CURS

DE

TRIGONOMETRIA

DE

SPIRU C. HARETU

BUCURESCI
TYPOGRAPHIA CURŢII (LUCRATORII ASSOCIATI
12, PASAGIUL ROMAN 12
1873

Tote essemplarele din prima editiune vor trebui se porte aceste doue semnaturi.

Hart Vran

Dedicata

Domnului Demetriu Botez

CA SEMN DE

PROFUNDA STIMA SI RECUNOSCINTIA

PREFATIA

Opul pe care 'l suppun aprobarii publicului erà de ua necessitate simtita in instructiune. Deca nu va puté correspunde pe deplin acestei necessitati, cel puţin va fi ua incercare care va servi cellor mai competenti, aretandule imperfectiunile de cari vor trebui se se feresca in redactarea unui alt op de aceiasi natura.

Divisiunea ce am adoptat este acea priimita de autorii francesi cei mai acreditati. In cartea antaiu se tratedia proprietatile generali alle liniilor trigonometrice; in a doua, trigonometria plana propriu-disa; in atreia, trigonometria sferica; in a patra, complementul teoriei functiunilor circulare.

Am cautat pe cât s'a putut a simplificà demonstratiunile si am insistat pretutindeni assupra aplicatiunilor, cari, fie dis in trecat, de multe ori sunt considerate numai cà un accessoriu nefolositor al teoriei, in loc de a fi privite, cum trebue se fie, cà scopul final la care tinde teoria.

In partea din urma am tratat numai questiunile celle mai essentiali pentru completarea teorielor din primele trei carti, si cari puté fi studiate fora cunoscintia algebrei superiore, care dupe programma officiale nu se propune de cât in Facultate.

Asiu fi fericit deca personele competente in materia ar bine-voi se'mi indicé inperfectiunile ce vor gassi in acesta carte, spre a o puté face cât mai propria de a satisface trebuintiele pe cari a fost destinata se le preintimpene.

Nota. Numerele insemnate cu un asteric de pe marginea paginei insemnedia paragraful la care trebue se se refere lectorul.

CURS DE TRIGONOMETRIA

Din Biblioteca lui
Menelas Caramelleu student
încetat din viaţă la anul 1895
Aug. 4. în etate de 25 ani.—

CARTEA I

STUDIUL FUNCTIUNILOR CIRCULARIE

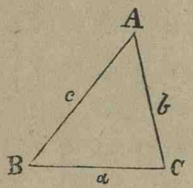
CAPITULUL 1.

Notiuni preliminarii si definitiuni.

1. *Trigonometria*, in sensul cel mai general al cuventului, are de scop cà, danduse un numer sufficient de elemente cunoscute alle unei figuri geometrice, se deė mediu-locė de a se gassi *prin calcul* elementele necunoscute alle ei. — Acesta operatiune se numesce *resolutiunea* acellei figuri.

Figurile geometrice assupra carora se aplica mai cu sema Trigonometria sunt poligonėle, fia rectilinii, fia sferice. Inse ori-ce poligon pote se se descompuna in un numer ore-care de triunghiuri prin linii dusse din un punct ore-care la tote verfurile lui; resolvend aceste triunghiuri, poligonul ensusi va fi resolvat. Prin urmare objectul trigonometriei, se reduce la *resolutiunea triunghiurilor* rectilinii seu sferice. De aci 'i vine si numele, precum si divisiunea sea naturale in *Trigonometria plana* seu *rectilinia* si *Trigonometria sferica*.

Fia triunghiul rectiliniu ABC. Elementele ori-carui triunghiu sunt in numer de siese : trei anghiuri, A, B, C, si trei laturi, a, b, c. (1)



Se scie din Geometria cà un triunghiu nu se pote construi de cât cel pucin cu trei elemente date. Prin urmare pentru a resolve un trinnghiu, este necessar se se dee cel pucin trei elemente cunoscute alle lui.

Observare. Suma unghiurilor dintr'un triunghiu rectiliniu este 180^0. Deca der ni s'ar da celle trei unghiuri alle unui triunghiu, cu aceste elemente nu am puté resolve triunghiul, câci in realitate nu ni s'au dat de cât doue elemente, unul din unghiuri fiind de sine cúnoscut deca se cunosc cele-alte duoe, prin relatia

$$A+B+C=180^0, \text{ de unde } C=180^0-(A+B).$$

Prin urmare pentru cà un triunghiu *rectiliniu* se fie *definit*, trebue ca printre cele trei elemente date ale lui se fie si cel pucin ua lature.

2. Pentru a resolve un triunghiu, este necessar mai antaiu a gassi relatiunile ce essiste intre differitele sele elemente ; ast-fel cà deca unele din aceste elemente ar fi necunoscute, se le putem afla prin nisce simple resolutii de equatiuni. Inse elementele unui triunghiu fiind parte laturi, parte unghiuri, quantitati neomogene unele cu altele, relatiunile ce am puté gassi intre dènsele nu

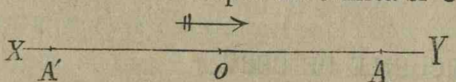
(1) In trigonometria laturile unui triunghiu se insemnedia tot-d'a-una cu literile mici alle unghiurilor la cari se opun.

pot fi destul de simple si lesniciose pentre a face cu usurintia ua resolutiune de triunghiuri. Din acesta causa in trigonometria unghiurile sè inlocuesc prin nisce linii drepte, numite *functiuni circularie directe* seu *linii trigonometrice*, si se cauta relatiuni nu intre *laturile si unghiurile triunghiului*, ci *intre laturile si liniile trigonometrice ale unghiurilor lui.*

PRINCIPIUL LUI DESCARTES.

3. Mai inainte de a intra in studiul liniilor trigonometrice vom admite principiul urmator, detorat lui Descartes, care simplifica forte mult formulele trigonometriei si inlesnesce generalisarea lor.

Fie XY ua drepta indefinita si O un punt fix pe den-

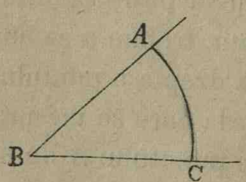


sa. Luàm puntul A pe acesta drepta si insemnàm distantia OA cu a. *Se admite ca acesta distantia se se considere ca positiva si se se insemnedie cu* + *deca se socotesce de la origine in un sens ore-care*, s. es. la drepta in sensul sagetii; si *negativa, cu semnul*—,*deca se considera in sensul opus.* — Pentru ca positia puntului A pe drepta XY se fia determinata, trebue a se cunosce trei date : 1⁰ positia pe acesta drepta a puntului fix O, care sé numesce *originea* si de la care se mesura distantiele; 2⁰ marimea a a distantiei punctului A de la acesta origine, si 3⁰ sensul in care acesta distantia este socotita de la origine. — In adever, deca cunoscem positia originei, pentru a gasi positia puntului A, la distantia $+a$ de la origina, n'avem de cât pe drepta XY in sensul sagetii se luàm ua distantia $OA = a$, si A va fi positia puntului cautat. Deca ni s'ar cere a gassi positia unui punt A' situat la distantia — *a* de la origine, am lua distantia OA' = *a* in sens contrar sagetii, si puntul cautat ar fi A'.

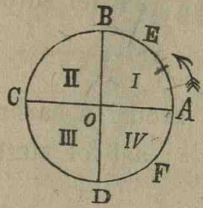
Dé aci urmedia principiul : *Deca consideram pe ua linia ore-care, drepta seu curba, diferite distantie mesurate de la ua origine comuna, fixa pe acesta linie, si deca voim a le introduce in calcul, vom affecta cu semnul + valorile numerice ale distantielor cari sunt indreptate in un sens, si cu — pe acele cari vor fi indreptate in sensul contrar.* Cu tote acestea nu vom perde din vedere cà acest principiu este numai conventional, si cà pentru a admite cu securantia generalitatea unei formule, tot va trebui a demonstra cu rigurositate cà ea essiste in differite hypotese.

ARCURILE DE CERC.

4. Se scie cà un unghiu se mesura cu arcul descris intre laturile sele, cu centrul in verful unghiului si cu ua radia arbitraria. Ast-fel mesura unghiului ABC va fi arcul AC.



In trigonometria in general unghiurile se inlocuesc cu arcurile de cerc. Aceste arcuri se mesura pe ua circumferentia a carei radia se considera tot de-una egale cu unitatea (R = 1); prin urmare, lungimea unei circumferentie cu radia R fiind $2\pi R$, in trigonometria ea va fi tot de una egală cu 2π; o semicirconferentia va fi π, si un quart de circumferentia $\frac{\pi}{2}$.



Ducund in circumferintia doue diametre perpendiculare AC si BD, acésta circumferintia va fi impartita in patru parti egale, numite *cadrane*, care porta fie-care numele de *antaiul*, *al douilea*, *al treilea*, *al patrulea cadran*. Fie-care cadran al circumferentiei se imparte in câte 90 parti egale numite *grade*; fie-care grad se imparte in 60 *minute*, fie-care minuta in 60 *secunde*. Prin urmare ua circumferintia intrega are 360 grade, seu 21600 minute, seu 1296000 secunde. Aceste diferite sub-impartiri ale circumferentiei sei nsemnedia respectiv cu ^{0}, $'$, $''$; ast-fel un arc de 15 grade 39 minute 51 secunde și 0,4 din o secunda, se insemnedia $15^0 39' 51,'' 4$.

Dė cât-va timp a inceput se se usiteze o impartire *centesimale* a circumferintiei, in locul divisiunei *sexagesimale*, espusa mai sus. Dupe acésta noua divisiune, unu cadran se imparte in 100 grade, un grad in 100 minute, ua minuta in 100 secunde; asia cà circunferintia intrega cuprinde 400 grade, seu 40,000 minute, seu 4,000,000 secunde.

Origina de la care vom socoti arcurile pe circunferentia va fi in general puntul A, la inceputul primului cadran. Sensul in care vom considera arcele ca positive va fi cel aretat de sageta, dė la primul catre al doilea cadran. Arcele socotite in sensul contrar vor fi privite ca negative. Ast-fel arcul AE va fi positiv, éra AF negativ.

ARCURI COMPLEMENTARE SI SUPLEMENTARE

5. Se numesc *arcuri complementare* doue arcuri a

caror suma este egale cu un cadran seu $\frac{\pi}{2}$; ast-fel sunt arcurile AE si EB, câci $AE + EB = \frac{\pi}{2}$.

Se numesc *arcuri suplementare* doue arcuri a caror suma este egala cu doue cadrane seu π; ast-fel sunt arcurile AE si EC, câci $AE + EC = \pi$.

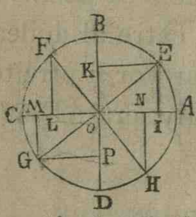
LINIILE TRIGONOMETRICE

6. Liniilé trigonometrice sunt in numer de siese: trei pentru arcele simple: *sinus*, *tangenta* si *secanta*, si tréi pentru arcele complimentare: *cosinus*, *cotangenta* si *cosecanta*.

Liniile trigonometrice nu se considera nici ua data in valore absoluta, ci sunt date tot-d'ă-una prin raportul lor catre radia; asia cand se dice cà tangenta unui arc este 3, 7, acesta insemnedia cà raportul lungimei absolute a acelei tangente catre rădia este 3,7.

SINUS

7. Se numesce *sinus* al unui arc *perpendiculara lassata din ua estremitate a arcului pe diametrul care trece prin cea alta estremitate.* Ast-fel sinusul arcului AE este EI si sé insemnedia : $EI = \sin AE$.



Ducund EK paralel cu AC avem : $EI = KO$, ca paralele coprinse intre paralele; prin urmare putem dice cà si KO este sinusul arcului AE.

Sinusurile se socotesc pe diametrul vertical BD de la originéa O*. In tot cursusul acestei *3
scrieri vom considera ca positive sinusurile socotite pe

$2K\pi = 2\pi$

π

$1/4 = \frac{\pi}{2}$

radia OB, si ca negative pe cele considerate pe OD. Ast-fel vom pune :

$$\sin AE = + EI,$$

câci EI este egal cu KO, care se afla pe partea OB a diametrului BD ; si

$$\sin ABG = - GM,$$

câci GM este egal cu OP, considerat pe partea OD a diametrului vertical BD.

8. Cand arcul merge crescund de la A pene la B, adeca de la 0 pene la $\frac{\pi}{2}$, valorea sinusului remane tot-d'a-una positiva si merge si ea crescund de la 0 in sus. Cand arcul este AB seu $\frac{\pi}{2}$, valorea sinusului este BO, adeca radia ensusi; deci

$$\sin \frac{\pi}{2} = BO = + 1.$$

Arcul trecund in al duoilea cadran si mergund de la B pene la C, valorea sinusului este tot positiva, ense merge descrescund de la 1 in jos.

Arcul ABC $= \pi$ are drept sinus pe 0, asia cà

$$\sin \pi = 0.$$

Cand arcul intra in cadranul al treilea, sinusul devine negativ, dupe conventiunea de mai sus; inse valorea arcului crescund de la ABC pene la ABCD, adeca de la π pene la $\frac{3\pi}{2}$, *valórea absoluta* a sinusului cresce si ea de la O pene la 1 asia cà

$$\sin \frac{3\pi}{2} = OD = - 1.$$

In cadranul al patrulea sinusul remane tot negativ, inse descresce in *valore absoluta* de la 1 pene la 0, adeca :

$$\sin 2\pi = 0 .$$

Prin urmare in resumat :

In primul cadran sinusul este *positiv* si variadia de la 0 pene la + 1.

In al douilea cadran sinusul este *positiv* si variadia de la + 1 pene la 0.

In al treilea cadran sinusul este *negativ* si variadia de la 0 pene la — 1.

In al patrulea cadran sinusul este *negativ* si variadia de la — 1 pene la 0.

De aci vedem cà tote valorile sinusului sunt coprinse intre limitele — 1 si + 1. Ori ce valore a sinusului mai mare de cât + 1 seu mai mica de cat — 1 nu mai este ua valore reale, ci o valore *absurda*. La o assemenea valore de sinus nu correspunde nici un arc real.

9. Deca ne am imagina cà arcul, dupe ce a percurs circumferintia intrega, ar trece de puntul A si ar percurge din nou circunferintia in acelasiu sens si de mai multe ori, am vedé cà sinusul in aceleasi cadrane ia neincetat aceleasi valori cu aceleasi semne *in un mod periodic* : dupe fie-care trecere de ua circumferintia intrega valorile si semnele sinusului se repeta Prin urmare *sinusul este ua functiune circularia periodica, si perioda sea este ua circumferentia séu* 2π.

Putem esprime acest principiu prin formula urmatore :

$$\sin (2k\pi + x) = \sin x,$$

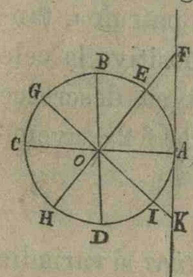
in care k insemnedia un numer intreg ore-care, positiv seu negativ.

TANGENTA

10. Se numesce *tangenta* unui arc, *portiunea tangentei geometrice dusa la una din estremitatile arcului, cuprinsa intre acesta estremitate si diametrul ce trece prin cea alta estremitate.*

Ast-fel tangenta arcului AE este AF si se insemnedia :

$$AF = \text{tg}\, AE.$$



Tangentele trigonometrice se socotesc pe tangenta geometrica FK, si puntul A este considerat cà originea lor*. Se *3
considera ca positive tangentele socotite de la originea A pe partea AF a tangentei geometrice, si ca negative cele considerate pe partea AK. Ast-fel vom pune :

$$\text{tg}\, AE = + AF \text{ si } \text{tg}\, AI = - AK.$$

11. Cand arcul merge crescund de la A pene le B, adeca de la 0 pene la $\frac{\pi}{2}$, valorea tangentei remane tot d'a-una positiva si merge si ea crescund de la 0 in sus. Cand arcul este AB seu $\frac{\pi}{2}$, diametrul ce trece prin estremitatea B a arcului, fiind paralel cu tangenta AF, o intalnesce la infinit; prin urmare

$$\text{tg}\, \frac{\pi}{2} = \infty$$

Cand arcul AG intra in cadranul al duoilea, diametrul ce trece prin estremitatea G a lui intalnesce linia tangentelor in partea sea inferiore AK; prin urmare in acest cadran tangenta este negativa. Arcul crescund de de la B spre C, tangenta descresce *in valore absoluta*, si cand arcul devine ABC, seu π. ea devine 0; deci

$$\text{tg}\, \pi = 0.$$

Arcul ABH fiind in cadranul al treilea, tangenta AF se afla pe partea positiva a liniéi tangentelor, si cresce pe cât crescé si arcul si cand acesta are valorea $\frac{\pi}{2}$ tangenta este erasi infinita; adeca :

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} = \infty$$

Indata ce arcul intra in cadranul al patrulea, tangenta trece de ua data de la valorile positive la cele negative; si cu cât cresce arcul, cu atât ea descresce in *valore absoluta*, asia cà, arcul ajungund a fi 2π, avem :

$$\operatorname{tg} 2\pi = 0.$$

In resumat :

In cadranul antaiu, tangenta este *positiva* si variadia de la 0 pene la $+\infty$.

In cadranul al duoilea, tangenta este *negativa*. si variadia de la $-\infty$ pene la 0.

In cadranul al treilea, tangenta este *positiva*, si variadia de la 0 pene la $+\infty$,

In cadranul al patrulea, tangenta este *negativa* si variadia de la $-\infty$ pene la 0.

Vedem der cà tangenta pote se ia tote valorile posibile de la $-\infty$ pene la $+\infty$, si prin urmare la ori-ce valore reale a tangentei correspunde o valore reale pentru arc.

12. Deca ne am imagina cà arcul, dupe ce a percurs circumferentia intrega, ar trece de punctul A si ar percurge din nou circunferentia in acelasiu sens si de mai multe ori am vedé cà tangenta din doue in doue cadrane ia neincetat aceleasi valori cu aceleasi semne in un *mod periodic*. Prin urmare *tangenta este ua functiune*

circularia periodica si perioda sea este ua semi circumferentia seu π.

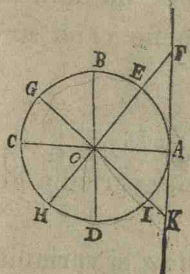
Putem esprime acest principiu prin formula urmatore :

$$\operatorname{tg}(k\pi + x) = \operatorname{tg} x,$$

in care k representa un numer intreg ore-care, positiv seu negativ.

SECANTA

13. Se numesce *secanta* a unui arc *distantia de la centrul acelui arc pene la estremitatea tangentei sele trigonometrice.* Ast-fel tangenta arcului AE este AF, era secanta lui este OF, si se notedia: OF = sec AE.



Originea secantelor este centrul O. Elle sunt positive deca intalnesc linia tangentelor, trecund chiar prin estremitatea arcului ; ast-fel secanta OF a arcului AE este positiva, câci trece prin estremitatea E a acestui arc. Din contra, secanta este negativa deca, pentru a intalni linia tangentelor, trebue prelungita in partea opusa estremitatii arcului ; ast-fel secanta OK a arcului AG este negativa, câci nu trece ea insasi prin estremitatea G a arcului, ci numai prelungirea sea.

14. Cand arcul este 0, secanta este OA seu $+1$; adeca

$$\sec 0 = +1.$$

Arcul crescund in cadranul antaiu pene la B, secanta cresce si ea, remanend neincetat positiva, si cand arcul devine $\frac{\pi}{2}$ seu AB, estremitatea tangentei fiind la infinit, dupe cum scim*, avem :

*11

$$\sec \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Cand arcul intra in cadranul al duoilea, secanta trece de ua data de la valorile positive la cele negative, si cu cât cresce arcul, cu atât ea descresce in *valore absoluta* Cand arcul devine ABC seu π, secanta este OA seu — 1, adeca :

$$\sec \pi = -1.$$

In cadranul al treilea, secanta este tot negativa, inse merge crescund in *valore absoluta*, cu cât cresce si arcul; asia cà, cand arcul este de trei cadrane, secanta este erasi infinita; seu

$$\sec \frac{3\pi}{2} = -\infty.$$

In cadranul al patrulea secanta trece de ua data la valorile positive si descresce de la $+\infty$ pene cand arcul ajungund a fi 2π, avem :

$$\sec 2\pi = +1.$$

In resumat,

In primul cadran secanta este *positiva* si variadia de la $+1$ pene la $+\infty$.

In al douilea cadran secanta este *negativa* si variadia de la $-\infty$ pene la -1.

In al treilea cadran secanta este *negativa* si variadia de la -1 pena la $-\infty$.

In al patrulea cadran secanta este *positiva* si variadia de la $+\infty$ pene la $+1$.

Vedem der cà secanta pote se aiba tote valorile possibile de la $-\infty$ pene la $+\infty$, afora de cele coprinse intre -1 si $+1$. Ori-ce valore a secantei coprinsa intre -1 si $+1$ numai este ua valore reale, ci ua valore *absurda*, si nici un arc reale nu correspunde la ua assemenea valore a secantei.

15. Presupunend cà arcul ar percurge circumferentia

de mai multe ori si in acelasiu sens, am vedé indata cà secanta reia neincetat acelleasi valori cu aceleasi semne *in un mod periodic* dupe fie-care interval de ua circumferentia intrega. Prin urmare *secanta este ua functiune circularia periodica, si perioda sea este ua circumferentia intrega seu* 2π.

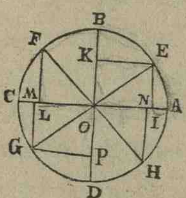
Putem esprime acest principiu prin formula :

$$\sec(2k\pi + x) = \sec x,$$

in care k represinta un numer intreg ore-care, positiv seu negativ.

COSINUS

16. Se numesce *cosinus* al unui arc *sinusul arcului seu complementar*. Fie s. e. arcul AE ; arcul complementar al acestuia este EB, si dupe definitiunea sinusului avem :



$$EK = \sin EB ;$$

prin urmare

$$EK = \cos AE$$

Observàm cà $EK = IO$; prin urmare putem inca defini cosinusul cà este *distantia de la centru pene la piciorul sinusului.*

Cosinusurile se socotesc pe diametrul orizontal AC de la originea O*. Sunt positive cosinusurile socotite pe *3
partea din drepta OA a diametrului, si negative celle socotite pe partea OC. Avem ast-fel :

$$\cos AE = +OI, \text{ si } \cos AF = -OL.$$

17. Deca arcul este 0, cosinusul fiind distantia de la centru la estremitatea sinusului, avem :

$$\cos 0 = AO, \text{ seu } \cos 0 = +1$$

Arcul crescund in primul cadran, cosinusul remane neincetat positiv, inse descresce; asia incât, cand arcul este AB seu $\frac{\pi}{2}$, sinusul BO cadiend chiar in centru, avem :

$$\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

În cadranul al doilea, cosinusul este negativ, si cu cât cresce arcul, cresce si el *in valore absoluta*; cand arcul este ABC seu π, avem :

$$\cos\pi = OC, \text{ seu } \cos\pi = -1.$$

În cadranul al treilea cosinusul este tot negativ; inse cu cât cresce arcul, el descresce *in valore absoluta*, asia cà, cand arcul este ABCD seu $\frac{3\pi}{2}$, avem :

$$\cos\frac{3\pi}{2}=0.$$

În cadranul al patrulea cosinusul este positiv; si cu cât cresce arcul, cresce si el; cand arcul este 2π, avem :

$$\cos 2\pi = +1.$$

În resumat :

În cadranul antaiu cosinusul este *positiv* si variadia de la $+1$ pene la 0.

În cadranul al doilea cosinusul este *negativ* si variadia de la 0 pene la -1.

În cadranul al treilea cosinusul este *negativ* si variadia de la -1 pene la 0.

În cadranul al patrulea cosinusul este *positiv* si variadia de la 0 pene la $+1$.

Tote valorile cosinusului sunt coprinse, ca si alle sinusului, intre $+1$ si -1. Ori-ce valore a cosinusului mai mare de cât $+1$ seu mai mica de cât -1 nu mai este ua valore reale, si nici un arc reale nu correspunde la ua assemenea valore de cosinus.

18. Deca arcul, trecund de puntul A, ar percurge circumferentia de mai multe ori si in acellasiu sens, am vedé cà cosinusul, dupe fie-care trecere de ua circumferentia intrega, reia acelleasi valori cu acelleasi semne *in un mod periodic*. Prin urmare *cosinusul este ua functiune circularia periodica si perioda sea este* 2π.

Acest principiu se espreme prin formula :

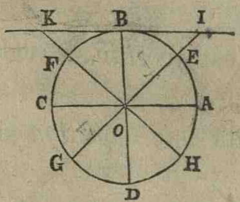
$$\cos(2k\pi + x) = \cos x,$$

k fiind un número intreg ore-care, positiv seu negativ.

COTANGENTA

19. *Cotangenta* unui arc este *tangenta arcului seu complementar*. Ast-fel complementul arcului dat AE este EB, a carui tangenta este BI, considerand puntul B ca origine ; prin urmare :

$$BI = \text{tg}\, BE, \text{ seu } BI = \cot AE.$$



Cotangentele se socotesc pe tangenta KI, dusa la inceputul cellui de al doilea cadran. Originea este punctul B. Cotangentele socotite la drepta de acest punct pe partea BI sunt positive, era celle socotite la stanga pe partea BK sunt negative. Asia: $\cot AE = +BI$, si $\cot AF = -BK$.

20. Arcul dat fiind 0, avem :

$$\cot 0 = +\infty, \text{ câci } \cot 0 = \text{tg}\, 90^0 = +\infty.$$

Arcul crescund in primul cadran, cotangenta remane positiva si descresce neincetat pene la 0, adeca :

$$\cot\frac{\pi}{2} = 0.$$

In cadrannl al doilea cotangenta este negativa, si cresce *in valore absoluta* de la 0 pene la $-\infty$; acesta valore o aré cand arcul este ABC seu π, adeca :

$$\cot \pi = -\infty .$$

Arcul ABG trecund in cadranul al treilea, cotangenta trece de ua data de la valorile negative la celle positive; inse cu cât cresce arcul, ea descresce; asia cà, cand arcul este ABCD seu $\frac{3\pi}{2}$, avem :

$$\cot \frac{3\pi}{2} = 0.$$

In cadranul al patrulea cotangenta este erasi negativa, si cresce *in valore absoluta* de la 0 in sus, pene cand arcul fiind 2π; avem :

$$\cot 2\pi = -\infty .$$

In resumat :

In cadranul antaiu, cotangenta este *positiva* si variadia de la $+\infty$ pene la 0.

In cadranul al doilea, cotangenta este *negativa* si variadia de la 0 pene la $-\infty$.

In cadranul al treilea, cotangenta este *positiva* si variadia de la $+\infty$ pene la 0.

In cadranul al patrulea, cotangenta este *negativa* si variadia de la 0 pene la $-\infty$.

Prin urmare cotangenta, ca si tangenta, este susceptibile de a priimi tote valorile possibile de la $-\infty$ pene la $+\infty$, si la ori-ce valore reale a cotangentei corespunde un arc reale.

21. Deca arcul ar percurge de mai multe ori circumferentia in acellasiu sens, am vedé cà valorile cotangentei revin cu acelleasi semne din doue in doue cadrane *in un mod periodic;* asia dera *cotangenta este ua*

functiune circularia periodica cu perioda π; principiu ce se pote esprime prin formula :

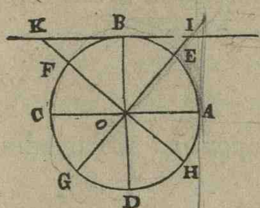
$$\cot(k\pi + x) = \cot x,$$

unde k este erasi un numer intreg ore-care, positiv seu negativ.

COSECANTA

22. *Cosecanta* unui arc se numesce *secanta arcului seu complementar*. Asia, secanta arcului BE, complementar arcului dat AE, este OI; acesta este dera cosecanta arcului AE, si se notedia :

$$\mathrm{OI} = \operatorname{cosec} \mathrm{AE}.$$



Dupe figura vedem cà cosecanta se pote inca defini : *distantia de la centru pene la estremitatea cotangentei.*

Originea cosecantelor este centrul O. Cosecanta este positiva deca intalnesce linia cotangentelor trecund chiar prin estremitatea arcului dat; si este negativa, deca pentru a intalni acesta linia a cotangentelor, trebue prelungita in partea opusa estremitatii arcului. Asia avem :

$$\operatorname{cosec} \mathrm{AE} = +\mathrm{OI}, \text{ si } \operatorname{cosec} \mathrm{ABG} = -\mathrm{OI}.$$

23. Cand arcul este 0, estremitatea cotangentei fiind la infinit*, avem : *20

$$\operatorname{cosec} 0 = +\infty.$$

Inse cu cât arcul cresce in primul cadran, cosecanta descresce, remanand neincetat positiva; si cand arcul este AB seu $\frac{\pi}{2}$, avem :

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = \mathrm{OB}, \text{ seu } \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = +1,$$

In cadranul al doilea cosecanta este tot positiva, si cresce neincetat pène cand arcul ajunge a fi ABC seu π; atunci avem :

$$\operatorname{cosec} \pi = + \infty.$$

In cadranul al treilea, cosecanta trece de o data la valorile negative, si descresce *in valore absoluta* de la $-\infty$ pene la -1, cu cât arcul cresce de la π pene la $\frac{3\pi}{2}$, avend

$$\operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = -1$$

In fine, in cadranul al patrulea, cosecanta fiind tot negativa, cresce *in valore absoluta* de la -1 pene la $-\infty$, avend acesta din urma valore cand arcul este 2π, adeca :

$$\operatorname{cosec} 2\pi = -\infty.$$

In resumat :

Iu primul cadran, cosecanta este *positiva* si variadia de la $+\infty$ pene la $+1$.

In al doilea cadran, cosecanta este *positiva* si variadia de la $+1$ pena la $+\infty$.

In al treilea cadran, cosecanta este *negativa* si variadia de la $-\infty$ pene la -1.

In al patrulea cadran, cosecanta este *negativa* si variadia de la -1 pene la $-\infty$.

Prin urmare cosecanta, ca si secanta, priimesce tote valorile possibile de la $-\infty$ pene la $+\infty$, afara de celle coprinse intre -1 si $+1$. Ori-ce valore a cosecantei coprinsa intre -1 si $+1$ nu mai este ua valore reale, si nici nu are reale nu correspunde la ua assemenea valore a cosecantei.

24. Presupunend cà arcul percurge de mai multe ori

circumferentia in acellasiu sens, vedem cà cosecanta reia neincetat acelleasi valori cu acelleasi semne *in un mod periodic* la fie-care interval de ua circumferentia intrega. Prin urmare *cosecanta este ua functiune circularia periodica, si perioda sea este ua circumferentia intrega seu* 2π.

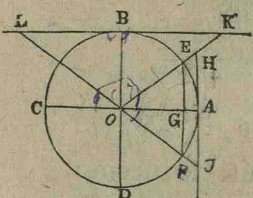
Acèst principiu se esprime prin formula :

$$\operatorname{cosec}(2k\pi + x) = \operatorname{cosec} x,$$

k fiind un numer intreg ore-care, positiv seu negativ.

LINIILE TRIGONOMETRICE ALLE ARCELOR EGALE SI DE SEMNE CONTRARIE

25. **Teorema**. *Arcele egale si de semne contrarie au linii trigonometrice egale si de semne contrarie, afora de cosinus si secanta, cari sunt si de acellasiu semn.*



Fie arcele AE si AF, egale si de semne contrarie*. Avem : *1

$$\begin{array}{ll}
\sin AE = EG, & \sin AF = FG, \\
\cos AE = OG, & \cos AF = OG, \\
\operatorname{tg} AE = AH, & \operatorname{tg} AF = AI, \\
\sec AE = OH, & \sec AF = OI, \\
\cot AE = BK, & \cot AF = BL, \\
\operatorname{cosec} AE = OK, & \operatorname{cosec} AF = OL.
\end{array}$$

Triangurile OEG si OGF sunt egale, câci OE = OF ca radie; anghiurile EOG si GOF sunt egale, câci AE = AF, si anghiurile EGO si OGF sunt egale, ca drepte; prin urmare :

$$EG = GF, \text{ seu } \sin AE = \sin AF.$$

Considerand inse sensul acestor doue sinusuri*, avem : *7

$$\sin AE = -\sin AF.$$

In acelleasi triunghiuri OG fiind comun, avem :

$$OG = OG, \text{ seu } \cos AE = \cos AF.$$

16 Semnele sunt acelleasi la ambele cosinusuri.

Triunghiurile OHA si OAI sunt egale, câci OA este comun la amendoue, anghiurile HOA si AOI sunt egale din date, si HAO = OAI ca drepte; prin urmare:

$$AH = AI, \text{ seu } \operatorname{tg} AE = \operatorname{tg} AF.$$

10 Considerand inse sensul acestor doue tangente, avem:

$$\operatorname{tg} AE = -\operatorname{tg} AF.$$

Din acelleasi triunghiuri avem :

$$OH = OI, \text{ seu } \sec AE = \sec AF.$$

13 Semnele ambelor secante sunt acelleasi.

Triunghiurile dreptunghie OBK si OBL sunt egale, câci OB este comun, si BOK=BOL, din causa cà BOK = 90^0 −KOA, si BOL = 90^0 − LOC = 90^0 — KOA. Din egalitatea acestor triunghiuri resulta :

$$BK = BL, \text{ seu } \cot AE = \cot AF.$$

19 Considerand inse semnele, avem :

$$\cot AE = -\cot AF.$$

Din egalitatea acelorasi triunghiuri deducem :

$$OK = OL, \text{ seu } \operatorname{cosec} AE = \operatorname{cosec} AF,$$

22ori,

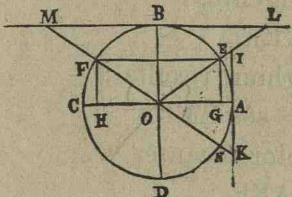
$$\operatorname{cosec} AE = -\operatorname{cosec} AF.$$

Asia dera, pe basea acestei teoreme, putem pune relatiunile :

$$\sin x = -\sin(-x), \qquad \cot x = -\cot(-x),$$
$$\cos x = \cos(-x), \qquad \sec x = \sec(-x),$$
$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x), \qquad \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec}(-x).$$

LINIILE TRIGONOMETRICE ALLE ARCELOR SUPPLEMENTARIE

26. **Teorema**. *Doue arce supplementarie au linii trigonometrice egale si de semne contrarie, afora de sinus si cosecanta, cari sunt si de acelleasi semne.*



Fie arcele AE si EFC ast-fel cà $AE + EFC = \pi$.

Ducund EF paralel cu AC, avem :

$$EFC = EF + FC, AEF = AE + EF, \text{ si } FC = AE;$$

deci :

$$EFC = AEF.$$

Asia dera in locul arcelor date AE si EFC, putem considera arcele AE si AEF.

Dupe figura avem :

$\sin AE = EG$,	$\sin AEF = FH$,
$\cos AE = OG$,	$\cos AEF = OH$,
$\operatorname{tg} AE = AI$,	$\operatorname{tg} AEF = AK$,
$\sec AE = OI$,	$\sec AEF = OK$,
$\cot AE = BL$,	$\cot AEF = BM$,
$\operatorname{cosec} AE = OL$;	$\operatorname{cosec} AEF = OM$.

Triunghiurile dreptunghie OEG si OFH sunt egale câci $OE = OF$, ca radie, si unghiurile EOG si FOH sunt egale din causa cà $EA = FC$; prin urmare :

$$EG = FH, \text{ seu } \sin AE = \sin AEF$$

si semnele ambelor sinusuri sunt acelleasi.

Din acelleasi triunghiuri avem :

$$OG = OH, \text{ seu } \cos AE = \cos AEF,$$

si considerand sensul ambelor cosinusuri,

$$\cos AE = -\cos AEF.$$

Triunghiurile dreptunghie OAI si OAK sunt egale, câci OA este comun, si unghiurile IOA si AOK sunt egale pentru cà AE = FC = AN; asia dera:

$$AI = AK, \text{ seu } \operatorname{tg} AE = \operatorname{tg} AEF,$$

si considerand sensul ambelor tangente,

$$\operatorname{tg} AE = -\operatorname{tg} AEF.$$

Din egàlitatea acellorasi triunghiuri resulta:

$$OI = OK, \text{ seu } \sec AE = \sec AEF,$$

si din consideratia sensului ambelor secante,

$$\sec AE = -\sec AEF.$$

Triunghiurile OBL si OBM sunt egale, câci OB este comun, si unghiurile BOL si BOM sunt egale, pentru cà BOL $= 90^0 -$ EOA, si BOM $= 90^0 -$ FOC, era EOA $=$ FOC; prin urmare:

$$BL = BM, \text{ seu } \cot AE = \cot AEF,$$

si considerand sensul,

$$\cot AE = -\cot AEF.$$

Din egalitatea acelorasi triunghiuri,

$$OL = OM, \text{ seu } \operatorname{cosec} AE = \operatorname{cosec} AEF.$$

Semnele sunt acelleasi la ambele cosecante*. *22

Pe basea acestei teoreme putem dera pune relatiunile:

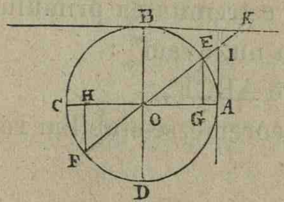
$\sin x = \sin(\pi - x)$, $\cot x = -\cot(\pi - x)$,
$\cos x = -\cos(\pi - x)$, $\sec x = -\sec(\pi - x)$,
$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$, $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(\pi - x)$.

LINIILE TRIGONOMETRICE ALLE ARCELOR CARI DIFERA INTRE ELLE CU UA SEMICIRCUMFERENTIA

27. **Teorema**. *Arcele care differa intre densele cu ua*

semicircumferintia au linii trigonometrice egale si de semne contrarie, afora de tangenta si cotangenta, cari au si acelasiu semn.

Fie arcele AE si ABCF ast-fel cà ABCF — AE = ECF = π Avem :



sin AE = EG,
cos AE = OG,
tg AE = AI,
sec AE = OI,
cot AE = BK,
cosec AE = OK;

sin ABCF = FH,
cos ABCF = OH,
tg ABCF = AI,
sec ABCF = OI,
cot ABCF = BK,
cosec ABCF = OK.

Triunghiurile dreptunghie OEG si OHF sunt egale, câci OE = OF ca radie, si unghiurile EOG si HOF sunt egale ca opuse la verf; prin urmare :

EG = FH, seu sin AE = sin ABCF,

si luand in consideratiune semnele,

sin AE = — sin ABCF.

Din egalitatea acellorasi triunghiuri avem :

OG = OH, seu cos AE = cos ABCF,

si din causa sensului ambelor cosinusuri,

cos AE = — cos ABCF.

Tangenta arcului AE este AI, si a arcului ABCF tot AI; prin urmare :

tg AE = tg ABCF.

Cotangenta arcului AE, precum si a arcului ABCF, este BK; asia-dera

cot AE = cot ABCF.

Secanta arcului AE este OI, care trece prin estremitatea E a arcului; secanta arcului ABCF este tot OI, *13 inse nu trece prin estremitatea F a lui; prin urmare*

$$\sec AE = -\sec ABCF.$$

Assemenea OK este cosecanta si a lui AE si a lui ABCF; inse fiiud-cà trece prin estremitatea primului *22 arc, era prin a cellui de al doilea nu, avem* :

$$\operatorname{cosec} AE = -\operatorname{cosec} ABCF.$$

Putem dera, pe basea acestei teoreme, se stabilim relatiunile urmatore :

$$\sin x = -\sin(\pi + x), \qquad \cot x = \cot(\pi + x),$$
$$\cos x = -\cos(\pi + x), \qquad \sec x = -\sec(\pi + x),$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\pi + x), \qquad \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec}(\pi + x),$$

REDUCEREA ARCELOR LA PRIMUL CADRAN

28. Se intempla de multe ori se se cera liniile trigonometrice alle unui arc mai mare de cât un cadran, une-ori chiar coprindiend mai multe circumferentie. Cu ajutorul teoremelor precedente putem inse tot-de-una gasi un arc mai mic de cât un cadran, alle carui linii trigonometrice se aiba aceasi valore absoluta ca si liniile trigonometrice alle arcului dat.

Fie, spre essemplu, a se gassi liniile trigonometrice alle arcului de 1953^0. Impartind acest arc cu 360^0, gassim cà :

$$1953^0 = 5 \times 360^0 + 153^0, \text{ seu } 1953^0 = 5 \times 2\pi + 153^0;$$

9,12, 15,18, 21,24 prin urmare

$$\sin 1953^0 = \sin 153^0, \qquad \cot 1953^0 = \cot 153^0,$$
$$\cos 1953^0 = \cos 153^0, \qquad \sec 1953^0 = \sec 153^0,$$

$$\text{tg } 1953^0 = \text{tg } 153^0, \qquad \text{cosec } 1953^0 = \text{cosec } 153^0,$$

si fiind-cà $153^0 = 180^0 - 27^0$, avem* : *26

$$\begin{aligned}
\sin 1953^0 &= \sin 153^0 = \sin 27^0,\\
\cos 1953^0 &= \cos 153^0 = -\cos 27^0,\\
\text{tg } 1953^0 &= \text{tg } 153^0 = -\text{tg } 27^0,\\
\cot 1953^0 &= \cot 153^0 = -\cot 27^0,\\
\sec 1953^0 &= \sec 153^0 = -\sec 27^0,\\
\text{cosec } 1953^0 &= \text{cosec } 153^0 = \text{cosec } 27^0.
\end{aligned}$$

Fie inca arcul de 2375^0; avem :

$$2375^0 = 6 \times 360^0 + 215^0 = 6 \times 2\pi + 215^0,$$

$$\text{si } 215^0 = 180^0 + 35^0;$$

prin urmare*, *27

$$\begin{aligned}
\sin 2375^0 &= \sin 215^0 = -\sin 35^0,\\
\cos 2375^0 &= \cos 215^0 = -\cos 35^0,\\
\text{tg } 2375^0 &= \text{tg } 215^0 = \text{tg } 35^0,\\
\cot 2375^0 &= \cot 215^0 = \cot 35^0,\\
\sec 2375^0 &= \sec 215^0 = -\sec 35^0,\\
\text{cosec } 2375^0 &= \text{cosec } 215^0 = -\text{cosec } 35^0.
\end{aligned}$$

Fie in fine arcul de 1388^0; avem :

$$1388^0 = 4 \times 360^0 - 52^0 = 4 \times 2\pi - 52^0;$$

asia-dera* *25

$$\begin{aligned}
\sin 1388^0 &= \sin(-52^0) = -\sin 52^0,\\
\cos 1388^0 &= \cos(-52^0) = \cos 52^0,\\
\text{tg } 1388^0 &= \text{tg}(-52^0) = -\text{tg } 52^0,\\
\cot 1388^0 &= \cot(-52^0) = -\cot 52^0,\\
\sec 1388^0 &= \sec(-52^0) = \sec 52^0,\\
\text{cosec } 1388^0 &= \text{cosec}(-52^0) = -\text{cosec } 52^0,
\end{aligned}$$

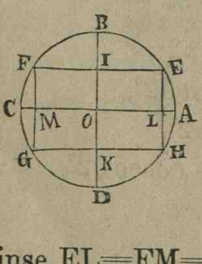
ARCELE CARI CORRESPUND LA UA LINIA TRIGONOMETRICA DATA.

29. Când ni se dà un arc, nu putem avé de cât ua singura valore pentru fie-care linia trigonometrica a sea. Nu este inse tot asia cand ni se dà ua linia trigonometrica si se cere a se gasi arcul correspundiator la densa. In adever, scim cà functiunile circularie sunt tote periodice; prin urmare la ua valore a unei linii trigonometrice nu corespunde numai un arc, ci ua multime de arce cari differa intre densele cu un multiplu al periodei.

Se se gasesca, spre essemplu, arcul al carui sinus are valorea a; fie l un arc al carui sinus are acesta valore. Inse sinusul avend perioda 2π, nu numai arcul l va avé sinusul a, ci si arcele $2\pi+l$, $4\pi+l$, $6\pi+l$,....... Prin urmare gasim pentru arcul cautat ua multime de valori cari implinesc cererea. Acellasiu lucru se intempla si pentru tote celle alte linii trigonometrice.

De ordinar inse, cand se dà ua linia trigonometrica, dintre tote arcele cari correspund la densa, nu se iaú de cât celle coprinse între 0^0 si 360^0, si cu modul acesta se reduce numerul arcelor cari respund la cerere.

Dandu-se sinusul unui arc, se se gasesca arcul.



Deca sinusul dat a este positiv, pe radia OB luàm $OI=a$, si prin I ducem FE paralel cu CA; arcul cautat este AE seu AF; câci deca din E si F lasàm E L si F M perpendiculare pe AC,

$$EL = \sin AE, \text{ si } FM = \sin AF;$$

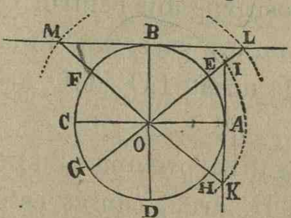
inse $EL=FM=OI=a$; prin urmare AE și AF sunt in adever arcurile al caror sinus este $+a$.

Deca sinusul dat a este negativ, luàm pe radia OD ua lungime OK$=a$, si ducund prin K linia GH paralela cu AC, arcul cautat este ABG seu ABCDH; câci MG$=$OK$=-a=$sin ABG, si LH$=$OK$=-a=$sin ABCDH.

Dandu-se cosinusul unui arc, se se gasesca arcul

Constructiunea este analoga cu cea data pentru sinus. Deca cosinusul a este positiv, luàm pe radia OA lungimea OL$=a$, si ducund prin L pe EH paralel cu BD, arcul cautat este AE seu ABCDH. — Deca cosinusul dat a este negativ, luàm pe OC lungimea OM$=a$, si prin M ducem FG paralel la BD; arcul cautat este ABF seu ABCG.

Dandu-se tangenta unui arc, se se gasesca arcul.



Deca tangenta data a este positiva, pe partea positiva AI a liniei tangentelor luàm AI$=a$, si prin I si O ducem IG; arcul cautat este AE seu ABCG; câci deca vom construi tangentele acestor doue arce, vom gasi cà ambele au drept tangenta pe AI$=a$.

Deca a este negativ, pe partea negativa AK a liniei tangentelor luàm AK$=a$, si ducund KF prin centru, arcul cautat este AF sau ABCDH; câci amendoue aceste arce au drept tangenta pe AK$=a$.

Dandu-se cotangenta unui arc, se se gasesca arcul.

Cotangenta a fiind positiva, luàm pe partea positiva BL a liniei cotangentelor BL$=a$, si ducund LG, arcul cautat este AE sau ABCG. — Deca cotangenta data este negativa, luand pe partea negativa BM a liniei cotangentelor BM=—a, ducem MH; atunci arcul cautat este AF seu ABCDH.

Dandu-se secanta unui arc, se se gasesca arcul.

Deca secanta a este positiva, din centrul O cu ua radia egale cu a descriem un arc care taia linia tangentelor in punctele I si K; unind IO si KO, arcul cautat este AE seu ABCDH; in adever, secantele acestor doue arce sunt + IO=+a si + OK=+a.

Deca secanta a era negativa, constructiunea era aceeasi; inse prelungind pe IO pene in G si pe KO pene in F, arcul cautat era AF seu ABCG.

Dandu-se cosecanta unui arc, se se gasesca arcul.

Deca cosecanta data a este positiva, din centrul O cu ua radia egale cu a descriem un arc care taia linia cotangentelor in punctele L si M; unind LO si MO, arcul cautat este AE seu AF.

Deca cosecanta data a este negativa, prelungindu pe LO pene in G si pe MO pene in H, arcul cautat este ABCG seu ABCDH.

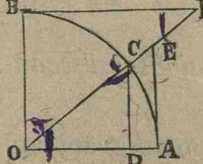
CAPITOLUL II.

—

FORMULE FUNDAMENTALE

Relatiuni intre liniile trigonometrice alle aceluiasiu arc.

30. Fia arcul AC$=a$; liniile sele trigonometrice sunt:



CD$=\sin a$, BF$=\cot a$,
OD$=\cos a$, OE$=\sec a$,
AE$=\operatorname{tg} a$, OF$=\operatorname{cosec} a$.

Trianghiul OCD, fiind dreptanghiu in D, dà:

$$\overline{CD}^2+\overline{OD}^2=\overline{OC}^2, \text{ seu, } \sin^2 a+\cos^2 a=1, \qquad (1)$$

câci OC este radia. Prin urmare *suma patratelor sinusului si cosinusului unui arc este egale cu unitatea.*

Din (1) putem deduce inca:

$$\sin^2 a=1-\cos^2 a, \text{ seu } \sin a=\pm\sqrt{1-\cos^2 a}, \qquad (a)$$

$$\cos^2 a=1-\sin^2 a, \text{ seu } \cos a=\pm\sqrt{1-\sin^2 a}, \qquad (b)$$

Trianghiurile OCD si OEA sunt assemeni, câci au anghiul O comun, si pe celle-altè egale ca correspondente; prin urmare: *

$$\frac{EA}{CD}=\frac{OA}{OD}, \text{ seu } \frac{tga}{sina}=\frac{1}{cosa},$$

ori, immultind ambii membri cu sin a,

$$tga=\frac{sina}{cosa}, \qquad (2)$$

adeca *tangenta unui arc este egale cu raportul sinusului catre cosinusul acelui arc.*

Din assemenarea acelorasi trianghiuri avem:

$$\frac{OE}{OC}=\frac{OA}{OD}, \text{ seu } \frac{seca}{1}=\frac{1}{cosa},$$

ori in fine

$$cosa\ seca=1. \qquad (3)$$

Din (3) putem inca scote, impartind cu cos a:

$$seca=\frac{1}{cosa}, \qquad (c)$$

si impartind cu sec a:

$$cosa=\frac{1}{seca}. \qquad (d)$$

Din aceste doue formule vedem cà *cosinusul si secanta unui arc sunt inverse una alteia.*

Trianghiurile OBF si OCD sunt assemeni, câci anghiurile din B si D sunt egali ca drepte, si celle din F si O ca alterne-interne; prin urmare

$$\frac{BF}{OD}=\frac{OB}{CD}, \text{ seu } \frac{cota}{cosa}=\frac{1}{sina},$$

de unde, immultind ambii membri cu cos a,

$$cota=\frac{cosa}{sina}, \qquad (4)$$

adeca *cotangenta unui arc este egale cu raportul cosinusului catre sinusul acelui arc.*

Din assemenarea acelorasi trianghiuri avem inca:

$$\frac{OF}{OC}=\frac{OB}{CD}, \text{ seu } \frac{\operatorname{cosec}a}{1}=\frac{1}{\sin a},$$

ori

$$\sin a \operatorname{cosec}a=1. \tag{5}$$

Din (5) putem inca deduce, deca impartim cu cosec a:

$$\sin a=\frac{1}{\operatorname{cosec}a}, \tag{e}$$

era impartind cu sin$a$,

$$\operatorname{cosec}a=\frac{1}{\sin a}. \tag{f}$$

Din aceste doue formule se vede cà *sinusul si cosecanta unui arc sunt inverse una alteia.*

Immultind (2) si (4) membru cu membru, avem:

$$\operatorname{tg}a \operatorname{cot}a=\frac{\sin a \cos a}{\cos a \sin a}=1,$$

din care putem scote urmatorele doue formule:

$$\operatorname{tg}a=\frac{1}{\operatorname{cot}a}, \tag{g}$$

$$\operatorname{cot}a=\frac{1}{\operatorname{tg}a}. \tag{h}$$

Prin urmare *tangenta si cotangenta unui arc sunt inverse una alteia.*

Formulele (1), (2), (3), (4), (5), impreuna cu celle ce am derivat pené acum dintr'ensele, sunt de un us forte des in trigonométria, din care causa se si numesc *formule trigonometrice fundamentale.*

FORMULE CORRELATIVE

31. Sub acest nume se intelege *ua seria de formule prin cari esprimem ua linia trigonometrica ore care a unui arc in functiune de ua alta linia trigonometrica a a-*

celui arc. Aceste formule sunt in numer de trei-dieci, si se deduc din formulele deja aflate:

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} a=\frac{\sin a}{\cos a}, \tag{2}$$

$$\sec a=\frac{1}{\cos a}, \tag{3}$$

$$\cot a=\frac{\cos a}{\sin a}, \tag{4}$$

$$\operatorname{cosec} a=\frac{1}{\sin a}. \tag{5}$$

Deca una din liniile trigonometrice alle arcului este cunoscuta, cele-alté cinci vor puté se se afle resolvend celle cinci equatiuni de sus. Prin urmare problema se pote deslega tot-de-una.

1°. *Dandu-se sinusul unui arc, se se gasesca celle-alte linii trigonometrice alle arcului.*

Valorea cosinusului se scote din (1); avem:

$$\cos a=\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$$

Substituind acesta valore a cosinusului in (2), (3), (4), vom avé valorea tangentei, secantei si cotangentei in functiune de sinus:

$$\operatorname{tg} a=\pm\frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}},\quad \sec a=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}},\quad \cot a=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$$

si dupe (5),

$$\operatorname{cosec} a=\frac{1}{\sin a}.$$

2°. *Dandu-se cosinusul, se se afle cele-alte linii trigonometrice.*

Din (1) avem:

$$\sin a=\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$$

espressiune a sinusului in functiune de cosinus. Substituind aceste valore in (2), (4), (5), vom avé si espressiunea tangentei, cotengentei si cosecantei in functiune de cosinus:

$$\mathrm{tg}a=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a},\ \cot a=\pm\frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}\cdot\ \mathrm{cosec}a=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$$

si dupe (3),

$$\sec a=\frac{1}{\cos a}$$

3°. *Dandu-se tangenta, se se afle celle alte linii trigonometrice.*

Equatiunea (2) dà:

$$\sin a=\cos a\ \mathrm{tg}a, \tag{A}$$

seu

$$\sin^2 a=\cos^2 a\ \mathrm{tg}^2 a.$$

Punem acesta valore in (1), si avem:

$$\cos^2 a\ \mathrm{tg}^2 a+\cos^2 a=1,\ \text{seu}\ \cos^2 a\,(1+\mathrm{tg}^2 a)=1,$$

de unde

$$\cos a=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}}$$

Punend acesta valore in (A) vom avé valorea lui $\sin a$:

$$\sin a=\pm\frac{\mathrm{tg}\,a}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}} \tag{B}$$

Din (3) avem:

$$\sec a=\frac{1}{\cos a};$$

substituind in locul lui $\cos a$ valorea sea,

$$\sec a=\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}.$$

Equatiunea (5) dà:

$$\text{cosec}a=\frac{1}{\sin a},$$

si dupe (B),

$$\text{cosec}a=\frac{\sqrt{1+\text{tg}^2a}}{\text{tg}a}.$$

30 In fine equatiunea (h) dà:

$$\cot a=\frac{1}{\text{tg}a}.$$

4^0. *Dandu-se cotangenta, se se afle cele-alte linii trigonometrice.*

Din (4) avem:

$$\cos a=\sin a \cot a, \tag{C}$$

seu

$$\cos^2a=\sin^2a \cot^2a.$$

Punend acesta valore in (1), avem:

$$\sin^2a+\sin^2a \cot^2a=1, \text{ ori } \sin^2a\,(1+\cot^2a)=1,$$

de unde:

$$\sin a=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2a}}. \tag{D}$$

Acesta valore pusa in (C) dà:

$$\cos a=\pm\frac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2a}},$$

si fiind-cà: $\sec a=\frac{1}{\cos a}$, avem:

$$\sec a=\pm\frac{\sqrt{1+\cot^2a}}{\cot a}.$$

Din (5) avem:

$$\text{cosec}a=\frac{1}{\sin a},$$

si punend in loc de sin a valorea data prin (D),

$$\text{cosec}\ a=\pm\sqrt{1+\cot^2a}$$

In fine equatiunea (g)* dà: *30

$$\operatorname{tg}a=\frac{1}{\cot a}.$$

5°. *Dandu-se secanta, se se gasesca cele-alte linii trigonometrice.*

Equatiunea (d)* dà: *30

$$\cos a=\frac{1}{\sec a}.$$

Punend acesta valore in (1), avem succesiv:

$$\sin^2 a+\frac{1}{\sec^2 a}=1,$$

$$\sec^2 a\sin^2 a+1=\sec^2 a,$$

$$\sin^2 a=\frac{\sec^2 a-1}{\sec^2 a},$$

$$\sin a=\pm\frac{\sqrt{\sec^2 a-1}}{\sec a}.$$

Punend aceste valori alle lui sin a si cos a in (2), (4) si (5) si facund reducerile, avem:

$$\operatorname{tg}a=\pm\sqrt{\sec^2 a-1},\ \cot a=\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 a-1}},\ \operatorname{cosec}a=\pm\frac{\overset{\cos a}{\cancel{\sec a}}}{\sqrt{\sec^2 a-1}}.$$

6°. *Dandu-se cosecanta, se se gasesca celle-alte linii trigonometrice.*

Dupe (e)* avem: *30

$$\sin a=\frac{1}{\operatorname{cosec}a}.$$

Punend acesta valore in (1), (2), (3), (4), vom avé, dupe nisce calcule analoge cu celle de la casul trecut:

$$\cos a=\pm\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}{\operatorname{cosec}a},\quad \operatorname{tg}a=\pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}},$$

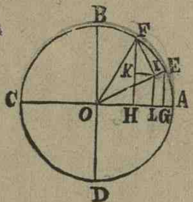
$$\cot a = \pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1},\qquad \sec a = \pm\frac{\operatorname{cosec} a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}}.$$

Tabelul alaturat coprinde tote aceste resultate. In prima colona verticale la stanga se afla inscris numele liniei trigonometrice ce trebuė se sė esprime in functiune de alta, si in prima colona orizontale este numele liniei in functiune de care trebue se se esprime linia considerata. La intalnirea colonelor respective ale ambelor linii trigonometrice sė afla espressiunea cautata.

	$\sin a$	$\cos a$	$\operatorname{tg} a$	$\cot a$	$\sec a$	$\operatorname{cosec} a$
$\sin a$	$\sin a$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\sec^2 a-1}}{\sec a}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec} a}$
$\cos a$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$	$\cos a$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\dfrac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$	$\dfrac{1}{\sec a}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}{\operatorname{cosec} a}$
$\operatorname{tg} a$	$\pm\dfrac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$	$\operatorname{tg} a$	$\dfrac{1}{\cot a}$	$\pm\sqrt{\sec^2 a-1}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\cot a$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$	$\pm\dfrac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg} a}$	$\cot a$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}$
$\sec a$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\dfrac{1}{\cos a}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\cot^2 a}}{\cot a}$	$\sec a$	$\pm\dfrac{\operatorname{cosec} a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\operatorname{cosec} a$	$\dfrac{1}{\sin a}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 a}$	$\dfrac{\sec a}{\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\operatorname{cosec} a$

ADITIUNEA ARCELOR

32. **Sinus si cosinus.** Ne propunem a gasi espresiunea sinusului si cosinusului sumei a doue arce, cunoscund sinusul si cosinusul arcelor simple.



