BIBLIOTECA „GAZETEI MATEMATICE"
No. III

ALGEBRA
SUPERIOARĂ

PENTRU CLASA VIII SECŢIA ŞTIINŢIFICĂ

Funcţii primitive. Calculul ariilor.
Numere complexe. Teoria ecuaţiilor.

DE

N. ABRAMESCU
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

EDIŢIA VIII
revăzută şi adăugită conform
nouilor programe

Aprobată de Ministerul Culturii Naţionale, Cultelor şi Artelor
cu ord. No. 81 din 3 Iunie 1941

BUCUREŞTI

TIPOGRAFIA CURŢII REGALE F. GÖBL FII S. A.
19, STRADA REGALĂ, 19
Reg. Com. Nr. 449/932
Iunie 1943. 2000 exemplare

BIBLIOTECA „GAZETEI MATEMATICE"
No. III

ALGEBRA
SUPERIOARĂ

PENTRU CLASA VIII SECŢIA ŞTIINŢIFICĂ

Funcții primitive. Calculul ariilor.
Numere complexe. Teoria ecuațiilor.

Nicolae DE

N. ABRAMESCU
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

EDIŢIA VIII
revăzută și adăugită conform
nouilor programe

Aprobată de Ministerul Culturii Naționale, Cultelor și Artelor
cu ord. No. 81 din 3 Iunie 1941

BUCUREŞTI

TIPOGRAFIA CURŢII REGALE F. GÖBL FII S. A.
19, STRADA REGALĂ, 19
Reg. Com. Nr. 449/932
Iunie 1943. 2000 exemplare

LUCRĂRI DIDACTICE

de N. ABRAMESCU

---

1. **Algebra pentru cl. IV** *a Liceelor, Școli Normale, Seminarii,* de *Manicatide,* revăzută și adăugită în întregime.

2. **Algebra pentru cl. V** *a Liceelor, Școli Normale, Seminarii,* de *Manicatide,* revăzută și adăugită în întregime,

3. **Algebra (ediție redusă) pentru cl. VI** *a Liceelor, Seminarii,* care conține și *Tabele de dobânzi compuse, anuități, amortismente.*

4. **Trigonometria** *cu Aplicații la Agrimensură și Statică pentru* **cl. VI** *a Liceelor, Seminarii, Școli Normale.*

5. **Algebra Superioară** și cu *Aplicații la Cinematică pentru* **cl. VII,** *secția științifică.*

6. **Astronomia (ediție redusă, în 25 Lecții)** *pentru* **cl. VII** *a Liceelor, Școli normale, Seminarii.*

7. **Algebra superioară pentru cl. VIII** *secția științifică.*

8. **Geometria Analitică pentru cl. VIII,** *secția științifică.*

9. **Mecanica pentru cl. VIII,** *secția științifică.*

10. **Tratat complimentar de Algebră (fosta Algebră de cl. V reală)** de *Manicatide,* revăzută și adăugită în întregime, pentru *Liceele militare, Licee industriale, Școli de conductori, Școli speciale* pentru *prepararea la diferite examene, admitere în Școli Politechnice,* etc.

11. **Aritmetica raționată (fostă de cl. V reală),** în colaborare cu D-l Profesor Gr. Orășanu, pentru *Liceele militare, Licee industriale, Școli de conductori, Școli speciale,* pentru *prepararea la diferite examene, admitere în Școli Politechnice,* etc.

12. **Algebra pentru cl. VI** a *Liceelor comerciale,* cu Tabela de dobânzi compuse.

13. **Algebra financiară** pentru **cl. VII comercială,** cu *Tabele de dobânzi compuse, anuități, amortismente.*

14. **Lecțiuni de Geometrie Analitică** urmate de **Introducere elementară în studiul analitic al Geometriilor neeuclidiene** și **Noțiuni elementare de Geometrie Vectorială** (Editată de *Universitatea din Cluj).*

15. **Lecțiuni de Geometrie pură Infinitezimală** (Editată de *Universitatea din Cluj).*

PREFAŢĂ LA EDIŢIA I-a

Prietenul şi fostul meu elev N. Abramescu, *mi-a făcut plăcerea ca înainte de a da la tipar* Lecţiunile sale de Algebră, *întocmite pentru Cl. VIII Reală, să-mi comunice şi mie manuscrisul. D-sa îmi spune că la dirijarea acestor lecţiuni s'a inspirat în bună parte de cursul ce a audiat la mine, pe timpul când era student la Universitatea din Bucureşti. Această împrejurare îmi impune îndatorirea de a scrie câteva cuvinte de întroducere la lecţiunile de faţă.*

Este un mijloc foarte comod şi foarte des întrebuinţat, de cei ce nu-şi dau osteneala a pătrunde mai adânc lucrurile, de a învinui programele că sunt prea încărcate, *ori de câte ori cunoştinţele pe care le capătă elevii în licee, la o anumită materie, nu corespund aşteptărilor. Eu cred că cele de mai multe ori nu programele sunt de vină, ci modul lor de aplicare. Aşa luând de exemplu programa de matematici, — partea privitoare la rezolvarea numerică a ecuaţiilor, — negreşit că ar fi fost mult dacă s'ar căuta a se face în liceu un curs complect asupra acestei chestiuni; dar nu aceasta este prevăzută în program, ci numai stabilirea elementelor indispensabile, pentru ca un elev după ce a terminat liceul real, să poată rezolva numericeşte o ecuaţie cu coeficienţi daţi, care cunoştinţe să le poată apoi aplica la probleme practice de matematici, fizică, etc. Pe de altă parte, neapărat că nu poate fi vorba numai de enunţarea unor reguli practice, ci elevul trebuie să-şi dea seamă cum se ajunge la aceste reguli. In rezumat trebuesc, pe de-oparte înlăturate toate subtilităţile care lungesc demonstraţiile şi cer mult timp, iar pe de altă parte să se caute ca elevul* să vază *şi să-şi dea seama cum se petrec lucrurile.*

Părerea mea este că D-l N. Abramescu *a reuşit pe deplin în împlinirea acestor condiţiuni. D-sa a redus demonstraţiile la strictul necesar, înlocuindu-le în multe locuri prin reprezentări geometrice, care, fără a constitui demonstraţii propriu zise, dau o imagină concretă a modului cum se petrec lucrurile: elevul* vede, *iar cei mai ageri pot complecta ei singuri demonstraţiile. Acesta este spiritul lecţiunilor ce făceam cu studenţii anului 1 dela ştiinţele fizico-chimice, înainte de punerea în aplicare a noilor programe; acest mod de predare, conform cu intenţia celor care au alcătuit nouile programe, a fost adoptat şi de D-l* N. Abramescu *în lecţiunile sale.*

Intr'un curs asupra rezolvărei numerice a ecuaţiilor însă, ceeace nu trebue pierdut un minut din vedere sunt aplicaţiile, şi în această privinţă lecţiunile întocmite de D-l N. Abramescu *sunt cu desăvârşire complecte. După fiecare teoremă urmează mai multe aplicaţii tratate complect, altele asupra cărora sunt date explicaţii, în fine, exerciţiile propriu zise foarte bine alese, şi la care s'a dat şi răspunsul. Şi la aplicaţii, ca şi la demonstraţia teoremelor, D-l* N. Abramescu *a făcut foarte mult uz de reprezen-*

tările grafice, astfel că unui elev care a urmărit complect o asemenea chestiune, îi rămâne pentru mult timp imprimată în minte imaginea chestiunii, şi poate la rândul lui trata cu uşurinţă probleme de acelaşi fel precum şi altele mai complicate. Figurile clare, expresive şi desemnate la scară, cum de altfel trebuiesc cerute şi elevilor, au fost făcute după crochiurile autorului de D-l M. Cioc, elev în anul al III-lea al Şcoalei de Poduri şi Şosele.

Întocmirea acestor lecţiuni, fără vreun model similar, a necesitat de sigur multă muncă din partea autorului, muncă pe care D-l N. Abramescu a dat-o cu plăcere; D-sa este unul dintre tinerii noştri profesori, care lucrează nu numai cu capul dar şi cu inima, consacrând tot timpul de care dispune pentru împlinirea datoriilor sale. Scurtul timp pe care l-a petrecut la liceele din Ploeşti şi Botoşani a arătat cât de mult se poate face cu pricepere şi bunăvoinţă; rezultatele date de ultimele concursuri ale Gazetei Matematice sunt o dovadă pentru aceasta.

Lecţiunile de algebră superioară ale D-lui N. Abramescu au fost aprobate de Ministerul Instrucţiunilor publice şi al Cultelor pentru liceele reale, în urma unui raport foarte favorabil ce i-a făcut colegul meu G. Ţiţeica, Profesor la Universitatea din Bucureşti, în calitate de membru în comisiunea de cercetare a cărţilor didactice. D-sa s'a ocupat de aproape de această lucrare, revăzând amănunţit manuscrisul şi dându-i mai multe sfaturi în ceeace priveşte expunerea, pentru care autorul îşi face o plăcută datorie, aducând omagii fostului său profesor Universitar.

Mai am de adăugat că redacţia Gazetei Matematice, apreciind lucrarea D-lui N. Abramescu, a admis să fie publicată în Biblioteca sa.

* * *

Înainte de a termina, mă cred dator să spun două cuvinte asupra execuţii materiale a lucrării de faţă. La noi în ţară, tipărirea cărţilor de matematică se face cu foarte multă greutate, din cauză că puţine sunt tipografiile care posedă semnele necesare şi mai ales unul sau doi lucrători obişnuiţi cu asemenea lucrări. Nu cu puţină trudă s'a ajuns în timp mai scurt de o lună la rezultatul destul de satisfăcător ce se vede. Acest rezultat nu s'a putut obţine decât graţie tenacităţii şi activităţii neobosite a colegului meu inginerul Ion Ionescu, căruia în numele autorului îi exprim aci vii mulţumiri.

Tot în numele autorulni aduc mulţumiri D-lui profesor Gh. Nicolaevici şi D-lui inginer Al. Roşu pentru concursul ce i-au dat la corectarea probelor şi D-lui M. Cioc pentru executarea figurilor.

A. G. IOACHIMESCU

Bucureşti, 1907.

PREFAȚĂ LA EDIȚIA VIII

In această nouă ediție am expus o metodă geometrică, cu care se poate găsi între ce numere sunt cuprinse rădăcinile unei ecuații, uneori mai ușor și mai bine decât cu teorema lui Rolle.

Am din nou fericita ocazie să exprim mulțumirile mele recunoscătoare Societății Gazeta Matematica, *pentru încurajarea ce mi-a dat acum 37 ani, publicând în biblioteca sa această lucrare.* Gazeta Matematică *a creat generațiile de tineri matematicieni la noi în Țară. Vor rămâne ca model, pentru viitor, munca neîntrecută, continuă și dezinteresată, precum și ajutorul și încurajarea pe care elevii și tinerii matematicieni le-au avut dela fondatorii Gazetei Matematice, D-l Inginer Profesor* I. Ionescu, *și regretații Ingineri* A. G. Ioachimescu, *și* V. Cristescu *și marele nostru geometru* G. Țițeica.

Îmi împlinesc o plăcută datorie de a mărturisi că cele publicate în această carte le-am învățat din neîntrecutele lecții ce ne făcea la Universitatea din București fostul meu profesor A. G. Ioachimescu, *a cărui* Culegere de probleme de Algebră *(editată de Gazeta Matematică, București) va fi de cel mai mare folos pentru cei care doresc să-și completeze cunoștințele lor de Algebră.*

Mulțumesc călduros D-lui General Gh. Buicliu *pentru munca ce a depus ca să apară cât mai bine această ediție, dându-mi astfel plăcuta ocazie să-mi reamintesc de timpul când ca elevi de liceu colaboram cu D-sa la Gazeta Matematică.*

Mulțumesc și Tipografiei F. Göbl Fii *pentru stăruința depusă ca să-și mențină vechea sa reputație.*

NICOLAE ABRAMESCU

Timișoara, 1943.

TABLA DE MATERIE

	Pag.
Prefață la ediția I	III-IV
Prefață la ediția VIII	V

PARTEA I

Funcții primitive. Calculul ariilor.

Aria limitată de o curbă. Funcția primitivă a unei funcții. Noțiunea de integrală. Integrală definită. Calculul unei arii. Observări. Integralele imediate a câtorva funcții. Proprietățile integralelor. Schimbare de variabilă. Diferențiala. Exemple. Exercițiĭ. Integrare prin părți. Exemple. Exerciții. Calculul câtorya arii. Cazul parabolei. Aria cercului. Aria elipsei. Exemple. Exerciții . . . . . . 1—23

Numere complexe. Generalități. Adunarea. Scăderea. Produsul. Câtul. Extragerea rădăcinii. Exerciții. Forma trigonometrică a numerelor complexe. Produsul. Formula lui Moivre. Reprezentarea geometrică a puterii unui număr complex și a unui cât. Exerciții. Extragerea rădăcinii. Reprezentarea geometrică a rădăcinii m — a. Rădăcinile m — a a unității. Ecuații binoame. Aplicații. Exerciții. 24—37

Funcții iperbolice 37

PARTEA II

Teoria ecuațiilor.

Proprietăți ale polinoamelor și ecuațiilor algebrice. Proprietăți. Formula lui Taylor. Exemple. O ecuație algebrică de gradul m admite m rădăcini. Un polinom de gradul m se descompune în m factori de gradul întâi. Polinom identic nul. Aplicație. Condiția ca două polinoame să fie identice. Condiția ca două ecuații să aibă aceleași rădăcini. Observare relativă la calculul valorii nu-

Pag.

merice a unui polinom. Aplicații. Rezolvarea ecuației de gradul al treilea. Formula lui Cardan. Rezolvarea ecuației de gradul al patrulea. Metoda lui Descartes. Exemple. Exerciții. 38- 57

Relații între rădăcini și coeficienți. Aplicații. Exerciții 57- 71

Rădăcini comune la două ecuații. Cel mai mare comun divizor și cel mai mare comun multiplu a numerelor întregi. Exerciții. Împărțirea a două polinoame prin metoda coeficienților nedeterminați. Relații de recurență. Divizorii unui polinom. Cel mai mare divizor comun a două polinoame. Exemplu. Cel mai simplu comun multiplu a două polinoame. Aplicație. Rădăcini comune la două ecuații. Aplicații. Exerciții 72- 91

Rezolvarea unei ecuații când are rădăcini multiple. Condițiile ca o ecuație să aibă o rădăcină multiplă. Aplicație. Condiția ca o ecuație să aibă o rădăcină dublă. Exemplu. Condițiile ca o ecuație să aibă o rădăcină triplă. Exemplu. Exerciții. Rezolvarea unei ecuații cu rădăcini multiple. Exerciții 92-101

Proprietățile ecuațiilor cu coeficienți reali. Aplicații. Exerciții 101-109

Separarea rădăcinilor unei ecuații. Teorema lui Rolle. Metodă geometrică pentru separarea și discuția rădăcinelor unei ecuații. Exemple. Aplicații. Exerciții 109-127

Teorema lui Descartes. Aplicații. Exerciții 127-132

Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți numerici. Transformarea ecuațiilor. Exemple. Limitele rădăcinilor. Metoda grupării termenilor. Exemple. Metoda lui Newton. Exemple. Exerciții. Calcularea rădăcinilor întregi. Exemple. Calcularea rădăcinilor fracționale. Metoda prin părți proporționale. Aplicație. Interpretare grafică. Metoda lui Newton. Interpretare grafică. Metodă pentru a determina forma curbei $y = f(x)$. Aplicație. Exerciții. 133-158

Ecuații transcendente. Generalități. Exemple. Exerciții 159-167

Sisteme de educații. Generalități. Eliminarea unei necunoscute între două ecuații. Metoda lui Bézout. Aplicație. Metoda lui Sylvester. Aplicație. Metoda lui Cauchy. Aplicație. Calculul rădăcinilor comune la două ecuații cu o necunoscută. Aplicație. Rezolvarea a două ecuații cu două necunoscute. Aplicație. Exerciții 167-183

Algebră Superioară pentru clasa VIII. Funcții primitive. Calculul ariilor. Numere complexe. Teoria Ecuațiilor

de N. ABRAMESCU

PARTEA I.

Funcții primitive. Calculul ariilor.

1. Aria limitată de o curbă. Fie AB (Fig. 1) curba reprezentată de ecuaţia $y=f(x)$. A şi B fiind două puncte ale acestei curbe să ducem ordonatele AC, BD ale acestor puncte, corespunzătoare valorilor lui x egale cu $OC=a$, $OD=b$. Ne propunem a calcula aria cuprinsă între curba AB, axa x-lor şi ordonatele AC şi BD.

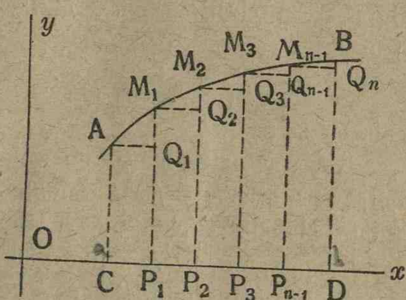

Fig. 1.

Vom presupune mai întâi că $a<b$ şi $f(x)$ pozitiv pentru toate valorile lui x cuprinse între a şi b. Să împărţim dreapta CD în n părţi egale cu $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, prin punctele P_1, P_2,... P_{n-1}, astfel că $CP_1=P_1P_2=\ldots=P_{n-1}D=\Delta x$ (In figura 1, $n=5$). Să notăm cu $OP_1=x_1$, $OP_2=x_2$,...$OP_{n-1}=x_{n-1}$ şi să ducem ordonatele corespunzătoare $CA=f(a)$, $P_1M_1=f(x)$, $P_2M_2=f(x_2)$,... $P_{n-1}M_{n-1}=f(x_{n-1})$ şi $DB=f(b)$. Ducând liniile AQ_1, M_1Q_2, M_2Q_3,...$M_{n-1}Q_n$ paralele cu Ox, avem

$f(a)\Delta x$ $=$aria dreptunghiului CAQ_1P_1,

$f(x_1)\Delta x$ $=$ » » $P_1M_1Q_2P_2$,

. . . .

$f(x_{n-1})\Delta x=$ » » $P_{n-1}M_{n-1}Q_nD$.

Suma

$$(1) \qquad f(a)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ldots+f(x_{n-1})\Delta x$$

este suma ariilor acestor dreptunghiuri şi este egală cu aria poligonului $CAQ_1\,M_1\,Q_2 \ldots M_{n-1}\,Q_n\,D$. Când n creşte nemărginit, este aria limitată de CA, CD, DB şi arcul AB al curbei $y=f(x)$.

Această sumă se poate reprezenta mai scurt prin

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x,$$

i luând valorile succesive $0, 1, 2, \ldots n-1$, iar x_0 fiind egal cu a. Limita acestei sume se exprimă prin simbolul

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

$\int$ fiind o formă schimbată a lui S şi se citeşte sumă dela a la b din $f(x)\,dx$.

Deci

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i-0}^{a-1} f(x_i)\,\Delta x = \text{aria CDBA}.$$

Se observă că avem aceleaşi rezultate dacă CA şi BD sunt egale cu zero.

Aşa s'ar putea calcula o valoare apropiată a arii considerate pentru o curbă $y=f(x)$. Calculele fiind anevoioase, trebue deci căutate metode directe pentru determinarea limitei sumei când n creşte nemărginit, ceeace vom vedea în cele ce urmează.

2. Funcţia primitivă a unei funcţii. Să considerăm unul oarecare din dreptunghiurile figurii 1, pe care-l vom nota cu PMRQ în figura 2 şi să ducem NS paralelă cu Ox, pentru a complecta dreptunghiul PQNS. Fie $\mathcal{A}$ aria variabilă CPMA, care este o funcţie de abscisa $x=OP$.

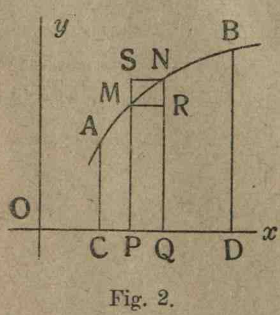

Fig. 2.

Avem $PQ=\Delta x$, $RN=\Delta y$, $PQNM=\Delta\mathcal{A}$; Δx fiind o creştere a variabilei xs, iar Δy şi $\Delta\mathcal{A}$ creşterile corespunzătoare ale lui y şi a arii CPMA. Deci

$$PQRM = PM.\ PQ = y\,\Delta x,$$
$$PQNS = PN.\ PQ = (y+\Delta y)\,\Delta x.$$

Se observă pe figura 2, că

deci

$$PQRM < PQNM < PQNS,$$
$$y\Delta x < \Delta\mathcal{A} < (y+\Delta y)\Delta x.$$

Să presupunem că $y=f(x)$ este o funcţie continuă, adică Δy tinde către zero când Δx tinde către zero. Impărţind cu Δx, avem

$$y < \frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta x} < y+\Delta y.$$

Dar aria $\mathcal{A}$ este o funcţie de x şi când Δx tinde către zero, $\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta x}$ tinde către $\frac{d\mathcal{A}}{dx}$, sau derivata ariei $\mathcal{A}$, pentru o valoare a lui x; y rămâne neschimbat, şi $y+\Delta y$ tinde către y. Cum $\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta x}$ rămâne cuprins între două numere y şi $y+\Delta y$, care ambele tind către aceeaşi limită y, urmează că şi limita expresiei $\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta x}$ este tot $y=f(x)$, aşa că avem $\frac{d\mathcal{A}}{dx}=y=f(x)$.

Aceasta înseamnă că aria $\mathcal{A}=$CPMA (Fig. 2), cuprinsă între axa Ox, curba $y=f(x)$, ordonatele CA şi PA, corespunzătoare absciselor OC$=a$ şi OP$=x$, este o funcţie a cărei derivată este $f(x)$. Deci, pentru a găsi această arie, trebue a căuta *o funcţie a cărei derivată să fie* $f(x)$, care se mai zice *funcţia primitivă* a funcţiei $f(x)$.

3. Noţiunea de integrală. Se numeşte *integrare* operaţia prin care se găseşte funcţia F(x), a cărei derivată $f(x)$ este cunoscută, şi rezultatul F(x) se zice *integrala*, sau funcţia primitivă a funcţiei date $f(x)$. Integrala se exprimă simbolic prin

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

unde F(x) este funcţia a cărei derivată este $f(x)$, iar C o constantă oarecare, căci dacă derivata funcţiei F(x), este $f(x)$, atunci şi derivata funcţiei F$(x)+$C este tot $f(x)$ (derivata unei constante este zero).

Deci, orice funcţie continuă $f(x)$ are o infinitate de funcţii primitive, de aceea $\int f(x)\,dx$ se zice integrală nedefinită.

Exemple. 1. $\int 2x\,dx = x^2+C$, $\int 2x^2dx = x^3+C$,

căci derivata funcţiei x^2+C este $2x$, iar a funcţiei x^3+C este $3x^2$.

2. a fiind o constantă avem

$$\int a\,dx = ax + C, \qquad \int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C,$$

căci derivata lui $ax+C$ este a, iar derivata funcţiei $\frac{ax^{m+1}}{m+1}+C$ este ax^m.

3. Integrala (funcţia primitivă) a unui polinom este suma integralelor termenilor săi. De ex.,

$$\int (x^3+3x^2-5x+2)dx = \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 2x + C,$$

căci derivata polinomului aflat este tocmai x^3+3x^2-5x+2.

4. Integrala definită. Calculul unei arii. Să considerăm aria $\mathcal{A}$ cuprinsă între curba $y=f(x)$ (Fig. 2), axa Ox şi ordonatele CA şi PM, corespunzătoare absciselor OC$=a$ şi OP$=x$ (x o abscisă nedefinită). Am văzut că

$$\mathcal{A} = \int f(x)\,dx + C.$$

Insemnând cu F(x) o funcţie (primitivă) a cărei derivată este $f(x)$, avem

(3) $$\mathcal{A} = F(x) + C.$$

Aceasta este aria figurii CAMP (Fig. 2), în care ordonata PM poate fi dusă prin orice punct P situat între ordonatele AC şi BD (Fig. 2). Când PM coincide cu CA, aria este zero, şi atunci $x=a$ Inlocuind aceste valori în (3), avem

$$0 = F(a) + C, \quad C = -F(a),$$

iar formula (3) devine

(4) $$\mathcal{A} = F(x) - F(a).$$

Când $x=b$, aria $\mathcal{A}$ devine aria ACDB (Fig. 2). Inlocuind pe x cu b în (4), avem

$$\text{aria ACDB} = F(b) - F(a),$$

Am găsit deci metoda pentru calculul limitei (2) (Nr. 1) care se poate exprima cu formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

F(x) fiind o funcţie primitivă a funcţiei $f(x)$.

Această expresie reprezintă valoarea ariei cuprinsă între curba $y=f(x)$, axa Ox şi ordonatele corespunzătoare lui $x=a$ şi $x=b$.

