T'$ paralele cu OD_1 sunt tangentele la iperbolă paralele cu direcţia dată.

95. IV. **Construcţia iperbolei printr'o trăsătură continuă.** Se fixează într'unul din focare F' al curbei, extremitatea unei linii astfel ca să se poată învârtì în jurul acestui punct, cum se vede pe figura 44. Un fir, care are o lungime egală cu diferenţa dintre lungimile linii şi axei transverse, este legat în F şi de capătul linii. Un creion M alunecând dealungul linii şi ţinând firul întins pe linie, descrie un arc de iperbolă. In adevăr, diferenţa razelor vectoare F'M şi FM este constantă şi egală cu diferenţa lungimilor linii şi firului, adică $2a$.

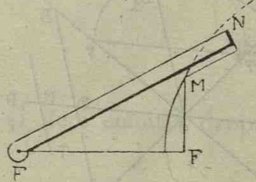


Fig. 44.

Exerciţii.

1. Se duce prin origina axelor de coordonate perpendiculare o secantă variabilă ce taie două drepte paralele cu Ox şi Oy în punctele A şi B. Paralele la axe prin A şi B se taie în M. Se cere locul geometric al lui M.

R. $xy = \text{const.}$ O iperbolă echilateră ale cărei asimptote sunt axele de coordonate.

2. Fie C şi D punctele unde o paralelă variabilă cu Oy taie un cerc cu centru O şi de rază R. A şi B fiind extremităţile diametrului aşezat pe Ox, să se afle locul geometric al punctului M de întâlnire al dreptelor AD şi BC.

R. Se înmulţesc ecuaţiile dreptelor AD şi BC. Locul este iperbola echilateră : $x^2 - y^2 = R^2$.

3. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor ce determină pe axele de coordonate două coarde de lungimi date.

R. Cercul variabil : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$. Se caută punctele de intersecţie cu axele; se scrie că acele coarde au lungimile a şi b, se va eliminà r între ele; locul este :

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2 - b^2}{4}.$$

4. Prin două puncte fixe A şi B se duce un cerc variabil; să se afle locul geometric al punctului de contact al cercului cu tangentele duse la acest cerc perpendiculare pe AB.

R. A (a, o), B $(-a, o)$. Centrul cercului (o, λ). Locul este : $(x^2 - y^2)(x^2 - y^2 - 2a^2) = 0$; $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 - y^2 = 2a^2$.

5. Fiind date două axe perpendiculare Ox şi Oy, se ia pe Ox punctul variabil M şi pe Oy punctul variabil N, astfel că supra-

fața triunghiului OMN să fie constantă și egală cu K^2. Să se afle locul geometric al mijlocului dreptei MN.

R. M (λ, o), N (o, μ). $\lambda \mu = 2 K^2$. Locul este iperbola echilateră:
$$x y = \frac{K^2}{2},$$
raportată la asimptotele sale.

6. Se dă punctele A și A′ pe Ox, astfel că: $OA = OA' = a$. Se unește un punct variabil M al dreptei Oy cu A și se ridică perpendiculara în A pe AM, care se taie cu A′M în N. Să se afle locul geometric al punctului N, când M descrie Oy.

R. M (o, λ). $x^2 - y^2 = a^2$.

/ 7. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente la două cercuri de raze R și R′.

R. Linia centrelor ca Ox, coordonatele centrelor (a, o), $(-a, o)$. Locul este o iperbolă cu focarele în centrele cercurilor și semiaxa mare: $\frac{R - R'}{2}$.

/ 8. Printr'un punct A al unei iperbole echilatere se duc două coarde AM și AN, perpendiculare între ele și care taie iperbola în M și N. Să se demonstreze că dreapta MN este paralelă cu normala în A la iperbolă.

R. Se raportează iperbola echilateră la asimptotele ei; are ecuația: $xy = \frac{a^2}{2}$. A (x_1, y_1), M (x_2, y_2), se caută coordonatele punctului N unde perpendiculara în A taie iperbola.

9. Tangenta într'un punct M al unei iperbole echilatere cu centru în O taie axele Ox și Oy (de simetrie ale curbei) în N și N′. Să se arate că cercul de diametru NN′ este tangent în O dreptei OM.

$$\text{R. M } (x_0, y_0), \quad \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{a^2} = 1.$$

X 10. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al perpendicularei din centrul unei iperbole pe tangenta în M la iperbolă cu dreapta ce unește focarul F cu punctul variabil al iperbolei.