Fia a=AE si b=EF doue arce ast-fel cà suma lor $a+b$=AF este mai mica de cât $\frac{\pi}{2}$. Ducem FI perpendicular pe OE; FH, IL si EG perpendicularie pe OA, si KI paralel la OA. Avem:

$$\sin a = \sin AE = EG, \quad \cos a = \cos AE = OG,$$
$$\sin b = \sin EF = FI, \quad \cos b = \cos EF = OI,$$

(a) $\sin(a+b) = \sin AF = FH = FK + IL$, câci KH=IL,

(b) $\cos(a+b) = \cos AF = OH = OL - KI$, câci HL=KI.

Trianghiurile OEG si OIL sunt assemeni; prin urmare:

$$\frac{IL}{EG} = \frac{OI}{OE}, \text{ seu } \frac{IL}{\sin a} = \frac{\cos b}{1},$$

de unde
$$IL = \sin a \cos b.$$

Din assemenarea acellorasi trianghiuri avem:

$$\frac{OL}{OG} = \frac{OI}{OE}, \text{ seu } \frac{OL}{\cos a} = \frac{\cos b}{1};$$

de unde
$$OL = \cos a \cos b.$$

Trianghiurile FKI si OEG sunt assemeni, câci au laturile lor perpendiculare unele pe altele; asia-dera:

$$\frac{FK}{OG} = \frac{FI}{OE}, \text{ seu } \frac{FK}{\cos a} = \frac{\sin b}{1},$$

ori
$$FK = \cos a \sin b.$$

Din assemenarea acellorasi trianghiuri avem:

$$\frac{KI}{EG} = \frac{FI}{OE}, \text{ seu } \frac{KI}{\sin a} = \frac{\sin b}{1},$$

ori $\qquad KI = \sin a \sin b.$

Substituind aceste valori alle lui IL, OL, FK, KI, in equatiunile (a) si (b), avem:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a, \qquad (1)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \qquad (2)$$

33. Formulele (1) si (2) au fost demonstrate in ipotesea cà $a+b<\frac{\pi}{2}$; inse elle subsista in ori-ce alta ipotese am face asupra marimei arcelor a si b.

1°. *Formulele* (1) si (2) *subsistă si in casul când* $a+b>\frac{\pi}{2}$.

In adever, punend

$$a' = \frac{\pi}{2} - a, \text{ si } b' = \frac{\pi}{2} - b, \qquad (c)$$

si adunand intre sine aceste doue formule,

$$a' + b' = \pi - (a+b),$$

si fiind-cà $a+b>\frac{\pi}{2}$, este evident cà vom avé:

$$a' + b' < \pi - \frac{\pi}{2}, \text{ seu } a' + b' < \frac{\pi}{2}.$$

Punend dera in (1) si (2) valorile

$$a = \frac{\pi}{2} - a', \; b = \frac{\pi}{2} - b', \; a+b = \pi - (a' + b'),$$

scose din relatiile (c), avem:

$$\sin\{\pi - (a' + b')\} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a'\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - b'\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - b'\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - a'\right),$$

$$\cos\{\pi - (a' + b')\} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a'\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - b'\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a'\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b'\right),$$

26de unde

$$\sin(a'+b')=\cos a' \sin b' + \cos b' \sin a',$$

$$-\cos(a'+b')=\sin a' \sin b' - \cos a' \cos b';$$

si deca scambàm semnele formulei din urma,

$$\cos(a'+b')=\cos a' \cos b' - \sin a' \sin b'.$$

Am ajuns dera chiar la formulele (1) si (2), si arcele a' si b' implinesc conditia $a'+b'<\frac{\pi}{2}$.

2°. *Formulele* (1) *si* (2) *subsista si in casul cand adaogim* $\frac{\pi}{2}$ *la unul din arcele* a *seu* b.

Fie $a'=a+\frac{\pi}{2}$, de unde $a=a'-\frac{\pi}{2}$. Punem acesta valore in (1) si (2):

$$\sin\left(a'+b-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(a'-\frac{\pi}{2}\right)\cos b$$

$$+\sin b \cos\left(a'-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos\left(a'+b-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(a'-\frac{\pi}{2}\right)\cos b$$

$$-\sin\left(a'-\frac{\pi}{2}\right)\sin b;$$

inse avem:

$$\sin\left(a'+b-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left\{\frac{\pi}{2}-(a'+b)\right\}\right]$$

$$=-\sin\left[\frac{\pi}{2}-(a'+b)\right]=-\cos(a'+b),$$

$$\cos\left(a'+b-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[-\left\{\frac{\pi}{2}-(a'+b)\right\}\right]$$

$$=-\cos\left[\frac{\pi}{2}-(a'+b)\right]=\sin(a'+b),$$

$$\sin\left(a'-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-a'\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a'\right)=-\cos a',$$

$$\cos\left(a'-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-a'\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a'\right)=\sin a'.$$

Punend aceste valori in equatiunile de sus,

$$-\cos(a'+b)=-\cos a'\cos b+\sin b\sin a',$$

$$\sin(a'+b)=\sin a'\cos b+\cos a'\sin b,$$

in cari deca vom scamba semnele equatiunei antaiu, vom da tocmai peste (1) si (2), si a' va fi egal cu a marit cu $\frac{\pi}{2}$.

3°. *Formulele* (1) *si* (2) *subsiste pentru ori-ce valori positive alle lui* a *si* b.

Se dicem cà arcul a este coprins intre m si $m+1$ cadrane, era b intre n si $n+1$ cadrane; atunci insemnand cu a' escesul lui a peste m cadrane, si cu b' escesul lui b peste n cadrane, avem:

$$a=m\frac{\pi}{2}+a', \quad b=n\frac{\pi}{2}+b'. \tag{d}$$

Insè pentru arcele a' si b', mai mici fie-care de cât $\frac{\pi}{2}$ avem relatiunile:

$$\sin(a'+b')=\sin a'\cos b'+\sin b'\cos a',$$

$$\cos(a'+b')=\cos a'\cos b'-\sin a'\sin b'.$$

Dupe demonstratiunea de mai sus, noi putem adaogi la fie-care din arcele a' si b', si de câte ori vom voi, câte un cadran; dupe ce dera vom adaogi m cadrane lui a' si n cadrane lui b', formulele din urma vor deveni:

$$\sin\left(m\frac{\pi}{2}+a'+n\frac{\pi}{2}+b'\right)=\sin\left(m\frac{\pi}{2}+a'\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}+b'\right)$$
$$+\sin\left(n\frac{\pi}{2}+b'\right)\cos\left(m\frac{\pi}{2}+a'\right)$$
$$\cos\left(m\frac{\pi}{2}+a'+n\frac{\pi}{2}+b'\right)=\cos\left(m\frac{\pi}{2}+a'\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}+b'\right)$$
$$-\sin\left(m\frac{\pi}{2}+a'\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}+b'\right),$$

seu, dupe relatiunile (d),

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$

si aci a si b au valori *positive*, ori-cât de mari vom voi.

— 4°. *Formulele* (1) *si* (2) *subsiste pentru ori-ce valori, chiar negative, alle lui* a *si* b.

Se presupunem cà a si b sunt negative. Alegem un numer întreg si positiv k, destul de mare pentru ca cantitatile

$$2k\pi+a=a', \qquad 2k\pi+b=b',$$

se fia positive. Atunci (1) si (2) convin lui a' si b', cari sunt positive, si avem:

$$\sin(a'+b')=\sin a'\cos b'+\sin b'\cos a',$$
$$\cos(a'+b')=\cos a'\cos b'-\sin a'\sin b',$$

seu

$$\sin(2k\pi+a+2k\pi+b)=\sin(4k\pi+a+b)$$
$$=\sin(2k\pi+a)\cos(2k\pi+b)$$
$$+\sin(2k\pi+b)\cos(2k\pi+a),$$
$$\cos(2k\pi+a+2k\pi+b)=\cos(4k\pi+a+b)$$
$$=\cos(2k\pi+a)\cos(2k\pi+b)$$
$$-\sin(2k\pi+a)\sin(2k\pi+b)$$

si considerand cà sinusul si cosinusul sunt functiuni circularie periodice cu perioda 2π,* *9,18

$$\sin(a+b)=\sin a \cos b+\sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b)=\cos a \cos b-\sin a \sin b,$$

relatii in cari a si b sunt negative.

34. Din acest sir de demonstratii resulta cà formulele (1) si (2) sunt generale; putem dera inlocui intr'ensele pe b prin $-b$, si atunci avem:

$$\sin(a-b)=\sin a \cos(-b)+\sin(-b) \cos a,$$
$$\cos(a-b)=\cos a \cos(-b)-\sin a \sin(-b).$$

seu* *25

$$\sin(a-b)=\sin a \cos b-\sin b \cos a, \qquad (3)$$
$$\cos(a-b)=\cos a \cos b+\sin a \sin b. \qquad (4)$$

35. *Observare*. Formulele (1) si (2) se pot deduce una din alta, precum si (3) si (4), deca inlocuim in una din elle pe a prin $a+\frac{\pi}{2}$, seu pe b prin $b+\frac{\pi}{2}$.

In adever, deca in (1), spre essemplu, inlocuim pe b prin $b+\frac{\pi}{2}$, avem:

$$\sin\left(a+b+\frac{\pi}{2}\right)=\sin a \cos\left(b+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(b+\frac{\pi}{2}\right)\cos a,$$

seu

$$\cos\{-(a+b)\}=\sin a \sin(-b)+\cos(-b) \cos a,$$

ori* *25

$$\cos(a+b)=-\sin a \sin b+\cos a \cos b.$$

Assemenea si pentru celle-alte.

36. Formulele (1) si (2) ne dau sinusul si cosinusul sumei a doue arce; inse este lesne a le generalisa si pentru mai multe arce.

Deca in (1) si (2) inlocuim pe b prin $c+d$, acelle formule devin:

$$\sin(a+c+d)=\sin a \cos(c+d)+\sin(c+d)\cos a,$$
$$\cos(a+c+d)=\cos a \cos(c+d)-\sin a \sin(c+d),$$

seu

$$\sin(a+c+d)=\sin a(\cos c \cos d-\sin c \sin d)$$
$$+\cos a(\sin c \cos d+\sin d \cos c),$$
$$\cos(a+c+d)=\cos a(\cos c \cos d-\sin c \sin d)$$
$$-\sin a(\sin c \cos d+\sin d \cos c),$$

de unde

$$\sin(a+c+d)=\sin a \cos c \cos d+\sin c \cos a \cos d$$
$$+\sin d \cos a \cos c-\sin a \sin c \sin d,$$
$$\cos(a+c+d)=\cos a \cos c \cos d-\cos a \sin c \sin d$$
$$-\sin a \sin c \overset{\cos d}{\cancel{\sin d}}-\sin a \sin d \cos c.$$

Cu ajutorul acestora putem gasi sinusul si cosinusul sumei a patru arce, si asia mai departe.

37. Tangenta si cotagenta. Pentru a gasi tangen-
30(2) ta sumei a doue arce, vom recurge la formula:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)};$$

inlocuind pre $\sin(a+b)$ si $\cos(a+b)$ cu valorile lor date prin (1) si (2),

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin a \cos b+\sin b \cos a}{\cos a \cos b-\sin a \sin b};$$

si impartind ambii termeni ai fractiunii cu $\cos a \cos b$,

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b}+\dfrac{\sin b \cos a}{\cos b \cos a}}{1-\dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}},$$

seu

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a \operatorname{tg}b}. \qquad (5)$$

25 Deca in acesta formula inlocuim pe b cu $-b$, avem :

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}. \tag{6}$$

Pentru a gasi cotangenta sumei a doue arce, vom avé assemenea:

$$\cot(a+b)=\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\sin a\cos b+\sin b\cos a},$$

si impartind ambii termeni cu $\sin a \sin b$,

$$\cot(a+b)=\frac{\dfrac{\cos a\cos b}{\sin a\sin b}-1}{\dfrac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b}+\dfrac{\sin b\cos a}{\sin a\sin b}},$$

seu

$$\cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}. \tag{7}$$

Deca aci inlocuim pe b cu $-b$ si scambàm semnele ambilor termeni ai fractiunei, avem:

$$\cot(a-b)=\frac{1+\cot a\cot b}{\cot b-\cot a}. \tag{8}$$

38. Prin formulele (5) si (7) putem gasi tangenta si cotangenta unei sume de mai mult de cât doue arce. In adever, punend in aceste formule in loc de b pe $c+d$, avem:

$$\operatorname{tg}(a+c+d)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}(c+d)}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}(c+d)},$$

$$\cot(a+c+d)=\frac{\cot a\cot(c+d)-1}{\cot(c+d)+\cot a},$$

si inlocuind pe $\operatorname{tg}(c+d)$ si pe $\cot(c+d)$ cu valorile lor,

$$\operatorname{tg}(a+c+d)=\frac{\operatorname{tg}a+\dfrac{\operatorname{tg}c+\operatorname{tg}d}{1-\operatorname{tg}c\operatorname{tg}d}}{1-\operatorname{tg}a\dfrac{\operatorname{tg}c+\operatorname{tg}d}{1-\operatorname{tg}c\operatorname{tg}d}}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}c+\mathrm{tg}d-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}c\,\mathrm{tg}d}{1-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}c-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}d-\mathrm{tg}c\,\mathrm{tg}d},$$

$$\cot(a+c+d)=\frac{\cot a\,\dfrac{\cot c\cot d-1}{\cot c+\cot d}-1}{\dfrac{\cot c\cot d-1}{\cot c+\cot d}+\cot a}$$

$$=\frac{\cot a\cot c\cot d-\cot a-\cot c-\cot d}{\cot a\cot c+\cot a\cot d+\cot c\cot d-1}.$$

Jm

— IMMULTIREA ARCELOR.

39. Consideràm formulele

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b)&=\sin a\cos b+\sin b\cos a,\\ \cos(a+b)&=\cos a\cos b-\sin a\sin b.\end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

Facund $a=b$, elle devin:

$$\sin 2a=2\sin a\cos a,\qquad (1)$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a.\qquad (2)$$

Aceste formule né dau sinusul si cosinusul arcului indoit $2a$ in functiune de sinusul si cosinusul arcului simplu a.

Deca in (1) si (2) inlocuim pe rand pe $\sin a$ si $\cos a$ cu valorile lor date prin equatiunile (a) si (b) de la § 30, avem alte formule, destul de des intrébuintiate:

$$\sin 2a=\pm 2\sin a\sqrt{1-\sin^2 a}=\pm 2\cos a\sqrt{1-\cos^2 a},$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)=2\cos^2 a-1,$$

$$\cos 2a=1-\sin^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a.$$

Deca in formulele

$$\mathrm{tg}(a+b)=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}{1-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b},\quad \cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot a+\cot b},\qquad (B)$$

facem assemenea $a=b$, avem:

$$\mathrm{tg}2a=\frac{2\mathrm{tg}a}{1-\mathrm{tg}^2 a},\quad \cot 2a=\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}.\qquad (3)$$

40. In formulele (A) inlocuind pe b cu $2a$, avem:

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a,$$
$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a,$$

si substituind in locul lui $\sin 2a$ si $\cos 2a$ valorile lor date prin (1) si (2),

$$\sin 3a = \sin a(\cos^2 a - \sin^2 a) + 2\sin a \cos a \cos a$$
$$= 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a,$$
$$\cos 3a = \cos a (\cos^2 a - \sin^2 a) - 2\sin a \sin a \cos a$$
$$= \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a.$$

Punend in prima equatiune $1 - \sin^2 a$ in loc de $\cos^2 a$, si in a doua $1 - \cos^2 a$ in loc de $\sin^2 a$, si reducund,

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

Facund si in formulele (B) pe $b = 2a$, vem avé assemenea:

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a} = \frac{\operatorname{tg} a + \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}{1 - \operatorname{tg} a \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a},$$

$$\cot 3a = \frac{\cot a \cot 2a - 1}{\cot a + \cot 2a} = \frac{\cot a \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a} - 1}{\cot a + \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}} = \frac{\cot^3 a - 3\cot a}{3\cot^2 a - 1}.$$

41. Putem gasi formule generale cari se ne dee sinusul si cosinusul multiplului unui arc prin ori-ce numer, intreg si positiv. Pentru acesta cousidcràm equatiunile cunoscute:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Adunand respectiv aceste equatiuni, avem:

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b,$$
$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b.$$

Punem $a=mb$; atunci $a+b=(m+1)b$, $a-b=(m-1)b$, si equatiunile devin:

$$\left.\begin{aligned}\sin(m+1)b&=2\sin mb\cos b-\sin(m-1)b,\\ \cos(m+1)b&=2\cos mb\cos b-\cos(m-1)b.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Aceste formule, numite formulele lui *Thoma Simpson*, ne dau mediul de a calcula sinusul si cosinusul multiplului unui arc prin un numer intreg si positiv $m+1$, cand se cunoscu sinusele si cosinusele multiplilor acelui arc prin numerele m si $m-1$.

Essemplu. Fia $b=8^0 13' 32''$, $m=5$; dupe (4) avem:

$$\sin\{(5+1)\times 8^0 13' 32''\}=2\sin\{5\times 8^0 13' 32''\}\cos 8^0 13' 32''$$
$$-\sin\{(5-1)\times 8^0 13' 32''\},$$

$$\cos\{(5+1)\times 8^0 13' 32''\}=2\cos\{5\times 8^0 13' 32''\}\cos 8^0 13' 32''$$
$$-\cos\{(5-1)\times 8^0 13' 32''\},$$

si effectuand immultirile,

$$\sin 49^0 21' 12''=2\sin 41^0 7' 40''\cos 8^0 13' 32''-\sin 32^0 54' 8'',$$
$$\cos 49^0 21' 12''=2\cos 41^0 7' 40''\cos 8^0 13' 32''-\cos 32^0 54' 8''.$$

DIVISIUNEA ARCELOR.

42. Deca in formulele

$$\sin 2a=2\sin a\cos a,$$
$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a,$$
$$\operatorname{tg} 2a=\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a},\quad \cot 2a=\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a},$$

punem b in loc de $2a$, si prin urmare $\frac{b}{2}$ in loc de a, aceste formule devin:

$$\sin b = 2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2},$$

$$\cos b = \cos^2\frac{b}{2} - \sin^2\frac{b}{2} = 2\cos^2\frac{b}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{b}{2},$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}, \qquad \cot b = \frac{\cot^2\frac{b}{2} - 1}{2\cot\frac{b}{2}},$$

relatiuni cari ne dau sinusul, cosinusul, tangenta si cotangenta arcului intreg in functiune de acelleasi linii alle arcului pe jumetate.

43. Adunand equatiunile

$$1 = \sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2}$$

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2},$$

obtinem relatiunea:

$$1 + \sin a = \sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$$
$$= \left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)^2,$$

de unde

$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin a}. \qquad (1)$$

Deca, din contra, scadem una din alta equatiunile de sus, avem:

$8^{0}13'\ 32 \times 6$

$78\ 192 \qquad 3'\ 12''$

$$1-\sin a=\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$$
$$=\left(\sin\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}\right)^2,$$

de unde

$$\sin\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1-\sin a} \tag{2}$$

Adunand equatiunile (1) si (2) si impartind cu 2, avem:

$$\sin\frac{a}{2}=\pm\frac{\sqrt{1+\sin a}}{2}\pm\frac{\sqrt{1-\sin a}}{2}. \tag{3}$$

Scadiend equatiunile (1) si (2) una din alta si impartind cu 2, avem:

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\frac{\sqrt{1+\sin a}}{2}\mp\frac{\sqrt{1-\sin a}}{2}. \tag{4}$$

Formulele (3) si (4) ne dau *sinusul si cosinusnl arcului pe jumetate in functiune de sinusul arcului intreg.*

44. Consideràm equatiunile

$$\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}=1$$

$\cos^2\frac{a}{2}=\frac{\cos a+1}{2}$

$$\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}=\cos a.$$

Adunandu-le membru cu membru si impartind cu 2, avem:

$$\cos^2\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{2}, \tag{a}$$

seu

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}. \tag{5}$$

Scadiend una din alta equatiunile de sus si impartind cu 2, avem:

$$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{2}, \qquad (b)$$

de unde

$$\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}. \qquad (6)$$

Impartind (6) prin (5) membru cu membru obtinem:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\pm\frac{\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}},$$

seu, fiind-cà in membrul al doilea se impart numai quantitătile de sub radical,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}. \qquad (7)$$

Formulele (5), (6) si (7) ne dau *cosinusul*, *sinusul si tangenta arcului pe jumetate in functiune de cosinusul arcului intreg.*

Observare. Deca presupunem cà $a<180^0$, atunci $\frac{a}{2}<90^0$, si prin urmare $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ si $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ sunt positivi; deci in ipotesea cà $a<180^0$, nu vom lua de cât semnul $+$ al radicalului din membrul al doilea al equatiunilor (5), (6) si (7), si atunci aceste equatiuni se scriu:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},\ \sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},\ \operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

45. Deca in equatiunea

$$\operatorname{tg}a=\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$$

eliminàm numitorul, avem:

cog 3^5 cot

$$\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}=2\operatorname{tg}\frac{a}{2},$$

seu:

$$\operatorname{tg}a\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}+2\operatorname{tg}\frac{a}{2}-\operatorname{tg}a=0,$$

ori, divisand péste tot cu $\operatorname{tg}a$,

$$\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}+\frac{2}{\operatorname{tg}a}\operatorname{tg}\frac{a}{2}-1=0,$$

equatiune de gradul al doilea in $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, care ne dà *valorea lui* $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ *in functiune* de $\operatorname{tg}a$:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=-\frac{1}{\operatorname{tg}a}\pm\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2a}+1}=-\frac{1}{\operatorname{tg}a}\pm\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2a}{\operatorname{tg}^2a}}$$

seu

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2a}}{\operatorname{tg}a}. \tag{8}$$

In assemenea mod, din

$$\cot a=\frac{\cot^2\frac{a}{2}-1}{2\cot\frac{a}{2}},$$

tragem:

$$2\cot a\cot\frac{a}{2}=\cot^2\frac{a}{2}-1,$$

de unde

$$\cot^2\frac{a}{2}-2\cot a\cot\frac{a}{2}-1=0,$$

equatiunea din care scotem:

$$\cot\frac{a}{2}=\cot a\pm\sqrt{\cot^2a+1}; \tag{9}$$

acesta relatiune ne dà *valorea cotagentei arcului pe jumetate in functiune de valorea cotagentei arcului intreg.*

X

— FORMULE CALCULABILE PRIN LOGARITMI.

Aici

46. Pentru inlesnirea calculelor este bine tot-de-una, pe cât se pote, a se inlocui sumele si differintiele ce figureza in espressiunile algebrice si trigonometrice, prin produsse si câturi, din causa cà aceste din urma, dupe cum scim, se pot calcula prin logaritmi, pre cand celle d'antaiu nu.

44 (a) si (b) Am gasit deja:

$$1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2},\ 1-\cos a=2\sin^2\frac{a}{2}.$$

Insé putem inca gasi si alte espresiuni, forte insemnate, calculabile prin logaritmi.

Consideràm equatiunile:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a.$$

Adunand mai antaiu aceste doue egalitati, si apoi scadiendu-le membru cu membru, obtinem relatiunile urmatore:

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b)+\sin(a-b)&=2\sin a\cos b,\\ \sin(a+b)-\sin(a-b)&=2\sin b\cos a.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(A)}$$

Punem:

$$a+b=p,\quad a-b=q;\qquad\text{(a)}$$

aceste doue equatiuni, mai antaiu adunate si apoi scadiute, si pe urma impartite cu 2, dau:

$$a=\frac{p+q}{2},\ b=\frac{p-q}{2}.\qquad\text{(b)}$$

Valorile date da (a) si (b) le substituim in (A), cari devin atunci:

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},\qquad(1)$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}. \qquad (2)$$

Equatiunea (1) esprime cà *suma sinusurilor a doue arce este egale cu de doue ori sinusul semisumei arcelor, immultit prin cosinusul semidiferentiei lor.*

Equatiunea (2) arata cà *diferentia sinusurilor a doue arce este egale cu de doue ori sinusul semidiferentiei arcelor immultit prin cosinusul semisumei lor.*

47. Equatiunile

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

mai antaiu adunate si apoi scadiute una din alta, dau:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b,$$
$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b;$$

si facund si aci substituirile indicate de equatiunile (a) si (b),

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos q - \cos p = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}. \qquad (4)$$

Equatiunea (3) esprime cà *suma cosinusurilor a doue arce este egale cu de doue ori cosinusul semisumei arcelor immultit prin cosinusul semidiferentiei lor.*

Equatiunea (4) areta cà *diferentia cosinusurilor a doue arce este egale cu de doue ori sinusul semisumei arcelor immultit p in sinusul semi-differentiei lor.*

48. Divisand una cu alta equatiunile (1), (2), (3) (4) doue câte doue, obtinem ua seria de alte formule calculabile prin logaritmi:

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}=\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}\times\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}.$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}=\operatorname{tg}\frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p-q}{2},$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}=\operatorname{tg}\frac{p-q}{2},$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\frac{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}.$$

49. Eca ua formula insemnata care se intrebuintiedia une-ori in calcule.

Immultim una cu alta egalitatile

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a,$$

si obtinem:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a\cos^2 b-\sin^2 b\cos^2 a.$$

Inlocuind in acesta egalitate mai antaiu pe $\cos^2 a$ si $\cos^2 b$ cu $1-\sin^2 a$ si $1-\sin^2 b$, si apoi pe $\sin^2 a$ si $\sin^2 b$ cu $1-\cos^2 a$ si $1-\cos^2 b$, dobandim equatiunile:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a(1-\sin^2 b)-\sin^2 b(1-\sin^2 a),$$
$$\sin(a+b)\sin(a-b)=(1-\cos^2 a)\cos^2 b-(1-\cos^2 b)\cos^2 a.$$

Effectuand immultirile din membrul al doilea si facund tote reducerile, ajungem la equatiile:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b,$$
$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\cos^2 a-\cos^2 b.$$

50. Putem face calculabile prin logaritmi si suma seu diferentia a doue tangente. In adever

$$\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b}=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b},$$
$$\mathrm{tg}a-\mathrm{tg}b=\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{\cos a\cos b}=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b},$$

In assemenea mod avem:

$$\cot a+\cot b=\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\cos a\sin b+\cos b\sin a}{\sin a\sin b}=\frac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b},$$
$$\cot a-\cot b=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\cos a\sin b-\cos b\sin a}{\sin a\sin b}=\frac{\sin(a-b)}{\sin a\sin b}.$$

51. Se facem calculabile prin logaritmi suma seu diferintia a doue secante; avem:

$$\sec a+\sec b=\frac{1}{\cos a}+\frac{1}{\cos b}=\frac{\cos a+\cos b}{\cos a\cos b}$$

$$=\frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\cos a\cos b},$$

$$\sec a-\sec b=\frac{1}{\cos a}-\frac{1}{\cos b}=\frac{\cos b-\cos a}{\cos a\cos b}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\cos a\cos b}.$$

Assemenea

$$\operatorname{cosec} a+\operatorname{cosec} b=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin b}=\frac{\sin b+\sin a}{\sin a\sin b}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\sin a\sin b},$$

$$\operatorname{cosec} a-\operatorname{cosec} b=\frac{1}{\sin a}-\frac{1}{\sin b}=\frac{\sin b-\sin a}{\sin a\sin b}$$

$$=\frac{2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\sin a\sin b}.$$

52. Pentru a face calculabile prin logaritmi espresiunea $\sin a+\cos b$, observàm cà $\cos b=\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$, si atunci

$$\sin a+\cos b=\sin a+\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$$

$$=2\sin\frac{a+\frac{\pi}{2}-b}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-b-a}{2},$$

seu

$$\sin a+\cos b=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right).$$

Assemenea $\sin a-\cos b=\sin a-\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$

$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-b-a}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-b+a}{2},$$

ori

$$\sin a-\cos b=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right).$$

53. Forte adessea este necessariu a se transforma espressiunile $1-\sin a$ si $1+\sin a$. Pentru acesta

$$1-\sin a=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right),$$

$$1+\sin a=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right),$$

44avend in vedere formulele aflate (a) si (b).

Divisand una cu alta equatiunilo aflate si estragund radecina patrata, gassim:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}.$$

54. Espressiunea

$$1+\operatorname{tg}a=1+\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\cos a+\sin a}{\cos a}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\sin a}{\cos a}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{\cos a}.$$

Assemenea:

$$1-\operatorname{tg}a=1-\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\cos a-\sin a}{\cos a}$$

$$=\frac{\cos a-\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\cos a}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{\cos a},$$

si fiind-cà

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right),$$

avem:

$$1-\operatorname{tg}a=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos a}.$$

† — 54. Une-ori este necessariu a transforma espressiunea $\sin a+\sin b+\sin c$, in care $a+b+c=\pi$.

Avem mai antaiu:* *46

$$\sin b+\sin c=2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}. \qquad \text{(a)}$$

Inse din relatiunea $a+b+c=\pi$, deducem: $a=\pi-(b+c)$, si prin urmare*, *26,42

$$\sin a=\sin(b+c)=2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2}.$$

Adaogind acesta equatiune la (a),

$$\sin a+\sin b+\sin c=2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2}+2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$=2\sin\frac{b+c}{2}\left(\cos\frac{b+c}{2}+\cos\frac{b-c}{2}\right);$$

inse* *47

$$\cos\frac{b+c}{2}+\cos\frac{b-c}{2}=2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2};$$

asia-dera

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Pe lunga acestea din $a+b+c=\pi$, avem: $\frac{b+c}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$, si prin urmare $\sin\frac{b+c}{2}=\cos\frac{a}{2}$; deci equatiunea din urma dévine:

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}. \qquad \text{(b)}$$

Fia inca de transformat espressiunea $\sin a+\sin b-\sin c$, in care $a+b+c=\pi$. Vom avé, ca si mai sus:

$$\sin b-\sin c=2\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{b+c}{2},$$

$$\sin a=\sin(b+c)=2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2};$$

adunand,

$$\sin a+\sin b-\sin c=2\cos\frac{b+c}{2}\left(\sin\frac{b+c}{2}+\sin\frac{b-c}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

seu

$$\sin a+\sin b-\sin c=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}. \qquad \text{(c)}$$

— 56. Se facem calculabile prin logaritmi espressiunea *50 $\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}$, in care $a+b+c=\pi$. Avem*:

$a=\pi-(b+c)$

$$\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}},$$

si fiind cà $\frac{b+c}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$,

$$\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}.$$

Inse

$$\cot\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}};$$

adunand,

$$\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}+\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}.$$

Inse, dupe conditiunea pusa, avem:

$$\sin\frac{a}{2}=\cos\frac{b+c}{2}=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2};$$

atunci

$$\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}},$$

seu in fine,

$$\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}.$$

Ua demonstratiune identica ne va da, pentru $a+b+c=\pi$, si

$$\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b+\mathrm{tg}c=\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b\,\mathrm{tg}c.$$

METODE GENERALE PENTRU A FACE ESPRESSIUNILE CALCULABILE PRIN LOGARITMI.

57. Pane acum nu am urmat nici ua regula fissa in

operatiunile ce am facut pentru a transforma espressiunile, ci am cautat numai a profita de forma lor particularia pentru a simplifica, pe cât se puté, calculéle. Sunt inse si metode generale pentru a face acesta transformare.

Fia binomul $A+B$, in care quantitatile A si B au ori-ce fel de valori vom voi, inse positive. Punend pe A ca factor comun, vom avé:

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right). \tag{a}$$

Punem

$$\frac{B}{A}=\mathrm{tg}^2\varphi, \tag{b}$$

φ fiind un anghiu ajutator ore-care; si putem tot-de-una gassi un anghiu φ care se satisfaca equatiunea (b), câci scim cà tangenta unui arc pote se aiba tote valorile possibile. Substituind acesta valore in (a),

$$A+B=A(1+\mathrm{tg}^2\varphi)=A\sec^2\varphi=\frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

Anghiul φ fiind determinat prin relatiunea (b), espressiunea $\frac{A}{\cos^2\varphi}$, calculabile prin logaritmi, va fi si ea determinata.

58. Luàm binomul $A-B$, in care A si B sunt positive, inse $A>B$. Punend erasi pe A ca factor comun,

$$A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right). \tag{c}$$

Fiind-cà $A>B, \frac{B}{A}<1$; prin urmare putem pune:

$$\frac{B}{A}=\cos^2\varphi, \tag{d}$$

si acesta relatiune ne va da tot-de-una ua valore reale pentru φ. Punend in (c) valorea lui $\frac{B}{A}$ data de (d), acea espressiune se face:

$$A-B=A(1-\cos^2\varphi)=A\sin^2\varphi.$$

Deca in A—B presupunem cà A<B, avem:

$$A-B=-(B-A)=-B\left(1-\frac{A}{B}\right),$$

si punend erasi $\frac{A}{B}=\cos^2\varphi$,

$$A-B=-B(1-\cos^2\varphi)=-B\sin^2\varphi.$$

59. Fia binomul

$$m\sin a+n\cos a,$$

in care a este un anghiu ore-care, m si n nisce monome ore-care. Punend pe m ca factor comun,

$$m\sin a+n\cos a=m\left(\sin a+\frac{n}{m}\cos a\right).$$

Deca luàm $\operatorname{tg}\varphi=\frac{n}{m}$, avem:

$$m\sin a+n\cos a=m(\sin a+\operatorname{tg}\varphi\cos a)=m\left(\sin a+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos a\right)$$

$$=m\frac{\sin a\cos\varphi+\sin\varphi\cos a}{\cos\varphi},$$

seu in fine,

$$m\sin a+n\cos a=\frac{m\sin(\varphi+a)}{\cos\varphi}.$$

Assemenea am fi avut si:

$$m\sin a-n\sin a=\frac{m\sin(\varphi-a)}{\cos\varphi}.$$

60. Binomul $A\pm B\operatorname{tg}a=B\left(\frac{A}{B}\pm\operatorname{tg}a\right)$ devine, deca punem $\frac{A}{B}=\operatorname{tg}\varphi$:

$$A \pm B\operatorname{tg}a = B(\operatorname{tg}\varphi \pm \operatorname{tg}a) = B\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \pm \frac{\sin a}{\cos a}\right)$$

$$= B\frac{\sin(\varphi \pm a)}{\cos\varphi\cos a}.$$

Assemenea se transforma si $A \pm B\cot a$.

61. Fia inca espressiunea $m \pm n\sin a$, in care m si n sunt nisce quantitati ore-cari, inse nu coprind nici ua linia trigonometrica; atunci

$$m \pm n\sin a = \frac{m}{\cos a}\cos a \pm n\sin a = n\left(\frac{m}{n\cos a}\cos a \pm \sin a\right);$$

punend $\frac{m}{n\cos a} = \operatorname{tg}\varphi$, obtinem:

$$m \pm n\sin a = n(\operatorname{tg}\varphi\cos a \pm \sin a)$$

$$= n\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos a \pm \sin a\right) = \frac{n(\sin\varphi\cos a \pm \sin a\cos\varphi)}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{n\sin(\varphi \pm a)}{\cos\varphi}.$$

62. Pentru a reduce in un monom un polinom $a+b+c+d+\ldots$, reducem mai antaiu cei doi termeni $a+b$ in unul singur m; apoi reducem pe m si c in un termen n; pe n si d in un termen p, si asia mai departe.

Essemple. 1°. Se se faca calculabile prin logaritmi formula

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A.$$

Punend ca factor comun pe $\sin b\cos A$, avem:

$$\cos a = \sin b\cos A\left(\frac{\cot b}{\cos A}\cos c + \sin c\right),$$

si luand $\frac{\cot b}{\cos A} = \operatorname{tg}\varphi$,

$$\cos a = \sin b\cos A(\operatorname{tg}\varphi\cos +$$

$$=\sin b \cos A \frac{\sin \varphi \cos c + \sin c \cos \varphi}{\cos \varphi},$$

seu

$$\cos a = \sin b c \cos A \frac{\sin(\varphi + c)}{\cos \varphi}.$$

2°. Se se faca calculabile prin logaritmi equatiunea:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

Punem pe cotA factor comun:

$$\cot a \sin b = \cot A \left(\frac{\cos b}{\cot A} \cos C + \sin C \right),$$

si luand $\frac{\cos b}{\cot A} = \operatorname{tg} \varphi$, avem:

$$\cot a \sin b = \cot A (\operatorname{tg} \varphi \cos C + \sin C)$$

$$= \cot A \frac{\sin \varphi \cos C + \cos \varphi \sin C}{\cos \varphi},$$

de unde

$$\cot a \sin b = \cot A \frac{\sin(\varphi + C)}{\cos \varphi}.$$

3°. Se transformàm equatiunea

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C.$$

Acesta equatiune este identica cu

$$\sin c \cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin C} \sin C - \sin a \cos b \cos C,$$

si punend ca factor comun pe $\sin a \cos b$,

$$\sin c \cos A = \sin a \cos b \left(\frac{\cot a \operatorname{tg} b}{\sin C} \sin C - \cos C \right),$$

si punend $\frac{\cot a \operatorname{tg} b}{\sin C} = \cot \varphi$,

$$\sin c \cos A = \sin a \cos b (\cot \varphi \sin C - \cos C)$$

$$= \sin a \cos b \frac{\cos \varphi \sin C - \sin \varphi \cos C}{\sin \varphi},$$

seu, in fine,

$$\sin c \cos A = \sin a \cos b \frac{\sin(\varphi - C)}{\sin \varphi}.$$

63. Regulele pre cari le-am dat pentru a face ua espressiune calculabile prin logaritmi de multe se pote se nu se aplice, cand espressiunea are ore-cari forme
46-56 particulari. Am dat mai multe essemple de acesta. Eca inca ua espressiune forte insemnata, care se pote face calculabile prin logaritmi nu dupe metoda generale:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Adaogind 1 la ambele membre avem:

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc},$$

si scadiend 1 din ambele membre alle acestei din urma equatiuni,

$$\cos A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} - 1.$$

Punem $\operatorname{tg} \varphi = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$; atunci

$$\cos A = \operatorname{tg} \varphi - 1;$$

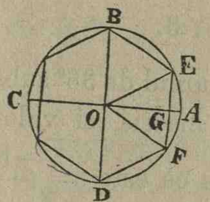
65 si fiind-cà $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, dupe cum vom vedé îndatà,

$$\cos A = \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \varphi \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \varphi},$$

65 câci $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

LINIILE TRIGONOMETRICE A CATOR-VA ARCURI.

64. Se gassim liniile trigonrmetrice alle arcului AE de 30^0.



Laturea EF a unui exagon regulat inscris subintinde un arc EAF de 60^0; radia OA, perpendicularia pe acesta lature, imparte arcul EAF in doue parti EA si AF, fie-care de câte 30^0; assemenea EG=GF. Insé EF=OE=1; prin urmare

$$EG = \sin 30^0 = \frac{1}{2}.$$

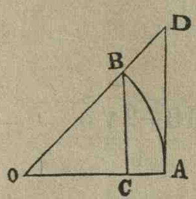
Gasim $\cos 30^0$ prin relatia

$$\cos 30^0 = \sqrt{1 - \sin^2 30^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Impartiend espressiunea lui $\sin 30^0$ cu a lui $\cos 30^0$, avem :

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ $\sin^2 45 = \frac{1}{2}$

65. Fia arcul AB=45^0. In trianghiul dreptanghiu OBC avem:



$$\overline{OC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OB}^2, \text{ seu :}$$
$$\cos^2 45^0 + \sin^2 45^0 = 1.$$

Inse OC=BC, câci BOC=OBC=45^0; prin urmare

$$2\sin^2 45^0 = 1,$$

seu : $$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0.$$

In OAD avem erasi AD=OA, adeca $\operatorname{tg} 45^0 = 1$.

66. Deca demonstra ca mai sus* cà $\sin 60^0$ este ju- *64

metate din laturea trianghiului equilateral inscris, care lature se scie cà este $\sqrt{3}$; prin urmare

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^0 = \sqrt{1 - \sin^2 60^0}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}.$$

67. Arcul de 18^0 este jumatate din arcul de 36^0 subintins de laturea decagonului regulat inscris, si valorea acestei laturi se scie din geometria cà este $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; prin urmare, dupe un rationament analog cu cel de mai sus,

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^0.$$

Atunci

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \sin^2 18^0} = \sqrt{1 - \frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72^0,$$

si

$$\operatorname{tg} 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

68. Dupe formula* *39

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

avem:

$$\sin 36^0 = 2 \sin 18^0 \cos 18^0 = 2 \frac{\sqrt{5}-1}{4} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

seu

$$\sin^2 36^0 = 4 \frac{(5+1-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{16^2} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16},$$

de unde

$$\sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^0.$$

69. Dupe formula*: $\sin 3a = 3\sin a\cos^2 a - \sin^3 a$, avem*40 inca:

$$\sin 54^0 = 3\sin 18^0 \cos^2 18^0 - \sin^3 18^0$$
$$= 3\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,\frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{8\sqrt{5}-16}{64},$$

de unde

$$\sin 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36^0.$$

Combinand prin impartire formulele aflate la § 68 si 69, aflàm:

$$\operatorname{tg} 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}, \quad \operatorname{tg} 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

70. Prin formulele

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a},$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a},$$

avem:

$$\sin 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^0} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^0},$$

$$\cos 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^0} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^0},$$

seu

$$\sin 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}},$$

$$\cos 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}},$$

ori

$$\sin 9^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}} = \cos 81^0,$$

$$\cos 9^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}} = \sin 81^0.$$

Assemenea

$$\sin 27^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \cos 63^0,$$

$$\cos 27^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sin 63^0.$$

CAPITULUL III.

TABLE TRIGONOMETRICE

71. Proprietatile pre cari le-am studiat pene acum nu vor puté avé nici un us practic deca nu vom avé medie de a gassi indata valorea numerica a liniilor trigonometrice alle ori-carui arc ni s'ar da. Inse *liniile trigonometrice sunt functiuni transcedente alle arcului*, adeca nu se pote stabili nici ua equatiune algebrica intrega care, pentru ua valore a liniei trigonometrice, se coprinda tote valorile correspundiatore alle arcului. Din acesta causa calculele prin cari aflàm valorea liniilor trigonometrice alle unui arc dat sunt peste mesura de lungi si difficile, si ar fi peste putintia a aplica formulele trigonometriei la calculele practice, deca ar trebui ca la fie-care moment se calculàm si valorea liniilor trigonometrice ce ar intra in acelle formule. Din acèsta causa se construesc *table* cari, pentru ori-ce valore data a arcului, contin valorile calculate alle totor liniilor selle trigonometrice.

72. De si arcele pot se aiba valori ori-cât de mari,

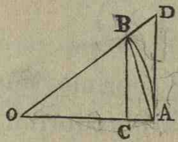
tablele trigonometrice nu se calculedia de cât pentru
28 arcele de la 0^0 pene la 90^0; câci scim cà ori-ce arc, ori-cât de mare ar fi, se pote reduce la primul cadran.

Pe lunga acestea, deca calculàm tote liniile trigonometrice alle arcelor de la 0^0 pene la 45^0, nu mai este necessariu a calcula valorea lor si pentru arcele de la 45^0 pene la 90^0; câci aceste din urma arce sunt complementele cellor d'antaiu, si prin urmare liniile lor trigonometrice vor fi complementarie cu alle cellor d'antaiu. Deca cunoscem, spre essemplu, $\sin 36^0$, $\cos 36^0$, $\operatorname{tg} 36^0$, $\cot 36^0$, $\sec 36^0$, $\operatorname{cosec} 36^0$, vom cunosce si $\cos 54^0 = \sin 36^0$, $\sin 54^0 = \cos 36^0$, $\cot 54^0 = \operatorname{tg} 36^0$, $\operatorname{tg} 54^0 = \cot 36^0$, $\operatorname{cosec} 54^0 = \sec 36^0$, $\sec 54^0 = \operatorname{cosec} 36^0$; câci $54^0 = 90^0 - 36^0$.

73. Tablele trigonometrice nu dau chiar valorea numerica a liniilor trigonometrice, ci, fiind-cà mai tote calculele trigonometriei se fac prin logaritmi, dau numai logaritmii acellor linii. Pe lunga acestea, tablele nu coprind logaritmii secantei si cosecantei arcelor, câci din relatiunile: $\sin x = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$, avem: $\log \sin x = -\log \operatorname{cosec} x$, $\log \cos x = -\log \sec x$. Prin urmare, pentru a gasi logaritmii secantei si cosecantei unui arc, n'avem de cât se luàm logaritmii cosinusului seu sinusului acellui arc cu semnul contrariu.

Logaritmii liniilor trigonometrice se calculedia prin nisce metode alle caror principii le vom espune in scurt
258—261 mai departe. Acum ne vom multiami a areta numai possibilitatea de a se construi tablele trigonometrice pentru arcele din 10″ in 10″. Pentru acesta vom demonstra mai antaiu urmatorele teoreme:

74. Teorema I. *Ori-ce arc coprins intre* 0^0 *si* 90^0 *este*: 1^0 *mai mare de cât sinusul seu, si* 2^0 *mai mic de cât tangenta sea.*



1^0. Fia arcul $AB=a$; avem: $\sin a=BC$, $\operatorname{tg} a=DA$. Ducem corda BA, si avem: $BC<BA$, seu $\sin a<BA$, câci BC este perpendicularia, era BA oblica. De alta parte $BA<\operatorname{arc}BA$, seu $BA<a$, câci arcele mai mici de cât 90^0 sunt mai mari de cât cordele lor; prin urmare *a fortiori*.

$$\sin a<a. \tag{a}$$

2^0. Aria sectorului circular OBA este: $OBA=\frac{1}{2}OA\times\operatorname{arc}BA=\frac{1}{2}OA\times a$. Aria trianghiului dreptanghiu ODA este: $ODA=\frac{1}{2}OA\times AD=\frac{1}{2}OA\times\operatorname{tg} a$; inse $ODA>OBA$; prin urmare $\frac{1}{2}OA\operatorname{tg} a>\frac{1}{2}OA\times a$; si impartind de ambele parti cu $\frac{1}{2}OA$,

$$\operatorname{tg} a>a. \tag{b}$$

Relatiunile (a) si (b) se pot scrie in un sir:

$$\sin a<a<\operatorname{tg} a. \tag{1}$$

75. Teorema II. *Cand arcul se micsioredia peste mesura, raportul arcului catre sinusul seu tinde catre* 1.

Punend in (1) in loc de $\operatorname{tg} a$ pe $\frac{\sin a}{\cos a}$, avem:

$$\sin a<a<\frac{\sin a}{\cos a}.$$

Impartind pe fie-care membru prin $\sin a$, aceste relatiuni se fac:

$$1<\frac{a}{\sin a}<\frac{1}{\cos a}.$$

Inse deca arcul se apropia de zero, $\cos a$ se apropia de 1, asia cà deca arcul este forte mic, $\cos a$ se pote socoti egale cu 1; deci *la limita* relatiunea de mai sus devine:

$$\frac{a}{\sin a}=1, \text{ seu } a=\sin a. \qquad (2)$$

76. *Observare.* In calcul anghiurile se esprime seu prin gradele, minutele si secundele pre cari le coprind, seu prin lungimea absoluta a arcurilor cari le mesora, aceste arcuri fiind luate pe ua circumferentia cu radia 1. Asia se pote dice cà un anghiu este de $22^0 30'$, seu cà este mesurat cu un arc de lungimea 0,39269908..... Inse de multe ori este de trebuintia ca, cunoscund espressiunea unui anghiu in un fel, se gasim espressiunea sea in cellu-alt fel.

Fia *a lungimea linearia* a unui arc care mesora un anghiu ore-care, si a'' *numerul intreg de secunde* ce coprinde acel arc; este evident cà arcul a es.e egal cu de a'' ori arcul de $1''$; adeca $a=a''\times \text{arc}1''$. Inse arcul de $1''$ fiind forte mic, avem dupe (2): arc $1''=\sin 1''$; si atunci

$$a=a''\sin 1'', \qquad (3)$$

din care

$$a''=\frac{a}{\sin 1''}. \qquad (4)$$

Relatia (3) ne areta cà *pentru a afla lungimea absoluta a unui arc, trebue a immulti numerul de secunde ce contine el cu sin* $1'''$; si (4), cà *pentru a afla numerul de secunde continut in un arc, trebue a imparti lungimea absoluta a arcului cu* $\sin 1''$.

77. **Teorema III.** *Sinusul unui arc coprins intre* 0^0 *si* 90^0 *este mai mare de cât diferentia intre arc si a patra parte din cubul arcului.*

Dupe teorema I avem : $\frac{a}{2}<\text{tg}\frac{a}{2}$, seu $\frac{a}{2}<\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$. Immultind ambii membri ai acestei neegalitati cu $2\cos^2\frac{a}{2}$, avem : $a\cos^2\frac{a}{2}<2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$; si fiind-cà: $\cos^2\frac{a}{2}=1-\sin^2\frac{a}{2}$, $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=\sin a$,

$$a\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\right)<\sin a,\ \text{seu}\ a-a\sin^2\frac{a}{2}<\sin a.$$

Inse* $\sin^2\frac{a}{2}<\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$; punend dera in neegali- *74
tate pe $\frac{a^2}{4}$ in loc de $\sin^2\frac{a}{2}$, vom avé *a fortiori*:

$$a-\frac{a^3}{4}<\sin a. \tag{5}$$

Corolariu. Din (5) deducem:

$$a-\sin a<\frac{a^3}{4}, \tag{6}$$

adeca *diferentia intre un arc si sinusul seu este mai mica de cat a patra parte din cubul arcului.*

78. **Teorema IV.** *Cosinusul unui arc mai mic de* 90^0 *este mai mare de cât diferentia intre unitate si jumetatea patratului arcului*, adeca $\cos a>1-\frac{a^2}{2}$.

Avem :* $\cos a=1-2\sin^2\frac{a}{2}$, si $\sin\frac{a}{2}<\frac{a}{2}$. Punend *42
dera in equatiune, in loc de $\sin^2\frac{a}{2}$, valorea mai mare $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, este evident cà vom avé:

$$\cos a > 1 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ seu } \cos a > 1 - \frac{a^2}{2}. \qquad (7)$$

79. **Teorema V.** *Cosinusul unui arc coprins intre* 0^0 *si* 90^0 *este mai mic de cât unitatea minus jumetate din patratul arcului, plus a sesse-spre-diecea parte din a patra putere a arcului,* adeca $\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$.

77 Dupe (5) avem:

$$\sin\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3, \text{ sèu: } \sin^2\frac{a}{2} > \left\{\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3\right\}^2.$$

Deca dera in equatia: $\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$, vom pune in loc de $\sin^2\frac{a}{2}$ valorea mai mica $\left\{\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3\right\}^2$, vom avé:

$$\cos a < 1 - 2\left\{\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3\right\}^2, \text{ sèu: } \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{2a^6}{32^2} + \frac{a^4}{16},$$

si *a fortiori*,

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}. \qquad (8)$$

Corolariu. Deca in (8) trecem pe $1 - \frac{a^2}{2}$ in membrul antaiu cu semnul contrariu, avem:

$$\cos a - \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) < \frac{a^4}{16}. \qquad (9)$$

CALCULUL SINUSULUI SI COSINUSULUI ARCULUI DE 10″.

80. *Sinus de* 10″. Se scie cà lungimea unei semicircumferentie, cand radia are valorea 1, este

$$\pi = 3,1415926535897932....,$$

si fiind-cà ua semicircumferentia coprinde 180^0 seu 648000″, vom avea:

$$\text{arc}\,648000''=3{,}141592653589793 2\ldots,$$

seu

$$\text{arc } 10''=\frac{3{,}141592\ldots}{64800,}=0{,}000048481368110\ldots;$$

prin urmare

$$\text{arc } 10''<0{,}00005,$$

si

$$\frac{(\text{arc } 10'')^3}{4}<0{,}000000000000032.$$

Inse relatiunea (5)* dà: $\sin a>a-\frac{a^3}{4}$; prin urmare in *77
casul de fatia:

$$\sin 10''>0{,}000048481368110-0{,}000000000000032,$$

si facund substractiunea,

$$\sin 10''>0{,}000048481368078.$$

Comparand valorea din membrul al doilea cu valorea lui arc 10″, vedem cà elle nu differa una de alta de cât de la a 13ª diecimale inainte; si inca acesta a 13ª diecimale in valorea arcului este numai cu ua unitate mai mare de cât a 13ª diecimale din valorea lui sin 10″. Deca dera vom lua

$$\sin 10''=0{,}0000484813681, \qquad \text{(A)}$$

putem fi securi cà erorea comisa asupra valorii lui sin 10″ va fi mai mica de cât ua unitate de al 13lea ordin diecimal.

81. *Cosinus de* 10″. Formula (9)* ne areta cà dife- *79
rentia intre cos 10″ si $1-\frac{(\text{arc } 10'')^2}{2}$ este mai mica de cât $\frac{(\text{arc } 10'')^4}{16}$. Inse deca luàm pentru arc 10″ valorea 0,0000484813...., gasita mai sus, aflàm:

$$\frac{(\text{arc } 10'')^4}{16} = 0{,}000000000000000039,$$

quantitate care neavend cifre insemnatore de cât de la a 18^a diecimale inainte, se pote neglige cu totul. Asià dera putem lua:

$$\cos 10'' = 1 - \frac{(\text{arc } 10'')^2}{2},$$

seu

$$\cos 10'' = 1 - 0{,}000000001152 = 0{,}999999998848, \quad (B)$$

si asupra acestei valori este comisa ua erore mai mica de cât ua unitate de al 18^{lea} ordin diecimal.

Cunoscund $\sin 10''$ si $\cos 10''$ vom gasi $\operatorname{tg} 10''$ prin relatia

$$\operatorname{tg} 10'' = \frac{\sin 10''}{\cos 10''}.$$

82. *Sinusul si cosinusul arcelor din 10 in 10 secunde.*

41Formulele lui Thoma Simpson, date mai sus, sunt:

$$\sin(m+1)b = 2\sin mb \cos b - \sin(m-1)b,$$
$$\cos(m+1)b = 2\cos mb \cos b - \cos(m-1)b.$$

Deca luàm $b=10''$ si $m=1$, aceste formule devin:

$$\sin 20'' = 2\sin 10'' \cos 10'', \quad \cos 20'' = 2\cos^2 10'' - 1.$$

Punend $b=10''$ si $m=2$, acelleasi formule dau:

$$\sin 30'' = 2\sin 20'' \cos 10'' - \sin 10'',$$
$$\cos 30'' = 2\cos 20'' \cos 10'' - \cos 10'',$$

si asia mai departe. Facund in fine $b=10''$ si $m=m$, avem:

$$\left.\begin{aligned}\sin(m+1)10'' &= 2\sin m10'' \cos 10'' - \sin(m-1)10'',\\ \cos(m+1)10'' &= 2\cos m10'' \cos 10'' - \cos(m-1)10''.\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Cu formulele lui Thoma Simpson putem dera calcula sinusurile si cosinusurile arcelor din $10''$ in $10''$ cu ajutorul lui $\sin 10''$ si $\cos 10''$, pre cari le-am aflat mai sus.

Calculele se pot prescurta observand cà factorul constant $2\cos 10''$ difera forte putin de 2 unitati, càci relatia (B) ne areta cà $\cos 10''$ difera forte putin de 1. Punem $k=2-2\cos 10''$, de unde $2\cos 10''=2-k$. Substituind acesta valore in relatiile (C),

$$\sin(m+1)10''=\sin m10''(2-k)-\sin(m-1)10'',$$
$$\cos(m+1)10''=\cos m10''(2-k)-\cos(m-1)10'',$$

din cari

$$\sin(m+1)10''=\sin m10'+\sin m10''-k\sin m10''$$
$$-\sin(m-1)10'',$$
$$\cos(m+1)10''=\cos m10''+\cos m10-k\cos m10''$$
$$-\cos(m-1)10'',$$

seu

$$[\sin(\mathrm{m}+1)10''-\sin m10'']=[\sin m10''-\sin(m-1)10'']$$
$$-k\sin m10'',$$
$$[\cos(m+1)10''-\cos m10'']=[\cos m10''-\cos(m-1)10'']$$
$$-k\cos m10''.$$

Aceste formule ne dau diferentiele $\sin(m+1)10'' -\sin m10''$ si $\cos(m+1)10''-\cos m10''$, cand cunoscem diferentiele precedente $\sin m10''-\sin(m-1)10''$ si $\cos m10''-\cos(m-1)10''$, precum si quantitatile $\sin m10''$ si $\cos m10''$. Adaogind acelle diferentie la $\sin m10''$ si $\cos m10''$ gasim pe $\sin(m+1)10''$ si $\cos(m+1)10''$.

Quantitatea constanta k se calculedia ua data pentru tot-de-una pentru a se introduce în calcule. Se gasesce

$$k=0{,}000000002304.$$

83. Formarea tablelor de logaritmi dupe acesta metoda are trebuintia de lungi calcule aprossimative; si de acea trebue din cand in cand a verifica resultatele calculului, comparandu-le cu resultatele gasite prin alte mediu-loce. Pentru acesta ne putem servi cu seria ar-

celor din 9 in 9 grade, alle caror linii trigonometrice
64-70 le-am gasit prin mediu-loce geometrice.

TABLELE LUI CALLET.

84. Tablele trigonometrice celle mai usitate sunt *tablele lui Lalande* calculate cu cinci diecimale pentru arcele din primul cadran din minut in minut, si *tablele lui Callet*, calculate cu siepte diecimale, din secunda in secunda pentru arcele de la 0^0 pene la 5^0, si din 10 secunde in 10 secunde pentru tote arcele de la 0^0 pene la 90^0.

Amendoue aceste table, editate si perfecționate de J. Dupuis, presinta ua dispositiune analoga. Vom da descrierea si usul tablelor lui Callet, si tot ce vom dice despre acestea se va aplica si la alle lui Lalande.

85. Prima parte a tablelor lui Callet dà logaritmii sinusului si tangentei arcelor de la 0^0 pene 5^0 din secundà in secunda. Inse sinusul si tangenta unui arc fiind egale cu cosinusul si cotangenta arcului complementar, acesta tabla ne dà in acellasiu timp si cosinusul si cotangenta arcelor de la 90^0 pene la 85^0.

Acesta tabla se imparte in doue: tabla de sinusuri si tabla de tangente. Sinusurile sunt date pe *verso* al foii, era tangentele pe *recto*; asia cà deschidiend tabla, sinusurile se afla pe pagina stanga si tangentele pe pagina drepta. Dispositiunea ambelor pagine este cu totul analoga.

Reproducem aci ua parte din tabla sinusurilor. Numerul gradelor este inscris desupra si dedesubtul tablei, afara din cadru. Pagina este impartita in opt colone verticale, dintre cari celle doue de la margini, *a* si *h*, coprind numerul de secunde, in colona *a* crescund de sus in jos de la 0 pene la 60, era in colona *h* de jos in sus; pentru simplicitate, diecimile se scriu numai ua data, era incolo de subintieleg. Colonele de la mediuloc, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, porta sus si jos numerul minutelor.

Cand arcul dat este coprins intre 0^0 si 5^0, logaritmii *sinusului* seu *tangentei* selle se afla pe pagina ce porta in partea *de sus* afara din cadru numerul de grade al arcului, in colona verticale care porta in capetul *de sus* numerul de minute al arcului, si pe linia orizontale care trece prin numerul de secunde al arcului, inscris in colona *de la stanga* a.