Limita sumei (2) (Nr. 1) însemnată cu $\int_a^b f(x)\,dx$, se zice *integrală definită*, iar numerele a şi b sunt numite limita inferioară şi limita superioară a integralei definite (Trebue observat că aci cuvântul limită are alt sens decât acela când se zice că o variabilă tinde către o limită).

De aci următoarea regulă pentru calculul unei integrale definite $\int_a^b f(a)\,dx$. Se calculează o funcţie (primitivă) $F(x)$ a cărei derivată este $f(x)$. Se substitue succesiv $x=a$ şi $x=b$ şi se scade $F(a)$ din $F(b)$, care se scrie simbolic

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b, \quad \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

De ex.,

$$\int_2^3 \frac{x^2}{5}\,dx=\left[\frac{1}{5}\,\frac{x^3}{3}\right]_2^3=\left[\frac{x^3}{15}\right]_2^3=\frac{27}{15}-\frac{8}{15}=\frac{19}{15}.$$

5. Observări. I. In cele ce preced, am presupus că $f(x)$ este pozitivă în intervalul (a, b) (între a şi b) şi $a<b$. Aceste restricţii pot fi înlăturate în modul următor. Dacă $f(x)<0$, pentru valorile lui x cuprinse între a şi b, curba reprezentativă a funcţiei $y=f(x)$ are forma din figura 3. In acest caz

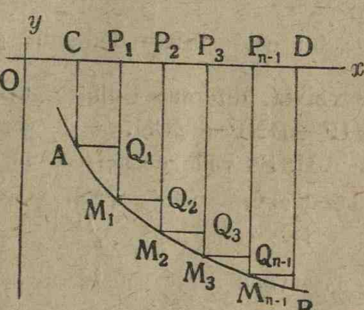

Fig. 3.

$f(a)\Delta x=-$aria dreptunghiului CAQ_1P_1

$f(x_1)\Delta x=-$aria dreptunghiului $P_1M_1Q_2P_2$

. . . .

şi deci

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\text{aria } CABD$$

Când $f(x)$ este şi pozitiv şi negativ între a şi b, dacă, $a<b$ (Fig. 4), integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ reprezintă suma algebrică a ariilor limi-

tate de curba $y=f(x)$, axa Ox şi ordonatele $x=a$ şi $x=b$, ariile situate deasupra axei Ox fiind pozitive, iar cele situate dedesubt fiind negative. Astfel (Fig. 4),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{CME} - \mathrm{EPF} + \mathrm{FQG} - \mathrm{GND}.$$

Dacă $a>b$ (Fig. 5), Δx este negativ, căci $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ şi se schimbă numai semnele, ariile situate deasupra lui Ox fiind nega-

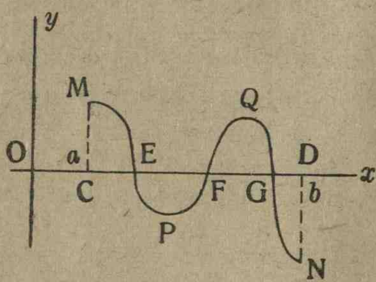

Fig. 4.

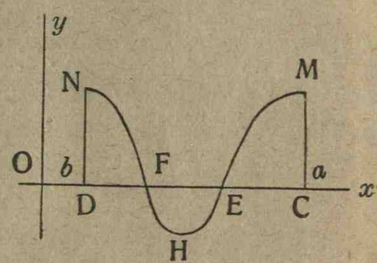

Fig. 5.

tive, iar cele situate dedesubt pozitive. Astfel (Fig. 5), $\int_a^b f(x)\,dx$ reprezintă diferenţa dintre ariile inferioare şi cele superioare EHF — DNF — ECM.

II. Se vede de aci că

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

şi observând ariile considerate, avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Calculul câtorva integrale şi arii.

6. Integralele imediate a câtorva funcţii. Am văzut derivatele funcţiilor simple (1). Ele ne vor da integralele fundamentale, cu ajutorul cărora se pot găsi metode speciale pentru integrarea funcţiilor.

---

(1) *N. Abramescu*, Algebra de cl. VII.

I. Avem

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \int \frac{dx}{x} = Lx + C, \text{ L logaritmul neperian,}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

II. Mai trebue reţinute următoarele derivate, care ne dau imediat integralele.

1. $\sqrt{x+a}$. Luând derivata, avem

$$\frac{d\sqrt{x+a}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+a}} \text{ şi deci } \int \frac{dx}{\sqrt{x+a}} = 2\sqrt{x+a} + C.$$

2. $\sqrt{x^2+a}$. Luând derivata, avem

$$\frac{d\sqrt{x^2+a}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+a}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}, \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+a} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$$

şi deci

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a}} = \sqrt{x^2+a} + C.$$

3. $L(x+\sqrt{x^2+a})$. Derivând, obţinem

$$\frac{d}{dx}\left[L(x+\sqrt{x^2+a})\right] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}} \frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) =$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}} \frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}},$$

$$\frac{d}{dx}\left[L(x+\sqrt{x^2+a})\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}},$$

deci

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=L\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C.$$

Când $a=-1$, avem $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=L(x+\sqrt{x^2-1})+C.$

7. **Proprietăţile integralelor.** I. k fiind o constantă şi derivata funcţiei $F(x)$ fiind $f(x)$, avem

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x),\quad \int f(x)dx=F(x)+C.$$

De asemenea, derivata funcţiei $kF(x)$ este $kf(x)$ şi deci

$$\frac{d}{dx}\Big[kF(x)\Big]=kf(x),\quad \int kf(x)dx=kF(x)+C.$$

Observând că $F(x)=\int f(x)dx$, şi înlocuind în relaţia precedentă, avem $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx+C$.

De ex., $\int 5f(x)dx=5\int f(x)dx$, $\int 3\sin x dx=3\int \sin x dx=-3\cos x+C$.

II. se vede că integrala unei sume este egală cu suma integralelor.

$$\int[f(x)+g(x)+h(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx+\int h(x)dx.$$

De ex., $\int(x^5-4x^2+3)dx=\int x^5dx-\int 4x^2dx+\int 3dx$

$$=\frac{x^6}{6}-4\frac{x^3}{3}+3x+C;$$

$$\int\left(5e^x-2\sin x+3x\right)dx=5\int e^xdx-2\int\sin x dx+3\int x dx$$

$$=5e^x+2\cos x+3\frac{x^2}{2}+C$$

8. **Schimbare de variabilă.** Să presupunem că se cere a se calcula integrala $I=\int\sin(3x+2)dx$. Pentru a o aduce la o formulă cunoscută, să facem *schimbarea de variabilă* $3x+2=t$. Derivând în raport cu x, avem

$$3=\frac{dt}{dx},\quad 3dx=dt,\quad dx=\frac{dt}{3},$$

şi atunci integrala devine

$$I=\int\sin t.\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int\sin t dt,$$

a cărei valoare o ştim, şi anume

$$I=\frac{1}{3}(-\cos t)+C.$$

Inlocuind pe t cu egalul său $3x+2$, valoarea integralei cerute este

$$I=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C.$$

9. Diferenţiala. Să considerăm curba $y=f(x)$ şi fie M şi M′ (Fig. 6) două puncte vecine pe ea. Să ducem tangenta MT în M şi paralela MP din M la Ox, care taie paralela din M′ la Oy respectiv în T şi P. Avem $MP=\Delta x$, $PM'=\Delta y$, $\operatorname{tg} PMT=f'(x)$, $PT=(\operatorname{tg} PMT)\,MP=f'(x).\Delta x$. Cantitatea $f'(x)\Delta(x)$ se zice diferenţiala lui y şi se reprezintă prin simbolul dy. Deci

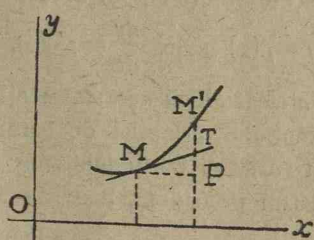

Fig. 6.

(1) $$dy=f'(x)\Delta x.$$

Aceasta este adevărată pentru toate formele funcţiei $f(x)$, deci şi pentru $y=f(x)=x$. In acest caz, $f'(x)=1$ şi formula (1) dă

(2) $$dx=\Delta x.$$

Inlocuind (2) în (1), obţinem formula definitivă

(3) $$dy=f'(x)dx.$$

In rezumat, *diferenţiala variabilei independente este egală cu creşterea variabilei; diferenţiala funcţiei este egală cu produsul diferenţialei variabilei independente prin derivata funcţiei.*

Trebue a face distincţie între Δy şi dy. Figura 6 arată că în general ele nu sunt egale, dar că tind a fi egale când Δx tinde către 0. Aceasta o putem vedea şi direct, căci avem $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$, unde $\lim \varepsilon\to 0$ când $\Delta x\to 0$; deci

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x=dy+\varepsilon\Delta x.$$

Trebue observat că dx şi dy sunt cantităţi finite, deci se pot face cu ele toate operaţiile ca şi cu numerele finite, şi deci nu trebue luate drept cantităţi infinitezimale. Deci cei doi termeni ai relaţiei (3) pot fi divizaţi cu dx, ceeace dă

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},$$

adică derivata este câtul diferenţialelor, de unde şi notaţia aleásă pentru derivată.

Observare relativă la schimbarea de variabilă. De oarece în semnul integralei $\int f(x)\,dx$, intră diferenţiala dx, pentru uşurinţă, în calcularea integralelor, în loc să zicem că derivăm, vom spune că diferenţiem, şi în loc de a scrie complet derivata funcţiei $y=f(x)$, adică $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, vom pune numai diferenţiala ei dy, înţelegând că aceasta este produsul derivatei funcţiei prin dx (diferenţiala variabilei de care depinde). De ex., dacă $u=v$, în loc de a scrie că derivatele sunt egale, $u'=v'$, scriem numai $du=dv$. In cazul precedent, $3x+2=t$, diferenţiind, avem $3dx=dt$.

10. Exemple. 1. $\int \cos^2 x dx$. Avem

$$I=\int \cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx.$$

Punând $2x=t$, avem diferenţiind $2dx=dt$, $dx=\frac{dt}{2}$,

$$\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin t=\frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$I=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Să punem $x=3t$ şi avem $dx=3dt$.

$$I=\int\frac{3dt}{\sqrt{9-9t^2}}=\int\frac{3dt}{3\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{arc}\sin t+C=\text{arc}\sin\frac{x}{3}+C.$$

3. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, a o constantă. Să punem $a^2+x^2=t^2$, deci diferenţiind $2x\,dx=2t\,dt$, $x\,dx=t\,dt$,

$$I=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2}}=\int dt=t+C=\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

4. $\int\frac{dx}{1-x^2}$. Să descompunem fracţia $\frac{1}{1-x^2}$ într'o sumă de două fracţii Avem $1-x^2=(1-x)(1+x)$. Să punem

(1) $$\frac{1}{1-x^2}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x},\qquad \frac{2}{(1-x)(1+x)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x},$$

şi să determinăm pe a şi b. Pentru aceasta, înmulţim în (1) cu $1-x$ şi avem

$$\frac{1}{1+x}=a+\frac{b}{1+x}(1-x).$$

unde facem pe $x=1$, tocmai cu valoarea ce anulează factorul $1-x$ cu care am înmulţit. Avem

$$\frac{1}{1+1}=a, \quad a=\frac{1}{2}.$$

Deasemenea, înmulţim în (1) cu $1+x$ şi facem pe urmă $x=-1$; obţinem

$$\frac{1}{1-x}=\frac{a(1+x)}{1+x}+b. \quad \frac{1}{1-(-1)}=\frac{a(1-1)}{1+1}+b, \quad b=\frac{1}{2}.$$

Expresia (1) devine

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right),$$

şi înlocuind în integrală, obţinem

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}\right)dx,$$

(2) $$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}$$

Să punem $1+x=t$; avem $dx=dt$,

$$\int\frac{dx}{1+x}=\int\frac{dt}{t}=\mathrm{L}\,t=\mathrm{L}(1+x).$$

De asemenea, să punem $1-x=u$; avem $-dx=du$,

$$\int\frac{dx}{1-x}=\int\frac{-du}{u}=-\int\frac{du}{u}=-\mathrm{L}\,u=-\mathrm{L}(1-x).$$

Relaţia (2) dă

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\mathrm{L}(1+x)-\frac{1}{2}\mathrm{L}(1-x)+\mathrm{C}=\mathrm{L}\sqrt{1+x}-\mathrm{L}\sqrt{1-x}+\mathrm{C}=\mathrm{L}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\mathrm{C}$$

5. $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$. Avem

$$\mathrm{I}=\int\frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1+x^2}{x(1+x^2)}dx-\int\frac{x^2\,dx}{x(1+x^2)},$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=\mathrm{L}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

Punând $1+x^2=t$, avem $2x\,dx=dt$.

$$\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\int\frac{dt}{t}=\mathrm{L}\,t=\mathrm{L}(1+x^2)$$

Deci

$$I = Lx - \frac{1}{2}L(1+x^2) + C = Lx - L\sqrt{1+x^2} + C = L\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

6. $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$. Avem $I = \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin x + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Să punem $1 - x^2 = t^2$; deci $-2x\,dx = 2t\,dt$, $x\,dx = -t\,dt$,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-t\,dt}{t} = -\int dt = -t = -\sqrt{1-x^2},$$

$$I = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

7. $I = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$. Avem $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$,

$$I = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Să punem $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$, $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; deci $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$,

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int \frac{dt}{1+t^2},$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

8. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}$ Trinomul de sub radical se scrie $5 - (x-2)^2$

Deci $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x-2)^2}}$$

Să punem $x - 2 = \sqrt{5}\,t$; deci $t = \frac{x-2}{\sqrt{5}}$, $dx = \sqrt{5}\,dt$,

$$I = \int \frac{\sqrt{5}\,dt}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5}\,t)^2} = \int \frac{\sqrt{5}\,dt}{\sqrt{5-5t^2}} = \int \frac{\sqrt{5}\,dt}{\sqrt{5}\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$I = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C.$$

9. Să se calculeze $I = \int \frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x^2-4)}\,dx$. Factorii numitorului sunt $x+3$, $x-2$ şi $x+2$. Să punem

$$1) \qquad \frac{x^3+11\,x+14}{(x+3)\,(x^2-4)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2},$$

A, B, C fiind constante de determinat. Gonind numitorii în această expresie, avem

$$x^2+11\,x+14=A\,(x-2)\,(x+2)+B\,(x+3)\,(x+2)+C\,(x+3)\,(x-2),$$

$$x^2+11\,x+14=(A+B+C)\,x^2+(5\,B+C)\,x+(-4\,A+6\,B-6\,C).$$

Egalând coeficienţii puterilor lui x din ambele părţi, avem

$$A+B+C=1,\ 5\,B+C=11,\ -4\,A+6\,B-6\,C=14,$$

de unde rezolvând în raport cu A, B, C avem $A=-2$, $B=2$, $C=1$. Inlocuind ín (1), avem

$$\frac{x^2+11\,x+15}{(x+3)\,(x^2-4)}=-\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+2},$$

$$I=-\int\frac{2}{x+3}dx+\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{dx}{x+2}=-2\,L\,(x+3)+2\,L\,(x-2)+$$
$$+L\,(x+2)+C.$$

$$I=L\frac{(x+2)\,(x-2)^2}{(x+3)^2}+C.$$

11. Exerciţii. Să se calculeze integralele

$$1.\ \int\frac{dx}{(x-1)^3};\quad 2.\ \int\operatorname{cotg}x\,dx;\quad 3.\ \int\operatorname{tg}x\,dx;\quad 4.\ \int\frac{e^x\,dx}{e^x+1};$$

$$5.\ \int\frac{\sqrt{x}-1}{6\,(\sqrt[3]{x}+1)}dx;\quad 6.\ \int\frac{dx}{x^2+3\,x+3};\quad 7.\ \int\frac{dx}{\sqrt{4-4\,x-x^2}}.$$

R. 1. Se pune $x-1=t$, $\displaystyle\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{2}t^{-2}+C=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+C.$

2. $I=\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}$. Se pune $x=u$, $du=\cos x\,dx$, $I=\displaystyle\int\frac{du}{u}=L\sin x+C.$

3. $I=\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}$. Se pune $\cos x=t$, $dt=-\sin x\,dx$, $I=\displaystyle\int\frac{dt}{t}=-L\cos x+C$

$$=L\frac{1}{\cos x}+C.$$

4. Se pune $e^x+1=t$, deci $e^x\,dx=dt$, $I=\displaystyle\int\frac{du}{u}=L\,u=L\,(e^x+1)+C.$

5. Se pune $x=t^6$, 6 fiind cel mai mic comun multiplu al indicilor 2 şi 3 ai radicalilor ce intră. Avem $dx=6\,t^5\,dt$,

$$I=\int\frac{t^8-t^5}{t^2+1}dt=\int\left(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1+\frac{1-t}{t^2+1}\right)dt.$$

$$I=\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+\int\frac{dt}{t^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{2\,t\,dt}{t^2+1}=\ldots+\operatorname{arctg}t-L\sqrt{t^2+1}+C,$$

$$I=\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{4}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-x^{\frac{1}{6}}+\operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}}-\mathrm{L}\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+1}+\mathrm{C}.$$

6. Numitorul este $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$; se pune $x+\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}}t$, $I=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+\mathrm{C}.$

7. Expresia de sub radical este $8-(x+2)^2$; se pune $x+2=\sqrt{8}\,t$,

$$I=\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{8}}+\mathrm{C}.$$

8. Să se calculeze $I=\int\frac{3x^3+3x-6}{(x+1)(x^3+1)}dx.$

R. $(x+1)(x^3+1)=(x+1)(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)^2(x^2-x+1)$. Să punem

$$\frac{3x^3+3x-6}{(x+1)(x^3+1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Gonind numitorii obţinem

$$3x^3+3x-6=A(x^2-x+1)+B(x+1)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)^2$$
$$=A(x^2-x+1)+B(x^3+1)+(Cx+D)(x+1)^2,$$
$$3x^3+3x-6=(B+C)x^3+(A+2C+D)x^2+(-A+C+2D)x+(A+B+D).$$

Egalând coeficienţii puterilor lui x din ambele părţi, avem ecuaţiile $B+C=3$, $A+2C+D=0$, $-A+C+2D=3$, $A+B+D=-6$, de unde $A=-4$, $B=0$, $C=3$, $D=-2$. Avem

$$I=\int\frac{-4\,dx}{(x+1)^2}+\int\frac{3x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{4}{x+1}+\int\frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}-2}{x^2-x+1}dx,$$

$$I=\frac{4}{x+1}+\int\frac{\frac{3}{2}(2x-1)}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-x+1}{dx},$$

$$I=\frac{4}{x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

$$I=\frac{4}{x+1}+\frac{3}{2}\mathrm{L}(x^2-x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\mathrm{C}.$$

12. Integrare prin părţi. Este un procedeu care se aplică cel mai mult. Considerând u şi v două funcţii de x, luând derivata produsului uv avem

$$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

Inmulţind cu dx, obţinem

$$\frac{d(uv)}{dx}dx=u\frac{dv}{dx}dx+dv\frac{du}{dx}dx.$$

Şi cum $\frac{du}{dx}dx = du$ (adică diferenţiala lui u), întrebuinţând notaţia diferenţială, avem $d(uv) = udv + vdu$.

Observând că $\int dx = x$, $\int df = f$, integrând ambele părţi, obţinem

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

$$\int u\,dv = uv - \int vdu$$

Această operaţie se zice integrarea prin părţi.

13. Exemple. 1. $I = \int Lx\,dx$. Să punem $Lx = u$, de unde $du = \frac{dx}{x}$ şi $dx = dv$, de unde $v = x$. Avem

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\,Lx - \int x\frac{dx}{x} = x\,Lx - x + C.$$

2. $I = \int x^m\,Lx.dx$. Să punem $Lx = u$, deci $du = \frac{dx}{x}$ şi $dv = x^m dx$, de unde $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. Avem

$$I = \int u\,dv = \frac{x^{m+1}Lx}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m+1}dx}{x},$$

$$I = \frac{x^{m+1}Lx}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}Lx}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C.$$

3. $I = \int xe^x dx$. Se pune $u = x$, $du = dx$ şi $dv = e^x dx$, $v = e^x$. Avem $I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

4. $I = \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, Se pune $u = x$, $du = dx$.

$$dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v = -\sqrt{1-x^2}.$$

$$I = -x\sqrt{1-x^2} + \int\sqrt{1-x^2}\,dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$I = -x\sqrt{1-x^2} + \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$I = -x\sqrt{1-x^2} + \text{arc sin}\,x - I$, $2I = -x\sqrt{1-x^2} + \text{arc sin}\,x + c$, $c = \text{const}$, şi divizând cu 2,

$$I = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\text{arc sin}\,x + C,\quad C = \frac{c}{2} = \text{const}.$$

13. Exerciţii. 1. $I = \int\frac{x\,\text{arc sin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

R. $u = \arc\sin x$, $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = -\sqrt{1-x^2}$,

$$I = -\sqrt{1-x^2}\arc\sin x + \int \sqrt{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x - \sqrt{1-x^2}\arc\sin x + C.$$

2.
$$I = \int x^2 e^x\,dx.$$

R. Se pune $u = x^2$ $dv = e^x\,dx$, deci $du = 2\,x\,dx$, $v = e^x$,

$$I = x^2 e^x - 2\int x\,e^x\,dx.$$

Se integrează din nou prin părţi ultima integrală, punând $u = x$, $dv = e^x\,dx$, şi avem

$$I = x^2 e^x - 2\,x\,e^x + 2\,e^x + C = e^x(x^2 - 2\,x + 2) + C.$$

3.
$$\int e^x \cos x\,dx.$$

R. $u = \cos x$, $dv = e^x\,dx$, deci $du = -\sin x\,dx$, $v = e^x$.

(2)
$$I = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx.$$

Se integrează din nou prin părţi a doua integrală, punând $u = \sin x$, $dv = e^x\,dx$, de unde $du = \cos x\,dx$, $v = e^x$, şi avem

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx, \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - I,$$

şi înlocuind în (1), avem $I = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)\,e^x + C$.

15. Calculul câtorva arii. Să considerăm o curbă având ca ecuaţie $y = f(x)$ şi fie M_0 şi M două puncte pe această curbă (Fig. 7) de abscise a şi b. Am văzut că aria limitată de curbă, axa Ox şi ordonatele P_0M_0 şi PM este egală cu integrala definită

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

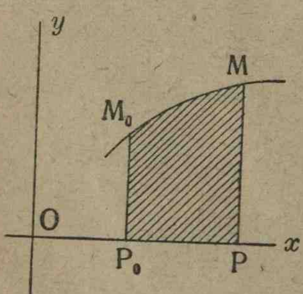

Fig. 7.

Pentru a calcula această integrală, se caută mai întâi funcţia primitivă $F(x)$ a lui $f(x)$, adică valoarea integralei $\int f(x)\,dx$ şi atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

este aria căutată. In cele ce urmează vom da câteva exemple simple.

16. Cazul parabolei. Se ştie că $y^2 = 2px$ reprezintă o parabolă raportată la axa sa luată ca axă Ox şi tangenta la vârf luată ca Oy (Fig. 8). Să considerăm pe această curbă un punct M, ale cărui coordonate x şi y sunt pozitive, $x = \mathrm{OP}$, $y = \mathrm{PM}$, şi să ne propunem a calcula aria OPM (Fig. 8).

Ramura curbei aşezată deasupra axei Ox are ecuaţia $y = \sqrt{2px}$; deci aria considerată A are ca valoare

$$\mathrm{A} = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx.$$

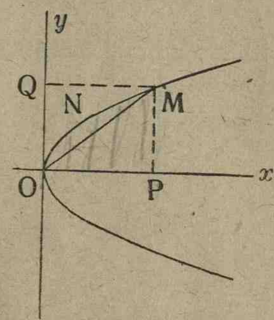

Fig. 8.

Integrala nedefinită $\int \sqrt{2px}\,dx$ se poate scrie $\sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$ şi este egală cu

$$\mathrm{F}(x) = \sqrt{2p}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{2px}.$$

Aria căutată este egală cu $\mathrm{A} = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)$. Pentru $x = 0$, valoarea este nulă. Avem deci

$$\mathrm{A} = \frac{2}{3}x\sqrt{2px} = \frac{3}{3}x.y,\quad \mathrm{A} = \frac{2}{3}\mathrm{OP.MP},$$

de unde rezultă că aria OPM este egală cu $\frac{2}{3}$ din aria dreptunghiului OPMQ (Fig. 8), sau $\frac{4}{3}$ din aria triunghiului OPM. Deci aria segmentului ONM de parabolă este egală cu o treime din suprafaţa triunghiului OPM [1].

