
DU MÊME AUTEUR

Éléments de géométrie, rédigés d'après le nouveau programme de l'enseignement scientifique des lycées et contenant plus de 400 énoncés de problèmes; suivis d'un complément à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. 15e édit., revue et augmentée d'un supplément. 1 vol. in-4°, figures dans le texte, broché .... 5 »

Solutions raisonnées de problèmes énoncés dans les *Éléments de géométrie*, précédées de quelques observations sur la résolution des problèmes de géométrie, par MM. A. Amiot et Desvignes. Nouvelle édition refondue, et dans laquelle se trouvent les énoncés. 1 fort vol. in-8°, vastes planches, broché .... 6 »

Leçons nouvelles de géométrie descriptive, nouvelle édition, entièrement refondue et augmentée d'applications aux ombres et de la méthode des plans cotés, par M. A. Chevillard, professeur de perspective à l'École des beaux-arts, à Paris. 2 vol. in-8°, dont un de planches, brochés .... 7 »

Leçons nouvelles de géométrie élémentaire. 2e édition entièrement refondue. 2 vol. in-8° .... 8 »

ON VEND SÉPARÉMENT :

1re partie. *Géométrie plane.* 1 vol., broché .... 4 »

2e partie. *Géométrie dans l'espace.* 1 vol., broché .... 4 »

Applications de la géométrie élémentaire, rédigées d'après le nouveau programme de l'enseignement des lycées. 4e édition, 1 vol. in-8°, figures dans le texte et 2 planches, broché .... 3 »

. — Abbeville. — Typ. et stér. G. Retaux.

LEÇONS NOUVELLES

D'ALGÈBRE

ÉLÉMENTAIRE

RÉDIGÉES

D'APRÈS LE NOUVEAU PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE DES LYCÉES

PAR A. AMIOT

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE SAINT-LOUIS, A PARIS ET A L'ÉCOLE NATIONALE DES BEAUX-ARTS

SIXIÈME ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1882

AVANT-PROPOS

En publiant cette cinquième édition de l'algèbre de notre regretté professeur, M. Amiot, nous avons mis tous nos soins à conserver la plus grande partie de son œuvre, et à suivre sa méthode dans les modifications et additions qui nous ont paru nécessaires.

Les principaux changements portent sur la définition des quatre opérations algébriques, la mise en équations des problèmes, qui est accompagnée d'exemples empruntés à la physique et à la géométrie, la théorie des quantités négatives, rédigée d'après le souvenir des leçons de M. Duhamel à la Sorbonne, enfin la théorie des maxima et minima. Nous avons ajouté de nombreux exercices proposés aux examens des Écoles militaire et navale.

La table des matières, plus détaillée, donne le programme complet des matières traitées dans l'ouvrage, on y a mis entre crochets les numéros, qui, sans rentrer dans le programme du Baccalauréat ès-sciences, sont indispensables aux candidats des écoles spéciales.

E. MONCOURT.

LEÇONS IV ET V.

LEÇON VI.

LEÇON VII.

LEÇONS VIII, IX ET X.

LEÇON XI.

LEÇONS XII ET XIII.

LEÇON XIV.

LEÇONS XV ET XVI.

LEÇONS XVII ET XVIII.

LEÇON XIX.

LEÇONS XX ET XXI.

LEÇON XXII.

LEÇONS XXIII ET XXIV.

LEÇONS XXV, XXVI ET XXVII.

LEÇON XXVIII.

LEÇONS XXIX ET XXX.

ERRATA.

Page 29, ligne 1 en bas, au lieu de $-25ab^8$ lisez $-24ab^8$.
Page 43, ligne 13 en bas, au diviseur, au lieu de $-a^3x$ lisez $+a^3x$.
id. ligne 7 en bas, au premier reste, au lieu de a^3b lisez $-a^3b$.
Page 43, ligne 2 en bas, 2e division partielle, suppléez a devant l'exposant 2
Page 46, ligne 14 en bas, au lieu de da^3 lisez da^2.
Page 48, ligne 8 en haut, au lieu de $(2a^4-a^2b^2)x^2$ lisez $(2a^4+a^2b^2)x^2$.
Page 50, ligne 1 en bas, au lieu de $\dfrac{a^3+b^2}{6(a^2-b^2)}$ lisez $\dfrac{a^2+b^2}{6(a^2-b^2)}$.
Page 53, ligne 8 en bas, au lieu de $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ lisez $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.
Page 56, ligne 11 en bas, au lieu de $9a^3+58a^2$ lisez $9a^3+53a^2$.
Page 61, ligne 1 en bas, au lieu de $\sqrt{a^\alpha}$ lisez $\sqrt[n]{a^\alpha}$.
Page 134, ligne 2 en haut, au lieu de $3x+27$ lisez $3x+17$.
Page 146, ligne 17 en haut, au lieu de D′ lisez D.
Page 220, lignes 7, 8, 9 en bas, corrigez ainsi la fin du tableau.

$$\left\{\begin{array}{l} p>0 \text{ négative} > \text{positive} \\ p=0 \text{ négative} = \text{positive} \\ p<0 \text{ négative} < \text{positive.}\end{array}\right.$$

Page 227, ligne 7 en bas, au lieu de $x''=-\dfrac{p}{2}+\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$ lisez

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Page 231, exercice 14 au lieu de $\left(Rép.\ x=\dfrac{(1\pm\sqrt{5})^m-2^m}{(1\pm\sqrt{5})^m-2^m}\right)$ lisez

$$\left(Rép.\ x=\frac{(1\pm\sqrt{5})^m-2^m}{(1\mp\sqrt{5})^m+2^m}\right).$$

Page 246, ligne 4 en haut, au lieu de $r^2 - rz - r^2 = 0$ lisez $z^2 - rz - r^2 = 0$.

Page 257, ligne 17 en bas, au lieu de $(-x)^2$ lisez $\frac{(-x)^2}{4}$.

Page 279, ligne 15 en bas, au lieu de $2x^2 - 20 + 32 > 0$ lisez $2x^2 - 20x + 32 > 0$.

Page 289, ligne 11 en bas, au lieu de $x^2 - (p+m)x + 4pm = 0$ lisez $x^2 - (p+m)x + 2pm = 0$.

Page 289, ligne 4 en bas, au lieu de $4pm$ lisez $2pm$.

Page 293, ligne 3 en haut, au lieu de $u^2 - pu - m$ lisez $u^2 - pu - m^2$.

Page 293, ligne 11 en haut, au lieu de $p^2\left(\frac{m^2}{4} - \frac{p^2}{16}\right) \leqslant 0$ lisez $p^2\left(\frac{m^2}{2} - \frac{p^2}{16}\right) \leqslant 0$.

Page 296, ligne 9 en bas, au lieu de $3h^2$ lisez $3\pi h^2$.

Page 365, ligne 8 en haut, au lieu de grand lisez petit.

Page 365, ligne 10, en haut, au lieu de petit lisez grand.

ABBEVILLE. — TYP. ET STÉR. GUSTAVE RETAUX.

LEÇONS NOUVELLES

D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

PRÉLIMINAIRES

PREMIÈRE LEÇON

PROGRAMME. — Emploi des lettres et des signes comme moyen d'abréviation et de généralisation. — Calcul algébrique.

I. - Emploi des lettres et des signes comme moyen d'abréviation et de généralisation.

1. — L'*algèbre* est comme l'*arithmétique* la science des nombres, c'est-à-dire qu'elle s'applique à toutes les espèces de grandeurs, comparées préalablement à leurs unités respectives et exprimées en nombres. Mais, en arithmétique, un problème n'est considéré comme résolu que quand on a trouvé la *valeur numérique* du résultat, en algèbre au contraire, on cherche seulement quelle est la *suite des opérations* à effectuer sur les données d'un problème pour en déduire le résultat. Changez la valeur numérique des données, les opérations à effectuer seront encore les mêmes; la solution algébrique d'un problème comprend ainsi la solution de tous les problèmes numériques de même espèce, que l'on peut imaginer en faisant varier la valeur des données.

La valeur particulière des grandeurs est donc indifférente dans la solution algébrique d'un problème, aussi on y peut représenter les grandeurs par des *lettres*. Les grandeurs données sont ordinairement représentées par les *premières lettres* de l'alphabet a, b, c..., ou par les initiales de leurs noms, un rayon par r, une hauteur par h, une vitesse par v ; les grandeurs inconnues sont représentées par les *dernières lettres* x, y, z. L'emploi des lettres offre le double avantage de la *brièveté* et de la *généralité* ; une lettre est plus vite écrite qu'un nombre, qui peut avoir plusieurs chiffres, et puis à la place de cette lettre on pourra mettre tels nombres que l'on voudra. Aussi souvent, quand les données d'un problème sont numériques, on les représente par des lettres dans tout le cours du raisonnement, et ce n'est qu'à la fin qu'on remplace les lettres par leurs valeurs numériques.

2. — Les opérations ne pouvant pas être effectuées sur des lettres, on les indique par des *signes* déjà employés en arithmétique.

Le signe $+$ qu'on énonce *plus* exprime l'addition ; ainsi on écrit « a plus b » de la manière suivante : $a + b$.

Le signe — qu'on énonce *moins* exprime la soustraction ; ainsi « a moins b » s'écrit : $a - b$.

Quant à la multiplication, on emploie le signe $\times$ ou le point (.), qu'on énonce *multiplié par*. Ainsi les notations $a \times b$, $a \,.\, b$, représentent le produit de a par b. Lorsque les deux facteurs du produit ne sont pas des nombres écrits en chiffres, on supprime le signe de la multiplication, qui est alors indiquée par la juxta-position des deux facteurs ; par exemple les expressions ab et $5a$ désignent les produits de a par b et de 5 par a, et s'énoncent en supprimant aussi dans le langage les mots multiplié par. Il est évident que cette abréviation ne peut être appliquée à l'écriture du produit de deux nombres écrits en chiffres car le produit de 5 par 6 n'est pas égal à 56.

Lorsque l'un des facteurs d'un produit algébrique est un nombre écrit en chiffres, on le place toujours à la gauche du produit, et on lui donne le nom de *coefficient*. Ainsi le nombre $\frac{2}{3}$ est le coefficient du produit $\frac{2}{3}abc$. On indique la division par le signe (:), qu'on énonce *divisé par*. Ainsi « a divisé par b » s'écrit $a : b$. Comme toute fraction représente, en arithmétique, le quotient de la division de son numérateur par son dénominateur, on emploie aussi, en algèbre, la notation $\frac{a}{b}$ pour désigner le quotient de la division de a par b, et on l'énonce de la manière suivante : a divisé par b, ou plus simplement a sur b. On donne, par analogie, le nom de fraction algébrique à la quantité $\frac{a}{b}$, dans laquelle a et b ne représentent plus, comme en arithmétique, des nombres entiers, mais des nombres quelconques.

On appelle *puissance* d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre, et degré de la puissance le nombre de ces facteurs. Ainsi le produit de cinq facteurs égaux à a ou $aaaaa$ est la cinquième puissance de a ; Descartes* la représente par la notation abrégée a^5, que l'on énonce a puissance 5 ou simplement a cinq, et dans laquelle le chiffre 5, écrit un peu plus haut que la lettre a et à sa droite, a reçu le nom d'exposant. La deuxième et la troisième puissance d'un nombre s'appellent aussi le carré et le cube de ce nombre, ce sont a^2 et a^3 qui s'énoncent a deux et a trois. Le degré d'une puissance, en algèbre, peut être représenté par une lettre ; ainsi a^m représente un produit de m facteurs égaux à a, et s'énonce a puissance m ; le mot puissance ne peut ici être sous-entendu, pour éviter de confondre a^m avec $a.m$.

On appelle *racine* 2ème, 3ème ou 4ème d'un nombre un nouveau nombre qui élevé à la puissance 2ème, 3ème ou 4ème reproduit le premier ; les nombres 2, 3, 4 s'appellent les *degrés* de ces racines. On indique l'extraction des racines par le signe $\sqrt{}$, qu'on appelle *radical*, le nombre dont on extrait la racine se place sous la barre horizontale, et l'on écrit dans l'ouverture de ce signe un chiffre, appelé *indice*, qui marque le degré de la racine ; on supprime ordinairement l'indice lorsqu'il est égal à 2.

On dit qu'un radical est du 2e degré, du 3e, du 4e..., selon que l'indice de ce radical est égal à 2, à 3, à 4...

Les racines 2e et 3e d'un nombre s'appellent aussi racines carrée et cubique de ce nombre.

En algèbre le degré d'une racine peut être représenté par une lettre ; ainsi $\sqrt[m]{a}$ représente un nombre qui élevé à la puissance m reproduit a, et s'appelle la racine $m^{\text{ième}}$ de a.

Pour indiquer que deux quantités a et b sont *égales*, on écrit

* Descartes, né à Lahaye, en Touraine, l'an 1596, mort en 1650, est le créateur d'un système de philosophie, de la géométrie analytique, et l'auteur de belles découvertes en physique.

entre elles le signe $=$, qu'on énonce *égale*, et l'on appelle *égalité* la notation

$$a = b.$$

La quantité a est le premier membre de cette égalité et la quantité b en est le second membre.

On exprime que deux quantités sont *inégales*, en les séparant par le signe $>$ ou le signe $<$, selon que la première est *plus grande* ou *plus petite* que la seconde ; et l'on donne le nom d'inégalité à chacune des notations :

$$a > b,$$
$$a < b,$$

dont l'une s'énonce *a plus grand que b*, et l'autre *a plus petit que b* ; la pointe du signe $>$ ou $<$ est toujours tournée vers le plus petit des deux membres.

Remarque. — Lorsque les quantités sur lesquelles on opère ont la forme de fractions, il faut avoir soin de placer les barres de division à la même hauteur, et de placer les signes qui réunissent ces quantités à la même hauteur que les barres de division.

Exemples :

$$v = \frac{\pi r^2 h}{3},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}.$$

3. Nous allons voir successivement sur deux exemples, comment l'emploi des lettres et des signes abrège et éclaircit la solution des problèmes, puis comment elle la généralise.

Problème I. — *Trouver deux nombres dont la somme soit égale à* 75 *et la différence égale à* 27.

Solution arithmétique. Puisque 27 est la différence des deux nombres inconnus, le plus grand de ces nombres est égal au plus petit augmenté de 27 ; leur somme 75 est donc composée de deux fois le plus petit et de 27 unités. Si l'on diminue dès lors 75 de 27, le reste 48 représente le double du plus petit nombre inconnu, qui est, par suite, égal à la moitié de 48, c'est-à-dire à 24. En ajoutant à 24 l'excès 27 du plus grand nombre inconnu sur le plus petit, on a 51 pour la valeur du premier de ces nombres.

On vérifie les calculs précédents en constatant que la somme des deux nombres 24 et 51 est égale à 75, et leur différence égale à 27.

Solution algébrique. Désignons par la lettre x le plus petit des deux nombres inconnus ; par suite, le plus grand est représenté par $x+27$ et leur somme par $x+x+27$ ou $2x+27$. Or, d'après l'énoncé du problème, cette somme est égale à 75 unités, donc les deux nombres $2x+27$ et 75, obtenus par des voies différentes, sont égaux ; ce qui s'exprime par l'équation

$$2x+27=75.$$

Remarquons que, 75 étant la somme des deux nombres $2x$ et 27, le produit $2x$ est égal à l'excès de 75 sur 27, c'est-à-dire que

$$2x=48\,;$$

enfin le nombre x, qui multiplié par 2 doit donner 48, est par définition le quotient de la division de 48 par 2, donc

$$x=24.$$

Telle est la valeur du plus petit des deux nombres inconnus; le plus grand égale par suite $24+27$ ou 51.

La vérification de ces nombres se fait comme dans la solution précédente.

PROBLÈME II. — *Un homme âgé de* 36 *ans a trois enfants qui ont le premier* 12 *ans, le second* 10 *ans, et le troisième* 8 *ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il la somme des âges de ses enfants?*

Solution arithmétique. Si on connaissait le nombre d'années demandé, en l'ajoutant aux âges actuels du père et des trois enfants, on obtiendrait quatre nombres tels que, d'après l'énoncé de la question, le premier serait égal à la somme des trois autres. Par conséquent le nombre inconnu, augmenté de 36, égale le triple de ce nombre augmenté de 12, de 10 et de 8, c'est-à-dire augmenté de 30. Si on retranche 30 unités des deux membres de cette égalité, le triple du nombre inconnu sera égal à ce nombre augmenté de 6, qui est l'excès de 36 sur 30. De là on conclut que le double de cette inconnue égale 6, et, par suite, que l'inconnue elle-même égale la moitié de 6 ou 3.

Pour vérifier ce nombre, remarquons que dans 3 ans le père et ses enfants auront respectivement 39 ans, 15 ans, 13 ans et 11 ans ; or 39 égale la somme des trois nombres 15, 13 et 11 ; donc le nombre 3 est bien la valeur de l'inconnue du problème.

Solution algébrique. Soit x le nombre des années demandé ; les âges du père et des enfants seront respectivement $x + 36$, $x + 12$, $x + 10$ et $x + 8$. Or la somme des âges des trois enfants est $3x + 12 + 10 + 8$ ou $3x + 30$, et doit être égale à l'âge du père ; on a donc l'équation

$$3x + 30 = x + 36.$$

En retranchant successivement 30 unités et x de ses deux membres, on trouve

$$2x = 6,$$

et, par suite,

$$x = 3.$$

Remarque. — Les solutions algébriques des deux problèmes précédents sont plus simples que leurs solutions arithmétiques ; en effet, l'emploi des lettres et des signes du calcul algébrique abrége l'écriture des conditions qui lient l'inconnue aux données, c'est-à-dire l'écriture de l'équation du problème et des différentes transformations qu'on fait subir à cette équation pour la résoudre. Le raisonnement est plus facile et plus sûr, car on voit mieux les termes de chaque équation, et l'on aperçoit plus vite les opérations qu'il faut faire pour arriver à la valeur de l'inconnue.

Ces avantages de la méthode algébrique sont d'autant plus grands et, par suite, d'autant plus évidents que l'énoncé du problème est plus long et plus compliqué.

La méthode qui vient d'être exposée sommairement pour la résolution des problèmes numériques fait découvrir le nombre inconnu, mais on ne reconnaît plus dans ce nombre ceux qui ont servi d'éléments, et l'on ne retrouve en lui aucune trace des opérations particulières qui l'ont produit. Aussi, malgré la liaison évidente des problèmes de même nature, la résolution de l'un d'entre eux n'abrége en rien la recherche de l'inconnue des autres, et chaque exemple particulier doit être traité comme si on résolvait la question pour la première fois.

Un géomètre français, nommé *Viète* *, a fait disparaître cette

* Né en 1540, à Fontenay-le-Comte, en Vendée ; mort en 1603.

imperfection de l'algèbre en désignant par des lettres non-seulement les inconnues, mais encore les données de tout problème numérique. L'avantage de ce mode de représentation consiste en ce qu'il fait connaître les opérations par lesquelles on déduit des quantités données la valeur de l'inconnue ; on appelle *formule* l'expression algébrique du système de ces opérations. La formule de l'inconnue d'un problème est applicable à tous les problèmes de même nature, puisqu'elle exprime de quelle manière cette quantité dépend de celles qui sont données. *C'est dans cette généralité de la formule que consiste la généralité de la solution du problème proposé.*

Nous allons appliquer la méthode de Viète à la résolution des problèmes I et II qui précèdent. Voici le nouvel énoncé du premier :

1° *Trouver deux nombres dont la somme soit égale à* s *et la différence égale à* d.

Désignons le plus petit des deux nombres inconnus par la lettre x, le plus grand de ces nombres est, par suite, égal à $x+d$, et leur somme s, égale à $2x+d$; ce que j'exprime par l'équation

$$2x+d=s.$$

Si l'on diminue chaque membre de d unités, les deux restes que l'on obtient sont égaux ; par conséquent

$$2x=s-d\,;$$

en divisant par 2 les deux membres de cette égalité, on trouve

$$x=\frac{s-d}{2}.$$

Telle est la *formule* de la valeur de l'inconnue x. Elle exprime en langage ordinaire que *le plus petit de ces deux nombres est égal à la moitié de l'excès de leur somme sur leur différence.*

On obtient le plus grand nombre inconnu en ajoutant au plus petit la différence d ; par conséquent, il est égal à $\frac{s-d}{2}+d$, quantité qui se réduit à $\frac{s+d}{2}$. Car, le terme d pouvant être mis sous la forme fractionnaire $\frac{2d}{2}$, la somme des deux fractions $\frac{s-d}{2}$ et $\frac{2d}{2}$ est égale à $\frac{s-d+2d}{2}$ ou à $\frac{s+d}{2}$. La formule $\frac{s+d}{2}$ montre qu'on peut calculer *le plus grand nombre inconnu*, sans connaître le plus petit, puisqu'il *est égal à la moitié du nombre qu'on obtient en additionnant leur somme et leur différence.*

Si, dans les deux formules précédentes, on remplace s par 75 et d par 27, on trouve $\frac{s-d}{2}$ égale à 24 et $\frac{s+d}{2}$ égale à 51 : ces résultats sont identiques à ceux de la première méthode.

2° *Un homme âgé de* a *années a trois enfants, qui ont le premier* b *années, le second* c *années et le troisième* d *années. On demande dans combien de temps l'âge du père sera égal à la somme des âges de ses enfants.*

Soit x le nombre d'années demandé ; à l'époque cherchée, les âges du père et de ses enfants seront $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$. Or, d'après l'énoncé du problème, le premier de ces nombres doit être égal à la somme des trois autres, c'est-à-dire égal à $3x+b+c+d$, donc

$$3x+b+c+d=x+a.$$

Retranchons $x+b+c+d$ des deux membres de cette égalité, ce qui se fait en diminuant chaque membre de x, de b, de c, et de d. L'on trouve ainsi

$$2x=a-b-c-d,$$

d'où l'on conclut

$$x=\frac{a-b-c-d}{2}$$

pour la formule du nombre d'années demandé.

En y remplaçant a par 36, b par 12, c par 10 et d par 8, on a 3 pour la valeur de x, comme dans le cas précédent.

Cette formule sert non-seulement à résoudre tous les problèmes de même nature que le précédent, mais elle montre encore la condition à laquelle les âges des quatre personnes doivent satisfaire pour que le problème soit possible. On voit, en effet, qu'il faut que l'âge a du père soit plus grand que la somme des âges de ses trois enfants, ou au moins égal à cette somme, pour qu'on puisse soustraire $b+c+d$ de a.

Ces deux exemples suffisent pour faire comprendre toute l'importance de l'idée de Viète, puisqu'elle conduit à la solution la plus générale des problèmes, en faisant connaître le mode de formation des inconnues au moyen des données.

II. — Calcul algébrique. — Classification des formules.

1. — Nous venons de voir que la solution générale d'un problème par l'algèbre consiste à trouver le tableau des opérations à effectuer sur des nombres représentés par des lettres pour en déduire certains résultats, et que ce tableau porte le nom de *formule* ou d'*expression* algébrique.

Il arrive souvent que, pour résoudre un problème, on a besoin d'exécuter sur des formules quelqu'une des opérations de l'arithmétique : *addition*, *soustraction*, *multiplication*, *division*. Nous commencerons par étudier la manière d'exécuter sur les formules ces diverses opérations, et de *transformer* les formules en d'autres plus commodes dans certains cas ; cette partie de l'algèbre porte le nom de *calcul algébrique*.

2. — Classification des formules. — Pour plus de facilité dans le langage, nous partagerons les formules en plusieurs classes, d'après les signes qu'elles renferment, sans nous occuper des problèmes qui pourraient conduire à ces formules.

Monôme ou terme. — On appelle *monôme* ou *terme* une formule algébrique qui ne renferme ni signe $+$ ni signe $-$, comme : $3ab$, $\frac{ait}{100}$, $\frac{5a^2b^4}{2c^3}$, ab, $\sqrt{\mathrm{R}r}$, πr^2h, $\sqrt{2}\,r$.

Le facteur numérique qui entre dans un monôme, et que l'on place toujours à sa gauche, s'appelle *coefficient ;* ici les coefficients sont :

$$3,\quad \frac{1}{100},\quad \frac{5}{2},\quad 1,\quad 1,\quad \pi,\quad \sqrt{2}.$$

On regarde les termes ab et $\sqrt{\mathrm{R}r}$, qui n'ont pas de coefficients, comme ayant le coefficient 1, la lettre π, qui n'est qu'une écriture abrégée du rapport incommensurable de la circonférence au diamètre 3,1415926....., doit être regardée comme un coefficient ; le coefficient incommensurable $\sqrt{2}$ s'écrit ordinairement à droite de la lettre $r\sqrt{2}$, pour éviter de confondre $\sqrt{2}\,r$ avec $\sqrt{2r}$.

On appelle *termes semblables* ceux qui sont formés de la même manière avec les mêmes lettres, et qui ne diffèrent que par les coefficients, comme : $5abc$ et $\frac{2}{3}\ abc$, ou $\frac{5a^2b}{2c}$ et $\frac{3a^2b}{c}$.

Pour calculer la valeur numérique d'un monôme, on remplace les lettres par les nombres qu'elles représentent, et on calcule le numérateur en multipliant le 1er facteur par le 2e, leur produit par le 3e, le nouveau produit par le 4e, et ainsi de suite ; on calcule de même le dénominateur, et on divise la valeur du numérateur par celle du dénominateur. Si l'un des facteurs est affecté d'un exposant ou d'un radical, on calcule préalablement la puissance ou la racine indiquée.

Soit par exemple le monôme $\frac{3ab^2}{2c\sqrt{d}}$, dont on demande la valeur en supposant : $a = 5$, $b = 6$, $c = 15$, $d = 16$.

La valeur du monôme est alors : $\frac{3 \times 5 \times 36}{2 \times 15 \times 4} = \frac{540}{120} = 4{,}5.$

On peut, avant d'effectuer les calculs, simplifier la fraction qui se réduit à $\frac{9}{2}$ ou 4, 5.

Polynôme. — On appelle *polynôme* une formule composée de plusieurs monômes ou termes réunis par les signes $+$ et $-$; la formule prend le nom de *binôme* quand il n'y a que deux termes, de *trinôme* quand il y en a trois.

$3a^4b^2 + \frac{4a^3b^3}{3} - \frac{5a^2b^4}{4} + ab^5 - \frac{b^6}{2}$ est un polynôme,

$3a^2 - 4b^2$ est un binôme,

$R^2 + Rr + r^2$ est un trinôme

Pour calculer la valeur numérique d'un polynôme, on calcule, comme nous venons de le dire, la valeur de chacun des termes, en y remplaçant les lettres par les nombres qu'elles représentent ; ensuite à la valeur du premier on ajoute ou on retranche la valeur du deuxième, selon qu'il a le signe $+$ ou $-$, au résultat obtenu on ajoute ou on retranche la valeur du troisième, et ainsi de suite.

Dans une suite d'additions et de soustractions, on peut, sans altérer le résultat, changer l'ordre des opérations, principe évident, d'où l'on tire, en arithmétique, les règles de l'addition et de la soustraction ; pour calculer la valeur d'un polynôme, on pourra donc faire la somme des valeurs des termes ayant le signe $+$, et en retrancher la somme des valeurs des termes ayant le signe $-$. Le premier terme d'un polynôme, qui n'a pas de signe, doit être regardé comme ayant le signe $+$, car $a+b$ est évidemment égal à $b+a$ dans lequel a a effectivement le signe $+$.

Au commencement de l'algèbre, nous ne considérerons que des polynômes où la première somme l'emporte sur la seconde, de manière que la soustraction soit toujours possible.

Formule entière ou fractionnaire. — Une formule est *entière* par rapport aux lettres ou simplement entière, quand elle ne contient pas de lettres en dénominateur, comme $a+b$ $\frac{a-b}{3}$; elle est *fractionnaire* quand elle contient des lettres au dénominateur, comme $\frac{a^2-b^2}{2\,ab}$.

Formule rationnelle ou irrationnelle. — Uneformule est *rationnelle* quand elle ne contient pas de radicaux placés sur des lettres, comme $\frac{a^2-b^2}{2ab}$, $a\sqrt{3}$; elle est *irrationnelle* quand elle contient des radicaux placés sur des lettres, comme $2\sqrt{ab}$, $\frac{a^2}{\sqrt{b}}$.

3. — Pour indiquer une opération quelconque sur des formules, on met chacune d'elles dans une *parenthèse*, et l'on place entre les parenthèses les signes des opérations à exécuter sur les formules. Les barres de division et les radicaux tiennent lieu de parenthèses ; ainsi la division de $a-b$ par c s'écrit $\frac{a-b}{c}$, la racine cubique de a^3+b^3 s'écrit $\sqrt[3]{a^3+b^3}$, mais l'excès de a sur $b-c$ s'écrira $a-(b-c)$, le produit de a par $b-c$ s'écrira $a\times(b-c)$ ou $a\,(b-c)$, le carré de $3ab$ s'écrira $(3ab)^2$. Nous verrons plus tard ce qu'il faut faire dans chaque cas pour faire disparaître les parenthèses.

4. — **Degré.** — **Homogénéité.** — On appelle *degré* d'un terme entier et rationnel la somme des exposants des lettres qui y entrent ; nous verrons plus loin (4 et 5, III) * que le degré d'une fraction est l'excès du degré du numérateur sur celui du dénominateur, et que le degré d'un radical est égal au degré de la quantité placée sous le radical divisé par l'indice du radical ; ainsi les expressions :

$2a,\ \frac{a^2}{2b},\ \sqrt{ab},\ 2\pi r$ sont du premier degré,

$2a^2,\ \frac{a^3}{2b},\ \sqrt[3]{a^4b^2},\ \pi r^2$ sont du second degré,

$2a^3,\ \frac{a^4}{2b},\ \sqrt{a^4b^2},\ \frac{4\pi r^3}{3}$ sont du troisième degré.

Dans les problèmes de géométrie quand toutes les longueurs sont représentées par des lettres, toute formule qui représente une *ligne* doit être du *premier degré,* celle qui représente une *surface* sera du *second,* celle qui représente un *volume* sera du *troisième;* le nombre π, considéré comme coefficient numérique, ne compte pas dans le calcul du degré ; il suffira souvent de considérer le degré d'une formule pour s'apercevoir d'une erreur.

On dit qu'un polynôme est *homogène* quand tous ses termes sont d'un même degré, qui est alors le degré du polynôme.

$a + b,\ a + \frac{b^2}{c},\ a + \sqrt{bc}$ sont des polynômes homogènes du premier degré.

$a^2 - b^2,\ a^2 + \sqrt{ab^3} + b^2$ sont des polynômes homogènes du deuxième degré.

Dans les problèmes de géométrie où toutes les longueurs sont représentées par des lettres, le défaut d'homogénéité est l'indice certain d'une erreur ; ainsi $\sqrt{3a^2 + 4a}$ serait une formule fausse.

EXERCICES.

1. — Partager 322 francs entre trois personnes, de manière que la première ait 12 francs de plus que la seconde, et la seconde 5 francs de plus que la troisième. (*Rép.* 117, 105, 100.)

* La notation (4 et 5, III) indique les leçons 4 et 5, paragraphe III.

2. — Payer 149 francs avec 40 pièces de 5 francs et de 2 francs. (*Rép.* 23 pièces de 5 francs et 17 pièces de 2 francs.)

3. — Calculer la valeur du polynôme

$$4ab - 3ac + 2bc - 39,$$

en supposant

$$1^{\circ}\quad a = 3, \qquad b = 6, \qquad c = 4;$$

$$2^{\circ}\quad a = 5, \qquad b = 2, \qquad c = \frac{1}{11}.$$

(*Rép.* 1° 45 ; 2° zéro.)

4. — Calculer la valeur du polynôme

$$\frac{2a}{b} + \frac{a+b}{c} - \frac{18a}{b+c} + 2,$$

en supposant

$$1^{\circ}\quad a = 1, \quad b = 2 \quad \text{et} \quad c = 4;$$

$$2^{\circ}\quad a = 1, \quad b = 2 \quad \text{et} \quad c = \frac{2}{5}.$$

(*Rép.* 1° $\frac{3}{4}$; 2° 3.)

5. — Une cour a a mètres de long, b mètres de large, on veut y planter un cordon d'arbres en forme de rectangle, à c mètres des bords de la cour, et à d mètres les uns des autres ; combien y aura-t-il d'arbres ?

(*Rép.* $\left(\frac{a-2c}{d} + 1\right) \times 2 + \left(\frac{b-2c}{d} + 1\right) \times 2 - 4.$)

CALCUL ALGÉBRIQUE

DEUXIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Réduction des termes semblables. — Addition. — Soustraction.

I. — Réduction des termes semblables des polynômes.

Lorsqu'il y a dans un polynôme plusieurs termes semblables, on peut toujours les remplacer par un terme unique, renfermant les mêmes lettres réunies par les mêmes signes et précédées d'un coefficient et d'un signe convenables.

1. — *Si tous les termes semblables ont le même signe, soit* $+$, *soit* $-$, *on fait la somme de leurs coefficients, on place devant cette somme le signe commun à tous les termes, et on écrit à la suite la partie littérale commune.*

Soit le polynôme

$$2a + 3b + 3a - 4c + 8d + 4a,$$

il devient en changeant l'ordre des termes

$$2a + 3a + 4a + 3b - 4c + 8d.$$

Or $2a$ représente la somme de deux quantités égales à a, $3a$ et $4a$ les sommes de 3 et de 4 quantités égales à a, les trois premiers termes, que l'on pourrait écrire

$$a + a + a + a + a + a + a + a + a$$

représentent donc la somme de $2 + 3 + 4$ ou 9 quantités égales à a, et le polynôme simplifié devient

$$9a + 3b - 4c + 8d.$$

Soit ensuite le polynôme

$$2a - 6b + 3c - 4b + 5d - 2b.$$

En changeant l'ordre des opérations, nous trouvons

$$2a + 3c + 5d - 6b - 4b - 2b.$$

Or retrancher $6b$ revient à retrancher 6 fois de suite la quantité b, de même retrancher $4b$ puis $2b$ revient à retrancher 4 fois puis 2 fois la quantité b; on a donc à retrancher en tout $6 + 4 + 2$ ou 12 quantités égales à b, et le polynôme simplifié devient

$$2a + 3c + 5d - 12b$$

ce qui justifie dans les deux cas la règle énoncée.

2. — *Si les termes semblables ont des signes différents, les uns* $+$, *les autres* $-$, *on fait la somme des coefficients des termes ayant le signe* $+$, *la somme des coefficients des termes ayant le signe* $-$, *puis on soustrait la plus petite de la plus grande, on donne au résultat le signe de la plus grande et on écrit à la suite la partie littérale commune.*

Soit le polynôme

$$8a + 4b + 3a - 2c + 7d - 2a + 4e - 5a,$$

réunissons d'abord en un seul les termes affectés du signe $+$, ensuite ceux qui sont affectés du signe $-$, le polynôme devient

$$4b - 2c + 7d + 4e + 11a - 7a.$$

Or, pour ajouter à une quantité $11a$, on peut ajouter $4a + 7a$, 4 étant l'excès de 11 sur 7, on aura ainsi

$$4b - 2c + 7d + 4e + 4a + 7a - 7a,$$

et, comme ajouter puis retrancher $7a$ ne change rien à une quantité, le polynôme se réduit à

$$4b - 2c + 7d + 4e + 4a.$$

Soit ensuite le polynôme

$$7a + 4b + 3a - 8c + 3d - 8a + 5e - 6a,$$

réunissons d'abord en un seul les termes affectés du signe $+$, ensuite ceux qui sont affectés du signe $-$, le polynôme devient

$$4b - 8c + 3d + 5e + 10a - 14a.$$

Or, pour retrancher $14a$ d'une quantité, on peut retrancher $10a$ puis $4a$, 4 étant l'excès de 14 sur 10, on aura ainsi

$$4b - 8c + 3d + 5e + 10a - 10a - 4a,$$

et comme ajouter puis retrancher $10a$ ne change rien à une quantité, il reste

$$4b - 8c + 3d + 5e - 4a.$$

Ce qui justifie la règle énoncée quand la somme des coefficients des termes affectés du signe $+$ est la plus forte, et quand elle est la plus faible.

Remarque. — Les démonstrations qui précèdent supposent les coefficients entiers, nous allons voir comment on les modifierait, si les termes semblables avaient des coefficients fractionnaires.

On peut d'abord supposer ces coefficients réduits au même dénominateur ; soit le polynône $4b + \frac{8a}{12} + \frac{9a}{12} + \frac{10a}{12}$.

$\frac{8a}{12}$, $\frac{9a}{12}$ et $\frac{10a}{12}$ sont les sommes de 8, de 9 et de 10 quantités égales à $\frac{a}{12}$, le polynôme proposé est donc la somme de $4b$ et de $8 + 9 + 10$ ou 27 quantités égales à $\frac{a}{12}$, il équivaut à

$$4b + \frac{27a}{12};$$

$\frac{27}{12}$ est la somme des trois coefficients fractionnaires, et la règle est la même que dans le cas des coefficients entiers.

Si les coefficients étaient incommensurables, les règles données précédemment s'appliqueraient encore.

Soit le polynôme

$$4b + \sqrt{3}\,a - \sqrt{2}\,a.$$

Remplaçons $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$ par leurs valeurs approchées 1,7 et 1,4, nous aurons, puisque ces nouveaux coefficients sont commensurables,

$$4b + 1{,}7a - 1{,}4a = 4b + (1{,}7 - 1{,}4)a.$$

Cette égalité, subsistant quelque près que les valeurs approchées soient de leurs limites $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$, sera encore vraie quand on y remplacera les valeurs approchées par leurs limites, et l'on aura

$$4b + \sqrt{3}a - \sqrt{2}a = 4b + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\,a.$$

On étendra de la même manière aux quantités incommensurables tous les théorèmes démontrés sur des quantités commensurables.

Dès lors les règles données précédemment s'appliqueront à des termes semblables ayant des coefficients littéraux, puisque les lettres représentent des nombres commensurables ou incommensurables, et l'on aura

$$a + bx - cx = a + (b-c)x, \qquad \text{si } b > c,$$
$$a + bx - cx = a - (c-b)x, \qquad \text{si } b < c.$$

Toutes les transformations qui précèdent peuvent évidemment se faire, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres dans les formules.

II. — Définition des quatre opérations algébriques.

Le sens des mots *somme, différence, produit, quotient,* a été étendu en arithmétique au cas où les nombres sur lesquels on opère sont fractionnaires ou incommensurables ; c'est ce sens général que nous adopterons en algèbre, puisque les lettres, et par suite les formules, y représentent des nombres entiers, fractionnaires ou incommensurables.

L'addition, la soustraction, la multiplication et la division de formules algébriques données ont pour but de trouver une formule, sans parenthèse ni barre de division, équivalente à la somme, à la différence, au produit et au quotient des formules données, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres dans ces formules.

Quand on place les formules entre parenthèses en les réunissant par le signe $+$, $-$, $\times$ ou :, l'opération n'est qu'indiquée.

III. — Addition.

L'addition algébrique a pour but de trouver une formule sans parenthèses équivalente à la somme de plusieurs autres, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres ; cette formule s'appelle la *somme* des autres.

1. — Addition des monômes.

Soit proposé d'additionner les monômes $3a^2b$, $5ab^2$ et $2b^3$; d'après ce que nous avons dit sur le calcul de la valeur d'un polynôme (1, II, 2), la somme cherchée est le polynôme

$$3a^2b + 5ab^2 + 2b^3.$$

Les parenthèses que l'on pourrait mettre à chaque monôme, pour indiquer l'opération, ne changeraient rien au calcul de la formule.

Règle. — *Pour additionner plusieurs monômes, on les écrit les uns après les autres en les séparant par le signe* $+$.

2. — Addition des polynômes.

Soit proposé d'additionner les deux polynômes $a + b + c$ et $l - m + n - p$; l'opération s'indique par

$$(a + b - c) + (l - m + n - p).$$

Il s'agit de faire disparaître les parenthèses ; la première est inutile, car, soit qu'on la mette, soit qu'on ne la mette pas, il faut commencer le calcul en faisant la somme des valeurs des monômes a, b et retranchant du résultat la valeur du monôme c; mais la seconde parenthèse indique que l'on doit calculer $l - m + n - p$, et ajouter la valeur ainsi obtenue du second polynôme, à la valeur du premier, tandis que, si l'on supprime cette seconde parenthèse, il faut à la valeur du premier polynôme $a + b - c$ ajouter l, puis du résultat retrancher m, puis ajouter n au nouveau résultat, et finalement retrancher p. Prouvons que cette seconde série d'opérations donne la même somme que la première.

Supposons qu'au premier polynôme on ajoute $l - m + n$, ce qui s'indique

$$a + b - c + (l - m + n),$$

ayant ajouté une quantité trop forte de p, nous avons un résultat trop fort de p ; pour le rendre juste, il en faudra retrancher p, ce qui donne

$$a + b - c + (l - m + n) - p.$$

Au lieu d'ajouter $l - m + n$ au premier polynôme, ajoutons $l - m$, ce qui s'indique par

$$a + b - c + (l - m),$$

ayant ajouté une quantité trop faible de n, nous avons un résultat trop faible de n, et pour le rendre juste il y faudra ajouter n, donc

$$a + b - c + (l - m + n) = a + b - c + (l - m) + n,$$

et par suite

$$a+b-c+(l-m+n)-p=a+b-c+(l-m)+n-p$$

ou

$$a+b-c+(l-m+n-p)=a+b-c+(l-m)+n-p.$$

On voit que tous les termes du deuxième polynôme peuvent sortir de la parenthèse en gardant leur signe + ou —, donc finalement

$$(a+b-c)+(l-m+n-p)=a+b-c+l-m+n-p.$$

Règle. — *Pour additionner deux polynômes, on les écrit l'un à la suite de l'autre, sans parenthèses, en les séparant par le signe +.*

Remarque. — Si la première ou la seconde formule se réduisait à un monôme, on l'écrirait à la gauche ou à la droite de l'autre, en les séparant par le signe +.

Corollaire. — *Pour additionner plusieurs polynômes, on les écrit les uns à la suite des autres en les séparant par le signe +.*

IV. — Soustraction.

La soustraction algébrique a pour but de trouver une formule sans parenthèses équivalente à la différence de deux formules données, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

Le résultat de cette opération s'appelle *reste* ou *différence;* ajouté à la formule que l'on retranche il doit reproduire l'autre formule donnée.

1. — Soustraction des monômes.

Soit le monôme $3a^2b$ dont on veut retrancher $5ab^2$.

D'après ce que nous avons dit (1, II, 2) sur le calcul de la valeur d'un polynôme, la différence cherchée sera égale au polynôme

$$3a^2b - 5ab^2.$$

Les parenthèses que l'on pourrait mettre à chaque monôme, pour indiquer l'opération, ne changeraient rien au calcul de la formule.

Règle. — *Pour soustraire un monôme d'un autre, on écrit le premier à la suite du second, en les séparant par le signe —.*

2. — Soustraction des polynômes.

Soit à soustraire le polynôme $d - e + f$ du polynôme $a - b + c$, l'opération s'indique avec des parenthèses :

$$(a - b + c) - (d - e + f).$$

Il s'agit de faire disparaître les parenthèses; la première est inutile, car, soit qu'on la mette, soit qu'on ne la mette pas, il faut commencer le calcul en retranchant de la valeur du monôme a celle du monôme b, et ajoutant au résultat la valeur de c ; mais la seconde parenthèse indique qu'il faut calculer la valeur du second polynôme, et la retrancher de celle du premier ; en la supprimant simplement on aurait une formule qui ne serait pas la différence des deux polynômes. En effet, supposons que du premier polynôme on retranche $d - e$, ce qui donne :

$$a - b + c - (d - e),$$

ayant retranché une quantité trop faible de f, nous aurons un reste trop fort de f ; pour le rendre juste, il en faudra retrancher f ; donc

$$a - b + c - (d - e + f) = a - b + c - (d - e) - f.$$

Au lieu de retrancher $d - e$ du premier polynôme, retranchons seulement d, quantité trop forte de e ; le reste $a - b + c - d$ sera trop faible de e, et, pour le rendre juste, il faudra ajouter e, ce qui donne :

$$a - b + c - (d - e) = a - b + c - d + e,$$

et par suite

$$a - b + c - (d - e) - f = a - b + c - d + e - f,$$

enfin

$$(a - b + c) - (d - e + f) = a - b + c - d + e - f.$$

On voit que chaque terme qui sort de la seconde parenthèse prend un signe différent de celui qu'il avait dans cette parenthèse ; le premier, qui est censé avoir le signe $+$, prend le signe $-$.

RÈGLE. — *Pour soustraire un polynôme d'un autre polynôme, on écrit successivement tous ses termes à la droite de cet autre, avec des signes contraires à ceux dont ils sont affectés.*

Cette règle pourrait se démontrer autrement. Puisque le polynôme cherché, ajouté au polynôme à soustraire $d-e+f$, doit reproduire l'autre polynôme donné $a-b+c$, il se composera de $a-b+c$ suivi des termes du polynôme $d-e+f$, affectés chacun d'un signe contraire,

$$a-b+c-d+e-f;$$

car le résultat ainsi obtenu, additionné avec $d-e+f$, donne:

$$a-b+c-d+e-f+d-e+f,$$

ou en supprimant les termes semblables qui se détruisent

$$a-b+c.$$

Remarque. — La démonstration et la règle seraient identiques, si le polynôme dont on soustrait l'autre se réduisait à un monôme. Si c'est le polynôme à soustraire qui se réduit à un monôme, il n'y a qu'à l'écrire à la suite de l'autre, en les séparant par le signe —; cela résulte de ce que nous avons dit sur le calcul de la valeur d'un polynôme (1, II, 2).

Corollaire. — Pour soustraire plusieurs formules ou polynômes d'une autre formule ou polynôme, on retranche de cette dernière quantité la somme de toutes les autres.

V. — Remarques relatives à l'addition et à la soustraction.

1. — Si, dans l'addition ou la soustraction de plusieurs monômes ou polynômes, le résultat renferme des termes semblables, on pourra les réunir en un seul (2, I).

Pour opérer plus facilement la réduction des termes semblables dans l'addition et la soustraction des polynômes, on peut imiter la disposition de l'addition et de la soustraction des nombres entiers, c'est-à-dire placer les polynômes les uns sous les autres, en mettant leurs termes semblables dans la même colonne. On écrit alors la somme ou la différence sous le dernier polynôme, dont on la sépare par un trait horizontal; chaque terme de cette somme ou de cette différence se détermine en réduisant à un seul les termes semblables placés dans la même colonne. Il ne faut pas oublier, dans la soustraction, de changer les signes des termes du polynôme que l'on retranche.

EXEMPLES D'ADDITION.

$$\begin{array}{r} 5a-\ b+2c \\ 2a-3b+4c \\ a+2b-3c \\ \hline 8a-2b+3c \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a+7b-5c \\ 5a\ldots\ldots-3c+4d \\ 5b+2c-6d \\ \hline 7a+12b-6c-2d \end{array}$$

EXEMPLES DE SOUSTRACTION.

$$\begin{array}{r} 9a-4b-8c \\ 7a+3b-5c \\ \hline 2a-7b-3c \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{2}{3}a-\frac{5}{6}b+c-3 \\ \frac{3}{4}a-\frac{1}{3}b\qquad+1 \\ \hline -\frac{1}{12}a-\frac{1}{2}b+c-4. \end{array}$$

2. — Toute égalité exprime, en général, deux théorèmes, dont on forme les énoncés en considérant chaque membre de l'égalité comme la transformée de l'autre. Ainsi les égalités

$$a-b+(c-d)=a-b+c-d,$$
$$a-b-(c-d)=a-b-c+d,$$

dont les premiers membres se transforment dans les seconds, font connaître les règles de l'addition et de la soustraction. Mais si l'on y considère, au contraire, les premiers membres comme les transformées des seconds, ce qu'on indique de la manière suivante :

$$a-b+c-d=a-b+(c-d),$$
$$a-b-c+d=a-b-(c-d),$$

on a ce théorème : *Lorsqu'on met dans une parenthèse un certain nombre de termes d'un polynôme, la parenthèse doit être précédée du signe + ou du signe —, selon que les termes qu'elle renferme ont les mêmes signes que dans le polynôme ou des signes contraires.*

D'après cette règle, le polynôme

$$a-b+c-d+e$$

peut être écrit de la manière :

$$a-(b-c)+(e-d).$$

EXERCICES.

1° — Additionner les polynômes

$$\begin{aligned} &4ab - 6ac + 15bc + 7, \\ &3ab - 5ac - 7bc + 3, \\ &-5ab + 8ac - 3bc - 10. \end{aligned}$$

2° — Ajouter les polynômes

$$\begin{aligned} &8a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{3}c - \frac{1}{4}, \\ &-4a + b - c + 2, \\ &-4a + \frac{3}{4}b + 3c - 1. \end{aligned}$$

3° — Du polynôme $7a + 4b - 3c$ retrancher $8a - 2b - 5c + 2$.

4° — Soustraire du polynôme $2ab - 6ac + 4bc + 7$ la somme des trois polynômes suivants :

$$\begin{aligned} &ab - 10ac + 5bc - \frac{1}{4}, \\ &3ab - 7ac + 40bc + 1, \\ &4ab + 14ac - 3bc + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5° — Trois joueurs se mettent au jeu, le premier avec a francs, le second avec b francs et le troisième avec c francs ; ils conviennent que le perdant doublera l'enjeu des deux autres joueurs. Après trois parties perdues successivement par le premier joueur, le second et le troisième, quelles sont les sommes possédées par ces trois personnes ?

(*Rép.* 1° $4a - 4b - 4c$, 2° $6b - 2a - 2c$, 3° $7c - a - b$.)

6° — Additionner $a + b$ et $a - b$, et retrancher $a - b$ de $a + b$. Énoncer les deux théorèmes qui résultent de ces opérations.

TROISIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Multiplication. — Règle des signes.

I. — Définitions.

1. — *Multiplier deux nombres l'un par l'autre, c'est effectuer sur le premier appelé multiplicande les mêmes opérations qu'on a faites sur l'unité, pour en déduire le second appelé multiplicateur.*

Le résultat de la multiplication se nomme *produit;* il a pour *facteurs* le multiplicande et le multiplicateur.

Cette définition résume celles qu'on donne dans l'arithmétique pour les cas où le *multiplicateur* est un nombre *entier* ou une *fraction.* En effet si le multiplicateur est un nombre entier tel que 15, le produit sera la somme de 15 nombres égaux au multiplicande, et si le multiplicateur est un nombre fractionnaire, $\frac{3}{5}$ par exemple, le produit sera égal à la somme de trois nombres égaux au cinquième du multiplicande.

La multiplication algébrique a pour but de trouver une formule sans parenthèses, équivalente au produit de deux formules données, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

La formule trouvée s'appelle *produit,* et les formules données sont les *facteurs* du produit.

Dans la multiplication algébrique nous admettrons les principes suivants déjà démontrés en arithmétique, et applicables aux formules algébriques, qui, quand on remplace les lettres par leurs valeurs, représentent des nombres quelconques.

PRINCIPE I. — On ne change pas la valeur du produit de plusieurs facteurs en intervertissant l'ordre des facteurs.

Principe II. — Si l'on multiplie l'un des facteurs d'un produit par un nombre, le produit est aussi multiplié par ce nombre.

Principe III. — Pour multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs, on peut multiplier ce nombre par le 1er facteur, le produit obtenu par le 2e facteur, le nouveau produit par le 3e facteur, et ainsi de suite.

II. — Multiplication de deux puissances de la même quantité.

Soit à multiplier a^5 par a^3. Le multiplicande a^5 est le produit de 5 facteurs égaux à a, le multiplicateur a^3 est le produit de 3 facteurs égaux à a. Au lieu de multiplier le multiplicande par le produit de ces trois facteurs a, on peut (Principe III) le multiplier successivement par chacun des facteurs, ce qui donne un produit de $5+3$ ou 8 facteurs égaux à a.

$$a^5 \times a^3 = a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a \times a\,.\,a\,.\,a,$$

ou, en adoptant la notation d'un exposant pour indiquer le nombre des facteurs égaux à a,

$$a^5 \times a^3 = a^8.$$

Règle. — *Le produit de deux puissances de la même quantité est une autre puissance de cette quantité dont le degré égale la somme des degrés de ses facteurs.*

Corollaire. — La règle s'étend évidemment au produit d'un nombre quelconque de puissances de la même quantité

Remarque. — Cette règle est formulée par l'égalité

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p},$$

dans laquelle les exposants m, n, et p sont des nombres entiers quelconques ; si l'un des facteurs n'a pas d'exposant, le raisonnement montre qu'il faut le regarder comme ayant l'exposant 1.

III. — Multiplication de deux monômes.

Prenons pour exemple la multiplication de $\frac{3}{4}\,a^2b^5c^3$ par $5a^4b^3$, qui s'indique de la manière suivante :

$$\left(\frac{3}{4}\,a^2b^5c^3\right) \times (5a^4b^3).$$

La première parenthèse est inutile, car, soit qu'on la mette, soit qu'on ne la mette pas, il faudra toujours commencer par calculer la valeur du premier monôme; le principe III permet d'enlever la seconde parenthèse ; on fait donc le produit de deux monômes en les écrivant à la suite l'un de l'autre sans parenthèse, et en les séparant par le signe $\times$. On peut simplifier l'écriture du résultat, en intervertissant l'ordre des facteurs, plaçant les coefficients l'un à côté de l'autre, ainsi que les puissances d'une même lettre,

$$\frac{3}{4} \times 5a^2a^4b^5b^3c^3$$

ensuite on fait le produit des coefficients, et celui des puissances d'une même lettre (3, II), ce qui donne

$$\frac{15}{4}a^6b^8c^3.$$

Règle. — *Le produit de deux monômes entiers est un monôme ayant pour coefficient le produit des coefficients des facteurs, suivi des lettres communes affectées d'un exposant égal à la somme de leurs exposants, et des lettres non communes, chacune avec son exposant.*

Corollaire I. — Le degré du produit de deux monômes entiers est égal à la somme des degrés des facteurs.

Corollaire II. — Le produit de plusieurs monômes entiers a pour coefficient le produit des coefficients des facteurs, et contient les lettres non communes, puis les lettres communes à deux ou plusieurs facteurs affectées chacune d'un exposant égal à la somme de ses exposants.

IV. — Multiplication d'un monôme par un polynôme et inversement.

Soit à multiplier le monôme a par le polynôme $b - c + d$, opération qui s'indique par $a(b - c + d)$. Comme le multiplicateur $b - c + d$, quels que soient b, c et d s'obtient en exécutant sur l'unité les opérations suivantes :

$$1 \times b - 1 \times c + 1 \times d$$

et que, par définition, le produit s'obtient en exécutant sur le multiplicande a les mêmes opérations, pour avoir le produit cherché, nous n'avons qu'à remplacer dans cette série d'opérations l'unité par a, et il sera

$$a \times b - a \times c + a \times d \quad \text{ou} \quad ab - ac + ad,$$

ce qui démontre la règle suivante :

Règle. — *Le produit de la multiplication d'un monôme par un polynôme s'obtient en multipliant* le *monôme par les différents termes du polynôme et en écrivant ces produits, les uns à la suite des autres, avec les signes dont leurs facteurs sont précédés dans le polynôme.*

Corollaire. — Le produit d'un polynôme par un monôme s'obtient d'après la même règle, car

$$(b - c + d)a = a(b - c + d).$$

Cette règle ramène la multiplication d'un monôme par un polynôme et celle d'un polynôme par un monôme à une suite de multiplications de monômes qu'on effectue par le procédé précédemment indiqué. C'est ainsi qu'on trouve que le produit du polynôme $5a^2b - 7ab^2 + 4b^3$ par le monôme $6a^3b^2$ est égal à $30a^5b^3 - 42a^4b^4 + 24a^3b^5$.

On a de même $6a^4b^3c - 8a^5b^2c - 2a^6bc$ pour le produit du monôme $2a^4b$ par le polynôme $3b^2c - 4abc - a^2c$.

Remarque. — L'égalité

$$ab - ac + ad = a(b - c + d)$$

montre que, lorsque les termes d'un polynôme $ab - ac + ad$ ont un facteur commun a, on peut le supprimer dans chacun d'eux, puis multiplier par ce facteur le polynôme ainsi modifié ; c'est ce qu'on appelle *mettre* un monôme *en facteur commun.*

Cette opération est d'une grande utilité ; elle sert à ordonner un polynôme par rapport à une lettre dont la même puissance se trouve dans plusieurs termes. En effet, pour ordonner le polynôme

$$a^3 + a^2x + ax^2 - b^3 + b^2x - bx^2 - c^2x$$

par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x, je remarque : 1° que x^2 est facteur des deux termes ax^2, bx^2; 2° que x est aussi facteur des trois termes a^2x, b^2x, c^2x. J'applique alors la règle précédente à ces deux groupes de termes et je donne au polynôme proposé la forme suivante :

$$(a - b)x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + a^3 - b^3.$$

Par analogie avec les polynômes ordonnés dont les coefficients sont numériques, chacun des multiplicateurs algébriques $a-b$, $a^2+b^2-c^2$, des différentes puissances de la lettre principale a reçu le nom de coefficient.

Au lieu de mettre les coefficients polynômes dans des parenthèses, on les écrit aussi de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|r|l} a & x^2 + a^2 & x + a^3 \\ -b & + b^2 & - b^3 \\ & - c^2 & \end{array}$$

c'est-à-dire que les termes de chaque coefficient sont placés les uns sous les autres et séparés de la lettre principale par un trait vertical. Cette seconde disposition exige moins de place que la première dans le sens horizontal.

V. — Multiplication de deux polynômes. — Règle des signes.

1. — Soit à multiplier le polynôme $a - b + c$ par le polynôme $d - e + f$, ce qui s'indique par $(a - b + c)\ (d - e + f)$.

Si pour un instant nous remplaçons le multiplicande par la lettre p, qui peut prendre toutes les valeurs possibles de ce polynôme, nous sommes ramenés à la multiplication d'un monôme par un polynôme, qui donne par la règle précédente :

$$pd - pe + pf.$$

Remplaçons maintenant la lettre p par le polynôme $a - b + c$ qu'elle représente, le produit cherché prend la forme

$$(a - b + c)\,d - (a - b + c)\,e + (a - b + c)f,$$

et en exécutant les multiplications de monômes indiquées,

$$(ad - bd + cd) - (ae - be + ce) + (af - bf + cf),$$

ou

$$ad - bd + cd \ - \ ae + be - ce \ + \ af - bf + cf.$$

Cette formule contient tous les produits partiels des divers termes du multiplicande par chacun de ceux du multiplicateur, ceux qui proviennent de termes du multiplicateur ayant le signe + gardent le signe du terme du multiplicande, ceux qui proviennent de termes du multiplicateur ayant le signe — prennent, par la soustraction, un signe contraire à celui du terme du multiplicande.

Dans les applications, on se sert souvent des locutions vicieuses :

$+$	multiplié par	$+$	donne	$+$	
$-$	multiplié par	$+$	donne	$-$	
$+$	multiplié par	$-$	donne	$-$	
$-$	multiplié par	$-$	donne	$+$	

En rapprochant le premier et le quatrième cas, le deuxième et le troisième, on voit que le produit de deux termes a le signe $+$ ou le signe $-$, selon qu'ils ont le même signe ou des signes différents ; c'est là ce qu'on appelle la *règle des signes*.

On conclut de là que :

RÈGLE. — *Pour multiplier deux polynômes l'un par l'autre, on multiplie successivement tous les termes du multiplicande par chacun de ceux du multiplicateur, puis on écrit ces produits partiels les uns à la suite des autres, en donnant à chacun d'eux le signe $+$ ou le signe $-$, selon que les deux facteurs ont le même signe ou des signes différents.*

Cette règle ramène la multiplication de deux polynômes à une suite de multiplications de monômes qu'on effectue d'après le procédé précédemment donné (3, III).

Dans la multiplication algébrique, la disposition du calcul est la même qu'en arithmétique : on place le multiplicateur sous le multiplicande, et l'on écrit les produits partiels sous le multiplicateur, dont on les sépare par un trait horizontal ; on fait ensuite l'addition de ces produits ; et s'ils ont des termes semblables, on en opère la réduction. Pour faciliter cette réduction, il est bon d'ordonner le multiplicande et le multiplicateur par rapport à une même lettre, s'ils ont une lettre commune. Les produits partiels étant dès lors ordonnés par rapport à cette lettre, on trouvera plus aisément leurs termes semblables, et la réduction de ces termes en deviendra plus facile.

Voici quelques exemples de multiplication de deux polynômes, offrant l'application de toutes les règles précédentes :

1er EXEMPLE.

Multiplier	$3a^4b - 2a^3b^2 + 5a^2b^3 - 6ab^4$
par.	$2a^2b^2 - 3ab^3 + 4b^4$
Produit du multiplicande par $+ 2a^2b^2$. . . .	$6a^6b^3 - 4a^5b^4 + 10a^4b^5 - 12a^3b^6$
par $- 3ab^4$. . . .	$- 9a^5b^4 + 6a^4b^5 - 15a^3b^6 + 18a^2b^7$
par $+ 4b^4$.	$+ 12a^4b^5 - 8a^3b^6 + 20a^2b^7 - 24ab^8$
Produit total simplifié. . . .	$6a^6b^3 - 13a^5b^4 + 28a^4b^5 - 35a^3b^6 + 38a^2b^7 - 24ab^8$

2e EXEMPLE.

$$\begin{array}{ll}
\text{Multiplier} \ldots\ldots & a^6+2a^4b^2+4a^2b^4+8b^6 \\
\text{par} \ldots\ldots\ldots & a^2-2b^2 \\
\hline
\text{Produit du multiplicande} \left\{\begin{array}{l}\text{par } +a^2 \ldots \\ \text{par } -2b^2 \ldots\end{array}\right. & \begin{array}{l} a^8+2a^6b^2+4a^4b^4+8a^2b^6 \\ \quad\;\; -2a^6b^2-4a^4b^4-8a^2b^6-16b^8 \end{array} \\
\hline
\text{Produit total simplifié} & a^8-16b^8
\end{array}$$

Remarque. — Si les deux polynômes sont ordonnés par rapport à une lettre commune dont les coefficients soient eux-mêmes des polynômes, les règles précédentes sont encore applicables ; mais il faut effectuer à part les multiplications des coefficients qu'on ne peut plus faire immédiatement.

3e EXEMPLE.

Multiplier	a $+b$	x^2+ a^2 $+2ab$	$x+$ a^2b $-ab^2$	
par		a $-2b$	$x+$ ab $+b^2$	
Produit du multiplicande par $(a-2b)x$	a^2 $-ab$ $-2b^2$	x^3+ a^3 $-4ab^2$	x^2+ a^3b $-3a^2b^2$ $+2ab^3$	x
Produit du multiplicande par $ab+b^2$		$+a^2b$ $+2ab^2$ $+b^3$	x^2+ a^3b $+3a^2b^2$ $+2ab^3$	$x+a^3b^2$ $-ab^4$
Produit total simplifié	a^2 $-ab$ $-2b^2$	x^3+ a^3 $+a^2b$ $-2ab^2$ $+b^3$	x^2+2a^3b $+4ab^3$	$x+a^3b^2$ $-ab^4$

PRODUITS PARTIELS DES COEFFICIENTS

Premier.	Deuxième.	Troisième.
$\begin{array}{l} a+b \\ a-2b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -2ab-2b^2 \\ \hline a^2-ab-2b^2 \end{array}$	$\begin{array}{l} a^2+2ab \\ a-2b \\ \hline a^3+2a^2b \\ \quad -2a^2b-4ab^2 \\ \hline a^3 \qquad\quad -4ab^2 \end{array}$	$\begin{array}{l} a^2b-ab^2 \\ a-2b \\ \hline a^3b-a^2b^2 \\ \quad -2a^2b^2+2ab^3 \\ \hline a^3b-3a^2b^2+2ab^3 \end{array}$
Quatrième.	**Cinquième.**	**Sixième.**
$\begin{array}{l} a+b \\ ab+b^2 \\ \hline a^2b+ab^2 \\ \quad +ab^2+b^3 \\ \hline a^2b+2ab^2+b^3 \end{array}$	$\begin{array}{l} a^2+2ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^3b+2a^2b^2 \\ \quad +a^2b^2+2ab^3 \\ \hline a^3b+3a^2b^2+2ab^3 \end{array}$	$\begin{array}{l} a^2b-ab^2 \\ ab+b^2 \\ \hline a^3b^2-a^2b^3 \\ \quad +a^2b^3-ab^4 \\ \hline a^3b^2 \qquad\quad -ab^4 \end{array}$

2. — Théorèmes relatifs au produit de deux polynômes.

Théorème I. — *Le produit de deux polynômes contient au plus autant de termes qu'il y a d'unités dans le produit du nombre des termes du multiplicande par celui des termes du multiplicateur, et il en a au moins deux.*

Dans la multiplication de deux polynômes quelconques, chacun des produits partiels du multiplicande par les différents termes du multiplicateur est formé d'autant de termes qu'il y en a dans le multiplicande. Si, premièrement, les deux polynômes donnés n'ont aucune lettre commune, les termes des produits partiels, considérés deux à deux, diffèrent au moins par l'un de leurs facteurs algébriques, et la somme de ces produits n'a pas de termes semblables ; elle contient donc autant de termes qu'il y a d'unités dans le produit du nombre des termes du multiplicande par le nombre des termes du multiplicateur. C'est ainsi qu'en multipliant l'un par l'autre le trinôme $2a + 3b - 4c$ et le binôme $5d - 6e$ qui n'ont pas de lettre commune, on trouve pour leur produit le polynôme

$$10ad + 15bd - 20cd - 12ae - 18be + 24ce$$

qui a 3×2 ou 6 termes.

Considérons, en second lieu, deux polynômes ayant une lettre commune, et ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de cette lettre, par exemple les deux polynômes

$$2a^5 - 3a^4 + 4a^3 - 5a^2,$$
$$6a^3 - 7a^2 + 8a.$$

Dans le produit d'un terme quelconque du multiplicande par un terme du multiplicateur, la lettre ordonnatrice a pour exposant la somme des exposants dont elle est affectée dans les deux facteurs ; dès lors le terme provenant de la multiplication des deux premiers termes $2a^5$, $6a^3$, du multiplicande et du multiplicateur contient cette lettre avec un exposant plus grand que celui dont elle est affectée dans les autres termes du produit. Pareillement, le terme qu'on forme en multipliant les deux derniers termes $5a^2$ et $8a$ du multiplicande et du multiplicateur contient la lettre a avec un exposant plus petit que dans tous les autres termes. Par conséquent, après la réduction des termes semblables, le produit des deux polynômes aura $2a^5 \times 6a^3$ ou $12a^8$ pour premier terme et $5a^2 \times 8a$ ou $40a^3$ pour dernier terme, puisque ces monômes ne peuvent se réduire avec aucun autre ; il sera donc composé d'au moins deux termes.

On a un exemple du minimum du nombre des termes d'un produit dans la multiplication du polynôme $a^6 + 2a^4b^2 + 4a^2b^4 + 8b^6$ par le binôme $a^2 - 2b^2$; car on a trouvé $a^8 - 16b^8$ (page 30) pour le résultat de cette opération. Cet exemple et le raisonnement précédent prouvent aussi que chacune des lettres des deux polynômes se trouve au moins dans un terme de leur produit.

THÉORÈME II. — *Le produit de deux polynômes homogènes est aussi homogène et d'un degré égal à la somme des degrés de ses facteurs.*

En effet, chacun des termes des produits partiels qu'on forme en multipliant le multiplicande par les différents termes du multiplicateur est d'un degré égal à la somme des degrés de ses deux facteurs, ou à la somme des degrés des deux polynômes, puisqu'ils sont homogènes. La somme de ces produits partiels, c'est-à-dire le produit des deux polynômes, est donc homogène et d'un degré égal à la somme des degrés de ses facteurs.

Les multiplications des pages 29 et 30 offrent l'exemple de produits de facteurs homogènes.

REMARQUE. — Le théorème précédent est fréquemment appliqué pour reconnaître si les exposants des termes du produit de plusieurs polynômes homogènes sont exacts. Supposons, par exemple, qu'on ait trouvé

$$3a^4b - 2a^3b + 6a^2b^3 - 4ab^4$$

pour le produit des deux polynômes homogènes $a^3 + 2ab^2$, $3ab - 2b^2$; on voit immmédiatement que ce produit est inexact, puisque le terme $2a^3b$ n'est pas du même degré que les trois autres.

THÉORÈME III. — *Le carré d'une somme composée de deux parties est égal au carré de la première partie, plus deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Soit $a + b$ la somme de deux quantités quelconques, pour former son carré faisons le produit de deux facteurs égaux à $a + b$.

$$\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
a^2 + ab \\
+ ab + b^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2
\end{array}$$

Donc

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

En appliquant ce théorème on trouve sans multiplication

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{2xp}{2} + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Théorème IV. — *Le carré de la différence de deux quantités est égal au carré de la première, moins deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Soit $a - b$ la différence de deux quantités quelconques; pour former son carré, faisons le produit de deux quantités égales à $a - b$.

$$\begin{array}{r}
a - b \\
a - b \\
\hline
a^2 - ab \\
- ab + b^2 \\
\hline
a^2 - 2ab + b^2
\end{array}$$

Donc

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Théorème V. — *Le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces quantités.*

Soient a et b deux quantités quelconques : multiplions leur somme $a + b$ par leur différence $a - b$, et nous trouverons $a^2 - b^2$ pour le produit, d'après le calcul suivant :

$$\begin{array}{r}
a + b \\
a - b \\
\hline
a^2 + ab \\
- ab - b^2 \\
\hline
a^2 - b^2
\end{array}$$

En appliquant ce théorème au produit suivant, on trouve

$$(2ab + 3b^2)(2ab - 3b^2) = 4a^2b^2 - 9b^4.$$

Remarque. — La formule

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

est d'un usage très-fréquent ; non-seulement elle sert à abréger la multiplication en faisant connaître la composition d'un produit, mais encore on l'emploie inversement à décomposer la différence a^2-b^2 de deux carrés en deux facteurs $a+b$, $a-b$, dont l'un est égal à la différence des racines a et b, de ces carrés, et l'autre égal à la somme des mêmes racines.

1ᵉʳ Exemple. — Soit le binôme

$$(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$$

dont les racines carrées des deux termes sont a^2+ab+b^2 et a^2-ab+b^2 ; la somme de ces racines étant égale à $2(a^2+b^2)$ et leur différence égale à $2ab$, on a

$$(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab\,(a^2+b^2).$$

2ᵉ Exemple. — On trouverait de même que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=ab.$$

Cette égalité exprime que *le produit de deux nombres quelconques* a, b, *est égal à l'excès du carré de leur demi-somme* $\frac{a+b}{2}$ *sur le carré de leur demi-différence* $\frac{a-b}{2}$.

Multiplication de plusieurs polynômes.

Pour faire le produit de plusieurs polynômes, on multiplie le premier polynôme par le deuxième, puis le résultat de cette première opération par le troisième, puis le résultat de cette seconde opération par le quatrième, et ainsi de suite jusqu'au dernier polynôme donné.

On peut intervertir l'ordre des facteurs dans la multiplication de plusieurs polynômes, sans changer la valeur de leur produit. L'application de ce principe conduit quelquefois à des simplifications de calcul, par le rapprochement de facteurs dont le produit est connu d'avance. Ainsi, pour effectuer le produit suivant :

$$(a+b)\,(a+c)\,(a-b)\,(a-c),$$

je multiplie d'abord le premier facteur par le troisième, et le second facteur par le quatrième, parce que ces produits partiels sont donnés par le théorème V ; le produit proposé est ramené de cette manière à la multiplication des deux binômes a^2-b^2, a^2-c^2, dont le résultat est $a^4-(b^2+c^2)\,a^2+b^2c^2$.

EXERCICES.

1° — Multiplier

$$a^2b - 3ab^2 + 2b^3 \text{ par } 4a^3b^2c,$$

$$8a^4b - 3a^3b^2 + 6a^2b^3 + ab^4 \text{ par } 5a^2b^2 - 3a^3b + 4a^4,$$

$$81a^4 - 54a^3b + 36a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 \text{ par } 3a + 2b,$$

$$a^2 + ab + b^2 \text{ par } a^2 - ab + b^2,$$

$$a^4 + a^6 + a^8 + a^{10} \text{ par } a^2 - 1.$$

2° — Démontrer que le nombre des termes d'un polynôme, entier et ordonné par rapport à une lettre, est au plus égal à la différence des exposants de ses deux termes extrêmes, augmentée de l'unité.

3° — Si deux polynômes entiers sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre qui leur est commune, et que m, m' soient les exposants de cette lettre dans les deux premiers termes de ces polynômes, et n, n', les exposants de la même lettre dans les deux derniers termes ; démontrer que le produit des deux polynômes a au plus $m - n + m' - n' + 1$ termes.

4° — Mettre en évidence les facteurs communs aux termes de chacun des polynômes suivants :

$$4a^3b^2c - 6a^2b^3c + 2ab^4c,$$

$$12a^4x^4 - 18a^5x^5 + 42a^6x^2 - 36a^7x + 48a^8,$$

$$2a^3b^2c^2 - 4a^2b^3c^2 + 6a^3b^3c.$$

5° — Effectuer les produits suivants :

$$(2a + 3b)(2a - 3b),$$

$$(7a^2b^3c + 5ab^2c^3)(7a^2b^3c - 5ab^2c^3),$$

$$(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a).$$

6° — Vérifier l'égalité

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 = (ab' - ba')^2 + (ac' - ca')^2 + (bc' - cb')^2.$$

7° — Multiplier

$$(5b + 6c)a + 4bc - d^2$$

par

$$(5b - 6c)a + 4bc + d^2.$$

8° — Faire le carré de $2ax + b$.

9° — Décomposer $(b + c)^2 - a^2$ en un produit de deux facteurs.

10° — Décomposer $a^2 - (b - c)^2$ en un produit de deux facteurs.

QUATRIÈME ET CINQUIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Division des monômes. — Exposant zéro. — Division des polynômes.

I. — Définitions.

Diviser une quantité par une autre, c'est en chercher une troisième nommée quotient, telle qu'en la multipliant par la seconde, appelée diviseur, on reproduise la première appelée dividende.

On indique ordinairement la division de deux quantités quelconques, monômes ou polynômes, en écrivant le diviseur sous le dividende dont on le sépare par un trait horizontal.

La division algébrique de deux quantités entières a pour but de trouver une quantité entière appelée quotient, qui, multipliée par la quantité prise pour diviseur, reproduise la quantité prise pour dividende, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

La division est *impossible* s'il n'y a pas de quantité entière qui, multipliée par le diviseur, reproduise le dividende. Dans ce cas on sera obligé de représenter le quotient par une *fraction* ayant pour numérateur le dividende, et pour dénominateur le diviseur. Cette fraction pourra quelquefois être simplifiée, ou remplacée par une formule entière accompagnée d'une fraction plus simple.

II. — Division de deux puissances de la même quantité. — Exposant zéro.

Soit à diviser a^8 par a^5. D'après ce que nous avons vu (3, II) sur la multiplication des puissances, la quantité qui multipliée par a^5 donne a^8, ou le quotient cherché, est une puissance de a dont l'exposant ajouté à 5 donne 8, cet exposant se trouvera donc en retranchant 5 de 8, c'est 8 — 5 ou 3, le quotient est a^3.

Règle. — *Le quotient de la division de deux puissances d'une même quantité est une puissance de cette quantité, dont le degré est égal à l'excès du degré du dividende sur celui du diviseur.*

Remarque. — Le théorème précédent est exprimé par l'égalité

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$$

dans laquelle m et p sont entiers.

Pour que la division soit possible, il faut que l'on ait $m > p$, le degré du dividende doit surpasser le degré du diviseur.

Si nous supposons $m = p$, le dividende devient égal au diviseur, et leur quotient, qui n'est autre que l'unité, se présente sous la forme a^0, notation insignifiante, qui représente l'unité, et garde dans les calculs la trace de la lettre a.

Si nous supposons $m < p$, la division est impossible. La règle appliquée à la division $\frac{a^5}{a^8}$ donnerait a^{5-8} ou a^{-3}, notation qui ne signifie rien par elle-même ; mais en divisant les deux termes de la fraction par a^5 elle devient $\frac{1}{a^{8-5}} = \frac{1}{a^3}$; on pourrait donc regarder la notation a^{-3} comme équivalente à $\frac{1}{a^3}$.

III. — Division de deux monômes entiers.

Soit à diviser $\frac{3}{4}\, a^8b^5c^2d^3e^2$ par $2a^5b^3c^2e^2$. Le quotient entier, s'il existe, est un monôme, car il n'y a qu'un monôme qui multiplié par le monôme diviseur puisse reproduire le monôme dividende. Or d'après la règle de la multiplication des monômes (3, III) le coefficient du quotient, multiplié par celui du diviseur, doit reproduire celui du dividende, il est donc égal au quotient de la division du coefficient du dividende par celui du diviseur; l'exposant de la lettre a au quotient, ajouté à l'exposant 5 du diviseur, doit reproduire l'exposant 8 du dividende, il est donc égal à l'excès $8 - 5$ ou 3 de l'exposant de la lettre a au dividende sur celui de la même lettre au diviseur, il en serait de même pour toutes les lettres qui entrent à la fois dans les deux termes; enfin la lettre d^3, qui entre au dividende seulement, doit entrer au quotient avec le même exposant. Le quotient cherché est donc :

$$\frac{3}{8}a^3b^2d^3e^0 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{8}a^3b^2d^3$$

Règle. — *Pour obtenir le quotient de la division de deux monômes, on divise le coefficient du dividende par celui du diviseur, à la suite de ce quotient on écrit les lettres communes avec un exposant égal á l'excès de l'exposant du dividende sur celui du diviseur, puis les lettres qui n'entrent qu'au dividende; les lettres qui ont le même exposant dans les deux termes disparaissent, ou prennent l'exposant zéro.*

Remarque. — Pour que la division de deux monômes entiers soit possible, il faut que les lettres communes aient un exposant plus fort au dividende qu'au diviseur, et que le diviseur ne contienne pas de lettre étrangère au dividende, car le produit du diviseur par un monôme quelconque contiendrait cette lettre, et ne pourrait être égal au dividende qui ne la contient pas.

Ainsi $15a^8b^4c^2$ n'est pas divisible par $5a^3b^6d^2$; mais leur quotient fractionnaire $\frac{15a^8b^4c^2}{5a^3b^6d^2}$ peut se simplifier en divisant les deux termes par $5a^3b^4$, on trouve ainsi $\frac{3a^5c^2}{b^2d^2}$.

Corollaire. — Le degré du quotient de deux monômes entiers est égal à l'excès du degré du dividende sur celui du diviseur.

IV. — Division d'un polynôme entier par un monôme entier.

Soit à diviser le polynôme $12a^5bc^3d^2 - 18a^4b^3c^4 + 30a^3b^2c^2d^4$ par le monôme $6a^3bc^2$, on peut écrire le quotient sous la forme :

$$\frac{12a^5bc^3d^2 - 18a^4b^3c^4 + 30a^3b^2c^2d^4}{6a^3bc^2}$$

S'il existe une formule entière qui, multipliée par le diviseur, reproduise le dividende, ce sera un polynôme, car le produit d'un monôme par un monôme donnerait un monôme, qui ne saurait être égal au dividende quelles que soient les valeurs données aux lettres. Or nous avons vu (3, IV) que le produit d'un polynôme par un monôme est un polynôme, dont tous les termes sont les produits de ceux du polynôme multiplicande par le monôme multiplicateur, et ont le même signe que les termes du multiplicande. Pour trouver les termes du quotient il faudra donc chercher les monômes qui, multipliés par le diviseur $6a^3bc^2$, reproduisent les divers termes du dividende, ou diviser tous les termes du dividende par le diviseur, en donnant aux quotients partiels ainsi obtenus les signes des termes correspondants du dividende. L'opération est ainsi ramenée à des divisions de monômes :

$$\frac{12a^5bc^3d^2}{6a^3bc^2} - \frac{18a^4b^3c^4}{6a^3bc^2} + \frac{30a^3b^2c^2d^4}{6a^3bc^2},$$

ou

$$2a^2cd^2 - 3ab^2c^2 + 5bd^4.$$

Règle. — *Pour diviser un polynôme entier par un monôme entier, on divise successivement tous les termes du dividende par le diviseur, et on donne aux quotients partiels ainsi obtenus les signes des termes correspondants du dividende.*

Remarque I. — Pour qu'un polynôme entier soit divisible par un monôme entier, il faut que tous les termes du dividende soient divisibles par le diviseur.

Ainsi $5a^4 - 7a^3b + 8a^2b^2$ n'est pas divisible par $3a^2b^2$.

Remarque II. — Il résulte de la définition de la division que le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient; dans l'exemple qui précède on a donc :

$$12a^5bc^3d^2 - 18a^4b^3c^4 + 30a^3b^2c^2d^4 = 6a^3bc^2\,(2a^2cd^2 - 3ab^2c^2 + 5bd^4).$$

Remplacer ainsi un polynôme par le produit de son diviseur par le quotient correspondant mis entre parenthèses, s'appelle mettre le diviseur en facteur commun.

On trouvera le *plus grand diviseur commun* à tous les termes d'un polynôme en prenant les lettres communes à tous les termes, chacune avec son plus faible exposant, en regardant les lettres comme les facteurs premiers des termes, on multipliera le résultat par le plus grand commun diviseur des coefficients, s'ils sont entiers.

V. — Un monôme entier n'est pas divisible par un polynôme entier.

En effet le produit d'un polynôme par une quantité quelconque, monôme ou polynôme, a plus d'un terme (3, IV et V).

Ainsi le monôme $6a^3b^2c$ n'est pas divisible par le binôme $2a^2 - 3b^2$.

VI. — Division de deux polynômes entiers.

THÉORÈME I. — *Deux polynômes entiers ne sont pas divisibles l'un par l'autre, lorsque le dividende ne renferme pas toutes les lettres du diviseur.*

Car si le dividende était divisible par le diviseur, il serait le produit du diviseur par un monôme ou un polynôme entier, et la lettre ordonnatrice du diviseur se trouverait au moins dans un terme du dividende, et, comme chaque lettre du diviseur peut être prise pour lettre ordonnatrice, toutes les lettres du diviseur se trouveraient dans le dividende, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi le polynôme a^2+ab+b^2 n'est pas divisible par $a-c$, parce que le dividende ne contient pas la lettre c, qui se trouve dans le diviseur.

REMARQUE. — Lorsque deux polynômes sont divisibles, l'un par l'autre, ils ont au moins une lettre commune, que l'on prendra pour lettre ordonnatrice.

Soient les deux polynômes entiers

$$6a^6b^3 - 13a^5b^4 + 28a^4b^5 - 23a^3b^6 + 20a^2b^7,$$
$$3a^4b - 2a^3b^2 + 5a^2b^3,$$

dont on suppose le premier divisible par le second ; pour déterminer le polynôme entier qui est le quotient de leur division, on remarque que, le dividende étant par hypothèse le produit du diviseur par le quotient cherché, si l'on ordonne ces trois polynômes par rapport à l'une de leurs lettres communes, a par exemple, le premier terme $6a^6b^3$ du dividende est le produit du premier terme du quotient par le premier terme $3a^4b$ du diviseur (3, V, 2) ; on a donc le premier terme du quotient en divisant $6a^6b^3$ par $3a^4b$. Ce terme est égal à $2a^2b^2$: quant à son signe, il doit être le même que celui du diviseur $3a^4b$ puisque le produit $6a^6b^3$ de ces deux monômes a le signe $+$ (3, V).

Maintenant que l'on connaît la valeur et le signe du premier terme du quotient, on multiplie le diviseur $3a^4b - 2a^3b^2 + 5a^2b^3$ par ce terme $2a^2b^2$, et on retranche du dividende

$$6a^6b^3 - 13a^5b^4 + 28a^4b^5 - 23a^3b^6 + 20a^2b^7$$

leur produit $6a^6b^3 - 4a^5b^4 + 10a^4b^5$. S'il ne restait rien le quotient serait un monôme. Le reste, qui égale

$$-9a^5b^4 + 18a^4b^5 - 23a^3b^6 + 20a^2b^7,$$

est le produit du diviseur par le polynôme composé de tous les termes inconnus du quotient. Par conséquent, si on l'ordonne par rapport à la même lettre que le diviseur, on aura le second terme du quotient en divisant le premier terme $-9a^5b^4$ du reste par le premier terme $3a^4b$ du diviseur ; on le trouve égal à $3ab^3$, et on lui donne le signe $-$, c'est-à-dire un signe différent de celui du diviseur $3a^4b$, parce que le produit $-9a^5b^4$ de ces deux monômes a le signe $-$ (3, V).

On multiplie ensuite le diviseur $3a^4b - 2a^3b^2 + 5a^2b^3$ par le second terme $-3ab^3$ du quotient, et on soustrait leur produit $-9a^5b^4 + 6a^4b^5 - 15a^3b^6$ du reste précédent. Le nouveau reste

$$12a^4b^5 - 8a^3b^6 + 20a^2b^7$$

étant le produit du diviseur par le polynôme formé des termes inconnus du quotient, on calculera le troisième terme du quotient, en divisant le premier terme $12a^4b^5$ de ce reste par le premier terme $3a^4b$ du diviseur, et on donnera le signe $+$ à ce terme qui égale $4b^4$, puisque son produit $12a^4b^5$ par le monôme $3a^4b$ affecté du signe $+$ a lui-même le signe $+$ (3, V). En multipliant le diviseur $3a^4b - 2a^3b^2 + 5a^2b^3$ par $+4b^4$, et retranchant le produit $12a^4b^5 - 8a^3b^6 + 20a^2b^7$ du second reste, on trouve zéro pour troisième reste ; donc le dividende

$$6a^6b^3 - 13a^5b^4 + 28a^4b^5 - 23a^3b^6 + 20a^2b^7$$

est le produit exact du diviseur $3a^4b - 2a^3b^2 + 5a^2b^3$ par le polynôme entier $2a^2b^2 - 3ab^3 + 4b^4$; ce polynôme est donc le quotient de la division proposée.

On donne à chacun des restes

$$-9a^5b^4 + 18a^4b^5 - 23a^3b^6 + 20a^2b^7$$
$$12a^4b^5 - 8a^3b^6 + 20a^2b^7$$

le nom de *dividende partiel*, de sorte qu'on obtient la valeur de chaque terme du quotient, en divisant le premier terme de chaque dividende partiel de même rang par le premier terme du diviseur. Quant au signe de ce terme, il est le même que celui du diviseur, ou bien il est différent, selon que le terme du dividende qui est leur produit a le signe $+$ ou le signe $-$.

Quand on ordonne le diviseur, il peut arriver que le premier terme, celui qui contient le plus fort exposant de la lettre ordonnatrice, soit affecté du signe $-$. Dans la pratique on se sert souvent, comme dans la multiplication, des énoncés vicieux :

$+$ divisé par $+$ donne $+$
$+$ divisé par $-$ donne $-$
$-$ divisé par $+$ donne $-$
$-$ divisé par $-$ donne $+$

En rapprochant le 1er cas du 4e et le 2e du 3e, on en conclut la *règle des signes*. Le quotient a le signe $+$ ou le signe $-$, selon que le dividende et le diviseur ont le même signe ou des signes différents.

Règle. — *Pour diviser deux polynômes entiers l'un par l'autre, on ordonne les deux polynômes par rapport à une de leurs lettres communes, et on divise le premier terme du dividende par celui du diviseur. Le résultat de cette opération est le premier terme du quotient ; on lui donne le signe $+$ ou le signe $-$, selon qu'il provient de deux termes précédés du même signe ou de signes différents. On soustrait ensuite du dividende le produit du diviseur par le premier terme du quotient, et l'on divise le premier terme du reste ordonné de cette soustraction par celui du diviseur. Le résultat de cette division est le second terme du quotient, dont on détermine le signe comme précédemment. On soustrait du premier reste le produit du diviseur par le second terme du quotient et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve un reste nul, ou dont le premier terme ne soit pas divisible par celui du diviseur.*

Remarque I. — Dans la division algébrique, comme dans la division des nombres entiers, on place le diviseur à la droite du dividende ; on les sépare par un trait vertical, et l'on écrit le quotient sous le diviseur. Voici le tableau de la division qui vient d'être expliquée.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & \text{DIVIDENDE} & \text{DIVISEUR} \\
 & 6a^6b^3-13a^5b^4+28a^4b^5-23a^3b^6+20a^2b^7 & 3a^4b-2a^3b^2+5a^2b^3 \\
 & 6a^6b^3-\ 4a^5b^4+10a^4b^5 \qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{2a^2b^2-3ab^3+4b^4} \\
\hline
1^{er}\ \textit{reste.} & -\ 9a^5b^4+18a^4b^5-23a^3b^6+20a^2b^7 & \\
 & -\ 9a^5b^4+\ 6a^4b^5-15a^3b^6 \qquad\qquad & \text{QUOTIENT} \\
\hline
2^{e}\ \textit{reste.} & 12a^4b^5-\ 8a^3b^6+20a^2b^7 & \\
 & 12a^4b^5-\ 8a^3b^6+20a^2b^7 & \\
\hline
3^{e}\ \textit{reste.} & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &
\end{array}
$$

On peut abréger cette opération comme la division des nombres entiers, en effectuant simultanément dans chaque division partielle la multiplication de chacun des termes du diviseur par le nouveau terme du quotient, et la soustraction du produit de cette multiplication

$$
\begin{array}{lr|l}
 & \text{DIVIDENDE} & \text{DIVISEUR} \\
 & 2a^4-13a^3b+31a^2b^2-38ab^3+24b^4 & 2a^2-3ab+4b^2 \\
1^{er}\ \textit{reste.} & -10a^3b+27a^2b^2-38ab^3+24b^4 & \overline{a^2-5ab+6b^2} \\
2^{e}\ \textit{reste.} & +12a^2b^2-18ab^3+24b^4 & \\
3^{e}\ \textit{reste.} & 0 \qquad\qquad & \text{QUOTIENT}
\end{array}
$$

Remarque II. — Dans les exemples précédents, les coefficients de la lettre ordonnatrice dans les premiers termes des dividendes partiels et du diviseur sont des monômes ; mais il peut arriver que ces coefficients soient des polynômes; on fait encore l'opération d'après les règles précédentes, mais on est obligé d'effectuer à part la division du coefficient du premier terme de chaque dividende partiel par celui du premier terme du diviseur, puisque ces coefficients sont des polynômes.