R. Un cerc.

11. A fiind mijlocul lui BC, să se afle locul punctelor M, astfel că: $\overline{MA}^2 = MB \cdot MC$.

R. $AB = AC = a$. Locul este iperbola:
$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

X 12. Se dă un cerc C tangent la axele de coordonate Ox și Oy. O tangentă variabilă la acest cerc taie axele Ox în A și Oy în B. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al paralelor la axe duse prin A și B, când tangenta variază.

R. Fie M (x_0, y_0) un punct al locului. A $(x_0, 0)$; B $(0, y_0)$.

Se scrie că dreapta AB este tangentă cercului de rază R. Locul este iperbola:

$$(x_0 - 2\,R)\,(y_0 - 2\,R) = 2\,R^2.$$

Deplasând axele în punctul $x_0 = 2\,R$, $y_0 = 2\,R$, ecuația curbei va fi:

$$X\,Y = 2\,R^2.$$

Parabola

96. *Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct* F, *numit* **focar,** *și de o dreaptă* D, *numită* **directoare.** Vom luà pentru axa Ox perpendiculara FD lăsată din F pe dreapta D și pentru Oy. perpendiculara pe Ox în mijlocul lui FD (Fig. 45). Sensul axei Ox este îndreptat dela directoare către focar. Lungimea DF se numește *parametrul* parabolei și se notează cu **p**. Coordonatele punctului F sunt deci $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, iar ecuația directoarei : $x + \frac{p}{2} = 0$.

Insemnând cu M (x, y) coordonatele unui punct al locului geometric și cu Mm distanța punctului M la directoare, avem :

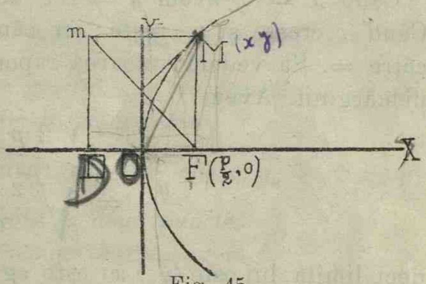


Fig. 45.

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$M\,m = x + \frac{p}{2}.$$

Ecuația locului geometric va fi :

$$MF = Mm,$$

sau :

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Ridicând la pătrat, se obține ecuația parabolei :

$$y^2 - 2\,p\,x = 0.$$

Ecuaţia neconţinând de cât puterea cu soţ a lui y, va fi verificată înlocuind pe y cu $-y$; deci curba este simetrică în raport cu axa Ox, numită *axa de simetrie* a curbei. Făcând $y=0$, se obţine $x=0$; parabola are *vârful său* O în origina axelor.

97. **Forma curbei.** Rezolvând ecuaţia parabolei în raport cu y, se obţine:

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

Curba fiind simetrică în raport cu Ox, vom construì numai ramura:

$$y = \sqrt{2px},$$

cealaltă ramură construindu-se uşor dacă se ia simetrica celei dintâi în raport cu Ox.

Pentru ca y să existe, trebue:

$$2px > 0,$$

sau: $x > 0$; vom studià variaţia funcţiunei numai pentru valorile pozitive ale lui y. Tot de acì se mai deduce că parabola este aşezată la dreapta axei Oy.

Când $x=0$, avem $y=0$; curba trece prin origină. Când x creşte şi y creşte; iar când $x=\infty$ şi y tinde către ∞. Să vedem valoarea raportului $(y:x)$ când x creşte nemărginit. Avem:

$$y = \sqrt{2px},$$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{2p}{x}};$$

deci limita lui este $(y:x)$ este egală cu zero, când $x=\infty$, pe când în cazul iperbolei acest raport erà $\frac{b}{a}$.

In cazul iperbolei raportul $(y:x)$ având o limită determinată, aceasta însemnà că x şi y crescând foarte mult, gradul lor de mărime erà acelaş, sau mai bine că x şi y creşteau proporţional; pe când *în cazul parabolei*, x creşte mai repede către infinit de cât y şi de aceia raportul dintre y şi x a fost zero.

Exemplu. *Să se construiască parabola:*

$$y^2 - 3x = 0.$$

$\frac{p}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad \frac{p}{2} \quad 1+\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2}$

Vârful este în origina axelor; coordonatele focarului sunt $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$; ecuaţia directoarei: $x + \frac{3}{4} = 0$.