17. Aria cercului. Ecuaţia cercului cu centrul în origine şi raza R fiind $x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$, avem $y = \pm\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}$, iar ramura curbei (Fig. 9) aşezată deasupra lui Ox este $y = +\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}$, x variind dela 0 la R. Aria sfertului de cerc este egală cu

$$\frac{1}{4}\mathrm{A} = \int_0^{\mathrm{R}} y\,dx = \int_0^{\mathrm{R}} \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\,dx.$$

---

[1] Determinarea ariei unei curbe plane, sau cum se mai zice *cuadratura unei curbe*, a fost obiectul cercetărilor multor geometri, din timpurile cele mai vechi. Astfel, *Archimede* (287—222 a. C.), cel mai mare geometru al antichităţii, a întrebuinţat pentru aceiaşi problemă o altă metodă asemănătoare cu aceasta, zisă a *Calculului integral*, inventat de *Newton* (1642—1727) şi *Leibnitz* (1646—1716).

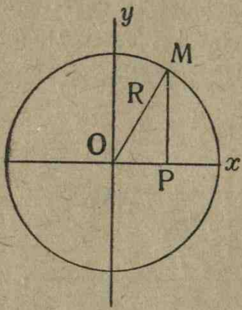

Fig. 9.

Să calculăm funcţia primitivă, adică

$$I=\int\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\int\frac{R^2-x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx,$$

$$(1)\quad I=R^2\int\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$R^2\int\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}-\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Dar

$$(2)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}}=\text{arc sin}\,\frac{x}{R}.$$

Pentru a doua integrală

$\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$, să punem $x=u$, $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$, $dx=du$, $v=-\sqrt{R^2-x^2}$,

şi integrând prin părţi avem

$$\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\int udv=uv-\int vdu=-x\sqrt{R^2-x^2}-\int\left(-\sqrt{R^2-x^2}\right)dx$$

$$(3)\quad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=-x\sqrt{R^2-x^2}+\int\sqrt{R^2-x^2}\,dx=-x\sqrt{R^2-x^2}+I.$$

Inlocuind în (1) valorile integralelor (2) şi (3), rezultă

$$I=R^2\,\text{arc sin}\,\frac{x}{R}+x\sqrt{R^2-x^2}-I$$

de unde

$$2I=R^2\,\text{arc sin}\,\frac{x}{R}+x\sqrt{R^2-x^2},\quad I=\frac{1}{2}R^2\,\text{arc sin}\,\frac{x}{R}+\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2},$$

$$(4)\qquad I=\int\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}R^2\,\text{arc sin}\,\frac{x}{R}+\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}.$$

Valoarea ariei căutate este deci

$$\frac{1}{4}A=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}R^2\arcsin\frac{x}{R}+\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}\right]_0^R,$$

$$\frac{1}{4}A=\frac{1}{2}R^2\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)_0^R+\frac{1}{2}\left(x\sqrt{R^2-x^2}\right)_0^R=$$

$$=\frac{1}{2}R^2\left(\arcsin\frac{R}{R}-\arcsin\frac{0}{R}\right)+\frac{1}{2}\left(R\sqrt{R^2-R^2}-0\sqrt{R^2-0}\right).$$

$$\frac{1}{4}A=\frac{1}{2}R^2\arcsin 1=\frac{1}{2}R^2.\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\pi R^2,$$

iar aria cercului întreg este $A=\pi R^2$.

18. Aria elipsei raportată la centru și axele sale. Ecuația elipsei (Fig. 10) fiind

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

ramura deasupra axei Ox are ecuația

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

iar aria sfertului elipsei este

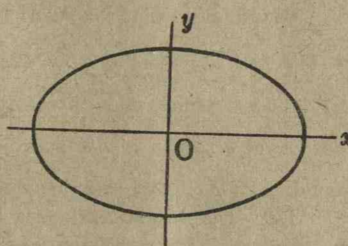

Fig. 10.

$$\frac{1}{4}A=\int_0^a y\,dx,\qquad (5)\quad \frac{1}{4}A=\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Dar integrala $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ este dată de formula (4), unde $a=R$.

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a=\frac{1}{4}\pi a^2,$$

astfel că înlocuind în (5), aria sfertului elipsei este

$$\frac{1}{4}A=\frac{b}{a}\frac{1}{4}\pi a^2=\frac{1}{4}\pi ab,$$

și deci aria elipsei este πab, a și b fiind lungimile semiaxelor.

19. Exemple. 1. *Aria limitată de axa* Ox, *parabola* $y^2=4px$ *și dreapta* $y+2x-4p=0$ (Fig. 11).

Dreapta şi parabola se tae în punctul $C(p, 2p)$, care se obţine rezolvând ecuaţiile lor; dreapta tae axa Ox în $B(2p, 0)$. Figura arată că aria cerută A este suma ariilor OCD şi CBD. Deci

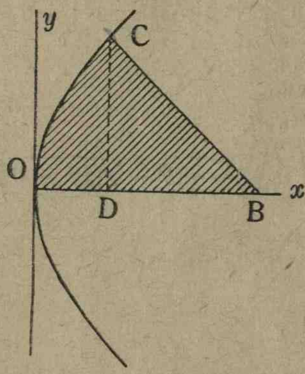

Fig. 11.

$$A = \int_0^p \sqrt{4px}\,dx + \int_p^{2p} (4p - 2x)\,dx$$

$$A = \left[\frac{4}{3}\sqrt{p}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^p + \left[4px - x^2\right]_p^{2p} = \frac{4}{3}\sqrt{p}\,p^{\frac{3}{2}} +$$

$$\left(4p.2p - (2p)^2\right) - \left(4p.p - p^2\right).$$

$$A = \frac{7}{3}p^2.$$

2. *Aria limitată de curba* $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, *axa* Ox, *axa* Oy *şi dreapta* $x = a$.

Se vede că x poate lua valori pentru care $a^2 - x^2 > 0$, adică $-a < x < a$. Derivata este $y' = \dfrac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)^2}}$, se anulează pentru $x = 0$, trecând dela $-$ la $+$, deci la acest punct este un minimum egal cu valoarea lui y pentru $x = 0$, adică $\dfrac{1}{a}\cdot$ Curba are dreptele $x = -a$, $x = a$ ca asimptote (Fig. 12).

Deci aria cerută este aceea cuprinsă între axa Oy, axa Ox şi asimptota sa $x = a$. Este egală cu

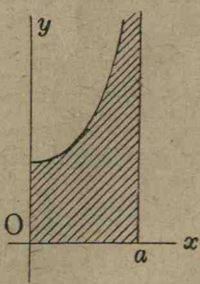

Fig. 12.

$$\int_0^a y\,dx = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)_0^a =$$

$$= \arcsin\frac{a}{a} - \arcsin 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\cdot$$

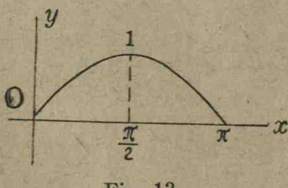

Fig. 13.

3. *Aria unei bucle limitată la axa* Ox *şi curba* $y = \sin x$. Construind această curbă, sinusoida (Fig. 13), vedem că aria unei bucle este îndoitul ariei ce se obţine dând lui x valori dela 0 la $\frac{\pi}{2}$, deci aria cerută este

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 2\left(-\cos x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = 2.$$

4. *Aria cuprinsă între curbele* $y = x^2 + 5$ *şi* $y = 2x^2 + 1$.

Construind aceste parabole (Fig. 14), vedem că se tae în punctele ale căror coordonate verifică ecuaţiile lor, de unde egalând pe y, avem $x^2+5=2x^2+1$, $x^2=4$, $x=\pm 2$; deci $y=x^2+5=(\pm 2)^2+5=9$. Punctele de intersecţie sunt M(2, 9), M'(— 2, 9).

Aria cerută este diferenţa ariilor cuprinse între fiecare curbă, axa Ox şi ordonatele $x=2$, $x=-2$; curbele fiind simetrice în raport cu Oy, aria cerută este îndoitul diferenţei ariilor cuprinse între Ox, curbele date şi axa Oy şi ordonata $x=2$.

$$A=2\left(\int_0^2 y_1\,dx-\int_0^2 y_2\,dx\right)=2\int_0^2\left(y_1-y_2\right)dx=$$

$$2\int_0^2\left[(x^2+5)-(2x^2+1)\right]dx,$$

$$A=2\int_0^2(-x^2+4)\,dx=2\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)_0^2=$$

$$2\left[\left(-\frac{8}{3}+4.2\right)\right]=\frac{32}{3}.$$

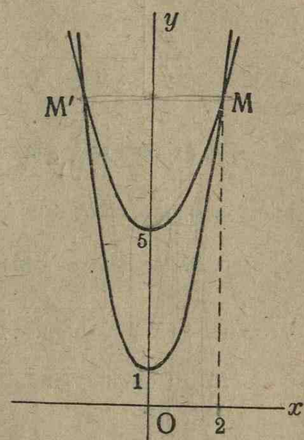

Fig. 14.

20. Exerciţii. 1. Să se afle aria limitată de parabola $x^2-9y=0$ şi dreapta $x-3y+6=0$.

R. Parabola $y=\frac{x^2}{9}$ şi dreapta $y=\frac{x}{3}+2$ se tae în punctele (—3, 1), (6, 4).

$$\text{Aria}=\int_{-3}^{6}\left[\left(\frac{x}{3}+2\right)-\frac{x^2}{9}\right]dx=17+\frac{1}{2}.$$

2. Să se afle aria limitată de parabola $y^2=2(x-4)$ şi dreapta $x=3y$

R. Se construesc dreapta $y=\frac{x}{3}$ şi parabola cu vârful în (4, 0), care se tae în punctele (6, 2), (12, 4). Aria este

$$A=\int_6^{12}\left[\sqrt{2(x-4)}-\frac{x}{3}\right]dx=\left[\frac{1}{3}(2x-8)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{6}\right]_6^{12}=\frac{2}{3}.$$

3. Să se afle aria limitată de chaînette (lănţişorul) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}}\right)$, axa O$x$ şi dreptele $x=\pm h$.

$$\text{R. } A=\int_{-h}^{h}\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left(ae^{\frac{x}{a}}-ae^{\frac{-x}{a}}\right)_{-h}^{h}=a^2\left(e^{\frac{h}{a}}-e^{\frac{-h}{a}}\right).$$

4. Să se afle aria limitată de curba $y=\frac{4(2-x)}{x^2+4}$, axa Ox şi axa Oy.

R. Curba are ca asimptotă dreapta Ox, căci $x \to \infty$, $y = 0$. Tabloul variației este

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		2		$2+2\sqrt{2}$		∞
y'		$+$		$-$		$-$		$+$	
y	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0	$\searrow$	min <0	$\nearrow$	0

$$\text{Aria este} = \int_0^2 y\,dx = 4\int_0^2 \frac{2-x}{x^2+4}\,dx = 8\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} - 2\Big[\mathrm{L}(x^2+4)\Big]_0^2.$$ Pentru prima se pune $x = 2t$, $A = 4 \operatorname{arctg} 1 - 2\,\mathrm{L}\,2$.

5. Să se afle aria limitată de părțile curbelor $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ și $y = \sin x + \sin 2x$, cuprinse între 0 și π.

R. Se obține grafic curba $y = \sin y + \frac{1}{2}\sin 2x$ adunând ordonatele (Fig. 15) curbelor $y = \sin x$ și $y = \frac{1}{2}\sin 2x$. Se poate construi cum știm scriind

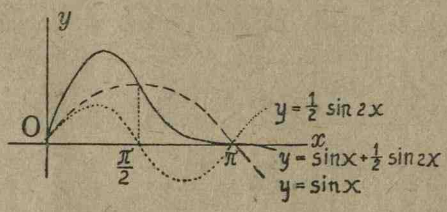

Fig. 15.

$y = \sin x + \sin x \cos x = \sin x(1 + \cos x)$, ce se anulează pentru $x = 0$, $x = \pi$. Derivata este $y' = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$,

$y' = 2(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$; primul factor $\cos x + 1 > 0$, y este maximum pentru $x = \frac{\pi}{3}$, care anulează $\cos x - \frac{1}{2}$. Curbele se tae în punctul de abscisă $x = \frac{\pi}{2}$. Aria este

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) - \sin x\right]dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\sin x - \left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]dx = 2.$$

6. Să se afle aria cuprinsă între cubica $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^3}$ și asimptota sa.

R. Curba e simetrică în raport cu Oy; făcând $x = \infty$, $y = 0$, admite pe Ox cu asimptotă; y e maximum egal cu $2a$ pentru $x = 0$. Aria la dreapta axei Oy se obține punând $x = 2at$, și este

$$\frac{A}{2}=\int_0^\infty y\,dx=\int_0^\infty \frac{8a^3}{x^2+4a^2}dx=a^3\int_0^\infty \frac{2a\,dt}{4a^2(1+t^2)}=2\pi a,\ A=4\pi a^2.$$

7. Să se afle aria limitată de curba $y=\sqrt{x}\,\mathrm{L}\,x$, axa Ox şi ordonatele $x=1$ şi $x=e$.

R. x trebue să fie mai mare ca zero, curba e aşezată la dreapta lui Oy. Când $x<1$, $\mathrm{L}x<0$, $y<0$, curba e sub Ox; când $x=1$, $y=0$, apoi y creşte nemărginit. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{L}x+\sqrt{x}\frac{1}{x}=\frac{\mathrm{L}x+2}{2\sqrt{x}}$; $y'=0$ când $\mathrm{L}x+2=0$, $\mathrm{L}x=-2$, $x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$, între 0 şi 1; când $x<\frac{1}{e^2}$, $y'<0$; când $x>\frac{1}{e^2}$, $y'>0$, deci pentru $x=\frac{1}{e^2}$, y este minimum egal cu $-\frac{2}{e}$. Aria este $A=\int_1^e\sqrt{x}\,\mathrm{L}x\,dx=\int_1^e(\mathrm{L}x)\,d\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$; se pune $\mathrm{L}\,x=u$, $dv=d\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$, deci $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

$$A=\int_1^e u\,dv=\Big(u\,v\Big)_1^e-\int_1^e v\,du=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{L}x\right)_1^e-\int_1^e\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{x}=\frac{2}{9}\left(e^{\frac{3}{2}}+2\right).$$

Numere complexe.

21. Generalități. O expresie de forma $a+bi$, $i=\sqrt{-1}$, se zice număr imaginar sau complex. Se vede că $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^{2q}=(-1)^p$, $i^{2q+1}=(-1)^q i$, $i^{4r}=1$.

Unui punct M (a, b) (Fig. 16) în plan îi corespunde un număr imaginar $z=a+bi$, și invers. Punctelor axei Ox le corespund numere reale, de aceea se zice axă reală, iar punctelor axei Oy le corespund numere bi, pur imaginare, de aceea Oy se zice axă imaginară. Punctul M se zice afixul, sau imaginea numărului imaginar.

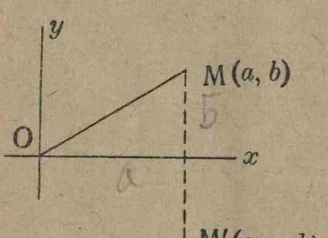

Fig. 16.

Modulul unui număr imaginar $a+bi$ este lungimea $\mathrm{OM}=\sqrt{a^2+b^2}$, și se scrie

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Numele $a+bi$ și $a-bi$ se zic *imaginar conjugate*. Afixele lor, M(a, b), M$'(a, -b)$ sunt două puncte simetrice față de axa Ox.

Unui număr complex $z=a+bi$ de afix M(a, b) îi corespunde *vectorul* $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, cu originea O, extremitatea M, și lungimea $\mathrm{OM}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$, egală cu modulul.

Un număr complex $a+bi$ este nul prin definiție cân $a=0, b=0$.

Deci, din relația $u+iv=9$, deducem două ecuații, $u=0$, $v=0$.

Două numere complexe sunt egale când au părți reale egale și coeficienții lui i egali. In adevăr, dacă $a+bi=a'+b'i$, deducem

$$(a-a')+i(b-b')=0,\ a-a'=0,\ b-b'=0;\ a=a',\ b=b'.$$

22. Adunarea. Fie $M'(a', b')$, $M''(a'', b'')$ (Fig. 17) afixele numerelor imaginare $z' = a' + b'i$, $z'' = a'' + b''i$. Suma lor este

$$z = (a' + a'') + i(b' + b'').$$

Afixul M, corespunzător sumei $z' + z''$ este extremitatea diagonalei paralelogramului construit cu OM′, OM″.

In adevăr, fie P, P′, P″, proecţiile pe axa Ox a punctelor M, M′, M″ şi Q intersecţia dreptei MP cu paralela dusă prin M′ la Ox; triunghiurile $MM'Q = OP''M''$ şi deci

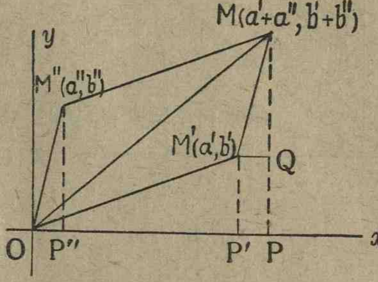

Fig. 17.

$$OP'' = M'Q = P'P,$$

$$OP = OP' + P'P = a' + a'', \quad PM = PQ + QM = P'M' + P''M'' = b' + b''.$$

Sumei $z = z' + z''$ a numerelor complexe $z' = a' + b'i$, $z'' = a'' + b''i$, de afixe M′ şi M″ (Fig. 17), îi corespunde vectorul $\overrightarrow{OM}$, egal cu suma vectorilor $\overrightarrow{OM'}$ şi $\overrightarrow{OM''}$, care se scrie vectorial

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}.$$

Suma a doi vectori $\overrightarrow{OM'}$ şi $\overrightarrow{OM''}$, este vectorul OM reprezentat de diagonala OM a paralelogramului construit cu OM′ şi OM″; sau se obţine ducând prin extremitatea M′ a primului vector, un vector $\overrightarrow{M'M}$ echipolent cu $\overrightarrow{OM''}$, adică M′M egal şi paralel cu OM″.

Din triunghiul OM′M se vede că $OM < OM' + M'M$, sau $OM < OM' + OM''$, $|z| < |z'| + |z''|$, *adică modulul sumei este mai mic decât suma modulelor.*

In general, suma mai multor numere complexe,

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \ldots z_n = a_n + b_n i,$$

este
$$z = a_1 + \ldots + a_n + i(b_1 + \ldots + b_n)$$

şi are ca afix extremitatea sumei vectorilor concurenţi $\overrightarrow{OM_1}, \ldots \overrightarrow{OM_n}$.

Suma acestor vectori se obţine ducând prin M_1 un vector $\overrightarrow{M_1 A_2}$ echipolent cu $\overrightarrow{OM_2}$; prin A_2 vectorul $\overrightarrow{A_2 A_3}$ echipolent cu $\overrightarrow{OM_3}$ (adică $A_2 A_3$ egal şi paralel cu OM_3); etc. OM este linia care închide poligonul format $OM_1 A_2 A_3 \ldots M$.

23. Scăderea. Diferenţa a două numere complexe $z'=a'+b'i$, $z''=a''+b''i$, este $z=z'-z''=a'-a''+i(b'-b'')$, şi are ca afix punctul M (Fig. 18) obţinut ducând prin originea O vectorul $\overrightarrow{OM}$ echipolent cu $\overrightarrow{M''M'}$, adică OM egal şi paralel cu M″M′.

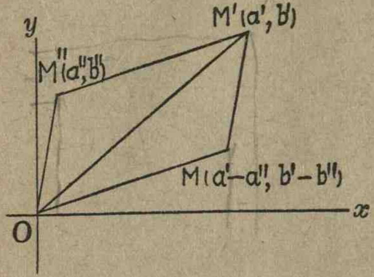

Fig. 18.

Diferenţa vectorilor $\overrightarrow{OM'}$ şi $\overrightarrow{OM''}$ (Fig. 18) este $\overrightarrow{M''M'}$ şi se scrie cu ecuaţia vectorială

$$\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM''}=\overrightarrow{M''M'}.$$

24. Produsul a două numere $z'=a'+b'i$, $z''=a''+b''i$ se efectuează ca la numerele reale, cu condiţia ca să înlocuim $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, etc.; avem de ex.,

$$z'z''=(a'+b'i)\,(a''+b''i)=a'a''-b'b''+i(b'a''+a'b''),$$

$$(a+bi)\,(a-bi)=a^2+b^2,$$

$$(a+bi)^m=a^m-C_m^2a^{m-2}b^2+C_m^4a^{m-4}b^4-\cdots+i(C_m^1a^{m-1}b-C_m^3a^{m-3}b^3+\cdots),$$

Produsul mai multor numere complexe este nul, când unul din factori e nul.

25. Câtul $\dfrac{a'+b'i}{a''+b''i}$ se poate aduce la forma $\alpha+\beta i$, înmulţind ambii termeni ai fracţiei cu conjugata numitorului, $a''-b''i$; obţinem, în cazul numeric,

$$\frac{3+2i}{5+3i}=\frac{(3+2i)\,(5-3i)}{(5+3i)\,(5-3i)}=\frac{15+6+i(10-9)}{25+9}=\frac{21}{34}+\frac{i}{34}.$$

26. Extragerea rădăcinii. Pentru a calcula $\sqrt[n]{a+bi}$, egalăm această expresie cu $x+iy$ şi totul revine să calculăm pe x şi y Avem

$$\sqrt[m]{a+bi}=x+iy,\quad (x+iy)^m=a+bi,$$

de unde $$x^m-C_m^2x^{m-2}y^2+\cdots+i(C_m^1x^{m-1}y-\cdots)=a+bi,$$

$$x^m-C_m^2x^{m-2}y^2+C_m^4x^{m-4}y^4-\cdots=a,$$

$$C_m^1x^{m-1}y-C_m^3x^{m-3}y^3+\cdots=b.$$

Rezolvând aceste ecuaţii, găsim valorile lui x şi y.

Exemplu. $\sqrt{5-3i}=x+iy$.

$$x^2-y^2=5,\ xy=-\frac{3}{2};\ x=-\frac{3}{2y},\ \frac{9}{4y^2}-5=y^2,\ 4y^4+20y^2-9=0,\ y=\pm\sqrt{\frac{-5\pm\sqrt{34}}{2}};$$

$$x=\frac{-3}{\pm 2\sqrt{\frac{-5+\sqrt{34}}{2}}},\ x=\frac{-3\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}}}{\pm 2\sqrt{\frac{-5+\sqrt{34}}{2}}\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}}}=\frac{-3\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}}}{\pm 2.\frac{3}{2}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}};\ y=\pm\sqrt{\frac{-5+\sqrt{34}}{2}}.$$

Deci

$$\sqrt{5-3i}=x+iy=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}}+i\sqrt{\frac{-5+\sqrt{34}}{2}}.$$

sau

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}}-i\sqrt{\frac{-5+\sqrt{34}}{2}}.$$

12. Exerciţii. 1. In ce caz modulul sumei sau diferenţei a două numere complexe $a+bi$ şi $a'+b'i$ este egal cu suma sau diferenţa modulelor acestor numere.

R. $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'+bb')^2$; cu identitatea lui Lagrange se vede că trebue $(ab'-ba')^2=0$, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

2. Să se efectueze produsul $(1+i)(1+2i)(1+3i)(1+4i)(1+5i)$.
R. $10(19-9i)$.

3. In ce caz $(x+\alpha_1 i)(x+\alpha_2 i)\ldots(x+\alpha_n i)$ este real, x fiind real. In ce caz este de forma ki, k fiind real.
R. $\Sigma\alpha_1-\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5-\ldots=0$; $1-\Sigma\alpha_1\alpha_2+\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4-\ldots=0$.

4. In ce caz $(1+ai)^5$ este real. Să se determine a.
R. $5\alpha-10\alpha^3+\alpha^5=0$; $\alpha=\pm\sqrt{5\pm2\sqrt{5}}$, sau $\alpha=0$.

5. In ce caz $(1+\alpha i)^n$ este de forma $-ki$, k real.
R. $C_n^1\alpha-C_n^3\alpha^3+C_n^5\alpha^5-\ldots=0$.

6. Să se împartă $(1+i)^2$ prin $(1-i)^3$.
R. $-\frac{1}{2}(1+i)$.

7. Să se pună expresia $\frac{1}{1-i}+\frac{1}{a-i}+\frac{1}{1-ai}$ sub form $x+iy$.
R. $\left(\frac{1}{2}+\frac{a+1}{a^2+1}\right)(1+i)$.

8. Să se găsească condiţia ca un număr complex $a+bi$ să se poată pune sub forma $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$, λ real.

Trebue ca ecuaţiile $a+b\lambda=1$, $b-a\lambda=\lambda$ să fie compatibile; $a^2+b^2=1$.

28. Forma trigonometrică a numerelor complexe. Fiind dat afixul $M(a, b)$ (Fig. 19) al numărului imaginar $z = a + bi$, se numeşte *modul* lungimea $OM = \rho$, iar *argument*, unghiul $\omega = POM$. Avem $OP = OM \cos\omega$, $PM = OM \sin\omega$, $a = \rho\cos\omega$, $b = \rho\sin\omega$: deci

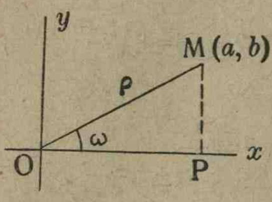

Fig. 19.

$$z = a + bi = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

Avem $a^2 = \rho^2\cos^2\omega$, $b^2 = \rho^2\sin^2\omega$

$$a^2 + b^2 = \rho^2(\cos^2\omega + \sin^2\omega) = \rho^2,$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\omega = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\omega = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Prin urmare, fiind dat un număr imaginar $a + bi$, pentru a calcula modulul şi argumentul corespunzător, ne servim de formula

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\omega = \frac{a}{\rho}, \quad \sin\omega = \frac{b}{\rho}.$$

Unui număr complex îi corespund o infinitate de argumente, $2k\pi + \omega$, k fiind un întreg oarecare. Un număr complex este nul, când modulul său este zero.