EXEMPLE.

$$
\begin{array}{l}
\text{DIVIDENDE} \\
\begin{array}{r|l|l|l}
a^3 & x^3-2a^3b & x^2+a^3b^2 & x-a^6 \\
-b^3 & \quad +2b^4 & \quad +a^2b^3 & \quad -a^5b \\
 & & \quad -2b^5 & \quad +ab^5 \\
 & & & \quad +b^6
\end{array}
\\[2ex]
1^{er}\ \textit{reste.}\quad
\begin{array}{r|l|l}
-a^4 & x^2-a^5 & x-a^6 \\
+a^3b & \quad +a^3b^2 & \quad -a^5b \\
+ab^3 & \quad +a^2b^3 & \quad +ab^5 \\
+b^4 & \quad -b^5 & \quad +b^6
\end{array}
\\
\qquad\qquad 2^{e}\ \textit{reste} \qquad\qquad 0
\end{array}
\left\{
\begin{array}{c}
\text{DIVISEUR} \\
\begin{array}{r|l|l}
a^2 & x^2+a^3 & x+a^4 \\
+ab & \quad -b^3 & \quad +a^3b \\
+b^2 & & \quad +a^2b^2 \\
 & & \quad +ab^3 \\
 & & \quad +b^4
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{r|l}
a & x-a^2 \\
-b & \quad +b^2
\end{array} \\
\text{QUOTIENT}
\end{array}
\right.
$$

1re Division partielle.

$$
\begin{array}{r|l}
a^3-b^3 & a^2+ab+b^2 \\
-a^2b-ab^2-b^3 & \overline{a-b}
\end{array}
$$

2e Division partielle.

$$
\begin{array}{r|l}
-a^4-a^3b+ab^3+b^4 & a^2+ab+b^2 \\
+a^2b^2+ab^3+b^4 & \overline{-a^2+b^2}
\end{array}
$$

VII. — Divisibilité.

1. — Problème. — *Deux polynômes entiers étant donnés, reconnaître si l'un est divisible par l'autre.*

Le quotient de la division des deux polynômes donnés n'est pas entier : 1° lorsque le dividende ne contient pas toutes les lettres du diviseur ; 2° lorsque, les polynômes étant ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, chacun des termes extrêmes du dividende n'est pas divisible par le terme de même rang dans le diviseur.

Dans tout autre cas, on ne peut reconnaître *à priori* si les polynômes sont divisibles l'un par l'autre ; il faut, en général, les ordonner et faire la division. Si le premier terme de l'un des dividendes partiels n'est pas divisible par le premier terme du diviseur, la division est impossible. Lorsque le contraire a lieu, on finit par trouver un reste nul, ou d'un degré moindre que celui du diviseur, puisque les degrés des restes successifs vont en diminuant. Dans le premier cas, le dividende est un multiple entier du diviseur ; dans le second, les deux polynômes ne sont pas divisibles l'un par l'autre.

EXEMPLE.

	DIVIDENDE.	DIVISEUR.
	$x^6-3x^5+5x^4+2x^3$	x^3-2x^2+x
1er *reste*	$-x^5+4x^4+2x^3$	x^3-x^2+2x+7
2e *reste*	$+2x^4+3x^3$	
3e *reste*	$+7x^3-2x^2$	QUOTIENT.
4e *reste*	$+12x^2-7x$	

Le premier terme $+12x^2$ du 4e reste contenant la lettre principale x avec un exposant moindre que celui de cette lettre dans le premier terme x^3 du diviseur, la division de $+12x^2$ par x^3 est impossible, par conséquent le polynôme $x^6-3x^5+5x^4+2x^3$ n'est pas divisible par le polynôme x^3-2x^2+x.

Remarque I. — Il n'est pas toujours nécessaire de continuer la division jusqu'à ce qu'on trouve un reste de degré moindre que celui du diviseur. On peut affirmer que *le quotient n'est pas entier lorsque le terme de ce polynôme, qui a pour degré la différence des degrés des derniers termes du dividende et du diviseur, donne un reste autre que zéro :* car, si la division était possible, le terme de ce degré serait le dernier terme du quotient, et par conséquent le reste suivant serait nul.

Ainsi, dans la division précédente, on reconnaît l'impossibilité de l'opération à la fin de la seconde division partielle, dont le reste devrait être nul, d'après la remarque précédente, si le quotient était entier.

Remarque II. — *Lorsque deux polynômes* P *et* P′, *entiers par rapport à une même lettre x, et ordonnés suivant les puissances décroissantes de cette lettre, ne sont pas divisibles l'un par l'autre, le quotient de leur division* $\frac{P}{P'}$ *est égal à la somme d'un polynôme entier en x, et d'une fraction qui a pour dénominateur le diviseur* P′ *et pour numérateur un polynôme entier en x, d'un degré moindre que celui du dénominateur.*

En effet, on divise P par P′, et on continue l'opération jusqu'à ce que l'on trouve un reste R dont le degré soit moindre que celui du diviseur P′ ; en désignant par Q la somme des termes entiers du quotient, obtenus avant le reste R, et remarquant que ce reste est l'excès du dividende P sur le produit du quotient Q par le diviseur P′, on a l'égalité

$$P = Q \times P' + R.$$

On divise ses deux membres par le même polynôme P′, et l'on obtient la nouvelle égalité

$$\frac{P}{P'} = Q + \frac{R}{P'},$$

qui exprime le théorème précédemment énoncé, puisque Q est un polynôme entier, et que le degré du numérateur R de la fraction $\frac{R}{P'}$ est moindre que celui de son dénominateur P′.

Ainsi, le quotient de la division du polynôme

$$x^6 - 3x^5 + 5x^4 + 2x^3$$

par le polynôme $x^3 - 2x^2 + x$ égale (page 44)

$$x^3 \quad x^2 + 2x + 7 + \frac{12x^2 - 7x}{x^3 - 2x^2 + x}.$$

2. — Théorème II. — *Le reste de la division d'un polynôme entier en* x, *et ordonné par rapport à* x, *par le binôme* x — a, *est la valeur que prend ce polynôme quand on y rem-*

place x *par* a ; *et le quotient de la division est un polynôme ordonné par rapport à* x, *dont le degré est inférieur d'une unité à celui du dividende, ayant pour premier coefficient le premier du dividende, pour 2e coefficient le premier multiplié par* a *plus ou moins le 2e du dividende, selon son signe, pour 3e coefficient le 2e multiplié par* a *plus ou moins le 3e du dividende, et ainsi de suite.*

Soit à diviser $bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ par $x - a$; faisons la division.

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{r}
bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \\
- bx^4 + bax^3 \qquad\qquad\qquad
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x - a \\ \hline
bx^3 \begin{array}{l} + ba \\ + c \end{array}\Bigg| x^2 \begin{array}{l} + ba^2 \\ + ca \\ + d \end{array}\Bigg| x \begin{array}{l} + ba^3 \\ + ca^2 \\ + da \\ + e \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

1er *reste* $\quad \begin{array}{l} + ba \\ + c \end{array}\Bigg| x^3 + dx^2 + ex + f$

$\qquad \begin{array}{l} - ba \\ - c \end{array}\Bigg| x^3 \begin{array}{l} + ba^2 \\ + ca \end{array}\Bigg| x^2$

2e *reste* $\quad \begin{array}{l} + ba^2 \\ + ca \\ + d \end{array}\Bigg| x^2 + ex + f$

$\qquad \begin{array}{l} - ba^2 \\ - ca \\ - d \end{array}\Bigg| x^2 \begin{array}{l} + ba^3 \\ + ca^2 \\ + da \end{array}\Bigg| x$

3e *reste* $\quad \begin{array}{l} + ba^3 \\ + ca^2 \\ + da \\ + e \end{array}\Bigg| x + f$

$\qquad \begin{array}{l} - ba^3 \\ - ca^2 \\ - da \\ - e \end{array}\Bigg| x \begin{array}{l} + ba^4 \\ + ca^3 \\ + da^2 \\ + ea \end{array}$

Reste de la division $\quad \begin{array}{l} + ba^4 \\ + ca^3 \\ + da^2 \\ + ea \\ + f \end{array}$

Cette opération démontre complétement le théorème énoncé, on voit comment le 3e coefficient du quotient multiplié par $-a$ reprend par soustraction son signe, et donne un terme semblable au 4e terme du dividende, dont le coefficient s'ajoute au produit précédent ou s'en retranche selon son signe, pour former le 4e coefficient du quotient. S'il manque au dividende un terme contenant une puissance de la lettre ordonnatrice, on le regardera comme ayant pour coefficient zéro. La composition du reste est évidente, c'est le dividende dans lequel x est remplacé par a ; mais, dans la pratique, on l'obtiendra plus vite, en multipliant le dernier terme du quotient par a, et ajoutant au résultat le dernier terme du dividende.

On peut maintenant écrire, sans faire l'opération, le quotient et le reste de la division d'un polynôme par $x - a$, surtout quand $a = 1$.

$5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7$ divisé par $x - 1$ donnera pour quotient $5x^3 + 2x^2 + 8x + 8$, et pour reste 15.

$5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7$ divisé par $x - 2$ donne pour quotient $5x^3 + 7x^2 + 20x + 40$; le reste s'obtient en remplaçant x par 2 dans le dividende, ou plus rapidement en multipliant le dernier terme du quotient par 2, et ajoutant au produit le dernier du dividende ce qui donne 87.

Corollaire I. — Si un polynôme entier en x devient nul lorsqu'on y remplace x par a, il est divisible par $x - a$, et réciproquement. En effet nous venons de voir qu'en remplaçant x par a dans un polynôme on obtient le reste de la division de ce polynôme par $x - a$; si le résultat de la substitution est nul, le reste est nul et la division est possible ; si au contraire la division est possible, le reste doit être nul, et par suite le résultat de la substitution sera nul.

Corollaire II. — La différence des puissances de même degré de deux quantités est divisible par la différence de ces quantités. En effet soit $x^m - a^m$ la différence des puissances m de deux quantités, remplaçons dans ce polynôme x par a, nous trouvons $a^m - a^m$ ou o, qui est le reste de la division, donc la division est possible, et le quotient s'écrit, sans division par le théorème que nous venons de démontrer :

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1};$$

nous connaissions déjà un cas particulier où ce corollaire s'applique :

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a.$$

EXERCICES.

Diviser

1° $15a^8b^4c^2d$ par $5a^6b^2c^2$,

2° $4a^2b-12a^3b^2+20a^4b^3$ par $4a^2b$,

3° $7a^{10}-25a^8b^2+48a^6b^4-23a^4b^6+5a^2b^8$ par $7a^4-4a^2b^2+b^4$,

4° $4a^4-9a^2b^2+6ab^3-b^4$ par $2a^2-3ab+b^2$,

5° $16a^8-81x^8$ par $2a^2-3x^2$,

6° $(a^2-b^2)x^3+2a^3x^2+(2a^4+a^2b^2)x+a^5+a^3b^2+a^2b^3+b^5$, par $(a-b)x+a^2-ab+b^2$,

7° $(a+b)^3x^3+3(a^3+a^2b-ab^2-b^3)x^2+3(a^3-a^2b-ab^2+b^3)x+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ par $(a+b)^2x^2+2(a^2-b^2)x+a^2-2ab+b^2$.

8° — Par quel nombre faut-il remplacer le coefficient k du polynôme $a^4+ka^2b^2+b^4$, pour que ce polynôme soit divisible par a^2-ab+b^2 ? (*Rép.* $k=1$).

9° — Démontrer que si deux polynômes entiers P, P′, sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre qui leur est commune, et que m, m', soient les exposants de cette lettre dans les premiers termes de ces polynômes, et n, n', les exposants dans les derniers termes, le quotient de la division de P par P′ a au plus $m-m'-(n-n')+1$ termes.

Reconnaître, d'après ce théorème, l'impossibilité de la division de deux polynômes entiers.

10° — Si un polynôme, entier en x, est divisible par chacun des binômes $x-a$, $x-b$, il est divisible par le produit de ces binômes.

11° — Mettre $\frac{r}{2}$ en facteur commun dans l'expression $\frac{r\sqrt{5}}{2}-\frac{r}{2}$.

Mettre $\frac{\pi h}{3}$ en facteur commun dans l'expression $\frac{\pi R^2 h}{3}+\frac{\pi Rrh}{3}+\frac{\pi r^2 h}{3}$.

Mettre a en facteur commun dans l'expression $a+a\sqrt{2}$.

Mettre v en facteur commun dans l'expression $v+vkt$.

Mettre s en facteur commun dans l'expression $sq-s$.

12° — Diviser $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ par $x+1$, et déduire de cette division le caractère de divisibilité par 11, en supposant $x=10$.

13° — Diviser x^m-a^m par x^p-a^p ; dans quel cas la division est-elle possible ?

14° — Quelles valeurs faut-il donner aux coefficients b et c pour que x^3-4x^2+bx-c soit divisible par x^2-3x+7 ? (*Rép.* $b=10$, $c=7$.)

SIXIÈME LEÇON.

I. — Calcul des fractions algébriques.

1. — On appelle *fraction algébrique* ou *rapport* le quotient de la division de deux quantités quelconques. Les fractions algébriques diffèrent essentiellement des fractions arithmétiques, dont les termes ne sont que des nombres entiers ; mais les règles de calcul sont les mêmes pour ces deux genres de fractions.

THÉORÈME I. — *On ne change pas la valeur d'une fraction* $\frac{c}{d}$ *en multipliant ou divisant ses deux termes par la même quantité* m.

En effet, la fraction $\frac{c}{d}$ étant le quotient q de la division de son numérateur c par son dénominateur d, il en résulte que

$$c = dq,$$

si on multiplie par la même quantité m les deux membres de cette égalité, les produits sont égaux, et on a la nouvelle égalité

$$cm = dmq.$$

On divise ensuite chacun de ses membres par le produit dm, et on trouve que

$$\frac{cm}{dm} = q \text{ ou } \frac{c}{d},$$

ce qui démontre le théorème énoncé, car : 1° on déduit la fraction $\frac{cm}{dm}$ de la fraction $\frac{c}{d}$, en multipliant les deux termes de celle-ci par m ; 2° la fraction $\frac{c}{d}$ résulte inversement de la fraction $\frac{cm}{dm}$, lorsqu'on divise les deux termes de celle-ci par m.

Corollaire I. — *On réduit une fraction à sa plus simple expression en divisant ses deux termes par tous leurs facteurs communs, numériques et algébriques.*

Soit proposé de réduire la fraction $\frac{12a^5b^5 - 48a^3b^7}{16a^5b^5 - 32a^4b^6}$ à sa plus simple expression.

On commence par mettre en évidence les facteurs communs à tous les termes du numérateur et ceux qui sont communs à tous les termes du dénominateur ; la fraction prend la forme suivante : $\frac{12a^3b^5\,(a^2 - 4b^2)}{16a^4b^5\,(a - 2b)}$. On divise alors ses deux termes par le produit $4a^3b^5$ de tous leurs facteurs monômes communs. Pour simplifier ensuite la fraction résultante $\frac{3(a^2 - 4b^2)}{4a(a - 2b)}$, il faudrait diviser ses deux termes par leur *plus grand commun diviseur*, or l'algèbre élémentaire ne comprend pas la recherche du plus grand diviseur commun à deux polynômes ; mais dans l'exemple proposé, on voit facilement que le binône $a^2 - 4b^2$ est la différence de deux carrés, et qu'il égale le produit $(a + 2b)\,(a - 2b)$; par conséquent les deux termes de la fraction sont divisibles par $a - 2b$, et la valeur de cette fraction réduite à sa plus simple expression est $\frac{3(a + 2b)}{4a}$.

Corollaire II. — *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on peut multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

Lorsqu'on pourra former le plus petit commun multiple des dénominateurs de toutes les fractions, d'après la règle donnée en arithmétique, on devra le prendre de préférence pour dénominateur commun.

Exemple : Soit à réduire au même dénominateur les fractions

$$\frac{a^2}{4b^2},\quad \frac{a - b}{3(a + b)},\quad \frac{a + b}{2(a - b)},\quad \frac{a^2 + b^2}{6(a^2 - b^2)}.$$

Comme le binôme $a^2 - b^2$ est égal au produit de $a + b$ par $a - b$, le plus petit commun multiple de tous les dénominateurs est $12b^2(a^2 - b^2)$ Pour réduire les fractions à ce dénominateur, on divise $12b^2 (a^2 - b^2)$ successivement par le dénominateur de chaque fraction, et on multiplie ses deux termes par le quotient de cette division. On trouve ainsi les fractions :

$$\frac{3a^2(a^2-b^2)}{12b^2(a^2-b^2)}, \frac{4b^2(a-b)^2}{12b^2(a^2-b^2)}, \frac{6b^2(a+b)^2}{12b^2(a^2-b^2)}, \frac{2b^2(a^2+b^2)}{12b^2(a^2-b^2)}$$

qui sont équivalentes aux fractions proposées et ont le même dénominateur.

2. — Addition.

RÈGLE. — *On effectue l'addition de plusieurs fractions en les réduisant au même dénominateur, et divisant ensuite la somme de leurs numérateurs par le dénominateur commun.*

Soit proposé d'additionner, par exemple, les fractions de même dénominateur

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m};$$

on a, d'après la règle de la division d'un polynôme par un monôme (page 39),

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a+b+c}{m}.$$

3. — Soustraction.

RÈGLE. — *Pour soustraire une fraction d'une autre fraction, on les réduit d'abord au même dénominateur, puis on divise la différence de leurs numérateurs par le dénominateur commun.*

Soit à soustraire, par exemple, la fraction $\frac{a}{m}$ de la fraction $\frac{b}{m}$ qui a le même dénominateur ; le reste est $\frac{b-a}{m}$. En effet, d'après la règle de la division des polynômes (page 39), on a

$$\frac{b}{m} - \frac{a}{m} = \frac{b-a}{m}.$$

4. — Multiplication

RÈGLE. — *On multiplie deux fractions l'une par l'autre, en divisant le produit de leurs numérateurs par celui de leurs dénominateurs.*

Soit à multiplier la fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{c}{d}$; appelons q et q' les valeurs de ces deux fractions, nous aurons

$$a = bq,$$
$$c = dq'.$$

En multipliant membre à membre, nous trouvons

$$ac = bdqq',$$

et par suite

$$qq' \text{ ou } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

ce qui démontre la règle énoncée.

5. — Division.

RÈGLE. — *Pour diviser deux fractions l'une par l'autre, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Soit à diviser la fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{c}{d}$, le quotient sera $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ ou $\frac{ad}{bc}$. En effet si on multiplie la quantité $\frac{ad}{bc}$ par le diviseur $\frac{c}{d}$, on trouve pour produit $\frac{adc}{bcd}$, ou le dividende $\frac{a}{b}$.

II. — Propriétés des fractions égales ou rapports égaux.

THÉORÈME II. — *Quand deux fractions sont égales, le produit du numérateur de la première par le dénominateur de la seconde est égal au produit du numérateur de la seconde par le dénominateur de la première et réciproquement.*

On dit souvent que les produits en croix des quatre termes sont égaux.

Soit

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Réduisons les deux fractions au même dénominateur, nous aurons

$$\frac{ad}{bd}=\frac{cb}{db},$$

les dénominateurs étant égaux, les numérateurs doivent l'être, donc

$$ad=cb.$$

Réciproque. — Si nous supposons $ad=cb$, les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ seront égales. Car, en divisant les deux membres par bd, nous avons

$$\frac{ad}{bd}=\frac{co}{db},$$

et en simplifiant

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Théorème III. — *Si deux fractions sont égales, le rapport de leurs numérateurs est égal au rapport de leurs dénominateurs.*

Soit

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

On a (Th. II)

$$ad=cb,$$

d'où (Th. II, Réc.)

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};$$

puisque les produits en croix des quatre termes, ad et cb, sont égaux.

Théorème IV. — *Si deux fractions sont égales, en ajoutant ou en retranchant à chaque numérateur le produit par* m *du dénominateur correspondant, on a des fractions égales.*

Soit

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

On aura

$$\frac{a}{b} \pm m = \frac{c}{d} \pm m.$$

Réduisons l'entier m au dénominateur b, pour l'ajouter à chaque fraction, il vient

$$\frac{a \pm bm}{b} = \frac{c \pm dm}{d}.$$

THÉORÈME V. — *Si deux fractions sont égales, en ajoutant ou retranchant à chaque dénominateur le produit par* m *du numérateur correspondant, on a des fractions égales.*

Soit

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{d'où} \quad ad = bc.$$

Pour démontrer l'égalité des fractions $\frac{a}{b \pm am}$ et $\frac{c}{d \pm cm}$, il suffit de prouver l'égalité des produits en croix des quatre termes.

Ces produits sont $ad \pm acm$ et $bc \pm acm$, or $ad = bc$ par hypothèse, on voit donc que ces produits sont égaux, et par suite les fractions sont égales :

$$\frac{a}{b \pm am} = \frac{c}{d \pm cm}.$$

THÉORÈME VI. — *Si les fractions* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{b}'}, \frac{\mathrm{a}''}{\mathrm{b}''}, \ldots,$ *sont égales, le quotient* $\frac{\mathrm{a} + \mathrm{a}' + \mathrm{a}'' \ldots}{\mathrm{b} + \mathrm{b}' + \mathrm{b}'' \ldots}$ *représente leur valeur commune.*

Représentons par q la valeur de toutes ces fractions, nous aurons

$$q = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} \ldots$$

d'où nous tirons :

$$\begin{aligned} a &= bq \\ a' &= b'q \\ a'' &= b''q \\ \ldots & \ \ldots \end{aligned}$$

En additionnant ces égalités membre à membre, on trouve

$$a + a' + a'' \ldots = (b + b' + b'' \ldots) q$$

d'où

$$\frac{a + a' + a''...}{b + b' + b''...} = q = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}...$$

COROLLAIRE. — Si m, m', m'',...., représentent des quantités quelconques, et que les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$,..., soient égales, on a aussi

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}... = \frac{am + a'm' + a''m''...}{bm + b'm' + b''m''...}.$$

En effet, les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$,... étant égales par hypothèse, les fractions $\frac{am}{bm}$, $\frac{a'm'}{b'm'}$, $\frac{a''m''}{b''m''}$,... qu'on en déduit en multipliant les deux termes de chacune d'elles par une même quantité, sont aussi égales, et le quotient

$$\frac{am + a'm' + a''m''...}{bm + b'm' + b''m''...}.$$

représente leur commune valeur, qui est la même que celle des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$,... Ces théorèmes sont d'une grande utilité dans la résolution des équations.

EXERCICES.

1° — Réduire les fractions

$$\frac{24a^6b^3 - 24a^2b^7}{36a^6b^3 - 36a^4b^5} \quad \text{et} \quad \frac{a^3 - b^3}{a^3 - b^3 - 2ab(a - b)},$$

à leur plus simple expression.

(*Rép.* 1° $\frac{2(a^2 + b^2)}{3a^2}$; 2° $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$).

2° — Faire la somme des fractions

$$\frac{a}{a + b}, \frac{b}{a - b}, \frac{b^2 - 2a^2}{a^2 - b^2}.$$

(*Rép.* $\frac{2b^2 - a^2}{a^2 - b^2}$).

3° — Soustraire la fraction $\frac{1}{a^2-b^2}$ de la fraction $\frac{a+b}{a^3-b^3}$, et la fraction $\frac{a-b}{a+b}$ de la fraction $\frac{a+b}{a-b}$.

(*Rép.* 1° $\frac{ab}{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)}$; 2° $\frac{4ab}{a^2-b^2}$).

4° — Simplifier l'expression

$$\frac{4(a+b)}{c+5d}\left(\frac{c+d}{4}-\frac{c-d}{6}\right).$$

(*Rép.* $\frac{a+b}{3}$).

5° — Simplifier l'expression

$$\frac{a-\frac{ac(1-b)}{c+a^2b}}{1+\frac{a^2(1-b)}{c+a^2b}}.$$

(*Rép.* ab).

6° — Vérifier les égalités suivantes :

$$\frac{9a^3+53a^2-9a-18}{a^2+11a+30}=\frac{9a^2-a-3}{a+5},$$

$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}=\frac{b+c}{b+c-a}.$$

7° — Reconnaître que l'équation

$$abx^2+\frac{3a^2x}{c}=\frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2}-\frac{b^2x}{c}$$

est satisfaite lorsqu'on y remplace x par la fraction $\frac{2a-b}{ac}$.

8° — Démontrer que, si l'on a

$$x=\frac{2b^2-a^2+d^2}{3a}$$

et

$$y=\frac{2a^2-b^2+d^2}{3b},$$

les quantités x et y sont liées par la relation

$$\frac{a}{b+y}=\frac{b}{a+x}.$$

SEPTIÈME LEÇON.

Théorèmes sur les puissances et les racines. — Calcul des radicaux. — Carré et racine carrée des monômes et des polynômes.

I. — Théorèmes sur les puissances et les racines. — Calcul des radicaux.

Tous les théorèmes que nous allons démontrer sont des conséquences de la règle de multiplication des monômes.

Théorème I. — *La puissance* $n^{\text{ième}}$ *d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des puissances* $n^{\text{ièmes}}$ *de ces facteurs.*

La puissance $4^{\text{ème}}$ du produit abc, indiquée par $(abc)^4$ est égale au produit de quatre facteurs égaux à abc.

$$(abc)^4 = abc \times abc \times abc \times abc,$$

simplifiant l'écriture par la règle de multiplication des monômes, on a

$$(abc)^4 = a^4b^4c^4.$$

Généralement

$$(abc)^n = a^nb^nc^n.$$

Théorème II. — *La racine* $n^{\text{ième}}$ *d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des racines* $n^{\text{ièmes}}$ *de ces facteurs.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent. Nous avions

$$(abc)^n = a^nb^nc^n.$$

Le nombre abc, qui élevé à la puissance n reproduit $a^nb^nc^n$, est par définition la racine $n^{\text{ième}}$ de $a^nb^nc^n$

$$abc = \sqrt[n]{a^nb^nc^n}.$$

On voit que la racine $n^{\text{ième}}$ du produit $a^nb^nc^n$ est égale au produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de ses trois facteurs, qui sont par définition égales à a, b et c.

Le théorème n'est ainsi démontré que pour le cas où les facteurs du produit dont on prend la racine $n^{\text{ième}}$ sont des puissances n parfaites.

Soit abc un produit de trois facteurs qui ne sont pas des puissances n parfaites, désignons par a', b', c' les racines $n^{\text{ièmes}}$ approchées des trois facteurs, nous aurons, par la démonstration qui précède

$$a'b'c' = \sqrt[n]{a'^n b'^n c'^n},$$

a', b' et c' ont pour limites $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ et $\sqrt[n]{c}$ quand on pousse l'approximation de plus en plus loin, a'^n, b'^n et c'^n ont pour limites a, b et c ; l'égalité précédente étant vraie quelque près que les deux membres soient de leurs limites, sera encore vraie quand on remplacera les deux membres par leurs limites, et l'on aura

$$\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc},$$

ce qui démontre le théorème énoncé, et aussi sa réciproque.

Le produit des racines n$^{\text{ièmes}}$ *de plusieurs quantités est égal à la racine* n$^{\text{ième}}$ *du produit de ces quantités.*

Remarque. — Pour démontrer ce théorème, et prouver que l'on a

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{c},$$

on se borne souvent à prouver que les puissances n des deux membres sont égales, celle du premier membre est par définition abc, celle du second membre est, par le théorème I, le produit des puissances des trois facteurs, c'est-à-dire, aussi abc. Mais alors il faudrait faire remarquer que le théorème I est vrai pour les puissances de nombres incommensurables, ce qui se démontre comme nous l'avons fait pour les racines, et auparavant pour la réduction des termes semblables (page 16). On étendrait de même tous les théorèmes qui suivent au cas des quantités incommensurables.

Corollaire. — *On peut faire sortir un facteur de dessous un radical de degré* n, *en extrayant sa racine* n$^{\text{ième}}$, *et la plaçant comme facteur devant le radical ;* réciproquement, *on peut faire entrer sous un radical de degré* n *un facteur placé devant, en l'élevant à la puissance* n.

En effet, on a d'après le théorème II

$$\sqrt[n]{a^n b^n c} = ab\sqrt[n]{c}.$$

De même

$$\sqrt{8a^3b^2} = 2ab\sqrt{2a}.$$

On substituera l'une de ces deux écritures à l'autre quand elle sera plus commode.

THÉORÈME III. — *La puissance* n *du quotient de deux quantités est égale au quotient des puissances* n *de ces quantités.*

La puissance n du quotient $\frac{a}{b}$ s'indique par $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, mais d'après la définition des puissances, c'est un produit de n facteurs égaux à $\frac{a}{b}$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \ldots,$$

or d'après la règle de multiplication des fractions

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \ldots = \frac{a \times a \times a \ldots}{b \times b \times b \ldots} = \frac{a^n}{b^n}$$

donc

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

THÉORÈME IV. — *La racine* n$^{\text{ième}}$ *du quotient de deux quantités est égale au quotient des racines* n$^{\text{ièmes}}$ *de ces quantités.*

Ce théorème se déduit du précédent, comme le théorème II du théorème I, ainsi tout théorème sur les puissances donne un théorème corrélatif sur les racines. Nous avions en effet

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

donc par définition

$$\frac{a}{b} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}.$$

On voit que la racine $n^{\text{ième}}$ du quotient $\frac{a^n}{b^n}$ est égale au quotient des nombres a et b qui sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a^n et de b^n.

Ce théorème démontré quand les deux termes de la fraction sont des puissances n parfaites, s'étend comme précédemment au cas où leurs racines $n^{\text{ièmes}}$ sont incommensurables ; on a donc en général

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Corollaire. — *Quand on a à extraire la racine* n$^{\text{ième}}$ *d'une fraction, on peut faire sortir de dessous le radical un facteur du numérateur ou du dénominateur, en plaçant en dehors sa racine* n$^{\text{ième}}$ *au numérateur ou au dénominateur.*

En effet d'après les théorèmes I et III on a

$$\sqrt[n]{\frac{a^n b}{c^n d}} = \frac{\sqrt[n]{a^n b}}{\sqrt[n]{c^n d}} = \frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}.$$

De même

$$\sqrt{\frac{a}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Théorème V. — *La puissance* p *de la puissance* n *d'une quantité est une puissance nouvelle de cette quantité, dont l'exposant est égal au produit* np *des deux exposants.*

Soit a^n à élever à la puissance p, ce qui s'indique par $(a^n)^p$. Par définition la puissance p de a^n est égale au produit de p facteurs égaux à a^n, lequel s'obtient (3, II) en donnant à a un exposant égal à somme des p exposants égaux à n ou np,

$$(a^n)^p = a^n a^n a^n \ldots = a^{n+n+n\ldots} = a^{np},$$

ainsi

$$(a^n)^p = a^{np}.$$

Théorème VI. — *La racine* p$^{\text{ième}}$ *de la puissance* n *d'une quantité est une puissance nouvelle de cette quantité, dont l'exposant est égal au quotient de la division de l'exposant* n *donné par l'indice* p *de la racine.*

Ce théorème résulte immédiatement du précédent,

$$(a^n)^p = a^{np}.$$

Le nombre a^n qui, élevé à la puissance p, reproduit le second membre a^{np} est par définition la racine $p^{\text{ième}}$ de a^{np},

$$a^n = \sqrt[p]{a^{np}}.$$

On voit que la racine $p^{\text{ième}}$ de la puissance np d'un nombre a est une puissance de a, dont l'exposant n est le quotient de la division de l'exposant np par l'indice p de la racine.

En simplifiant l'écriture, l'énoncé du théorème s'écrit

$$\sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{n}{p}}.$$

Dans cette formule n doit être divisible par p. Si l'exposant n n'est pas divisible par p, on est conduit en appliquant cette formule à un exposant fractionnaire, on pourrait adopter cette notation, en admettant qu'une fraction mise en exposant indique la racine, ayant pour indice le dénominateur, de la puissance qui a pour exposant le numérateur, il n'y aurait plus de radicaux :

$$\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}.$$

On démontrerait aisément que tous les théorèmes établis pour des exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires.

Corollaire I. — *Quand on a à extraire une racine d'une puissance, on peut, sans changer le résultat, multiplier ou diviser l'exposant et l'indice par un même nombre.*

En effet, d'après le théorème, on a

$$\sqrt[pr]{a^{nr}} = a^{\frac{nr}{pr}} = a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}.$$

Corollaire II. — *On réduit plusieurs radicaux au même indice, en multipliant l'indice de chacun d'eux et l'exposant de la puissance placée dessous par le produit de tous les autres indices.*

Soient les radicaux

$$\sqrt{a^{\alpha}},\quad \sqrt[p]{b^{\beta}},\quad \sqrt[q]{c^{\gamma}},$$

ils sont équivalents, d'après le corollaire I, à

$$\sqrt[npq]{a^{\alpha pq}},\quad \sqrt[pnq]{b^{\beta nq}},\quad \sqrt[qnp]{c^{\gamma np}},$$

radicaux qui ont le même indice.

Les radicaux auraient pu s'écrire

$$a^{\frac{\alpha}{n}},\quad b^{\frac{\beta}{p}},\quad c^{\frac{\gamma}{q}}$$

et le problème eût été ramené à la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur. On aurait donc pu prendre pour dénominateur commun, ou pour indice commun le plus petit multiple commun des dénominateurs ou des indices.

THÉORÈME VII. — *La racine* n$^{\text{ième}}$ *de la racine* p$^{\text{ième}}$ *d'un nombre est une racine nouvelle de ce nombre dont l'indice est égal au produit* np *des deux indices.*

Ce théorème se déduit encore du précédent, comme celui-ci du théorème III ; nous en avions tiré

$$a^n = \sqrt[p]{a^{np}},$$

donc

$$a = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{np}}},$$

mais on a par définition

$$a = \sqrt[np]{a^{np}},$$

donc les deux seconds membres égaux à a sont égaux entre eux

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{np}}} = \sqrt[np]{a^{np}},$$

ou en simplifiant la notation

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}.$$

Cette démonstration suppose que toutes les racines s'extraient exactement ; on l'étendrait, comme nous l'avons dit, au cas des racines incommensurables. On l'étendrait aussi sans peine au cas d'un nombre quelconque de racines successives.

COROLLAIRE. — Dans une série d'extractions de racines, on peut intervertir l'ordre des racines sans changer le résultat

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

THÉORÈME VIII. — *La puissance* n *de la racine* p$^{\text{ième}}$ *d'un nombre est égale à la racine* p$^{\text{ième}}$ *de la puissance* n *de ce nombre.*

En effet l'on a par définition

$$(\sqrt[p]{a})^n = \sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{a}....,$$

or (Th. II)

$$\sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{a}.... = \sqrt[p]{a \times a \times a...} = \sqrt[p]{a^n},$$

donc

$$(\sqrt[p]{a})^n = \sqrt[p]{a^n}.$$

REMARQUE. — Les théorèmes que nous venons de démontrer donnent les règles à suivre pour multiplier ou diviser des radicaux réduits préalablement au même indice, et pour élever un radical à une puissance ou en extraire une racine nouvelle; ce sont ces transformations de formules, souvent utiles en algèbre, qui constituent le *calcul des radicaux*, en se bornant à leurs valeurs arithmétiques.

II. — Évanouissement des radicaux au dénominateur des fractions.

Lorsqu'une fraction contient des radicaux au dénominateur, le calcul de sa valeur numérique et celui de l'approximation du résultat présentent plus de difficulté ; nous allons indiquer comment on peut remplacer ces fractions par d'autres, n'ayant plus de radicaux au dénominateur.

1. — Le dénominateur est monôme. — Soit $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$, en multipliant les deux termes de cette fraction par $\sqrt{c}$, elle devient $\dfrac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\sqrt{c}}$; or par définition $\sqrt{c}\times\sqrt{c}$, ou le carré de $\sqrt{c}$, est c, on a donc

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}.$$

De même

$$\frac{a}{b\sqrt[3]{c}} = \frac{a\sqrt[3]{c}\,\sqrt[3]{c}}{b\sqrt[3]{c}\,\sqrt[3]{c}\,\sqrt[3]{c}};$$

or le produit de 3 facteurs égaux à $\sqrt[3]{c}$, ou le cube de $\sqrt[3]{c}$, est par définition c, donc

$$\frac{a}{b\sqrt[3]{c}} = \frac{a\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{c}}{bc} \quad \text{ou} \quad \frac{a\sqrt[3]{c^2}}{bc}.$$

2. — Le dénominateur est binôme. — Soit la fraction $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, dont le dénominateur est un binôme.

Multiplions les deux termes par $b - \sqrt{c}$, cette fraction devient $\frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})}$, mais le dénominateur, étant le produit de la somme de deux nombres par leur différence, est égal à la différence de leurs carrés, donc

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}.$$

Il n'y aurait ni plus ni moins de difficulté à faire disparaître les radicaux, si le dénominateur était $\sqrt{b} + \sqrt{c}$, ou s'il était une différence au lieu d'une somme, on multiplierait, dans ce cas, les deux termes de la fraction par la somme des deux quantités placées au dénominateur.

3. — Dénominateur trinôme. — Soit $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$.

Multiplions les deux termes de la fraction par $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}$, elle devient

$$\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-d} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{b+c-d+2\sqrt{bc}}.$$

En regardant $b+c-d$ comme une seule quantité, le dénominateur ne contient plus qu'une partie rationnelle et une irrationnelle, on est donc ramené au cas précédent.

4. — Dénominateur quadrinôme. — Soit la fraction

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}}.$$

Multiplions les deux termes de la fraction par $\sqrt{b}+\sqrt{c}-(\sqrt{d}+\sqrt{e})$; elle devient

$$\frac{a\left[\sqrt{b}+\sqrt{c}-(\sqrt{d}+\sqrt{e})\right]}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-(\sqrt{d}+\sqrt{e})^2}=\frac{a\left[\sqrt{b}+\sqrt{c}-(\sqrt{d}+\sqrt{e})\right]}{b+c-d-e+2\sqrt{bc}-2\sqrt{de}}$$

En regardant $b+c-d-e$ comme une seule quantité, le dénominateur ne contient plus qu'une partie rationnelle et deux irrationnelles, on est donc ramené au cas précédent.

Mais si le dénominateur contient cinq termes irrationnels, ou bien quatre termes irrationnels et un rationnel, on ne peut plus faire disparaître les radicaux de ce dénominateur.

III. — Puissances et racines des monômes et des polynômes.

1. — Puissances d'un monôme.

Pour élever un monôme entier à une puissance, on multiplie l'exposant de chacun de ses facteurs, tant numériques qu'algébriques, par l'exposant de la puissance.

En effet, soit proposé d'élever à la troisième puissance le monôme entier $5a^2b^4c$; on a d'après les théorèmes I et V

$$(5a^2b^4c)^3=5^3(a^2)^3(b^4)^3c^3=5^3a^6b^{12}c^3.$$

Si le monôme donné est fractionnaire, on élève, d'après la règle précédente, *son numérateur et son dénominateur à la puissance indiquée, puis on divise le premier résultat par le second,* (Th. III).

2. — Racines d'un monôme.

Pour extraire la racine n$^{\text{ième}}$ *d'un monome entier, on extrait la racine* n$^{\text{ième}}$ *de son coefficient, et l'on divise par* n *chacun de ses exposants.*

Ce théorème est une conséquence du précédent ; nous avions

$$(5a^2b^4c)^3=5^3a^6b^{12}c^3,$$

donc par définition, nous aurons

$$5a^2b^4c=\sqrt[3]{5^3a^6b^{12}c^3}.$$

On voit que la racine cubique de $5^3a^6b^{12}c^3$ a pour coefficient 5, racine cubique de 5^3, et pour exposants 2, 4 et 1 qui sont chacun le quotient des exposants 6, 12 et 3 par 3.

Lorsque l'un des exposants de la quantité placée sous le radical n'est pas divisible par l'indice n de la racine, on ne peut pas extraire cette racine, mais on peut simplifier le radical, en en faisant sortir tous les facteurs qui sont des puissances n parfaites.

COROLLAIRE. — Quand la racine d'un monôme s'extrait exactement, on voit que le degré de cette racine est égal au degré du monôme divisé par l'indice de la racine ; il en est de même quand la racine du monôme ne s'extrait pas exactement.

3. — Puissances d'un binôme.

Toutes les puissances d'un binôme s'obtiennent par des multiplications successives. Ainsi nous avons trouvé par la multiplication

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

En multipliant les seconds membres par $a+b$ et $a-b$, nous aurons

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

On voit que la seule différence qu'il y ait entre les puissances de $a+b$ et de $a-b$, consiste en ce que les termes contenant les puissances impaires de b, ont le signe $+$ dans les unes et le signe $-$ dans les autres ; cette différence est la même entre les puissances quelconques de $a+b$ et de $a-b$, que l'on obtient par la formule suivante, due à Newton, qui permet d'écrire une puissance quelconque d'un binôme, sans calculer les puissances précédentes,

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\times 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}a^{m-3}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}a^{m-4}b^4 + \ldots$$

Dans cette formule, chaque coefficient se déduit du précédent en multipliant le numérateur par le nombre immédiatement inférieur au dernier facteur, et le dénominateur par le nombre immédiatement supérieur au dernier facteur ; les exposants de a décroissent, tandis que ceux de b croissent à chaque terme d'une unité, elle se termine d'elle-même au terme dans lequel a prend l'exposant zéro, les coefficients suivants, calculés d'après la même loi, sont tous nuls.

4. — Carré d'un polynôme.

Soit à élever au carré un polynôme quelconque $a+b-c+d$. Considérons les trois premiers termes comme n'en formant qu'un seul ; nous aurons comme précédemment

$$(a+b-c+d)^2 = (a+b-c)^2 + 2(a+b-c)d + d^2,$$

nous aurons de même

$$(a+b-c)^2 = (a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Remplaçons dans chaque formule la quantité entre parenthèse par la quantité égale que donne la formule suivante, nous aurons finalement

$$\begin{aligned}(a+b-c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2(a+b)c \\ + c^2 + 2(a+b-c)d + d^2.\end{aligned}$$

On voit dans le second membre les carrés de tous les termes affectés du signe $+$, et les doubles produits de chacun des termes par tous ceux qui précèdent ; quand un terme a le signe $+$ les doubles produits de ce terme par les précédents gardent le signe des précédents ; quand un terme a le signe $-$, les doubles produits de ce terme par les précédents ont des signes contraires à ceux des termes précédents.

Ce résultat s'énonce en langage ordinaire de la manière suivante :

RÈGLE. — *Le carré d'un polynôme se compose de la somme des carrés de tous ses termes, et de tous les doubles produits de ses termes pris deux à deux, ces doubles produits ayant le signe $+$ quand ils proviennent de termes de même signe, et le signe $-$ quand ils proviennent de termes de signe contraire.*

REMARQUE I. — Si l'on changeait les signes de tous les termes d'un polynôme, il résulte de la règle précédente que son carré ne serait pas changé.

REMARQUE II. — Si le polynôme est ordonné par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, on sait, d'après la règle de la multiplication des polynômes, que le carré a^2 du premier terme, ayant un exposant plus fort que tous les autres termes du carré, n'est semblable à aucun autre, il en est de même du double produit $2ab$ du premier terme par le second, dont le degré surpasse les degrés de tous les autres termes du carré, puisqu'ils contiennent la lettre ordonnatrice avec un ou deux exposants plus faibles que ceux de $2ab$. On verrait de même que chacun des deux derniers termes $-2cd$ et d^2 du carré ne se réduit avec aucun autre ; le carré d'un polynôme a donc au moins quatre termes, celui d'un binôme en a trois, celui d'un monôme un seul, donc *un binôme ne peut pas être un carré parfait.*

Quand on retranche du carré d'un polynôme le carré de l'ensemble de ses deux premiers termes, le terme du plus haut degré qui reste est $-2ac$ le double produit du 1er terme par le 3me ; quand on retranche du carré d'un polynôme le carré de l'ensemble de ses trois premiers termes, le terme du plus haut degré qui reste est $2ad$ le double produit du 1er terme par le 4me, et ainsi de suite.

5. — Racine carrée d'un polynôme.

L'extraction de la racine d'un polynôme s'indique par le même signe que celle de la racine d'un monôme, le trait horizontal prolongé sur toute la longueur du polynôme tient lieu de parenthèses. Ainsi la notation

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$

exprime la racine carrée du trinôme $a^2 + 2ab + b^2$.

Extraire la racine carrée d'un polynôme, c'est trouver une formule rationnelle par rapport aux lettres, dont le carré soit égal au polynôme, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

Soit à extraire la racine carrée du polynôme

$$4x^4 + 24ax^3 - 108a^3x + 81a^4,$$

que nous représenterons, pour abréger, par la lettre P ; ce polynôme étant ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x, si nous supposons la racine ordonnée de même, d'après la remarque sur la formation du carré d'un polynôme, le premier terme $4x^4$ de P est le carré du premier terme de sa racine, donc le premier terme de la racine est égal à la racine carrée $2x^2$ du premier terme de P, et le second terme $24ax^3$ de P est le double produit du premier terme $2x^2$ de la racine par le second, si donc nous divisons $24ax^3$ par le double

$4x^2$ du premier terme de la racine, nous aurons un quotient $6ax$ qui sera le second terme de la racine. Nous pouvons dès lors former le carré $4x^4 + 24ax^3 + 36a^2x^2$ de l'ensemble des deux premiers termes de la racine, et le retrancher de P, les deux premiers termes se détruisent, et il reste

$$-36a^2x^2 - 108a^3x + 81a^4.$$

D'après la remarque II du paragraphe précédent, le premier terme du reste $-36a^2x^2$ est le double produit du 1er terme $2x^2$ de la racine par le 3me, et, comme il est de signe contraire à $2x^2$, le 3me terme de la racine a le signe —, si donc nous divisons $-36a^2x^2$ par $4x^2$, nous aurons un quotient $-9a^2$, qui sera le 3me terme de la racine. Nous pouvons dès lors retrancher de P le carré de l'ensemble des trois premiers termes de la racine, et, comme nous en avons déjà retranché le carré de $2x^2 + 6ax$, il n'y a plus à retrancher du reste que les doubles produits de ces deux termes par le 3me $-9a^2$ et le carré du 3me, c'est-à-dire, $-36a^2x^2 - 108a^3x + 81a^4$, il ne reste plus rien, P est donc le carré parfait de $2x^2 + 6ax - 9a^2$.

S'il restait quelque chose, on serait conduit par le même raisonnement à diviser le premier terme du reste ordonné par le double du premier terme de la racine.

RÈGLE. — *Pour extraire la racine carrée d'un polynôme entier, on l'ordonne par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre, on extrait la racine carrée de son premier terme, et l'on a le premier terme de la racine cherchée. On divise ensuite le second terme du polynôme par le double du premier terme de la racine, et l'on a pour quotient son second terme. On retranche alors du polynôme le carré de l'ensemble des deux premiers termes de la racine, on divise le premier terme du reste par le double du premier terme de la racine, et l'on a son troisième terme. On retranche du reste le carré du troisième terme de la racine et les doubles produits de ce troisième terme par ceux qui précèdent. On divise encore le premier terme du reste par le double du premier terme de la racine, et l'on a son quatrième terme. On retranche du reste le carré du quatrième terme et les doubles produits de ce quatrième terme par ceux qui précèdent; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve un reste nul, ou dont le premier terme ne soit pas divisible par le double du premier de la racine.*

On dispose le calcul de l'extraction de la racine carrée d'un polynôme de la même manière que celui de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier. Voici le tableau de l'opération :

	POLYNOME	RACINE CARRÉE
	$4x^4+24ax^3 \quad -108a^3x+81a^4$	$2x^2+6ax-9a^2$
	$4x^4$	$4x^2$
1er reste	$24ax^3 \quad -108a^3x+81a^4$	
	$24ax^3+36a^2x^2$	
2e reste	$-36a^2x^2-108a^3x+81a^4$	
	$-36a^2x^2-108a^3x+81a^4$	
3e reste	0	

Remarque I. — D'après la remarque I du paragraphe précédent, si l'on change tous les signes de la racine trouvée, on aura un second polynôme $-2x^2-6ax+9a^2$, dont le carré reproduira le polynôme donné P ; tant que nous n'aurons pas vu la théorie des quantités négatives, nous ne considérerons que celui des deux où la somme des termes ayant le signe $+$ l'emporte sur celle des termes ayant le signe —.

Remarque II. — On pourrait commencer l'extraction de la racine carrée d'un polynôme aussi bien par la droite que par la gauche, et trouver les deux derniers termes de la racine, comme on a trouvé les deux premiers, en prenant la racine carrée $9a^2$ du dernier terme $81a^4$ de P, et l'avant-dernier terme $-108a^3x$ de P, divisé par le double $18a^2$ du dernier terme de la racine, donnerait son avant-dernier terme $-6ax$, et, en continuant l'opération, on trouverait le premier terme $-2x^2$ de la racine. Le résultat ainsi obtenu ne diffère que par les signes de celui qu'on a obtenu en commençant par la gauche.

On reconnaîtra que le polynôme donné n'est pas un carré parfait si son premier terme n'est pas un carré parfait, ou si son second terme n'est pas divisible par le double de la racine du premier, les deux derniers termes donnent lieu à une remarque semblable.

Lorsque le premier terme d'un reste n'est pas divisible par le double du premier terme de la racine, le polynôme proposé n'est pas un carré parfait. Quand on trouve au quotient un terme dont le degré égale la moitié de celui du dernier terme de P, ce terme est le dernier de la racine, et si le reste suivant n'est pas nul, le polynôme P n'est pas un carré parfait

EXERCICES.

1° — Démontrer que le carré d'un nombre impair est un multiple de 8, augmenté de l'unité.

2° — Démontrer que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

On commencera par vérifier ce théorème en faisant la somme des deux premiers nombres impairs, puis celle des trois premiers, puis celle des quatre premiers. On supposera ensuite ce théorème vrai pour les m premiers nombres impairs, m étant un nombre entier quelconque, et on le vérifiera pour les $m+1$ premiers nombres impairs.

3° — Si deux nombres entiers sont chacun la somme de deux carrés, leur produit est aussi la somme de deux carrés.

4° — Si un nombre pair est la somme de deux carrés, sa moitié est aussi la somme de deux carrés.

5° — Vérifier que la quantité

$$\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

substituée à x dans le trinôme ax^4+bx^2+c, le rend nul.

6° — Faire le produit des quatre trinômes $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, $\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b}$, $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}$.

7° — Vérifier les égalités suivantes :

$$2\sqrt{72-12\sqrt{27}}-\sqrt{32-8\sqrt{12}}=8\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\sqrt{3-\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}.$$

8° — Calculer la différence des deux fractions

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}},\quad \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}.$$

(*Rép.* $\dfrac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$).

9° — Rendre rationnels les dénominateurs des fractions suivantes, et calculer à un millième près la valeur de chacune d'elles :

$$\frac{5}{\sqrt{2}},\quad \frac{8}{3-\sqrt{5}},\quad \frac{12}{5+\sqrt{7}}.$$

(*Rép.* 1° 3,535; 2° 10,472; 3° 1,569.)

10° — Démontrer la formule

$$\sqrt[p]{a^n} = \sqrt[\frac{p}{n}]{a}$$

quand p est divisible par n.

11° — Faire disparaître les radicaux du dénominateur de la fraction

$$\frac{2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$\left(\textit{Rép.} \quad \dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$.

12° — Démontrer l'égalité des formules

$$\frac{bc}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2}} \quad \text{et} \quad \frac{b + c - \sqrt{b^2 + c^2}}{2},$$

qui représentent toutes deux le rayon de la circonférence inscrite dans un triangle rectangle dont les côtés sont b et c.

13° — Sachant que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

démontrer les égalités suivantes :

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{ab + ac + bc}{a'b' + a'c' + b'c'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{(\sqrt{a'} + \sqrt{b'} + \sqrt{c'})^2}$$

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a + b + c)(a' + b' + c')}$$

$$aa' + bb' + cc' = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

14° — Si l'on appelle a, b, c les trois côtés d'un triangle, s et $2p$ sa surface et son périmètre, R, r, r', r'' et r''' les rayons des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits, on a les relations

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{4s}, \quad r = \frac{s}{p}, \quad r' = \frac{s}{p - a}, \quad r'' = \frac{s}{p - b}, \quad r''' = \frac{s}{p - c},$$

$$\mathrm{S} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)};$$

démontrer qu'on a :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} \quad \text{et} \quad \mathrm{R} = \frac{r' + r'' + r''' - r}{4}.$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

DU

PREMIER DEGRÉ

HUITIÈME, NEUVIÈME ET DIXIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Équations du premier degré. — Résolution des équations numériques du premier degré à une ou plusieurs inconnues, par la méthode dite de *substitution*.

I. — Définitions.

1. — On appelle *égalité algébrique* la réunion par le signe $=$ de deux formules donnant les mêmes résultats, quand on effectue les opérations indiquées, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres. Les résultats de toutes les opérations algébriques sont exprimés par des égalités :

$$2a + 3b + 3a - 4c + 8d + 4a = 9a + 3b - 4c + 8d,$$

$$9a - 4b - 8c - (7a + 3b - 5c) = 2a - 7b - 3c,$$

$$\frac{x^2 - a^2}{x + a} = x - a.$$

$$2a + 3x = 2a + 3x$$

s'appelle une identité.

2. — On appelle *équation* la réunion par le signe $=$ de deux formules algébriques qui ne donnent pas les mêmes résultats, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, mais seulement quand on y remplace les lettres par des nombres convenablement choisis. Ces nombres s'appellent *racines* ou *solutions* de l'équation ; *valeurs des inconnues* ; on dit qu'ils *satisfont* à l'équation, qu'ils la *vérifient* ; trouver ces nombres, c'est *résoudre* l'équation.

Les deux formules réunies par le signe $=$ s'appellent les deux membres de l'équation, le premier membre est à gauche, le second à droite.

On distingue les équations d'après le nombre de leurs inconnues ; ainsi l'équation

$$x^2 - 3 = 4x - 7,$$

n'a qu'une inconnue, et l'équation

$$5x + 3y = 30,$$

en contient deux.

Lorsque les membres d'une équation sont des monômes ou des polynômes entiers par rapport aux inconnues, on dit que cette équation est du premier degré, du second, du troisième..., selon que le degré le plus élevé de ses termes relativement aux inconnues, égale l'un des nombres 1, 2, 3.... Ainsi la première des équations précédentes est du second degré, et la deuxième du premier degré.

Deux équations qui ont les mêmes inconnues et les mêmes solutions sont dites *équivalentes*.

Il résulte de cette définition que, pour la résolution d'une équation donnée, on peut remplacer cette équation par toute autre qui lui soit équivalente ; la méthode de résolution des équations consistera à les remplacer par des équations équivalentes tellement simples que leurs solutions soient évidentes.

II. — Principes généraux.

Théorème I. — *Quand on ajoute ou qu'on retranche une même quantité connue ou inconnue aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.*

Remarquons d'abord que, si dans cet énoncé, ainsi que dans le suivant, on remplace le mot *équation* par *égalité*, on a une vérité évidente.

Soit l'équation

$$(1) \qquad 2x + 5 = 7x - 20$$

que nous appellerons l'équation (1) pour abréger ; il s'agit de prouver que l'équation (2), obtenue en ajoutant aux deux membres la quantité $4x - 3$, a les mêmes solutions,

$$(2) \qquad 2x + 5 + (4x - 3) = 7x - 20 + (4x - 3).$$

D'abord tout nombre qui vérifie la première vérifiera la seconde.

En effet soit 5 un nombre vérifiant l'équation (1), cela signifie que mis à la place de x, il rend le premier membre $2x+5$ égal au second $7x-20$; mettons ce même nombre 5 à la place de x dans l'équation (2) ; il rendra $2x+5$ égal à $7x-20$, et comme il rend évidemment, $4x-3$ égal à $4x-3$, les deux membres de l'équation (2) sont rendus égaux, l'équation (2) est vérifiée. Ainsi toutes les racines de l'équation (1) appartiennent à l'équation (2), mais il pourrait se faire que l'équation (2) eût d'autres racines que celles-là, si nous ne démontrions pas que réciproquement tout nombre qui vérifie la seconde équation vérifie la première.

Soit 5 un nombre qui vérifie l'équation (2); mis à la place de x, il rend par hypothèse $2x+5+(4x-3)$ égal à $7x-20+(4x-3)$, et, comme il rend évidemment égales les deux parties $4x-3$ des deux membres, il doit rendre égales les autres parties $2x+5$ et $7x-20$, qui sont les deux membres de l'équation (1), donc il vérifie cette équation.

L'équation (2) ayant toutes les racines de l'équation (1), et n'en ayant pas d'autres, lui est équivalente.

La démonstration relative à la soustraction se trouve faite, car en retranchant aux deux membres de l'équation (2) la quantité $4x-3$ on trouverait l'équation (1), et nous savons que ces deux équations sont équivalentes.

Corollaire. — On peut faire passer un terme d'une équation d'un membre dans l'autre, pourvu qu'on change le signe de ce terme.

Soit l'équation

$$2x+5=7x-20\,;$$

ajoutons 20 aux deux membres, il vient

$$2x+5+20=7x,$$

retranchons $2x$ aux deux membres, nous aurons

$$5+20=7x-2x.$$

On voit que le terme 20, qui avait le signe — au second membre, se trouve transporté au premier avec le signe +, et que le terme $2x$, qui avait le signe + au premier membre, se trouve transporté au second avec le signe —.

Théorème II. — *Si on multiplie ou qu'on divise les deux membres d'une équation par une même quantité, on obtient une équation équivalente, pourvu que cette quantité ne soit pas nulle et ne puisse pas le devenir.*

Soit une équation

$$2x = 6.$$

Faisons d'abord passer tous les termes dans le premier membre, ce qui donne une équation (1) équivalente (Th. I), nous aurons

$$(1) \qquad 2x - 6 = 0.$$

Multiplions les deux membres, par une quantité m différente de zéro, nous obtenons une seconde équation :

$$(2) \qquad (2x - 6) \times m = 0.$$

D'abord tout nombre qui vérifie la première équation vérifiera la seconde.

En effet soit 3 un nombre vérifiant l'équation (1) : mis à la place de x, il rend, par hypothèse, le premier membre égal à zéro ; mettons ce même nombre 3 à la place de x dans l'équation (2), il rendra $2x - 6$ égal à zéro, et le produit de zéro par m sera nul, c'est-à-dire égal au second membre, l'équation (2) est vérifiée. Ainsi toutes les racines de l'équation (1) appartiennent à l'équation (2) ; pour prouver l'équivalence de ces équations, il reste à prouver que réciproquement toutes les racines de l'équation (2) appartiennent à l'équation (1).

Soit 3 un nombre qui vérifie l'équation (2), il rend par hypothèse le produit $(2x - 6)\ m$ nul ; or pour qu'un produit soit nul, il faut que l'un des facteurs soit nul, et comme m ne l'est pas, $2x - 6$ doit être rendu nul, et l'équation (1) est vérifiée. L'équation (2) ayant toutes les racines de l'équation (1) et n'en ayant pas d'autres, lui est équivalente.

La démonstration relative à la division se trouve faite, car on passerait de l'équation (2) à l'équation (1) en divisant les deux membres par m ; cette division des deux membres d'une équation par m donne donc une équation que nous savons lui être équivalente.

Remarque. — Lorsque la quantité m, par laquelle on multiplie ou l'on divise les deux membres de l'équation, contient l'inconnue x, l'équation ainsi formée n'est pas équivalente à la proposée.

En effet, si l'on multiplie par $x-5$ les deux membres de l'équation (1)

$$(1) \qquad 2x-6=0,$$

l'équation (2) qui en résulte, n'est pas équivalente,

$$(2) \qquad (2x-6)(x-4)=0,$$

Tout nombre 3, qui vérifie l'équation (1), et, mis à la place de x, rend par hypothèse $2x-6$ nul, rendra aussi nul le produit $(2x-6)(x-4)$, et vérifiera l'équation (2) ; mais la réciproque n'est pas vraie. Tout nombre qui vérifie l'équation (2) rend nul, par hypothèse, le produit $(2x-6)(x-4)$, et pour qu'un produit soit nul, il faut que l'un des facteurs soit nul, l'équation (2) admet donc deux sortes de racines : 1° celles qui rendent $2x-6$ nul et vérifient l'équation (1), 2° celles qui rendent $x-4$ nul, et qui peuvent ne pas vérifier l'équation (1).

Ainsi : *quand on multiplie les deux membres d'une équation par un facteur contenant l'inconnue, on y introduit des racines nouvelles, celles qui rendent le facteur inconnu égal à zéro.* Inversement *quand on divise les deux membres d'une équation par un facteur contenant l'inconnue, on en supprime des racines, celles qui rendent le facteur inconnu égal à zéro.*

Lorsqu'on sera obligé de multiplier les deux membres d'une équation par un facteur inconnu, on devra, parmi les solutions de la nouvelle équation, *rejeter* celles qu'on aura *introduites*.

Corollaire I. — *Quand on connaît une racine d'une équation, on peut toujours abaisser son degré d'une unité.*

Soit l'équation

$$x^3-8x^2+19x-12=0,$$

dans laquelle on aperçoit la racine 1. Puisque 1 mis à la place de x rend le premier membre égal à zéro, ce premier membre est divisible par $x-1$ (4 et 5, VII, Th.), et donne pour quotient

$$x^2-7x+12.$$

L'équation proposée peut donc s'écrire :

$$(x-1)(x^2-7x+12)=0$$

En divisant les deux membres par $x-1$, ce qui supprime la racine 1, elle se réduit à

$$x^2-7x+12=0,$$

équation qui donne les autres racines de l'équation proposée.

COROLLAIRE II. — Il résulte du théorème II que *tout diviseur de l'un des membres, autre que zéro, passe comme multiplicateur dans l'autre membre et réciproquement.*

L'équation

$$\frac{x}{3} = 4,$$

équivaut à l'équation

$$x = 4 \times 3\,;$$

car on n'a fait que multiplier les deux membres par 4.

De même l'équation

$$3x = 4,$$

équivaut à l'équation

$$x = \frac{4}{3}\,;$$

car on n'a fait que diviser les deux membres par 4.

COROLLAIRE III. — *Lorsqu'une équation a des termes fractionnaires, on peut, en général, réduire tous les termes de cette équation au même dénominateur, et supprimer ensuite ce dénominateur qu'on doit choisir le plus simple qu'il est possible. Cela revient à multiplier les deux membres par le plus petit multiple commun des dénominateurs, et s'appelle chasser les dénominateurs.*

Ce théorème est évident lorsque le dénominateur auquel on réduit tous les termes de l'équation est un nombre, ou une quantité algébrique qui ne contient pas d'inconnues, pourvu que, dans ce dernier cas, on ne fasse aucune hypothèse qui rende nul le dénominateur; car, en supprimant ce dénominateur, on multiplie les deux membres de l'équation par une quantité autre que zéro.

Ainsi l'équation

$$\frac{x-3}{6} + \frac{5+x}{2} = 4$$

est équivalente à l'équation

$$x - 3 + 3(5 + x) = 24,$$

qu'on forme en réduisant tous les termes de la première au dénominateur 6, et multipliant les deux membres par ce dénominateur.

Pareillement les équations

$$x-a=\frac{bx}{c-d}+e,$$

$$(x-a)(c-d)=bx+e(c-d),$$

sont équivalentes, à la condition qu'on donnera toujours aux lettres c et d des valeurs inégales.

Lorsque le dénominateur commun renferme des inconnues, le théorème n'est pas toujours vrai ; car l'équation formée par la suppression du dénominateur commun peut être satisfaite dans certains cas par des valeurs de l'inconnue, qui rendent nul ce dénominateur. En voici un exemple : si je réduis au même dénominateur $x(x^2-1)$ tous les termes de l'équation

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x-2}{x(x+1)},$$

et que je multiplie ses deux membres par $x(x^2-1)$, je forme la nouvelle équation

$$x-1=(x-2)(x-1),$$

qui a pour solutions les nombres 3 et 1, comme on peut le vérifier. Le premier de ces nombres satisfait aussi à l'équation donnée ; mais il n'en est pas de même du second qui rend nul le multiplicateur $x(x^2-1)$, lorsqu'on le substitue à x dans cette expression.

Cet exemple simple montre que l'application du théorème précédent conduit, dans certains cas, à une équation qui peut avoir plus de solutions que l'équation proposée. Néanmoins, on emploie la première au lieu de la seconde, parce que ses deux membres sont des polynômes entiers, et que les méthodes de résolution ne sont le plus souvent applicables qu'à des équations de cette forme. Mais on rejette comme *étrangères* à la question, toutes les solutions de l'équation transformée qui rendent nul le commun dénominateur des termes de l'équation proposée.

III. — Résolution d'une équation du premier degré à une seule inconnue.

Soit proposé de résoudre l'équation

$$2x-\frac{3}{4}+\frac{x}{2}=\frac{2}{3}+\frac{3x}{8};$$

je réduis d'abord tous ses termes au dénominateur 24, et je supprime ce dénominateur. Je forme ainsi l'équation

$$48x - 18 + 12x = 16 + 9x,$$

qui est équivalente à l'équation donnée.

Je rassemble ensuite dans le premier membre tous les termes qui contiennent l'inconnue, et dans le second membre ceux qui sont indépendants de cette quantité, en changeant les signes des termes $9x$ et 18 que je transporte d'un membre dans l'autre (Th. I, Cor.). Par suite, l'équation qui précède devient :

$$48x + 12x - 9x = 16 + 18.$$

J'effectue alors les opérations indiquées dans chaque membre, et je trouve

$$51x = 34;$$

l'équation devient en divisant les deux membres par 51,

$$x = \frac{34}{51}.$$

Le nombre $\frac{34}{51}$ ou $\frac{2}{3}$ est la seule valeur de l'inconnue, puisque cette dernière équation, équivalente à la proposée, ne peut être satisfaite, quand on y remplace x par un nombre différent de $\frac{2}{3}$.

Pour vérifier cette valeur de l'inconnue, je la substitue dans l'équation proposée, dont les deux membres doivent alors se réduire à des nombres égaux. L'égalité

$$\frac{4}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4},$$

à laquelle cette substitution conduit est évidente ; car chacun de ses membres est égal à $\frac{11}{12}$. Le nombre $\frac{2}{3}$ est donc la valeur de l'inconnue.

De cet exemple résulte la règle suivante : *Pour résoudre une équation à une seule inconnue et du premier degré, on réduit tous les termes au même dénominateur, et l'on supprime ce dénominateur. On rassemble ensuite dans un membre les termes qui contiennent l'inconnue, et dans l'autre membre* *ceux qui en sont indépendants. On effectue alors, autant qu'il est possible, les additions et les soustractions indiquées dans chacun des membres, puis on divise la valeur de celui qui ne renferme pas l'inconnue par le coefficient de cette quantité.* Le quotient de cette division est la solution de l'équation proposée, si toutefois les calculs qui précèdent sont exacts. On les vérifie en remplaçant l'inconnue par ce quotient dans l'équation. Si les deux membres se réduisent à des nombres égaux, le nombre trouvé est la valeur de l'inconnue. Dans le cas contraire, cette valeur est fausse ; il faut alors recommencer les calculs relatifs à la résolution de l'équation.

Remarque I. — Cette règle est aussi applicable aux équations du premier degré dont les coefficients sont algébriques. En voici un exemple :

Soit à résoudre l'équation

$$3cx+\frac{bx}{a}=\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}+\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3};$$

je réduis tous ses termes au dénominateur $a(a+b)^3$, et je supprime ce dénominateur ; il en résulte que

$$3ac(a+b)^3x+b(a+b)^3x=(a+b)(2a+b)b^2x+3a^2bc(a+b)^2+a^3b^2.$$

Je transporte ensuite le terme $(a+b)(2a+b)b^2x$ dans le premier membre et je mets $(a+b)x$ en facteur commun ; l'équation précédente devient dès lors

$$[(3ac+b)(a+b)^2-b^2(2a+b)](a+b)x=3a^2bc(a+b)^2+a^3b^2,$$

et j'en déduis

$$x=\frac{3a^2bc(a+b)^2+a^3b^2}{(a+b)[3ac(a+b)^2+b(a+b)^2-b^2(2a+b)]}.$$

Pour simplifier cette fraction, je mets ab en facteur commun au numérateur, et je remplace dans le dénominateur la quantité $b(a+b)^2-b^2(2a+b)$ par ba^2 qui lui est égale ; je trouve ainsi :

$$x=\frac{ab[3ac(a+b)^2+a^2b]}{(a+b)[3ac(a+b)^2+a^2b]},$$

et, par conséquent,

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

On vérifie cette valeur de x, en la substituant dans l'équation proposée qui devient

$$\frac{3abc}{a+b}+\frac{b^2}{a+b}=\frac{b^3(2a+b)}{(a+b)^3}+\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}; \quad \text{(I)}$$

Or on a

$$\frac{b^3(2a+b)}{(a+b)^3}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}=\frac{b^2(2ab+b^2+a^2)}{(a+b)^3}=\frac{b^2(a+b)^2}{(a+b)^3}=\frac{b^2}{a+b};$$

donc le second membre de l'égalité (I) est identique au premier, et la valeur $\dfrac{ab}{a+b}$ de x satisfait à l'équation proposée.

Remarque II. — Il n'est pas indifférent de transporter dans un membre ou dans l'autre les termes qui renferment l'inconnue de l'équation ; il faut faire en sorte que les soustractions qui résultent de ce déplacement des termes puissent être effectuées. Lorsque les coefficients des termes de l'équation sont des nombres, on voit immédiatement de quel côté du signe d'égalité on doit transporter l'inconnue, pour que les soustractions soient possibles dans chaque membre. Mais il n'en est plus de même si les termes de l'équation ont pour coefficients des lettres n'ayant généralement entre elles aucune relation de grandeur. Soit, par exemple, l'équation

$$a+bx=c+dx,$$

dans laquelle le coefficient b de l'inconnue peut être plus grand ou moindre que d. La résolution de cette équation consiste dans la recherche des valeurs de l'inconnue qui correspondent à ces deux hypothèses. Si l'on suppose : 1° $b>d$, il faut transporter le terme dx dans le premier membre, parce que la soustraction $b-d$ est possible, et l'on trouve alors

$$x=\frac{c-a}{b-d},$$

en admettant toutefois qu'on ait $c>a$; 2° si b est moindre que d, on fait passer le terme bx dans le second membre, et l'on obtient

$$x=\frac{a-c}{d-b},$$

en supposant en outre $c<a$. Je démontrerai dans la suite comment on peut remplacer ces deux formules par une seule.

Lorsqu'en résolvant une équation on trouve que la soustraction est possible dans un membre et impossible dans l'autre, c'est qu'il n'existe aucun nombre qui puisse satisfaire à l'équation ; on en conclut que cette équation exprime une absurdité, qu'on peut le plus souvent reconnaître *à priori.* Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{6+x}{9+x}=\frac{3}{5};$$

je réduis ses termes au même dénominateur, puis je supprime ce dénominateur, et j'obtiens la nouvelle équation

$$30+5x=27+3x,$$

de laquelle je déduis

$$5x-3x=27-30.$$

Je suis conduit de cette manière à deux soustractions ; celle qui est indiquée dans le premier membre est possible, tandis que l'autre ne l'est pas. J'en conclus que l'équation donnée exprime une condition impossible à remplir. En effet, il s'agit de trouver quel nombre on doit ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{6}{9}$ pour la rendre égale à $\frac{3}{5}$. Or ce problème est impossible, puisque la fraction $\frac{6}{9}$ est plus grande que $\frac{3}{5}$, et qu'on augmente une fraction plus petite que l'unité en ajoutant un même nombre à ses deux termes.

Remarque III. — La théorie des rapports égaux permet de résoudre d'une manière plus simple et plus élégante certaines équations. Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{x}{a-x}=\frac{b}{c}.$$

En ajoutant à chaque dénominateur le numérateur correspondant (6, Th. V) ; on a

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{c+b},$$

d'où

$$x=\frac{ab}{c+b}.$$

On résoudrait de même l'équation

$$\frac{x}{a+x}=\frac{b}{c},$$

qui donne

$$x = \frac{ab}{c - b}.$$

Remarque IV. — Lorsqu'une équation n'a qu'une inconnue élevée à la même puissance dans les termes qui la contiennent, on peut la résoudre en cherchant la valeur de cette puissance, d'après la règle donnée pour la résolution d'une équation du premier degré à une seule inconnue.

En effet, soit l'équation

$$5x^3 - 12 = 52 - 3x^3,$$

qui ne contient l'inconnue x qu'à la troisième puissance; je fais passer le terme $3x^3$ dans le premier membre et le terme 12 dans le second, puis j'effectue les opérations indiquées dans chaque membre, et je trouve

$$8x^3 = 64.$$

Je considère maintenant la quantité x^3 comme l'inconnue, et, pour en avoir la valeur, je divise les deux membres de l'équation par le coefficient de x^3 ; j'obtiens ainsi :

$$x^3 = 8,$$

et j'en conclus

$$x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

IV. — Résolution des équations à deux inconnues.

1. — Une équation à deux inconnues x et y étant donnée, je réduis tous ses termes au même dénominateur, si elle en a qui soient fractionnaires; je supprime ensuite le dénominateur commun, et je rassemble dans un même membre les termes qui contiennent les inconnues, et dans l'autre membre ceux qui en sont indépendants. Je ramène ainsi l'équation proposée à n'avoir que trois termes entiers, comme la suivante :

$$2x + 5y = 9.$$

Théorème III. — *Une équation à deux inconnues est indéterminée, c'est-à-dire qu'elle admet une infinité de solutions.*

Soit l'équation

$$2x + 5y = 9.$$

En faisant passer le terme $5y$ dans le second membre, et divisant ensuite les deux membres par le coefficient de x, on trouve l'équation équivalente

$$x=\frac{9-5y}{2}$$

qui sert à calculer l'inconnue x, au moyen de l'autre inconnue y, que l'on peut prendre arbitrairement ; c'est ce qu'on exprime en disant que l'équation est résolue par rapport à x, ou que x est exprimé en fonction de y. Pour avoir un système de valeurs des inconnues, donnons à y une valeur arbitraire, par exemple $\frac{3}{10}$, le second membre devient $\dfrac{9-\frac{3}{2}}{2}$ ou $\frac{15}{4}$; en remplaçant y par $\frac{3}{10}$, et x par $\frac{15}{4}$, les deux membres seront égaux, et l'équation sera satisfaite.

On voit que l'on ne pourrait pas satisfaire à l'équation en prenant arbitrairement les valeurs des deux inconnues ; le choix des valeurs de y, quoique indéterminé, est même limité. En effet, il faut que $5y$ soit au plus égal à 9, pour que l'on puisse trouver une valeur de x correspondante à celle de y.

Si l'on se propose de trouver les valeurs de x et y qui satisfont à la fois à deux équations contenant ces deux inconnues, le problème devient en général déterminé.

Je suppose d'abord que l'une des équations ne contienne qu'une inconnue, et je prends pour exemple les équations :

$$2x+5y=19,$$
$$\frac{x-2}{x-3}=\frac{5}{4};$$

je résous la seconde qui n'a qu'une inconnue, et je trouve

$$x=7.$$

Il s'agit maintenant de déterminer la valeur correspondante de y, qui satisfait à la première équation. Pour cela, je résous cette équation par rapport à y, et, d'après ce qui précède, je remplace x par 7 dans la formule

$$y=\frac{19-2x}{5};$$

ce qui donne

$$y = \frac{19 - 14}{5} = 1.$$

Cet exemple montre quelle marche on doit suivre pour résoudre deux équations contenant à la fois les deux inconnues. Il faut chercher à ramener ce cas au précédent, c'est-à-dire *remplacer le système des équations données par un autre qui lui soit équivalent, et dont l'une des équations n'ait qu'une inconnue*. C'est ce qu'on appelle *éliminer* une inconnue de l'une des équations du système proposé. L'*élimination* repose sur un théorème général que je vais d'abord démontrer.

On dit qu'*on additionne* ou qu'*on retranche deux équations membre à membre* lorsqu'on égale la somme ou la différence de leurs premiers membres à la somme ou à la différence des seconds.

Théorème IV. — *Dans tout système de plusieurs équations à plusieurs inconnues, on obtient un système équivalent en remplaçant l'une d'elles ou même plusieurs par d'autres qu'on forme en ajoutant membre à membre plusieurs des équations proposées, après avoir multiplié les deux membres de chacune d'elles par un même nombre.*

Pour simplifier la démonstration, nous supposerons que dans chaque équation on ait fait passer tous les termes dans le premier membre, et qu'on les ait ramenées à la forme $A = 0$, A étant un polynôme entier qui contient les inconnues x, y, z....

Supposons que l'on ait trois équations

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} A = 0, \\ A' = 0, \\ A'' = 0. \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent au suivant :

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{r} A = 0, \\ mA + nA' = 0, \\ pA + qA' + rA'' = 0. \end{array} \right.$$

En effet tout système de valeurs des inconnues qui vérifie le système des équations (I), annulant les polynômes A, A' et A'', annulera les polynômes $mA + nA'$ et $pA + qA' + rA''$, donc il vérifie le système des équations (II). Le système (II) admet donc toutes les solutions du système (I), et il n'en admet pas d'autres; car tout système de valeurs des inconnues qui vérifie le système (II), rendant nuls les polynômes A et $m\text{A}+n\text{A}'$, doit rendre nul le produit $n\text{A}'$ et par suite A′, si n est différent de zéro ; rendant nul le polynôme $p\text{A}+q\text{A}'+r\text{A}''$, où les deux premières parties $p\text{A}$ et $q\text{A}'$ sont nulles, il doit rendre nul le produit $r\text{A}''$ et par suite A″, si r est différent de zéro, et par conséquent il vérifie le système (I).

Le raisonnement fait voir que m peut être nul, dans ce cas il n'y a qu'une équation de remplacée ; p et q peuvent aussi être nuls, si l'un des deux est nul, la troisième équation du système (II) sera une combinaison de deux seulement des équations du système (I), s'ils sont nuls à la fois, la troisième équation du système (I) n'est pas changée. On pourrait évidemment remplacer le système (I) par le système de trois équations semblables à la dernière du système (II).

Remarque. — Si chaque équation avait deux membres le théorème serait également vrai. Soient les équations

$$\left.\begin{aligned} \text{A} &= \text{B}, \\ \text{A}' &= \text{B}', \\ \text{A}'' &= \text{B}''. \end{aligned}\right\} \text{(I)} \quad \text{auxquelles nous donnons la forme} \quad \left\{\begin{aligned} \text{A} - \text{B} &= 0, \\ \text{A}' - \text{B}' &= 0, \\ \text{A}'' - \text{B}'' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ce nouveau système est équivalent, d'après notre théorème, au suivant :

$$\left.\begin{aligned} \text{A}-\text{B}&=0, \\ m(\text{A}-\text{B})+n(\text{A}'-\text{B}')&=0, \\ p(\text{A}-\text{B})+q(\text{A}'-\text{B}')+r(\text{A}''-\text{B}'')&=0. \end{aligned}\right\} \text{ou (II)} \left\{\begin{aligned} \text{A}&=\text{B}, \\ m\text{A}+n\text{A}'&=m\text{B}+n\text{B}', \\ p\text{A}+q\text{A}'+r\text{A}''&=p\text{B}+q\text{B}'+r\text{B}''. \end{aligned}\right.$$

Au lieu d'ajouter les équations, on pourrait les retrancher membre à membre.

2. — Élimination par substitution.

La méthode d'élimination par substitution consiste à résoudre l'une des équations par rapport à une inconnue, et à substituer la valeur de cette quantité dans l'autre équation qui ne contient plus alors qu'une inconnue.

Cette règle est une conséquence du théorème précédent pour les équations du premier degré ; je vais la démontrer sur les équations suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \left\{\begin{aligned} 4x + 5y &= 22, \\ 3x - 2y &= 5. \end{aligned}\right.$$

Je résous d'abord la première par rapport à x, puis je remplace cette inconnue par sa valeur $x = \frac{22 - 5y}{4}$ dans la seconde équation, et je dis que le système des deux équations

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{22 - 5y}{4}, \\ 3\left(\dfrac{22 - 5y}{4}\right) - 2y = 5, \end{array} \right.$$

est équivalent au système (I) donné. En effet, si je remplace dans le système (II) la seconde équation par une autre que je forme en ajoutant membre à membre la seconde équation à la première, après avoir multiplié les deux membres de celle-ci par le coefficient 3 du terme $3\left(\frac{22-5y}{4}\right)$ de la seconde, j'obtiens un nouveau système équivalent au second, et composé des deux équations

$$x = \frac{22 - 5y}{4},$$
$$3x - 2y = 5,$$

qui ne sont autres que les équations proposées ; par conséquent le second système est équivalent au premier.

La résolution de l'équation

$$3\left(\frac{22 - 5y}{4}\right) - 2y = 5$$

ne conduit qu'à une seule valeur de y, savoir

$$y = 2\,;$$

en substituant ce nombre à y dans la formule

$$x = \frac{22 - 5y}{4},$$

je ne trouve de même qu'une seule valeur pour x, savoir :

$$x = 3.$$

De cet exemple je conclus : 1° la règle suivante :

Pour résoudre deux équations du premier degré à deux inconnues x *et* y, *il faut prendre la valeur de* x *en fonction de* y *dans l'une des équations, la substituer à cette inconnue dans l'autre équation, et résoudre ensuite cette dernière équation* *par rapport à l'inconnue* y *qu'elle contient seule. La valeur de* y *étant ainsi trouvée, on obtient celle de l'autre inconnue* x *en substituant la valeur de* y *dans la formule qui donne* x *en fonction de* y.

2° Ce théorème : *Tout système de deux équations à deux inconnues, et du premier degré, n'admet en général qu'une solution,* c'est-à-dire que *chacune des inconnues n'a qu'une valeur.*

Autre exemple. — Résoudre le système des deux équations

$$ax - by = a^2 + b^2$$
$$bx + ay = a^2 + b^2.$$

Je tire de la première

$$x = \frac{a^2 + b^2 + by}{a},$$

et je substitue cette valeur de x dans la seconde équation ; il vient :

$$\frac{b(a^2 + b^2) + b^2y}{a} + ay = a^2 + b^2.$$

En réduisant au même dénominateur tous les termes de cette nouvelle équation, et rassemblant dans le second membre les termes qui ne contiennent pas l'inconnue, j'ai :

$$(b^2 + a^2)y = a(a^2 + b^2) - b(a^2 + b^2)$$

et, par suite,

$$y = a - b.$$

Je substitue cette valeur de y dans l'équation

$$x = \frac{a^2 + b^2 + by}{a},$$

et je trouve

$$x = \frac{a^2 + b^2 + ab - b^2}{a},$$

ou

$$x = a + b.$$

Je vérifierais que ces valeurs de x et y sont exactes, en les substituant dans les équations proposées.

3. — Élimination par addition et soustraction.

Soient les deux équations :

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} 3x + \ \ 8y &= 31, \\ 7x - 12y &= 11. \end{aligned} \right.$$

Je ramène les coefficients de x à être égaux, en multipliant les deux membres de la première équation par le coefficient 7 de x dans la seconde, et ceux de la seconde équation par le coefficient 3 de x dans la première :

$$\begin{aligned} 21x + 56y &= 217, \\ 21x - 36y &= 33. \end{aligned}$$

Je retranche membre à membre ces deux équations, les termes en x se détruisent, et je peux remplacer l'une des proposées par l'équation résultante, dont l'inconnue x est éliminée (Th. IV),

$$92y = 184.$$

Pour ramener les coefficients de y à être égaux, je remarque que leur plus petit multiple commun est 24, je multiplie donc la première équation par 3 et la seconde par 2, il vient :

$$\begin{aligned} 9x + 24y &= 93, \\ 14x - 24y &= 22, \end{aligned}$$

j'ajoute alors membre à membre ces nouvelles équations, les termes en y se détruisent, et je peux remplacer l'une des proposées par l'équation résultante, dont l'inconnue y est éliminée :

$$23x = 115.$$

Le système (I) est donc remplacé par le système équivalent (Th. IV),

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} 92y &= 184 \\ 23x &= 115 \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire

$$y = 2 \quad \text{et} \quad x = 5.$$

Ce procédé d'élimination est plus rapide que le précédent, surtout quand une inconnue a le même coefficient dans les deux équations ; on l'emploie toujours quand les deux inconnues ont le même coefficient.

Soient les deux équations :

$$4x + 3y = 43,$$
$$4x - 3y = 13\,;$$

ajoutons et retranchons ces équations membre à membre, il vient :

$$8x = 56,$$
$$6y = 30,$$

d'où

$$x = 7,$$

et

$$y = 5.$$

Soient encore

$$x + y = a,$$
$$x - y = b,$$

ajoutons et retranchons ces équations membre à membre, il vient :

$$2x = a + b,$$
$$2y = a - b,$$

d'où

$$x = \frac{a+b}{2},$$

et

$$y = \frac{a-b}{2}.$$

V. — Résolution de 3 équations à 3 inconnues.

1. — Quelle que soit une équation du premier degré à 3 inconnues, on peut en chassant les dénominateurs, transposant les termes, et réduisant les termes semblables. la ramener à la forme suivante :

$$2x - 5y + 3z = 1.$$

THÉORÈME V. — *Une équation à trois inconnues est indéterminée, c'est-à-dire qu'elle admet une infinité de solutions.*

Soient x, y et z les trois inconnues, donnons à deux d'entre elles, y et z par exemple des valeurs arbitraires, l'équation proposée ne contiendra plus que l'inconnue x, et l'on peut en général trouver une valeur de x qui satisfasse à une équation à une inconnue.

Soit l'équation

$$2x - 5y + 3z = 1,$$

d'où

$$x = \frac{1 + 5y - 3z}{2}.$$

Si nous donnons à y la valeur 2 et à z la valeur 3, pour vérifier l'équation, la valeur de x doit être $\frac{1 + 10 - 9}{2}$, c'est-à-dire 1.

Théorème VI. — *Le système de deux équations à trois inconnues est indéterminé, c'est-à-dire qu'il admet une infinité de solutions.*

Soient proposées les deux équations à trois inconnues :

$$2x - 5y + 3z = 1,$$
$$7x + 3y - 2z = 7.$$

Donnons à l'une d'entre elles, z par exemple, une valeur arbitraire $\frac{1}{4}$; les équations ne contiendront plus que deux inconnues :

$$2x - 5y = \frac{1}{4},$$

$$7x + 3y = \frac{30}{4} ;$$

nous avons vu qu'en général on peut trouver des valeurs de x et y qui satisfassent à deux équations à deux inconnues.

2. — Si l'on se propose de trouver des valeurs de x, y et z, qui satisfassent à trois équations à trois inconnues, le problème devient en général déterminé.

Soient proposées les équations

$$2x - 5y + 3z = 1,$$
$$7x + 3y - 2z = 7,$$
$$5x + 2y + z = 12.$$

Je résous la première par rapport à x, et je substitue la valeur de cette inconnue dans les deux autres équations. Je dis que les trois équations

$$x = \frac{1 + 5y - 3z}{2},$$

$$7\left(\frac{1+5y-3z}{2}\right)+3y-2z=7,$$
$$5\left(\frac{1+5y-3z}{2}\right)+2y+\ z=12,$$

forment un système équivalent à celui des équations données.

En effet, je remplace la seconde équation du dernier système par une autre que je forme en ajoutant membre à membre cette équation et la première, après avoir multiplié les deux membres de celle-ci par le coefficient 7 du terme $7\left(\frac{1+5y-3z}{2}\right)$ de la seconde équation. Or, la transformée

$$7x+3y-2z=7$$

que j'obtiens ainsi, n'est autre que la seconde équation du premier système; une combinaison semblable, effectuée sur la première équation et la troisième du second système, reproduit aussi la troisième équation

$$5x+2y+z=12$$

du premier système ; donc le second système est équivalent au premier.

Je simplifie les deux dernières équations du second système, et la question se trouve ramenée à résoudre les trois équations

$$x=\frac{1+5y-3z}{2},$$
$$41y-25z=7,$$
$$29y-13z=19,$$

plus simples que les équations données, puisque deux d'entre elles ne contiennent que deux inconnues. J'élimine maintenant l'une de ces inconnues, par exemple y, entre ces deux équations, et le système précédent devient

$$x=\frac{1+5y-3z}{2},$$
$$y=\frac{7+25z}{41},$$
$$29\left(\frac{7+25z}{41}\right)-13z=19.$$

Comme chacune de ces équations contient une inconnue de moins que celle qui la précède, je cherche d'abord la valeur de z en résolvant la troisième équation qui ne contient que cette inconnue. Je trouve ainsi

$$z = 3\,;$$

je substitue ensuite cette valeur de z dans la seconde équation, qui donne y en fonction de z, et j'obtiens

$$y = 2.$$

Les valeurs de y et z étant connues, je calcule la valeur correspondante de x en remplaçant y par 2 et z par 3 dans la première équation, qui donne x en fonction de y et de z, et j'ai

$$x = 1.$$

Afin de vérifier tous les calculs qui précèdent et, par suite, les valeurs qui en résultent pour les inconnues, il faut toujours s'assurer, par une substitution directe, que les nombres trouvés pour les inconnues satisfont aux équations données.

Cette vérification, appliquée à l'exemple précédent, conduit aux identités suivantes :

$$2 - 10 + 9 = 1,$$
$$7 + 6 - 6 = 7,$$
$$5 + 4 + 3 = 12\,;$$

les valeurs trouvées pour les inconnues sont donc exactes.

De cet exemple je conclus

1° La règle suivante :

Pour résoudre trois équations à trois inconnues x, y, z, *je commence par prendre la valeur de l'inconnue* x *dans l'une des équations, et je la substitue dans les deux autres. Je prends ensuite la valeur de* y *dans l'une des deux dernières équations et je la substitue dans l'autre, que je résous alors par rapport à* z. *La valeur de* z *étant trouvée, je calcule* y *en remplaçant dans la formule de cette inconnue la quantité* z *par sa valeur. Enfin j'obtiens la valeur de* x *en substituant dans sa formule les valeurs connues de* y *et de* z.

2° Ce théorème : *Tout système de trois équations à trois inconnues et du premier degré n'admet en général qu'une solution*, puisqu'on détermine successivement chacune des inconnues par une équation du premier degré ne contenant que l'inconnue cherchée.

VI. — Résolution d'un nombre quelconque d'équations.

La règle que je viens de donner, pour la résolution de trois équations à trois inconnues, peut être étendue à un nombre quelconque m d'équations simultanées, contenant m inconnues $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$.