98. **Tangenta într'un punct al parabolei.** Fie M_0 (x_0, y_0) un punct al parabolei:

$$y^2 - 2\,p\,x = 0,$$

adică:

$$y_0{}^2 - 2\,p\,x_0 = 0.$$

Ecuaţia tangentei în acest punct va fi de forma:

$$y - y_0 = \operatorname{tg} \alpha\,(x - x_0),$$

rămânând să determinăm pe $\operatorname{tg} \alpha$, astfel ca cele două puncte de intersecţie ale acestei drepte cu parabola, să se confunde cu M_0.

Coordonatele unui punct al acestei drepte sunt:

$$x = x_0 + r \cos \alpha, \quad y = y_0 + r \sin \alpha.$$

Scriind că acest punct este pe curbă, obţinem:

$$(y_0 + r \sin \alpha)^2 - 2\,p\,(x_0 + r \cos \alpha) = 0,$$

sau:

$$r^2 \sin^2\alpha + 2\,r\,(y_0 \sin \alpha - p\cos\alpha) + y_0{}^2 - 2\,p\,x_0 = 0. \quad (1).$$

Această ecuaţie fiind de gradul II-a în raport cu r, rezultă că avem două puncte de intersecţie:

$$x_0 + r' \cos \alpha,\ y_0 + r' \sin \alpha;\ x_0 + r'' \cos \alpha,\ y_0 + r'' \sin \alpha;$$

deci o dreaptă taie o parabolă în două puncte.

De oarece punctul M_0 este pe curbă, avem:

$$y_0{}^2 - 2\,p\,x_0 = 0,$$

şi deci ecuaţia (1) are o rădăcină $r' = 0$, ceiace trebuià, căci un punct de intersecţie este M_0 (x_0, y_0).

Pentru ca dreapta considerată să fie tangentă parabolei în M_0, trebue ca şi celalt punct să se confunde cu M_0, adică şi $r'' = 0$.

Deci:

$$y_0 \sin \alpha - p \cos \alpha = 0.$$

De unde:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y_0},$$

iar ecuaţia tangentei în M_0 (x_0, y_0) va fi :

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0), \quad (y_0^2 = 2\,p\,x_0),$$

sau, dezvoltând :

$$y\,y_0 - p\,(x + x_0) = 0, \qquad (y_0^2 = 2\,p\,x_0).$$

Căutând punctul de intersecţie al acestei tangente cu axa Ox, ceiace se obţine făcând $y = 0$, avem :

$$x + x_0 = 0,$$

sau :

$$x = - x_0,$$

ceiace probează, că : **Punctul de intersecţie al tangentei M_0 la o parabolă, cu axa Ox a parabolei, este simetricul proecţiei pe axă a punctului M_0, în raport cu vârful parabolei.**

99. **Tangentă paralelă cu o direcţie dată.** Insemnând cu m direcţia dată, pentru ca dreapta:

$$y = m\,x + n$$

să fie tangentă la parabola:

$$y^2 - 2\,p\,x = 0,$$

va trebuì ca ecuaţia ce se obţine înlocuind pe y cu $mx + n$, să aibă două rădăcini egale. Avem :

$$(m\,x + n)^2 - 2\,p\,x = 0,$$

de unde :

$$m^2\,x^2 + 2\,x\,(m\,n - p) + n^2 = 0.$$

Condiţia ca să aibă două rădăcini egale, este:

$$(m\,n - p)^2 - m^2\,n^2 = 0.$$

De unde :

$$n = \frac{p}{2\,m},$$

iar ecuaţia tangentei paralelă cu direcţia m va fi:

$$y = m\,x + \frac{p}{2\,m}.$$

Rezultă că la parabolă se poate duce numai o singură tangentă paralelă cu o direcţie dată.

100. **Polara unui punct faţă de parabolă.** M_0 (x_0, y_0) fiind un punct în planul unei parabole:

$$y^2 - 2\,p\,x = 0,$$

locul punctelor conjugate armonic cu M_0, în raport cu punctele de intersecţie ale parabolei cu o secantă variabilă ce trece prin M_0, este polara punctului M_0 în raport cu parabola.