Cand arcul dat este coprins intre 90^0 si 85^0, logaritmii *cosinusului* seu *cotangentei* selle se afla pe pagina ce porta in partea *de jos* afara din cadru numerul de grade al arcului, in colona verticale care porta in capetul seu *de jos* numerul de minute al arcului, si pe linia orizontale care trece prin numerul de secunde al arcului, inscris in colona *de la drepta* b.

Cand mai multi logaritmi succesivi inscrisi in aceasi colona au primele lor cifre comune, de ordinar se subintieleg celle doue de la inceput, afara numai de logaritmii estremi, si de cei scrisi in capul colonei. Ast-fel, cand in tabla gasim numai siesse cifre alle unui logaritm, trebue se-l completàm, scriindu-i la stanga cifrele escedente pre cari le contine logaritmul cel mai apropiat, urcand seu pogorind.

1^0. Fie a sé cauta $\log\sin 3^0 37' 12''$. Deschidem tabla la ua pagina care in partea *de sus* se porte scris: *sinus* 3^0, si anume cautàm pe acea in care a treia colona verticale, *c*, porta *sus* titlul $37'$. Descindem pe acesta colona

SINUS 3°.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
″	36′	37′	38′	39′	40′	41′	″
0	$\overline{2}$,7978941	2,7998974	$\overline{2}$,8018915	2,8038764	2,8058523	2,8078192	60
1	979275	999307	019247	039095	058852	078519	9
2	979610	999640	019578	039425	059180	078846	8
3	979945	$\overline{2}$,7999973	019910	039755	059509	079173	7
4	980279	2,8000306	020241	040085	059837	079500	6
5	980614	000639	020573	040414	060166	079827	5
6	980948	000972	020904	040744	060494	080154	4
7	981283	001305	021235	041074	060823	080181	3
8	981617	001638	021567	041404	061151	080808	2
9	981952	001971	021898	041734	061479	081135	1
10	982286	002304	022230	042064	061808	081462	50
1	982620	002637	022561	042394	062136	081788	9
2	982955	002970	022892	042723	062464	082115	8
3	983289	003302	023223	043053	062792	082442	7
4	983624	003635	023555	043383	063121	082769	6
5	983958	003968	023886	043713	063449	083095	5
6	984292	004301	024217	044042	063777	083422	4
7	984626	004633	024548	044372	064105	083749	3
8	984961	004966	024879	014702	064433	084075	2
9	985295	005299	025211	045031	064761	084402	1
″	23′	22′	21′	20′	19′	18′	″

COSINUS 86°.

pene in randul orizontal care trece prin numerul 12 inscris la stanga in colona *a* a secundelor. Acolo gassim cifrele 002970. Pentru a completa logaritmul, vom adaogi la inceputul acestui numer cifrele $\overline{2}$,8 cari se afla inscrise la logaritmul cel mai apropiat urcand seu pogorind, si atunci

$$\log\sin 3^0 37' 12'' = \overline{2},8002970.$$

Cu totul assemenea se face si pentru a gasi $\log \mathrm{tg}\, 3^0 37' 12''$, care este:

$$\log \mathrm{tg}\, 3^0 37' 12'' = \overline{2},8011644.$$

2^0. Fie a se cauta $\log\cos 86^0 20' 53''$. Deschidem tabla la ua pagina care in partea *de jos* se porte scris: *cosinus* 86^0, si cautàm pe aceea anume in care a cincia colona verticale *e* porta *jos* titulul: 20′. Ne urcàm pe acesta colona pune in randul orizontal care trece prin numerul 53, inscris la drépta in colona *h* a secundelor. Acolo gassim cifrele 041074; si pentru a completa logaritmul, adaogind la inceputul acestui numer si cifrele $\overline{2}$,8 cari se afla inscrisė la logaritmul cel mai apropiat urcand séu pogorind, avem:

$$\log\cos 86^0 20' 53'' = \overline{2},8041074.$$

Tot assemenea se face si pentru a gasi $\log\cot 86^0 20' 53''$, caré este

$$\log\cot 86^0 20' 53'' = \overline{2},8049902.$$

86. A doua parte a tablelor lui Callet dà logaritmii sinusului, tangentei, cotangentei si cosinusului arcelor de la 0^0 pene la 90^0, din $10''$ in $10''$.

Reproducem aci ua pagina din a doua parte a tablelor lui Callet. Numerul gradelor, *deca este mai mic de* 45, este scris *in susul* paginei, afara din cadru; era *deca este mai mare de* 45, se scrie *in josul* paginei. Numerul minutelor este scris in colonele verticale A si L, la stanga si la drepta paginei, si merge crescund *de sus in jos in* A, si *de jos in sus in* L.

Numerul secundėlor se afla scris in colonele verticale B si K, cari vin dupe alle minutelor, si acest numer merge crescund *de sus in jos in* B, si *de jos in sus in* K.

Sinusurile pentru arcele *mai mici de* 45^0 se gasesc in colona C, intitulata *sus* **sin**, era pentru arcele *mai mari* de 45^0 in colona H intitulata *jos* **sin**.

Tangentele, pentru arcele *pene la* 45^0, se afla in colona E, intitulata *sus* **tang**, si pentru arcele *mai mari de* 45^0, in colona G intitulata *jos* **tang**.

Assemenea cotangentele si cosinusurile arcelor *pene la* 45^0 se vor gassi in colonele G si H intitulate *sus* **cotg** si **cos**, si pentru arcele *mai mari de* 45^0 in colonele E si C, intitulate *jos* **cotg** si **cos**.

Colona cea mica D coprinde *differentiele tabulare* intre logaritmii consecutivi inscrisi in colona C. Assemenea colona F contine differentiele intre logaritmii consecutivi inscrisi in colonele E si G, si colona I differentiele logaritmilor din colona H.

Fie acum: 1^0 a se gasi logsin28^{0}13′30″. Considerand cà arcul dat este mai mic de cât 45^0, vom deschide tablele la pagina intitulata *sus* 28^0, si in colona A vom cauta numerul minutelor, 13; apoi in B vom cauta si numerul de secunde, 30, corespondente la 13′. Atunci pe randul orizontal care trece prin acest numer de secunde, in colona C, intitulata *sus* **sin**, vom gasi cifrele 748017; si àdaogind la inceput si cifrele subintielese $\bar{1}$,6, avem:

$$\log\sin 28^0 13'30'' = \bar{1},6748017.$$

2^0. Se gasim logsin61^{0}46′40″. Arcul fiind mai mare de 45^0, pe pagina intitulata *jos* 61^0, vom cauta minutele 46 in colona *de la drepta* L, era secundele 40 in colona alaturata K. Logaritmul cautat lu vom gassi in colona H in dreptul numerului secundelor 40; acest logaritm este:

$$\log\sin 61^0 46'40'' = \bar{1},9450351.$$

3^0. Fié inca a se gasi logtg28^{0}15′20″. Vom cauta pagina intitulata, *sus* 28^0, si in colona A *de la stanga* acestei pagine vom cauta 15′; apoi in colona alaturata

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
′	″	Sin.	D.	Tang.	D. c.	Cotg.	Cos.	D.	″	′
10	0	$\bar{1}$,6739769		$\bar{1}$,7287161		0,2712839	$\bar{1}$,9452609		0	50
	10	740162	393	287667	506	712333	452496	113	50	
	20	740556	394	288173	506	711827	452383	113	40	
	30	740949	393	288679	506	711321	452270	113	30	
	40	741342	393	289184	505	710816	452157	113	20	
	50	741735	393	289690	506	710310	452045	112	10	
11	0	742128	393	290196	506	709804	451932	113	0	49
	10	742521	393	290702	506	709298	451819	113	50	
	20	742914	393	291207	505	708793	451706	113	40	
	30	743306	392	291713	506	708287	451593	113	30	
	40	743699	393	292219	506	707781	451480	113	20	
	50	744092	393	292724	505	707276	451368	112	10	
12	0	744485	393	293230	506	708770	451255	113	0	48
	10	744877	392	293736	506	706264	451142	113	50	
	20	745270	393	294241	505	705759	451029	113	40	
	30	745663	393	294747	506	705253	450916	113	30	
	40	746055	392	295252	505	704748	450803	113	20	
	50	746448	393	295757	505	704243	450690	113	10	
13	0	746840	392	296263	506	703737	450577	113	0	47
	10	747232	392	296768	505	703232	450464	113	50	
	20	747625	393	297274	506	702726	450351	113	40	
	30	748017	392	297779	505	702221	450238	113	30	
	40	748409	392	298284	505	701716	450125	113	20	
	50	748801	392	298789	505	701211	450012	113	10	
14	0	749194	393	299295	506	700705	449899	113	0	46
	10	749586	392	299800	505	700200	449786	113	50	
	20	749978	392	300305	505	699695	449673	113	40	
	30	750370	392	300810	505	699190	449560	113	30	
	40	750762	392	301315	505	698685	449447	113	20	
	50	751154	392	301820	505	698180	449334	113	10	
15	0	751546	392	302325	505	697675	449220	114	0	45
	10	751937	391	302830	505	697170	449107	113	50	
	20	752329	392	303335	505	696665	448994	113	40	
	30	752721	392	303840	505	696160	448881	113	30	
	40	753113	392	304345	505	695655	448768	113	20	
	50	753504	391	304850	505	695150	448655	113	10	
16	0	753896	392	305354	504	694646	448541	114	0	44
	10	754287	391	305859	505	694141	448428	113	50	
	20	754679	392	306364	505	693636	448315	113	40	
	30	755070	391	306869	505	693131	448202	113	30	
	40	755462	392	307373	504	692627	448088	114	20	
	50	755853	391	307878	505	692122	447975	113	10	
17	0	756245	392	308383	505	691617	447862	113	0	43
	10	756636	391	308887	504	691113	447749	113	50	
	20	757027	391	309392	505	690608	447635	114	40	
	30	757418	391	309896	504	690104	447522	113	30	
	40	757809	391	310401	505	689599	447409	113	20	
	50	758200	391	310905	504	689095	447295	114	10	
18	0	758592	392	311410	505	688590	447182	113	0	42
	10	758983	391	311914	504	688086	447069	113	50	
	20	759374	391	312418	504	687582	446955	114	40	
	30	759764	390	312923	505	687077	446842	113	30	
	40	760155	391	313427	504	686573	446728	114	20	
	50	760546	391	313931	504	686069	446615	113	10	
19	0	760937	391	314436	505	685564	446501	114	0	41
	10	761328	391	314940	504	685060	446388	113	50	
	20	761718	390	315444	504	684556	446275	113	40	
	30	762109	391	315948	504	684052	446161	114	30	
	40	762500	391	316452	504	683548	446048	113	20	
	50	762890	390	316956	504	683044	445934	114	10	
20	0	$\bar{1}$,6763281	391	1,7317460	504	0,2682540	$\bar{1}$,9445821	113	0	40
′	″	Cos.		Cotg.		Tang.	Sin.		″	′

M

506	
1	50.6
2	101.2
3	151.8
4	202.4
5	253.0
6	303.6
7	354.2
8	404.8
9	455.4

505	
1	50.5
2	101.0
3	151.5
4	202.0
5	252.5
6	303.0
7	353.5
8	404.0
9	454.5

504	
1	50.4
2	100.8
3	151.2
4	201.6
5	252.0
6	302.4
7	352.8
8	403.2
9	453.6

393	
1	39.3
2	78.6
3	117.9
4	157.2
5	196.5
6	235.8
7	275.1
8	314.4
9	453.7

392	
1	39.2
2	78.4
3	117.6
4	156.8
5	196.0
6	235.2
7	274.4
8	313.6
9	352.8

391	
1	39.1
2	78.2
3	117.3
4	156.4
5	195.5
6	234.6
7	273.7
8	312.8
9	351.9

390	
1	39
2	78
3	117
4	156
5	195
6	234
7	273
8	312
9	351

113	
1	11.3
2	22.6
3	33.9
4	45.2
5	56.5
6	67.8
7	79.1
8	90.4
9	101.7

B,20″. Pe linia orizontale ce trece prin acest numer de secunde, 20, vom gasi:

$$\log tg 28^0 15' 20'' = \bar{1},7303335.$$

Tot assemenea vom gasi:

$$\log tg 61^0 41' 30'' = 0,2687077,$$
$$\log cot 28^0 14' 50'' = 0,2698180,$$
$$\log cot 61^0 49' 10'' = \bar{1},7289690,$$
$$\log cos 28^0 15' 40'' = \bar{1},9448768,$$
$$\log cos 61^0 44' 0'' = \bar{1},6753896.$$

USUL TABLELOR.

Doue sunt problemele ce se pot presinta cand voim a ne servi cu tablele trigonemetrice: 1^0 Se dà un arc si se cere se gassim logaritmul uneia din liniile selle trigonometrice; 2^0. Se dà logaritmul unei linii trigonometrice a unui arc necunoscut, si se cere se gassim acel arc.

87. **Problema I.** *Danduse un arc, se gassim logaritmul uneia din liniile selle trigonometrice.*

Am vediut* cum trebue a procede pentru a gasi lo *86 garitmul liniei trigonometrice a unui arc care se gasesce in table. Nu vom mai reveni asupra acestei probleme, ci ne vom ocupa numai de casul cand arcul dat nu se afla in table.

1^0. *Se se gasesca logaritmul sinusului unui arc.*

Fie a se gasi logsin $28^0 14' 36'',5$. Fiind-cà arcul dat nu se afla in table, vom cauta logaritmii sinusului arcelor ce se afla in table si intre cari este coprins arcul dat, adeca:

$$\log sin 28^0 14' 30'' = \bar{1},6750370$$

si $$\log sin 28^0 14' 40'' = \bar{1},6750762.$$

In colona D vedem cà differentia Δ intre acesti doi logaritmi este 392; de alta parte differentia intre cel mai mic din aceste arce si arcul dat estè de $6'',5$. Inse pentru intervale forte mici, ca celle din casul de fatia, putem considera logaritmii sinusurilor ca fiind proportionali cu arcele ensesi; asia-dera putem face rationamentul urmator: la ua crescere de $10''$ a arcului, corespunde ua adaogire de 392 unitati de al sieptelea ordin la logaritm; la ua crescere de $6'',5$ a arcului, ce adaogire se cuvine logaritmului? Proportiunea:

$10'':392=6''5:x$, ne dà: $x=\frac{392\times 6'',5}{10}=254,8$, valorea quantitatii cu care trebue crescut $\log\sin 28^0 14' 30''$ pentru a avé $\log\sin 28^0 14' 36'',5$; prin urmare

$$\log\sin 28^0 14' 36'',5=\bar{1},67506248.$$

Eca dispositiunea calculului:

$$\begin{array}{lr} \log\sin 28^0 14' 30''=\bar{1},6750370 & \Delta=392 \\ \underline{\text{pentru } 6'',5 \qquad\qquad\qquad 2548} & \dfrac{392\times 6'',5}{10}=254,8. \\ \log\sin 28^0 14' 36'',5=\bar{1},67506248 & \end{array}$$

Observare. Cand differentia gasita pentru logaritm presinta ua parte fractionaria, a carii prima decimale este mai mica de cât 5, tota partea fractionaria se lapeda; era deca prima diecimale e mai mare de cât 5, partea fractionaria tot se lapeda, marind inse cu ua unitate ultima cifra a intregilor. Asia, in essemplul precedinte differentia fiind 254,8, dupe transformare ea va deveni 255, si atunci $\log\sin 28^0 14' 36'',5$ va fi $\bar{1},6750625$. Deca differentia ar fi fost 254,31, spre essemplu, nu am fi introdus in calcul de cât partea 254.

Acesta observare este aplicabile la tote calculele ce se fac cu logaritmi.

88. Calculul partii proportionale 254,8 se pote face cu mult mai mare inlesnire cu ajutorul tablelor de diferentie proportionale, asiediate pe marginea paginei, afara din cadru. Aceste table coprind crescerile logaritmului correspundiatorie la fie-care crescere de $1''$, $2''$....$9''$ a arcului. Se gassim, spre essemplu, care este crescerea logaritmului ce corespunde la crescerea $6'',5$ in arc, differentia tabulara fiind 392. Tabelul intitulat *392* ne areta cà la crescerea $6''$ a arcului correspunde differentia 235,2. Pentru a gasi si differentia corespundiatore la crescerea de $0'',5$, observàm cà acesta differentia este a diecea parte din differentia correspundiatore la $5''$, câci si $0'',5$ este a diecea parte din $5''$; deci acesta differentia va fi 19,6, pre care adaogindu-o la 235,2, aflàm 254,8.

Tot assemenea vom opera si pentru a gasi *logaritmul tangentei unui arc ore-care*; asia

$$\log tg 61^0 43' 48'',3 = 0,2694055.$$

89. 2°. *Se se gasesca logaritmul cosinusului unui arc.*

Fie a se gasi $\log\cos 61^0 41' 37'',8$. Acest arc este coprins intre $61^0 41' 30''$ si $61^0 41' 40''$, si tablele dau:

$$\log\cos 31^0 41' 30'' = \overline{1},6759764,$$

$$\log\cos 61^0 41' 40'' = \overline{1},6759374,$$

cu differentia tabulara 390. Observàm inca cà

$$\log\cos 61^0 41' 30'' > \log\cos 61^0 41' 40'',$$

câci scim cà in primul cadran cosinusul descresce cu cât cresce arcul; prin urmare vom rationa in modul urmator: la ua *descrescere* de $10''$ in arc, corespunde *crescerea* la logaritm de 390; la ua *descrescere* in arc de $2'',2$ (differentia intre arcul dat si arcul cel mai mare din celle-alte doue), ce *crescere* la logaritm va corespunde?

Tabela partilor proportionale ne dà:

crescere correspundiatore la $2''$ $=78$

crescere correspundiatore la $0'',2 = 7,8$

$85,8.$

Acesta diferentia, fiind adaogita la $\log\cos 61^0 41' 40''$, dà:

$$\log\cos 61^0 41' 37'',8 = \bar{1},6759460.$$

In assemenea mod gassim si

$$\log\cot 28^0 18' 38'',4 = 0,2686644.$$

Observare. Din acestea vedem cà pentru sinus si tangenta, calculul diferentiei logaritmilor se face *prin esces*, adeca se ia in considerare diferentia intre arcul dat si un arc *mai mic* de cat densul. Pentru cosinus si cotangenta acel calcul se face *prin lipsa*, câci se ia diferentia intre arcul dat si un alt arc *mai mare* de cât densul. Restul calculului este identic in ambele casuri.

90. In calculele precedente am presupus cà crescerile logaritmilor sunt proportionale cu crescerile arcurilor. Cand inse arcurile sunt forte mici, acesta nu mai este esact pentru logsin si logtg, si atunci nu mai putem aplica metodele ce am dat. Eca cum operàm in casul acesta:

Fie un arc dat, $a+h$, esprimat prin un numer intreg a de secunde, si prin ua fractiune h de secunda. Pentru a gasi $\log\sin(a+h)$ si $\log\mathrm{tg}(a+h)$, arcele fiind forte mici, putem admite cà raportul intre arcele a si $a+h$ este egal cu raportul intre sinusurile seu intre tangentele lor, adeca:

$$\frac{\sin(a+h)}{\sin a} = \frac{a+h}{a}, \quad \frac{\mathrm{tg}(a+h)}{\mathrm{tg} a} = \frac{a+h}{a}.$$

si luand logaritmii,

$$\left.\begin{array}{l}\log\sin(a+h)=\log\sin a+\log(a+h)-\log a,\\ \log\mathrm{tg}(a+h)=\log\mathrm{tg}a+\log(a+h)-\log a.\end{array}\right\}\quad(1)$$

Aci logsin$a$ si logtg$a$ se afla din *prima parte a tablelor trigonometrice*, câci a este un numer intreg de secunde; log $(a+h)$ si log$a$ se afla din tabla logaritmilor *numerelor*. Valorile gasite pentru aceste differite quantitati fiind introduse in relatiile (1), vom obtine pe logsin$(a+h)$ si logtg$(a+h)$.

1°. Se aflàm logsin$0^\circ 2' 38''$,7254. Acest arc, redus in secunde, este $158''$,7254. Prin urmare in acest essemplu, $a=158$, $h=0{,}7254$, si relatia antaia din (1) se face:

$$\log\sin 158'',7254=\log\sin 158''+\log 158{,}7254-\log 158.$$

Inse, dupe table,

$$\log\sin 158''=\bar{4},8842319,$$
$$\log 158{,}7254=2{,}2006464,$$
$$\log 158=2{,}1986571;$$

prin urmare

$$\log\sin 0^\circ 2' 38'',7254=\bar{4},8862212.$$

Assemenea si

$$\log\mathrm{tg}\, 0^\circ 2' 38'',7254=\bar{4},8862213.$$

Pentru a gasi logcot a unui arc forte mic, trebue mai antaiu a calcula logtg; câci, din $\cot x=\frac{1}{\mathrm{tg}x}$, avem: $\log\cot x=-\log\mathrm{tg}x$. Asia:

$$\log\cot 0^\circ 2' 38'',7254=-(\bar{4}'8862213)=3{,}1137787.$$

2°. Se se afle logaritmul cosinusului unui arc forte mic $a+h$.

Din relatia

$$\mathrm{tg}(a+h)=\frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)},$$

deducem:

$$\log\cos(a+h)=\log\sin(a+h)-\log tg(a+h),$$

formula prin care am puté calcula $\log\cos(a+h)$, cunoscund pre $\log\sin(a+h)$ si $\log tg(a+h)$. Insè deca vom inlocui pe $\log\sin(a+h)$ si $\log tg(a+h)$ cu valorile lor date prin (1) si vom reduce termenii assemeni, vom ajunge la

$$\log\cos(a+h)=\log\sin a-\log tg a,$$

seu $$\log\cos(a+h)=\log\cos a. \quad \text{(a)}$$

Prin urmare, deca arcele $a+h$ si a sunt forte mici, logaritmii cosinelor lor sunt aprope egale. Acesta se pote vedé si din table. Arcul $0^0 2' 38'',7254$ este coprins intre $0^0 2' 30''$ si $0^0 2' 40''$; inse a doua parte a tablelor areta cà tote arcele de la $0^0 1' 40''$ pene la $0^0 2' 50''$ au acellasiu logcos; asia dera

$$\log\cos 0^0 2' 38'',7254=\log\cos 0^0 2' 30''.$$

Observare. Din relatiunea (a) resulta cà arcele forte mici sunt forte reu determinate prin cosinusurile lor; asia, in essemplul precedinte am vediut cà la un acellasiu logcos correspondea tote arcele de la $1' 40''$ pene la $2' 50''$, ceea cu produce ua incertitudine de $1' 10''$.

Pe de alta parte avem:

$$\cos a=\sin(90^0-a);$$

deca a este forte mic, 90^0-a differa prea putin de 90^0; relatiunea acesta ne areta dera ca arcele vecine de 90^0 sunt forte reu determinate prin sinusurile lor, cari variadia prea incet.

Nu este tot asia pentru tangenta si cotangenta Aceste linii trigonometrice variadia mult mai rapede de cât sinusul si cosinusul, câci scim cà in primul cadran elle iau tote valorile de la 0 pene la ∞. Observand diferentiele tabulare alle lor, vedem ca valorea cea mai mica a acestor differentie este la 45^0; asia-dera acolo tangenta si cotangenta variadia mai incet, si acolo se pote produce erorea cea mai mare. Inse cu tablele lui Callet chiar acesta valore maximum a erorii este asia de neinsemnata ($0'',03$), incât se pote neglige. Prin urmare din tote liniile trigonometrice, celle mai avantagiose pentru a represinta arcele cu esactitate sunt tangenta si cotangenta.

91. **Problema II.** *Dandu-se logaritmul unei linii trigonometrice a unui arc, se se gasesca arcul.*

Fie a se gasi arcul x al carui logsin este $\bar{1},9451480$. Cautàm in table la colona intitulata **sin** pene cand se dàm peste logaritmul dat, si vedem cà acest logaritm se afla in colona H intitulata *jos* **sin**; prin urmare, pentru a gasi secundele si minutele arcului, le vom lua la drepta in colonele L si K, era gradele le vom lua de jos. Ast-fel arcul cautat este: $x = 61^0 48' 20''$.

Assemene vom face si pentru a gasi un arc correspundiator la un logcos, logtg, logcot dat, *cand acest logaritmi se afla in table.* Ast-fel se gasesce:

Pentru $\log\mathrm{tg}x = \bar{1},7297779$, $x = 28^0 13' 30''$,
pentru $\log\mathrm{cot}x = \bar{1},7307373$, $x = 61^0 43' 20''$,
pentru $\log\cos x = \bar{1},9449107$, $x = 28^0 15' 10''$,

92. *Deca logaritmul dat nu se afla in table,* vom cauta doi logaritmi intre cari se fie coprins logaritmul dat, si vom gasi arcul correspundiator la acest logaritm prin ua proportia.

Ast-fel, fie $\log\sin x = \bar{1},6756418$. Cautand in table, vedem cà acest logaritm este coprins intre

$$\bar{1},6756245 = \log\sin 28^0 17' 0'',$$

si $$\bar{1},6756636 = \log\sin 28^0 17' 10'',$$

Differentia tabularia intre acesti doi logaritmi este

391, era intre cel mai mic din acestia si logaritmul dat, 173. Prin urmare, deca ua diferentia a logaritmilor de 391 unitati de al septelea ordin diecimal corespunde la ua crescere in arc de $10''$, ua differentia in logaritm de 173 unitati de acellasiu ordin diecimal, la ce crescere in arc va corespunde? Respunsul este dat prin proportiunea:

$$391 : 10'' = 173 : \delta, \text{ de unde } \delta = \frac{173 \times 10''}{319} = 4'',4.$$

Adaogind acesta crescere la arcul cel mai mic, gasim arcul cautat:

$$x = 28^{0}17'4'',4.$$

Eca dispositiunea calculului:

$$\begin{array}{ll} \bar{1},6756418 = \log\sin x & \Delta = 391 \\ \underline{\bar{1},6756245 = \log\sin 28^{0}17'0''} & \\ \quad 173 & \delta = \dfrac{173 \times 10''}{391} = 4'',4; \end{array}$$

$$x = 28^{0}17'0'' + 4'',4 = 28^{0}17'4'',4.$$

93. Crescerea in arc de $4''$,4 se pote gasi si prin tablele diferentielor proportionali de pe margine. Pentru acesta in tabelul intitulat *391* cautàm cea mai mare diferentia care se coprinde in 173, si acesta este 156,4, correspundiatore la $4''$. Scadiend apoi pe 156,4 din 173, gasim diferentia 16,6. Impartind in minte numerele din tabel cu 10, vedem cà din totė câturile obtinute, cel mai mare care incape in 16,6 este 15,64, corespundiator la crescerea in arc $0''$,4. Oprind aprosimatiunea la partile din 10 alle secundei, crescerea totale in arc va fi dera de $4''$,4.

Tot assemenea, dandu-se: $\log\mathrm{tg}\, x = \bar{1},7297543$, gasim: $x = 28^{0}13'25'',3$.

94. *Se gasim arcul* x *al carui logcos este* $\bar{1},9447589$.

Tablele ne areta cà acest logaritm este coprins intre

$$\bar{1},9447635=\log\cos 28^0 17'20'',$$

si

$$\bar{1},9447522=\log\cos 28^0 17'30'',$$

a caror diferentia tabulara este 113; diferentia intre logaritmul cel mai mic $\bar{1},9447522$ si cel dat este 67. Dicem dera: deca la ua adaogire de 113 unitati de al septelea ordin diecimal la logaritm, correspunde ua *descrescere* de 10″ in arc, la ua *adaogire* de 67 unitati la logaritm, ce *descrescere* in arc va corespunde? Proportiunea:

10
11
10
10
10
120

$$113:10''=67:\delta', \text{ dà: } \delta'=\frac{67\times10''}{113}=5'',9.$$

Scadiend acesta *descrescere* din arcul $28^0 17'30''$, gasim arcul cautat: $x=28^0 17'24'',1$.

Valorea descrescerii arcului, 5″,9, se pote gasi si prin tabla partilor proportionale. In tabelul intitulat *113* vedem cà numerul cel mai apropiat de 67 este 56,5, la care correspunde descrescerea 5″. Apoi numerul din tabel divisat cu 10 care se apropie mai mult de diferentia 67—56,5=10,5, este 10,17, la care corespunde descrescerea 0″,9. Prin urmare descrescerea totale in arc este de 5″,9.

In assemenea mod, pentru $\log\cot x=\bar{1},7310740$, vom gasi: $x=61^0 42'13'',3$.

95. In lucrarile precedente am presupus cà variatiunile arcelor sunt proportionale cu variatiunile logaritmilor liniilor sele trigonometrice. Inse acesta nu mai este adeverat pentru arcele forte mici, cand este vorba se le determinàm prin logsin seu logtg. In acest cas vom cauta in *prima parte a tablelor trigonometrice* logaritmul care se apropie mai mult de logaritmul dat; vom lua arcul correspundiator la acest logaritm, si-l

vom reduce in secunde. Fie a acest numer intreg de secunde, si $a+h$ numerul de secunde si fractiuni de secunda al arcului necunoscut ce corespunde la logarit-
90mul dat. Relatiunile (1) ne dau:

$$\left.\begin{aligned} \log(a+h) &= \log\sin(a+h) - \log\sin a + \log a, \\ \log(a+h) &= \log\mathrm{tg}(a+h) - \log\mathrm{tg} a + \log a. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Aci $\log\sin(a+h)$ seu $\log\mathrm{tg}(a+h)$ sunt quantitatile date, log sin$a$ seu logtg$a$ se afla in *prima parte a tablelor trigonometrice*, si log$a$ in tabla de logaritmi a numerelor. Prin urmare $\log(a+h)$ este determinat, precum si $a+h$, arcul cautat.

Fie a se determina, spre essemplu, arcul al carui logsin este $\bar{3}.3325473$.

Prima parte a tablelor trigonometrice ne areta cà logsin cel mai apropiat de acesta este $\bar{3},3319783$, corespundiator la arcul $0^{\circ}7'23''=443''$. Prin urmare, in prima din formulele (2) avem: $a=443$, $\log\sin(a+h)=\bar{3},3325473$, $\log\sin a=\bar{3},3319783$, si tablele ne dau: log$a$ $\log 443=2,6464037$. Prima din formulele (2) devine dera:

$$\log(a+h)=\bar{3},3325473-\bar{3},3319783 \\ +2,6464037=2,6469727,$$

si calculand pe $a+h$, gasim: $a+h=443'',5807=0^{\circ}7'23'',5807$. Acesta este valorea arcului cautat.

Assemenea vom gasi: $a+h=0^{\circ}8'10'',4995$, pentru $\log\mathrm{tg}(a+h)=\bar{3},3762143$.

Tot asia se operedia cand se cere a se gasi un arc mic, cunoscund logaritmul cotangentei selle; câci acest logaritm este egal si de semn contrariu cu al tan-
J0gentei.

Deca inse se cere a se calcula un arc mic cunoscund logaritmul cosinusului seu, acest calcul nu se pote face cu precisiune. Fie, spre essemplu, a se gasi arcul al carui logcos este $\overline{1},9999998$, Tablele areta cà acest logcos corespunde la tote arcele coprinse intre $0^0 3' 0''$ si $0^0 3' 40''$; prin urmare determinarea ce ni se cere nu se pote face de cât cu ua nesecurantia de $40''$.

CARTEA II

TRIGONOMETRIA RECTILINIA.

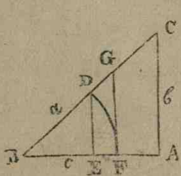
CAPITULUL I.

Proprietatile trianghiurilor rectilinii.

Vom continua si de aci inainte a insemna celle trei anghiuri alle unui trianghiu cu literele majuscule A, B, C, era laturile cu literele minuscule a, b, c, corespundiatorie la anghiurile opuse. Deca trianghiul este dreptanghiu, anghiul drept se va insemna cu litëra A si hipotenusa cu a.

TRIANGHIURI DREPTANGHIE.

96. **Teorema I**. *In ori-ce trianghiu dreptanghiu, ua lature a anghiului drept este egale cu hipotenusa immultita cu sinusul anghiului opus.*



Relatiunea ce trebue demonstrata este

$$b = a\sin B.$$

Din verful anghiului B cu ua radia BD=1 descriem arcul DF, si ducem DE perpendicularia pe BA. Trianghiurile assemeni BCA si BDE dau:

$$\frac{CA}{DE}=\frac{BC}{BD};$$

inse CA=b, DE=sinDF=sinB,BC=a, BD=1 ; prin urmare relatiunea se reduce la

$$\frac{b}{\sin B}=a,$$

seu $$b=a\sin B. \qquad (1)$$

C.C.T.D.

Assemenea vom avê si

$$c=a\sin C. \qquad (1)$$

97. **Teorema II.** *In ori-ce trianghiu dreptanghiu ua lature a anghiului drept este egale cu ipotenusa immultita cu cosinusul anghiului allaturat.*

Trebue a demonstra relatia,

$$c=a\cos B.$$

Trianghiurile assemeni BCA si BDE, de mai sus, dau:

$$\frac{BA}{BE}=\frac{BC}{BD},$$

si inlocuind pe BA, BE, BC, BD prin valorile lor,

$$\frac{c}{\cos B}=a,$$

seu $$c=a\cos B \qquad (2)$$

C.C.T.D.

Assemenea aflàm si:

$$b=a\cos C \qquad (2)$$

Observarea I. Relatiunile (1) si (2) se pot deduce unele din altele. In adever, in ori-ce trianghiu dreptanghiu avem: B+C=90^0, seu B=90^0—C; asia-dera: sinB=cosC. Punend acesta valore in (1), dobandim:

$$b=a\cos C,$$

care este una din relatiile (2).

Tot assemenea vom deduce si formulele (1) din (2).

Observarea II. Redicand la patrat formulele:

$$b=a\sin B,$$
$$c=a\cos B,$$

si adunand membru cu membru, obtinem:

$$b^2+c^2=a^2(\sin^2B+\cos^2B)=a^2;$$

prin urmare *patratul ipotenusei este egal cu suma patratelor ambelor catete,* resultat pre care lu cunoscem deja.

98. **Teorema III.** *In ori-ce trianghiu dreptanghiu, ua lature a anghiului drept este egale cu cea-alta lature immultita cu tangenta anghiului opus.*

Relatia ce trebue demonstrata este

$$b=c\operatorname{tg}B.$$

Assemenarea trianghiurilor BCA si BGF de mai sus ne dà:

$$\frac{CA}{BA}=\frac{GF}{BF}, \text{ seu } \frac{b}{c}=\frac{\operatorname{tg}B}{1},$$

de unde

$$b=c\operatorname{tg}B. \qquad (3)$$

C.C.T.D.

Assemenea vom avé si

$$c=b\operatorname{tg}C. \qquad (3)$$

99. *Observarea I,* Find-cà: $B+C=90^0$, avem: $B=90^0-C$, si: $C=90^0-B$; prin urmare: $\operatorname{tg}B=\cot C$, si: $\operatorname{tg}C=\cot B$. Punend aceste valori in (3), avem:

$$\left.\begin{array}{l} b=c\cot C, \\ c=b\cot B, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

adeca *in un trianghiu dreptanghiu, ua lature a anghiu-*

lui drept este egale cu cea-alta lature immultita cu cotangenta anghiului alaturat.

100. *Observarea II.* Relatiunile (3) si (4) se pot deduce din (1) si (2) prin nisce simple impartiri. In adever, divisand equatiunile (1) si (2) respectiv una prin alta, avem:

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\cos B}, \quad \frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\cos C},$$

seu: $$b=c\,\mathrm{tg}B, \quad c=b\,\mathrm{tg}C;$$

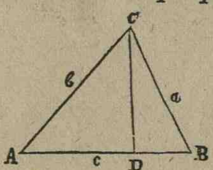
si facund divisiunea in sens contrariu,

$$\frac{c}{b}=\frac{\cos B}{\sin B}, \quad \frac{b}{c}=\frac{\cos C}{\sin C},$$

de unde $$c=b\cot B, \quad b=c\cot C.$$

TRIANGHIURI ORE-CARI SEU OBLICANGHIE

101. **Teorema I.** *In un trianghiu rectiliniu ore-care laturile sunt proportionale cu sinusurile anghiurilor opuse.*



Relatiunea ce se cere a se demonstra este:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Din verful C lasàm perpendiculara CD pe AB. In triànghiul dreptanghiu ACD, avem*: *96

$$CD=AC\sin A, \text{ seu: } CD=b\sin A.$$

In CDB avem assemenea

$$CD=CB\sin B, \text{ seu: } CD=a\sin B.$$

Comparand acèste doue equatiuni vedem cà:

$$a\sin B=b\sin A,$$

si divisand ambii membri cu sinA sinB,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

Vom demonstra assemenea cà

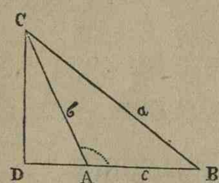
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Putem dera scrie sirul de raporturi egale:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \qquad (1)$$

C.C.T.D.

Se vedem decaaceste relatiuni subsista si cand trianghiul are un anghiu A obtus. In acest cas, din trianghiul CDB, avem:



*26

$$CD = CB\sin B, \text{ seu: } CD = a \sin B;$$

din CDA asem assemenea:

$$CD = CA \sin CAD,$$

seu: $CD = b\sin(180^0 - A)$,

si fiind-cà $\sin(180^0 - A) = \sin A$*,

$$CD = b \sin A;$$

asia-dera

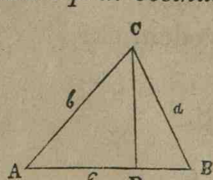
$$a\sin B = b\sin A,$$

de unde

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Prin urmare relatiunile (1) sunt generale.

• 102. **Teorema II.** *In un trianghiu rectiliniu ore-care, patratul unei laturi este egal cu suma patratelor celor-alte doue laturi, minus de doue ori produsul acelor laturi prin cosinusul anghiului coprins intre elle.*



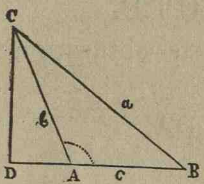
Scim din geometria cà patratul laturei opuse la un anghiu ascutit este egal cu suma patratelor cellor-alte doue laturi, minus de doue ori produsul uneia din elle prin projectia cellei de a doua pe cea d'antaiu; ceea ce se esprime prin equatiunea:

$$\overline{CB}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2AB\times AD.$$

Inse $CB=a$, $AC=b$, $AB=c$, si in trianghiul dreptanghiu CDA avem:

$AD=AC\cos A$; asia-dera relatia de sus devine:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$



Deca laturea considerata se opune la un anghiu obtus, relatiunea geometrica este:

$$\overline{CB}^2=\overline{CA}^2+\overline{AB}^2+2AB\times DA.$$

Inse in trianghiul dreptanghiu CDA avem:

$DA=CA\cos CAD=b\cos(180^0-A)=-b\cos A$*; *26

punend in equatie acesta valore, si inlocuind pe CB, CA, AB, cu a, b, c, avem:

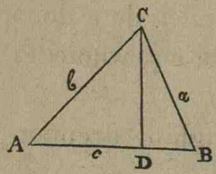
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

care este identica cu equatiunea gasita deja.

Tot ast-fel vom gassi si espressiunea valorii lui b^2+si c^2. Obtinem ast-fel celle trei equatiuni urmatore:

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B,\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

103. **Teorema III.** *In ori-ce trianghiu rectiliniu orecare ua lature este egale cu suma celor-alte doue, immultite fie-care respectiv cu cosinusul anghiului ce acesta lature face cu laturea considerata.*



Dupe figura avem:

$$c=AD+DB.$$

Inse in ACD,

$$AD=b\cos A,$$

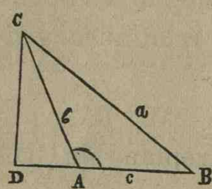
si in CDB,

$$DB=a\cos B.$$

Punend aceste valori in equatia de sus,

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

C.C.T.D.



Deca trianghiul este obtusanghiu, avem:

$$c=DB-DA,$$

si fiind-cà

$$DB=a\cos B, \text{ si } DA=b\cos(180^0-A).$$

avem:

$$c=a\cos B-b\cos(180^0-A);$$

inse $\cos(180^0-A)=-\cos A$; prin urmare

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

Facund assemenea pentru celle-alte laturi, vom gasi valori analoge; avem dera cele trei equatiuni urmatore:

$$\left.\begin{aligned} a&=b\cos C+c\cos B,\\ b&=a\cos C+c\cos A,\\ c&=a\cos B+b\cos A.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

104. Sistemele de equatiuni (1), (2) si (3) se pot deduce unele din altele.

Pentru a deduce equatiunile (3) din (2), adunàm primele doue equatiuni (2); avem:

$$a^2+b^2=b^2+2c^2-2bc\cos A+a^2-2ac\cos B$$

si facund tote reducerile,

$$c=a\cos B+b\cos A,$$

care este una din equatiunile (3). Tot assemenea vom obtine si pe celle-alte doue.

Pentru a deduce din (3) equatiunile (2), immultim pe prima equatiune din (3) cu a, pe a doua cu b, p ea treia cu—c, si le adunàm:

$$a^2+b^2-c^2=ab\cos C+ac\cos B+ab\cos C$$
$$+bc\cos A-ac\cos B-bc\cos A,$$

si facund tote reducerile,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

care este una din equatiunile (2). Celle-alte doue se obtin assemenea.

Din acestea resulta cà sistemele de equatiuni (2) si (3) se pot deduce unele din altele; prin urmare sunt equivalente.

Se demonstràm acum cà sistemele (2) si (3) se pot deduce din equatiunile fundamentale

$$A+B+C=180^0, \tag{a}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \tag{b}$$

Relatiunea (a) dà:

$$C=180^0-(A+B),$$

de unde

$$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A. \tag{c}$$

Deca insemnàm cu m valorea raportului constant

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

vom avé:

$$\frac{a}{\sin A}=m,\ \frac{b}{\sin B}=m,\ \frac{c}{\sin C}=m,$$

de unde

$$\frac{a}{m} = \sin A, \frac{b}{m} = \sin B, \frac{c}{m} = \sin C.$$

Punend aceste valori in (c) si facund reducerile,

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

care este una din equatiunile (3).

Se scotem relatiunea (b) din (2). Prima din aceste equatiuni dà:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

si ridicand la patrat,

$$\cos^2 A = \frac{b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2}{4b^2c^2};$$

scadiend acesta equatiune din 1=1 si reducund,

$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A = \frac{2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2};$$

divisand ambii membri cu a^2,

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2b^2c^2}.$$

Deca din a doua equatiune (2) vom scote valorea lui $\frac{\sin^2 B}{b^2}$ si din a treia pe a lui $\frac{\sin^2 C}{c^2}$, vom gasi tot aceasi valore ca si pentru $\frac{\sin^2 A}{a^2}$; prin urmare,

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2},$$

si estragund radecina patrata,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

cari sunt chiar equatiunile (1).

Asia-dera celle trei sisteme de equatiuni (1), (2), (3) se pot deducė unele din altele; prin urmare elle sunt equivalente. Tot assemenea si equatiunea

$$A+B+C=180^0$$

se pote deduce din acelle trei sisteme de equatiuni. Pentru acesta, insemnand erasi cu m raportul constant al laturei catre sinusul anghiului opus, avem:

$$\frac{a}{\sin A}=m, \frac{b}{\sin B}=m, \frac{c}{\sin C}=m,$$

din cari:

$$a=m\sin A,\ b=m\sin B,\ c=m\sin C,$$

si punend acestė valori in una din equatiunile (3), spre èssemplu in cea d'antaiu, si impartind cu m, avem:

$$\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B,$$

seu

$$\sin A=\sin(B+C);$$

deci, fiind-cà arcele A si B+C au acellasiu sinus cu acellasiu semn, trebue se avem:

$$A=B+C, \text{ seu}; A=180^0-(B+C).$$

Prima hipotese nu se pote admite, câci, cum n'am facut noi pėne acum nici ua supositiune asupra valorii relative a anghiurilor A, B, C, anghiul A s'ar puté se fie si cel mai mic din tote, si atunci equatiunea

$$A=B+C$$

ar fi absurda. Vom admite dera numai pė a doua

$$A=180^0-(B+C), \text{ seu: } A+B+C=180^0,$$

care este chiar equatiunea (a) din formulele fundamentale.

ANGHIURI IN FUNCTIUNE DE LATURI.

105. Din equatiunile fundamentale

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

deducem, dupe teoria proportiilor:

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{c}{\sin C};$$

si scamband internii,

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C},$$

Assemenea avem si:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}.$$

Inlocuind pe $\sin A+\sin B$ si pe $\sin A-\sin B$ cu valorile lor calculabile prin logaritmi, si pe $\sin C$ cu $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$, obtinem:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Inse din

$$A+B+C=180^0,$$

deducem:

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C}{2};$$

prin urmare

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2},\ \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}.$$

Dilem Dilem Dilem

Reducund dera dupe aceste formule factorii comuni de la numeratorul si de la numitorul equatiunilor de mai sus, remâne:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Prin

Prin ua simpla permutare de litëre vom obtine alte patru equatiuni analoge cu acestea. Sistemul intreg se compune dera din urmatorele sesse equatiuni, tote calculabile prin logaritmi, si coprindiend fie-care câte sesse elementele trianghiului

$$\left.\begin{aligned}\frac{a+b}{c}&=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\\ \frac{a+c}{b}&=\frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}},\\ \frac{b+c}{a}&=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},\end{aligned}\right\}(1)\qquad \left.\begin{aligned}\frac{a-b}{c}&=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},\\ \frac{a-c}{b}&=\frac{\sin\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{B}{2}},\\ \frac{b-c}{a}&=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.\end{aligned}\right\}(2).$$

Divisand respectiv equatiunile (2) prin (1) avem:

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\,\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{a-b}{a+b},$$

seu

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

Dilemn

Operand assemenea vom gassi inca doue relatiuni; asia-cà vom avé ua noua sistema de equatiuni calculabile prin logaritmi, cari coprind fie-care câte doue laturi si tote anghiurile:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}&=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},\\ \operatorname{tg}\frac{A-C}{2}&=\frac{a-c}{a+c}\cot\frac{B}{2},\\ \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}&=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

— 106. Relatiunea

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

dà:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

44 Inse avem:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

Punend in aceste equatiuni in loc de cosA valorea sea, vom avé:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{4bc}}.$$

$\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}$

Pentru inlesnire punem:

$$2p=a+b+c;$$

scadiend pe rand din ambii membri $2a$, $2b$, $2c$, vom avê: $2(p-a)=b+c-a$, $2(p-b)=a+c-b$, $2(p-c)=a+b-c$; si substituind tote aceste valori in equatiunile de mai sus,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)\,2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2p.2\,(p-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

equatiuni cari dau sinusul si cosinusul jumetatii unui anghiu in functiune de laturile trianghiului. Facund assemenea si pentru celle-alte doue anghiuri, obtinem celle doue sisteme de equatiuni urmatore:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},\end{aligned}\right\}(4)\qquad \left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},\end{aligned}\right\}(5).$$

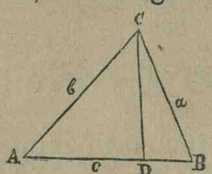
Deca dividem fie-care equatiune din sistema (4) prin equatiunea correspondenta din sistema (5), obtinem un nou sistem de formule:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p(p-a)}},\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

In tote formulele (4), (5), (6), trebue se luàm pentru radical semnul $+$; câci anghiurile trianghiului fiind tote mai mici de cât 180^0, jumetatile lor vor fi mai mici de 90^0, si prin urmare liniile lor trigonometrice vor fi positive.

SUPRAFATIA TRIANGHIULUI.

107. Se scie cà suprafatia unui trianghiu este egale cu jumetatea produsului basei prin inaltimea sea. Astfel, in trianghiul ABC,



suprafatia $s=\frac{1}{2}AB\times CD.=\frac{1}{2}c\times CD.$

Inse in trianghiul dreptanghiu ACD avem:

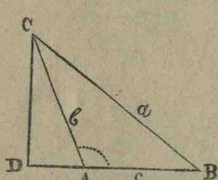
$$CD=AC\sin A=b\sin A.$$

Prin urmare

$$s=\frac{bc\sin A}{2}, \qquad (1)$$

equatiune care dà *suprafatia trianghiului in functiune de doue laturi si anghiul coprins intre elle.*

Deca trianghiul este obtusanghiu, avem inca:



$$CD=CA\sin CAD=b\sin(180^0-A)$$
$$=b\sin A,$$

valore pe care punend-o in

$$s=\tfrac{1}{2}c\times CD,$$

obtinem:

$$s=\frac{bc\sin A}{2}.$$

Prin urmare equatiunea (1) este generale.

108. Din relatiunea

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

scotem:

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B},$$

pe care punend-o in (1) avem:

$$s=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B},$$

si fiind-cà

$$B=180^0-(A+C),$$

$$s=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin(A+C)}, \qquad (2)$$

equatiune care dà *suprafatia trianghiului in functiune de ua lature si celle doue anghiuri alaturate.*

109. Deca in

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

inlocuim pe $\sin\frac{A}{2}$ si $\cos\frac{A}{2}$ prin valorile lor date prin equatiunile (4) si (5)*, avem: *106

$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$=2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}.$$

Punend acesta valore a lui sinA in (1) si facund reducerile, obtinem equatiunea:

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

equatiune care dà *suprafatia trianghiului in functiune de celle trei laturi alle selle.*

Essemple. 1^0. Se calculàm suprafatia unui triunghiu in care cunoscem: $b=234^m,504; c=203^m,17; A=41^0 43' 56'',8$.

Dupe (1) avem:

$$s=\frac{234^m,504\times 203^m,17\times \sin 41^0 43' 56'',8}{2},$$

de unde:

$$\log s = \log 234^{m},504 + \log 203^{m},17$$
$$+ \log\sin 41^{0}43'56'',8 - \log 2$$
$$= 2,3701502 + 2,3078596 + \bar{1},8232479 - 0,3010300$$
$$= 4,2002277\,;$$

prin urmare

$$s = 15857^{mp},244.$$

2^{0} Se calculàm suprafatia unui trianghiu in care se cunosce: $b = 234^{m},504$; $A = 41^{0}43'56'',8$; $C = 58^{0}29'48'',6$.

Dupe formula (2) avém:

$$\log s = 2\log 234^{m}504 + \log\sin 41^{0}43'56'',8$$
$$+ \log\sin 58^{0}29'48'',6 - \log 2 - \log\sin 100^{0}13'45'',4.$$
$$= 4,7403004 + \bar{1},8232479 + \bar{1},9307511 - 0,3010300$$
$$- \bar{1},9930414 = 4,2002280,$$

adeca

$$s = 15857^{mp},255.$$

3^{0}. Se se afle suprafatia unui trianghiu in care se cunosce: $a = 158^{m},62$; $b = 234^{m},504$; $c = 203^{m},17$.

Formula (3) dà:

$$\log s = \frac{\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)}{2}.$$

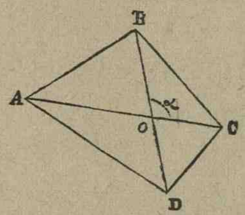
Inse in casul de fatia avem: $p = 298^{m},147$; $p - a = 139^{m},527$; $p - b = 63^{m},643$; $p - c = 94^{m},977$. Prin urmare

$$\log s = \frac{2,4744304 + 2,1446583 + 1,8037506 + 1,9776184}{2}$$
$$= 4,2002288,$$

seu

$$s = 15857^{mp},284.$$

110. In assemenea mod se pote gasi espressiunea suprafetiei unui patrulater ore-care ABCD, in functiune de diagonalele selle AC si BD si de anghiul α ce fac elle una cu alta. Avem:



$$ABCD = AOB + BOC + COD + DOA.$$

Inse in celle patru trianghiuri, considerand si cà: $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$, avem :

$$AOB = \tfrac{1}{2} AO \times OB \sin\alpha,$$
$$BOC = \tfrac{1}{2} OB \times OC \sin\alpha,$$
$$COD = \tfrac{1}{2} OC \times OD \sin\alpha,$$
$$DOA = \tfrac{1}{2} OD \times AO \sin\alpha,$$

si adunand,

$$\begin{aligned} ABCD &= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\,(AO \times OB + OB \times OC + OC \times OD + OD \times AO) \\ &= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\,\{AO(OB+OD) + OC(OB+OD)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\,(AO \times BD + OC \times BD) \\ &= \tfrac{1}{2}\sin\alpha \times BD(AO+OC) \\ &= \tfrac{1}{2} AC \times BD \sin\alpha; \end{aligned}$$

158 595
234
203

adeca *suprafatia unui patrulater ore-càre este egale cu jumetatea produsului diagonalelor prin sinusul anghiului ce fac elle una cu alta.*

Essemplu. Date: $AC = 117^m{,}13$; $BD = 98^m{,}56$; $\alpha = 63^0 14' 36'',3$.

Necunoscuta : $ABCD = 5154^{mp}{,}124$.

— 111. Immultind una cu alta formulele (4)*, avem : *106

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.$$

Inse din (3)* scotem: *109

$$s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

seu :

$$(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{s^2}{p}. \qquad \text{(a)}$$

Punend acèsta valore in equatiune, remane :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{s^2}{pabc}.$$

283
276
= 7

158,62
134,504
203,16
596,294 : 2 = 298,148
477

106 Deca immultim una cu alta si relatiunile (5), obtinem :

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc},$$

sĕu

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{ps}{abc}.$$

106 In fine, facund produsul relatiunilor (6), avem :

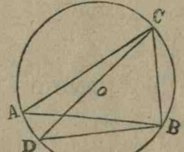
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

si inlocuind numeratorul si radicalul de la numitor prin valorile lor date de equatiunile (a) si (3) precedente,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{s}{p^2}$$

RADIA CERCULUI CIRCUMSCRIS.

112. Fia trianghiul ABC la care circumscriem un cerc, a cării radia o insemnàm cu R. Ducem diametrul CD=2R, si unim D cu B.



Anghiul CBD este drept, câci este inscris in ua semi circumferentia, si prin urmare trianghiul dreptanghiu CBD dà :

$$CB=CD\sin D\,;$$

inse $CB=a$, $CD=2R$, $D=A$; formula dera se va screi:

$$a=2R\sin A,$$

de unde

$$R=\frac{a}{2\sin A};$$

si immultind ambii termeni ai fractiunei cu bc,

$$R=\frac{abc}{2bc\sin A}.$$

107 Inse dupe formula (1),

e = inr

$$\frac{bc\sin A}{2}=s,$$

de unde

$$2bc\sin A=4s\,;$$

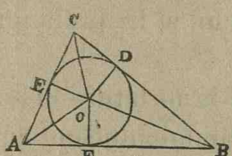
asia-dera

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Essemplu. Date: $a=158^m,62$; $b=234^m,504$; $c=203^m,17$.
Necunoscuta: $R=119^m,1458$.

RADIA CERCULUI INSCRIS.

113. Fia trianghiul ABC. Pentru a construi cercul inscris, dupe cum scim, ducem bissectritiele celor trei



anghiuri, cari se intalnesc tote in un punct O, centrul cerculni inscris; deca din acest punct lasàm perpendicularele OD, OE, OF pe laturile trianghiului, aceste perpendicularie sunt radiele cercului inscris. Cunoscund dera centrul si lungimea radiei cercului inscris, va fi lesne a descrie acel cerc.

Se gassim ua espressiune a acestei radie, r. Dupe figura,

$$ABC=AOB+BOC+COA\,;$$

inse

$$AOB=\tfrac{1}{2}AB\times OF=\tfrac{1}{2}r,$$
$$BOC=\tfrac{1}{2}CB\times OD=\tfrac{1}{2}ar,$$
$$COA=\tfrac{1}{2}AC\times OE=\tfrac{1}{2}br\,;$$

si adunand aceste trei egalitati membru cu membru,

$$ABC=\tfrac{1}{2}r(a+b+c);$$

si punend $ABC=s$, $a+b+c=2p$,

$$s=pr,$$

seu

$$r=\frac{s}{p}.$$

Déca substituim in locul lui s valorea sea

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

si reducem, avem:

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

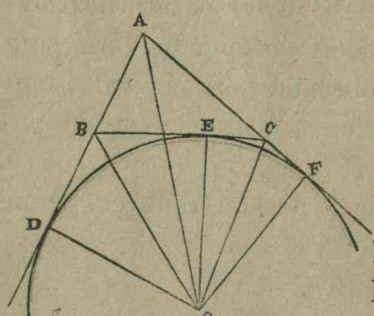
Essemplu. Date: $a=158^{m},62$; $b=234^{m},504$; $c=203^{m},17$.

Necunoscuta: $r=53^{m},1861$.

RADIELE CERCURILOR EXINSCRISE.

114. *Cerc exinscris* la un trianghiu se numescé un cerc tangent la ua lature a trianghiului si la prelungirea cellor-alte doue.

Pentru a construi cercul exinscris la ua lature BC$=a$ a trianghiului, ducem bissectritiele BO si CO alle anghiurilor esteriore CBD si BCF; intersectiunea lor O este centrul cercului cautat; din acest punct lasand perpendicularele OD, OE, OF pe laturea BC si pre prelungirile cellor-alte doue, aceste perpendiculare vor fi egale cu radia cautata α a cercului éxinscris la laturea a.



Pentru a gasi ua espressiune a acestei radie, observàm cà

$$ABC=ABO+ACO-BCO;$$

si deca in trianghiurile ABO, ACO, BCO, consideràm

$2\frac{\sqrt{r(r-a)(r-b)(r-c)}}{\cancel{b}c}$

$r-a$

respectiv ca base pe AB=c, AC=b, BC=a, si ca inaltimi pe OD=OF=OE=α, avem:

$$s=\tfrac{1}{2}c\alpha+\tfrac{1}{2}b\alpha-\tfrac{1}{2}a\alpha=\tfrac{1}{2}\alpha(b+c-a)=\alpha(p-a),$$

de unde

$$\alpha=\frac{s}{p-a};$$

punend in loc de s valorea sea si reducund,

$$\alpha=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

In assemenea mod vom gasi si espressiunea radielor cercurilor exinscrise la laturile b si c:

$$\beta=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},$$

$$\gamma=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

115. Formulele (6)* dau: *106

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p^2(p-a)}}=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

de unde

$$\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}=p\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

si punend acesta valore in equatiunea care dà pe α, avem:

$$\alpha=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Assemenea

$$\beta=p\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

$$\gamma=p\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Essemple. 1°. Date: $a=158^m,62$; $b=234^m,504$; $c=203^m,17$.

Necunoscute : $\alpha=113^m,6503$; $\beta=249^m,1600$; $\gamma=166^m,9592$.

2°. Date : $p=482^m,356$; $A=52^0 16' 35'',4$; $B=76^0 25' 57''4$; $C=51^0 17' 27'',2$.

Necunoscute : $\alpha=236^m,7031$; $\beta=379^m,7990$; $\gamma=231^m,5768$.