En effet, si je résous la première de ces équations par rapport à l'inconnue x_1, et que je substitue la valeur de x_1 dans les $m-1$ autres équations, le système proposé se trouve remplacé par un autre composé d'une équation renfermant les m inconnues, et de $m-1$ équations contenant les $m-1$ quantités $x_2, x_3, \ldots x_m$. Je prends dans la première de ces $m-1$ équations la valeur de x_2, et je la substitue dans les $m-2$ autres. Je forme de cette manière un second système d'équations équivalent au premier et contenant une équation à m inconnues, une équation à $m-1$ inconnues, et un groupe de $m-2$ équations dont les inconnues sont $x_3, x_4, \ldots x_m$. Je résous alors la première équation de ce groupe par rapport à x_3, et je substitue la valeur de cette inconnue dans les $m-3$ autres équations ; ce qui ramène le système proposé à un autre composé aussi de m équations : la première a m inconnues, la seconde en contient $m-1$, la troisième $m-2$, et les $m-3$ autres ne renferment que les $m-3$ inconnues $x_4, x_5, \ldots x_m$ En continuant ainsi, j'arriverai à un système de m équations équivalent au système proposé et formé de la manière suivante : La première de ces équations renfermera m inconnues; la seconde en contiendra $m-1$; la troisième, $m-2$; .... la $(m-1)^{me}$, deux ; et la m^{me}, une seule.

La résolution de la m^{me} équation fera connaître la valeur de l'inconnue x_m, qui s'y trouve seule. En substituant cette valeur de x_m dans la $(m-1)^{me}$ équation, qui est résolue par rapport à x_{m-1}, je serai conduit à la valeur de l'inconnue x_{m-1}. Je remplacerai ensuite x_m et x_{m-1} par leurs valeurs dans la $(m-2)^{me}$ équation, qui est résolue par rapport à x_{m-2}, et j'en déduirai celle de l'inconnue x_{m-2}... En remontant ainsi de chaque inconnue à la précédente, j'obtiendrai les valeurs de toutes les inconnues, et le système des équations données aura toujours une solution, et n'en aura qu'une seule, s'il ne contient pas d'équations contradictoires ou identiques.

VII. — Remarques sur la résolution d'un système quelconque d'équations du premier degré.

1. — Si, dans l'une des équations données, le coefficient d'une inconnue est égal à l'unité, on élimine de préférence cette inconnue, parce que sa valeur exprimée au moyen des autres inconnues n'a pas de dénominateur ; ce qui rend plus simples les transformations des autres équations.

2. — Lorsque toutes les inconnues ne sont pas contenues dans chaque équation du système donné, on doit commencer l'élimination par l'inconnue qui se trouve dans le plus petit nombre d'équations, afin d'avoir à faire moins de substitutions.

Si une inconnue n'entre que dans une équation, on réserve cette équation pour la détermination spéciale de cette inconnue, et l'on résout le système des autres équations.

Soit, par exemple, le système des cinq équations

$$\begin{aligned} 3x + 2z - u &= 4, \qquad (1)\\ 5y + 4z + t &= 26,\\ y - 3z + 2u &= 3,\\ 6y - 3u + 2t &= 5,\\ z + 3u &= 18. \end{aligned}$$

La première, contenant seule l'inconnue x, servira à calculer cette inconnue, lorsque les valeurs des autres auront été trouvées; la question est donc ramenée à résoudre les quatre dernières équations. Comme il n'y en a que deux qui renferment t, j'élimine de préférence cette inconnue, en tirant sa valeur de la première équation et la substituant dans la troisième. Le système des quatre équations devient par suite :

$$\begin{aligned} t &= 26 - 5y - 4z, \qquad (2)\\ 4y + 8z + 3u &= 47,\\ y - 3z + 2u &= 3,\\ z + 3u &= 18. \end{aligned}$$

J'élimine ensuite y entre les trois dernières dont deux seulement contiennent cette inconnue, et j'ai

$$\begin{aligned} y &= 3 + 3z - 2u, \qquad (3)\\ 4z - u &= 7,\\ z + 3u &= 18. \end{aligned}$$

Je tire enfin de la dernière de ces équations la valeur de z, savoir :

$$z = 18 - 3u; \qquad (4)$$

je la substitue dans l'équation précédente qui donne,

$$u = 5,$$

et je déduis successivement des équations (4), (3), (2) et (1) les valeurs suivantes des autres inconnues :

$$z = 3, \quad y = 2, \quad t = 4, \quad x = 1$$

3. — On simplifie quelquefois la résolution d'un système d'équations par l'emploi d'une inconnue auxiliaire, telle que la somme de toutes les inconnues; la relation qu'on doit établir entre cette nouvelle inconnue et les inconnues primitives dépend particulièrement du système d'équations qu'on veut résoudre. Cette méthode n'est pas toujours applicable, car son emploi suppose entre les inconnues une certaine symétrie qui n'existe pas dans tous les systèmes d'équations ; c'est cette symétrie qui fait connaître la forme de l'inconnue auxiliaire, c'est-à-dire sa relation avec les autres inconnues.

Exemple I. — Résoudre le système des quatre équations

$$\begin{aligned} x + y + z &= d,\\ t + x + y &= c,\\ z + t + x &= b,\\ y + z + t &= a, \end{aligned}$$

renfermant les quatre inconnues x, y, z, t. Comme chaque équation donne la valeur de la somme de trois inconnues consécutives, si je connaissais la somme des quatre inconnues, j'en déduirais facilement la valeur de chacune de ces quantités. Or, en additionnant membre à membre les équations données, je trouve

$$3(x + y + z + t) = a + b + c + d,$$

et, par suite,

$$x + y + z + t = \frac{a + b + c + d}{3}.$$

Je soustrais maintenant chacune des équations proposées de la précédente, et j'obtiens

$$t = \frac{a+b+c+d}{3} - d,$$

$$z = \frac{a+b+c+d}{3} - c,$$

$$y = \frac{a+b+c+d}{3} - b,$$

$$x = \frac{a+b+c+d}{3} - a.$$

4. — Usage de la théorie des rapports égaux.

EXEMPLE II. — Résoudre les équations

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

$$x + y = c.$$

Je mets d'abord la première sous la forme (6, Th. III)

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

puis j'en déduis (6, Th. VI)

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b},$$

mais $x + y$ est égal à c, on a donc

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{a+b} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ac}{a+b},$$

$$\frac{y}{b} = \frac{c}{a+b} \quad \text{d'où} \quad y = \frac{bc}{a+b}.$$

Les mêmes théorèmes permettent de résoudre les équations :

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

$$x - y = c.$$

EXEMPLE III. — Résoudre les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$x + y + z = d.$$

Si la commune valeur des fractions $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, était connue, je la multiplierais successivement par les dénominateurs a, b, c, et les trois produits seraient les valeurs respectives des inconnues x, y, z ; il s'agit donc de trouver la valeur du rapport $\frac{x}{a}$. Or, les trois fractions $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, étant égales, la fraction $\frac{x+y+z}{a+b+c}$ ou $\frac{d}{a+b+c}$ représente leur valeur commune (6, II) ; on a dès lors

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{d}{a+b+c},$$

et, par suite

$$x=\frac{ad}{a+b+c},$$
$$y=\frac{bd}{a+b+c},$$
$$z=\frac{cd}{a+b+c}.$$

Exemple IV. — Résoudre les équations

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$
$$mx+ny+pz=r.$$

En appliquant un théorème précédemment démontré sur une suite de fractions égales (6, II, c), j'ai

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{mx+ny+pz}{ma+nb+pc},$$

ou

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{r}{ma+nb+pc};$$

il en résulte que

$$x=\frac{ar}{ma+nb+pc},$$
$$y=\frac{br}{ma+nb+pc}$$

et

$$z = \frac{cr}{ma + nb + pc}.$$

Exemple V. — Résoudre les équations

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c,$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = b,$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a.$$

Je prends pour inconnues auxiliaires les fractions $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, et je calcule leur somme en ajoutant les trois équations membre à membre ; je trouve ainsi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a + b + c}{2}.$$

De cette équation je retranche successivement chacune des équations données, et j'ai

$$\frac{1}{z} = \frac{a + b - c}{2},$$

$$\frac{1}{y} = \frac{a + c - b}{2},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{b + c - a}{2};$$

j'en déduis ensuite

$$z = \frac{2}{a + b - c},$$

$$y = \frac{2}{a + c - b},$$

$$x = \frac{2}{b + c - a}.$$

EXERCICES.

Résoudre les équations suivantes :

1°
$$5x - \frac{x}{2} - 282 = \frac{x}{3} + \frac{x}{4}.$$

(*Rép.* 72).

2°
$$\frac{6x}{5} + 74 + \frac{2x}{3} = \frac{4x}{3} + 82.$$

(*Rép.* 15).

3°
$$x^2 + a(b + c) = (a + x)(b + x) - \frac{a^2c}{b}.$$

$\left(\textit{Rép. } \frac{ac}{b}\right).$

4°
$$\frac{a(a + b - x)}{b - c} = \frac{bx + c(a - b)}{b + c}.$$

(*Rép.* $a + c$).

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1°
$$2x + 3y = 65,$$
$$5x - 2y = 20.$$

(*Rép.* $x = 10, \quad y = 15$).

2°
$$(x + 5)(y + 7) = 112 - (x + 1)(9 - y),$$
$$2x + 10 = 3y + 1.$$

(*Rép.* $x = 3, \quad y = 5$).

3°
$$bx + ay = 2ab,$$
$$ax + by = a^2 + b^2.$$

(*Rép.* $x = a, \quad y = b$).

4°
$$2(a - b)x - (a + b)y = a^2 - b^2,$$
$$(a + b)x - (a - b)y = 4ab.$$

(*Rép.* $x = a + b, \quad y = a - b$).

5°
$$x - y + z = 90,$$
$$4x - 2y + z = 75, \qquad 3x - y = -15$$
$$2x - 3y + z = 50. \qquad x - 2y =$$

(*Rép.* $x = 2, \quad y = 21, \quad z = 109$).

6°
$$\begin{aligned} x - ay + a^2z &= a^3, \\ x - by + b^2z &= b^3, \\ x - cy + c^2z &= c^3. \end{aligned}$$

(*Rép.* $x = abc$, $y = ab + bc + ac$, $z = a + b + c$).

7° — Déterminer les coefficients a, b, c, de telle sorte que les deux systèmes d'équations

$$\begin{aligned} ax - by + cz &= 2, \\ ax + by - cz &= 10, \\ ax + by + cz &= 22, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ 2x - y + 3z &= 9, \\ 5x + 2y - 3z &= 0, \end{aligned}$$

soient satisfaits par les mêmes valeurs des inconnues x, y et z.

(*Rép.* $a = 6$, $b = 5$ et $c = 3$).

8°
$$\begin{aligned} ax + b(y + z - t) &= a^2 + 3b^2, \\ ay + b(z + t - x) &= 2ab, \\ az + b(t + x - y) &= a^2 + 3ab - 2b^2, \\ at + b(x + y - z) &= a^2 - ab. \end{aligned}$$

On calculera d'abord la somme des inconnues, puis on en déduira

$$x = a, \quad y = b, \quad z = a + b \quad \text{et} \quad t = a - b.$$

9°
$$\begin{aligned} x + 5(y + z + t) &= 16, \\ 2y + 5(z + t + x) &= 17, \\ 3z + 5(t + x + y) &= 18, \\ 4t + 5(x + y + z) &= 19. \end{aligned}$$

On simplifie la résolution de ces équations en prenant la somme des inconnues pour inconnue auxiliaire.

(*Rép.* $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 1$).

10°
$$\begin{aligned} 5x + (y + z + t) &= 14, \\ 5y + 2(z + t + x) &= 26, \\ 5z + 3(t + x + y) &= 36, \\ 5t + 4(x + y + z) &= 44. \end{aligned}$$

Calculer d'abord la somme des inconnues, on trouvera

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3 \quad \text{et} \quad t = 4.$$

11°
$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=11,$$
$$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=16,$$
$$\frac{5}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}=2.$$

On prendra les quantités $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ pour inconnues auxiliaires, et l'on trouvera

$$x=1\quad y=2,\quad z=\frac{1}{3}.$$

12°
$$x+\frac{y}{a}=b,$$
$$y+\frac{z}{a}=c,$$
$$z+\frac{t}{a}=d,$$
$$t+\frac{x}{a}=e.$$

(*Rép.*
$$x=\frac{a(ba^3-ca^2+da-e)}{a^4-1},$$
$$y=\frac{a(ca^3-da^2+ea-b)}{a^4-1},$$
. . . .
. . . .)

Si on suppose
$$b=c=d=e,$$
on trouve
$$x=y=z=t=\frac{ab}{a+1}.$$

13°
$$(a+1)x+ay+(a-1)z=a,$$
$$(a+1)y+az+(a-1)x=a+2,$$
$$(a+1)z+ax+(a-1)y=7a-2.$$

On prendra la somme des inconnues pour inconnue auxiliaire, et on trouvera

$$x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{7}{3}-2a,\quad z=2a+\frac{1}{3}.$$

14°
$$\begin{aligned} x+y+z+t&=e,\\ u+x+y+z&=d,\\ t+u+x+y&=c,\\ z+t+u+x&=b,\\ y+z+t+u&=a. \end{aligned}$$

En désignant par s la somme des seconds membres de ces équations, on a

$$x=\frac{s}{4}-a,\quad y=\frac{s}{4}-b,\quad z=\frac{s}{4}-c,\quad t=\frac{s}{4}-d,\quad u=\frac{s}{4}-e.$$

15°
$$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ ax+by+cz&=d\\ a^2x+b^2y+c^2z&=d^2. \end{aligned}$$

On trouve

$$x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},$$
$$y=\frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)},$$

et

$$z=\frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$$

16°
$$\begin{aligned} ay+az&=xyz\\ bx+bz&=xyz\\ cy+cx&=xyz. \end{aligned}$$

On trouve

$$x=\sqrt{\frac{2abc(ab+ac-bc)}{(ab+bc-ac)(ac+bc-ab)}},$$
$$y=\sqrt{\frac{2abc(ab+bc-ac)}{(ab+ac-bc)(bc+ac-ab)}},$$
$$z=\sqrt{\frac{2abc(bc+ac-ab)}{(ab+ac-bc)(ab+bc-ac)}}.$$

ONZIÈME LEÇON

Programme. — Résolution des problèmes relatifs aux équations du premier degré.

I. — Résolution des problèmes.

La résolution d'un problème quelconque est en général composée de trois parties qui sont :

1° La *mise en équation*, c'est-à-dire la formation des équations qui lient les inconnues aux quantités données ;

2° La *résolution des équations* ;

3° La *discussion*, qui consiste dans la recherche des limites entre lesquelles les données peuvent varier pour que le problème soit possible, et dans l'examen des valeurs remarquables qu'elles peuvent avoir entre ces limites. Cette partie de la résolution d'un problème n'existe que si les données sont algébriques : car, lorsqu'elles sont numériques, on trouve pour les inconnues des nombres sur lesquels on ne peut faire aucune hypothèse, puisqu'ils sont déterminés.

Je vais traiter la première partie et la troisième. Quant à la deuxième, je ferai remarquer seulement qu'elle est l'objet du chapitre précédent ; car je suppose que le problème proposé conduit à des équations du premier degré.

II. — Mise en équation des problèmes.

1. — Lorsqu'on veut résoudre un problème, soit par l'algèbre, soit autrement, on doit d'abord étudier la nature et les propriétés des grandeurs dont il s'agit. Quand on connaît à l'avance la solution d'un problème, on sait en général vérifier si elle est exacte, en effectuant sur les données et la solution connue certaines opérations, qui devraient conduire à un résultat également connu par l'énoncé.

Ainsi quand on cherche un nombre qui surpasse ses trois cinquièmes de 12 unités : pour vérifier si 30 n'est pas le nombre cherché, il faudrait du nombre 30 retrancher ses trois cinquièmes, et voir si le reste n'est pas égal à 12, en un mot, il faudrait vérifier si l'on a l'égalité :

$$30 - 30 \times \frac{3}{5} = 12.$$

Si cette égalité est vraie, ce qui arrive, 30 est le nombre cherché. Ce nombre 30 n'étant pas connu à l'avance, désignons-le par x, nous pourrons toujours écrire l'égalité précédente en y remplaçant 30 par x, et nous aurons l'équation :

$$x - \frac{3}{5} \times x = 12.$$

Le nombre cherché est évidemment celui qui mis à la place de x rend égaux les deux membres, ou la racine de cette équation.

Règle. — Newton * a formulé la règle suivante pour mettre un problème en équations : *on représente par une ou plusieurs lettres le nombre ou les nombres inconnus, on écrit, à l'aide de ces lettres, la suite des égalités entre les données et les résultats qui devraient être vérifiées pour que ces résultats soient ceux que l'on cherche ; on obtient ainsi une ou plusieurs équations qui sont celles du problème ;* il n'y a plus qu'à les résoudre. Pour que le problème soit déterminé, il faut qu'il y ait autant d'équations que d'inconnues.

S'il y a plus d'équations que d'inconnues, pour que le problème soit possible, il faudra que les valeurs des inconnues, tirées d'un nombre d'équations égal au nombre des inconnues, vérifient toutes les autres équations, ce qui établit entre les données des *équations de condition.*

La règle de Newton revient souvent à écrire, au moyen des signes et des lettres qui représentent les inconnues, les di-

* Newton, géomètre anglais, qui a inventé le calcul infinitésimal, et découvert la loi de l'attraction universelle, né à Wolstrop, en 1642, mort en 1727.

verses phrases de l'énoncé. Toute phrase se traduit par une équation dont les deux membres sont le sujet et l'attribut, le verbe est traduit par le signe $=$.

Problème I. — *La date de l'invention de l'imprimerie est exprimée par un nombre de quatre chiffres. Le chiffre des unités est le double de celui des dizaines ; l'excès du chiffre des centaines sur celui des dizaines est égal au chiffre des mille ; la somme des quatre chiffres est égale à* 14 ; *enfin le nombre cherché augmenté de* 4905 *unités donne pour résultat un nombre formé des mêmes chiffres, mais dans l'ordre inverse.*

En représentant par m, c, d et u les chiffres des mille, centaines, dizaines et unités, les phrases successives de cet énoncé se traduisent par les équations :

$$u = 2d,$$
$$c - d = m,$$
$$m + c + d + u = 14,$$
$$1000\,m + 100\,c + 10\,d + u + 4905 = 1000\,u + 100\,d + 10\,c + m.$$

Pour écrire cette dernière équation, il faut songer que le chiffre m, placé au rang des mille, vaut m fois 1000 unités, de même pour les autres chiffres. On la simplifie en faisant passer tous les termes inconnus dans un membre, et divisant les deux membres par 9, elle devient alors :

$$111\,u + 10\,d - 10\,c - 111\,m = 545.$$

La résolution de ces quatre équations n'offre aucune difficulté, elle donne :

$$m = 1,\ c = 4,\ d = 3,\ u = 6\,;$$

donc la date de l'invention de l'imprimerie est 1436.

Problème II. — *Dans une voiture la roue de devant a* $0^{m},75$ *de rayon, et celle de derrière* $1^{m},2$: *quel est l'espace parcouru quand la première a fait* 480 *tours de plus que la seconde.*

Si nous désignons par x le nombre de tours fait par la roue de derrière, celle de devant en aura fait $480 + x$, chaque tour de l'une représente un espace parcouru égal à la circonférence de la roue $2\pi \times 1,2$, chaque tour de l'autre représente de même un espace parcouru égal à $2\pi \times 0,75$. Or d'après l'énoncé x tours de la roue de derrière font le même espace que $480 + x$ tours de la roue de devant, ce qui est exprimé par l'équation

$$2\pi \times 1,2 \times x = 2\pi \times 0,75\ (480 + x).$$

Supprimons aux deux membres le facteur commun 2π, et multiplions par 100, pour faire disparaître les virgules, il vient:

$$120\,x = 75 \times 480 + 75\,x,$$

d'où

$$45\,x = 75 \times 480,$$
$$3\,x = 5 \times 480,$$
$$x = 800.$$

Le nombre de tours exécuté par la roue de derrière étant 800, l'espace parcouru est $2\pi \times 1,2 \times 800$ ou 6032 mètres à un mètre près.

2. — Nous venons de voir deux applications très-simples de la règle donnée par Newton ; dans la plupart des problèmes, l'énoncé ne fournit pas toutes les équations, il y a des principes relatifs à chaque question, des théorèmes qui, traduits en écriture algébrique, donnent les autres équations. Un des principaux avantages de l'algèbre consiste en ce que, dans la mise en équation, il n'y a pas de différence à faire entre les données et les inconnues ; en arithmétique, pour résoudre un problème, il faut faire un raisonnement différent, selon que c'est telle ou telle quantité qui est inconnue ; en algèbre il n'y en a qu'un, et pour le faire on se placera dans les circonstances les plus favorables, on tirera ensuite des équations les valeurs de celles des lettres qui représentent les inconnues.

Problèmes d'intérêt simple.

Quand on cherche *l'intérêt simple* I produit par un *capital* a, placé au *taux* i, pendant le *nombre d'années* t, on trouve par une série de règles de trois simples et directes :

$$\mathrm{I} = \frac{ait}{100}.$$

Si c'est le capital qui est inconnu, il y a des règles de trois inverses, et le raisonnement devient plus difficile ; mais quand on traite le problème par l'algèbre, on fait le même raisonnement, qui conduit à la même équation, seulement c'est a qui est inconnu, et on trouve en résolvant l'équation

$$a = \frac{100\,\mathrm{I}}{it}.$$

En arithmétique on trouve aisément la somme b, que produit un capital a, augmenté de ses intérêts au taux i, au bout de t années :

$$b = a + \frac{ait}{100}.$$

Si c'est le capital a qui est inconnu, le problème devient plus difficile, et se résout à l'aide d'une fausse supposition ; en algèbre on fait le même raisonnement, qui conduit à la même équation, seulement on doit en tirer la valeur de a :

$$100\,b = 100\,a + ait,$$

transposons les membres, et mettons a en facteur commun :

$$a\,(100 + it) = 100\,b,$$

$$a = \frac{100\,b}{100 + it}.$$

Problèmes d'escompte.

L'*escompte* d'un billet, dont la *valeur nominale* est a, est l'intérêt de cette valeur nominale, pendant le nombre t d'années qui lui reste à courir, au taux i, c'est-à-dire, $\frac{ait}{100}$. La *valeur actuelle* b d'un billet est égale à la valeur nominale diminuée de l'escompte :

$$b = a - \frac{ait}{100}.$$

Supposons qu'on doive une somme b, actuellement exigible, et que ne pouvant payer, on souscrive, pour reculer le paiement, un billet payable au bout de t années, quelle sera sa valeur nominale ?

Soit a cette valeur nominale, nous avons entre b et a l'équation :

$$b = a - \frac{ait}{100},$$

et comme c'est a qui est l'inconnue, il faut la résoudre par rapport à a :

$$100\,b = 100\,a - ait,$$

$$a(100 - it) = 100\,b,$$

$$a = \frac{100\,b}{100 - it}.$$

Supposons encore qu'on veuille remplacer un billet a payable dans t années, par un billet a' payable dans t' années, le taux de l'escompte étant i, nous remarquerons qu'un billet, pour remplacer un autre, doit avoir la même valeur actuelle; nous aurons donc l'équation du problème en égalant les valeurs actuelles des deux billets :

$$a - \frac{ait}{100} = a' - \frac{a'it'}{100}.$$

Nous tirerons de cette équation la valeur de l'inconnue, a', t' ou i.

Problèmes d'alliage.

Le *titre* t d'un *alliage* est le rapport du poids a du métal le plus précieux au poids total A de l'alliage, ce qui donne l'équation

$$t = \frac{a}{\mathrm{A}},$$

d'où l'on tirera la solution de tous les problèmes relatifs à un seul alliage, si a est l'inconnue, on a

$$a = \mathrm{A}t,$$

si A est l'inconnue,

$$\mathrm{A} = \frac{a}{t}.$$

Si l'on fond ensemble deux alliages pesant A et A$'$, ayant pour titres t et t', T désignant le titre de l'alliage résultant; on aura l'équation du problème en écrivant que *le poids d'argent contenu dans l'alliage résultant, et exprimé au moyen de son titre* T, *est égal à la somme des poids d'argent contenus dans les deux alliages composants :*

$$(\mathrm{A} + \mathrm{A}')\mathrm{T} = \mathrm{A}t + \mathrm{A}'t'.$$

De là on tirera la valeur de la lettre inconnue, et s'il y a plusieurs inconnues, l'énoncé fournira les autres équations.

Problèmes de mélange.

Dans les problèmes de *mélange*, qui ressemblent beaucoup aux problèmes d'alliage, on obtiendra de même une équation en écrivant que *la somme des prix des substances mélangées est égale au prix du mélange*; on obtiendra le prix de chaque substance en multipliant par son poids ou son volume le prix de l'unité de poids ou de volume.

Quelquefois on écrira que *le poids du mélange est égal à la somme des poids des substances mélangées;* on obtiendra le poids de chaque substance en multipliant le poids de l'unité de volume par le volume de la substance.

Problèmes sur les densités.

Nous allons passer en revue quelques questions de *physique* auxquelles on peut appliquer l'algèbre. Nous commencerons par les *poids spécifiques,* qu'on appelle souvent, pour abréger, *densités.*

La densité d d'un corps est le rapport de son poids p au poids d'un égal volume d'eau, et comme en prenant pour unité de volume le centimètre cube, et pour unité de poids le gramme, le poids de l'eau a la même mesure que son volume, le poids d'un volume d'eau égal à celui du corps, aura même expression que le volume v du corps; on a donc par définition:

$$d = \frac{p}{v},$$

équation d'où l'on tire la solution de tous les problèmes, où il s'agit d'un corps seulement.

S'il s'agit du mélange de deux corps de densités différentes d et d', ayant pour poids p et p', pour volumes v et v', et que la densité du mélange soit D, on aura une équation du problème en écrivant que *le poids ou le volume du mélange est égal à la somme des poids ou des volumes des substances mélangées :*

$$(v + v')\mathrm{D} = vd + v'd',$$

ou bien

$$\frac{p + p'}{\mathrm{D}} = \frac{p}{d} + \frac{p'}{d'};$$

les poids s'exprimant en fonction des volumes, ou les volumes en fonction des poids par la formule $d = \frac{p}{v}$.

Remarque. — On appelle densité d'un gaz par rapport à l'air le rapport du poids du gaz au poids d'un égal volume d'air, dans les mêmes conditions de pression et de température ; or on sait qu'un litre d'air à 0°, et sous la pression d'une colonne de 76 centimètres de mercure, pèse 1gr,293. Si on appelle d la densité du gaz, v son volume exprimé en litres à 0° et sous la pression 76, p son poids, exprimé en grammes, on aura

$$p = 1{,}293 \times d \times v\,;$$

il y a ici une exception remarquable à la règle générale qui veut que, si l'on prend le centimètre cube pour unité de volume dans une question, on adopte le gramme pour unité de poids.

Problèmes sur le principe d'Archimède.

L'énoncé du principe d'Archimède, *tout corps, plongé dans un fluide, subit de la part de ce fluide une poussée de bas en haut égale au poids du fluide déplacé,* se traduit immédiatement en équation.

Équilibre des corps flottants. — Quand le corps plongé dans un fluide flotte, son poids est égal à la poussée qu'il subit, c'est-à-dire au poids du fluide déplacé ; ce principe donne immédiatement l'équation d'équilibre des corps flottants.

PROBLÈME III. — *Un bloc de glace de forme prismatique, dont la base est horizontale, flotte dans la mer, et sa base supérieure s'élève de 24 mètres au dessus de la surface, quelle est la hauteur de ce bloc, en supposant la densité de la glace égale à* 0,8 *et celle de l'eau de mer égale à* 1,026 ?

Soit x la hauteur du bloc, celle de la partie plongée sera $x - 24$, soit b la base ; le volume du bloc sera bx et son poids $bx \times 0{,}8$, le volume de l'eau déplacée sera $b(x - 24)$ et son poids $b(x - 24) \times 1{,}026$. Le poids du bloc étant égal au poids du liquide déplacé, nous avons :

$$b(x - 24) \times 1{,}026 = bx \times 0{,}8.$$

Nous pouvons diviser les deux membres par b, qui disparaît de l'équation, cela prouve que le bloc aura la même hauteur quelle que soit la base ; résolvons l'équation, il vient :

$$\begin{aligned} 1{,}026x - 0{,}8x &= 24 \times 1{,}026, \\ 0{,}226x &= 24{,}624, \\ 226x &= 24624, \\ x &= 109\,; \end{aligned}$$

la hauteur totale du prisme de glace est 109 mètres, il plonge de 85 mètres.

Problèmes sur l'équilibre des liquides.

Quand un liquide est en équilibre, les pressions exercées sur l'unité de surface en divers points d'une même section horizontale sont égales, pourvu que cette section traverse partout le même liquide, dans le cas des liquides superposés dans des vases communiquants. Ce principe fournit une équation en égalant les pressions sur l'unité de surface en deux points différents d'une section horizontale.

PROBLÈME IV. — *Un cylindre de rayon* R *est plein d'un liquide de densité* d *jusqu'à une hauteur* h, *on applique à la surface du liquide un piston de poids* p *dont on néglige le frottement, il est percé d'un trou surmonté d'un tube cylindrique de rayon* r; *de combien descendra le piston, et de combien le liquide montera-t-il dans le tube au dessus de son ancien niveau.*

La pression p s'exerce sur une couronne circulaire égale à $\pi(\mathrm{R}^2 - r^2)$, sur chaque unité de cette couronne elle est donc $\frac{p}{\pi(\mathrm{R}^2 - r^2)}$. Soit x la quantité dont le piston s'enfonce, et y la quantité dont le liquide s'élève au dessus de son ancien niveau dans le tube, sur chaque unité de la base du tube située dans le même plan horizontal que la couronne, la pression exercée est égale au poids d'une colonne liquide de base 1, de hauteur $x + y$ et de densité d, ou $(x + y)d$. En égalant ces pressions, nous aurons l'équation

$$(1) \qquad (x+y)\,d = \frac{p}{\pi(\mathrm{R}^2 - r^2)},$$

qui donne la différence de niveau totale $x + y$, les deux membres étant exprimés en fonction de la même unité, les longueurs en centimètres, les poids en grammes. Pour déterminer les deux inconnues, nous écrirons que le volume du liquide n'a pas changé. Au commencement, il remplissait le cylindre $\pi\mathrm{R}^2 h$, à la fin, il remplit le cylindre $\pi\mathrm{R}^2(h-x)$, plus le cylindre $\pi r^2(x+y)$, égalons ces expressions :

$$\pi\mathrm{R}^2 h = \pi\mathrm{R}^2(h - x) + \pi r^2(x + y),$$

divisons par π

$$R^2h = R^2h - R^2x + r^2x + r^2y,$$

$$(2) \qquad (R^2 - r^2)x = r^2y.$$

Il reste à résoudre les équations (1) et (2).

Problèmes sur les dilatations.

Si on appelle k le *coefficient de dilatation linéaire* d'un solide, c'est-à-dire, la quantité dont s'allonge une barre d'un mètre portée de 0° à 1°, on voit en physique que, portée de 0° à t°, une barre de longueur l s'allonge de lkt, et qu'en appelant l' sa longueur à t°, on a :

$$l' = l(1 + kt).$$

Telle est l'équation qu'on a dans tous les problèmes sur les dilatations linéaires. Si on appelle v le volume d'un corps à 0°, v' son volume à t°, k son coefficient de dilatation cubique, on a de même :

$$v' = v(1 + kt).$$

PROBLÈME V. — *Un ballon de verre contient un poids* P *de mercure à* 0°, *on le chauffe à une température inconnue, il en sort* p *grammes de mercure ; quelle est cette température?*

Soit v le volume du ballon à 0°, k le coefficient de dilatation du verre, k' celui du mercure, d sa densité, t la température inconnue ; à t° le volume du verre devient $v(1 + kt)$, celui du mercure $v(1 + k't)$, il est sorti du ballon, puisque k' est plus grand que k, un volume de mercure marqué par $v(1 + k't) - v(1 + kt)$ ou $v(k' - k)t$, qui réduit à 0° deviendrait $\frac{v(k' - k)t}{1 + k't}$, et pèse par conséquent $\frac{v(k' - k)td}{1 + k't}$; or, d'après l'énoncé du problème, ce poids est égal à p, on a donc l'équation :

$$\frac{v(k' - k)td}{1 + k't} = p.$$

Le volume v du mercure à 0° n'est pas donné, mais nous avons son poids P, on a donc :

$$d = \frac{P}{v},$$

d'où

$$v = \frac{P}{d}.$$

Substituons à v cette valeur dans l'équation précédente :

$$\frac{P(k'-k)t}{1+k't}=p.$$

Il reste à tirer de cette équation la valeur de t.

Problèmes sur les chaleurs spécifiques et latentes.

En appelant c la capacité calorifique d'un corps, ou la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température d'un kilogramme de ce corps, pour élever la température de p kilogrammes depuis $t°$ jusqu'à $t'°$, il faut $pc(t'-t)$ unités de chaleur. Arrivé à une certaine température, tout corps solide entre en fusion, et absorbe λ unités de chaleur par kilogramme, sans que la température s'élève, λ s'appelle la chaleur latente de fusion du corps, et p kilogrammes absorbent $p\lambda$ unités pour passer à l'état liquide, le même phénomène se reproduit à une autre température pour le passage de l'état liquide à l'état gazeux, et il y aura, sans que la température s'élève, absorption de $p\lambda'$ unités de chaleur, λ' est la chaleur latente de vaporisation.

On obtiendra l'équation des problèmes où l'on mélange deux corps à des températures différentes, en écrivant que *la chaleur gagnée par l'un d'eux est égale à la chaleur perdue par l'autre ; dans le calcul de ces quantités, il faut tenir compte de la chaleur latente, si l'un des corps subit un changement d'état, et du changement que peut éprouver sa capacité calorifique.*

PROBLÈME VI. — *On mélange dans un calorimètre un poids* p *de glace à* t° *au dessous de* 0°, *avec un poids inconnu d'eau à* t'° *au dessus, la température du mélange devient* θ *au dessus de* 0° : *trouver le poids de l'eau, sachant que la chaleur spécifique de la glace est* 0,5 *celle de l'eau étant* 1, *et la chaleur latente de fusion* 79.

La chaleur gagnée par la glace de $t°$ à 0° est $p\times 0,5\times t$, là elle se fond et absorbe $p\times 79$ unités de chaleur; une fois passée à l'état d'eau, pour s'élever à $\theta°$, elle absorbe encore $p\theta$ unités de chaleur, sa capacité calorifique étant devenue 1; la quantité totale de chaleur gagnée par la glace est donc :

$$p\times 0,5\times t+p\times 79+p\theta.$$

La température de l'eau, de t'° à θ°, s'abaisse de $t' - \theta$ degrés, soit x le poids inconnu de l'eau, la quantité de chaleur qu'elle perd est

$$x(t' - \theta),$$

on a donc, pour calculer x, l'équation :

$$p(0{,}5t + 79 + \theta) = x(t' - \theta).$$

Si x était donnée, et qu'une autre quantité fût inconnue, on n'aurait qu'à tirer sa valeur de la même équation.

PROBLÈME VII. — *On fait condenser dans un poids* p' *d'eau à* t'°, *un poids* p *de vapeur à* t°, t *étant plus grand que* 100 ; *trouver la température finale du mélange.*

On donne en physique, pour trouver la quantité de chaleur qu'absorbe un kilogramme d'eau à 0°, en passant à l'état de vapeur à t°, la formule empirique : $606 + 0{,}305\, t$. Si le poids p de vapeur descendait à 0°, il perdrait donc $(606 + 0{,}305\, t)p$; mais il ne descend qu'à la température finale x du mélange, il perdra donc px de moins, ainsi la quantité de chaleur perdue est :

$$(606 + 0{,}305t) \times p - px.$$

La quantité de chaleur gagnée par le poids p' d'eau, qui s'élève de t'° à x°, est $p'(x - t')$, on a donc l'équation :

$$p'(x - t') = p(606 + 0{,}305t - x),$$

d'ou l'on tirera la valeur de x, on en tirerait la valeur de toute autre lettre inconnue, si x était donné.

Problèmes sur la loi de Mariotte.

L'énoncé de la loi de Mariotte « *les volumes d'une même masse de gaz sont en raison inverse des pressions qu'elle supporte* » se traduit immédiatement en une équation.

PROBLÈME VIII. — *Dans un manomètre en* U *à air comprimé dont les deux branches ont pour section* b, *l'air occupe* 100 *divisions d'égal volume et d'un centimètre de longueur, quand le mercure est en équilibre dans les deux branches sous une pression extérieure égale à* 76 *centimètres de mercure, de combien s'élève le niveau du mercure dans la branche fermée, quand on exerce dans la branche ouverte une pression de* 108 *centimètres ?*

Soit x la quantité dont le mercure s'élève dans la branche fermée ; il descend de x dans la branche ouverte, la différence des niveaux du mercure devient $2x$, la pression du gaz $108-2x$ et son volume $b(100-x)$, le volume primitif était $b \times 100$ et la pression 76, on a donc d'après la loi de Mariotte l'équation

$$\frac{b \times 100}{b(100-x)} = \frac{108-2x}{76} ;$$

équation du second degré que nous apprendrons à résoudre plus tard ; on voit que la section b du tube disparaît, comme facteur commun.

PROBLÈME IX. — *Dans un manomètre en* U *à air comprimé, dont les deux branches ont pour section* b, *l'air à* t° *occupe* 100 *divisions d'égal volume et d'un centimètre de longueur, sous la pression* 76, *le mercure étant au même niveau dans les deux branches. De combien descendra le niveau dans la branche fermée, quand on portera la température de l'air à* t'° ?

Soit v le volume d'une masse de gaz à $t°$ sous la pression p, sous la même pression à 0°, il deviendra $\frac{v}{1+kt}$, et à $t'°$ $\frac{v(1+kt')}{1+kt}$; sous la pression 1, il deviendrait p fois plus fort $\frac{v(1+kt')p}{1+kt}$, et, sous la pression p', il serait p' fois plus petit $\frac{v(1+kt')p}{(1+kt)p'}$, en appelant v' le volume à $t'°$ et sous la pression p', on a donc

$$v' = \frac{v(1+kt')p}{(1+kt)p'},$$

ou

$$\frac{v'}{v} = \frac{(1+kt')p}{(1+kt)p'};$$

d'où le théorème : *les volumes d'une même masse de gaz sont directement proportionnels aux binômes de dilatation, et inversement proportionnels aux pressions qu'ils supportent.*

Soit x la quantité dont le mercure descend dans la branche fermée, il monte de x dans la branche ouverte, la différence des niveaux du mercure devient $2x$, la pression du gaz devient

$76 + 2x$, et le volume $100 + x$, on a donc d'après le théorème précédent :

$$\frac{100 + x}{100} = \frac{1 + kt'}{1 + kt} \times \frac{76}{76 + 2x}$$

L'équation est encore du second degré *.

Mélange des gaz et des vapeurs.

Dans les problèmes sur le mélange des gaz et des vapeurs, la pression de la vapeur ne fait que s'ajouter à la pression du gaz considéré comme remplissant tout l'espace, pour former la pression totale.

Problème X. — *De l'air saturé à 0° occupe un volume de 5 litres sous la pression de 76 cent. de mercure ; saturé à 30°, il occupe un volume de 8 litres, quelle est la pression de l'air? On sait que la tension maxima de la vapeur d'eau est de 4^mm^ à 0° et de 31^mm^ à 30°.*

A 0° la pression de l'air est égale à $76^c - 0^c,4$ ou 75,6 à 30° elle est $x - 3^c,1$, en appelant x la pression du mélange. Les volumes 5 et 8 étant en raison inverse des pressions 75,6 et $x - 3,1$, nous aurons l'équation

$$\frac{5}{8} = \frac{x - 3,1}{75,6},$$

d'où nous tirerons

$$x = 50^c, 35\ *.$$

Problèmes de mécanique.

Tous les théorèmes de mécanique se traduisent immédiatement en équations.

Mouvement uniforme. — Dans un mouvement uniforme, on appelle *vitesse* le rapport constant de l'espace e parcouru au temps t employé à le parcourir, c'est aussi l'espace parcouru dans l'unité de temps :

$$v = \frac{e}{t},$$

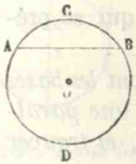
* Dans la plupart des problèmes de physique, il faut, pour se guider dans la mise en équations, faire une figure, qui représente l'appareil au commencement, et à la fin de l'expérience.

d'où

$$e = vt.$$

Cette équation sert à résoudre tous les problèmes sur le mouvement uniforme.

PROBLÈME XI. — *Une circonférence est divisée en 360 degrés. Deux mobiles, que nous appellerons* A *et* C, *partent des points* A *et* C, *distants de* n°, *parcourent la circonférence uniformément dans le sens de* A *vers* C, *le premier dans le temps* a, *le second dans le temps* c; *au bout de combien de temps* A *sera-t-il en avance sur* C *de* n'° ?



Soit t ce temps, x le nombre de degrés parcouru par le courrier C arrivé en B, le courrier A arrivé en D aura parcouru $n + x + n'$; or le courrier C parcourt dans l'unité de temps $\frac{360}{c}$ qui est sa vitesse, celle de A est de même $\frac{360}{a}$, nous aurons donc les deux équations

$$x = \frac{360}{c}\,t$$

$$n + n' + x = \frac{360}{a}\,t$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{ac(n+n')}{360(c-a)}$$

$$x = \frac{a(n+n')}{c-a}.$$

Mouvement uniformément accéléré. — En appelant v_0 la vitesse initiale, g l'accélération, v la vitesse et e l'espace parcouru au bout du temps t, on a trouvé en mécanique les équations :

$$v = v_0 + gt$$

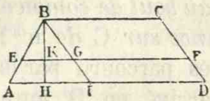
$$e = v_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

qui serviront à résoudre tous les problèmes sur le mouvement uniformément accéléré.

Problèmes de géométrie.

Dans les problèmes de géométrie, les équations entre les données et les inconnues se tirent de la théorie des lignes proportionnelles, et des théorèmes qui en résultent sur les propriétés du triangle rectangle ou quelconque, des cordes et des sécantes menées d'un même point à la circonférence; quelquefois, pour abréger, on égale deux expressions d'une même surface. Pour obtenir des triangles semblables, il y aura à faire des constructions, qu'il est difficile d'indiquer d'une manière générale. Nous nous bornerons à quelques cas qui se présentent fréquemment.

PROBLÈME XII. — *Mener dans un trapèze dont les bases sont* a *et* b, *la hauteur* h, *une parallèle aux bases de longueur* l, *et trouver sa distance à la base* a.



Soit AD la base a, BC la base b, EF la parallèle de longueur l, BH la hauteur h. *Dans presque tous les problèmes sur le trapèze, on mène par une extrémité* B *de la petite base, une parallèle* BI *à l'un des côtés non parallèles, on obtient un triangle* ABI *qui a pour côtés les deux côtés non parallèles du trapèze, et pour base* AI *égale à* AD — DI *ou* AD — BC, *c'est la différence des bases* a — b. *Ce triangle intercepte sur la parallèle* EF *une longueur* EG *égale à* EF — GF *ou* EF — BC *ou* l — b. *Les deux triangles* ABI *et* EBG *sont semblables, et on obtient une équation, en écrivant que le rapport de leurs hauteurs est égal à celui de leurs bases;*

$$\frac{BK}{BH} = \frac{EG}{AI}.$$

Il faut remplacer les longueurs par leurs expressions algébriques ; en appelant x l'inconnue KH, on a $BK = h - x$, et l'équation devient :

$$\frac{h-x}{h} = \frac{l-b}{a-b}$$

$$1 - \frac{x}{h} = \frac{l-b}{a-b}$$

$$\frac{x}{h} = \frac{a-b-(l-b)}{a-b} = \frac{a-l}{a-b}$$

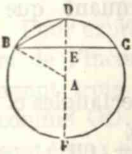
$$x = \frac{h(a-l)}{a-b}.$$

La mise en équation serait plus rapide en écrivant que la surface du trapèze ABCD est égale à la somme des surfaces des trapèzes AEFD et EBCF.

$$\frac{(a+b)h}{2}=\frac{(a+l)x}{2}+\frac{(l+b)(h-x)}{2};$$

mais l'équation est plus compliquée.

PROBLÈME XIII. — *Trouver le rayon d'une circonférence, connaissant la longueur* a *d'une corde, et celle* b *de la flèche de l'arc qu'elle sous-tend.*



Nous supposons le problème résolu, c'est-à-dire que nous traçons une circonférence, une corde CB que nous supposons égale à a, et sa flèche $DE = b$ perpendiculaire au milieu de la corde. *Dans tout problème relatif à une figure inscrite, il y a généralement un diamètre qui la partage en deux parties symétriques, en joignant ses deux extrémités à un point de la circonférence, on obtient un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le diamètre, auquel on applique les théorèmes : chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse; la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.*

La flèche DE prolongée donne le diamètre FD, tirons BF et BE ; dans le triangle rectangle BFD, nous aurons :

$$\overline{BE}^2 = DE \times EF,$$

et, en appelant x le rayon cherché,

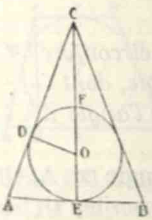
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b(2x-b),$$

$$\frac{a^2}{4} = 2bx - b^2,$$

d'où

$$x = \frac{a^2+4b^2}{8b}.$$

PROBLÈME XIV. — *Circonscrire à une circonférence de rayon* r *un triangle isocèle dont le côté soit égal à* m *fois la base.*



Dans tout problème sur les figures circonscrites à une circonférence, il faut se rappeler que les tangentes menées d'un même point à la circonférence sont égales, et que la tangente menée d'un point extérieur est moyenne proportionnelle entre la sécante issue du même point et sa partie extérieure.

Désignons par r le rayon, par x la moitié AE de la base AB, par y la hauteur CE, menons du centre le rayon OD perpendiculaire à AC, qui aboutit au point de contact, et désignons CD par z.

La traduction de l'énoncé est, en remarquant que $AD = AE = x$,

$$(1) \qquad z + x = 2mx.$$

Les triangles COD et CAE semblables, comme rectangles et ayant en C un angle commun, donnent $\frac{AE}{OD} = \frac{CE}{CD}$, ou

$$(2) \qquad \frac{x}{r} = \frac{y}{z}.$$

La propriété de la tangente donne $\overline{CD}^2 = \overline{CE} \times \overline{CF}$, ou

$$(3) \qquad z^2 = y(y - 2r).$$

L'équation (1) donne

$$x = \frac{z}{2m - 1}.$$

L'équation (2) devient après la substitution

$$z^2 = (2m - 1)ry.$$

L'équation (3) devient à son tour

$$(2m - 1)ry = y(y - 2r).$$

Divisons par y, ce qui supprime la solution absurde $y = 0$, nous aurons

$$y = r(2m + 1).$$

Portons cette valeur dans l'équation précédente, il vient

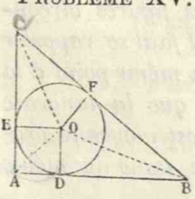
$$z^2 = r^2(4m^2 - 1),$$

d'où (7, Th. II.)

$$z = r\sqrt{4m^2 - 1},$$

$$x = r\sqrt{\frac{2m + 1}{2m - 1}}.$$

Problème XV. — *Trouver le rayon de la circonférence inscrite à un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est* a, *et les côtés de l'angle droit sont* b *et* c.



Soit ABC un triangle rectangle en A, O le centre de la circonférence inscrite, D, E et F les trois points de contact, les tangentes issues d'un même point étant égales, nous aurons

$$BD = BF,$$
$$CE = CF,$$

ajoutant membre à membre

$$BD + CE = BC.$$

Pour exprimer les deux membres en fonction des trois côtés, et de l'inconnue, nous remarquerons que la figure ADOE, ayant trois angles droits en A, D et E, est un rectangle, et comme OD est égal à OE, c'est un carré dont tous les côtés sont égaux au rayon inconnu r, alors BD est égal à AB — AD ou $c - r$, CE est égal à CA — AE ou $b - r$, et l'équation devient

$$c - r + b - r = a$$

d'où

$$r = \frac{b + c - a}{2}.$$

Ici encore, on aurait pu remarquer que la surface du triangle est la somme des surfaces des trois triangles AOB, BOC et COA, qui ont pour bases les trois côtés, et pour hauteur le rayon inconnu, en égalant cette somme à l'expression de la surface, on aurait eu

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{bc}{2},$$

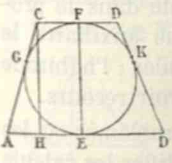
d'où

$$r = \frac{bc}{a + b + c},$$

expression équivalente à la précédente, en vertu de la relation

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Problème XVI. — *Circonscrire à une circonférence de rayon* r, *un trapèze isocèle dont la surface soit égale au double du carré construit sur le diamètre.*



Soit EF le diamètre d'une circonférence ayant pour centre O et pour rayon r, menons deux tangentes AE et CF, et une troisième ligne AC tangente en G, si nous replions cette figure autour de EF elle viendra prendre une position symétrique EFBD, et nous aurons un trapèze isocèle circonscrit à la circonférence, supposons que ce soit le trapèze cherché.

Désignons par x la moitié AE de la grande base, par y la moitié CF de la petite, par z le côté CA ; l'énoncé donne l'équation

$$\frac{(2x+2y)2r}{2}=2\times4r^2,$$

ou

$$(1)\qquad x+y=4r.$$

Les tangentes issues d'un même point étant égales, nous aurons $AG=AE$, $GC=CF$, et en ajoutant membre à membre $AC=AE+CF$, ou

$$(2)\qquad z=x+y.$$

Enfin menons CH parallèle au côté EF du trapèze birectangle ACEF, nous aurons un triangle rectangle ACH, dans lequel $\overline{AC}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}^2$, AH étant égal à la différence des bases x et y, donc

$$(3)\qquad z^2=4r^2+(x-y)^2,$$

z est immédiatement connu, puisqu'il est égal à $x+y$,

$$z=4r,$$

l'équation (3) devient :

$$16r^2=4r^2+(x-y)^2,$$

d'où

$$(4)\qquad x-y=r\sqrt{12}.$$

Résolvons les équations à deux inconnues (1) et (4) par la méthode d'addition et de soustraction, elles donnent

$$x=r(2+\sqrt{3}),$$
$$y=r(2-\sqrt{3}).$$

Inconnues auxiliaires. — Il arrive souvent que la mise en équations d'un problème est simplifiée par l'emploi d'*inconnues auxiliaires,* nous en avons un exemple dans le problème XI, où nous avons pris pour inconnue auxiliaire le nombre de degrés parcouru par l'un des mobiles ; l'habitude seule apprendra quand et comment il faut y avoir recours.

Choix des notations. — Dans tous les problèmes où les données sont indéterminées, on pourra simplifier les calculs en les représentant par des lettres convenablement choisies.

PROBLÈME XVII. — *Une niche se compose d'un demi-cylindre, dont la hauteur est égale au diamètre, surmonté* *d'un quart de sphère de même rayon, déterminer ce rayon de manière que la niche ait un volume donné.*

Désignons par x le rayon inconnu, et représentons le volume donné par celui d'une sphère de rayon r, l'équation du problème est

$$\pi x^3 + \frac{\pi x^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3},$$

ou

$$x^3 = r^3,$$

d'où

$$x = r.$$

On voit comment le choix de $\frac{4\pi r^3}{3}$ pour représenter le volume donné a fait disparaître le facteur π, et fait apercevoir ce théorème que le rayon de la niche est égal au rayon de la sphère qui aurait même volume.

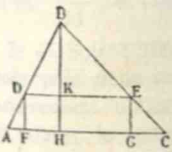
III. — Résolution des équations.

Cette partie de la résolution des problèmes a été traitée dans les trois leçons qui précèdent, lorsque les équations sont du premier degré.

IV. — Discussion.

Nous avons déjà vu que discuter un problème c'est étudier les circonstances remarquables que peuvent présenter les valeurs des inconnues, quand on fait varier la grandeur des données, et chercher les limites entre lesquelles les données peuvent varier pour que le problème soit possible. Les leçons suivantes auront pour objet l'étude de ces circonstances remarquables et la recherche de ces limites, c'est seulement après que nous pourrons discuter complétement un problème.

Problème XVIII. — *Inscrire dans un triangle de base* b *et de hauteur* h *un rectangle ayant un périmètre donné* 2p.



Soit ABC le triangle donné, DEFG le rectangle inscrit, menons la hauteur BH qui coupe DE en K. Désignons par x le côté DE du rectangle, et par y sa hauteur DF ou KH ; l'énoncé donne d'abord l'équation

$$2x + 2y = 2p$$

ou

$$x + y = p.$$

Les triangles ABC et DBE étant semblables, le rapport des hauteurs est égal au rapport des bases, et l'on a

$$\frac{BK}{BH} = \frac{DE}{AC}$$

ou

$$\frac{h - y}{h} = \frac{x}{b}.$$

En retranchant ces fractions terme à terme, on a une fraction égale

$$\frac{x}{b} = \frac{x + y - h}{b - h}$$

or $x + y$ est égal à p, on a donc

$$x = \frac{b(p - h)}{b - h},$$

$$y = \frac{h(b - p)}{b - h}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut, si nous supposons $b > h$, que p soit compris entre h et b; si nous supposions $b < h$, toutes les soustractions auraient dû être faites en sens inverse, et p devrait encore être compris entre h et b. Ainsi la moitié du périmètre a pour plus petite valeur h et pour plus grande valeur b, ou inversement. Dans ces deux cas, une des dimensions du rectangle devenant nulle, il se réduit à une ligne droite.

Si nous supposons $x = y$, nous aurons le carré inscrit, mais alors le périmètre ne peut plus être donné, p est inconnu, et donné par l'équation

$$\frac{b(p - h)}{b - h} = \frac{h(b - p)}{b - h},$$

d'où

$$p = \frac{2bh}{b + h}.$$

Le périmètre du carré inscrit est donc $\frac{4bh}{b + h}$.

EXERCICES.

1° — Partager 140 en deux parties, dont l'une, augmentée de 10, égale le cinquième de l'autre.

(*Rép.* 125 et 15).

2° — Distribuer 9,400 fr. à deux personnes, de sorte que l'une n'ait que les $\frac{15}{32}$ de la part de l'autre.

(*Rép.* 3000 et 6,400).

3° — Une personne, pour s'acquitter d'une dette, a donné à son créancier deux billets, l'un de 846 fr., payable dans 8 mois, et l'autre de 564 fr., payable dans 11 mois. Trois mois plus tard, elle offre à son créancier de remplacer ces deux billets par un seul, payable dans un an. Celui-ci accepte la proposition, à la condition que ce billet sera de 1,453 fr. 50 c. A quel taux d'intérêt prête-t-il son argent?

(*Rép.* 6 p. 100).

4° — Combien faut-il placer de pièces de 20 fr. et de 40 fr. en ligne droite pour former la longueur du mètre avec 40 de ces pièces, en sachant que leurs diamètres sont respectivement égaux à $0^m,021$ et $0^m,026$.

(*Rép.* 8 pièces de 20 fr., 32 de 40 fr.).

5° — Une personne place les $\frac{2}{5}$ d'un certain capital à 3 p. 100 et le reste à 4 1/2 p. 100. Quelle est la valeur de ce capital, qui produit une rente de 1950?

(*Rép.* 50,000).

6° — Lorsque les aiguilles d'une montre sont en ligne droite entre deux heures et trois heures, quelle heure cette montre indique-t-elle?

(*Rép.* 2 h. 10 m. $\frac{10}{11}$, si les aiguilles coïncident, et 2 h. 43 m. $\frac{7}{11}$, si l'une est dans le prolongement de l'autre).

7° — Soient 1000^{mq}, 1500^{mq}, 2000^{mq}, les grandeurs respectives de trois prés dans lesquels l'herbe est d'égale hauteur et croît d'un mouvement uniforme. Le premier pré a nourri 5 bœufs pendant 10 jours; le second 6 bœufs pendant 15 jours. On demande pendant combien de jours le troisième pré pourra nourrir 9 bœufs. (Emprunté à l'arithmétique universelle de Newton).

(*Rép.* 12).

8° — L'eau sort d'un réservoir par deux ouvertures, avec des vitesses différentes. Les grandeurs des orifices sont dans le rapport de m à n, et les vitesses de l'écoulement dans le rapport de p à q. On sait, de plus, que la dépense par la première ouverture surpasse, dans un certain temps, celle de l'autre, de a mètres cubes d'eau. Combien d'eau chacun de ces deux orifices donne-t-il pendant ce même temps?

(*Rép.* La première ouverture donne $\dfrac{amp}{mp - nq}$ mètres cubes d'eau, et la seconde $\dfrac{anq}{mp - nq}$).

Appliquer les formules de ce problème au cas particulier suivant:

$$n = 5, \quad m = 13, \quad q = 8, \quad p = 7, \quad a = 561.$$

La première ouverture donne 1001 mètres cubes et la seconde 440.

9° — Un paquebot, partant de Douvres avec un vent favorable, arrive à Calais en 2 heures. A son retour, le vent lui étant contraire, il fait par heure 1 mille de moins que pendant la première traversée. Lorsqu'il est arrivé au milieu de sa course, le vent change et augmente sa vitesse de 4 milles. Aussi ce paquebot rentre plus tôt à Douvres qu'il n'y serait arrivé si le vent n'eût pas changé la seconde fois dans le rapport de 6 à 7. Quelle est la distance de Calais à Douvres et quelles sont les vitesses du paquebot dans la seconde traversée?

(*Rép.* Distance, 22 milles; vitesses, 10 et 14 milles).

10° — On prend trois ouvriers A, B, C, pour faire un certain travail. En travaillant ensemble, A et B le feraient en f jours; C et A en e jours; B et C en d jours. Combien faudrait-il de jours: 1° à chaque ouvrier, travaillant seul; 2° aux trois ouvriers réunis, pour faire cet ouvrage?

(*Rép.* Il faudra à A $\dfrac{2def}{de+df-ef}$ jours, à B $\dfrac{2def}{de+ef-df}$ jours, à C $\dfrac{2def}{df+ef-de}$ jours, et aux trois ouvriers réunis $\dfrac{2def}{de+df+ef}$ jours).

11° — Quels poids faut-il prendre de deux alliages d'argent et de cuivre pour former 500 grammes d'un autre alliage au titre 0,9, sachant que, pour une partie de cuivre, l'un des alliages donnés contient 8 parties d'argent et l'autre 10?

(*Rép.* 225^g du premier et 275^g du second).

12° — On sait que les densités du plomb, du liége et du bois de sapin sont respectivement égales aux nombres 11 325, 0,24 et 0,45. On demande de composer avec du plomb et du liége un corps qui pèse 80 kilogrammes, et ait le même volume qu'un morceau de sapin de même poids, de sorte qu'il puisse surnager dans l'eau. Combien faudra-t-il prendre de plomb et de liége ?

(*Rép.* $38^k,14...$ de plomb, et $41^k,85...$ de liége.)

13° — Un orfèvre a trois lingots dont chacun est composé d'or, d'argent et de cuivre. Le premier lingot contient 1 kilogramme d'or 3 kilogrammes d'argent et 6 kilogrammes de cuivre ; le second est formé de 4 kilogrammes d'or, de $5^k,6$ d'argent et de $9^k,6$ de cuivre, et le troisième, de $2^k,4$ d'or, de $7^k,8$ d'argent et de $4^k,8$ de cuivre. Combien doit-il prendre de kilogrammes dans chacun de ces lingots, pour en composer un quatrième qui contienne 2 kilogrammes d'or, $4^k,6$ d'argent et $5^k,2$ de cuivre.

(*Rép.* 2 kilogrammes du premier lingot, 4^k8 du second et 5 kilogrammes du troisième.)

14° — Trouver deux nombres dont le rapport soit le même que celui de m à n, et tels que leur produit ne soit pas changé si l'on augmente le premier de a unités et qu'on diminue le second de b unités.

$$\left(\textit{Rép.}\quad \text{Le premier égale } \frac{abm}{an-bm}, \text{ et le second } \frac{abn}{an-bm}\right).$$

15° — Les densités d, d', de deux corps A, A', et celle δ d'une de leurs combinaisons étant données, déterminer la quantité de chacun de ces corps contenue dans un poids donné p de cette combinaison, en admettant toutefois qu'ils n'éprouvent aucune réduction de volume en se combinant.

$$\left(\textit{Rép.}\quad \text{A, } \frac{pd(\delta-d')}{\delta(d-d')}: \quad \text{B, } \frac{pd'(d-\delta)}{\delta(d-d')}\right).$$

16° — Un cône dont l'axe est vertical, ayant pour rayon r, pour hauteur h, pour densité d, flotte, la base en haut, dans un liquide de densité d', trouver la hauteur de la partie plongée.

$$\left(\textit{Rép.}\quad h\sqrt[3]{\frac{d}{d'}}\right).$$

17° — Un alliage pesant 10 grammes est composé de deux métaux dont les densités sont 19,362 et 10,474, l'alliage pèse dans l'eau $9^g,35$; combien y a-t-il de chaque métal.

(*Rép.* $6^g,95$ et $3^g,05$).

18° — Deux vases d'un hectolitre chacun sont remplis de deux mélanges, le premier contient 60 parties d'eau contre 40 de vin, le second contient 20 parties d'eau contre 40 de vin. On demande de prendre dans ces deux vases des volumes x et y tels que, mélangés ensemble, ils contiennent autant d'eau que de vin, et que les restes mélangés contiennent 4 parties d'eau contre 7 de vin.

$$\left(Rép. \quad x = \frac{850}{9}, \quad y = \frac{510}{9} \text{ de litre.}\right)$$

19° — La vitesse du son est de 1435 mètres dans l'eau, de 340 mètres dans l'air, une personne placée dans un bateau perçoit un son produit sur le rivage par l'eau et par l'air, il s'écoule 27 secondes entre ces deux perceptions, quelle est la distance du bateau au rivage.

(*Rép.* 12030^m).

20° — Quels sont les volumes de deux liquides dont les densités sont 1,3 et 0,7, sachant que, si on les mélange le volume total est égal à 3 litres, et la densité 0,9.

(*Rép.* 1 et 2).

21° — Un cylindre de rayon r, de hauteur h, de densité d, est plongé dans un cylindre de rayon R, plein jusqu'à la hauteur H d'un liquide de densité D : de combien plonge-t-il, et de combien le niveau du liquide remonte-t-il dans le vase ?

$$\left(Rép. \quad \frac{hd}{D} \text{ et } \frac{r^2hd}{R^2D}\right).$$

22° — Une bougie dont le rayon est 1 centimètre, la hauteur 30, la densité 0,7, est plongée dans un cylindre plein d'eau ayant 2 de rayon, elle brule 3 centimètres à l'heure, au bout de combien de temps l'extrémité supérieure de la bougie sera-t-elle au niveau du bord du cylindre, de combien aura descendu le niveau de l'eau, et quelle sera la longueur de la partie plongeante ?

(*Rép.* $6^h18^m57^s$; $3^c,32$; 7^c74.)

23° — Dans un tube en U il y a du mercure qui prend le même niveau dans les deux branches, on verse dans l'une une colonne de 30 centimètres d'eau, de combien s'abaissera le niveau du mercure dans cette branche : 1° en lui supposant la même section qu'à l'autre, 2° en lui supposant une section double ? La densité du mercure est égale à 13,6.

(*Rép.* 1° $1^c,10$; 2° $0^c,73$).

24° — Une barre métallique formée de deux barres de platine et de cuivre à une longueur de 3 mètres à 0° et de $3^m,0043$ à 100°. Quelles sont les longueurs respectives du platine et du cuivre à 0° ? On donne les coefficients de dilatation linéaire 0,0000088 du platine, et 0,0000171 du cuivre.

(*Rép.* 1^m et 2^m).

25° — Un tube de verre de 2 centimètres de diamètre et un mètre de long est rempli de mercure jusqu'à 99 centimètres, à la température de 0°, à quelle température faut-il le porter pour que le mercure remplisse le tube ? On sait que le coefficient de dilatation cubique du verre est $\frac{1}{38700}$, et celui du mercure $\frac{1}{5550}$.

(*Rép.* 65°,5).

26° — Un vase de laiton pesant 100 grammes contient 200 grammes d'eau et 100 de glace à 0°, combien faut-il y faire arriver de vapeur d'eau à 100° et sous la pression normale pour que le mélange atteigne la température de 10° ? La chaleur spécifique du laiton est 0,0939.

(*Rép.* 17g,45).

27° — On fait condenser 35k,768 de vapeur d'eau à 147° dans 2727k d'eau à 15°,7, contenus dans un vase de laiton pesant 125k ; déterminer la température finale, connaissant la capacité calorifique du laiton 0,09.

(*Rép.* 24°,14).

28° — On mélange 15k de mercure à 65°,2 avec 40k,1 d'eau à 3°,4 quelle sera la température finale. L'eau est contenue dans un vase pesant 758g et ayant $\frac{1}{12}$ pour capacité calorifique, celle du mercure est 0,03.

(*Rép.* 3°,4).

29° — Dans un tube barométrique qui plonge dans une cuvette profonde le mercure s'élève à 743 millim.; on enfonce le tube jusqu'à ce que la chambre barométrique, qui contient de l'air, soit réduite au tiers de son volume primitif. La hauteur du mercure est alors 701 mm. Déduire de là la valeur de la pression extérieure.

(*Rép.* 764 mm.).

30° — Un vase de 20 litres plein d'air à la pression 76 est mis en communication avec un vase vide, la pression du gaz devient 45, quelle est la capacité du vase vide ?

(*Rép.* 13l,78).

31° — Un gaz à 37° et sous la pression atmosphérique 76 est renfermé dans un récipient de capacité invariable. Déterminer la température à laquelle il se trouve élevé lorsque sa pression devient 3 atmosphères.

(*Rép.* 655°).

32° — On a 3 litres d'air sec à 10° sous la pression de 750mm. Que deviendra le volume de cet air saturé d'humidité à 20° sous la pression de 752^{mm} ? La tension maximum de la vapeur à 20° étant 17^{mm}, et le coefficient de dilatation des gaz 0,00367.

(*Rép.* $3^l,258$).

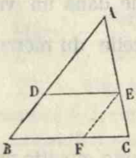
33° — Le poids d'un certain volume d'air saturé est $18^{gr},17$ à la température de 20°, et sous la pression de 78^c. Quel est ce volume? On donne le poids $1^g,293$ d'un litre d'air sec à 0° et sous 76^c, le coefficient 0,00367 de dilatation des gaz, la densité $\frac{5}{8}$ de la vapeur d'eau, et sa tension maximum $17^{mm},7$ à 20°.

(*Rép.* $14^l,81$).

34° — Mener par le centre d'une circonférence de rayon r une sécante telle que la partie extérieure, comprise entre la circonférence, et une tangente donnée, soit égale à la moitié de cette tangente, et calculer la longueur de la tangente depuis le point de contact jusqu'au point de rencontre.

$\left(\textit{Rép.} \quad \frac{4r}{3}\right)$.

35° — Un losange BDEF de côté a est articulé, le point A pris sur le prolongement d'un côté BD est fixe, trouver la distance CF $= x$ qu'il faut porter sur le côté BF pour que les trois points A, E et C soient en ligne droite. Prouver que le rapport $\frac{AE}{AC}$ est constant et indépendant de l'angle B du losange, et déterminer la longueur DA $= b$, de manière que l'on ait $\frac{AE}{AC} = \frac{m}{p}$. Cette figure représente l'instrument appelé *pantographe*; si le point C suit le contour d'une figure, un crayon placé en E tracera une figure semblable.



$\left(\textit{Rép.} \quad x = \frac{a^2}{b}, \quad b = \frac{ma}{p-m}\right)$.

36° — Mener par le sommet d'un hexagône régulier de côté a une droite qui partage sa surface dans le rapport de 1 à 2, et calculer les deux segments du côté auquel elle aboutit.

$\left(\textit{Rép.} \quad \frac{a}{2} \text{ et } \frac{a}{2}\right)$.

37° — Inscrire dans une circonférence de rayon r un triangle isocèle dont la base soit : 1° égale à la hauteur, 2° égale à la moitié du côté.

$\left(\textit{Rép.} \quad \text{La base est } 1^\circ \frac{8r}{5}, \quad 2^\circ \frac{r\sqrt{15}}{4}\right)$.

38° — Inscrire dans un triangle équilatéral de côté a trois circonférences égales tangentes chacune à deux côtés du triangle et aux deux autres ; et calculer leur rayon.

$$\left(Rép. \quad \frac{a}{2(1+\sqrt{3})}\right).$$

39° — Dans une cour rectangulaire ayant 12 mètres de long et 10 de large, on veut planter un cordon d'arbres également distants, sur quatre lignes parallèles aux côtés de la cour, et éloignées de ces côtés d'une quantité égale à la distance de deux arbres consécutifs. On plante 14 arbres, combien y en a-t-il sur chaque côté de la cour, et à quelle distance sont-ils les uns des autres ?

(*Rép.* 5, 4 et 2).

40° — Mener dans une circonférence de rayon r une corde telle que la somme de son carré et du carré de sa distance au centre, soit m^2, et calculer sa longueur.

$$\left(Rép. \quad 2\sqrt{\frac{m^2-r^2}{3}}\right).$$

41° — Calculer le rayon d'une circonférence touchant une droite et une circonférence de rayon r, en un point A ; sachant que les perpendiculaires abaissées du centre donné et de A sur la droite donnée sont b et a.

$$\left(Rép. \quad \frac{ar}{b+r-a}\right).$$

DOUZIÈME ET TREIZIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Interprétation des valeurs négatives dans les problèmes — Usage et calcul des quantités négatives.

I. — Définitions.

On appelle *quantité négative* un nombre précédé du signe —, comme

$$-4, -\frac{2}{3}, -\sqrt{5}.$$

Le signe — ne peut ici indiquer une soustraction, puisqu'il n'y a aucune quantité dont on puisse retrancher les nombres $4, \frac{2}{3}, \sqrt{5}$. Une quantité négative est donc un symbole qui ne représente rien par lui-même. Par opposition on appelle *quantités positives* les nombres ordinaires $4, \frac{2}{3}, \sqrt{5}$, et on les fait précéder quelquefois du signe $+$, comme nous avons fait pour le premier terme d'un polynôme.

II. — Origine des quantités négatives.

1. — On rencontre des quantités négatives en résolvant les équations du premier degré. Considérons d'abord l'équation

$$3x + 17 = 6x + 2.$$

Si l'on fait passer les termes inconnus au premier membre, et les termes connus au second, on trouve en suivant la règle indiquée (7, 8 et 9, III).

$$3x - 6x = 2 - 17,$$
$$-3x = -15,$$
$$x = \frac{-15}{-3}.$$

Si l'on eût fait passer les termes inconnus au second membre, et les termes connus au premier, on eût trouvé

$$17 - 2 = 6x - 3x,$$
$$15 = 3x,$$
$$\frac{15}{3} = x.$$

On voit que la valeur de x, trouvée en employant des quantités négatives $\frac{-15}{-3}$, serait exacte, si l'on appliquait à ce quotient la règle des signes de la division des polynômes, qui donne le signe $+$ au quotient de la division de deux quantités affectées du même signe.

2. — Il peut arriver que les quantités négatives ne se présentent que dans l'un des deux membres, comme quand on résout l'équation

$$(1) \qquad 3x + 2 = 6x + 17,$$

d'où l'on tire successivement en faisant passer les termes inconnus au premier membre

$$(2) \qquad 3x - 6x = 17 - 2,$$
$$(3) \qquad -3x = 15,$$
$$(4) \qquad x = \frac{15}{-3}.$$

Si l'on fait passer les termes inconnus au second membre, on a

$$2 - 17 = 6x - 3x,$$
$$-15 = 3x,$$
$$\frac{-15}{3} = x.$$

Dans cet exemple on ne peut éviter les quantités négatives, et, en appliquant aux quotients $\frac{15}{-3}$ et $\frac{-15}{3}$ la règle des signes de la division des polynômes, on trouve pour x la valeur négative -5, qui indique qu'aucun nombre ne vérifie l'équation, et en effet, $6x$ étant plus grand que $3x$ et 17 plus grand que 2, le second membre est plus grand que le premier et ne peut lui être égal.

Sans attacher pour le moment aucun sens à la quantité négative -5, elle vérifie, pour ainsi dire mécaniquement, l'équation proposée, à condition qu'on lui applique les règles ordinaires du calcul algébrique, celles qui conviennent aux termes affectés du signe — dans les polynômes.

En effet nous avons posé, en appliquant la règle des signes de la division, l'égalité (4)

$$(4) \qquad -5 = \frac{15}{-3},$$

donc -5 mis à la place de x vérifie l'équation (4)

$$(4) \qquad x = \frac{15}{-3}.$$

Le quotient -5 est le nombre qui, multiplié par le diviseur -3, reproduit le dividende 15, on a donc l'égalité (3)

$$(3) \qquad -3 \times (-5) = 15,$$

qui prouve que -5 mis à la place de x vérifie l'équation (3)

$$(3) \qquad -3x = 15.$$

Ensuite -3 n'est autre chose que $3-6$ traité par la règle de réduction des termes semblables, et 15 est égal à $17-2$, on a donc l'égalité

$$(3-6) \times (-5) = 17-2,$$

ou

$$(2) \qquad 3 \times (-5) - 6 \times (-5) = 17 - 2,$$

qui prouve que -5 mis à la place de x vérifie l'équation (2),

$$(2) \qquad 3x - 6x = 17 - 2.$$

Enfin, en ajoutant aux deux membres de l'égalité (2), le nombre positif 2 et le nombre négatif $6 \times (-5)$, on trouve l'égalité (1)

$$(1) \qquad 3 \times (-5) + 2 = 6 \times (-5) + 17,$$

qui prouve que -5 mis à la place de x vérifie l'équation (1)

$$(1) \qquad 3x + 2 = 6x + 17.$$

III. — Interprétation des valeurs négatives dans les problèmes.

1. — Avant d'aborder cette question nous allons démontrer deux théorèmes dont elle dépend.

THÉORÈME I. — *Si dans une équation on change* x *en* — x, *en appliquant à cette quantité* — x *les règles ordinaires du calcul algébrique, on obtient une équation nouvelle, dont les racines sont égales à celles de la proposée changées de signe.*

Soit proposée l'équation

$$(1) \qquad 3x + 2 = 6x + 17,$$

qui, nous venons de le voir, a pour racine -5. Changeons x en $-x$, nous obtenons l'équation

$$(2) \qquad 3 \times (-x) + 2 = 6 \times (-x) + 17.$$

Puisque -5 est la racine de l'équation (1), on a par hypothèse l'égalité

$$3 \times (-5) + 2 = 6 \times (-5) + 17,$$

qui n'est autre chose que ce qu'on obtient en remplaçant x par 5 dans l'équation (2), donc les deux membres de cette équation deviennent égaux quand on y remplace x par 5, et la racine -5 de l'équation (1), changée de signe, est la racine de l'équation (2).

REMARQUE. — L'équation (2) s'appelle la transformée en $-x$ de l'équation (1) ; on l'écrit ordinairement, en effectuant les multiplications indiquées d'après la règle des signes,

$$-3x + 2 = -6x + 17.$$

Quand l'équation (1) aura été résolue, il sera inutile de résoudre l'équation (2), il n'y aura qu'à changer le signe de la racine trouvée.

De même l'équation du second degré

$$(1) \qquad x^2 + 2x - 15 = 0,$$

qui a pour racines -5 et 3, a pour transformée en $-x$,

$$(2) \qquad (-x)^2 + 2 \times (-x) - 15 = 0,$$

que l'on écrit

$$x^2 - 2x - 15 = 0,$$

et qui a pour racines 5 et -3, ce que l'on démontrerait comme dans l'exemple précédent.

Théorème II. — *Si dans un système d'équations on remplace plusieurs inconnues* y, z... *par* — y, — z..., *on obtient un système nouveau, dans lequel les valeurs de* y, z... *sont égales à celles du premier système changées de signe, tandis que les valeurs des autres inconnues restent les mêmes.*

Soit proposé le système

$$(1)\quad \begin{cases} 2x + 5y = 26, \\ 13x + 4y = 55, \end{cases}$$

vérifié par les valeurs

$$x = 3, \qquad y = 4;$$

remplaçons y par $-y$, nous obtenons le système

$$\begin{cases} 2x + 5 \times (-y) = 26, \\ 13x + 4 \times (-y) = 55, \end{cases} \quad \text{ou} \quad (2)\ \begin{cases} 2x - 5y = 26, \\ 13x - 4y = 55. \end{cases}$$

Les valeurs de x et de y qui vérifient le système (1) étant 3 et 4, on a par hypothèse les égalités

$$2 \times 3 + 5 \times 4 = 26,$$
$$13 \times 3 + 4 \times 4 = 55,$$

que l'on peut écrire

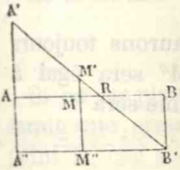
$$2 \times 3 - 5 \times (-4) = 26,$$
$$13 \times 3 - 4 \times (-4) = 55.$$

Or, sous cette forme, ces égalités expriment que les nombres 3 et -4, mis à la place de x et de y, vérifient le système (2); donc le théorème est démontré.

Remarque. — Les équations du système (2) s'appellent les transformées en $-y$ de celles du système (1). Quand celui-ci est résolu, on n'a pas besoin de résoudre l'autre, pour avoir ses solutions, on n'a qu'à changer de signe les valeurs des inconnues dont le signe a été changé dans les équations.

2. — *Quand la résolution d'un problème conduit à une solution négative, cela indique en général qu'il est impossible, et l'impossibilité est absolue s'il n'y a qu'une seule manière de le mettre en équations ; mais si dans la mise en équation, on a fait arbitrairement certaines hypothèses sur la grandeur et la position des résultats, il faudra remettre le problème en équations en faisant les autres hypothèses, et s'il arrive que les équations nouvelles ne diffèrent des précédentes que par le changement de signe des inconnues dont les valeurs étaient* *négatives, il est inutile de les résoudre ; pour avoir leurs solutions, il n'y aura qu'à changer de signe les valeurs négatives trouvées précédemment, et les hypothèses nouvelles seront justes. Il peut arriver que les équations nouvelles diffèrent des premières autrement que par le changement de signe des inconnues dont les valeurs étaient négatives, alors il faudra les résoudre, et les valeurs négatives ne s'interpréteront pas. Si enfin ces nouvelles équations conduisaient à des valeurs négatives, le problème serait impossible.*

PROBLÈME I. — Aux deux extrémités d'une ligne AB égale à 20 unités, on élève en sens contraire des perpendiculaires AA' et BB' égales à 12 et 6, puis en un point M de AB pris à 16 unités de A, on élève une ligne MM' perpendiculaire à AB, jusqu'à sa rencontre avec $A'B'$; trouver sa longueur.



Menons par le point B' une parallèle à AB, qui rencontre en M'' et en A'' les lignes MM' et AA' prolongées, nous obtenons deux triangles semblables $B'M'M''$ et $B'A'A''$, qui donnent l'égalité de rapports

$$\frac{M'M''}{A'A''} = \frac{B'M''}{B'A''}.$$

Désignons l'inconnue MM' par y, et remarquons que l'on a

$$AA'' = MM'' = BB' = 6,$$

comme parallèles comprises entre parallèles,

$B'A'' = AB = 20$ et $B'M'' = BM = AB - AM$ ou $20 - 16$ ou 4 ;

$$M'M'' = M''M + MM' = 6 + y,$$
$$A'A'' = A'A + AA'' = 12 + 6 = 18.$$

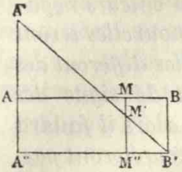
En remplaçant dans l'égalité précédente les lignes de la figure par leurs valeurs numériques ou littérales, nous avons l'équation

$$\frac{6+y}{18} = \frac{4}{20},$$

d'où nous tirons

$$y = \frac{4 \times 18}{20} - 6 = -2,4.$$

Cette valeur négative indique qu'il est impossible de mener une perpendiculaire à la ligne AB au point M donné, dans la position que nous lui avons assignée, mais il est possible que ce point M soit à la droite du point R inconnu où se rencontrent AB et A′B′, et alors la perpendiculaire MM′ sera dirigée vers le bas, remettons le problème en équations dans cette nouvelle hypothèse.



Pour cela faisons une nouvelle figure avec les mêmes lettres, les mêmes constructions nous donneront, parles mêmes triangles semblables,

$$\frac{M'M''}{A'A''} = \frac{B'M''}{B'A''}.$$

En désignant par y l'inconnue MM′, nous aurons toujours $B'A'' = 20$, $B'M'' = 4$, $A'A'' = 18$, mais $M'M''$ sera égal à $MM'' - MM'$ ou $6 - y$, et l'équation du problème sera

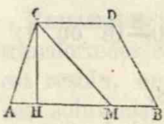
$$\frac{6-y}{18} = \frac{4}{20}.$$

$30 - 5y = 18$
$-5y = -12$

Comme c'est la transformée en $-y$ de l'équation précédente, nous savons, sans la résoudre, que sa racine sera le nombre négatif trouvé précédemment changé de signe ou 2,4 (10 et 11, III, Th. 1).

Ainsi *dans ce problème et dans tous les problèmes de même espèce, la valeur négative trouvée s'interprète, en la portant dans un sens contraire à celui de la mise en équations.*

Problème II. — *Étant donné un trapèze* ABCD, *mener par le sommet* C *une ligne* CM *qui le partage en deux parties dont le rapport soit* $\frac{m}{p}$.



Soient $AB = a$, et $CD = b$, les bases du trapèze donné, $CH = h$ sa hauteur, et désignons par x l'inconnue BM, nous aurons par l'énoncé

$$\frac{ACM}{CMBD} = \frac{m}{p}.$$

Quand on a ainsi à comparer les deux parties d'une même surface, on obtient une équation plus commode en comparant la plus simple des deux parties à la surface entière. Il suffit pour cela d'ajouter à chaque dénominateur le numérateur correspondant, d'où

$$\frac{ACM}{ABCD} = \frac{m}{m+p},$$

et, en remplaçant les surfaces par leurs expressions algébriques,

$$\frac{\frac{(a-x)h}{2}}{\frac{(a+b)h}{2}}=\frac{m}{m+p},$$

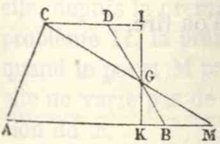
ou

$$\frac{a-x}{a+b}=\frac{m}{m+p}.$$

De là on tire

$$x=\frac{pa-mb}{m+p}.$$

Si pa est plus petit que mb, la valeur de x est négative, ce serait une erreur de l'interpréter en la portant à droite du point B, car si nous remettons le problème en équations en supposant que CM rencontre la base AB prolongée, nous aurons



$$\frac{\text{ABGC}}{\text{GCD}}=\frac{m}{p},$$

d'où

$$\frac{\text{ABGC}}{\text{ABCD}}=\frac{m}{m+p}.$$

Or ABGC est une surface égale au triangle ACM diminué du triangle BGM, si par le point G nous menons une ligne KI perpendiculaire aux bases et égale à h, et que nous désignions GK par y, l'équation devient

$$\frac{\frac{(a+x)h}{2}-\frac{xy}{2}}{\frac{(a+b)h}{2}}=\frac{m}{m+p}.$$

Dans les triangles BGM et DCG semblables, le rapport des hauteurs est égal au rapport des bases

$$\frac{\text{GK}}{\text{GI}}=\frac{\text{BM}}{\text{CD}},$$

ou

$$\frac{y}{h-y}=\frac{x}{b},$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{hx}{b+x}.$$

Portons cette valeur de y dans la première équation, elle devient

$$\frac{(a+x)h - \frac{hx^2}{b+x}}{(a+b)h} = \frac{m}{m+p},$$

ou

$$\frac{(a+x)(b+x) - x^2}{(a+b)(b+x)} = \frac{m}{m+p}.$$

Cette équation n'étant pas la transformée en $-x$ de celle que l'on a trouvée dans les circonstances précédentes, sa racine ne sera pas la valeur négative trouvée précédemment et changée de signe, c'est-à-dire,

$$\frac{b(mb-pa)}{m+p},$$

il faut résoudre la nouvelle équation, et l'on tire,

$$x = \frac{b(mb-pa)}{p(a+b)},$$

quantité positive, puisque $pa < mb$.

On voit par cet exemple le danger qu'il y aurait à interpréter la quantité négative avant d'avoir constaté que, dans la nouvelle hypothèse, on a pour équation la transformée en $-x$ de celle qu'à donnée la première hypothèse.

Problème III. — *Une personne place* 3600 *francs, partie à* 4 % *partie à* 5 %, *pendant* 3 *ans et* 4 *mois, elle touche* 630 *francs d'intérêt, combien a-t-elle placé à* 4 % *et combien à* 5 % ?

Soit x la partie placée à 4 %, l'autre sera $3600-x$, et en remarquant que 3 ans et 4 mois font 40 mois, puis égalant la somme des intérêts des deux parties à 630 francs, nous aurons l'équation

$$\frac{x \times 4 \times 40}{1200} + \frac{(3600-x) \times 5 \times 40}{1200} = 630,$$

d'où nous tirons $x = -900$.

Comme il n'y a pas d'autre manière de mettre le problème en équation, il est impossible ; et en effet la somme tout entière placée à 5 % pendant 40 mois ne donnerait que 600 francs, elle ne peut pas donner 630 francs quand on en place une partie à 4 %.

On cherche quelquefois à modifier l'énoncé du problème de manière que l'équation du problème nouveau soit la transformée en $-x$ de la première, cette recherche est inutile, la transformée en $-x$ pouvant être l'équation d'une infinité de problèmes.

3. — Les quantités négatives s'interprèteront ordinairement quand il s'agira de grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés à partir d'une certaine origine, comme le temps dans le passé et dans l'avenir, avant ou après l'ère chrétienne, les degrés au dessus et au dessous du zéro d'un thermomètre, les distances portées sur une ligne à droite ou à gauche d'un point, les perpendiculaires à une droite ou à un plan en dessus ou en dessous ; il est de plus nécessaire que les grandeurs exprimées en fonction de l'inconnue varient d'une manière continue avec elle, depuis la première hypothèse jusqu'à la dernière. Dans le problème II, la première surface a une solution de continuité quand le point M passe en B, à droite et à gauche de ce point elle ne varie pas de la même quantité pour une même variation de x.

IV. — Introduction des quantités négatives dans les données d'une question.

1. — Souvent on introduit volontairement les quantités négatives dans les données d'une question, en convenant que certaines grandeurs seront regardées comme positives dans un sens et négatives dans un autre. Il faut alors démontrer que l'usage des quantités négatives conduit aux mêmes résultats que les procédés ordinaires qui éviteraient leur emploi, il faut de plus que cet usage apporte quelques avantages, qui seront ordinairement la brièveté et la généralité.

Ainsi la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ suffira pour calculer le carré d'une somme et celui d'une différence, si l'on admet que la quantité b puisse recevoir dans les deux membres une valeur négative, le carré b^2 sera toujours positif, comme produit de deux quantités de même signe, mais le double produit $2ab$ sera négatif, c'est-à-dire affecté du signe —, quand on remplacera b par un nombre négatif ; on arrivera donc au même résultat qu'en donnant à b une valeur positive dans la formule

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

2. — Comment on est conduit à donner le signe — à des quantités comptées en sens contraire des autres, et comment cet emploi des quantités négatives généralise les solutions des problèmes.

Cela résultera de la discussion des problèmes suivants.

PROBLÈME I. — *Trouver la température moyenne entre deux températures données.*

Supposons-les d'abord toutes deux supérieures au 0, placé à droite de la tige, 15 et 7 par exemple ; la température moyenne étant celle qui est également éloignée de 15 et de 7, si nous l'appelons x, nous aurons l'équation

$$x - 7 = 15 - x,$$

d'où

$$x = \frac{15 + 7}{2};$$

et en général, en appelant a et b les deux températures données,

$$(1) \qquad x = \frac{a + b}{2}.$$

Supposons que la température 7 donnée soit au dessous du zéro placé à droite, construisons à gauche une seconde échelle, où le 0 soit au dessous de la plus basse des deux températures, 20 degrés plus bas que le premier ; vis-à-vis de ce premier 0 il y aura 20, vis-à-vis de 15 degrés il y aura $20 + 15$ ou 35, vis-à-vis de 7 degrés au dessous il y aura $20 - 7$ ou 13 ; et si nous appelons x la température moyenne, elle répondra à $20 + x$ ou $20 - x$ sur l'échelle de gauche, selon que ces x degrés seront au dessus ou au dessous du premier zéro, la formule (1) est applicable à l'échelle de gauche, puisque les deux températures données sont au dessus du zéro, et l'on a

$$(2) \qquad 20 + x = \frac{20 + 15 + 20 - 7}{2},$$

20 au premier membre détruit $\frac{20+20}{2}$ au second, et il reste

$$x=\frac{15-7}{2}.$$

On voit comment la température inférieure au zéro a pris d'elle-même le signe —, et pourquoi ce nombre -7 qui n'est d'abord qu'un terme affecté du signe — dans le polynôme $20-7$, doit être traité par les règles qui conviennent aux termes affectés du signe — dans les polynômes.

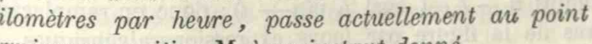
Cette valeur de x n'est qu'une application de la formule (1)

$$x=\frac{a+b}{2},$$

dans laquelle on donnerait à b la valeur négative -7. Si la température inférieure à zéro était exprimée par le nombre le plus fort, la valeur de x serait négative, cela prouve qu'il aurait fallu mettre dans l'équation (2) $20-x$ au lieu de $20+x$, ou que cette température x est au dessous de zéro. Si les deux températures données sont inférieures à zéro, la formule (1) en y remplaçant a et b par des nombres négatifs donne pour x une valeur négative, indiquant que la température moyenne est au dessous de zéro.

Ainsi, grâce à l'emploi des quantités négatives, une seule formule embrasse tous les cas du problème.

Problème II. — *Un corps qui se meut sur une ligne droite indéfinie* DT *dans le sens* DM *avec une vitesse constante de* v *kilomètres par heure, passe actuellement au point* T; *déterminer sa position* M *à un instant donné.*



Pour cela, convenons de mesurer sur la droite DT toutes les distances à partir d'un point D, pris à gauche de T, et de prendre pour origine du temps l'instant du passage du mobile au point T. Considérons d'abord le mobile dans la position M, à droite de T après son passage en ce point.

Soit d la distance connue et constante des points D et T; désignons par x la distance MD du mobile à l'origine D, par t le nombre d'heures qui se sont écoulées depuis son passage au point T, nous aurons

$$\text{TM}=vt,$$

or

$$\mathrm{DM} = \mathrm{DT} + \mathrm{TM},$$

donc

$$(1) \qquad x = d + vt.$$

Cette formule, qui convient toutes les fois que le mobile est à droite de T, aurait besoin d'être modifiée à l'aide d'un raisonnement nouveau, si le mobile était entre T et D ou à gauche de D. Pour ramener ces cas au précédent, il suffit de reporter l'origine des espaces de D en un point D′, situé à une distance h vers la gauche, et l'origine des temps à une époque antérieure de n unités, alors que le mobile était en T′ au lieu d'être en T, de sorte que TT′ soit égal à vn, ces deux origines étant assez éloignées, pour pouvoir ne considérer le mobile qu'à droite de l'origine D′ des espaces, à une époque postérieure à la nouvelle origine des temps.