Nu se poate aplica relaţia $tg\,\omega = \frac{a}{b}$ dedusă din împărţirea expresiilor $a = \rho\cos\omega$, $b = \rho\sin\omega$; căci, ar corespunde pentru argument două valori, π şi $\omega + \pi$, adică unui singur număr imaginar $a + bi$, ar corespunde două puncte $M(\rho, \omega)$ şi diametralul opus $M'(\rho, \omega + \pi)$, ceeace este absurd, căci unui număr imaginar îi corespunde un singur punct.

Exemple. 1. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \rho(\cos\omega + i\omega)$.

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad \cos\omega = -\frac{1}{2}, \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega = 120^0, \quad \omega = \frac{2\pi}{3};$$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

2. $1 = \cos 0 + i\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $\; -1 = \cos\pi + i\sin\pi$,

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

29. Produsul a două numere complexe puse sub formă trigonometrică se face astfel

$$\rho_1(\cos\omega_1+i\sin\omega_1)\rho_2(\cos\omega_2+i\sin\omega_2)=$$
$$\rho_1\rho_2[\cos\omega_1\cos\omega_2-\sin\omega_1\sin\omega_2+i(\cos\omega_1\sin\omega_2+\sin\omega_1\cos\omega_2)]$$
$$=\rho_1\rho_2[\cos(\omega_1+\omega_2)+i\sin(\omega_1+\omega_2)],$$

adică se înmulţesc modulele şi se adună argumentele.

Reprezentarea geometrică este următoarea. Se duce OM (Fig. 20), ce face cu OM_2 unghiul ω_1, se ia pe această dreaptă lungimea $OM=OM_1.OM_2$, unitatea de lungime fiind $OD=1$. Deci

$$\frac{OM_1}{OD}=\frac{OM}{OM_2},$$

ceeace probează că triunghiurile ODM_1 şi OM_2M sunt direct asemenea. De aci construcţia: se duce pe Ox o lungime $OD=1$, egală cu unitatea de lungime şi se construeşte pe OM_2 un triunghiu OM_2M direct asemenea cu ODM_1; punctul M este afixul produsului.

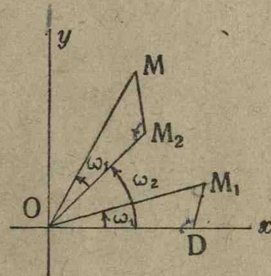

Fig. 20.

In cazul produsului a n numere complexe, avem

$$\prod_{p=1}^{n}\rho_p\left(\cos\omega_p+i\sin\omega_p\right)=\rho_1\ldots\rho_n\left(\cos\sum_{p=1}^{n}\omega_p+i\sin\sum_{1}^{n}\omega_p\right).$$

Exemplu. $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\frac{12}{12}\pi+i\sin\frac{12}{12}\pi=-1.$$

30. Formula lui Moivre. In cazul puterii, avem

$$[\rho(\cos\omega+i\sin\omega)]^m=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)\ldots\rho(\cos\omega+i\sin\omega)=$$
$$\rho^m(\cos m\omega+i\sin m\omega).$$

In cazul particular $\rho=1$, rezultă

$$(\cos\omega+i\sin\omega)^m=\cos m\omega+i\sin m\omega,$$

care este formula lui Moivre.

Aplicaţie. Să se calculeze $E=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3p}$.

Avem $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\rho\cos\omega+i\sin\omega$; $\rho=1$, $\cos\omega=-\frac{1}{2}$, $\sin\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\omega=60^0+180^0=240^0=\frac{4\pi}{3}.$$

$$E=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{3p}=\cos 4p\pi+i\sin 4p\pi=1.$$

31. Reprezentarea geometrică a puterii unui număr complex. Fie M_1 (Fig. 21) afixul numărului $z=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$. Să luăm pe Ox vectorul unitate OM, şi să construim succesiv triunghiurile (asemenea) OM_1M_2, OM_2M_3,... direct asemenea cu triunghiul OMM_1. Vectorii OM, OM_1, OM_2,... OM_n, reprezintă puterile $z^0, z^1, z^2,\dots z^n$. Modulele lor formează o progresie geometrică

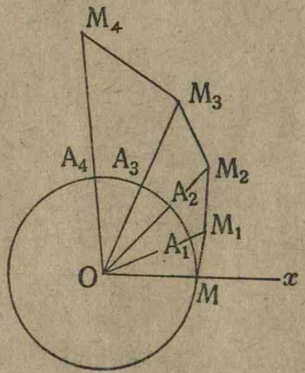

Fig. 21

(1) $\quad 1, \rho, \rho^2,\dots \rho^n,\dots$

şi argumentele fac o progresie aritmetică

(2) $\quad 0, \omega, 2\omega,\dots n\omega,\dots$

Progresiile (1) şi (2) definesc un sistem de logaritmi. Deci, dacă însemnăm cu a baza acestui sistem de logaritmi, putem scrie

$$\log_a \rho^m = m\omega,\quad \rho=a^\omega;$$

dacă (ρ, ω) sunt coordonatele polare ale punctului M_1, linia poligonală $MM_1M_2\dots M_n$ este înscrisă în curba $\rho=a^\omega$, o spirală logaritmică.

32. Câtul a două numere complexe

$$z_1=\rho_1(\cos\omega_1+i\sin\omega_1),\ z_2=\rho_2(\cos\omega_2+i\sin\omega_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1(\cos\omega_1+i\sin\omega_1)}{\rho_2(\cos\omega_2+i\sin\omega_2)}$$

este de forma $r(\cos\theta+i\sin\theta)$. Egalând, deducem

$$\rho_1(\cos\omega_1+i\sin\omega_1)=$$
$$\rho_2(\cos\omega_2+i\sin\omega_2)\,r(\cos\theta+i\sin\theta);$$

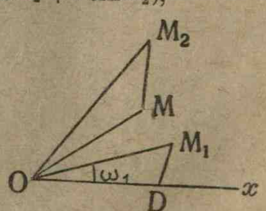

Fig. 22.

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=r,\quad \omega_1=\omega_2+\theta,\quad \theta=\omega_1-\omega_2,$$

adică se împart modulele şi se scad argumentele.

Reprezentarea geometrică se face observând că, dacă M_1, M_2 (Fig. 22) sunt afixele numerelor imaginare date, OD egală cu unitatea de lungime, afixul M al câtului $\frac{z_1}{z_2}$ este al treilea vârf al triunghiului OM_2M construit direct asemenea cu OM_1D.

Exemplu. $\frac{\cos\omega + i\sin\omega}{\cos\omega - i\sin\omega} = \frac{\cos\omega + i\sin\omega}{\cos(-\omega) + i\sin(-\omega)} = \cos 2\omega + i\sin 2\omega.$

33. Exerciții. 1. Să se calculeze

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right).$$

R. i.

2. Să se calculeze $\frac{\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18}}$, $\frac{\cos\frac{3\pi}{20} + i\sin\frac{3\pi}{20}}{\cos\frac{\pi}{20} - i\sin\frac{\pi}{20}}$.

R. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$, $\frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$.

3. Să se calculeze $\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2$, $\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)^4$.

R. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$, $\frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{5}+1\right)+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$.

4. Să se calculeze $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3p+1}$.

R. $\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{3p+1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

34. Extragerea rădăcinii. Fiind dat numărul $\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ a extrage rădăcina m—a. înseamnă a calcula pe r și θ, așa încât să avem

$$\sqrt[m]{\rho(\cos\omega + i\sin\omega)} = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega) = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta).$$

De unde

$$r^m = \rho, \cos m\theta = \cos\omega, \sin m\theta = \sin\omega; r = \sqrt[m]{\rho}, m\theta = 2k\pi + \omega, \theta = \frac{2k\pi + \omega}{m}$$

$$\sqrt[m]{\rho(\cos\omega + i\sin\omega)} = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi + \omega}{m} + i\sin\frac{2k\pi + \omega}{m}\right).$$

Modulul $r = \sqrt[m]{\rho}$ este rădăcina aritmetică a lui ρ și se calculează, cu ajutorul logaritmilor, $r = \frac{1}{m}\log\rho$; argumentul ω are diferite valori, după acelea ale lui k. Dacă dăm lui k valoarea m, avem

$$\cos\frac{2m\pi+\omega}{m}+i\sin\frac{2m\pi+\omega}{m}=\cos\left(2\pi+\frac{\omega}{m}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{\omega}{m}\right)=$$

$$\cos\frac{\omega}{m}+i\sin\frac{\omega}{m},$$

valoare găsită dând lui k valoare 0. Deci, rădăcina m dintr'un număr complex are m valori distincte, obținute dând lui k valorile 0, 1, 2,... $m-1$. Aceste valori se mai pot scrie

$$\sqrt[m]{\rho(\cos\omega+i\sin\omega)}=\sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\omega}{m}+i\sin\frac{\omega}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\dots\ m-1.$$

Dacă numărul A din care se extrage rădăcina a m este real și pozitiv, atunci $\omega=0$, și cele m valori ale rădăcinii a m sunt date de formula

$$\sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),\quad k=0,\ 1,\ 2,\dots\ m-1.$$

Una din aceste valori este reală, corespunde lui $k=0$ și egală cu $\sqrt[m]{A}$, rădăcina m aritmetică lui A.

Ca să mai fie încă una reală, trebue să dispară termenul $i\sin\frac{2k\pi}{m}$, adică $\frac{2k\pi}{m}=\pi$, $k=\frac{m}{2}$; deci în cazul când m este cu soț, $\sqrt[m]{A}$ are două valori reale,

$$k=0,\quad \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2.0.\pi}{m}+i\sin\frac{2.0.\pi}{m}\right)=\sqrt[m]{A},$$

$$k=\frac{m}{2},\quad \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{m\pi}{m}+i\sin\frac{m\pi}{m}\right)=-\sqrt[m]{A}.$$

Valorilor lui k egale cu p și $m-p$ le corespund pentru rădăcina m, $\sqrt[m]{A}$, valorile

$$\sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2p\pi}{m}+i\sin\frac{2p\pi}{m}\right),$$

$$\sqrt[m]{A}\left[\cos\frac{2(m-p)\pi}{m}+i\sin\frac{2(m-p)\pi}{m}\right]=$$

$$\sqrt[m]{A}\left[\cos\left(2\pi-\frac{2p\pi}{m}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2p\pi}{m}\right)\right]=$$

$$\sqrt[m]{A}\left[\cos\left(-\frac{2p\pi}{m}\right)+i\sin\left(-\frac{2p\pi}{m}\right)\right]=\sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2p\pi}{m}-i\sin\frac{2p\pi}{m}\right).$$

Rezultă de aci, că, *dacă A este real și m cu soț*, valorile expresii $\sqrt[m]{A}$ sunt două câte două imaginar conjugate și sunt date de

$$\sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{m}\pm i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),\quad k=0,1,2,\ldots\frac{m}{2}.$$

Dacă A este real și pozitiv, și $m=2q+1$, fără soț, rădăcina m—a din A are m valori distincte, numai o valoare este reală, corespunde lui $k=0$, iar celelalte sunt două câte două imaginar conjugate, date de

$$\sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{m}\pm i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),\quad k=1,2,\ldots\frac{m-1}{2}.$$

35. Reprezentarea geometrică a rădăcinii m— a numărului complex $\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$ se face astfel. $M(\rho,\omega)$ fiind afixul acestui număr imaginar (Fig. 23), se ia pe OM o lungime OM_0 egală cu rădăcina aritmetică a m—a din OM, $OM_0=\sqrt[m]{OM}$. Chestiunea revine acum la înscrierea unui poligon regulat $M_0 M_1 M_2 \ldots$, de m laturi în cercul de rază OM_0.

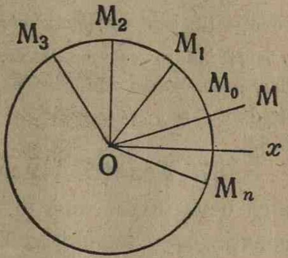

Fig. 23.

36. Rădăcinile m—a a unității. Cele m valori ale rădăcinii m—a din 1 sunt date de relațiunea

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m},\quad k=0,1,2,\ldots m-1,$$

sunt reprezentate prin vârfurile unui poligon regulat de m laturi, înscris în cercul cu raza 1.

Ridicând rădăcina x_k la puterea p, obținem

$$x_k^p=\left(\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)^p=\cos\frac{2kp\pi}{m}+i\sin\frac{2kp\pi}{m},$$

adică tot o rădăcină a unității. *Deci puterile rădăcinii unității sunt rădăcini ale unității.*

Când o rădăcină a unității reproduce prin puterile sale succesive toate rădăcinile unității, acea rădăcină se zice primitivă. Dacă x_k este o rădăcină primitivă, trebue deci ca o putere, p, a sa

$$x_k^p = \cos\frac{2kp\pi}{m} + i\sin\frac{2kp\pi}{m},$$

să fie una oricare, x_s,

$$x_s = \cos\frac{2s\pi}{m} + i\sin\frac{2s\pi}{m}, \quad s < m-1$$

din rădăcinile unităţii. Trebue deci să avem

$$\frac{2kp\pi}{m} = 2h\pi + \frac{2s\pi}{m},$$

de unde

(3) $$kp = hm + s, \qquad kp - hm = s.$$

Trebue, aşa dar, să se găsească valori întregi pentru p şi h, astfel ca ecuaţia (3) să fie satisfăcută.

Insă, aceasta este o problemă de Analiză nedeterminată de gradul întâi şi ecuaţia (3) este verificată când k şi m sunt primi între ei. Deci, pentru $\sqrt[m]{1}$, *o rădăcină* x_k *este primitivă, când* k *este prim cu* m *şi mai mic decât* m; aşa dar, *avem atâtea rădăcini primitive, câte numere sunt prime cu* m *şi mai mici decât* m.

37. Ecuaţii binoame. O ecuaţie de forma $x^m - A = 0$ se zice ecuaţie binoamă şi rezolvarea pe cale trigonometrică a acestei ecuaţii, este tocmai găsirea celor m valori ale rădăcinii a m—a din A. In adevăr, avem $x = \sqrt[m]{A}$ şi punând pe A sub formă trigonometrică, $A = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, cele m rădăcini ale ecuaţii binoame $x^m - A = 0$ sunt date de relaţia

$$x_k = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\omega}{m} + i\sin\frac{2k\pi+\omega}{m}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots m-1,$$

sau

$$x_k = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\omega}{m} + i\sin\frac{\omega}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots m-1.$$

Se vede că cele m rădăcini ale ecuaţii binoame $x^m - A = 0$ se obţin înmulţind cu

$$\sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\omega}{m} + i\sin\frac{\omega}{m}\right)$$

cele m rădăcini ale unităţii,

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}, \quad k = 0, 1, \ldots . m-1,$$

ale ecuaţii $x^m - 1 = 0$.

Exemplu. $x^3-1=0$, $x_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$.

$$x_0=1,\ x_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Se vede că rădăcina $\alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ridicată la puterea a doua, dă

$$\alpha^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

cealaltă rădăcină. Deci $\alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ este o rădăcină primitivă complexă cubică a unității, iar rădăcinile ecuații $x^3-1=0$ sunt α, α^2, $\alpha^3=1$. Divizând polinomul x^3-1 cu $x-1$, câtul x^2+x+1 egalând cu zero, dă o ecuație de gradul al doilea, ale cărei rădăcini sunt

$$\alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \alpha^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

deci α verifică, pe lângă relația $\alpha^3-1=0$, și relația

$$\alpha^2+\alpha+1=0:$$

α și α^2 se zic rădăcinile cubice complexe ale unității.

38. Aplicații. I. *Să se calculeze* $\sqrt[3]{4+4i\sqrt{3}}$. Avem

$$4+4i\sqrt{3}=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)=8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{4+4i\sqrt{3}}=2\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{3}\right),\ k=0, 1, 2.$$

$$k=0,\ x_0=2\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)=2\,(\cos 20^0+i\sin 20^0),$$

$$k=1,\ x_1=2\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right)=2(\cos 140^0+i\sin 140^0)=2(-\cos 40^0+i\sin 40^0).$$

$$k=2,\ x_2=2\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right)+2\left(-\cos\frac{4\pi}{9}-i\sin\frac{4\pi}{9}\right)=2(-\cos 80^0-i\sin 80^0).$$

II. **Să se calculeze**

$$\sin(a_1+a_2+\ldots+a_n),\ \cos(a_1+a_2+\ldots+a_n),\ tg\,(a_1+a_2+\ldots+a_n),$$

cu funcțiunile trigonometrice ale arcelor a_1, a_2, ... a_n. Avem

(4) $\quad (1+i\,\mathrm{tg}\,a_1)(1+i\,\mathrm{tg}\,a_2)\ldots(1+i\,\mathrm{tg}\,a_n)=1+iT_1+i^2T_2+i^3T_3+\ldots$

unde $\quad T_1=\mathrm{tg}\,a_1+\ldots+\mathrm{tg}\,a_n, T_2=\mathrm{tg}\,a_1\,\mathrm{tg}\,a_2+\mathrm{tg}\,a_1\,\mathrm{tg}\,a_3+\ldots+\mathrm{tg}\,a_{n-1}\mathrm{tg}\,a_n,\ldots$

Inlocuind $\operatorname{tg} a_s = \frac{\sin a_s}{\cos a_s}$, relația (4) devine

$$\left(1+i\frac{\sin a_1}{\cos a_1}\right)\left(1+i\frac{\sin a_2}{\cos a_2}\right)\ldots\left(1+i\frac{\sin a_n}{\cos a_n}\right)=1-T_2+T_4-\ldots+i(T_1-T_3+\ldots),$$

de unde

$$(\cos a_1 + i\sin a_1)(\cos a_2 + i \sin a_2)\ldots(\cos a_n + i\sin a_n) =$$
$$\cos a_1 \ldots \cos a_n[1-T_2+\ldots+i(T_1-T_3+\ldots)].$$

$$(5)\quad \begin{aligned} &\cos(a_1+a_2+\ldots+a_n) = \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n(1-T_2+T_4-\ldots),\\ &\sin(a_1+a_2+\ldots+a_n) = \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n(T_1-T_3+T_5-\ldots),\\ &\operatorname{tg}(a_1+a_2+\ldots+a_n) = \frac{\sin(a_1+\ldots+a_n)}{\cos(a_1+\ldots+a_n)} = \frac{T_1-T_3+T_5-\ldots}{1-T_2+T_4-\ldots} \end{aligned}$$

III. Dacă facem $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ în formulele (5), *găsim valorile lui* $\cos ma$, $\sin ma$, $\operatorname{tg} ma$, rezultat pe care îl putem obține și cu formula lui Moivre. In adevăr, avem

$$(\cos a + i \sin a)^m = \cos ma + i\sin ma,$$
$$(\cos a + i\sin a)^m = \cos^m a - C_m^2 \cos^{m-2} a \sin^2 a + \ldots +$$
$$i(C_m^1 \cos^{m-1} a \sin a - C_m^3 \cos^{m-3} a \sin^3 a + \ldots);$$

de unde, egalând părțile reale și coeficienții lui i, deducem

$$\cos ma = \cos^m a - C_m^2 \cos^{m-2} a \sin^2 a + C_m^4 \cos^{m-4} a \sin_4 a - \ldots$$
$$\sin ma = C_m^1 \cos^{m-1} a \sin a - C_m^3 \cos^{m-3} a \sin^3 a + \ldots,$$
$$\operatorname{tg} ma = \frac{C_m^1 \cos^{m-1} a \sin a - C_m^3 \cos^{m-3} a \sin^3 a + \ldots}{1 - C_m^2 \cos^{m-2} a \sin^2 a + C_m^4 \cos^{m-4} a \sin^4 a - \ldots}$$

Impărțind ambii termeni ai fracției cu $\cos^m a$, deducem

$$\operatorname{tg} ma = \frac{C_m^1 \operatorname{tg} a - C_m^3 \operatorname{tg}^3 a + C_m^5 \operatorname{tg}^5 a + \ldots}{1 - C_m^2 \operatorname{tg}^2 a + C_m^4 \operatorname{tg}^4 a - \ldots}.$$

Exemplu.

$\cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a$, $\cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a(1-\cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$,
$\sin 3a = 3\cos^2 a \sin a - \sin^3 a = 3(1-\sin^2 a)\sin a - \sin^3 a = 3\sin a - 4\sin^3 a$,

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$

IV. *Să se calculeza* $(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)$, $\alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avem α, α^2, $\alpha^3 = 1$ rădăcinile curbice ale unității. Rezultatul înmulțirii este $\Sigma a^3 - 3abc$.

V. *Să se rezolve ecuația* $x^4 - 2 = 0$. Algebric, $x^2 = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{2}}$, $x_1 = \sqrt[4]{2}$, $x_2 = -\sqrt[4]{2}$, $x_3 = i\sqrt[4]{2}$. Trigonometric, $x = \sqrt[4]{2}$,
$x = \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos 0 + i \sin 0} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right)$; $k=0$, $\sqrt[4]{2}$; $k=1$,
$\sqrt[4]{\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\,i$; $k=2$, $-\sqrt[4]{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -\sqrt[4]{2}$; $k=3$, $-i\sqrt[4]{2}$.

VI. *Să se rezolve ecuaţia* $x^6+1=0$. Avem

$$x^6=-1,\ x=\cos\frac{2k+1}{6}\pi+i\sin\frac{2k+1}{6};\ x_{1,2}=\pm i, x_{3,4,5,6}=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3}\pm i\right).$$

VII. *Să se arate că expresia* $(x+1)^{6n+1}-x^{6n+1}-1$ *se divide cu* x^2+x+1. Va trebui să arătăm că expresia dată admite ca rădăcini pe acelea ale ecuaţiei $x^2+x+1=0$, adică rădăcinile cubice complexe ale unităţii α, α^2, între care avem relaţiile $1+\alpha=-\alpha^2$, $\alpha^3=1$. Inlocuind pe x cu α, avem $E=(1+\alpha)^{6n+1}-\alpha^{6n+1}-1=(-\alpha^2)^{6n+1}-(\alpha^3)^{2n}\alpha-1=-\alpha^2(\alpha^3)^{2n}--\alpha-1=-(\alpha^2+\alpha+1)=0$. La fel pentru $x=\alpha^2$.

39. Exerciţii. 1. Să se calculeze $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{i}$.

R. $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i), -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Să se rezolve ecuaţiile $x^6-1=0$; $x^5-1=0$.

R. $\pm 1, \pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$; 1 şi $x+\frac{1}{x}=y, y^2+y-1=0, y=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)$,

$x=\frac{1}{4}\left(-1\pm\sqrt{5}\pm\frac{1}{4}\sqrt{10\mp2\sqrt{5}}\,i\right)$, semnele dinaintea lui $\sqrt{5}$ corespunzându-se.

3. Din rezolvarea algebrică şi trigonometrică a ecuaţiei $x^5-1=0$, să se deducă funcţiunile trigonometrice ale arcelor $\frac{2\pi}{5}$ şi $\frac{4\pi}{5}$.

R. Identificând expresiunile trigonometrice ale rădăcinilor $\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}\pm i\sin\frac{4\pi}{5}$ cu valorile găsite mai sus, ţinând seamă şi de mărimea relativă a lui sin şi cos, deducem $\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

$\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)$, $\cos\frac{4\pi}{5}=-\sin\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\right)$.

4. Să se rezolve ecuaţia $(1+\sqrt{1-x^2})^m+(1-\sqrt{1-x^2})^m=0$

R. Punând $x=\frac{1}{\cos\alpha}$, avem $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^m+(\cos\alpha-i\sin\alpha)^m=0$.

$\cos m\alpha=0$, $\alpha=\frac{2k+1\,\pi}{2m}$, $k=0, 1, 2\ldots m-1$, care dă cele m rădăcini ale ecuaţiei de gradul m dată.

Funcţii iperbolice.

40. Prin analogie cu funcţiile circulare, se consideră funcţiile iperbolice

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

cu relaţia fundamentală

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,$$

analoagă cu $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Ele se citesc sh x, sinusul iperbolic al lui x; ch x, cosinusul iperbolic al lui x; $\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, tangenta iperbolică a lui x. Avem

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y,\ \operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} y\operatorname{ch} x,$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sh} x)=\operatorname{ch} x,\ \frac{d}{dx}(\operatorname{ch} x)=\operatorname{sh} x.$$

PARTEA II

TEORIA ECUAȚIILOR

Proprietăți ale polinoamelor și ecuațiilor algebrice.