116. Din formulele cari dau pe $R, r, \alpha, \beta, \gamma$, se pot deduce mai multe altele, cari de si nu au ver-ua importantia prin elle ensasi, pot inse servi ca verificatiuni. Eca câte-va din acelle formule :

1° Facund inversa equatiunilor

$$r=\frac{s}{p}, \quad \alpha=\frac{s}{p-a}, \quad \beta=\frac{s}{p-b}, \quad \gamma=\frac{s}{p-c},$$

se obtine :

$$\frac{1}{r}=\frac{p}{s}, \quad \frac{1}{\alpha}=\frac{p-a}{s}, \quad \frac{1}{\beta}=\frac{p-b}{s}, \quad \frac{1}{\gamma}=\frac{p-c}{s}.$$

Adunand pe celle trei din urma din aceste equatiuni, avem :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{p-a+p-b+p-c}{s}=\frac{3p-(a+b+c)}{s}=\frac{p}{s},$$

seu :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{r}. \tag{1}$$

2°. Immultind intre elle formulele :

$$r=\frac{s}{p}, \quad \alpha=\frac{s}{p-a}, \quad \beta=\frac{s}{p-b}, \quad \gamma=\frac{s}{p-c}, \tag{a}$$

obtinem :

$$r\alpha\beta\gamma=\frac{s^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{s^4}{s^2}=s^2,$$

de unde

$$s=\sqrt{r\alpha\beta\gamma}. \tag{2}$$

3^0. Adunand una cu alta pe celle trei din urma din formulele (a) si scadiènd pe cea d'antaiu, avèm:

$$\alpha+\beta+\gamma-r=\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}-\frac{s}{p}=$$

$$s\frac{p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{1}{s}\Big\{p(p-c)\left[(p-b)+(p-a)\right]+(p-a)(p-b)\left[p(p-c)\right]\Big\}.$$

Inse

$$p-b+p-a=2p-(a+b)=c,$$

$$p-(p-c)=c;$$

prin urmare

$$\alpha+\beta+\gamma-r=\frac{c}{s}\Big\{p(p-c)+(p-a)(p-b)\Big\}$$

$$=\frac{c}{s}\left\{\frac{(a+b)+c}{2}\,\frac{(a+b)-c}{2}+\frac{c+(b-a)}{2}\,\frac{c-(b-a)}{2}\right\}$$

$$=\frac{c}{s}\left\{\frac{(a+b)^2-c^2}{4}+\frac{c^2-(b-a)^2}{4}\right\}$$

$$=\frac{c}{4s}\times 4ab=\frac{abc}{s}.$$

Inse avèm:

$$\mathrm{R}=\frac{abc}{4s};$$

asia-dera:

$$\alpha+\beta\gamma+-r=4\mathrm{R}. \tag{3}$$

117. In cas cand trianghiul estè dreptanghiu, putem obtine alte formule, sciind cà in casul acesta

$$a^2=b^2+c^2,\ s=\frac{bc}{2}. \tag{A}$$

1^0. Immultind una cu alta equatiunile

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \alpha=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

avem :

$$r\alpha=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)^2(p-c)^2}{p(p-a)}}$$

$$=(p-b)(p-c)=\frac{a+c-b}{2}\,\frac{a+b-c}{2};$$

effectuand produsele si facund tote reducerile, avend in vedere si equatiunile (A), obtinem :

$$r\alpha=s.$$

Assemenea vom avé :

$$\beta\gamma=\sqrt{\frac{p^2(p-a)^2(p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)}}=p(p-a)=s.$$

Prin urmare

$$r\alpha=\beta\gamma. \tag{4}$$

2°. Scadiend una din alta equatiunile

$$\alpha=\frac{s}{p-a},\ r=\frac{s}{p},$$

vom avé :

$$\alpha-r=\frac{s}{p-a}-\frac{s}{p}=s\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}\right)$$

$$=s\frac{p-(p-a)}{p(p-a)}=\frac{sa}{p(p-a)}.$$

Punend in loc de p valorea sea $\frac{a+b+c}{2}$ si facund tote reducerile possibile, avend in vedere relatiunile (A), ajungem la :

$$\alpha-r=a.$$

Adunand intre densele equatiunile

$$\beta=\frac{s}{p-b},\ \gamma=\frac{s}{p-c},$$

avem :

$$\beta+\gamma=s\left(\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$$

$$=s\frac{p-b+p-c}{(p-b)(p-c)}=\frac{sa}{(p-b)(p-c)},$$

si facund reducerile,

$$\beta+\gamma=a.$$

Asia-dera

$$\alpha-r=\beta+\gamma. \qquad (5)$$

Essemple. 1^0. Verificand prin formula (3)* valorile *116
gasite mai sus:

$R=119^m,1458$; $r=53^m,1861$; $\alpha=113^m,6503$;
$\beta=249^m,1600$; $\gamma=166^m,9592$,

gassim numai differentia $0^m,0002$, care provine din micile quantitati cari se neglig tot-de-una in calculele logaritmice.

2^0. Acelleasi valori, verificate prin formula

$$s=\sqrt{r\alpha\beta\gamma},$$

nu dau nici ua diferentia de valorea lui s gasita la *essemplul* 3^0*. *109

3^0. In un trianghiu dreptanghiu in care avem: $a=302^m,752$; $b=185^m,121$; $c=239^m,56$, s'a gasit pentru valorea radielor cercurilor inscris si exinscrise valorile urmatore :

$r=60^m,9645$; $\alpha=363^m,7165$; $\beta=124^m,1565$;
$\gamma=178^m,5955$.

Aceste valori, verificate prin ambele relatiuni :

$$\alpha-r=\beta+\gamma, \text{ si: } \alpha r=\beta\gamma,$$

nu dau nici ua differentia.

CAPITULUL II.

RESOLUTIUNEA TRIANGHIURILOR

Trianghiurile dreptanghie.

118. La resolutiunea trianghiurilor dreptanghie se presenta patru casuri : 1°. Cand se dà hipotenusa si un anghiu ascutit, si se cer celle doue laturi alle anghiului drept si cel-alt anghiu ascutit. 2°. Cand se dà hipotenusa si ua lature a anghiului drept, si se cere cea-alta lature si celle doue anghiuri ascutite. 3°. Cand se dà ua lature a anghiului drept si un anghiu ascutit, si se cere cea-alta lature a anghiului drept, hipotenusa si cel-alt anghiu ascutit. 4°. Cand se dau celle doue laturi alle anghiului drept, si se cere hipotenusa si celle doue anghiuri ascutite.

119. **Casul I**. *Dandu-se hipotenusa* a *si anghiul ascutit* B *al unui trianghiu dreptanghiu, se se calculedie celle doue laturi*, b *si* c *alle anghiului drept, si anghiul ascutit* C.

Vom determina anghiul C prin relatiunea cunoscuta din geometria :

$$B+C=90^0, \text{ din care}: C=90^0-B.$$

Laturile b si c se vor determina prin formulele cunoscute*: *96,97

$$b=a \sin B, \quad c=a \sin C.$$

120. **Casul II.** *Se resolvem un trianghiu dreptanghiu in care se cunosce hipotenusa* a *si ua lature* b *a anghiului drept.*

Elementele necunoscute sunt c, B, C. Pentru a le determina avem formulele:

$$b=a \sin B, \quad b=a \cos C,$$

din cari deducem:

$$\sin B=\cos C=\frac{b}{a},$$

cari dau valorea lui B si C. Pentru a afla pe c, intrebuintiàm relatiunea:

$$c^2=a^2-b^2,$$

din care

$$c^2=(a+b)(a-b), \text{ seu}: c=\sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

121. Anghiul C, dupe acesta metoda, se determina prin cosinusul seu; inse cand b difera prea putin de a, cea ce se intempla forte adesea, quantitatea $\frac{b}{a}$ diferind si ea putin de 1, anghiul C este mic; si fiind-cà scim* *95
cà anghiurile mici se determina reu prin cosinusul lor, equatiunea precedenta nu ne va da pe C cu destula precisiune. In acest cas calculàm mai antaiu pe c, si atunci formula

$$c=b \operatorname{tg} C$$

ne dà:

$$\operatorname{tg} C=\frac{c}{b},$$

si anghiul C, determinat acum prin tangenta sea, va fi calculat cu mai multa esactitate.

Putem inca intrebuintia, pentru calculul lui C, si for-
44 mula urmatore cunoscuta:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}},$$

in care, punend in loc de cosC valorea sea $\frac{b}{a}$, si immultind ambii termeni ai fractiunei cu a, obtinem:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

Calculul facundu-se prin logaritmi, acesta din urma formula are avantagiul cà coprinde numai logaritmii lui $a-b$ si $a+b$, cari intra si in valorea lui c.

122. **Casul III.** *In un trianghiu dreptanghiu cunoscund laturea* b *a anghiului drept si anghiul ascutit* B, *se se calculedie hipotenusa* a, *laturea* c *si anghiul* C.

Anghiul C se determina direct prin formula:

$$C=90^0-B;$$

96,100 era a si c se vor afla prin formulele sciute:

$$a=\frac{b}{\sin B},\quad c=b\cot B.$$

123. **Casul IV.** *Dandu se celle doue laturi* b *si* c *alle anghiului drept, se se calculedie hipotenusa* a *si anghiurile ascutite* B *si* C.

Determinàm mai antaiu anghiurile B si C prin forformulele

$$b=c\operatorname{tg}B,\quad b=c\cot C,$$

din cari

$$\operatorname{tg}B=\cot C=\frac{b}{c}. \qquad \text{(a)}$$

Hipotenusa se determina in urma prin ver-una din formulele:

$$b=a\sin B,\quad c=a\cos B,$$

de unde

$$a=\frac{b}{\sin B},\quad a=\frac{c}{\cos B}.$$

Observare. Am fi putut calcula pe a dedreptul prin

$$a^2=b^2+c^2.$$

Inse acesta formula nu este calculabile prin logaritmi. Pentru a o face calculabile prin logaritmi, vom pune pe c^2 ca factor comun, si atunci

$$a^2=c^2\left(1+\frac{b^2}{c^2}\right).$$

Punem

$$\frac{b}{c}=\operatorname{tg}\varphi;\qquad (b)$$

atunci

$$a^2=c^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=c^2\left(1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)=c^2\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{c^2}{\cos^2\varphi},$$

de unde

$$a=\frac{c}{\cos\varphi},$$

formula calculabile prin logaritmi care ne-ar da pé a. Inse pentru acesta trebue se cunoscem pe φ, si deca comparàm formula (a) cu (b), vedem cà

$$\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{c},$$

adeca

$$B=\varphi.$$

Prin urmare, chiar dupe metoda, determinarea lui a depende tot de calculul lui B.

VERIFICAȚIUNI

124. Pentru a fi securi de resultatele obtinute prin calculele ce am espus, trebue se avem medie de a le verifica.

Mediele celle mai ordinarie pentru a face aceste verificatiuni constau intru a calcula pe unul din elementele date cu ajutorul elementelor calculate. Deca valorea aflata ast fel nu difera de cât prea putin de valorea data, calculul este esact. Spre essemplu, deca am calculat pe a, c, C, dandu-ni se b, B, cu valorile gasite prin calcul pentru a si c vom calcula pe b prin formula

$$b=\sqrt{(a+c)(a-c)},$$

si deca valorea aflata nu va diferi mult de valorea data a lui b, calculul va fi esact.

ESSEMPLE.

Casul I.

Date	*Formule*	*Necunoscute.*
$a=5836^{m},43$;	$C=90^{0}-B$,	$C=35^{0}45'31'',4$;
$B=54^{0}14'28'',6$.	$b=a \sin B$,	$b=4736^{m},1758$;
	$c=a \cos B$.	$c=3410^{m},6535$.

Calculul lui C.	*Calculul lui* b.	*Calculul lui* c.
90^{0}	$\log a=3,7661473$	$\log a=3,7661473$
$B=54^{0}14'28'',6$	$\log\sin B=\bar{1},9092805$	$\log\cos B=\bar{1},7666903$
$C=35^{0}45'31'',4$.	$\log b=3,6754278$	$\log c=3,5328376$
	$b=4736^{m},1758$.	$c=3410^{m},6535$.

Casul II.

Date	*Formule*	*Necunoscute.*
$a=574^{m},35$,	$\sin B=\cos C=\frac{b}{a}$,	$B=41^{0}58'6'',41$,
$b=384^{m},08$.		$C=48^{0}1'53'',59$,
	$c=\sqrt{(a+b)(a-b)}$.	$c=427^{m},0368$.

Calculul lui B *si* C.

$$\log b = 2{,}5844217$$
$$-\log a = \bar{3}{,}2408234\text{[1]}$$
$$\log\sin B = \log\cos C = \bar{1}{,}8252451$$
$$B = 41^0 58' 6'',41,$$
$$C = 48^0 1' 53'',59.$$

Calculul lui c.

$$\log(a+b) = 2{,}9815604$$
$$\log(a-b) = 2{,}2793703,$$
$$2\log c = 5{,}2609307$$
$$\log c = 2{,}6304654$$
$$c = 427^m{,}0368.$$

VERIFICARE

$$\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

$$\log(a-b) = 2{,}2793703$$
$$-\log(a+b) = \bar{3}{,}0184396$$
$$2\log\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}2978099$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}6489050.$$
$$C = 48^0 1' 53'',62 (\text{diff.}\ 0'',03.)$$

Casul III.

Date	*Formule*	*Necunoscute*
$b = 7536^m{,}14,$	$C = 90^0 - B,$	$C = 33^0 35' 46'',3,$
$B = 56^0 24' 13'',7.$	$a = \dfrac{b}{\sin B},$	$a = 9047^m{,}4437,$
	$c = b \cot B.$	$c = 5006^m{,}2896.$

Calculul lui C.

$$90^0$$
$$B = 56^0 24' 13'',7.$$
$$C = 33^0 35' 46'',3.$$

1). Se scie din algebra cà, in loc de a scadé un logaritm din altul, putem adaogi acestui din urma complementul celui d'antaiu, adeca diferentia intre acel logaritm si 0. Acesta s'a facut aci, si in tote essemplele subsequente unde au fost a se scadé logaritmi.

Calculul lui a.	*Calculul lui* c.
$\log b = 3,8771490$	$\log b = 3,8771490$
$-\log\sin B = 0,0793769$	$\log\cot B = \overline{1},8223670$
$\log a = 3,9565259$	$\log c = 3,6995160$
$a = 9047^m,4437$	$c = 5006^m,2896.$

Casul IV.

Date	*Formule*	*Necunoscute.*
$b = 2236^m,34,$	$\operatorname{tg}B = \cot C = \frac{b}{c},$	$B = 30^0 22' 54'',85,$
$c = 3814^m,51.$		$C = 59^0 37' 5'',15,$
	$a = \frac{b}{\sin B}.$	$a = 4421^m,7306.$

Calculul lui B *si* C.	*Calculul lui* a.
$\log b = \underline{3},3495379$	$\log b = 3,3495379$
$-\log c = \overline{4},4185613$	$-\log\sin B = 0,2960544$
$\log\operatorname{tg}B = \log\cot C = \overline{1},7680992$	$\log a = 3,6455923$
$B = 30^0 22' 54'',85,$	$a = 4421^m,7306$
$C = 59^0 37' 5'',15.$	

RESOLUTIUNEA TRIANGHIURILOR ORE-CARI SEU OBLIGANGHIE.

125. La resolutiunea unui trianghiu oblicanghiu se pot presinta patru casuri: 1^0. Cand se dà ua lature si doue anghiuri, si se cer celle-alte doue laturi si al treilea anghiu. 2^0. Cand se dà doue laturi si anghiul *coprins intre elle*, si se cere a treia lature si celle-alte doue anghiuri. 3^0. Cand se dà doue laturi si anghiul *opus la una din elle*, si se cere a treia lature si celle alte doue anghiuri. 4^0. Cand se dau celle trei laturi si se cer celle trei anghiuri.

126. **Casul I.** *In un trianghiu ore care dandu-se laturea* a *si anghiurile* B *si* C, *se se determine al treilea anghiu* A *si laturile* b *si* c, *precum si suprafatia* s.

Anghiul A se obtine direct din formula

$$A+B+C=180^0,$$

de unde

$$A=180^0-(B+C).$$

Apoi din relatiunile

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

deducem

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Suprafatia este data prin formula cunoscuta:

$$s=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.$$

127. **Casul II.** *Dandu-se laturile* a *si* b *si anghiul coprins intre elle* C *alle unui trianghiu ore-care, se calculàm a treia lature* c, *si anghiurîle* A *si* B, *precum si suprafatia* s.

Prima metoda. Suma A+B a anghiurilor cautate este cunoscuta din relatiunea:

$$A+B=180^0-C.$$

Differentia lor o vom calcula prin formula (3)*: *105

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

Vom avé dera, prin aceste formule:

$$A+B=M,$$
$$A-B=N,$$

M si N fiind nisce quantitati cunoscute. Adunand, si apoi scadiend aceste egalitati una din alta, si impartind cu 2, avem:

$$A=\frac{M+N}{2},$$

$$B=\frac{M-N}{2}.$$

Anghiurile A si B fiind ast-fel determinate, vom calcula pe c prin formula

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A},$$

105 seu mai bine prin ver-una din formulele (1) seu (2), cari dau:

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}, \text{ si } c=\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Suprafatia este data prin formula:

$$s=\frac{ab\sin C}{2}.$$

*101 *A doua metoda.* Din formulele fundamentale (1)* deducem:

$$c\sin A=a\sin C, \qquad \text{(A)}$$

103 si din (3),

$$c\cos A=b-a\cos C. \qquad \text{(B)}$$

Cu aceste doue formule putem face resolutiunea in un mod mai simplu, mai cu sema cand nu se dà chiar a, ci $\log a$.

Impartindu-le una cu alta, avem:

$$\operatorname{tg}A=\frac{a\sin c}{b-a\cos C},$$

de unde

$$\log\operatorname{tg}A=\log a+\log\sin C-\log[b-a\cos C], \qquad \text{(C)}$$

formula care ne dà pe A. Inse aci intra logaritmul quantitatii $b-a\cos C$, care nu este calculabile prin logaritmi; va trebui dera a calcula mai antaiu valorea termenului a cosC, pre care o vom scadé din b, si vom lua logaritmul restului, pre care lu vom introduce in formula.

Anghiul A fiind cunoscut, B se va calcula lesne prin

$$B=180^0-(A+C).$$

Relatiunea (A) ne va da apoi

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A,$$

din care aflàm pė c.

128. **Casul III.** *Se se resolve un trianghiu ore-care in care se cunosc doue laturi* a *si* b, *si anghiul* A, *o-pus la* a.

Se cauta c, B, C. Vom calcula mai antaiu pe B prin formula

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a},$$

si apoi pė C prin

$$C=180^0-(A+B);$$

in fine vom afla

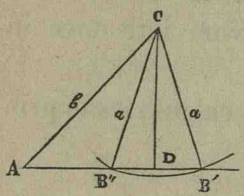
$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Suprafatia s se va afla assemenea prin

$$s=\frac{ab\sin C}{2}.$$

129. *Discutiune.* Mai antaiu vom reaminti in câte-va cuvinte constructiunea geometrica a trianghiului, pentru ca discutiunea pe formula se fia mai bine intielessa.

Pentru a construi trianghiul cu elementele a, b, A, in un punct al unei drepte indefinite AB′ facem an-



ghiul dat A, si pe drepta AC luàm lungimea $AC=b$; din C cu ua radia egale cu a descriem un arc, care ne dà pe drepta AB′ punctele B′si B″, pre cari le unim cu C. Trianghiul cautat este ACB′ seu ACB″.

Formula

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$

ne va da pe B. Inse in table scim cà nu se gassesc de cât anghiurile mai mici de cât 90^0, adeca anghiurile ascutite. Fie M anghiul *ascutit* al carui sinus este egal cu $\frac{b\sin A}{a}$; se scie inse* cà si arcul suplementar*26 180^0-M, care este *obtus*, va avé acellasiu sinus; prin urmare trebue se vedem care din aceste doue anghiuri, M si 180^0-M, este adeverata solutiune a questiunei.

Pentru ca M se fie ua solutiune a equatiunei, trebue se avem:

$$A+M<180^0, \qquad \text{(a)}$$

câci

$$A+M+C=180^0.$$

Assemenea, pentru ca 180^0-M se fie ua solutiune, va trebui ca

$$A+180^0-M<180^0,$$

seu

$$A<M. \qquad \text{(b)}$$

Se vedem cari sunt casurile in cari aceste conditiuni pot fi inplinite.

1^0. Deca $A>90^0$, *valorea* 180^0-M *nu convine pentru* B, câci in un trianghiu nu pot fi doue anghiuri obtuse;

remane dera numai M, care trebue inca se se supuna conditiunei (a), din care se deduce:

$$M<180^0-A.$$

Aci M este ascutit; 180^0-A assemenea; prin urmare putem pune:

$$\sin M<\sin(180^0-A),$$

seu

$$\sin M<\sin A.$$

Inse

$$\sin M=\frac{b\sin A}{a};$$

prin urmare

$$\frac{b\sin A}{a}<\sin A,$$

ori

$$b<a. \qquad (1)$$

Deca b ar fi egal cu a, relatiunea

$$\sin M=\frac{b\sin A}{a}$$

s'ar reduce la

$$\sin M=\sin A, \text{ seu: } M=A,$$

cea ce nu se pote, câci $A>90^0$, si ast-fel trianghiul ar avé doue anghiuri obtuse; prin urmare in acest cas *nu este nici ua solutiune.*

Deca $b>a$, erasi *n'avem nici ua solutiune,* câci atunci relatia $\sin M=\frac{b\sin A}{a}$ ne ar da: $\sin M>\sin A$; deci, fiind-ca anghiurile sunt obtuse, $M<A$, cea ce este in opositie cu conditia (b).

2^0. Deca $A=90^0$, valorea 180^0-M, fiind mai mare de 90^0, tot trebue lasata, si atunci (a) ne dà:

$$90^0+M<180^0, \text{ seu: } M<90^0, \text{ seu: } \sin M<1,$$

si punend valorea lui sinM si a lui A,

$$\frac{b\sin 90^0}{a}<1, \text{ seu: } b<a.$$

Conditiunea este aceasi ca si in casul cand $A > 90^0$.

In resumat dera, *deca anghiul dat este obtus seu drept trianghiul are ua singura solutiune, cu conditiune inse ca laturea opusa la anghiul dat se fie mai mare de cât cea-alta ; deca este egale cu densa, seu deca este mai mica, trianghiul n'are nici ua solutiune.*

3°. Deca $A < 90^0$, valorea M a lui B se pote primi tot-de-una, câci conditiunea (a) se pote tot-de-una satisface; inse pentru a puté admite si solutiunea $180^0 - M$, dupe (b), trebue se avem:

$$M > A,$$

si fiind-cà si M si A sunt ascutite,

$$\sin M > \sin A, \text{ seu } \frac{b \sin A}{a} > \sin A,$$

de unde

$$b > a.$$

In acest cas dera se pote se fie doue solutiuni, M *si* $180^0 - M$, *inse cea din urma convine numai cand laturea opusa anghiului dat este mai mica de cât cea alta.*

Deca $b \sin A = a$, valorea

$$\sin M = \frac{b \sin A}{a}$$

se reduce la

$$\sin M = 1, \text{ seu: } M = 90^0,$$

si in casul acesta *celle doue solutiuni* M *si* $180^0 - M$ *se reduc la una singura.*

Deca $b \sin A > a$, valorea

$$\sin M = \frac{b \sin A}{a}$$

devine

$$\sin M > 1,$$

care este absurda; prin urmare in casul acesta *nu este nici ua solutiune.*

Eca un tabel care contine resultatul totor acestor discutiuni:

$$A>90^0\begin{cases} a>b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1 \text{ solutiune, } B<90^0; \\ \left.\begin{matrix} a=b \\ a<b \end{matrix}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \text{ solutiuni;} \end{cases}$$

$$A=90^0\begin{cases} a>b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1 \text{ solutiune, } B<90^0; \\ \left.\begin{matrix} a=b \\ a<b \end{matrix}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \text{ solutiuni;} \end{cases}$$

$$A<90^0\begin{cases} a>b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1 \text{ solutiunĕ, } B<90^0; \\ a=b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1 \text{ solutiune, } B<90^0; \\ a<b\begin{cases} a>b \sin A \;.\;.\;.\;.\; 2 \text{ solutiuni, } B'<90^0; \\ \qquad\qquad\qquad\quad B''=180^0-B'; \\ a=b \sin A \;.\;.\;.\;.\; 1 \text{ solutiune, } B=90^0; \\ a<b \sin A \;.\;.\;.\;.\; 0 \text{ solutiuni.} \end{cases} \end{cases}$$

Cu ajutorul acestui tabel se va puté recunosce din date chiar deca problema are doue solutiuni, ua solutiune, seu nici ua solutiune cea ce este forte important, pentru a evita de multe ori càlcule inutile.

Verificari. Cand sunt doue solutiuni, putem avé doue verificatiuni forte simple. Fie $AB'=c'$, $AB''=c''$, $ACB'=C'$, $ACB''=C''$. Dupe figura,

$$AD-B''D=c'',\ AD+DB'=c'.$$

Adunand aceste egalitati, si avend in vedere cà $B''D=B'D$, vom avé:

$$AD=\frac{c'+c''}{2}.$$

Inse in trianghiul dreptanghiu ACD avem:

$$AD=AC\cos A=b\cos A.$$

Vom calcula dera pe AD prin acesta formula, si deca valorea aflata va fi identica $\frac{c'+c''}{2}$, calculul va fi esact.

Assemenea, daca am scadé una din alta celle doue equatiuni de sus, am avé:

$$DB' = \frac{c'-c''}{2}.$$

De alta parte

$$DCB' = ACB' - ACD = C' - ACD,$$
$$DCB'' = ACD - ACB'' = ACD - C''.$$

Adunand,

$$DCB' = \frac{C'-C''}{2}.$$

In CDB′ avem:

$$DB' = CB' \sin DCB' = \sin\frac{C'-C''}{2}.$$

Asia-dera, calculand pe DB′ prin acesta equatiune, deca calculul este esact, valorea aflata va trebui se fie identica cu $\frac{c'-c''}{2}$.

130, **Casul IV.** *Dandu-se celle trei laturi* a,b,c, *alle unui trianghiu ore-care, se aflam anghiurile lui,* A,B,C, *precum si suprafatia* s.

Anghiurile se pot calcula prin equatiunile (4), seu *106(5), seu (6)*, tote calculabile prin logaritmi; vom preferi inse equatiunile (6), câci deca am intrebuintia formulele (4), ar trebui se cautàm siesse logaritmi, si anume pe al lui $a,b,c, p-a, p-b, p-c$; deca ne-am servi cu (5), am avé necesitate de siepte logaritmi: al lui $a,b,c.p, p-a, p-b, p-c$. Cu formulele (6) inse nu avem necessitate a cauta de cât patru: pe al lui $p, p-a, p-b, p-c$. Áfara de acesta, formulele din urma, determinand anghiurile prin tangenta lor, sunt mai precise de cât celle-alte.

Formulele ce vom intrebuintia vor fi dera acestea:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Suprafatia se va determina prin

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Observare. Pentru ca trianghiul se se pota resolve, este necessar si de ajuns ca ori-care din laturile date se fie mai mica de cât suma cellor-alte doue. In adever, deca am avé, spre essemplu:

$$a>b+c,$$

ar resulta cà

$$p-a=\frac{b+c-a}{2}$$

ar fi negativ, pe cand p, $p-b$, $p-c$, ar fi positive. Atunci quantitatile de sub radicalele ce dau pe $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ fiind negative, valorile anghiurilor ar fi imaginarie.

ESSEMPLE

Casul I.

Date	*Formule*	*Necunoscute.*
$a=5816^m,35$,	$A=180^0-(B+C)$,	$A=47^0 3' 1'',9$,
$B=54^0 37^0 12'',4$,	$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$,	$b=6478^m,885$,
$C=78^0 19' 45'',7$.	$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$,	$c=7782^m,048$,
	$s=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$.	$s=18452216^{mp}$.

Calculul lui A.

$$\begin{array}{r} 180^0 \\ B+C=132^0 56' 58'',1 \\ \hline A=47^0 3' 1'',9. \end{array}$$

Calculul lui b.

$$\begin{array}{r} \log a=3,7646506 \\ \log\sin B=\overline{1},9113340 \\ -\log\sin A=0,1355157 \\ \hline \log b=3,8115003 \\ b=6478^m,885. \end{array}$$

Calculul lui c.

$$\begin{array}{r} \log a=3,7646506 \\ \log\sin C=1,9909276 \\ -\log\sin A=0,1355157 \\ \hline \log c=3,8910939 \\ c=7782^m,048. \end{array}$$

Calculul lui s.

$$\begin{array}{r} 2\log a=7,5293012 \\ \log\sin B=\overline{1},9113340 \\ \log\sin C=\overline{1},9909276 \\ -\log 2=\overline{1},6989700 \\ -\log\sin(B+B)=0,1355157 \\ \hline \log s=7,2660485 \\ s=18452216^{mp}. \end{array}$$

Casul II.

ANTAIA METODA

Date	*Formule*	*Necunoscute.*
$a=578^m,312$,	$A+B=180^0-C$,	$A=95^0 13' 49'',23$,
$b=345^m,104$,	$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$,	$B=36^0 27' 35'',37$,
$C=48^0 18' 35'',4$.	$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$,	$c=433^m,6615$,
	$s=\frac{ab\sin C}{2}$.	$s=74517^{mp},586$.

Calculul lui A+B.

180^0

$C=48^0 18' 35'',4.$

$A+B=131^0 41' 24'',6.$

Calculul lui A—B.

$\log(a-b)=2,3677435$

$\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=0,3482643$

$-\log(a+b)=\bar{3},0346026$

$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\bar{1},7506104$

$\frac{A-B}{2}=29^0 23' 6'',93,$

$A-B=58^0 46' 13'',86.$

Calculul lui A si B.

$A+B=131^0 41' 24'',6$

$A-B=\ 58^0 46' 13'',86$

$A=\ 95^0 13' 49'',23$

$B=\ 36^0 27' 35'',37$

Calculul lui c.

$\log a=2,7621622$

$\log\sin C=\bar{1},8731766$

$-\log\sin A=0,0018121$

$\log c=2,6371509$

$c=433^m,6615.$

Calculul suprafetiei s.

$\log a=2,7621622$

$\log b=2,5379500$

$\log\sin C=\bar{1},8731766$

$-\log 2=\bar{1},6989700$

$\log s=4,8722588$

$s=74517^{mp},586.$

A DOUA METODA.

Date	*Formule*	*Necunoscute.*
$a=578^m,312,$	$\operatorname{tg}A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C},$	$A=95^0 13' 49'',25,$
$b=345^m,104,$		$B=36^0 27' 35'',35,$
$C=48^0 18' 35''4.$	$B=180^0-(A+C),$	$c=433^m,6615.$
	$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$	

Calculul lui $a\cos C$.

$\log a=2,7621622$

$\log\cos C=\bar{1},8228884$

$\log a\cos C=2,5850506$

$a\cos C=384^m,6366$

Calculul lui b—a *cos*C.

$$\begin{array}{r} b=345^{m},104 \\ a\cos C=384^{m},6366 \\ \hline b-a\cos C=-39^{m},5326 \end{array}$$

Fiind-cà numitorul $b-a\cos C$ al valorii lui tgA este negativ, formula $\mathrm{tgA}=\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}$ devine:

$$\mathrm{tgA}=\frac{a\sin C}{-(a\cos C-b)},$$

de unde

$$-\mathrm{tgA}=\mathrm{tg}(180^{0}-A)=\frac{a\sin C}{a\cos C-b}.$$

Calculul lui $180^{0}-A$.

$$\begin{array}{r} \log a=2,7621622 \\ \log\sin C=\bar{1},8731766 \\ -\log(a\cos C-b)=\bar{2},4030446 \\ \hline \log\mathrm{tg}(180^{0}-A)=1,0383834 \\ 180^{0}-A=84^{0}46'10'',75 \\ A=95^{0}13'49'',25 \text{ (diff.} +0'',02) \end{array}$$

Calculul lui B.

$$\begin{array}{r} 180^{0} \\ A+C=143^{0}32'24'',65 \\ \hline B=36^{0}27'35'',35 \text{(diff.} -0'',02). \end{array}$$

Calculul lui c.

$$\begin{array}{r} \log a=2,7621622 \\ \log\sin C=\bar{1},8731766 \\ -\log\sin A=0,0018121 \\ \hline \log c=2,6371509 \\ c=433^{m},6615. \end{array}$$

Casul III.

Date

$a=21^m,324,$

$b=26^m,715,$

$A=45^0 32' 16'',4.$

Formule	*Necunoscute.* 1ª solutie.	2ª solutie.
$\sin B=\frac{b\sin A}{a},$	$B'=63^0 23' 58'',28,$	$B''=116^0 36' 1'',72,$
$C=180^0-(A+B),$	$C'=71^0 3' 45'',32,$	$C''=17^0 51' 41'',88,$
$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$	$c'=28^m,26036,$	$c''=9^m,16401,$
$s=\frac{ab\sin C}{2}$	$s'=269^{mp},4182.$	$s''=87^{mp},3645.$

Calculul lui b *sin*A.

$$\begin{array}{r} \log b=1,4267552 \\ \log\sin A=\bar{1},8535241 \\ \hline \log b\sin A=1,2802793 \\ b\sin A=19^m,0668 \end{array}$$

Fiind-cà $b>a>b\sin A$, avem doue solutiuni.* *129

Calculul lui B.

$$\begin{array}{r} \log b=1,4267552 \\ \log\sin A=\bar{1},8535241 \\ -\log a=\bar{2},6711313 \\ \hline \log\sin B=\bar{1},9514106 \\ B'=63^0 23' 58'',28 \\ B''=116^0 36' 1'',72. \end{array}$$

1ª solutie.

Calculul lui C′.

$$\begin{array}{r} 180^0 \\ A+B'=108^0 56' 14'',68 \\ \hline C'=71^0 3' 45'',32 \end{array}$$

Calculul lui c′.

$$\begin{array}{r} \log a=1,3288687 \\ \log\sin C'=\overline{1},9758331 \\ -\log\sin A=0,1464759 \\ \hline \log c'=1,4511777 \\ c'=28^m,26036 \end{array}$$

Calculul lui s′

$$\begin{array}{r} \log a=1,3288687 \\ \log b=1,4267552 \\ \log\sin C'=\overline{1},9758331 \\ -\log 2=\overline{1},6989700 \\ \hline \log s'=2,4304270 \\ s'=269^{mp},4182. \end{array}$$

2ª solutie.

Calculul lui C″.

$$\begin{array}{r} 180^0 \\ A+B''=162^0 8' 18''12 \\ \hline C''=17^0 51' 41'',88 \end{array}$$

Calculul lui c″.

$$\begin{array}{r} \log a=1,3288687 \\ \log\sin C''=\overline{1},4867412 \\ -\log\sin A=0,1464759 \\ \hline \log c''=0,9620858 \\ c''=9^m,16401. \end{array}$$

Calculul lui s″.

$$\begin{array}{r} \log a=1,3288687 \\ \log b=1,4267552 \\ \log\sin C''=\overline{1},4867412 \\ -\log 2=\overline{1},6989700 \\ \hline \log s''=1,9413351 \\ s''=87^{mp},3645 \end{array}$$

129 VERIFICARI.

1⁰. *Formula* : $b\cos A=\frac{c'+c''}{2}$.

Calculul lui bcosA.

$$\begin{array}{r} \log b=1,4267552 \\ \log\cos A=\overline{1},8453693 \\ \hline \log b\cos A=1,2721245 \\ b\cos A=18^m,71218 \end{array}$$

Calculul lui $\frac{c'+c''}{2}$

$$\begin{array}{r} c'=28^m,26036 \\ c''=9^m,16401 \\ \hline \frac{c'+c''}{2}=18^m,71218 \text{ (diff.0)} \end{array}$$

2⁰. *Formula* : $a\sin\frac{C'-C''}{2}=\frac{c'-c''}{2}$.

Calculul lui $a\sin\frac{C'-C''}{2}$.

$$\log a = 1,3288687$$

$$\log\sin\frac{C'-C''}{2} = \overline{1},6510490$$

$$\log a\sin\frac{C'-C''}{2} = 0,9799177$$

$$a\sin\frac{C'-C''}{2} = 9^{m},54811$$

Calculul lui $\frac{c'-c''}{2}$.

$$c' = 28^{m},26036$$

$$c'' = 9^{m},16401$$

$$\frac{c'-c''}{2} = 9^{m},54817 \text{ (diff. } 0^{m},00006\text{)}.$$

Casul IV.

Date

$a = 87^{m},5108$,

$b = 36^{m},927$,

$c = 64^{m},529$,

Formule

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Necunoscute

$A = 116^{0}33'17''78$,

$B = 22^{0}10'34'',16$,

$C = 41^{0}16'8'',08$,

$s = 1065^{mp},7425$.

Calculul lui A.

$\log(p-b)=1,7600936$

$\log(p-c)=1,4764606$

$-\log p=\bar{2},0246445$

$-\log(p-a)=\bar{1},1566052$

$2\log tg\frac{A}{2}=0,4178039$

$\log tg\frac{A}{2}=0,2089020$

$A=116^{0}33'17'',78.$

Calculul lui B.

$\log(p-a)=0,8433948$

$\log(p-c)=1,4764606$

$-\log p=\bar{2},0246445$

$-\log(p-b)=\bar{2},2399064$

$2\log tg\frac{B}{2}=\bar{2},5844063$

$\log tg\frac{B}{2}=\bar{1},2922032$

$B=22^{0}10'34'',16.$

Calculul lui C.

$\log(p-a)=0,8433948$

$\log(p-b)=1,7600936$

$-\log p=\bar{2},0246445$

$-\log(p-c)=\bar{2},5235394$

$2\log tg\frac{C}{2}=\bar{1},1516723$

$\log tg\frac{C}{2}=\bar{1},5758362$

$C=41^{0}16'8'',08.$

Calculul suprafatiei s.

$\log p=1,9753555$

$\log(p-a)=0,8433948$

$\log(p-b)=1,7600936$

$\log(p-c)=1.4764606$

$2\log s=6,0553045$

$\log s=3,0276523$

$s=1065^{mp},7425.$

VERIFICARE

$A+B+C=180^{0}0'0'',02$ (diff. totale $0'',02$)

CAPITULUL III.

—

ESERCITII SI APLICATIUNI.

Câte-va casuri de resolutiuni de trianghiuri, in cari se dau nu trei elemente, ci trei combinatiuni alle acestor elemente.

131. *Se se resolve un trianghiu dreptanghiu, dandu-se hipotenusa* a *si suma* b+c *a celor-alte doue laturi.*

Se cauta B, C, b, c.

Adunand relatiunile

$$b = a\sin B,$$
$$c = a\sin C,$$

avem:

$$b+c = a\,(\sin B+\sin C)$$
$$= 2a\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

si fiind-cà B+C=90°,

$$b+c = 2a\sin 45^0 \cos\frac{B-C}{2},$$

din care

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{2a\sin 45^0},$$

equatiune care ne dà pe $B-C$; fiind-cà cunoscem si pre $B+C$, vom puté afla valorea fie caruia din anghiurile B si C. Atunci laturile se vor calcula prin formulele

$$b=a\sin B,$$
$$c=a\sin C.$$

Essemplu. Date: $a=2416^m,34$; $b+c=3283^m,51$.
Necunoscute: $B=61^0 4' 51'',48$; $C=28^0 55' 8'',52$;
$b=2115^m,032$; $c=1168^m,477$.

132. *Se se resolve un trianghiu dreptanghiu cunoscund un anghiu ascutit* B *si differentia* b − c *a ce'lor doue laturi alle anghiului drept.*

Necunoscutele sunt a, b, c, C.

Anghiul C se determina indata prin

$$C=90^0-B.$$

Relatiunile

$$b=a\sin B,$$
$$c=a\sin C,$$

dau prin scadere:

$$b-c=a(\sin B-\sin C)=2a\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$
$$=2a\cos 45^0\sin\frac{B-C}{2},$$

din care deducem:

$$a=\frac{b-c}{2\cos 45^0\sin\frac{B-C}{2}},$$

formula ce dà hipotenusa in functiune de quantitati cunoscute.

Laturile b si c le vom determina apoi prin formulele de mai sus.

Essemplu. Date: $B=46^0 18' 5'',7$; $b-c=0^m,7543$.

Necunoscute: $C=43^0 41' 54'',3$; $a=23^m,4810$;
$b=16^m,9764$; $c=16^m,2221$.

133. *Se se resolve un trianghiu dreptanghiu cunoscund hipotenusa* a *si raportul* $\frac{b}{c}$ *al cellor alte doue laturi.*

Avem:

$$\mathrm{tg}B=\cot C=\frac{b}{c},$$

care ne dà anghiurile ascutite; cu ajutorul lor si al hipotenusei, vom calcula si laturile.

Essemplu. Date: $a=13^m,152$; $\frac{b}{c}=1,5324$

Necunoscute: $B=56^0 52' 21'',69$; $C=33^0 7' 38'',31$;
$b=11^m,0143$; $c=7^m,1876$.

134. *Se se resolve un trianghiu ore-care cunoscund laturea* c, *anghiul opus* C *si suma* a+b *a cellor-alte doue laturi,*

Se cauta anghiurile A si B si laturile a si b.

Cunoscem

$$A+B=180^0-C.$$

Formulele (1)* dau inca *105

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\quad \text{seu}: \cos\frac{A-B}{2}=\frac{a+b}{c}\sin\frac{C}{2},$$

care dà si differentia A—B. Anghiurile A si B vor fi deja cunoscute.

Suma $a+b$ a laturilor fiind data, relatiunea (2)* *105

$$a-b=\frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

ne va da si differentia $a-b$, si ast-fel vom puté calcula pe fie-care din laturile a si b in parte.

Deca ni s'ar fi dat c, C, și differentia $a-b$, am fi determinat mai antaiu pe A—B prin relatiunile (2), si apoi pe $a+b$ prin (1).

Essemplu. Date: $c=742^m,14$; $C=114^0 49' 32'',4$;
$a+b=831^m,52$.

Necunoscute: $A=51^0 50' 38'',87$; $B=13^0 19' 48'',73$;
$a=642^m,9879$; $b=188^m,5321$.

135. *Se se resolve un trianghiu ore-care, cunoscund anghiurile* A,B,C *si perimetrul* 2p.

Se cauta a,b,c si s.

Formulele

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

dau:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin C},$$

seu:

$$a=\frac{2p\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C},$$

si inlocuiud pe sinA si sinA+sinB+sinC cu valorile
42,55 lor,

$$a=\frac{4p\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Assemenea:

$$b=\frac{p\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

$$c=\frac{p\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Pentru suprafatia avem:

$$s=\frac{ab\sin C}{2},$$

si inlocuind pe a si b cu valorile lor de mai sus si pe $\sin C$ cu $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,

$$s=\frac{p^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=p^2\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}.$$

Essemplu. Date: $2p=1836^m,24$; $A=36^0 14' 56'',2$; $B=73^0 28' 23'',6$; $C=70^0 16' 40'',2$.

Necunoscute: $a=435^m,8163$; $b=706^m,6043$, $c=693^m.8188$; $s=144942^{mp},74$.

136. *Se se resolve un trianghiu ore-care, cunoscund ua lature* c, *anghiul adjacent* A *si suma* a+b *a cellor alte doue laturi,*

Se cauta B, C, a, b.

Din relatiunile

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

se deduce:

$$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a+b-c}{\sin A+\sin B-\sin C}.$$

Inlocuind pe $a+b+c$ cu $2p$, pe $a+b-c$, cu $2(p-c)$, pe $\sin A+\sin B+\sin C$ si $\sin A+\sin B-\sin C$ cu valorile lor*, obtinem: *55

$$\frac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{2(p-c)}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Reducund si scotiend valorea lui B,

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p}\cot\frac{A}{2}.$$

Cunoscund pe B, C este cunoscut de sine. Laturile a si b se vor determina prin formulele fundamentale,
105 seu prin (2).

Essemplu. Date : $c=215^{m},31$; $a+b=492^{m},07$; $A=81^{0}24'13'',8$.

Necunoscute : $B=48^{0}54'55'',52$; $C=49^{0}40'50'',68$; $a=279^{m},2196$; $b=212^{m},8502$.

137. *Se se resolve un trianghiu cunoscund suprafatia* s *si anghiurile* A,B,C.

Necunoscutele sunt a,b,c.

Relatiunea

$$s=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A},$$

dà imediat :

$$a=\sqrt{\frac{2s\sin A}{\sin B\sin C}}.$$

Assemenea avem si :

$$b=\sqrt{\frac{2s\sin B}{\sin A\sin C}},$$

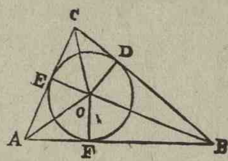
$$c=\sqrt{\frac{2s\sin C}{\sin A\sin B}}.$$

Essemplu. Date : $s=98^{mp},125$; $A=34^{0}48'12'',3$; $B=66^{0}38'53'',2$; $C=78^{0}32'54'',5$.

Necunoscute : $a=11^{m},1572$; $b=17^{m},9467$; $c=19^{m},1588$.

138. *Se se resolve un trianghiu ore care cunoscund radia cercului inscris,* r, *si anghiurile* A,B,C.

Trebue a se calcula a,b,c,s.



Trianghiul AOF dà:

$$AF = r\cot\frac{A}{2};$$

trianghiul OFB dà assemenea:

$$FB = r\cot\frac{B}{2}.$$

Adunand acesta relatiune cu cea precedinte, avem:

$$c = r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right) = r\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\right)$$

$$= r\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$= r\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}},$$

si fiind-cà

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2},$$

$$c = \frac{r\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}.$$

Assemenea se gasesce si:

$$a=\frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

$$b=\frac{r\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Suprafatia s este data prin

$$s=\frac{ab\sin C}{2},$$

in care inlocuim pe a si b cu valorile lor, si pe $\sin C$ cu $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$; atunci

$$s=\frac{2r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}},$$

seu

$$s=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

Essemplu. Date: $r=4^m,371$; $A=58^0 34' 13'',4$; $B=97^0 15' 26'',2$; $C=24^0 10' 20'',4$.

Necunoscuté: $a=24^m,2626$; $b=28^m,2066$; $c=11^m,6434$; $s=140^{mp},1180$.

139. *Se se resolve un trianghiu ore-care, cunoscund ua lature* a, *suma* b+c *a cellor-alte doue, si perpendiculara* h *lassata din* A *pe laturea* a.

Se cere b, c, A, B, C.

Avem:

$$s=\frac{bc\sin A}{2},\ \text{si: } s=\frac{ah}{2};$$

asia dera

$$ah=bc\sin A, \tag{a}$$

seu

$$\sin A=\frac{ah}{bc},$$

ori

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{ah}{bc}. \tag{b}$$

Avem apoi:

$$\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ &=b^2+c^2+2bc-2bc-2bc\cos A\\ &=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)\\ &=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2},\end{aligned}$$

de unde

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}. \tag{c}$$

Impartind (b) prin (c), obtinem:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2ah}{(b+c)^2-a^2},$$

care dà anghiul A. Atunci (a) ne va da pe bc in functiune de quantitati cunoscute,

$$bc=\frac{ah}{\sin A};$$

inse din date avem:

$$b+c=m,$$

m fiind ua quantitate cunoscuta. Avend dera suma si produsul quantitatilor b si c, aceste quantitati, dupe cum scim din algebra, vor fi radecinile equatiunei de gradul al doilea:

$$x^2-mx+\frac{ah}{\sin A}=0,$$

adeca:

$$b=x'=\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2\sin A-4ah}{4\sin A}},$$

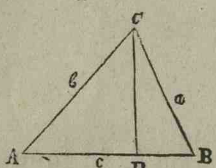
$$c=x''=\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2\sin A-4ah}{4\sin A}}.$$

Cunoscand ast-fel tote laturile, am ajuns la un cas cunoscut.

Essemplu. Datė: $a=12^m,514$; $b+c=19^m,325$; $h=6^m,142$.

Necunoscute: $b=13^m,1133$; $c=6^m,2117$; $A=70^0 39' 47'',70$; $B=81^0 24' 27'',41$; $C=27^0 55' 45'',13$.

140. *Se se resolve un trianghiu ore-care cunoscund ua lature* c, *anghiul opus* C *si perpendiculara* h *lasata din* C *pe* c.



Se cauta a, b, A, B.

In ACD si CDB avem:

$$AD=h\cot A,$$
$$DB=h\cot B;$$

si adunand,

$$c=h(\cot A+\cot B)=h\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}\right)$$
$$=h\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{h\sin C}{\sin A\sin B};$$

47inse

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B;$$

asia-dera

$$c = \frac{2h\sin C}{\cos(A-B)-\cos(A+B)} = \frac{2h\sin C}{\cos(A-B)+\cos C},$$

din care

$$\cos(A-B) = \frac{2h}{c}\sin C - \cos C.$$

Acesta formula o vom face calculabile prin logaritmi* punend $\frac{2h}{c}=\cot\varphi$, si atunci ea devine: *59

$$\cos(A-B) = \frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi},$$

care dà differentia A—B, si ast-fel vom puté calcula anghiurile A si B. Atunci cunoscund ua lature c si anghiurile, revenim la un cas cunoscut.* *126

Essemplu. Date: $c=534^m,59$; $C=64^0 18' 33'',4$; $h=217^m,38$.

Necunoscute: $A=94^0 8' 9'' 35$; $B=21^0 33' 17'',25$; $a=591^m,6878$; $b=217^m,9482$.

141. *Se se resolve un trianghiu ore-care cunoscund ua lature* c, *inaltimea corespundiatore* h *si differentia* A—B *a anghiurilor alaturate.*

Se se afle a,b,A,B,C.

Anghiul C sè va determina prin equatiunea gasita mai sus:

$$\cos(A-B) = \frac{2h}{c}\sin C - \cos C,$$

seu

$$\cos(A-B) = \frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi},$$

si

$$\cot\varphi = \frac{2h}{c}.$$

Atunci, cunoscund pe c,C si h, revenim la questiunea precedinte.

Essemplu. Date: $c=13^m,251$; $h=8^m,434$; $A-B=28^0 23' 48'',3$.

Necunoscute: $A=68^0 39' 50'',04$; $B=40^0 16' 1'',74$; $C=71^0 4' 8'',22$; $a=13^m,0486$; $b=9^m,0545$.

142. *Se se resolve un trianghiu cunoscund celle trei inaltimi.*

Fie α,β,γ inaltimile cari corespund respectiv la laturile a,b,c. Avem:

$$s=\frac{a\alpha}{2}=\frac{b\beta}{2}=\frac{c\gamma}{2},$$

relatiuni din cari scotem:

$$a=\frac{2s}{\alpha},\ b=\frac{2s}{\beta},\ c=\frac{2s}{\gamma}.$$

Punend aceste valori in

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}},$$

vom avé:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\left(\frac{2s}{\alpha}+\frac{2s}{\gamma}-\frac{2s}{\beta}\right)\left(\frac{2s}{\alpha}+\frac{2s}{\beta}-\frac{2s}{\gamma}\right)}{\left(\frac{2s}{\alpha}+\frac{2s}{\beta}+\frac{2s}{\gamma}\right)\left(\frac{2s}{\beta}+\frac{2s}{\gamma}-\frac{2s}{\alpha}\right)}},$$

si impartind ambii termeni si fractiunei de sub radical cu $2s\times 2s$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)}};$$

immultind erasi ambii membri cu $\alpha\beta\gamma\times\alpha\beta\gamma$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma)(\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta)}{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)(\alpha\gamma+\alpha\beta-\beta\gamma)}}.$$

Assemenéa gasim si :

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma)(\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta)}{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)(\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma)(\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma)}{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)(\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta)}}.$$

Cunoscund ast-fel anghiurile, relatiunile

$$s=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A},\quad s=\frac{a\alpha}{2},$$

dau :

$$\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{a\alpha}{2},$$

din care :

$$a=\frac{\alpha\sin A}{\sin B\sin C}.$$

Asseménea :

$$b=\frac{\beta\sin B}{\sin A\sin C},$$

$$c=\frac{\gamma\sin C}{\sin A\sin B}.$$

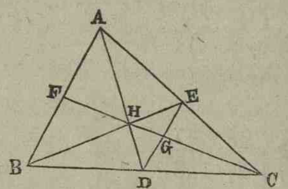
Essemplu : Date : $\alpha=15^m,324$; $\beta=9^m,413$; $\gamma=18^m,102$.

Necunoscute : $A=30^0 49' 32'',42$; $B=123^0 27' 57'',94$; $C=25^0 42' 29'',68$; $a=21^m,6996$; $b=35^m,3257$; $c=18^m,3693$.

143. *Se se resolve un trianghiu cunoscund celle trei mediane* (numind *mediana* linia care unesce un verf al trianghiului cu mediulocul laturei opuse.)

Fie α, β, γ, medianele cari trec respectiv prin verfurile A, B, C, ale trianghiului.

Unind estremitatile E si D alle medianelor β si α, linia ED este paralela cu AB, câci imparte laturile AC si BC in parti égale. Asia-dera trianghiurile AFC, EGC sunt assemeni, si dau:



$$\frac{EG}{AF}=\frac{EC}{AC}=\frac{1}{2}. \qquad (a)$$

Trianghiurile FBH si EGH sunt erasi assemeni, si prin urmare

$$\frac{EG}{AF}=\frac{EH}{BH}. \qquad (b)$$

Inse FB=AF; si prin urmare, comparand equatiunea (b) cu (a), avem:

$$\frac{EH}{BH}=\frac{1}{2}.$$

Deci

$$\frac{EH}{EH+BH}=\frac{1}{1+2},$$

seu

$$\frac{EH}{\beta}=\frac{1}{3}.$$

Asia-dera punctul de intalnire al cellor trei mediane imparte pe fie-care dintr'ensele in doue parti, dintre cari partea despre base este jumetatea cellei despre vérf, seu a treia parte din mediana intrega.

Trianghiul BHC dà, dupe ua teorema din geometria:

$$\overline{BH}^2+\overline{HC}^2=2\overline{HD}^2+2\overline{BD}^2;$$

inse

$$BD\ \frac{a}{2},\ HD=\frac{\alpha}{2},\ BH=\frac{2\beta}{3},\ HC=\frac{2\gamma}{3};$$

asia-dera:

$$\frac{4}{9}\beta^2+\frac{4}{9}\gamma^2=\frac{2}{9}\alpha^2+\frac{a^2}{2},$$

seu

$$8\beta^2+8\gamma^2=4\alpha^2+9a^2,$$

de unde

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}.$$

Vom gasi assemenea:

$$b=\frac{2}{3}\sqrt{2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2},$$

$$c=\frac{2}{3}\sqrt{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}.$$

Laturile fiind calculate, ajungem dera la un cas cunoscut.* *130

Essemplu. Date: $\alpha=0^m,143$; $\beta=0^m,115$, $\gamma=0^m,083$.

Necunoscute: $a=0^m,093758$; $b=0^m,13573$; $c=0^m,16392$; $A=34^0 53' 3'',72$; $B=55^0 53' 19'',62$; $C=89^0 13' 36'',72$.

OPERATIUNI PE PAMENT.

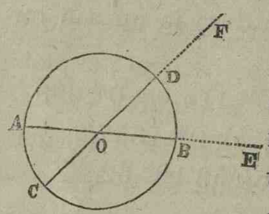
144. Trigonometria gasesce aplicatiuni variate si de cea mai mare importantia in tote operatiunile ce au de scop a determina dimensiunile unei figuri ore-care prin cunoscintia câtor-va din elementele selle. Ast-fel se intrebuintiedia calculul trigonometric la ridicarile de planuri, la mesuratorile de distantie, de inaltimi, de anghiuri, etc. Tote aceste operatiuni se pot efectua si prin metode grafice; inse nesecurantia acestor metode, si

chiar dificultatea intrebuintiarii lor fac ca tot-de-una se se prefere calculul.

In aplicatiunile practice ale trigonometriei este necessariu se se scie a mesura *lungimi* si *anghiuri*.

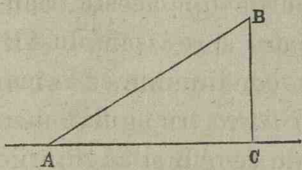
Lungimile se mesura cu *lantiul de agrimesura*, seu cu nisce *rigle* de lungimi cunoscute. Acest lantiu seu aceste rigle se pun pe drepta ce voim a mesura de câte ori incap, si numerand de câte ori am pus lantiul seu riglele pe acesta drepta, cunoscem lungimea ei.

Anghiurile se mesura cu nisce instrumente cari porta diferite numiri: *grafometrul*, *cercul repetitor* seu *teodolitul* sunt celle mai usitate. Tote aceste aparate, reduse la cea mai simpla espressiune a lor, se compun din un *limb* seu cerc gradat de metal, O, care porta doue *alidade*, adeca doue rigle de metal, AB si CD, cari trec prin centrul cercului. Una din aceste rigle, AB, este fixa, era cea-alta, CD, se pote inverti ingiurul centrului O. Pentru a mesura un anghiu, se asiedia centrul cercului in verful O al anghiului EOF ce trebue se se mesure, se indreptedia alidada fixa AB in directia uneia din laturile anghiului, OE, si alidada mobile CD se invertesce ingiurul centrului pené se aduce in directia cellei de a doua lature a anghiului, OF. Atunci arcul DB, cu care s'a miscăt acesta alidada, mesura anghiul.



In instrumentele moderne alidadele sunt inlocuite prin lunete, cari dau ua directie mai precisa, si pot vedé objectele la ua mai mare departare de cât ochiul liber.

In cellĕ mai multe din operatiunile de pe pament, deca terenul nu este cu totul orizontal, nu se mesura liniile si anghiurile cum sunt in natura, ci projectiile lor pe un plan orizontal. Asia, in loc de a mesura drepta inclinata AB, se mesură projectia sea AC pe uă linia orizontale.

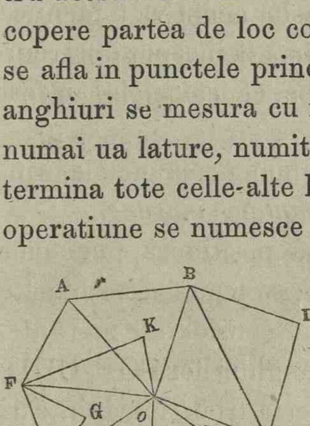


Acesta se chiama *a reduce liniile si anghiurile la orizont.*

Sunt diferite metode pentru a se réduce liniile si anghiurile la orizont. Teodolitul, intre altele, dà dedreptul anghiurile reduse la orizont.

TRIANGULATIUNE.

145. Pentru a se esecuta cu precisiune un plan al unei mosii, al unui orasiu seu alt-ceva, trebue a se determina distantiele respective intre diferitele selle puncte principali, reduse la orizont. Aceste distantie nu sé mesura tote diréct, din causa cà este forte anevoie a se mesura cu precisiune ua drepta pe pament; ci pentru acesta se formedia ua multime de trianghiuri cari acopere partea de loc considerata, si alle caror verfuri se afla in punctele principali alle locului. In aceste trianghiuri se mesura cu instrumentele tote anghiurile si numai ua lature, numita *base*; si apoi prin calcul se determina tote celle-alte laturi alle trianghiurilor. Acesta operatiune se numesce *triangulatiune.*



Eca un essemplu de triangulatiune. Cam in centrul locului considerat, sé alege un punct O, din care se se pota vedé tote punctele principale alle locului. Se aleg apoi câteva puncte insemnate, A,B,C,D, E,F, ast-fel ca unind aceste puncte intre elle si cu O prin linii drepte, trianghiurile ABO, BOC, etc., cari vor resulta, se nu aiba nici un anghiu prea ascutit seu prea obtus, câci atunci erorile de temut sunt cu mult mai mari. Se mesura tote anghiurile din aceste trianghiuri, si se alege ua lature ore-care, spre essemplu AB, care se se pota mesura direct in conditiunile celle mai avantagiose. Acesta lature va fi *basea* triangulatiunei.