Supposons le mobile entre D et T, en M′, à droite de D, nous n'aurons qu'à accentuer les lettres dans l'égalité

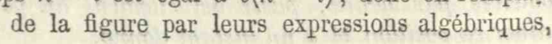
$$\mathrm{DM} = \mathrm{DT} + \mathrm{TM},$$

ce qui donne

$$\mathrm{D'M'} = \mathrm{D'T'} + \mathrm{T'M'}.$$

Désignons DM′ par x, D′M′ ou D′D + DM′ par $h + x$, par t le temps employé pour aller de M′ en T, D′T′ est égal à D′T — TT′ ou $h + d - vn$, et T′M′ étant parcouru dans le temps $n - t$ est égal à $v(n - t)$; donc en remplaçant les lettres de la figure par leurs expressions algébriques, nous avons

$$h + x = h + d - vn + v(n - t).$$



Supposons maintenant le mobile à gauche de D en M″, nous aurons encore

$$\mathrm{D'M''} = \mathrm{D'T'} + \mathrm{T'M''}.$$

Désignons DM″ par x et par t le temps employé à aller de M″ en D, D′M″ ou D′D — DM″ sera représenté par $h - x$, D′T′ ou D′T — TT′ par $h + d - vn$, et T′M″ espace parcouru dans le temps $n - t$ par $v(n - t)$, nous avons donc en remplaçant les lettres de la figure par leurs valeurs algébriques

$$h - x = h + d - vn + v(n - t).$$

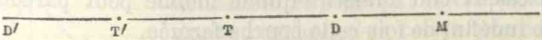
Les termes h et vn disparaissant d'eux-mêmes de ces deux équations, elles deviennent

$$(2) \qquad x = d - vt,$$

$$(3) \qquad -x = d - vt.$$

On voit comment les distances portées à gauche du point D, et les temps antérieurs à l'origine ou au passage du mobile en T ont pris d'eux-mêmes le signe — dans ces formules, et pourquoi ces quantités, qui ne sont d'abord que des termes affectés du signe — dans les polynômes $h - x$ et $n - t$, doivent être traitées par les règles qui conviennent aux termes affectés du signe — dans les polynômes.

Mais les formules (2) et (3) peuvent être suppléées par la première, si l'on convient d'y remplacer t par un nombre négatif, quand le temps sera antérieur à l'origine, et x par un nombre négatif, quand la distance représentée par cette lettre sera à gauche du point D; et réciproquement, si l'équation donne pour x une valeur négative, on portera sa valeur numérique à gauche de D, et, si elle donne pour t une valeur négative, sa valeur numérique indiquera un temps antérieur à l'origine.



Si le point T était à gauche de D, l'on aurait toujours

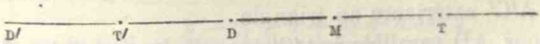
$$D'M = D'T + TM,$$

d'où en adoptant les mêmes notations, et remarquant que D'T est égal à D'D — DT ou $h - d$,

$$h + x = h - d + vt,$$

$$x = -d + vt.$$

La formule (1) peut donc servir en donnant à d une valeur négative, quand T est à gauche de D.



Si le mouvement avait lieu en sens contraire, t heures après le passage en T le mobile serait à gauche en M, et l'on aurait

$$D'M = D'T' + T'M = D'T - TT' + T'M,$$

ou

$$h + x = h + d - vn + v(n - t),$$

ou enfin

$$x = d - vt.$$

On voit que la formule (1) pourrait encore servir, en donnant à v une valeur négative, quand le mouvement a lieu en sens contraire.

Ainsi l'emploi des quantités négatives permet d'embrasser dans une seule formule tous les cas particuliers de ce problème.

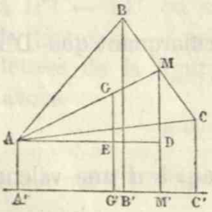
On voit, par cet exemple, combien est longue la généralisation d'une formule ; si donc il fallait la faire pour chaque problème, l'étude et les applications de l'algèbre seraient fort difficiles. Mais heureusement il n'est besoin de généraliser que les problèmes fondamentaux des sciences, lesquels sont en petit nombre ; quant à leurs conséquences, elles ont la même généralité que les problèmes d'où elles découlent.

Remarque. — La formule

$$x = d + vt$$

peut aussi faire connaître la position d'un point qui se meut uniformément sur une ligne courbe, pourvu que cette ligne ait une longueur indéfinie, comme une spirale, une hélice ou bien qu'elle soit fermée, comme la circonférence. Mais, dans ce dernier cas, il faut admettre que le mobile peut parcourir un nombre indéfini de fois cette courbe fermée.

Problème III. — *Connaissant les perpendiculaires abaissées des trois sommets d'un triangle sur une droite extérieure, calculer la perpendiculaire abaissée du point de rencontre des médianes sur la même droite.*



Soit ABC un triangle, G le point de rencontre des médianes; désignons par y_1, y_2, y_3 et Y, les perpendiculaires abaissées des points A, B, C et G sur une droite A′C′ extérieure au triangle.

Menons AD parallèle à A′C′ jusqu'à la rencontre de MM′ perpendiculaire abaissée du milieu M de BC sur A′C′, nous aurons $AA' = EG' = DM' = y_1$, comme parallèles comprises entre parallèles; d'où $GE = Y - y_1$, $MD = MM' - y_1$; or MM′ est égal à la demi-somme des bases du trapèze BCB′C′, comme parallèle à ces bases menées par le milieu de BC, donc

$MM' = \frac{y_2 + y_3}{2}$, et $MD = \frac{y_2 + y_3}{2} - y_1$ ou $\frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{2}$.

Cela étant, les triangles AGE et AMD semblables donnent

$$\frac{GE}{MD} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3},$$

puisque le point de rencontre des médianes G est situé aux deux tiers de chacune d'elles à partir du sommet.

En remplaçant les lettres de la figure par leurs valeurs algébriques, l'équation devient

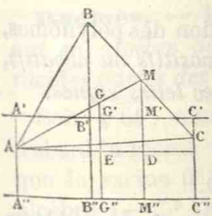
$$\frac{Y - y_1}{\frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{2}} = \frac{2}{3},$$

ou

$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Cette formule aurait besoin d'être modifiée à l'aide d'un raisonnement nouveau, si la droite sur laquelle on abaisse les perpendiculaires traversait le triangle.

Soit A′C′ une droite traversant le triangle ABC, désignons



par y_1, y_2, y_3 et Y, les perpendiculaires abaissées des points A, B, C et G sur cette droite ; prolongeons ces perpendiculaires AA′, BB′, CC′ et GG′ jusqu'à leurs points de rencontre A″, B″, C″ et G″ avec une ligne A″C″ parallèle à A′C′, distante de h, et extérieure au triangle ; les perpendiculaires abaissées des points A, B, C, G sur A″C″ seront représentées : AA″ ou A′A″ — AA′ par $h - y_1$, BB″ ou B′B″ + BB′ par $h + y_2$, CC″ ou C′C″ — CC′ par $h - y_3$, GG″ ou G′G″ + GG′ par $h + Y$, et nous aurons, d'après la formule du cas précédent du problème,

$$h + Y = \frac{h - y_1 + h + y_2 + h - y_3}{3},$$

or h disparaît de cette formule qui se réduit à

$$Y = \frac{-y_1 + y_2 - y_3}{3}.$$

On voit ainsi que l'on pourrait se servir de la formule précédente en donnant aux perpendiculaires qui sont au dessous de A'C' des valeurs négatives. Si l'on trouvait pour Y une valeur négative, cela prouverait que le binôme $h+Y$ devait être remplacé par $h-Y$, ou que le point G serait au dessous de A'C'.

Ici encore, grâce à l'emploi des quantités négatives, une seule formule comprend tous les cas particuliers d'une question.

Remarque. — Si la parallèle A″C″ avait été menée au dessus du triangle les perpendiculaires situées au dessous de A'C' auraient eu le signe $+$, et les autres le signe $-$; ainsi le signe $-$ n'est pas attaché à un sens plutôt qu'à l'autre.

V. — Calcul des quantités négatives.

D'après tout ce que nous avons vu, soit en interprétant les quantités négatives, soit en les introduisant dans les données des problèmes, il n'y a pas de calcul particulier des quantités négatives, on doit leur appliquer les règles qui conviennent aux termes affectés du signe $-$ dans les polynômes.

Nous ferons seulement quelques remarques relatives à chaque opération.

Addition. — D'après la règle de l'addition des polynômes, *on additionne deux nombres quelconques, positifs ou négatifs, en les écrivant l'un à la suite de l'autre avec leurs signes.*

Ainsi

$$15+(-7)=15-7,$$
$$(-4)+(-9)=-4-9.$$

La première de ces égalités montre qu'on peut considérer toute différence $15-7$ comme la *somme* du nombre positif 15 et du nombre négatif -7. On donne à cette somme le nom de *somme algébrique,* pour la distinguer du résultat de l'addition de deux nombres ordinaires ; mais l'addition n'implique plus l'idée d'augmentation.

Soustraction. — *Pour soustraire un nombre positif ou négatif d'un autre, on l'écrit à la suite en changeant son signe.*

$$12-(-8)=12+8,$$
$$-3-(-5)=-3+5;$$

donc la soustraction n'implique plus l'idée de diminution.

Multiplication et division. — *Le produit ou le quotient de deux quantités est positif ou affecté du signe $+$, quand ces deux quantités sont de même signe, toutes deux positives ou toutes deux négatives ; il a le signe $-$ ou est négatif, quand les deux quantités sont de signe contraire, l'une positive et l'autre négative.*

EXEMPLES :

$$(-a^3) \times (-a^5) = +a^8,$$

$$\frac{+a^5}{-a^3} = -a^2.$$

Puissances. — *Les puissances paires des quantités négatives sont positives, et les puissances impaires sont négatives.*

Soit $(-3)^{2m}$ une puissance paire de la quantité négative -3, c'est un produit de $2m$ facteurs égaux à -3, on peut le partager en m groupes de deux facteurs, chaque groupe étant positif, leur produit $(-3)^{2m}$ sera positif et égal à $+3^{2m}$.

Soit ensuite $(-3)^{2m+1}$ une puissance impaire, elle est égale au produit de $(-3)^{2m}$ par -3, le premier facteur est positif, le second est négatif, leur produit $(-3)^{2m+1}$ sera négatif et égal à -3^{2m+1}.

Racines. — 1° *Les racines paires des quantités positives ont en algèbre deux valeurs égales et de signe contraire, les racines paires des quantités négatives n'en ont pas.*

Soit $\sqrt[6]{64}$; nous trouvons par l'arithmétique en prenant d'abord la racine carrée qui est 8, et ensuite la racine cubique, que la racine 6ème de 64 est égale à 2, mais si 2^6 donne 64, en algèbre $(-2)^6$ donne aussi 64, c'est donc aussi la racine 6ème de 64 ;

$$\sqrt[6]{64} = \pm 2.$$

Au contraire $\sqrt[6]{-64}$ n'a aucune valeur, ce n'est ni $+2$ ni -2, puisque ces quantités élevées à la puissance 6 donnent $+64$ et non -64. $\sqrt[6]{-64}$ est donc un pur symbole algébrique, que l'on appelle *quantité imaginaire,* par opposition les nombres positifs ou négatifs sont dits *réels.*

Les quantités imaginaires indiquent l'impossibilité du problème qui y a conduit ; leur rôle en algèbre est de généraliser certains théorèmes, comme : toute équation du second degré a deux racines. L'imaginaire $\sqrt{-b^2}$ traitée par les règles ordinaires prend la forme $b\sqrt{-1}$, et le type des quantités imaginaires est $a+b\sqrt{-1}$; toutes les autres peuvent être ramenées à cette forme *. On appelle *imaginaires conjuguées* celles qui ne diffèrent que par le signe de la partie imaginaire comme $a+b\sqrt{-1}$ et $a-b\sqrt{-1}$; leur produit est réel et égal à a^2+b^2, qu'on appelle le *module* de chacune d'elles. Pour qu'une imaginaire soit nulle, il faut que son module a^2+b^2 soit nul, ce qui exige que a et b soient nuls séparément.

REMARQUE I. — L'emploi des imaginaires conduit souvent à des résultats réels.

Ainsi pour transformer $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$ en une somme de deux carrés, on peut remplacer chaque facteur par le produit de deux imaginaires conjuguées

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1}),$$

ou, en changeant l'ordre des facteurs,

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1}),$$

ou,

$$\left[aa'-bb'+(ba'+ab')\sqrt{-1}\right]\left[aa'-bb'-(ba'+ab')\sqrt{-1}\right],$$

ou enfin

$$(aa'-bb')^2+(ba'+ab')^2.$$

REMARQUE II. — *Toute équation entre quantités imaginaires se décompose en deux autres, ses racines réelles rendent les parties réelles égales, et les parties imaginaires égales.*

Soit

$$a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1},$$

on en tire

$$a-a'=(b'-b)\sqrt{-1},$$

d'où

$$(a-a')^2=-(b'-b)^2,$$

$$(a-a')^2+(b'-b)^2=0.$$

* C'est un Bolonais, nommé *Bombelli*, qui le premier a introduit dans l'algèbre, en 1572, le signe $\sqrt{-1}$ dont l'emploi a fait faire de si grands progrès aux sciences mathématiques, et qu'on représente souvent par la lettre *i*.

Les deux parties de cette somme, ayant le même signe, ne peuvent s'entre-détruire, chacune d'elles doit être nulle,

$$a - a' = 0 \quad \text{d'où} \quad a = a'$$
$$b' - b = 0 \quad \text{d'où} \quad b = b'.$$

2° *Les racines impaires des quantités positives sont positives, et celles des quantités négatives sont négatives.*

Ainsi $\sqrt[3]{+8}$ est égal à $+2$, et il n'y a pas d'autre nombre positif ni négatif dont le cube soit égal à $+8$.

De même $\sqrt[3]{-8}$ est égal à -2, et il n'y a pas d'autre nombre positif ou négatif dont le cube soit égal à -8.

Remarque sur les quantités négatives. — Dorénavant dans les polynômes la somme des termes affectés du signe $-$ pourra l'emporter sur celle des termes affectés du signe $+$, le polynôme sera négatif, et devra être traité par les mêmes règles que les polynômes positifs.

VII. — Divisibilité d'un polynôme par $x-a$ et par $x+a$.

1. — Nous avons déjà vu (page 45) le caractère de divisibilité d'un polynôme par $x-a$, nous allons en donner une démonstration nouvelle, que la théorie des quantités négatives permettra d'étendre au binôme $x+a$.

Désignons par $P_{(x)}$ un polynôme quelconque entier en x, divisé par $x-a$, il donnera un quotient Q et un reste R de degré inférieur au diviseur, et comme le diviseur est du premier degré, le reste sera indépendant de x, on aura ainsi

$$P_{(x)} = (x-a)\,Q + R,$$

égalité satisfaite quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres; donnons à x la valeur a, $x-a$ devient nul, et nous avons

$$P_{(a)} = R.$$

Le reste de la division d'un polynôme par $x-a$ s'obtient en remplaçant x par a dans ce polynôme, si cette substitution donne pour résultat zéro, le reste étant nul, la division est possible.

Un polynôme en x *est divisible par* x — a *quand, en y remplaçant* x *par* a, *on trouve zéro pour résultat.*

Ainsi le polynôme $x^3 - 3a^2x + 2a^3$ est divisible par $x-a$

parce qu'en y remplaçant x par a, on trouve $a^3 - 3a^3 + 2a^3$ qui est nul.

2. — De même, en divisant un polynôme en x par $x + a$, on trouve un quotient Q, et un reste R indépendant de x, et l'on a

$$P_{(x)} = (x + a)Q + R$$

égalité satisfaite quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, donnons à x la valeur $-a$, $x + a$ devient nul, et nous avons

$$P_{(-a)} = R.$$

Le reste de la division d'un polynôme en x par $x + a$ s'obtient donc en y remplaçant x par $-a$, et si cette substitution donne pour résultat zéro, le reste étant nul, la division est possible.

Un polynôme en x *est divisible par* x + a *quand, en y remplaçant* x *par* — a, *on trouve zéro pour résultat.*

Ainsi $x^4 - 3ax^3 - 4a^2x^2$ est divisible par $x + a$, parce qu'en y remplaçant x par $-a$, on trouve $(-a)^4 - 3a(-a)^3 - 4a^2(-a)^2$, ou en effectuant les opérations $a^4 + 3a^4 - 4a^4$ résultat nul.

3. — Divisibilité de $x^m \pm a^m$ par $x \pm a$.

Le binôme $x^m - a^m$ *est toujours divisible par* $x - a$.

En effet, si nous y remplaçons x par a, nous avons $a^m - a^m$ qui est nul.

Le binôme $x^m + a^m$ *n'est jamais divisible par* $x - a$.

En effet, si nous y remplaçons x par a, nous avons $a^m + a^m$ qui n'est pas nul.

Le binôme $x^m - a^m$ *est divisible par* $x + a$ *si* m *est pair, et n'est pas divisible si* m *est impair.*

En effet, les puissances paires de $-a$ ont le signe $+$ et les puissances impaires le signe $-$, si donc nous remplaçons, dans le binôme $x^m - a^m$, x par $-a$, nous obtiendrons, si m est pair, le reste $a^m - a^m$ qui est nul et, si m est impair, le reste $-a^m - a^m$ qui n'est pas nul.

Le binôme $x^m + a^m$ *est divisible par* $x + a$, *si* m *est impair, et n'est pas divisible si* m *est pair.*

En effet, si nous remplaçons dans ce binôme x par $-a$, nous obtenons, si m est impair, le reste $-a^m + a^m$ qui est nul, et, si m est pair, le reste $a^m + a^m$ ou $2a^m$, qui n'est pas nul.

VI. — Grandeur relative des nombres négatifs. — Propriétés des inégalités.

La relation qui existe entre les données et les inconnues d'un problème est exprimée quelquefois par une inégalité. On est conduit de même à la considération des inégalités par la discussion des problèmes qui sont résolus au moyen d'équations. Il importe donc de connaître leurs propriétés qui ont, au reste, beaucoup d'analogie avec celles des équations. Elles reposent sur les deux principes suivants : 1° *Si la différence de deux nombres est positive, le premier de ces nombres est plus grand que le second,* puisqu'il le surpasse d'autant d'unités et de parties de l'unité qu'il y en a dans cette différence ; 2° *la différence de deux nombres n'est pas changée lorsqu'on augmente ou que l'on diminue ces deux nombres de la même quantité.*

Je partage les inégalités en deux classes : la première contient les inégalités qui ne renferment aucune quantité inconnue, et la seconde celles qui contiennent, au contraire, des quantités de ce genre. Je vais les examiner successivement.

1. — Cas dans lequel les inégalités ne renferment pas de quantités inconnues.

Théorème I. — *On peut augmenter ou diminuer les deux membres d'une inegalité d'une même quantité, sans changer le sens de cette inégalité.*

Ainsi, les deux inégalités

$$10 > 8,$$
$$10 \pm m > 8 \pm m,$$

sont équivalentes, en supposant toutefois la quantité m moindre que 8 dans le cas de la soustraction.

En effet, la différence des deux nombres 10 et 8 étant positive, celle des deux nombres $10 \pm m$ et $8 \pm m$ l'est aussi, puisqu'elle égale la différence précédente, d'après le second principe admis ; donc le nombre $10 \pm m$ est plus grand que $8 \pm m$.

Remarque. — L'inégalité

$$10 - m > 8 - m,$$

soumise à la restriction de

$$m < 8,$$

a été généralisée au moyen de conventions qui ont établi des rapports de grandeur entre les nombres négatifs.

Pour cela, je remarque : 1° qu'en supposant le nombre m égal à 8, l'inégalité précédente prend la forme

$$10 - 8 > 0,$$

et ne signifie plus rien, puisque comparer un nombre à zéro, c'est-à-dire à rien, c'est ne faire aucune comparaison. Néanmoins, on est convenu de dire qu'un nombre positif est plus grand que zéro, afin d'avoir un signe algébrique pour désigner les nombres positifs.

2° Si m est égal à 10, l'inégalité précédente devient

$$0 > -2\,;$$

on est convenu pareillement de regarder les nombres négatifs comme étant moindres que zéro, ce qui a introduit dans l'algèbre un signe particulier pour désigner les quantités négatives.

3° Lorsqu'on suppose m plus grand que 10, par exemple égal à 12, la même inégalité prend la forme

$$-2 > -4,$$

c'est-à-dire que si l'on veut établir une certaine relation de grandeur entre deux nombres négatifs quelconques, il faut admettre que le plus petit sera celui qui aurait la plus grande valeur si l'on faisait abstraction de leurs signes.

En admettant ces trois conventions, je regarderai désormais l'inégalité

$$10 - m > 8 - m$$

comme étant vraie pour une valeur quelconque de m.

Corollaire I. — *On peut transporter un terme d'une inégalité d'un membre dans l'autre, pourvu qu'on change le signe de ce terme.*

Ainsi, les deux inégalités

$$A > B + C,$$

$$A - C > B.$$

sont équivalentes. En effet, on déduit la seconde de la première en retranchant la même quantité C des deux membres de celle-ci.

COROLLAIRE II. — *Si l'on change de signe les deux membres d'une inégalité, cette inégalité change de sens*; car *cela revient à faire passer les termes d'un membre dans l'autre.*

THÉORÈME II. — *On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un nombre positif. sans changer le sens de l'inégalité.*

Ainsi, les inégalités

$$A > B,$$
$$Am > Bm,$$

sont équivalentes, pourvu que m soit un nombre positif.

En effet, la différence $A - B$ étant positive, le produit de cette quantité par le nombre positif m est aussi positif, c'est-à-dire qu'on a

$$Am - Bm > 0;$$

d'où je conclus

$$Am > Bm.$$

COROLLAIRE I. — *Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, il faut changer le sens de l'inégalité.*

Ainsi, les deux inégalités

$$A > B,$$
$$A(-5) < B(-5),$$

sont équivalentes.

En effet, le produit de la différence positive $A - B$ par le nombre négatif (-5) étant négatif, on a

$$A(-5) - B(-5) < 0,$$

et par suite

$$A(-5) < B(-5).$$

COROLLAIRE II. — *Lorsqu'une inégalité a des termes fractionnaires, on peut réduire tous les termes de cette inégalité au même dénominateur, et supprimer ensuite ce dénominateur s'il est positif. Dans le cas contraire, il faut changer le sens de l'inégalité.*

Ce théorème est évident ; car supprimer le dénominateur commun, c'est multiplier les deux membres de l'inégalité par ce nombre, qui peut être positif ou négatif. S'il est positif, l'inégalité n'est pas changée ; au contraire, s'il est négatif, le sens de la nouvelle inégalité est inverse de celui de la première.

THÉORÈME III. — *On peut ajouter membre à membre plusieurs inégalités de même sens, sans changer le sens des inégalités.*

Soient $A > B$, que nous mettrons sous la forme $A - B > 0$

$A' > B'$, $\quad A' - B' > 0$,

$A'' > B''$, $\quad A'' - B'' > 0$

La somme de trois nombres positifs étant positive, on a

$$A - B + A' - B' + A'' - B'' > 0,$$

d'où (Th. I, Cor.)

$$A + A' + A'' > B + B' + B''.$$

THÉORÈME IV. — *On peut retrancher membre à membre deux inégalités de sens contraire, en gardant le sens de celle dont on retranche l'autre.*

Soient $A > B$, que nous mettrons sous la forme $A - B > 0$,

$A' < B'$, $\quad B' - A' > 0$.

La somme de deux nombres positifs étant positive, on a

$$A - B + B' - A' > 0,$$

d'où (Th. I, Cor.)

$$A - A' > B - B'.$$

REMARQUE. — On aurait pu déduire de $A > B$ l'inégalité (Th. II)

$$A - A' > B - A',$$

or, A' étant plus petit que B', on aura

$$B - A' > B - B',$$

donc *à fortiori*

$$A - A' > B - B'.$$

THÉORÈME V. — *On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens, en gardant le sens de ces inégalités, si tous leurs membres sont positifs, et en le changeant s'ils sont tous négatifs.*

Nous regarderons les lettres comme représentant des nombres positifs, et nous mettrons le signe — devant pour avoir des nombres négatifs.

Soient les inégalités

$$A < B,$$
$$A' < B'.$$

Nous aurons par le théorème II, appliqué à la première

$$AA' < BA',$$

de même $-BA' < AA'$

$$BA' < BB',$$

donc *à fortiori* $BA' - BA' < BB' - AA'$

$$AA' < BB'.$$

On arriverait au même résultat en ajoutant membre à membre les inégalités modifiées

$$AA' + BA' < BA' + BB',$$

et retranchant BA' aux deux membres.

Soient encore les inégalités

$$-A < -B,$$
$$-A' < -B'.$$

On peut les écrire

$$A > B,$$
$$A' > B',$$

donc

$$AA' > BB'.$$

Remarque. — Cette dernière partie du théorème encore vraie si on multiplie un nombre pair d'inégalités, ne l'est plus s'il y en a un nombre impair, on doit alors garder le sens des inégalités. Si l'on considérait une troisième inégalité

$$-A'' < -B'',$$

on aurait bien

$$AA'A'' > BB'B'',$$

d'où

$$-AA'A'' < -BB'B'',$$

or dans ce cas le produit des trois premiers membres est $-AA'A''$, tandis que précédemment, le produit des deux premiers membres était AA'.

Théorème VI. — *On peut diviser membre à membre deux inégalités de sens contraire, en gardant le sens de l'inégalité dividende si tous les membres sont positifs, en le changeant si tous les membres sont négatifs.*

Soient les inégalités

$$A > B, \qquad B < A$$
$$A' < B'.$$

La première inégalité donne (Th. II)

$$\frac{A}{A'} > \frac{B}{A'},$$

or quand deux fractions ont le même numérateur celle qui a le plus petit dénominateur est la plus grande, donc

$$\frac{B}{A'} > \frac{B}{B'},$$

et *à fortiori*

$$\frac{A}{A'} > \frac{B}{B'}.$$

Soient ensuite les inégalités

$$-A > -B,$$
$$-A' < -B',$$

que l'on peut écrire

$$A < B,$$
$$A' > B',$$

donc

$$\frac{A}{A'} < \frac{B}{B'}.$$

$\frac{A}{A'}$ et $\frac{B}{B'}$ sont les quotients des divisions de $-A$ par $-A'$ et de $-B$ par $-B'$.

THÉORÈME VII. — *On peut élever à une puissance quelconque les deux membres d'une inégalité, sans en changer le sens, s'ils sont positifs ; on peut élever les deux membres d'une inégalité à une puissance paire en changeant le sens, et à une puissance impaire sans changer le sens, s'ils sont négatifs.*

Soit une inégalité à membres positifs

$$A < B.$$

Élever ses deux membres à une puissance quelconque, c'est multiplier membre à membre plusieurs inégalités identiques, donc (Th. V)

$$A^n < B^n.$$

Soit ensuite une inégalité à membres négatifs

$$-A < -B,$$

qui revient à

$$A > B.$$

Nous en tirerons

$$A^{2n+1} > B^{2n+1},$$

qui revient à

$$-A^{2n+1} < -B^{2n+1},$$

ou

$$(-A)^{2n+1} < (-B)^{2n+1}.$$

Mais si la puissance est paire

$$A^{2n} > B^{2n},$$

donc, puisque $(-A)^{2n}$ est égal à A^{2n},

$$(-A)^{2n} > (-B)^{2n}.$$

THÉORÈME VIII. — *En extrayant des racines paires des deux membres d'une inégalité à membres positifs, les racines positives donnent une inégalité de même sens et les racines négatives une inégalité de sens contraire; en extrayant des racines impaires des deux membres d'une inégalité quelconque, on obtient une inégalité de même sens.*

Soit une inégalité à membres positifs

$$A > B.$$

La racine $2n^{\text{ième}}$ de A n'est pas égale à la racine $2n^{\text{ième}}$ de B, ni plus petite, car alors sa puissance $2n$ qui est A serait égale à B ou plus petite, ce qui est contraire à l'hypothèse ; on a donc

$$\sqrt[2n]{A} > \sqrt[2n]{B},$$

et par suite, en prenant les valeurs négatives des racines des deux membres,

$$-\sqrt[2n]{A} < -\sqrt[2n]{B}.$$

Passons aux racines impaires, si nous supposons d'abord les deux membres positifs

$$A > B,$$

nous aurons par un raisonnement analogue au précédent

$$\sqrt[2n+1]{A} > \sqrt[2n+1]{B};$$

si les deux membres sont négatifs

$$-A > -B,$$

d'où (Th. I, Cor. 2)

$$A < B,$$

nous aurons

$$\sqrt[2n+1]{A} < \sqrt[2n+1]{B},$$

d'où (Th. I, Cor. 2)

$$-\sqrt[2n+1]{A} > -\sqrt[2n+1]{B},$$

et comme on a

$$-\sqrt[2n+1]{A} = \sqrt[2n+1]{-A},$$

on a finalement

$$\sqrt[2n+1]{-A} > \sqrt[2n+1]{-B}.$$

Si les deux membres sont de signe contraire, le plus petit est négatif

$$A > -B,$$

et sa racine $2n+1^{\text{ème}}$ qui est négative est plus petite que celle de l'autre membre qui est positive

$$\sqrt[2n+1]{A} > \sqrt[2n+1]{-B}.$$

2. — Cas dans lequel les inégalités contiennent des inconnues.

Les théorèmes qui précèdent sont aussi applicables à ce nouveau genre d'inégalités; mais les démonstrations ne sont plus les mêmes, parce que, dans ce cas, il faut prouver que les valeurs des inconnues qui satisfont aux inégalités données ne sont pas changées par ces transformations. Comme le mode de raisonnement est uniforme, je n'en donnerai qu'un exemple.

THÉORÈME IX. — *On ne change pas les valeurs des inconnues qui satisfont à une inégalité en ajoutant une même quantité aux deux membres de cette inégalité.*

Soient les deux inégalités

$$A > B,$$
$$A + C > B + C,$$

dans lesquelles les quantités A, B, C sont des polynômes contenant un nombre quelconque d'inconnues ; je dis qu'elles sont équivalentes.

Je suppose que ces deux inégalités renferment les inconnues x, y, et que la première soit satisfaite par les nombres

$$x = 1, \qquad y = 3 ;$$

ces nombres satisfont aussi à la seconde. En effet, leur substitution dans l'inégalité

$$A > B$$

transforme ses deux membres en deux nombres dont le premier est plus grand que le second ; si j'ajoute à chacun de ces nombres la valeur correspondante de C, la première somme sera plus grande que la seconde. Or ces deux sommes sont les valeurs que prennent les polynômes $A + C$, $B + C$, lorsqu'on y remplace x par 1 et y par 3 ; donc ces nombres satisfont aussi à la seconde inégalité.

Je démontrerais de même que, *réciproquement*, les nombres qui satisfont à la seconde inégalité conviennent aussi à la première ; par conséquent ces inégalités sont équivalentes.

Remarque. — Je conclus de ce qui précède qu'on peut réduire tous les termes d'une inégalité au même dénominateur lorsqu'elle contient des termes fractionnaires, puis supprimer le dénominateur commun, s'il est positif. Mais, s'il est négatif, il faut changer le sens de l'inégalité.

Résolution d'une inégalité du premier degré à une seule inconnue.

Pour résoudre une inégalité du premier degré à une seule inconnue, on réduit tous ses termes au même dénominateur, on supprime ensuite ce dénominateur. On rassemble dans l'un des membres les termes qui renferment l'inconnue, et dans l'autre ceux qui ne la contiennent pas. On fait ensuite les opérations indiquées dans chacun des membres, et l'on divise celui qui ne renferme pas l'inconnue par le coefficient de cette quantité. On trouve ainsi une limite inférieure ou supérieure de l'inconnue. Cette règle a la plus grande analogie avec celle qu'il faut suivre pour résoudre une équation du premier degré, à une seule inconnue.

Exemple I. — Résoudre l'inégalité

$$2x - \frac{4}{3} + \frac{x}{2} > 5 + x.$$

Je réduis tous ses termes au dénominateur 6, et je supprime ce dénominateur ; je trouve ainsi :

$$12x - 8 + 3x > 30 + 6x.$$

Je fais ensuite passer tous les termes qui contiennent x dans le premier membre, et j'ai

$$12x + 3x - 6x > 30 + 8,$$

ou

$$9x > 38,$$

et enfin

$$x > \frac{38}{9}.$$

Par conséquent, l'inconnue peut avoir pour valeur tout nombre plus grand que $\frac{38}{9}$, qui est sa limite inférieure.

Exemple II. — Résoudre l'inégalité

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{3} < \frac{2}{3} - \frac{x}{2}.$$

Je réduis tous les termes au même dénominateur, et je supprime ce dénominateur ; il vient

$$3 + 2x < 4 - 3x ;$$

je transporte le terme $3x$ dans le premier membre et le terme numérique 3 dans le second ; j'ai dès lors

$$5x < 1,$$

et, par suite,

$$x < \frac{1}{5}.$$

On peut donc prendre pour valeur de l'inconnue x un nombre négatif quelconque et tout nombre positif, plus petit que $\frac{1}{5}$, qui est sa limite supérieure.

EXERCICES.

1° — Deux personnes ont l'une 20 ans et l'autre 34 ; à quelle époque de leur existence l'âge de la seconde a-t-il été ou sera-t-il le double de celui de la première ?

(*Rép.* Il y a 6 ans.)

2° — Trois points A, B, C sont en ligne droite ; les distances du premier aux deux autres sont respectivement égales à 2^m et 5^m. On demande de trouver sur le prolongement de AC un point dont la distance au point B soit moyenne proportionnelle entre ses distances aux deux autres A et C.

(*Rép.* Si on prend pour inconnue la distance du point cherché au point A, et qu'on la compte positivement dans le sens AB, on la trouve égale à -4^m.)

Généraliser et discuter ce problème.

3°. — Calculer les côtés d'un rectangle inscrit dans un triangle dont la base et la hauteur sont connues, en supposant le périmètre du rectangle donné.

(*Rép.* Si on représente par b et h la base et la hauteur du triangle, par x et y celles du rectangle placé sur le côté b, et par $2p$ le périmètre donné de ce quadrilatère, on trouve :

$$x = \frac{b(p-h)}{b-h} \quad \text{et} \quad y = \frac{h(b-p)}{b-h}\Big).$$

Chercher ce que devient cette solution, lorsque le rectangle, placé sur le côté b du triangle, a deux de ses sommets sur les prolongements des deux autres côtés du triangle.

4° — Un aréomètre à poids constant s'enfonce jusqu'en B dans un liquide dont la densité est 1,5, jusqu'en A dans l'eau distillée à 4°,6 ; on divise la partie AB de la tige en 100 parties d'égal volume, le zéro étant marqué au point B. On demande à combien de divisions de la tige équivaut le volume de la partie de l'aréomètre située au dessous du zéro. ; à combien de divisions équivaut le volume d'eau qui pèserait autant que l'aréomètre, et à quelle division se fera l'affleurement dans un liquide dont la densité est d. Donner à d la valeur 1,7 et interpréter la solution négative que l'on trouve.

5° — On mélange dans un calorimètre 2^k de mercure à 20° au dessus de zéro avec 3^k de fer à 15° au dessous, on demande la température finale. On mettra le problème en équations en la supposant au dessus de zéro, et on interprètera la solution négative,

6° — Deux droites rectangulaires se coupent en O, sur l'une d'elles on prend dans le même sens des longueurs OA et OA' à peu près double de OA que l'on désigne par a et a', sur l'autre OB et OB' très-peu supérieure à OB, que l'on désigne par b et b'; les droites AB et A'B', qui joignent deux à deux les quatre points A, A', B et B', se rencontrent en un point M, on demande les distances x et y de ce point M aux droites OB et OA. On examinera le cas où l'on aurait $a > a'$, $b < b'$ et $ab' > ba'$, et on interprètera la solution négative. On démontrera que si les longueurs OA et OA' sont portées en sens contraire, il n'y a qu'à changer leurs signes dans les équations, et à interpréter comme précédemment les valeurs négatives de x.

7° — Un prisme vertical de longueur a et de densité d flotte dans un bain composé d'une couche liquide dont l'épaisseur est a', la densité d', sous laquelle se trouve une couche d'épaisseur indéfinie et de densité d'' supérieure à d' ; on demande de calculer la distance x de la base inférieure du prisme au niveau inférieur du premier liquide, et les distances y et z de sa base supérieure aux niveaux supérieurs des deux liquides. On mettra le problème en équations en supposant que le prisme émerge à sa partie supérieure, et plonge dans le second liquide à sa partie inférieure.

Faire ensuite les hypothèses :

$$a = 10,\ a' = 8,\ d = 0{,}9,\ d' = 1{,}2,\ d'' = 13{,}6,$$

et dire si la valeur négative trouvée s'interprète, puis trouver la véritable solution.

Faire les hypothèses

$$a = 8{,}1,\ a' = 8,\ d = 2{,}5,\ d' = 1{,}2,\ d'' = 13{,}6,$$

et dire si la valeur négative trouvée s'interprète, puis trouver la véritable solution.

8° — On mélange 12^k de glace à 20° au dessous de zéro, et dont la capacité calorifique est 0,5 avec 2^k d'eau à 15° au dessus de zéro, quelle sera la température finale du mélange ?

On supposera d'abord la température finale au dessus de zéro, on trouvera un résultat négatif, pour voir s'il s'interprète on remettra le problème en équation en supposant la température finale inférieure à zéro, on trouvera encore un résultat négatif. La température finale ne pourra être ni supérieure ni inférieure à zéro, elle sera zéro. On cherchera alors combien il peut y avoir de glace fondue, et on trouvera une solution négative, qui s'interprètera, et indiquera le poids de l'eau solidifiée au contact de la glace.

9° — Résoudre l'inégalité

$$\frac{1}{2}+\frac{x}{4}<\frac{2}{3}-\frac{x}{2}.$$

$\left(Rép. \quad x<\frac{2}{9}\right).$

10° — Prouver : 1° que si la quantité $\frac{a}{b}$ dont les deux termes sont positifs est moindre que l'unité, on a

$$\frac{a-m}{b-m}<\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m},$$

m étant une quantité positive quelconque;

2° Que si $\frac{a}{b}$ est plus grand que l'unité, on a au contraire

$$\frac{a-m}{b-m}>\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m},$$

11° — Démontrer que si tous les termes des fractions $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$, sont positifs, la quantité $\frac{a+a'+a''+\ldots\ldots}{b+b'+b''+\ldots\ldots}$ est plus grande que la plus petite de ces fractions, et plus petite que la plus grande.

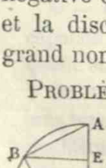
QUATORZIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Des cas d'impossibilité et d'indétermination

I. — Des cas d'impossibilité.

1. — L'impossibilité d'un problème numérique ne se manifeste pas seulement par des valeurs négatives des inconnues, comme dans le problème III de la leçon précédente. Quand il s'agit de grandeurs discontinues, c'est-à-dire croissant d'unité en unité et non par degrés insensibles, comme les collections d'hommes ou d'objets de même espèce, on conçoit que les valeurs des inconnues doivent être entières, et que le problème est impossible quand elles sont fractionnaires, cette restriction ne peut être écrite dans les équations, qui sont dès lors plus générales que l'énoncé du problème. Quelquefois la valeur d'une inconnue doit être comprise entre des limites imposées par la question elle-même, si l'on trouve qu'elle dépasse ces limites le problème est impossible, mais dans ce cas il y a ordinairement quelque autre inconnue dont la valeur serait négative ou imaginaire ; il y a donc avantage pour la résolution et la discussion d'un problème à prendre et à calculer le plus grand nombre d'inconnues possible.

PROBLÈME I. — *Couper la sphère* CA *par un plan* BE, *perpendiculaire au diamètre* AG, *de manière que la différence des deux zones* BG, BA, *que ce plan détermine soit égale à un cercle donné.*



Soit r le rayon CA de la sphère et a celui du cercle donné ; désignons par x la hauteur GE de la plus grande zone, celle de la plus petite, qui est AE, sera représentée par $2r - x$. L'aire de la zone ayant pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle par sa hauteur, l'énoncé du problème se traduit par l'équation

$$2\pi rx - 2\pi r(2r - x) = \pi a^2,$$

d'où nous tirons

$$4rx = a^2 + 4r^2,$$

et par suite

$$x = \frac{a^2 + 4r^2}{4r}.$$

Cette valeur de x ne convient à la question proposée qu'autant qu'elle est moindre que le diamètre de la sphère, car, si elle est plus grande, le plan demandé ne coupe plus la sphère. Le problème proposé est donc impossible toutes les fois que l'on trouve pour x une valeur plus grande que $2r$; mais il sera possible si l'on a

$$\frac{a^2 + 4r^2}{4r} \leqslant 2r,$$

ou (12 et 13, Th. II)

$$a^2 + 4r^2 \leqslant 8r^2,$$

ou (12 et 13, Th. I)

$$a^2 \leqslant 4r^2,$$

ou enfin

$$\pi a^2 \leqslant 4\pi r^2.$$

Cette condition est évidente *à priori,* car la différence πa^2 des deux zones doit être moindre que la surface $4\pi r^2$ de la sphère.

Si nous avions désigné par y la hauteur EA de la plus petite zone, nous aurions eu pour traduction de l'énoncé

$$2\pi rx + 2\pi ry = \pi a^2,$$

avec la condition

$$x + y = 2r,$$

d'où

$$y = 2r - x,$$

et en éliminant y

$$2\pi rx - 2\pi r(2r - x) = \pi a^2,$$

d'où l'on tirerait comme précédemment

$$x = \frac{a^2 + 4r^2}{4r},$$

alors on a

$$y = 2r - \frac{a^2 + 4r^2}{4r},$$

$$y = \frac{4r^2 - a^2}{4r}.$$

Cette valeur de y n'est admissible que si l'on a

$$a^2 \leqslant 4r^2,$$

et l'impossibilité du problème est manifestée par une valeur négative de y.

2. — Un problème peut être impossible parce que son énoncé renferme des conditions absurdes ou contradictoires. Les valeurs des inconnues prennent alors des formes particulières qui manifestent l'impossibilité.

Supposons d'abord que le problème proposé n'ait qu'une inconnue.

PROBLÈME II. — *Trouver un nombre tel que la somme de sa moitié et de son tiers surpasse de 6 unités le quintuple de l'excès du quart de ce nombre sur le douzième.*

Soit x le nombre demandé ; on a l'équation

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5\left(\frac{x}{4} - \frac{x}{12}\right) + 6.$$

En réduisant tous ses termes au même dénominateur, on trouve

$$10x = 10x + 72.$$

Comme cette nouvelle équation est équivalente à l'équation proposée, et qu'elle exprime une condition évidemment absurde, quelle que soit la valeur attribuée à x, on en conclut que le problème proposé est impossible.

On peut reconnaître *à priori* cette impossibilité, car la moitié et le tiers d'un nombre valent ensemble les $\frac{5}{6}$ de ce nombre, et l'excès du quart sur le douzième égale $\frac{1}{6}$; par conséquent le problème peut être énoncé de la manière suivante : *Trouver un nombre dont les $\frac{5}{6}$ surpassent de 6 unités les $\frac{5}{6}$ de ce nombre.* Sous cette forme, l'absurdité et, par suite, l'impossibilité de la question deviennent évidentes.

Remarque. — Si, dans l'énoncé du problème précédent, on remplace le quintuple de l'excès par m fois l'excès, l'équation devient

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=m\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{12}\right)+6,$$

et l'on en déduit

$$x=\frac{36}{5-m}.$$

On voit par cette formule que le problème est toujours possible pourvu qu'on ne donne à m que des valeurs inférieures à 5.

Lorsqu'on suppose m égal à 5, l'inconnue x prend la forme $\frac{36}{0}$ qui ne signifie rien, puisque l'on ne peut prendre zéro pour diviseur d'une division.

En faisant la même hypothèse dans l'équation du problème, c'est-à-dire en y remplaçant m par 5, on reconnaît que le problème est impossible, car son équation qui devient alors

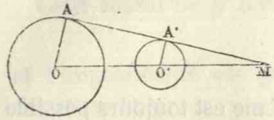
$$10x=10x+72,$$

exprime une condition absurde. Comme on a remarqué qu'en général les formules des inconnues d'un problème donnent des résultats de la forme $\frac{\text{N}}{0}$, N étant un nombre quelconque, autre que zéro, lorsque ce problème est impossible, on regarde la notation $\frac{\text{N}}{0}$ comme un *symbole d'impossibilité.*

Si dans la formule $\frac{36}{5-m}$, on fait croître le nombre m depuis 0 jusqu'à 5 exclusivement, le dénominateur $5-m$ diminue d'une manière continue, et la fraction $\frac{36}{5-m}$ croît indéfiniment. On dit souvent que la valeur de l'inconnue x est infinie quand m égale 5, et l'on représente cette valeur par le signe ∞, qui a la forme du chiffre 8 couché ; il faut entendre par là que la valeur de x croît de manière à dépasser toute grandeur donnée quand m s'approche indéfiniment d'être égal à 5 ; on ne doit pas dire que x tend vers une limite infinie quand m tend vers 5, puisque, dans ce cas précisément, il n'y a pas de limite que x ne puisse dépasser.

PROBLÈME III. — *On mène la tangente commune extérieure à deux circonférences de rayons* r *et* r′ *et l'on demande de trouver à quelle distance du centre de la seconde, que nous supposerons la plus petite, elle rencontre la ligne des centres.*

Soit AA′ la tangente commune extérieure aux deux circonférences dont les centres sont O et O′, et les rayons r et r', soit M le point de rencontre cherché, et désignons par x la distance inconnue O′M et par d la distance connue OO′ des deux centres. Si nous menons les rayons OA et O′A′ qui aboutissent aux points de contact, nous aurons deux triangles semblables AOM et A′O′M, qui donnent



$$\frac{\mathrm{O'M}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{O'A'}}{\mathrm{OA}},$$

ou en substituant aux lignes leurs expressions algébriques,

$$\frac{x}{d+x} = \frac{r'}{r},$$

d'où (page 83. Rem.)

$$\frac{x}{d} = \frac{r'}{r - r'},$$

et enfin

$$x = \frac{dr'}{r - r'}.$$

Quand on suppose r' égal à r, la valeur de x prend la forme $\frac{\mathrm{N}}{0}$, le problème devient impossible, la tangente commune ne rencontre pas la ligne des centres, elle lui est donc parallèle ; et si l'on dit que dans ce cas la valeur de x est infinie, c'est à peu près comme on dit en géométrie que deux parallèles se rencontrent à l'infini ; ce qui est exact, c'est que le point de rencontre est d'autant plus éloigné que le rayon r' s'approche davantage d'être égal à r, et qu'il peut s'éloigner au delà de toute distance donnée.

Supposons maintenant que le problème proposé conduise à plusieurs équations, les conditions de l'énoncé exprimées par ces équations peuvent être contradictoires, le problème est alors impossible.

PROBLÈME IV. — *Trouver un nombre de deux chiffres tel que le chiffre des dizaines surpasse de deux unités le chiffre des unités, et que, si de ce nombre on retranche* 9, *on trouve un reste composé des deux mêmes chiffres dans l'ordre inverse.*

Soit x le chiffre des dizaines et y celui des unités, nous aurons

$$x = y + 2,$$

et

$$10x + y - 9 = 10y + x.$$

Substituons à x sa valeur dans la seconde équation il vient

$$10(y + 2) + y - 9 = 10y + y + 2,$$

or y disparaît de cette équation, qui se réduit à l'égalité évidemment fausse

$$11 = 2.$$

La seconde équation peut se mettre sous la forme

$$x = y + 1,$$

elle exprime donc une condition contradictoire à la première, et le problème est impossible.

3. — L'impossibilité d'un problème peut encore se manifester parce qu'il renferme plus de conditions qu'il n'a d'inconnues. On est alors conduit à un système d'équations contenant plus d'équations que d'inconnues. Il est généralement impossible qu'un même système de valeurs des inconnues satisfasse à la fois à toutes les équations.

Soit par exemple un système de $m + n$ équations contenant seulement m inconnues ; on choisit parmi elles m équations qui renferment les m inconnues. On résout ensuite ce système de m équations à m inconnues d'après la méthode précédente. Si les valeurs qu'on trouve pour les m inconnues satisfont aux n autres équations, le système des $m + n$ équations données a une solution ; dans l'hypothèse contraire, les $m + n$ équations sont contradictoires, et le problème qui a conduit à ces équations est impossible.

Lorsque quelques-uns des coefficients des $m + n$ équations sont algébriques, les égalités qu'on obtient en substituant les valeurs des m inconnues dans les n équations qui n'ont pas servi à les calculer expriment les conditions auxquelles les coefficients indéterminés doivent satisfaire, pour que les $m + n$

équations données aient une solution commune. Aussi, on donne à ces égalités le nom d'*équations de condition* ; le nombre de ces équations est généralement égal à l'excès du nombre des équations données sur celui des inconnues.

Soit proposé de résoudre le système des trois équations

$$ax - by = c,$$
$$bx - ay = d,$$
$$a(cx - dy) = c^2 + d^2,$$

qui ne contiennent que deux inconnues ; la résolution des deux premières équations donne

$$x = \frac{ac - bd}{a^2 - b^2}, \quad \text{et} \quad y = \frac{bc - ad}{a^2 - b^2}.$$

En substituant ces valeurs de x et y dans la troisième équation, on trouve que les quatre coefficients indéterminés a, b, c, d, doivent satisfaire à l'*équation de condition*

$$b^2(c^2 + d^2) = 2abcd,$$

c'est-à-dire que, si l'on donne des valeurs arbitraires à trois de ces coefficients, la valeur du quatrième doit être déduite de l'équation de condition. Ainsi, en prenant

$$b = 6, \quad c = 3, \quad d = 1,$$

on trouve 10 pour la valeur de a, calculée au moyen de la formule

$$a = \frac{b(c^2 + d^2)}{2cd}.$$

Les valeurs correspondantes des inconnues x et y sont

$$x = \frac{3}{8}, \quad y = \frac{1}{8}.$$

4. — Remarque. — Lorsqu'un problème numérique est impossible, on peut se proposer de le transformer en un autre qui soit possible. Cette question, qui n'offre qu'un intérêt de curiosité, est généralement indéterminée ; car on peut la résoudre en changeant les valeurs de quelques-unes des données, ou les relations qui existent entre elles.

Si on ne veut changer que les valeurs des données, on généralise le problème, en remplaçant ces données par des lettres ; la discussion des formules fait connaître entre quelles limites on doit prendre les valeurs des coefficients algébriques pour que le problème soit possible. Nous avons résolu déjà un assez grand nombre de questions de ce genre, pour qu'il soit inutile d'en traiter de nouvelles.

Lorsqu'on veut changer les relations qui existent entre les données, la question devient d'une indétermination absolue. Si l'impossibilité est indiquée par une valeur négative d'une inconnue, et qu'on veuille conserver non-seulement les valeurs numériques des données, mais encore les équations du problème, il faut changer dans ces équations le signe de l'inconnue dont la valeur est négative, et chercher à modifier l'énoncé du problème de manière que le système des équations transformées soit la traduction algébrique du nouvel énoncé. Si cet énoncé a un sens raisonnable, on aura rendu possible le problème proposé.

PROBLÈME V. — *Payer 146 francs avec 25 pièces de 2 francs et de 5 francs.*

Soient x le nombre des pièces de 2 francs et y celui des pièces de 5 francs, on a, d'après l'énoncé du problème :

$$x + y = 25,$$

et

$$2x + 5y = 146.$$

En résolvant ces équations, on trouve

$$x = -7 \quad \text{et} \quad y = 32;$$

donc le problème proposé est impossible. On reconnaît immédiatement cette impossibilité, en remarquant que 25 pièces de la plus grande monnaie, c'est-à-dire 25 pièces de 5 francs, ne valent que 125 francs ; par conséquent 25 pièces de 2 francs et de 5 francs doivent former une somme moindre que 125 et, *à fortiori*, moindre que 146.

Pour transformer ce problème en un autre qui soit possible, je remplace x par $-x$ dans les deux équations données qui deviennent, par suite,

$$y - x = 25,$$
$$5y - 2x = 146,$$

et donnent lieu à l'énoncé suivant : *Une personne, qui n'a que des pièces de 5 francs, veut payer 146 francs à un marchand, qui ne peut lui rendre que des pièces de 2 francs. Trouver comment le paiement a été fait, en sachant que la différence des* *deux nombres de pièces de* 5 *francs et de* 2 *francs qui ont été échangées est égale à* 25.

Il importe de remarquer que le système des équations, après la transformation précédemment indiquée, n'est pas toujours susceptible d'un énoncé ayant un sens raisonnable.

II. — Cas d'indétermination.

Un problème peut avoir un nombre illimité de solutions : 1° lorsqu'il conduit à des équations qui sont des identités ; 2° lorsque le nombre des équations qu'on déduit de son énoncé est moindre que celui des inconnues, ou que ce nombre d'équations étant égal à celui des inconnues, ces équations ne sont pas distinctes et sont des conséquences les unes des autres. Je vais examiner successivement chacun de ces cas.

1. — PROBLÈME VI. — *Trouver un nombre dont la somme de la moitié et du tiers surpasse de* 25 *unités les* $\frac{5}{6}$ *de l'excès de ce nombre sur* 30.

Soit x le nombre demandé, on a l'équation

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-25=\frac{5}{6}\left(x-30\right);$$

en réduisant tous ses termes au même dénominateur, et supprimant le dénominateur commun, on trouve l'identité

$$5x-150=5x-150,$$

qui est vérifiée par toute valeur attribuée à x. Le problème proposé a donc une infinité de solutions ; il est dès lors indéterminé.

REMARQUE. — Si on remplace dans l'énoncé de ce problème le nombre 25 par la lettre a et le nombre $\frac{5}{6}$ par la lettre r, l'équation devient

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-a=r(x-30),$$

et l'on en déduit

$$x=\frac{6(a-30r)}{5-6r}.$$

Lorsqu'on n'admet pour l'inconnue x que des valeurs positives, cette formule montre que le problème est possible et déterminé, si l'on a

$$r < \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad a > 30r,$$

ou bien

$$r > \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad a < 30r.$$

Ainsi, en prenant, par exemple, r égale à $\frac{1}{6}$ et a égale à 37, on trouve

$$x = 48.$$

Si on suppose dans la même formule

$$r = \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad a = 30r = 25,$$

on rentre dans le cas du problème proposé, et la formule donne

$$x = \frac{0}{0},$$

résultat qui ne signifie rien.

Or cette dernière équation est toujours déduite d'une autre ayant la forme

$$0 \times x = 0,$$

qui est évidemment satisfaite quand on y remplace x par n'importe quel nombre, c'est-à-dire qu'elle est indéterminée ; aussi on regarde la notation $\frac{0}{0}$ comme le *symbole de l'indétermination*.

2. — Nous avons déjà vu (7, 8 et 9) qu'un système d'équations qui contient moins d'équations que d'inconnues est indéterminé, et admet une infinité de solutions. Il arrive souvent qu'en mettant un problème en équations on écrit des équations, en nombre égal à celui des inconnues, qui au premier abord semblent différer, mais dont l'une est équivalente à une autre ou la conséquence de plusieurs autres, alors cette équation peut remplacer une des autres, et ne forme pas réellement une équation nouvelle ; il y a encore indétermination.

Problème VII. — *Trouver un nombre de deux chiffres tel que le chiffre des dizaines surpasse d'une unité celui des unités,* *et que, si de ce nombre on retranche* 9, *on trouve un reste composé des mêmes chiffres dans l'ordre inverse.*

Soit x le chiffre des dizaines, et y celui des unités, on a d'après l'énoncé

$$x = y + 1,$$

et

$$10x + y - 9 = 10y + x.$$

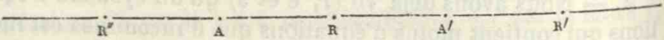
Cette seconde équation ne semble pas au premier abord équivalente à la première ; mais, par des transformations qui n'altèrent en rien ses solutions, elle devient successivement

$$9x = 9y + 9,$$
$$x = y + 1.$$

Le problème ayant deux inconnues, et n'ayant en réalité qu'une équation, est indéterminé, et il admettrait une infinité de solutions, si, par la nature de la question, les valeurs des inconnues ne devaient être positives, entières et inférieures à 10 ; il n'y a alors que les nombres 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87 et 98 qui répondent à la question.

Je vais donner un dernier exemple, qui offre une application remarquable de la théorie des quantités négatives, et dont la discussion conduit à l'examen de tous les cas d'impossibilité et d'indétermination qui viennent d'être signalés.

Problème VIII. — *Deux mobiles qui parcourent d'un mouvement uniforme une même ligne droite avec des vitesses de* v *et* v′ *kilomètres par heure, passent actuellement, le premier au point* A *et le second au point* A′. *On demande de déterminer le lieu de leur rencontre, en supposant la distance* AA′ *égale à* d.



Je prends le point A pour l'origine des distances, et je compte les distances positives dans le sens AA′ ; il en résulte que le nombre d est positif. Soient x la distance du premier mobile au point A au bout d'un nombre d'heures égal à t, et x' celle du second mobile à la même origine après t heures ; les équations du problème sont évidemment, d'après la formule du mouvement uniforme,

$$x = vt,$$
$$x' = d + v't, \quad \text{et} \quad x = x'.$$

Je remplace x et x' par leurs valeurs dans la troisième équation qui devient par suite :

$$vt = d + v't.$$

En résolvant cette équation par rapport à t, je trouve :

$$t = \frac{d}{v - v'},$$

et j'en déduis

$$x = x' = \frac{dv}{v - v'}.$$

Pour discuter ces formules, je suppose que le premier mobile se meuve de A vers A′, et je regarde comme positives les vitesses qui ont ce sens, v est donc positif. Quant à la vitesse v' du second mobile, elle peut être de même sens ou de sens contraire, positive ou négative.

1° Si v' est un nombre négatif, c'est-à-dire si le second mobile se meut dans le sens A′A, $v - v'$ est une somme positive plus grande que v. Dès lors les deux inconnues t et x sont positives, et la seconde est plus petite que d. Donc les mobiles qui vont l'un vers l'autre se rencontreront en un point R situé entre leurs positions actuelles A et A′, ce qui est évidemment vrai. Lorsqu'on suppose en outre les vitesses égales, on a

$$v' = -v,$$

et l'on trouve

$$x = \frac{d}{2};$$

résultat facile à prévoir.

2° Si v' est un nombre positif, c'est-à-dire si le second mobile va dans le même sens AA′ que le premier, cette hypothèse se décompose en trois autres :

$$v' < v, \quad v' = v, \quad v' > v.$$

Je suppose d'abord $v' < v$: les inconnues t et x sont alors positives, et x est plus grand que d, c'est-à-dire que la rencontre aura lieu à la droite des points A et A′ ; ce qui doit être.

Lorsque v' est égale a v, les valeurs de t et x prennent la forme $\frac{M}{0}$, et le problème est réellement impossible ; car les deux mobiles ont la même vitesse, et sont séparés à chaque instant par la distance d ; ils ne peuvent donc se rencontrer.

Si, à l'hypothèse $v' = v$, je joins la condition $d = 0$, les deux inconnues deviennent de la forme $\frac{0}{0}$, et le problème est indéterminé, car les deux mobiles se trouvent au point A au même instant et ont la même vitesse ; donc ils s'accompagnent constamment, et tous les points de la ligne qu'ils parcourent sont autant de lieux où ils se rencontrent.

Enfin, dans le cas de $v' > v$, les inconnues t et x sont l'une et l'autre négatives, c'est-à-dire que les mobiles se sont rencontrés en un point R″ situé à la gauche de l'origine des distances, avant le passage du second mobile au point A.

Le tableau suivant résume la discussion de ce problème :

$$v>0\begin{cases} v'<0 & \begin{cases}x>0\\ t>0\end{cases}\\ v'>0 & \begin{cases} v'<v & \begin{cases}x>0\\ t>0\end{cases}\\ v'=v & \begin{cases} d\gtrless 0 & \begin{cases}x=\infty\\ t=\infty\end{cases}\\ d=0 & \begin{cases} x=\frac{0}{0}\\ t=\frac{0}{0}\end{cases}\end{cases}\\ v'>v & \begin{cases}x<0\\ t<0\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

III. — Des fractions qui se réduisent à $\frac{0}{0}$ et des divers symboles d'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$, $\infty - \infty$.

1. — La résolution des problèmes conduit souvent à des fractions qui prennent la forme $\frac{0}{0}$ quand on y remplace une lettre par un certain nombre, comme x par a, l'indétermination n'est alors qu'apparente; pour la lever, il faut se rappeler qu'une expression qui se réduit à zéro quand x égale a est divisible par $x - a$ (4 et 5, VII, 2) ; les deux termes de la fraction sont donc divisibles par $x-a$, on peut les diviser par ce facteur, quelque grand ou petit qu'il soit, sans changer la valeur de la fraction, et la fraction simplifiée devient, quand x égale a, finie, nulle ou infinie, si elle se présentait encore sous la forme $\frac{0}{0}$, on diviserait de nouveau ses deux termes par $x-a$.

Exemple I. — $\dfrac{x^3-3x^2+14x-24}{3x^2-5x-2}$.

Cette fraction se réduit à la forme $\frac{0}{0}$, quand on y remplace x par 2, divisons ses deux termes par $x-2$ (4 et 5, VII, 2), elle devient

$$\frac{x^2-x+12}{3x+1},$$

qui, quand on y remplace x par 2, devient $\frac{14}{7}$ ou 2.

Exemple II. — $\dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^2-5x-2}$.

Cette fraction prend aussi la forme $\frac{0}{0}$ quand on y remplace x par 2 ; mais, en divisant ses deux termes par $x-2$, on la réduit à

$$\frac{x^2-x-2}{3x+1},$$

fraction qui, quand on y remplace x par 2, devient $\frac{0}{7}$ ou nulle.

Exemple III. — $\dfrac{x^3-3x^2+14x-24}{2x^3-7x^2+4x+4}$.

Cette fraction prend encore la forme $\frac{0}{0}$, quand on y remplace x par 2 ; en divisant ses deux termes par $x-2$, on la réduit à

$$\frac{x^2-x+12}{2x^2-3x-2},$$

fraction qui, quand x égale 2, devient $\frac{14}{0}$ ou infinie ; il faut toujours entendre par là que cette fraction croît indéfiniment de manière à dépasser toute grandeur donnée quand x s'approche d'être égal à 2 ; mais le problème qui a conduit à cette fraction devient impossible quand x est égal à 2.

EXEMPLE IV. — $\dfrac{x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x^3 + x^2 - 8x + 5}$.

Cette fraction prend la forme $\dfrac{0}{0}$ quand on y remplace x par 1, la division de ses deux termes par $x - 1$ la réduit à

$$\frac{x^4 - x^3 + x - 1}{2x^2 + 3x - 5},$$

qui prend encore la forme $\dfrac{0}{0}$ quand on y remplace x par 1, la division de ses deux termes par $x - 1$ la réduit enfin à

$$\frac{x^3 + 1}{2x + 5},$$

qui, quand on y remplace x par 1, devient $\dfrac{2}{7}$.

L'indétermination peut se présenter dans des fractions compliquées de radicaux ; alors on n'aperçoit pas immédiatement le facteur qu'il faut supprimer aux deux termes pour lever l'indétermination.

EXEMPLE V. — $\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4ab}}{a}$.

Cette fraction prend la forme $\dfrac{0}{0}$ quand on suppose a égal à zéro ; pour lever l'indétermination, nous ferons disparaître les radicaux du numérateur en multipliant les deux termes de la fraction par $b + \sqrt{b^2 - 4ab}$, on ferait de même disparaître les radicaux du dénominateur, s'ils y étaient placés, la fraction proposée devient ainsi

$$\frac{4ab}{a(b + \sqrt{b^2 - 4ab})},$$

ou, en divisant les deux termes par a, ce qui ne change pas la valeur de la fraction, quelque petit ou grand que soit a,

$$\frac{4b}{b + \sqrt{b^2 - 4ab}},$$

et si maintenant on suppose que a soit nul, comme la racine de b^2 est b, on a

$$\frac{4b}{2b} \quad \text{ou} \quad 2.$$

Remarque. — L'indétermination n'est qu'apparente, et peut généralement être levée, toutes les fois que c'est une même hypothèse qui annule les deux termes de la fraction; mais si les deux termes s'annulaient par des hypothèses différentes, il y aurait vraiment indétermination.

Ainsi le problème III nous a conduits à la formule

$$x = \frac{dr'}{r - r'}.$$

Si l'on suppose r' égal à r, et d nul, la valeur de x prend la forme $\frac{0}{0}$, et l'indétermination est réelle, car alors les circonférences ayant même rayon et même centre se confondent, toutes leurs tangentes sont tangentes communes et peuvent couper la ligne des centres à toute distance ; mais ce sont deux hypothèses différentes qui ont annulé les deux termes de la fraction.

2. — Souvent, dans la discussion d'un problème, on est conduit à chercher ce que devient une fraction ayant pour termes des polynômes en x, quand x augmente indéfiniment, les deux termes croissent généralement de manière à dépasser toute grandeur donnée, mais leur rapport peut tendre vers une limite finie, c'est ainsi que les secteurs de 3° et de 5° ont pour rapport $\frac{3}{5}$ dans une même circonférence ; ces secteurs croissent indéfiniment avec le rayon, sans que leur rapport cesse d'être $\frac{3}{5}$, il serait $\frac{3}{4}$ pour les secteurs de 3° et de 4°. Le rapport de deux grandeurs qui croissent indéfiniment peut donc avoir toutes les valeurs possibles, $\frac{\infty}{\infty}$ est un symbole d'indétermination, d'ailleurs on a

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc},$$

or si l'on suppose b égal à zéro et d égal à zéro, le premier membre devient $\frac{\infty}{\infty}$, et le second $\frac{0}{0}$, ces deux symboles sont donc équivalents, et par suite l'indétermination sera réelle ou apparente, selon que les deux termes deviendront infinis par deux hypothèses différentes ou par une seule, et la véritable valeur de la fraction pourra être finie, nulle ou infinie.

EXEMPLE I. — $\frac{6x^3 - 3x^2 + 5x - 1}{2x^3 - 4x + 7}$.

D'abord les deux termes de cette fraction grandissent indéfiniment quand x croît, et dépassent toute grandeur donnée ; en effet, le numérateur peut s'écrire $x^3\left(6 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$, or dans la parenthèse les termes $\frac{3}{x}$, $\frac{5}{x^2}$ et $\frac{1}{x^3}$ diminuent de plus en plus et tendent vers 0 quand x augmente, cette parenthèse a donc pour limite 6, et le produit de x^3 par 6 dépasse évidemment toute grandeur donnée quand x grandit indéfiniment.

En opérant de même sur les deux termes de la fraction, on lui donne la forme

$$\frac{x^3\left(6 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2 - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)},$$

ou en divisant les deux termes par x^3

$$\frac{6 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}};$$

or quand x croît indéfiniment, tous les termes qui ont la lettre x au dénominateur s'annulent, et la limite de la fraction est

$$\frac{6}{2} \quad \text{ou} \quad 3.$$

EXEMPLE II. — $\frac{x^3 - 3x^2 + 5x}{2x^4 + x^2 + 7}$.

Cette fraction traitée comme la précédente devient

$$\frac{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(2x+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}\right)} \quad \text{ou} \quad \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{2x+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}},$$

en négligeant les termes $\frac{3}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{1}{x}$ et $\frac{7}{x^3}$ qui tendent vers zéro, quand x croît indéfiniment, la fraction se réduit à $\frac{1}{2x}$, qui tend aussi vers zéro.

Exemple III. — $\frac{4x^3+3x^2+5x}{2x^2+x-1}$.

Cette fraction traitée comme les précédentes devient successivement

$$\frac{x^2\left(4x+3+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \quad \text{ou} \quad \frac{4x+3+\frac{5}{x}}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}},$$

et enfin

$$\frac{4x+3}{2} \quad \text{ou} \quad 2x+\frac{3}{2},$$

qui croît et dépasse toute grandeur donnée quand x croît indéfiniment.

Ainsi la fraction a une valeur finie, nulle ou infinie selon que la plus haute puissance de x du numérateur est égale, inférieure ou supérieure à celle du dénominateur.

3. — Lorsque dans un produit de deux facteurs, l'un tend vers zéro tandis que l'autre grandit indéfiniment par une certaine hypothèse, le produit peut augmenter ou diminuer, tendre vers une limite finie, vers zéro, ou grandir au delà de toute limite, $\infty \times 0$ est un symbole d'indétermination, d'ailleurs $\frac{a}{b}\times c$ est égal à $\frac{ac}{b}$, et si nous supposons à la fois b et c nuls, l'une des formules devient $\infty \times 0$ et l'autre $\frac{0}{0}$, ces deux symboles sont donc équivalents ; quand une même hypothèse rendra l'un des facteurs nul et l'autre infini, on lèvera l'indétermination comme dans le cas d'une fraction qui prend la forme $\frac{0}{0}$.

4. — Quand deux quantités augmentent indéfiniment, leur différence peut rester constante, tendre vers zéro, ou augmenter indéfiniment de manière à dépasser toute grandeur donnée ; c'est ce qu'on exprime en disant que $\infty - \infty$ est un symbole d'indétermination. Quand une même hypothèse rend les deux quantités infinies, on peut en général lever l'indétermination.

Ainsi, $x + 7$ et $x + 3$ sont deux quantités qui deviennent infinies quand x devient infini, et leur différence est constante et égale à 4. L'expression $x - \sqrt{x^2 - b^2}$ devient aussi $\infty - \infty$ quand x devient infini, mais en multipliant et divisant cette expression par $x + \sqrt{x^2 - b^2}$, on lui donne la forme $\frac{b^2}{x + \sqrt{x^2 - b^2}}$, qui fait voir qu'elle tend vers zéro quand x augmente indéfiniment, puisque, le numérateur b^2 restant fixe, le dénominateur $x + \sqrt{x^2 - b^2}$ augmente de manière à dépasser toute grandeur donnée.

Enfin, $x^2 - 2x$ est encore une expression qui devient $\infty - \infty$ quand x devient infini ; mais, en mettant x en facteur commun, on lui donne la forme $x(x - 2)$, qui fait voir qu'elle grandit au delà de toute limite, puisqu'elle est un produit de deux facteurs qui grandissent eux-mêmes au delà de toute limite.

EXERCICES.

1° — Si on prolonge le côté AC du triangle ABC au delà du sommet C, et qu'on divise en deux parties égales l'angle extérieur ainsi formé, la bissectrice rencontre le côté AB en un point dont on demande de calculer la distance au sommet A, en supposant donnés les longueurs a, b et c des trois côtés du triangle.

(*Rép.* Si l'on a fait la figure en supposant $b > a$, on trouve, en appelant x la distance cherchée, $x = \frac{bc}{b - a}$. Discuter le cas du triangle isocèle $b = a$, et le cas où b serait plus petit que a).

2° — Trouver à quelle condition les équations

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$
$$x = a'z + p',$$
$$y = b'z + q',$$

sont satisfaites par les mêmes valeurs de x, y et z, et trouver ces valeurs.

(*Rép.* L'équation de condition est

$$\frac{p' - p}{a - a'} = \frac{q' - q}{b - b'};$$

et les valeurs des inconnues sont :

$$z = \frac{p' - p}{a - a'}, \quad x = \frac{ap' - pa'}{a - a'}, \quad y = \frac{bq' - qb'}{b - b'}\Big).$$

3° — Résoudre les quatre équations à trois inconnues x, y et z :

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda'\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda'}\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

(*Rép.* Les quatre équations sont compatibles quels que soient λ et λ', et les valeurs des inconnues sont

$$x = \frac{a(\lambda\lambda' + 1)}{\lambda + \lambda'}, \quad y = \frac{b(\lambda' - \lambda)}{\lambda + \lambda'}, \quad z = \frac{c(\lambda\lambda' - 1)}{\lambda + \lambda'}\Big).$$

4° — Les quatre équations à trois inconnues

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda'\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda'}\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

sont contradictoires, lorsque les nombres λ et λ' sont inégaux, elles forment un système indéterminé si λ' est égal à λ.

5° — Trouver, lorsqu'on suppose a égal à b, la valeur de la fraction

$$\frac{a^3 + b^3 - a^2b - ab^2}{3(a-b)^2}.$$

(*Rép.* $\frac{2a}{3}$).

6° — Trouver la limite vers laquelle tend l'expression

$$3x - \sqrt{9x^2 - 4x + 1}$$

quand x augmente indéfiniment.

(*Rép.* $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$).

7° — Quelle condition doivent remplir les coefficients a, b, a' et b' pour que la fraction $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ ait toujours la même valeur quel que soit le nombre mis à la place de x?

(*Rép.* On peut égaler les deux valeurs que prend cette fraction pour $x = 1$ et $x = 3$ par exemple, et simplifier la relation obtenue; on peut aussi poser $\frac{ax+b}{a'x+b'} = m$, tirer de cette équation la valeur de x, et exprimer qu'elle est indéterminée ou de la forme $\frac{0}{0}$, en égalant les deux termes de la valeur de x à 0, et éliminant m entre ces équations on aura la relation cherchée $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$).

8° — Quelles conditions doivent remplir les coefficients a, b, c, a', b' et c' pour que la fraction $\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ ait toujours la même valeur, quel que soit le nombre mis à la place de x.

(*Rép.* $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$).

9° — Deux triangles ayant les bases b et b' sur une même droite et leurs hauteurs étant h et h', on demande de les couper par une parallèle à leurs bases, de manière que les parties de cette parallèle comprises à l'intérieur des deux triangles soient égales.

(*Rép.* En désignant par x la longueur de la parallèle comprise à l'intérieur de chacun des triangles, et par y la distance de cette parallèle à leurs bases, on trouve en supposant qu'elle passe entre les sommets et les bases, $x = \frac{bb'(h-h')}{b'h - bh'}$ et $y = \frac{hh'(b'-b)}{b'h - bh'}$.

Étudier tous les cas du problème compris dans le tableau suivant

$$\textsc{Discussion}\left\{\begin{array}{l} b > b' \left\{\begin{array}{l} h > h' \left\{\begin{array}{l} b'h > bh' \\ b'h = bh' \\ b'h < bh' \end{array}\right. \\ h = h' \\ h < h' \end{array}\right. \\ b = b' \left\{\begin{array}{l} h > h' \\ h = h' \\ h < h' \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Interpréter les valeurs négatives de x ou de y en remettant le problème en équation. Quand les hauteurs sont différentes, il y a une autre solution, la parallèle passant entre les deux sommets, on a alors

$$x = \frac{bb'(h-h')}{b'h+bh'} \quad \text{et} \quad y = \frac{hh'(b+b')}{b'h+bh'}\Big).$$

10° — Inscrire dans un triangle de base b et de hauteur h un rectangle tel que la somme de la base et de la hauteur soit p.

(*Rép.* En appelant x la base et y la hauteur, on trouve $x = \dfrac{b(h-p)}{h-b}$ et $y = \dfrac{h(p-b)}{h-b}$. Faire comme dans la question précédente le tableau de tous les cas qui peuvent se présenter selon les grandeurs relatives de h, b et p, et interpréter les solutions négatives en changeant dans l'énoncé le mot somme en différence, et en faisant passer la base du rectangle au dessus du sommet ou au dessous de la base du triangle).

11° — Trouver sur la base AC d'un triangle, que l'on suppose égale à b, un point tel que la somme des perpendiculaires z et u abaissées de ce point sur les côtés AB et BC soit égale à k, connaissant les hauteurs h et h' abaissées de A et C sur les deux autres côtés, calculer ces perpendiculaires et les distances x et y du point cherché aux points A et C.

(*Rép.* $z = \dfrac{h'(k-h)}{h'-h}$, $u = \dfrac{h(h'-k)}{h'-h}$, $x = \dfrac{b(h'-k)}{h'-h}$,

$$y = \frac{b(k-h)}{h'-h}\Big).$$

Chercher s'il n'y a pas sur la base prolongée, à droite ou à gauche, un autre point jouissant de la même propriété, et dire dans quels cas le problème est impossible ou indéterminé.

12° — Inscrire dans un rectangle ayant pour côtés b et h un autre rectangle ayant ses sommets sur chacun des quatre côtés du premier, et tel que le rapport de ses côtés soit égal à un nombre m supérieur ou égal à l'unité. Déterminer les distances x et y de ses sommets aux sommets du premier rectangle.

(*Rép.* On trouve en supposant les sommets cherchés situés sur les côtés non prolongés du rectangle donné $x=\frac{mh-b}{m^2-1}$, $y=\frac{mb-h}{m^2-1}$).

Faire le tableau de tous les cas qui peuvent se présenter suivant les valeurs comparatives de b et de h, de mh et de b, de mb et de h, interpréter les solutions négatives, et dire dans quels cas le problème est impossible ou indéterminé.

QUINZIÈME ET SEIZIÈME LEÇON

Programme. — Formules générales pour la solution d'une équation ou d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues. — Discussion complète de ces formules.

I. — Équation générale du premier degré à une seule inconnue.

Soit proposée l'équation générale

$$a + bx = c + dx$$

qui représente une équation quelconque du premier degré à une inconnue, si l'on convient de considérer les coefficients a, b, c, d, comme des nombres positifs ou négatifs. Pour résoudre cette équation, je suppose d'abord

$$b > d \quad \text{et} \quad c > a;$$

j'ai dès lors

$$x = \frac{c - a}{b - d}.$$

Cette valeur de x est positive, puisque son numérateur $c - a$ et son dénominateur $b - d$ sont positifs ; elle est en outre finie et déterminée.

Je suppose en second lieu

$$b < d \quad \text{et} \quad c < a,$$

il en résulte que

$$x = \frac{a - c}{d - b}.$$

Cette valeur de x est encore positive, finie et déterminée, comme dans le cas précédent. Si je compare maintenant les deux formules précédentes, je vois que, lorsque les termes

$a - c$, $d - b$, de la seconde sont des nombres positifs, les termes $c - a$, $b - d$, de la première sont des nombres négatifs égaux aux précédents changés de signe; donc, si j'effectue la division de $c - a$ par $b - d$ d'après la règle donnée pour les nombres négatifs, le quotient sera positif et égal à celui de la division de $c - a$ par $d - b$. Je conclus de là : 1° Qu'on peut employer la première formule dans les deux cas, en appliquant toutefois les règles du calcul des nombres négatifs, lorsque les termes de cette formule auront des valeurs numériques de ce genre ; 2° que lorsqu'on résout une équation numérique du premier degré à une seule inconnue, il n'est pas nécessaire de chercher dans quel membre on doit transporter les termes qui contiennent l'inconnue pour que les soustractions soient possibles.

Je suppose en troisième lieu

$$b > d \quad \text{et} \quad c < a;$$

la soustraction est possible dans le premier membre et impossible dans le second; mais si je représente par un nombre négatif le reste de cette dernière soustraction, je trouve pour x une valeur négative, donnée aussi par la formule

$$x = \frac{c - a}{b - d}.$$

Cette valeur conventionnelle de l'inconnue satisfait mécaniquement à l'équation proposée, pourvu qu'on lui applique les règles qui conviennent aux termes affectés du signe — dans les polynômes. De là résulte ce théorème : *Toute équation du premier degré qui ne contient qu'une inconnue a toujours une solution, positive ou négative, et n'en a qu'une seule.*

Je vais examiner maintenant les cas d'impossibilité et d'indétermination qui peuvent se présenter, lorsqu'on donne des valeurs particulières aux coefficients a, b, c, d.

Si je suppose : 1°

$$b = d \quad \text{et} \quad c > \text{ ou } < a$$

dans la formule générale

$$x = \frac{c - a}{b - d};$$

la valeur de x devient alors $\frac{c - a}{0}$. Dans ce cas, l'équation

$$a + bx = c + dx$$

se réduit à l'égalité

$$a + bx = c + bx,$$

évidemment fausse d'après l'hypothèse $c >$ ou $< a$; donc la notation $\frac{c-a}{0}$ correspond à une impossibilité.

2° Lorsque les coefficients de l'équation satisfont aux conditions suivantes :

$$b = d \quad \text{et} \quad c = a,$$

la formule de l'inconnue

$$x = \frac{c-a}{b-d}$$

devient

$$x = \frac{0}{0},$$

et indique une indétermination, car l'équation proposée

$$a + bx = c + dx,$$

se réduisant à l'identité

$$a + bx = a + bx,$$

est satisfaite par toute valeur attribuée à x.

II. — Équations générales du premier degré à deux inconnues.

1. — Les deux équations

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

peuvent représenter un système quelconque de deux équations du premier degré à deux inconnues, pourvu qu'on y regarde les nombres a, b, c, a', b', c', comme étant positifs ou négatifs. Par conséquent, on pourra se servir des expressions de x et y données par la résolution de ces équations générales pour déterminer les valeurs des inconnues de tout système d'équations semblables.

Pour obtenir ces formules générales de x et y, je résous la première équation par rapport à x, et je trouve

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Je substitue ensuite cette valeur de x dans la seconde équation, et j'ai la nouvelle équation

$$\frac{ca' - ba'y}{a} + b'y = c',$$

de laquelle je tire successivement

$$(ab' - ba')y = ac' - ca',$$

et

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

La substitution de cette valeur de y dans l'équation

$$x = \frac{c - by}{a}$$

ferait connaître la valeur correspondante de x ; mais on peut éviter ce calcul, en remarquant que les équations proposées restent les mêmes lorsqu'on y remplace x par y et y par x, pourvu qu'en même temps on remplace l'un par l'autre les coefficients a et b de la première équation, ainsi que les coefficients a' et b' de la seconde; par conséquent la valeur de x peut être déduite de celle de y par des changements analogues. On trouve ainsi :

$$x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'},$$

ou, en changeant les signes des deux termes du second membre,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'};$$

valeur remarquable en ce qu'elle a le même dénominateur que celle de l'autre inconnue y.

Comme les formules

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

sont fréquemment employées, on a cherché un moyen de les retrouver sans recommencer la résolution des équations

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Pour cela, on a remarqué : 1° Que, si l'on range les coefficients des deux inconnues dans l'ordre suivant : a, b, a′, b′, *le dénominateur* ab′ — ba′ *est égal à l'excès du produit* ab′ *des coefficients extrêmes sur le produit* ba′ *des coefficients moyens;* 2° *qu'on forme le numérateur de chaque inconnue en remplaçant dans le dénominateur commun chacun des coefficients de cette inconnue par le second membre de l'équation correspondante.*

Soit à résoudre, au moyen des formules précédentes, le système des équations

$$3x - 7y = 9,$$
$$5x - 3y = 41;$$

on fera dans ces formules :

$$a = 3, \quad b = -7, \quad c = 9,$$
$$a' = 5, \quad b' = -3, \quad c' = 41,$$

et l'on trouvera

$$x = \frac{9(-3) - (-7)41}{3(-3) - (-7)5} = \frac{-27 + 287}{-9 + 35} = \frac{260}{26} = 10,$$

$$y = \frac{3 \times 41 - 9 \times 5}{3(-3) - (-7)5} = \frac{123 - 45}{-9 + 35} = \frac{78}{26} = 3.$$

2. — Discussion. — Les valeurs générales des inconnues x et y ont été calculées dans la double hypothèse que les coefficients a et $ab' - ba'$ n'étaient pas nuls, car on les a déduites les équations

$$x = \frac{c - by}{a},$$

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'.$$

Or, dans les applications numériques, chacune des équations contient au moins une inconnue, puisque le système proposé en renferme deux; par conséquent on peut supposer que a est le coefficient de l'une des inconnues qui se trouvent dans la première équation et dont la valeur est un nombre autre que zéro; dès lors la première des hypothèses précédentes sera toujours satisfaite. Lorsque la seconde, qui consiste en ce que $ab' - ba'$ n'est pas nul, sera vraie pour un exemple particulier, les formules précédentes donneront les valeurs de x et y qui conviennent à ce système d'équations.

3. — Je suppose, en second lieu, que

$$ab' - ba' = 0,$$

et que l'un des numérateurs ne soit pas nul, par exemple

$$ac' - ca' \gtreqless 0\ ^*.$$

Remplaçons dans cette inégalité a par sa valeur $\dfrac{ba'}{b'}$ tirée de l'égalité précédente, ce qui est possible si b' n'est pas nul, nous aurons

$$\frac{ba'c'}{b'} - ca' \gtreqless 0,$$

puis, en multipliant les deux membres par b', et les divisant par a'

$$bc' - cb' \gtreqless 0.$$

Par conséquent, lorsque la valeur de l'une des inconnues x, y, se présente sous la forme $\dfrac{\mathrm{M}}{0}$, la valeur de l'autre inconnue a la même forme. Les équations proposées sont alors contradictoires ; car leur système est équivalent à celui des équations

$$x = \frac{c - by}{a},$$
$$(ab' - ba')y = ac' - ca',$$

dont la dernière se réduit par l'hypothèse à l'égalité

$$0 = ac' - ca',$$

qui est évidemment fausse, puisque $ac' - ca'$ est un nombre quelconque, autre que zéro.

On peut aussi reconnaître cette impossibilité sur les équations proposées ; en effet, si on multiplie la première par b' et la seconde par b, afin de rendre les coefficients de y égaux, on trouve les nouvelles équations

$$ab'x + bb'y = cb',$$
$$ba'x + bb'y = bc',$$

qui sont contradictoires, puisque leurs premiers membres sont égaux par hypothèse, et les seconds cb', bc', inégaux.

* Le signe $\gtreqless$, qui s'énonce plus grand ou plus petit que, indique l'inégalité de deux quantités, sans en donner le sens.

4. — Si on suppose, en troisième lieu, qu'on ait

$$ab' - ba' = 0,$$

et

$$cb' - bc' = 0,$$

il résulte de ce qui précède qu'on a aussi

$$ac' - ca' = 0\,;$$

donc les deux inconnues ont à la fois la forme $\frac{0}{0}$. Je dis qu'alors le système des équations est indéterminé ; en effet, il est équivalent à celui des équations

$$x = \frac{c - by}{a},$$

$$(ab' - ba')y = ac' - ca',$$

dont la dernière se réduit à l'identité

$$0 = 0.$$

Par conséquent le système des deux équations données est remplacé par la seule équation

$$x = \frac{c - by}{a},$$

c'est-à-dire qu'il est indéterminé.

On peut aussi démontrer cette indétermination sur les équations proposées, car elles deviennent identiques, et se réduisent par suite à une seule, lorsqu'on multiplie la première par b' et la seconde par b.

Comme les égalités

$$ab' - ba' = 0, \quad cb' - bc' = 0,$$

peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Je résume en ces termes la discussion qui précède : 1° *Deux équations du premier degré à deux inconnues sont contradictoires lorsque les coefficients des inconnues sont directement proportionnels, sans que le rapport des coefficients d'une même inconnue soit égal à celui des seconds membres de ces équations ;* 2° *un système de deux équations du premier degré est indéterminé,* c'est-à-dire que l'une des équations est une conséquence de l'autre, *si les coefficients des inconnues et les* *seconds membres des équations sont directement proportionnels.*

5. — Remarque. — Parmi les hypothèses qui rendent incomplètes les équations proposées, une seule contredit la seconde partie de la règle précédente ; c'est celle dans laquelle les coefficients d'une même inconnue sont nuls. Je vais l'examiner en supposant $b = 0$ et $b' = 0$; les équations proposées deviennent par suite

$$ax = c,$$
$$a'x = c',$$

et n'admettent une solution commune que si l'équation de condition

$$ac' - ca' = 0,$$

à laquelle elles conduisent, est satisfaite. Mais *la valeur de l'inconnue* y *qui a disparu des équations est indéterminée,* tandis que *l'autre inconnue a une valeur déterminée,* qui est

$$x = \frac{c}{a}.$$

C'est ce résultat qui fait exception à la seconde partie de la règle précédente ; on en trouve la cause dans ce que, les coefficients b et b' étant nuls, on ne peut plus tirer a ni a' de l'égalité

$$ab' - ba' = 0,$$

ni par conséquent prouver que $bc' - cb'$ est différent de 0.

Cette exception est aussi indiquée par les formules générales de x et de y, qui deviennent, par suite de l'hypothèse,

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad y = \frac{ac' - ca'}{0}.$$

Le symbole $\frac{ac' - ca'}{0}$ indique une impossibilité, mais si l'on suppose

$$ac' - ca' = 0,$$

la valeur de y se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, symbole d'indétermination, et si, dans la valeur générale $\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$ de x, on remplace c par sa valeur $\frac{ac'}{a'}$ tirée de l'égalité précédente, on trouve

$$y = \frac{\frac{ac'b'}{a'} - bc'}{ab' - ba'} = \frac{c'(ab' - ba')}{a'(ab' - ba')}.$$

Cette valeur de y peut être simplifiée, et devient $\frac{c'}{a'}$ ou $\frac{c}{a}$, ce qui est bien la valeur convenable de y, et alors l'indétermination de x est réelle, tandis que celle de y n'était qu'apparente.

6. — Si l'on suppose enfin que les seconds membres soient nuls à la fois

$$c = 0, \quad c' = 0,$$

les équations sont dites homogènes par rapport aux inconnues, les formules générales donnent pour x et y des valeurs nulles,

$$x = \frac{0}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{0}{ab' - ba'},$$

et il n'y a pas d'autres solutions, si $ab' - ba'$ n'est pas nul; mais si l'on a

$$ab' - ba' = 0,$$

les valeurs de x et de y prennent la forme $\frac{0}{0}$, symbole d'indétermination, et l'indétermination est réelle, les deux équations multipliées, la première par a et la seconde par a' devenant identiques.

Généralement, quand des équations sont homogènes par rapport aux inconnues, en divisant tous les termes de ces équations par l'une des inconnues, on introduit les rapports de toutes les autres à celle-là, et en considérant ces rapports comme des inconnues nouvelles, il y a ordinairement une équation de plus que d'inconnues, le système est incompatible, à moins que l'équation de condition ne soit satisfaite; lorsqu'elle l'est, les équations proposées déterminent seulement les rapports des inconnues à l'une d'entre elles, qui peut prendre toutes les valeurs que l'on voudra.