Printr'un procedeu analog ca la § 71, se obţine că:

$$y\,y_0 - p\,(x + x_0) = 0.$$

este ecuaţia polarei punctului M_0 (x_0, y_0) faţă de parabola:

$$y^2 - 2\,p\,x = 0.$$

Polara focarului F $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ *este dreapta:*

$$x + \frac{p}{2} = 0,$$

adică directoarea parabolei.

Pentru găsirea polului dreptei:

$$A\,x + B\,y + C = 0,$$

se identifică ecuaţiile:

$$A\,x + B\,y + C = 0, \quad p\,(x + x_0) - y\,y_0 = 0$$

şi se obţine:

$$\frac{p}{A} = \frac{-\,y_0}{B} = \frac{p\,x_0}{C}.$$

Polara unui punct M_0 se obţine unind punctele de contact ale parabolei cu tangentele duse din M_0.

101. **Ecuaţia tangentelor duse dintr'un punct la parabolă.** M_0 (x_0, y_0) fiind un punct în planul unei parabole, pentru a găsì ecuaţiile tangentelor duse din M_0, vom căutà coordonatele punctelor de contact M' (x', y'), M'' (x'', y'').

Aceste puncte sunt la intersecţia parabolei cu polara lui M_0, şi deci coordonatele lor sunt rădăcinile ecuaţiilor:

$$y^2 - 2\,p\,x_0 = 0, \quad y\,y_0 - p\,(x + x_0) = 0.$$

Ecuaţiile tangentelor duse din M_0 la paralelă vor fi:

$$y\, y' - p\,(x + x') = 0, \quad y\, y'' - p\,(x + x'') = 0.$$

Este însă alt procedeu, adică *determinând direcţiile* m *ale acestor tangente*.

Ecuaţia tangentei la o parabolă şi având direcţia m fiind:

$$y = m\, x + \frac{p}{2\, m},$$

pentru ca să fie o tangentă dusă din M_0 (x_0, y_0), va trebuì să avem:

$$y_0 = m\, x_0 + \frac{p}{2\, m}.$$

Această ecuaţie fiind de gradul al doilea în m, vom puteà duce, în general, două tangente dintr'un punct la parabolă.

Dezvoltând, avem:

$$2\, m^2\, x_0 - 2\, m\, y_0 + p = 0. \qquad (2)$$

Condiţia de realitate a rădăcinilor este:

$$y_0^2 - 2\, p\, x_0 \geq 0.$$

Pentru a interpretà geometric această condiţie, să considerăm cele două regiuni în care este înpărţit planul de parabola:

$$y^2 2\, p x = 0.$$

Intr'o regiune, expresiunea:

$$y_0^2 - 2\, p\, x_0$$

va avea un semn, în cealaltă regiune semn contrar, iar pentru punctele parabolei, valoarea zero.

Pentru a vedeà semnul în regiunea unde este focarul, vom face: $y = 0$, $x = 1$ şi avem:

$$y_0^2 - 2\, p\, x_0 = -\, 2\, p < 0.$$

Prin urmare, în regiunea interioară parabolei, avem:

$$y_0^2 - 2\, p\, x_0 < 0,$$

pe curbă zero, iar în regiunea exterioară:

$$y_0^2 - 2px_0 > 0.$$

Revenind la condiţia de realitate a tangentelor, deducem: dacă punctul M_0 (x_0, y_0) este interior parabolei, nu se poate duce nici o tangentă; când M_0 este pe curbă, se duce numai o singură tangentă; când M_0 este exterior parabolei, se pot duce două tangente.

Pentru a găsì ecuaţia comună a celor două tangente duse din M_0 parabolei, vom înlocuì pe m cu valoarea sa din ecuaţia tangentei din M_0,

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Ecuaţia: $$2m^2 x_0 - 2my_0 + p = 0$$

devine: $$2x_0(y-y_0)^2 - 2y_0(x-x_0)(y-y_0) + p(x-x_0)^2 = 0,$$

şi este *ecuaţia comună a celor două tangente duse din* M_0 (x_0, y_0).