In trianghiul AOB, cunoscundu-se AB si anghiurile ABO, BAO, mesurate direct, se vor puté calcula si laturile AO si BO.

Trianghiul BOC, in care se cunoscé BO din trianghiul precedinte, si tote anghiurile din mesuraturi, ne va da lungimea laturilor BC si OC.

Tot assemenea mergund mai departe din trianghiu in trianghiu, vom determina laturile CD, OD, DE, OE, EF, FO, FA, AO.

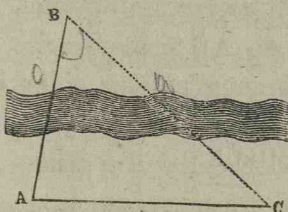
Determinarea acestei din urma laturi ne pote servi ca verificare; câci deca valorea gasita acum va fi identica seu prea putin diferita de cea aflata la inceput din trianghiul ABO, acesta va fi ua proba cà calculele au fost esacte.

Trianghiurile formate ast-fel numai cu punctele principali se numesc *trianghiuri de antaia marime.*

Pentru a determina in urma positiunea punctelor mai putin insemnate, G, H, I, K, se lega aceste puncte prin drepte cu punctele principale considerate mai ante, si se mesura tote anghiurile trianghiurilor FGE, OHD, BIC, FKO, ast-fel formate. Aceste trianghiuri, in cari se cunosce câte ua lature din trianghiurile de antaia marime, si tote anghiurile din mesuraturi, ne vor dà si distantiele FG, GE, OH, HD, BI, IC, FK, KO, cari determina positiunea punctelor G, H, I, K.

CALCULUL DISTANTIELOR.

146. *Se se gasesca distantia de la un punct pene la un alt punct inaccessibile.*



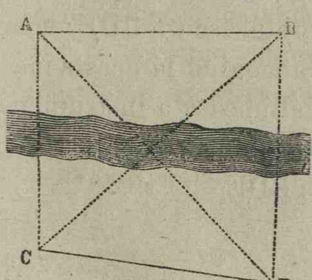
Fia A punctul unde stationedia observatorul si B punctul visibile inse inaccessibile; se cere distantia AB.

Se mesura pe pament ua base AC, care se treca prin punctul A; apoi cu un instrument de mesurat anghiurile se ridica anghiurile A si C; atunci trianghiul ABC, in care se cunosce ua lature si doue anghiuri, ne va da prin un calcul cunoscut* distantia cautata AB. *126

Essemplu. Date: AC=$315^m,74$; A=$72^0 13' 24'',1$; C=$47^0 37' 18'',5$.

Necunoscuta: AB=$268^m,904$.

147. *Se se gasesca distantia d'intre doue puncte, visibile inse inaccessibile.*



Fia A si B punctele inaccessibile a caror distantia este ceruta.

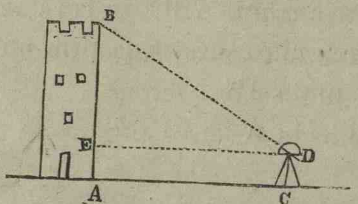
Se mesura ua base CD, si apoi anghiurile ACD si ADC; trianghiul ACD, in care se cunosce ua lature si doue anghiuri, ne va da prin calcul laturea AC. Mesuràm apoi anghiurile BCD si BDC, si trianghiul BCD, in care se cunosce laturea DC, mesurata si celle doue anghiuri adjacente, ne va da pe BC. Atunci trianghiul ABC, in care cunoscem pe AC si pe BC prin celle doue trianghiuri precedente, precum si anghiul ACB=ACD—BCD, ne va da laturea AB, care este distantia cautata.

Essemplu. Date: $CD=1432^m,16$; $ACD=79^013'28'',4$; $ADC=35^051'12'',3$; $BCD=46^025'56'',8$; $BDC=64^036'5'',9$.

Necunoscuta: $AB=787^m,848$.

CALCULUL INALTIMILOR.

148. *Se calculàm inaltimea unui turn al carui picior accessibile este pe un plan orizontal.*

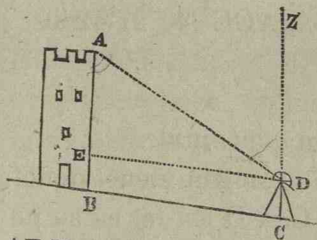


Asiediàm un instrument de mesurat anghiurile in un punct C, la ore-care departare de piciorul turnului, si mesuràm anghiul BDE ce face radia visuale dusa la verful turnului cu linia orizontale ED. Mesuràm apoi pe pament distantia AC. In trianghiul dreptanghiu BED se cunosce laturea ED=AC si anghiul ascutit BDE; vom
122 puté dera se calculàm pe BE; adaogind la acesta marime si pe EA=DC, care este inaltimea h a instrumentului, vom ávé inaltimea AB a turnului.

Essemplu. Date: $AC=41^m,35$; $BDE=39^015'49'',6$; $h=1^m,25$.

Necunoscuta: $AB=35^m,05$.

149. *Se calculàm inaltimea unui turn al carui picior accessibile nu este pe un plan orizontal.*



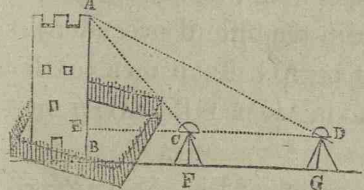
Asiediàm un instrument de mesurat anghiurile in D, si apoi insemnàm pe turn un punct E ast-fel cà EB se fie egal cu DC. Mesuràm pe urma anghiul ADE, precum si anghiul ADZ, pe care 'lu face drepta AD cu verticala DZ; mesuràm in fine basea BC=ED. Trianghiul AED, in care cunoscem laturea ED si anghiurile ADE si EAD=ADZ, ne va da pe AE*; adaogind la acesta quantitate *126
pé EB=DC=h, inaltimea instrumentului, vom avé inaltimea AB a turnului.

Essemplu. Date : BC=$52^{m},36$; ADE=$36^{0}24'17'',3$; ADZ=$40^{0}58'12'',2$; h=$0^{m},982$.

Necunoscuta: AB=$48^{m},485$.

150. *Se calculàm inaltimea unui turn al carui picior este inaccessibile, inse asiediat pe un plan orizontal.*

Asiediàm in C un instrument de mesurat anghiurile, si luàm anghiul ACE ce face radia visuale dusa la verful turnului cu directia orizontale CE. Mutàm apoi instrumentul in D, tot pe linia EC, si mesuràm anghiul ADE; in fine mesuràm si pe FG=CD. In trianghiul

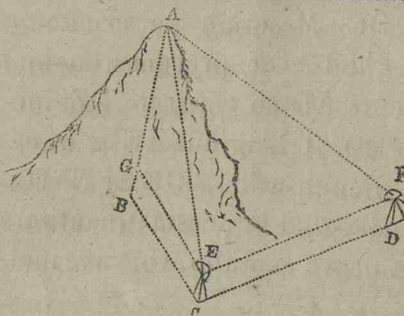


ACD se cunosce laturea CD si anghiuriie ADC si ACD=180^{0}—ACE; prin urmare din acel trianghiu vom puté calcula pe AC*. Atunci trianghiul dreptanghiu *126
ACE, in care se cunosce AC si ACE, ne vă da* pe AE, *119
la care adaogind pe EB=h, inaltimea instrumentului, vom avé inaltimea cautata AB.

Essemplu. Date: $FG=12^m,15$; $ACE=44^0 27' 42'',0$; $ADE=32^0 51' 13'',5$; $h=1^m,51$.

Necunoscută: $AB=34^m,264$.

151. *Se se calculedie inaltimea unui munte.*



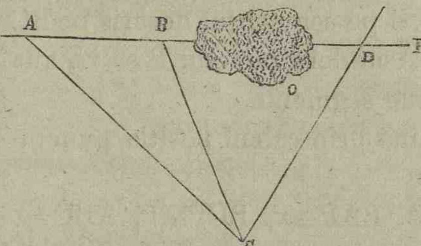
Alegem doue puncte C si D ast-fel ca se putem mesura cu inlesnire si precisiune ua base CD. Asiediàm apoi un instrument de mesurat anghiurile in D, si mesuràm anghiul AFE format de radia visuale dusa la verful muntelui cu cea dusa la punctul E; mutàm pe urma instrumentul in C si mesuram anghiul AEF, facut de radiele visuale duse la verful muntelui si la punctul F. Trianghiu AEF, in care se cunosce EF=CD si anghiurile alaturate ne va
126 da pe AE. Átunci, deca mesuràm si anghiul AEG facut de radia visuale dusa din E la verful muntelui cu orizontala EG, trianghiul dreptanghiul AEG, in care se cunosce hipotenusa AE din trianghiul precedent, si anghiul ascutit AEG, va da pe AG. Inaltimea totale a muntelui se va afla adaogind la AG pe $GB=EC=h$, inaltimea instrumentului.

Essemplu. Date: $CD=248^m,36$; $AFE=58^0 13' 26'',3$; $AEF=72^0 15' 20'',9$; $AEG=30^0 37' 14'',5$; $h=1^m,18$.

Necunoscuta: $AB=142^m,564$.

QUESTIUNI DIVERSE

152. *Se prelungim ua drepta pe pament pene dincolo de un obstacul care opresce vederea.*



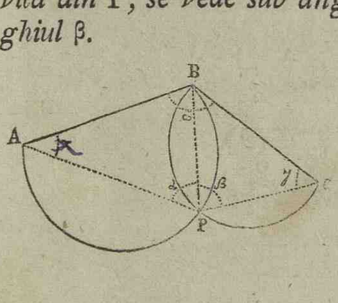
Fia drepta AB pe care trebue se o prelungim dincolo de obstaculul O, care impedeca vederea.

Mesuràm ua portiune AB din drepta data; apoi alegund un punct C, din care se se veda si drepta AB, si obstaculul, si partea locului unde trebue prelungita drepta, mesuràm anghiurile BAC si ABC; atunci trianghiul ABC ne va da pe AC. Dupe acesta ducem ua drepta dupe voie CD in partea locului unde trebue prelungita drepta, si mesuràm anghiul ACD; trianghiul ACD, in care se cunosce AC si anghiurile A si C, ne va da pe CD si anghiul ADC. Luand dera pe drepta indefinita CD ua lungime egale cu distantia calculata ast fel, si ducund prin D ua drepta DE care se faca cu CD un anghiu egal cu cel gasit prin calcul, acesta drepta DE va fi chiar prelungirea cautata a dreptei AB.

Essempiu. Date: $AB=87^m,34$; $BAC=50^0 13' 25'',4$; $ABC=107^0 38' 9'',3$; $ACD=61^0 29' 32'',8$.

Necunoscute: $ADC=68^0 17' 1'',8$; $CD=182^m,284$.

153. *Trei puncte de pe pament* A,B,C, *sunt insemnate pe ua charta; se gasim pe acestà charta positiunea punctului* P *care este ast fel situat, cà distantia* AB *privita din* P, *se vede sub anghiul* α, *si distantia* BC *sub anghiul* β.



Este evident cà punctul P, din care drepta AB se vede sub anghiul α, se afla pe segmentul descris pe AB si capabil de anghiul α; de alta parte P trebué se se afle si pe segmentul descris pé BC si capabil dé anghiul β. Ásia-dera punctul P sé va afla la intersectia acestor doue segmente.

Se cére inse a détermina prin calcul positia punctului P.

Punem $AB=a$, $BC=b$, $BAP=x$, $BCP=y$, $ABC=\omega$. Trianghiul ABP dà:

$$\frac{BP}{\sin x}=\frac{AB}{\sin\alpha},$$

seu

$$BP=\frac{a\sin x}{\sin\alpha}.$$

Trianghiul BCP dà assemenea:

$$BP=\frac{b\sin y}{\sin\beta};$$

asia-dera

$$\frac{a\sin x}{\sin\alpha}=\frac{b\sin y}{\sin\beta}, \tag{a}$$

de unde

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta},$$

si dupe proprietatile proportiilor,

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}.$$

48 Inse

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}};$$

asia-dera:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta},$$

seu

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}.$$

Pentru a facè calculabile prin logaritmi acesta equatiune, impartim ambii termeni ai fractiunei cu $b\sin\alpha$ si avem:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{1-\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1+\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}.$$

Punend

$$\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}=\operatorname{tg}\varphi,$$

si observand cà $1=\operatorname{tg}45^0$, relatiunea acesta devine:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{\operatorname{tg}45^0-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}45^0\operatorname{tg}\varphi}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},$$

seu

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}(45^0-\varphi)\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}. \qquad (1)$$

Pe de alta parte suma anghiurilor din patrulaterul ABCP fiind de 360^0, avem:

$$\alpha+\beta+x+y+\omega=360^0,$$

de unde

$$\frac{x+y}{2}=180^0-\frac{\alpha+\beta+\omega}{2}. \qquad (2)$$

Equatiunile (1) si (2) ne vor da pe x si y, cari determina positia punctului P pe charta.

Cunoscund pe x si y, vom puté determina si pe BP prin ver-una din relatiunile

$$BP=\frac{a\sin x}{\sin\alpha}, \text{ seu } BP=\frac{b\sin y}{\sin\beta}.$$

Essemplu. Date: $\alpha=53^0 43' 27'',4$; $\beta=42^0 18' 53'',3$; $\omega=112^0 34' 32'',3$; $a=2456^m,13$; $b=1934^m,25$.

Necunoscute: $x=69^0 8' 27'',78$; $y=82^0 14' 39'',22$; $BP=2846^m,918$.

Observare. In cas cand

$$\alpha+\beta+\omega=180^0,$$

avem din (2):

$$\frac{x+y}{2}=90^0, \text{ seu: } \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\infty.$$

De altă parte, fiind-cà anghiurile opuse $\alpha+\beta$ si ω din patrulaterul ABCP sunt suplementare, patrulaterul este inscriptibile; prin urmare si anghiurile x si y vor fi suplementare, si vom avé:

$$\sin x=\sin y;$$

atunci relatiunea (a) devine:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},$$

seu

$$a\sin\beta=b\sin\alpha,$$

si prin urmare

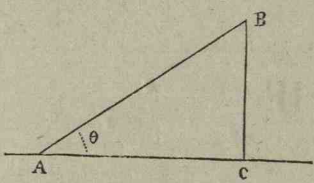
$$\operatorname{tg}\varphi=1, \text{ si } \varphi=45^0.$$

Formula (1) se face in casul acesta:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}0^0\operatorname{tg}90^0=0\times\infty=\frac{0}{0}.$$

In cas dera cand *celle patru puncte* A,B,C,P, *sunt pe ua aceasi circumferentia, problema este nedeterminata.*

154. *Se se reduca ua drepta la orizont.*



Fiind data drepta AB si inclinarea sea θ pe orizont, se cere drepta AC redusa la orizont.

Trianghiul dreptaughiu ABC dà imediat:

$$AC=AB\cos\theta.$$

Asia-dera *ua drepta redusa la orizont este egale cu drepta din natura immultita cu cosinusul inclinarii ei pe orizont.*

Essemplu. Date: $AB=193^m,37$; $\theta=8^0 13' 25'',5$.

Necunoscuta: $AC=191^m,381$.

CARTEA III

TRIGONOMETRIA SFERICA.

CAPITULUL I.

Proprietatile trianghiurilor sferice.

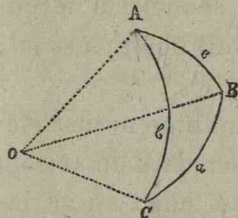
155. *Trigonometria sferica* are drept object resolutiunea trianghiurilor sferice.

Laturile trianghiurilor sferice fiind nisce arcuri de cercuri mari alle sferei, se socotesc in grade, minute si secunde, ca si anghiurile; inse deca voim se aflàm *lungimea linearia* a unei laturi cunoscund numerul de grade, minute si secunde ce contine ea, vom puté face lesne acesta determinare prin relatiunea cunoscuta din geometria:

$$x=\frac{2\pi R}{360}x^0,$$

in care x insemnedia lungimea linearia a laturei, era x^0 numerul gradelor coprinse intr'ensa.

In trigonometria sferica nu vom considera de cât trianghiurile sferice alle caror laturi sunt mai mici de cât 180^0; asia cà, deca unim verfurile A,B,C, alle trianghiului cu centrul O al sferei, formàm un anghiu *triedru*,



alle carui fetie AOB, BOC, COA, se mesura respectiv chiar cu laturile AB,BC,CA alle trianghiului sferic, si alle carui anghiuri diedre pe aretele OA,OB,OC sunt egale respectiv cu anghiurile A,B,C alle trianghiului.

Radia sferei in trigonometria sferica se considera totde-una egale cu unitatea.

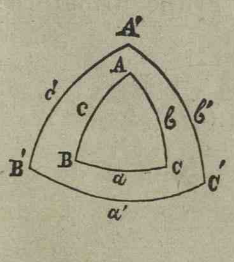
Anghiurile trianghiurilor sferice se notedia tot cu literele A,B,C, si laturile opuse cu *a*,*b*,*c*. Deca un anghiu este drept, i se pune litera A; assemenea deca ua lature este de 90^0, se notedia cu litera *a*.

156. Reamintim aci principalele proprietati alle trianghiurilor sferice de cari vom avé trebuintia mai in urma:

1^0. Suma anghiurilor, A,B,C, dintr'un trianghiu sferic este mai mare de cât doue anghiuri drepte si mai mica de cât siesse. Urmedia de aci cà in un trianghiu sferic putem avé nu numai un anghiu drept seu obtus, ci si doue; chiar si trei.

2^0. Suma laturilor, *a*,*b*,*c*, este mai mica de cât ua circumferentia.

3^0. Deca din fie-care verf al unui trianghiu sferic



ABC, cu ua radia de 90^0, descriem câte un arc pe sfera, aceste arcuri formedia un nou trianghiu sferic A'B'C', care se numesce *polar* al celui d'antaiu, si *a*) fie-care lature a trianghiului ABC este suplementaria cu anghiul opus din trianghiul polar; ast fel: $a+A'=180^0$, $b+B'=180^0$, $c+C'=180^0$; b) fie-care anghiu al trianghiului considerat ABC este egal cu ua semicircumferentia minus laturea opusa din trianghiul polar; ast fel: $A+a'=180^0$, $B+b'=180^0$, $C+c'=180^0$.

4^0. Doue triănghiuri sferice ce se afla pe aceasi sfera seu pe sfere egale, sunt egale: a) cand au un anghiu egal coprins intre doue laturi egale; b) cand au ua lature egale coprinsa intre doue anghiuri egale; c) cand au câte-trelle laturile egale; d) cand au câte trelle anghiurile egale.

Din acesta proprietate resulta cà un trianghiu sferic se pote tot-de-una resolve cand ni se dau trei ore cari din elementele lui, fora a fi necessitate ca printre aceste elemente se se afle si cel putin ua lature, cum am vediut la trianghiurile rectilinii.*

Problema generale a trigonometriei sferice este dera cea urmatore: *dandu-se trei ore-cari din elementele unui trianghiu sferic, se se determine un al patrulea element.* Acesta problema se va resolve afland relatiuni intre patru ore-cari din elementele unui trianghiu sferic. Deca vom presupune apoi cà unul din aceste elemente este necunoscut, celle-alte trei fiind cunoscute, vom puté afla elementul necunoscut resolvend equatiunea.

Celle ~~siesse~~ șase elemente alle unui trianghiu sferic, combinate patru câte patru, dau celle 15 grupe urmatore:

$Aabc$, $Babc$, $Cabc$;

$ABab$, $ACac$, $BCbc$;

$ABac$, $ABbc$, $ACab$, $ACbc$, $BCab$, $BCac$;

$ABCa$, $ABCb$, $ABCc$.

Prin urmare relatiunile ce vom gasi intre patru elemente alle unui trianghiu sferic vor fi de patru feluri:

1⁰. Intre celle trei laturi si un anghiu;

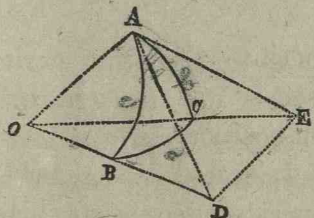
2⁰. Intre doue laturi si anghiurile opuse la fie-care;

3⁰. Intre doue laturi, un anghiu coprins intre elle si unul opus la una din elle.

4⁰. Intre celle trei anghiuri si ua lature.

RELATIUNI INTRE CELLE TREI LATURI SI UN ANGHIU.

157. Fie ABC un trianghiu sferic, in care presupunem cà laturile $AC=b$ si $AB=c$ sunt fie care mai mici de 90^0. Ducem AE tangenta la arcul AC, si AD tangenta la AB, si prelungim aceste tangente pene intalnesc radiele OC si OB in E si D; unim apoi D cu E. Dupe definitiunea liniilor trigonometrice, si fiind-cà radia sferei OA este egale cu 1, avem:



$$AD=\mathrm{tg}c,\ OD=\sec c,\ AE=\mathrm{tg}b,\ OE=\sec b;$$

pe lunga acestea, anghiul DOE fiind mesurat cu arcul BC, avem: $DOE=a$; si anghiul diedru CAOB, avend drept mesura anghiul plan DAE,

$$DAE=A.$$

Trianghiul rectiliniu DAE dà* : *102

$$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2AD\times AE\cos DAE,$$

seu

$$\overline{DE}^2=\mathrm{tg}^2c+\mathrm{tg}^2b-2\mathrm{tg}c\,\mathrm{tg}b\cos A.$$

Trianghiul DOE dà assemenea:

$$\overline{DE}^2=\overline{DO}^2+\overline{OE}^2-2DO\times OE\cos DOE,$$

seu

$$\overline{DE}^2 = \sec^2 c + \sec^2 b - 2\sec c \sec b \cos a.$$

Egaland acesta valore cu cea precedinte,

$$\text{tg}^2 b + \text{tg}^2 c - 2\text{tg}b\,\text{tg}c\cos A = \sec^2 b + \sec^2 c - 2\sec b \sec c \cos a,$$

de unde:

$$2\sec b \sec c \cos a = (\sec^2 b - \text{tg}^2 b) + (\sec^2 c - \text{tg}^2 c)$$
$$+ 2\text{tg}b\,\text{tg}c\cos A,$$

31si fiind-ca

$$\sec^2 b - \text{tg}^2 b = 1, \quad \sec^2 c - \text{tg}^2 c = 1,$$

avem:

$$\sec b \sec c \cos a = 1 + \text{tg}b\,\text{tg}c\cos A,$$

seu

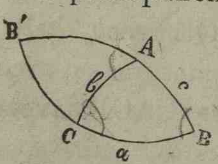
$$\frac{\cos a}{\cos b \cos c} = 1 + \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c}\cos A,$$

si immultind tota equatiunèa cu $\cos b \cos c$,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \qquad \text{(a)}$$

158. Formula acesta este generale, adeca esiste chiar in casurile cand b si c nu sunt mai mici de 90^0, precum am presupus in cursul demonstratiunei.

Sè presupunem mai antaiu cà $AB = c$ este mai mare de 90^0, pe cand $AC = b$ este tot mai mic de 90^0. Prelungim arcele AB si CB pene la intalnirea lor in B′. In trianghiul sferic nou format, AB′C, laturea $AC < 90^0$, din date; apoi $AB' < 90^0$, câci deca $AB > 90^0$, diferentia sea pene la $BAB' = 180^0$ este evident cà va fi mai mica de cât 90^0; acest trianghiu implinind dera conditiunea pusa la inceputul demonstratiunei precedente ca se aiba laturile AC si AB′ mai mici de 90^0, vom avé relatiunea:



$$\cos CB' = \cos AB' \cos AC + \sin AB' \sin AC \cos B'AC,$$

si fiind-cà

$CB' = 180^0 - a$, $AB' = 180^0 - c$, $AC = b$, $B'AC = 180^0 - A$, avem:

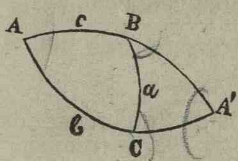
$$-\cos a = -\cos c \cos b - \sin c \sin b \cos A,$$

si scamband semnele,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

care este chiar relatia (a); inse acum $c > 90^0$.

Fie inca $b > 90^0$ si $c > 90^0$. Prelungim laturile AB si AC pene la intalnirea lor in A′, si atunci trianghiul BA′C, in care $BA' < 90^0$ si $CA' < 90^0$, dà:



$$\cos BC = \cos BA' \cos CA' + \sin BA' \sin CA' \cos BA'C,$$

si fiind-cà

$$BC = a,\ BA' = 180^0 - c,\ CA' = 180^0 - b,\ BA'C = A,$$

punend aceste valori in equatiune, vom avé érasi:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

relatiune identica cu (a), inse in care $b > 90^0$ si $c > 90^0$.

In fine, fiind-cà acesta formula subsiste ori-cât de mult s'ar apropia b si c de 90^0, putem admite cà ea subsiste si la limita, adeca cand b si c sunt egali cu 90^0. Formula dera este genĕrale.

Operand in B si C in acellasiu mod cum am facut in A, vom gasi alte doue formule; avem dera sistema urmatore de trei formule:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

cari sunt formulele fundamentale alle trigonometriei sferice, câci din elle se deduc tote relatiunile ce vom gasi mai in urma.

RELATIUNI INTRE DOUE LATURI SI ANGHIURILE OPUSE.

159. Scotiend valorea lui cosA din prima din equätiunile (1), avem:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

si ridicand la patrat,

$$\cos^2 A=\frac{\cos^2 a+\cos^2 b\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c};$$

inse

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\frac{\cos^2 a+\cos^2 b\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-\cos^2 a-\cos^2 b\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-\cos^2 a-\cos^2 b\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c},$$

si impartind ambii membri cu $\sin^2 a$,

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Operand assemenea asupra cellei de a doua si a treia equatiuni (1), am gasi pentru $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}$ si $\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$ aceasi valore ca si pentru $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}$; prin urmare

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}=\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c},$$

si estragund radecina patrata,

$$\pm\frac{\sin A}{\sin a}=\pm\frac{\sin B}{\sin b}=\pm\frac{\sin C}{\sin c};$$

inse fiind-cà si anghiurile si laturile trianghiului sunt mai mici de 180^{0}*, sinusurile lor sunt positive, si prin *156 urmare nu vom lua in equatiunea precedinte de cât semnul+pentru fie-care termen; avem dera sirul de raporturi egali:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}, \qquad (2)$$

cari esprime cà *in ori-ce trianghiu sferic sinusurile anghiurilor sunt proportionale cu sinusurile laturilor opuse,*

RELATIUNI INTRE DOUE LATURI, ANGHIUL COPRINS INTRE ELLE SI ANGHIUL OPUS LA UNA DIN ELLE.

160. Se se gasesca, spre essemplu, relatiunea ce esiste intre elementele $a,b,$A,C. Trebue se eliminàm pe c si pe B intre celle trei equatiuni (1).

In prima din equatiunile (1) inlocuim pe $\cos c$ prin valorea sea data de a treia; acea equatiune devine atunci:

$$\cos a=\cos b(\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C)+\sin b\sin c\cos A.$$

De alta parte formulele (2) dau:

$$\sin c=\sin a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Punend acesta valore in equatiunea din urma, desfacund parentesele si punend pe $\sin a \sin b$ factor comun la termenii unde se afla, avem:

$$\cos a=\cos a\cos^2 b+\sin a\sin b\left(\cos b\cos C+\sin C\frac{\cos A}{\sin A}\right);$$

trecund pe $\cos a \cos^2 b$ in membrul antaiu,

$$\cos a(1-\cos^2 b)=\cos a\sin^2 b=\sin a\sin b(\cos b\cos C+\sin C\cot A),$$

si divisand prin $\sin a\sin b$,

$$\cot a\sin b=\cos b\cos C+\sin C\cot A.$$

In acellasiu mod vom gassi inca alte cinci formule analoge, asia cà sistémul complét se compune din celle siesse formule urmatorie:

$$\left.\begin{aligned}
\cot a\sin b&=\cos b\cos C+\sin C\cot A,\\
\cot a\sin c&=\cos c\cos B+\sin B\cot A,\\
\cot b\sin c&=\cos c\cos A+\sin A\cot B,\\
\cot b\sin a&=\cos a\cos C+\sin C\cot B,\\
\cot c\sin a&=\cos a\cos B+\sin B\cot C,\\
\cot c\sin b&=\cos b\cos A+\sin A\cot C.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

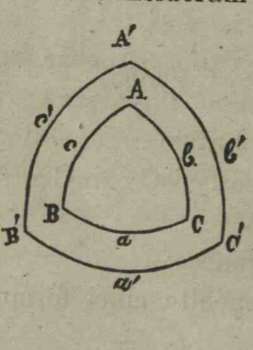
Eca un mediu-loc facile de a tine minte aceste formulé: voind, spre essemplu, a gasi relatiunea intre elementéle a,b,B,C, le vom scrie in ordinea urmatorie:

$$b\ a\ a\ C\ C\ B,$$

adeca: antaiu laturea la care se opune unul din anghiurile date; pe urma cea-alta lature; al treilea anghiul coprins intré laturi, si in fine anghiul opus la prima lature; élementele de la mediu loc se scriu de câte doué ori. Inaintea elementelor estreme se scriu initialele *cot*; inaintea cellor doue cari vin lunga margini cuventul *sin*, si inaintea cellor doue din mediu-loc *cos*. Intre al doilea si al treilea elément se pune semnul$=$, intre al patrulea si al cincilea$+$.

RELATIUNI INTRE UA LATURE SI CELLE TREI ANGHIURI

161. Consideràm trianghiul A′B′C′, polar al trian-
156 ghiului dat ABC; avem:



$$a'=180^0-A,\ b'=180^0-B,$$
$$c'=180^0-C,$$
$$A'=180^0-a,\ B'=180^0-b,$$
$$C'=180^0-c.$$

Inse in A′B′C′ avem, dupé equatiunile (1):

$$\cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A';$$

inlocuind pe a', b', c', A', cu valorile lor,

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a,$$

si scamband semnele,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

In acellasiu mod vom gasi inca doue relatiuni analoge cu acesta, asia cà sistemul complet se compune din celle trei equatiuni urmatore:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

FORMULE RELATIVE LA TRIANGHIURILE DREPTANGHIE.

162. Deca anghiul A este drept, avem: $\cos A=0$, $\sin A=1$, $\cot A=0$. Punend acesta valore in prima din equatiunile (1), ea devine:

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad (5)$$

care esprime cà *in un trianghiu sferic dreptanghiu cosinusul hipotenusei este egal cu produsul cosinuselor cellor alte doue laturi.*

163. Equatiunile (2) dau:

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}, \quad \sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A},$$

si pentru $A=90^\circ$,

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \sin c = \sin a \sin C; \quad (6)$$

adeca *sinusul unei laturi a anghiului drept este egal cu sinusul hipotenusei immultit cu sinusul anghiului opus.*

164. Introducund hipotesea $A=90^\circ$ in equatiunile (3), obtinem:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C,$$

$$\cot a \sin c = \cos c \cos B,$$

$$\cot b \sin c = \cot B,$$
$$\cot c \sin b = \cot C,$$

si impartind pe fie care din aceste equatiuni respectiv prin $\cos b \cot a$, $\cos c \cot a$, $\cot b \cot B$, $\cot c \cot C$, dobandim sistema :

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C, \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B, \\ \operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B, \\ \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Celle doue d'antàiu esprim cà *tangenta unei laturi a anghiului drept este egale cu produsul tangentei hipotenusei prin cosinusul anghiului oblic alaturat*; era celle doue din urma, *cà tangenta unei laturi a ànghiului drept este egale cu sinusul celei-alte din aceste laturi immultit cu tangenta anghiului opus.*

165. Equatiunile (4), pentru $A = 90^0$, dau:

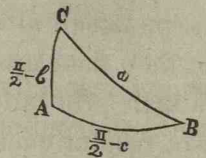
$$\cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a,$$
$$\cos B = \sin C \cos b,$$
$$\cos C = \sin B \cos c,$$

si deca pe prima din acestea o dividem cu $\sin B \sin C$,

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cot B \cot C, \\ \cos B = \sin C \cos b, \\ \cos C = \sin B \cos c. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Cea d'antaiu din aceste formule arèta cà *cosinusul hipotenusei este egal cu produsul cotangentelor cellor doue anghiuri oblice*; era celle-alte doue, cà *cosinusul unui anghiu oblic este egal cu cosinusul laturei opuse immultit cu sinusul cellui-alt anghiu oblic.*

166. Dàm aci ua metoda mnemonica forte simpla pentru a se puté tine minte tote aceste formule. Pe laturile



anghiului drept scriem $\frac{\pi}{2}-b$ in loc de b, si $\frac{\pi}{2}-c$ in loc de c. Atunci, deca consideràm trei elemente si *deca aceste elemente sunt consecutive, cosinusul celui din mediuloc este egal cu produl cotangentelor celor de la margini; era deca celle trei elemente considerate nu sunt tote consecutive, cosinusul elementului separat este egal cu produsul sinuselor cellor-alte doue consecutive.*

In aceste diverse consideratiuni anghiul A se socotesce ca cum nici n'ar esiste.

Spre essemplu, se se afle relatiunea ce esiste intre hipotenusa a si laturile b si c. Aceste trei elemente vedem cà nu sunt tote consecutive, câci a este separat de b prin anghiul C, si de c prin anghiul B. Laturile b si c, din contra, sunt consecutive, câci anghiul A care se afla intre elle nu computa. Asia dera, dupe regula, vom avé:

$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right) = \cos b \cos c,$$

care este tocmai equatiunea (5).

Se se afle inca relatiunea ce esiste intre a, c, B. Aceste trei elemente sunt consecutive; prin urmare, dupe regula,

$$\cos B = \cot a \cot\left(\frac{\pi}{2}-c\right) = \cot a \operatorname{tg} c,$$

si impartind cu $\cot a$,

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B,$$

care este a doua din equatiunile (7).

Celle alte opt relatiuni se gasesc tot in acelasiu mod.

167. Formulele (5),(6),(7),(8) pot se se puna sub alte forme mai comode pentru calcul, si tot-de-o data mai precise, câci tote vor da anghiurile si laturile prin tangentele lor; de acea elle au preferentia in resolutiunea trianghiurilor dreptanghie.

Formula (5) dà:

$$\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}.$$

44 Punend acesta valore in formula cunoscuta

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}},$$

avem:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\cos a}{\cos c}}{1+\frac{\cos a}{\cos c}}} = \sqrt{\frac{\cos c - \cos a}{\cos c + \cos a}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{a-c}{2}}{2\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-c}{2}}},$$

seu

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}}.$$

Deca din (5) am fi scos valorea lui $\cos c$ si am fi pus-o in formula:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}},$$

am fi gasit assemenea:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}.$$

Aceste doue formule esprim *tangenta* unei laturi a anghiului drept in functiune de *tangenta* semisumei si semidiferentiei hipotenusei si a cellei-alte laturi.

168. Prima din formulele (6) dà:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B},$$

care pusa in formula* *53

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}},$$

dà:

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sin b}{\sin B}}{1-\frac{\sin b}{\sin B}}} = \pm\sqrt{\frac{\sin B + \sin b}{\sin B - \sin b}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2\sin\frac{B+b}{2}\cos\frac{B-b}{2}}{2\sin\frac{B-b}{2}\cos\frac{B+b}{2}}},$$

ori

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}},$$

Assemenea si

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{C+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-c}{2}}}.$$

169. Deca din prima equatiune (6) am fi scos

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a},$$

si am fi pus in

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}},$$

am fi gasit, dupe ua seria de transformari identice cu cele de sus:

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}}.$$

Assemenea si

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}}}.$$

170. Prima din formulele (7) dà:

$$\cos C=\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a},$$

care pusa in équatia

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}},$$

dà:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}}{1+\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}}}=\sqrt{\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}}=\sqrt{\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{\sin a\cos b+\sin b\cos a}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}.$$

Putem dera in locul primelor doue formule (7) se substituim pe celle urmatore:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}}.$$

171. A treia si a patra din formulele (7) dau:

$$\sin c=\frac{\operatorname{tg}b}{\operatorname{tg}B},\ \sin b=\frac{\operatorname{tg}c}{\operatorname{tg}C},$$

cari puse in formulele

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{c}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin c}{1-\sin c}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{b}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin b}{1-\sin b}},$$

dau, dupe nisce transformari analoge cu celle de la formulele imediat precedente:

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{c}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{b}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\sin(C+c)}{\sin(C-c)}}.$$

172. Deca in

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

punem in loc de $\cos a$ valorea data de prima din equatiunile (8), avem:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cot B\cot C}{1+\cos B\cot C}}=\sqrt{\frac{\sin B\sin C-\cos B\cos C}{\sin B\sin C+\cos B\cos C}}$$

$$=\sqrt{\frac{-\cos(B+C)}{\cos(B-C)}},$$

26si find-cà

$$-\cos(B+C)=\cos(180^0-B-C),$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(180^0-B-C)}{\cos(B-C)}}.$$

173. In fine celle doue din urma equatiuni (8) dau:

$$\cos b=\frac{\cos B}{\sin C},\ \cos c=\frac{\cos C}{\sin B},$$

seu

$$\cos b=\frac{\cos B}{\cos(90^0-C)},\ \cos c=\frac{\cos C}{\cos(90^0-B)}.$$

Aceste valori puse in

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}}$$

dau:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{\cos B}{(\cos 90^0-C)}}{1+\frac{\cos B}{\cos(90^0-C)}}}=\sqrt{\frac{\cos(90^0-C)-\cos B}{\cos(90^0-C)+\cos B}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin\left(45^0+\frac{B-C}{2}\right)\sin\left(-45^0+\frac{B+C}{2}\right)}{2\cos\left(45^0+\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(-45^0+\frac{B+C}{2}\right)}},$$

seu:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(-45^0+\frac{B+C}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{B-C}{2}\right)};$$

assemenea:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(-45^0+\frac{B+C}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{B-C}{2}\right)}.$$

174. Deca din celle doue din urma equatiuni (8) am fi scos

$$\cos(90^0-B)=\frac{\cos C}{\cos c},\ \text{si}:\ \cos(90^0-C)=\frac{\cos B}{\cos b},$$

si le-am fi substituit in*

$$\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(90^0-B)}{1+\cos(90^0-B)}},$$ *53

$$\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{C}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(90^0-C)}{1+\cos(90^0-C)}},$$

am fi avut, dupe diferite transformari, analoge cu altele pre cari le-am mai vediut deja:

$$\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C+c}{2}\operatorname{tg}\frac{C-c}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}},$$

si facund inversa,

$$\cot\left(45^0-\frac{B}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\cot\frac{C+c}{2}\cot\frac{C-c}{2}},$$

$$\cot\left(45^0-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=\pm\sqrt{\cot\frac{B+b}{2}\cot\frac{B-b}{2}}.$$

FORMULE RELATIVE LA TRIANGHIURILE RECTILATERALI.

175. Un trianghiu sferic se numesce *rectilateral* cand una din laturile selle, a, este de 90^0.

Formulele relative la trianghiurile rectilaterali le vom deduce, ca si pe celle pentru trianghiurile dreptanghie, din formulele generali (1), (2), (3), (4), facund $a=90^0$; atunci: $\cos a=0$, $\sin a=1$, $\cot a=0$, si acelle equatiuni devin:

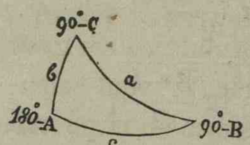
$$\cos A=-\cos B\cos C, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin B &= \sin A \sin b, \\ \sin C &= \sin A \sin c, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg} B &= -\mathrm{tg} A \cos c, \\ \mathrm{tg} C &= -\mathrm{tg} A \cos b, \\ \mathrm{tg} B &= \sin C \,\mathrm{tg} b, \\ \mathrm{tg} C &= \sin B \,\mathrm{tg} c, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cot b \cot c, \\ \cos b &= \cos B \sin c, \\ \cos c &= \cos C \sin b. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

176. Eca ua metoda mnemonica comoda pentru a tine



minte aceste formule. Scriem pe figura $90^0 - C$ in loc de C, $90^0 - B$ in loc de B, si $180^0 - A$ in loc de A. Atunci, voind a stabili ua relatiune intre trei elemente *consecutive* alle trianghiului (laturea a nu se socotesce), vom avé *cosinusul elementului de la mediuloc egal cu produsul cotangentelor elementelor de la margini*; era *deca celle trei ellemente nu sunt consecutive, cosinusul elementului separat va fi egal cu produsul sinuselor cellor-alte doue.*

Fiė, spre essemplu, a se gasi ua relatiune intre elementele C,b,c. Aceste elemente, nefiind consecutive, câci c este separat de celle-alte doue prin anghiul A, avem:

$$\cos c = \sin(90^0 - C)\sin b = \sin b \cos C,$$

care estė a treia din (4).

Se se gasesca ua relatiune intre A,B,C. Aceste elemente nu sunt consecutive; deci

$$\cos(180^0 - A) = \sin(90^0 - B)\sin(90^0 - C),$$

seu

$$-\cos A=\cos B\cos C,$$

care este equatia (1).

Se gasim, in fine, ua relatiune intre B,C,b, cari sunt consecutive; avem, dupe regula data:

$$\cos(90^0-c)=\cot(90^0-B)\cot b,$$

seu

$$\sin C=\operatorname{tg}B\cot b,$$

ori

$$\operatorname{tg}B=\sin C\operatorname{tg}b,$$

a treia din formulele (3).

FORMULE CALCULABILE PRIN LOGARITMI CARI DAU ANGHIURILE IN FUNCTIUNE DE LATURI.

177. Din celle patru sisteme de formule ce am gasit la 158, 159, 160, 161, numai formulele (2)* sunt calcu- *159
labile prin logaritmi; trebue se transformàm si pe celle-alte ast-fel ca se se pota si elle calcula prin logaritmi.

Formulele (1)* pot se ne dee anghiurile in functiune *158
de laturi; asia cea d'antaiu din elle dà:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c};$$

inse acesta espressiune nu este calculabile prin logaritmi.

Vom pune acesta valore in equatiunile

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}},$$

si vom avea:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{2\sin b\sin c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b\sin c}},$$

si

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c}{2\sin b\sin c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c}}.$$

Punem

$$a+b+c=2p;$$

scadiend successiv din ambii membri ai acestei equatiuni $2a, 2b, 2c$, si divisand cu 2, avem inca:

$$\frac{b+c-a}{2}=p-a, \frac{a+c-b}{2}=p-b, \frac{a+b-c}{2}=p-c.$$

Substituind aceste valori in equatiunile la cari am ajuns mai sus, avem:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

Operand in acellasiu mod asupra cellei de a doua si
158 a treia equatiuni (1), vom obtine alte doue parechi de formule; in totul dera avem celle doue sisteme urmatorie.

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}},\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}};\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}},\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Divisend respectiv equatiunile (1) prin (2) si facund reducerile, obtinem ua noua seria de formule:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}},\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Aceste trei sisteme de equatiuni ne dau sinusul, cosinusul si tangenta semianghiurilor trianghiului in functiune de laturi.

La tote radicalele trebue se se ia semnul $+$, câci jumetatile anghiurilor A, B, C sunt mai mici de 90^0, si prin urmare liniile lor trigonometrice sunt positive.

Ca mediu practic de a memora aceste formule, vom observa cà factorii de sub radicale sunt identici cu cei de sub radicalele din formulele (4),(5),(6), de la § 106, cu singura diferentia cà li s'a pus inainte la fie-care cuventul *sin*.

FORMULE CALCULABILE PRIN LOGARITMI CARI DAU LATURILE IN FUNCTIUNE DE ANGHIURI.

178. Punem

$$A+B+C-180^0=\varepsilon.$$

Quantitatea ε, egale cu diferentia intre suma anghiurilor trianghiului si 180^0 se numesce *esces sferic* si are mare importantia in trigonometria sferica.

156 Consideràm trianghiul polar $A'B'C'$ al trianghiului dat ABC. Anghiurile acelui trianghiu polar vor fi:

$$A'=180^0-a,\ B'=180^0-b,\ C'=180^0-c,$$

era laturile lui,

$$a'=180^0-A,\ b'=180^0-B,\ c'=180^0-C;$$

facund suma acestor trei din urma egalitati si insemnand cu $2p'$ perimetrul $a'+b'+c'$ al trianghiului polar $A'B'C'$, vom avé:

$$a'+b'+c'=2p'=360^0-(A+B+C-180^0);$$

impartind cu 2 si observand cà $A+B+C-180^0=\varepsilon$,

$$p'=180^0-\frac{\varepsilon}{2};$$

prin urmare

$$p'-a'=180^0-\frac{\varepsilon}{2}-(180^0-A)=A-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$p'-b'=180^0-\frac{\varepsilon}{2}-(180^0-B)=B-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$p'-c'=180^0-\frac{\varepsilon}{2}-(180^0-C)=C-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicand trianghiului polar formulele (1),(2), avem:

$$\sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p'-b')\sin(p'-c')}{\sin b'\sin c'}},$$

$$\cos\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin p'\sin(p'-a')}{\sin b'\sin c'}},$$

si punend in loc de $A', p'. p'-a', p'-b', p'-c', a', b', c'$, valorile date mai sus, vom avé:

$$\sin\left(90^0-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin(180^0-B)\sin(180^0-C)}},$$

$$\cos\left(90^0-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin\left(180^0-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin(180^0-B)\sin(180^0-C)}},$$

seu

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}},$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}}.$$

Operand tot assemenea si asupra cellor alte din equatiunile (1) si (2), am gasi si espressiunea lui $\cos\frac{b}{2}$, $\sin\frac{b}{2}$, $\cos\frac{c}{2}$, $\sin\frac{c}{2}$. Eca fomulele la cari ajungem:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}},\\
\sin\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin C}},\\
\sin\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}},
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}},\\
\cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin C}},\\
\cos\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}}.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Impartind respectiv formulele (4) prin (5), gasim inca :

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},\\
\operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},\\
\operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

In tote aceste formule, radicalelė trebue luate tot cu semnul+, câci arcurile $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ sunt tote mai mici de cât 90°.

FORMULELE LUI DELAMBRE.

179. Deca in

$$\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$$

inlocuim pe $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ cu valorile lor date prin formulele (1) si (2) avem :

$$\sin\frac{A+B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin^2(p-b)\sin(p-c)}{\sin a \sin b \sin^2 c}}$$

$$+\sqrt{\frac{\sin p \sin^2(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin b \sin^2 c}}$$

$$= \frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}}$$

$$= \frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}}.$$

Inse

$$\sin(p-a)+\sin(p-b) = 2\sin\frac{2p-a-b}{2}\cos\frac{p-b-(p-a)}{2}$$

$$= 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\sin c = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2},$$

si dupe (2),

$$\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} = \cos\frac{C}{2}.$$

Punend tote aceste valori in equatiunea de sus si simplificand fractia cu factorul $2\sin\frac{c}{2}$, remane:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2},$$

seu

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Deca tot ast fel in

$$\sin\frac{A-B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

inlocuim pe $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ cu valorile lor date prin (1) si (2), si facem acelleasi transformari ca si mai sus, gasim inca trei equatiuni. In totul dera avem aceste patru formule:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}&=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},\\ \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}&=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}},\\[2ex]
\dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{a+b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}}.
\end{array}\right\}\qquad (7)$$

Aceste formule esprime reletiuni intre câte-siesse elementele trianghiului. Elle au fost descoperite de Delambre, din care causa si porta numele lui.

Eca cum se pot memora acéste formule: déca anghiurile sunt puse in primul membru si laturile in al doilea, precum sunt in tabelul (7), observàm: 1^0 cà in primul membru la numerator si la numitor sé afla doue linii trigonometrice diferite, pe cand in membrul al doilea ambii termeni ai fractiunii coprind linii trigonometrice assemeni; 2^0 cand la numerator in un membru se afla un sinus, la numeratorul membrului cellui-alt se afla semnul—; deca la cel d'antaiu se afla un cosinus, celalt coprinde semnul+.

ANALOGIILE LUI NAPIER.

180. Divisend membru cu membru pe antaia din relatiunile (7) cu a treia, pe a doua cu a patra, pe a patra cu a treia, si in fine pe a doua cu antaia, obtinem urmatorea seria de patru formule, descoperite de Napier, din cari fie care coprinde câte cinci elemente alle trianghiului:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}&=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}},\\
\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}&=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},\\
\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}&=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}},\\
\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}&=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

ESPRESSIUNI DIVERSE ALLE ESCESULUI SFERIC.

181. Suprafatia unui trianghiu sferic fiind ua functiune a escesului seu sferic, dupe cum vom vedé indata*, este important a avé mediuloce prin cari se putem determina direct acest esces sferic.

*219

178 Immultind membru cu membru equatiunile (6) cari dau pe $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ si $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ in functiune de anghiuri, avem:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^2\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin C\cos\frac{\varepsilon}{2}-\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos C},$$

si divisend sus si jos cu $\sin\frac{\varepsilon}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\frac{1}{\sin C\cot\frac{\varepsilon}{2}-\cos C},$$

de unde

$$\cot\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos C}{\sin C}, \qquad (9)$$

equatiune care dà espressiunea escesului sferic in functiune de doue laturi alle trianghiului si de anghiul coprins intre elle.

182. Din

$$A+B+C-180^0=\varepsilon$$

deducem:

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C-\varepsilon}{2}.$$

Punend acesta valore in prima din formulele lui Delambre, avem:

$$\frac{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

de aci, dupe proprietatile proportiilor,

$$\frac{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}+\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}},$$

46,47 seu

$$\frac{2\sin\frac{2C-\varepsilon}{4}\sin\frac{\varepsilon}{4}}{2\cos\frac{2C-\varepsilon}{4}\cos\frac{\varepsilon}{4}}=\frac{2\sin\frac{c-a+b}{4}\sin\frac{c+a-b}{4}}{2\cos\frac{c-a+b}{4}\cos\frac{c+a-b}{4}},$$

ori

$$\operatorname{tg}\frac{2C-\varepsilon}{4}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}. \qquad \text{(a)}$$

In a treia din formulele lui Delambre inlocuim assemenea pe $\frac{A+B}{2}$ prin $90^0-\frac{C-\varepsilon}{2}$, si avem:

$$\frac{\sin\frac{C-\varepsilon}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

de aci

$$\frac{\sin\frac{C-\varepsilon}{2}-\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C-\varepsilon}{2}+\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}},$$

seu:

$$\frac{2\sin\frac{\varepsilon}{4}\cos\frac{2C-\varepsilon}{4}}{2\sin\frac{2C-\varepsilon}{4}\cos\frac{\varepsilon}{4}}=\frac{2\sin\frac{a+b+c}{4}\sin\frac{a+b-c}{4}}{2\cos\frac{a+b+c}{4}\cos\frac{a+b-c}{4}},$$

din care

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}}{\operatorname{tg}\frac{2C-\varepsilon}{4}}=\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}. \qquad \text{(b)}$$

Immultind acesta equatiune cu (a),

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{4}=\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2},$$

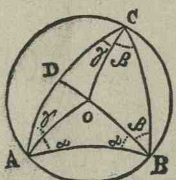
si estragund radecina patrata.

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

Acesta formula, descoperita de Simon Lhuillier din Geneva, dà escesul sferic in functiune de celle trei laturi alle trianghiului.

RADIA CERCULUI CIRCUMSCRIS.

183. Fie trianghiul sferic ABC; unim polul O al cercului circumscris cu verfurile trianghiului prin arce de cerc mare, si ducem inca arcul OD perpendicular pe laturea b.



Distantiele polare OA, OB, OC fiind egale, avem:

$$OAB=OBA,\ OBC=OCB,\ OCA=OAC.$$

Punem:

$$\alpha=OAB=OBA,\ \beta=OBC=OCB,\ \gamma=OCA=OAC.$$

Dupe figura,

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\gamma&=A,\\ \alpha+\beta&=B,\\ \beta+\gamma&=C.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

Adunand aceste egalitati si divisend cu 2, obtinem:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{A+B+C}{2}=\frac{180^0+\varepsilon}{2}=90^0+\frac{\varepsilon}{2}.\qquad\text{(b)}$$

Din acesta egalitate scadiend pe rand egalitatile (a),

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=90^0-\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right),\\ \beta&=90^0-\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right),\\ \gamma&=90^0-\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}\right\}\qquad\text{(c)}$$

Acum trianghiul dreptanghiu ADO dà, dupe a doua
164 din formulele (7) :

$$\mathrm{tg}AD=\mathrm{tg}AO\cos\gamma:$$

punend $AO=R$, radia cautata a cercului circumscris; substituind in loc de γ valorea sea data prin (c), si observand inca cà $AD=\frac{AC}{2}=\frac{b}{2}$, câci AOC este isoscel, avem:

$$\mathrm{tg}\frac{b}{2}=\mathrm{tg}R\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

seu

$$\mathrm{tg}R=\frac{\mathrm{tg}\frac{b}{2}}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)},\qquad (1)$$

formula care dà radia cercului circumscris in functiune de ua laturé ore-care, dé anghiul opus si de escesul sferic.

Deca in (1) inlocuim pe $\mathrm{tg}\frac{b}{2}$ prin valorea seă data de
168 equatiunile (6), avem:

$$\mathrm{tg}R=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^2\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

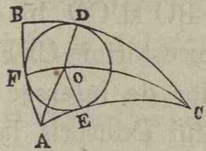
seu

$$\mathrm{tg}R=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},\qquad (2)$$

care dà radia cercului circumscris in functiune de anghiuri.

RADIA CERCULUI INSCRIS.

184. Fie O polul cercului inscris la trianghiul ABC. Arcurile de cerc mare AO, BO, CO, impart anghiurile A,B,C, in câte doue parti egale, si din egalitatea trianghiurilor BOF cu BOD, AOF cu AOE, COE cu COD, resulta:



$$BF=BD,\ AF=AE,\ CE=CD;$$

asia-dera

$$a+b+c=2BD+2DC+2AE,$$

seu

$$p=BD+DC+AE=a+AE,$$

de unde

$$AE=p-a.$$

Trianghiul dreptanghiu AOE dà, dupe a treia din formulele (7)* *164

$$\sin AE=\cot OAE \operatorname{tg} OE.$$

Insemnänd cu r arcul OE, radia cautata a cercului inscris, si punend in loc de AE si OAE valorile $p-a$ si $\frac{A}{2}$,

$$\sin(p-a)=\cot\frac{A}{2}\operatorname{tg}r,$$

seu

$$\operatorname{tg}r=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin(p-a).$$

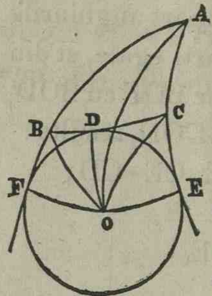
Substituind in locul lui $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ valorea sea data prin equatiunile (3)* si reducund, *177

$$\operatorname{tg}r=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}. \qquad (3)$$

Acesta equatiune dà radia cercului inscris la trianghiu in functiune de laturile lui.

RADIELE CERCURILOR EXINSCRISE.

185. Fia trianghiul ABC. Se scie cà pentru a construi cercul exinscris la ua lature orecare a, se duc arcurile BO si CO, bissectritie alle anghiurilor esteriore CBF si BCE, si punctul lor de intersectie O este polul cercului exinscris la laturea a. Radia acestui cerc se gasesce ducund arcele OF, OD, OE, respectiv perpendicularie pe celle trei laturi alle trianghiului.



Trianghiurile egale BDO si BFO dau:

$$BD=BF;$$

assemenea, DCO si CEO fiind egale, avem:

$$CD=CE;$$

prin urmare

$$AF=AB+BD,$$
$$AE=AC+CD,$$

si adunand,

$$AF+AE=AB+AC+BC=2p,$$

si fiind-cà AF=AE din egalitatea trianghiurilor AFO si AEO,

$$AF=p.$$

Trianghiul dreptanghiu AFO dà:

$$\sin AF=\cot FAO \operatorname{tg} FO;$$

punend in loc de AF valorea sea p, insemnand pe FO cu α, radia cercului exinscris la laturea a, si observand cà, din causa egalitatii trianghiurilor AFO si AEO anghiul $FAO=\frac{A}{2}$, avem:

$$\sin p = \cot\frac{A}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$

seu

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin p;$$

inlocuind pe $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ cu valorea sea data de equatiile (3)* *177

si facund reducerile,

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin(p-a)}}.$$

Assemenea vom afla si:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin(p-b)}}, \\ \operatorname{tg}\gamma &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin(p-c)}}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

CAPITULUL II.

Resolutiunea trianghiurilor sferice.

186. Mai nainte de a intra in resolutiunea trianghiurilor sferice, vom reaminti urmatorele doue teoreme, forte importante, din geometria.

Pentru ca cu trei laturi date se fie possibile a se construi un trianghiu sferic, este necessariu si de ajuns: 1^0 ca fie-care din laturile date se fie mai mica de cât suma cellor-alte doue; 2^0 ca suma cellor trei laturi se fie mai mica de cât ua circumferentia de cerc mare.

Pentru ca cu trei anghiuri date se fie possibile a se construi un trianghiu sferic, este necessariu si de ajuns: 1^0 ca suma anghiurilor date se fie mai mare de cât doue anghiuri drepte si mai mica de cât siesse; 2^0 cà cel mai mic dintre elle, marit cu doue anghiuri drepte, se devina mai mare de cât suma cellor-alte doue.

Trebue se observàm assemenea cà, deca un anghiu seu ua laturea trianghiului sferic sunt date prin cosinusul, tangenta seu cotangenta lor, elle sunt pe deplin determinate, câci valorea lor fiind coprinsa intre 0^0 si
155 180^0, semnul liniei lor trigonometrice ne va areta deca sunt mai mici seu mai mari de 90^0. Deca inse anghiul seu laturea sunt date prin sinusul lor, elle nu mai sunt

cu totul determinate, câci la ua aceeasi valore positiva a sinusului correspund doue arcuri, suplementarie unul altuia.

Pe de alta parte, deca un anghiu seu ua lature vor fi date prin un cosinus, ua tangenta seu ua cotangenta negativa, va trebui se luàm nu chiar anghiul seu laturea date de table, ci suplementul lor, câci numai arcurile coprinse intre 90^0 si 180^0 au acelle linii trigonometrice negative.

RESOLUTIUNEA TRIANGHIURILOR DREPTANGHIE.

187. Se scie cà un trianghiu sferic pote se aiba si doue anghiuri drepte, si chiar trei. Inse in casul cel d'antaiu se scie cà celle doue laturi cari sé opun la anghiurile drepte sunt fie-care de câte 90^0 era a treia lature este egale cu anghiul opus. In casul al doilea câte trelle laturile sunt de câte 90^0. Prin urmare, aceste doue casuri nedând loc la nici ua problema, ne vom ocupa numai de *resolutiunea trianghiurilor ce au numai un anghiu drept.*

Acesta resolutiune presenta siesse casuri: 1^0 cand se dau celle doue laturi alle anghiului drept; 2^0 ua lature a anghiului drept si hipotenusa; 3^0 ua lature a anghiului drept si anghiul oblic adjacent; 4^0 ua lature a anghiului drept si anghiul oblic opus; 5^0 hipotenusa si un anghiu oblic; 6^0 celle doue anghiuri oblice.