Dans l'exemple actuel les équations deviennent

$$a\frac{x}{y}+b=0,$$

$$a'\frac{x}{y}+b'=0,$$

l'équation de condition $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ ou $ba'=ab'$ est satisfaite, et l'on a

$$\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}.$$

III. — Équations générales du premier degré à trois inconnues.

1. — Tout système particulier de trois équations du premier degré, à trois inconnues, peut être représenté par les trois équations

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=d,\\ a'x+b'y+c'z&=d',\\ a''x+b''y+c''z&=d'', \end{aligned}$$

pourvu que l'on admette que les coefficients a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'', sont des nombres quelconques positifs ou négatifs. Dès lors, en résolvant ces équations générales, on connaîtra le mode de composition des inconnues avec leurs coefficients.

La première de ces équations donne

$$x=\frac{d-by-cz}{a}; \qquad (1)$$

je remplace x par cette valeur dans la seconde équation, et je trouve, toutes réductions faites,

$$(ab'-ba')y+(ac'-ca')z=ad'-da'. \qquad (2)$$

En substituant de même la valeur de l'inconnue x dans la troisième équation, j'ai la nouvelle équation

$$(ab''-ba'')y+(ac''-ca'')z=ad''-da'', \qquad (3)$$

qu'il est plus simple de déduire de la précédente, en y changeant a' en a'', b' en b'', c' en c'' et d' en d''. Le système des trois équations données est alors remplacé par celui des équations (1), (2) et (3), dont les deux dernières ne contiennent que les inconnues y et z.

D'après une propriété des équations à deux inconnues, les valeurs de y et z ont pour dénominateur la même quantité

$$(ab' - ba')(ac'' - ca'') - (ab'' - ba'')(ac' - ca');$$

et le numérateur de y se déduit de ce dénominateur en y remplaçant les coefficients $ab' - ba'$, $ab'' - ba''$, de l'inconnue y, par les seconds membres $ad' - da'$, $ad'' - da''$, des deux équations ; ce qui revient à changer seulement b en d, b' en d' et b'' en d'', puisque les binômes $ab' - ba'$, $ab'' - ba''$, ne diffèrent des binômes $ad' - da'$, $ad'' - da''$, que par les lettres b et d. Je prouverais pareillement qu'on obtient le numérateur de z en remplaçant, dans le dénominateur commun, chacun des coefficients de cette inconnue par le second membre de l'équation correspondante.

Je vais former maintenant le dénominateur commun

$$(ab' - ba')(ac'' - ca'') - (ab'' - ba'')(ac' - ca').$$

Pour cela, j'effectue les multiplications indiquées, et je supprime deux produits partiels qui sont égaux à $bca'a''$ et précédés de signes contraires ; enfin, je mets la quantité a en facteur dans les six termes qui restent, et le dénominateur prend la forme suivante :

$$a(ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'').$$

Si je remplace dans ce polynôme les coefficients, b, b', b'', respectivement par les seconds membres d, d', d'', des équations données, j'aurai

$$a(ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a'')$$

pour le numérateur de y. Par conséquent les deux termes de y ont un facteur commun a ; comme il en est de même pour les termes de z, j'en conclus qu'après les simplifications, le commun dénominateur de ces deux inconnues est égal à

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

Voici un moyen de former ce polynôme sans avoir recours au calcul précédent : on écrit la quantité c à la droite du produit ab, puis on la fait avancer vers la gauche, jusqu'à ce qu'elle ait occupé toutes les places possibles dans le produit abc ; on trouve ainsi les termes

$$abc, \quad acb, \quad cab,$$

En opérant de même sur la permutation *ba* du produit *ab*, on forme les termes suivants :

$$bac, \quad bca, \quad cba\,;$$

on écrit ensuite ces six monômes les uns après les autres, dans l'ordre de leur formation, en séparant le second du premier par le signe —, le troisième du second par le signe +, le quatrième du troisième par le signe —, et ainsi de suite. Enfin, on donne un accent à la seconde lettre de chaque terme et deux accents à la troisième, et l'on retrouve ainsi le polynôme précédent.

Si, au lieu de commencer par éliminer x entre les trois équations données, j'avais d'abord éliminé y, j'aurais obtenu deux équations entre x et z ; par conséquent, l'inconnue x a le même dénominateur que z, et l'on forme son numérateur par le même procédé que les deux autres numérateurs. De là résulte ce théorème : 1° *Les valeurs des inconnues de trois équations du premier degré sont des fractions qui ont le même dénominateur, et ce dénominateur n'est formé qu'avec les coefficients des inconnues; 2° le numérateur de chaque inconnue s'obtient en remplaçant dans le commun dénominateur chacun des coefficients de cette inconnue par le second membre de l'équation correspondante.*

Ce théorème est général, c'est-à-dire qu'il est vrai pour un nombre quelconque m d'équations du premier degré contenant m inconnues, et le commun dénominateur des valeurs de ces inconnues se forme de la même manière que pour un système de trois équations à trois inconnues.

2. — DISCUSSION. — Le système des équations

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned}$$

étant équivalent à celui des équations,

$$x = \frac{d - by - cz}{a}, \qquad (1)$$

$$(ab' - ba')x + (ac' - ca')y = ad' - da', \qquad (2)$$

$$(ab'' - ba'')x + (ac'' - ca'')y = ad'' - da'', \qquad (3)$$

lorsqu'on suppose toutefois que le coefficient a de x n'est pas nul, la discussion des trois premières équations revient à celle des trois dernières.

Cela posé, soient

$$y = \frac{N}{D} \quad \text{et} \quad z = \frac{P}{D},$$

les valeurs de y et z déduites des équations (2) et (3) ; le dénominateur commun D peut être nul ou ne pas l'être. 1° Je suppose

$$D > \text{ ou } < 0,$$

les valeurs de y et z et par suite celle de x sont finies et déterminées, de sorte que les trois équations données ont toujours dans ce cas une solution et n'en admettent qu'une seule.

2° Si l'on a

$$D = 0 \text{ et } N > \text{ ou } < 0\,;$$

les trois équations proposées ne peuvent dès lors être satisfaites par un système commun de valeurs de x, y et z

3° Lorsqu'on a

$$D = 0 \quad \text{et} \quad N = 0.$$

Les équations (2) et (3) se réduisent à une seule, et le système des trois équations données est indéterminé, parce que ces trois équations se réduisent à deux ou à une seule.

3. — Remarque. — Si les seconds membres d, d', d'', des équations du premier degré à trois inconnues sont nuls, ces inconnues sont égales à zéro, et le système des trois équations n'est déterminé qu'autant que le commun dénominateur des formules générales de x, y et z, n'est pas nul.

Ce théorème résulte évidemment de la composition des valeurs générales de x, y et z, car chaque terme des numérateurs de ces formules contient l'une des lettres d, d', d'', et devient nul par suite de l'hypothèse. Donc

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

est la seule solution du système proposé, si toutefois le commun dénominateur

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''$$

n'est pas nul.

Au contraire, le système des équations proposées est indéterminé lorsque le commun dénominateur des inconnues égale zéro. On justifie cette conséquence en remarquant que, si l'on applique la méthode ordinaire d'élimination aux trois équations

$$ax + by + cz = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z = 0,$$
$$a''x + b''y + c''z = 0,$$

on trouve que leur système est équivalent à celui des trois équations suivantes :

$$x = -\frac{by + cz}{a},$$
$$y = -\frac{(ac' - ca')z}{ab' - ba'},$$

et

$$(ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'')z = 0.$$

Or la dernière de ces équations, par suite de l'hypothèse, se réduit à l'identité

$$0 = 0 :$$

donc le système, qui n'a plus que deux équations contenant les trois inconnues x, y et z, est indéterminé. On voit qu'il admet la solution

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Ce système d'équations fait connaître les rapports des inconnues x, y, z, à l'une d'entre elles ; en effet, la seconde équation donne

$$\frac{y}{z} = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

et l'on déduit ensuite de la première

$$\frac{x}{z} = -\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

EXERCICES.

1° — Une personne, qui partage également son bien entre ses enfants, le distribue de la manière suivante : elle donne à l'aîné une somme a, plus la $n^{\text{ième}}$ partie du reste ; au second, une somme $2a$, plus la $n^{\text{ième}}$ partie de ce qui reste ; au troisième, une somme $3a$, plus la $n^{\text{ième}}$ partie de ce qui reste, et ainsi de suite. Quelle est la valeur du bien de cette personne, combien a-t-elle d'enfants et quelle est la part de chacun d'eux ?

(*Rép.* $a(n-1)^2$, valeur du bien; $n-1$, nombre des enfants; $a(n-1)$, part de chacun d'eux).

2° — Des joueurs au nombre de n conviennent que celui d'entre eux qui perdra une partie doublera l'enjeu des autres au commencement de cette partie. Après n parties perdues successivement par chacun d'eux, ils cessent le jeu, et se retirent avec des sommes respectivement égales aux nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$. Déterminer leurs mises au jeu.

(*Rép.* Si on désigne par $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, les enjeux des n joueurs et par s la somme de ces enjeux, laquelle est égale à $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, on a

$$x_1 = \frac{a_1 + 2^{n-1}s}{2^n}, \quad x_2 = \frac{a_2 + 2^{n-2}s}{2^n}, \quad x_3 = \frac{a_3 + 2^{n-3}s}{2^n},$$

$$\ldots, \; x_n = \frac{a_n + s}{2^n}\Bigg).$$

3° — Déterminer les coefficients A, B, C, des termes du trinôme $Ax^2 + Bx + C$, de manière que ce trinôme soit nul : 1° pour $x = a$, 2° pour $x = b$, et qu'il soit égal à m pour $x = c$.

(*Rép.* $$A = \frac{m}{(c-a)(c-b)}, \qquad B = \frac{-m(a+b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$\text{et} \quad C = \frac{mab}{(c-a)(c-b)}\Bigg).$$

4° — Si deux polynômes du second degré

$$Ax^2 + Bx + C,$$
$$A'x^2 + B'x + C',$$

sont égaux pour trois valeurs différentes m, n et p de la variable x, ils sont identiques, c'est-à-dire que

$$A = A', \; B = B' \text{ et } C = C'.$$

5° — Quatre personnes A, B, C, D, se réunissent pour acheter une maison qui vaut a francs. La première A pourrait la payer seule, si la seconde B lui donnait la $m^{\text{ième}}$ partie de l'argent qu'elle a ; la seconde paierait seule la maison, si la troisième C lui donnait la $n^{\text{ième}}$ partie de son argent ; la troisième demande la $p^{\text{ième}}$ partie de l'argent de la quatrième D pour faire seule le paiement complet ; il manque à la quatrième la $r^{\text{ième}}$ partie de l'avoir de la première pour acheter seule cette maison. Combien chacune de ces personnes a-t-elle d'argent ?

(*Rép.* La première personne possède

$$a\left(\frac{mnpr - npr + pr - r}{mnpr - 1}\right);$$

la seconde, $$a\left(\frac{mnpr - mpr + mr - m}{mnpr - 1}\right);$$

la troisième, $$a\left(\frac{mnpr - mnr + mn - n}{mnpr - 1}\right);$$

la quatrième, $$a\left(\frac{mnpr - mnp + np - p}{mnpr - 1}\right).$$)

6° — Un banquier a deux espèces de monnaie ; il faut a pièces de l'une pour faire 20 francs ; il faut b pièces de l'autre pour faire la même somme. Quelqu'un vient lui demander c pièces de monnaie pour 20 francs. Combien le banquier lui donnera-t-il de pièces de chaque espèce pour le satisfaire ?

(*Rép.* $\dfrac{a(c - b)}{a - b}$ pièces de la première monnaie, $\dfrac{b(a - c)}{a - b}$ pièces de la seconde).

DIX-SEPTIÈME ET DIX-HUITIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Équations du second degré à une inconnue. — Résolution. — Double solution. — Valeurs imaginaires.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE

I. — Principes généraux.

THÉORÈME. I. — *Toute équation dont les deux membres sont des carrés parfaits est équivalente au système de deux équations qu'on forme en égalant la racine carrée de son premier membre à celle du second précédée des deux signes + et —.*

Soit l'équation

$$A^2 = B^2, \qquad (1)$$

équivalente à l'équation

$$A^2 - B^2 = 0,$$

ou

$$(A - B)(A + B) = 0.$$

Toute valeur de l'inconnue qui satisfait à l'équation (1) rend le produit $(A - B)(A + B)$ nul, et par conséquent annule l'un des deux facteurs, c'est-à-dire satisfait à l'une des équations

$$A - B = 0, \qquad A + B = 0,$$

ou

$$A = B, \quad (2) \qquad A = -B, \quad (3)$$

et réciproquement toute valeur de l'inconnue qui satisfait à l'une des équations (2) et (3), annulant l'un des binômes $A - B$ ou $A + B$, annule le produit $(A - B)(A + B)$ ou $A^2 - B^2$, et par conséquent satisfait à l'équation (1). Ainsi, le système des équations (2) et (3) admet toutes les solutions de l'équation (1) et n'en admet pas d'autres, donc il est équivalent à cette équation.

Corollaire I. — Si un terme d'une équation est placé sous un radical du second degré, on peut faire disparaître ce signe au moyen du théorème précédent. Pour cela on isole ce terme dans un membre, puis on élève les deux membres au carré. On choisit ensuite, parmi les solutions de l'équation transformée, celles qui satisfont à l'équation donnée en les substituant dans cette dernière. Je prends pour exemple l'équation

$$5 + \sqrt{1+x} = x;$$

j'isole le radical dans le premier membre, et j'élève au carré les deux membres de l'équation

$$\sqrt{1+x} = x - 5.$$

L'équation résultante

$$1 + x = x^2 - 10x + 25,$$

a pour solutions les nombres 8 et 3, comme on peut le vérifier; mais le premier de ces nombres satisfait seul à l'équation proposée, le second vérifie, d'après le théorème précédent, l'équation

$$-\sqrt{1+x} = x - 5,$$

ou bien

$$5 - \sqrt{1+x} = x,$$

qu'on déduit de l'équation proposée en y changeant le signe du radical.

Corollaire II. — Le théorème que nous venons de démontrer ramène la résolution de toute équation dont les deux membres sont des carrés parfaits à celle de deux équations dont le degré est deux fois moindre.

L'équation du second degré

$$x^2 = 25,$$

est équivalente aux deux équations du premier degré

$$x = 5 \quad \text{et} \quad x = -5;$$

et en effet nous avons vu, dans le calcul des quantités négatives (page 151), qu'il y a deux nombres 5 et -5 dont le carré égale 25, ou qui satisfont à l'équation

$$x^2 = 25.$$

II. — Équations incomplètes du second degré.

Une équation à une seule inconnue étant donnée, si elle contient des radicaux et que ses termes soient fractionnaires, je commence par faire disparaître ces radicaux, je réduis ensuite tous les termes au même dénominateur, et je supprime ce dénominateur. Ces transformations étant effectuées, je rassemble dans un membre de l'équation tous ses termes qui sont alors rationnels et entiers ; de sorte que, si cette équation est du second degré, elle a la forme suivante :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

a, b, c, étant des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs. Je supposerai désormais que le coefficient a soit un nombre positif, condition à laquelle il est toujours possible de satisfaire : car, si ce coefficient était négatif, il suffirait de changer les signes des deux membres de l'équation pour le rendre positif.

Sans cesser d'être du second degré, l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

peut ne pas contenir de terme du premier degré ou de terme indépendant de l'inconnue; on dit alors qu'elle est incomplète. Je vais examiner ces deux cas particuliers qui correspondent aux deux hypothèses $b = 0$, $c = 0$.

1. Soit $b = 0$: pour résoudre l'équation incomplète

$$ax^2 + c = 0,$$

je transporte le terme c dans le second membre, et je divise ensuite les deux membres de la nouvelle équation par le coefficient a de x^2 ; ce qui donne :

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Lorsque la quantité c est négative, le second membre $-\frac{c}{a}$, de cette équation est positif, puisque j'ai supposé positif le coefficient a ; je puis donc considérer $-\frac{c}{a}$ comme le carré du nombre $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, et appliquer le théorème I à l'équation

$$x^2 = \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2$$

dont les deux membres sont des carrés. Je trouve ainsi les deux équations du premier degré.

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

qui forment un système équivalent à l'équation proposée, et donnent pour l'inconnue deux valeurs réelles, égales et de signes contraires.

Si la quantité c est positive, le second membre de l'équation

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

est négatif, et sa racine carrée, imaginaire ; ce qui montre que l'équation proposée est impossible. On reconnaît, en effet, cette impossibilité sur la transformée

$$x^2 = \frac{c}{a};$$

car le premier membre, *qui est un carré*, ne peut égaler un nombre négatif. Cependant on convient de dire que l'équation

$$ax^2 + c = 0$$

a encore deux solutions représentées par la formule

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

mais ces racines sont imaginaires, puisqu'elles renferment le radical imaginaire $\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Remarque. — Pour trouver les solutions de cette équation, nous avons été conduit à extraire la racine carrée de $-\frac{c}{a}$, c'est de là que vient le nom de racines, donné en général aux solutions des équations.

2. — Je suppose $c = 0$, et l'équation générale du second degré devient :

$$ax^2 + bx = 0;$$

pour la résoudre, je mets x en facteur dans le premier membre, et j'ai

$$(ax + b)x = 0.$$

Cette transformation montre que tout nombre qui satisfait à l'équation proposée rend nul le produit $(ax + b)\,x$, et, réciproquement, que toute valeur de x qui rend ce produit nul est une solution de l'équation

$$ax^2 + bx = 0.$$

On trouvera donc toutes les solutions de cette équation en égalant à zéro chacun des facteurs du produit $(ax + b)\,x$; ce qui donne

$$x = 0, \text{ et } ax + b = 0.$$

De ces deux équations du premier degré, on déduit deux valeurs de l'inconnue, savoir :

$$x = 0, \text{ et } x = -\frac{b}{a};$$

par conséquent, l'équation du second degré admet encore deux solutions, mais ces solutions sont toujours réelles dans ce cas particulier.

III. — Equations complètes du second degré.

1. — Je considère maintenant l'équation complète du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Pour la résoudre, je divise ses deux membres par le coefficient a du carré de l'inconnue et, pour abréger, je représente les rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, par les lettres p et q ; l'équation précédente est ainsi ramenée à la forme plus simple

$$x^2 + px + q = 0.$$

Si cette équation était de la forme

$$A^2 = B^2,$$

sa résolution serait ramenée par le théorème I, à celle des équations

$$A = \pm B.$$

Pour ramener à cette forme l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

je remarque que x^2 et px peuvent être regardés comme les deux premiers termes du carré d'un binome; x^2 étant le carré du premier terme du binôme, ce premier terme est x, px étant le produit du double $2x$ du premier terme par le second terme inconnu du binôme, j'aurai ce second terme en divisant px par $2x$, ce qui donne $\frac{p}{2}$; pour avoir au premier membre de l'équation le carré complet du binôme $x + \frac{p}{2}$, j'ajoute aux deux membres $\frac{p^2}{4}$, carré de son second terme, l'équation devient ainsi

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + q = \frac{p^2}{4},$$

ou, en remplaçant les trois premiers par le carré de $x + \frac{p}{2}$, et faisant passer q au second membre,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q\,.$$

Le second membre $\frac{p^2}{4} - q$ est indépendant de x, c'est un nombre positif ou négatif. Je suppose : 1° que ce nombre soit positif, et j'extrais les racines carrées des deux membres de l'équation précédente, que je remplace, d'après le théorème I, par le système équivalent des deux équations du premier degré,

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,,$$

d'où je tire en les résolvant

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

L'équation du second degré proposée a donc dans ce cas deux racines que nous appellerons pour abréger x' et x'', en posant

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

2° Si le nombre $\frac{p^2}{4} - q$ est négatif, sa racine carrée est imaginaire, ce qui montre que l'opération proposée est impossible. On reconnaît cette impossibilité sur l'équation équivalente

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q,$$

car le premier membre, qui est un carré, ne peut égaler un nombre négatif ; cependant, on *convient* de dire que l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$

a encore deux racines, représentées par la formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,;$$

mais ces racines sont imaginaires, puisqu'elles contiennent le radical imaginaire $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

3° La formule précédente est encore applicable au cas dans lequel le nombre $\frac{p^2}{4} - q$ est nul ; elle se réduit alors à

$$x = -\frac{p}{2},$$

de sorte que l'inconnue x n'a plus qu'une valeur. Néanmoins on dit que l'équation proposée a encore deux racines, mais qu'elles sont *égales* et de même signe. Il résulte de toutes ces conventions qu'*une équation du second degré qui ne contient qu'une inconnue a deux racines réelles ou imaginaires.*

Lorsque l'équation du second degré est ramenée à la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

la formule de ses racines montre que *l'inconnue est égale à la moitié du coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine carrée du nombre qu'on obtient* *en retranchant du carré de la moitié du même coefficient le troisième terme de l'équation*, ce que l'on fait en l'écrivant à la suite avec un signe contraire à celui qu'il a dans l'équation.

EXEMPLE I. — Quelles sont les racines de l'équation

$$2x^2 - 5x + 3 = 0\,?$$

Je divise ses deux membres par le coefficient de x^2, et j'applique la formule précédente à l'équation mise sous la forme :

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0.$$

Je trouve

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}},$$

ou

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4};$$

la première racine est égale à $\frac{3}{2}$, et la seconde égale à 1.

EXEMPLE II. — Résoudre l'équation

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

On trouve

$$x = 1 \pm \sqrt{-4},$$

ou

$$x = 1 \pm 2\sqrt{-1}.$$

EXEMPLE III. — Résoudre l'équation

$$x^2 - 10x + 25 = 0.$$

On trouve

$$x = 5,$$

c'est-à-dire que l'équation proposée a deux racines égales à 5.

EXEMPLE IV. — Résoudre l'équation

$$\frac{x^2}{(a^2 - b^2)^2} + 1 = \frac{x}{(a-b)^2} + \frac{x}{(a+b)^2}.$$

Je multiplie ses deux membres par $(a^2 - b^2)^2$, et je rassemble tous ses termes dans le premier membre ; l'équation devient

$$x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0.$$

En la résolvant d'après la formule générale des équations du second degré, je trouve

$$x = a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2},$$

ou

$$x = a^2 + b^2 \pm 2ab.$$

Si je désigne la première racine par x' et la seconde par x'', j'ai

$$x' = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2,$$

et

$$x'' = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2.$$

On vérifie facilement l'exactitude de ces racines en substituant chacune d'elle dans l'équation proposée.

2. — Pour avoir en fonction de a, b, c les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

il suffit de remplacer p par $\frac{b}{a}$ et q par $\frac{c}{a}$ dans la formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad (1)$$

qui donne les racines de l'équation équivalente

$$x^2 + px + q = 0.$$

On obtient ainsi

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

ou, en réduisant $\frac{c}{a}$ au dénominateur $4a^2$ qui sort du radical,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

On ne se sert de la formule (1) que lorsque les coefficients p et q sont des nombres entiers, et que p est pair. Dans tous les autres cas, on emploie de préférence la formule (2) qui donne les racines sous la forme la plus simple, si l'on a eu soin de ramener les coefficients a, b et c de l'équation à être des nombres entiers.

Il importe de remarquer que la formule (2) est susceptible d'une simplification, lorsque le coefficient b est pair ; en appelant b' sa moitié, on peut poser

$$b = 2b',$$

et la formule (2) devient

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a};$$

faisons sortir de dessous le radical le facteur 4, en extrayant sa racine (7, I, Th. IV,) et supprimons le facteur 2 commun aux deux termes de la fraction, la formule devient

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}. \qquad (3)$$

Remarque. — On pourrait trouver directement la formule (2) en appliquant à l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

la méthode qui a conduit à la résolution de l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

Pour simplifier les calculs, je multiplie tous les termes par $4a$, ce qui donne

$$4a^2 x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

et je considère $4a^2x^2 + 4abx$ comme les deux premiers termes du carré d'un binôme, son premier terme est la racine carrée de $4a^2x^2$ ou $2ax$, et comme $4abx$ est le produit du double du premier terme $4ax$ par le second, ce second terme du binôme sera le quotient de la division de $4abx$ par $4ax$ ou b. J'ajoute aux deux membres le carré b^2 du second terme du binôme $2ax + b$, et je fais passer $4ac$ au second membre, j'ai

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

ou

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac;$$

cette équation équivaut, d'après le théorème I, aux deux équations du premier degré

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

d'où

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

IV. — Discussion des racines de l'équation du second degré.

Pour reconnaître si les racines d'une équation du second degré, que nous avons appelées x' et x'', sont réelles ou imaginaires, égales ou inégales, positives ou négatives, il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation, il suffit d'examiner les coefficients.

1. — Je suppose d'abord que l'équation soit de la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

d'où

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Trois cas principaux peuvent se présenter :

$$1^\circ \qquad \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

La quantité placée sous le radical étant négative, les deux racines sont *imaginaires*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de nombre positif ou négatif qui vérifie l'équation. Il est utile de remarquer que, dans ce cas, q est plus grand que $\frac{p^2}{4}$, je suppose qu'il le surpasse d'une quantité δ^2, essentiellement positive, quel que soit le signe de δ, puisque δ est élevé à une puissance paire, j'aurai

$$q = \frac{p^2}{4} + \delta^2,$$

et l'équation proposée devient, en y remplaçant q par cette valeur,

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \delta^2 = 0,$$

ou

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \delta^2 = 0.$$

On voit que cette équation ne peut être satisfaite par des valeurs réelles de x, puisque son premier membre, surpassant toujours δ^2 de la valeur positive du carré $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$, ne peut être nul ; on voit de plus que ce premier membre sera toujours positif, quelque valeur réelle que l'on donne à x, et que sa plus petite valeur est δ^2 ou $q-\frac{p^2}{4}$, lorsque l'on donne à x la valeur $-\frac{p}{2}$ qui annule le premier carré.

$$2^\circ \quad \frac{p^2}{4}-q=0.$$

La quantité placée sous le radical étant nulle, les deux racines sont *égales*, x' a la même valeur que x'', en réalité il n'y a qu'une racine. Le terme q étant égal à $\frac{p^2}{4}$, si je le remplace par cette valeur dans l'équation proposée, elle devient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0,$$

ou

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

Pour qu'un carré soit nul, il faut que sa racine soit nulle, et que l'on ait

$$x+\frac{p}{2}=0,$$

équation du premier degré, qui n'a qu'une racine $-\frac{p}{2}$. On peut remarquer que le premier membre de l'équation proposée étant un carré parfait, sera toujours positif, quelque valeur réelle que l'on donne à x, et que sa plus petite valeur est 0, quand on donne à x la valeur $-\frac{p}{2}$.

$$3^\circ \quad \frac{p^2}{4}-q>0.$$

La quantité placée sous le radical étant positive, les deux racines sont *réelles et inégales*. Dans ce cas q est inférieur à $\frac{p}{4}$, j'aurai donc, en appelant δ^2 leur différence,

$$q=\frac{p^2}{4}-\delta^2$$

et, si je remplace q par cette valeur dans l'équation proposée, elle devient

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \delta^2 = 0,$$

ou

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \delta^2 = 0.$$

Cette équation peut évidemment être satisfaite par deux valeurs de x, celles qui rendront égaux les carrés $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ et δ^2, ou qui rendront $x + \frac{p}{2}$ égal à $+\delta$ et à $-\delta$. Le premier membre de l'équation peut devenir négatif dans cette hypothèse, il le sera pour toute valeur de x qui rendra $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ plus petit que δ^2, et sa plus petite valeur sera la quantité négative $-\delta^2$ ou $q - \frac{p^2}{4}$, quand on donnera à x la valeur $-\frac{p}{2}$.

Pour reconnaître les signes des racines, quand elles sont réelles et inégales, je distingue deux cas : le nombre q peut être positif ou négatif.

Si q est *positif*, $\frac{p^2}{4} - q$ indique une véritable soustraction, cette quantité est plus petite que $\frac{p^2}{4}$, et sa racine plus petite que la valeur absolue de $\frac{p}{2}$. or le signe d'un binôme est toujours le signe de celle des deux parties qui est la plus grande en valeur absolue, 5 ± 3 est positif comme la plus grande partie 5, et -5 ± 3 est négatif comme -5, dans les valeurs de x' et x'', la plus grande partie en valeur absolue est la première partie $-\frac{p}{2}$, elles auront donc le *même signe*, celui de $-\frac{p}{2}$, c'est-à-dire un signe contraire à celui de p dans le premier membre de l'équation. Ainsi : *lorsque* q *est positif, les deux racines de l'équation du second degré sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, selon que le coefficient* p *est un nombre négatif ou positif.*

Si q est *négatif*, $\frac{p^2}{4} - q$ indique réellement une addition, cette quantité est plus grande que $\frac{p^2}{4}$, et sa racine plus grande que la valeur absolue de $\frac{p}{2}$, c'est alors la plus grande partie, le radical, qui donne son signe à chacune des quantités x' et x'', elles auront donc des *signes contraires*. Ainsi : *lorsque* q *est négatif, les deux racines de l'équation du second degré sont l'une positive et l'autre négative.*

La plus grande des deux racines en valeur absolue sera celle où les deux parties $-\frac{p}{2}$ et le radical, ayant le même signe, s'ajouteront ; *si* p *est positif*, — p *sera négatif, et la racine négative* x″ *sera la plus grande, si* p *est négatif*, — p *sera positif, et la racine positive* x′ *sera la plus grande, si* p *est nul, les deux racines seront égales en valeur absolue et de signe contraire.*

Le tableau synoptique suivant résume la discussion qui précède.

$$\begin{cases} \frac{p^2}{4} - q < 0 \text{ racines imaginaires.} \\[2ex] \frac{p^2}{4} - q = 0 \text{ racines réelles et égales, } \begin{cases} p > 0 & \text{négatives,} \\ p = 0 \text{ d'où } q = 0 & \text{nulles,} \\ p < 0 & \text{positives.} \end{cases} \\[4ex] \frac{p^2}{4} - q > 0 \begin{matrix}\text{racines réelles} \\ \text{et inégales}\end{matrix} \begin{cases} q > 0 \text{ de même signe } \begin{cases} p > 0 \text{ négatives,} \\ p < 0 \text{ positives.} \end{cases} \\ q = 0 \text{ l'une est nulle.} \\ q < 0 \text{ de signe contraire } \begin{cases} p > 0 \text{ négative} > \text{posit.,} \\ p = 0 \text{ négative} = \text{posit.,} \\ p < 0 \text{ negative} < \text{posit.} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

2. — Je suppose maintenant que l'équation soit de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

a étant un nombre positif, ses racines sont

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pour déterminer la nature de ses racines, on forme le nombre $b^2 - 4ac$: 1° *s'il est négatif, les deux racines de l'équation sont imaginaires ;* 2° *s'il est nul, les deux racines sont réelles et égales, leur valeur commune* $\frac{-b}{2a}$ *est positive ou négative, selon que le coefficient* b *est négatif ou positif ;* 3° *si* $b^2 - 4ac$ *est positif, les deux racines sont réelles et inégales.* Pour reconnaître leurs signes, je distingue deux cas : si c est positif, le produit $4ac$ l'est aussi, $b^2 - 4ac$ est plus petit que b^2, sa racine plus petite que la valeur absolue de b, et les numérateurs de x' et x'' ont le même signe, celui de $-b$, ou un signe contraire à celui de b dans l'équation. Ainsi, *lorsque* c *est positif, les deux racines de l'équation sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, selon que le coefficient* b *est négatif ou positif.*

Si au contraire c est négatif, le produit $4ac$ l'est pareillement, $b^2 - 4ac$ est une quantité plus grande que b^2 dont la racine est plus grande que la valeur absolue de b ; et les numérateurs de x' et de x'' ont chacun le même signe que le radical qu'ils contiennent, celui de x' est positif et celui de x'' négatif. Ainsi, *lorsque* c *est négatif, les deux racines de l'équation sont l'une positive et l'autre négative.* La plus grande des deux en valeur absolue sera celle où les deux parties du numérateur $-b$ et le radical, ayant le même signe, s'ajouteraient ; si b est positif, $-b$ est négatif, et la racine négative x'' est la plus grande, si b est négatif, $-b$ est positif, et la racine positive x' est la plus grande ; si b est nul, les deux racines ont des valeurs égales et de signe contraire, $\frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a}$ ou $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$, comme nous l'avons trouvé plus haut directement (II, 1).

Si c était nul, une des racines serait nulle, celle dans laquelle le radical aurait un signe contraire à celui de $-b$, résultat déjà trouvé directement (II, 1).

D'après cette discussion, on peut voir : 1° que les racines de l'équation

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

sont imaginaires;

2° Que les racines de l'équation

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

sont égales et positives ;

3° Que les racines de l'équation

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

sont réelles, inégales, et ont des signes différents.

3. — REMARQUE. — Nous avons fait sur les coefficients b et c toutes les hypothèses possibles, a étant supposé positif, si l'on suppose a nul, l'équation proposée est du premier degré, elle n'admet qu'une racine, et les formules générales semblent devoir être en défaut, puisqu'elles ont été obtenues soit en multipliant soit en divisant les deux membres de l'équation par a (III, 2). Cependant, les valeurs de x' et de x'' satisfaisant à l'équation proposée, quelque petite que soit la valeur de a, lorsque a tend vers zéro, l'une d'elles doit tendre vers la racine de

$$bx + c = 0.$$

Dans ce cas les formules générales deviennent

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{0},$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{0}.$$

Si le nombre b est positif, la première racine prend la forme $\frac{0}{0}$ et la seconde devient $-\frac{2b}{0}$, c'est le contraire quand b est négatif. Je vais montrer que l'indétermination de l'une des racines n'est qu'apparente; quant à l'autre, il est évident qu'elle n'existe pas, puisque l'équation proposée est réduite au premier degré par suite de l'hypothèse

$$a = 0.$$

Je suppose b positif et je considère la racine

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque a est nul; je multiplie par $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ les deux termes de la fraction

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

et je trouve

$$x' = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)} = \frac{-4ac}{2a\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}.$$

On voit alors que les deux termes de la valeur de x' ont un facteur commun $2a$, qui devient nul par suite de l'hypothèse; je supprime ce diviseur et je remplace a par zéro dans le résultat

$$x' = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}};$$

ce qui donne

$$x' = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2}} = -\frac{c}{b},$$

comme on le trouverait par la résolution directe de l'équation

$$bx + c = 0.$$

Si je suppose à la fois

$$a = 0, \quad b = 0,$$

les deux racines ont l'une et l'autre la forme $\frac{M}{0}$, ce qui est évident puisque l'équation est réduite à l'égalité absurde.

$$c = 0.$$

4. Théorème II. — *Une équation du second degré ne peut avoir plus de deux racines sans en avoir une infinité, c'est-à-dire sans se réduire à une identité.*

Supposons en effet que trois nombres différents r, s et t satisfassent à l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Nous aurons par hypothèse les trois équations

$$r^2a + rb + c = 0$$
$$s^2a + sb + c = 0$$
$$t^2a + tb + c = 0$$

auxquelles devront satisfaire les coefficients a, b et c de l'équation. Si nous regardons a, b et c comme les inconnues, ces trois équations n'ont pas de second membre, et ne sont vérifiées que par les valeurs $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, à moins que le dénominateur de la valeur générale des inconnues du système de ces trois équations ne soit nul (15 et 16, III, 3).

Or ce dénominateur a ici pour valeur

$$r^2s - r^2t + s^2t - rs^2 + rt^2 - st^2,$$

ou, en groupant ensemble les termes également éloignés des extrêmes,

$$s\,(r^2 - t^2) - rt\,(r - t) - s^2\,(r - t),$$

mettons en facteur le binôme $r - t$, qui multiplié par $r + t$ donne $r^2 - t^2$, il vient

$$(r - t)\,(sr + st - rt - s^2) = (r - t)\left[r\,(s - t) - s\,(s - t)\right],$$

et en mettant encore $s - t$ en facteur,

$$(r - t)\,(s - t)\,(r - s)\,;$$

ce produit n'est pas nul, puisque par hypothèse r, s et t sont trois nombres différents, donc les trois équations ci-dessus ne peuvent être satisfaites que si a, b et c sont nuls, et le premier membre $ax^2 + bx + c$ de l'équation proposée étant nul, cette équation est une identité.

V. — Equations bicarrées.

Lorsqu'une équation du 4ᵉ degré à une seule inconnue est de la forme

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

on l'appelle *équation bicarrée*, parce qu'elle ne contient que le carré de l'inconnue et le carré de ce carré.

1. Résolution. — On pourrait résoudre cette équation bicarrée de la même manière que l'équation du second degré, en divisant tous les termes par a, puis complétant et isolant le carré dont les deux premiers termes seraient $x^4 + \frac{b}{a}x^2$, et prenant les racines des deux membres avec un double signe devant le second. Il est plus simple de remarquer que, si l'on désigne pour un instant x^2 par y, et par suite x^4 par y^2, l'équation bicarrée devient

$$ay^2 + by + c = 0,$$

d'où

$$y = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si maintenant nous remettons x^2 à la place de y nous aurons (Th. I)

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

On voit que l'équation bicarrée a quatre racines égales et de signe contraire deux à deux, qui sont, en appelant y' et y'' les racines de l'équation en y,

$$\pm \sqrt{y'} \text{ et} \pm \sqrt{y''}.$$

2. Discussion. — La discussion des racines de l'équation bicarrée se ramène à celle des racines de l'équation du second degré en y, nous supposerons a positif.

Lorsque $b^2 - 4\,ac$ est négatif, y' et y'' sont imaginaires, leurs racines carrées le sont aussi, l'équation bicarrée a quatre racines imaginaires.

Lorsque $b^2 - 4\,ac$ est nul, y' égale y'', l'équation bicarrée n'a plus que deux racines, on dit encore qu'elle en a quatre, deux égales à $\sqrt{y'}$ et deux égales à $-\sqrt{y'}$, réelles ou imaginaires selon que y' est positif ou négatif.

Lorsque b^2-4ac est positif, y' et y'' sont réels, ils sont de même signe si c est positif, négatifs tous les deux si b est positif, et alors l'équation bicarrée a quatre racines imaginaires, positifs tous les deux si b est négatif, et dans ce cas l'équation bicarrée a quatre racines réelles ; y' et y'' sont de signe contraire, si c est négatif, et dans ce cas l'équation bicarrée a deux racines réelles $\pm\sqrt{y'}$, et deux racines imaginaires $\pm\sqrt{y''}$.

EXEMPLE I. — Résoudre l'équation bicarrée

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

On trouve

$$x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2}$$

ou

$$x^2 = 4 \quad \text{et} \quad x^2 = 9.$$

La première valeur de x^2 donne

$$x = \pm 2,$$

et la seconde

$$x = \pm 3 :$$

les quatre racines de l'équation proposée sont donc réelles.

Exemple II. — Résoudre l'équation bicarrée

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

On trouve

$$x^2 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x^2 = 1 - \sqrt{2}\ ;$$

par conséquent, on a

$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad x = \pm\sqrt{1-\sqrt{2}}\ .$$

L'équation proposée a, dès lors, deux racines réelles et deux racines imaginaires.

VI. — Equations réciproques du 4ème degré.

On peut encore résoudre, en la ramenant au second degré, l'équation du 4e degré dont les coefficients situés à égale distance des extrêmes sont égaux, cette équation, qu'on appelle *équation réciproque*, est de la forme

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0\ ;$$

si un nombre x' la vérifie, elle est aussi vérifiée par $\frac{1}{x'}$; en effet, si on y remplace x par $\frac{1}{x'}$, le premier membre devient

$$\frac{a}{x'^4} + \frac{b}{x'^3} + \frac{c}{x'^2} + \frac{b}{x'} + a,$$

ou, en multipliant tous les termes par x'^4,

$$a + bx' + cx'^2 + bx'^3 + ax'^4,$$

résultat nul par hypothèse, puisque x' est racine de l'équation proposée.

Pour résoudre cette équation, on divise tous les termes par x^2, et on groupe les termes deux à deux de la manière suivante :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0,$$

on pose alors

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

d'où en élevant les deux membres au carré,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,$$

on remplace dans l'équation les deux binômes par leurs valeurs, on a

$$a(z^2-2)+bz+c=0,$$
$$az^2+bz+c-2a=0.$$

De cette équation on tire pour z deux valeurs

$$z'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4a(c-2a)}}{2a},$$

$$z''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4a(c-2a)}}{2a};$$

on remplace successivement z par ces valeurs dans l'équation

$$x+\frac{1}{x}=z, \quad \text{ou} \quad x^2-zx+1=0$$

et on en tire à chaque fois deux valeurs pour x, l'équation réciproque du 4e degré a donc quatre racines, dont la discussion serait trop longue.

VII. — Relations entre les racines et les coefficients d'une équation du second degré.

1. — Nous avons trouvé comment les racines de l'équation du second degré

$$x^2+px+q=0,$$

se composent avec les coefficients p et q ; nous allons chercher comment se composent les coefficients p et q, avec les racines. Pour cela, il faut résoudre, en y regardant p et q comme inconnues, les deux équations

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Pour les résoudre, et éliminer q, il suffit de les ajouter, pour éliminer p on les multiplie membre à membre, on trouve ainsi

$$x'+x''=-p,$$
$$x'x''=q.$$

De là résultent ces deux théorèmes :

THÉORÈME III. — *La somme des racines de l'équation du second degré*

$$x^2+px+q=0.$$

est égale et de signe contraire au coefficient p *du second terme.*

THÉORÈME IV. — *Le produit des racines de l'équation*

$$x^2+px+q=0.$$

est égal au terme connu q *et de même signe.*

REMARQUE I. — Lorsque l'équation est de la forme

$$ax^2+bx+c=0,$$

comme il suffit de diviser tous ses termes par a, et de remplacer $\frac{b}{a}$ par p, et $\frac{c}{a}$ par q, pour la ramener à la forme

$$x^2+px+q=0,$$

on a évidemment

$$x'+x''=-\frac{b}{a},$$

$$x'x''=\frac{c}{a}.$$

REMARQUE II. — Il résulte de ces deux théorèmes que

1° *Pour former une équation du second degré dont les racines aient des valeurs données* x′ et x″, *en lui donnant la forme*

$$x^2+px+q=0,$$

il suffit de donner pour coefficient au second terme la somme des racines x′ + x″ *changée de signe, et de prendre pour terme connu le produit* x′x″ *des racines, ce qui donne l'équation*

$$x^2-(x'+x'')\,x+x'\,x''=0.$$

2° *Pour trouver deux nombres, connaissant leur somme et leur produit, il suffit de résoudre une équation du second degré de la forme*

$$x^2+px+q=0,$$

dans laquelle le coefficient p *du second terme soit égal à la somme donnée prise avec un signe contraire, et le terme connu* q *égal au produit donné.*

EXEMPLE I. — Former une équation du second degré dont les racines soient 2 et — 5.

On a

$$x' + x'' = 2 - 5 = -3,$$
$$x'x'' = 2(-5) = -10;$$

par conséquent, l'équation demandée est

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

EXEMPLE II. — Former l'équation du second degré qui a pour racines les deux quantités $a + b$ et $a - b$.

On a

$$x' + x'' = (a + b) + (a - b) = 2a,$$
$$x'x'' = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$

par conséquent, l'équation demandée est

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$$

EXEMPLE III. — Trouver deux nombres connaissant leur somme a et leur produit b^2.

Ces deux nombres sont les deux racines de l'équation du second degré

$$x^2 - ax + b^2 = 0,$$

l'un est donc $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, l'autre $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$.

2. — Discussion des racines réelles de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$

à l'aide des relations $x' + x'' = -p$ et $x'x'' = q$.

Nous supposons les racines réelles, et par conséquent, $\frac{p^2}{4} - q$ positif. Si q est positif, comme q est égal au produit $x'x''$ des deux racines, elles sont de même signe, toutes deux négatives si p est positif, puisque leur somme $-p$ est négative, toutes deux positives si p est négatif, puisque leur somme $-p$ est positive.

Si q est nul, $x'x''$ est nul, et l'une des deux racines est égale à zéro, l'autre à $-p$. Si q est négatif, $x'x''$ étant négatif, les deux racines seront de signe contraire, x' positif, et x'' négatif; dans ce cas : si p est positif, la somme des racines $-p$ est négative, et la plus grande des deux racines en valeur absolue est négative, puisque c'est elle qui donne son signe au binôme $x' + x''$, qui est négatif.

Si p est nul, les deux racines sont égales et de signe contraire, puisque leur somme est nulle, si p est négatif, et par suite $-p$ positif, la racine positive est la plus grande en valeur absolue, puisque c'est elle qui donne son signe au binôme $x' + x''$, qui est positif. Cette discussion est la répétition d'une partie de celle que nous avons donnée plus haut (IV, 1); mais elle est présentée par des moyens plus simples.

EXERCICES.

1. — Résoudre les équations

$$\frac{4}{x} + 5x = 12,$$

$$x - 3\sqrt{x} = 10,$$

$$(x-3)^2 - 7(x-3) + 10 = 0.$$

2. — Quelle est la base du système de numération dans lequel le nombre 190 du système décimal s'écrirait 276.

(*Rép.* 8.)

3. — Un robinet coulant seul met 3 heures de moins qu'un autre à remplir un bassin, les deux robinets coulant ensemble remplissent le bassin en 3 heures 36 minutes; combien faudra-t-il de temps à chaque robinet coulant seul pour remplir le bassin?

(*Rép.* 6 et 9 heures.)

4. — Quelles sont les conditions pour que l'équation

$$x^2 - 6x + q = 0$$

ait 1° ses racines égales, 2° ses racines inverses l'une de l'autre, $x'' = \dfrac{1}{x'}$, 3° ses racines imaginaires?

5. — Quelle est la condition nécessaire pour que le polynôme $9x^2 + bx + 1$ soit un carré parfait, pour qu'il soit positif quelque valeur réelle que l'on donne à x?

6. — Démontrer que l'équation $x^2 + px + q = 0$, dans laquelle on suppose p et q entiers, n'a pas de racine commensurable fractionnaire.

7. — Démontrer que, si deux équations du second degré à coefficients rationnels, ont une racine commune, elle est rationnelle.

8. — Démontrer que si l'équation $x^2 + px + q = 0$, à coefficients numériques commensurables, a pour racine $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{b}$ étant incommensurable, son autre racine est $a - \sqrt{b}$.

10. — Une équation bicarrée a pour racine $3+\sqrt{2}$, trouver cette équation.

(*Rép.* $x^4 - 22x^2 + 49 = 0$.)

11. — Résoudre l'équation $x^2 + px + q = 0$, en considérant $px + q$ comme les deux derniers termes du carré d'un binôme contenant la lettre x, complétant le carré de ce binôme, et transposant les termes de manière à avoir une équation dont les deux membres soient des carrés parfaits.

12. — Trouver les racines réelles de l'équation $x^6 + px^3 + q = 0$.

13. Résoudre $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-2} = a$. Démontrer que les racines sont toujours réelles, et discuter le cas où a est égal à 2.

14. — Résoudre $\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}$.

$$\left(\textit{Rép.}\quad x = \frac{(1 \pm \sqrt{5})^m - 2^m}{(1 \pm \sqrt{5})^m + 2^m}\right).$$

15. — Une équation du second degré $x^2 + px + q = 0$, ayant pour racines x' et x'', 1° trouver les coefficients p' et q' d'une autre équation de même forme qui ait pour racines $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x''}$.

$$\left(\textit{Rép.}\quad p' = \frac{p}{q} \text{ et } q' = \frac{1}{q}\right).$$

2° Trouver les coefficients p' et q' d'une équation de même forme qui ait pour racines $x' + h$ et $x'' + h$.

(*Rép.* $p' = p - 2h$ et $q' = q + h^2 - ph$).

16. — Exprimer en fonction des coefficients p et q de l'équation $x^2 + px + q = 0$ la différence de ses racines, la somme de leurs carrés, la somme de leurs cubes.

17. — Quelle relation doit exister entre les coefficients p et q de l'équation $x^2 + px + q = 0$, pour que l'une des racines soit le carré de l'autre? (*Rép.* $q^2 + q - 3pq = -p^3$).

18. — En supposant qu'un nombre x' satisfasse à l'équation du second degré $x^2 + px + q = 0$, trouver l'autre racine en s'appuyant sur ce que le premier membre est divisible par $x - x'$, et, en appelant x'' la seconde racine trouvée, démontrer les relations $x' + x'' = -p$ et $x'x'' = q$.

19. — Trouver les solutions réelles de l'équation

$$(3x + 2y - 5)^2 + (4x - y - 3)^2 = 0.$$

(*Rép.* $x = 1$, $y = 1$.)

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

PROBLÈMES QUI DÉPENDENT D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

I. — Résolution d'un système d'équations du second degré à plusieurs inconnues.

1. — Equations à deux inconnues.

Je considère d'abord deux équations dont l'une soit du second degré, et l'autre du premier, par exemple les équations

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad (1)$$

$$mx + ny = p, \qquad (2)$$

qui sont les plus générales du second et du premier degré à deux inconnues.

Pour les résoudre, je prends la valeur de l'une des inconnues, de y par exemple, dans l'équation du premier degré ; je la substitue dans l'autre, et je dis que le système des équations données est équivalent à celui des équations

$$y = \frac{p - mx}{n}, \qquad (3)$$

$$ax^2 + bx\left(\frac{p-mx}{n}\right) + c\left(\frac{p-mx}{n}\right)^2 + dx + e\left(\frac{p-mx}{n}\right) + f = 0 \quad (4)$$

dont la dernière est du second degré, mais ne contient qu'une inconnue.

En effet : 1° si les nombres

$$x = 2, \quad y = 5$$

satisfont aux équations données, je remarque qu'il suffit de démontrer qu'ils satisfont aussi à l'équation (4) du second système, puisque l'équation (3) fait partie du premier. Cela posé, comme les nombres 2 et 5 satisfont à l'équation

$$y = \frac{p - mx}{n}.$$

j'ai l'identité

$$5 = \frac{p - m \times 2}{n};$$

par consequent la substitution des nombres 2 et 5 à x et y dans les termes

$$bxy, \quad cy^2, \quad ey,$$

de l'équation (1) donne les mêmes résultats que la substitution du nombre 2 à x dans les termes

$$bx\left(\frac{p - mx}{n}\right), \quad c\left(\frac{p - mx}{n}\right)^2, \quad e\left(\frac{p - mx}{n}\right),$$

de l'équation (4). Or ces deux équations ont les autres termes identiques, donc le nombre

$$x = 2$$

satisfait à l'équation (4), puisque les nombres

$$x = 2, \quad y = 5,$$

sont des racines de l'équation (1).

Je prouverais par un raisonnement analogue que, *réciproquement*, les racines du second système satisfont aux équations du premier; donc les deux groupes d'équations sont équivalents. Pour trouver leurs racines communes, je résous l'équation (4) qui ne contient que x, et je substitue dans l'équation (3) chacune des valeurs de cette inconnue; ce qui fait connaître la valeur correspondante de y. Je conclus de là que le système des équations données n'a pas plus de deux solutions, puisque je n'obtiens qu'une valeur de y pour chaque valeur de x.

Remarque. — Dans le cas particulier où les équations données sont

$$x + y = a,$$
$$xy = b^2,$$

on peut calculer les inconnues en les considérant comme les racines d'une seule équation du second degré dont la somme et le produit sont connus. Cette équation, dont je désigne l'inconnue par z, est la suivante :

$$z^2 - az + b^2 = 0\,;$$

donc les valeurs des deux inconnues sont

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

et

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

On doit toujours suivre cette méthode pour trouver deux nombres dont la somme et le produit sont donnés. C'est à ce problème qu'on ramène souvent la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

EXEMPLE I. — Résoudre les équations

$$x^2 + y^2 = a^2,$$
$$x + y = b.$$

J'élève au carré les deux membres de la seconde, et j'ai

$$x^2 + y^2 + 2xy = b^2\,;$$

je retranche ensuite membre à membre cette dernière équation et la première, ce qui donne

$$2xy = b^2 - a^2.$$

J'en conclus que le système des deux équations données peut être remplacé par le suivant :

$$x + y = b,$$
$$xy = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

qui fait connaître la somme et le produit des deux inconnues; j'achèverais la résolution de ces équations par la méthode précédente.

EXEMPLE II. Résoudre les équations

$$x - y = a,$$
$$xy = b^2.$$

Je vais encore calculer la somme $x + y$ des deux inconnues; pour cela, je fais remarquer que

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy,$$

et j'en conclus que

$$x + y = \pm\sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Je puis alors remplacer le système des équations données :

1° par les équations

$$x+y=\pm\sqrt{a^2+4b^2},$$
$$xy=b^2;$$

2° par les équations

$$x+y=\pm\sqrt{a^2+4b^2},$$
$$x-y=a;$$

mais le dernier système doit être préféré, parce qu'on sait calculer immédiatement deux nombres, dont la somme et la différence sont données (1, I, 3).

Exemple III. — On peut souvent ramener à la résolution d'une équation du second degré, celle d'équations d'un degré plus élevé, en prenant une inconnue auxiliaire, ordinairement la somme, la différence ou le produit des inconnues.

Soit à résoudre le système

$$x^4+y^4=a^4,$$
$$x+y=b.$$

Si dans la première je remplace y par sa valeur $b-x$ tirée de la seconde, j'ai

$$2x^4-4bx^3+6b^2x^2-4b^3x+b^4=a^4,$$

équation du quatrième degré complète, que l'on ne sait pas résoudre.

Mais, si j'élève à la 4e puissance les deux membres de la seconde équation, j'ai

$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=b^4,$$

ou, en remarquant que x^4+y^4 égale a^4, et mettant xy en facteur commun dans les termes $4x^3y$ et $4xy^3$,

$$6x^2y^2+4xy(x^2+y^2)+a^4-b^4=0.$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation

$$x+y=b,$$

j'en tire

$$x^2+y^2=b^2-2xy,$$

et en remplaçant x^2+y^2 par cette valeur dans l'équation précédente, j'ai

$$6x^2y^2+4xy(b^2-2xy)+a^4-b^4=0,$$

ou
$$2x^2y^2 - 4b^2xy + b^4 - a^4 = 0,$$
équation qui n'est que du second degré, si j'y regarde xy comme l'inconnue ; j'en tirerai pour le produit xy deux valeurs m' et m'', et je suis ramené au problème : trouver deux nombres connaissant leur somme b et leur produit m' ou m''.

Exercices. — On peut résoudre de la même manière les systèmes d'équations suivants :

1° $x^2 - y^2 = a^2$, et $x \pm y = b$;
2° $x^2 + xy + y^2 = a^2$, et $x \pm y = b$;
3° $x^3 + y^3 = a^3$, et $x + y = b$;
4° $x^3 - y^3 = a^3$, et $x - y = b$:
5° $x^5 + y^5 = a^5$, et $x + y = b$;
6° $x^5 - y^5 = a^5$, et $x - y = b$.

2. — Je considère, en second lieu, deux équations du second degré à deux inconnues, par exemple les équations
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0.$$
Je vais ramener leur résolution au cas précédent, en remplaçant l'une de ces équations par une autre qui ne soit que du premier degré par rapport à l'une des inconnues, par exemple y. Pour la former, je multiplie la première des équations données par c' et la seconde par c, puis je retranche membre à membre ces deux équations ; le terme $cc'y^2$ disparaît du résultat qui est de la forme
$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0.$$
Je résous alors cette équation par rapport à y, et j'ai
$$y = -\frac{\mathrm{A}x^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{F}}{\mathrm{B}x + \mathrm{E}};$$
je substitue ensuite cette valeur de y dans la première des équations données, et je trouve une équation du 4e degré
$$\mathrm{M}x^4 + \mathrm{N}x^3 + \mathrm{P}x^2 + \mathrm{Q}x + \mathrm{R} = 0,$$
qui forme avec la précédente un système équivalent à celui des équations proposées.

Pour achever la solution du problème, il faut résoudre l'équation du 4e degré qui ne contient que l'inconnue x, et substituer chacune des valeurs de x dans l'autre équation, afin d'en déduire les valeurs correspondantes de l'autre inconnue y. Il ne sera possible de trouver les valeurs de x et y, au moyen des méthodes précédemment exposées, que lorsque l'équation du quatrième degré sera bicarrée, ou réciproque, ou qu'elle se réduira à une équation du second degré.

Remarque. — Dans des exemples particuliers, on arrive quelquefois à éviter l'équation du quatrième degré en cherchant immédiatement, non plus les valeurs des inconnues, mais leur somme et leur différence, ou leur produit.

Exemple I. — Soient proposées les deux équations

$$x^2+y^2+2a(x+y)-b^2=0.$$
$$xy-c(x+y)=0.$$

Je multiplie la seconde par 2 et je l'ajoute membre à membre à la première ; j'obtiens ainsi la nouvelle équation

$$(x+y)^2+2(a-c)(x+y)-b^2=0,$$

que je résous en y regardant $x+y$ comme l'inconnue ; ce qui donne :

$$x+y=c-a\pm\sqrt{(c-a)^2+b^2},$$

et, par suite,

$$xy=c(c-a)\pm c\sqrt{(c-a)^2+b^2},$$

la somme et le produit de x et y étant connus, je calculerai par la méthode ordinaire les valeurs de ces deux quantités.

Exemple II. — Soit à résoudre les équations

$$x^2+y^2=a^2,$$
$$xy=b^2.$$

Je multiplie la seconde par 2, et je l'ajoute membre à membre à la première : je trouve ainsi

$$x^2+2xy+y^2=a^2+2b^2,$$

ou

$$(x+y)^2=a^2+2b^2,$$

d'où je tire

$$x+y=\pm\sqrt{a^2+2b^2}.$$

Je pourrais maintenant former l'équation du second degré, qui aurait pour racines les inconnues x et y.

$$z^2\mp\sqrt{a^2+2b^2}\,z+b^2=0;$$

mais il est plus simple de calculer leur différence, comme j'ai calculé leur somme. Je trouve ainsi

$$x - y = \pm\sqrt{a^2 - 2b^2}.$$

Additionnant membre à membre les équations qui donnent $x + y$ et $x - y$, puis divisant les deux membres par 2, j'ai enfin

$$x = \pm\frac{\sqrt{a^2 + 2b^2}}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 2b^2}}{2},$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{a^2 + 2b^2}}{2} \mp \frac{\sqrt{a^2 - 2b^2}}{2}.$$

Si j'avais tiré de la seconde équation la valeur de y qui est $\frac{b^2}{x}$, et substitué à y cette valeur dans la première, j'aurais été conduit à l'équation bicarrée

$$x^4 - a^2x^2 + b^4 = 0,$$

d'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - b^4}}.$$

Il est aisé de s'assurer que ces nouvelles valeurs de x sont égales à celles que j'ai trouvées plus haut, il suffit de les élever au carré ; ainsi une formule, contenant deux radicaux superposés, se trouve remplacée par une autre, où les radicaux sont isolés ; ceci me conduit à chercher dans quelles circonstances cette transformation de formules est possible.

3. — Transformation des radicaux superposés en radicaux isolés.

Soit $\sqrt{m + \sqrt{p}}$ une formule contenant des radicaux superposés, p étant une quantité algébrique, dont la racine ne s'extrait pas exactement ; il s'agit de savoir dans quel cas on pourra la remplacer par une somme de radicaux isolés $\sqrt{z} + \sqrt{u}$, z et u étant des formules rationnelles.

Posons

$$\sqrt{m + \sqrt{p}} = \sqrt{z} + \sqrt{u},$$

en élevant les deux membres au carré, nous aurons

$$m + \sqrt{p} = z + u + 2\sqrt{zu},$$

ou

$$2\sqrt{zu} = m - z - u + \sqrt{p};$$

élevons de nouveau les deux membres au carré, nous aurons

$$4zu = (m - z - u)^2 + p + 2(m - z - u)\sqrt{p}.$$

Le premier membre de cette équation étant rationnel, puisque nous supposons z et u rationnels, le second doit l'être, or la quantité $\sqrt{p}$ ne l'est pas, il faut qu'elle disparaisse, et que son coefficient soit nul, donc

$$m - z - u = 0 \quad \text{ou} \quad z + u = m;$$

l'équation se réduit alors à

$$4zu = p.$$

Nous avons pu résoudre cette équation unique à deux inconnues, parce que toute équation entre quantités rationnelles et quantités irrationnelles se décompose en deux autres, en égalant séparément les parties rationnelles entre elles, et les parties irrationnelles entre elles. Connaissant la somme m des quantités z et u, et leur produit $\frac{p}{4}$, nous avons (19, I, 1, Rem.)

$$z = \frac{m + \sqrt{m^2 - p}}{2}, \quad u = \frac{m - \sqrt{m^2 - p}}{2}.$$

Ces valeurs de z et u ne sont rationnelles que lorsque la quantité $m^2 - p$ est un carré parfait; telle est la condition qui doit être remplie, pour que la transformation des radicaux superposés en radicaux isolés soit possible.

On a donc

$$\sqrt{m + \sqrt{p}} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - p}}{2}} + \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - p}}{2}},$$

on aurait de même

$$\sqrt{m - \sqrt{p}} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - p}}{2}} - \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - p}}{2}}.$$

Application. — Pour vérifier ces formules, appliquons-les à la transformation des valeurs des racines de l'équation bicarrée du dernier exemple.

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - b^4}}.$$

Il faut, dans les formules générales de transformation, remplacer m par $\frac{a^2}{2}$, p par $\frac{a^4}{4} - b^4$, donc $m^2 - p$ ou $\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} + b^4$ est un carré parfait, dont la racine est b^2, et la transformation est possible. Nous aurons ainsi

$$\sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - b^4}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} + b^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} + b^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + 2b^2}}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 2b^2}}{2},$$

Les deux autres racines s'obtiendraient en changeant de sign les deux membres, on a donc

$$\pm\sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - b^4}} = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2 + 2b^2}}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 2b^2}}{2}\right).$$

Les valeurs des racines de l'équation bicarrée deviennent, par cette transformation, celles que l'on a trouvées par une autre méthode.

Exercices. — Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1° $x^2 + xy + y^2 = a^2$ et $xy = b^2$;

2° $x^n \pm y^n = a^n$ et $xy = b^2$.

4. — Equations qui ont un nombre quelconque d'inconnues.

Je n'examinerai que quelques cas particuliers, et je ferai remarquer que, dans ce genre de questions, la méthode d'élimination par substitution conduit souvent à des équations de degré supérieur au second, que l'on peut éviter en cherchant à déduire des équations proposées, en les ajoutant, retranchant, multipliant ou divisant membre à membre, la somme, la différence, le produit ou le rapport de deux inconnues.

EXEMPLE I. — Soit à résoudre les équations

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

$$x^2+y^2+z^2=d^2.$$

En appliquant aux fractions égales $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{z^2}{c^2}$, le théorème VI de la sixième leçon, et prenant les racines carrées, je trouve

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

EXEMPLE II. — Soient proposées les équations

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$
$$x+y+z=b,$$
$$xy=cz.$$

Si la valeur de z était connue, les deux dernières équations feraient connaître la somme $x+y$ et le produit xy des deux autres inconnues; aussi je vais commencer par calculer z. Pour cela, je multiplie la troisième équation par 2, et je l'ajoute membre à membre à la première: je trouve alors

$$(x+y)^2+z^2=a^2+2cz;$$

or la seconde équation donne

$$x+y=b-z,$$

donc

$$(b-z)^2+z^2=a^2+2cz.$$

La résolution de cette équation conduit à la valeur de z; je calcule ensuite x et y, au moyen des deux équations

$$x+y=b-z,$$
$$xy=cz$$

5. — Équations symétriques.

On dit que des équations sont *symétriques* par rapport à certaines inconnues, lorsqu'en remplaçant dans ces équations l'une quelconque de ces inconnues par une autre et réciproquement, on obtient des équations équivalentes.

Ainsi les équations

$$x^3+y^3+z^3=a^3,$$
$$xyz=b^3,$$
$$x^2+y^2+z^2+c(x+y+z)=d^2,$$

sont symétriques par rapport aux inconnues x, y et z ; celles de l'exemple précédent sont symétriques par rapport à x et à y seulement.

THÉORÈME. — *Lorsque des équations sont symétriques par rapport à plusieurs inconnues, l'équation finale à laquelle on est conduit, pour calculer l'une d'elles, en éliminant toutes les autres, a les mêmes coefficients que celle à laquelle on serait conduit pour calculer une autre d'entre elles. Cette équation finale aura pour racines les valeurs de toutes les inconnues qui entrent symétriquement dans les équations, et son degré sera au moins égal au nombre de ces inconnues.*

En effet, soient x et y deux inconnues qui entrent symétriquement dans des équations les valeurs des autres inconnues z et u par exemple en fonction, de x et y, seront symétriques par rapport à x et y, et leur élimination conduira à deux équations symétriques en x et en y. Or, puisque ces équations ne changent pas quand on y remplace x par y et réciproquement, après avoir éliminé x et trouvé l'équation finale en y, si l'on veut avoir l'équation finale en x, on n'a qu'à remplacer y par x dans la précédente, et les deux équations en x et en y, ayant les mêmes coefficients, auront les mêmes racines, c'est-à-dire que x et y seront deux racines de cette équation finale unique en réalité, elle sera donc au moins du second degré.

REMARQUE. — Les inconnues, qui n'entrent pas symétriquement dans les équations, pourront être données par des équations du premier degré, c'est pour cela qu'on élimine d'abord les inconnues symétriques, ou qu'on introduit des inconnues auxiliaires, comme le produit et la somme des inconnues, qui n'entrent pas symétriquement dans les équations, et peuvent être données par des équations finales plus simples.

Exercices. — Résoudre les systèmes d'équations suivants:

1\. — $$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2,$$
$$x + u = b,$$
$$y + z = c,$$
$$yz = ux;$$

2\. — $$(x + y + z)^2 = 5y^2 + 8(x + z),$$
$$x^2 = y + z,$$
$$z^2 = x^2 + y^2;$$

3. — $$x^2 + y^2 - (z^2 + u^2) = a^2,$$
$$x + y + z + u = b,$$
$$y^2 = xz,$$
$$zy = ux.$$

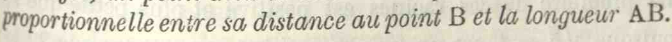
II. — Problèmes du second degré.

1. — Les problèmes de ce genre se mettent en équations de la même manière que ceux qui conduisent à des équations du premier degré, mais leur discussion complète exige souvent la résolution d'inégalités du second degré, dont nous nous occuperons dans les leçons suivantes.

L'impossibilité des problèmes est manifestée par des valeurs infinies, ou négatives, ou imaginaires, de quelque inconnue.

Nous avons déjà vu qu'une valeur négative de x n'indique pas une impossibilité absolue, si l'on a fait arbitrairement quelque hypothèse dans la mise en équations, il faut dans ce cas remettre le problème en équation en faisant une autre hypothèse, et voir si la nouvelle équation admet une racine positive (quand c'est la transformée en $-x$ de la précédente, on sait que, pour avoir sa racine, il n'y a qu'à changer le signe de la racine négative trouvée précédemment) ; il faut opérer de même quand on rencontre des racines imaginaires, et que l'on a fait dans la mise en équations quelque hypothèse arbitraire ; en voici un exemple.

PROBLÈME I. — *Trouver sur la droite* AB, *indéfiniment prolongée, un point dont la distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la longueur* AB.



Je suppose : 1° le point cherché situé à la droite du point B; soit C ce point. Je désigne par r la longueur AB et par x la distance inconnue AC; il en résulte que BC égale $x - r$. Or, on a, par hypothèse,

$$AC^2 = BC \times AB,$$

donc l'équation du problème est

$$x^2 = r(x - r),$$

ou

$$x^2 - rx + r^2 = 0.$$

En la résolvant, je trouve

$$x = \frac{r \pm \sqrt{-3r^2}}{2}.$$

Les racines de cette équation étant imaginaires, dois-je en conclure que le problème proposé est impossible ? Non ; car, pour écrire l'équation, j'ai fait une hypothèse arbitraire qui est fausse. En effet, en plaçant le point C à la droite du point B, j'ai supposé

$$AC > AB;$$

mais on a aussi

$$AC > BC;$$

par conséquent, le carré de AC est plus grand que le produit $AB \times BC$, tandis qu'il devrait lui être égal d'après l'énoncé du problème.

2° Soit C′ le point demandé, que je suppose situé entre les deux points A et B. Je désigne encore par x sa distance au point A ; le segment BC′ est par suite égal à $r - x$, et le problème a pour équation

$$x^2 = r\,(r - x)$$

ou

$$x^2 + rx - r^2 = 0.$$

Je résous cette équation, et je trouve :

$$x = \frac{r(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

La première de ces racines est positive et plus petite que r, puisque $\sqrt{5} - 1$ est un nombre positif et moindre que 2 ; le point qu'elle détermine est, conformément à l'hypothèse, compris entre les deux points donnés A et B. Quant à la seconde racine, elle est négative, et fait connaître un second point C″, situé à la gauche de l'origine A des distances et satisfaisant à la question ; car, si l'on met ce problème en équation, en supposant que le point demandé soit à la gauche du point A, l'équation

$$x^2 = r(r + x),$$

à laquelle on est conduit, n'est autre que celle qu'on obtient en remplaçant x par $-x$ dans l'équation

$$x^2 = r(r - x).$$

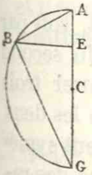
Par conséquent, le problème proposé a deux solutions correspondant aux deux racines de l'équation précédente, si l'on convient toutefois d'appliquer à ces racines les règles relatives aux quantités positives et négatives, comptées à partir d'une même origine fixe (leçons XII et XIII).

Il est à remarquer que la racine positive $\frac{r(-1+\sqrt{5})}{2}$ représente le côté du décagone régulier inscrit dans la circonférence de rayon r, tandis que la racine négative, changée de signe, $\frac{r(1+\sqrt{5})}{2}$ représente le côté du décagone régulier étoilé inscrit dans la même circonférence *.

2. — Lorsqu'on trouve des racines imaginaires, sans avoir fait dans la mise en équations aucune hypothèse arbitraire, le problème est impossible.

Problème II. — *Inscrire dans une circonférence de rayon* r *une corde égale à la somme des deux cordes qui joignent une de ses extrémités aux deux extrémités du diamètre qui lui est perpendiculaire.*

Soit AG le diamètre égal à $2r$ d'une circonférence dont le



centre est C, désignons par z la moitié BE d'une corde perpendiculaire à ce diamètre, par y la corde BA et par x la corde BG, nous aurons d'après l'énoncé

$$x + y = 2z\ ;$$

le triangle ABG rectangle, puisque l'angle B est inscrit dans une demi-circonférence, ayant pour côtés x et y et pour hypoténuse $2r$, donne

$$x^2 + y^2 = 4r^2,$$

et sa surface ayant pour expressions $\frac{xy}{2}$ et $\frac{2rz}{2}$, on aura

$$xy = 2rz.$$

Elevons la première au carré, nous aurons

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4z^2,$$

* Voir, dans mes *Éléments de Géométrie*, le problème VIII, des XXV[e] et XXVI[e] leçons, et le problème III des XXVIII[e] et XXIX[e] leçons des *Figures planes*.

ou

$$4r^2 + 4rz = 4z^2,$$

ou

$$z^2 - rz - r^2 = 0,$$

d'où

$$z = \frac{r\,(1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

La valeur négative de z est à rejeter, remplaçons z par $\frac{r\,(1+\sqrt{5})}{2}$, il vient

$$x + y = r\,(1+\sqrt{5}), \quad \text{et}\ xy = r^2\,(1+\sqrt{5}),$$

x et y sont donc les deux racines de l'équation du second degré

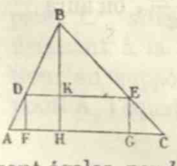
$$u^2 - r\,(1+\sqrt{5})\ \ u + r^2\,(1+\sqrt{5}) = 0,$$

d'où l'on tire,

$$u = \frac{r\,(1+\sqrt{5}) \pm r\,\sqrt{2 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

Les valeurs de x et y sont imaginaires, puisque $2 - 2\sqrt{5}$ est négatif, et, comme il n'y a pas d'autre hypothèse à faire pour mettre le problème en équations, il est impossible.

3. — Quand un problème conduit soit directement, soit par l'élimination d'autres inconnues, à une équation du second degré ayant deux racines positives, il peut se présenter trois cas : le problème a deux solutions différentes, ou bien les deux racines sont les valeurs de deux inconnues qui entraient symétriquement dans les équations, quelquefois enfin l'une des racines est à rejeter, comme dépassant certaines limites que le raisonnement assigne aux valeurs des inconnues, sans que les équations puissent en tenir compte.



PROBLÈME III. — *Inscrire dans un triangle de base* b *et de hauteur* h *un rectangle dont la surface soit égale à* m².

Soit DEFG le rectangle inscrit dans un triangle ABC, désignons par x les côtés égaux FG et DE, par y les lignes DF, EG et HK qui sont égales, par b la base AC, par h la hauteur BH. L'énoncé du problème donne l'équation

$$xy = m^2,$$

dans les triangles semblables BDE et BAC, le rapport des bases est égal au rapport des hauteurs, on a donc encore

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h};$$

d'où

$$x = \frac{bh - by}{h},$$

et par suite

$$\frac{y\,(bh - by)}{h} = m^2,$$

ou

$$by^2 - bhy + m^2h = 0,$$

d'où

$$y = \frac{bh \pm \sqrt{b^2h^2 - 4m^2bh}}{2b},$$

enfin

$$x = \frac{bh \mp \sqrt{b^2h^2 - 4m^2bh}}{2h}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que les valeurs de x et y soient réelles, et que la quantité placée sous le radical soit positive, on doit avoir

$$4m^2bh \leqslant b^2h^2 \quad \text{ou} \quad m^2 \leqslant \frac{bh}{4};\ *$$

ce qui montre qu'on ne peut pas inscrire un rectangle dont la surface dépasse la moitié de celle du triangle.

Si m^2 est égal à $\frac{bh}{4}$, le radical s'annule, les deux valeurs de y sont égales, ainsi que celles de x, si m^2 est plus petit que $\frac{bh}{4}$ y a deux valeurs réelles et positives, ainsi que x, et le problème a deux solutions, deux rectangles différents inscrits dans le triangle ont la surface demandée.

4. — Donnons maintenant un exemple du cas où les deux racines sont les valeurs de deux inconnues entrant symétriquement dans les équations.

* Le signe $\leqslant$ signifie plus petit ou égal.

PROBLÈME IV. — *Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant la somme des côtés de l'angle droit* 2p *et la hauteur* h *perpendiculaire à l'hypoténuse.*

Désignons par x et y les côtés de l'angle droit, et par z l'hypoténuse, nous aurons, puisque le triangle est rectangle,

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

et, en égalant les deux expressions de la surface,

$$xy = hz,$$

l'énoncé donne ensuite l'équation

$$x + y = 2p.$$

De là on tire

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4p^2$$

et, en remplaçant $x^2 + y^2$ par z^2, et xy par hz,

$$z^2 + 2hz - 4\,p^2 = 0,$$

et par suite

$$z = -\,h \pm \sqrt{h^2 + 4p^2}.$$

On voit que z est toujours réel, la valeur positive convient seule. Si nous remplaçons dans la seconde équation y par $2p - x$, et z par $-\,h + \sqrt{h^2 + 4p^2}$, elle devient

$$x\,(2p - x) = -\,h^2 + h\sqrt{h^2 + 4p^2}\,,$$

ou bien

$$x^2 - 2px - h^2 + h\sqrt{h^2 + 4p^2} = 0,$$

d'où

$$x = +\,p \pm \sqrt{p^2 + h^2 - h\sqrt{h^2 + 4p^2}}\,.$$

Pour que ces valeurs de x soient réelles, il faut que l'on ait

$$p^2 + h^2 \geqslant h\sqrt{h^2 + 4p^2}\,,$$

ou, en élevant les deux membres qui sont positifs au carré (page 160, Th. VII),

$$p^4 + 2p^2h^2 + h^4 \geqslant h^4 + 4\,p^2h^2,$$

ou

$$p^2\,(p^2 - 2h^2) \geqslant 0,$$

ou

$$p^2 \geqslant 2h^2,$$

ou enfin

$$p \geqslant h\sqrt{2}\,.$$

Si p surpasse $h\sqrt{2}$, les deux valeurs de x représentent les deux côtés de l'angle droit du triangle, car les équations proposées sont symétriques par rapport à x et à y, on eût pu le voir en remarquant que, le produit des côtés étant $-h^2+h\sqrt{h^2+4p^2}$, et leur somme $2p$, ces deux côtés sont les racines d'une même équation du second degré

$$u^2-2pu-h^2+h\sqrt{h^2+4p^2}=0$$

identique à l'équation en x trouvée précédemment. Si p est égal à $h\sqrt{2}$, les valeurs de x et y sont égales, le triangle est isocèle.

5. — Nous allons donner maintenant un exemple où l'une des racines positives est à rejeter, comme dépassant certaines limites imposées à l'inconnue.

Problème V. — *Une éprouvette renversée sur du mercure, dont le niveau est le même en dedans et en dehors, contient une colonne de gaz à* t° *de* h *centimètres, sous la pression extérieure qui équivaut à* p *centimètres de mercure, on refroidit le gaz de l'éprouvette à* 0°, *de combien s'élèvera le niveau du mercure dans l'éprouvette, en supposant que le mercure reste à la même température* 0° *pendant l'expérience, et que son niveau à l'extérieur de l'éprouvette ne change pas ?*

L'équation du problème nous est fournie par ce principe : les volumes d'une même masse de gaz sont en raison directe des binômes de dilatation, et en raison inverse des pressions. Soit x le nombre de centimètres dont le mercure monte dans l'éprouvette, b la section de l'éprouvette, k le coefficient de dilatation des gaz ; au commencement de l'expérience, le volume du gaz est bh, son binôme de dilatation $1+kt$, sa pression p ; à la fin son volume est $b(h-x)$, son binôme de dilatation se réduit à 1, et sa pression devient $p-x$; on a donc l'équation

$$\frac{bh}{b(h-x)}=\frac{(1+kt)(p-x)}{1\times p},$$

ou

$$ph=(1+kt)\left[ph-(p+h)x+x^2\right],$$

ou

$$x^2-(p+h)x+ph-\frac{ph}{1+kt}=0,$$

ou

$$x^2-(p+h)x+\frac{phkt}{1+kt}=0,$$

d'où

$$x=\frac{p+h}{2}\pm\sqrt{\frac{(p+h)^2}{4}-\frac{phkt}{1+kt}}.$$

Les deux valeurs de x sont toujours réelles, car $\frac{(p+h)^2}{4}-ph$ ou $\frac{(p-h)^2}{4}$ est positif, et, comme $\frac{phkt}{1+kt}$ est plus petit que ph, a fortiori $\frac{(p+h)^2}{4}-\frac{phkt}{1+kt}$ sera positif ; dès lors les deux valeurs de x sont positives, car leur produit $\frac{phkt}{1+kt}$ est positif, elles sont donc de même signe, et leur somme $p+h$ est positive, elles ont donc le signe $+$ toutes les deux. Le problème ne peut avoir qu'une solution, il faut choisir entre les deux.

Or la quantité x dont le mercure monte ne peut dépasser la pression extérieure p, si donc l'une des racines dépasse p, elle sera à rejeter. Je dis que la première racine dépasse p ; en effet, l'on a

$$\frac{phkt}{1+kt}<ph,$$

donc

$$\frac{(p+h)^2}{4}-\frac{phkt}{1+kt}>\frac{(p+h)^2}{4}-ph \text{ ou } \frac{(p-h)^2}{4},$$

donc

$$\sqrt{\frac{(p+h)^2}{4}-\frac{phkt}{1+kt}}>\frac{p-h}{2},$$

et par suite

$$x' \text{ ou } \frac{p+h}{2}+\sqrt{\frac{(p+h)^2}{4}-\frac{phkt}{1+kt}}>\frac{p+h}{2}+\frac{p-h}{2} \text{ ou } p.$$

La première racine x' est donc à rejeter, je dis que la seconde est plus petite que p, et que l'on a

$$\frac{p+h}{2}-\sqrt{\frac{(p+h)^2}{4}-\frac{phkt}{1+kt}}<p,$$

ce qui revient à prouver que l'on a

$$\frac{h-p}{2} < \sqrt{\frac{(p+h)^2}{4} - \frac{phkt}{1+kt}},$$

inégalité évidente si h est plus petit que p, s'il est plus grand, on peut élever au carré les deux membres positifs de cette inégalité, on est ramené à prouver que l'on a

$$\frac{p^2-2ph+h^2}{4} < \frac{p^2+2ph+h^2}{4} - \frac{phkt}{1+kt},$$

ou

$$\frac{phkt}{1+kt} < ph,$$

ou

$$phkt < ph + phkt,$$

inégalité évidente. On pourrait démontrer d'une façon analogue que la première racine est plus grande que h, ce qui doit la faire rejeter, et la seconde plus petite que h. Ici encore, comme dans le problème I (page 168), si nous avions pris pour seconde inconnue la longueur y à laquelle se réduit la colonne de gaz, en posant

$$x+y=h,$$

l'impossibilité de la première valeur de x eût été manifestée par une valeur négative de y, correspondante à cette valeur de x.

6. — Lorsqu'un problème du second degré conduit à deux racines, l'une positive et l'autre négative, il arrive quelquefois que la racine négative indique une seconde solution du problème, portée dans un sens opposé à celui de la solution positive; en voici un exemple.

Problème VI. — *Trouver, sur la droite qui joint deux points lumineux* A *et* B, *un point également éclairé par eux, en supposant que les intensités de leurs lumières soient données.*

Soit d la distance AB qui sépare les deux points lumineux; je désigne par a l'intensité de la lumière du point A, ou la quantité de lumière qu'il envoie sur l'unité de surface située à l'unité de distance de A, par b l'intensité de la lumière du point B. Je représente par x la distance du point inconnu C au point A, que je prends pour origine. On démontre en physique que *la quantité de lumière, envoyée par un point lumineux sur une surface, varie en raison inverse du carré de la distance de cette surface au point lumineux.*

Il résulte de là que si l'unité de surface, située à l'unité de distance du point A, reçoit une quantité de lumière a, elle n'en recevra plus que la quantité $\frac{a}{x^2}$, lorsqu'elle en sera éloignée de x unités. De même, l'unité de surface située à la distance $(d-x)$ du point B recevra de ce point une quantité de lumière $\frac{b}{(d-x)^2}$; l'équation du problème est donc

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}.$$

Au lieu de la résoudre en chassant les dénominateurs, et la ramenant à la forme ordinaire, je remarque que ses deux membres sont des carrés parfaits, et j'en prends les racines, j'ai

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\pm\sqrt{b}}{d-x},\quad \text{ou}\quad \frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{d-x}{\pm\sqrt{b}},$$

d'où, en faisant la somme des numérateurs et celle des dénominateurs (page 54, Th. VI),

$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}};$$

le problème a dès lors deux solutions.

La première racine

$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

indique qu'il existe un point satisfaisant aux conditions du problème entre les deux lumières A et B, puisque l'on a

$$\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<d;$$

Si a est égal à b, ce point est situé au milieu de AB.

La seconde racine

$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

montre qu'il existe un autre point également éclairé par les deux lumières, et que ce point est situé à la droite de B, si l'on a

$$a > b,$$

car alors cette seconde racine est positive, et surpasse d; mais si l'on a

$$a < b,$$

cette seconde racine devient négative, et s'interprète en portant sa valeur absolue à gauche de A, car si on remet le problème en équation, en supposant le point cherché à gauche de A, on a

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d+x)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{(-x)^2} = \frac{b}{(d+x)^2}$$

qui est la transformée en $-x$ de l'équation précédente (12 et 13, III, 2).

Dans le cas singulier, qui correspond à l'hypothèse que a égale b, le première solution devient $\frac{a}{2}$, le point c est au milieu de AB, et la seconde devient infinie $\frac{d\sqrt{a}}{0}$, ce qui signifie qu'elle augmente de plus en plus, de manière à dépasser toute grandeur donnée, quand a s'approche de plus en plus de b, et qu'elle n'existe plus si a égale b.

Si je suppose à la fois

$$a = b \quad \text{et} \quad d = 0$$

la première solution devient nulle, la seconde devient $\frac{0}{0}$, et le problème est réellemeut indéterminé ; car les deux lumières étant également intenses et occupant le même lieu A, tout point de l'espace est également éclairé par ces deux lumières.

7. — Une racine négative est à rejeter quand on n'a fait dans la mise en équations du problème aucune hypothèse arbitraire.

PROBLÈME VII. — *Les deux branches d'un manomètre en* U *ont pour section* b, *la branche fermée contient une colonne d'air de* h *centimètres à la température de* 0°, *le mercure étant au même niveau dans les deux branches, et la pression extérieure équivalant à celle de* p *centimètres de mercure ; on chauffe l'air de la branche fermée à* t°, *de combien descendra le niveau du mercure dans cette branche.*

Soit k le coefficient de dilatation du gaz, et x la quantité dont le mercure descend dans la branche fermée, il monte nécessairement de la même quantité x dans la branche ouverte, qui a même section, puisque son volume n'a pas changé, la pression du gaz à t^o est donc p plus la différence $2x$ des niveaux du mercure dans les deux branches.

Les volumes d'une même masse de gaz étant en raison directe des binômes de dilatation, et en raison inverse des pressions, on aura

$$\frac{h+x}{h}=\frac{1+kt}{1}\times\frac{p}{p+2x}$$

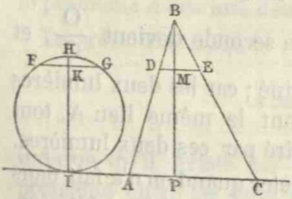
ou

$$2x^2+(p+2h)x+ph=ph+phkt.$$
$$2x^2+(p+2h)x-phkt=0.$$

Le produit des racines $\dfrac{-phkt}{2}$ étant négatif, elles sont de signe contraire, la racine négative est à rejeter, le problème n'a qu'une solution.

8. — Nous terminerons cette étude sur les problèmes du second degré par la discussion complète de deux problèmes, qui présentera la plupart des circonstances que nous avons rencontrées isolément.

Problème VIII. — *Une circonférence de rayon* r *touchant la base* AC *d'un triangle donné, on propose de mener une parallèle à la base, telle que la partie de cette parallèle comprise à l'intérieur de la circonférence soit égale à la partie comprise à l'intérieur du triangle.*



Désignons par b et h la base AC et la hauteur BP du triangle, par x la longueur commune des parallèles FG et DE, comprises à l'intérieur de la circonférence et du triangle, par y leur distance à la base KI ou MP.

Les triangles semblables BDE et ABC donnent l'équation

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}},$$

le triangle HGI rectangle en G, puisque l'angle G est inscrit dans une demi-circonférence, donne

$$GK^2 = KI \times KH\,;$$

si nous remplaçons les longueurs prises sur la figure par leurs expressions algébriques, nous aurons les deux équations

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$\frac{x^2}{4} = y\,(2r-y).$$

De la première on tire

$$x = \frac{b\,(h-y)}{h},$$

substituant à x cette valeur dans la seconde, on a

$$\frac{b^2\,(h^2-2hy+y^2)}{4h^2} = 2ry - y^2,$$

ou

$$(4h^2+b^2)\,y^2 - 2h\,(b^2+4r\,h)\,y + b^2h^2 = 0$$

d'où

$$y = \frac{h\,(b^2+4rh) \pm \sqrt{h^2\,(b^2+4rh)^2 - b^2h^2\,(4h^2+b^2)}}{4h^2+b^2}.$$

remplaçant y par sa valeur dans l'expression $\frac{b(h-y)}{h}$ qui donne x, on a

$$x = \frac{b}{h}\left[h - \frac{h(b^2+4rh) \pm \sqrt{h^2\,(b^2+4rh)^2 - b^2h^2\,(4h^2+b^2)}}{4h^2+b^2}\right]$$

ou

$$x = b\left[\frac{4h^2 - 4rh \mp \sqrt{(b^2+4rh)^2 - b^2\,(4h^2+b^2)}}{4h^2+b^2}\right]$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que les valeurs de x et de y soient réelles, et pour cela que l'on ait

$$(b^2+4rh)^2 > b^2\,(4h^2+b^2),$$

ou

$$8b^2\,rh + 16r^2h^2 > 4b^2h^2$$

ou

$$h\,(b^2-4r^2) < 2b^2r$$

si l'on a $b \leqslant 2r$, d'où $b^2 \leqslant 4r^2$, cette condition sera toujours satisfaite ; si l'on a $b > 2r$, il faut que l'on ait $h \leqslant \frac{2b^2r}{b^2-4r^2}$.

Dès lors y a deux valeurs réelles et positives, car leur produit $\frac{b^2h^2}{4h^2+b^2}$ est positif, et leur somme $\frac{2h(b^2+4rh)}{4h^2+b^2}$ aussi positive ; x aura dès lors deux valeurs réelles qui ne pourront être toutes deux négatives, car pour cela il faudrait que la partie extérieure au radical, $4h^2 - 4rh$, fût négative, c'est-à-dire, h plus petit que r, et qu'elle fût supérieure au radical en valeur absolue, on devrait donc avoir en même temps

$$(4rh - 4h^2)^2 > (b^2 + 4rh)^2 - b^2(4h^2 + b^2),$$

ou

$$16r^2h^2 - 32rh^3 + 16h^4 > b^4 + 8b^2rh + 16r^2h^2 - 4b^2h^2 - b^4;$$

ou en faisant tout passer au premier membre

$$16h^3(h - 2r) + 4b^2h(h - 2r) > 0,$$

ou enfin

$$(16h^3 + 4b^2h)(h - 2r) > 0\,;$$

h devrait être plus grand que $2r$, et nous le supposons plus petit que r. Les valeurs de x seront donc l'une négative et l'autre positive, à moins que la partie extérieure au radical $4h^2 - 4rh$ ne soit positive, et supérieure au radical, ce qui exige que l'on ait

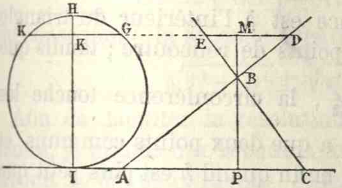
$$h > r \quad \text{et} \quad (4h^2 - 4rh)^2 > (b^2 + 4rh)^2 - b \quad b^2(4h^2 + b^2).$$

Ce qui nous conduit comme tout à l'heure à $h > 2r$.