102. **Aplicaţie.** *Să se afle locul geometric al punctelor* M_0 *de unde se pot duce la parabolă două tangente perpendiculare* Insemnând cu m', m'' coeficienţii unghiulari a două tangente perpendiculare duse din M_0, va trebuì să avem:

$$m' m'' + 1 = 0,$$

m' şi m'' fiind rădăcinile ecuaţii (2). De unde:

$$\frac{p}{2x_0} + 1 = 0,$$

sau:

$$x_0 = -\frac{p}{2}.$$

Deci, *directoarea parabolei este locul punctelor de unde se pot duce la parabolă două tangente perpendiculare.*

103. **Ecuaţia normalei la parabola:**

$$y^2 - 2px = 0$$

dusă în punctul M_0 (x_0, y_0) al parabolei este:

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0); \quad (y_0^2 = 2px_0).$$

Făcând în această ecuaţie $y = 0$, se obţine $x = p + x_0$, care este abscisa punctului de intersecţie al normalei în $M_0\ (x_0,\ y_0)$ cu axa Ox. Proecţia punctului M_0 pe Ox având abscisa x_0, se vede că proecţia pe Ox a porţiunei din normală cuprinsă între parabolă şi axă, este egală cu :

$$(x_0 + p) - x_0 = p,$$

adică o constantă oricare ar fi punctul M_0, pe parabolă.

104. **Diametru.** Să considerăm o serie de coarde paralele de direcţie : $m = \operatorname{tg} \alpha$ şi să găsim locul mijloacelor acestor coarde, sau diametrul conjugat direcţii coardelor.

$M_0\ (x_0,\ y_0)$ fiind mijlocul unei coarde $M'\ M''$, coordonatele unui punct al acestei coarde sunt :

$$x = x_0 + r \cos \alpha, \quad y = y_0 + r \sin \alpha.$$

Pentru a găsì valorile r' şi r'' corespunzătoare punctelor M' şi M'', vom scrie că punctul considerat aparţine parabolei date :

$$y^2 - 2px = 0.$$

Vom avea :

$$(y_0 + r \sin \alpha)^2 - 2p\,(x_0 + r \cos \alpha) = 0,$$

sau :

$$r^2 \sin^2 \alpha + 2r\,(y_0 \sin \alpha - p \cos \alpha) + y_0^2 - 2p\,x_0 = 0.$$

Dacă $M_0\ (x_0,\ y_0)$ este mijlocul coardei $M'\ M''$, atunci :

$$\overline{M_0M'} = - \overline{M_0M''},$$

deci :

$$r' + r'' = 0.$$

De unde :

$$y_0 \sin \alpha - p \cos \alpha = 0,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{p}{y_0} = \operatorname{tg} \alpha$$

sau :

$$y_0 = \frac{p}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad y_0 = \frac{p}{m}.$$

$$y_0 = \frac{p}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Aceasta este ecuaţia diametrului conjugat coardelor de direcţie m.

De aci rezultă : I. *Că toţi diametrii sunt paraleli cu axa parabolei.*

II. *Orice dreaptă D paralelă cu axa este un diametru con-*

jugat coardelor paralele cu tangenta la parabolă în punctul de intersecție al dreptei D *cu parabola.*

III. *La parabolă nu sunt diametrii conjugați*, căci coardele paralele cu diametrii tăind parabola numai într'un punct la distanța finită, au mijloacele lor la infinit.

105. **Construcții geometrice asupra parabolei.** I. **Construcția parabolei prin puncte. Tangenta într'un punct al parabolei** (Fig. 46). Să considerăm parabola definită prin focarul F și directoarea D. Ducem axa parabolei și *tangenta la vârf*, adică axa Oy. Unim un punct oarecare A al directoarei cu focarul F și fie B punctul de intersecție al dreptei AF cu Oy; de asemenea, fie D piciorul directoarei pe axă.

De oarece $OD = OF$ și OB paralelă cu DA rezultă că $AB = BF$. Fie M punctul de intersecție al paralelei dusă prin A la axă cu perpendiculara în B pe AF. Triunghiul AMF este isoscel și deci:

$$AM = MF.$$

Deci M *este un punct al parabolei.*

Pentru a duce tangenta în M, ne servim de proprietatea că: *piciorul* P *al ordonatei punctului* M *este simetric în raport cu vârful* O *față de piciorul* T *al tangentei în* M *la parabolă.*

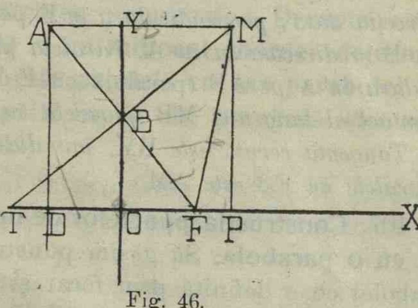


Fig. 46.