41. Expresia

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m,$$

în care x este o variabilă, iar coeficienţii A_0. $A_1,\ldots A_m$ constante, este forma generală a unui polinom în x de gradul m.

Egalând cu zero această expresie, se obţine

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots A_{m-1}x+A_m=0,$$

care este forma generală a unei ecuaţii algebrice de gradul m.

Se zice că a este rădăcină a ecuaţii $f(x)=0$, când înlocuind pe x cu a în $f(x)$, rezultatul înlocuirii este zero.

Exemple. Ecuaţiile

$$x^3-3x+2=0, \qquad x^3-3x^2+2x=0,$$

admit respectiv pe $x=1$ și $x=0$ ca rădăcini.

Când, înlocuind pe x în $f(x)$ cu orice valoare, rezultatul înlocuirii este zero (nul), ecuaţia $f(x)=0$ se zice că este *identitate*, iar polinomul $f(x)$ se zice că este *identic nul* (egal cu zero) și se scrie $f(x)\equiv0$.

Exemplu. $a(x-x^2)+x(x^2-a)+x^2(a-x)\equiv0.$

42. *Fiind dat un polinom $f(x)$ care se anulează pentru $x=0$, adică dacă îi lipsește termenul liber*

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x,$$

se poate găsi un număr pozitiv α, astfel că, dacă modulul (valoarea absolută) lui x este mai mic decât α, modulul lui $f(x)$ să rămâe mai mic decât un număr pozitiv dat ε, oricât de mic ar fi ε.

Să însemnăm cu $\rho=|x|$ modulul lui x şi cu M cel mai mare din modulele coeficienţilor A_0, A_1,....A_{m-1}.

Ştim (Nr. 22) că modulul sumei este mai mic sau cel mult egal cu suma modulelor termenilor. Deci, dând lui x o valoare numerică, polinomul $f(x)$ va avea o valoare mai mică în valoare absolută decât suma valorilor absolute ale termenilor. Aşa dar

$$|f(x)|\leqslant|A_0x^m|+|A_1x^{m-1}|+\ldots+|A_{m-1}x|,$$

şi prin urmare, cu atât mai mult, avem

$$|f(x)|\leqslant M\rho^m+M\rho^{m-1}+\ldots+M\rho,$$

sau

$$|f(x)|\leqslant M(\rho^m+\rho^{m-1}+\ldots+\rho),$$

de unde

$$|f(x)|\leqslant M\frac{\rho-\rho^{m-1}}{1-\rho}.$$

Trebuind ca $f(x)$ să fie în valoare absolută mai mic ca un număr ε, destul de mic, este evident că şi ρ trebue să aibă valori foarte mici, şi deci ρ^{m+1} este cu atât mai mic (căci $\rho<1$) şi prin urmare vom avea

$$|f(x)|<M\frac{\rho}{1-\rho}.$$

De oarece vrem să găsim valorile lui x pentru care

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

e destul să luăm

$$M\frac{\rho}{1-\rho}<\varepsilon.$$

De unde rezultă

$$M\rho<\varepsilon-\varepsilon\rho,$$

$$\rho<\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}.$$

Aşa dar, dacă luăm

$$\alpha=\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon},$$

urmează că

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

pentru toate valorile lui x, pentru care $|x| = \rho < \alpha$, și deci proprietatea este demonstrată.

Aceasta se mai poate enunța și astfel: *Când x tinde către zero, polinomul*

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x,$$

tinde către zero.

Exemplu: Să se găsească numărul pozitiv α, astfel că pentru $|x| < \alpha$, valoarea polinomului $x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x$, să rămână cuprinsă între $-0{,}001$ și $+0{,}001$.

Avem

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}; \quad \varepsilon = 0{,}001, \quad M = 4; \quad \alpha = \frac{0.001}{4.001} = 0{,}000249.$$

Deci, pentru valorile lui $|x|$ mai mici ca 0,000249, adică

$$-0{,}000249 < x < 0{,}000249.$$

valorile polinomului dat rămân mai mici în valoare absolută ca 0,001, adică sunt cuprinse între $-0{,}001$ și $+0{,}001$.

43. Desvoltarea polinomului f(x + h) după puterile lui h. Formula lui Taylor. Fie

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

un polinom de gradul m. Avem

(1) $$f(x+h) = A_0 (x+h)^m + A_1 (x+h)^{m-1} + \ldots + A_m.$$

Desvoltând după formula binomului pe $(x+h)^p$, obținem

$$f(x+h) = A_0 \left[x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \ldots + h^m \right] +$$

$$A_1 \left[x^{m-1} + \frac{m-1}{1} x^{m-2} h + \frac{(m-1)\,(m-2)}{1.2} x^{m-3} h^2 + \ldots \right.$$

$$\left. + h^{m-1} \right] + \ldots + A_m.$$

De unde

$$f(x+h) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots A_{m-1} + A_m.$$

$$+ \frac{h}{1} [m A_0 x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}] +$$

$$+\frac{h^2}{1.2}[m(m-1)A_0x^{m-2}+(m-1)m-2)A_1x^{m-3}+\ldots+2A_{m-2}]$$

$$+\ldots+\frac{h^m}{1.2\ldots m}m(m-1)(m-2)\ldots 2.1\,A_0.$$

Insă, luând derivatele succesive ale polinomului $f(x)$, avem

$$f'(x)=mA_0x^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+\ldots+A_{m-1},$$

$$f''(x)=m(m-1)A_0x^{m-2}+(m-1)(m-2)A_1x^{m-3}+\ldots+2A^{m-2},$$

$$f^{(m)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots+2.1\,A_0.$$

Prin urmare

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$

$$+\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(x)+\ldots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x),$$

care este desvoltarea lui $f(x+h)$ după puterile lui h, sau *formula lui Taylor.*

44. *Un polinom*

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m,$$

este o funcţie continuă. Fiecare termen A_px^{m-p} fiind o funcţie continuă, şi suma lor, adică polinomul dat este o funcţie continuă.

O demonstraţie bazată pe proprietăţile precedente este următoarea. Se zice că o funcţiune $f(x)$ este continuă, când se poate găsi un număr α, astfel că pentru $|h|<\alpha$, să avem

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon,$$

oricât de mic ar fi ε. Mai simplu, creşterea funcţiei tinde către zero, în acelaş timp cu creşterea h a variabilei.

Aplicând formula lui *Taylor*, avem

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x).$$

Partea a doua a acestei expresii fiind un polinom în raport cu h, fără termen liber, se poate găsi (Nr. 42) un număr pozitiv α, astfel că dacă $|h|<\alpha$, valoarea polinomului

$$hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x)$$

să fie, în valoare absolută, mai mică decât orice număr oricât de mic ε, dat înainte; prin urmare

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon,$$

care arată că un polinom este o funcţie continuă.

45. *Fiind dat un polinom*

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m,$$

şi un număr pozitiv R, *oricât de mare voim, se poate găsi un număr* r *mai mare ca zero, astfel ca pentru valorile lui* $|x|>r$, *să avem* $|f(x)|>R$. Scriind polinomul dat sub forma

$$(2)\qquad f(x)=A_0x^m\left(1+\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x}+\frac{A_2}{A_0}\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{A_m}{A_0}\frac{1}{x^m}\right),$$

să însemnăm

$$\frac{1}{x}=y.$$

Polinomul

$$\frac{A_1}{A_0}y+\frac{A_2}{A_0}y^2+\ldots.+\frac{A_m}{A_0}y^m,$$

anulându-se pentru $y=0$, se poate găsi (Nr. 42) un număr pozitiv β, astfel că pentru valorile lui $|y|<\beta$, să avem

$$\left|\frac{A_1}{A_0}y+\frac{A_2}{A_0}y^2+\ldots.+\frac{A_m}{A_0}y^m\right|<\alpha,$$

α fiind mai mic ca 1.

Deci, pentru

$$\left|\frac{1}{x}\right|<\beta,\qquad |x|>\frac{1}{\beta},$$

avem

$$(3)\qquad \left|\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x}+\frac{A_2}{A_0}\frac{1}{x^2}+\ldots..+\frac{A_m}{A_0}\frac{1}{x^m}\right|<\alpha,$$

adică valoarea expresiei

$$\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x}+\frac{A_2}{A_0}\frac{1}{x^2}+\ldots.+\frac{A_m}{A_0}\frac{1}{x^m}$$

este cuprinsă între $-\alpha$ şi $+\alpha$. Prin urmare, înlocuind în (2) expresia (3) cu o valoare mai mică decât a sa, adică cu $-\alpha$, vom avea

$$|f(x)|>|A_0x^m|.(1-\alpha).$$

Insemnând cu

$$|x| = \rho,$$

deducem

$$|f(x)| > |A_0| \rho^m.(1-\alpha).$$

De oarece vrem ca

$$|f(x)| < R,$$

va fi destul să luăm

$$|A_0| \rho^m (1-\alpha) > R$$

şi atunci vom avea negreşit

$$|f(x)| > R.$$

Trebue deci ca

$$\rho^m (1-\alpha) > \frac{R}{|A_0|},$$

de unde

$$\rho > \sqrt[m]{\frac{R}{|A_0| (1-\alpha)}}.$$

Am văzut însă că trebue să avem

$$\rho = |x| > \frac{1}{\beta},$$

unde (după Nr. 42),

$$\beta = \frac{\alpha}{M+\alpha},$$

M fiind cel mai mare din modulele coeficienţilor

$$\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \ldots \frac{A_m}{A_0}.$$

Trebuind deci ca modulul lui x, adică ρ, să fie mai mare ca numerele

$$\sqrt[m]{\frac{R}{|A_0|.(1-\alpha)}}, \qquad \frac{1}{\beta} = \frac{M+\alpha}{\alpha},$$

vom lua pentru numărul r, ce-l căutăm, pe cel mai mare din aceste două numere de mai sus şi atunci pentru $\rho > r$, adică pentru valorile lui x, mai mari în valoare absolută ca r, vom avea valoarea absolută a polinomului, $|f(x)| > R$.

Se ia de obicei pentru α valoarea 0,5; se poate lua şi alta mai mică.

Exemplu. In cazul polinomului

$$f(x)=x^5+3x^4-5x^3+2x^2-6x+1,$$

cel mai mare din modulele coeficienţilor 1, 3, —5, 2, —6, 1 fiind 6, dacă voim ca

$$|f(x)|>100000,$$

vom calcula numerele

$$\sqrt[m]{\frac{R}{|A_0|(1-\alpha)}}=\sqrt[5]{\frac{100000}{0{,}5}},\quad \frac{M+\alpha}{\alpha}=\frac{6{,}5}{0{,}5},$$

şi va trebui să luăm pentru $|x|$ valori mai mari ca cel mai mare din aceste două numere, care este 13. (S'a luat $\alpha=0{,}5$).

46. Valorile unui polinom pentru valori foarte mari ale variabilei sunt foarte mari. In adevăr să scriem polinomul

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m,$$

sub forma

$$f(x)=A_0x^m\left(1+\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x}+\ldots+\frac{A_m}{A_0}\frac{1}{x^m}\right).$$

Am văzut că polinomul

$$\frac{A_1}{A_0}y+\ldots+\frac{A_m}{A_0}y^m,\quad y=\frac{1}{x},$$

poate să aibă valori foarte mici, când se înlocueşte y cu valori foarte mici, sau, mai clar, valoarea acestui polinom se apropie de zero, când y este foarte mic, sau când x este foarte mare. Prin urmare, pentru astfel de valori ale lui x, polinomul $f(x)$ va avea o valoare care va depinde numai de A_0x^m. [Aceasta se vede uşor, observând din (2), că pentru $x=\infty$, toţi termenii $\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x},\ldots$ tind către zero, şi deci $f(x)$ se reduce numai la A_0x^m].

Deci, pentru valori foarte mari ale variabilei, valoarea unui polinom e determinată de termenul de gradul cel mai înalt, A_0x^m; acest termen pentru $x=\infty$, având valoarea $\pm\infty$, valoarea unui polinom pentru $x=\infty$, este egală cu $\pm\infty$.

Mai rezultă de aci că: *o ecuaţie algebrică are rădăcinile finite, căci pentru valori foarte mari ale lui x, rezultatul înlocuirii este foarte mare, iar nu zero, cum ar fi trebuit pentru ca acea valoare să fie rădăcină.*

47. O ecuaţie algebrică de gradul m

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$

admite m rădăcini. Pentru a demonstra aceasta, ne servim de teorema lui *d'Alembert* (pe care o admitem fără demonstraţie) şi anume că *orice ecuaţie algebrică are o rădăcină.*

Fie a_1 o rădăcină reală sau imaginară a ecuaţii $f(x)=0$; deci $f(a_1)=0$ şi prin urmare polinomul $f(x)$ se divide cu $x-a_1$; deci

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x).$$

Polinomul $f_1(x)$, de gradul $m-1$, egalat cu zero formează o ecuaţie de gradul $m-1$, care după teorema lui d'Alembert admite o rădăcină a_2; deci

$$f_1(x)=(x-a_2)f_2(x),$$

$f_2(x)$ fiind un polinom de gradul $m-2$.

Inlocuind în $f(x)$, deducem

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)f_2(x),$$

şi aşa mai departe. Se va obţine deci, din aproape în aproape, că

(4) $$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m)A,$$

A fiind o constantă.

Pentru a determina pe A, observăm că x^m, în polinomul dat $f(x)$, are coeficientul A_0, iar în desvoltarea produsului

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m)A,$$

coeficientul lui x^m este A. Rezultă deci că $A=A_0$, deoarece polinomul obţinut desvoltând produsul

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m)A$$

trebue să fie tocmai

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m.$$

Inlocuind pe A cu A_0 în relaţia (4), obţinem

(5) $$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m).$$

Din această egalitate deducem că *ecuaţia de grdul* m

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m=0$$

admite m *rădăcini*

$$a_1, a_2, ... a_m,$$

şi că această ecuaţie *dacă admite rădăcinile*

$$a_1, a_2, ... a_m,$$

se poate pune sub forma

$$f(x)=A_0(x-a_1)\,(x-a_2)\dots(x-a_m),$$

A_0 fiind coeficientul termenului de gradul m în raport cu x,

Observare. Dacă α rădăcini sunt egale a, β egale cu b, etc., λ rădăcini egale cu l, atunci ecuaţia dată se pune sub forma

$$f(x)=A_0(x-a)^\alpha\,(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda,$$

cu condiţia

$$\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda=m,$$

m fiind gradul ecuaţii. Se zice atunci că ecuaţia are rădăcini multiple şi anume a este redăcina multiplă de ordinul α de multiplicitate, etc. Dacă α ar fi 2, a se zice rădăcina dublă; dacă $\alpha=3$, $\alpha=4$, etc., a se zice respectiv rădăcină triplă, cuadruplă, etc.

48. Un polinom de gradul m se descompune în m factori de gradul întâi. In adevăr polinomul

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m$$

egalat cu zero, formează o ecuaţie de gradul m, care admite m rădăcini a_1, a_2,...a_m, egale sau distincte, şi prima parte a acestei ecuaţii, adică polinomul $f(x)$ conform proprietăţii precedente, se pune sub forma

$$f(x)=A_0(x-a_1)\,(x-a_2)\dots(x-a_m),$$

a unui produs de m factori liniari

$$x-a_1,\ x-a_2,\dots x-a_m.$$

49. *Descompunerea unui polinom în factori nu este posibilă decât numai într'un singur fel.* In adevăr, să presupunem că am descompus polinomul

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m$$

în factori

$$f(x)=A_0(x-a)^\alpha\,(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda.$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda=m.$$

Descompunând polinomul în alţi factori în altfel, am avea

$$f(x)=A_0(x-a')^{\alpha'}\,(x-b')^{\beta'}\dots(x-l')^{\lambda'},$$

unde

$$\alpha'+\beta'+\dots+\lambda'=m.$$

Prin urmare, avem

$$(6)\quad A_0(x-a)^\alpha\,(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda\equiv A_0(x-a')^{\alpha'}\,(x-b')^{\beta'}\dots(x-l)^{\lambda'}.$$

Partea întâia se anulează pentru $x=a$; deci şi partea a doua trebue să se anuleze când vom înlocui pe x cu a. Deci trebue să avem

$$(a-a')^{\alpha'}(a-b')^{\beta'}...(a-l')^{\lambda'}=0;$$

de unde urmează, de ex., că

$$a=a',$$

Presupunând $\alpha>\alpha'$, să dividem în (6) ambele părţi cu $(x-a)^{\alpha'}$; obţinem

$$(x-a)^{\alpha-\alpha'}(x-b)^{\beta}...(x-l)^{\lambda}\equiv(x-b')^{\beta'}...(x-l')^{\lambda'}.$$

Insă pentru $x-a$ se anulează numai partea întâia, pe când partea a doua nu se anulează, deoarece a a fost diferit de $b', c',...l'$. Rezultă că nici partea întâia nu trebue să se mai anuleze pentru $x=a$, adică să nu mai conţie factorul $(x-a)^{\alpha-\alpha'}$ ceeace se întâmplă când exponentul $\alpha-\alpha'$ este zero, iar factorul se reduce la 1. Prin urmare, rezultă că

$$\alpha=\alpha'.$$

Egalitatea (6) devine atunci, după ce simplificăm cu $(x-a)^{\alpha}$,

$$(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}...(x-l)^{\lambda}=(x-b')^{\beta'}...(x-l')^{\lambda'}.$$

Printr'un raţionament analog se deduce

$$b=b',\ c=c',...l=l';$$
$$\beta=\beta',\ \gamma=\gamma',...\lambda=\lambda';$$

adică descompunerea polinomului $f(x)$ în factori se face numai într'un singur fel.

50. Polinom identic nul. *Dacă un polinom se anulează pentru un număr de valori ale lui* x *mai mare decât gradul său, acest polinom este identic egal cu zero, adică toţi coeficienţii săi se reduc la zero.* Să presupunem că polinomul

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m$$

se anulează pentru valorile lui x egale cu

$$a_1, a_2...a_m, a_{m+1}.$$

Polinomul de gradul m, anulându-se pentru valorile $a_1, a_2,...a_m$, se poate pune sub forma

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m).$$

Polinomul se anulează însă şi pentru $x = a_{m+1}$; deci

$$A_0 (a_{m+1} - a_1)(a_{m+1} - a_2) \ldots (a_{m+1} - a_m) = 0.$$

Rădăcina a_{m+1}, fiind distinctă de celelalte $a_1 \ldots a_m$, nici unul din factori $a_{m+1} - a_i$, $i = 1, 2, \ldots m$, nu poate fi zero; deci

$$A_0 = 0.$$

Polinomul dat se reduce la un polinom de gradul $m-1$,

$$A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

şi printr'un raţionament analog, se deduce că şi coeficientul A_1 trebue să fie zero, şi aşa mai departe. Toţi coeficienţii polinomului dat se reduc la zero, *polinomul se reduce la zero pentru orice valoare a lui* x, *polinomul se zice identic nul şi se scrie*

$$f(x) \equiv 0.$$

51. Aplicaţie. *Dacă un polinom de gradul* m *ia aceiaşi valoare pentru* m + 1 *valori ale lui* x, *acest polinom se reduce la o constantă.* In adevăr, dacă polinomul de gradul m

$$f(x) = A_0 x^m + \ldots + A_m$$

ia valoarea k pentru $m+1$ valori ale lui x, atunci ecuaţia de gradul m

$$f(x) - k = 0$$

se anulează pentru $m+1$ valori ale lui x.

Deci este o identitate, adică,

$$f(x) - k \equiv 0,$$

de unde

$$f(x) \equiv k,$$

ceeace probează că polinomul $f(x)$ se reduce la constanta k.

Exemplu. Fie

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3).$$

Să se arate că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \dfrac{f(x)}{x-a_1} & \dfrac{f(x)}{x-a_2} & \dfrac{f(x)}{x-a_3} \end{vmatrix}$$

nu conţine pe x, *(este independent de* x). *Avem*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (x-a_2)(x-a_3) & (x-a_1)(x-a_3) & (x-a_1)(x-a_2) \end{vmatrix}$$

Dacă desvoltăm determinantul, se vede că $\Delta = 0$ este o ecuaţie de gradul al doilea.

Inlocuind însă x cu a_1, obţinem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (a_1 - a_2)(a_1 - a_2) & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desvoltând după elementele ultimei linii, avem

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1).$$

Inlocuind pe x cu a_2 şi cu a_3, se obţine aceeaşi valoare pentru determinantul dat.

Prin urmare un polinom de gradul al doilea (determinantul dat) ia aceeaşi valoare pentru trei valori ale lui x; deci acest determinant se reduce la o constantă, adică este egal cu

$$(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1).$$

In general, dacă

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m),$$

determinantul de gradul $m-1$ în x

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{m-2} & a_2^{m-2} & \ldots & a_m^{m-2} \\ \dfrac{f(x)}{x - a_1} & \dfrac{f(x)}{x - a_2} & \ldots & \dfrac{f(x)}{x - a_m} \end{vmatrix}$$

se reduce la constanta

$$(-1)^{m-1}(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_m)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ a_2^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2^{m-2} & a_3^{m-2} & \ldots & a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

adică egal cu determinantul lui Vandermonde

$$\left.\begin{array}{r} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_m) \\ (a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{m-1} - a_m) \end{array}\right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \ldots & a_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

52. Condiția ca două polinoame să fie identice *este ca coeficienții acelorași puteri ale lui x, din ambele polinoame să fie egali.* In adevăr, dacă

(7) $$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n\equiv B_0x^n+B_1x^{n-1}+\ldots+B_n,$$

urmează că trebuie să avem identic

(8) $$(A_0-B_0)x^n+(A_1-B_1)x^{n-1}+\ldots+(A_n-B_n)\equiv 0.$$

De unde se deduce (Nr. 50)

$$A_0=B_0,\ A_1=B_1,\ldots A_n=B_n.$$

Egalitatea (8) fiind o identitate, se reduce la zero pentru orice valoare a lui x, deci, din (7), deducem că două polinoame sunt identice când sunt egale pentru orice valoare a lui x.

53. Condiția ca două ecuații să aibă aceleași rădăcini. Dacă ecuațiile

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$

$$F(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m=0,$$

au aceleași rădăcini a_1, $a_2,\ldots a_m$, atunci avem identic

$$f(x)\equiv A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m),$$

$$F(x)\equiv B_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m).$$

De unde, prin împărțire

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{B_0}=k.$$

Inlocuind pe $f(x)$ și pe $F(x)$ și făcând calculele, deducem

$$(A_0-kB_0)x^m+(A_1-kB_1)x^{m-1}+\ldots+(A_m-kB_m)\equiv 0.$$

De unde,

$$A_0-kB_0=0,\ A_1-kB_1=0,\ldots A_m-kB_m=0,$$

sau

$$\frac{A_0}{B_0}=k,\quad \frac{A_1}{B_1}=k,\ldots\frac{A_m}{B_m}=k,$$

$$\frac{A_0}{B_0}=\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\ldots=\frac{A_m}{B_m}=k.$$

Prin urmare, două ecuații cari aŭ aceleași rădăcini, au coeficienții proporționali.

Reciproc, dacă două ecuaţii au coeficienţii proporţionali, înlocuim coeficienţi $A_0, A_1, \ldots A_m$ prin valorile lor $kB_0, kB_1, \ldots kB_m$ şi atunci ecuaţia întâia se reduce la ecuaţia a doua, şi prin urmare va avea aceleaşi rădăcini.

Aplicaţie. *Să se afle* $\cos 5a$ *în funcţie de* $\cos a$ *şi să se compare rezultatul cu ecuaţia* (1) $x^5+px^3+px+r=0$, *în care* $x=l\cos a$, *stabilind relaţiile pentru ca ambele ecuaţii să fie echivalente. Aplicaţie la ecuaţia* (2) $32x^5-360x^3+810x-243=0$, *ale cărei rădăcini se vor calcula cu aproximaţia dată de tabele de logaritmi* (*Examen Capacitate prof.*, 1937).

R. $(\cos a+i\sin a)^5=\cos 5a+i\sin 5a$, $16\cos^5 a-20\cos^3 a+5\cos a-\cos 5a=0$. Se scrie că are aceleaşi rădăcini (coeficienţii proporţionali) ca ecuaţia (1) în care punem $x=l\cos a$; se eliminăm l şi avem $p^2=5q$. $l=\pm 2\sqrt{\frac{-p}{5}}$, $\cos 5a=-\frac{5r}{lq}$.

In cazul numeric, $l=\pm 3$, $\cos 5a=\pm\frac{1}{2}$. Luând semnul $+$, $l=3$, $5a=60^0+$ $+2k.180^0$, $k=0, 1, 2, 3$; $a=12^0+k.72^0$, $x=3\cos(12^0+k.72^0)$, $k=0, 1, 2, 3$; $x_1=3\cos 12^0=2{,}93442$; $x_2=3\cos 84^0=0{,}31356$; $x_3=3\cos 156^0=-3\cos 24^0=$ $=-2{,}74062$; $x_4=3\cos 228^0=-3\cos 48^0=-2{,}00739$; $x_5=3\cos 300^0=3\cos 60^0=1{,}5$.