188. **Casul I.** *Dandu-se laturile* b *si* c, *se se resolve trianghiul.*

Se cere a, B, C.

Hipotenusa se va calcula prin formula (5):* *162

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Anghiurile B si C sunt date prin celle doue din urma
164 din formulele (7), din cari scotem:

$$\mathrm{tg}B=\frac{\mathrm{tg}b}{\sin c},\ \mathrm{tg}C=\frac{\mathrm{tg}c}{\sin b}.$$

Deca hipotenusa a nu este bine determinata prin cosinusul seu, vom calcula mai intaiu pe B, si apoi a va
164 fi dat prin a doua formula (7):

$$\mathrm{tg}a=\frac{\mathrm{tg}c}{\cos B}.$$

Trianghiul are tot-de-una ua solutiune.

189. **Casul II.** *Dandu-se hipotenusa* a *si laturea* b *se resolve trianghiul.*

162 Se cauta c, B, C. Le vom gasi prin (5), prima din
163 ***164 (6) si prima din (7)***, cari dau:

$$\cos c=\frac{\cos a}{\cos b},\ \sin B=\frac{\sin b}{\sin a},\ \cos C=\frac{\mathrm{tg}b}{\mathrm{tg}a}. \qquad \text{(a)}$$

Inse fiind-cà aceste formule dau elementele necunoscute prin sinusul seu cosinusul lor, cari nu le determina cu destula precisiune in unele casuri, este mai bine a intrebuintia formulele urmatore, gasite la 167, 169 si 170, cari ne dau acelle si elemente prin tangenta lor:

$$\mathrm{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\mathrm{tg}\frac{a+b}{2}\,\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}},$$

$$\mathrm{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\frac{a+b}{2}}{\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}}},$$

$$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}.$$

Aceste formule sunt si mai comode, câci nu cer de cât cautarea a patru logaritmi: $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$, $\sin(a-b)$, $\sin(a+b)$, pentru calculul câtor trelle elementele.

Pentru ca problema se fie possibile, formulele (a) ne areta cà trebue se avem:

$$\sin b < \sin a;$$

atunci vom avé assemenea:

$$\cos a < \cos b,\ \operatorname{tg} b < \operatorname{tg} a,$$

si vom avé pentru sin B, $\cos c$, cosC valori reale Insé pentru ca $\sin b$ se fie mai mic de cât $\sin a$, deca $a < 90^0$, trebue se avem: $b < a$, seu: $b > 180^0 - a$; era deca $a > 90^0$, $b > a$, seu: $b < 180^0 - a$. Canda$=90^0$, $\sin a = 1$, si in acest cas avem tot de-una: $\sin b < \sin a$. Deca aceste conditiuni sunt implinite, problema are ua singura solutiune, de si anghiul B este dat prin sinusul seu, câci formula

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$$

ne areta cà B si b sunt amendoi de o data inferiori seu superiori lui 90^0, câci sinB si $\sin b$ cresc si se micsioredia impreuna. Tot prin acesta observatie vom puté alege pe care din semnele + seu − trebue se luàm in formula care dà pé $\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{B}{2}\right)$ cand intrebuintiàm a doua sistema de formule.

190. **Casul III.** *Dandu-se laturea* b *si anghiul* C, *se se resolve trianghiul.*

Trebue se se gasesca, a, c, B. Pentru acesta intrebuintiàm a doua din formulele (8)*, prima si a patra din (7)**: *165 **164

$$\cos B = \cos b \sin C,\ \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C},\ \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C.$$

Deca anghiul B nu e bine determinat prin cosinusul seu, calculàm mai antaiu pe a seu c, si pe urma B va fi dat prin ver una din formulele urmatore :

$$\cot B = \cos a \operatorname{tg} C, \quad \cot B = \sin c \cot b.$$

Trianghiul are tot de-una ua singura solutiune.

191. **Casul IV.** *Se se resolve un trianghiu dreptanghiu cunoscund laturea* b *si anghiul opus* B.

Necunoscutele sunt a, c, C. Vom intrebuintia prima din formulele (6)*, a treia din (7)** si a doua din (8)*** : *163 **164 ***165

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}, \qquad \text{(a)}$$

seu mai bine formulele urmatore, aflate la 168, 171 si 174 :

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}},\\
\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{c}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},\\
\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{C}{2}\right) &= \pm\sqrt{\cot\frac{B+b}{2}\cot\frac{B-b}{2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

192. *Discutiune.* Ori-care din aceste doue sisteme de formule am intrebuintia, pentru fie care necunoscuta vom gasi câte doue valori suplementarie, câci primul sistem ne dà necunoscutele prin sinusurile lor*, era cel de al doilea coprinde radicale cu semnul duplu. Se vedem dera pe cari din valorile date de aceste equatiuni trebue se le luàm impreuna. *186

1^0. Deca b=B, prima sistema dà :

$$\sin a = \sin c = \sin C = 1,$$

si prin urmare

$$a = c = C = 90^0.$$

In acest cas dera trianghiul este bidreptanghiu.

2^0. Deca $b<90^0$, cos$b$, tg$b$ sunt positive; si fiind-cà c si C sunt mai mici de cât 180^0, adeca sin$c$ si sinC sunt positive, vedem, dupe formulele (a), cà si tgB si cosB sunt positive, adeca $B<90^0$. Pe lunga acestea, a celeasi formule ne areta cà $b<B$, câci alt-fel sin$a$, sin$c$, sinC n'ar avé valori reale. Se presupunem cà aceste conditiuni sunt implinite tote. Formula

$$\cos a=\cos b\cos c$$

ne areta cà, cos$b$ fiind positiv, cos$a$ si cos$c$ au tot-de una acellasiu semn, si prin urmare a si c sunt ameudoue de ua data mai mici de 90^0, seu de o-data mai mari de 90^0. Equatiunea

$$\operatorname{tg}c=\sin b\operatorname{tg}C$$

ne areta assemenea cà c si C sunt erasi amendoue mai mici seu amendoue mai mari de 90^0. Prin urmare, deca insemnàm cu a', c', C' valorile mai mici de 90^0 pe cari ni le dau tablele pentru a, c, C, solutiile problemei vor fi

$$a=a',\ c=c', C=C',$$

seu

$$a=180^0-a',\ c=180^0-c',\ C=180^0-C'.$$

3^0. Deca $b>90^0$, formulele (a) ne areta cà, pentru ca a, c, C se fie reale si mai mici de 180^0, trebue se avem inca $B>90^0$, si $b>B$. Deca aceste conditii vor fi implinite, in equatiunea

$$\cos a=\cos b\cos c$$

cos$b$ fiind negativ, trebue ca cos$a$ si cos$c$ se fie de semne contrarie, adeca a si c se fie unul superior si altul inferior lui 90^0. De alta parte formula

$$\operatorname{tg}c=\sin b\operatorname{tg}C,$$

in care sin$b$ este positiv, aceta cà tg$c$ si tgC sunt de acellasiu semn, si prin urmare c si C sunt in acellasiu timp inferiori seu in acellasiu timp superiori lui 180^0. Insemnand dera erasi cu a', c', C' valorile mai mici de 90^0 pe cari le dau tablele pentru a, c, C, solutiile problemei vor fi:

$$a=a',\ c=180^0-c',\ C=180^0-C',$$

seu

$$a=180^0-a',\ c=c',\ C=C'.$$

Tabelul urmator coprinde in resumat tote aceste discutiuni.

$b=B$. . . . . 1 solutiune (trianghiu bidreptanghiu);

$$b<90^0 \begin{cases} B \geqq 90^0 \ldots\ldots & 0 \text{ solutii;} \\ B<90^0, b>B \ldots & 0 \text{ solutii;} \\ B<90^0, b<D;\ 2 \text{ solutii} & \begin{cases} a=a', & a=180^0-a', \\ c=c', & c=180^0-c', \\ C=C', \text{si} & C=180^0-C'; \end{cases} \end{cases}$$

$$b>90^0 \begin{cases} B \leqq 90^0 \ldots\ldots & 0 \text{ solutii;} \\ B>90^0, b<B \ldots & 0 \text{ solutii;} \\ B>90^0, b>B,\ 2 \text{ solutii} & \begin{cases} a=a', & a=180^0-a', \\ c=180^0-c', & c=c', \\ C=180^0-C', & \text{si } C=C'. \end{cases} \end{cases}$$

193. **Casul V**. *Se dà hipotenusa* a *si anghiul oblic* B, *si se cere a se resolve trianghiul.*

163 Necunoscutele b, c, C le calculàm prin formulele (6),
**164
165 (7)** si (8):

$$\sin b=\sin a \sin B,\ \operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a \cos B,\ \operatorname{tg} C=\frac{\cot B}{\cos a}.$$

Deca laturea b nu este bine determinata prin sinusul seu, vom calcula mai antaiu pe c seu pe C, si apoi vom avé pe b prin

$$\operatorname{tg} b=\sin c \operatorname{tg} B,\ \operatorname{tg} b=\operatorname{tg} a \cos C.$$

Problema are tot-de-una ua solutiune unica.

194. **Casul VI.** *Dandu-se anghiurile oblice* B *si* C, *se se resolve trianghiul.*

Se cauta a,b,c, pré cari le putem avé prin formulele:

$$\cos a = \cot B \cot C,\ \cos b = \frac{\cos B}{\sin C},\ \cos c = \frac{\cos C}{\sin B},$$

seu mai bine prin celle urmatore, gasite la 172 și 173, cari dau laturile prin tangentele lor :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(180^0 - B - C)}{\cos(B-C)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2} + 45^0\right)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2} + 45^0\right)}.$$

Prima formula din a doua sistema ne arèta cà, pentru ca problema se fie possibile, trebue cà: 1^0 suma $B+C$ se fie mai mare de 90^0 si mai mica de 270^0; 2^0 differentia $B-C$ se fie mai mare de -90^0 si mai mica de $+90^0$. In aceste conditiuni, $\cos\{180^0-(B+C)\}$ si $\cos(B-C)$ au valori positive, si prin urmare vom obtine pentru $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ ua valore reale. Tot assèmenea valorile lui $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ vor fi reale. Problema are dera ua singura solutiune.

ESSEMPLE

Casul I.

Date.

$b = 69^0 34' 17'',3,$

$c = 104^0 10' 28'',2,$

Formule

$$\mathrm{tg}B=\frac{\mathrm{tg}b}{\sin c},$$

$$\mathrm{tg}C=\frac{\mathrm{tg}c}{\sin b},$$

$$\mathrm{tg}a=\frac{\mathrm{tg}c}{\cos B}.$$

Necunoscute.

$B=70^0 8'38'',92,$

$C=103^0 18'56'',87,$

$a=94^0 54'11'',23.$

Calculul lui B

$$\log\mathrm{tg}b=0,4289162$$
$$-\log\sin c=0,0134278$$
$$\log\mathrm{tg}B=0,4423440$$
$$B=70^0 8'38'',92$$

Calculul lui C.

$$\log\mathrm{tg}(180^0-c)=0,5976262$$
$$-\log\sin b=0,0282102$$
$$\log\mathrm{tg}(180^0-C)=0,6258364$$
$$C=103^0 18'56'',87.$$

Calculul lui a.

$$\log\mathrm{tg}(180^0-c)=0,5976262$$
$$-\log\cos B=0,4689620$$
$$\log\mathrm{tg}(180^0-a)=1,0665882$$
$$a=94^0 54'11',23.$$

Casul II.

Date.

$a=68^0 16'28'',4;$

$b=53^0 21'34'',6.$

Formule.

$$\mathrm{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\mathrm{tg}\frac{a+b}{2}\,\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}},$$

$$\mathrm{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\frac{a+b}{2}}{\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}}},$$

$$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}.$$

Necunoscute.

$c=51^0 39'56'',24;$

$B=59^0 44'25'',28;$

$C=57^0 36'20'',92;$

Calculul lui c.

$$\log\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=0,2529847$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\bar{1},1169312$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},3699159$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},6849580$$

$$c=51^{0}39'56'',24,$$

Calculul lui B.

$$\log\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=0,2529847$$

$$-\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=0,8830688$$

$$2\log\operatorname{tg}\left(45^{0}+\frac{B}{2}\right)=1,1360535$$

$$\log\operatorname{tg}\left(45^{0}+\frac{B}{2}\right)=0,5680268$$

$$45^{0}+\frac{B}{2}=74^{0}52'12'',64,$$

$$B=59^{0}44'25'',28.$$

Calculul lui C.

$$\log\sin(a-b)=\bar{1},4105830$$

$$-\log\sin(a+b)=0,0698591$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},4804421$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},7402211$$

$$C=57^{0}36'20'',92.$$

Casul III.

Date.	*Formule.*	*Necunoscute.*
$b=65^{0}10'29''.3$;	$\cos B=\cos b\sin C$,	$B=73^{0}28'46'',79$,
$C=42^{0}37'52'',5$.	$\operatorname{tg} a=\frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}$,	$a=71^{0}12'14'',99$,
	$\operatorname{tg} c=\sin b\operatorname{tg} C$.	$c=39^{0}52'42'',12$.

Calculul lui B.

$\log\cos b = \bar{1},6230954$
$\log\sin C = \bar{1},8307665$
$\log\cos B = \bar{1},4538619$
$B = 73^0 28' 46'',79$

Calculul lui a.

$\log\mathrm{tg}\, b = 0,3347957$
$-\log\cos C = 0,1332828$
$\log\mathrm{tg}\, a = 0,4680785$
$a = 71^0 12' 14'',99.$

Calculul lui c.

$\log\sin b = \bar{1},9578911$
$\log\mathrm{tg}\, C = \bar{1},9640494$
$\log\mathrm{tg}\, c = \bar{1},9219405$
$c = 39^0 52' 42'',12.$

Casul IV.

Date.

$b = 56^0 38' 13'',2;$
$B = 74^0 50' 24'',4.$

Formule.

$$\mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\frac{B+b}{2}}{\mathrm{tg}\frac{B-b}{2}}},$$

$$\mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},$$

$$\mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{C}{2}\right) = \pm\sqrt{\cot\frac{B+b}{2}\cot\frac{B-b}{2}}.$$

Necunoscute.

1ª solutia	2ª solutia.
$a' = 59^0 55' 7'',84.$	$a'' = 120^0 4' 52'',16;$
$c' = 24^0 17' 53'',06,$	$c'' = 155^0 42' 6'',94;$
$C' = 28^0 23' 37'',90;$	$C'' = 151^0 36' 22'',10.$

Calculul lui a.

$$\log\text{tg}\frac{B+b}{2}=0,3461053$$

$$-\log\text{tg}\frac{B-b}{2}=0,7953323$$

$$2\log\text{tg}\left(45^0+\frac{a}{2}\right)=1,1414376$$

$$\log\text{tg}\left(45^0+\frac{a}{2}\right)=0,5707188$$

$$45^0+\frac{a}{2}=74^057'33'',92.$$

$$a'=59^055'7'',84;\ a''=120^04'52'',16$$

Calculul lui c.

$$\log\sin(B+b)=\overline{1},8746096$$

$$-\log\sin(B-b)=0,5053077$$

$$2\log\text{tg}\left(45^0+\frac{c}{2}\right)=0,3799173$$

$$\log\text{tg}\left(45^0+\frac{c}{2}\right)=0,1899587$$

$$45^0+\frac{c}{2}=57^08'56'',53.$$

$$c'=24^017'53'',06;\ c''=155^042'6'',94.$$

Calculul lui C.

$$\log\cot\frac{B+b}{2}=\overline{1},6538947$$

$$\log\cot\frac{B-b}{2}=0,7953323$$

$$2\log\text{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=0,4492270$$

$$\log \operatorname{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=0,2246135$$

$$45^0+\frac{C}{2}=59^0 11' 48'',95.$$

$$C'=28^0 23' 37'',90;\ C''=151^0 36' 22'',10.$$

Casul V.

Date	*Formule.*	*Necunoscute.*
$a=108^0 37' 12'',4;$	$\sin b=\sin a \sin B,$	$b=46^0 8' 40'',54;$
$B=49^0 32' 43'',3.$	$\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a \cos B,$	$c=62^0 33' 30'',15;$
	$\operatorname{tg} C=\dfrac{\cot B}{\cos a}.$	$C=69^0 28' 19'',03.$

Calculul lui b.

$$\log \sin a=\bar{1},9766509$$
$$\log \sin B=\bar{1},8813389$$
$$\log \sin b=\bar{1},8579898$$
$$b=46^0 8' 40'',54.$$

Calculul lui c.

$$\log \operatorname{tg} a=0,4724629$$
$$\log \cos B=\bar{1},8121415$$
$$\log \operatorname{tg} c=0,2846044$$
$$c=62^0 33' 30'',15.$$

Calculul lui C.

$$\log \cot B=\bar{1},9308026$$
$$-\log \cos a=0,4958120$$
$$\log \operatorname{tg} C=0,4266146$$
$$C=69^0 28' 19'',03.$$

Casul VI.

Date.

$B=69^0 25' 13'',4;$

$C=41^0 48' 37'',8.$

Formule.

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(180^0-B-C)}{\cos(B-C)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-45^0\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}+45^0\right)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B\cdot C}{2}-45^0\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2}+45^0\right)}$$

Necunoscute.

$a=65^0 10' 44'',42;$

$b=58^0 10' 45'',96;$

$c=37^0 14' 5'',76.$

Calculul lui a.

$$\log\cos(180^0-B-C)=\bar{1},5588611$$

$$-\log\cos(B-C)=0,0525057$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\bar{1},6113668$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\bar{1},8056834$$

$$a=65^0 10' 44'',42.$$

Calculul lui b.

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-45^0\right)=\bar{1},2728250$$

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}+45^0\right)=0,2178833$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\bar{1},4907083$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\bar{1},7453542$$

$$b+58^0 10' 45'',96.$$

Calculul lui c.

$$\log \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-45^0\right)=\bar{1},2728250$$

$$\log \operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2}+45^0\right)=\bar{1},7821168$$

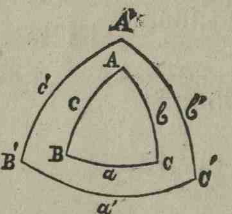
$$2 \log \operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},0549418$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},5274709$$

$$c=37^0 14' 5'',76.$$

RESOLUTIUNEA TRIANGHIURILOR RECTILATERALI

195. Resolutiunea unui trianghiu rectilateral se pote reduce la resolutiunea unui trianghiu dreptanghiu. In adever, deca consideràm trianghiul polar A'B'C' al trianghiului rectilateral dat ABC, anghiul A' al trianghiului polar va fi egal cu $180^0 - a = 90^0$; prin urmare trianghiul A'B'C' este dreptanghiu, si l putem resolve. Cunoscund elementele lui A'B'C', vom cunosce si pe alle lui ABC, cari sunt suplementare cu ale cellui d'antaiu.



Trianghiurile rectilaterali inse se pot resolve si di-
175 rect prin formulele ce am dat si pre cari le putem transforma in acellasiu mod cà si pre celle relative la
167—174 trianghiurile dreptanghie.

Celle siesse casuri ce se pot presinta la resolutiunea trianghiurilor rectilaterali sunt : 1° Când se dau anghiurile B si C ; 2° anghiurile A si B ; 3° anghiul B si laturea adjacenta c ; 4° anghiul B si laturea opusa b ; 5° anghiul A si laturea b ; 6° laturile b si c.

196. **Casul I.** *Dandu-se anghiurile* B *si* C *alle unui trianghiu rectilateral, se se resolve trianghiul.*

Acest cas se pote reduce la casul I al resolutiunei trianghiurilor dreptanghie; se pote inse resolve si direct prin formulele* : *175

$$\cos A = -\cos B \cos C,\ \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} B}{\sin C},\ \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} C}{\sin B},$$

seu calculàm mai antaiu laturea *b* seu *c*, si pe urma anghiul A prin ver-una din formulele

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{tg} C}{\cos b},\ \operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{tg} B}{\cos c}.$$

Essemplu. Date : $B=64^0 38' 4',2$; $C=52^0 12' 29'',3$.

Necunoscute : $A=115^0 12' 50'',17$; $b=69^0 27' 41'',23$; $c=54^0 58' 52'',38$.

197. **Casul II.** *Dandu-se anghiurile* A *si* B *alle unui trianghiu rectilateral, se se resolve trianghiul.*

Acest cas, care se pote reduce la casul II al resolutiunei trianghiurilor dreptanghie, se pote resolve si direct prin formulele urmatore :

$$\cos C = -\frac{\cos A}{\cos B},\ \sin b = \frac{\sin B}{\sin A},\ \cos c = -\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A},$$

cari se pot pune sub forma

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\cot\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{b}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}}.$$

Essemplu. Date : $A=72^0 28'15''.0$; $B=59^0 13'24'',6$.

Necunoscute : $C=126^0 35'19'',8$; $c=122^0 1'45'',3$; $b=64^0 17'24'',4$.

198. **Casul III.** *Dandu-se anghiul* B *si laturea adjacenta* c, *se se resolve trianghiul.*

Seu reducem problema la casul III al resolutiunei trianghiurilor dreptanghie, seu intrebuintiàm formulele:

$$\cos b=\cos B\sin c,\ \operatorname{tg}A=\frac{\operatorname{tg}B}{\cos c},\ \operatorname{tg}C=\sin B\operatorname{tg}c.$$

Deca voim se determinàm pe b prin tangenta sea, calculàm mai antaiu pe A seu C, si apoi pe b prin una din relatiunele :

$$\cot b=-\cos A\operatorname{tg}c,\ \cot b=\sin C\cot B.$$

Essemplu. Date : $B=43^0 38'12'',4$; $c=58^0 14'8'',3$.

Necunoscute : $b=37^0 58'33'',03$; $A=118^0 54'9'',98$; $C=48^0 6'1'',93$.

199. **Casul IV.** *Dandu-se anghiul* B *si laturea opusa* b, *se se resolve trianghiul.*

Acest se pote reduce la casul IV al resolutiunei trianghiurilor dreptanghie; inse se pote resolve si prin formulele :

$$\sin A=\frac{\sin B}{\sin b},\ \sin C=\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}b},\ \sin c=\frac{\cos b}{\cos B},$$

cari se pot transforma in :

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{b+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b-A}{2}}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\sin(b+B)}{\sin(b-B)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{c}{2}\right)=\pm\sqrt{\cot\frac{b-B}{2}\cot\frac{b+B}{2}}.$$

Problema pote se aiba doue solutiuni, ua solutiune seu nici una; solutiile se pot alege prin nisce consideratiuni analoge cu celle de la § 192.

Essemplu. Date: $B=53^0 18' 38'',0$; $b=74^0 15' 28'',8$.

Necunoscute. Prima solutie: $A'=123^0 34' 40'',65$; $C'=22^0 13' 45'',59$; $c'=27^0 0' 22'',08$.

A doua solutie: $A''=56^0 25' 19'',35$; $C''=157^0 46' 14'',41$· $c''=152^0 59' 37'',92$.

200. **Casul V.** *Dandu-se anghiul* A *si laturea* b, *se resolve trianghiul.*

Putem aplica resolutiunea casului V de la trianghiu rile dreptanghie, seu formulele:

$$\sin B=\sin A\sin b,\ \operatorname{tg}C=-\operatorname{tg}A\cos b,\ \operatorname{tg}c=-\frac{\cot b}{\cos A},$$

si deca voim se avem pe B prin tangenta sea, calculand mai antaiu pe C seu c, vom avé:

$$\operatorname{tg}B=\sin C\operatorname{tg}b,\ \text{seu}:\ \operatorname{tg}B=-\operatorname{tg}A\cos c.$$

Essemplu. Date: $A=96^0 15' 32'',7$; $b=80^0 3' 17'',5$.

Necunoscute: $B=78^0 15' 57''.72$; $C=57^0 34' 55'',09$; $c=58^0 7' 37'',54$.

201. **Casul VI.** *Dandu-se laturile* b *si* c, *se se resolve trianghiul.*

Problema se pote reduce la casul VI al resolutiunei trianghiurilor dreptanghie, seu se pote resolve dedreptul prin:

$$\cos A=-\cot b\cos c,\ \cos B=\frac{\cos b}{\sin c},\ \cos C=\frac{\cos c}{\sin b},$$

cari se pot transforma in:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\cos(b-c)}{\cos(180^0-b-c)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(-45^0+\frac{b+c}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{b-c}{2}\right)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(-45^0+\frac{b+c}{2}\right)\operatorname{tg}\left(-45^0-\frac{b-c}{2}\right)}.$$

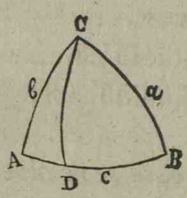
Essemplu. Date: $b=78^0 13' 26'',4$; $c=63^0 29' 53'',8$.

Necunoscute: $A=95^0 57' 59'',8$; $B=76^0 49' 3'',88$; $C=63^0 33' 0'',38$.

OBSERVARE.

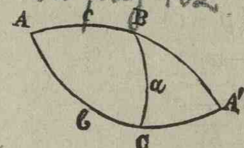
202. Nu numai resolutiunea trianghiurilor rectilaterali se pote reduce la resolutiunea trianghiurilor dreptanghie, ci, in unele casuri particulari, se pote face assemenea si pentru un trianghiu ore-care.

1^0. Deca trianghiul are doue laturi egale, a si b, seu doue anghiuri egale, A si B, el este isoscel; prin urmare, ducund arcul CD perpendicular pe base, vom imparti trianghiul dat in doue trianghiuri dreptanghie egali, si in fie-care din acestea vom cunosce, afora de anghiul drept, ua lature seu un anghiu dat, si ver-un alt element, tot dat; resolvend unul din aceste trianghiuri dreptanghie, vom cunosce si elementele trianghiului dat.



2^0. Deca printre elementele date se afla doue laturi, a si b, seu doue anghiuri, A si B, suplementare, prelungind laturile a si c pene la intalnirea lor in B', vom

la pag 182



forma un al doilea trianghiu, AB′C, care este isoscel; câci deca $a+b=180^0$, avem assemenea: $a+$CB′$=180^0$; deci $b=c$B′; era deca A+B$=180^0$, avem: B′=B, si B′AC+A$=180^0$; deci B′=B′AC. Vom resolve dera trianghiul B′CA desfacundul in doua trianghiuri dreptanghie egale, precum am dis mai sus, si din elementele lui vom deduce pe alle trianghiului dat.

RESOLUTIUNEA TRIANGHIURILOR ORI-CARI.

203. Resolutiunea trlanghiurilor sferice ore-cari presenta siesse casuri: 1^0 Cand se dau celle trei laturi; 2^0 celle trei anghiuri; 3^0 doue laturi si anghiul coprins intre elle; 4^0 doue anghiuri si laturea coprinsa intre elle; 5^0 doue laturi si anghiul opus la una din elle; 6^0 doue anghiuri si laturea opusa la una din elle.

Aceste siesse casuri se pot reduce la trei prin consideratiunea trianghiului polar. In adever, avend, spre essemplu, a resolve trianghiul ABC in care sunt cunoscute laturile a si b si anghiul coprins C, in trianghiul polar A′B′C′ vom cunosce: A′$=180^0-a$, B′$=180^0-b$, $c'=180^0-$C, adeca doue anghiuri si laturea coprinsa intre elle. Calculand elementele c, A, B alle lui ABC, vom cunosce si elementele C′$=180^0-c$, $a'=180^0-$A, $b'=180^0-$B alle lui A′B′C′. Vedem dera cà casul III si IV se pot resolve unul prin altul. Assemenea este si pentru casul I cu II, pentru V cu VI.

204 **Casul I**. *Dandu-se laturile* a, b, c, *se se resolve trianghiul.*

Anghiurile A,B,C se calculedia prin formulele (1),(2) seu (3)*; se prefera inse celle din urma:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}},$$

in cari $p=\frac{a+b+c}{2}$.

182 Escesul sferic se pote calcula direct prin formula:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

186 Pentru ca problema se aiba ua solutiune, trebue: 1^0 ca suma laturilor se fie mai mica de cât 360^0; 2^0 ca fie-care lature se fie mai mica dé cât suma cellor alte doue. Deca prima conditiune n'ar fi implinita, $\sin p$ ar fi negativ; deca cea de a doua n'ar fi implinita, si am avé, spre essemplu, $a>b+c$, $\sin(p-a)$ ar fi negativ, era $\sin p$, $\sin(p-b)$, $\sin(p-c)$ ar fi positive. In ambele casuri radicalele coprindiend quantitati negative, am avé pentru $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, nisce valori imaginarie.

205. **Casul II.** *Dandu se anghiurile* A,B,C, *se se resolve trianghiul.*

178 Laturile se pot calcula prin formulele (4), (5) seu (6); se intrebuintiedia inse de preferintia formulele (6) cari dau laturile prin tangentele lor:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.$$

Problema are ua solutiune unica deca: 1^0 jumetatea escesului sferic ε este coprinsa intre 0^0 si 180^0; 2^0 deca fie-care anghiu este mai mare de cât jumetatea escesului sferic. Deca una din aceste conditii n'ar fi implinita, am obtine pentru $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ valori imaginarie.

206. **Casul III.** *Dandu-se laturile* a *si* b *si anghiul coprins* C, *se se resolve trianghiul.*

Trianghiul este tot-de-una possibile. Anghiurile A si B se pot determina prin antaia si a doua din analogiele lui Napier*. *180

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

cari dau suma si diferentia lui A si B, din cunoscintia carora vom puté deduce chiar pe A si B. Laturea c se va calcula pe urma prin ver-una din celle-alte doue analogii:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\operatorname{tg}\frac{a+b}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

207. De multe ori este necesitate a se calcula direct
158 laturea c; atunci intrebuintiàm formulele (1), cari dau:

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

61, ess. I. Acesta formula, facuta calculabile prin logaritmi, devine:

$$\cos c=\frac{\cos b\cos(a-\varphi)}{\cos\varphi},$$

in care

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}b\cos C.$$

Anghiul B inca se pote calcula direct cu ajutorul an-
161 ghiului aussiliar φ; in adever, a patra din relatiunile (3):

$$\cot b\sin a=\cos a\cos C+\sin C\cot B,$$

dà:

$$\sin C\cot B=\cot b\sin a-\cos a\cos C=\cot b\left(\sin a-\frac{\cos a\cos C}{\cot b}\right)$$

$$=\cot b(\sin a-\cos a\operatorname{tg}b\cos C),$$

si punand erasi: $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}b\cos C$,

$$\sin C\cot B=\cot b(\sin a-\cos a\operatorname{tg}\varphi)=\cot b\frac{\sin a\cos\varphi-\cos a\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$=\frac{\cot b\sin(a-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Inse din:

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}b\cos C,$$

avem:

$$\cot b = \frac{\cos C}{\mathrm{tg}\varphi},$$

si acesta valore, pusa in equatia din urma, dà:

$$\sin C\cot B = \frac{\cos C\sin(a-\varphi)}{\cos\varphi\,\mathrm{tg}\varphi} = \frac{\cos C\sin(a-\varphi)}{\sin\varphi},$$

seu in fine,

$$\cot B = \frac{\cot C\sin(a-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

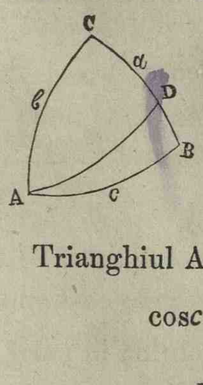
Tot assemenea, prima din formulele (3)* devinė: *161

$$\cot A = \frac{\cot C\sin(b-\psi)}{\sin\psi},$$

punend:

$$\mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}a\cos C.$$

208. Intrebuintiarea anghiurilor aussiliare φ si ψ face tot una ca si cand am descompune trianghiul dat in doue trianghiuri dreptanghie. In adever, ducund AD perpendicular pe CB, trianghiul dreptanghiu ACD dà:* *164,(7)



$$\mathrm{tg}CD = \mathrm{tg}b\cos C = \mathrm{tg}\varphi,$$

seu

$$CD = \varphi.$$

Avem dera din acellasiu trianghiu:

$$\cos AD = \frac{\cos b}{\cos\varphi},\ \mathrm{tg}AD = \frac{\sin\varphi}{\cot C}.$$

Trianghiul ADB, in care $DB = a - CD = a - \varphi$, dà:

$$\cos c = \cos AD\cos DB = \frac{\cos b\cos(a-\varphi)}{\cos\varphi},$$

$$\cot B = \frac{\sin DB}{\mathrm{tg}AD} = \frac{\cot C\sin(a-\varphi)}{\sin\varphi},$$

cari sunt tocmai formulele gasite mai sus. Tot assemenea vom gasi si formula care dà pe A, lasand un arc perpendicular din B pe AC.

209. **Casul IV.** *Dandu-se doue anghiuri* A *si* B *si laturea coprinsa* c, *se se resolve trianghiul.*

Problema are tot de-una ua solutiune unica. Laturile a si b se calculedia prin celle doue din urma din
180 analogiele lui Napier:

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Anghiul C se va calcula in urma prin ver-una din celle alte doue analogii:

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2},\quad \cot\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

210. Pentru a obtine direct anghiul C, intrebuintiàm
161 pe a treia din formulele (4):

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c$$
$$=\cos B(-\cos A+\sin A\operatorname{tg}B\cos c),$$

si punend

$$\cot\varphi=\operatorname{tg}B\cos c,$$

acesta equatiune devine:

$$\cos C=\frac{\cos B\sin(A-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Laturile a si b pot assemenea se se obtina in parte
160 prin urmatorele din formulele (3):

$$\left.\begin{array}{l}\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A \\ \cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B\end{array}\right\} \qquad (a)$$

Pe a doua o transformàm in modul urmator:

$$\cot b \sin c = \cot B\left(\frac{\cos c \cos A}{\cot B} + \sin A\right)$$
$$= \cot B(\cos A \cos c \operatorname{tg} B + \sin A),$$

si punend erasi:

$$\cot\varphi = \operatorname{tg} B \cos c, \qquad (b)$$

avem:

$$\cot b \sin c = \cot B(\cot\varphi \cos A + \sin A) = \cot B \frac{\cos(A-\varphi)}{\sin\varphi},$$

si fiind-cà, dupe (*b*),

$$\cot B = \frac{\cos c}{\cot\varphi} = \cos c \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\cot b = \frac{\cos c \sin\varphi \sin(A-\varphi)}{\sin c \sin\varphi \cos\varphi} = \frac{\cot c \cos(A-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Prima din formulele (*a*) se transforma in acellasiu mod punend

$$\cot\psi = \operatorname{tg} A \cos c,$$

si devine:

$$\cot a = \frac{\cot c \cos(B-\psi)}{\cos\psi}.$$

211. Acesta a doua metoda de resolutiune sė pote interpreta erasi prin descompunerea trianghiului dat in doue trianghiuri dreptanghie; in adever, ducund arcul AD perpendicular pe BC, trianghiul dreptanghiu BAD dà*:

*165,(8)

$$\cot BAD = \cos c \operatorname{tg} B = \cot\varphi,$$

seu

$$BAD = \varphi.$$

Apoi, din acellasiu trianghiu, avem:

$$\cos AD = \frac{\cos B}{\sin BAD} = \frac{\cos B}{\sin\varphi}, \quad \operatorname{tg} AD = \frac{\cos BAD}{\cot c} = \frac{\cos\varphi}{\cot c}.$$

Trianghiul DAC, in care CAD$=$A$-\varphi$, dà:

$$\cos C = \cos AD \sin CAD = \frac{\cos B \sin(A-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

$$\cot b = \frac{\cos CAD}{tg AD} = \frac{\cot c \cos(A-\varphi)}{\cos\varphi},$$

Am puté assemenea obtine pe a ducund din B un arc perpendicular pe AC.

212. **Casul V.** *Dandu-se doue laturi,* a *si* b, *si anghiul* A *opus la* a, *se se resolve trianghiul.*

Vom calcula mai antaiu anghiul B prin formula

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a},$$

care dà anghiul B prin sinusul seu; asia-dera vom avé pentru B doue valori, suplementarie una alteia.

Celle-alte doue necunoscute, C si c, se vor calcula

180 apoi prin analogiile lui Napier :

$$tg\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}\cot\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}\cot\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

$$tg\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}tg\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}tg\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Fiind-cà am gasit pentru B doue valori, aceste formule ne vor da erasi pentru $\frac{C}{2}$ si $\frac{c}{2}$ câte doue valori. Inse, fiind-cà nu admitem de cât valorile lui $\frac{C}{2}$ si $\frac{c}{2}$

155 coprinse intre 0^0 si 90^{0}, vom introduce in formulele de sus numai acelle valori alle lui B cari vor face pe

$\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ si $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ positive. Pentru acesta trebue ca diferentiele $a-b$ si A—B se fie de acellasiu semn; vom lua dera numai acelle valori alle luĭ B cari vor face differentiele $a-b$ si A—B de acellasiu semn.

213. Elementele c si C se pot calcula si de dreptul prin formulele :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

Prima din aceste formule devine :

$$\cos a = \cos b(\cos c + \operatorname{tg} b \sin c \cot A),$$

si punend

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos A,$$

$$\cos a = \cos b(\cos c + \sin c \operatorname{tg}\varphi) = \cos b \frac{\cos(c-\varphi)}{\cos\varphi},$$

de unde

$$\cos(c-\varphi) = \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b}. \qquad \text{(a)}$$

Din a doua formula scotem :

$$\cot a \sin b = \cot A \cos C(\cos b \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C),$$

si punend

$$\cot\psi = \cos b \operatorname{tg} A,$$

de unde

$$\cot A = \frac{\cos b}{\cot\psi},$$

avem :

$$\cot a \sin b = \frac{\cos b \cos C}{\cot\psi} \frac{\cos(C-\psi)}{\sin\psi \cos C} = \frac{\cos(C-\psi)\cos b}{\cos\psi},$$

de unde

$$\cos(C-\psi) = \cot a \cos\psi \operatorname{tg} b. \qquad \text{(b)}$$

In formulele (a) si (b) anghiurile φ si ψ fiind mai mici

16

de 90^0, $\cos\varphi$ si $\cos\psi$ sunt positive; prin urmare $\cos(c-\varphi)$ va fi positiv deca $\cos a$ si $\cos b$ vor fi de acellasiu semn, si negativ deca $\cos a$ si $\cos b$ vor fi de semne contrarie. Assemenea, $\cos(C-\psi)$ va fi positiv deca $\cot a$ si $tg b$ vor fi de acellasiu semn, si negativ in casul contrariu. Din acestea resulta cà $c>\varphi$ si $C>\psi$ deca a si b sunt de o data mai mari seu mai mici de 90^0; si $c<\varphi$ si $C<\psi$, deca a si b sunt unul mai mare si altul mai mic de 90^0.

214. *Discutiune.* Formulele ce am dat pentru resotiunea casului V ne pot areta imediat, chiar prin date, deca problema are ua solutiune, doue seu nici una, si ne dau si valorile acestor solutiuni. Cu tote acestea este utile a studia mai de aprope diferitele circumstantie alle problemei.

Formulele intrebuintiate sunt:

$$\sin B=\frac{\sin b\sin A}{\sin a}, \tag{a}$$

$$tg\frac{C}{2}=\frac{\cot\frac{A+B}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}=\frac{\cot\frac{A-B}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}, \tag{b}$$

$$tg\frac{c}{2}=\frac{tg\frac{a+b}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{tg\frac{a-b}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}. \tag{c}$$

Deca $a=b$, formula (a) ne areta cà si $A=B$; atunci primele din formulele (b) si (c) ne dau:

$$\cot\frac{C}{2}=tg A\cos a,\quad tg\frac{c}{2}=tg a\cos A.$$

Pentru ca se avem pentru $\frac{C}{2}$ si $\frac{c}{2}$ valori intre 0^0 si

90^0, trebue ca tg$A$ si cos$a$, tg$a$ si cos$A$ se fie de acellasiu semn, si pentru acesta trebue ca a si A se fie amendoi de odata inferiori seu superiori lui 90^0. Deca acesta conditie e implinita, problema are ua solutiune unica.

Se trecem la casul general. Pentru ca se avem ua solutiune a problemei, trebue ca $\frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ se fie coprins intre 0 si $+1$; atunci vom avé pentru B doue valori, M si M', suplementarie una alteia ($M+M'=180^0$, si deca $M<90^0$ $M<M'$). Inse am vediut* cà pentru ca aceste valori se fie solutiuni reale ale problemei, trebue ca se fie ast fel incât se faca diferentiele $A-B$ si $a-b$ de acellasiu semn. Va trebui dera se avem $A-M$ de acellasiu semn cu $a-b$, si $A-M'$ de acellasiu semn cu $a-b$. *212

1^0. Fie $A<90^0$ si $b<90^0$.

Deca $a<b$, $\frac{\sin b}{\sin a}>1$, si formula (a) ne areta cà $\sin B>\sin A$, adeca $B>A$; si prin urmare punend in loc de B solutiunile selle, $M>A$ si $M'>A$; avem dera doue solutiuni, câci atât diferentiele $A-M$ si $A-M'$, cât si diferentia $a-b$, sunt negative.

Deca $a>b$ si $a+b<180^0$, avem: $b<180^0-a$ si $\sin b<\sin a$; formula (a) ne areta atunci cà $\sin B<\sin A$; prin urmare $M<A$. Inse M' fiind mai mare de 90^0 si si $A<90^0$, avem. $M'>A$. Diferentia $A-M$ este dera positiva, ca si $a-b$, pe cand $A-M'$ este negativa; asiadera n'avem de cât ua singura solutiune, care este M.

Deca $a>b$ si $a+b=180^0$, avem: $b=180^0-a$, $\sin b=\sin a$; formula (a) areta atunci cà $\sin B=\sin A$, seu $B=A$; deci, $M=A$, era $M'>A$, câci am presupus cà $M'>M$. Asia-dera diferentia $A-M$ se reduce la zero si $A-M'$ este negativa, pe cand $a-b$ este positiva; deci problema n'are nici ua solutiune.

Deca $a>b$ si $a+b>180^0$, $b>180^0-a$ si $\sin b>\sin a$; atunci, dupe (a), $\sin B>\sin A$; ar trebui dera se avem: $M>A$ si $M'>A$; inse, deca ar fi ast-fel, diferentiele $A-M$ si $A-M'$ ar fi negative, pe cand $a-b$ este positiva; asia dera ambele aceste solutiuni trebue lasate la ua parte.

2°. Fie $A<90^0$ si $b=90^0$.

In acest cas formula (a) devine: $\sin B=\dfrac{\sin A}{\sin a}$; deca $a<b$, $\sin a<1$, si prin urmare $\sin B>\sin A$, $M>A$, si *a fortiori* $M'>A$. Asia-dera diferentiele $a-b$ si $A-M$, precum si $a-b$ cu $A-M'$, sunt impreuna negative; problema are dera doue solutiuni.

Deca $a>b$, diferentia $a-b$ este positiva, pe cand $A-M$ si $A-M'$ sunt negative, si nu avem nici o solutiune.

Deca $a=b$, diferentiele $a-b$ si $A-M$ se reduc la zero, era $A-M'$ este negativa; deci erasi nu avem nici ua solutiune.

3°. Fie $A<90^0$ si $b>90^0$.

Deca $a<b$ si $a+b<180^0$, $b<180^0-a$ si $\sin b>\sin a$ (câci in al doilea cadran sinusurile sunt cu atât mai mici cu cât sunt arcele mai mari). Formula (a) ne areta atunci cà $\sin B>\sin A$, $M>A$, si *a fortiori* $M'>A$. Diferentiele $A-M$ si $A-M'$ sunt dera negative, ca si $a-b$: avem doue solutiuni.

Deca $a<b$ si $a+b=180^0$, avem: $b=180^0-a$, $\sin b=\sin a$; atunci $M=A$ si $M'>A$; numai a doua solutiune convine problemei, câci diferentiele $A-M'$ si $a-b$ sunt amendoue negative, pe cand $A-M=0$.

Deca $a<b$ si $a+b>180^0$, $b>180^0-a$ si $\sin b<\sin a$; atunci $\sin B<\sin A$ si $M<A$; inse $M'>A$, câci $A<90^0$, era $M'>90^0$. A doua valore convine problemei, era cea d'antaiu trebue lasata la ua parte.

Deca $a>b$, $\sin a<\sin b$, câci a si b sunt in cadranul al doilea. Formula (a) ne dà atunci: $\sin B>\sin A$, $M>A$ si $M'>A$. Diferentiele $A-M$ si $A-M'$ fiind negative, pe cand $a-b$ este positiv, nu avem nici ua solutiune.

Deca $a=b$, avem inca: $\sin B=\sin A$, $M=A$ si $M'>A$. Diferentiele $A-M$ si $a-b$ se reduc la zero, pe cand $A-M'$ este negativa: nu este nici ua solutiune.

Discutiunea hipoteselor $A=90^0$ si $A>90^0$ se face cu totul in acellasiu mod, si de acea nu vom insista asupra ei; ne multiamim numai a insera resultatele in urmatorul tabel:

$A<90^0$	$b<90^0$	$a<b$	2 solutiuni;
		$a=b$	1 solutiune;
		$a>b$, $a+b<180^0$	1 solutiune;
		$a<b$, $a+b=$seu$>180^0$.	0 solutiuni;
	$b=90^0$	$a<b$	2 solutiuni;
		$a=$seu$>b$	0 solutiuni;
	$b>90^0$	$a<b$, $a+b<180^0$	2 solutiuni;
		$a<b$, $a+b=$seu$>180^0$.	1 solutiune;
		$a=$seu$>b$	0 solutiuni;
$A=90^0$	$b<90^0$	$a=$seu$<b$	0 solutiuni;
		$a>b$, $a+b<180^0$	1 solutiune;
		$a>b$, $a+b=$seu$>180^0$.	0 solutiuni;
	$b=90^0$	$a=b$ . . . . ua infinitate de solutiuni;	
		$a<$seu$>b$	0 solutiuni;
	$b>90^0$	$a<b$, $a+b=$seu$<180^0$. .	0 solutiuni;
		$a<b$, $a+b>180^0$	1 solutiune;
		$a=$seu$>b$	0 solutiuni;

$$
A>90^0 \begin{cases}
b<90^0 \begin{cases} a = \text{seu} < b \ldots\ldots\ldots & 0 \text{ solutiuni;} \\ a>b,\ a+b=\text{seu}<180^0 \ldots & 1 \text{ solutiune;} \\ a>b,\ a+b>180^0 \ldots\ldots & 2 \text{ solutiuni;} \end{cases} \\
b=90^0 \begin{cases} a = \text{seu} < b \ldots\ldots\ldots & 0 \text{ solutiuni;} \\ a>b \ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \text{ solutiuni;} \end{cases} \\
b>90^0 \begin{cases} a<b,\ a+b=\text{seu}<180^0 \ldots & 0 \text{ solutiuni;} \\ a<b,\ a+b>180^0 \ldots\ldots & 1 \text{ solutiune;} \\ a=b \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \text{ solutiune;} \\ a>b \ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \text{ solutiuni.} \end{cases}
\end{cases}
$$

215. **Casul VI.** *Dandu-se doue anghiuri* A *si* B *si laturea* a *opusa la* A, *se se resolve trianghiul.*

Vom calcula pe b prin formula

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}, \qquad \text{(a)}$$

si apoi calculâm pe C si c prin analogiile lui Napier:

$$
\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}\cot\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}\cot\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}, \\
\operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \frac{\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}
$$

216. Formula (a) determinand pe b prin sinusul seu. dà doue valori pentru b, m si m', ast-fel cà $m+m'=180^0$. Inse fiind-cà noi cautàm numai valorile elementelor coprinse intre 0^0 si 180^0, trebue ca espressiunea lui $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ si $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, data de formulele ($b$), se fie positiva, si pentru a-

cesta trebue ca diferentiele $a—b$ si A—B se fie de acellasiu semn. Prin urmare din celle doue valori gasite pentru b nu vom admite de cât pe acellea cari vor implini acesta conditiune. Cu modul acesta vom cunosce numerul solutiunilor reale alle problemei.

Discutiunea completa a formulelor (a) si (b) se face intocmai ca si pentru casul precedinte*; de acea nu vom mai reveni asupra ei. *214

Casul V si VI al resolutiunei trianghiurilor sferice ore-cari primesc de multe ori numele de *casuri indoiose alle trianghiurilor sferice*, câci pote fi la prima vedere ore-care nesecurantia asupra valorilor lui B seu b cari convin problemei Inse acesta nesecurantia dispare indata ce se esaminedia cu atentiune datele problemei.

217. Elementele C si c se pot determina si direct prin formulele

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$
$$\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A.$$

Punend in prima din aceste formule

$$\cot \psi = \cos a \operatorname{tg} B$$

si in a doua

$$\cot \varphi = \frac{\cot a}{\cos B},$$

elle devin, dupe nisce transformari analoge cu celle de la casul precedinte:

$$\sin(C-\psi) = \frac{\cos A \sin \psi}{\cos B},$$
$$\sin(c-\varphi) = \sin \varphi \cot A \operatorname{tg} B.$$

In aceste formule, fiind-cà $\sin\psi$ si $\sin\varphi$ sunt positive, $\sin(C-\psi)$ va fi positiv, adeca $C>\psi$, deca $\cos A$ si $\cos B$ sunt de acellasiu semn; si $\sin(C-\psi)$ va fi negativ, adeca $C<\psi$, deca cosA si cosB sunt de semne contrarie. Assemenea $\sin(c-\varphi)$ este positiv, si prin urmare $c>\varphi$, deca cotA si tgB sunt de acellasiu semn, si $\sin(c-\varphi)$ este este negativ, adeca $c<\varphi$, in casul contrariu.

Din acestea resulta cà diferentiele $c-\varphi$ si $C-\psi$ sunt tot de-una de acellasiu semn, positiv deca A si B sunt tot de o data superiore seu inferiore lui 90^0, negativ deca unul e mai mare si altul mai mic de 90^0.

ESSEMPLE

Casul I.

Date

$a=84^0 19' 34'',2;$
$b=68^0 29' 7'',6.$
$c=108^0 34', 17'',0.$

Formule.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

Necunoscute.

$A=75^0 50' 40'',58;$
$B=65^0 1' 42'',32;$
$C=112^0 31', 52'',92;$
$\varepsilon=73^0 24' 15''72.$

Calculul lui A.

$$\log\sin(p-b)=\bar{1},9467618$$
$$\log\sin(p-c)=\bar{1},5758220$$
$$-\log\sin p=0,1201984$$
$$-\log\sin(p-a)=0,1404087$$

$$2\log\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\bar{1},7831909$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\bar{1},8915955$$
$$A=75^0 50' 40'',58.$$

Calculul lui B.

$$\log\sin(p-a)=\bar{1},8595913$$
$$\log\sin(p-c)=\bar{1},5758220$$
$$-\log\sin p=0,1201984$$
$$-\log\sin(p-b)=0,0532382$$

$$2\log\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\bar{1},6088499$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\bar{1},8044250$$
$$B=65^0 1' 42'',32.$$

Calculul lui C.

$$\log\sin(p-a)=\bar{1},8595913$$
$$\log\sin(p-b)=\bar{1},9467618$$
$$-\log\sin p=0,1201984$$
$$-\log\sin(p-c)=0,4241780$$

$$2\log\mathrm{tg}\frac{C}{2}=0,3507295$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{C}{2}=0,1753648$$
$$C=112^0 31' 52'',92.$$

Calculul lui ε.

$$\log\mathrm{tg}\frac{p}{2}=0,3382048$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{p-a}{2}=\bar{1},6316897$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{p-b}{2}=\bar{1},7805410$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{p-c}{2}=\bar{1},2910763$$

$$2\log\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\bar{1},0415118$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\bar{1},5207559$$
$$\varepsilon=73^0 24' 15'',72.$$

VERIFICARE

$$A+B+C-180^0=\varepsilon=73^0 24' 15'',82 \text{ (diff. totale } 0'',1).$$

Casul II.

Date.

$A=98^0 32' 28'',6$;

$B=83^0 25' 10'',4$;

$C=113^0 39' 51'',6$

Formule.

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.$$

Necunoscute.

$a=102^0 20' 39'',48$;

$b=78^0 54' 38'',54$;

$c=115^0 12' 26'',66$.

Calculul lui a.

$$\log\sin\frac{\varepsilon}{2}=\bar{1},9275295$$

$$\log\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\bar{1},8145659$$

$$-\log\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,3643198$$

$$-\log\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,0821859$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{a}{2}=0,1886011$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{a}{2}=0,0943005$$

$$a=102^0 20' 39'',48.$$

Calculul lui b.

$$\log\sin\frac{\varepsilon}{2}=\bar{1},9275295$$

$$\log\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\bar{1},6356802$$

$$-\log\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,1854341$$

$$-\log\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,0821859$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\bar{1},8308297$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\bar{1},9154149$$

$$b=78^0 54' 38'',54.$$

Calculul lui c.

$$\log\sin\frac{\varepsilon}{2}=\overline{1},9275295$$

$$\log\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\overline{1},9178141$$

$$-\log\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,1854341$$

$$-\log\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,3643198$$

$$2\log\mathrm{tg}\frac{c}{2}=0,3950975$$

$$\log\mathrm{tg}\frac{c}{2}=0,1975488$$

$$c=115^0 12' 26'',66.$$

Casul III.

Date.

$a=53^0 15' 28'',4$;

$b=44^0 43' 52'',0$;

$C=73^0 20' 48'',6$.

Formule.

$$\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}.$$

Necunoscute.

$A=71^0 26' 0'',80$;

$B=56^0 21' 41'',66$;

$c=54^0 5' 1'',70$.

Calculul lui A+B

$$\log\cos\frac{a-b}{2}=\bar{1},9987966$$

$$\log\cot\frac{C}{2}=0,1280446$$

$$-\log\cos\frac{a+b}{2}=0,1830091$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=0,3098503$$

$$A+B=127^{0}47'42'',46.$$

Calculul lui A—B.

$$\log\sin\frac{a-b}{2}=\bar{2},8712315$$

$$\log\cot\frac{C}{2}=0,1280446$$

$$-\log\sin\frac{a+b}{2}=0,1222563$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\bar{1},1215324$$

$$A-B=15^{0}4'19'',14.$$

Calculul lui A *si* B

$$A+B=127^{0}47'42'',46$$

$$A-B=15^{0}4'19''14$$

$$A=71^{0}26\ 0'',80$$

$$B=56^{0}21'41'',66.$$

Cal ulul lui c.

$$\log\sin\frac{A+B}{2}=\bar{1},9532807$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\bar{2},8724349$$

$$-\log\sin\frac{A-B}{2}=0,8822351$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},7079507$$

$$c=54^{0}5'1'',70.$$

CALCULUL DIRECT AL LUI c.

Formule.

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}b\cos C;$$

$$\cos c=\frac{\cos b\cos(a-\varphi)}{\cos\varphi}$$

Calculul lui φ

$$\log\operatorname{tg}b=\bar{1},9959236$$

$$\log\cos C=\bar{1},4572421$$

$$\log\operatorname{tg}\varphi=\bar{1},4531657.$$

$$\varphi=15^{0}50'57'',31.$$

Calculul lui c.

$$\log\cos b=\bar{1},8515136$$

$$\log\cos(a-\varphi)=\bar{1},8999971$$

$$-\log\cos\varphi=0,0168323$$

$$\log\cos c=1,7683430$$

$$c=54^{0}5'1'',72(\text{diff. }0'',02).$$

Casul IV.

Date.

$$A=120^0 23' 5'',8;$$
$$B=75^0 0' 0'',0;$$
$$c=38^0 48' 22'',2.$$

Formule

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

Necunoscute.

$$a=75^0 25' 9'',28;$$
$$b=59^0 48' 16'',42.$$
$$C=38^0 43' 2'',24.$$

Calculul lui a+b.

$$\log\cos\frac{A-B}{2}=\bar{1},9650081$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},5468092$$
$$-\log\cos\frac{A+B}{2}=0,8733622$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=0,3851795$$
$$a+b=135^0 13' 25'',70.$$

Calculul lui a—b.

$$\log\sin\frac{A-B}{2}=\bar{1},5863451$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},5468092$$
$$-\log\sin\frac{A+B}{2}=0,0039260$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\bar{1},1370803$$
$$a-b=15^0 36' 52'',86.$$

Calculul lui a *si* b.

$a+b=135^\circ 13' 25'',70$

$a-b=15^\circ 36' 52'',86$

$a=75^\circ 25' 9'',28$

$b=59^\circ 48' 16'',42.$

Calculul lui C.

$\log\sin\frac{a+b}{2}=\overline{1},9659657$

$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\overline{1},6213370$

$-\log\sin\frac{a-b}{2}=0,8669642$

$\log\cot\frac{C}{2}=0,4542669$

$C=38^\circ 43' 2'',24.$

CALCULUL DIRECT AL LUI *C*.

Formule.

$\cot\varphi=\operatorname{tg}B\cos c;$

$$\cos C=\frac{\cos B\sin(A-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Calculul lui φ.

$\log\operatorname{tg}B=0,5719475$

$\log\cos c=\overline{1},8916883$

$\log\cot\varphi=0,4636358$

$\varphi=18^\circ 58' 31'',22.$

Calculul lui C.

$\log\cos B=\overline{1},4129962$

$\log\sin(A-\varphi)=\overline{1},9913315$

$-\log\sin\varphi=0,4879013$

$\log\cos C=\overline{1},8922290$

$C=38^\circ 43' 2'',33$ (diff. $0'',09$).

Casul V.

Date.

$a=105^\circ 31' 42'',3;$

$b=83^\circ 43' 13'',5;$

$A=113^\circ 38' 15'',4.$

Formule.

$$\sin B=\frac{\sin b\sin A}{\sin a};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{A-B}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

Necunoscute.

1ª solutie.	2ª solutie.
$B'=70^\circ 55' 36'',16$;	$B''=109^\circ 4' 23'',84$;
$C'=51^\circ 46' 54'',16$;	$C''=156^\circ 16' 53'',52$;
$c'=55^\circ 43' 16'',98$.	$c''=154^\circ 58' 20'',68$.

Calculul lui B.

$$\log\sin b=\bar{1},9973864$$
$$\log\sin A=\bar{1},9619427$$
$$-\log\sin a=0,0161493$$
$$\log\sin B=\bar{1},9754784$$

1ª solutie.	2ª solutie.
$B'=70^\circ 55' 36'',16$.	$B''=109^\circ 4' 23'',84$.
Calculul lui C'.	*Calculul lui* C''.
$\log\sin\frac{a-b}{2}=\bar{1},2768385$	$\log\sin\frac{a-b}{2}=\bar{1},2768385$
$\log\cot\frac{A-B'}{2}=0,4078244$	$\log\cot\frac{A-B''}{2}=\bar{1},3995467$
$-\log\sin\frac{a+b}{2}=0,0014161$	$-\log\sin\frac{a+b}{2}=0,0014161$
$\log\operatorname{tg}\frac{C'}{2}=\bar{1},6860790$	$\log\operatorname{tg}\frac{C''}{2}=0,6778013$
$C'=51^\circ 46' 54'',16$.	$C''=156^\circ 16' 53'',52$.