Prin urmare, luând $OT = OP$, tangenta în M este MT. Insă:

$$OF = OD;$$

deci:

$$FT = FO + OT = OD + OP = DP = AM = MF.$$

Figura AMFTA este un romb, deci diagonale se taie în părți egale și sunt perpendiculare. Mijlocul lui AF fiind B, *rezultă că tangenta* MT *trece prin* B, sau *este dreapta* MB și apoi că este *perpendiculară* pe AF în B.

De aci rezultă:

I) *Un punct al parabolei se construește unind focarul* F *cu un punct oarecare* A *al directoarei. Perpendiculara pe această* *dreaptă* (AF) *în punctul* B, *unde taie tangenta la vârf, se întâlneşte cu paralela la axă dusă prin* A *în punctul* M *al parabolei*

II) *Tangenta la parabolă în* M *este dreapta* MB.

III) **Locul punctelor** B, **proiecţiile focarului pe tangentele la parabolă, este tangenta la vârf.**

106. **Să se ducă la parabolă tangenta paralelă cu o direcţie dată.** Observând figura 46 se vede că dreapta MB este perpendiculară pe AF, în mijlocul ei. Considerând coardele paralele cu tangenta MT, diametrul conjugat acestor coarde trece prin punctul de contact al tangentei MT şi este paralel cu axa. Prin urmare, pentru **a construì diametrul conjugat coardelor de direcţie dată,** *va trebuì să cunoaştem punctul de contact al tangentei paralele cu direcţia dată.* Aceasta este chiar construcţia cerută şi se va procedà astfel (Fig. 46): *Ducem prin focar dreapta* Fδ *paralelă cu direcţia dată; perpendiculara în* F *pe* F δ *taie tangenta la vârf în* B *şi directoarea în* A. *Paralela prin* A *la axă şi perpendiculara în* A *pe* AF (paralelă cu F δ) *se taie în* M, *punctul de contact al tangentei* MB, *paralelă cu direcţia dată.*

Tangenta cerută este BM, *iar diametrul conjugat coardelor paralele cu* F δ *este* AM.

107. **Construcţia punctelor de intersecţie ale unei drepte** Δ **cu o parabolă.** Să găsim punctele de intersecţie ale parabolei ce e definită prin focar şi directoarea D, cu dreapta Δ (Fig. 47). Dacă Δ este paralelă cu axa, vom procedà ca în cazul precedent (§. 106), căci va trebui să găsim punctul de contact al tangentei la parabolă cu tangenta paralelă cu coardele al căror diametru conjugat este Δ. Vom uni punctul P, unde Δ taie directoarea, cu focarul F; perpendiculara pe mijlocul lui PF se taie cu Δ în punctul unde Δ taie parabola.

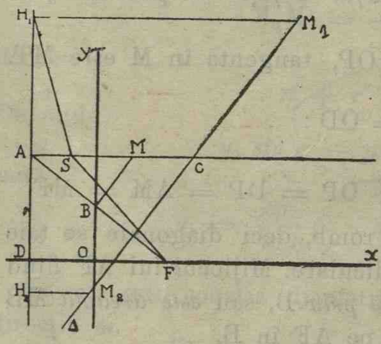


Fig. 47.

Să presupunem dreapta Δ *neparalelă cu axa.* Vom rezolvà mai întâi următoarea problemă: **Să se construiască polul unei drepte** Δ **în raport**

cu parabola. Să construim diametrul conjugat coardelor paralele cu Δ. Ducem prin F o paralelă cu Δ şi din F o perpendiculară pe Δ ce taie directoarea în A şi tangenta la vârf în B. Paralela prin A la axă (Fig. 47) se taie cu perpendiculara în B pe A F în punctul M. Diametrul conjugat coardelor de direcţie Δ, este AM, iar tangenta paralelă cu Δ este MB.

Diametrul AM taie parabola în punctul M la distanţă finită şi într'un alt punct aşezat la infinit, care puncte sunt conjugate armonic în raport cu polul S al dreptei Δ şi punctul C unde AM taie polara Δ. Se ştie însă că dacă un punct este aruncat la infinit pe o dreaptă, conjugatul armonic al său, punctul M, este aşezat la mijlocul dreptei C S, ce uneşte punctele C şi S, cu care sunt conjugate armonic. *Deci polul* S *al dreptei* Δ *se obţine luând simetricul* S *al lui* C, *în raport cu* M.