54. Observare relativă la calculul valorii numerice a unui polinom *pentru o valoare dată lui* x. Pentru a calcula valoarea polinomului

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m,$$

pentru $x=a$, un procedeu este următorul. Scriem polinomul dat sub forma

$$f(x)=x^{m-1}(A_0x+A_1)+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m,$$

şi înlocuim în paranteză pe x cu a; dăm apoi factor comun pe x^{m-2} şi avem

$$x^{m-2}[x(A_0a+A_1)+A_2]+A_3x^{m-3}+\ldots+A_m.$$

Se înlocueşte în noua paranteză x cu a şi se dă factor comun x^{m-3}, şi aşa mai departe.

Exemplu. Valoarea polinomului

$$f(x)=4x^5-16x^4+6x^3-17x^2+9x-10$$

pentru $x=5$, se calculează astfel.

$$x^4(4.5-16)+6x^3-17x^2+9x-10=$$
$$4x^4+6x^3-17x^2+9x-10,$$
$$x^3(4.5+6)-17x^2+9x-10=$$
$$26x^3-17x^2+9x-10,$$
$$x^2(26.5-17)+9x-10=113x^2+9x-10,$$
$$x(113.5+9)-10=2860.$$

55 **Aplicații. Rezolvarea ecuației de gradul al III-lea.** *Formula lui Cardan.*

Să se determine u și v astfel ca să avem identic, oricare ar fi x.

$$x^3+px+q\equiv\begin{vmatrix} x & -u & -v \\ -v & x & -u \\ -u & -v & x \end{vmatrix}$$

Desvoltând determinantul după regula lui Sarus, avem

$$x^3+px+q\equiv x^3-3\,uvx-(u^3+v^3).$$

Identificând, găsim

(9) $$p=-3uv,\ q=-(u^3+v^3).$$

Pe de altă parte, în determinantul considerat, să adăugăm la elementele coloanei întâi elementele celorlalte coloane și dând factor comun pe $x-u-v$, obținem

$$x^3+px+q\equiv(x-u-v)\ [x^2+x(u+v)+u^2+v^2-uv].$$

De aici rezultă că ecuația

$$x^3+px+q=0$$

are ca rădăcini pe

(10) $$x_1=u+v,$$

și pe ale ecuației

(11) $$x^2+x(u+v)+u^2+v^2-uv=0,$$

u și v fiind dați de relațiile (9).

Rezolvând ecuația (11), valorile rădăcinilor sunt

$$x=\frac{-(u+v)\pm\sqrt{(u+v)^2-4\,u^2-4\,v^2+4\,uv}}{2},$$

$$x=\frac{-(u+v)\pm(u-v)\,i\sqrt{3}}{2},\quad i=\sqrt{-1}.$$

De unde rezultă că celelelte rădăcini ale ecuației

$$x^3+px+q=0,$$

sunt

$$x_2=\frac{-(u+v)+(u-v)\,i\sqrt{3}}{2}=u\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+v\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=u\alpha+v\alpha^2,$$

(12) $$x_3=\frac{-(u+v)-(u-v)\,i\sqrt{3}}{2}=u\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+v\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+u\alpha^2+v\alpha,$$

unde α și α^2 sunt rădăcinile cubice complexe ale unității, date de ecuația

$$x^3+x+1=0.$$

Pentru a găsi valorile lui u și v, rezolvăm sistemul (9); de unde obținem

$$u^3+v^3=-q,\qquad u^3\,v^3=-\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Ecuația ce dă valorile lui u^3 și v^3 este

$$z^2+qz-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0.$$

De unde

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{3} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Inlocuind valorile lui u şi v în (10) şi (12), rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 + px + q = 0,$$

sunt $$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$x_2 = u\alpha + v\alpha^2, \quad x_3 = u\alpha^2 + v\alpha, \quad \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

Valoarea lui x, dată mai sus constitue *formula lui Cardan.*

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 + 6x - 7 = 0.$$

Avem $$x_1 = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}},$$

$$x_2 = 2\alpha - \alpha^2 = \frac{1}{2}(-1 + 3\sqrt{-3}), \quad x_3 = 2\alpha^2 - \alpha = -\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{-3}).$$

56. Rezolvarea ecuaţiei de gradul al IV-lea. *Metoda lui Descartes.* Fiind dată o ecuaţie de gradul al IV-lea

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

se poate face transformarea

$$x = y + h,$$

şi înlocuind în ecuaţia dată, se poate determina h, astfel încât coeficientul lui y^3, în această desvoltare, să fie egal cu zero.

Aşa dar, ecuaţia dată se poate aduce la forma

$$y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0.$$

α, β, γ având valori cunoscute.

Să considerăm deci o ecuaţie de gradul al IV-lea de această formă

$$f(x) \equiv x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

şi să ne propunem a determina coeficienţii p, q, p', q', astfel încât să avem identic

(13) $$x^4 + Ax^2 + Bx + C \equiv (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q').$$

Rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$, *sunt date de ecuaţiile*

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + p'x + q' = 0.$$

Identificând ambele părţi din (13), deducem

$$p + p' = 0, \quad q + q' - pp' = A, \quad (q' - q)p = B, \quad qq' = C.$$

Din a doua şi a treia, avem

$$q + q' = A + p^2, \quad q' - q = \frac{B}{p}.$$

De unde

$$2q = p^2 + A - \frac{B}{p}, \quad 2q' = p^2 + A + \frac{B}{p}.$$

Inlocuind aceste valori în relația

$$qq' = C,$$

obținem

$$(p^2 + A)^2 - \frac{B^2}{p^2} = 4\,C,$$

sau

$$p^6 + 2\,A\,p^4 + (A^2 - 4\,C)\,p^2 - B^2 = 0,$$

și punând $p^2 = z$,

$$z^3 + 2\,A\,z^2 + (A^2 - 4\,C)\,z - B^2 = 0.$$

Această ecuație, care se numește rezolvanta ecuației de gradul IV-lea, prin transformarea $z = u + h$, se poate aduce la forma

$$u^3 + D\,u + E = 0,$$

și se poate deci rezolva cu formula lui Cardan. Se găsește prin urmare o valoare pentru z, deci și pentru p, q, q', și astfel ecuația de gradul al IV-lea se poate rezolva.

Exemplu. $x^4 - 10\,x^2 - 9\,x - 2 = 0$.

Se găsește

$$q + q' - p^2 = -10, \quad q' - q = -\frac{9}{p}, \quad qq' = -2.$$

De unde

$$2\,q' = p^2 - 10 - \frac{9}{p}, \quad 2\,q = p^2 - 10 + \frac{9}{p}.$$

Rezolvanta este deci

$$\left(p^2 - 10 - \frac{9}{p}\right)\left(p^2 - 10 + \frac{q}{p}\right) = -8,$$

sau

$$z^3 - 20\,z^2 + 108\,z - 81 = 0.$$

Se găsește ușor rădăcina $z = 9$. Să luăm $p = 3$; avem atunci

$$2\,q' = -4, \qquad 2\,q = 2,$$

și ecuația dată

$$x^4 - 10\,x^2 - 9\,x - 2 = 0,$$

se pune sub formă

$$(x^2 - 3\,x - 2)\,(x^2 + 3\,x + 1) = 0,$$

iar rădăcinile ei sunt

$$\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

57. Exerciții. 1. Pentru ce valori ale lui x apropiate de zero polinomul

$$2\,x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 5\,x,$$

rămâne în valoare absolută mai mic ca 0,0001.

R. $$|x| < \frac{0{,}0001}{5{,}0001}$$

2. Să se afle valorile lui x pentru care polinomul

$$3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2,$$

rămâne în valoarea absolută mai mare ca 1000.

R. $$|x| > \frac{2,5}{0,5}, \quad \alpha = 0,5;$$

$$|x| > \sqrt[4]{\frac{1000}{3 \times 0,5}}; \quad |x| > 5.$$

3. Să se găsească un polinom $f(x)$ de gradul n, astfel că însemnând cu $f'(x)$ derivata sa, să avem identic

$$f(x) - f'(x) \equiv \frac{x^n}{1.2.3...n}$$

R. $$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n.$$

$$A_0 = \frac{1}{1.2...n}, \quad A_1 - n A_0 = 0, \quad A_2 - (n-1) A_1 = 0, ...$$

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + \frac{x}{1} + 1.$$

4. Să se rezolve ecuaţiile

$$x^3 - 9x - 28 = 0, \quad x^3 - 3\alpha\beta x + \alpha^3 + \beta^3 = 0,$$

cu ajutorul formulei lui Cardan.

R. Aplicând formula, se obţine $x_1 = 4$, $x_2, x_3 = -1 \pm i\sqrt{3}$ pentru prima

şi $x_1 = -(\alpha + \beta)$, $x_2, x_3 = \dfrac{\alpha + \beta \pm (\alpha - \beta) i \sqrt{3}}{2}$ pentru a doua.

5. Să se rezolve ecuaţiile

$$x^3 - 3x + 1 = 0, \quad x^3 + 3 - 2i = 0,$$

aplicând formula lui Cardan.

$$x_1 = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha^2}, \quad ...;$$

$$x_1 = \sqrt[3]{i}, ... \quad i = \sqrt{-1} \quad \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

6. Să se aplice formula lui Cardan ecuaţii

$$x^3 - 3(m^2 + 1)x + 2m(m^2 + 1) = 0,$$

m fiind un număr real.

R. $$x_1 = \sqrt[3]{(m^2 + 1)} \left(\sqrt[3]{i - m} - \sqrt[3]{i + m}\right).$$

7. Să se determine relaţia dintre coeficienţii p, q, r astfel ca ecuaţia

$$x^3 + p x^2 + q x + r = 0,$$

să se poată pune sub forma

$$(x^2 + m x + n)^2 - x^4 = 0,$$

Să se rezolve în acest mod ecuația $x^3+2x^2+2x+1=0$.

R. Ecuațiile

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$
$$2mx^3+(m^2+2n)x^2+2mnx+n^2=0$$

au aceleași rădăcini; deci

$$\frac{2m}{1}=\frac{m^2+2n}{p}=\frac{2mn}{q}=\frac{n^2}{r}.$$

Condiția este $q^3-4pqr+8r=0$; $m=\frac{q^2}{2r}$, $n=q$,

$$x^3+2x^2+2x+1\equiv(x+1)(x^2+x+1).$$

8. Să se arate că ecuația $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ se poate pune sub forma $z^4+Az^2+B=0$, prin substituția $x=z+h$, când $a^3-4ab+8c=0$. Aplicație pentru ecuația $x^4-2x^3+mx^2+(1-m)x+n=0$.

R. Avem după formula lui Taylor

$$f(h+z)=f(h)+\frac{z}{1}f'(h)+\frac{z^2}{2!}f''(h)+\frac{z^3}{3!}f'''(h)+\frac{z^4}{4!}f^{(IV)}(h)$$

Trebue ca $f'(h)=0$, $f'''(h)=0$, $h=-\frac{a}{4}$, $a^3-4ab+8c=0$.

In cazul ecuației numerice

$$h=\frac{1}{2},\ A=\frac{2m-3}{2},\ B=\frac{-4m+16n+5}{16}.$$

9. Să se găsească condiția cu ecuația

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

să se poată pune sub forma $(x^2+\alpha x)^2+p(x^2+\alpha x)+q=0$. Aplicație în cazul ecuației $x^4+2x^3-4x^2-5x+6=0$.

R. Identificând, se găsește $2\alpha=a$, $\alpha^2+p=b$, $p\alpha=c$, $q=d$. De unde $a^3-ab+8c=0$. $\alpha=1$, $p=-5$, $q=6$.

Rădăcini 1, -2, $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{12})$.

10. Să se rezolve ecuația

$$f(x)=A^0x^3+3A_1x^2+3A^2x+A_3=0,$$

punând-o sub forma $f(x)\equiv\alpha(x-\beta)^3+\alpha'(x-\beta')^3=0$. Aplicație $f(x)=x^3+12x^2-6x+10=0$.

R. Se găsesc relațiile

$$\alpha+\alpha'=A_0,\ \alpha\beta+\alpha'\beta'=-A_1,\ \alpha\beta^2+\alpha'\beta'^2=A_2,\ \alpha\beta^3+\alpha'\beta'^3=-A_3.$$

Eliminând α și α' între primele trei ecuații și apoi între ultimele trei, se găsește

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & A_0 \\ \beta & \beta' & -A_1 \\ \beta^2 & \beta'^2 & A^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -A_1 \\ \beta & \beta' & A_2 \\ \beta^2 & \beta'^2 & -A_3 \end{vmatrix} = 0.$$

De unde

$$A_0 \beta\beta' + A_1(\beta + \beta') + A_2 = 0, \quad A_1 \beta\beta' + A_2(\beta + \beta') + A_3 = 0.$$

Ecuația ce dă pe β și β' se obține eliminând $\beta\beta'$ și $\beta + \beta'$ între aceste două ecuații și ecuația ce are ca rădăcini pe β și β'

$$u^2 - u(\beta + \beta') + \beta\beta' = 0.$$

Se găsește

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_1 & A_3 \\ 1 & -u & u^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\alpha = 2, \ \alpha' = -1, \ \beta = -1, \ \beta' = 2.$$

11. Să se arate că ecuația

$$A_0 x^4 + 4 A_1 x^3 + 6 A_2 x^2 + 4 A_3 x + A_4 = 0.$$

se poate pune sub forma

$$a(x + m)^4 + a'(x + m')^4 = 0,$$

dacă avem

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

R. Se obțin 5 relații între a, a', m, m', se elimină a și a' între primele trei, apoi între a doua, a treia și a patra și în fine între ultimele trei din aceste 5 relații. Apoi între aceste trei relații astfel obținute se elimină mm' și $m + m'$.

Relații între rădăcini și coeficienți.

58. Fie

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

o ecuație algebrică care admite rădăcinile

$$a_1, a_2, \ldots a_m.$$

Prima parte a acestei ecuației se poate pune sub forma

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \equiv$$
$$A_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m).$$

Desvoltând, găsim

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m\equiv$$
$$A_0[x^m-x^{m-1}\Sigma a_1+x^{m-2}\Sigma a_1a_2+\ldots+(-1)^px^{m-p}\Sigma a_1a_2\ldots a_p+$$
$$+\ldots+(-1)^m a_1a_2\ldots a^m].$$

Identificând, deducem

$$A_1=-A_0\Sigma a_1,$$
$$A_2=A_0\Sigma a_1a_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A_p=(-1)^pA_0\Sigma a_1.a_2\ldots a_p.$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A_m=(-1)^mA_0a_1a_2\ldots a_m.$$

De aci deducem relaţiile între rădăcini şi coeficienţi

$$\Sigma a_1=-\frac{A_1}{A_0},\ a_1+a_2+\ldots+a_m=-\frac{A_1}{A_0},$$
$$\Sigma a_1a_2=\frac{A_2}{A_0},\ a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{m-1}a_m=\frac{A_2}{A_0},$$
$$\cdot\ \cdot$$
$$\Sigma a_1a_2\ldots a_p=(-1)^p\frac{A_p}{A_0},\ a_1a_2\ldots a_p+a_1a_3a_4\ldots a_{p+1}+\ldots=(-1)^p\frac{A_p}{A_0}$$
$$\cdot\ \cdot$$
$$a_1a_2\ldots a_m=(-1)^m\frac{A_m}{A_0}.$$

Aceste m relaţii formează un sistem de m ecuaţii cu m necunoscute $a_1, a_2, \ldots a_m$.

Rezolvând acest sistem de ecuaţii, vom putea calcula rădăcinile ecuaţii $f(x)=0$. Pentru aceasta, din primele $m-1$ relaţii, considerate ca $m-1$ ecuaţii cu $m-1$ necunoscute, $a_2, a_3, \ldots a_m$, se pot calcula valorile lui $a_2, \ldots a_m$, pe care înlocuindu-le în ultima din cele m relaţii dintre coeficienţi şi rădăcini, se obţine o ecuaţie $F(x)=0$, care va da pe a_1.

Insă relaţiile între coeficienţi şi rădăcini sunt simetrice în raport cu $a_1, a_2, \ldots a_m$ (nu-şi schimbă valorile numerice primele părţi ale ecuaţiilor când se schimbă între ele două litere; $x-y$ nu este funcţie simetrică în raport cu x şi y). Prin urmare dacă am fi calculat valorile necunoscutelor $a_1, a_3, a_4, \ldots a_m$ din primele

$m-1$ din aceste ecuaţii şi le-am înlocuit în ultima, vom găsi tot ecuaţia $F(x)=0$, care va trebui să dea valoarea lui a_2; şi aşa mai departe.

Deci ecuaţia $F(x)=0$, care dă pe a_1, are ca rădăcină şi pe a_2, etc. adică pe toate rădăcinile ecuaţiei $f(x)=0$, adică este tocmai ecuaţia $f(x)=0$.

Rezultă de aci că sistemul de relaţii între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei $f(x)=0$, se poate rezolva, când se poate rezolva ecuaţia $f(x)=0$; cu alte cuvinte, este tot atât de greu a rezolva acest sistem, ca şi ecuaţia $f(x)=0$, căci căutând a rezolva acest sistem dăm peste ecuaţia dată.

Numai în cazul când se mai dau alte relaţii între rădăcini, rezolvarea sistemului este mai uşoară ca rezolvarea directă a ecuaţii.

59. Aplicaţii. I. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^3-9x^2+23x-15=0,$$

ştiind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

Vom însemna rădăcinile x_1, x_2, x_3, prin

$$u-v,\ u,\ u+v,$$

v, fiind raţia progresiei aritmetice.

Scriind relaţiile între coeficienţi şi rădăcini, avem

$$\Sigma x_1=x_1+x_2+x_3=-\frac{A_1}{A_0}=9,$$

$$\Sigma x_1 x_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{A_2}{A_0}=23.$$

$$x_1 x_2 x_3=-\frac{A_3}{A_0}=15.$$

Inlocuind pe x_1, x_2, x_3 cu valorile lor, aceste relaţii devine

(1) $$3u=9.$$

(2) $$3u^2-v^2=23,$$

(3) $$u(u^2-v^2)=15.$$

Din prima deducem $u=3$ şi înlocuind în a doua obţinem

$$v^2=4,\ v=\pm 2.$$

Inlocuind valorile lui u şi v în relaţia (3), vedem că este verificată, căci astfel au fost aleşi coeficienţi ecuaţii date.

Rădăcinile acuaţii $f(x)=0$ sunt deci

$$x_1=u-v=3-2=1,\quad x_2=3,\quad x_3=5.$$

II. *Să se găsească condiţia şi să se rezolve ecuaţia*

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

ştiind că avem relalaţia $x_1 = x_2 + x_3$.

Aplicaţie. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

Relaţiile de condiţie sunt

(4) $$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

(5) $$x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3 = \frac{c}{a},$$

(6) $$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a},$$

(7) $$x_1 = x_2 + x_3.$$

Inlocuim în (4) pe $x_2 + x_3$ cu valoarea sa din (7), avem

$$x_1 = -\frac{b}{2a}, \quad x_2 + x_3 = -\frac{b}{2a}.$$

Inlocuim în (5) şi (6), obţinem

$$x_2 x_3 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}, \quad x_2 x_3 = \frac{2d}{b}.$$

Egalând aceste valori, relaţia de condiţie între coeficienţi este

$$b^3 - 4abc + 8a^2 d = 0.$$

Rădăcinile ecuaţii sunt date de

$$x_1 = -\frac{b}{2a},$$

iar x_2, x_3 de ecuaţia de gradul al II-a

$$z^2 + \frac{b}{2a}z + \frac{2d}{b} = 0; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1.$$

III. *Să se găsească relaţia de condiţie şi să se rezolve ecuaţia*

(8) $$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

ştiind că între rădăcini există relaţia

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2.$$

Să formăm ecuaţia care dă valorile lui

(9) $$y = x^2.$$

Ecuaţia (8) se poate scrie observând relaţia (9)

$$xx^2 + ax^2 + bx + c = 0,$$
$$(x + a)y + bx + c = 0,$$

De unde

$$x = -\frac{ay + c}{y + b}.$$

Inlocuind pe x cu această valoare în (9), se obţine ecuaţia ce dă valorile lui y [pătratele rădăcinilor ecuaţii $f(x)=0$]

$$\varphi(y)=y^3+y^2(2b-a^2)+y(b^2-2ac)-c^2=0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii fiind

$$y_1=x_1^2,\quad y_2=x_2^2,\quad y_3=x_3^2,$$

avem relaţia

$$x_1^2=x_2^2+x_3^2,$$

sau

$$y_1=y_2+y_3,$$

adică o rădăcină este egală cu suma celorlalte două şi deci, conform problemei precedente, rezultă condiţia

$$8c^2+8ac(a^2-2b)+a^2(a^2-2b)(a^2-4b)=0,$$

şi se obţine o rădăcină $y_1=x_1^2=\frac{1}{2}(a^2-2b)$, iar celelalte două ca la exemplul II.

Observare. Această condiţie se putea obţine, servindu-ne de relaţiile între rădăcini şi coeficienţi şi anume

$$x_1+x_2+x=-a,$$

$$x_2x_3+x_1(x_2+x_3)=b,$$

$$x_1x_2x_3=c,$$

împreună cu relaţia dată

$$x_1^2=x_2^2+x_3^2.$$

Ridicând prima la pătrat şi ţinând seamă de a doua relaţie şi de ultima, obţinem

(10) $$2x_1^2+2b-a^2=0.$$

Scriind ecuaţia dată sub forma

$$x_1(x_1^2+b)+ax_1^2+c=0.$$

şi înlocuind pe x_1^2 cu valoarea sa din (10), apoi scoţând din aceasta valoarea lui x_1 şi înlocuind-o în (10), se obţine condiţia găsită cu prima metodă.

IV. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^4-8x^3+14x^2+8+a=0,$$

ştiind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

Să însemnăm rădăcinile acestei ecuaţii cu

$$x_1=u-3v,\ x_3=u-v,\ x_4=u+v,\ x_2=u+3v.$$

Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi sunt

$$\Sigma x_1=x_1+x_2+x_3+x_4=8,$$

$$\Sigma x_1x_3=(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=14,$$

$$\Sigma x_1x_2x_3=(x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2=-8$$

$$x_1x_2x_3x_4=a.$$

Inlocuind în aceste relații pe x_1, x_2, x_3, x_4, găsim

$$4u = 8,$$

$$3u^2 - 5v^2 = 7,$$

$$u(u^2 - 5v^2) = -2,$$

$$(u^2 - v^2)(u^2 - 9v^2) = a.$$

Din primele două ecuații obținem

$$u = 2, \ v = \pm 1.$$

Ecuația a treia este verificată pentru aceste valori, iar din a patra deducem

$$a = -15.$$

Rădăcinile ecuații sunt

$$u - 3v = 2 - 3 = -1; \ 1; \ 3; \ 5.$$

V. *Să se determine p și să se rezolve ecuația astfel ca produsul a două rădăcini ale ecuației*

$$3x^4 + px^3 + 2x^2 + 12x - 8 = 0$$

să fie egal cu 2. Relațiile sunt

(11) $$x_1 + x_2 + x_3 +_4 = -\frac{p}{3}.$$

(12) $$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_5 x_4 = \frac{2}{3},$$

(13) $$(x_1 + x_2) x_3 x_4 + (x_3 + x_4) x_1 x_2 = -4.$$

(14) $$x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{8}{3},$$

(15) $$x_1 x_2 = 2.$$

Observând relația (15), deducem din (14)

$$x_3 x_4 = -\frac{4}{3}.$$

Relațiile (11), (12), (13) devin

(16) $$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -\frac{p}{3}.$$

(17) $$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0,$$

(18) $$-\frac{4}{3}(x_1 + x_2) + 2(x_3 + x_4) = -4.$$

Observând ecuația (17), distingem două cazuri

1° $$x_1 + x_2 = 0; \ x_3 + x_4 = -2; \ p = 6;$$

$$x_1 x_2 = 2; \ x_3 x_4 = -\frac{4}{3}.$$

Rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 sunt date de ecuaţiile

$$z^2+2=0,\ z^2+2z-\frac{4}{3}=0$$

şi sunt egale cu

$$\pm i\sqrt{2},\qquad \frac{-3\pm\sqrt{21}}{3}.$$

2° $$x_3+x_4=0;\ x_1+x_2=3;\ p=-9;$$

$$x_3x_4=-\frac{4}{3};\ x_1x_2=2.$$

Rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 sunt date de ecuaţiile

$$z^2-3z+2=0;\ z^2-\frac{4}{3}=0.$$

Observare. Se putea rezolva această ecuaţie, observând că dacă avem $x_1x_2=2$, atunci prima parte a ecuaţiilor

$$3x^4+px^3+2x^2+12x-8\equiv(3x^2+\alpha x+\beta)(x^2+mx+2)$$

şi deci x_1, x_2, şi x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuaţiilor

$$n^2+mx+2=0,\ 3x^2+\alpha x+\beta=0.$$

Identificând, obţinem relaţiile

$$\alpha+3m=p$$
$$\beta+\alpha m+6=2,$$
$$\beta m+2\alpha=12,$$
$$2\beta=-8.$$

De unde $\beta=-4$. Inlocuind în primele trei relaţii, deducem

$$\alpha+3m=p,\ \alpha m=0,\ 2\alpha-4m=12.$$

Deci

1° $$\alpha=0,\ m=-3,\ p=-9;\ 3x^2-4=0,\ x^3-3x+2=0$$

2° $$m=0,\ \alpha=6,\ p=6;\ 3x^2+6x-4=0,\ x^2+2=0.$$

60. Exerciţii. 1. Să se rezolve ecuaţia

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$$

şi să se găsească relaţia de condiţie, ştiind că suma a două rădăcini este egală cu un număr dat p. Aplicaţie pentru ecuaţia

$$f(x)=2x^3-x^2-7x-3=0,\ p=1.$$

R. Una din rădăcini este

$$x_3=-\left(\frac{b}{a}+p\right).$$

Relaţiile sunt

$$(x_1+x_2)+x_3=-\frac{b}{a},\ (x_1+x_2)x_3+x_1x_2=\frac{c}{a},\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a},\ x_1+x_2=p.$$

Din a doua şi a treia deducem pe x_1, x_2,

$$p\left(\frac{b}{a}+p\right)^2+\frac{c}{a}\left(\frac{b}{a}+p\right)-\frac{d}{a}=0.$$

Rădăcinile ecuaţii numerice sunt date de

$$x_3,=-\frac{1}{2}; \; x_1+x_2=1, x_1 x_2=-3.$$

2. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3+px+q=0,$$

ştiind că una din rădăcini este egală cu suma inverselor celorlalte două rădăcini. Aplicaţie pentru ecuaţia $x^3-5x+2=0$,

R. Relaţiile sunt

$$x_1+x_2+x_3=0, \; (x_1+x_2)x_3+x_1x_2=p, \; x_1x_2x_3=-q, \; x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

$$x_3=q, x^3+px+q\equiv(x-q)(x^2+qx-1), \; q^2+p+1=0.$$

$$x^3-5x+2\equiv(x-2)(x^2+2x-1).$$

Să se rezolve ecuaţia $x^3+px+q=0$, ştiind că avem $x_1=x_2x_3$

Aplicaţie pentru ecuaţia $x^3-6x-4=0$.