Le tableau synoptique suivant résume cette discussion.

$$\begin{cases}
\text{Si l'on a } b > 2r \text{ et } \begin{cases} h > \dfrac{2b^2r}{b^2-4r^2}, & x \text{ et } y \text{ sont imaginaires, problème impossible.} \\[2mm] h = \dfrac{2b^2r}{b^2-4r^2}, & y' = y'' \text{ et } x' = x'' \text{ le probl. n'a qu'une solut.} \end{cases} \\[6mm]
\text{Si l'on a } \begin{cases} b < 2r \\ \text{ou } b > 2r \\ \text{et } h < \dfrac{2b^2r}{b^2-4r^2} \end{cases}
\left\{ \begin{array}{ll}
h < r & \begin{cases} x' \text{ est négatif} \\ x'' \text{ est positif} \end{cases} \\
h = r & \begin{cases} x' \text{ est négatif} \\ x'' = -x' \text{ est pos} \end{cases} \\
h > r & \begin{cases} h > 2r & \begin{cases} x' \text{ est positif} \\ x'' \text{ est positif} \end{cases} \\ h = 2r & \begin{cases} x = 0 \\ x'' \text{ est positif} \end{cases} \\ h < 2r & \begin{cases} x' \text{ est négatif} \\ x'' \text{ est positif} \end{cases} \end{cases}
\end{array} \right\} \; y' \text{ et } y'' \text{ sont toujours positifs.}
\end{cases}$$

Les valeurs négatives trouvées pour x dans deux cas n'indiquent pas que le problème ait alors une seule solution ; en effet dans ces deux cas h est plus petit que $2r$, et l'on conçoit alors une parallèle coupant le cercle et les côtés du triangle prolongés au delà du sommet, remettons le problème en équations dans cette hypothèse. En adoptant les mêmes notations KG = DE = x et KI = MP = y, les triangles semblables BDE et ABC donnent



$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}},$$

ou

$$\frac{x}{b} = \frac{y-h}{h},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{-x}{b} = \frac{h-y}{h},$$

et la circonférence donne $\mathrm{GK}^2 = \mathrm{KI} \times \mathrm{KH}$, qui peut s'écrire

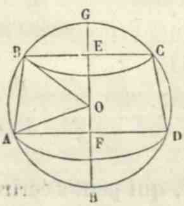
$$\left(\frac{-x}{2}\right)^2 = y\,(2r-y).$$

Ces équations étant les transformées en $-x$ des précédentes, quand les précédentes donneront pour x une racine négative, celles-ci donneront une racine égale en valeur absolue, mais positive. Les valeurs négatives de x s'interprètent donc en supposant que la parallèle DE passe au-dessus du sommet du triangle; on doit remarquer qu'en même temps le point D qui était à gauche du point E est passé à droite.

Remarque. — Les valeurs de x et y seraient absolument les mêmes si le triangle donné était isocèle, car rien dans la mise en équations ne suppose les côtés AB et BC inégaux, elles seraient encore les mêmes, si la hauteur du triangle coïncidait avec le diamètre HI qui aboutit au point de contact de la circonférence avec la base du triangle. Le problème reviendrait alors à trouver la longueur de la ligne qui joint les points de rencontre de la circonférence et des côtés AB et BC, ainsi que sa distance à la base. Dans cette position de la figure on reconnaît que les conditions d'impossibilité $b > 2r$ et $h > \frac{2b^2r}{b^2 - 4r^2}$ expriment que la circonférence est à l'intérieur du triangle isocèle, il n'y a donc plus de points de rencontre ; tandis que si l'on a $b > 2r$ et $h = \frac{2b^2r}{b^2 - 4r^2}$, la circonférence touche les deux côtés du triangle, il n'y a que deux points communs, et qu'une ligne qui les joigne ; enfin quand h est plus petit que $\frac{2b^2r}{b^2 - 4r^2}$ les deux côtés coupent la circonférence, il y a quatre points communs et deux lignes qui les joignent.

Problème IX. — *Calculer les rayons des bases d'un cône tronqué dont la hauteur et le volume sont donnés, et qui est inscrit dans une sphère donnée.*

Je mène par le diamètre GH de la sphère donnée un plan qui coupe la sphère suivant le grand cercle OG, et le tronc de cône suivant le trapèze ABCD, inscrit dans ce cercle. Je désigne par r le rayon de la sphère, par h la hauteur connue EF du cône tronqué, et par x et y les rayons FA, EB, de ses bases ; son volume égale dès lors



$\frac{1}{3}\pi h(x^2 + y^2 + xy)$. Comme ce volume a une grandeur donnée, je le représente par celui d'un cône de même hauteur h que le cône tronqué et dont le rayon de la base soit une ligne donnée a ; j'ai par suite l'équation

$$\frac{1}{3}\pi h(x^2 + y^2 + xy) = \frac{1}{3}\pi h a^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + xy = a^2. \qquad (1)$$

Pour avoir une seconde équation, je remarquerai que la hauteur EF ou h du cône tronqué, est égale à la somme ou à la différence des deux segments OF, OE, du diamètre GH de la sphère, suivant que le centre O de la sphère est à l'intérieur ou à l'extérieur du tronc de cône. Or, les triangles OBE, OAF, étant rectangles, on a

$$OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{r^2 - y^2}$$

et

$$\mathrm{OF} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AF}^2} = \sqrt{r^2 - x^2};$$

par conséquent, la seconde équation du problème est

$$\sqrt{r^2 - y^2} \pm \sqrt{r^2 - x^2} = h. \qquad (2)$$

Afin de faciliter la résolution des deux équations précédentes, je prends une inconnue auxiliaire qui n'est autre que le produit xy des deux rayons, et je la représente par z^2, de sorte que j'ai

$$xy = z^2. \qquad (3)$$

Cela posé, j'ajoute d'abord membre à membre les équations (1) et (3); ce qui donne

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + z^2,$$

et, par conséquent,

$$x + y = \sqrt{a^2 + z^2}. \qquad (4)$$

Je multiplie ensuite par 3 les deux membres de l'équation (3), et je la retranche de l'équation (1); je trouve ainsi

$$x^2 + y^2 - 2xy = a^2 - 3z^2,$$

et j'en déduis

$$x - y = \sqrt{a^2 - 3z^2} \qquad (5)$$

en supposant toutefois le rayon x plus grand que l'autre rayon y: les équations (4) et (5) font donc connaître la somme et la différence des inconnues x et y en fonction de l'inconnue auxiliaire z^2. Pour calculer la valeur de cette dernière quantité, j'élève au carré les deux membres de l'équation (2), et j'ai

$$2r^2 - x^2 - y^2 \pm 2\sqrt{r^4 - r^2(x^2 + y^2) + x^2y^2} = h^2;$$

j'isole ensuite le radical et j'élève au carré les deux membres de la nouvelle équation, ce qui donne

$$4r^4 + 4x^2y^2 - (x^2 + y^2)^2 - 2h^2(x^2 + y^2) - (h^2 - 2r^2)^2 = 0,$$

quel que soit le signe du radical. Mais on a

$$xy = z^2, \quad \text{et } x^2 + y^2 = a^2 - z^2;$$

par conséquent, si j'élimine x et y de l'équation précédente, j'aurai

$$4r^4 + 4z^4 - (a^2 - z^2)^2 - 2h^2(a^2 - z^2) - (h^2 - 2r^2)^2 = 0.$$

ou

$$3z^4 + 2(a^2 + h^2)z^2 + 4h^2r^2 - (a^2 + h^2)^2 = 0.$$

Comme la valeur de z^2 doit être positive, et que la somme des racines de la dernière équation qui détermine cette inconnue auxiliaire est négative, il faut que leur produit soit négatif pour qu'une de ces racines soit positive. L'une des conditions de possibilité du problème est donc exprimée par l'inégalité

$$(a^2+h^2)^2 > 4h^2r^2,$$

de laquelle je déduis une limite inférieure de a^2, savoir :

$$a^2 > h(2r-h).$$

Pour avoir la valeur de z^2, je résous maintenant l'équation bicarrée, et je trouve

$$z^2 = \frac{-(a^2+h^2)+2\sqrt{(a^2+h^2)^2-3h^2r^2}}{3};$$

cette valeur de z^2 est évidemment réelle d'après l'inégalité précédente ; en la substituant dans les équations (4) et (5), j'aurais celles des quantités $x+y$, $x-y$, et, par suite, les inconnues x et y. Mais il suffit de remarquer que $x-y$ n'est réelle qu'autant que l'on a

$$3z^2 \leqslant a^2,$$

ce qui donne l'inégalité de conditton

$$-(a^2+h^2)+2\sqrt{(a^2+h^2)^2-3r^2h^2} \leqslant a^2$$

qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$2\sqrt{(a^2+h^2)^2-3r^2h^2} \leqslant 2a^2+h^2.$$

J'élève ensuite au carré ses deux membres qui sont positifs, et je trouve, toute réduction faite,

$$a^2 \leqslant \frac{3}{4}(4r^2-h^2).$$

Cette nouvelle inégalité fait connaître une limite supérieure de la quantité a^2 ; on vérifie facilement que cette limite est plus grande que la précédente. Par conséquent, si on prend à volonté les valeurs de r et h, h étant toutefois moindre que $2r$, on devra choisir la valeur de a de telle sorte qu'elle soit comprise entre $\sqrt{h(2r-h)}$ et $\frac{\sqrt{3(4r^2-h^2)}}{2}$, pour que le problème soit possible.

Cas particuliers : 1° si on suppose a égale à sa limite inférieure, ou

$$a^2 = h(2r - h),$$

la valeur de z^2 est nulle, et l'on a

$$x = a,\ y = 0,$$

c'est-à-dire que le tronc de cône devient un cône ; ce qui exige que le rayon de sa base soit égal à a.

2° Lorsque a est égale à sa limite supérieure, on a

$$3z^2 = a^2,$$

et, par suite,

$$x = y\ ;$$

par conséquent, le cône tronqué se change en un cylindre dont le rayon x de la base est égal à

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{3}},\ \text{ou}\ \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

III. — Construction des racines des équations homogènes.

Dans les problèmes de géométrie, quand aucune ligne de la question n'a été prise pour unité, et que toutes sont représentées par des lettres, les équations sont toujours *homogènes*, et les formules qui représentent les inconnues sont du premier degré, on peut les construire à l'aide de la règle et du compas.

1. — Je renverrai à mes *Éléments de géométrie* (XXXIII^e leçon) pour la construction des formules rationnelles :

$$x = a \pm b \pm c,$$

$$x = \frac{ab}{c},$$

quatrième proportionnelle aux lignes a, b et c,

$$x = \frac{abcd}{efg},$$

qui se construit par une série de quatrièmes proportionnelles,

$$x = \frac{abc \pm def}{gh \pm kl},$$

qui se ramène aux constructions précédentes, en posant $aby = def$, et $gz = kl$, ce qui donne finalement

$$x = \frac{ab(c \pm y)}{g(h \pm z)}.$$

2. — Je m'occuperai ici exclusivement des formules qui contiennent des radicaux.

1° $x = \sqrt{ab}$ représente la moyenne proportionnelle entre a et b, on a appris à la construire (*Eléments de géométrie*, leçons XXV^e et XXVI^e, problème IV).

2° $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ représente l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés a et b, on prend sur les côtes d'un angle droit des longueurs a et b, x est la ligne qui joint leurs extrémités.

3° $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ représente le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse a et pour autre côté b ; pour le construire, on prend sur un côté d'un angle droit une longueur AC égale à b à partir du sommet A, de C comme centre on décrit avec a pour rayon une circonférence, qui coupe l'autre côté de l'angle droit en B, la ligne x cherchée est AB.

4° $x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$. Pour construire cette formule, on construit d'abord le côté y de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse a et pour autre côté b, de sorte que y^2 égale $a^2 - b^2$, la valeur de x devient $x = \sqrt{y^2 + c^2 - d^2}$, que l'on simplifiera de même, et cherchant l'hypoténuse z du triangle rectangle qui a pour côtés y et c, la valeur de x se trouve ainsi réduite à $\sqrt{z^2 - d^2}$, que l'on sait construire.

5° $x = \sqrt{ab \pm cd}$. Lorsque l'on a sous le radical des produits au lieu de carrés, on ramène le problème aux précédents, en construisant les moyennes proportionnelles entre les facteurs de chaque produit, $y = \sqrt{ab}$, $z = \sqrt{cd}$, la valeur de x devient $\sqrt{y^2 \pm z^2}$.

6° $x = \sqrt{\frac{abcd}{ef} \pm \frac{a'b'c'd'e'}{f'g'h'}}$. Pour construire cette formule, on construit une ligne y égale à $\frac{abc}{ef}$, et une ligne z

égale à $\frac{a'b'c'd'}{f'g'h'}$, la valeur de x se trouve ramenée à la forme précédente $\sqrt{yd \pm ze'}$.

7° $x = \sqrt[4]{a^4 \pm b^4}$. Pour construire cette formule, on met a^2 en facteur sous le radical, qui devient $\sqrt[4]{a^2\left(a^2 \pm \frac{b^4}{a^2}\right)}$, puis on construit la ligne y égale à $\frac{b^2}{a}$, la formule devient $\sqrt[4]{a^2(a^2 \pm y^2)}$, on construit ensuite la ligne z dont le carré égale $a^2 \pm y^2$, et la formule est ramenée à la forme $\sqrt[4]{a^2z^2}$ ou $\sqrt[2]{az}$, formule du premier cas.

8° $x = \sqrt[8]{a^8 \pm b^8}$. On met d'abord a^6 en facteur sous le radical, qui devient $\sqrt[8]{a^6\left(a^2 \pm \frac{b^8}{a^6}\right)}$, on cherche la ligne y égale à $\frac{b^4}{a^3}$, et le radical devient $\sqrt[8]{a^6(a^2 \pm y^2)}$, puis on construit la ligne z dont le carré égale $a^2 \pm y^2$, on a $\sqrt[8]{a^6z^2}$ ou $\sqrt[4]{a^3z}$, on construit la ligne u dont le carré égale az, il vient $\sqrt[4]{a^2u^2}$ ou $\sqrt[2]{au}$.

9° Il semble que les formules de la forme $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$... ne puissent se traiter par les méthodes précédentes ; mais faisons passer a sous le radical, elles deviennent $\sqrt{2a^2}$, $\sqrt{3a^2}$,... ou $\sqrt{a^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$,... la première est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait deux côtés égaux à a, la seconde est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés a et l'hypoténuse du précédent, et ainsi de suite. Cette méthode serait trop longue, si on l'appliquait à la formule $a\sqrt{95}$ ou $\sqrt{95a^2}$: alors on décompose 95 en une somme ou une différence de carrés, 95 équivaut à $9^2 + 3^2 + 2^2 + 1$, on a donc à construire $\sqrt{(9a)^2 + (3a)^2 + (2a)^2 + a^2}$, 4ème cas des formules irrationnelles ; on arrive encore plus vite, en remarquant que 95 égale $10^2 - 2^2 - 1^2$, et on a à construire $\sqrt{(10a)^2 - (2a)^2 - a^2}$, formule irrationnelle du 4ème cas.

10° Les formules de la forme $\frac{a}{\sqrt{3}}$ se ramènent immédiatement aux précédentes, en faisant passer les radicaux au numérateur, ce qui donne $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

3. — Ces préliminaires posés, nous pouvons construire les racines d'une équation homogène du second degré, ou du quatrième, mais bicarrée. Quelquefois ces constructions sont celles que l'on donne dans la géométrie pour résoudre le même problème, le plus souvent elles sont plus compliquées.

Construction des racines du problème I, (page 243). Les racines de l'équation de ce problème

$$x^2 + rx - r^2 = 0,$$

peuvent être mises sous la forme $-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2}$.

Pour construire cette formule, je construis d'abord le radical, en prenant sur les deux côtés d'un angle droit OBA des longueurs OB égale à $\frac{r}{2}$ et BA égale à r, la ligne AO est alors égale à $\sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2}$. Pour avoir la racine positive, il suffit d'en retrancher $\frac{r}{2}$, pour cela, du point O comme centre avec $\frac{r}{2}$ ou OB pour rayon, je décris une circonférence qui coupe AO en un point D, j'ai alors

$$AD = AO - OD = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} - \frac{r}{2} = x'.$$

Pour avoir la racine négative en valeur absolue, il suffit d'ajouter $\frac{r}{2}$ au radical, la circonférence que je viens de décrire coupe AO prolongée en un point E, tel que l'on a

$$AE = AO + OE = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} + \frac{r}{2} = -x''.$$

Cette construction est la même que celle que j'ai donnée dans les *Eléments de géométrie*, leçons XXV^e^ et XXVI^e^, problème VIII ; et si je porte la longueur AD sur la ligne AB en AC, et la longueur AE sur le prolongement de AB en AC′, j'ai les deux points C et C′ de la ligne AB, qui jouissent de la propriété demandée.

Construction des racines du problème III (page 246).

Nous ne construirons que les valeurs de y qui sont $\dfrac{bh \pm \sqrt{b^2h^2 - 4m^2bh}}{2b}$.

Pour cela nous ferons sortir du radical le facteur b, ce qui réduit la formule à $\dfrac{h \pm \sqrt{h^2 - \dfrac{4m^2h}{b}}}{2}$, nous construirons la troisième proportionnelle z à $2m$ et à b, qui vaut $\dfrac{4m^2}{b}$, et la formule deviendra

$$\frac{h \pm \sqrt{h^2 - hz}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{h \pm \sqrt{h(h-z)}}{2};$$

il n'y a plus qu'à prendre la moyenne proportionnelle entre h et $h - z$, à l'ajouter à h ou à l'en retrancher, et à prendre les moitiés des deux longueurs ainsi trouvées, on a y' et y'' ; on porte ces longueurs sur la hauteur BH à partir de H, et, par leurs extrémités, on mène des parallèles à AC, qui sont les bases supérieures des deux rectangles répondant à la question.

Construction des racines du problème IX (page 258).

Nous ne construirons que la valeur de z qui est la racine d'une équation bicarrée,

$$\sqrt{\frac{-(a^2+h^2)+2\sqrt{(a^2+h^2)^2-3h^2r^2}}{3}}.$$

Nous construirons d'abord la ligne u, hypoténuse du triangle rectangle qui a pour côtés a et h, puis la ligne v, égale à $\dfrac{\sqrt{3}hr}{u}$, par une quatrième proportionnelle aux lignes $\sqrt{3}h$, r et u; la formule $\sqrt{3}hr$ sera égale à uv, et son carré $3h^2r^2$ à u^2v^2, la formule à construire devient

$$\sqrt{\frac{-u^2+2\sqrt{u^4-u^2v^2}}{3}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{-u^2+2u\sqrt{(u+v)(u-v)}}{3}}.$$

Construisons alors la moyenne proportionnelle p entre $u+v$ et $u-v$, notre formule se réduit à

$$\sqrt{\frac{-u^2+2up}{3}} \text{ ou } \sqrt{\frac{u}{3}(2p-u)},$$

qui est la moyenne proportionnelle entre $\frac{u}{3}$ et $2p-u$, lignes faciles à construire, quand on a construit u et p.

EXERCICES.

(II, 3)* 1. — Dans un angle droit, dont le sommet est O, on prend sur l'un des côtés une longueur OA égale à a, au point A on élève sur OA une perpendiculaire AB égale à b, on demande de calculer le rayon d'une circonférence passant en B, et touchant les deux côtés de l'angle droit.

(*Rép.* $x = a + b \pm \sqrt{2ab}$.)

2. — Dans un triangle équilatéral de côté a, mener une parallèle à la base, telle que la somme des carrés de cette parallèle et des deux segments adjacents à la base, qu'elle détermine sur les côtés, soit égale à m^2. En supposant m^2 plus petit que a^2, et plus grand que $\frac{2a^2}{3}$, les deux racines sont positives.

(*Rép.* En appelant x la parallèle et y un des segments, on a

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{3m^2 - 2a^2}}{3},\ y = \frac{a \pm \sqrt{3m^2 - 2a^2}}{3}.)$$

3. — Calculer le rayon d'un cône circonscrit à une sphère de rayon r, en supposant sa surface totale égale à πa^2.

(*Rép.* En appelant x le rayon de base du cône, on a

$$x^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 8r^2a^2}}{4}.)$$

4. — Dans un rectangle ABCD, on donne le côté AB qu'on appelle a, et le côté AC qu'on appelle b ; on propose de tracer deux arcs de 45° tangents l'un à CD au point C, l'autre à BD au point B, et dont les

* Nous indiquons par cette notation (II, 3.) le paragraphe de la leçon auquel se rapportent les exercices qui suivent.

deux autres extrémités coïncident, et soient tangentes à la même droite.

(*Rép.* En appelant R et r les deux rayons, on a $R = a \pm \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$, et $r = b \mp \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$).

5. — Calculer le rayon et la hauteur d'un cylindre inscrit dans une sphère donnée de rayon r, en supposant égal à m le rapport de sa surface totale à celle d'un grand cercle.

(*Rép.* En appelant x le rayon de la base, et y la hauteur, on a :

$$x^2 = \frac{r^2\left(m + 4 \pm \sqrt{(m+4)^2 - 5m^2}\right)}{10}$$

et

$$y^2 = \frac{r^2\left(12 - 2m \mp 2\sqrt{(m+4)^2 - 5m^2}\right)}{5}).$$

6. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle dont on connaît le périmètre $2p$, et la surface πa^2 du volume engendré par la révolution de ce triangle autour de son hypoténuse.

(*Rép.* En appelant z l'hypoténuse, on a

$$z = \frac{6p^2 + a^2 \pm \sqrt{(6p^2 + a^2)^2 - 32p^4}}{4p}).$$

(II, 4) 7. — Partager le nombre 21 en deux parties telles que la somme de leurs cubes égale 2331.

(*Rép.* 10 et 11.) Généraliser et discuter ce problème.

8. — Mener un plan parallèle à la base d'un cylindre droit et circulaire de hauteur h et de rayon r, de manière qu'il divise sa surface latérale en deux parties telles que la base du cylindre soit moyenne proportionnelle entre elles.

(*Rép.* Si on appelle x la hauteur de l'un des cylindres partiels, on a : $x = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - r^2}}{2}$).

9. — Trouver deux nombres dont la somme soit 20, et dont le produit, multiplié par la somme de leurs carrés, égale 18750.

(*Rép.* 5 et 15). Généraliser et discuter ce problème.

10. — Déterminer les dimensions d'un parallélipipède rectangle et droit dont on connaît la diagonale, la surface totale, et dont l'une des arêtes égale la moitié de la somme des deux autres.

On appliquera les formules trouvées au cas particulier dans lequel la diagonale égale $2\sqrt{29}$ mètres, et la surface 208 mètres carrés.

11. — Déterminer les dimensions d'un parallélipipède droit et rectangle équivalent à un cube donné, sachant que les trois arêtes ont une somme donnée, et que l'une est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

12. — Circonscrire à une circonférence de rayon r un trapèze isocèle équivalent à un carré donné m^2.

(*Rép.* Les deux bases sont $\dfrac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 16r^4}}{2r}$).

13. — Par un point P pris à l'intérieur d'une circonférence de rayon r, à une distance a du centre, mener deux cordes perpendiculaires telles que le quadrilatère formé en joignant leurs extrémités ait une surface donnée. En appelant x et y les deux segments de l'une des cordes, z et u les deux segments de l'autre, on prendra pour inconnues $x + y$, et xy, $z + u$ et zu.

14. — Par un point M, pris sur la bissectrice d'un angle droit BAC et distant des deux côtés d'une quantité a, on demande de mener une ligne BC, qui coupe les deux côtés de l'angle droit en des points B et C distants l'un de l'autre d'une quantité donnée m.

(*Rép.* En appelant $a + x$ et $a + y$, les distances des points B et C au sommet A de l'angle droit, on trouve x ou

$$y = \frac{-a + \sqrt{a^2 + m^2} \pm \sqrt{m^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 + m^2}}}{2}\Bigg).$$

15. — Par un point M pris sur la bissectrice d'un angle droit BAC, et distant des côtés d'une quantité a, on demande de mener une ligne BC, qui, coupant en B et C les deux côtés de l'angle, détermine un triangle ABC dont la surface soit égale à m^2.

(*Rép.* En appelant $a + x$ et $a + y$ les distances des points B et C au sommet A de l'angle, on trouve

$$x \text{ ou } y = \frac{m^2 - a^2 \pm \sqrt{m^4 - 2a^2 m^2}}{a}\Bigg).$$

16. — Inscrire dans une circonférence de rayon r un trapèze ayant une hauteur h et une surface m^2 données.

(*Rép.* Les deux bases ont pour valeurs

$$\frac{m^2}{h} \pm h\sqrt{\frac{4r^2h^2 - m^4 - h^4}{m^4 + h^4}},$$

et les autres côtés sont égaux à $\dfrac{2rh^2}{\sqrt{m^4 + h^4}}$).

17. — Calculer les côtés d'un trapèze isocèle, dont la hauteur est h, le périmètre $2p$, et la surface m^2.

(*Rép.* Les deux bases ont pour valeurs $\dfrac{m^2 \pm \sqrt{(ph-m^2)^2-h^4}}{h}$,

et les autres côtés valent $\dfrac{ph-m^2}{h}$).

18. — Circonscrire à une sphère donnée, de rayon r, un tronc de cône tel que le rapport de sa surface totale à celle de la sphère soit m.

(*Rép.* En appelant x et y les rayons des deux bases, on a

x ou $y = \dfrac{r(\sqrt{2m+1} \pm \sqrt{2m-3})}{2}$).

(II, 5) 19. — Calculer la profondeur d'un puits, en connaissant le temps qui s'est écoulé entre l'instant où l'on a laissé tomber une pierre dans ce puits et celui où l'on a entendu le bruit que cette pierre a fait en arrivant au fond. (On négligera la résistance de l'air).

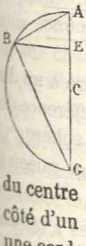
(*Rép.* Si l'on désigne par g le double de l'espace parcouru par un corps pesant pendant la première seconde de la chute, par t et x le temps donné et le temps inconnu, et par v la vitesse du son dans l'air,

on a $x = v\left[t + \dfrac{v}{g} - \sqrt{\dfrac{v}{g}\left(\dfrac{v}{g}+2t\right)}\right]$).

20. Un manomètre en U à branches cylindriques d'égal diamètre renferme un volume d'air sec de $0^{m},40$ de long à la pression 76, et le niveau du mercure étant le même dans les deux branches ; la branche ouverte étant mise en communication avec un récipient de gaz à la pression de 2 atmosphères, quelle sera la différence des niveaux du mercure dans les deux branches ?

(*Rép.* $30^{c},12$).

21. — *Couper la sphère* CA *par un plan* BE *perpendiculaire au diamètre* AG, *de manière que la surface totale du segment sphérique* ABE *soit égale à un grand cercle de la sphère.*



(*Rép.* En appelant r le rayon de la sphère, et x la hauteur du segment, on trouve $x = r(2 \pm \sqrt{3})$).

(II,6.) 22. — On donne un point P, situé à une distance a du centre d'une circonférence de rayon r, on demande de calculer le côté d'un triangle équilatéral qui ait pour sommet P, et pour base une corde de la circonférence.

(*Rép.* $\dfrac{-a\sqrt{3} \pm \sqrt{4r^2-a^2}}{2}$). Interpréter la racine négative.

23. — On donne deux circonférences concentriques de rayon R et r, R étant le rayon de la plus grande, on demande de calculer le côté d'un triangle équilatéral ayant deux sommets sur la grande circonférence et un sur la petite.

(*Rép.* $x = \frac{-r\sqrt{3} \pm \sqrt{4R^2 - r^2}}{2}$). Interpréter la racine négative.

24. — Trouver deux nombres tels que leur différence, augmentée de celle de leurs carrés, égale 22, et que leur somme, ajoutée à celle de leurs carrés, égale 242.

(*Rép.* 10 et 11). Généraliser et discuter ce problème.

(II, 7.) 25. — Trouver le rayon d'un cylindre, connaissant sa hauteur h et sa surface totale, qui est équivalente à celle d'un cercle de rayon r.

(*Rép.* $x = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 + 2r^2}}{2}$).

A quel problème répondrait la solution négative, prise en valeur absolue ?

26. — La base d'un prisme droit étant un triangle quelconque, dont les trois côtés sont a, b, c, on propose de mener, par le sommet A, un plan qui coupe le prisme suivant un triangle équilatéral, et de déterminer le côté du triangle et les longueurs des arêtes comprises entre le plan de ce triangle et celui de la base.

(*Rép.* En représentant par x et y les longueurs des arêtes des sommets B et C, et par z le côté du triangle, on a

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2 \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}}{3},$$

$$y^2 = \frac{a^2 + c^2 - 2b^2 \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}}{3},$$

$$z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}}{3}.$$

27. — Couper une sphère par un plan perpendiculaire à un diamètre donné, de manière que la section soit égale à la différence des deux zones dans lesquelles ce plan partage la surface de la sphère.

(*Rép.* Le plan demandé divise en moyenne et extrême raison le diamètre de la sphère auquel il est perpendiculaire).

28. — Couper une sphère par deux plans perpendiculaires à un diamètre donné, et également éloignés du centre de la sphère, de manière que la somme des deux sections soit égale à la zone comprise entre les deux plans.

(*Rép.* La distance de chacun des plans au centre de la sphère est égale à l'excès du côté du carré inscrit dans un grand cercle sur le rayon de la sphère).

29. — Mener par un point, situé à une distance a du centre d'une circonférence de rayon r, une sécante telle que la partie interceptée à l'intérieur de la circonférence soit égale à une longueur b.

(*Rép.* En appelant x un des segments de la sécante, on a

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 - 4r^2}}{2}, \text{ ou } x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 - 4r^2}}{2},$$

selon que a est supérieur ou inférieur à r.)

30. — Étant donnés le volume, la hauteur h d'un tronc de cône, et le rayon r de l'une des bases, calculer le rayon de l'autre base. — Discussion.

(*Rép.* En désignant par x le rayon de la base inconnue, et par a le rayon du cône qui a la même hauteur h, et le même volume que le tronc du cône, on a $x = \dfrac{-r + \sqrt{4a^2 - 3r^2}}{2}$).

31. — Trouver de combien il faut prolonger le rayon r d'une circonférence pour que la tangente, menée de l'extrémité de ce prolongement, soit égale au rayon. Que représente la racine négative?

(*Rép.* $r(1 \pm \sqrt{2})$).

32. — Couper une sphère par un plan perpendiculaire à un rayon donné, de manière qu'il divise en deux parties équivalentes le secteur sphérique, ayant pour base la plus petite des deux zones dans lesquelles ce plan décompose la surface de la sphère.)

(*Rép.* Le plan demandé divise en moyenne et extrême raison le rayon auquel il est perpendiculaire, de telle sorte que le plus grand segment a l'une de ses extrémités au centre de la sphère.)

(II, 8). 33. — Etant données deux parallèles, coupées par une sécante perpendiculaire de longueur a, trouver les positions occupées par les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté b, sachant qu'il y en a un sur chaque parallèle, et un sur la sécante. Discuter les conditions de possibilité du problème.

34. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle ABC, connaissant la différence d des deux côtés de l'angle droit, et la différence δ des deux segments que détermine sur l'hypoténuse la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur cette ligne. Discussion.

(*Rép.* En appelant x l'hypoténuse, y et z les deux côtés de l'angle droit, on a $x = \dfrac{d^2}{\sqrt{2d^2 - \delta^2}}$ et z ou $y = \dfrac{d(\delta \pm \sqrt{2d^2 - \delta^2})}{2\sqrt{2d^2 - \delta^2}}$).

VINGTIÈME ET VINGT ET UNIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Décomposition du trinôme $x^2 + px + q$ en facteurs du premier degré. — Des questions de maximum et minimum qui peuvent se résoudre par les équations du second degré.

I. — Décomposition du trinôme du second degré en facteurs du premier degré.

1. — Tout trinôme du second degré en x peut se mettre sous la forme

$$ax^2 + bx + c,$$

a, b et c représentant des nombres quelconques, positifs ou négatifs, et x une quantité variable, qui peut prendre toutes les valeurs imaginables depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, il faut donc bien se garder d'attribuer à x seulement les valeurs déterminées qui rendent ce trinôme égal à zéro, valeurs dont la recherche a fait l'objet des leçons 17e et 18e. Si, dans le trinôme proposé, nous mettons a en facteurs, il devient

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

et, en désignant comme précédemment $\frac{b}{a}$ par p et $\frac{c}{a}$ par q,

$$a\,(x^2 + px + q).$$

L'étude du trinôme général se trouve ainsi ramenée à celle du trinôme plus simple

$$x^2 + px + q.$$

2. — THÉORÈME I. — *Tout trinôme du second degré, de la forme* $x^2 + px + q$, *est décomposable en facteurs réels ou imaginaires du premier degré par rapport à* x.

Nous avons vu (3, V, 2) que la différence des carrés de deux quantités algébriques est égale au produit de leur somme par leur différence ; si donc nous pouvons transformer le trinôme $x^2 + px + q$ en une différence de carrés, qui prenne la même valeur numérique que ce trinôme, pour toute valeur numérique attribuée à x, nous aurons démontré que la décomposition du trinôme en facteurs est possible, et les facteurs seront du premier degré par rapport à x, puisque le degré du produit est la somme des degrés des facteurs.

Cherchons d'abord dans le trinôme un premier carré, nous savons (17 et 18, III, 1) que x^2 et px sont les deux premiers termes du carré de $x + \frac{p}{2}$, complétons le carré en ajoutant au trinôme $\frac{p^2}{4}$, que nous en retranchons immédiatement après, pour ne pas changer sa valeur, le trinôme devient ainsi

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q,$$

ou bien, en mettant les deux derniers termes du polynôme, changés de signe, dans une parenthèse précédée du signe — (2, V, 2),

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right);$$

or $\frac{p^2}{4} - q$ peut être considéré comme le carré de sa racine $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, qui est réelle ou imaginaire, selon que $\frac{p^2}{4} - q$ est positif ou négatif ; le trinôme proposé devient ainsi la différence des carrés de deux quantités

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2,$$

qui se décompose en deux facteurs, l'un égal à la somme des quantités $x + \frac{p}{2}$ et $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, l'autre à leur différence, on a donc, pour toute valeur de x,

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right).$$

Nous avons posé pour abréger

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x',$$

$$-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x'',$$

d'où, en changeant les signes des deux membres,

$$\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-x',$$

et

$$\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-x'',$$

cette notation abrége l'écriture des deux facteurs, et fait mieux voir leur composition;

$$x^2+px+q=(x-x'')(x-x').$$

Ainsi, *le trinôme du second degré* x^2+px+q *est décomposable en un produit de deux facteurs du premier degré par rapport à* x, *qu'on forme en retranchant successivement de* x *chacune des racines,* x' *et* x'', *de l'équation qu'on obtient en égalant le trinôme à zéro.*

Remarque. — Il importe de remarquer que cette décomposition du trinôme x^2+px+q, ne se fait que *par convention,* lorsque les racines de ce trinôme sont imaginaires, car l'expression

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q,$$

n'est réellement la différence de deux carrés, que lorsqu'on a

$$\frac{p^2}{4}-q>0,$$

c'est-à-dire, lorsque les racines du trinôme égalé à zéro sont réelles. Dans ce cas les deux facteurs du premier degré sont des quantités imaginaires conjuguées, dont le produit, calculé par les règles ordinaires du calcul algébrique, est la somme de deux carrés (page 152).

Dans le cas où les racines sont égales, les deux facteurs $x-x'$ et $x-x''$ deviennent égaux, et leur produit est un carré parfait $(x-x')^2$.

Corollaire. — Le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, étant le produit du trinôme $x^2 + px + q$ par a, se décompose en un produit de trois facteurs, dont l'un est le coefficient a du premier terme, et les deux autres se forment en retranchant de x les deux racines de l'équation qu'on obtient en égalant ce trinôme à zéro, ou les deux racines de l'équation équivalente

$$x^2 + px + q = 0,$$

on a donc

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

On aurait pu faire la décomposition du trinôme $ax^2 + bx + c$ directement, en le mettant sous la forme $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, mais l'écriture eût été un peu plus compliquée.

3. — Exemple I. — Décomposer le trinôme $2x^2 - 3x + 1$ en facteurs du premier degré.

En égalant ce trinôme à zéro, j'ai une équation du second degré dont les racines sont 1 et $\frac{1}{2}$; j'ai donc

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Exemple II. — Décomposer le trinôme $-x^2 + 2x + 1$ en facteurs du premier degré.

En égalant ce trinôme à zéro, j'ai une équation dont les racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$, j'en conclus que

$$-x^2 + 2x + 1 = -(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}).$$

Exemple III. — Décomposer le trinôme $2x^2 - 4ax + 4a^2$ en facteurs du premier degré.

En égalant ce trinôme à zéro, j'ai une équation dont les racines $a(1 + \sqrt{-1})$ et $a(1 - \sqrt{-1})$ sont imaginaires, j'en conclus que

$$2x^2 - 4ax + 4a^2 = 2\left[x - a(1 + \sqrt{-1})\right]\left[x - a(1 - \sqrt{-1})\right].$$

II. — Étude des signes que prend la valeur d'un trinôme du second degré, quand on y remplace x par tous les nombres réels depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Nous mettrons comme précédemment le trinôme ax^2+bx+c

sous la forme $a(x^2 + px + q)$, qui, en vertu du théorème précédent, peut être remplacée par

$$a(x - x')\,(x - x'');$$

et nous distinguerons trois cas, selon que le trinôme, égalé à zéro, donne une équation ayant des racines imaginaires, réelles et égales, ou réelles et inégales.

1. — Théorème II. — *Lorsque les racines de l'équation qu'on obtient en égalant le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *à zéro sont imaginaires, c'est-à-dire lorsque* $b^2 - 4ac$ *est négatif, la valeur que prend ce trinôme est toujours de même signe que* a, *quelle que soit la valeur attribuée à* x, *et elle ne peut devenir nulle.*

En effet, pour toute valeur de x, le trinôme équivaut au produit

$$a(x - x')\,(x - x'');$$

or, par hypothèse, les deux racines x' et x'' sont des quantités imaginaires de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, que nous avons appelées imaginaires conjuguées, le trinôme équivaut donc au produit

$$a(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})(x - \alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

et les deux facteurs placés entre parenthèses étant des imaginaires conjuguées, leur produit est la somme de deux carrés, (page 152), ce qui donne au trinôme la forme

$$a\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right],$$

qui fait voir que, quelque nombre qu'on mette à la place de x, la somme de carrés $(x - \alpha)^2 + \beta^2$ sera toujours positive, et jamais nulle, et que son produit par a, c'est-à-dire, le trinôme, aura toujours le même signe que a, et ne sera nul pour aucune valeur de x.

Remarque. — Nous avions déjà démontré ce théorème (17 et 18, IV, 1), lorsque nous avons fait voir que, dans ce cas, le trinôme $x^2 + px + q$ ou $(x - x').(x - x'')$ peut se mettre sous la forme

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \delta^2,$$

δ^2 représentant la quantité $q - \frac{p^2}{4}$, qui est positive dans le cas actuel.

2. — THÉORÈME III. — *Lorsque les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *sont réelles et égales, c'est-à-dire lorsque* $b^2 - 4ac$ *est nul, la valeur que prend ce trinôme est toujours de même signe que* a, *ou nulle, quelle que soit la valeur attribuée à* x.

En effet, pour toute valeur de x, le trinôme équivaut au produit

$$a(x - x')(x - x'');$$

or, par hypothèse, les deux racines x' et x'' sont égales, le trinôme devient donc dans ce cas

$$a(x - x')^2,$$

ce qui fait voir que, quelle que soit la valeur attribuée à x, le carré $(x - x')^2$ sera toujours positif, et que son produit par a, c'est-à-dire le trinôme, sera toujours de même signe que a; mais, si l'on donne à x la valeur particulière x', le trinôme prend la valeur zéro, que l'on peut regarder indifféremment comme positive ou négative.

REMARQUE. — Nous avions déjà démontré ce théorème (17 et 18, IV, 1.), lorsque nous avons fait voir que, dans ce cas, le trinôme $x^2 + px + q$ ou $(x - x')(x - x'')$ est un carré parfait

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

3. — THÉORÈME IV. — *Lorsque les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *sont réelles et inégales, c'est-à-dire lorsque* $b^2 - 4ac$ *est positif, la valeur que prend ce trinôme est toujours de même signe que* a, *lorsqu'on attribue à* x *une valeur supérieure à la plus grande des deux racines ou inférieure à la plus petite, mais elle est de signe contraire à* a, *lorsqu'on attribue à* x *une valeur comprise entre les deux racines.*

En effet, pour toute valeur de x, le trinôme équivaut au produit

$$a\,(x - x')\,(x - x'').$$

Si je donne à x une valeur supérieure à la fois à x' et à x'', et, pour cela, il suffit qu'elle soit supérieure à la plus grande des deux, que je suppose être x', les deux soustractions $x - x'$ et $x - x''$ seront possibles, les deux binômes positifs, et leur produit positif multiplié par a, c'est-à-dire le trinôme, sera de même signe que a. Si maintenant je donne à x une valeur inférieure à la plus petite des deux racines x'', et *à fortiori* inférieure à la plus grande x', les deux soustractions $x - x'$ et $x - x''$ sont impossibles, les deux binômes sont négatifs, et leur produit positif multiplié par a, c'est-à-dire le trinôme, est de même signe que a.

Si, au contraire, je donne à x une valeur comprise entre les deux racines, inférieure à x' et supérieure à x'', le binôme $x - x'$ est négatif, le binôme $x - x''$ positif, et leur produit négatif multiplié par a, c'est-à-dire le trinôme, est de signe contraire au coefficient a.

Si nous donnons à x les valeurs particulières x' et x'' la valeur du trinôme devient nulle.

4. — *Résolution des inégalités du second degré à une seule inconnue.*

Toute inégalité du second degré à une seule inconnue, et qui ne contient pas l'inconnue en dénominateur, peut, en transposant convenablement les termes (12 et 13), être ramenée à la forme

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Il résulte du théorème II que, si $b^2 - 4ac$ est négatif, cette inégalité est satisfaite quelque valeur réelle que l'on donne à x, quand a est positif, et qu'elle n'est satisfaite par aucune valeur réelle de x, quand a est négatif.

Il résulte du théorème III que, si $b^2 - 4ac$ est nul, cette inégalité est satisfaite quelque valeur réelle que l'on donne à x, quand a est positif, et qu'elle n'est satisfaite par aucune valeur de x, quand a est négatif.

Si cependant on donne à x la valeur qui annule le trinôme $ax^2 + bx + c$, elle peut être regardée comme satisfaisant à l'inégalité, et rendant le premier membre positif, puisque zéro est la limite commune des quantités positives et négatives.

Il résulte du théorème IV que, si $b^2 - 4ac$ est positif et a aussi, cette inégalité est satisfaite par toute valeur de x supérieure à la plus grande x' des racines que donne le trinôme égalé à zéro, et par toute valeur de x inférieure à la plus petite x'', on en déduit donc deux inégalités du premier degré

$$x > x' \quad \text{ou} \quad x < x'';$$

si, au contraire, a est négatif, elle n'est satisfaite que par les valeurs de x comprises entre x' et x'', et on en déduit la double inégalité

$$x' > x > x''.$$

Exemple I. — Le trinôme $2x^2 - x + 5$, qui égalé à zéro donne une équation ayant ses racines imaginaires, est constamment positif quelle que soit la valeur réelle attribuée à x.

Le trinôme $-x^2 + x - 5$, qui n'est autre que le précédent changé de signe, est constamment négatif quelle que soit la valeur réelle attribuée à x.

Exemple II. — Le trinôme $9x^2 - 6x + 1$, qui égalé à zéro donne une équation ayant ses racines égales à $\frac{1}{3}$, est constamment positif quelle que soit la valeur attribuée à x.

Le trinôme $-9x^2 + 6x - 1$, qui n'est autre que le précédent changé de signe, est constamment négatif, quelle que soit la valeur attribuée à x. Tous deux s'annulent quand x est égal à $\frac{1}{3}$.

Exemple III. — Résoudre l'inégalité

$$2x^2 - 20x + 32 > 0.$$

Ce trinôme égalé à zéro donnant des racines réelles et inégales 2 et 8, et pouvant se mettre sous la forme $2(x-8)(x-2)$, pour le rendre positif il faut donner à x des valeurs supérieures à 8, ou des valeurs inférieures à 2 soit positives, soit négatives ; pour qu'un nombre satisfasse à l'inégalité du second degré proposée, il faut donc qu'il satisfasse à l'une des deux inégalités du premier degré

$$x > 8 \quad \text{ou} \quad x < 2.$$

Exemple IV. — Résoudre l'inégalité

$$-2x^2 + 20x - 32 > 0.$$

Ce trinôme, qui n'est autre que le précédent changé de signe, peut se mettre sous la forme $-2(x-8)(x-2)$, pour le rendre positif, il faut donner à x des valeurs comprises entre 8 et 2; pour qu'un nombre satisfasse à l'inégalité du second degré proposée, il faut donc qu'il satisfasse à la fois aux inégalités du premier degré

$$x < 8 \quad \text{et} \quad x > 2,$$

ou à la double inégalité

$$2 < x < 8.$$

5. — *Valeurs successives que prend le trinôme* $ax^2 + bx + c$, *quand on y donne à* x *des valeurs décroissantes depuis l'infini positif jusqu'à l'infini négatif.*

Pour étudier les variations successives du trinôme, il sera commode de le mettre sous la forme

$$a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]$$

indiquée précédemment.

Supposons a positif et donnons à x une valeur positive très-grande, $x+\frac{p}{2}$ sera très-grand, son carré très-grand et l'expression $a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]$ aura une valeur positive très-grande. C'est ce qu'on exprime en disant que, quand x est positif et infini, la valeur du trinôme est positive et infinie. Supposons que x aille en décroissant jusqu'à la valeur $-\frac{p}{2}$, le binôme $x+\frac{p}{2}$ décroît constamment jusqu'à zéro, et son carré aussi, et, par suite, le trinôme prend des valeurs constamment décroissantes jusqu'à $a\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ ou $\frac{4ac-b^2}{4a}$. Supposons que la valeur donnée à x devienne plus petite que $-\frac{p}{2}$, le binôme $x+\frac{p}{2}$ devient négatif et de plus en plus petit, c'est-à-dire que sa valeur absolue croît constamment, son carré qui est positif commence donc à croître, et croît indéfiniment de manière à dépasser toute grandeur donnée, quand x est un nombre suffisamment grand affecté du signe $-$, il en est de même de la valeur du trinôme, qui redevient positive et infinie, quand x est négatif et infini. Si les racines de l'équation qu'on obtient en égalant le trinôme à zéro sont imaginaires, la valeur la plus petite du trinôme $a\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ est positive, si les racines sont égales, elle est nulle, et, si les racines sont réelles et inégales, elle est négative, dans ce cas le trinôme passe du positif au négatif quand x en décroissant passe la valeur x', et du négatif au positif quand x passe par la valeur x''.

Quand a est négatif, c'est le contraire, le trinôme croît d'abord depuis l'infini négatif jusqu'à la valeur $a\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, qu'il atteint quand x égale $-\frac{p}{2}$, ensuite il décroît jusqu'à l'infini négatif, quand la valeur de x décroît elle-même jusqu'à l'infini négatif. La valeur la plus grande du trinôme $a\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ est négative si les racines du trinôme égalé à zéro sont imaginaires, nulle si les racines sont égales, et positive si les racines sont réelles et inégales.

III. — Questions de maximum et minimum qu'on peut résoudre par les équations du second degré.

1. — On désigne sous le nom de *variable* toute quantité qui, dans une question donnée, peut recevoir successivement différentes valeurs.

Lorsque deux quantités ont entre elles une relation telle qu'à chaque valeur de l'une corresponde une valeur de l'autre, et que tout changement, si petit qu'il soit, apporté à la valeur de la première, entraîne un changement correspondant de la valeur de la seconde, on dit que la seconde est *fonction* de la première, qui prend le nom de *variable indépendante*.

Supposons que deux quantités y et x soient liées par l'équation

$$y-2x=20,$$

d'où

$$y=20+2x,$$

il est clair qu'à toute valeur de x correspond une valeur déterminée de y, donc y est fonction de x, c'est pour cela que l'expression $20+x$, qui représente la valeur de y, s'appelle une fonction de x considéré comme variable indépendante. Réciproquement x est une fonction de y considéré comme variable indépendante, car si, de l'équation qui lie x et y, on tire

$$x = \frac{y-20}{2},$$

on voit qu'à toute valeur de y correspond une valeur déterminée de x.

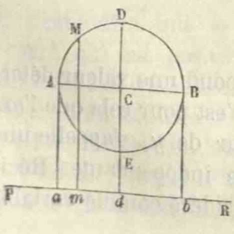
La surface d'un cercle est donc fonction de son rayon, et le rayon d'un cercle fonction de sa surface.

Une quantité peut être fonction de plusieurs autres, considérées comme variables indépendantes, ainsi la surface d'un triangle est fonction de sa base et de sa hauteur, le volume d'un parallélipipède droit et rectancle est fonction de ses trois dimensions, qui sont trois variables indépendantes.

2. — Lorsque la variable indépendante, croissant d'une manière continue, passe par une valeur telle que la fonction, qui pour des valeurs inférieures était croissante, devienne décroissante pour des valeurs supérieures, on dit que cette fonction passe par un *maximum* pour cette valeur de la variable. Inversement, si la variable indépendante passe par une valeur telle, que la fonction, qui pour des valeurs inférieuees était décroissante, devienne croissante pour des valeurs supérieures, on dit que la fonction passe par un *minimum*.

Ainsi une fonction devient maximum ou minimum pour une valeur a de la variable, quand elle prend une valeur plus grande ou plus petite pour cette valeur a de la variable que pour des valeurs immédiatement supérieures et inférieures $a+h$ et $a-h$, h désignant une quantité très-petite. Généralement toute fonction, qui passe par un maximum ou un minimum, varie lentement dans le voisinage; ainsi, la différence de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite et de l'oblique qui s'en écarte de 1° est moindre que celle de deux obliques quelconques menées à 1° l'une de l'autre.

Pour donner un exemple d'une fonction devenant successivement maximum et minimum pour des valeurs particulières de la variable, je considère un mobile M parcourant la circonférence CA, et je vais chercher comment varie sa distance Mm à la droite PR, qui n'a aucun point commun avec cette circonférence, quand le mobile, parti de l'extrémité A du dia-



mètre AB parallèle à PR, parcourt dans le sens AM des arcs de plus en plus grands ; ici l'arc AM est la variable indépendante, et la distance correspondante Mm est la fonction. La distance du mobile à la droite PR, d'abord égale à Aa, croît ensuite avec l'arc jusqu'à ce que, l'arc atteignant 90°, le point M arrive à l'extrémité supérieure D du diamètre DE perpendiculaire à PR, ensuite elle diminue quand l'arc dépasse 90°, la longueur Dd est donc une valeur maximum de la fonction, qui répond à la valeur 90° de la variable. Quand l'arc continue à croître jusqu'à 270°, la distance du point M à la droite PR diminue constamment, et le point M arrive à l'extrémité inférieure E du diamètre DE perpendiculaire à PR ; mais quand l'arc dépasse 270° la distance du mobile à la droite PR recommence à croître, jusqu'à ce que, l'arc atteignant 360°, le mobile revienne au point de départ ; la longueur Ed est donc une valeur minimum de la fonction, qui correspond à la valeur 270° de la variable. Un second tour reproduirait les mêmes phases, la distance du mobile à la droite PR n'a qu'un maximum et un minimum.

Une quantité variable peut avoir plusieurs maxima et plusieurs minima ; mais deux maxima sont toujours séparés par un minimum, et réciproquement deux minima comprennent toujours entre eux un maximum. Un minimum est évidemment moindre que chacun des deux maxima qui le comprennent, mais il peut être plus grand que tout autre maximum. On vérifie facilement ces résultats en remplaçant dans l'exemple précédent la circonférence de cercle par une spirale ou une courbe sinueuse.

3. — Recherche des maxima et des minima.

La recherche des maxima et des minima des fonctions est en général du ressort de l'algèbre supérieure ; nous avons pu (II, 5), grâce à la forme particulière que nous avons donnée à la fonction $ax^2 + bx + c$, étudier ses variations successives, et trouver pour quelle valeur de x elle est plus grande ou plus petite que pour les valeurs immédiatement supérieures ou inférieures, c'est-à-dire maxima ou minima ; nous allons indiquer un procédé d'un usage plus général.

Pour trouver les maxima et minima d'une quantité, on l'exprime en fonction d'une variable ou de plusieurs, et on égale son expression à une indéterminée m ; s'il y a plusieurs variables x, y, z,.... on cherche de nouvelles équations entre elles, de manière qu'il y en ait autant que de variables; plus généralement, on établit entre la quantité, que l'on désigne par m, et les variables x, y, z,.... dont elle dépend, autant d'équations qu'il y a de variables, on a alors l'équation générale ou les équations du problème : trouver les valeurs des différentes variables qui rendent la quantité proposée égale à un nombre quelconque m. Je suppose que l'élimination de y, z,.... conduise à une équation du second degré en x, de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

a, b et c étant des coefficients qui renferment la lettre m : j'en tire

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\mathrm{A}m^2 + \mathrm{B}m + \mathrm{C}},$$

en ordonnant par rapport à m la quantité placée sous le radical, que je suppose être du second degré.

Si ce trinôme en m est toujours positif, quelque grande ou petite que soit la valeur attribuée à m, les valeurs de x sont toujours réelles, et s'il en est de même des autres variables y, z..., la quantité proposée pouvant être rendue égale à un nombre m, aussi grand et aussi petit qu'on veut, n'a pas de limites, elle n'a ni maximum ni minimum. Si, au contraire, le trinôme en m placé sous le radical peut devenir négatif, alors x devient imaginaire quand m croît ou décroît au delà d'une certaine limite, et il est impossible de faire prendre à la quantité proposée, et désignée par m, des valeurs supérieures ou inférieures à cette limite, qui est alors le maximum ou le minimum de la quantité, il en serait de même si quelque autre variable y ou z devenait imaginaire, quand m croît ou décroît au delà d'une certaine limite. S'il y a à la fois une limite supérieure et une limite inférieure que m ne puisse dépasser, sans que quelqu'une des variables devienne imaginaire, la quantité proposée a un maximum et un minimum.

Lorsque les valeurs négatives des variables ne sont pas susceptibles d'interprétation, les valeurs que m ne peut passer, sans que quelqu'une d'entre elles devienne négative, sont encore des maxima et des minima.

En résumé, la recherche des maxima et minima d'une quantité revient à chercher les valeurs des inconnues dont elle dépend qui la rendent égale à un nombre donné m, et à résoudre, par rapport à m, les inégalités auxquelles m doit satisfaire pour que le problème soit possible, c'est-à-dire pour que les valeurs des inconnues soient réelles, et en général positives.

4. — Discussion des diverses circonstances que peut présenter le trinôme Am^2+Bm+C du second degré en m placé sous le radical de la valeur d'une inconnue x dans une question de maximum et de minimum.

1° Lorsque le trinôme $Am^2 + Bm + C$, égalé à zéro, donne des racines imaginaires, ou lorsque $B^2 - 4\,AC$ est négatif, le trinôme est toujours de même signe que son premier coefficient A ; si donc A est positif, le trinôme est positif pour toute valeur de m, il n'y a pas de limites que m ne puisse dépasser, la quantité désignée par m n'a ni maximum ni minimum ; si A était négatif, le trinôme en m serait constamment négatif, x serait toujours imaginaire, et la quantité désignée par m n'ayant aucune valeur admissible, le problème proposé serait absurde.

2° Lorsque le trinôme $Am^2 + Bm + C$, égalé à zéro, donne des racines égales, ou que $B^2 - 4AC$ est nul, le trinôme est toujours de même signe que A ou nul ; si donc A est positif, le trinôme est positif quelque grand ou petit que soit m, la quantité désignée par m n'a ni maximum ni minimum ; si A est négatif, le trinôme est toujours négatif, excepté quand on donne à m la valeur m', qui le rend nul, x est donc toujours imaginaire, à moins que m ne soit égal à m', dans ce cas la quantité désignée par m n'a qu'une valeur m', elle est constante et indépendante de x, elle n'a ni maximum ni minimum.

3° Lorsque le trinôme $Am^2 + Bm + C$, égalé à zéro, donne des racines réelles et inégales m' et m'', ou que $B^2 - 4AC$ est positif ; si A est positif, le trinôme sera positif pour toute valeur de m supérieure à la plus grande des deux racines m', et pour toute valeur de m inférieure à la plus petite m'', il devient nul quand m est égal à m' ou à m'', ainsi x est réel pour toutes les valeurs de m supérieures ou au moins égales à m', et pour toutes les valeurs de m inférieures ou au plus égales à m'', la quantité désignée par m a donc un minimum m', la plus petite des valeurs du premier groupe, et un maximum m'', la plus grande des valeurs du second groupe. Si A est négatif, le trinôme sera positif pour toute valeur de m inférieure à m' et supérieure à m'', il devient nul quand m est égal à m' ou à m''; ainsi x est réel, et le problème possible pour toutes les valeurs de m inférieures ou au plus égales à m', et en même temps supérieures ou au moins égales à m'', la quantité désignée par m a donc un maximum qui est m', et un minimum qui est m''.

4° Lorsque A est nul, la quantité placée sous le radical se réduit à un binôme du premier degré en m, $Bm + C$, pour que la valeur de x soit réelle, il faut que la valeur de m rende ce binôme positif ou nul, et que m satisfasse à l'inégalité

$$Bm + C \geqslant 0,$$

si B est positif, j'en tire

$$m \geqslant \frac{-C}{B},$$

la quantité désignée par m doit être supérieure ou au moins égale à $\frac{-C}{B}$, c'est son minimum ; si B est négatif, j'en tire (12 et 13, VI, 2)

$$m \leqslant \frac{-C}{B},$$

la quantité désignée par m doit être inférieure ou au plus égale à $\frac{-C}{B}$, c'est son maximum.

5° Lorsque A et B sont nuls à la fois, la quantité placée sous le radical se réduit à C ; si C est positif, x est réel quel que soit m, la quantité désignée par m n'a ni maximum ni minimum; si C était négatif x serait constamment imaginaire, la quantité désignée par m n'aurait aucune valeur admissible, le problème proposé serait absurde.

Remarque. — La marche à suivre pour trouver les maxima et minima serait la même, si la quantité placée sous le radical était un trinôme bicarré en m, en y regardant m^2 comme l'inconnue, on en tirerait pour m^2 deux limites m'^2 et m''^2, dont les racines carrées seraient le maximum et le minimum de la quantité désignée par m.

Souvent la quantité placée sous le radical est d'un degré supérieur, mais m^2 y est facteur commun, comme ce facteur est positif, les valeurs qui rendront l'autre facteur positif auront des limites supérieures ou inférieures, qui seront les maxima ou minima cherchés.

Si l'équation en x, au lieu d'être du second degré, est bicarrée, pour que x soit réel, il faut non-seulement que le trinôme en m placé sous le second radical soit positif, mais encore que la quantité placée sous le premier le soit également, et l'on a à résoudre une inégalité à termes irrationnels, pour trouver les limites m ; on isole le radical dans un membre, et, après s'être assuré que l'autre membre est positif, on élève les deux membres au carré, ce qui conduit à une inégalité résoluble, si elle est du second degré ou bicarrée.

Des exemples vont éclaircir ce qui reste nécessairement d'un peu vague dans une théorie aussi générale.

5. — Applications.

PROBLÈME I. — *Trouver le maximum ou le minimum du trinôme*

$$ax^2 + bx + c.$$

Nous représentons par m la valeur du trinôme, et nous posons

$$ax^2 + bx + c = m,$$

d'où

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-m)}}{2a}.$$

Pour que la valeur de x soit réelle, il faut que m satisfasse à l'inégalité

$$b^2 - 4a(c - m) \geqslant 0,$$

d'où, si a est positif,

$$m \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a};$$

il serait donc impossible de rendre le trinôme égal à un nombre plus petit que $\frac{4ac - b^2}{4a}$, c'est là sa plus petite valeur, son minimum.

Lorsque a est négatif, on tire de l'inégalité précédente

$$m \leqslant \frac{4ac - b^2}{4a},$$

il serait impossible de rendre le trinôme égal à un nombre plus grand que $\frac{4ac - b^2}{4a}$, c'est là sa plus grande valeur, son maximum.

Pour trouver la valeur de x qui rend le polynôme maximum ou minimum, il faut, dans l'expression générale de x, remplacer m par $\frac{4ac - b^2}{4a}$, mais cette valeur est celle qui rend la quantité placée sous le radical nulle, et l'expression de x se réduit à $\frac{-b}{2a}$.

Problème II. — *Trouver le maximum ou le minimum de la fraction*

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 3}.$$

Représentons par m la valeur de cette fraction, et posons

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 3} = m,$$

ou

$$(1 - m)x^2 + (1 + m)x + 3m - 1 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{-1 - m \pm \sqrt{13m^2 - 14m + 5}}{2(1 - m)};$$

pour que x soit réel il faut que m satisfasse à l'inégalité

$$13m^2 - 14m + 5 \geqslant 0.$$

Or ce trinôme, égalé à zéro, donne des racines imaginaires, donc il est toujours de même signe que son premier terme, c'est-à-dire, positif (II, 1). Ainsi on pourra trouver une valeur de x qui rende la fraction proposée égale à un nombre m aussi grand ou aussi petit qu'on voudra, la fraction n'a ni maximum ni minimum.

PROBLÈME III. — *Trouver le maximum ou le minimum du rayon de la circonférence inscrite dans un triangle rectangle de périmètre donné* 2p.

On sait que l'excès de la somme des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal au diamètre de la circonférence inscrite (page 122, pr. XV).

Si donc nous désignons le rayon par m, les côtés de l'angle droit par x et y, l'hypoténuse par z, nous aurons

$$x + y - z = 2m.$$

L'énoncé du problème et les propriétés du triangle rectangle donnent en outre les équations

$$x + y + z = 2p,$$
$$x^2 + y^2 = z^2,$$

Si nous retranchons membre à membre la première de la seconde, il vient

$$2z = 2p - 2m \quad \text{ou} \quad z = p - m;$$

remplaçons z par cette valeur dans la seconde et la troisième équation, elles deviennent

$$x + y = p + m,$$
$$x^2 + y^2 = (p - m)^2,$$

équations symétriques en x et en y, donc si nous éliminons y, l'équation en x résultante aura pour racines les deux côtés de l'angle droit. Toute réduction faite, l'équation en x, débarrassée du facteur 2, est

$$x^2 - (p + m)x + 2pm = 0,$$

d'où

$$x = \frac{p + m \pm \sqrt{m^2 - 6pm + p^2}}{2}.$$

Pour que la valeur de z soit admissible, il faut qu'elle soit positive, et que m soit inférieur ou au plus égal à la moitié p du périmètre. Si les deux côtés de l'angle droit sont réels, ils seront positifs, car leur produit $2pm$ est positif, donc ils sont de même signe, et leur somme $p + m$ est positive, donc ils sont positifs ; mais, pour qu'ils soient réels, il faut que m satisfasse à l'inégalité

$$m^2 - 6pm + p^2 \geqslant 0.$$

Or quand on égale ce trinôme à zéro, on trouve deux racines réelles

$$m' = 3p + 2p\sqrt{2},$$

$$m'' = 3p - 2p\sqrt{2};$$

le trinôme peut se mettre sous la forme $(m - m')(m - m'')$, et pour que ce produit soit positif, il faut que m soit supérieur ou au moins égal à m', ou bien inférieur ou au plus égal à m''; m' est donc un minimum et m'' un maximum, pourvu qu'à ces valeurs du rayon de la circonférence inscrite répondent des valeurs positives de x, y et z.

Lorsque l'on donne à m l'une de ces valeurs, qui rendent égal à zéro le trinôme placé sous le radical, les valeurs de x et y se réduisent à la partie rationnelle, et deviennent égales, le triangle rectangle est isocèle, et a pour côtés

$x' = y' = p(2 + \sqrt{2})$ dans le cas du minimum,

$x'' = y'' = p(2 - \sqrt{2})$ dans le cas du maximum,

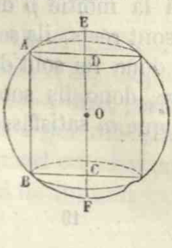
et l'hypoténuse a pour valeurs correspondantes

$$z' = -2p(\sqrt{2} + 1),$$

$$z'' = 2p(\sqrt{2} - 1),$$

Le minimum m' rendant négative la valeur de z est à rejeter ; cependant il répondrait au problème dont les équations seraient les transformées en $-z$ des précédentes, et dont l'énoncé serait, trouver le minimum du rayon de la circonférence ex-inscrite et tangente à l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dans lequel $x+y-z$ serait constant et égal à $2p$, or ce rayon, qui a pour expression $\dfrac{x+y+z}{2}$, n'est autre que la moitié du périmètre, et $x+y-z$ est l'expression du diamètre de la circonférence inscrite, on voit qu'on arriverait au minimum du périmètre des triangles rectangles circonscrits à une circonférence de rayon p.

Problème IV. — *Trouver le maximum ou le minimum de la surface totale du cylindre inscrit dans une sphère de rayon* r.



Désignons par x le rayon BC de la base du cylindre et par $2y$ sa hauteur AB, en égalant à πm l'expression de sa surface totale, nous avons l'équation

$$4\pi xy + 2\pi x^2 = \pi m,$$

ou, en supprimant le facteur π,

$$4xy + 2x^2 = m,$$

à laquelle, il faut adjoindre, puisque BOC est un triangle rectangle,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Eliminons y, en le remplaçant dans la première par $\sqrt{r^2 - x^2}$, il vient

$$4x\sqrt{r^2 - x^2} + 2x^2 = m,$$

ou, en isolant le radical, et élevant les deux membres au carré,

$$20x^4 - 4(m + 4r^2)\,x^2 + m^2 = 0,$$

d'où

$$x^2 = \frac{2(m + 4r^2) \pm \sqrt{4(m + 4r^2)^2 - 20m^2}}{20}$$

$$= \frac{m + 4r^2 \pm \sqrt{-4m^2 + 8r^2m + 16r^4}}{10}.$$

Pour que la valeur de x^2 soit réelle, il faut que m satisfasse à l'inégalité

$$-4m^2 + 8r^2m + 16r^4 \geqslant 0.$$

Les racines qu'on obtient en égalant le trinôme à zéro, sont réelles,

$$m' = r^2(1 + \sqrt{5}) \quad \text{et} \quad m'' = r^2(1 - \sqrt{5}),$$

on peut le mettre sous la forme

$$-4(m - m')\,(m - m''),$$

et l'on voit que, pour le rendre positif, la valeur de m doit être comprise entre les deux racines, et satisfaire aux inégalités

$$m'' \leqslant m \leqslant m';$$

donc m' est un maximum et m'' un minimum, mais ce minimum négatif est à rejeter; la surface cherchée n'a donc qu'un maximum $\pi m'$ ou $\pi r^2(1 + \sqrt{5})$. Si nous cherchons la valeur de x qui correspond au maximum, en remplaçant m par m', la quantité placée sous le radical s'annule, puisque m' satisfait à l'équation obtenue en égalant cette quantité à zéro, et la valeur de x^2 se réduit à

$$x'^2 = \frac{r^2(5 + \sqrt{5})}{10},$$

d'où

$$y'^2 = \frac{r^2(5-\sqrt{5})}{10}.$$

Les deux valeurs de x^2, quand elles sont réelles sont positives, car leur produit $\frac{m^2}{20}$ est positif, et leur somme $\frac{4(m+4r^2)}{20}$ aussi, il en est de même des deux valeurs de y^2.

$$y^2 = \frac{6r^2 - m \pm \sqrt{-4m^2 + 8r^2m + 16r^4}}{10},$$

donc les valeurs de x et y, que l'on en tirera seront toujours réelles, et m n'a pas d'autre limite que m'.

Problème V. — *Trouver le maximum ou le minimum de la hauteur des triangles rectangles dont la somme des côtés de l'angle droit est constante et égale à* p.

Désignons par x et y les côtés de l'angle droit, par z l'hypoténuse, et par m la hauteur menée du sommet de l'angle droit perpendiculairement à l'hypoténuse, nous aurons, en égalant les deux expressions de la surface du triangle, l'équation

$$xy = mz,$$

l'énoncé donne

$$x + y = p,$$

et l'on a en outre

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Élevons les deux membres de la seconde au carré, nous aurons

$$x^2 + y^2 + 2xy = p^2,$$

remplaçons alors $x^2 + y^2$ par z^2, et xy par mz, nous aurons éliminé x et y, et l'équation en z sera

$$z^2 + 2mz - p^2 = 0,$$

d'où

$$z = -m \pm \sqrt{m^2 + p^2}.$$

Les valeurs de z sont réelles quel que soit m, laissons de côté la valeur négative, et remplaçons z par $-m + \sqrt{m^2 + p^2}$ dans les deux premières équations, le produit xy des deux racines est égal à $-m^2 + m\sqrt{m^2 + p^2}$, et leur somme égale à

p, les deux côtés de l'angle droit x et y, sont alors (17 et 18, VII, 1) les deux racines de l'équation

$$u^2 - pu - m^2 + m\sqrt{m^2+p^2} = 0,$$

donc

$$x \text{ ou } y = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + m^2 - m\sqrt{m^2+p^2}}.$$

Pour que les valeurs de x et y soient réelles, il faut que m satisfasse à l'inégalité.

$$\frac{p^2}{4} + m^2 - m\sqrt{m^2+p^2} \geqslant 0,$$

ou

$$\frac{p^2}{4} + m^2 \geqslant m\sqrt{m^2+p^2},$$

et comme les deux membres sont positifs, on peut les élever au carré, ce qui donne, toutes réductions faites,

$$p^2\left(\frac{m^2}{2} - \frac{p^2}{16}\right) \leqslant 0$$

d'où en supprimant le facteur p^2, qui est positif,

$$m^2 \leqslant \frac{2p^2}{16},$$

les valeurs de m qui satisfont à cette inégalité, satisfont à la double inégalité

$$\frac{-p\sqrt{2}}{4} \leqslant m \leqslant \frac{p\sqrt{2}}{4}.$$

Le minimum négatif $\frac{-p\sqrt{2}}{4}$ est à rejeter, le maximum $\frac{p\sqrt{2}}{4}$ convient, les valeurs x et y deviennent alors égales, et le triangle est isocèle, car $\frac{p\sqrt{2}}{4}$ est un des nombres qui rendent nulle la quantité en m placée sous le radical,

$$x = y = \frac{p}{2}, \quad \text{et} \quad z = \frac{p\sqrt{2}}{2}$$

sont les valeurs des trois côtés du triangle dont la hauteur est maximum.

Problème VI. — *On donne deux points* A *et* B *dont la distance est* 2a, *et une parallèle à* AB *menée à une distance* h, *on demande de trouver sur cette parallèle un point* M *tel que le rapport de ses distances aux points* A *et* B *soit le plus grand ou le plus petit possible.*

Si du point M nous abaissons sur AB une perpendiculaire MP qui tombe à droite du milieu O de AB, et si nous désignons OP par x, AP sera égal à $a+x$, BP sera égal à $a-x$, AM dans le triangle rectangle AMP sera égal à $\sqrt{h^2+(a+x)^2}$, et BM dans le triangle rectangle BMP sera égal à $\sqrt{h^2+(a-x)^2}$, nous posons donc l'équation

$$\frac{\sqrt{h^2+(a+x)^2}}{\sqrt{h^2+(a-x)^2}}=m.$$

Pour résoudre cette équation, nous en élevons les deux membres au carré, et nous chassons le dénominateur, ce qui donne

$$(m^2-1)\,x^2-2a\,(m^2+1)\,x+(h^2+a^2)\,(m^2-1)=0,$$

d'où

$$x=\frac{a\,(m^2+1)\pm\sqrt{-h^2m^4+2\,(2a^2+h^2)\,m^2-h^2}}{m^2-1}.$$

Pour que les valeurs de x soient réelles, il faut que m satisfasse à l'inégalité

$$-h^2m^4+2\,(2a^2+h^2)\,m^2-h^2\geqslant 0,$$

si l'on appelle m'^2 et m''^2 les carrés des racines de l'équation qu'on obtient en égalant cette expression en m à zéro, on peut mettre l'inégalité sous la forme

$$-h^2\,(m^2-m'^2)\,(m^2-m''^2)\geqslant 0,$$

et l'on voit que, pour qu'elle soit satisfaite, m^2 doit être compris entre m'^2 et m''^2, m doit donc satisfaire aux deux inégalités

$$m''^2\leqslant m^2\leqslant m'^2,$$

et comme les valeurs négatives de m sont à rejeter, en prenant les racines, on a

$$m''\leqslant m\leqslant m'\,;$$

le minimum du rapport cherché est m'' ou

$$\sqrt{\frac{2a^2+h^2-2a\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}},$$

et le maximum est m' ou $\sqrt{\dfrac{2a^2+h^2+2a\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}}$ ou $\dfrac{1}{m''}$, puisque $m'^2m''^2=1$.

La valeur de x correspondante au maximum, est, en remarquant que m', mis à la place de m, rend nulle la quantité placée sous le radical,

$$x'=\frac{a\,(2a^2+2h^2+2a\sqrt{a^2+h^2})}{2a^2+2a\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{a^2+h^2+a\sqrt{a^2+h^2}}{a+\sqrt{a^2+h^2}};$$

faisons disparaître les radicaux du dénominateur, en multipliant les deux termes par $\sqrt{a^2+h^2}-a$, il vient

$$x'=\sqrt{a^2+h^2},$$

et comme m'' ne diffère de m' que par le changement de signe de $\sqrt{a^2+h^2}$, x'', qui répond au minimum, diffère de x' par le même changement de signe, donc

$$x''=-\sqrt{a^2+h^2}.$$

Cette valeur négative de x s'interprète aisément, en portant la longueur $\sqrt{a^2+h^2}$ à gauche du milieu 0 de la droite AB, elle répond à une position du point M symétrique de la précédente, par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de AB.

Si nous supposons le point M indéfiniment éloigné vers la gauche, le rapport $\dfrac{\text{MA}}{\text{MB}}$ est égal à 1, et va en diminuant, puisque MA devient plus petit que MB, quand le point M atteint la perpendiculaire élevée au milieu de OB, le rapport $\dfrac{\text{MA}}{\text{MB}}$ redevient 1, donc il a dû passer par un minimum, il devient ensuite supérieur à 1, car MA devient plus grand que MB, et il redevient 1, quand M s'éloigne indéfiniment vers la droite, donc il a dû passer par un maximum.

On pourrait, dans chaque question, s'assurer ainsi que la quantité qu'on étudie est bien susceptible de passer par un maximum ou un minimum, ou d'avoir à la fois l'un et l'autre.

Problème VII. — *Trouver le maximum de la surface totale du volume formé par un cylindre surmonté d'un hémisphère* *de même rayon, la somme de ce rayon et de la hauteur du cylindre étant constante et égale à* h.

Désignons par x le rayon de la base et par y la hauteur du cylindre, par πm la surface totale du corps, il faut poser

$$\pi x^2 + 2\pi xy + 2\pi x^2 = \pi m,$$

ou

$$2xy + 3x^2 = m,$$

et l'on a

$$x + y = h,$$

d'où

$$y = h - x.$$

Éliminons y par substitution, nous aurons

$$2x(h-x) + 3x^2 = m,$$

$$x^2 + 2hx - m = 0,$$

$$x = -n \pm \sqrt{h^2+m}, \quad \text{et} \quad y = 2h \mp \sqrt{h^2+m}.$$

Les valeurs de x et y sont toujours réelles, $h^2 + m$ étant positif quel que soit m, mais il faut encore, pour que le problème *rendre la surface donnée égale à* m soit possible, que x et y soient positifs, nous rejetterons la seconde valeur de x qui est négative, ainsi que la valeur de y correspondante; il faut alors que l'autre soit positive, et que m satisfasse à l'inégalité

$$2h > \sqrt{h^2+m}$$

ou, en élevant au carré, les deux membres, qui sont positifs,

$$4h^2 > h^2 + m \quad \text{d'où} \quad m < 3h^2.$$

La surface totale a donc un maximum $3\pi h^2$, auquel correspond pour y une valeur nulle, pour x la valeur h, et le volume se réduit à une demi-sphère.

Nous terminerons par un problème dont la discussion présentera réunis presque tous les cas que nous venons de rencontrer isolément.

PROBLÈME VII. — *Trouver le maximum et le minimum de la fraction*

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

Je représente par m la valeur de cette fraction, et je résous l'équation

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=m$$

ou

$$(a-a'm)x^2+(b-b'm)x+c-c'm=0,$$

pour avoir la valeur correspondante de la variable x.

Je trouve ainsi :

$$x=\frac{b'm-b\pm\sqrt{(b'm-b)^2-4(a-a'm)(c-c'm)}}{2(a-a'm)}$$

ou

$$x=\frac{b'm-b\pm\sqrt{Am^2-2Bm+C}}{2(a-a'm)},$$

en posant, pour abréger,

$$A=b'^2-4a'c',$$
$$B=bb'-2(ac'+ca'),$$
$$C=b^2-4ac.$$

Lorsque, dans la formule précédente, on donne à m une valeur quelconque, les valeurs correspondantes de x ne sont réelles que si la valeur de m rend le trinôme $Am^2-2Bm+C$ positif. Comme les signes des valeurs que prend ce trinôme dépendent surtout de la réalité ou de l'imaginarité des valeurs de m, que l'on trouve en l'égalant à zéro, je distinguerai trois cas, celui où ces racines m' et m'' sont imaginaires, celui où elles sont égales, et celui où elles sont réelles et inégales.

1° Les racines m' et m'' sont imaginaires, c'est-à-dire que l'on a $B^2-AC<0$.

Dans ce cas, le trinôme en m a toujours des valeurs de même signe que son premier terme ; si A est positif, il est toujours positif, x est toujours réel, quelque grand ou petit que soit m, la fraction proposée peut croître de $-\infty$ à $+\infty$, elle n'a ni maximum ni minimum. Si au contraire A était négatif, le trinôme étant toujours négatif quel que soit m, x serait toujours imaginaire, ce qui est absurde, puisqu'on peut donner à x des valeurs réelles quelconques, à chacune desquelles correspond une valeur réelle de m. A étant négatif, les racines ne seront donc jamais imaginaires.

Prouvons que si A est négatif, c'est-à-dire $b'^2-4a'c'$ négatif, les racines ne seront jamais imaginaires, c'est-à-dire que $B^2 - AC$ ou $(bb' - 2ac' - 2ca')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')$ sera positif. Pour cela ordonnons ce polynôme par rapport à a, en le développant, nous aurons

$$4\left[c'^2a^2 + (b'^2c - 2a'cc' - bb'c')\,a + a'^2c^2 - a'bb'c + a'b^2c'\right].$$

Or si nous égalons cette expression à zéro, nous trouvons des racines imaginaires, elle est donc la somme de deux carrés, toujours de même signe que son premier terme $4c'^2a^2$, c'est-à-dire positive.

Pour nous assurer que les racines sont imaginaires, formons la quantité $(b'^2c - 2a'cc' - bb'c')^2 - 4c'^2(a'^2c^2 - a'bb'c + a'b^2c')$ elle se réduit à $(b'^2 - 4a'c')(bc' - cb')^2$, quantité négative, puisque $b'^2 - 4a'c'$ est négatif par hypothèse.

2° Les racines m' et m'' sont égales, c'est-à-dire que $B^2 - AC$ est nul.

Dans ce cas le trinôme en m est toujours de même signe que son premier terme ou nul ; si A est positif, il est toujours positif ou nul, et x est réel quelque grand ou petit que soit m, la fraction proposée peut croître de $-\infty$ à $+\infty$, elle n'a ni maximum ni minimum.

Ce cas ne se peut présenter que quand les deux termes de la fraction ont un facteur commun. En effet, nous venons de voir que $B^2 - AC$ peut se mettre sous la forme

$$4\left[c'^2a^2 + (b'^2c - 2a'cc' - bb'c')\,a + a'^2c^2 - a'bb'c + a'b^2c'\right],$$

on a donc dans le cas des racines égales

$$c'^2a^2 + (b'^2c - 2a'cc' - bb'c')\,a + a'^2c^2 - a'bb'c + a'b^2c' = 0,$$

je dis que c'est la condition nécessaire pour que les polynômes $ax^2 + bx + c$ et $a'x^2 + b'x + c'$ aient un facteur commun du premier degré, ou pour que les équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

aient une racine commune. En effet, si elles ont une racine commune, elle vérifie l'équation qu'on obtient en multipliant la première par a', la seconde par a, et les retranchant membre à membre, ce qui donne

$$(ab' - ba')x + ac' - ca' = 0,$$

d'où

$$x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'},$$

et cette valeur de x vérifie l'une des équations proposées, on a donc la condition

$$a\frac{(ca' - ac')^2}{(ab' - ba')^2} + b \times \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + c = 0,$$

qui en chassant les dénominateurs, et ordonnant par rapport à a, devient

$$c'^2a^2 + (b'^2c - 2a'cc' - bb'c')\,a + a'^2c^2 - a'bb'c + a'b^2c' = 0.$$

Si A ou $b'^2 - 4a'c'$ est négatif, alors le trinôme en m est toujours négatif, et x toujours imaginaire, excepté quand m est égal à la racine m', qui rend le trinôme nul, la fraction proposée n'a donc qu'une seule valeur m', elle est constante et indépendante de x. Ce cas ne peut se présenter que quand les polynômes $ax^2 + bx + c$ et $a'x^2 + b'x + c'$ ont un facteur commun du second degré en x. En effet dans ce cas la quantité $B^2 - AC$ est nulle, donc le polynôme

$$c'^2a^2 + (b'^2c - 2a'cc' - bb'c')\,a + a'^2c^2 - a'bb'c + a'b^2c'$$

est nul, donc il n'a pas ses racines imaginaires, et la condition de réalité des racines est remplie,

$$(b'^2 - 4a'c')\,(bc' - cb')^2 \geqslant 0,$$

or le premier facteur est négatif, et le second un carré, donc puisque le produit n'est pas négatif, le carré est nul, d'où l'on conclut

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

mais alors la condition $B^2 - AC = 0$ se réduit à

$$c'^2a^2 - 2\,aa'cc' + a'^2c^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (ac' - ca')^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}.$$

Si nous désignons par p la valeur commune des rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'}$, la fraction proposée devient

$$\frac{p\,(a'x^2 + b'x + c')}{a'x^2 + b'x + c'},$$

et, en supprimant le facteur commun du second degré, elle se réduit à p ou $\frac{a}{a'}$, elle est constante.

Ces cas, où les racines sont égales, ne se présenteront pas, si l'on a commencé par réduire la fraction proposée à sa plus simple expression, et nous venons de voir comment on peut s'assurer qu'il y a des facteurs communs du premier ou du second degré aux deux termes.

3° Les racines sont réelles et inégales, $B^2 - AC$ est positif; alors si on appelle m' la plus grande et m'' la plus petite des racines, la valeur du trinôme $Am^2 + Bm + C$ est de même signe que A pour toute valeur de m supérieure à m', et pour toute valeur inférieure à m'', elle est de signe contraire à A pour toute valeur de m à la fois inférieure à m' et supérieure à m'' (20 et 21, II, 3).

Si donc A est positif, le trinôme sera positif ou nul, et x réel, pourvu que l'on ait

$$m \geqslant m',$$

ou

$$m \leqslant m'';$$

m' est le minimum, et m'' le maximum de la valeur de la fraction proposée. Si au contraire A est négatif, le trinôme sera positif ou nul, et x réel, pourvu que l'on ait

$$m \leqslant m',$$

et en même temps

$$m \geqslant m'';$$

alors m' est le maximum, et m'' le minimum de la fraction proposée. Si A est nul, il en résulte que

$$x = \frac{b'm - b \pm \sqrt{-2Bm + C}}{2(a - a'm)}.$$

Pour que cette valeur de x soit réelle, il faut qu'on ait

$$-2Bm + C \geqslant 0 ;$$

or le coefficient B peut être positif, négatif ou nul : s'il est positif, on déduit de l'inégalité précédente

$$m \leqslant \frac{C}{2B} ;$$

dans cette hypothèse, la fraction proposée peut donc croître depuis $-\infty$ jusqu'à $\frac{C}{2B}$, qui est dès lors son *maximum.*

En supposant, au contraire, B négatif, l'inégalité

$$-2Bm + C \geqslant 0$$

donne (12 et 13, VI, Th. 2)

$$m \geqslant \frac{C}{2B};$$

par conséquent, la fraction proposée peut croître depuis $\frac{C}{2B}$ jusqu'à $+\infty$, de sorte que sa valeur *minimum* égale $\frac{C}{2B}$.

Enfin, si B est nul, la valeur de x devient

$$x = \frac{b'm - b \pm \sqrt{C}}{2(a - a'm)}.$$

Je remarque qu'alors C n'est pas négatif ; car en éliminant b' entre les équations de condition

$$A = 0, \quad \text{et} \quad B = 0,$$

c'est-à-dire $b'^2 - 4a'c' = 0$, et $bb' - 2(ac' + ca') = 0$,

on trouve que $b^2 - 4ac$, ou C, égale $\frac{(ac' - ca')^2}{a'c'}$, quantité évidemment positive, puisque $a'c'$ est positif d'après l'équation $A = 0$; de plus cette quantité n'est nulle que si les coefficients a, b, c sont proportionnels à a', b', c' ; car l'équation de condition $B = 0$ se réduit alors à $bb' = 4ac'$, et $A = 0$ équivaut à $b'^2 = 4a'c'$, et si on les divise membre à membre on a

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

et comme $ac' - ca'$ est nul, on a aussi

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}.$$

Dans ce dernier cas où C est nul, la fraction proposée est constante, et quand C est positif, x étant réel quel que soit m, la fraction peut varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, elle n'a ni maximum ni minimum finis.

EXERCICES.

1. — Trouver le maximum ou le minimum des fractions suivantes :

$$\frac{2x^2+7x+1}{3x^2+8x-3},\quad \frac{3x^2-2x-7}{x^2+3x-1},\quad \frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b},$$

$$\frac{4x^2+4x}{3-3x^2},\quad \frac{x^2-1}{x^2-4x+3},\quad \frac{21x^2-91x+119}{39x^2-169x+221},$$

$$\frac{x^2}{2x-1},\quad \frac{x^2+4}{2x-4},\quad \frac{3x^2-10x+7}{x^2-2x-2},\quad \frac{3x^2-10x-7}{x^2+2x+2},\quad \frac{(x-a)(x-b)}{x},$$

$$\frac{2x}{x^2-2x+1},\quad \frac{2x^2-4x+1}{3x^2-12x+12},\quad \frac{2x^2-6x+1}{3x^2-12x+12},$$

$$\frac{16x^2-6x+0{,}5}{16x^2-8x+1},\quad \frac{x^2-x}{x^2+1},\quad \frac{x^2-x}{(x-a)(x-2a)}.$$

2. — Mener dans une demi-circonférence de rayon r une perpendiculaire au diamètre telle que la somme de cette perpendiculaire et de l'un des segments du diamètre soit maxima ou minima.

3. — Inscrire dans une circonférence de rayon r un rectangle dont le périmètre soit maximum, dont la surface soit maxima.

4. — Trouver le minimum du volume du cône circonscrit à la sphère de rayon r.

5. — Trouver le minimum de la surface latérale ou totale du cône circonscrit à la sphère de rayon r.

6. — Trouver le maximum de la surface latérale ou de la surface totale du cylindre inscrit à la sphère de rayon r.

7. — Trouver le maximum de la surface latérale ou de la surface totale du cylindre inscrit dans un cône, qui a pour hauteur h et pour rayon de base r.

8. — Dans une circonférence de rayon r on donne une corde AB égale à a, mener par ses deux extrémités deux cordes parallèles dont la somme soit maxima.

9. — Les centres de deux circonférences de rayons r et r' sont distants l'un de l'autre de la quantité d, trouver le maximum de la sécante qui passe par le point commun, ou le maximum du produit des deux cordes comprises dans les deux circonférences, et dont l'ensemble forme cette sécante.

10. — Trouver le maximum ou le minimum de la surface des triangles rectangles ayant un périmètre donné $2p$.

11. — Trouver le maximum ou le minimum du rayon de la circonférence inscrite aux triangles rectangles dont l'hypoténuse est a.

12. — Trouver le maximum ou le minimum de la surface des triangles rectangles circonscrits à une circonférence de rayon r.

13. — Parmi tous les triangles rectangles de même surface, quel est celui dans lequel l'excès de l'hypoténuse sur la hauteur correspondante est maximum ou minimum.

14. — Parmi tous les triangles rectangles dont le périmètre est constant et égal à $2p$, trouver celui dont la somme des côtés de l'angle droit et de la perpendiculaire abaissée du sommet de cet angle sur l'hypoténuse est maximum.

15. — Deux droites parallèles et une sécante sont données; sur l'une des parallèles on prend un point par lequel on propose de mener une sécante qui forme avec les trois droites données deux triangles dont la somme soit minimum.

16. — Par un point donné dans un cercle, tracer deux droites rectangulaires de manière qu'elles interceptent un arc dont la corde soit donnée. — Minimum et maximum de cette corde.

17. — Mener une parallèle à l'un des côtés d'un triangle de manière que la somme des carrés des côtés du trapèze intercepté soit minimum.

18. — Inscrire dans un cercle donné un trapèze dont les cotés non parallèles soient donnés et dont la surface soit maximum.

19. — Parmi tous les troncs de cône ayant une hauteur h, et dans lesquels la somme des rayons des bases est a, trouver ceux dont le volume est maximum et minimum.

20. — Parmi tous les cônes, qui ont la même surface totale, trouver celui dont le volume est maximum. — Réciproque.

21. — Deux courriers se meuvent sur deux droites perpendiculaires qui se coupent en O, l'un, distant du point O d'une quantité a, avec une vitesse v, l'autre, distant du point O d'une quantité a', avec une vitesse v', tous deux se dirigent vers le point O, on demande de déterminer le minimum de leur distance, et le temps au bout duquel ils l'atteindront.

22. — D'un point B on abaisse sur une droite une perpendiculaire BO égale à b, et sur la droite on prend à partir de O une longueur OA égale à a, un courrier va en ligne droite du point B à un point M de la droite avec une vitesse v, et de M en A avec une vitesse v'. on

demande de déterminer la position du point M de manière que la durée du voyage soit minima, v' étant supposé plus grand que v.

23. — De deux points A et B on abaisse sur une même droite des perpendiculaires a et b, la distance de leurs pieds est d, on demande de déterminer sur cette droite un point M tel que la somme $AM + MB$ soit la plus petite possible ; interpréter le maximum.

24. — On partage une droite a en deux parties, sur l'une on construit un carré, sur l'autre un triangle équilatéral, trouver le maximum ou le minimum de la somme de leurs surfaces.

25. — Dans un triangle équilatéral dont le côté est a on mène une parallèle à la base, trouver le maximum ou le minimum du périmètre du triangle formé en joignant ses deux extrémités au milieu de la base.

26. — Trouver le maximum du périmètre du trapèze inscrit dans une demi-circonférence de rayon r, le diamètre étant l'une des bases.

27. — Trouver le maximum de la surface du triangle formé, dans une circonférence de rayon r, en joignant les deux extrémités d'une corde au centre.