Calculul lui c′.

$$\log\sin\frac{A+B'}{2}=\bar{1},9996554$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}=\bar{1},2847511$$
$$-\log\sin\frac{A-B'}{2}=0,4387163$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{c'}{2}=\bar{1},7231228$$
$$c'=55^{0}43'16'',98.$$

Calculul lui c″.

$$\log\sin\frac{A+B''}{2}=\bar{1},9691079$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}=\bar{1},2847511$$
$$-\log\sin\frac{A-B''}{2}=1,3998912$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{c''}{2}=0,6537502$$
$$c''=154^{0}58'20'',68.$$

CALCULUL DIRECT AL LUI C' SI C''.

Formule.

$$\cot\varphi=\cos b\,\mathrm{tg}A\,;$$
$$\cos(\varphi-C)=\cot a\cos\varphi\,\mathrm{tg}b.$$

Calculul lui φ.

$$\log\cos b=\bar{1},0389384$$
$$\log\mathrm{tg}A=0,3588520$$
$$\log\cot\varphi=\bar{1},3977904$$
$$\varphi=104^{0}1'53'',76.$$

Calculul lui C.

$$\log\cot a=\bar{1},4438241$$
$$\log\cos\varphi=\bar{1},3846347$$
$$\log\mathrm{tg}b=0,9584480$$
$$\log\cos(\varphi-C)=\bar{1},7869068.$$

1ª *solutie.*

$$\varphi-C'=52^{0}14'59'',56$$
$$C'=51^{0}46'54'',20(\text{diff.}0'',04).$$

2ª *solutie.*

$$C''-\varphi=52^{0}14'59'',56$$
$$C''=156^{0}16'53'',32(\text{diff.}0'',20).$$

CALCULUL DIRECT AL LUI c' SI c''.

Formule.

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}b\cos A\,;$$

$$\cos(c-\varphi)=\frac{\cos a\cos\varphi}{\cos b}.$$

Calculul lui φ.	*Calculul lui* c.
$\log\operatorname{tg}b=0,9584480$	$\log\cos a=\bar{1},4276747$
$\log\cos A=\bar{1},6030908$	$\log\cos\varphi=\bar{1},4226919$
$\log\operatorname{tg}\varphi=0,5615388$	$-\log\cos b=0,9610616$
$\varphi=105^0 20' 48'',78.$	$\log\cos(c-\varphi)=\bar{1},8114282.$

1^a *solutie.*

$$\varphi-c'=49^0 37' 31'',78;$$

$$c'=55^0 43' 17'',00(\text{diff.}0'',02).$$

2^a *solutie.*

$$c''-\varphi=49^0 37' 31'',78;$$

$$c''=154^0 58' 20'',56(\text{diff.}0'',12).$$

Casul VI.

Date.

$$A=65^0 15' 32'',4\,;$$

$$B=58^0 23' 48'',6\,;$$

$$a=73^0 42' 8'',2.$$

Formule

$$\sin b=\frac{\sin a\sin B}{\sin A},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{A-B}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

Necunoscute.

$$b=64^0 10' 13'',69\,;$$

$$C=112^0 5' 14'',68.$$

$$c=101^0 41' 17'',44.$$

Calculul lui b.

$$\log\sin a = \bar{1},9821882$$
$$\log\sin B = \bar{1},9302856$$
$$-\log\sin A = 0,0418143$$
$$\log\sin b = \bar{1},9542881$$
$$b = 64^0 10' 13'',69.$$

Calculul lui C.

$$\log\sin\frac{a-b}{2} = \bar{2},9195219$$
$$\log\cot\frac{A-B}{2} = 1,2221718$$
$$-\log\sin\frac{a+b}{2} = 0,0300337$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{C}{2} = 0,1717274$$
$$C = 112^0 5' 14'',68.$$

Calculul lui c.

$$\log\sin\frac{A+B}{2} = \bar{1},9452389$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{a-b}{2} = \bar{2},9210260$$
$$-\log\sin\frac{A-B}{2} = 1,2229509$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{c}{2} = 0,0892158$$
$$c = 101^0 41' 17'',44.$$

CALCULUL DIRECT AL LUI *C*.

Formule.

$$\cot\psi = \cos a \,\mathrm{tg} B\ ;$$
$$\sin(C-\psi) = \frac{\cos A \sin\psi}{\cos B}.$$

Calculul lui ψ.

$$\log\cos a = \bar{1},4481319$$
$$\log\mathrm{tg} B = 0,2109270$$
$$\log\cot\psi = \bar{1},6590589.$$
$$\psi = 65^0 28' 56'',38.$$

Calculul lui C.

$$\log\cos A = \bar{1},6217132$$
$$\log\sin\psi = \bar{1},9589618$$
$$-\log\cos B = 0,2806414$$
$$\log\sin(C-\psi) = \bar{1},8613164$$
$$C=\psi = 46^0 36' 18'',14$$
$$C = 112^0 5' 14'',52.$$

(diff. $0'',16$).

CALCULUL DIRECT AL LUI c.

Formule.

$$\cot\varphi = \frac{\cot a}{\cos B};$$

$$\sin(c-\varphi) = \sin\varphi \cot A \operatorname{tg} B.$$

Calculul lui φ.

$$\log\cot a = \overline{1},4659437$$
$$-\log\cos B = 0,2806414$$
$$\log\cot\varphi = \overline{1},7465851$$
$$\varphi = 60^0 50' 28'',47.$$

Calculul lui c.

$$\log\sin\varphi = \overline{1},9411500$$
$$\log\cot A = \overline{1},6635274$$
$$\log\operatorname{tg} B = 0,2109270$$
$$\log\sin(c-\varphi) = \overline{1},8156044$$
$$c-\varphi = 40^0 50' 48'',85$$
$$c = 101^0 41' 17'',32$$
(diff. 0'',12).

ESPRESSIUNEA IN LUNGIME A LATURILOR.

218. Pene acum laturile a,b,c alle unui trianghiu sferic au fost tot-de-una esprimate in grade, minute si secunde, si radia sferei a fost tot-de-una presupusa egale cu unitatea. Se pote inse calcula si *lungimea linearia* a unei laturi deca se cunosce numerul de grade continut intr'ensa, si lungimea radiei R a sferei.

Fie l lungimea unui arc de 1'' dintr'ua circumferentia a carii radia este 1; fie inca a^0 numerul de secunde continut in un arc de cerc mare al unei sfere cu radia R, si a lungimea lui linearia; era l' lungimea unui arc de 1'' din ua circumferentia tot cu radia R. Dupe geometria avem:

$$\frac{l'}{l} = \frac{R}{1}, \text{ seu: } l' = Rl;$$

inse

$$a=a^0 l;$$

deci

$$a=a^0 Rl.$$

Valorea lui $\sin l=\sin 1''$ difera asia de putin de valorea l a arcului de $1''$ incât primele siepte diecimale alle lui $\log\sin l$ sunt identice cu celle siepte diecimale de la inceputul lui $\log l$; prin urmare in calculele logaritmice unde nu se intrebuintiedia de cât logaritmii cu siepte diecimale putem presupune cà

$$\sin l=l,$$

si atunci

$$a=a^0 R\sin l,$$

seu

$$a=a^0 R\sin 1'', \tag{1}$$

care ne dà lungimea laturei cand cunoscem numerul de secunde continut intr'ensa. De aci tragem:

$$a^0=\frac{a}{R\sin 1''}, \tag{2}$$

care dà numerul de secunde al unei laturi deca cunoscem lungimea sea linearia.

Essemple. 1^0. Date: $a^0=34^0 18' 52'',1$; $R=8^m,352$.
Necunoscuta: $a=5^m,002$.

2^0 Date: $a=25^m,722$; $R=18^m,513$.
Necunoscuta: $a^0=79^0 36' 24'',7$.

SUPRAFATIA UNUI TRIANGHIU SFERIC.

219. Cunoscem din geometria sferica espressiunea suprafetiei S a unui trianghiu sferic:

$$S=T\frac{\varepsilon}{360^0},$$

in care T represinta jumetate din suprafatia totale a sferei, si ε escesul sferic. Inse $T=2\pi R^2$; deci

$$S=\frac{\pi R^2 \varepsilon}{180^0}.$$

Deca prefacem pe ε si 180^0 in secunde, fiind-cà π esprime lungimea unei semicircumferéntie cu radia 1*, *4
câtul $\frac{\pi}{180^0}=\frac{\pi}{648000''}$ este lungimea arcului de $1''$, care am vèdiut* cà este egal cu $\sin 1''$. *218

Punend acesta valore in formula din urma, obtinem:

$$S=R^2 \varepsilon \sin 1'', \qquad (3$$

in care trebue se nu perdem din vedere cà ε esprime) numerul de secunde coprins in escesul sferic.

Essemplu. Date: $R=486^m,5$; $\varepsilon=84^0 13' 28'',4=303208'',4$.

Necunoscuta: $S=347921^{mp},84$.

CAPITULUL III.

—

Esercitii si aplicatiuni.

220. *Se se resolve un trianghiu sferic in care se cunosce ua lature* a, *anghiul opus* A *si suma seu diferentia cellor-alte doue laturi* b *si* c.

Deca se dà a, A, $b+c$, vom determina anghiurile necunoscute B si C prin a treia si a patra din formulele
179 lui Delambre :

$$\cos\frac{B+C}{2}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\sin\frac{A}{2},$$

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\sin\frac{A}{2},$$

cari ne dau suma B+C si diferentia B−C; prin urmare chiar pe B si C.

Laturile b si c le vom calcula in urma prin formulele:

$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin a}{\sin A},\quad \frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\sin a}{\sin A}.$$

Deca se dà a, A, $b-c$, anghiurile B si C se vor determina prin primele doue formule alle lui Delambre :

$$\sin\frac{B+C}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\cos\frac{A}{2},$$

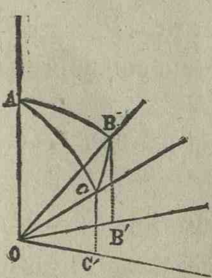
$$\sin\frac{B-C}{2}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cos\frac{A}{2}.$$

Laturile b si c se determina apoi in acellasiu mod ca si mai sus.

Essemplu. Date : $a=64^0 28' 33',4$; $A=76^0 3' 51'',2$; $b+c=98^0 34' 13'',6$.

Necunoscute : $B=90^0 32' 12'',72$; $C=32^0 43' 40'',98$; $b=68^0 23' 34'',04$; $c=30^0 10' 39'',53$.

221. *Se se reduca un anghiu la orizonte.*



Un observator O mesura anghiul BOC al radielor visuale duse la doue objecte B si C, anghiul BOC nefiind in un plan orizontal. In aplicatiuni inse este mai tot-de-una necessariu a se cunosce nu ensusi anghiul BOC, ci projectia B′OC′ a acestui anghiu pe un plan orizontal. Acesta projectie se numesce *anghiul redus la orizont.*

Pentru a se reduce anghiul BOC la orizont, se mesura si anghiurile AOB, AOC ce fac radiele visuale duse la celle doue objecte considerate cu verticala AO. Imaginandu-ne apoi ua sfera cu radia 1 si cu centrul in O, acesta sfera va taia fetiele triedrului OABC dupe arcele

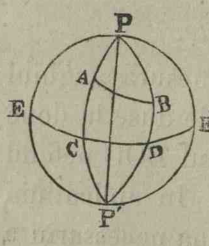
AB,BC,AC, cari formedia un trianghiu sferic, al carui anghiu A are drept anghiu plan cu care se mesura chiar pe anghiul cautat B′OC′. Resolvand dera trianghiul
204 ABC, in care se cunosce AB=AOB, AC=AOC, BC=BOC, tote quantitati mesurate, vom puté calcula anghiul A.

Reducerea anghiurilor la orizont nu sé mai face astadi prin calcul, câci cu teodolitul se pote mesura direct anghiul B′OC′.

Essemplu. Datė : BOC=49°28′31″; BOA=78°35′8″; COA=82°51′43″.

Necunoscuta : A=B′OC′=50°0′1″,8.

222. *Cunoscund longitudinea si latitudinea a doue locuri de pe suprafatia pamentului, se se calculedie distantia intre aceste doue puncte.*



Fie P si P′ cei doi poli ai pamentului, PEP′E′ primul meridian, spre essemplu cél care trece prin Paris, EE′ equatorul, A si B punctele considerate. Sé dà :

pentru A, longitudinea L=EPC, si latitudinea l=AC;

pentru B, longitudinea L′=EPD, si latitudinea l'=BD.

In trianghiul sferic APB se cunosce dera anghiul APB=L′−L, laturea AP=90°−l, si BP=90°−l'. Putem
206 dera resolve trianghiul si calcula laturea ceruta AB.

Lungimea linearia a lui AB s'ar puté gasi prin for-
218 mula (1); inse in casul acesta putem se reducem acea formula in modul urmator.

Formula

$$\frac{AB}{180^0}=\frac{l}{\pi},$$

in care AB este numerul de secunde continut in distantia de la A la B, l lungimea linearia a lui AB si π lungimea semicircumferentiei, dà :

$$l=\frac{\pi AB}{180^0},$$

si fiind-cà

$$180^0=648000'',$$

si pentru pament

$$\pi=20000^{kmt},$$

avem :

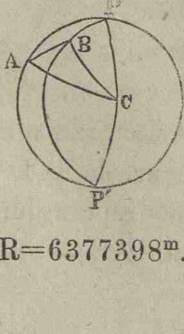
$$l=\frac{20000^{kmt}}{648000}\times AB=\frac{10^{kmt}}{324}\times AB.$$

Essemplu. Date : Bucuresci $\frac{\text{lat. } 44^0 25' 39'' \text{N.}}{\text{Long. } 23^0 46' 12'' \text{est}}$;

Paris $\frac{\text{lat. } 48^0 50' 11'' \text{N.}}{\text{Long. } 0^0 0' 0''}$.

Necunoscuta : $AB=16^0 49' 48'',91=1870^{kmt},028$.

223. *Dandu-se longitudinile si latitudinile a trei puncte,* A,B,C, *de pe suprafatia pamentului, se se calculedie suprafatia trianghiului sferic* ABC, *format de aceste puncte.*



Vom calcula laturile AB,BC,AC alle trianghiului ABC dupe metoda data la problema precedinte, si apoi escesul sferic ε prin formula (10)*. Atunci *182
relatiunea (3)** ne va da suprafatia *219
cautata, sciind cà pentru pament $R=6377398^m$.

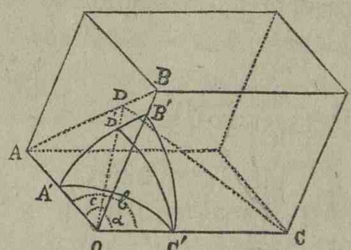
Essemplu. Date : Jassy $\dfrac{\text{lat. } 47^\circ 10' 24'' \text{N.}}{\text{Long. } 25^\circ 15' 45'' \text{est}}$;

Londra $\dfrac{\text{lat. } 51^\circ 30' 49'' \text{N}}{\text{Long. } 2^\circ 25' 57'' \text{vest}}$; Petersburg $\dfrac{\text{lat. } 59^\circ 56' 30'' \text{N}}{\text{Long. } 27^\circ 58' 13'' \text{est}}$.

Nécunoscute : $JL = 18^\circ 26' 17'',43$; $JP = 12^\circ 51' 59'',38$; $LP = 18^\circ 51' 19'',73$; $\varepsilon = 1^\circ 59' 9'',03 = 7149'',03$; $S = 1409643^{kmp},181818$.

224. *Se se calculedie volumul unui paralepiped cunoscund lungimea cellor trei muchi alle unuia din anghiurile selle solide, si anghiurile ce aceste muchi fac intre elle.*

Fie $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$ lungimile cellor trei muchi date, cari tote concura in punctul O; $BOC = a$, $AOC = b$, $AOB = c$ anghiurile ce aceste muchi fac una cu alta.



Lasand din C perpendiculara CD pe fatia AB, volumul paralepipedului este :

$$V = \text{drèptanghiu } AB \times CD. \qquad \text{(a)}$$

Inse

*107 $$\text{dreptanghiu } AB = 2ABO = 2\frac{\alpha\gamma \sin c}{2} = \alpha\gamma \sin c. \qquad \text{(b)}$$

Trianghiul dreptanghiu CDO dà:

$$CD = CO \sin COD = \beta \sin COD. \qquad \text{(c)}$$

Ne imaginàm ua sfera cu centrul in O si cu radia 1, care taia fetiele triedrului OADC dupe arcele A′D′, D′C′, A′C′. Trianghiul sferic A′D′C′ este dreptanghiu in D′, câci CD fiind perpendicularia pe fatia AB, si planul CDO, care trece prin CD, va fi perpendicular pe acea fatia. Prin urmare, dupe proprietatile trianghiurilor sferice dreptanghie*, *163 (6).

$$\sin C'D' = \sin A'C' \sin A',$$

seu

$$\sin COD = \sin b \sin A',$$

ori

$$\sin COD = 2 \sin b \sin \frac{A'}{2} \cos \frac{A'}{2}.$$

Prelungind arcul A'D' pene in B' si unind B' cu C' prin un arc descris din O ca centru, in trianghiul sferic A'B'C' avem: $B'C' = a$, $A'C' = b$, $A'B' = c$; punend dera in loc de $\sin \frac{A'}{2}$ si de $\cos \frac{A'}{2}$ valorea lor data prin equatiunile (1) si (2)*, *177

$$\sin COD = 2 \sin b \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin^2 b \sin^2 c}}$$

$$= 2 \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{\sin c}.$$

Substituind acesta valore in (c),

$$CD = 2\beta \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{\sin c}.$$

Acesta valore a lui CD precum si valorea lui AB data de (b) o introducem in (a), si atunci

$$V = 2\alpha\beta\gamma \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}.$$

Essemplu. Date: $\alpha = 15^m,38$; $\beta = 21^m,13$; $\gamma = 18^m,72$; $a = 63^\circ 13' 29''$; $b = 52^\circ 38' 32''$; $c = 79^\circ 25' 15''$.

Necunoscuta: $V = 4282^{mc},4833$.

CARTEA IV.

COMPLEMENTUL TEORIEI FUNCTIUNILOR CIRCULARIE.

CAPITULUL I.

IMMULTIREA SI IMPARTIREA ARCELOR.

Espressiuni imaginarie.

225. Ua *espressiune imaginaria* este ua functiune care coprinde radicalul $\sqrt{-1}$. Ori-ce espressiune de felul acesta pote tot de una se se reduca la forma $a+b\sqrt{-1}$, in care a si b sunt quantitati reale, positive, nule seu negative.

Fie r un numer positiv ore care si α un anghiu; putem tot de-una gasi pentru r si α nisce valori cari se satisfaca equatiunile:

$$a=r\cos\alpha,\ b=r\sin\alpha, \tag{a}$$

din cari

$$\cos\alpha=\frac{a}{r},\ \sin\alpha=\frac{b}{r};$$

era deca le adunàm, dupe ce le-am ridicat la patrat,

$$r^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=a^2+b^2,$$

seu

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Punend valorile (a) in locul lui a si b in espressiunea imaginaria, ea devine:

$$a+b\sqrt{-1}=r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha).$$

Numerul r se numesce *modulul*, era anghiul α *argumentul* quantitatii imaginarie. Modulul este egal cu radecina patrata a sumei patratelor quantitatilor reale ce insotiesc imaginara. Argumentul este un anghiu datprin sinusul si cosinusul seu, si fiind-cà aceste linii trigonometrice sunt periodice, tote arcele, diferind intre elle cu 2π seu cu un multiplu al lui 2π, cari vor avé drept sinus si cosinus valorile $\frac{b}{r}$ si $\frac{a}{r}$, vor puté fi luate ca argument al espressiunei imaginarie date. Prin urmare, pentru ca doue espressiuni imaginarie, $r(\cos\alpha+-\sqrt{-1}\sin\alpha)$ si $r'(\cos\alpha'+\sqrt{-1}\sin\alpha')$ se fie egale, este de ajuns ca modulele lor r si r' se fie egale, era argumentele lor α si α' se difere cu un multiplu al circumferentiei.

Doue espressiuni imaginarie se numesc *conjugate* deca difera una de alta numai prin semnul termenului in care se afla $\sqrt{-1}$; ast-fel sunt: $r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)$ si $r(\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha)$.

Ua quantitate reale positiva pote fi considerata ca ua quantitate imaginaria al carii argument este un multiplu prin un numer cu sotiu al unei semicircumferentie; *si ua quantitate reale negativa ca ua quantitate imaginaria al carii argument este un multiplu prin un numer fora sotiu al unei semi-circumferentie.*

In adever; in espressiunea imaginaria

$$r(\cos 2k\pi+\sqrt{-1}\sin 2k\pi),$$

$2k$ fiind un numer ore-care *cu sotiu*, avem :

$$\cos 2k\pi=1,\ \sin 2k\pi=0;$$

deci

$$r(\cos 2k\pi+\sqrt{-1}\sin 2k\pi)=r,$$

r fiind ua quantitate reale positiva.

Assemenea, in

$$r\{\cos(2k+1)\pi+\sqrt{-1}\sin(2k+1)\pi\},$$

$2k+1$ fiind un numer fora sotiu,

$$\cos(2k+1)\pi=-1,\ \sin(2k+1)\pi=0;$$

asia dera

$$r\{\cos(2k+1)\pi+\sqrt{-1}\sin(2k+1)\pi\}=-r,$$

si r este ua quantitate reale negativa.

FORMULA LUI MOIVRE

226. Fie a se immulti espressiunile imaginarie $r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)$ si $r'(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)$. Avem :

$$r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)\times r'(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)$$
$$=rr'(\cos\alpha\cos\beta+\sqrt{-1}\cos\alpha\sin\beta+\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=rr'\{\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)\}.$$

Immultind ambii membri ai acestei egalitati cu ua a treia quantitate imaginaria $r''(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)$, vom avé:

$$r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)r'(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)r''(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)$$
$$=rr'\{\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)\}r''(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)$$
$$=rr'r''\left\{\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\sqrt{-1}\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma\\ \quad+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma\end{array}\right\}$$
$$=rr'r''\{\cos(c+\beta+\gamma)+\sqrt{-1}\sin(c+\beta+\gamma)\}.$$

Urmand assemenea pentru patru, cinci, ... factori, vom obtine formula generale :

$$r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)r'(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)r''(\cos\gamma+(\sqrt{-1}\sin\gamma$$

$$\ldots r_n(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)$$

$$=rr'r''\ldots\ldots r_n\left\{\begin{matrix}\cos(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu)\\ +\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu)\end{matrix}\right\} \quad (1)$$

Membrul al doilea coprinde ua espressiune imaginaria al carii modul este $rr'r''\ldots\ldots r_n$, era argumentul $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu$; asia-dera *produsul mai multor espressiuni imaginarie este tot ua espressiune imaginaria al carii modul este produsul modulelor factorilor, era argumentul e suma argumentelor factorilor.*

Operand in acellasiu mod vom gasi inca :

$$r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)r'(\cos\beta-\sqrt{-1}\sin\beta)$$

$$=rr'\{\cos(\alpha-\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha-\beta)\}, \quad (1 \text{ bis})$$

$$r(\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha)r'(\cos\beta-\sqrt{-1}\sin\beta)$$

$$=rr'\{\cos(\alpha+\beta)-\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)\}. \quad (1 \text{ ter.})$$

Corolariu I. Deca in (1 bis) presupunem : $r=r'=1$; $\alpha=\beta$, formula devine :

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha)=\cos 0^0+\sqrt{-1}\sin 0^0=1;$$

asia dera *produsul a doue quantitati imaginarie conjugate este egal cu unitatea.*

Corolariu II. Din equatiunea

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha)=1,$$

deducem:

$$\frac{1}{\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha}=\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha;$$

prin urmare *inversa unei espressiuni imaginarie este ua alta espressiune imaginaria, conjugata cu cea data.*

227. Deca in formula (1) punem:

$$r=r'=r''=\ldots\ldots=r_n,\ \alpha=\beta=\gamma=\ldots\ldots=\nu,$$

ea devine:

$$\{r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)\}^m=r^m(\cos m\alpha+\sqrt{-1}\sin m\alpha), \quad (2)$$

m fiind numerul factorilor. Acesta formula, numita *formula lui Moivre*, esprime cà *puterea unei espressiuni imaginarie este tot ua espressiune imaginaria, al carii modul este chiar modulul radecinei ridicat la ua putere egale cu a espressiunei imaginarie, era argumentul este tot argumentul radecinei immultit prin esponentul puterii la care se ridica acesta radecina.*

IMMULTIREA ARCELOR

228. Formula lui Moivre ne dà possibilitatea de a calcula sinusul si cosinusul unui multiplu ore care al arcului in functiune de sinusul si cosinusul arcului simplu. In adever, deca in

$$r^m(\cos m\alpha+\sqrt{-1}\sin m\alpha)=r^m(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^m$$

eliminam factorul comun r^m si desvoltàm puterea din membrul al doilea dupe *binonul lui Newton*, observand cà: $(\sqrt{-1})^2=-1$, $(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^4=1$,...., avem:

$$\cos m\alpha+\sqrt{-1}\sin m\alpha=\cos^m\alpha+\frac{m}{1}\sqrt{-1}\cos^{m-1}\sin\alpha$$

$$-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sqrt{-1}\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\alpha\sin^4\alpha+\ldots\ldots$$

$$=\left[\cos^m\alpha-\frac{m(m-1)}{1.2.3}\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\alpha\sin^4\alpha-\ldots\ldots\right]$$

$$+\sqrt{-1}\left[\frac{m}{1}\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha\right.$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}\alpha\sin^5\alpha-\ldots\ldots\Big].$$

Inse cand avem ua egalitate intre quantitati reale si quantitati imaginarie se scie cà quantitatile reale sunt egale intre elle si celle imaginarie assemenea; avem dera:

$$\cos m\alpha=\cos^m\alpha-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\alpha\sin^4\alpha-\ldots \quad (1)$$

$$\sin m\alpha=\frac{m}{1}\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}\alpha\sin^5-\ldots\ldots \quad (2)$$

In (2) am eliminat factorul comun $\sqrt{-1}$.

In membrul al doilea din (1) nu intra de cât puteri cu sotiu alle lui $\sin\alpha$; deca dera vom voi a avé pe $\cos m\alpha$ in functiune numai de $\cos\alpha$, vom inlocui pe $\sin^2\alpha$ prin $1-\cos^2\alpha$, pe $\sin^4\alpha$ prin $(1-\cos^2\alpha)^2$,...., si atunci membrul al doilea al acelei equatiuni ne va da pe $\cos m\alpha$ in functiune de $\cos\alpha$ prin un polinom *rational*, câci va contine numai puterile intregi alle lui $\cos\alpha$.

In membrul al doilea din (2), deca m este fora sotiu, intra tot puteri cu sotiu alle lui $\cos\alpha$; deci inlocuind pe $\cos^2\alpha$ prin prin $1-\sin^2\alpha$, pe $\cos^4\alpha$ prin $(1-\sin^2\alpha)^2$,......., membrul al doilea al acellei equatiuni ne va da pe $\sin m\alpha$ in functiune de $\sin\alpha$ prin un polinom *rational*, càci va contine numai puterile intregi alle lui $\sin\alpha$. Deca inse m este cu sotiu, membrul al doilea al equatiunei (2) contine puteri fora sotiu alle lui $\cos\alpha$. In acest cas, punend pe $\cos\alpha$ factor comun, formula (2) devine:

$$\sin m\alpha = \cos\alpha\left[\frac{m}{1}\cos^{m-2}\alpha\sin\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-4}\alpha\sin^3\alpha\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)......(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-6}\alpha\sin^5\alpha - ....\right] \quad (3)$$

Parentesul contine numai puteri cu sotiu alle lui $\cos\alpha$; inlocuind dera pe $\cos^2 a$ prin $1-\sin^2\alpha$, pe $\cos^4\alpha$ prin $(1-\sin^2\alpha)^2$,...., vom avé in parentes un polinom ce va contine numai puterile intregi alle lui $\sin\alpha$, si prin urmare va fi *rational*. Inlocuind inse si pe factorul comun $\cos\alpha$, prin $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, membrul al doilea incetedia de a fi rational. Deci, cand m este cu sotiu, $\sin m\alpha$ pote fi esprimat prin un polinom care se contina numai puterile lui $\sin\alpha$. inse acest polinom va fi *irrational*.

229. Divisand (2) prin (1) obtinem:

$$\frac{\sin m\alpha}{\cos m\alpha} = \operatorname{tg} m\alpha$$

$$= \frac{\frac{m}{1}\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha + \frac{m(m-1)..(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}\alpha\sin^5\alpha - ..}{\cos^m\alpha - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\alpha\sin^4\alpha - ....}$$

si divisand ambii termeni ai fractiunei din membrul al doilea prin $\cos^m\alpha$,

$$\operatorname{tg} m\alpha = \frac{\frac{m}{1}\operatorname{tg}\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tg}^3\alpha + \frac{m(m-1)...(m-4)}{1.2.3.4.5}\operatorname{tg}^5\alpha - ...}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tg}^4\alpha - ......}, \quad (4)$$

formula care dà pe $\operatorname{tg} m\alpha$ in functiune de $\operatorname{tg}\alpha$.

Essemple. 1°. *Se se determine* sin8a *cunoscund pe* sina.

Punend in formula (2) $m=8$, $\alpha=a$, avem:

$$\sin 8a = \frac{8}{1}\cos^7 a\sin a - \frac{8.7.6}{1.2.3}\cos^5 a\sin^3 a$$

$$+\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}\cos^3 a\sin^5 a-\frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7}\cos a\sin^7 a,$$

seu

$$\sin 8a=8\cos^7 a\sin a-56\cos^5 a\sin a$$
$$+56\cos^3 a\sin^5 a-8\cos a\sin^7 a.$$

Deca voim se aflàm pe $\sin 8a$ numai in functiune de $\sin a$. punem in acesta equatiune pe $\cos a$ ca factor comun in membrul al doilea, si atunci

$$\sin 8a=\cos a(8\cos^6 a\sin a-56\cos^4 a\sin^3 a$$
$$+56\cos^2 a\sin^5 a-\sin^7 a);$$

inse

$$\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a},\ \cos^2 a=1-\sin^2 a,\ \cos^4 a=1+\sin^4 a-2\sin^2 a,$$
$$\cos^6 a=1-3\sin^2 a+3\sin^4 a-\sin^6 a.$$

Punend aceste valori in formula si facund reducerile,

$$\sin 8a=\sqrt{1-\sin^2 a}(8\sin a-80\sin^3 a+192\sin^5 a-128\sin^7 a).$$

Polinomul din membrul al doilea este irrational câci contine pe $\sqrt{1-\sin^2 a}$, si m a fost cu sotiu; acest resultat coincida dera cu cea ce am dis la finele § 228.

2°. *Se se determine* $\sin 5a$ *in functie de* $\sin a$.

Avem: $m=5$, $\alpha=a$; punend aceste valori in (2),

$$\sin 5a=\frac{5}{1}\cos^4 a\sin a-\frac{5.4.3}{1.2.3}\cos^2 a\sin^3 a+\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}\sin^5 a$$
$$=5\cos^4 a\sin a-10\cos^2 a\sin^3 a+\sin^5 a.$$

Pentru a esprime pe $\sin 5a$ numai in functie de $\sin a$, inlocuim in acesta formula pe $\cos^2 a$ prin $1-\sin^2 a$, pe $\cos^4 a$ prin $1-2\sin^2 a+\sin^4 a$, facem reducerile si obtinem:

$$\sin 5a=5\sin a-20\sin^3 a+16\sin^5 a.$$

In casul de fatia, m fiind fora sotiu, $\sin 5a$ este esprimat prin un polinom rational ce contine numai pe $\sin a$.

3°. *Se se determine* $\cos^6 a$ *in functie de* $\cos a$.

Formula (1) dà:

$$\cos 6a = \cos^6 a - \frac{6.5}{1.2}\cos^4 a \sin^2 a$$

$$+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cos^2 a \sin^4 a - \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 a$$

$$= \cos^6 a - 15\cos^4 a \sin^2 a + 15\cos^2 a \sin^4 a - \sin^6 a,$$

si inlocuind pe $\sin^2 a$, $\sin^4 a$, $\sin^6 a$ prin valorile lor in functie de $\cos a$ si reducund,

$$\cos^6 a = 32\cos^6 a - 48\cos^4 a + 18\cos^2 a - 1;$$

$\cos^6 a$ este esprimat prin un polinom rational ce coprinde numai pe $\cos a$.

4⁰. *Se se determine tg7a in functie de tga.*

Formula (4) dà:

$$\operatorname{tg}7a = \frac{\frac{7}{1}\operatorname{tg}a - \frac{7.6.5}{1.2.3}\operatorname{tg}^3 a + \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\operatorname{tg}^5 a - \frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7}\operatorname{tg}^7 a}{1 - \frac{7.6}{1.2}\operatorname{tg}^2 a + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\operatorname{tg}^4 a - \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}\operatorname{tg}^6 a}$$

$$= \frac{7\operatorname{tg}a - 35\operatorname{tg}^3 a + 21\operatorname{tg}^5 a - \operatorname{tg}^7 a}{1 - 21\operatorname{tg}^2 a + 35\operatorname{tg}^4 a - 7\operatorname{tg}^6 a}.$$

DIVISIUNEA ARCELOR.

Sub ácest titlu ne propunem problema inversa acelleia pre care am resolvat-o mai sus, adeca: *dandu se linia trigonometrica a unui arc, se se gasesca linia trigonometrica a submultiplului acelui arc.*

230. *Dandu-se* cosa *se se gasesca* $\cos\frac{a}{m}$.

228 In equatiunea (1) punem $\alpha = \frac{a}{m}$, si prin urmare $m\alpha = a$; ea devine atunci:

$$\cos a = \cos^m \frac{a}{m} - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\frac{a}{m}\sin^2\frac{a}{m}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\frac{a}{m}\sin^4\frac{a}{m} - \ldots\ldots\ldots$$

Aci $\cos a$ este quantitatea data si $\cos\frac{a}{m}$ necunoscuta; punem dera: $\cos a = b$, $\cos\frac{a}{m} = x$; si fiind-cà

$$\sin^2\frac{a}{m} = 1 - \cos^2\frac{a}{m},\ \sin^4\frac{a}{m} = \left(1 - \cos^2\frac{a}{m}\right)^2, \ldots,$$

vom avé:

$$\sin^2\frac{a}{m} = 1 - x^2,\ \sin^4\frac{a}{m} = \left(1 - x^2\right)^2, \ldots$$

Facund inlocuirile equatiunea devine:

$$x^m - \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}(1-x^2)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}(1-x^2)^2 - \ldots = b.$$

Desfacund parentesele ce contin pe x, grupand termenii ce contin puteri egale alle lui x, si insemnand cu A pe confactorul lui x^m, cu A_2 pe al lui x^{m-2}, cu A_4 pe al lui x^{m-4}, . . . , equatiunea va lua forma:

$$Ax^m + A_2x^{m-2} + A_4x^{m-4} + \ldots = b.$$

Prin urmaré determinarea lui x, adeca a lui $\cos\frac{a}{m}$, in functiune de b, adeca de $\cos a$, depinde de deslegarea unei equatiuni de gradul m in x.

Essemplu. Cunoscund pe cosa, se se determine $\cos\frac{a}{6}$.

Punend in (1)* in loc de $m\alpha$ pe a, in loc de α pe $\frac{a}{m}$ *228
si in loc de m pe 6, acea equatiune devine:

$$\cos a = \cos^6\frac{a}{6} - \frac{6.5}{1.2}\cos^4\frac{a}{6}\sin^2\frac{a}{6}$$

$$+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cos^2\frac{a}{6}\sin^4\frac{a}{6} - \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}\sin^6\frac{a}{6}$$

$$=\cos^6\frac{a}{6} - 15\cos^4\frac{a}{6}\sin^2\frac{a}{6} + 15\cos^2\frac{a}{6}\sin^4\frac{a}{6} - \sin^6\frac{a}{6}.$$

Punem : $\cos a = b$, $\cos\frac{a}{6} = x$; atunci, find-cà $\sin^2\frac{a}{6}$ $= 1 - \cos^2\frac{a}{6}$, $\sin^4\frac{a}{6} = \left(1 - \cos^2\frac{a}{6}\right)^2$, $\sin^6\frac{a}{6} = \left(1 - \cos^2\frac{a}{6}\right)^3$, avem : $\sin^2\frac{a}{6} = 1 - x^2$, $\sin^4\frac{a}{6} = (1 - x^2)^2 = 1 - 2x^2 + x^4$, $\sin^6\frac{a}{6} = (1 - x^2)^3 = 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$. Introducund tote aceste valori in equatiune, effectuand immultirile si grupand termenii ce coprind acelleasi puteri alle lui x, avem :

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = b,$$

equatiune de gradul al siesselea care resolvata ne va da pe x, adeca pe $\cos\frac{a}{6}$, in functie de $\cos a$, represintat prin b.

231. *Dandu-se* $\sin a$, *se se gasesca* $\sin\frac{a}{m}$.

228 1° Deca m este fora sotiu, punend in equatiunea (2) in loc de $m\alpha$ pe a si in loc de α pe $\frac{a}{m}$, vom avé :

$$\sin a = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\frac{a}{m}\sin\frac{a}{m} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\frac{a}{m}\sin^3\frac{a}{m}$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}\frac{a}{m}\sin^5\frac{a}{m} - \ldots.$$

Punem: $\sin a = b$, $\sin\frac{a}{m} = x$; si fiind-cà puterile $m-1$, $m-3$, $m-5$, la cari este ridicat $\cos\frac{a}{m}$ sunt tote cu sotiu, câci m este fora sotiu, vom inlocui pe $\cos^2\frac{a}{m}$ cu $1-x^2$, pe $\cos^4\frac{a}{m}$ cu $(1-x^2)^2, \ldots.$ Facund apoi tote immultirile, grupand termenii ce contin puteri identice alle lui x, si insemnand erasi cu A, A_2, A_4, ... confactorii termenilor x^m, x^{m-2}, x^{m-4}, ..., equatia va lua forma:

$$Ax^m + A_2x^{m-2} + A_4x^{m-4} + \ldots = b;$$

acesta relatiune este de gradul m in x; deci pentru a determina pe $\sin\frac{a}{m}$ in functie de $\sin a$, deca m este fora sotiu, trebue a resolve ua equatiune de gradul m.

2⁰ Deca m este cu sotiu, punend in (3)* pe a in loc de $m\alpha$ si pe $\frac{a}{m}$ in loc de α, equatiunea aceea devine: *228

$$\sin a = \cos\frac{a}{m}\Big[\frac{m}{1}\cos^{m-2}\frac{a}{m}\sin\frac{a}{m} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-4}\frac{a}{m}\sin^3\frac{a}{m}$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots\ldots.(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-6}\frac{a}{m}\sin^5\frac{a}{m} - \ldots\Big].$$

Punem: $\sin a = b$, $\sin\frac{a}{m} = x$; atunci: $\cos\frac{a}{m} = \sqrt{1-x^2}$, $\cos^2\frac{a}{m} = 1-x^2$, $\cos^4\frac{a}{m} = (1-x^2)^2, \ldots.$ Parentesul contine numai puteri cu sotiu alle lui $\cos\frac{a}{m}$, câci m este cu sotiu; substituind dera in equatiune aceste valori alle lui $\sin a$, $\sin\frac{a}{m}$, $\cos\frac{a}{m}$, ..., in parentes nu vor intra de cât espressiuni rationali cari vor contine pe x; singur factorul comun $\cos\frac{a}{m}$ va fi represintat prin espressiunea irrationale $\sqrt{1-x^2}$. Deca dera, dupe ce am facut inlocuirile, vom face tote reducerile i vom insemna cu A_1, A_3, A_5, ... confactorii termenilor x^{m-1}, x^{m-3}, x^{m-5}, ..., equatiunea precedinte va lua forma:

$$\sqrt{1-x^2}\,[A_1x^{m-1}+A_3x^{m-3}+A_5x^{m-5}+\dots]=b;$$

ridicandu-o la patrat,

$$(1-x^2)[A_1x^{m-1}+A_3x^{m-3}+A_5x^{m-5}+\dots]^2=b^2.$$

Acesta equatiune este de gradul $2m$ in x; asia dera, pentru a gasi pe $\sin\frac{a}{m}$ in functie de $\sin a$, cand m este cu sotiu, trebue a resolve ua equatiune de gradul $2m$.

Essemple. 1^0. *Se se determine* $\sin\frac{a}{5}$ *cunoscund pe* $\sin a$.

228 Equatiunea (2) devine in casul de fatia:

$$\sin a=5\cos^4\frac{a}{5}\sin\frac{a}{5}-\frac{5.4.3}{1.2.3}\cos^2\frac{a}{5}\sin^3\frac{a}{5}+\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}\sin^5\frac{a}{5}$$

$$=5\cos^4\frac{a}{5}\sin\frac{a}{5}-10\cos^2\frac{a}{5}\sin^3\frac{a}{5}+\sin^5\frac{a}{5}.$$

Punem: $\sin a=b$, $\sin\frac{a}{5}=x$; prin urmare: $\cos^2\frac{a}{5}=1-\sin^2\frac{a}{5}=1-x^2$; $\cos^4\frac{a}{5}=\left(1-\sin^2\frac{a}{5}\right)^2=\left(1-x^2\right)^2=1-2x^2+x^4$. Facund tote reducerile equatia devine:

$$16x^5-20x^3+5x=b,$$

equatie de gradul al cincilea care trebue resolvata pentru a afla pe x, adeca pe $\sin\frac{a}{5}$, in functie de $\sin a$

2^0. *Se se determine* $\sin\frac{a}{8}$ *cunoscund pe* $\sin a$.

Equatiunea (3)* devine, punend : $m=8$, $m\alpha=a$, $\alpha=\frac{a}{8}$: *228

$$\sin a=\cos\frac{a}{8}\left[\frac{8}{1}\cos^6\frac{a}{8}\sin\frac{a}{8}-\frac{8.7.6}{1.2.3}\cos^4\frac{a}{8}\sin^3\frac{a}{8}\right.$$

$$\left.+\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}\cos^2\frac{a}{8}\sin^5\frac{a}{8}-\frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7}\sin^7\frac{a}{8}\right].$$

$$=\cos\frac{a}{8}\left[8\cos^6\frac{a}{8}\sin\frac{a}{8}-56\cos^4\frac{a}{8}\sin^3\frac{a}{8}\right.$$

$$\left.+56\cos^2\frac{a}{8}\sin^5\frac{a}{8}-8\sin^7\frac{a}{8}\right].$$

Punem : $\sin a=b$, $\sin\frac{a}{8}=x$; prin urmare : $\cos\frac{a}{8}=\sqrt{1-x^2}$,

$\cos^2\frac{a}{8}=1-x^2$, $\cos^4\frac{a}{8}=1-2x^2+x^4$, $\cos^6\frac{a}{8}=1-3x^2+3x^4-x^6$;

introducund aceste valori in equatiune si facund reducerile in parentes, equatiunea devine :

$$\sqrt{1-x^2}[8x-80x^3+192x^5-128x^7]=b;$$

ridicandu-o la patrat si reducund erasi,

$$64x^2-1344x^4+10752x^6-42240x^8+90112x^{10}-106496x^{12}$$
$$+65536x^{14}-16384x^{16}=b^2,$$

equatiuné de gradul al siesse-spré-diecelea care dà pe $\sin\frac{a}{8}$ in functiune de $\sin a$.

Observare. Equatiunea din urma vedem cà nu cuprinde de cât puterile cu sotiu alle lui x; deca dera vom pune $x^2=y$, ea va deveni :

$$64y-1344y^2+10752y^3-42240y^4+90112y^5-106496y^6$$
$$+65536y^7-16384y^8=b^2,$$

equatiune de gradul al optulea in y; prin urmare, chiar cand m este cu sotiu, determinarea lui $\sin\frac{a}{m}$ pote se se reduca la resolvarea unei equatiuni de gradul m.

232. *Dandu-se* $\operatorname{tg} a$ *se se determine* $\operatorname{tg}\frac{a}{m}$.

229 Punend in (4) $m\alpha=a$, $\alpha=\frac{a}{m}$, avem:

$$\operatorname{tg} a=\frac{\frac{m}{1}\operatorname{tg}\frac{a}{m}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tg}^3\frac{a}{m}+\frac{m(m-1)..(m-4)}{1.2.3.4.5}\operatorname{tg}^5\frac{a}{m}-..}{1-\frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tg}^2\frac{a}{m}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.5}\operatorname{tg}^4\frac{a}{m}-...},$$

si facund $\operatorname{tg} a=b$, $\operatorname{tg}\frac{a}{m}=x$,

$$b=\frac{\frac{m}{1}x-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\frac{m(m-1).....(m-4)}{1.2.3.4.5}x^5-....}{1-\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4-.........},$$

seu

$$\frac{m}{1}x+b\frac{m(m-1)}{1.2}x^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3-b\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4$$
$$+\frac{m(m-1)....(m-4)}{1.2.3.4.5}x^5+.....=b,$$

equatiune de gradul m care ne va da pe $x=\operatorname{tg}\frac{a}{m}$ in functiune de $\operatorname{tg} a=b$.

Essemplu. Cunoscund pe $\operatorname{tg} a$, *se se determine* $\operatorname{tg}\frac{a}{7}$.

229 Punend in (4) $m=7$, $\alpha=\frac{a}{7}$, $\operatorname{tg} m\alpha=b$, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{a}{7}=x$, avem:

$$b=\frac{\frac{7}{1}x-\frac{7.6.5}{1.2.3}x^3+\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}x^5-\frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7}x^7}{1-\frac{7.6}{1.2}x^2+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}x^4-\frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}x^6},$$

de unde

$$7x+21bx^2-35x^3-35bx^4+21x^5+7bx^6-x^7=b,$$

equatiune de gradul al sieptelea care dà pe $\operatorname{tg}\frac{a}{7}$.

ESPRESSIUNEA LUI SIN$^m a$ SI COS$^m a$ IN FUNCTIUNE DE SINUSELE SI COSINUSELE MULTIPLILOR ARCULUI

233. Fie espressiunile imaginarie conjugate

$$\cos a+\sqrt{-1}\sin a,\ \cos a-\sqrt{-1}\sin a;$$

punem

$$\left.\begin{aligned} u&=\cos a+\sqrt{-1}\sin a,\\ v&=\cos a-\sqrt{-1}\sin a.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ridicand la puterea n aceste doue equatiuni, avem dupe formula lui Moivre* : *227

$$u^n=\cos na+\sqrt{-1}\sin na,$$
$$v^n=\cos na-\sqrt{-1}\sin na.$$

Adunand, si pe urma scadiend aceste doue equatiuni, avem :

$$\left.\begin{aligned} u^n+v^n&=2\cos na,\\ u^n-v^n&=2\sqrt{-1}\sin na;\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

éra deca le immultim una cu alta,

$$u^n v^n=\cos^2 na+\sqrt{-1}\sin na\cos na-\sqrt{-1}\sin na\cos na$$
$$+\sin^2 na,$$

seu

$$u^n v^n=1. \qquad (b)$$

Equatiunile (1) adunate dau :

$$2\cos a=u+v,$$

si ridicund la puterea m,

$$2^m\cos^m a=(u+v)^m;$$

desvoltàm puterea din membrul al doilea dupe legea binomului lui Newton :

$$2^m\cos^m a = u^m + \frac{m}{1}u^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 + .. + \frac{m}{1}uv^{m-1} + v^m.$$

Deca m este cu sotiu, desvoltarea are un numer de termeni fora sotiu, si atunci termenul de la mediu-loc este

$$\frac{m(m-1)....\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2......\frac{m}{2}}u^{\frac{m}{2}}v^{\frac{m}{2}};$$

era deca m este fora sotiu, desvoltarea aré un numer de termeni cu sotiu, si la mediuloc vor fi doi termeni cu confactori egali, si anume :

$$\frac{m(m-1)....\frac{m+3}{2}}{1.2.3........\frac{m-1}{2}}u^{\frac{m+1}{2}}v^{\frac{m-1}{2}}, \text{si} \frac{m(m-1)....\frac{m+3}{2}}{1.2.3........\frac{m-1}{2}}u^{\frac{m-1}{2}}v^{\frac{m+1}{2}};$$

prin urmare grupand termenii equidistanti de estremitati (cari se scie cà au confactori egali), in casul cand m este cu sotiu, vom avé :

$$2^m\cos^m a = (u^m + v^m) + \frac{m}{1}(u^{m-1}v + uv^{m-1})$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-2}v^2 + u^2v^{m-2}) + ...$$

$$.... + \frac{m(m-1)......\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.......\frac{m}{2}}u^{\frac{m}{2}}v^{\frac{m}{2}}$$

$$= (u^m + v^m) + \frac{m}{1}uv(u^{m-2} + v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}u^2v^2(u^{m-4} + v^{m-4}) + ...$$

$$\ldots\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m}{2}}u^{\frac{m}{2}}\nu^{\frac{m}{2}};$$

era deca m este fora sotiu,

$$2^m\cos^m a=(u^m+\nu^m)+\frac{m}{1}(u^{m-1}\nu+u\nu^{m-1})$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-2}\nu^2+u^2\nu^{m-2})+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\left(u^{\frac{m+1}{2}}\nu^{\frac{m-1}{2}}+u^{\frac{m-1}{2}}\nu^{\frac{m+1}{2}}\right)$$

$$=(u^m+\nu^m)+\frac{m}{1}u\nu(u^{m-2}+\nu^{m-2})+\frac{m(m-1)}{1.2}u^2\nu^2(u^{m-4}+\nu^{m-4})+\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}u^{\frac{m-1}{2}}\nu^{\frac{m-1}{2}}(u+\nu).$$

Inse dupe (a) si (b),

$$u^m+\nu^m=2\cos ma,\ u^{m-2}+\nu^{m-2}=2\cos(m-2)a,\ldots\ldots,$$

$$u\nu=1,\ u^2\nu^2=1,\ \ldots\ldots;$$

substituind aceste valori in equatiunile precedente, avem, pentru casul cand m este cu sotiu:

$$2^m\cos^m a=2\cos ma+2\frac{m}{1}\cos(m-2)a+2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)a+\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m}{2}},$$

si divisend ambi membri cu 2,

$$2^{m-1}\cos^m a = \cos ma + \frac{m}{1}\cos(m-2)a + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)a + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{m(m-1)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}; \qquad (2)$$

era cand m este fora sotiu,

$$2^m\cos^m a = 2\cos ma + 2\frac{m}{1}\cos(m-2)a + 2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)a +$$

$$\ldots\ldots + 2\frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\cos a,$$

si divisend ambii membri cu 2,

$$2^{m-1}\cos^m a = \cos ma + \frac{m}{1}\cos(m-2)a + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)a + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\cos a. \qquad (3)$$

Essemple. 1°. *Se se desvolte* $\cos^6 a$ *in functie de* $\cos a$, $\cos 2a$, ...

Formula (2) dà, pentru $m=6$:

$$2^5\cos^6 a = \cos 6a + \frac{6}{1}\cos 4a + \frac{6.5}{1.2}\cos 2a + \frac{1}{2}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3},$$

seu

$$32\cos^6 a = \cos 6a + 6\cos 4a + 15\cos 2a + 10.$$

2°. *Se se desvolte* $\cos^5 a$ *in functie de* $\cos a$, $\cos 2a$.....

Formula (3), pentru $m=5$, dà:

$$2^4\cos^5 a = \cos 5a + \frac{5}{1}\cos 3a + \frac{5.4}{1.2}\cos a,$$

seu

$$16\cos^5 a = \cos 5a + 5\cos 3a + 10\cos a.$$

234. Scadiend equatiunile (1) una din alta, avem:

$$2\sqrt{-1}\sin a = u - \nu;$$

ridicund la puterea m ambii membri si desvoltand binomul din membrul al doilea,

$$2^m(\sqrt{-1})^m \sin^m a = (u-\nu)^m = u^m - \frac{m}{1}u^{m-1}\nu + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}\nu^2$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}u^{m-3}\nu^3 + \dots\dots \quad (A)$$

Deca m este cu sotiu, desvoltarea din membrul al doilea are un numer fora sotiu de termeni, si termenul de la mediuloc este

$$\pm\frac{m(m-1)\dots\dots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\dots\dots\frac{m}{2}}u^{\frac{m}{2}}\nu^{\frac{m}{2}};$$

prin urmare grupand termenii equidistanti de estremitati cari se scie cà au aceiasi confactori si acelleasi semne, avem:

$$2^m(\sqrt{-1})^m \sin^m a = (u^m + \nu^m) - \frac{m}{1}(u^{m-1}\nu + u\nu^{m-1})$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-2}\nu^2 + u^2\nu^{m-2}) - \dots$$
$$\dots \pm \frac{m(m-1)\dots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\dots\frac{m}{2}}u^{\frac{m}{2}}\nu^{\frac{m}{2}}.$$

$$=(u^m+\nu^m) - \frac{m}{1}u\nu(u^{m-2}+\nu^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}u^2\nu^2(u^{m-4}+\nu^{m-4}) - \dots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}u^{\frac{m}{2}}\nu^{\frac{m}{2}}.$$

Inse, dupe equatiunile (a) si (b),

$$u^{m}+\nu^{m}=2\cos ma,\ u^{m-2}+\nu^{m-2}=2\cos(m-2)a,\ldots$$

$$u\nu=1,\ u^2\nu^2=1,\ldots\ldots$$

Substituind aceste valori in equatie si divisand ambii membri cu 2,

$$2^{m-1}(\sqrt{-1})^{m}\sin ma=\cos ma-\frac{m}{1}\cos(m-2)a$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)a-\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{1}{2}.\frac{m(m-1)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}. \quad (4)$$

Aci $(\sqrt{-1})^{m}$ nu este imaginaria, câci dupe algebra,

$$(\sqrt{-1})^{m}=(-1)^{\frac{m}{2}},$$

si fiind-cà m este cu sotiu, $\frac{m}{2}$ va fi un numer intreg, si espressiunea $(-1)^{\frac{m}{2}}$ va fi reale.

Deca m este fora sotiu, desvoltarea din membrul al doilea al equatiunei (A) are un numer cu sotiu de termeni, si prin urmare la mediuloc se afla doi termeni cu confactori egali cari sunt:

$$\pm\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1\,2\ldots\frac{m-1}{2}}u^{\frac{m+1}{2}}\nu^{\frac{m-1}{2}},\ \text{si}\ \mp\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}}u^{\frac{m-1}{2}}\nu^{\frac{m+1}{2}}.$$

Deca dera grupàm termenii equidistanti de estremitati, cari au confactori egali si semne contrarie, equatiunea (A) se face:

$$2^m(\sqrt{-1})^m\sin^m a=(u^m-\nu^m)-\frac{m}{1}(u^{m-1}\nu-u\nu^{m-1})$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-2}\nu^2-u^2\nu^{m-2})-\ldots\ldots$$

$$\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}(u^{\frac{m+1}{2}}\nu^{\frac{m-1}{2}}-u^{\frac{m-1}{2}}\nu^{\frac{m+1}{2}})$$

$$=(u^m-\nu^m)-\frac{m}{1}u\nu(u^{m-2}-\nu^{m-2})+\frac{m(m-1)}{1.2}u^2\nu^2(u^{m-4}-\nu^{m-4})-\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}u^{\frac{m-1}{2}}\nu^{\frac{m-1}{2}}(u-\nu);$$

substituind aci valorile date de equatiunile (a) si (b) avem:

$$2^m(\sqrt{-1})^m\sin^m a=2\sqrt{-1}\sin ma-2\frac{m}{1}\sqrt{-1}\sin(m-2)a$$

$$+2\frac{m(m-1)}{1.2}\sqrt{-1}\sin(m-4)a-\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm2\frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\sqrt{-1}\sin a;$$

si divisend cu $2\sqrt{-1}$,

$$2^{m-1}(\sqrt{-1})^{m-1}\sin^m a=\sin ma-\frac{m}{1}\sin(m-2)a$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)a-\ldots\ldots$$

$$\ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\sin a. \qquad (5)$$

Espressiunea $(\sqrt{-1})^{m-1}$ din membrul antaiu nu mai te imaginaria, câci ea este tot una cu $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$; si m fiind fora sotiu, $m-1$ este cu sotiu, era $\frac{m-1}{2}$ este un numer intreg; prin urmare espressiunea $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ este reale.

Essemple. 1°. *Se se aetermine sin*^{6}a *cunoscund pe cosa, cos2a, . . .*

Formula (4), in care punem $m=6$, dà:

$$2^5(\sqrt{-1})^6\sin^6 a=\cos 6a-\frac{6}{1}\cos 4a+\frac{6.5}{1.2}\cos 2a-\frac{1}{2}.\frac{6\ 5.4}{1.2.3};$$

inse

$$(\sqrt{-1})^6=(-1)^{\frac{6}{2}}=-1;$$

deci

$$-32\sin^6 a=\cos 6a-6\cos 4a+15\cos 2a-10.$$

2°. *Se se determine sin*^{5}a *cunoscund pe sina, sin2a,.....*

Formula (5), in care punem $m=5$, dà:

$$2^4(\sqrt{-1})^4\sin^5 a=\sin 5a-\frac{5}{1}\sin 3a+\frac{5.4}{1.2}\sin a;$$

inse

$$(\sqrt{-1})^4=(-1)^{\frac{4}{2}}=1;$$

deci

$$16\sin^5 a=\sin 5a-5\sin 3a+10\sin a.$$

CAPITULUL II.

RESOLUTIUNEA EQUATIUNEI BINOME $z^m=1$, SI POLIGONELE REGULATE.

Resolutiunea equatiunei binome $z^m=1$.

235. Ori-ce quantitate, fie reale, fie imaginaria, scim* *225
cà se pote represinta prin ua espressiune de forma :

$$A(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi);$$

deca dera z representa pe una din radecinile equatiunei binome

$$z^m=1, \qquad (1)$$

putem pune tot-de-una :

$$z=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi. \qquad (a)$$

Pentru ca valorea (a) a lui z se fie in adever ua radecina a equatiunei (1), trebue ca pusa in acesta equatiune so o identifice; adeca trebue se avem:

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m=1,$$

seu, dupe formula lui Moivre,

$$\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi=1.$$

Egaland quantitatile reale intre sine, si pre celle imaginarie assemenea,

$$\cos m\varphi=1,\ \sqrt{-1}\sin m\varphi=0 \text{ seu: } \sin m\varphi=0,$$

adeca $m\varphi$ este un arc al carui cosinus este $+1$ si sinus 0; inse tote arcele coprinse in espressiunea

$$m\varphi=2k\pi,$$

in care k este un numer intreg ore-care, implinesc a-
8,9,17,18 cesta conditiune. De aci

$$\varphi=\frac{2k\pi}{m},$$

si punend acesta valore in (a),

$$z=\cos\frac{2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}. \qquad (2)$$

Acesta equatiune ne va da tote radecinile equatiunei (1) deca vom da lui k diferite valori.