R. Relaţiile sunt

$$x_1+x_2+x_3=(x_2+x_3)x_1+x_2x_3=p,$$

$$x_1x_2x_3=-q, x_1=x_2x_3.$$

De unde $x_1^2=-q$, $x_1x_2=p-q$, $x_2+x_3=\pm\sqrt{-q}$.

Relaţia de condiţie este $q[q+(p-q)^2]=0$.

$$x^3-6x-4\equiv(x+2)(x^2-2x-2).$$

4. Să se găsească relaţia de condiţie între coeficienţi şi să se rezolve ecuaţia

$$x^3+px+q=0,$$

ştiind că

$$\frac{x_1}{x_2}=m,$$

m fiind un număr dat.

R. Din relaţiile între coeficienţi şi rădăcini deducem

$$x_1=mx_2, x_3=-x_2(1+m);$$

$$x_2^2=-\frac{p}{m^2+m+1}, \; x_2^3=\frac{q}{m(m+1)}.$$

Relaţia de condiţie, dedusă din $(x_2^2)^3=(x_2^3)^2$, este

$$p^3m^2(m+1)^2+q^2(m^2+m+1)^3=0.$$

4 5. Să se rezolve ecuaţia

$$3x^3 - 7x^2 + q = 0,$$

ştiind că diferenţa a două rădăcini este 1.

R. $$x_1 - x_2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7}{3},$$

$$(x_1 + x_2)x_3 + x_1 x_2 = 0,\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{q}{3}.$$

Se rezolvă primele două ecuaţii în raport cu x_1 şi x_2 şi se înlocueşte în a treia ecuaţie; însemnând cu $t = x_3$ avem

(1) $$27t^2 - 42t - 40 = 0.$$

Considerăm şi ecuaţia dată

(2) $$3t^3 - 7t^2 + q = 0;$$

înmulţim (1) cu t şi (2) cu 9 şi le scădem; obţinem

(3) $$21t^2 - 40t - 9q = 0.$$

Se consideră (1) şi (3). Se înmulţeşte (1) cu 7 şi (3) cu 9 şi se scad. Se găseşte

$$x_3 = t = \frac{280 - 81q}{66}.$$

Se înlocueşte în (1) şi se găseşte relaţia de condiţie şi valoarea lui $q = 4$, $q = \frac{400}{243}$.

Sau mai simplu, se rezolvă (1) şi valorile găsite pentru t se înlocuesc în x_1, x_2 şi (3).

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\frac{2}{3},\ q = 4.$$

$$x_1 = \frac{5}{9},\ x_2 = -\frac{5}{9},\ x_3 = \frac{20}{9},\ q = \frac{400}{243}.$$

6. Să se rezolve ecuaţia $x^3 - 7x + \lambda = 0$, ştiind că $x_1 = 2x_2$.

R. Rădăcinile sunt 1, 2, -3; $\lambda = 6$;

$$-1,\ -2,\ 3;\ \lambda = -6.$$

7. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 - 3ax^2 + 6x - 4 = 0$$

ştiind că o rădăcină este media aritmetică a celorlalte două.

R. $$x_1 + x_2 + x_3 = 3a,\ (x_1 + x_2)x_3 + x_1 x_2 = 6,$$

$$x_1 x_2 x_3 = 4,\ x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$$x_3 = a,\ \ x_1 x_2 = 6 - 2a^2,\ \ x_1 x_2 a = 4.$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0,\ a = 1,\ a = -2,$$

$$a=1\,;\; x_1=1+i\sqrt{3},\; x_2=1-i\sqrt{3},\; x_3=1,$$

$$a=-2\,;\; x_1=-2+\sqrt{6},\; x_2=-2-\sqrt{6},\; x_3=-2.$$

8. Să se rezolve ecuația

$$x^5-55x+21=0,$$

știind că admite două rădăcini al căror produs este egal cu 1.

R. *Procedeul I.* Se va identifica

$$x^5-55x+21\equiv(x^2+\lambda x+1)(x^3+\alpha x^2+\beta x+21).$$

Valoarea lui α comună celor două ecuații de condiție care dă pe α, este $\alpha=3$. Deci

$$\lambda=-3,\; \alpha=3,\; \beta=8\,;\; x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\; x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Procedeul II. Prima parte trebue să fie divizibilă cu $x^2+\lambda x+1$, deci restul împărțirii

$$(\lambda^4-3\lambda^2-54)x+\lambda^3-2\lambda+21.$$

trebue să fie identic nul. Adică

$$\lambda^4-3\lambda^2-54=0,\; \lambda^3-2\lambda+21=0\,;\; \lambda=-3.$$

Câtul diviziunii este

$$x^3-\lambda x^2+(\lambda^2-1)x-\lambda^3+2\lambda,$$

deci

$$x^5-55x+21\equiv(x^2-3x+1)(x^3+3x^2+8x+21)$$

9. Să se rezolve ecuația

$$x^4+12x-5=0$$

știind că suma a două rădăcini este egală cu 2.

R. Se va identifica

$$x^4+12x-5\equiv(x^2-2x+\lambda)(x^2+\alpha x+\beta).$$

Se deduce $\alpha=2,\; \beta=-1,\; \lambda=5.$

Ultima relație este verificată.

$$x^4+12x-5\equiv(x^2-2x+5)(x^2+2x-1).$$

Alt procedeu. Se scriu relațiile între rădăcini și coeficienți sub forma

$$(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=0,$$

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=0,$$

$$(x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2=-12,$$

$$x_1x_2x_3x_4=-5,\; x_1+x_2=2.$$

Se calculează produsele x_1x_2, x_3x_4 și se formează apoi ecuația de gradul al II-lea, care dau pe x_1x_2 și x_3x_4, deoarece se cunoaște

$$x_1+x_2,\quad x_1x_2\,;\quad x_3+x_4,\quad x_3x_4,$$

Se găsește

$$x^2 - 2x + 5 = 0, \qquad x^2 + 2x - 1 = 0.$$

10. Să se rezolve ecuația

$$x^2 + mx^3 + x^2 - 5x - 12 = 0,$$

știind că produsul a două rădăcini este egal cu -4.

R. Din relațiile dintre coeficienți și rădăcini, se iau ca necunoscute

$$x_1 + x_2 \qquad x_3 + x_4$$

și se formează ecuațiile de gradul al II-lea, ce dau pe $x_1 + x_2$ și $x_3 + x_4$.

Se găsește

$$x_1 + x_2 = \frac{-4m+5}{7}, \quad x_3 + x_4 = -\frac{3m+5}{7};$$

$$12m^2 + 5m - 123 = 0; \quad m_1 = 3 \quad m_2 = -\frac{41}{12}.$$

1° $\quad m_1 = 3, \quad x^2 + x - 4 = 0, \quad x^2 + 2x + 3 = 0.$

2° $\quad m_2 = -\frac{41}{12}, \quad x^2 - \frac{8}{3}x - 4 = 0, \; x^2 - \frac{3}{4}x + 3 = 0.$

Alt procedeu este identificând

$$x^4 + mx^3 + x^2 - 5x - 12 \equiv (x^2 + \alpha x - 4)(x^2 + \beta x + 3).$$

11. Să se rezolve ecuația

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

știind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

R.
$$u - v, \; u, \; u + v.$$

$$(2b^2 - 9ac)b + 27a^2 d = 0.$$

12. Să se rezolve ecuația

$$x^4 - 4x^3 - 34x^2 + ax + b = 0,$$

știind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

R. $\quad x_1 = u - 3v, \; x_3 = u - v, \; x_4 = u + v, \; x_2 = u + 3v:$

$$u = 1, \; v^2 = 4; \; a = 76, \; b = 105.$$

Rădăcinile sunt $-5, -1, 3, 7$.

Să se rezolve ecuația

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

știind că rădăcinile sunt în progresie geometrică. Aplicație la ecuația

$$8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0.$$

R. Rădăcinile sunt u, uq, uq^2; produsul lor fiind $u^3 q^3$, rezultă că $uq = -\sqrt[3]{c}$ este o rădăcină a ecuației. Se înlocuește x cu $-\sqrt[3]{c}$ și se află condiția

$$a^3 c - b^3 = 0.$$

In cazul ecuaţii numerice rădăcinile sunt

$$uq = \frac{3}{2},\ 3,\ \frac{3}{4}.$$

14. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

ştiind că

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

Aplicaţie pentru ecuaţia

$$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 5 = 0.$$

R. Din relaţiile cunoscute se găseste

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{a}{2}.$$

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = b - \frac{a^2}{4},\quad x_2 x_3 + x_3 x_4 = \frac{2c}{a}.$$

Condiţia este

$$u^3 - 4ab + 8c = 0.$$

Produsele x_1, x_2, x_3, x_4 sunt date de ecuaţia

$$z^2 - \frac{2c}{a} z + d = 0.$$

In cazul ecuaţii numerice, x_1, x_2 şi x_3, x_4 sunt date de ecuaţiile

$$x^2 + 3x + 5 = 0,\quad x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Alt procedeu este identificând

$$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 5 \equiv (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha x + \gamma).$$

15. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

ştiind că

$$x_1 x_2 = x_3 x_4.$$

Aplicaţie pentru ecuaţia

$$x^4 - 3x^3 - 10x^2 - 12x + 16 = 0.$$

R. Din relaţiile cunoscute, se găseşte

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 = \pm\sqrt{d},$$

şi condiţia

$$a^2 d - c^2 = 0.$$

$x_1 + x_2$, $x_3 + x_4$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$$z^2 + az + (b - 2\sqrt{d}) = 0.$$

Pentru ecuaţia numerică aplicând acelaşi procedeu, sau identificând

$$x^4 - 3x^3 - 10x^2 - 12x + 16 \equiv (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \lambda x + \beta),$$

se găseşte

$$3 \pm \sqrt{5},\quad 3 \pm \sqrt{-7}.$$

16. Să se determine m, astfel ca între rădăcinile ecuației

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 10x + m = 0$$

să avem relația

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2.$$

Să se rezolve în acest caz ecuația.

R. $x^2 = y$. Formăm ecuația ce dă pe y. Avem

$$y^2 + 2xy - 5y - 10x + m = 0,$$

$$x = \frac{y^2 - 5y + m}{2(5-y)}.$$

Se înlocuește în $x^2 = y$ și se scrie că pentru ecuația obținută

$$y^4 - 14y^3 + (2m + 65)y^2 - 10(m + 10)y + m^2 = 0,$$

avem relația

$$y_1 + y_2 = y_3 + y_4.$$

Se găsește

$$m = -3, \quad y_1 + y_2 = y_3 + y_4 = 7, \quad y_1 y_2 + y_3 y_4 = 10, \quad y_1 y_2 y_3 y_4 = 9.$$

Valorile lui $y = x^2$ sunt date de ecuațiile

$$y^2 - 7y + 9 = 0, \quad y^2 - 7y + 1 = 0.$$

17. Să se rezolve ecuația

$$2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 30x + 8 = 0,$$

știind că rădăcinile sunt în progresie geometrică.

R. Să notăm rădăcinile cu

$$\frac{u}{q^3}, \quad \frac{u}{q}, \quad uq, \quad uq^3.$$

Produsul lor este 4; $u^2 = 2$. Relațiile dau

$$\left(q^3 + \frac{1}{q^3}\right) + \left(q + \frac{1}{q}\right) = \frac{15}{2\sqrt{2}}, \qquad \left(q^3 + \frac{1}{q^3}\right)\left(q + \frac{1}{q}\right) = \frac{27}{4};$$

$q + \frac{1}{q}$ este dat de ecuația

$$z^2 - \frac{15}{2\sqrt{2}}z + \frac{27}{4} = 0.$$

$$q + \frac{1}{q} = \frac{3}{\sqrt{2}}; \qquad q_1 = \sqrt{2}, \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Rădăcinile sunt $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4.

18. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0,$$

știind că are două rădăcini egale și de semne contrare.

R. $$x_1 + x_2 = 0, \qquad x_3 + x_4 = -1.$$

Din relațiile între coeficienți și rădăcini se găsește

$$x_1 x_2 = 1, \qquad x_3 x_4 = -3.$$

$$(x^2+1)(x^2+x-3)=0.$$

19. Să se rezolve ecuația

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

știind că o rădăcină este media geometrică a celorlalte două.

R. $\qquad x_1^2 = x_2 x_3$. Condiția este $q^3 = p^3 r$

și avem

$$f(x= \left(x+\frac{p}{q}\right)\left[x^2+x\left(p-\frac{q}{p}\right)+\frac{q^2}{p^2}\right].$$

20. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

știind că între rădăcinile sale există relația

$$x_1 + x_2 = x_3 x_4.$$

R. Din relațiile între coeficienți și rădăcini se găsește

$$x_1 + x_2 = \pm\sqrt{c-b},\ x_3 + x_4 = \mp\sqrt{c-b},\ x_1 x_2 = \frac{c}{\pm\sqrt{c-b}};$$

$$x_3 x_4 = \pm\sqrt{c-b}, \qquad (a+c-b)^2(c-b) = (2c-b)^2.$$

21. Să se rezolve ecuația

$$3x^4 + px^3 + 2x^2 + 12x - 8 = 0,$$

știind că produsul a două rădăcini este egal cu 2.

R. Din relațiile între coeficienți și rădăcini se deduce

1^0 $p=6$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 x_2 = 2$; $x_3 + x_4 = -2$, $x_3 x_4 = -\frac{4}{3}$;

2^0 $p = -9$, $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 x_2 = 2$; $x_3 + x_4 = 0$, $x_3 x_4 = -\frac{4}{3}$.

Alt procedeu identificând cu $(3x^2 + \alpha x - 4)(x^2 + \beta x + 2)$.

22. Să se rezolve ecuația

$$x^3 - 8x^2 - 6x + p = 0,$$

știind că rădăcinile sunt în progresie geometrică.

R. $\qquad \frac{u}{q},\ u,\ uq;\quad p = \frac{27}{64};\qquad u = -\frac{3}{4}.$

$$x_1 + x_2 = \frac{35}{4}, \qquad x_1 x_2 = \frac{9}{16}.$$

23. Să se rezolve ecuația

$$6x^3 - 11x^2 + 6x + q = 0,$$

ştiind că rădăcinile formează o proporţie armonică.

R. $$\frac{2}{x_3}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

Din relaţiile de condiţie se scoate

$$x_3=-\frac{q}{2},\quad x_1x_2=\frac{1}{3},\quad x_1+x_2=\frac{11}{6}+\frac{q}{2};$$

$$q=-1;\quad q=-\frac{8}{3}.$$

25. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4-16ax^3+bx+c=0,$$

ştiind că admite o rădăcină triplă şi că suma acesteia cu cea simplă este egală cu 4.

R. In relaţiile cunoscute se face $x_1=x_2=x_3=u,\ x_4=v$; se găseşte

$$x_1=x_2=x_3=0;\quad b=c=0,\quad a=\frac{1}{4}.$$

Alt procedeu este identificând

$$x^4-16ax+bx+c\equiv(x-u)^3(x-v).$$

25. Să se rezolve ecuaţia $x^2+px+q=0$, ştiind că $x_1^2=x_2^2+x_3^2$.

R. Se formează ecuaţia care dă pe $y=x^3$. Avem

$$y+px+q=0.$$

Se scoate x, se înlocueşte în precedenta şi se găseşte

$$y^3+py^2+y(3q^2+p^3)+q^3=0.$$

$$y_1=y_2+y_3;\quad y_1=-\frac{3q}{2},\quad q^2+12p^3=0.$$

26. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4-10ax^3+bx+9c=0,$$

ştiind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

R. $$x_1=u-3v,\ x_3=u-v,\ x_4=u+v,\ x_2=u+3v$$

$$u=\frac{5a}{2},\quad v^2=\frac{15a^2}{4},\quad b=125a^3,\quad c=-\frac{275}{36}a^4.$$

27. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4-2x^3+ax-1=0,$$

ştiind că

$$x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2.$$

R. Se face transformarea $y=x^2$.

$$a=2,\ (y-1)^4;\quad a=6,\ (y^2-6y+9+4\sqrt{5})(y^2-6y+9-4\sqrt{5}).$$

Rădăcini comune la două ecuații.

61. In Fizică, Mecanică, Statistică, și în toate științele pe care le studiem, pentru găsirea elementelor necesare vieții practice, trebue a rezolva o ecuație, și dacă nu putem găsi rădăcina exactă, să aflăm măcar o valoare apropiată a rădăcinii.

De fapt, la aceasta se reduce teoria ecuațiilor algebrice și de aceea, s'au căutat procedee pentru acest scop. Unul din aceste procedee este *aflarea rădăcinilor comune la două ecuații*. Vom expune mai întâi, teoria celui mai mare comun divizor al mai multor numere întregi.

62. **Cel mai mare comun divizor al mai multor numere** *este cel mai mare număr care le împarte exact.*

De ex. numerele 12, 18, 30, care admit divizorii comuni 2, 3, 6, au pe 6 ca cel mai mare comun divizor al lor.

Dacă două sau mai multe numere nu au nici un divizor comun, afară de 1, se zic *numere prime între ele*. Deci cel mai mare divizor comun a două sau mai multor numere prime între ele este 1.

De ex. 24, 35, se numesc numere prime între ele, căci n'au alt divizor comun decât unitatea. Tot asemenea sunt prime între ele 35, 12 și 59.

Cel mai mare comun divizor se însemnează prescurtat cu c. m. m. c. d.

I. *Dacă două numere sunt divizibile unul prin altul, c. m. m. c. d. al lor este cel mai mic dintre ele*, căci el este cel mai mare număr care le împarte exact pe amândouă.

De ex. dacă numărul 12 divide pe 60, numerele 12 și 60 au pe 12 ca c. m. m. c. d., căci acesta este cel mai mare număr care le împarte exact.

II. *Dacă două numere nu sunt divizibile unul cu altul, cel mai mare comun divizor al lor este acelaș ca al celui mai mic număr și al restului împărțirii lor.* Fiind date numerele A și B nedivizibile, dacă împărțim pe A cu B și obținem câtul C și restul R, avem

$$A = B \times C + R.$$

Observăm că orice divizor comun numerelor A şi B divizând pe A şi prima parte $B \times C$ a sumei din membrul al doilea, va divide şi pe R; deci va fi un divizor comun al numerelor B şi R adică al celui mai mic şi al restului diviziunii numerelor A şi B. Reciproc, orice divizor comun al numerelor B şi R va divide şi suma $B \times C + R$, adică pe A; deci va fi un divizor comun al numerelor A şi B. Aşa dar, c. m. m. c. d. al numerelor A şi B este şi c. m. m. c. d. al numerelor B şi R şi reciproc.

III. *Aflarea celui mai mare comun divizor a două numere.* Fie numerele 672 şi 276. Dacă 276 ar împărţi pe 672, atunci 276 ar fi c. m. m. c. d. al numerelor date. Făcând împărţirea lor, avem $672 = 276 \times 2 + 120$.

Am văzut că c. m. m. c. d. al numerelor 672 şi 276 este acelaşi ca al numerelor 276 şi 120; facem din nou împărţirea între numărul cel mic şi restul aflat şi obţinem $276 = 120 \times 2 + 36$.

C. m. m. c. d. al numerelor 276 şi 120 este acelaşi ca al numerelor 120 şi 36; facem împărţirea între ele şi avem $120 = 36 \times 3 + 12$.

Vom face din nou împărţirea între 36 şi 12 şi găsim $36 = 12 \times 3$.

Deci, 12 împărţind pe 36, este cel mai mare comun divizor al numerelor 36 şi 12, 120 şi 36, 276 şi 120, deci şi al numerelor date 672 şi 276.

Operaţia se aşează astfel

	2	2	3	3	
672	276	120	36	12	
120	36	12	0		

Deci, *pentru a găsi cel mai mare divizor comun a două numere, se împarte cel mare prin cel mic. Dacă restul este nul, cel mai mic este* c. m. m. c. d. *Dacă acest rest nu este nul, se divide numărul cel mic prin acest rest, apoi primul rest cu al doilea şi aşa mai departe, până ce împărţirea se face exact. Ultimul rest este cel mai mare comun divizor căutat.*

Observare. Dacă ultimul rest este egal cu unitatea, numerele date nu au alt comun divizor decât unitatea; acele numere sunt prime între ele.

Dacă două resturi consecutive se recunosc ca prime între ele, putem să nu mai continuăm împărţirile, căci ultimul rest va fi 1 şi deci numerele sunt prime între ele.

IV. *Proprietățile celui mai mare comun divizor.* 1° *Dacă un număr divide două numere, divide și pe cel mai mare comun divizor al lor.* In adevăr, acest divizor comun al numerelor date, divizând aceste numere, divide restul împărțirii lor și în mod identic se vede că va divide și resturile succesive ale împărțirilor făcute pentru aflarea c. m. m. c. d., deci și pe ultimul rest, care este cel mai mare divizor comun al lor.

2° *Dacă se înmulțesc sau se împart două numere printr'un al treilea, c. m. m. c. d. al lor se înmulțește sau se împarte cu al treilea număr.* In adevăr, se știe că dacă înmulțim sau împărțim deîmpărțitul și împărțitorul prin același număr, restul se înmulțește sau se împarte cu acel număr.

Deci, înmulțind sau împărțind numerele date prin același număr, șirul de resturi și prin urmare ultimul, care este cel mai mare comun divizor, se înmulțește sau se împarte cu acel număr.

3° *Câturile a două numere A și B prin cel mai mare comun divizor al lor D, sunt numere prime între ele.* In adevăr, divizând numerele A și B cu D, se va împărți și c. m. m. c. d. al lor cu D; deci câturile numerelor A și B cu D vor avea ca cel mai mare comun divizor pe D împărțit cu D, adică pe 1; prin urmare, aceste câturi sunt prime între ele.

4° *Aplicație. Un număr care divide un produs de doi factori și este prim cu unul din factori, divide pe celălalt factor.* Fie numărul C care divide produsul $A \times B$ și este prim cu B; zicem că C divide pe A. In adevăr, B și C fiind prime între ele, cel mai mare divizor comun a lor este 1.

Inmulțind pe B și C cu A, și cel mai mare comun divizor se înmulțește cu A; adică numerele obținute A. B și A. C au ca cel mai mare comun divizor pe A. Insă produsul A. B a fost prin ipoteză divizibil cu C, A. C conținând pe C ca factor se divide și el cu C, deci ambele numere A. B și A. C sunt divizibile cu C; urmează că și cel mai mare comun divizor al lor, A este divizibil cu C (Nr. IV, 2°).