Rezultă de aci următoarea proprietate: **Dreapta care uneşte polul unei drepte Δ cu mijlocul coardei determinată de Δ în parabolă, este paralelă cu axa parabolei şi este înpărţită în două părţi egale de parabolă (îşi are mijlocul său pe parabolă).**

Odată cunoscut punctul S, **problema revine la găsirea punctelor de contact** M_1 *şi* M_2 **ale parabolei cu tangentele duse din** S **la parabolă.** Să presupunem problema rezolvată şi fie M_1 unul din punctele de contact şi H_1 piciorul perpendicularei din M_1 pe directoare. De oarece $M_1 H_1 = M_1 F$, iar $M_1 S$ (tangenta în M_1) perpendiculară pe mijlocul lui $H_1 F$, rezultă că: $H_1 S = S F$ şi deci pentru a construi pe M_1, procedăm astfel: *Din* S *ca centru şi cu raza* SF *descriem un cerc ce taie directoarea în* H_1; *paralela prin* H_1 *la axă taie dreapta* Δ *în* M_1 *(sau perpendiculara din* S, *pe* HF, *în* M_1). In mod analog se obţine şi celalt punct M_2 de intersecţie al dreptei Δ cu parabola (sau punctul de contact al celei de a doua tangentă dusă din S la parabolă). Punctele M_1 şi M_2 sunt simetrice în raport cu C.

108. **Construcţia parabolei printr'o trăsătură continuă.**

Să ne închipuim un echer aşezat de-a lungul linii D, directoarea (Fig. 48) şi fie un fir de lungime BC fixat cu un capăt în focarul F şi cu celalt în capătul C al echerului.

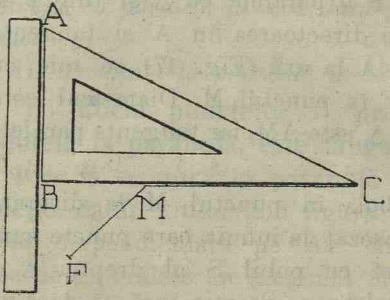


Fig. 48.

Făcând să alunece echerul dea lungul linii D, un creion M, care ţine firul întins bine de la C spre B, pe echer, va descrie o parabolă, căci distanţeie BM şi MF totdeauna sunt egale.

1 109. **Parabola este limita unei elipse sau a unei iperbole.** Să considerăm o elipsă sau o iperbolă variabilă, astfel ca una din axe şi un vârf aşezat pe această axă să rămâe fixe, pe când celalt vârf să se depărteze la infinit. Ecuaţia acestei curbe, luând vârful fix ca origină a axelor perpendiculare, iar axa considerată ca Ox, este:

$$y^2 = 2\lambda x + \mu x^2,$$

în care coeficienţii λ şi μ variind odată cu această curbă, tind prin ipoteză către limitele determinate p şi q. Al doilea vârf al curbei date, aşezat pe Ox, are ca abscisă $-\frac{2\lambda}{\mu}$ şi de oarece acest punct se depărtează şi tinde către infinit, abscisa sa este foarte mare şi deci limita lui μ trebue să fie egală cu zero.

Curba limită către care tinde elipsa sau iperbola variabilă, pe care am considerat-o mai sus, are deci ca ecuaţie:

$$y^2 = 2px.$$

adică este o parabolă.

Exerciţii.

1. Un cerc variabil tangent axei Oy în O taie o paralelă dată la Oy în B şi C, iar pe Ox în D. Paralela dusă din B la Ox taie tangenta în D la cerc în punctul M. Să se afle locul geometric al punctului M.

R. Ecuația paralelei: $x - a = 0$. Locul parabola: $y^2 = ax - a^2$. Se poate transporta axele paralel în punctul $(a, 0)$.

2. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente la un cerc dat C și o dreaptă dată D.

R. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \beta^2$. Centrul cercului C $(0, a)$; dreapta D se ia ca Ox. Locul este însemnând cu R raza cercului C:

$$x^2 - 2y(R + a) - R^2 = 0.$$

Se vede că e o parabolă transportând axele paralel în $\left(0, \frac{-R^2}{2(R+a)}\right)$,

3. Să se afle locul centrelor cercurilor ce trec printr'un punct dat și determină pe o dreaptă fixă coarde de lungime dată K.