28. — Un trapèze birectangle a pour hauteur h, la somme des trois autres côtés est constante et égale à a, trouver le maximum de sa surface, et le maximum du volume qu'il engendre en tournant autour du côté qui est perpendiculaire aux deux bases.

29. — Trouver le maximum de la surface des trapèzes ayant une hauteur h, et inscrits dans une circonférence de rayon r.

30. — Trouver le maximum ou le minimum de la distance de deux perpendiculaires élevées sur le diamètre dans une demi-circonférence, leur différence étant constante et égale à d, et le rayon de la circonférence égal à r.

31. — Trouver le maximum du volume du segment sphérique à deux bases de hauteur h, dans une sphère de rayon r.

IV. — Maxima et minima d'expressions algébriques entières dépassant le second degré.

Il est possible dans certains cas particuliers de trouver les maxima et minima de quantités dont l'expression algébrique est entière, et de degré supérieur au second. Dans cette recherche, on s'appuiera sur les théorèmes suivants.

1. — Théorème I. — *Le produit de deux facteurs variables, dont la somme est constante et égale à* a, *est maximum quand les deux facteurs sont égaux.*

Soient x et y les deux nombres ; d'après l'énoncé du problème, j'ai

$$x + y = a,$$

je pose

$$xy = m.$$

Par conséquent, x et y sont les racines de l'équation du second degré

$$z^2 - az + m = 0,$$

qui, résolue, donne

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4m}}{2}.$$

Ces valeurs de z montrent que le problème n'est possible que si l'on a

$$m < \frac{a^2}{4},$$

ou, au plus,

$$m = \frac{a^2}{4}.$$

Par conséquent, le produit m a un *maximum* fini qui égale $\frac{a^2}{4}$, et, lorsqu'il atteint ce maximum, ses deux facteurs sont égaux à $\frac{a}{2}$, ou à la moitié du nombre donné.

Remarque. — Cette démonstration suppose que les deux facteurs peuvent devenir égaux, il n'en est pas toujours ainsi, par exemple, la hauteur d'un triangle rectangle ne peut devenir égale à l'hypoténuse.

Théorème II. — *Le produit d'un nombre quelconque de facteurs variables et positifs, dont la somme est constante et égale à* a, *est maximum quand tous les facteurs sont égaux.*

Soient $x, y, z, \ldots. v, n$ variables dont la somme est constante et égale à a, de sorte qu'on a

$$x + y + z + \ldots.. + v = a,$$

et soient $x_1, y_1, z_1 \ldots, v_1$ les valeurs des variables qui rendent le produit maximum. Si le produit $x_1, y_1 z_1 \ldots v_1$, supposé maximum, avait deux facteurs inégaux, par exemple x_1 et y_1, on pourrait remplacer chacun d'eux par leur demi-somme $\frac{x_1 + y_1}{2}$

dans le produit, sans changer la somme a des n facteurs du produit. Or, d'après le théorème précédent, on a l'inégalité

$$x_1y_1 < \left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right);$$

en multipliant ses deux membres par $z_1 \ldots v_1$, on en déduit la nouvelle inégalité

$$x_1y_1z_1\ldots v_1 < \left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)z_1\ldots v_1,$$

qui montre qu'on pourrait décomposer le nombre a en n parties dont le produit serait plus grand que $x_1y_1z_1\ldots v_1$; ce qui contredit l'hypothèse. Il faut donc que les facteurs $x_1y_1z_1\ldots v_1$, aient des valeurs égales pour que leur produit soit maximum.

Corollaire. — On appelle *moyenne arithmétique de* n *quantités* la $n^{\text{ième}}$ partie de la somme de ces quantités, et *moyenne géométrique* la racine $n^{\text{ième}}$ de leur produit.

La moyenne arithmétique de n *quantités* ***positives*** $x_1, y_1 z_1 \ldots v_1$, *dont deux au moins sont inégales, est plus grande que leur moyenne géométrique.*

En effet, des deux produits

$$\left(\frac{x_1+y_1+z_1\ldots+v_1}{n}\right)^n, \quad \text{et} \quad x_1y_1z_1\ldots v_1,$$

qui ont chacun n facteurs dont la somme est la même, le premier est le plus grand puisque ses facteurs sont égaux ; par conséquent sa racine $n^{\text{ième}}$ est plus grande que celle du second, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{x_1+y_1+z_1\ldots+v_1}{n} > \sqrt[n]{x_1y_1z_1\ldots v_1} ;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème III. — *La somme de deux nombres positifs, dont le produit est constant et égal à* a, *est minima quand ces nombres sont égaux.*

Soient x et y les deux facteurs du nombre a, j'ai

$$xy = a,$$

je pose

$$x + y = m,$$

x et y sont alors les deux racines de l'équation (17 et 18, VII, 1)

$$z^2 - mz + a = 0.$$

Or les valeurs de z sont

$$z = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4a}}{2},$$

par conséquent le problème n'est possible que si m^2 est plus grand que $4a$, ou au moins égal à ce nombre, la somme m peut dès lors décroître depuis ∞ jusqu'au nombre $2\sqrt{a}$ qui est son minimum, dans ce cas les deux facteurs sont égaux, et ont pour valeur $\sqrt{a}$.

Théorème IV. — *La somme de plusieurs nombres variables et positifs, dont le produit est constant et égal à* a, *est minima quand tous les facteurs du produit sont égaux.*

Soient $x, y, z, \ldots v$, n variables dont le produit est a, de sorte qu'on a

$$x\,y\,z \ldots v = a,$$

et soient x_1, y_1, z_1, ... v_1 les valeurs des variables qui rendent la somme minima, si cette somme $x_1 + y_1 + z_1 + \ldots + v_1$, avait deux parties inégales par exemple x_1 et y_1, je pourrais, sans que le produit cesse d'être égal à a, remplacer dans cette somme chacune de ces parties par la racine carrée de leur produit. Or d'après le théorème III, j'ai

$$x_1 + y_1 > \sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_1 y_1},$$

j'en déduis

$$x_1 + y_1 + z_1 + \ldots + v_1 > \sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_1 y_1} + z_1 + \ldots + v_1,$$

c'est-à-dire, que je pourrais trouver n facteurs dont le produit soit a, et dont la somme soit plus petite que $x_1 + y_1 + z_1 + \ldots + v_1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème V. — *Le produit des puissances différentes de plusieurs nombres variables et positifs, dont la somme est constante et égale à* a, *est maximum quand ces nombres sont proportionnels aux exposants des puissances auxquelles ils sont élevés.*

Cherchons le maximum du produit $x^m y^p$, la somme des deux variables x et y étant égale à a.

Je suppose les variables x et y positives, car si l'une était positive et l'autre négative, elles pourraient croître indéfiniment ainsi que le produit $x^m y^p$, sans cesser de satisfaire à la condition.

$$x + y = a.$$

Cela posé, je divise le produit $x^m y^p$ par la quantité constante $m^m p^p$, et je remarque ensuite que le maximum de $x^m y^p$ est donné par les mêmes valeurs des inconnues x et y que le maximum de $\frac{x^m y^p}{m^m p^p}$, ou $\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{p}\right)^p$. Or la somme des $m + p$ facteurs de ce dernier produit est constante, puisqu'elle égale m fois $\frac{x}{m}$ plus p fois $\frac{y}{p}$, c'est-à-dire $x + y$, ou a, donc ce produit est maximum lorsque ses facteurs sont tous égaux ; ce qui exige qu'on ait :

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{p}$$

Il faut dès lors partager le nombre a en deux parties proportionnelles aux exposants m et p du produit $x^m y^p$; on trouve ainsi :

$$x = \frac{am}{m+p} \text{ et } y = \frac{ap}{m+p}.$$

Remarque I. — La démonstration qui précède s'étendrait aisément à un nombre quelconque de variables $x, y, z \dots v$, dont la somme serait constante et égale à a ; et l'on verrait que le produit $x^m y^p z^r \dots v^u$ est maximum quand on a

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{p} = \frac{z}{r} \dots = \frac{v}{u},$$

d'où l'on tire, par la propriété des rapports égaux (6, II, Th. VI) en remarquant que

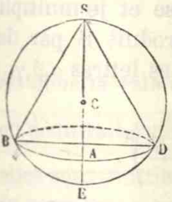
$$x + y + z + \dots + v = a,$$

$$x = \frac{am}{m+p+r\dots+u},\ y = \frac{ap}{m+p+r\dots+u} \dots$$

Remarque II. — Les démonstrations qui précèdent supposent que les variables $x, y, z \dots v$ n'ont entre elles aucune dépendance autre que celle d'avoir leur somme constante ; car lorsqu'on leur impose des liaisons quelconques, par exemple lorsqu'on suppose que toutes, ou seulement quelques-unes d'entre elles, sont fonctions d'une même inconnue, on ne peut pas toujours trouver de valeur de cette inconnue qui rende à la fois toutes les variables égales ou proportionnelles à leurs exposants.

Nous allons voir sur un exemple comment on peut quelque fois, dans ces circonstances, trouver le maximum du produit considéré.

PROBLÈME I. — *Inscrire dans une sphère le cône dont la surface totale est maximum.*



Soient SA la hauteur, SB l'apothème d'un cône SAB inscrit dans la sphère CS, et AB le rayon de sa base ; je désigne SC par r et SB par x ; comme la corde SB est moyenne proportionnelle entre le diamètre SE et sa projection SA sur ce diamètre, il en résulte qu'on a

$$SA = \frac{x^2}{2r}$$

et par suite

$$AB^2 = SB^2 - SA^2 = \frac{x^2(4r^2 - x^2)}{4r^2}.$$

Or la surface totale du cône, que je représente par S, a pour mesure $\pi AB \times SB + \pi AB^2$, donc

$$S = \pi \frac{x^2(2r\sqrt{4r^2 - x^2} + 4r^2 - x^2)}{4r^2}.$$

Pour ramener la valeur de S à être rationnelle, je pose

$$\sqrt{4r^2 - x^2} = y,$$

y représente alors la ligne BE, et j'en déduis

$$x^2 = 4r^2 - y^2;$$

je substitue ensuite ces valeurs de $\sqrt{4r^2 - x^2}$ et x^2 dans l'expression de S, et je trouve

$$S = \frac{\pi y\,(2r - y)\,(2r + y)^2}{4r^2}. \qquad (1)$$

En multipliant les deux termes du second membre par 3, il est facile de reconnaître que les quatre facteurs variables

$$y, \quad 6r - 3y, \quad 2r + y, \quad 2r + y,$$

que le numérateur contient, ont une somme constante et égale à $10r$; mais on ne peut leur appliquer le théorème précédent pour trouver le maximum de leur produit, parce qu'étant fonctions d'une même variable y, ils sont tous déterminés en même temps qu'elle, et ne varient pas de grandeur d'une manière indépendante. On reconnaît en effet, que ces facteurs ne peuvent être égaux pour aucune valeur de y.

Pour trouver le maximum de S, j'ai recours au procédé suivant, qu'on peut appliquer à un grand nombre de questions du même genre que la précédente. Je divise et je multiplie simultanément les facteurs variables du produit S par des constantes arbitraires que je représente par les lettres $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ de sorte que j'ai

$$S = \frac{\pi\alpha\beta\gamma^2}{4r^2}\frac{y}{\alpha}\left(\frac{2r-y}{\beta}\right)\left(\frac{2r+y}{\gamma}\right)^2.$$

Profitant de l'indétermination des trois constantes α, β, γ, je vais chercher s'il est possible de les déterminer de manière que les facteurs du produit $\frac{y}{\alpha}\left(\frac{2r-y}{\beta}\right)\left(\frac{2r+y}{\gamma}\right)\left(\frac{2r+y}{\gamma}\right)$ soient égaux et que leur somme $\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\gamma}\right)y+\frac{2r}{\beta}+\frac{4r}{\gamma}$ soit constante ; ce que j'exprime par les trois équations

$$\frac{y}{\alpha} = \frac{2r-y}{\beta} = \frac{2r+y}{\gamma},$$

et

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\gamma} = 0.$$

Les valeurs des quatre inconnues α, β, γ et y, qui satisfont à ces équations, jouissent évidemment de la propriété de rendre maximum le produit précédent, et par suite S. Cela posé, je vais résoudre ces équations qui ne contiennent en réalité que trois inconnues y, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$; comme α, β, γ, sont proportionnelles aux quantités y, $2r-y$, $2r+y$, il suffit de remplacer α par y, β par $2r-y$ et γ par $2r+y$ dans la troisième équation, pour éliminer α, β, γ, entre ces équations ; je trouve ainsi l'équation

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{2r-y} + \frac{2}{2r+y} = 0,$$

qui est du second degré par rapport à y, car on la ramène à la forme suivante :

$$2y^2 - ry - 2r^2 = 0,$$

en faisant disparaître les dénominateurs de tous ses termes.

Cette équation a deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative, puisque le dernier terme du premier membre est négatif; la racine positive savoir :

$$y = \frac{r(1+\sqrt{17})}{4},$$

est donc la valeur de y, correspondante au maximum de S. On en déduirait facilement les valeurs des rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$; mais elles sont inutiles. Pour avoir l'apothème x du cône maximum, je remplace y par sa valeur dans l'équation

$$x = \sqrt{4r^2 - y^2},$$

et j'ai

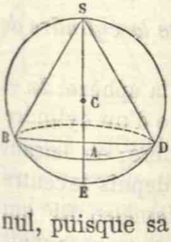
$$x = r\frac{\sqrt{46 - 2\sqrt{17}}}{4},$$

par suite

$$S = \frac{\pi r^2(107 + 51\sqrt{17})}{128}.$$

2. — Applications.

Problème II. — *Inscrire dans une sphère donnée le cône de volume maximum.*



Soient SA la hauteur et AB le rayon de la base d'un cône inscrit dans la sphère CS ; je suppose que le plan de la base du cône se meuve parallèlement à lui-même, et je le considère d'abord lorsqu'il est tangent au point S de la sphère. Dans cette position, le cône est nul, puisque sa base est nulle ; le volume du cône croît ensuite à mesure que sa base s'éloigne du point S ; puis il diminue, car il redevient nul lorsque le plan de sa base est tangent à l'autre extrémité E du diamètre SE ; ce volume passe donc par un maximum. Pour le trouver, je désigne par r le rayon de la sphère par y et V la hauteur SA et le volume du cône SAB, de sorte que j'ai

$$V = \frac{1}{3}\pi AB^2 \times SA.$$

Or AB est moyenne proportionnelle entre les deux segments AS, AE, du diamètre, c'est-à-dire entre y et $2r - y$; par conséquent,

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2(2r - y).$$

Comme le facteur $\frac{1}{3}\pi$ est constant, il suffit de trouver le maximum du produit $y^2(2r - y)$; mais la somme des deux quantités y et $2r - y$ est constante et égale à $2r$, donc il faut partager la somme $2r$ en deux parties proportionnelles aux exposants 2 et 1 des quantités y et $2r - y$, (th. V), ce qui donne

$$\frac{y}{2} = \frac{2r - y}{1}.$$

Il en résulte qu'on a

$$\frac{y}{2} = \frac{2r}{3}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{4r}{3},$$

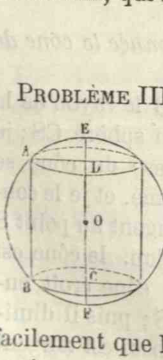
et par suite

$$V = \frac{32\pi r^3}{81}.$$

On prouverait de même que la surface latérale de ce cône de volume maximum atteint, pour la même valeur de y, son maximum, qui est

$$S = \frac{8\pi r^2\sqrt{3}}{9}.$$

Problème III. — *Inscrire dans une sphère le cylindre de volume maximum.*



Soient r le rayon OE de la sphère, $2x$ et V la hauteur CD et le volume d'un cylindre ABCD inscrit dans cette sphère; en faisant varier la position de sa base depuis le centre jusqu'à l'extrémité E du diamètre EF qui est perpendiculaire à son plan, on reconnaît facilement que le volume de ce cylindre a un maximum. Cela posé, on a :

$$V = \pi AD^2 \times CD,$$

ou

$$V = \pi(r^2 - x^2) \times 2x.$$

Comme la quantité V et son carré sont simultanément maximums, j'élève au carré les deux membres de l'égalité précédente, ce qui donne :

$$V^2 = 4\pi^2 x^2 (r^2 - x^2)^2,$$

et je cherche ensuite la valeur de x qui rend maximum le produit $x^2(r^2 - x^2)^2$. Or les deux quantités x^2 et $r^2 - x^2$ ont une somme constante, donc il faut qu'on ait :

$$\frac{x^2}{1} = \frac{r^2 - x^2}{2};$$

je déduis de cette équation

$$x^2 = \frac{r^2}{3},$$

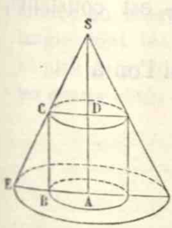
d'où

$$x = \frac{r\sqrt{3}}{3},$$

et par suite

$$V = \frac{4\pi r^3 \sqrt{3}}{9}.$$

PROBLÈME IV. — *Circonscrire à un cylindre donné le cône de volume minimum.*



Soient SA la hauteur et AE le rayon de la base d'un cône circonscrit au cylindre ABCD ; on reconnaît facilement que le volume de ce cône est susceptible d'un minimum en faisant glisser son sommet sur le prolongement DS de la hauteur du cylindre, à partir du point D. En effet, lorsque le point S est très-près du point D, la base du cône et son volume, par suite, sont infiniment grands ; puis, ce volume diminue lorsque le point S s'éloigne du point D ; mais il recommence à croître, car il redevient infiniment grand, lorsque sa hauteur SA devient elle-même infiniment grande. Le volume du cône circonscrit au cylindre ABCD est donc susceptible d'un minimum. Pour le trouver, je désigne par r et h le rayon AB et la hauteur AD du cylindre, par V et x le volume et la hauteur SA du cône circonscrit, et j'ai

$$V = \frac{1}{3}\pi AE^2 \times x.$$

Or les triangles rectangles SAE, SCD, sont semblables, et donnent :

$$\frac{AE}{r} = \frac{x}{x-h};$$

on a, par conséquent,

$$AE = \frac{rx}{x-h}$$

et

$$V = \frac{\pi r^2 x^3}{3(x-h)^2}.$$

Cela posé, je multiplie les deux termes du second membre par h, et je les divise ensuite par x^3 ; il en résulte que

$$V = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{h}{x}\left(1-\frac{h}{x}\right)^2}.$$

Pour avoir le minimum de V, dont le dénominateur seul est variable, je vais chercher le maximum de ce dénominateur ; or, la somme des deux facteurs $\frac{h}{x}$, $1-\frac{h}{x}$ est constante, donc le produit $\frac{h}{x}\left(1-\frac{h}{x}\right)^2$ sera maximum, si l'on a

$$\frac{\frac{h}{x}}{1} = \frac{1-\frac{h}{x}}{2}.$$

Je déduis de cette équation

$$\frac{h}{x} = \frac{1}{3},$$

et, par suite, $x = 3h$. La hauteur du cône minimum, circonscrit au cylindre ABCD, est donc le triple de celle du cylindre et son volume

$$V = \frac{9\pi r^2 h}{4}.$$

EXERCICES.

1. — Trouver le maximum de la surface latérale du tronc de cône inscrit dans un hémisphère de rayon r.

2. — Trouver le maximum de la surface des triangles isocèles inscrits dans une circonférence de rayon r.

3. — Trouver le maximum du volume engendré par un triangle ayant pour côtés deux rayons et une corde dans une circonférence de rayon r, en tournant autour d'un diamètre parallèle à la corde.

4. — Trouver le maximum du volume des cônes ayant une surface latérale donnée πa^2.

5. — Une chaudière a la forme d'un cylindre, terminé par un hémisphère de même rayon; on donne la somme a de la hauteur du cylindre et du rayon, et l'on demande de calculer les dimensions du cylindre de manière que la capacité de la chaudière soit la plus grande possible.

6. — Trouver le minimum du volume engendré par un losange circonscrit à une circonférence de rayon r, en tournant autour d'une de ses diagonales. Démontrer que le produit de ce volume par celui qu'engendre le rectangle dont les côtés joignent les points de contact du losange, en tournant autour du même axe, est constant, en déduire le maximum du volume engendré par ce rectangle.

7. — Trouver le maximum du volume d'une boîte rectangulaire formée en enlevant quatre carrés égaux aux quatre angles d'un rectangle dont les côtés sont a et b, et en relevant perpendiculairement au plan de la figure les quatre rectangles qui se trouvent détachés sur les quatre côtés de la figure.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

PROGRAMME. — Principales propriétés des progressions arithmétiques et des progressions géométriques.

I. — Progressions arithmétiques.

On appelle *progression arithmétique* ou *progression par différence,* une suite de nombres tels que chacun d'eux est égal au précédent plus une quantité constante, qu'on appelle *raison* de la progression.

Si la raison est positive, les termes de la progression vont en augmentant, on dit qu'elle est *croissante ;* si la raison est négative, les termes vont en diminuant, on dit que la progression est *décroissante*.

Les nombres

$$5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, \ldots$$

forment une progression croissante dont la raison est 3. Les nombres

$$70, 65, 60, 55, 50, 45, 40, 35, \ldots.$$

forment une progression décroissante dont la raison est — 5.

Lorsqu'une progression arithmétique est décroissante, il suffit de renverser l'ordre de ses termes pour la transformer en une progression croissante ayant la même raison.

PROBLÈME I. — *Étant donnés le premier terme* a *d'une progression arithmétique, la raison* r, *calculer la valeur du* $n^{\text{ième}}$ *terme.*

Soient $a, b, c, d, \ldots g, h, k, l$, les n premiers termes de la progression, d'après la définition, le second b est égal à $a+r$, le troisième c est égal à $b+r$ ou $a+r+r$ ou $a+2r$, le quatrième d est égal à $c+r$ ou $a+2r+r$ ou $a+3r$, on voit que dans l'expression de chaque terme le coefficient de la raison est égal au rang du terme diminué de 1, cette loi se continue évidemment, et le $n^{\text{ième}}$ sera égal à $a+(n-1)r$, on aura

$$l = a + (n - 1)r.$$

Un terme quelconque d'une progression arithmétique est donc égal au premier terme plus autant de fois la raison, qu'il y a de termes avant lui. Lorsque la raison r est négative, l'opération indiquée par le signe $+$ de cette formule est une véritable soustraction, et les termes décroissent.

Exemple I. — Calculer le 20e terme de la progression croissante dont le premier terme est égal à 5 et la raison égale à 3.

Ce terme est égal à $5 + 3 \times 19$ ou à 62.

Exemple II. — Calculer le 10e terme de la progression décroissante dont le premier terme est égal à 100 et la raison égale à -5.

Ce terme est égal à $100 - 5 \times 9$ ou à 55.

Corollaire. — *Les termes d'une progression arithmétique dont la raison est positive croissent indéfiniment,* c'est-à-dire qu'à partir d'un certain terme ils surpassent tout nombre donné M, quelque grand qu'il soit.

Soient a et r le premier terme et la raison d'une progression arithmétique croissante ; son $n^{\text{ième}}$ terme, qui est égal à $a + (n - 1)r$, sera plus grand que le nombre donné M, si l'on peut choisir n de manière qu'il satisfasse à l'inégalité

$$a + (n - 1)r > \mathrm{M}.$$

Comme, en résolvant cette inégalité par rapport à n, on trouve

$$n > 1 + \frac{\mathrm{M} - a}{r},$$

il en résulte que si l'on représente par k le plus grand nombre entier contenu dans $1 + \dfrac{\mathrm{M} - a}{r}$, et qu'on donne à n la valeur $k + 1$, le terme correspondant de la progression proposée sera plus grand que M ; il en est de même des termes suivants, puisque la progression est croissante.

Ainsi, par exemple, tous les termes de la progression arithmétique croissante

$$5,\ 8,\ 11,\ 14, \ldots$$

à partir du 3333e, sont plus grands que 10000.

Problème II. — *Étant donnés deux termes* a, b, *d'une progression arithmétique et le nombre* m *des termes qui les séparent, calculer la raison* r *de la progression et les termes compris entre* a *et* b.

Comme b est le $(m+2)^{\text{ième}}$ terme de la progression, à partir de a, on a

$$b = a + (m+1)r,$$

et l'on en déduit

$$r = \frac{b-a}{m+1}.$$

La valeur r étant connue, on peut former les termes de la progression, compris entre a et b ; ces termes sont :

$$a+r, \quad a+2r, \ldots \quad a+mr.$$

On leur a donné le nom de *moyens arithmétiques insérés entre* a *et* b. De là résulte cet autre énoncé du problème précédent : *Insérer* m *moyens arithmétiques entre les nombres donnés* a *et* b.

Corollaire I. — *Si l'on insère entre les termes consécutifs d'une progression arithmétique le même nombre de moyens arithmétiques, ces moyens forment une seule progression arithmétique avec les termes de la progression donnée.*

Soient

$$a, \; b, \; c, \; d, \; e, \ldots$$

les termes d'une progression arithmétique ; si j'insère m moyens entre a et b, la raison de la progression formée par ces moyens sera $\frac{b-a}{m+1}$. En insérant ensuite m moyens arithmétiques entre b et c, puis entre c et d, etc., j'aurai de même $\frac{c-b}{m+1}$, $\frac{d-c}{m+1}, \ldots$ pour les raisons de ces nouvelles progressions. Or, les rapports

$$\frac{b-a}{m+1}, \quad \frac{c-b}{m+1}, \quad \frac{d-c}{m+1}, \ldots$$

sont égaux, puisqu'ils ont le même dénominateur, et que chacun de leurs numérateurs est égal à la raison de la progression donnée ; je remarque, en outre, que la seconde progression partielle qui commence par b est la continuation de la première qui se termine par b, puisqu'elles ont un terme commun b et la même raison ; je prouverais de même que la troisième progression partielle qui commence par c est la continuation de la seconde et, par suite, de la première, etc. Tous les moyens insérés entre les termes consécutifs de la progression arithmétique

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots$$

forment donc avec ces termes une seule progression arithmétique.

Corollaire II. — Pour insérer $mm'-1$ moyens arithmétiques entre deux nombres a et b, on peut insérer d'abord $m-1$ moyens arithmétiques entre a et b, puis $m'-1$ moyens arithmétiques entre les termes de la progression ainsi obtenue.

En effet, si l'on insère $m-1$ moyens entre a et b, on forme une progression dont la raison est égale à $\frac{b-a}{m}$; en insérant ensuite $m'-1$ moyens arithmétiques entre les termes de cette progression, on aura $\frac{\left(\frac{b-a}{m}\right)}{m'}$ ou $\frac{b-a}{mm'}$ pour la raison de la nouvelle progression. Or ce nombre est évidemment la raison de la progression arithmétique qu'on obtient en insérant $mm'-1$ moyens arithmétiques entre a et b ; donc, etc.

Ce théorème est général ; au lieu d'insérer, par exemple, $mm'm''-1$ moyens entre a et b, on peut insérer d'abord $m-1$ moyens entre a et b, puis $m'-1$ moyens entre les termes de la progression ainsi formée, et enfin $m''-1$ moyens entre les termes de la seconde progression.

Théorème I. — *Dans toute progression arithmétique, composée d'un nombre fini de termes, la somme de deux termes également éloignés des extrêmes est constante.*

Soient a le premier terme de la progression, l le dernier et r la raison ; je désigne par x le $n^{\text{ième}}$ terme qui suit a, par y le $n^{\text{ième}}$ terme qui précède l, et j'ai

$$x = a + (n-1)r,$$
$$y = l - (n-1)r.$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, je trouve

$$x + y = a + l;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Si la progression considérée contient un nombre impair de termes, par exemple $2n+1$, le $(n+1)^{ième}$ terme est également éloigné des deux extrêmes et, par suite, égal à la moitié de leur somme ; car, si l'on suppose y égal à x dans l'égalité précédente, on a

$$x=\frac{a+l}{2}.$$

Théorème II. — *La somme des* n *premiers termes d'une progression arithmétique est égale au produit de la demi-somme des deux termes extrêmes par le nombre* n *de tous les termes.*

Soient $a, b, c, \ldots\, h, k, l$, les n premiers termes d'une progression arithmétique et S leur somme ; on a dès lors

$$S=a+b+c\ldots+h+k+l.$$

et, en renversant l'ordre des termes de la progression

$$S=l+k+h+\ldots+c+b+a.$$

Si l'on ajoute membre à membre les deux égalités précédentes, on trouve

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+h)+\ldots+(h+c)+(k+b)+(l+a).$$

Or les deux termes, compris dans chacune des n parenthèses, sont également éloignés des extrêmes ; donc leur somme est égale à $a+l$, et l'on a

$$2S=(a+l)n,$$

ou

$$S=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Remarque. — Quand le dernier terme de la progression n'est pas donné, on obtient une formule plus commode, en remplaçant dans la précédente l par sa valeur $a+(n-1)r$, on a ainsi

$$S=\frac{\left[2a+(n-1)r\right]n}{2}.$$

Exemple I. — Calculer la somme des cent premiers termes de la progression arithmétique

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ldots.$$

La formule

$$S = \frac{[2a + (n-1)r]n}{2},$$

donne immédiatement

$$S = \frac{(4 + 99 \times 3)100}{2} = 301 \times 50 = 15050.$$

Exemple II. — Calculer la somme des n premiers nombres impairs, qui forment une progression arithmétique dont la raison est 2.

La formule

$$S = \frac{[2a + (n-1)r]n}{2},$$

donne

$$S = \frac{[2 + (n-1)2]n}{2} = n^2.$$

La somme des n premiers nombres impairs est donc égale au carré du nombre n.

Remarque générale. — Entre les cinq quantités a, r, n, l et S, il ne peut y avoir plus de deux équations distinctes, car, s'il y en avait trois, il en résulterait que, connaissant deux de ces quantités, on pourrait calculer les trois autres ; or, quand on ne donne que le premier terme et la raison, rien n'indique où la progression s'arrêtera, et il est absurde de supposer que l'on pourra trouver le dernier terme.

Les deux équations distinctes, que nous avons trouvées,

$$l = a + (n-1)r,$$

$$S = \frac{(a+l)n}{2},$$

permettent de calculer deux de ces quantités, quand les trois autres seront données. On est ainsi conduit à *dix* problèmes différents, comme l'indique le tableau suivant :

	INCONNUES.	DONNÉES.
1°	$n, a,$	$l, r, S,$
2°	$n, l,$	$a, r, S,$
3°	$n, r,$	$a, l, S,$
4°	$n, S,$	$a, l, r,$
5°	$r, a,$	$l, n, S,$
6°	$r, l,$	$a, n, S,$
7°	$r, S,$	$a, l, n,$
8°	$S, a,$	$l, n, r,$
9°	$S, l,$	$a, n, r,$
10°	$a, l,$	$n, r, S,$

Les huit derniers problèmes ne dépendent que d'équations du premier degré ; mais les deux autres conduisent à des équations du second degré. Dans tous les cas, lorsque n est l'une des inconnues, le problème n'est possible que si la valeur de cette inconnue, déduite des deux équations précédentes, est entière et positive.

II. — Progressions géométriques.

On appelle *progression géométrique* ou *progression par quotient,* une suite de nombres tels que chacun d'eux est égal au précédent multiplié par un nombre constant, qu'on appelle *raison* de la progression.

Ainsi les nombres

$$2,\ 10,\ 50,\ 250,\ 1250,\ldots$$

forment une progression géométrique dont la raison est égale à 5, puisqu'on obtient chaque terme, en multipliant le précédent par le nombre constant 5. Dans cet exemple, la raison étant plus grande que l'unité, les termes vont en croissant et l'on dit que la progression est *croissante.*

De même, les nombres

$$1,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27},\ \frac{16}{81},\ldots$$

sont les termes d'une progression dont la raison est égale à $\frac{2}{3}$; car on forme chacun d'eux en multipliant le précédent par le même nombre $\frac{2}{3}$. Comme la raison est plus petite que l'unité, les termes vont en décroissant, et la progression est dite *décroissante*.

Lorsqu'une progression est décroissante, il suffit de renverser l'ordre de ses termes pour la rendre croissante ; mais la raison de la seconde progression est l'inverse de la raison de la première. En effet, si l'on renverse l'ordre des termes de la progression précédente, on voit que, pour former le terme $\frac{8}{27}$ de la nouvelle progression au moyen du terme précédent $\frac{16}{81}$, il faut diviser $\frac{16}{81}$ par $\frac{2}{3}$, ou le multiplier par le nombre $\frac{3}{2}$ qui est l'inverse de $\frac{2}{3}$.

PROBLÈME I. — *Étant donnés le premier terme* a, *la raison* q *et le rang* n *d'un terme quelconque d'une progression par quotient, calculer la valeur de ce terme.*

Soient $a, b, c, d, \ldots\ g, h, k, l$, les n premiers termes de la progression, il résulte de la définition que le second terme b est égal à aq, de même le troisième c est égal à bq ou $aq \times q$ ou aq^2, le quatrième d est égal à cq ou $aq^2 \times q$ ou aq^3 ; on voit que, dans l'expression de chaque terme, la raison a pour exposant le rang du terme diminué de 1, cette loi se continue évidemment, et le $n^{\text{ième}}$ terme est égal à aq^{n-1}, on a

$$l = aq^{n-1} ;$$

donc *un terme quelconque d'une progression par quotient est égal au premier terme multiplié par une puissance de la raison, ayant pour exposant le nombre des termes qui le précèdent.*

Ainsi le dixième terme de la progression par quotient dont le premier terme est 5, et la raison 2, égale 5×2^9 ou 2560.

COROLLAIRE I. — *Les termes d'une progression par quotient dont la raison est plus grande que l'unité croissent indéfiniment*, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang, ils surpassent tout nombre donné, quelque grand qu'il soit.

Soient

$$a, b, c, d, \ldots\ h, k, l,$$

les n premiers termes d'une progression par quotient dont la raison q est plus grande que l'unité; je remarque d'abord que la différence de deux termes consécutifs, par exemple d et c.

est plus grande que celle des deux termes précédents c et b. En effet, on a

$$d = cq,$$
$$c = bq,$$

et, par conséquent,

$$d - c = (c - b)q.$$

Or la raison q est plus grande que l'unité, donc la différence $d - c$ est plus grande que la différence $c - b$.

Cela posé, si je désigne par δ l'excès du second terme b de la progression par quotient sur le premier a, j'aurai successivement

$$b - a = \delta,$$
$$c - b > \delta,$$
$$d - c > \delta,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$k - h > \delta,$$

et

$$l - k > \delta.$$

J'ajoute ensuite ces $n-1$ inégalités membre à membre, et, en remarquant que la somme de leurs premiers membres se réduit à la différence $l - a$ des deux termes extrêmes de la progression, je trouve

$$l - a > (n-1)\delta,$$

ou

$$l > a + (n-1)\delta.$$

Cette dernière inégalité montre qu'*un terme quelconque* l *de la progression par quotient est plus grand que le terme de même rang d'une progression par différence dont les deux premiers termes sont* a *et* a $+ \delta$, *ou* b, c'est-à-dire *les mêmes que ceux de la progression par quotient.* Or la progression arithmétique est croissante, puisque le second terme b est plus grand par hypothèse que le premier a; par conséquent ses termes croissent indéfiniment; il en est dès lors de même, *à fortiori*, des termes de la progression par quotient.

COROLLAIRE II. — *Les termes d'une progression par quotient dont la raison est moindre que l'unité décroissent indéfiniment*, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang ils sont moindres que tout nombre donné, quelque petit qu'il soit.

Soient a le premier terme de la progression et q sa raison, que je suppose plus petite que l'unité ; je dis qu'on peut choisir le nombre entier n assez grand pour que le terme aq^n de la progression soit moindre qu'un nombre donné k, aussi petit qu'on voudra.

En effet, si je forme la progression par quotient dont le premier terme est $\frac{1}{a}$ et la raison $\frac{1}{q}$ plus grande que l'unité, je pourrai trouver dans cette progression croissante un terme $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{q}\right)^n$ qui soit plus grand que le nombre $\frac{1}{k}$. J'aurai donc

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{aq^n},$$

et, par suite,

$$aq^n < k;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Problème II. — *Étant donnés deux termes* a, b, *d'une progression par quotient, et le nombre* m *des termes qui les séparent, calculer la raison* q *de la progression et les termes compris entre* a *et* b.

Le terme b étant le $(m+2)^{\text{ième}}$ terme après a, j'ai l'équation

$$b = aq^{m+1},$$

de laquelle je déduis successivement

$$q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

et

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

La raison étant connue, on peut calculer les termes compris entre a et b, et l'on trouve

$$aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots\ aq^m.$$

On dit que ces termes sont des *moyens géométriques, ou par quotient, insérés entre* a *et* b ; de là résulte ce nouvel énoncé du problème précédent : *Insérer* m *moyens par quotient entre les deux nombres* a *et* b.

Corollaire I. — *Si l'on insère entre les termes consécutifs d'une progression par quotient le même nombre de moyens* *géométriques, ces moyens forment une progression par quotient avec les termes de la progression donnée.*

Soient

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots$$

les termes d'une progression par quotient, si j'insère m moyens géométriques entre a et b, la raison de la progression sera $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$. En insérant aussi m moyens géométriques entre b et c, puis entre c et d, etc., j'aurai de même $\sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}$, $\sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}, \ldots$ pour les raisons de ces nouvelles progressions par quotient. Or les nombres $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{c}, \ldots$ sont égaux, car chacun d'eux représente la raison de la progression donnée ; donc leurs racines $(m+1)^{\text{ièmes}}$ sont égales. Cela posé, je fais remarquer que la seconde progression partielle qui commence par b est la continuation de la première qui se termine par b, puisqu'elles ont la même raison ; de même la troisième progression partielle qui commence par c est la continuation de la seconde, et, par suite, de la première, etc. Tous les termes insérés forment donc une progression géométrique avec les termes de la progression donnée.

COROLLAIRE II. — *Lorsqu'on veut insérer* mm′ — 1 *moyens géométriques entre deux nombres donnés* a *et* b, *on peut commencer par insérer* m — 1 *moyens entre* a *et* b, *puis insérer* m′ — 1 *moyens entre les termes de la progression précédente.*

En effet, si j'insère $m-1$ moyens par quotient entre a et b, la raison de la progression géométrique sera égale à $\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$. En insérant ensuite $m'-1$ moyens par quotient entre les termes consécutifs de cette progression, je forme une nouvelle progression géométrique dont la raison égale $\sqrt[m']{\sqrt[m]{\frac{b}{a}}}$ ou $\sqrt[mm']{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire qu'elle est égale à la raison de la progression qu'on obtient en insérant $mm'-1$ moyens par quotient entre a et b.

Ce théorème peut être généralisé, comme celui qui lui correspond dans les progressions par différence.

Théorème I. — *Pour calculer la somme des termes d'une progression par quotient, on multiplie le dernier terme par la raison, on retranche ensuite du produit le premier terme de la progression, puis on divise le reste par l'excès de la raison sur l'unité.*

Soient

$$a,\ b,\ c, \ldots\ h,\ k,\ l,$$

les n premiers termes d'une progression par quotient, S leur somme et q la raison ; on a

$$S = a + b + c + \ldots + h + k + l$$

et, par conséquent,

$$Sq = aq + bq + \ldots + hq + kq + lq,$$

ou

$$Sq = b + c + \ldots + k + l + lq.$$

Je suppose d'abord la raison q plus grande que l'unité, et je retranche la première égalité de la troisième ; j'ai par suite

$$Sq - S = lq - a$$

ou

$$S(q-1) = lq - a,$$

et j'en déduis la formule :

$$S = \frac{lq - a}{q - 1},$$

qui est conforme à l'énoncé du théorème.

En supposant, en second lieu, la raison q moindre que l'unité, je soustrais la troisième égalité de la première et je trouve

$$S(1-q) = a - lq;$$

d'où je tire

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

Cette valeur de S et la précédente sont identiques, si l'on admet l'usage des quantités négatives, puisque les deux termes de la première sont respectivement égaux à ceux de la seconde et de signes contraires. Par conséquent, on peut n'employer que la première formule dans les deux cas ; il en résulte que, *pour faire la somme des termes d'une progression* *par quotient, on multiplie son dernier terme* l *par la raison* q; *on retranche ensuite du produit* lq *le premier terme* a *de la progression, puis on divise le reste* lq — a *par l'excès* q — 1 *de la raison sur l'unité.*

EXEMPLE. — Faire la somme des 15 premiers termes de la progression par quotient dont le premier terme est 5 et la raison 3.

Je commence par calculer la valeur du 15e terme; elle est égale à 5×3^{14} ou à 23914845. Je cherche ensuite, au moyen de la règle précédente, la somme des 15 premiers termes de la progression, et je trouve pour cette somme $\dfrac{23914845 \times 3 - 5}{3 - 1}$, ou 35872265.

REMARQUE. — Quand le dernier terme de la progression n'est pas donné, on obtient une formule plus commode, en remplaçant dans la précédente l par sa valeur aq^{n-1}, on a ainsi

$$S = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q - 1} = \frac{aq^n - a}{q - 1},$$

ou $$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ si la progression est croissante,}$$

et $$S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ si la progression est décroissante.}$$

THÉORÈME II. — *La somme des termes d'une progression géométrique décroissante indéfiniment prolongée tend vers une limite finie, qu'on obtient en divisant son premier terme par l'excès de l'unité sur la raison.*

En effet, la formule qui donne la somme des termes d'une progression géométrique décroissante a été mise sous la forme

$$S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{ou} \quad S = \frac{a - aq^n}{1 - q},$$

ou enfin

$$S = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

En supposant que le nombre n des termes dont on fait la somme croisse indéfiniment, le terme $\dfrac{aq^n}{1 - q}$ de cette somme varie seul et diminue indéfiniment à mesure que n augmente, car on peut le considérer comme un terme d'une progression géométrique décroissante dont le premier terme serait égal à $\frac{a}{1-q}$ et la raison égale à q; par conséquent, la valeur de S tend vers une limite déterminée et finie qui n'est autre que son premier terme $\frac{a}{1-q}$; ce qui démontre le théorème énoncé.

Exemple I. — La fraction décimale, périodique simple, 0,36363636..... n'est autre chose que la limite de la somme des termes d'une progression géométrique indéfiniment décroissante, dont le premier terme est égal à 0,36 et la raison égale à 0,01; car on peut l'écrire de la manière suivante :

$$0,36 + 0,0036 + 0,000036 + 0,00000036 + \text{etc.}$$

En cherchant la limite de cette somme, au moyen de la règle précédente, on la trouve égale à $\frac{0,36}{1-0,01}$ ou à $\frac{36}{99}$; par conséquent, *une fraction décimale périodique simple a pour limite une fraction ordinaire dont le numérateur est égal à la période, et le dénominateur égal à un nombre entier, composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.* Cette règle de transformation est la même que celle qu'on donne dans l'arithmétique.

Exemple II. — *Si l'on construit le carré qui a pour sommets les milieux des côtés d'un carré donné, et qu'on répète la même construction sur le second carré, puis sur le troisième, et ainsi de suite, quelle sera la somme des aires de tous les carrés inscrits successivement les uns dans les autres?*

Chaque carré est évidemment la moitié du carré dans lequel il est inscrit; par conséquent, si je prends le carré donné pour l'unité de surface, les aires des carrés inscrits seront représentées par les nombres

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \text{etc.},$$

qui forment une progression par quotient, indéfiniment décroissante; comme le premier terme de cette progression est égal à $\frac{1}{2}$, ainsi que sa raison, on a $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ ou 1 pour la limite de la somme de ses termes ; donc la somme des carrés inscrits dans le carré donné est égale à ce carré.

Remarque générale. — Entre les cinq quantités a, q, n, l et S, il ne peut y avoir plus de deux équations distinctes, car, s'il y en avait trois, il en résulterait que, connaissant deux de ces quantités, on pourrait trouver les trois autres ; or, quand on ne donne que le premier terme et la raison, rien n'indique où la progression s'arrêtera, et il est absurde de supposer que l'on pourra trouver le nombre des termes, le dernier terme et leur somme.

Les deux équations distinctes, que nous avons trouvées,

$$l = aq^{n-1},$$

$$S = \frac{lq - a}{q - 1},$$

permettront de calculer deux de ces quantités, quand les trois autres seront données. On est ainsi conduit à *dix* problèmes différents, comme l'indique le tableau suivant :

	INCONNUES.	DONNÉES.
1°	n, a,	l, q, S,
2°	n, l,	a, q, S,
3°	n, q,	a, l, S,
4°	n, S,	a, l, q,
5°	q, a,	l, n, S,
6°	q, l,	a, n, S,
7°	q, S,	a, l, n,
8°	S, a,	l, n, q,
9°	S, l,	a, n, q,
10°	a, l,	n, q, S.

Les quatre derniers problèmes ne dépendent que d'équations du premier degré ; mais il faut résoudre des équations de degré $n-1$ pour les deux problèmes précédents. Les quatre premiers conduisent à un nouveau genre d'équations qu'on appelle *équations exponentielles,* parce qu'elles contiennent l'inconnue n en exposant ; la résolution de ces équations exige la connaissance des logarithmes.

III. — Remarque sur les progressions arithmétiques et géométriques.

Si l'on compare les formules analogues dans les progressions arithmétiques et géométriques, on s'aperçoit que l'on passe des unes aux autres en élevant toutes les opérations d'un degré, c'est-à-dire en substituant à une addition une multiplication, à une multiplication une élévation à une puissance, à une soustraction une division, et à une division une extraction de racine, pour le reconnaître il suffit de mettre en regard l'une de l'autre les formules analogues :

	PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.	PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.
Problème I.	$l = a + (n-1)r,$	$l = a \times q^{n-1}.$
Problème II.	$r = \dfrac{b-a}{m+1},$	$q = \sqrt[m+1]{\dfrac{b}{a}}.$

L'analogie cesse pour les formules qui donnent la somme des termes des deux sortes de progressions ; il est aisé de démontrer que le produit de deux termes également éloignés des extrêmes est égal au produit des extrêmes, dans une progression géométrique, théorème analogue au premier des progressions arithmétiques ; et en appliquant au produit P des termes d'une progression géométrique la méthode suivie pour démontrer le théorème II des progressions arithmétiques, nous trouverions

$$P = \sqrt{(al)^n},$$

formule qui se déduit de celle qui donne la somme des termes d'une progression arithmétique,

$$S = \frac{(a+l)n}{2},$$

en élevant toutes les opérations d'un degré.

C'est cette remarque sur les progressions arithmétiques et géométriques, qui a conduit l'écossais *Neper* à l'invention des *logarithmes.*

EXERCICES.

I. — 1. — Trouver la somme des n premiers nombres entiers. $\left(\textit{Rép.} \quad \frac{n(n+1)}{2}\right)$.

2. — Combien faut-il prendre de nombres entiers consécutifs, en partant de 1, pour que leur somme soit 465. (*Rép.* 30).

3. — Trouver la somme de n nombres impairs consécutifs en commençant au nombre impair $n(n-1)+1$. (*Rép.* n^3).

4. — Dans quel cas la somme de n entiers consécutifs commençant à un nombre quelconque a est elle divisible par n. (*Rép.* Si n est impair.)

5. — Trouver une progression arithmétique telle que la somme des n premiers termes soit égale à n^2, quel que soit n. (*Rép.* La suite naturelle des nombres impairs.)

6. — Dans une progression arithmétique, on donne le premier terme 20, la raison 3, la somme des termes 680, trouver le nombre n des termes. (*Rép.* $n = 16$.)

7. — Dans une progression arithmétique, on donne le premier terme 21, la raison -3, la somme des termes 66, trouver le nombre n des termes. (*Rép.* $n' = 11$, $n'' = 4$, interpréter la solution 11).

8. — On divise la hauteur h d'un triangle en n parties égales, par les points de division on mène des parallèles à la base b, et sur chacune d'elles on construit un rectangle dont la hauteur est $\frac{h}{n}$, trouver la somme des surfaces de ces rectangles, et la limite vers laquelle elle tend, quand n augmente indéfiniment. $\left(\textit{Rép.} \quad \frac{bh}{2}\right)$.

9. — Dans un triangle équilatéral dont le côté est a, on inscrit n rangées de circonférences égales, telles que chacune en touche deux de la rangée voisine, et que les extrêmes touchent les côtés du triangle, trouver leur rayon r, leur nombre, la somme de leurs surfaces, et la limite S vers laquelle elle tend quand n augmente indéfiniment. $\left(\textit{Rép.} \quad r = \frac{a}{2(n-1+\sqrt{3})}, \quad S = \frac{\pi a^2}{8}\right)$.

10. — Deux courriers parcourent la même droite, et vont dans le même sens AB, l'un part de B avec une vitesse constante de 6 kilomètres à l'heure, l'autre part du point A, et parcourt un kilomètre dans la première heure et 2 kilomètres de plus d'heure en heure; la

distance AB est de 16 kilomètres ; on demande au bout de combien d'heures ils se rencontreront. (*Rép.* 8 heures.) Généraliser et discuter ce problème.

11. — Trouver la somme des nombres contenus dans le tableau

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n, \\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ 2n, \\ 3,\ 6,\ 9,\ \ldots\ 3n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n,\ 2n,\ 3n,\ \ldots\ n^2. \end{array}$$

$\left(Rép.\quad \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right).$

12. — Quelle condition doit remplir le premier terme a d'une progression arithmétique, pour que la somme de deux termes soit encore un terme de la progression. (*Rép.* a doit être multiple de la raison).

13. — Démontrer que si $a, b, c, d \ldots g, h, k, l$, sont les termes d'une progression arithmétique dont la raison est r, la somme des fractions $\dfrac{1}{ab}, \dfrac{1}{bc}, \dfrac{1}{cd} \ldots \dfrac{1}{gh}, \dfrac{1}{hk}, \dfrac{1}{kl}$, est égale à $\dfrac{l-a}{alr}$.

II. — 14. — Inscrire 4 moyens géométriques entre 32 et 343, qui sont les cinquièmes puissances de 2 et de 3.

15. — Dans un triangle équilatéral de côté a, on abaisse du pied de la hauteur une perpendiculaire sur un côté, de son pied une perpendiculaire sur la hauteur, du pied de celle-ci une perpendiculaire sur le côté, et ainsi de suite, démontrer que ces perpendiculaires forment une progression géométrique, et trouver la limite S de leur somme.

$\left(Rép.\quad S = \dfrac{a(3+2\sqrt{3})}{2}\right).$

16. Un mobile avance d'une quantité a sur une droite, puis recule de $\dfrac{a}{2}$, avance de $\dfrac{a}{4}$, recule de $\dfrac{a}{8}$, et ainsi de suite, vers quelle limite tend sa distance au point de départ. $\left(Rép.\quad \dfrac{2a}{3}\right).$

17. — Trouver la formule qui donne la somme S de tous les diviseurs du nombre $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, que l'on suppose décomposé en facteurs premiers. $\left(Rép.\quad S = \dfrac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \dfrac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \dfrac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\right).$ Supposer le nombre égal à 1560.

18. — La somme des six premiers termes d'une progression géo-

métrique composée de sept termes est 157,5 ; la somme des six derniers est égale à 315. Quels sont ces termes ? (*Rép.* $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.)

19. — Dans une progression géométrique de 5 termes, on connaît la somme des termes de rang pair, et celle des termes de rang impair. Calculer les cinq termes de cette progression.

Remarque. — On calculera d'abord le terme moyen et l'on exprimera les autres en fonction de celui-ci.

20. — Dans une progression géométrique de six termes, on connaît la somme des deux termes moyens et celle des deux termes extrêmes. Trouver cette progression.

Remarque. — On cherchera d'abord le produit des deux termes moyens, puis ces termes eux-mêmes. La raison de la progression sera par suite déterminée, ainsi que ses différents termes.

21. — Dans une progression géométrique de quatre termes, la somme des termes est égale à a, et la somme de leurs carrés à b. Calculer ces quatre termes.

On prendra pour inconnues la demi-somme et la demi-différence des moyens.

22. — Dans une progression géométrique de quatre termes, l'excès de la somme des extrêmes sur celle des moyens est a, et l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur celle des carrés des moyens est égale à b. Calculer les quatre termes.

On prendra encore pour inconnues la demi-somme et la demi-différence des deux extrêmes.

23. — Dans une progression géométrique de quatre termes, la somme des deux moyens est égale à a, celle des deux extrêmes est égale à b. Calculer les termes de cette progression.

On cherchera d'abord la raison de cette progression, puis le premier terme.

VINGT-TROISIÈME ET VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

Programme. — Des logarithmes. — Chaque terme d'une progression arithmétique commençant par zéro, 0, r, $2r$, $3r$, $4r$, ... est dit le logarithme du terme qui occupe le même rang dans une progression géométrique commençant par l'unité, 1, q, q^2, q^3, q^4, ...

Si l'on conçoit que l'excès de la raison q sur l'unité diminue de plus en plus, les termes de la progression géométrique croîtront par degrés aussi rapprochés qu'on voudra. Étant donné un nombre plus grand que 1, il existera toujours un terme de la progression géométrique dont la différence avec ce nombre sera moindre que toute quantité donnée.

Le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs. — Corollaires relatifs à la division, à l'élévation aux puissances et à l'extraction des racines.

I. — Définition.

1. — *Chaque terme d'une progression arithmétique commençant par zéro,* 0, r, 2r, 3r,.... *est dit le* logarithme *du terme qui occupe le même rang dans une progression géométrique commençant par l'unité,* 1, q, q², q³,....

Pour plus de clarté, nous placerons l'une au dessous de l'autre, ces deux progressions, dont l'ensemble constitue un *système de logarithmes,* de manière que les logarithmes se trouvent au dessous des nombres correspondants :

$$\begin{array}{l} 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ q^n,\ q^{n+1},\dots \\ 0,\ r,\ 2r,\ 3r,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ nr,\ (n+1)r,\dots \end{array}$$

Les lettres q et r désignent des nombres quelconques, seulement q doit être positif. On prend ordinairement q plus grand que l'unité et r positif, il en résulte que les nombres et leurs logarithmes croissent simultanément. On voit que, dans tout système de logarithmes, l'unité a pour logarithme zéro, et que le coefficient de la raison r dans un logarithme est égal à l'exposant de la raison q dans le nombre correspondant. On désigne le logarithme d'un nombre a par la notation abrégée : log. a ; ainsi on a

$$nr = \log. q^n.$$

2. — *Si l'on conçoit que l'excès de la raison* q *sur l'unité diminue de plus en plus, les termes de la progression géométrique croîtront par degrés aussi rapprochés qu'on voudra.*

Il s'agit de démontrer que l'excès de la raison q sur l'unité peut être pris assez petit pour que la différence d'un terme au suivant soit plus petite qu'un nombre donné δ, si petit qu'il soit. Désignons par a le premier de ces termes, le suivant sera représenté par aq, et leur différence par $aq - a$ ou $a(q-1)$; je dis que l'on pourra toujours trouver une valeur de q satisfaisant à l'inégalité

$$a(q-1) < \delta,$$

il suffit, en effet, que q satisfasse à l'inégalité

$$q < 1 + \frac{\delta}{a},$$

ou qu'il surpasse l'unité d'une quantité inférieure à $\frac{\delta}{a}$.

3. — *Étant donné un nombre* a *plus grand que* 1, *il existera toujours un terme de la progression géométrique dont la différence avec ce nombre sera moindre que toute quantité donnée.*

En effet, la raison q étant plus grande que 1, les termes de la progression géométrique croîtront au delà de toute limite (22, II, Prob. I, Cor. I) ; ils finiront donc par dépasser a, qui dès lors, s'il n'est pas égal à un terme q^n de la progression, sera compris entre deux termes consécutifs q^n et q^{n+1}, et nous venons de voir que q peut être pris assez voisin de l'unité, pour que la différence de deux termes consécutifs $q^{n+1} - q^n$ soit plus petite que δ, donc a, qui est compris entre ces deux termes, différera de chacun d'eux d'une quantité moindre *à fortiori* que δ.

Remarque. — Nous verrons plus tard que tout nombre, qui ne fait pas partie de la progression géométrique, mais se trouve compris entre deux termes successifs q^n et q^{n+1}, a aussi un logarithme compris entre nr et $(n+1)r$, dont ces deux nombres sont les valeurs approchées par défaut et par excès à moins de r près. Les démonstrations qui précèdent donnent des logarithmes à des valeurs aussi approchées de chaque nombre que l'on voudra, et dans les calculs on peut, sans inconvénient, substituer à un nombre une valeur suffisamment approchée.

II. — Propriétés fondamentales des logarithmes.

1. — THÉORÈME I. — *Le logarithme du produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.*

Je considère le système de logarithmes défini par les deux progressions

$$1,\ q,\ q^2,\ldots\ q^m,\ldots\ q^p,\ldots\ q^{m+p},\ldots$$
$$0,\ r,\ 2r,\ldots\ mr,\ldots\ pr,\ldots\ (m+p)r,\ldots$$

Je dis que le logarithme du produit de deux nombres q^m et q^p est égal à la somme de leurs logarithmes.

Je pose pour abréger

$$a = q^m \quad \text{et} \quad b = q^p,$$

d'où

$$ab = q^m \times q^p = q^{m+p}.$$

Le logarithme de a est mr, celui de b est pr, et celui de ab est $(m+p)r$; ce dernier est évidemment la somme des deux précédents,

$$(m+p)r = mr + pr;$$

donc

$$\log.\ ab = \log.\ a + \log.\ b.$$

COROLLAIRE. — *Le logarithme du produit de plusieurs nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.*

Soient, par exemple, cinq nombres quelconques a, b, c, d, e, nous pouvons regarder, pour un instant, les quatre premiers comme ne formant qu'un seul facteur, et nous aurons par le théorème précédent

$$\log.\ (abcd) \times e = \log.\ abcd + \log.\ e,$$

de même

$$\log.\ (abc) \times d = \log.\ abc + \log.\ d,$$
$$\log.\ (ab) \times c = \log.\ ab + \log.\ c.$$

et, enfin,

$$\log.\ ab = \log.\ a + \log.\ b.$$

Si nous ajoutons ces égalités membre à membre, en supprimant les quantités log. $abcd$, log. abc, log. ab, qui sont communes aux deux membres de la nouvelle égalité, nous aurons

$$\log. abcde = \log. a + \log. b + \log. c + \log. d + \log. e;$$

ce qui démontre le corollaire énoncé.

THÉORÈME II. — *Le logarithme du quotient de la division de deux nombres est égal à l'excès du logarithme du dividende sur celui du diviseur.*

Soient a et b deux nombres quelconques ; nous désignerons par q le quotient de la division de a par b,

$$\frac{a}{b} = q,$$

d'où

$$a = bq,$$

et, en prenant les logarithmes des deux membres qui sont égaux, nous aurons

$$\log. a = \log. b + \log. q,$$

d'où

$$\log. q \text{ ou } \log \frac{a}{b} = \log. a - \log. b.$$

THÉORÈME III. — *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit du logarithme de ce nombre par le degré de la puissance.*

Soit la cinquième puissance de a, c'est un produit de 5 facteurs égaux à a,

$$a^5 = a \times a \times a \times a \times a;$$

donc, en appliquant le théorème I, nous aurons

$$\log. a^5 = \log. a + \log. a + \log. a + \log. a + \log. a,$$

ou

$$\log. a^5 = 5 \log. a.$$

Généralement

$$\log. a^m = m \log. a.$$

THÉORÈME IV. — *Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au quotient de la division du logarithme de ce nombre par l'indice de la racine.*

Soit la racine $n^{\text{ième}}$ de a, et désignons-la par b, on a par définition

$$b^n = a,$$

prenons les logarithmes des deux membres, en appliquant le théorème précédent, nous aurons

$$n \log. b = \log. a,$$

d'où

$$\log. b = \frac{\log. a}{n},$$

ou,

$$\log. \sqrt[n]{a} = \frac{\log. a}{n}.$$

2. — Utilité des logarithmes. — L'emploi des logarithmes abrége les calculs numériques, lorsque l'on a une table donnant le logarithme d'un nombre connu, et réciproquement le nombre correspondant à un logarithme connu.

1° Soit à multiplier deux nombres a et b ; on cherchera dans la table leurs logarithmes, en faisant la somme de ces logarithmes on aura le logarithme du produit, et, en cherchant dans la table le nombre qui correspond à ce logarithme, on aura le produit ab cherché.

2° Soit à diviser a par b ; on cherche dans la table leurs logarithmes, en retranchant du logarithme du dividende celui du diviseur on a le logarithme du quotient, et, en cherchant dans la table le nombre correspondant à ce logarithme, on a le quotient cherché $\frac{a}{b}$.

3° Soit à élever a à la puissance m; on cherche le logarithme de a, on le multiplie par m, on a ainsi le logarithme de a^m, et, en cherchant dans la table le nombre qui correspond à ce logarithme, on a la puissance m cherchée.

4° Soit à extraire la racine $m^{\text{ième}}$ de a ; on cherche le logarithme de a, on le divise par m, on a ainsi le logarithme de $\sqrt[m]{a}$, et, en cherchant dans la table le nombre qui correspond à ce logarithme, on a la racine $m^{\text{ième}}$ cherchée.

Ainsi, l'emploi des logarithmes permet de substituer l'*addition* à la *multiplication*, la *soustraction* à la *division*, la *multiplication* à la *formation des puissances*, et la *division* à l'*extraction des racines :* de sorte que les six opérations de l'arithmétique se trouvent réduites aux quatre premières qui sont les plus simples.

L'emploi des logarithmes permet encore de résoudre dans certains cas les *équations exponentielles*, dont nous avons déjà parlé (page 331).

Soit l'équation exponentielle

$$a^x = b;$$

prenons les logarithmes des deux membres, nous aurons

$$x \log. a = \log. b,$$

d'où

$$x = \frac{\log. b}{\log. a}.$$

Soit encore l'équation exponentielle

$$3 \times 2^{2x} - 80 \times 2^x - 512 = 0;$$

j'en tire

$$2^x = \frac{40 \pm \sqrt{3136}}{3}.$$

La racine positive 32 est seule admissible, j'ai donc

$$2^x = 32,$$

d'où je tire, comme précédemment,

$$x = \frac{\log. 32}{\log. 2}.$$

3. — Formules calculables par logarithmes. — Comme il n'y a pas de théorème sur le logarithme d'une somme ou d'une différence, on ne peut pas appliquer les logarithmes au calcul d'une somme, ni d'une différence, ni plus généralement d'un polynôme. On dit qu'une formule polynôme n'est pas *calculable par logarithmes*; au contraire, une formule monôme est dite *calculable par logarithmes*, ou autrement *logarithmique*. Cependant, une formule polynôme est considérée comme logarithmique, quand les signes + et — ne réunissent que des nombres entiers ou décimaux, que l'on peut immédiatement ajouter et soustraire; $(3,57 + 5,974)\sqrt[3]{7}$ est logarithmique, $\sqrt[3]{7} + \sqrt[2]{3}$ ne l'est pas.

4. — Calcul du logarithme d'une formule monôme ou logarithmique.

Soit la formule

$$r = \sqrt[4]{\frac{a^3b^2}{c\sqrt{d^3f}}}.$$

Nous aurons (Th. IV),

$$\log. r = \frac{\log. \dfrac{a^3b^2}{c\sqrt{d^3f}}}{4},$$

d'où (Th. II),

$$\log. r = \frac{\log. a^3b^2 - \log. c\sqrt{d^3f}}{4},$$

d'où (Th. I),

$$\log. r = \frac{\log. a^3 + \log. b^2 - \log. c - \log. \sqrt{d^3f}}{4}.$$

d'où (Th. IV),

$$\log. r = \frac{\log. a^3 + \log. b^2 - \log. c - \dfrac{\log. d^3f}{2}}{4},$$

d'où (Th. I et III),

$$\log. r = \frac{3\log. a + 2\log. b - \log. c - \dfrac{3\log. d + \log. f}{2}}{4},$$

d'où enfin,

$$\log. r = \frac{6\log. a + 4\log. b - 2\log. c - 3\log. d - \log. f}{8};$$

ce qui représente le logarithme de

$$\sqrt[8]{\frac{a^6b^4}{c^2d^3f}},$$

et montre que cette formule équivaut à la proposée.

5. — Emploi des logarithmes pour retrouver certains théorèmes.

Soit à chercher la règle pour extraire la racine $p^{\text{ième}}$ de la puissance n d'un nombre a.

Nous avons successivement

$$\log.\sqrt[p]{a^n} = \frac{\log.\,a^n}{p},$$

$$\log.\,a^n = n\log.\,a,$$

donc

$$\log.\sqrt[p]{a^n} = \frac{n}{p}\log.\,a,$$

et, comme le second membre est le logarithme de $a^{\frac{n}{p}}$,

$$\log.\sqrt[p]{a^n} = \log.\,a^{\frac{n}{p}},$$

donc

$$\sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{n}{p}}.$$

On arrive de la même manière à trouver la règle pour multiplier des radicaux en les réduisant au même indice ; en effet

$$\log.\sqrt[m]{a}\times\sqrt[p]{b} = \frac{\log.\,a}{m} + \frac{\log.\,b}{p} = \frac{p\log.\,a + m\log.\,b}{mp},$$

donc

$$\log.\sqrt[m]{a}\times\sqrt[p]{b} = \frac{\log.\,a^p + \log.\,b^m}{mp} = \frac{\log.\,a^p\times b^m}{mp},$$

donc enfin

$$\log.\sqrt[m]{a}\times\sqrt[p]{b} = \log.\sqrt[mp]{a^p\times b^m},$$

d'où

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[p]{b} = \sqrt[mp]{a^p\times b^m}.$$

6. — Définition du logarithme d'un nombre qui ne fait pas partie de la progression géométrique.

THÉORÈME V. — *Une progression géométrique croissante étant donnée, on peut insérer entre ses termes un nombre assez grand de moyens géométriques, pour que ces moyens croissent par degrés aussi rapprochés que l'on voudra.*

Soit la progression géométrique croissante

$$1, q, q^2, q^3, \ldots$$

si on insère entre ses termes successifs $n-1$ moyens géométriques, on obtient une progression nouvelle dont la raison est $\sqrt[n]{q}$. Pour prouver que les termes de cette progression nouvelle croîtront par degrés aussi rapprochés que l'on voudra, il suffit (I, 2) de prouver qu'on peut prendre n assez grand pour que la raison $\sqrt[n]{q}$ surpasse l'unité d'une quantité δ aussi petite que l'on voudra. Je dis donc qu'on peut déterminer n de manière qu'on ait

$$\sqrt[n]{q} < 1 + \delta,$$

ou

$$q < (1+\delta)^n.$$

En effet nous avons vu (22, II) qu'un terme quelconque de la progression géométrique dont les deux premiers termes sont 1 et $1+\delta$ est plus grand que le terme qui occupe le même rang dans la progression arithmétique qui commence par les mêmes termes, on a donc

$$(1+\delta)^n > 1 + n\delta$$

il suffit donc de déterminer n de manière qu'il satisfasse à l'inégalité du premier degré

$$1 + n\delta > q,$$

pour que $(1+\delta)^n$, qui est plus grand que $1+n\delta$, surpasse *à fortiori* q, l'inégalité du premier degré donne

$$n > \frac{q-1}{\delta};$$

donc en donnant à n une valeur entière plus grande que $\frac{q-1}{\delta}$, on satisfait à la première inégalité, ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire I. — Considérons le système de logarithmes défini par les deux progressions

$$(1) \quad \begin{cases} 1, q, q^2, \ldots & q^m, \ldots \\ 0, r, 2r, \ldots & mr, \ldots \end{cases}$$

Si nous insérons $n-1$ moyens géométriques entre les termes successifs de la première et autant de moyens arithmétiques entre les termes de la seconde, nous aurons deux progressions nouvelles, ayant pour raisons $\sqrt[n]{q}$ et $\frac{r}{n}$, qui formeront un système de logarithmes, embrassant davantage de nombres,

$$(2)\ \begin{cases} 1, \sqrt[n]{q}, \sqrt[n]{q^2}, \ldots q, q\sqrt[n]{q}, q\sqrt[n]{q^2}, \ldots q^2, q^2\sqrt[n]{q}, \ldots q^m \ldots \\ 0, \frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \ldots r, r+\frac{r}{n}, r+\frac{2r}{n}, \ldots 2r, 2r+\frac{r}{n}, \ldots mr \ldots \end{cases}$$

Ce système n'est qu'une extension du précédent, les nombres communs 1, q, q^2, ... q^m, ... y ont les mêmes logarithmes 0, r, $2r$, ... mr ...

Corollaire II. — Considérons un nombre a, qui ne fait pas partie de la progression géométrique du système (1), mais qui est compris entre deux termes consécutifs q^m et q^{m+1} dont les logarithmes sont mr et $(m+1)r$, insérons entre les termes successifs de chacune des deux progressions $n-1$ moyens, de manière à obtenir les progressions du système (2), dont les raisons sont $\sqrt[n]{q}$ et $\frac{r}{n}$, que nous désignerons par q' et r', si le nombre a est égal à un terme $q'^{m'}$ de la nouvelle progression géométrique, il a pour logarithme $m'r'$, sinon il sera compris entre deux termes consécutifs $q'^{m'}$ et $q'^{m'+1}$ dont les logarithmes sont $m'r'$ et $(m'+1)r'$; insérons $n'-1$ moyens entre les termes successifs des progressions du système (2), nous aurons deux nouvelles progressions dont les raisons q'' et r'' seront égales à $\sqrt[n']{q'}$ et $\frac{r'}{n'}$, supposons que a soit toujours compris entre deux termes consécutifs de la progression géométrique, les raisons q, q', q'', ... devenant de plus en plus voisines de l'unité, les moyens q^m et q^{m+1}, q'^m et $q'^{m'+1}$, ... qui comprennent a se rapprochent de plus en plus l'un de l'autre, et ont pour limite commune le nombre a, en même temps les raisons r, r', r'', ... diminuent indéfiniment, et les moyens arithmétiques mr et $(m+1)r$, $m'r'$ et $(m'+1)r'$, ... se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre et tendent vers une limite commune, qui est ce qu'on appelle le logarithme de a. Les quantités mr et $(m+1)r$, $m'r'$ et $(m'+1)r'$ sont donc des valeurs approchées de log. a, par défaut et par excès, à moins de r et de r'.

Corollaire III. — Le logarithme d'un nombre qui ne fait pas partie de la progression géométrique du système (1) est le même, quel que soit le nombre des moyens insérés entre les termes successifs des deux progressions. En effet, si nous insérons $n-1$ moyens, nous obtenons le système de progressions (2), si nous en insérons $n'-1$, nous obtenons un troisième système

$$(3)\quad \begin{cases} 1, \sqrt[n']{q}, \sqrt[n']{q^2}, \ldots q, q\sqrt[n']{q}, q\sqrt[n']{q^2}, \ldots q^2, \ldots \\ 0, \dfrac{r}{n'}, \dfrac{2r}{n'}, \ldots r, r+\dfrac{r}{n'}, r+\dfrac{2r}{n'}, \ldots 2r, \ldots; \end{cases}$$

les systèmes de progressions (2) et (3) font partie d'un quatrième système de progressions, que l'on forme en insérant $nn'-1$ moyens entre les termes des progressions du premier système, car ce quatrième système peut s'obtenir en insérant $n'-1$ moyens entre les termes des progressions (2), ou bien en insérant $n-1$ moyens entre les termes des progressions (3) (22, I et II, Prob. II, Cor. II). Si donc un nombre a fait partie des progressions géométriques des systèmes (2) et (3), il fait aussi partie de la progression géométrique du quatrième, et, comme il a, d'après le corollaire I, dans le quatrième système le même logarithme que dans le second et dans le troisième, les logarithmes de a dans le second et le troisième système sont égaux entre eux. Si a ne fait partie d'aucune des progressions géométriques, mais tombe entre deux termes consécutifs de la quatrième, comme elle contient tous les termes de la seconde et de la troisième, a sera aussi compris entre deux termes consécutifs de l'une et de l'autre, le logarithme de a sera compris entre les moyens arithmétiques qui correspondent à ces termes dans les trois systèmes, et qui donneront ses valeurs approchées à moins de $\dfrac{r}{n}$, $\dfrac{r}{n'}$ et $\dfrac{r}{nn'}$. Cette remarque étant vraie quelque grands que soient n et n', les moyens arithmétiques répondant aux nombres qui comprennent a tendent vers la même limite dans les trois systèmes, et cette limite est le logarithme de a.

Corollaire IV. — Le logarithme du produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres, lors même que les nombres ne font pas partie de la progression géométrique.

Soient a et b deux nombres qui ne font pas partie de la progression géométrique du système (1), de sorte que l'on ait

$$q^m < a < q^{m+1}, \quad \text{d'où} \quad mr < \log. a < (m+1)r,$$
$$q^p < b < q^{p+1}, \quad \text{d'où} \quad pr < \log. b < (p+1)r,$$

multiplions membre à membre les inégalités placées à gauche, et ajoutons membre à membre celles de droite, nous aurons les nouvelles inégalités

$$q^{m+p} < ab < q^{m+p+2}, \text{et } (m+p)r < \log. a + \log. b < (m+p+2)r,$$

or d'après la première d'entre elles $\log. ab$ est compris entre $(m+p)r$ et $(m+p+2)r$, et $\log. a + \log. b$ aussi d'après la seconde, ces deux quantités $\log. ab$ et $\log. a + \log. b$, comprises entre les mêmes limites, diffèrent entre elles d'une quantité moindre que la différence $2r$ de ces limites.

En passant du système (1) au système (2) par l'insertion de $n-1$ moyens entre les termes successifs des deux progressions, on démontrerait de même que la différence de $\log. ab$ et $\log. a + \log. b$ est moindre que le double $\frac{2r}{n}$ de la raison de la nouvelle progression arithmétique, cette différence étant moindre que $\frac{2r}{n}$, quelque grand que soit n, est rigoureusement nulle, et l'on a

$$\log. ab = \log. a + \log. b.$$

III. — Des différents systèmes de logarithmes.

1. — Il y a une infinité de systèmes de logarithmes puisque l'on peut prendre arbitrairement les raisons q et r des deux progressions, qui nous ont servi à définir les logarithmes.

THÉORÈME VI. — *Dans deux systèmes de logarithmes donnés, le rapport des deux logarithmes d'un nombre quelconque est constant.*

Soient le système de logarithmes défini par les deux progressions

$$1, q, q^2, q^3, \ldots q^m, \ldots$$
$$0, r, 2r, 3r, \ldots mr, \ldots$$

et celui des deux progressions suivantes

$$1, q, q^2, q^3, \ldots q^m, \ldots$$
$$0, r', 2r' 3r', \ldots mr', \ldots$$

Je désigne par $\log. a$ et $\log'. a$ les logarithmes d'un même nombre a dans les deux systèmes, et je dis que le rapport $\frac{\log. a}{\log'. a}$ est constant.

D'abord, cela est évident si le nombre a fait partie de la progression géométrique commune, ses deux logarithmes sont mr et mr', et l'on a

$$\frac{\log. a}{\log'. a} = \frac{mr}{mr'} = \frac{r}{r'};$$

il en serait de même, si le nombre a faisait de la progression géométrique que l'on obtient en insérant $n-1$ moyens entre les termes successifs de la progression géométrique donnée. Supposons donc que a ne fait pas partie de cette nouvelle progression dont la raison est $\sqrt[n]{q}$, il est compris entre deux moyens consécutifs $\sqrt[n]{q^m}$ et $\sqrt[n]{q^{m+1}}$, donc $\log. a$ est compris entre $\frac{mr}{n}$ et $\frac{(m+1)r}{n}$, et l'on a

$$\frac{m}{n} < \frac{\log. a}{r} < \frac{m+1}{n}.$$

On prouverait de même que $\frac{\log'. a}{r'}$ est compris entre les mêmes limites $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, qui diffèrent entre elles de $\frac{1}{n}$, la différence de $\frac{\log. a}{r}$ et $\frac{\log'. a}{r'}$ est donc moindre que $\frac{1}{n}$, quelque grand que soit n, donc elle est rigoureusement nulle, et on a

$$\frac{\log. a}{r} = \frac{\log'. a}{r'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\log. a}{\log'. a} = \frac{r}{r'}.$$

Remarque I. — De l'égalité

$$\frac{\log. a}{\log'. a} = \frac{r}{r'},$$

on déduit

$$\log'. a = \frac{r'}{r} \log. a,$$

qui montre que *lorsqu'on a un système de logarithmes et qu'on veut en former un autre, il suffit de multiplier tous les logarithmes du premier système par un nombre constant* $\frac{r'}{r}$.

Ce nombre constant est appelé *module* du second système par rapport au premier.

Remarque II. — Pour démontrer le théorème qui précède nous avons supposé que les deux systèmes de logarithmes avaient la même progression géométrique, supposons qu'il en soit autrement, que les deux progressions géométriques aient des raisons différentes, q et q', et que deux de leurs termes soient égaux, par exemple,

$$q^n = q'^{n'}.$$

Insérons $n'-1$ moyens entre les termes successifs des progressions du premier système, et $n-1$ moyens entre les termes des progressions du second système, les raisons des deux progressions géométriques seront $\sqrt[n']{q}$ et $\sqrt[n]{q'}$; or en extrayant les racines nn' des deux membres de l'égalité qui précède, on a

$$\sqrt[n']{q} = \sqrt[n]{q'},$$

et les deux systèmes sont ramenés à avoir la même progression géométrique.

2. — Base d'un système de logarithmes.

On appelle *base d'un système de logarithmes*, le nombre qui a pour logarithme l'*unité*.

Problème I. — *Un système de logarithmes étant défini par deux progressions, trouver la base de ce système.*

Soit le système de logarithmes défini par les deux progressions

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3, \ldots\ q^n \ldots$$
$$0,\ r,\ 2r,\ 3r, \ldots\ nr \ldots$$

Si nous supposons d'abord qu'un terme de la progression arithmétique soit égal à 1, nr par exemple, la base est q^n, et comme n égale $\frac{1}{r}$, puisque nr égale 1, la base est $q^{\frac{1}{r}}$.

Supposons ensuite qu'aucun terme de la progression arithmétique ne soit égal à l'unité. Pour calculer la base, il faut distinguer deux cas : la raison r peut être un nombre entier ou une fraction.

1° Soit r entier et égal à 5 ; insérons entre les termes consécutifs des deux progressions 5 — 1 ou 4 moyens, les raisons nouvelles sont $\sqrt[5]{q}$ et $\frac{r}{5}$, ou $\frac{5}{5}$, ou enfin l'unité, nous avons ainsi un système de logarithmes équivalent au proposé,

$$1, \sqrt[5]{q}, \sqrt[5]{q^2}, \sqrt[5]{q^3}, \sqrt[5]{q^4}, q\dots$$
$$0, 1, 2, 3, 4, 5\dots$$

dont la base est $\sqrt[5]{q}$, ou $q^{\frac{1}{5}}$, ou $q^{\frac{1}{r}}$ (4 et 5, II), puisque ce nombre a pour logarithme l'unité.

2° Soit r fractionnaire et égal à $\frac{4}{7}$; la base est alors comprise entre les nombres q et q^2, dont les logarithmes $\frac{4}{7}$ et $\frac{8}{7}$ comprennent l'unité ; insérons 4 — 1 ou 3 moyens entre les termes consécutifs des deux progressions, les raisons des deux nouvelles progressions seront $\sqrt[4]{q}$, et $\frac{r}{4}$ ou $\frac{4}{7 \times 4}$ ou $\frac{1}{7}$, et nous aurons un système de logarithmes, où les mêmes nombres auront les mêmes logarithmes,

$$1, \sqrt[4]{q}, \sqrt[4]{q^2}, \sqrt[4]{q^3}, q, q\sqrt[4]{q}, q\sqrt[4]{q^2}, q\sqrt[4]{q^3},\dots$$
$$0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, 1,\dots$$

la base cherchée est donc $q\sqrt[4]{q^3}$ ou $\sqrt[4]{q^7}$, ou $q^{\frac{7}{4}}$, c'est-à-dire $q^{\frac{1}{r}}$.

Problème II. — *Étant donnée la base* b *d'un système de logarithmes, trouver les deux progressions qui donnent dans ce système les logarithmes de tous les nombres à moins de* $\frac{1}{\mathrm{h}}$, h *étant entier et* b *plus grand que* 1.

On a les deux progressions

$$1, b, b^2, b^3,\dots$$
$$0, 1, 2, 3,\dots$$

il suffit d'insérer entre les termes successifs de chacune d'elles un nombre $n-1$ de moyens assez grand pour que la raison de la progression arithmétique soit égale ou inférieure à $\frac{1}{h}$. Or la raison de la nouvelle progression arithmétique est $\frac{1}{n}$, pour qu'elle soit égale ou inférieure à $\frac{1}{h}$, il faut que n soit égal ou supérieur à h. La raison de la progression géométrique nouvelle est $\sqrt[n]{b}$; lorsque la quantité h sera très-grande, il faudra, pour calculer les moyens de la nouvelle progression géométrique, extraire de b une racine dont l'indice soit très-grand; or la racine carrée est la seule dont l'extraction soit pratique, lorsqu'on a besoin de beaucoup de chiffres; on extraira de b des racines carrées successives, ce qui donnera (7, I, Th. VII) des racines dont les indices successifs seront $2, 2^2, 2^3, 2^4,\ldots$ on s'arrêtera à la première racine dont l'indice 2^p atteindra ou dépassera h; on pourra alors insérer $2^p - 1$ moyens entre les termes successifs des deux progressions données, et l'on aura les deux nouvelles progressions que l'on cherche.

3. — Logarithmes népériens. — L'invention des logarithmes remonte à l'année 1614. C'est, nous l'avons déjà dit, à un Écossais nommé *Neper* *, qu'on doit cette importante découverte, qui est d'une si grande utilité dans l'astronomie, la navigation, etc., et en général dans toutes les applications des mathématiques.

Les deux progressions qui définissent un système de logarithmes peuvent, en désignant par $1+\alpha$ la raison de la progression géométrique, supposée plus grande que l'unité, se mettre sous la forme

$$\begin{array}{lllll} 1, & 1+\alpha, & (1+\alpha)^2, & (1+\alpha)^3,\ldots. & (1+\alpha)^n,\ldots. \\ 0, & r, & 2r, & 3r,\ldots. & nr,\ldots. \end{array}$$

pour que les termes des deux progressions croissent par degrés insensibles, il faut que α et r soient tous deux infiniment petits, c'est-à-dire tendent simultanément vers zéro, quand, par l'insertion d'un nombre de plus en plus grand de moyens, on fait tendre la raison q de la progression géométrique vers l'unité.

* Jean Neper, baron écossais, né en 1550, à Merchiston, près d'Edimbourg, mort en 1617.

La limite vers laquelle tend alors le rapport $\frac{r}{\alpha}$ de l'accroissement du logarithme à l'accroissement du nombre, quand on part de l'unité, s'appelle le *module absolu* du système de logarithmes ; Neper prit ce module absolu égal à 1, et adopta le système vers lequel tendent les deux progressions

$$\begin{array}{llllll} 1, & 1+r, & (1+r)^2, & (1+r)^3, \ldots & (1+r)^n, \ldots \\ 0, & r, & 2r, & 3r, \ldots & nr, \ldots \end{array}$$

quand la quantité r tend vers zéro.

Pour avoir la base du système népérien, supposons que, r tendant vers zéro, nr tende vers l'unité, et par conséquent $\frac{1}{n}$ vers zéro, la base sera la limite vers laquelle tend le nombre correspondant $(1+r)^n$ ou $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quand r diminue indéfiniment, ou que son inverse n grandit indéfiniment. Cette limite incommensurable est désignée ordinairement par la lettre e, sa valeur est

$$e = 2{,}718281828459\ldots.$$

Les logarithmes népériens sont presque seuls employés dans les recherches scientifiques.

VINGT-CINQUIÈME, VINGT-SIXIÈME ET VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

Programme : Logarithmes dont la base est 10. — Règle des parties proportionnelles. — De la caractéristique. — Changement qu'elle éprouve quand on multiplie ou quand on divise un nombre par une puissance de 10.

I. — Logarithmes décimaux ou vulgaires.

Briggs *, contemporain de Neper, fut frappé des avantages que présenterait, dans les calculs numériques, le système de logarithmes, dont la base 10 est la même que celle de notre système de numération. Ces logarithmes, appelés *logarithmes vulgaires* ou *logarithmes décimaux,* ont avec les logarithmes népériens un rapport constant (23 et 24, III, 1, th. II), appelé module, qui est égal au rapport du logarithme décimal de 10 ou 1 au logarithme népérien de 10. Pour calculer la table des logarithmes décimaux des nombres, il suffit donc de multiplier leurs logarithmes népériens par $\frac{1}{\log 10}$, en désignant par log. 10 le logarithme népérien de 10.

Le système des logarithmes vulgaires ou décimaux est donc défini par les deux progressions

$$\begin{array}{cccc} 1, & 10, & 10^2, & 10^3, \ldots \\ 0, & 1, & 2, & 3, \ldots \end{array}$$

et par toutes celles qu'on en déduit en insérant entre les termes successifs de chacune d'elles un même nombre de moyens.

* Briggs, célèbre mathématicien anglais, né vers 1556 à Warley-Wood (York), mort en 1630.

II. — Propriétés et calcul des logarithmes décimaux.

1. THÉORÈME I. — *Les diverses puissances de* 10 *sont les seuls nombres entiers dont les logarithmes décimaux soient commensurables, et ces logarithmes sont égaux aux exposants des puissances de* 10.

En effet, soit proposé de trouver le nombre qui a pour logarithme le rapport commensurable $\frac{m}{n}$ des deux nombres entiers m et n; j'insère $n-1$ moyens entre les termes consécutifs de chacune des deux progressions précédentes qui deviennent

$$\begin{array}{llllll} 1, & \sqrt[n]{10}, & \sqrt[n]{10^2}, \ldots & \sqrt[n]{10^m}, \ldots \\ 0, & \frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, \ldots & \frac{m}{n}, \ldots \end{array}$$

Or, la fraction $\frac{m}{n}$ est le $(m+1)^{ième}$ terme de la progression arithmétique, donc le terme $\sqrt[n]{10^m}$, qui occupe le même rang dans l'autre progression, est le nombre demandé, que je désigne par x. Je dis maintenant que ce nombre n'est rationnel que pour les valeurs entières du rapport $\frac{m}{n}$.

Pour le démontrer, je remarque qu'on a

$$x = \sqrt[n]{10^m},$$

et, par suite,

$$x^n = 2^m \times 5^m;$$

cette dernière égalité montre que x est un nombre entier dont les facteurs premiers ne sont autres que 2 et 5, de sorte qu'on peut poser

$$x = 2^\alpha \times 5^\beta,$$

α et β étant des nombres entiers positifs. Je remplace ensuite x par cette valeur dans l'égalité précédente, et je trouve

$$2^{\alpha n} \times 5^{\beta n} = 2^m \times 5^m,$$

ce qui exige qu'on ait :

$$\alpha n = \beta n = m,$$

et, par conséquent,

$$\alpha = \beta = \frac{m}{n}.$$

Le rapport $\frac{m}{n}$ est donc un nombre entier, et le nombre x une puissance de 10, $\sqrt[n]{10^m}$ ou $10^{\frac{m}{n}}$, dont le logarithme est égal à son exposant $\frac{m}{n}$; ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Il résulte de ce théorème que les logarithmes vulgaires des nombres entiers, autres que les puissances de 10, sont incommensurables.

2. Calcul des logarithmes décimaux. — Sans entrer dans tous les détails de la construction des tables vulgaires, question réservée au cours d'algèbre supérieure, il est bon de savoir comment on peut trouver par un procédé élémentaire les logarithmes des nombres entiers, d'autant plus que ce procédé est celui qui a été appliqué par Briggs et son continuateur Wlacq.

Problème. — *Trouver le logarithme décimal d'un nombre entier.*

Soit proposé de calculer le logarithme décimal de 5 à un dix-millionième près.

Le nombre 5 étant compris entre 1 et 10, son logarithme est plus grand que zéro, et moindre que l'unité ; pour en approcher davantage, j'insère un moyen géométrique entre 1 et 10, et un moyen arithmétique entre 0 et 1 ; je trouve 3,162277 pour le premier de ces moyens et 0, 5 pour le second. Le nombre 5 est alors compris entre les deux termes 3,162277 et 10 de la progression géométrique, de sorte que son logarithme est plus grand que 0, 5 mais plus petit que 1. J'insère ensuite un moyen géométrique entre 3,162277 et 10, et un moyen arithmétique entre 0, 5 et 1 ; je trouve 5,623413 pour le premier de ces moyens et 0,75 pour le second ; par conséquent le logarithme de 5 est compris entre 0,5 et 0,75. En continuant ainsi les insertions de moyens, je formerai le tableau suivant, qui représente tous les calculs nécessaires pour avoir le logarithme de 5 à un dix-millionième près.

$a = 1{,}000000$,	$\log.\ a = 0{,}0000000$,	soit :
$b = 10{,}000000$,	$\log.\ b = 1{,}0000000$,	$c = \sqrt{ab}$,
$c = 3{,}162277$,	$\log.\ c = 0{,}5000000$,	$d = \sqrt{bc}$,
$d = 5{,}623413$,	$\log.\ d = 0{,}7500000$,	$e = \sqrt{cd}$,
$e = 4{,}216964$,	$\log.\ e = 0{,}6250000$,	$f = \sqrt{de}$,
$f = 4{,}689674$,	$\log.\ f = 0{,}6875000$,	$g = \sqrt{df}$,
$g = 5{,}232991$,	$\log.\ g = 0{,}7187500$,	$h = \sqrt{fg}$,
$h = 5{,}048065$,	$\log.\ h = 0{,}7031250$,	$i = \sqrt{fh}$,
$i = 4{,}958069$,	$\log.\ i = 0{,}6953125$,	$k = \sqrt{hi}$,
$k = 5{,}002865$,	$\log.\ k = 0{,}6992187$,	$l = \sqrt{ik}$,
$l = 4{,}980416$,	$\log.\ l = 0{,}6972656$,	$m = \sqrt{kl}$,
$m = 4{,}991627$,	$\log.\ m = 0{,}6982421$,	$n = \sqrt{km}$,
$n = 4{,}997242$,	$\log.\ n = 0{,}6987304$,	$o = \sqrt{kn}$,
$o = 5{,}000052$,	$\log.\ o = 0{,}6989745$,	$p = \sqrt{no}$,
$p = 4{,}998647$,	$\log.\ p = 0{,}6988525$,	$q = \sqrt{op}$,
$q = 4{,}999350$,	$\log.\ q = 0{,}6989135$,	$r = \sqrt{oq}$.