236. Pentru valorile $k=k'$ si $k=k''$, radecinile equatiunei (1) vor fi:

$$z=\cos\frac{2k'\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k'\pi}{m},$$
$$z=\cos\frac{2k''\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k''\pi}{m};$$

cand aceste doue radecini sunt egale avem:

$$\cos\frac{2k'\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k'\pi}{m}=\cos\frac{2k''\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k''\pi}{m},$$

de unde

$$\cos\frac{2k'\pi}{m}=\cos\frac{2k''\pi}{m}, \quad \sin\frac{2k'\pi}{m}=\sin\frac{2k''\pi}{m}.$$

Pentru ca aceste conditii se fie implinite, fiind-cà si perioda sinusului si a cosinusului este 2π, trebue se avem:

$$\frac{2k'\pi}{m}-\frac{2k''\pi}{m}=2n\pi,$$

n fiind un numer intreg ore care; de aci

$$k'-k''=mn.$$

Asia-dera deca diferentia $k'-k''$ intre doue valori ce dàm lui k este un multiplu al lui m, celle doue valori correspundiatorie aflate pentru radecina sunt egale. De aci urmedia cà pentru a afla tote radecinile equatiunei (1), nu este necessariu a da in (2) lui k de cât valorile de la 0 pene la $m-1$; câci deca am da lui k si valori mai mari de cât m, valorile ce am afla atunci pentru radecina ar fi identice cu celle aflate deja cand am dat lui k valori mai mici de cât m.

237. Deca m este fora sotiu, punend in (2) $k=0$, avèm:

$$z=\cos 0^0+\sqrt{-1}\sin 0^0=1;$$

equatia (1) are dera in acest cas ua radecina reale.

Deca m este cu sotiu, cand vom face in (2) $k=0$, vom ave: $z=1$; si cand vom pune: $k=\frac{m}{2}$,

$$z=\cos\pi+\sqrt{-1}\sin\pi=-1;$$

equatia (1) in casul acesta are doue radecini reale.

Deca in (2) vom da lui k valorea $m-k$, vom avé:

$$z=\cos\frac{2(m-k)\pi}{m}+\sqrt{-1}\frac{2(m-k)\pi}{m}$$

$$=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{m}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{m}\right)$$

$$=\cos\frac{2k\pi}{m}-\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m};$$

si acesta valore imaginaria este conjugata cu cea data de (2); asia dera *radecinile imaginarie alle equatiunei* (1) *sunt conjugate doue câte doue.* Putem dera coprinde tote radecinile equatiunei (1) in formula:

$$z=\cos\frac{2k\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}, \tag{3}$$

in care dàm lui k numai valorile de la 0 pene la $\frac{m}{2}$ deca

m este cu sotiu, si de la 0 pene la $\frac{m-1}{2}$ deca m este fora sotiu. La fie-care valore data lui k vor correspunde câte doue valori imaginarie alle radecinei, conjugate una cu alta.

238. Deca

$$m=2n+1, \tag{b}$$

equatiunea $z^m=1$ pote se se reduca a fi de gradul n. In adever, in

$$z^m=1$$

trecund pe 1 in membrul antaiu si divisend cu $z-1$, vom avé:

$$z^{m-1}+z^{m-2}+z^{m-3}+\ldots+z^3+z^2+z+1=0.$$

Divisend cu z^m si avend in vedere cà, dupe (b), $n=\frac{m-1}{2}$,

$$z^n+z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+\frac{1}{z^{n-3}}+\frac{1}{z^{n-2}}+\frac{1}{z^{n-1}}+\frac{1}{z^n}+1=0,$$

seu

$$\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)+\left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)+\left(z^{n-2}+\frac{1}{z^{n-2}}\right)+\ldots+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0. \tag{4}$$

Punem

$$z+\frac{1}{z}=x,\quad z^n+\frac{1}{z^n}=V_n. \tag{c}$$

Dupe acesta conventiune,

$$V_{n-1}=z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}},\; V_{n-2}=z^{n-2}+\frac{1}{z^{n-2}},\ldots;$$

prin urmare

$$xV_{n-1}-V_{n-2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)-\left(z^{n-2}+\frac{1}{z^{n-2}}\right)=z^n+\frac{1}{z^n},$$

seu

$$V_n = xV_{n-1} - V_{n-2}. \qquad (d)$$

Deca in a doua din equatiunile (c) vom pune pe rand $n=0$, $n=1$, vom avé:

$$V_0 = 2,\ V_1 = z + \frac{1}{z} = x.$$

Cu ajutorul acestor doue valori vom puté afla succesiv valorile lui $v_2, v_3, \ldots, v_n$, introducundu-le in formula (d):

$$V_2 = xV_1 - V_0 = x^2 - 2,$$
$$V_3 = xV_2 - V_1 = x(x^2 - 2) - x = x^3 - 3x,$$
$$V_4 = xV_3 - V_2 = x(x^3 - 3x) - (x^2 - 2) = x^4 - 4x^2 + 2,$$

. . . .

Substituind tote aceste valori in (4) in locul quantitatilor $\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right), \left(z^3+\frac{1}{z^3}\right), \left(z^4+\frac{1}{z^4}\right), \ldots$, vom gasi ua equatiune de gradul n in x.

Se gassim espressiunea generale a radecinilor acestei equatiuni. Espressiunea generale a radecinilor equatiunei $z^m - 1 = 0$ este*: *235,(2)

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m},$$

de unde

$$\frac{1}{z} = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi^*}{m}.$$ *226,cor.1

Adunand aceste doue egalitati avém:

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{2k\pi}{m},$$

seu

$$x = 2\cos\frac{2k\pi}{m}. \qquad (5)$$

In aceste equatiune trebue se dàm lui k tote valorile de la 1 pene la $\frac{m-1}{2}$.

Punend valorile lui x gàsite prin (5) in equatiunea

$$z+\frac{1}{z}=x,$$

vom puté obtine valorile lui z.

PROPRIETATILE RADECINILOR EQUATIUNEI $z^m=1$.

239. *Deca ridicàm la ua putere intrega una din radecinile equatiunei* $z^m=1$, *acesta putere este si ea ua radecina a equatiunei.*

Fie

$$z'=\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{m}$$

una din radecinile equatiunei. Ridicund la puterea intrega k ambii membri, vom avé dupe formula lui Moivre:

$$z'^k=\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{m}\right)^k=\cos\frac{2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{m},$$

235 si acesta valore a lui z'^k fiind cuprinsa in formula (2), care dà tote radecinile equatiunei $z^m=1$, este si ea ua radecina a acellei equatiuni. C.C.T.D.

240. *Deca* $m=np$, n *si* p *fiind doue numere prime intre elle, celle* m *radecini alle equatiunei* $z^m=1$ *se pot obtine immultind celle* n *radecini alle equatiunei* $z^n=1$ *prin celle* p *radecini alle equatiuuei* $z^p=1$.

Radecinile equatiunilor

$$z^m=z^{np}=1,\ z^n=1,\ z^p=1,$$

sunt esprimate respectiv prin formulele generale :

$$\alpha=\cos\frac{2k\pi}{np}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{np},$$

$$\beta=\cos\frac{2\xi\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\xi\pi}{n},$$

$$\gamma=\cos\frac{2\eta\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\eta\pi}{p},$$

k,ξ,η, fiind nisce numere arbitrarie. Fiind-cà p si n sunt prime intre elle, putem tot-de-una gasi doue numere intregi ξ si η, positive seu negative, cari se justifice equatia :

$$p\xi+n\eta=k,$$

din care

$$\frac{2\xi\pi}{n}+\frac{2\eta\pi}{p}=\frac{2k\pi}{np}.$$

Introducund acesta valore in espressiunea de mai sus a lui α, avem :

$$\alpha=\cos\left(\frac{2\xi\pi}{n}+\frac{2\eta\pi}{p}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(\frac{2\xi\pi}{n}+\frac{2\eta\pi}{p}\right)$$

$$=\cos\frac{2\xi\pi}{n}\cos\frac{2\eta\pi}{p}-\sin\frac{2\xi\pi}{n}\sin\frac{2\eta\pi}{p}$$

$$+\sqrt{-1}\sin\frac{2\xi\pi}{n}\cos\frac{2\eta\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\eta\pi}{p}\cos\frac{2\xi\pi}{n}$$

$$=\cos\frac{2\xi\pi}{n}\left(\cos\frac{2\eta\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\eta\pi}{p}\right)$$

$$+\sqrt{-1}\sin\frac{2\xi\pi}{n}\left(\cos\frac{2\eta\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\eta\pi}{p}\right),$$

seu, in fine,

$$\alpha=\left(\cos\frac{2\xi\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\xi\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\eta\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\eta\pi}{p}\right).$$

Primul parentes din membrul al doilea vedem cà este radecina β a equatiunei $z^n=1$; era al doilea parentes e radecina γ a equatiunel $z^p=1$; prin urmare teorema este demonstrata.

241. *Deca* m *nu este un numer prim, radecinile equatiunei* $z^m=1$ *se pot gasi immultind una cu alta radecinile equatiunilor de aceasi forma si de grade egale cu factorii primi seu cu puterile factorilor primi ai lui* m.

Asia, deca $m=npqr$, n,p,q,r fiind nisce numere prime seu puteri de numere prime, dic sà radecinile equatiunei $z^m=z^{npqr}=1$ se gasesc immultind una cu alta radecinile equatiunilor $z^n=1$, $z^p=1$, $z^q=1$, $z^r=1$.

In adever, immultind radecinile equatiunei $z^n=1$ cu
240 alle equatiunei $z^p=1$, vom avé radecinile equatiunei $z^{np}=1$; assemenea, deca immultim radecinile acestei din urma equatiuni prin alle equatiunei $z^q=1$, vom obtine radecinile equatiunei $z^{npq}=1$; si acestea immultite prin alle equatiunei $z^r=1$, ne vor da radecinile equatiunei $z^{npqr}=z^m=1$. C.C.T.D.

Essemplu. Se resolvàm equatiunea $z^7=1$.

237 Punend in (3) $m=7$, obtinem formula urmatore care dà tote radecinile equatiunei :

$$z=\cos\frac{2k\pi}{7}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{7};$$

dand lui k valorile 0,1,2,3, gassim radecinile equatiunei:

$$z^{\mathrm{I}}=\cos 0^0=1,$$

$$z^{\mathrm{II}}=\cos\frac{2\pi}{7}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{7},\quad z^{\mathrm{III}}=\cos\frac{2\pi}{7}-\sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{7},$$

$$z^{\mathrm{IV}}=\cos\frac{4\pi}{7}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{4\pi}{7},\quad z^{\mathrm{V}}=\cos\frac{4\pi}{7}-\sqrt{-1}\,\sin\frac{4\pi}{7},$$

$$z^{\mathrm{VI}}=\cos\frac{6\pi}{7}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{6\pi}{7},\quad z^{\mathrm{VII}}=\cos\frac{6\pi}{7}-\sqrt{-1}\,\sin\frac{6\pi}{7}.$$

Deca aplicàm metoda pe la § 238, vom avé, dupe ce vom divide equatiunea data $z^7-1=0$ prin $z-1=0$:

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0,$$

pre care divisandu-o cu z^3,

$$\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0; \qquad \text{(A)}$$

punem aci

$$z+\frac{1}{z}=x,\ z^2+\frac{1}{z^2}=V_2,\ z^3+\frac{1}{z^3}=V_3;$$

238 avem :

$$V_2=z^2+\frac{1}{z^2}=x_2-2,$$

$$V_3=z^3+\frac{1}{z^3}=x^3-3x;$$

punend aceste valori in (A) si reducund obtinem equatiunea :

$$x^3+x^2-2x-1=0$$

a carii solutiune generale este coprinsa in formula :

$$x=2\cos\frac{2k\pi}{7}.$$

Dand lui k valorile 1,2,3, avem :

$$x'=2\cos\frac{2\pi}{7},\ x''=2\cos\frac{4\pi}{7},\ x'''=2\cos\frac{6\pi}{7}.$$

Inse equatiunea $z+\frac{1}{z}=x$, dà :

$$z^2-zx+1=0$$

din care

$$z=\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}=\frac{x}{2}\pm\sqrt{-\left(1-\frac{x^2}{4}\right)};$$

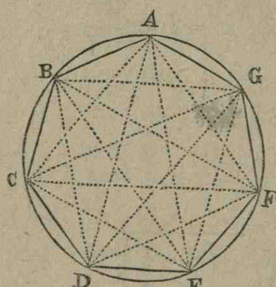
substituind pe rand in acesta equatiune valorile lui x gasite mai sus avem :

$$\zeta^{\text{II}}=\cos\frac{2\pi}{7}+\sqrt{-\left(1-\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)}=\cos\frac{2\pi}{7}+\sqrt{-\sin^2\frac{2\pi}{7}}$$
$$=\cos\frac{2\pi}{7}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{7},$$
$$\zeta^{\text{III}}=\cos\frac{2\pi}{7}-\sqrt{-\left(1-\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)}=\cos\frac{2\pi}{7}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{7},$$
$$\zeta^{\text{IV}}=\cos\frac{4\pi}{7}+\sqrt{-\left(1-\cos^2\frac{4\pi}{7}\right)}=\cos\frac{4\pi}{7}+\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{7},$$
$$\zeta^{\text{V}}=\cos\frac{4\pi}{7}-\sqrt{-\left(1-\cos^2\frac{4\pi}{7}\right)}=\cos\frac{4\pi}{7}-\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{7},$$
$$\zeta^{\text{VI}}=\cos\frac{6\pi}{7}+\sqrt{-\left(1-\cos^2\frac{6\pi}{7}\right)}=\cos\frac{6\pi}{7}+\sqrt{-1}\sin\frac{6\pi}{7},$$
$$\zeta^{\text{VII}}=\cos\frac{6\pi}{7}-\sqrt{-\left(1-\cos^2\frac{6\pi}{7}\right)}=\cos\frac{6\pi}{7}-\sqrt{-1}\sin\frac{6\pi}{7},$$

pe lunga cari adaogind si radecina $\zeta'=1$ data de equa-
241 tia $\zeta-1=0$, prin care am divisat equatia data, gasim tote radecinile aflate si prin prima metoda.

DESPRE POLIGONELE REGULATE.

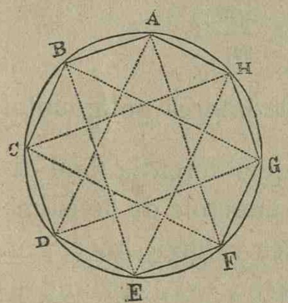
242. Se luàm ca essemplu circumferentia impartita in siepte parti egale. Deca unim punctele de divisiune *din unul in unul* seu *din siesse in siesse,* obtinem un poligon regulat inscris de siepte laturi, ABCDEFG; in figura acest poligon este insemnat cu trassatura continua. Deca am uni punctele de divisiune *din doue in doue* seu *din cinci in cinci,* am obtine un alt poligon regulat de siepte laturi,



ACEGBDF, insemnat pe figura cu linii punctate. Unind in fine punctele de divisiune alle circumferentiei *din trei in trei* seu *din patru in patru*, vom forma un nou poligon regulat de siepte laturi, ADGCFBE, care in figura este insemnat cu linii si puncte. Aceste doue din urma se numesc *poligone regulate radiate.*

Ne putem lesne convinge cà ori-cum am uni alt-fel punctele de divisiune, nu putem obtine mai mult de cât aceste trei poligone regulate de siepte laturi.

Fie inca circumferentia impartita in opt parti egale.



Deca unim punctele de divisiune *din unul in unul* seu *din siepte in siepte*, obtinem un octogon regulat, ABCDEFGH, care in figura este insemnat cu trasatura continua. Unind punctele de divisiune *din trei in trei* seu *din cinci in cinci*, am obtine un alt poligon regulat de opt laturi, ADGBEHCF, insemnat infigura cu linii punctate. Acest din urma este un poligon radiat.

Aceste doue sunt singurele poligone regulate de opt laturi ce se pot forma; câci deca am uni verfurile *din doue in doue* seu *din siesse in siesse*, am obtine un poligon regulat de patru laturi, era nu de opt; deca am uni verfurile *din patru in patru*, poligonul s'ar reduce numai la un diametru al circumferentiei.

Facund assemenea pentru circumferentia divisata in ori-câte parti egale, vom puté stabili legea urmatore: *sunt numai atatea poligone regulate de* m *laturi, câte numere prime cu* m *sunt mai mici de cât* $\frac{m}{2}$. Asia esiste patru poligone regulate de 15 laturi, câci sunt patru numere mai mici de cât $\frac{15}{2}$ cari se fie prime cu 15, si anume: 1,2,4,7.

243. Problema divisiunei circumferentiei in m parti egale depinde de resolutiunea algebrica a equatiunei binome

$$z^m=1,$$

235 câci scim cà radecinile acestei equatiuni sunt date prin formula

$$z=\cos\frac{2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Inse $\frac{2k\pi}{m}$ este arcul subintins de laturea poligonului regulat care se formedia cand, circumferentia fiind divisata in m parti egale, vom uni punctele de divisiune din k in k. Deca dera vom cunosce valorea lui z prin resolutiunea *algebrica* a equatiunei $z^m=1$, egaland acesta valore cu $\cos\frac{2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}$, vom puté cunosce liniile trigonometrice alle arcului $\frac{2k\pi}{m}$, si pe urma chiar laturea poligonului regulat de m laturi.

241 Am vediut inca cà deca m nu este un numer prim, resolutiunea equatiunei $z^m=1$ pote se se reduca la resolutiunea unor equatiuni de un grad mai mic; prin urmare in acest cas problema divisiunei circumferentiei in m parti egale se pote simplifica.

244. *Divisiunea circumferentiei in trei si in siesse parti egale.* — Acesta problema depinde de resolutiunea algebrica a equatiunei

$$z^3-1=0,$$

care divisata prin $z-1=0$ dà:

$$z^2+z+1=0.$$

Divisend cu z si punend $z+\frac{1}{z}=x$,

$$x+1=0,$$

din care

$$x=-1.$$

Inse dupe formula (5)* radecina equatiunei $x+1=0$ *238
este data prin formula:

$$x=2\cos\frac{2\pi}{3},$$

seu

$$x=-2\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{\pi}{3}=-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{6};$$

egaland acesta valore trigonometrica a lui x cu valorea sea algebrica, gasita mai sus, avem:

$$2\sin\frac{\pi}{6}=1,$$

si $2\sin\frac{\pi}{6}=2\sin 30^0$ este laturea exagonului regulat inscris.* *64

Din

$$2\sin\frac{\pi}{6}=1$$

avem:

$$\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

deci

$$\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

seu

$$2\sin\frac{\pi}{2}=2\sin 60^0=\sqrt{3}.$$

64 Acesta este laturea trianghiului equilateral inscris.

245. *Divisiunea circumferentiei in cinci si in diece parti egale.*— Acesta problema depinde de resolutiunea algebrica a equatiunei

$$z^5-1=0.$$

O dividem prin

$$z-1=0,$$

apoi prin z^2, si avem :

$$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Punem

$$z+\frac{1}{z}=x,$$

de unde

$$z^2+\frac{1}{z^2}=x^2-2;$$

substituind aceste valori in equatiune si reducund, avem :

$$x^2+x-1=0. \qquad \text{(a)}$$

Radecinile acestei equatiuni sunt coprinse in formu-
238 la generala (5) :

$$x=2\cos\frac{2k\pi}{5},$$

in care dand lui k valorile 1 si 2,

$$x=2\cos\frac{2\pi}{5}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=2\sin\frac{\pi}{10},$$

si

$$x=2\cos\frac{4\pi}{5}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{5}\right)=-\,2\sin\frac{3\pi}{10}.$$

De alta parte radecinile algebrice alle equatiunei (a) sunt :

$$x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

si

$$x=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

si egaland radecinile algebrice cu celle trigonometrice,

$$2\sin\frac{\pi}{10}=2\sin 18^0=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

si

$$2\sin\frac{3\pi}{10}=2\sin 54^0=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Acestea sunt valorile laturilor cellor doue poligone regulate de diece laturi*; cea d'antaiu este laturea de- *67
cagonului ordinar, cea de a doua a decagonului radiat ce se formedia unind punctele de divisiune alle circumferentiei din trei in trei.

Pentru a gasi laturile pentagonelor regulate, vedem cà

$$\sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5},\ \text{si}\ \sin\frac{3\pi}{10}=\cos\frac{\pi}{5};$$

deci

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}}=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

seu

$$2\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2};$$

si

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}}=\sqrt{1-\sin^2\frac{3\pi}{10}}=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

seu

$$2\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2};$$

$2\sin\frac{2\pi}{5}=2\sin 72^0$ si $2\sin\frac{\pi}{5}=2\sin 36^0$ sunt laturile pentagonului regulat radiat si a pentagonului regulat ordinariu.

246. *Divisiunea circumferentiei in cinci-spre-diece parti egale.* Ea depinde de resolutiunea algebrica a equatiunei

$$z^{15}-1=0.$$

Inse fiind-cà $15=3\times5$, pentru a avea rădecinile equatiunei $z^{15}-1=0$, n'avem de cát se immultim radecinile equatiunei

$$z^3-1=0$$

prin alle equatiunei

*240 $$z^5-1=0*.$$

Lasand la ua parte radecina reale $z=1$, atât pentru $z^3-1=0$ cât si pentru $z^5-1=0$, radecinile lui $z^3-1=0$

237,(3) sunt :

$$\cos\frac{\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}.$$

244 Inse am gasit

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

de unde

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

asia-dera aceste radecini sunt :

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\sqrt{-1}\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-\sqrt{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}\right\}\quad\text{(a)}$$

Assemenea, radecinile equatiunei $z^5-1=0$ sunt* : *237,(3)

$$\cos\frac{2\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}$$

si

$$\cos\frac{4\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}.$$

Inse* *245

$$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\ \sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

de unde

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4},\ \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Asia dera radecinile equatiunei $z^5-1=0$ sunt :

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{5}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}+\sqrt{-1}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\\ \cos\frac{\pi}{5}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}-\sqrt{-1}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\\ \cos\frac{2\pi}{5}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}+\sqrt{-1}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\\ \cos\frac{2\pi}{5}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}-\sqrt{-1}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.\end{aligned}\right\}\quad\text{(b)}$$

Immultind radecinile (a) cu (b), avend in vedere for-
226 mulele (1), (1bis), (1ter), vom obtine urmatorele radecini alle equatiunei $\zeta^{15}-1=0$:

$$\cos\frac{8\pi}{15}+\sqrt{-1}\sin\frac{8\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{3(6+2\sqrt{5})}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\frac{2\pi}{15}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{3(6+2\sqrt{5})}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\frac{11\pi}{15}+\sqrt{-1}\sin\frac{11\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{3(6-2\sqrt{5})}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)=\frac{1}{8}\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{3(6-2\sqrt{5})}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\frac{2\pi}{15}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}\right)-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{3(6+2\sqrt{5})}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\frac{8\pi}{15}-\sqrt{-1}\sin\frac{8\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}\right)-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{3(6+2\sqrt{5})}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right)-\sqrt{-1}\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)=\frac{1}{8}\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}\right)-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{3(6-2\sqrt{5})}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\frac{11\pi}{15}-\sqrt{-1}\sin\frac{11\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{3(6-2\sqrt{5})}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

Inse

$$\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right)=\cos\frac{\pi}{15};\ \sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)=-\sin\frac{\pi}{15};\ \cos\frac{8\pi}{15}=-\cos\frac{7\pi}{15};$$

$$\sin\frac{8\pi}{15}=\sin\frac{7\pi}{15};\ \cos\frac{11\pi}{15}=-\cos\frac{4\pi}{15};\ \sin\frac{11\pi}{15}=\sin\frac{4\pi}{15}.$$

Apoi avem:

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}=1+\sqrt{5};\ \sqrt{6-2\sqrt{5}}=1-\sqrt{5};$$
$$\sqrt{3(6+2\sqrt{5})}=\sqrt{15}+\sqrt{3};\ \sqrt{3(6-2\sqrt{5})}=\sqrt{15}-\sqrt{3}.$$

Asia-dera radecinile de mai sus devin:

$$\cos\frac{\pi}{15}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{3(10+2\sqrt{5}}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\frac{\pi}{15}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}\right)$$
$$+\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\frac{2\pi}{15}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}\right)$$
$$+\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\frac{2\pi}{15}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos\frac{4\pi}{15}+\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{5}-\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left\{\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\},$$
$$\cos\frac{4\pi}{15}-\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{5}-\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}\right)$$
$$+\frac{\sqrt{-1}}{8}\left\{\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\},$$
$$\cos\frac{7\pi}{15}+\sqrt{-1}\sin\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left\{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\},$$
$$\cos\frac{7\pi}{15}-\sqrt{-1}\sin\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}\right)$$
$$+\frac{\sqrt{-1}}{8}\left\{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}.$$

Egaland quantitatile imaginarie din ambele membre alle acestor egalitati si immultind de ambele parti cu $\frac{2}{\sqrt{-1}}$, avem, luand numai valorile positive :

$$2\sin\frac{\pi}{15}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$
$$2\sin\frac{2\pi}{15}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$
$$2\sin\frac{4\pi}{15}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$
$$2\sin\frac{7\pi}{15}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

Cea d'antaiu din aceste equatiuni dà valorea laturei poligonului regulat ordinar de cinci-spre-diece laturi; celle-alte trei dau laturile poligonelor radiate de cinci-spre-diece laturi ce se formedia unind punctele de divisiune alle circumferentiei din doue in doue, din patru in patru si din siepte in siepte.

CAPITULUL III.

DERIVAREA SI DESVOLTAREA IN SERIA A FUNCTIUNILOR CIRCULARIE.

Derivata sinusului.

247. *Derivata* unei functiuni se numesce raportul crescerii functiunei catrė crescerea variabilei, cand aceste doue cresceri se apropia indefinit de zero.

Fie functiunea

$$y=\sin x. \qquad (1)$$

Dand variabilei x ua crescere ore-care h, functiunea y va lua si ea ua crescere ore-care k, si equatiunea va deveni

$$y+k=\sin(x+h).$$

Scadiend din acesta equatiune pe (1),

$$k=\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

si divisend de ambele parti cu h,

$$\frac{k}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h},$$

seu

$$\frac{k}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Deca crescerea h a variabilei tinde catre zero, k fiind crescerea functiunei, raportul $\frac{k}{h}$ va tinde catre derivata y' a functiunei (1). Apoi cand h tinde catre zero, rapor-
75tul $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tinde catre 1, era factorul $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ catre $\cos x$; prin urmare la limita vom avé:

$$\lim\frac{k}{h}=y'=\cos x.$$

Asia-dera *derivata sinusului este cosinusul.*

DERIVATA COSINUSULUI.

248. Fia equatiunea

$$y=\cos x.$$

Dand variabilei x crescerea h, functiunea va deveni erasi:

$$y+k=\cos(x+h),$$

din care scadiend pe cea precedinte si impartind cu h,

$$\frac{k}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h},$$

seu

$$\frac{k}{h}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

La limita, cand h va deveni infinit de mic, acesta equatiune va deveni:

$$\lim\frac{k}{h}=y'=-\sin x.$$

Asia-dera *derivata cosinusului este sinusul luat cu semnul contrariu.*

Se luàm de mai multe ori derivatele succesive alle sinusului si alle cosinusului unui arc:

$$\begin{array}{ll} y=\sin x, & y=\cos x, \\ y'=\cos x, & y'=-\sin x, \\ y''=-\sin x, & y''=-\cos x, \\ y'''=-\cos x, & y'''=\sin x, \\ y^{\text{IV}}=\sin x, & y^{\text{IV}}=\cos x, \\ y^{\text{V}}=\cos x, & y^{\text{V}}=-\sin x, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Vedem dera cà derivatele sinusului si cosinusului se reproduc periodic din patru in patru.

DERIVATA TANGENTEI SI A COTANGENTEI.

249. Fie se se derivedie functiunea

$$y=\operatorname{tg}x.$$

Inlocuind pe $\operatorname{tg}x$ prin $\frac{\sin x}{\cos x}$ avem:

$$y=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Luand derivata acestei equatiuni, avend in vedere cà membrul al doilea este ua fractiune,

$$y'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x},$$

si fiind-cà $\cos^2x+\sin^2x=1$,

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Deci *derivata tangentei este inversa patratului cosinusului.*

250. Assemenea, derivand functiunea

$$y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},$$

avem:

$$y'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Derivata cotangentei este egale cu inversa patratului sinusului luata cu semnul contrariu.

DERIVATA SECANTEI SI COSECANTEI.

251. Avem functiunea:

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x},$$

seu, dupe algebra,

$$y=(\cos x)^{-1}.$$

Derivàm ambii membri, avend in vedere cà cel de al doilea este ua putere:

$$y'=-(\cos x)^{-2}(-\sin x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Derivata secantei este sinusul impartit cu patratul cosinusului.

252. Derivand in acellasiu mod functiunea

$$y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}=(\sin x)^{-1},$$

vom avé:

$$y'=-(\sin x)^{-2}\cos x=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Derivata cosecantei este egale cu cosinusul impartit cu patratul sinusului si luat cu semnul contrariu.

DERIVATELE FUNCTIUNILOR CIRCULARIE INVERSE

253. Egalitatea

$$y=\arcsin x$$

se interpretedia ast-fel : y este arcul al carui sinus are valorea x. Ua assemenea functiune se numesce *functiune circularia inversa*, prin opositiune cu celle ce am considerat pene acum.

Functiunea data

$$y=\arcsin x$$

pote dera se se scrie si

$$x=\sin y. \tag{a}$$

Fie h si k crescerile respective alle lui x si y, adeca a sinusului si a arcului. Am vediut* cà raportul $\frac{h}{k}$ al *247
acestor cresceri are de limita pe $\cos y$; prin urmare raportul invers $\frac{k}{h}$ va avé de limita pe $\frac{1}{\cos y}$, adeca

$$\lim\frac{k}{h}=\frac{1}{\cos y}.$$

Inse

$$\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y};$$

si punend in locul lui $\sin y$ valorea data de (a),

$$\cos y=\pm\sqrt{1-x^2}.$$

Prin urmare

$$\lim\frac{k}{h}=y'=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Radicalul va avé semnul lui $\cos y$, in locul caruia a fost pus; adeca deca arcul y se va termina in cadranul antaiu seu al patrulea, radicalul va fi positiv; era deca se va termina in al doilea seu al treilea, va fi negativ.

254. Fie

$$y = \operatorname{arccos} x,$$

care se pote scrie si

$$x - \cos y. \tag{b}$$

Insemnand erasi cu h si k crescerile respective alle
248 cosinusului si alle arcului, am vediut cà

$$\lim \frac{h}{k} = - \sin y;$$

prin urmare

$$\lim \frac{k}{h} = - \frac{1}{\sin y}.$$

Inse dupe (b)

$$\sin y = \pm \sqrt{1 - x^2};$$

asia-dera

$$\lim \frac{k}{h} = y' = \pm \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Radicalul va avé semnul lui $\sin y$ in locul caruia este pus; adeca deca arcul se va termina in cadranul antaiu seu al doilea, radicalul va fi positiv; era deca se va termina in al treilea seu al patrulea, va fi negativ.

255. Se considerâm functiunea

$$y = \operatorname{arctg} x,$$

seu

$$x = \operatorname{tg} y.$$

*249 Luand tot pe h si k drept crescerile respective alle
lui x si y, am vediut* cà

$$\lim \frac{h}{k} = \frac{1}{\cos^2 y},$$

de unde

$$\lim \frac{k}{h} = y' = \cos^2 y.$$

Inse scim* cà *31

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

asia-dera

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Assemenea äm puté gasi si pentru $y = \mathrm{arccot}x$,

$$y' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

256. Fie

$$y = \mathrm{arcsec}x,$$

seu

$$x = \sec y.$$

Am gasit* cà *251

$$\lim \frac{h}{k} = \frac{\sin y}{\cos^2 y},$$

de unde

$$\lim \frac{k}{h} = y' = \frac{\cos^2 y}{\sin y}.$$

Inse scim* cà *31

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{x^2}, \quad \sin y = \pm \frac{\sqrt{\sec^2 y - 1}}{\sec y} = \pm \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

Asia-dera

$$y' = \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Assemenea, pentru $y = \mathrm{arccosec}x$, am gasi :

$$y' = \pm \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

DESVOLTAREA IN SERIA A LUI SINx SI COSx

Vom demonstra mai antaiu urmatorea teorema, care ne va fi necessaria mai in urma.

257. *Fiind* x *un numer fix ore care, ori-cât de mare am voi, si* n *un numer intreg variabile, quantitatea* $\frac{x^n}{1.2.3.....n}$ *tinde catre zero deca* n *cresce la infinit.*

Fie p un numer intreg egal cu x seu immediat inferior lui x, si fie $n>p$; avem :

$$\frac{x^n}{1.2.....n}=\left(\frac{x}{1}.\frac{x}{2}.\frac{x}{3}.....\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x}{p+1}.\frac{x}{p+2}.....\frac{x}{n}\right).$$

Daca vom neglige factorii $\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p+2}, ... \frac{x}{n-1}$, toti mai mici de cât 1, este evident cà vom avé :

$$\frac{x^n}{1.2.....n}<\left(\frac{x}{1}.\frac{x}{2}.\frac{x}{3}.....\frac{x}{p}\right)\frac{x}{n}.$$

Inse deca n cresce la infinit, factorul $\frac{x}{n}$ tinde catre zero, pe cand factorul $\left(\frac{x}{1}.\frac{x}{2}.....\frac{x}{p}\right)$ remane fix; prin urmare produsul total $\left(\frac{x}{1}.\frac{x}{2}.\frac{x}{3}.....\frac{x}{p}\right)\frac{x}{n}$ va tinde catre zero, si *a fortiori* quantitatea $\frac{x^n}{1.2.....n}$ va tinde catre zero.

258. Fie x un arc positiv mai mic de 90^0. Avem :

$$1-\cos x>0. \qquad \text{(a)}$$

Primul membru al acestei neegalitati este derivata functiunei

$$x-\sin x+C,$$

in care C este ua constanta ore-care; câci derivand acesta din urma functiune, vom de peste $1-\cos x$. Functiunea $x-\sin x+C$ se numesce *functiunea primitiva* a functiunei $1-\cos x$. Determinàm pe C cu conditiunea ca se avem

$$x-\sin x+C=0,$$

cand vom pune $x=0$; atunci $C=0$, si functiunea se reduce la

$$x-\sin x.$$

Acestá functiune, anulandu-se pentru $x=0$, este positiva; si fiind-cà derivata sea

$$1-\cos x$$

este positiva, dupe (a), ea merge crescund din ce in ce; prin urmare

$$x-\sin x>0.$$

Primul membru al acestei neegalitati este derivata functiunei

$$\frac{x^2}{1.2}+\cos x+C,$$

C fiind ua constanta pe care o determinàm cu conditia ca se avem:

$$\frac{x^2}{1.2}+\cos x+C=0,$$

pentru $x=0$; atunci $C=-1$, si functiunea se reduce la

$$-1+\frac{x^2}{1.2}+\cos x.$$

Acesta functiune se anuledia pentru $x=0$; derivata sea $x-\sin x$ este positiva; deci functiunea este positiva si merge crescund din ce in ce; avem dera:

$$-1+\frac{x^2}{1.2}+\cos x>0.$$

Repetàm indefinit aceste operatiuni, luand functiunea primitiva a membrului antaiu, si determinand neincetat constanta arbitraria cu conditiune ca acesta functiune primitiva se se anuledie pentru $x=0$. Vom obtine ast-fel urmatorul sir de neegalitati:

$$\left.\begin{aligned}
&1-\cos x>0,\\
&\frac{x}{1}-\sin x>0,\\
&-1+\frac{x^2}{1.2}+\cos x>0,\\
&-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\sin x>0,\\
&1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cos x>0,\\
&\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\sin x>0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

259. Din aceste neegalitati scotem:

$$\cos x<1,$$

$$\cos x>1-\frac{x^2}{1.2},$$

$$\cos x<1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos x<1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\pm\frac{x^{2n}}{1.2\ldots2n},$$

$$\cos x>1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\pm\frac{x^{2n}}{1.2\ldots2n}\mp\frac{x^{2n+2}}{1.2\ldots.(2n+2)}.$$

Prin urmare, deca consideràm seria

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots.$$

$$\ldots\ldots \pm\frac{x^{2n}}{1.2.\ldots 2n}\mp\frac{x^{2n+2}}{1.2.\ldots(2n+2)},$$

vedem cà $\cos x$ este coprins intre suma cellor d'antaiu $n+1$ termeni si intre suma cellor d'antaiu $n+2$ termeni; prin urmare valorea esacta a lui $\cos x$ va fi egale cu suma celor d'antaiu $n+1$ termeni, plus ua fractiune din termenul al $(n+2)$; vom avé dera:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\pm\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}\mp\theta\frac{x^{2n+2}}{1.2..(2n+2)}, \quad (1)$$

in care θ este un numer mai mic de cât 1, ales ast-fel incât quantitatea $\theta\frac{x^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)}$, adaogita la suma cellor d'antaiu $n+1$ termeni ai seriei, se ne dee valorea esacta a lui $\cos x$.

Inse cand n cresce la infinit, quantitatea $\frac{x^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)}$ tinde catre zero*; si prin urmare la limita cand $n=\infty$; vom avé: *257

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\ldots\ldots, \quad (2)$$

seria convergenta care dà pe $\cos x$.

Acesta formula am demonstrat-o in hipotese cà $x>0$; inse ea subsiste si pentru $x<0$; câci $\cos(-x)=\cos x$; si fiind-cà membrul al doilea coprinde numai puteri cu sotiu alle lui x, scambarea semnului lui x nu va aduce nici ua scambare in semnele termenilor desvoltarii.

260. Din neegalitatile (A) deducem inca:

$$\sin x<\frac{x}{1},$$

$$\sin x>\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3},$$

$$\sin x < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5},$$

. . . .

$$\sin x < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2.\ldots(2n+1)},$$

$$\sin x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2..(2n+1)} \mp \frac{x^{2n+3}}{1.2..(2n+3)}.$$

Considerand seria

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4\,5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2..(2n+1)} \mp \frac{x^{2n+3}}{1.2..(2n+3)},$$

vedem dera cà $\sin x$ este coprins intre suma cellor d'antaiu $n+1$ termeni si intre suma cellor d'antaiu $n+2$ termeni; asia-dera valorea esacta a lui $\sin x$ este egale cu suma cellor d'antaiu $n+1$ termeni, plus ua fractiune din al $(n+2)$ termen; adeca:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\,3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2..(2n+1)} \mp \theta \frac{x^{2n+3}}{1.2\,.(2n+3)}. \quad (3)$$

θ fiind un numer mai mic de cât 1 ales ast-fel incât se justifice equatia Deca inse n cresce la infinit, termenul

257 $\frac{x^{2n+3}}{1.2..(2n+3)}$ tinde catre zero; asia-dera la limita, cand $n=\infty$, avem:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2\,\ldots.7} + \ldots\ldots \quad (4)$$

Acesta formula a fost stabilita pentru $x>0$; ea esiste inse si pentru $x<0$. In adever, punend in (4) in loc de x pe $-x$, semnele totor termenilor se vor scamba; immultind apoi tota equatiunea cu -1, vom regasi tot equatia (4).

Formulele (2) si (4) ne pot da valorea sinusului si cosinusului ori-carui arc coprins intre -90^0 si $+90^0$ cu ua aprossimatiune ori-cât de mare vom voi.

DESVOLTAREA IN SERIA A LUI ARCTGx

261. Vom presupune pe x mai mic de cât 1 seu egal cu 1, si positiv.

Derivata functiunei arctg$x$ este* *255

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Efectuand divisiunea indicata in espressiunea $\frac{1}{1+x^2}$, dobandim :

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots\ldots\pm x^{2n}\mp\frac{x^{2n+2}}{1+x^2};$$

$\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ esprime restul ce a remas dupe a $(n+1)$ divisiune.

Din acesta equatiune avem :

$$\frac{1}{1+x^2}-(1-x^2+x^4-x^6+\ldots\ldots\pm x^{2n})=\mp\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}. \quad \text{(a)}$$

Functiunea primitiva a primului membru, pe care o insemnàm cu y, este :

$$y=\operatorname{arctg}x-\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots\pm\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right), \quad \text{(b)}$$

i acesta functiune y vedem cà se anuledia deca $x=0$. Primul membru al equatiunei (a), derivata a functiunei y, se pote dera insemna cu y', si acea equatiune se pote scrie mai simplu :

$$y'=\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}. \quad \text{(c)}$$

Quantitatea $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ este positiva, câci nu coprinde de càt puteri cu sotiu alle lui x; apoi

$$\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}<x^{2n+2};$$

prin urmare y' fiind egal cu $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ dupe (c), avem :

$$y'>0,$$
$$y'<x^{2n+2},\text{ de unde : } y'-x^{2n+2}<0.$$

Derivata y' a functiunei y este positiva ; prin urmare y cresce déca cresce x; si fiind-cà y' se anuledia pentru $x=0$, y va avé valori *positive* din ce in ce mai mari cu cât va crësce x. Din contra, functiunea

$$y-\frac{x^{2n+3}}{2n+3},$$

avend derivata sea

$$y'-x^{2n+2}$$

negativa, descresce cu cât cresce x; si fiind-cà si acesta functiune se anuledia pentru $x=0$, ea are valori *negative* din ce in ce mai mari cu cât cresce x; prin urmare vom avé tot-de-una :

$$y-\frac{x^{2n+3}}{2n+3}<0,$$

seu

$$y<\frac{x^{2n+3}}{2n+3};$$

y fiind mai mic de cât $\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$, vom puté gasi un numer ore-care θ, mai mic de cât 1, ast-fel in cât

$$y=\theta\frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Punend acesta valore in (b) si trecund parentesul din membrul al doilea in membrul cel-alt, vom avé :

$$\operatorname{arctg}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\pm\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\pm\theta\frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Inse deca n cresce la infinit, termenul $\theta\frac{x^{2n+3}}{2n+2}$ tinde

257 catre zero; prin urmare la limita, cand $n=\infty$, avem :

$$\text{arctg}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots \qquad (5)$$

In acesta demonstratiĕ am presupus pe x positiv; inse formula (5) convine si in casul cand x este negativ; câci atunci arctg$x$ devine negativ, si toti termenii din membrul al doilea, cari coprind numai puteri fora sotiu alle lui x, si vor scamba si ei sĕmnul. Deca dera vom immulti tota equatiunea cu -1, vom regasi formula (5). Prin urmare acesta formula nĕ potĕ da arcul à carui tangenta este cunoscuta, tot-de-una cand acesta tangenta este coprinsa intrĕ -1 si $+1$ inclusiv.

CALCULUL LUI π.

262. Formula (5) ne pote da mediul de a calcula raportul circumferĕntiei catre diametru, raport care scim cà se insemnedia cu π.

1°. Arcul $45^0=\frac{\pi}{4}$ scim cà are de tangenta pe 1*; pu- *65
nend aceste valori in (5), avem :

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\dots,$$

seria care ne pote da pe π.

2°. Arcul $30^0=\frac{\pi}{6}$ are de tangenta pe $\frac{1}{\sqrt{3}}$*. Acestĕ va- *64
lori, introduse in (5), dau seria :

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3(\sqrt{3})^3}+\frac{1}{5(\sqrt{3})^5}-\frac{1}{7(\sqrt{3})^7}+\dots,$$

si punend pe $\frac{1}{\sqrt{3}}$ factor comun,

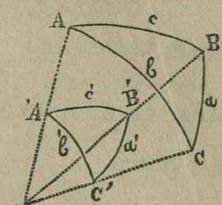
$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\ldots\right),$$

seria mai converginte de cât cea precedinte, care ne pote da pe π.

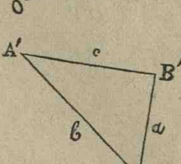
APENDICE.

TEOREMA LUI LEGENDRE.

263. *Deca laturile unui trianghiu sferic sunt forte mici in raport cu radia sferei pe care este situat acest trianghiu, putem fora nici ua erore apretiabile se calculàm, in loc de elementele trianghiului sferic, elementele unui trianghiu rectiliniu, alle carui laturi se fie egale cu laturile trianghiului sferic, era anghiurile lui se fie egale cu anghiurile trianghiului sferic micsiorate fie-care cu a treia parte a escesului sferic. Suprafetiele acestor doue trianghiuri sunt si elle egale.*



Fie trianghiul sferic ABC pus pe ua sfera cu centrul in O, a carii radia OA=r este forte mare in raport cu laturile a,b,c, alle trianghiului. Consider si trianghiul rectiliniu A′B′C′, alle carui laturi sunt egale cu laturile trianghiului sferic.



Ne imaginàm ua alta sfera, tot cu centrul in O si cu radia 1; acesta sfera, taiata de planele AOB, BOC, COA, va da trianghiul sferic $A_1B_1C_1$ alle carui anghiuri sunt egale cu alle trianghiului sferic dat, adeca:

$$A_1=A,\ B_1=B,\ C_1=C.$$

Cât pentru laturi, avem relatiunile:

$$\frac{a_1}{a}=\frac{1}{r},\ \frac{b_1}{b}=\frac{1}{r},\ \frac{c_1}{c}=\frac{1}{r},$$

din cari

$$a_1=\frac{a}{r},\ b_1=\frac{b}{r},\ c_1=\frac{c}{r}.$$

Trianghiul $A_1B_1C_1$, care se afla pe ua sfera cu radia
158 1, dà:

$$\cos a_1=\cos b_1\cos c_1+\sin b_1\sin c_1\cos A_1,$$

si inlocuind pe a_1, b_1, c_1, A_1 cu valorile lor,

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A.$$

In acesta equatiune putem inlocui pe $\cos\frac{a}{r}, \cos\frac{b}{r}, \cos\frac{c}{r}$,
259,(2) 260,(4) $\sin\frac{b}{r}$, $\sin\frac{c}{r}$, cu desvoltarile lor in serii; si fiind-cà $\frac{1}{r}$ este forte mic, vom negligé termenii in cari acesta quantitate va intra la ua putere mai mare de cât a patra:

$$1-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a^4}{24r^4}=\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+\frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1-\frac{c^2}{2r^2}+\frac{c^4}{24r^4}\right)$$
$$+\left(\frac{b}{r}-\frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r}-\frac{c^3}{6r^3}\right)\cos A.$$

Efectuàm immultirile, negligiend erasi termenii ce contin pe $\frac{1}{r}$ la ua putere mai mare de a patra:

$$1-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a^4}{24r^4}=1-\frac{b^2}{2r^2}-\frac{c^2}{2r^2}+\frac{b^4}{24r^4}+\frac{c^4}{24r^4}+\frac{b^2c^2}{4r^4}$$
$$+\left(\frac{bc}{r^2}-\frac{bc^3}{6r^4}-\frac{b^3c}{6r^4}\right)\cos A.$$

Trecund in un membru pe toti termenii ce nu contin pe cosA si facund reducerile,

$$\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}-\frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24r^4},$$

si divisend cu confactorul lui cosA,

$$\cos A=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}-\frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}.$$

Immultim ambii termeni ai fractiunei cu $1+\frac{b^2+c^3}{6r^2}$; avem:

$$\cos A=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}-\frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left\{1-\left(\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)^2\right\}}\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right).$$

Termenul $\left(\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)^2$, care se afla la numitorul fractiunei, vedem cà va coprinde pe $\frac{1}{r}$ la a patra putere dupe ce vom efectua ridicarea la patrat; si fiind immultit inca cu factorul $\frac{bc}{r^2}$, lu va coprinde la a siessea putere; prin urmare acel termen se pote neglige, dupe conventiunea ce am facut.

Facund immultirea numeratorului fractiunei cu parentesul $\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$, si continuand de a neglige termenii de un grad mai mare de cât al patrulea in $\frac{1}{r}$, avem:

$$\cos A=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}+\frac{b^4+c^4+2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{12r^4}-\frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24r^4}}{\frac{bc}{r^2}},$$

seu mai simplu,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}. \quad (1)$$

Trianghiul rectiliniu A′B′C′ dà:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A',$$

de unde

$$\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \quad (2)$$

Inse

$$\sin^2 A' = 1 - \cos^2 A';$$

substituind aci valorea lui $\cos^2 A$, dedusa din (2), si facund reducerile, gassim:

$$\sin^2 A' = \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{2b^2c^2}.$$

Immultim ambii membri cu $-\frac{bc}{6r^2}$:

$$-\frac{bc\sin A'}{6r^2} = \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}. \quad (3)$$

Comparand equatiunile (2) si (3) cu (1), vedem cà prima fractiune din membrul al doilea al equatiunei (1) este identica cu cea din membrul al doilea de la (2); era a doua fractiune din (1) este identica cu cea din (3); prin urmare:

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc\sin^2 A'}{6r^2}. \quad (4)$$

Insemnàm cu x diferentia intre anghiul A si A′, adeca:

$$A - A' = x; \quad (5)$$

de aci

$$\cos A = \cos(A'+x) = \cos A'\cos x - \sin A'\sin x;$$

si fiind-cà x este forte mic, putem inlocui pe $\cos x$ si
259,260 $\sin x$ prin desvoltarile lor in seria oprindu-ne la primul termen al desvoltarii, si atunci

$$\cos A = \cos A' - x \sin A'. \tag{6}$$

Comparand equatiunile (4) si (6) avem:

$$x = \frac{bc \sin^2 A'}{6r^2},$$

si fiind cà $\frac{bc \sin A'}{2} = S'$, suprafatia trianghiului rectiliniu,

$$x = \frac{S'}{3r^2}.$$

Punend acesta valore in (5) avem:

$$A' = A - \frac{S'}{3r^2}. \tag{a}$$

Lucrand assemenea si pentru celle-alte anghiuri, am obtine assemenea:

$$B' = B - \frac{S'}{3r^2}, \tag{b}$$

$$C' = C - \frac{S'}{3r^2}, \tag{c}$$

Adunand aceste trei equatiuni una cu alta,

$$A' + B' + C' = A + B + C - \frac{S'}{r^2},$$

si fiind-cà

$$A' + B' + C' = 180^0,$$

avem:

$$\frac{S'}{r^2} = A + B + C - 180^0;$$

inse

$$A + B + C - 180^0 = \varepsilon;$$

deci

$$\frac{S'}{r^2} = \varepsilon, \tag{7}$$

seu

$$\frac{S'}{3r^2}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

Acesta valore fiind pusa in equatiunile (a), (b), (c), ne dà :

$$A'=A-\frac{\varepsilon}{3},\ B'=B-\frac{\varepsilon}{3},\ C'=C-\frac{\varepsilon}{3}, \qquad (A)$$

adeca anghiurile trianghiului rectiliniu ce are acelleasi laturi ca si trianghiul sferic, sunt egale cu anghiurile acestui trianghiu sferic, micsiorate fie-care cu a treia parte a escesului sferic. Prima parte a teoremei este demonstrata.

Equatiunea (7) dà escesul sferic prin raportul arcului catre radia; pentru a gasi espressiunea lui in grade, minute si secunde, trebue se impartim valorea lui, $\frac{S'}{r^2}$,
76 data de acea equatiune, prin sin1″, si atunci

$$\frac{S'}{r^2 \sin 1''}=\varepsilon,$$

de unde

$$\frac{S'}{r^2}=\varepsilon \sin 1''. \qquad (8)$$

Acesta valore punendu-o in (a), (b), (c), obtinem :

$$A'=A-\frac{\varepsilon \sin 1''}{3},\ B'=B-\frac{\varepsilon \sin 1''}{3},\ C'=C-\frac{\varepsilon \sin 1''}{3}.$$

Equatiunea (8) ne dà inca :

$$S'=r^2 \varepsilon \sin 1''.$$

219 Inse suprafatia S a trianghiului sferic este :

$$S=r^2 \varepsilon \sin 1'';$$

deci

$$S+S';$$

suprafetiele ambelor trianghiuri sunt dera egale, cea ce completedia demonstratiunea teoremei nostre.

Teorema lui Legendre inlesnesce forte mult operatiunile geodesicĕ. In adever, radia pamentului este de 6377398 metre, pe cand cel mai mare trianghiu geodesic nu pote avé laturi mai mari de cât cel mult 40000 metre; trianghiurile geodesice dera, cari in realitate sunt trianghiuri sferice, pot fi tratate ca trianghiuri rectilinie cu ajutorul teoremei lui Legendre.

Essemplu. Radia pamentului fiind $r=3266330$ stanjeni francesi, laturea AB a unui trianghiu de pe suprafatia pamentului este de $56559^{\text{st. fr.}},04$; anghiul A este de $78^0 4' 9'',53$; anghiul B de $59^0 50' 53'',40$, si anghiul C de $42^0 5' 36'',07$.

Facund suma acestor anghiuri, se gasesce :

$$A+B+C=180^0 0' 39'',00;$$

prin urmare

$$\varepsilon=39'',\ \frac{\varepsilon}{3}=13''.$$

Deci in loc de a resolve trianghiul sferic ABC, putem resolve un trianghiu rectiliniu A′B′C′, in care laturea A′B′ se fie tot de $56559^{\text{st. fr.}},04$, era anghiurile se fie ensesi anghiurile tringhiului sferic, micsiorate fie care cu câte 13″, adeca : $A'=78^0 3' 56'',53$; $B'=59^0 50' 40'',40$ $C'=42^0 5' 23'',07$. Se gasesce ast-fel : $A'C'=AC=72960^{\text{st. fr.}},00$; $B'C'=BC=82555^{\text{st. fr.}},62$.

Fine

TABLA DE MATERII

PAG.

Prefatia 5

CARTEA I.

Studiul functiunilor circularie

CAPITULUL I. *Notiunî preliminarii si definitiuni* 7
Principiul lui Descartes, pag. 9. — Arcurile de cerc, p. 10. — Arcuri complementarie si suplementarie, p 11. — Liniile trigonometrice, p. 12.— Sinus, p 12. — Tangenta, p. 15. — Secanta p. 17.— Cosinus, p. 19.— Cotangenta, p 21. — Cosecanta, p. 23.— Liniile trigonometrice alle arcelor egali si de semne contrarie, p. 25. — Liniile trigonometrice alle arcelor suplementarie, p. 27. — Liniile trigonometrice alle arcelor cari difera intre elle cu ua semi-circumferentia, p. 28. — Reducerea arcelor la primul cadran, p 30. — Arcele cari corespund la ua linia trigonometrica data, p. 32.

CAPITULUL II. *Formule fundamentale* 35
Relatiuni intre liniile trigonometrice alle ace uiasiu arc p. 35.—Formule correlative, p. 37.—Aditiunea arcelor, p.44.— Immultirea arcelor, p. 52.— Divisiunea arcelor, p. 54.— Formule calculabile prin logaritmi p. 59.— Metode generali pentru a face espressiunile calculabile prin logaritmi, p. 67. — Liniile trigonometrice a câtor-va arcuri, p. 73.

CAPITULUL III. *Table trigonometrice* 77
Calculul sinusului si cosinusului arcului de 10″, p. 82. — Tablele lui Callet, p. 86.— Usul tablelor, p 91.

CARTEA II.

Trigonometria rectilinia

CAPITULUL I. *Proprietatile trianghiurilor rectilinii* 102
Trianghiuri dreptaunghie, p. 102. — Trianghiuri orecari seu oblic-an-

PAG.

ghie, p. 105 — Anghiuri in functiune de laturi, p. 111. — Suprafatia trianghiului, p. 116. — Radia cercului circumscris, p. 120. — Radia cercului inscris. p. 121.— Radiele cercurilor exinscrise, p. 122.

CAPITTULUL II *Resolutiunea trianghiurilor*. 128
Trianghiurile dreptanghie, p. 128.—Verificatiuni, p. 131 —Essemple, p. 132.—Resolutiunea trianghiurilor orecari seu oblicanghie, p.134.— Essemple, p. 143

CAPITULUL III. *Esercitii si aplicatiui* 151
Câte-va casuri de resolutiuni de trianghiuri in cari se dau nu trei elemente, ci trei combinatiuni alle acestor ellemente, p. 151. — Operatiuni pe pament, p. 16 . — Triangulatiune, p. 167 — Calculul distantielor, p. 169. — Calculul inaltimilor, p. 170.— Questiuni diverse, p. 172.

CARTEA III.

Trigonometria sferica

CAPITULUL I *Proprietatile trianghiurilor sferice* 178
Relatiuni intre celle trei laturi si un anghiu, p. 181·— Relatiuni intre doue laturi si anghiurile opuse, p. 184 — Relatiuni intre doue laturi anghiul coprins intre elle si anghiul opus la una din elle, p. 185. — Relatiuni intre ua lature si celle trei anghiuri, p. 186. — Formule relative la trianghiurile dreptanghie, p. 187.— Formule relative la trianghiurile rectilaterali, p 195 — Formule calculabile prin logaritmi cari dau anghiurile in functiune de laturi, p. 197.— Formule calculabile prin logaritmi cari dau laturile in functiune de anghiuri, p.200 — Formulele lui Delambre p. 203. — Analogiile lui Napier, p 205. — Espressiuni diverse alle escesului sferic p. 206.— Radia cercului circumscris, p 209 —Radia cercului inscris, p. 211.—Radiele cercurilor exinscrise, p 212.

CAPITULUL II. *Resolutiunea trianghiurilor sferice*. 214
Resolutiunea trianghiurilor dreptanghie, p. 215.—Essemple, p. 221.— Resolutiunea trianghiurilor rectilaterali, p 228.—Resolutiunea trianghiurilor ore-cari p 233 — Essemple, p. 248 — Espressiunea in lungime a laturilor, p 259.— Suprafatia unui trianghiu sferic, p. 260.

CAPITULUL III. *Esercitii si aplicatiuni*. 262

CARTEA IV.

Complementul teoriei functiunilor circularie

CAPITULUL I. *Immultirea si impartirea arcelor*. 268
Espressiuni imaginarie. p. 268. — Formula lui Moivre, p. 270. — Immultirea arcelor, p. 272.— Divisiunea arcelor, p. 276.— Espressiunea

PAG.

lui $\sin^m a$ si $\cos^m a$ in functiune de sinusele si cosinusele multiplilor arcului, p. 283.

CAPITULUL II. *Resolutiunea equatiunei binome* $z^m = 1$ *si poligonele regulate*. 291

Resolutiunea equatiunei binome $z^m = 1$, p. 291. — Proprietatile radecinilor equatiunei $z^m = 1$, p. 296. — Despre poligonele regulate p. 300.

CAPITULUL III *Derivarea si desvoltarea in seria a functiunilor circularie* 311

Derivata sinusului, p. 311. — Derivata cosinusului, p. 312. — Derivata tangentei si a cotangentei, p. 313. — Derivata secantei si a cosecantei, p. 314. — Derivata functiunilor circularie inverse, p. 315. — Desvoltarea in seria a lui $\sin x$ si $\cos x$, p. 318. — Desvoltarea in seria a lui $\operatorname{arctg} x$, p. 323. — Calculul lui π, p. 325.

APENDICE. *Teorema lui Legendre* 327

Tabla de materii 334

ERRATA

Formula de la pag. 80 randul 3 se se numerotedie (2).

Figura de la pag. 233 se se inlocuiasca cu cea de la pag. 182.

Formula de la pag. 288 randul 7 se se numerotedie (4).