R. Ox dreapta dată, Oy perpendiculara din punctul fix A (o, a) pe Ox. Cercul are ca ecuație:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma.$$

Locul este parabola:

$$x^2 - 2ay = \frac{K^2}{4} - a^2$$

Se poate transporta axele paralel în vârful parabolei; făcând $x = 0$, rezultă:

$$y = \frac{-K^2}{8a} + \frac{a^2}{2}.$$

4. Se dă un punct A și o dreaptă Δ. Un cerc variabil de centru C taie dreapta Δ în M și M'. Se duce din C o perpendiculară pe AM, care tae perpendiculara în M pe Δ în punctul P. Să se afle locul geometric al punctului P.

R. Parabola cu focarul în A și directoarea Δ, căci PM = PA.

5. In cercul de centru O se duce raza variabilă OP și fie Q proiecția lui P pe Ox. A fiind un punct unde cercul taie axa Oy, să se afle locul punctului M de intersecție al dreptelor OP și AQ.

R. Dacă R este raza cercului, locul este parabola:

$$x^2 + 2Ry - R^2 = 0.$$

6. Fiind dată parabola: $y^2 - 2px = 0$ și un punct A $(a, 0)$ pe axa Ox, să se găsească ecuația unui cerc care să treacă prin A și să fie tangent parabolei în două puncte simetrice în raport cu Ox.

R. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0$. Se scrie că ecuația ce dă ordonatele punctelor de intersecție are rădăcinile egale.

Avem: $$\alpha = a + p \pm \sqrt{2ap}, \quad R^2 = (\alpha - a)^2.$$

7. Baza BC a unui triunghi ABC este fixă, iar înălțimea cons-

tantă și egală cu h. Să se afle locul punctului de întâlnire al înălțimilor.

R. $AB = 2a$. $C(\lambda, h)$. Se ia ca Oy perpendiculara pe mijlocul lui AB. Locul ortocentrului este:

$$x^2 + hy - a^2 = 0.$$

8. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente unei parabole și directoarei sale.

R. M_0 (x_0, y_0) fiind punctul de contact al cercului de centru C cu parabola, tangenta la parabolă în M_0 taie axa în punctul N $(-x_0, o)$. Se va căutà coordonatele punctului P al directoarei astfel că: $NP = MN$. Paralela la axă prin P se taie cu normala la parabolă în M_0 tocmai în centrul C. Se va eliminà x_0, y_0 între ecuațiile acestor două drepte și a parabolei.

Sau altfel: Ecuația cercului va fi:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \left(\alpha + \frac{p}{2}\right)^2$$

Se ia punctele de intersecție cu parabola și înlocuind pe x cu $\frac{y^2}{2p}$, se scrie că ecuația obținută are o rădăcină dublă. Relația obținută ce conține pe α și β este ecuația locului centrului C.

9. Tangenta într'un punct M al unei parabole taie tangenta la vârf în N. Se duce prin N paralela la OM și prin O paralelă cu tangenta în M. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al acestor paralele.

R. $M(\lambda, \mu)$ $\mu^2 - 2p\lambda = 0$. Locul este parabola:

$$y^2 + \frac{p}{2}x = 0.$$

10. Se dă pe Ox punctul fix A, iar pe Oy punctul variabil M. Perpendiculara în A pe AM și paralela dusă din M la Ox se taie în N. Să se afle locul geometric al punctului N.

R. $A(a, o)$. Locul este parabola:

$$y^2 = a(x - a).$$

11. Se dă un cerc cu centrul în origina axelor și cu raza R; se ia pe Oy punctele fixe B și B', astfel că $OB = OB' = 2R$; Se unește punctul B cu un punct M variabil al cercului și se prelungește această dreaptă până taie pe Ox în N. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor OM și B'N.

R. $M(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$. Locul este parabola:

$$x^2 = 2Rx + R^2.$$

12. Se dă un punct A fix pe axa parabolei și un punct M variabil pe parabolă. Se duce prin A paralela la tangenta în M, la parabolă, care se taie cu FM în N. Să se găsească locul geometric al punctului N.

R. $M(\lambda, \mu)$. $\mu^2 = 2p\lambda$. Locul este cercul :

$$x^2 + y^2 - px + ap - a^2 = 0.$$

SFÂRȘIT