Comme la différence des deux nombres o et q est moindre que 0,001, on peut remplacer leur moyenne géométrique $\sqrt{oq}$ par leur moyenne arithmétique $\frac{o+q}{2}$ qui n'en diffère qu'au delà de la sixième décimale *. En opérant de même pour les

* En effet, on a

$$\frac{o+q}{2} - \sqrt{oq} = \frac{o+q-2\sqrt{oq}}{2} = \frac{(\sqrt{o}-\sqrt{q})^2}{2};$$

en multipliant les deux termes du second membre par $(\sqrt{o}+\sqrt{q})^2$, on en déduit

$$\frac{o+q}{2} - \sqrt{oq} = \frac{(o-q)^2}{2(\sqrt{o}+\sqrt{q})^2}.$$

Mais, on a par hypothèse

$$o - q < \frac{1}{10^3};$$

par conséquent, l'équation précédente donne

$$\frac{o+q}{2} - \sqrt{oq} < \frac{1}{10^6 \times 2(\sqrt{o}+\sqrt{q})^2}$$

termes suivants, on réduit le calcul à prendre des moyennes arithmétiques, et l'on trouve :

$$r = 4{,}999701,\quad \log.\ r = 0{,}6989440,\quad s = \frac{o+r}{2},$$

$$s = 4{,}999876,\quad \log.\ s = 0{,}6989592,\quad t = \frac{o+s}{2},$$

$$t = 4{,}999964,\quad \log.\ t = 0{,}6989668,\quad u = \frac{o+t}{2},$$

$$u = 5{,}000008,\quad \log.\ u = 0{,}6989706,\quad v = \frac{t+u}{2},$$

$$v = 4{,}999986,\quad \log.\ v = 0{,}6989687,\quad x = \frac{u+v}{2},$$

$$x = 4{,}999997,\quad \log.\ x = 0{,}6989696,\quad y = \frac{u+x}{2},$$

$$y = 5{,}000002,\quad \log.\ y = 0{,}6989701,\quad z = \frac{x+y}{2},$$

$$z = 4{,}999999,\quad \log.\ z = 0{,}6989699.$$

Le nombre 5 étant compris entre les deux moyens y et z, son logarithme est plus petit que 0,6989701 et plus grand que 0,6989699 ; en prenant 0,6989700 pour ce logarithme on commettra donc une erreur moindre qu'un dix-millionième. C'est de cette manière que Briggs et Wlacq ont calculé la table des logarithmes décimaux ; mais on a trouvé depuis cette époque des méthodes plus expéditives.

Remarque I. — On peut abréger considérablement le calcul qui précède et s'arrêter au terme r. En effet, si on calcule la différence des deux moyens géométriques o et r, et celle des deux moyens o et q, on trouve que l'une est le double de l'autre et qu'il y a la même relation entre les différences des logarithmes de ces trois nombres ; on est dès lors conduit à admettre que les accroissements de ces nombres, si peu différents les uns des autres, sont proportionnels à ceux de leurs logarithmes. D'après ce principe, on calcule le logarithme de 5 par la règle de trois suivante :

et, *à fortiori*,

$$\frac{o+q}{2} - \sqrt{oq} < \frac{1}{2.10^6}$$

puisque les nombres o et q sont plus grands que l'unité.

Lorsque le moyen géométrique r, ou 4,999701, devient égal au moyen o, ou 5,000052, c'est-à-dire lorsqu'il croît de 0,000351, son logarithme 0,6989440 augmente de 0,0000305 ; quelle sera l'augmentation de ce logarithme, lorsque le moyen r deviendra égal à 5, c'est-à-dire lorsqu'il croîtra de 0,000299 ? On a par suite :

$$\log. 5 = 0{,}6989440 + \frac{0{,}0000305 \times 299}{351}.$$

ou

$$\log. 5 = 0{,}6989440 + 0{,}0000260$$

et, enfin,

$$\log. 5 = 0{,}6989700 ;$$

résultat identique à celui qu'on vient de trouver.

Remarque II. — Pour former une table complète des logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à une certaine limite, il suffit de calculer les logarithmes des nombres entiers, car tout nombre fractionnaire, ordinaire ou décimal, peut être mis sous la forme $\frac{a}{b}$, a et b étant entiers, et son logarithme est, en supposant a plus grand que b, égal à log. a — log. b. Il suffit même de calculer les logarithmes des nombres premiers par la méthode qui précède, car tout nombre non premier est décomposable en facteurs premiers, et son logarithme sera la somme des logarithmes de ces facteurs premiers.

Les tables les plus étendues contiennent les logarithmes décimaux des nombres depuis l'unité jusqu'à 108000. Briggs a calculé avec quatorze décimales ceux des nombres depuis 1 jusqu'à 20000 et depuis 90000 jusqu'à 100000 ; Wlacq a rempli la lacune qu'avait laissée Briggs, en calculant avec dix décimales les logarithmes des nombres depuis 10000 jusqu'à 90000 ; enfin, Callet a continué la table de Briggs et Wlacq jusqu'à 108000, qui est le nombre de secondes contenu dans un arc de 30 degrés.

3. — Propriétés des logarithmes décimaux.

On appelle *caractéristique* la partie entière de chaque logarithme décimal. Le théorème suivant donne un moyen de la calculer *a priori*.

Théorème II. — *La caractéristique du logarithme décima* *d'un nombre contient autant d'unités qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre moins un.*

En effet, soit N un nombre dont la partie entière a $m+1$ chiffres; ce nombre est compris entre 10^m qui est le plus petit nombre de $m+1$ chiffres, et 10^{m+1} qui est le plus petit nombre de $m+2$ chiffres. Son logarithme est donc plus grand que m et plus petit que $m+1$; par conséquent, sa caractéristique est égale à m.

Ainsi la caractéristique du logarithme de 15648 est égale à 4, et celle du logarithme de 254,756 égale à 2. Réciproquement, si la caractéristique d'un logarithme est égale à 5, la partie entière du nombre correspondant contient 6 chiffres, c'est-à-dire que le chiffre des plus hautes unités de ce nombre exprime des centaines de mille. C'est pour rappeler cette dépendance remarquable de la partie entière du logarithme d'un nombre et du rang des plus hautes unités de ce nombre, qu'on a donné le nom de *caractéristique* à la partie entière du logarithme; la partie décimale est quelquefois désignée par le nom de *mantisse.*

THÉORÈME III. — *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise un nombre par une puissance de* 10, *la caractéristique du logarithme de ce nombre est augmentée ou diminuée d'un nombre d'unités égal à l'exposant de la puissance, et la partie décimale n'est pas changée.*

En effet, soient N un nombre et 10^m une puissance quelconque de 10; comme le logarithme de cette puissance est égal à l'exposant m, si on multiplie N par 10^m, on a

$$\log. N \times 10^m = \log. N + \log. 10^m = \log. N + m.$$

En divisant, au contraire, le nombre N par 10^m, on trouve

$$\log. \frac{N}{10^m} = \log. N - \log. 10^m = \log. N - m;$$

ce qui démontre le théorème énoncé, car, pour augmenter ou diminuer le logarithme de N du nombre entier m, il faut augmenter ou diminuer sa caractéristique de m unités, sans changer la partie décimale.

REMARQUE. — Il résulte de ce théorème que si deux nombres décimaux sont composés des mêmes chiffres, disposés dans le même ordre, et ne diffèrent que par la position de la virgule, leurs logarithmes ont la même partie décimale et ne diffèrent que par la caractéristique.

III. — Disposition et usage des tables.

1. — Tables de Lalande *.

L'astronome français de Lalande a construit des tables de logarithmes qui contiennent les logarithmes des 10000 premiers nombres entiers avec cinq décimales. Voici leur disposition : chaque page est divisée en 9 colonnes verticales ; la première de ces colonnes, en commençant par la gauche, la quatrième et la septième sont intitulées *nomb.* et renferment les nombres entiers placés les uns sous les autres, depuis 1 jusqu'à 10000 ; la seconde, la cinquième et la huitième, qui sont à la droite des précédentes, contiennent les logarithmes des nombres, avec cinq chiffres décimaux, et l'on trouve dans les trois autres colonnes, intitulées D, les différences des logarithmes consécutifs exprimées en cent-millièmes à partir du logarithme de 990.

En parcourant ces tables, on voit que les différences D diminuent à mesure que les nombres entiers croissent. Ce résultat pouvait être prévu ; car, en désignant par n et $n+1$ deux nombres entiers consécutifs, on a

$$\log.(n+1)-\log.n=\log.\left(\frac{n+1}{n}\right)=\log.\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or, si le nombre n croît, le nombre $1+\frac{1}{n}$ diminue, donc

$\log.\left(1+\frac{1}{n}\right)$, ou $\log.(n+1)-\log.n$, diminue aussi.

Pour faire un calcul quelconque par logarithmes, il faut savoir trouver, au moyen des tables, le logarithme d'un nombre donné et, réciproquement, le nombre qui a un logarithme donné. Je vais résoudre ces deux problèmes.

PROBLÈME I. — *Un nombre quelconque, plus grand que l'unité, étant donné, trouver son logarithme au moyen des tables.*

* Lalande, célèbre astronome français, né en 1732 à Bourg en Bresse, mort en 1807.

Les tables contenant les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10000, la question proposée revient à trouver le logarithme d'un nombre fractionnaire compris dans les mêmes limites, et celui d'un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, plus grand que 10000.

Je considère : 1° le nombre 5475,352, qui est compris entre 1000 et 10000, c'est-à-dire dans cette partie des tables qui contient les différences des logarithmes consécutifs, et je cherche le logarithme du nombre entier 5475 ; je le trouve égal à 3,73838. Je calcule la fraction dont il faut augmenter ce logarithme pour avoir celui du nombre fractionnaire 5475,352, en remarquant : 1° que la différence des logarithmes des deux entiers consécutifs 5475, 5476, qui comprennent entre eux le nombre fractionnaire proposé, est égale à 0,00008 ; 2° que les différences des 90 logarithmes contenus dans la même page sont sensiblement constantes et égales à 0,00008, donc à un accroissement du nombre 2 ou 3 fois plus grand répond un accroissement 2 ou 3 fois plus grand du logarithme, dans une même page les accroissements des nombres sont proportionnels sensiblement aux accroissements des logarithmes ; je puis donc admettre, *a fortiori*, que dans l'intervalle de 5475 à 5476, *les accroissements des nombres sont sensiblement proportionnels aux accroissements de leurs logarithmes.* L'application de ce principe me conduit à résoudre la règle de trois simple dont voici l'énoncé :

Si le nombre 5475 augmente de 1, son logarithme 3,73838 croît de 0,00008 ; quel est l'accroissement de ce logarithme, lorsque le nombre 5475 n'augmente que de 0,352 ?

En désignant cet accroissement inconnu par x, j'ai l'égalité

$$\frac{x}{0,00008}=\frac{0,352}{1},$$

de laquelle je déduis

$$x=0,00008\times 0,352.$$

Comme les logarithmes des tables n'ont que cinq chiffres décimaux, j'évalue le produit précédent à un cent-millième près, et je trouve :

$$x=0,00003\,;$$

ce qui donne :

$$\log.\ 5475,352=3,73838+0,00003=3,73841.$$

Il résulte évidemment du calcul précédent que *lorsqu'un nombre entier* N, *compris entre* 1000 *et* 10000, *croît d'une certaine fraction* δ, *son logarithme augmente du produit* $D\delta$, D *étant la différence des logarithmes des deux nombres entiers consécutifs* N *et* $N+1$, *donnée par les tables.*

2° Si le nombre donné n'est pas compris entre 1000 et 10000, pour calculer son logarithme, je remarque : 1° que la caractéristique est connue d'après le théorème II de la page 357 ; 2° qu'on ne change pas la partie décimale de ce logarithme lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le nombre donné par une puissance quelconque de 10 (page 389, th. III) ; par conséquent, si je ramène ce nombre à être compris entre 1000 et 10000, en le multipliant ou le divisant par une puissance convenable de 10, et que je cherche ensuite la partie décimale du logarithme du nombre, ainsi transformé, j'aurai celle du logarithme demandé.

Exemple I. — Trouver le logarithme de 125,756. La caractéristique de ce logarithme est égale à 2 ; pour avoir sa partie décimale, je multiplie le nombre 125,756 par 10, et je cherche le logarithme du produit 1257,56 qui est compris entre 1000 et 10000 ; je trouve d'après la méthode précédente :

$$\log.\ 1257{,}56 = 3{,}09953\ ;$$

par conséquent, j'ai

$$\log.\ 125{,}756 = 2{,}09953.$$

Exemple II. — Trouver le logarithme de 374256,73.

La caractéristique de ce logarithme est égale à 5; pour avoir la partie décimale, je divise le nombre 374256,73 par 100, et je cherche le logarithme du quotient 3742,5673 qui est compris entre 1000 et 10000. Je trouve :

$$\log.\ 3742{,}5673 = 3{,}57317,$$

et j'ai, par suite,

$$\log.\ 374256{,}73 = 5{,}57317.$$

Remarque. — Si le nombre donné est composé d'un nombre entier et d'une fraction ordinaire, on convertira la fraction ordinaire en fraction décimale et l'on sera ramené à prendre le logarithme d'un nombre décimal ; on peut aussi réduire le nombre entier et la fraction ordinaire en une seule expression fractionnaire de la forme $\frac{a}{b}$, a étant plus grand que b, et calculer le logarithme du quotient $\frac{a}{b}$, en prenant la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.

PROBLÈME II. — *Un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant au moyen des tables.*

Je suppose 1° que la caractéristique du logarithme donné soit égale à 3, c'est-à-dire que le nombre x cherché soit compris entre 1000 et 10000 ; et je prends, par exemple,

$$\log. x = 3,18676.$$

Pour trouver le nombre inconnu x, je cherche entre quels logarithmes des tables son logarithme est compris, c'est entre 3,18667 et 3,18696, qui sont les logarithmes de 1537 et 1538; x est donc compris entre ces deux nombres, et se compose de 1537 unités plus une fraction qu'il s'agit d'évaluer. Pour cela, je prends la différence 0,00029 des logarithmes de 1537 et 1538, puis celle des deux nombres 1537 et x, qui est égale à 0,00009, et en admettant la proportionnalité des accroissements des nombres aux accroissements des logarithmes, j'ai à résoudre la règle de trois simple suivante :

Lorsque le logarithme de 1537 croît de 0,00029, le nombre 1537 augmente de 1 ; quelle est l'augmentation de ce nombre lorsque son logarithme croît de 0,00009?

En désignant par y cette augmentation, j'ai

$$\frac{y}{1} = \frac{0,00009}{0,00029} = \frac{9}{29} = 0,31,$$

donc

$$x = 1537 + 0,31 = 1537,31.$$

Pour déterminer l'approximation avec laquelle le nombre 1537,31 représente la valeur de x, je remarque que le logarithme lu dans la table est calculé à moins d'un demi-cent-millième, or une variation de 29 cent-millièmes dans le logarithme produit une variation d'une unité dans le nombre, une variation d'un cent-millième dans le logarithme produit une variation de $\frac{1}{29}$ dans le nombre, et par suite un demi-cent-millième d'erreur sur le logarithme produirait une erreur de

$\frac{1}{29 \times 2}$ ou 0,017 dans le nombre; le nombre 1537,31 est affecté de trois erreurs: la première moindre que 0,01, puisque nous avons calculé $\frac{9}{29}$ à moins de 0,01, la seconde qui résulte de l'inexactitude du logarithme 3,18667 lu dans la table, et que nous venons de trouver moindre que 0,02, enfin une troisième erreur, résultant de ce que les accroissements des nombres ne sont pas exactement proportionnels aux accroissements des logarithmes, est généralement négligeable. Le nombre 1537,31 représente donc la valeur de x à moins de 0,03.

Nous avons dans ce raisonnement supposé log. x connu exactement; le plus souvent log. x est le résultat de l'addition de n logarithmes trouvés dans les tables, il peut donc être fautif de n demi-cent-millièmes, erreur qui ajoutée à celle du logarithme 3,18667 qui en approche le plus par défaut, peut donner $n+1$ demi-cent-millièmes d'erreur sur le logarithme et $\frac{n+1}{29 \times 2}$ d'erreur sur le nombre.

Il résulte du calcul précédent que, *lorsque le logarithme d'un nombre entier* N, *plus grand que* 1000, *croît d'une fraction* δ *moindre que la différence tabulaire* D, *qui existe entre ce logarithme et celui du nombre entier suivant* $\mathrm{N}+1$, *le nombre* N *augmente de* $\frac{\delta}{\mathrm{D}}$, *et l'erreur commise est moindre que* $\frac{1}{\mathrm{D}}$. En effet la seconde erreur est moindre que $\frac{1}{2\mathrm{D}}$, la première $\frac{1}{100}$ est moindre aussi que $\frac{1}{2\mathrm{D}}$, puisque de 1000 à 10000, D ne dépasse pas 44, leur somme est donc moindre que $\frac{1}{\mathrm{D}}$.

2° Si la caractéristique du logarithme donné n'est pas égale à 3, je la rends égale à ce nombre en l'augmentant ou la diminuant d'un nombre convenable d'unités, selon qu'elle est plus petite ou plus grande que 3, je cherche ensuite le nombre correspondant au nouveau logarithme. Ce nombre et celui qu'il s'agit de trouver sont composés des mêmes chiffres, disposés dans le même ordre, puisque leurs logarithmes ont la même partie décimale (page 389, théor. III); par conséquent, pour avoir le second de ces deux nombres, il suffit de déplacer la virgule décimale du premier, de manière que le nombre des chiffres de sa partie entière surpasse d'une unité la caractéristique du logarithme donné.

Premier exemple. — Trouver le nombre dont le logarithme est égal à 1,95758.

J'augmente la caractéristique de 2 unités, et je cherche le nombre qui a 3,95758 pour logarithme. Ce nombre est 9069,4 à 0,2 près ; par conséquent, le nombre correspondant au logarithme donné 1,95758 égale 90,694, à moins de 0,002.

Deuxième exemple. — Trouver le nombre dont le logarithme est égal à 5,04269.

Je diminue la caractéristique de 2 unités, et je cherche le nombre qui a 3,04269 pour logarithme. Ce nombre est 1103,28 à 0,025 près ; par conséquent, le nombre qui correspond au logarithme donné 5,04269 égale 110328 à moins de 2,5.

Troisième exemple. — Quel est le nombre dont le logarithme égale 8,53409 ?

Je diminue la caractéristique de 5 unités, et je cherche le nombre correspondant au logarithme 3,53409. Ce nombre est 3420,5 à $\frac{1}{12}$ près ; par conséquent, le nombre qui correspond au logarithme donné 8,53409 égale 342050000, à moins de $\frac{100000}{12}$ ou 8333 unités.

Remarque. — La résolution des deux problèmes précédents repose sur le principe de la proportionnalité des petits accroissements d'un nombre et des accroissements correspondants de son logarithme. On peut facilement reconnaître que ce principe, évidemment applicable aux nombres compris entre 1000 et 10000 lorsqu'on se sert des tables de de Lalande, n'est pas rigoureusement vrai.

En effet, soient n, $n+h$, $n+2h$, trois nombres en progression arithmétique, je dis que leurs logarithmes ne croissent pas par quantités égales : on a

$$\log.(n+h)-\log. n=\log.\left(\frac{n+h}{n}\right)=\log.\left(1+\frac{h}{n}\right)$$

et

$$\log.\,(n+2h)-\log.\,(n+h)=\log.\left(\frac{n+2h}{n+h}\right)=\log.\left(1+\frac{h}{n+h}\right).$$

Or le nombre $1+\dfrac{h}{n+h}$ est plus petit que le nombre $1+\dfrac{h}{n}$, donc $\log.\left(1+\dfrac{h}{n+h}\right)$ est plus petit que $\log.\left(1+\dfrac{h}{n}\right)$; ainsi, lorsque l'accroissement du nombre n devient le double de ce qu'il était, celui de son logarithme est plus petit que le double de sa valeur primitive. Il en résulte qu'en calculant le logarithme d'un nombre au moyen de ce principe, précédemment énoncé, on obtient un logarithme un peu trop petit, et qu'en cherchant, au contraire, le nombre qui correspond à un logarithme donné, on trouve un nombre un peu trop grand.

Cette proportionnalité des accroissements des logarithmes aux accroissements des nombres est d'autant plus près d'être exacte, que $\dfrac{h}{n}$ s'approche davantage d'être égal à $\dfrac{h}{n+h}$, ou que leur rapport $\dfrac{n+h}{n}$ s'approche davantage de l'unité, ou enfin que h est plus petit et n plus grand.

2. — Tables de Dupuis.

Les tables de logarithmes, connues sous le nom de *Tables de Dupuis*, sont plus usitées que les précédentes ; elles font connaître les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 100000, avec 7 chiffres décimaux. On peut les considérer comme formées de deux tables distinctes : la première contient les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 1000 ; on trouve dans la seconde les logarithmes des nombres entiers depuis 1000 jusqu'à 100000. Comme on connaît, d'après le théorème II (page 357) la caractéristique du logarithme d'un nombre quelconque, à l'inspection de ce nombre, les tables de Dupuis ne contiennent aucune caractéristique.

Pour étudier la partie qui va de 1000 à 100000 qui sert le plus souvent, j'en copie cinq lignes prises au bas de la page 46.

II. — Logarithmes des nombres de 1 à 100000. — 43e tableau.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff et p.p.
3140	9296	9435	9573	9711	9850	9988	* 0126	* 0265	* 0403	* 0541	138
1	4970679	0818	0956	1094	1232	1371	1509	1647	1785	1924	1 13,8 2 27,6
2	2062	2200	2338	2476	2615	2753	2891	3029	3167	3306	3 41,4 4 55,2
3	3444	3582	3720	3858	3996	4135	4273	4411	4549	4687	5 69,0 6 82,8
4	4825	4964	5102	5240	5378	5516	5654	5792	5930	6068	7 96,6 8 110,4 9 124,2
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

La colonne N contient la suite naturelle des nombres depuis 1000 jusqu'à 9999, on n'a inscrit les trois premiers chiffres de ces nombres que de dix en dix, c'est-à-dire quand le troisième change. La colonne O contient les sept premières décimales des logarithmes de ces nombres, la dernière étant calculée par excès ou par défaut à moins d'une demi-unité près, les trois premières, qui seraient les mêmes pour un grand nombre de lignes, ne se répètent pas à chaque ligne devant les quatre dernières, on ne les inscrit que lorsque la troisième change ; ainsi, dans notre extrait, il faut sous-entendre les décimales 497 devant les quatre décimales des lignes inférieures, et 496 devant celles de la ligne supérieure.

Si, à la droite des cinq chiffres contenus dans la colonne N, on place un zéro, on aura les nombres de dix en dix depuis 10000 jusqu'à 99990, et la colonne O donnera les sept décimales de leurs logarithmes, qui sont les mêmes que celles des nombres de la colonne N (page 358, Th. III), ainsi les logarithmes 3140 et 31400 ont la même partie décimale 4969296 ; ceux de 3141 et 31410 ont pour partie décimale 4970679, pour trouver les logarithmes des nombres compris entre 31400 et 31410, on a recours aux colonnes marquées 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Elles contiennent les quatre dernières décimales des logarithmes des nombres que l'on obtient, en écrivant à droite des nombres de la colonne N les nombres qui sont en tête de ces colonnes, les trois premières décimales sont les nombres isolés de trois chiffres que l'on rencontre à gauche dans la colonne zéro, les plus proches en remontant, à moins que l'ensemble des quatre dernières décimales ne soit précédé d'une astérisque, on doit prendre alors pour les trois premières décimales, celles de la ligne immédiatement suivante.

Ainsi la partie décimale du logarithme de 31405 est 4969988, et celle du logarithme 31406 est 4970126, parce qu'il y a une astérisque devant les quatre dernières décimales.

La dernière colonne à droite, intitulée Diff. et p. p., contient toutes les différences qui peuvent exister entre deux logarithmes consécutifs de la page, et au dessous de chacune d'elles une petite table, composée de deux colonnes verticales, comme celle qu'on voit dans notre extrait sous le nombre 138 : la première à gauche contient les nombres de dixièmes d'unités que l'on peut avoir à ajouter aux 6 chiffres du nombre lu dans la table, depuis 1 jusqu'à 9 ; la seconde donne le nombre d'unités décimales du 7ème ordre, et les fractions de ces unités, qu'il faut ajouter au logarithme lu dans la table. Pour bien comprendre la formation et l'usage de cette table, je vais chercher au moyen des tables de Dupuis, le logarithme d'un nombre compris dans notre extrait, et résoudre ensuite la question inverse.

Problème I. — *Quel est le logarithme du nombre* 31415,926?

On trouve dans la table que le logarithme du nombre entier 31415 est 4,4971371, et l'on voit que la différence de ce logarithme au suivant est terminée par un 8, c'est un des nombres inscrits en tête des petites tables dans la colonne intitulée Diff. et p. p., c'est donc 138. Ainsi, si le nombre croissait d'une unité, son logarithme croîtrait de 138 dix-millioniènes, nous n'avons que 0,926 à ajouter au nombre, le logarithme croîtra de $138 \times 0,926$ dix-millionièmes, ce produit calculé à une demi-unité près vaut 128 dix-millioniémes ; on a donc

$$\log.\ 31415,926 = 4,4971371 + 0,0000128 = 4,4971499.$$

La petite table, placée sous 138 dans la colonne intitulée Diff. et p. p., dispense de faire ce calcul, elle donne le produit de

138 dix-millionièmes par les neuf premiers nombres de dixièmes.

$$138 \times 0{,}9 \quad = 124{,}2 \quad \text{dix-millionièmes,}$$
$$138 \times 0{,}2 \quad = \ 27{,}6$$

donc

$$138 \times 0{,}02 \ = \ 2{,}76 \quad \text{dix-millionièmes,}$$

de même

$$138 \times 0{,}006 = \ 0{,}828 \quad \text{dix-millionièmes,}$$

donc

$$138 \times 0{,}926 = 127{,}788 \quad \text{dix-millioniemes;}$$

il faut donc ajouter au logarithme lu dans la table 128 dix-millionièmes, à moins d'un demi-dix-millionième près.

Ainsi, grâce à l'emploi de ces petites tables, qu'on appelle *tables de parties proportionnelles,* on n'a que des additions à faire au lieu d'une multiplication, pour trouver ce qu'il faut ajouter au logarithme d'un nombre entier lu dans la table, quand à la droite de ce nombre on ajoute des chiffres décimaux.

Remarque. — Lorsque le nombre dont on cherche le logarithme est moindre que 10000 ou plus grand que 100000, on écrit d'abord la caractéristique de son logarithme, puis on le ramène à être compris entre ces limites, en le multipliant ou le divisant par une puissance de 10 convenable, ce qui, d'après le théorème III de la page 358, ne change pas la partie décimale du logarithme qui reste à trouver; on peut alors considérer les chiffres qui suivent le cinquième comme des dixièmes, centièmes et millièmes, et leur appliquer les raisonnements qui précèdent, d'où nous avons déduit ce que leur présence ajoute de dix-millionièmes à la partie décimale du logarithme du nombre entier formé par les cinq premiers chiffres. Cherchons le logarithme du nombre π ou 3,1415926... la caractéristique de son logarithme est 0, si nous portons la virgule à droite du cinquième chiffre, nous avons le nombre étudié plus haut, la partie décimale de son logarithme, qui est la même que celle du logarithme de π, est 4971499; on a donc

$$\log. \pi = 0{,}4971499\,;$$

les décimales suivantes de π n'auraient aucune influence sur les dix-millionièmes de son logarithme.

Problème II. — *Trouver le nombre correspondant au logarithme* 4,4974581.

Le plus grand logarithme tabulaire contenu dans le logarithme donné est 4,4974549, qui correspond au nombre entier 31438, et diffère de 138 dix-millionièmes de celui du nombre entier suivant ; par conséquent la partie entière du nombre demandé est égale à 31438 ; pour avoir la fraction décimale, je soustrais les deux logarithmes 4,4974581 et 4,4974549 l'un de l'autre, et je divise leur différence 0,0000032 par la différence tabulaire 0,0000138. Le quotient est égal à 0,231 ; mais je ne prends que les deux premiers chiffres décimaux, parce que l'erreur commise est moindre que $\frac{1}{138}$, d'après la règle précédemment donnée (page 363), et, *à fortiori*, moindre que $\frac{1}{100}$. J'ai dès lors

$$4,4974581 = \text{log. } 31438,23.$$

La table des parties proportionnelles rend inutile la division de 32 par 138 ; car si l'on cherche 32 dans la seconde colonne de la table, qui porte en tête 138, on le trouve compris entre 27,6 et 41,4 ; on le décompose alors en 27,6 + 4,4, et l'on voit qu'il faut d'abord augmenter le nombre 31438 de 0,2 pour l'augmentation de 27,6 dix-millionièmes qu'éprouve son logarithme ; pour tenir compte ensuite des 4,4 dix-millionièmes restants, on multiplie ce nombre par 10, et l'on voit que 44 est compris entre 41,4 et 55,2 ; de sorte que l'augmentation correspondante du nombre 31438 est elle-même comprise entre 0,03 et 0,04. On aura donc 0,2 + 0,03 ou 0,23 pour l'augmentation totale de ce nombre, résultat identique à celui auquel on est arrivé par l'autre méthode.

Remarque. — Lorsque la caractéristique du logarithme donné sera autre que 4, on la ramènera à être égale à ce nombre, en l'augmentant ou la diminuant d'un nombre convenable d'unités, et l'on opérera ensuite comme dans le cas précédent.

Cela revient à chercher toujours dans la table entre 1000 et 100000 la partie décimale du logarithme qui approche le plus par défaut de celle du logarithme donné, à chercher les chiffres successifs du nombre correspondant sans s'inquiéter de leurs valeurs relatives, et à placer dans le nombre ainsi trouvé une virgule, de telle sorte que le nombre des chiffres de la partie entière soit égal à la caractéristique du logarithme donné augmentée de 1. Quand cette caractéristique est très-grande, on est obligé de placer des zéros à la droite des chiffres du nombre fournis par la table, ce nombre n'est pas alors connu à moins d'une unité près.

Les tables de Dupuis donnent donc immédiatement cinq chiffres du nombre demandé; on en calcule ensuite un ou deux au plus à l'aide des différences proportionnelles, de sorte que ces tables font connaître *six* ou *sept* chiffres du nombre inconnu. Comme on n'en trouve que *quatre* ou *cinq* au moyen des tables de de Lalande, je ne me servirai que des tables de Dupuis. (Voir la remarque générale, placée à la fin de cette leçon.)

IV. — Applications des logarithmes.

1° MULTIPLICATION.

EXEMPLE. — Calculer le poids P d'un bloc de pierre qui a la forme d'un parallélipipède rectangle, en supposant ses trois dimensions respectivement égales à $1^m,5$, $2^m,325$, $1^m,285$ et la densité de la pierre égale à 2,756.

En prenant le décimètre cube pour l'unité de volume, on a $15 \times 23,25 \times 12,85$ pour la mesure du volume du bloc de pierre ; par conséquent

$$P = 15 \times 23,25 \times 12,85 \times 2,756 \text{ kilog.}$$

et

$$\log. P = \log. 15 + \log. 23,25 + \log. 12,85 + \log. 2,756.$$

Calcul.

$$\begin{aligned} \log.\ 15 &= 1,1760913 \\ \log.\ 23,25 &= 1,3664230 \\ \log.\ 12,85 &= 1,1089031 \\ \log.\ 2,756 &= 0,4402792 \\ \hline \log.\ P &= 4,0916966 \end{aligned}$$

On en déduit

$$P = 12350 \text{ kil. } 83.$$

2° DIVISION.

Premier exemple. — 365,242264 jours solaires valent 366,242264 jours sidéraux, quelle est la valeur du jour solaire en jour sidéral ?

Soit x le nombre demandé ; on a

$$x = \frac{366,242264}{365,242264},$$

et, par suite

$$\log. x = \log. 366,242264 - \log. 365,242264.$$

Calcul.

$$\begin{array}{r} \log. 366,242264 = 2,5637685 \\ \log. 365,242264 = 2,5625810 \\ \hline \log. x = 0,0011875 \end{array}$$

On en conclut que x égale 1,002738, c'est-à-dire que le jour solaire vaut $1^{\text{j. sid.}},002738$.

Deuxième exemple. — Un capital de 42615 fr., placé pendant 3 ans, a produit un intérêt de 7670 fr. 70 ; quel serait l'intérêt de 59275 francs placés aux mêmes conditions pendant 7 ans ?

Soit x l'inconnue de cette règle de trois composée : on a

$$x = \frac{7670,70 \times 59275 \times 7}{42615 \times 3},$$

et, par suite,

$$\log. x = \log. 7670,70 + \log. 59275 + \log. 7 - (\log. 42615 + \log. 3).$$

Calcul.

$$\begin{array}{l|l} \log. 7670,70 = 3,8848350 & \log. 42615 = 4,6295625 \\ \log. 59275 \quad = 4,7728716 & \log. 3 \qquad = 0,4771213 \\ \log. \qquad 7 = 0,8450980 & \\ \hline \qquad 9,5028046 & \qquad 5,1066838 \\ \qquad 5,1066838 & \end{array}$$

$$\log. x = 4,3961208 = \log. 24895,50.$$

Le capital demandé égale dès lors 24895 fr. 50.

3° PUISSANCES.

Exemple. — Calculer le poids de la terre supposée sphérique, en prenant 5,5 pour sa densité.

Si on désigne par c la longueur de la circonférence d'un grand cercle, le volume de la terre est égal à $\frac{c^3}{6\pi^2}$; or c égale 40000000 de mètres, donc

$$P = \frac{(40000000)^3.5,5}{6\pi^2}$$

l'unité de poids étant la tonne métrique. On a, par suite,

$$\log.\,P = 3\log.\,40000000 + \log.\,5,5 - (\log.\,6 + 2\log.\,\pi).$$

Calcul de P.	*Calcul préliminaire.*
$3\log.\,40000000 = 22,8061800$	$\log.\,6 = 0,7781513$
$\log.\,5,5 = 0,7403627$	$2\log.\,\pi = 0,9942998$
$23,5465427$	$1,7724511$
$1,7724511$	
$\log.\,P = 21,7740916.$	

On en déduit

$$P = 594417000000000000000000 \text{ tonnes.}$$

4° RACINES.

Exemple. — La distance moyenne de la terre au soleil étant prise pour unité, celle de Jupiter est égale à 5,20277. On demande d'évaluer en années la durée de la révolution de Jupiter autour du soleil, en considérant la terre comme une planète, et supposant connue cette loi de Kepler que les carrés des temps des révolutions de deux planètes autour du soleil sont proportionnels aux cubes de leurs distances moyennes à cet astre.

Soit x la durée cherchée ; on a

$$\frac{x^2}{1^2} = \frac{(5,20277)^3}{1^3},$$

et, par suite,

$$x = \sqrt{(5,20277)^3};$$

on en déduit

$$\log.\,x = \frac{3\log.\,5,20277}{2}.$$

Calcul.

$$\log.\,5,20277 = 0,7162346$$
$$3\log.\,5,20277 = 2,1487038$$
$$\log.\,x = 1,0743519,$$

par conséquent,

$$x = 11^{\text{ans}},8673.$$

Remarque générale sur les calculs précédents.

Les tables de Dupuis dont nous nous sommes servis remplacent avec avantage les anciennes tables de Callet ; car elles font connaître avec plus d'exactitude les logarithmes et les nombres inconnus, parce qu'elles donnent les dixièmes des produits de chaque différence tabulaire par les neuf premiers nombres entiers. On y trouve aussi les logarithmes naturels des lignes trigonométriques avec des tableaux contenant la différence tabulaire, calculée pour chaque seconde à un dixième près. Comme les tables de Callet n'offrent aucun de ces avantages, nous préférons celles de Dupuis.

EXERCICES.

1. — Quel est le poids d'un cylindre construit en pierre dont la densité est 2,756, en supposant le rayon du cylindre égal à $1^m,5$ et sa hauteur égale à $5^m,215$?

(*Rép.* 101593 kil. 5).

2. — Quel est le volume d'une sphère dont le diamètre égale $3^m,517$?

(*Rép.* 22 mètres cubes, 778 décimètres cubes).

3. — Calculer une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre par la formule de *Wallis :*

$$\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11}$$

en prenant la demi-somme des valeurs qu'on trouve lorsqu'on s'arrête successivement aux fractions $\frac{18}{19}$, $\frac{20}{19}$.

(*Rép.* 3,1405).

4. — Calculer la valeur de x donnée par la formule

$$x = \sqrt{\frac{1,55^2 - 1}{1,54^2 - 1}}.$$

(*Rép.* 1,00619).

5. — Évaluer en jours moyens le temps de la révolution de la pla-

nète Neptune autour du soleil, en prenant pour unité la distance moyenne de la terre au soleil, et sachant que celle de Neptune est de 30,04 et que la durée de la révolution de la terre autour du soleil est de $365^{j.m.}$,256.

(*Rép.* 60137 jours moyens).

6. — Résoudre l'équation exponentielle $2^x = 8192$.

(*Rép.* $x = 13$).

7. — Résoudre l'équation $2 \times 3^{2x} - 415 \times 3^x - 17253 = 0$.

(*Rép.* $x = 5$).

8. — Calculer le rayon de la terre supposée sphérique, sachant que la longueur de la circonférence d'un grand cercle est 40000000 de mètres.

(*Rép.* 6366197).

9. — Calculer le côté d'un cube pesant 7406297 grammes, sachant que la densité de la matière est 22,7.

(*Rép.* 68^{cent},8428).

10. — Calculer la force ascensionnelle d'un ballon de 8 mètres de rayon, gonflé d'hydrogène, dont la densité par rapport à l'air est 0,0692, sachant qu'un litre d'air pèse 1^g,293; l'air et l'hydrogène étant supposés secs, à 0° et sous la pression 76.

(*Rép.* 2581^k,15).

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

Programme. — Usage des caractéristiques négatives.

1. — « Les définitions * précédemment données n'assignent « pas de logarithmes aux nombres plus petits que 1. Quand il « s'agit de calculer de pareils nombres avec les tables, on peut « les multiplier par une puissance de 10, telle que le produit « devienne supérieur à l'unité, et il ne reste plus qu'à diviser « par cette puissance le résultat fourni par les tables. »

1. — Si l'on suivait à la lettre la marche qui vient a être indiquée, il n'y aurait pas lieu de donner des logarithmes aux nombres plus petits que 1. Voici comment l'on pourrait procéder.

Soit à multiplier $\frac{2437}{65428}$ par 0,79643.

Je multiplie le premier facteur par 100 et le second par 10, ce qui les rend plus grands tous deux que l'unité, je calcule le produit $\frac{243700}{65428} \times 7,9643$ à l'aide des tables sans difficulté, puisque les deux facteurs sont plus grands que 1, et comme ce produit a été rendu 1000 fois trop fort, en multipliant un de ses facteurs par 100, et l'autre par 10, je divise par 1000 le résultat obtenu pour avoir le produit des deux facteurs plus petits que 1, qui était demandé.

Soit encore à extraire la racine cubique de 0,000027946.

Pour rendre ce nombre plus grand que 1, il suffit de le multiplier par 100000 ; mais alors j'aurais (7, I, Th. II)

$$\sqrt[3]{0,000027946 \times 100000} = \sqrt[3]{0,000027946} \times \sqrt[3]{100000},$$

c'est-à-dire qu'après avoir extrait la racine cubique du nombre

* Note du programme.

plus grand que 1, ainsi obtenu, il faudrait la diviser par la racine cubique de 100000 qui n'est pas exacte, l'opération serait pénible. Si je multiplie le nombre proposé par une puissance de 10 qui soit un cube parfait, et telle que le produit soit plus grand que 1, cet inconvénient disparaîtra. Ici, il suffit de multiplier le nombre par 10^6, qui est le cube de 10^2; j'aurai alors (Page 57, Th. II) $\sqrt[3]{0,000027946 \times 10^6} = \sqrt[3]{0,000027946} \times 10^2$. ainsi, après avoir extrait, à l'aide des tables, la racine cubique du nombre $0,000027946 \times 10^6$ plus grand que 1, il faudra diviser le résultat obtenu par 10^2 ou 100, pour avoir la racine cubique de la fraction plus petite que 1, qui était demandée.

Cette méthode présenterait donc quelque difficulté dans les applications.

2. — Convention relative au logarithme d'une fraction plus petite que l'unité. — Usage des caractéristiques négatives.

Dans le système des logarithmes décimaux, les termes de la progression géométrique étant tous plus grands que 1, les nombres plus petits que 1 n'ont pas de logarithmes. Ces nombres, fractions ordinaires ou décimales, pouvant toujours se mettre sous la forme $\frac{a}{b}$, qui représente le quotient de la division de a par b, a étant plus petit que b, nous conviendrons d'appliquer à ces quotients pour leur donner des logarithmes, la règle donnée (23 et 24, II, 1, th. II) pour trouver le logarithme du quotient d'une division, lorsqu'il est plus grand que 1 ; on aura donc par définition

$$\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b\,;$$

mais pour que cette convention soit légitime, il faudra démontrer qu'en appliquant aux logarithmes ainsi définis les quatre théorèmes sur lesquels repose l'emploi des logarithmes dans les calculs (23 et 24, II, 1), on arrive aux mêmes résultats qu'en employant la méthode précédemment indiquée.

Dans l'égalité

$$\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b\,;$$

a étant plus petit que b, le second membre est négatif, ordinairement pour calculer une différence négative, on retranche le plus petit nombre du plus grand, et on donne au résultat le signe — ; on obtiendrait ainsi un logarithme entièrement négatif, qui serait d'un usage peu commode dans les calculs ; au lieu d'opérer ainsi, on retranche le plus grand logarithme du plus petit, on ne rencontre aucune difficulté quand on opère sur les parties décimales, mais quand on arrive aux entiers, on rencontre une soustraction impossible, dont le résultat est un nombre entier négatif, c'est la *caractéristique négative* du logarithme, alors le logarithme se compose d'une partie décimale qui est positive, et d'une partie entière négative, pour indiquer qu'elle seule est négative, au lieu de placer le signe — devant, on le place au dessus.

PROBLÈME I. — *Trouver le logarithme d'une fraction ordinaire ou décimale plus petite que l'unité.*

1° Soit la fraction ordinaire $\frac{172}{3245}$.

Nous avons par définition

$$\log. \frac{172}{3245} = \log. 172 - \log. 3245.$$

PREMIÈRE MÉTHODE. —

$$\begin{array}{rl} \log.\ 3245 = & 3{,}5112147 \\ \log.\ 172 = & 2{,}2355284 \\ \hline \end{array}$$

retranchons, il vient $\log. \frac{172}{3245} = -1{,}2756863.$

DEUXIÈME MÉTHODE. — Multiplions la fraction proposée par une puissance de 10, qui la rende plus grande que 1 et plus petite que 10, par 10^2 dans l'exemple actuel, le logarithme de la nouvelle fraction $\frac{17200}{3245}$, comprise entre 1 et 10, aura pour caractéristique zéro.

$$\begin{array}{rl} \log.\ 17200 = & 4{,}2355284 \\ \log.\ 3245 = & 3{,}5112147 \\ \hline \end{array}$$

retranchons, il vient $\log. \frac{17200}{3245} = 0{,}7243137$;

or la fraction proposée est 100 fois plus petite que $\frac{17200}{3245}$, donc

$$\log.\frac{172}{3245} = \log.\frac{\frac{17200}{3245}}{100} = \log.\frac{17200}{3245} - \log.100$$
$$= 0{,}7243137 - 2 = \bar{2}{,}7243137,$$

en admettant qu'une caractéristique négative indique qu'il faut retrancher sa valeur absolue de la partie décimale qui suit et qui est positive.

Dans la pratique, on se dispense de multiplier le numérateur par 100, ce qui augmente son logarithme de deux unités, et rend possible la soustraction des logarithmes 4,2355284 — 3,5112147, et l'on retranche 3,5112147, logarithme du dénominateur, de 2,2355284, logarithme du numérateur de la fraction donnée, quand on arrive aux entiers, on a 3 et 1 de retenu, qui font 4, à retrancher de 2, soustraction impossible, dont le résultat — 2 est la caractéristique négative du logarithme de la fraction proposée.

$$2 + \log.172 - \log.3245 - 2 = \log.172 - \log.3245$$
$$= -(\log.3245 - \log.172),$$

cette égalité prouve que les deux méthodes conduisent à des résultats identiques, leur différence doit être nulle, mais pour retrancher le premier du second, il suffit de l'ajouter après avoir changé son signe, l'opération donne bien zéro pour résultat :

$$\begin{array}{r} \bar{2}{,}7243137 \\ 1{,}2756863 \\ \hline 0{,}0000000. \end{array}$$

On passerait de la première forme à la seconde, en retranchant de zéro le nombre 1,2756863, car — 1,2756863 peut être regardé comme égal à 0 — 1,2756863 :

$$\begin{array}{r} 0{,}0000000 \\ 1{,}2756863 \\ \hline \bar{2}{,}7243137. \end{array}$$

Désormais nous chercherons directement et nous emploierons toujours les logarithmes à caractéristique négative et à partie décimale positive.

Remarque. — *La caractéristique négative du logarithme d'une fraction ordinaire est égale, et de signe contraire, au* *degré de la puissance de* 10 *par laquelle il faut multiplier cette fraction pour la rendre plus grande que* 1 *et plus petite que* 10, *et la partie décimale est la même que celle du nombre compris entre* 1 *et* 10, *ainsi obtenu.*

2° Soit la fraction décimale 0,00643425.

Cette fraction décimale étant égale à une fraction ordinaire qui a 643425 pour numérateur et 10^8 pour dénominateur, on calculera son logarithme d'après la règle précédente. On peut aussi opérer comme il suit :

On transporte la virgule de la fraction à la droite du premier chiffre significatif de gauche, et on a

$$0{,}00643425 = \frac{6{,}43425}{1000},$$

d'où, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\log.\ 0{,}00643425 = \log.\ 6{,}43425 - \log.\ 1000$$

ou

$$\log.\ 0{,}00643425 = 0{,}8084980 - 3 = \overline{3}{,}8084980.$$

Remarque. — *La caractéristique négative du logarithme d'une fraction décimale plus petite que l'unité est égale et de signe contraire, au nombre qui exprime le rang du premier chiffre significatif de cette fraction à partir de la virgule, ou au degré de la puissance de* 10 *par laquelle il faut multiplier cette fraction, pour la rendre plus grande que* 1 *et plus petite que* 10.

Cela résulte du calcul précédent, nous avons fait passer la virgule après le premier chiffre significatif, en multipliant et divisant par une puissance de 10 dont l'exposant est égal au rang du premier chiffre significatif à partir de la virgule, le logarithme de cette puissance de 10 est égal à son exposant, et c'est lui qui, affecté du signe —, devient la caractéristique négative du logarithme de la fraction. Quant à la partie décimale du logarithme, c'est celle du logarithme du nombre compris entre 1 et 10 qu'on obtient en plaçant la virgule de la fraction donnée à droite de son premier chiffre significatif.

Problème II. — *Étant donné un logarithme dont la caractéristique est négative, trouver le nombre correspondant.*

Soit proposé de trouver le nombre x dont le logarithme est égal à $\overline{2}{,}4856753$, j'augmente le logarithme de 6 unités, et je ramène sa caractéristique à être positive et égale à 4, pour que le nombre correspondant au nouveau logarithme 4,4856753 soit compris entre 10000 et 100000 ; je cherche ensuite ce nombre, et je le trouve égal à 30596,75. Or j'ai

$$\bar{2},4856753 = 4,4856753 - 6,$$

ou

$$\log.\, x = \log.\, 30596,75 - \log.\, 1000000,$$

donc

$$x = \frac{30596,75}{1000000},$$

et enfin

$$x = 0,03059675.$$

Le changement de caractéristique que j'ai fait subir au logarithme ne sert que pour la démonstration ; dans la pratique, *pour trouver la fraction décimale qui a un logarithme donné, on cherche les chiffres successifs du nombre compris entre* 10000 *et* 100000, *dont le logarithme a la même partie décimale que le logarithme donné, et l'on place à la gauche de ces chiffres autant de zéros, y compris celui de la partie entière, qu'il y a d'unités dans la caractéristique négative, de telle sorte que le premier chiffre significatif occupe, après la virgule, un rang marqué par la valeur absolue de cette caractéristique.*

II. — Extension des propriétés des logarithmes des nombres plus grands que l'unité aux logarithmes à caractéristique négative des nombres plus petits que l'unité.

1. — Théorème I. — *Lorsqu'on multiplie ou divise un nombre plus grand ou plus petit que* 1 *par une puissance de* 10, *la partie décimale de son logarithme ne change pas, et la caractéristique est augmentée ou diminuée d'un nombre d'unités égal au degré de cette puissance.*

Ce théorème a été démontré (page 358) pour les nombres plus grands que 1, excepté le cas où la division les rendrait inférieurs à 1 ; je dis d'abord qu'il est vrai dans ce cas.

Soit en effet 217,5 qui divisé par 10^5 devient 0,002175 nombre plus petit que 1. On a par définition

$$\log.\, \frac{217,5}{10^5} = \log.\, 217,5 - \log.\, 10^5 = \log.\, 217,5 - 5,$$

on a

$$\log. 217{,}5 = 2{,}3374593,$$

donc

$$\log. \frac{217{,}5}{10^5} = 2{,}3374593 - 5 = \bar{3}{,}3374593\,;$$

ce qui démontre le théorème énoncé, en même temps que la réciproque : quand on multiplie un nombre inférieur à 1 par une puissance de 10 qui le rend supérieur, la partie décimale du logarithme ne change pas, et la caractéristique est augmentée d'un nombre d'unités égal au degré de cette puissance.

Considérons ensuite un nombre a inférieur à 1, fraction ordinaire ou décimale, dont le logarithme ait pour caractéristique -5; la caractéristique négative de son logarithme est égale et de signe contraire, au degré de la puissance de 10 par laquelle il faut multiplier a pour le rendre plus grand que 1 et plus petit que 10; si nous multiplions a par 10^3 par exemple, la puissance de 10, par laquelle il faudra multiplier $a \times 10^3$ pour le rendre plus grand que 1 et plus petit que 10, aura un degré moindre de 3 unités que celle par laquelle il faut multiplier a; ce degré sera $5 - 3$, or la caractéristique du logarithme de $a \times 10^3$, est égale à ce degré changé de signe, c'est-à-dire à $-5 + 3$ ou -2, et la partie décimale du logarithme est la même dans les deux cas que celle du nombre compris entre 1 et 10, obtenu en multipliant a par 10^5 ou $a \times 10^3$ par 10^2. Donc quand on multiplie un nombre a plus petit que 1 par une puissance de 10, qui ne le rend pas plus grand que 1, la partie décimale de son logarithme ne change pas, et la caractéristique est augmentée d'un nombre d'unités égal au degré de cette puissance.

Réciproquement, si on divise un nombre $a \times 10^3$ plus petit que 1, par une puissance de 10, par 10^3, on trouve un nombre a dont le logarithme a la même partie décimale que celui de $a \times 10^3$, et dont la caractéristique est celle de $a \times 10^3$ diminuée de 3 unités, c'est-à-dire d'un nombre égal au degré de cette puissance.

2. — Il reste à démontrer que les quatre théorèmes établis (23 et 24, II, 1) pour les logarithmes des nombres plus grands que 1 dans un système quelconque, sont applicables aux logarithmes à caractéristiques négatives des nombres plus petits que l'unité; mais comme les trois derniers se déduisent du premier, si nous démontrons que le premier est général, et convient également aux nombres plus grands et plus petits que l'unité, les trois autres auront évidemment la même généralité.

THÉORÈME II. — *Le logarithme du produit de deux nombres quelconques, plus grands ou plus petits que l'unité, est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.*

Soient a et b deux nombres plus petits que 1, supposons que pour les rendre plus grands que 1 et plus petits que 10, il faille multiplier le premier par 10^n et le second par 10^p, appelons a' et b' les produits, compris entre 1 et 10, que l'on obtient ainsi; nous aurons, d'après les remarques faites précédemment (I, 2, Pr. I),

$$\log. a = \log. a' - n,$$

et

$$\log. b = \log. b' - p.$$

Maintenant a' et b' étant plus grands que 1, l'on a

$$\log. a'b' = \log. a' + \log. b',$$

le produit $a'b'$ étant $10^n \times 10^p$ ou 10^{n+p} fois trop fort, si nous le divisons par cette puissance de 10, pour le rendre égal à ab, nous aurons, en vertu du théorème I :

$$\text{og.} \frac{a'b'}{10^{n+p}} = \log. a' + \log. b' - n - p.$$

ou

$$\log. ab = \log. a' - n + \log. b' - p,$$

ou enfin

$$\log. ab = \log. a + \log. b.$$

La démonstration se ferait de même, si un seul des deux nombres était plus petit que l'unité.

3. — On peut donner des logarithmes aux nombres plus petits que l'unité, et leur étendre les propriétés démontrées pour les logarithmes des nombres plus grands que l'unité, par une méthode différente.

Considérons le système de logarithmes défini par les deux progressions

$$\begin{array}{l} 1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ldots. \\ 0,\ \ 1,\ \ \ 2,\ \ \ 3,\ \ \ 4,\ldots; \end{array}$$

les propriétés des logarithmes démontrées dans les leçons 23 et 24 (II), étant indépendantes de la grandeur absolue de la raison de la progression géométrique et du signe de celle de la progression arithmétique, il en résulte qu'elles sont encore applicables aux deux progressions géométrique et arithmétique,

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^4},\ldots$$
$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ldots$$

qui ne diffèrent des précédentes qu'en ce que la raison de la progression géométrique est égale à l'inverse $\frac{1}{10}$ de celle de la première, et la raison de la progression arithmétique égale et de signe contraire à celle de l'autre. Ces deux nouvelles progressions forment donc un système de logarithmes dans lequel les nombres plus petits que l'unité ont seuls des logarithmes, et ces logarithmes sont tous négatifs.

Cela posé, je dis que les deux systèmes de logarithmes précédents n'en forment qu'un seul, qui jouit de toutes les propriétés de chacun d'eux et s'applique à tous les nombres positifs, qu'ils soient plus grands ou plus petits que l'unité.

En effet, je remarque : 1° que la progression géométrique

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ldots$$

peut être considérée comme la continuation de la progression

$$1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ldots$$

prolongée vers la gauche, en divisant par sa raison 10, d'abord son premier terme 1, puis le terme obtenu $\frac{1}{10}$, puis $\frac{1}{100}$, etc. De même, la progression arithmétique

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ldots$$

peut être considérée comme la continuation de la progression

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$$

prolongée vers la gauche, en retranchant sa raison 1, d'abord de son premier terme 0, puis du terme obtenu -1, puis de -2, etc.

Pour démontrer que les deux progressions

$$\ldots\ \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ldots$$
$$\ldots\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$$

dont les termes 1 et 0 se correspondent et qui sont indéfiniment prolongées dans les deux sens, jouissent des propriétés générales des logarithmes, il suffit de prouver que *le logarithme de deux termes quelconques* a *et* b *de la progression géométrique est égal à la somme des logarithmes de ces termes*, puisque les autres propriétés sont des conséquences de celle-ci.

Comme cette propriété est déjà démontrée pour deux termes situés l'un et l'autre à la droite, et se démontre de même pour deux termes situés l'un et l'autre à la gauche du terme 1, je supposerai $a = 10^m$ et $b = \frac{1}{10^n}$. J'ai dès lors

$$ab = \frac{10^m}{10^n};$$

pour effectuer la division de 10^m par 10^n, je distinguerai deux cas : m peut être plus grand ou plus petit que n.

Si m est plus grand que n, il en résulte que le produit ab égale 10^{m-n}; il a donc pour logarithme le terme $m-n$ de la progression arithmétique, c'est-à-dire la somme algébrique des logarithmes m et $-n$ de 10^m et $\frac{1}{10^n}$. Par conséquent,

$$\log. ab = \log. a + \log. b.$$

En supposant, au contraire, $m < n$, je divise par 10^m les deux termes de la fraction $\frac{10^m}{10^n}$, et le produit ab égale $\frac{1}{10^{n-m}}$; il a dès lors pour logarithme le terme $-(n-m)$ de la progression arithmétique, c'est-à-dire la somme algébrique des logarithmes m et $-n$ de 10^m et $\frac{1}{10^n}$. On a donc encore

$$\log. ab = \log. a + \log. b\,;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Il est inutile de calculer, par des insertions de moyens entre les termes consécutifs des deux progressions prolongées, les logarithmes des nombres plus petits que 1 ; on les calculera comme précédemment (I, 2), au moyen des logarithmes des nombres plus grands que 1, avec une caractéristique négative et une partie décimale positive.

III. — Calcul des caractéristiques négatives.

1. — Les caractéristiques négatives devront être traitées par les règles ordinaires du calcul des quantités négatives, qui sont les mêmes que celles qu'on applique aux termes affectés du signe — dans les polynômes. Cependant comme il y a quelque difficulté dans la combinaison des retenues, qui proviennent de la partie décimale, avec ces caractéristiques, nous allons étudier successivement les quatre opérations que l'on peut avoir à effectuer sur les logarithmes à caractéristiques négatives.

Addition. — Soit à additionner les deux logarithmes suivants :

$$\log.\ a = \overline{3},7259436$$
$$\log.\ b = \overline{2},9860572$$

j'aurai $\log.\ ab = \overline{4},7120008.$

L'addition des parties décimales se fait comme à l'ordinaire, et donne une retenue d'une unité, je dis 1 et — 3 font — 2, et — 2 font — 4, que j'inscris comme caractéristique négative du résultat.

Soustraction. — Soit à exécuter la soustraction des deux logarithmes suivants :

$$\log.\ a = \overline{1},7259436$$
$$\log.\ b = \overline{5},9860572$$

j'aurai $\log.\ \frac{a}{b} = 3,7398864.$

La soustraction des parties décimales se fait comme à l'ordinaire et donne une retenue d'une unité, je dis 1 et — 5 font — 4, qui, retranché de — 1, prend le signe +, et donne 4 — 1 ou 3 pour caractéristique du résultat.

Multiplication. — Soit à multiplier par 3 le logarithme suivant :

$$\log.\ a = \overline{2},9860572$$

j'aurai $\log.\ a^3 = \overline{4},9581716.$

La multiplication de la partie décimale se fait comme à l'ordinaire et donne une retenue de 2 unités, je dis alors 3 multiplié par — 2 donne — 6, et, en ajoutant les 2 unités positives retenues, — 4, que j'inscris comme caractéristique du résultat.

Division. — Soit à diviser par 3 le logarithme suivant :

$$\log. b = \overline{4},9581716$$

si je divisais par 3 la caractéristique négative — 4, j'aurais — 1,3333333, c'est-à-dire une partie entière et une partie décimale négatives ; pour ne pas avoir cette dernière, j'ajoute à la caractéristique négative — 2, nombre d'unités négatives nécessaire pour la rendre divisible par 3, et, pour compenser, j'ajoute 2 unités positives devant la partie décimale,

$$\overline{4},9581716 = -6 + 2,9581716,$$

je divise alors — 6 par 3, ce qui donne — 2, caractéristique du résultat, et je continue à la manière ordinaire la division de 2,9581716 par 3, qui donne la partie décimale du résultat, j'ai ainsi

$$\log. \sqrt[3]{b} \text{ ou } \frac{\log. b}{3} = \overline{2},9860572.$$

Les deux unités positives et négatives, introduites dans ce calcul, sont les deux unités retenues du calcul précédent, dont celui-ci est l'inverse.

2. — Applications.

Premier exemple. — Calculer la longueur du pendule simple qui fait, à Paris, une oscillation en une seconde.

Je prends la formule connue

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

dans laquelle on désigne par t la durée d'une oscillation d'un pendule simple dont la longueur est l, par g le double de l'espace qu'un corps, tombant librement, parcourrait dans le lieu donné, et par π le rapport 3,1415926 de la circonférence au diamètre. En faisant dans cette formule

$$t = 1 \quad \text{et} \quad g = 9^{\text{m}},8088,$$

j'ai

$$l = \frac{9^{\text{m}},8088}{(3,14159\ldots)^2}$$

et, par suite,

$$\log. l = \log. 9{,}8088 - 2 \log. 3{,}1415926.$$

CALCUL DE l.

$$\begin{array}{r}
\log. 9{,}8088 = 0{,}9916159 \\
2 \log. 3{,}1415926 = 0{,}9942998 \\
\hline
\log. l = \overline{1}{,}9973161
\end{array}$$

CALCUL PRÉLIMINAIRE.

$$\begin{array}{r}
\log. 3{,}1415926 = 0{,}4971499 \\
2 \log. 3{,}1415926 = 0{,}9942998
\end{array}$$

d'où

$$l = 0{,}9938391.$$

Deuxième exemple. — Dans un carré dont le côté a un mètre de longueur, on inscrit un carré en tirant les droites qui joignent les milieux des côtés consécutifs du carré donné. On recommence ensuite la même opération sur le second carré, puis sur le troisième, etc., et l'on propose de calculer l'aire du quinzième carré inscrit.

Il est évident que chaque carré est la moitié du carré dans lequel il est inscrit; or l'aire du carré donné est égale à 1 mètre carré, donc les aires des carrés inscrits successivement sont les termes de la progression géométrique décroissante

$$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \ldots$$

et l'aire du quinzième carré est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$; si je la représente par x, j'aurai

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{15},$$

et, par suite,

$$\log. x = 15 \log. \frac{1}{2} = \overline{1}{,}6989700 \times 15.$$

or $\overline{1}{,}6989700 \times 15 = (0{,}6989700 - 1)\, 15 = 10{,}4845500 - 15$

$$= \overline{5}{,}4845500.$$

Par conséquent

$$\log. x = \overline{5}{,}4845500$$

et

$$x = 0{,}000030517;$$

l'aire du quinzième carré égale donc 30 millimètres carrés, à un millimètre carré près.

Troisième exemple. — Calculer le rayon d'une sphère dont le volume est d'un mètre cube.

Soit x le rayon demandé ; on a, par hypothèse

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = 1$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}},$$

et

$$\log. x = \frac{\log. 3 - (\log. 4 + \log. \pi)}{3}.$$

Calcul de x.	*Calcul préliminaire.*
$\log. 3 = 0{,}4771213$	$\log. 4 = 0{,}6020600$
$\log. 4 + \log. \pi = 1{,}0992099$	$\log. \pi = 0{,}4971499$
$\log. x = \dfrac{\overline{1},3779114}{3}$	$\log. 4 + \log. \pi = 1{,}0992099$

Pour diviser par 3 le logarithme $\overline{1},3779114$, je rends d'abord sa caractéristique -1 divisible par 3, en l'augmentant de -2; j'ajoute ensuite 2 unités à la fraction décimale 0,3779114, pour ne pas changer le logarithme donné, et je divise par 3 la différence

$$-3 + 2{,}3779114$$

en prenant le tiers de chacune de ses parties. J'ai, par suite,

$$\log. x = -1 + 0{,}7926371 = \overline{1},7926371,$$

et

$$x = 0^m,620350.$$

IV. – Des compléments.

1. — On appelle en général *complément* d'un nombre ce qu'il faut lui ajouter pour avoir un autre nombre donné ; ainsi dans la Géométrie on appelle complément d'un angle l'angle qu'il faut lui ajouter pour avoir un droit, le complément d'un angle est positif si l'angle est aigu, négatif s'il est obtus.

J'appellerai *complément* d'un logarithme le nombre qu'il faut lui ajouter pour avoir un résultat égal à zéro, c'est-à-dire un nombre égal et de signe contraire au logarithme proposé. Quelques auteurs désignent le complément du logarithme de a par l'abréviation co-log. a, il est plus simple de le représenter par $-\log. a$. Lorsque l'on aura à retrancher log. a de log. b, on pourra à log. b ajouter le complément $-\log. a$, et la soustraction sera remplacée par une addition. Retrancher log. a de log. b c'est chercher le logarithme du quotient $\frac{b}{a}$, or ce quotient est égal au produit de b par $\frac{1}{a}$ ou l'inverse de a, on aura donc le logarithme du quotient en ajoutant à log. b le logarithme de $\frac{1}{a}$, qui est $0 -$ log. a ou $-$ log. a, c'est-à-dire le complément du logarithme de a.

Problème I. — Trouver le complément d'un logarithme positif donné.

Soit 3,4971499 le logarithme de a, cherchons le complément de ce logarithme, si nous nous bornons à mettre le signe $-$ devant, pour ajouter $-3,4971499$, il faudrait retrancher 3,4971499 et la soustraction ne serait pas remplacée par une addition, mais $-$ log. a est le logarithme de $\frac{1}{a}$, calculons le logarithme de cette fraction comme il a été indiqué (page 377), avec une partie décimale positive et une caractéristique négative

$$\begin{array}{r} \log.\ 1 = 0,0000000 \\ \log.\ a = 3,4971499 \\ \hline \end{array}$$

$$\log. \frac{1}{a} \text{ ou } -\log.\ a = \overline{4},5028501 = \text{complément de } \log.\ a.$$

Problème II. — *Trouver le complément d'un logarithme donné à caractéristique négative.*

Soit

$$\log.\ a = \overline{3},4971499.$$

Pour avoir son complément, je le retranche de zéro, qui est le logarithme de 1, j'obtiens ainsi le logarithme de $\frac{1}{a}$, ou $-$ log. a que je calcule comme le logarithme d'un quotient ordinaire,

$$\begin{array}{r} \log.\ 1 = 0,0000000 \\ \log.\ a = \overline{3},4971499 \\ \hline \end{array}$$

$$\log. \frac{1}{a} \text{ ou } -\log.\ a = 2,5028501 = \text{complément de } \log.\ a.$$

Remarque. — On commence quelquefois le calcul des compléments par la gauche en remarquant que la caractéristique du complément est toujours égale à celle du logarithme, augmentée de 1, puis changée de signe, on retranche alors les chiffres suivants de 9 et le dernier de 10, pour avoir la partie décimale du complément.

2. — Utilité des compléments. — L'emploi des compléments présente d'abord cet avantage, que les chiffres du nombre dont on retranche le logarithme donné étant toujours des zéros, on s'habitue très-vite à faire cette soustraction sans faute, ensuite l'on n'a plus à faire qu'une addition, opération qui donne moins lieu aux fautes de calcul que la soustraction ; mais on a deux opérations à faire au lieu d'une. C'est surtout lorsqu'on a plusieurs logarithmes à ajouter et à soustraire, comme cela arrive fréquemment dans la résolution des triangles en trigonométrie, que l'emploi des compléments sera avantageux, il n'y aura pas plus d'opérations à faire, et elles seront plus simples. Pour calculer log. $\frac{a.b.c}{d.e}$, il faut faire la somme des logarithmes de a, b et c, puis celle des logarithmes de d et e, enfin retrancher la seconde somme de la première, en tout 3 opérations, en employant les compléments, nous aurons 2 compléments à prendre, ceux de log. d et de log. e, et ensuite une addition de cinq nombres, en tout 3 opérations.

3. — Application de la méthode des compléments.

Reprenons par la méthode des compléments le problème : *trouver le rayon de la sphère dont le volume est un mètre cube* (page 388).

En appelant x le rayon, nous avons

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}},$$

d'où
$$\log. x = \frac{\log. 3 - \log. 4 - \log. \pi}{3}.$$

Calcul de x.

$$\begin{aligned} \log. 3 &= 0,4771213 \\ -\log. 4 &= \bar{1},3979400 \\ -\log. \pi &= \bar{1},5028501 \\ \hline \log. x &= \frac{\bar{1},3779114}{3} \end{aligned}$$

le calcul s'achève comme précédemment.

EXERCICES.

1. — Calculer la valeur du jour sidéral en fonction du jour solaire moyen en sachant que 366,242264 jours sidéraux valent 365,242264 jours solaires moyens.

(*Rép.* 0,997269).

2. — Dans un ouvrage adopté par l'octroi de Paris, on donne cette règle pour évaluer le côté du carré inscrit dans un cercle dont la longueur de la circonférence est connue : *Diminuez la circonference du dixième de sa longueur, et prenez le quart du reste.*

On propose de calculer le rapport du carré construit sur la longueur déterminée d'après cette règle, au carré inscrit dans le cercle donné.

(*Rép.* 0,99929. — L'erreur commise est donc très-petite.)

3. — Calculer la valeur de l'inconnue x donnée par la formule

$$x = 0{,}1865\sqrt[5]{\frac{0{,}315 \times (0{,}9736)^2}{7{,}426}}.$$

(*Rép.* 0,0980714).

4. — Vérifier les résultats suivants :

$$\sqrt[5]{\frac{13}{16}} = 0{,}959323,$$

$$\sqrt{0{,}26 + \sqrt{\frac{2}{3}}} = 1{,}037543.$$

5. — M. Morin a trouvé, pour l'expression de la résistance R d'une corde neuve et sèche à l'enroulement sur un tambour d'un diamètre d, la formule suivante :

$$R = \frac{n}{d}\left(0{,}000297 + 0{,}000245n + 0{,}000363p\right) \text{ kilogr.}$$

n étant le nombre des fils de caret, et p le poids qui tend la corde.

On propose de calculer R, en supposant $n = 15$, $p = 25^{k},37$, et $d = 396$ millimètres.

(*Rép.* La résistance à l'enroulement est égale au poids de 499 grammes).

VINGT-NEUVIÈME ET TRENTIÈME LEÇON.

Programme. — Application des logarithmes aux questions d'intérêts composés et aux annuités.

I. — Intérêts composés.

Lorsqu'on place un capital pendant un certain nombre d'années à un taux d'intérêt déterminé, on peut convenir de recevoir à la fin de chaque année l'intérêt produit pendant ce temps, ou bien d'ajouter, au commencement de l'année suivante, cet intérêt au capital. Dans le premier cas, le capital reste invariable et produit constamment le même intérêt annuel qu'on calcule par la *règle de l'intérêt simple;* dans le second cas, au contraire, le capital augmente d'année en année, ainsi que ses intérêts. On appelle *règle de l'intérêt composé* le procédé par lequel on trouve, dans cette hypothèse, la somme du capital et de ses intérêts accumulés pendant un certain temps; telle est la question que je vais résoudre.

Problème I. — *Trouver la valeur d'un capital placé à intérêt composé pendant un certain nombre d'années, à un taux d'intérêt donné.*

Soient c le capital donné, n le nombre des années pendant lesquelles il est placé, et i l'intérêt que 100 francs rapportent en un an. A ces conditions, un franc produisant un intérêt annuel de $\frac{i}{100}$ francs, intérêt que je représente pour abréger par r, le capital c rapporte cr dans le même temps, et vaut $c + cr$ ou $c(1 + r)$ à la fin de la première année. De là, je conclus que, *pour trouver ce que devient un capital augmenté de ses intérêts au bout d'un an, il faut multiplier ce capital par* *l'unité augmentée de la centième partie du taux d'intérêt, ou par le binôme* (1 + r).

Le capital placé pendant la seconde année étant égal par hypothèse à $c(1+r)$, j'aurai sa valeur à la fin de l'année en multipliant $c(1+r)$ par $1+r$, ce qui donne $c(1+r)^2$; à son tour cette somme, placée pendant la troisième année, devient à la fin, $c(1+r)^2 \times (1+r)$ ou $c(1+r)^3$; ensuite, le nouveau capital $c(1+r)^3$ devient à la fin de la quatrième année $c(1+r)^3 \times (1+r)$ ou $c(1+r)^4$. Par conséquent le capital c devient $c(1+r)$ après une année, $c(1+r)^2$ après 2 ans, $c(1+r)^3$ après 3 ans, $c(1+r)^4$ après 4 ans, et, par analogie, $c(1+r)^n$ après n années; en désignant par C cette dernière somme, on a la formule

$$C = c(1+r)^n$$

qui sert à calculer la valeur d'un capital et de ses intérêts composés.

Si on considère successivement, dans cette formule, chacune des quatre quantités C, c, r et n comme inconnue, on est conduit à quatre problèmes différents, dont les solutions sont données par la formule logarithmique

$$\log. C = \log. c + n \log. (1+r);$$

car on en déduit successivement

$$\log. c = \log. C - n \log. (1+r),$$

$$\log. (1+r) = \frac{\log. C - \log. c}{n},$$

et

$$n = \frac{\log. C - \log. c}{\log. (1+r)}.$$

Premier exemple. — Quelle est la somme que produisent 18500 francs, placés à intérêt composé, pendant 6 ans, à 5 %?

En remplaçant dans la formule

$$\log. C = \log. c + n \log. (1+r),$$

c par 18500, n par 6 et r par 0,05, on trouve

$$\log. C = \log. 18500 + 6 \log. 1,05.$$

Or

$$\begin{array}{r} \log. 18500 = 4,2671717 \\ 6 \log. 1,05 = 0,1271358 \\ \hline \end{array}$$

donc

$$\log. C = 4,3943075,$$

et

$$C = 24791 \text{ fr. } 77.$$

Deuxième exemple. — Quelle somme faut-il placer à 3 %, et à intérêt composé, pour avoir 30000 francs au bout de 10 ans.

En supposant dans la formule

$$\log. c = \log. C - n \log. (1 + r)$$

les quantités C, n et r, respectivement égales à 30000, 10 et 0,03, on a

$$\log. c = \log. 30000 - 10 \log. 1{,}03,$$

et, par suite,

$$c = 22322^{f}{,}82.$$

Troisième exemple. — A quel taux d'intérêt faut-il placer 4800 francs, à intérêt composé, pour recevoir 6000 francs au bout de 8 ans ?

Si, dans la formule

$$\log. (1 + r) = \frac{\log. C - \log. c}{n},$$

on remplace C par 6000, c par 4800 et n par 8, on trouve

$$\log. (1 + r) = \frac{\log. 6000 - \log. 4800}{8}.$$

En effectuant le calcul, on trouve $1 + r$ égal à 1,0283 et, par conséquent, r ou $\frac{i}{100}$ égal à 0,0283; le taux i est donc 2,83.

Quatrième exemple. — Pendant combien d'années faut-il placer, à intérêt composé, un capital de 100000 francs, à 4 %, pour que sa valeur soit de 180000 francs au bout de ce temps?

En supposant dans la formule

$$n = \frac{\log. C - \log. c}{\log. (1 + r)}$$

les trois quantités C, c et r, respectivement égales à 180000, 100000 et 0,04, on a

$$n = \frac{\log. 180000 - \log. 100000}{\log. 1{,}04}$$

ou

$$n = \frac{0{,}2552725}{0{,}0170333}.$$

Si on calcule à une unité près le quotient de la division des deux nombres 0,2552725 et 0,0170335, on trouve le nombre n des années égal à 15, le quotient exact est 14 ans 11 mois 25,2 jours.

Remarque. — La formule

$$C = c(1 + r)^n$$

suppose que le capital c n'est placé que pendant un nombre entier d'années, et n'est applicable que dans cette hypothèse. Lorsque le capital est placé pendant n années et un certain nombre p de mois, on modifie cette formule de la manière suivante :

On remarque d'abord que le capital c, placé à intérêt composé, vaut $c(1 + r)^n$ à la fin de la $n^{ième}$ année, et que cette dernière somme est placée, à intérêt simple, pendant p mois. Or 1 franc rapporte $\frac{r}{12}$ en un mois, et, par suite $\frac{pr}{12}$ au bout de p mois, il vaut donc $1 + \frac{pr}{12}$ à la fin du $p^{ième}$ mois, et la valeur du capital $c(1 + r)^n$, après le même intervalle de temps, est $\left(1 + \frac{pr}{12}\right) \times c(1 + r)^n$; on a par conséquent la formule

$$C = c(1 + r)^n \left(1 + \frac{pr}{12}\right).$$

Si p représentait des jours, l'intérêt d'un franc au bout d'un jour étant $\frac{r}{360}$, au bout de p jours il serait $\frac{pr}{360}$, et 1 franc augmenté de son intérêt pendant p jours deviendrait $\frac{1 + pr}{360}$, le capital $c(1 + r)^n$ deviendrait au bout du même temps

$$C = c(1 + r)^n \left(1 + \frac{pr}{360}\right).$$

Bien que cette formule soit un peu plus compliquée que la précédente, son emploi n'offre aucune difficulté lorsque l'inconnue de la question est C ou c. Mais, si r est inconnu, on est conduit à résoudre une équation de degré $n + 1$, qui a plus de deux termes ; ce problème dépend de l'algèbre supérieure. Enfin, lorsque le temps est inconnu, la question peut être résolue de la manière suivante, quoiqu'on ait une seule équation entre les deux inconnues n et p dont la première représente un nombre entier. Je prends les logarithmes des deux membres de l'équation précédente, et je la résous par rapport à n ; je trouve alors

$$n = \frac{\log.\, C - \log.\, c - \log.\left(1 + \frac{pr}{12}\right)}{\log.\,(1 + r)}.$$

Je retranche ensuite log. c de log. C, et je divise leur différence par log. $(1 + r)$; soit q la partie entière du quotient et R le reste, il en résulte que

$$n = q + \frac{R - \log.\left(1 + \frac{pr}{12}\right)}{\log.\,(1 + r)}.$$

Or la quantité $\dfrac{R - \log.\left(1 + \frac{pr}{12}\right)}{\log.\,(1 + r)}$ est moindre que l'unité, puisque son numérateur est plus petit que le dénominateur, donc il faut qu'on ait

$$\log.\left(1 + \frac{pr}{12}\right) = R,$$

pour que le nombre n soit entier ; ce qui donne

$$n = q.$$

De là je conclus que *la partie entière du quotient de la division de log.* C — *log.* c *par log.* (1 + r) *est le nombre d'années demandé*, et que *le reste représente le logarithme de* $1 + \frac{pr}{12}$; en cherchant le nombre correspondant à ce logarithme, on en déduira facilement la valeur de p.

Si l'on applique cette formule au dernier exemple précédent, dans lequel $\frac{pr}{12}$ égale $\frac{p}{300}$, on trouve n=14 et R=0,0168063; il en résulte que

$$1 + \frac{p}{300} = 1{,}039456,$$

et, par suite,

$$p = 11 \text{ mois } 25 \text{ jours}.$$

Dans la pratique, on n'emploie que la formule

$$C = c(1 + r)^n$$

et l'on admet que l'exposant n peut avoir des valeurs fractionnaires. Cette hypothèse a l'avantage de simplifier les calculs, en conduisant à peu près aux mêmes résultats que la formule plus compliquée

$$C = c(1+r)^n\left(1+\frac{pr}{12}\right).$$

Ainsi, l'application de cette méthode à l'exemple précédent donne

$$n = 4 + \frac{168063}{170333};$$

or la fraction d'année $\frac{168063}{170333}$, évaluée en mois et en jours, est égale à 11 mois 25,2 jours, on a donc

$$n = 14 \text{ ans } 11 \text{ mois } 25{,}2 \text{ jours},$$

résultat peu différent de celui qu'a donné l'autre méthode.

II. — Annuités.

On appelle annuité une somme que l'on paie chaque année, soit pour se procurer un capital au bout d'un certain nombre d'années, soit pour rembourser en un certain nombre d'années une somme empruntée à intérêt.

1. — Annuités placements.

PROBLÈME II. — *Une personne place, à intérêt composé, un capital* c *au commencement de chaque année pendant* n *années consécutives; quelle somme doit-elle recevoir à la fin de la* n$^{\text{ième}}$ *année, en supposant le taux d'intérêt égal à* 100r ?

La première somme c vaut $c(1+r)^n$ à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année, la seconde somme c qui n'est placée qu'au commencement de la seconde année, c'est-à-dire pendant $n-1$ années, vaut $c(1+r)^{n-1}$ au bout de ce temps; la troisième somme c, placée au commencement de la troisième année, vaut $c(1+r)^{n-2}$ à la fin des $n-2$ années suivantes, et ainsi de suite jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ somme qui ne reste placée que pendant un an et vaut $c(1+r)$ au bout de ce temps. En désignant par S le capital que la personne qui fait ces placements doit recevoir après n années, on a :

$$S = c(1+r)^n + c(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} + \dots + c(1+r).$$

Or les quantités dont le second membre est composé sont les n premiers termes d'une progression géométrique qui commence par $c(1+r)$ et dont la raison est $1+r$; par conséquent leur somme égale (17e leçon)

$$\frac{c(1+r)^n(1+r)-c(1+r)}{1+r-1} \quad \text{ou} \quad \frac{c(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r},$$

et l'égalité précédente devient

$$S=\frac{c(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}.$$

Cette formule, comme celle de l'intérêt composé, donne lieu à quatre problèmes différents, dont chacun a pour inconnue l'une des quatre quantités S, c, n et r ; mais le dernier dépend de l'algèbre supérieure. Je vais donner un exemple de l'un des trois autres :

Quelle somme faut-il payer chaque année pour recevoir 20000 *francs au bout de* 10 *ans, les intérêts composés étant calculés à* 5 %.

L'inconnue de la question est donc la quantité c de la formule précédente ; or on a

$$c=\frac{Sr}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]};$$

donc

$$\log. c=\log. S+\log. r+\text{comp.}\log.(1+r)+\text{comp.}\log.\left[(1+r)^n-1\right]$$

En remplaçant maintenant S, n et r par leurs valeurs respectives 20000, 10 et 0,05, on trouve

$$\log. c=\log. 20000+\log. 0,05+\text{comp.}\log. 1,05$$
$$+\text{comp,}\log.(1,05^{10}-1).$$

Comme la différence $1,05^{10}-1$ n'est pas connue, il faut d'abord la calculer ; pour cela, on commence par chercher le nombre $1,05^{10}$, puis on le diminue de l'unité.

Calcul préliminaire.

$$\log. 1,05^{10}=10\log. 1,05=0,2118930\,;$$

donc

$$1,05^{10}=1,628895,$$

et, par suite,

$$1,05^{10}-1=0,628895.$$

Calcul de c.

$$\begin{aligned} \log.\ 20000 &= 4{,}3010300 \\ \log.\ 0{,}05 &= \bar{2}{,}6989700 \\ \text{comp. log. } 1{,}05 &= \bar{1}{,}9788107 \\ \text{comp. log. } 0{,}628895 &= 0{,}2014218 \\ \hline \log.\ c &= 3{,}1802325. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$c = 1514 \text{ fr. } 37.$$

2. — Annuités remboursements.

Cette *annuité* est une somme qu'on paie annuellement, pendant un certain nombre d'années, pour rembourser un capital emprunté et ses intérêts composés pendant un temps donné.

PROBLÈME III. — *Une personne emprunte un capital* c *à un taux d'intérêt* 100 r *donné ; quelle somme* a *doit-elle payer à la fin de chaque année pour rembourser en* n *années ce capital et ses intérêts composés ?*

Au lieu de chercher ce que devient à la fin de chaque année le capital de la dette, par suite du remboursement a, je raisonnerai pour un instant comme si les annuités étaient versées entre les mains d'une personne à qui l'on ne doit rien ; dans cette hypothèse, les intérêts de la somme empruntée s'ajoutent chaque année au capital c, et la dette devient, à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année, $c(1+r)^n$; mais, d'autre part, les annuités a portent intérêt en faveur de l'emprunteur, et la première qui reste placée pendant $n-1$ années, vaut à la fin $a(1+r)^{n-1}$, la seconde, qui est placée une année de moins, vaudra $a(1+r)^{n-2}$, la suivante $a(1+r)^{n-3}$, l'avant-dernière vaudra $a(1+r)$, et la dernière a; l'emprunteur a donc droit à la somme

$$a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \ldots + a(1+r)^{n-3} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-1},$$

qui est la somme des termes d'une progression géométrique, commençant par a, ayant pour raison $1+r$, et composée de n termes, cette somme s, d'après la formule

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \ (22, \text{II}),$$

est égale à

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{r};$$

si elle égale $c(1+r)^n$, il n'y a qu'à la porter chez le créancier, pour que la dette soit éteinte, la dette sera éteinte également, si les annuités a sont versées entre les mains du créancier ; l'équation du problème est donc

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}=c(1+r)^n;$$

on en tire

$$a=\frac{cr(1+r)^n}{(1+r)^n-1},$$

pour la valeur de l'annuité demandée, d'où

$$\log.\ a=\log.\ c+\log.\ r+n\log.\ (1+r)-\log.\ [(1+r)^n-1].$$

Remarque. — Dans cette formule, on peut regarder successivement comme inconnue l'une quelconque des quantités a, c, n et r, ce qui donne lieu à quatre problèmes dont l'algèbre élémentaire ne peut résoudre en général que les trois premiers. Lorsqu'on cherche a ou c, il faut commencer par calculer le nombre $(1+r)^n$, pour en déduire la valeur de la différence $(1+r)^n-1$.

Si on suppose que le nombre d'années n croisse sans limite, l'annuité devient perpétuelle, et sa valeur est égale à la limite vers laquelle tend la fraction

$$\frac{cr(1+r)^n}{(1+r)^n-1},$$

lorsque n croît indéfiniment. Comme cette fraction prend la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ pour $n=\infty$, je divise ses deux termes par $(1+r)^n$, et je trouve

$$\frac{cr}{1-\frac{1}{(1+r)^n}},$$

quantité qui se réduit à cr, si on suppose $n=\infty$. Ce résultat était facile à prévoir ; car l'annuité, devenant perpétuelle, doit être égale à l'intérêt simple du capital emprunté.

Lorsque c'est n qui est l'inconnue, avant de prendre les logarithmes des deux membres de l'équation

$$\frac{a\left[(1+r)^n-1\right]}{r}=c(1+r)^n,$$

on la résout en y regardant $(1+r)^n$ comme l'inconnue, on trouve

$$a(1+r)^n-a=cr(1+r)^n,$$

d'où

$$(1+r)^n=\frac{a}{a-cr}.$$

En prenant les logarithmes des deux membres de cette équation exponentielle, on en tire

$$n=\frac{\log.\, a-\log.\, (a-cr)}{\log.\, (1+r)}.$$

Le problème est impossible si $a-cr$ est négatif, car les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes, l'impossibilité se manifeste d'ailleurs parce que les deux membres de l'équation $(1+r)^n$ et $\dfrac{a}{a-r}$ sont de signe contraire, et elle s'explique aisément parce que la somme payée annuellement a, étant moindre que l'intérêt cr du capital c emprunté, la dette s'accroît chaque année de la quantité $cr-a$, loin de s'éteindre. Le problème est encore impossible quand a est égal à cr, la valeur de $(1+r)^n$, qui est $\dfrac{a}{a-cr}$, ayant un dénominateur nul, est infinie, et par suite n infini ; dans ce cas, on paie chaque année une somme a égale à l'intérêt cr du capital, la dette n'augmente pas, mais elle ne diminue pas, elle ne s'éteindra donc jamais.

Premier exemple. — Une personne vend une maison moyennant une annuité de 8000 francs payable pendant 10 ans. A combien estime-t-elle sa maison, le taux d'intérêt étant 5%?

Le capital c de la dette étant l'inconnue, on a

$$\log.\, c=\log.\, a+\log.\, \left[(1+r)^n-1\right]-\log.\, r-n\log.\, (1+r),$$

formule dans laquelle il faut remplacer a, n et r par leurs valeurs respectives 8000, 10 et 0,05.

Calcul de c.	*Calcul préliminaire.*
$\log. 8000 = 3{,}9030900$	$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$
$\log. [1{,}05^{10} - 1] = \bar{1}{,}7985782$	$10 \log. 1{,}05 = 0{,}2118930$
$- \log. 0{,}05 = 1{,}3010300$	
$- 10 \log. 1{,}05 = \bar{1}{,}7881070$	$1{,}05^{10} = 1{,}628895$
$\log. c = 4{,}7908052$	$1{,}05^{10} - 1 = 0{,}628895$
$c = 61773{,}93.$	

ainsi la maison est estimée au prix de 61773 fr. 93.

Deuxième exemple. — Une personne emprunte 10000 fr. à 5 %, elle voudrait les rembourser par une annuité de 1000 francs ; pendant combien d'années doit-elle payer cette annuité ?

On se sert dans ce cas de l'équation

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - cr},$$

d'où

$$n = \frac{\log. a - \log. (a - cr)}{\log. (1+r)},$$

dans laquelle on donne à a la valeur 1000, à c la valeur 10000 et à r la valeur 0,05 ; alors cr égale 500, $a - cr$ égale aussi 500, et $\frac{a}{a-cr}$ égale $\frac{1000}{500}$ ou 2. L'équation se réduit à

$$n = \frac{\log. 2}{\log. 1{,}05};$$

en calculant le quotient de cette division à une unité près, on trouve

$$n = 14 \text{ ans}.$$

La division ne se fait pas exactement, le quotient est 14 ans plus une fraction, il serait absurde d'en conclure que l'on se trouvera libéré dans le courant de la 15ième année, puisqu'on ne verse rien avant la fin. Dans ce cas on calcule l'état de la dette au bout de 14 ans, $10000\,(1{,}05)^{14} - \frac{1000\,(1{,}05^{14} - 1)}{0{,}05}$, et on la solde par un paiement à part.

EXERCICES.

I. — 1. — Quelle est la valeur de 1000 francs placés, à intérêt composé, pendant 18 ans à 5 %?

(*Rép.* 2406,62).

2. — Pendant combien d'années faut-il placer à 5 % un capital quelconque, pour le doubler en tenant compte des intérêts composés ?

(*Rép.* 14 ans, 2 mois 14 jours, en supposant n fractionnaire dans la formule $C = c(1 + r)^n$).

3. — Chercher le capital qui, augmenté de ses intérêts composés à 5 % pendant 30 ans, donnerait 20000 fr.

(*Rép.* 4627,55).

4. — On place chaque année, pendant 14 ans, une somme de 1235 francs à intérêt composé ; combien recevra-t-on au bout des 14 ans, le taux d'intérêt étant 5 %?

(*Rép.* 25414 fr. 54).

5. — Pendant combien d'années faudra-t-il placer 1000 francs, au commencement de chaque année, pour avoir 10000 francs, le taux d'intérêt étant 5 %?

(*Rép.* 7 ans.)

6. — Quelle annuité faut-il payer chaque année pour rembourser en 15 ans une dette de 20000, le taux étant 5 %?

(*Rép.* 1926 fr. 85).

7. — Une personne emprunte 200 francs qu'elle rembourse par deux annuités de 105 francs ; à quel taux d'intérêt a-t-elle fait son emprunt ?

(*Rép.* 3 fr. 32 %).

8. — Une personne place chez un banquier une somme c au commencement de chaque année pendant n années, sans toucher les intérêts à 5 %. A partir de la fin de la $(n)^{ième}$ année, le banquier lui paye pendant $2n$ années une annuité a ; 1° quelle doit être la valeur de cette annuité pour rembourser le capital placé et ses intérêts composés? — 2° Déterminer la valeur de n de manière que a soit égale à c.

(*Rép* 1° $a = \dfrac{c \times 1{,}05^{2n}}{1{,}05^n + 1}$ 2° $n = 9$ ans, 10 mois et 11 jours).

ABBEVILLE. — TYP. ET STÉR. GUSTAVE RETAUX.