V. *Aflarea celui mai mare comun divizor al mai multor numere.* Fie numerele A, B, C, D, al căror cel mai mare comun divizor voim să-l aflăm. Dacă însemnăm cu d_1 pe c. m. m. c. d. al numerelor A și B, orice divizor comun al lui A și B va fi și un divizor al lui d_1 și reciproc; deci orice divizor comun numerelor A, B, C și D va fi un divizor comun numerelor d_1, C și D şi reciproc. Deci căutarea celui mai mare comun divizor al numerelor A, B, C, D se reduce la căutarea e. m. m. c. d. al numerelor d_1, C şi D. In acelaşi mod judecând, deducem că dacă însemnăm cu d_2 pe c. m. m. c. d. al lui d_1 şi C, căutarea celui ma mare comun divizor al numerelor d_1, C şi D se reduce la căutarea c. m. m. c. d. al lui d_2 şi D. Deci, *pentru a afla pe* c. m. m. c. d. *al mai multor numere aflăm* c. m. m. c. d. *a două din ele, apoi aflăm pe* c. m. m. c. d. *al rezultatului găsit şi al unui al treilea număr, etc. Ultimul rezultat găsit este* c. m. m. c. d. *al tuturor numerelor.*

Exemplu. Să se afle cel mai mare comun divizor al numerelor 504 5292 şi 1520.

Căutăm c. m. m. c. d. al numerelor 1520 şi 594. Avem

	3	63
1520	504	8
8	24	
	0	

C. m. m. c. d. al numerelor 1520 şi 504 este 8. Căutăm pe c. m. m. c. d. al numerelor 5292 şi 8 şi obţinem

	661	2
5292	8	4
49	0	
12		
4		

Deci c. m. m. c. d. al numerelor 504, 5292 şi 1520 este 4.

63. Cel mai mic comun multiplu. *Cel mai mic comun multiplu al mai multor numere, se numeşte numărul cel mai mic care se împarte exact cu fiecare din numerele date.*

Exemplu. Cel mai mic comun multiplu al numerelor 6, 4 şi 3, este 12. căci el este cel mai mic număr care se împarte deodată exact cu numerele 6, 4 şi 3.

Cel mai mic comun multiplu se însemnează pe scurt cu c. m. m. c. m.

I. *Cel mai mic comun multiplu a două numere este egal cu câtul obţinut divizând produsul acelor numere prin cel mai mare comun divizor al lor.* Fie A şi B cele două numere şi D cel mai mare comun divizor al lor. Avem $A=D.A'$, şi $B=D.B'$.

Un multiplu al lui A, va fi kA sau kDA$'$. Acest multiplu ca să fie şi un multiplu al lui B, va trebui ca

$$\frac{kDA'}{B}=\frac{kDA'}{DB'}=\frac{kA'}{B'}$$

să fie întreg; însă A$'$ şi B$'$ fiind prime între ele (ca fiind câturile a două numere prin c. m. m. c. d), rezultă (Nr. IV, 4°) că numărul k trebue să fie divizibil cu B$'$, adică $k=m$ B$'$. Deci un multiplu comun al numerelor A şi B va fi

$$mB'DA'.$$

Căutând pe cel mai mic multiplu, vom da lui m valoarea cea mai mică, 1; aşa dar, cel mai mic multiplu comun M al numerelor A şi B, va fi

$$M=DA'B'.$$

Inlocuind pe A$'$ şi B$'$ cu valorile lor de mai sus

$$A'=\frac{A}{D},\quad B'=\frac{B}{D},$$

$$M=\frac{AB}{D},$$

adică cel mai mic multiplu comun se obţine divizând produsul acelor numere cu cel mai mare divizor comun al lor.

II. *Orice multiplu comun a două numere, este un multiplu al celui mai mic comun multiplu al lor.* In adevăr, un multiplu al numerelor A şi B este, după cum am văzut,

$$m.B'DA'=m.M.$$

III. *Câturile dintre c. m. m. c. d. a două numere şi acele numere, sunt prime între ele.* In adevăr,

$$\frac{M}{A}=\frac{B'DA'}{A}=\frac{B'DA'}{DA'}=B' \text{ şi tot astfel } \frac{M}{B}=A',$$

iar A$'$ şi B$'$ ştim că sunt prime între ele.

120. Din cele precedente rezultă că, dacă am avea mai multe numere, de ex., a, b, c, d, cărora voim a le afla pe c. m. m. c. m., putem înlocui două din ele de ex., pe a şi b, prin c. m. m. c. m. al lor M. Multiplii comuni ai numerelor a şi b fiind aceiaşi cu ai numărului M, rezultă că multiplii comuni ai numerelor a, b,

c, d vor fi aceiaşi ca şi ai numerelor M, c, d. Insemnând acum prin M' pe cel mai mic comun multiplu al numerelor M şi c, multiplii comuni ai numerelor M, c, d vor fi aceiaşi cu ai numerelor M' şi d. In fine, însemnând cu M'' pe c. m. m. c. m. al numerelor M' şi d, acest număr va avea aceiaşi multiplii ca şi numerele M' şi d, sau ca şi numerele a, b, c, d.

Deci, pentru a afla pe c. m. m. c. m. al mai multor numere, aflăm pe c. m. m. c. m. a două din ele, apoi aflăm pe c. m. m. c. m. al rezultatului găsit şi al unui al treilea număr, şi aşa mai departe. Ultimul rezultat este c. m. m. c. m. al tuturor numerelor.

Exemplu. Cel mai mic comun multiplu al numerelor 360, 240, 18, 12, este acelaşi cu cel mai mic comun multiplu al numerelor 720 (care este c. m. m. c. m. al numerelor 360 şi 240) şi 36 (care este c. m. m. c. m. al numerelor 18 şi 12) şi cum 36 este cel mai mare comun divizor al numerelor 720 şi 36, cel mai mic comun multiplu căutat va fi

$$\frac{720 \times 36}{36} = 720.$$

64. Exerciţii. 1. C. m. m. c. d. a două numere este 5; câturile împărţirilor succesive făcute, pentru a-l obţine, sunt 1, 3, 2. Să se afle cele două numere.

R. Avem

$$A = B \times 1 + R$$
$$B = R \times 3 + R,$$
$$R = R' \times 2 = 5 \times 2 = 10, \text{ căci } R' = 5.$$

Deci, $R = 10$, $B = 35$, $A = 45$.

2. Care sunt numerele mai mici ca 1000, care au cu 180 pe 36 ca c. m. m. d. c.

R. Fie B unul din acele numere. Avem

$$180 = 36 \times 5,\ B = 36 \times C.$$

Câturile 5 şi C trebuind să fie prime între ele, vom alege pentru C un număr prim cu 5, adică numere diferite de un multiplu de 5. Dintre aceste numere vom opri pe acel număr care înmulţit cu 36 să ne dea un număr $B < 1000$.

Divizând pe 1000 cu 36, avem

$$1000 = 36 \times 27 + 28.$$

Deci, pentru C vom lua numere mai mici sau cel mult egale cu 27 şi prime cu 5, adică 1, 2, 3, 6, 7..., 27.

Numerele căutate vor fi

$$36 \times 1,\ 36 \times 2...,\ 36 \times 27.$$

3. Două numere întregi consecutive sunt prime între ele.

R. Fie n, $n+1$ acele numere. Orice divizor comun al acestor numere divide şi diferenţa lor $(n+1)-n$ adică pe 1. Deci, acest divizor nu poate fi decât 1: deci, numerele sunt prime între ele.

4. A şi B fiind prime între ele, în ce caz $A+B$ şi $A-B$ sunt prime între ele?

R. Dacă numerele A şi B sunt amândouă fără soţ, suma şi diferenţa lor sunt cu soţ, deci admiţând divizorul 2, nu sunt numere prime între ele. Trebue deci, ca A şi B să fie prime între ele, unul cu soţ şi altul fără soţ. Ex. 3 şi 8.

5. In ce caz trei numere consecutive sunt prime între ele două câte două. (Excepţie numerele 1, 2, 3)?

R. Dacă primul număr e cu soţ, ultimul este cu soţ, ex. 6, 7, 8; deci, primul şi ultimul admit divizorul 2 şi prin urmare nu sunt prime între ele. Trebue deci ca numărul dela mijloc să fie cu soţ.

6. Să se afle două numere a căror sumă este 24 şi c. m. m. c. d. e 2.

R. $A=2A'$; $B=2B'$; $A'+B'=12$; $A'=1$, $B'=11$; $A'=5$, $B'=7$; $A=2$, $B=22$; $A=10$, $B=14$.

7. Să se afle c. m. m. c. d. al numerelor 2484, 2628 şi 897; — cel mai mic comun multiplu al numerelor 360, 172, 18 şi 21.

8. Două numere consecutive şi suma lor sunt trei numere prime două câte două, afară de 1, 2, 3.

9. Să se afle două numere A şi B, cunoscând diferenţa lor 14, pe c. m. m. c. d., 7 şi ştiind că numărul A este mai mic ca 100.

R. $$A=7A';\ B=7B';\ A'-B'=2;$$

A' poate lua valorile dela 3 până la $100:7=14$, ... iar A' şi B' trebue să fie prime între ele şi aşa fel ca diferenţa lor să fie 2.

10. Să se afle două numere cunoscând produsul lor 150 şi c. m. m. c. d. 5.

R. $$A=5A';\ B=5B';\ A'B'=6.$$

Se ia pentru A' şi B' numere prime între ele al căror produs să fie 6.

11. D fiind cel mai mare comun divizor al numerelor A, B, C, să se arate că c. m. m. c. d. al numerelor BC, CA şi AB este multiplu de D^2. In ce caz este egal cu D^2?

R. $A=DA'$, $B=DB'$, $C=DC'$; A', B', C' sunt prime între ele, $BC=D^2B'C'$... In caz când $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sunt prime între ele, sau A', B', C' prime două câte două.

12. Ce relaţie există între cel mai mare comun divizor a două numere a şi b şi acela al numerelor $a+b$ şi $a\,b$?

R. $a=Da'$, $b=Db'$, $a+b=D(a'+b')$, $ab=D^2a'b'$, $a+b$ şi ab admit afară de D şi factorii comuni numerelor $a'+b'$ şi D. Dacă D' este c. m. m. c. d. al lor, acel al lui $a'+b'$ şi ab este DD'.

13. Câte numere din şirul

$$A,\ 2A,\ 3A\ \ldots\ BA$$

sunt divizibile cu B? A şi B sunt numere întregi oarecare.

R. Fie pA cel mai mic număr din şir divizibil cu B, adică $pA=qB$. Se vede că p şi q sunt prime între ele, căci altfel pA n'ar fi cel mai mic număr din şir divizibil cu B. Presupunem că sunt n numere din şir divizibile cu B; ele sunt

$$pA,\ 2pA,\ 3pA, \ldots\ npA = BA.$$

sau

$$qB,\ 2qB,\ 3qB, \ldots\ nqB = AB.$$

Rezultă că

$$np = B, nq = A$$

p şi q fiind prime între ele, rezultă că n este cel mai mare comun divizor al numerelor A şi B.

14. Câte numere din şirul

$$A(B+1),\ A(B+2),\ A(B+3), \ldots\ A(B+n)$$

sunt divizibile cu B? Aplicaţie pentru $A=750$, $B=1200$, $n=80$.

R. Atâtea numere câte sunt din şirul

$$A,\ 2A.\ 3A, \ldots\ nA,$$

divizibile cu B. D fiind c. m. m. c. d. al numerelor A şi B şi $A=DA'$, $B=DB'$, vor fi atâtea numere divizibile cu B, câte numere divizibile cu B'. sunt în şirul

$$A',\ 2A',\ 3A', \ldots\ nA',$$

sau câţi multipli ai lui B' sunt în şirul

$$1,\ 2, \ldots\ n.$$

adică atâţia câţi întregi sunt în câtul dintre n şi B. Aplicaţie, 10 numere.

15. Să se afle două numere A şi B a căror sumă să fie mai mică decât 100 şi astfel ca între c. m. m. c. d., D şi c. m. m. c. m., M, al lor să avem relaţia

$$M = 35\ D.$$

R. $A=DA'$, $B=DB'$; $A'B'=35$; $A'=1$, $B'=35$; $A'=5$, $B'=7$. Trebue să avem sau $36\,D < 100$, sau $12\,D < 100$; $D \leqslant 2$; sau $D \leqslant 8$.

$$A = 1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,\ 40,$$
$$B = 35,\ 70,\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49,\ 56.$$

65. Impărţirea a două polinoame prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi. Relaţii de recurenţă. In afară de metoda generală pentru aflarea câtului şi restului a două polinoame, mai este şi aceea bazată pe identitatea a două polinoame. Aceasta se va vedea în exemplele următoare.

1⁰ *Să se determine m şi n, astfel ca polinomul*

$x^4 - 3x^3 + mx + n$ *să fie divizibil* cu $x^2 - 5x + 4$.

Trebue să avem

$$x^4 - 3x^3 + mx + n \equiv (x^2 - 5x + 4)\ (px^2 + qx + r),$$

căci restul este nul în acest caz.

Desvoltând partea a doua, avem

$$x^4-3x^3+mx+n=px^4+x^3(-5p+q)+x^2(4p-5q+r)$$
$$+x(4q-5r)+4r.$$

Identificând, va trebui să egalăm coeficienţii aceloraşi puteri ale lui x din ambele părţi (ambele polinoame) şi avem

$$\begin{array}{c|l} x^4 & 1=p \\ x^3 & -3=-5p+q \\ x^2 & 0=4p-5q+r \\ x^1 & m=4q-5r \\ x^0 & n=4r \end{array}$$

De unde $p=1$. Inlocuind în a doua, avem

$$-3=-5+q,\ q=2.$$

Inlocuind pe p şi q în a treia, găsim

$$0=4-5.2+r,\ r=6.$$

Inlocuind în a patra şi a cincea relaţie, avem

$$m=4.2-5.6=8-30=-22.$$
$$n=4.6=24.$$

Deci câtul este

$$px^2+qx+r=x^2+2x+6,$$

iar $m=-22$, $n=24$.

2^0 *Această problemă se putea face şi altfel.* Efectuând operaţia împărţirii, avem

$$\begin{array}{l|l} x^4-3x^3+0x^2+mx+n & x^2-5x+4 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4+5x^3-4x^2} & x^2+2x+6 \\ \quad\ 2x^3-\ 4x^2+mx+n & \\ \quad\ \underline{-2x^3+10x^2-8x} & \\ \qquad\quad 6x^2+(m-8)x+n & \\ \qquad\quad \underline{-6x^2+\ \ 30x-24} & \\ \qquad\quad x(m-8+30)+n-24. & \end{array}$$

Restul este $x(m+22)+(n-24)$.

Impărţirea trebuind a se face exact, trebue ca restul să fie identic nul,

$$x(m+22)+(n-24)\equiv 0,$$

$$m+22=0, \; n-24=0,$$

de unde $m=-22$, $n=24$, aceleaşi condiţii găsite mai sus.

Observare. In general, câtul şi restul diviziunii polinoamelor,

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$
$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n, \quad m > n,$$

se obţin efectuând identificarea

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m \equiv$$
$$(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n)(c_0 x^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n}) + \mathrm{R}.$$

Desvoltând avem

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots a_m \equiv b_0 c_0 x^m + (b_0 c_1 + b_1 c_0) x^{m-1} +$$
$$(b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0) x^{m-2} + \ldots,$$

de unde

$$a_0 = b_0 c_0,$$
$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0,$$
$$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_p = b_0 c_p + b_1 c_{p-1} + \ldots + b_{p-1} c_1 + b_p c_0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aceste relaţii, numite *relaţii de recurenţă*, ne dau, prima pe

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0};$$

înlocuind în a doua pe c_0, aflăm pe c_1; etc. Avem astfel coeficienţii $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ai câtului căutat.

Ca aplicaţie, putem găsi câtul şi restul împărţirii polinomului

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

cu polinomul

$$(x-a)(x-b)(x-c) \equiv x^3 - x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ca) - abc.$$

66. Divizorii unui polinom. Fie $\mathrm{A}(x)$ şi $\mathrm{B}(x)$ două polinoame în x. Se zice că polinomul $\mathrm{B}(x)$ divide (împarte exact) pe $\mathrm{A}(x)$, când există un polinom $\mathrm{Q}(x)$ care multiplicat cu $\mathrm{B}(x)$ să dea pe $\mathrm{A}(x)$.

$\mathrm{B}(x)$ se numeşte divizorul polinomului $\mathrm{A}(x)$.

Exemplu. Divizorii lui $\mathrm{A}(x) \equiv 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18$ sunt polinoamele x^2-5x+6, $2x+3$, $x-2$, căci fiecare din ele divide polinomul $A(x)$.

Dacă $B(x)\equiv x^2-5x+6$ este un divizor al lui $A(x)\equiv 2x^3-7x^2-3x+18$, atunci şi $3(x^2-5x+6)=3x^2-15x+18$ este un divizor al polinomului $A(x)$, iar câtul împărţirii lor este $\frac{1}{3}(2x+3)$.

In ceeace urmează nu vom considera ca diferiţi divizorii B şi hB, h fiind un coeficient numeric.

Dacă polinomul $B(x)\equiv x^2-5x+6$ divide polinomul $A(x)\equiv 2x^3-7x^2-3x+18$, el divide şi produsul $A(x)\cdot C(x)$, $C(x)$ fiind un polinom în x, sau un coeficient numeric. In adevăr, dacă $A(x)=B(x)Q(x)$, atunci $A(x)C(x)=B(x).\,[Q(x).\,C(x)]$; $Q(x)C(x)$ fiind un polinom în x, $B(x)$ este un divizor al polinomului $A(x).\,C(x)$.

Un divizor $C(x)\equiv x^2-4x+4$ comun al polinoamelor

$$A(x)\equiv 2x^4-8x^3+9x^2-4x+4,$$
$$B(x)\equiv x^4-3x^3-2x^2-4x+8,$$

divide şi polinomul $A(x)A'+B(x)B'$, A' şi B' fiind, sau polinoame n x, sau factori numerici. In adevăr, dacă $A(x)=C(x)P(x)$ $B(x)=C(x)$, avem

$$A(x)A'+B(x)B'=C(x)[A'P(x)+B'Q(x)]:$$

$A'P(x)+B'Q(x)$ fiind un polinom în x, $C(x)$ este un divizor al lui $A(x)A'+B(x)B'$.

Două polinoame se zic *prime între ele*, când n'au nici un divizor comun, polinom în x.

67. Cel mai mare comun divizor a două polinoame. I. Se numeşte cel mai mare divizor comun a două polinoame întregi, $A(x)$ şi $B(x)$, polinomul de gradul cel mai mare care divide deodată ambele polinoame. Dacă un astfel de polinom nu există, polinoamele A şi B se zic *prime între ele.*

Fie m şi n gradele polinoamelor A şi B ($m\geqslant n$). Dacă B divide pe A, atunci B este cel mai mare comun divizor al polinoamelor A şi B.

Să presupunem că B nu împarte exact pe A; fie C câtul şi R restul împărţirii lui A prin B; avem

$$A=BC+R,$$

R fiind o constantă sau un polinom de un grad mai mic ca al lui A.

Se vede că polinoamele A şi B au aceiaşi divizori comuni ca şi B şi R, căci orice divizor al lui A şi B divide pe $A-BC$, daci şi pe R, şi orice divizor al lui B şi R divide pe $BC+R$ sau pe A.

R fiind de un grad mai mic ca B, să împărţim pe B cu R. Fie C_1 câtul şi R_1 restul, avem

$$B=RC_1+R_1.$$

Dacă R_1 conţine pe x, fie R_2 restul împărţirii lui R cu R_1, apoi R_3 restul împărţirii lui R_1 prin R_2, etc. Gradele resturilor succesive micşorându-se, ajungem la un rest R_p, care nu conţine pe x. Se pot întâmpla două cazuri.

1° $R_p=0$. A şi B, din cele ce am văzut, au aceeaşi divizori ca B şi R; aceştia au aceeaşi divizori ca R şi R_1; etc.

Divizorii lui A şi B sunt deci aceeaşi ca şi divizorii lui R_{p-2} şi R_{p-1}. Dar R_{p-1} este polinomul de gradul cel mai mare care divide pe R_{p-2} şi R_{p-1}, deci este cel mai mare divizor comun al polinoamelor A şi B.

2° Dacă $R_p\neq 0$, orice divizor al lui A şi B trebuie să dividă pe R_{p-2}, şi pe R_{p-1} şi deci pe R_{p-1} şi R_p. Insă R_{p-1} şi R_p neavând divizor comun în x ($R_p=\text{const.}$), polinoamele A şi B sunt prime între ele.

Deci pentru a afla pe cel mai mare comun divizor a două polinoame A *şi* B, *se împarte* A *cu* B; B *cu restul* R *al împărţirii dintre* A *şi* B, R *cu restul* R_1 *al acestei a doua împărţiri şi aşa mai departe, până ajungem la un rest nul, sau independent de* x. *In primul caz,* A *şi* B *admit ca cel mai mare divizor comun restul* R_{p-1} *precedent lui* R_p, *adică divizorul întrebuinţat în această ultimă împărţire; în al doilea caz* A *şi* B *sunt prime între ele.*

II. **Observare.** Când polinoamele A şi B au coeficienţi întregi, pentru a evita coeficienţii fracţionari, calculele se pot simplifica astfel:

Dacă primul termen al vreunul deîmpărţit parţial nu este exact divizibil prin primul termen al împărţitorului, se pot înmulţi toţi coeficienţii deîmpărţitului printr'un număr ales potrivit.

Dacă toţi coeficienţii unui divizor sunt divizibili cu acelaşi număr, îi putem împărţi cu acel număr.

In adevăr, la căutarea celui mai mare divizor comun, ne înteresează restul împărţirilor şi nu câtul, căci, cel mai mare divizor comun este un rest; deci putem schimba câtul. De altă parte, când se înmulţeşte deîmpărţitul cu un factor constant, restul şi câtul se vor înmulţi prin acel factor constant. Deci, înmulţind sau împărţind, în cursul unei împărţiri, vreun rest parţial printr'un factor constant, câtul se schimbă, iar restul întreg se înmulţeşte sau se împarte cu acel factor, ceeace nu schimbă pe cel mai mare comun divizor, decât ca un factor constant.

Exemplu. $A(x) \equiv 2x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x - 5,$

$A_1(x) \equiv 2x^4 + x^3 - 13x^2 - 4x + 20.$

Iată cum se efectuează calculele

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x - 5 & 2x^4 + x^3 - 13x^2 - 4x + 20 \\ \cline{2-2} - x^4 + 13x^3 + 4x^2 - 20x & x \\ \hline 6x^3 + 5x^2 - 14x - 5 & \end{array}$$

Inmulţim cu 3 coeficienţii împărţitorului şi avem

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 3x^3 - 39x^2 - 12x + 60 & 6x^3 + 5x^2 - 14x - 5 \\ \cline{2-2} -5x^3 + 14x^2 + 5x & x \\ \hline -2x^3 - 25x^2 - 7x + 60 & \end{array}$$

Impărţirea se mai poate continua, însă spre a evita coeficienţii fracţionari, înmulţim restul precedent cu 3, ca să fie divizibil cu împărţitorul $6x^3 + 5x^2 - 14x - 5$. Vom avea

$$\begin{array}{r|l} -6x^3 - 75x^2 - 21x + 180 & 6x^3 + 5x^2 - 14x - 5 \\ \cline{2-2} 5x^2 - 14x - 5 & -1 \\ \hline -70x^2 - 35x + 175 & \end{array}$$

Dividem acest ultim rest cu -35 şi vom face împărţirea

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 5x^2 - 14x - 5 & 2x^2 + x - 5 \\ \cline{2-2} -3x^2 + 15x & 3x + 1 \\ \hline 2x^2 + x - 5 & \\ - x + 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Impărţirea făcându-se exact, cel mai mare comun divizor este $2x^2 + x - 5$.

III. *Proprietăţile celui mai mare comun divizor a două polinoame* sunt aceleaşi ca şi ale celui mai mare comun divizor a două numere întregi; demonstrarea acestor proprietăţi se face ca şi în aritmetică (Nr. 62, IV).

Dintre aceste proprietăţi, să reamintim pe următoarea. Cel mai mare comun divizor a două polinoame puse sub forma

$$(x-a)^p\,(x-b)^q\,(x-c)^r \ldots (x-l)^t,$$

adică descompuse în factori primi, este egal cu produsul factorilor comuni, cu exponenţii cei mai mici.

68. Cel mai simplu comun multiplu a două polinoame este polinomul de gradul cel mai mic care se împarte exact cu polinoamele date. Dacă polinoamele se pot descompune în factori, ca în exemplul următor,

$$P = x^2(x-1)^3(x+1)^2, \quad Q = x(x+1)(x-2),$$

cel mai simplu comun multiplu al lor se află înmulţind, ca şi în aritmetică, factorii comuni şi necomuni luaţi cu exponenţii cei mai mari, şi este

$$x^2(x-1)^3(x+1)^2(x-2).$$

In caz când polinoamele nu se pot descompune în factori, se află prin metoda împărţirilor cel mai mare comun divizor D al lor, şi, ca şi în aritmetică, cel mai simplu comun multiplu al celor două polinoame este (Nr. 63) câtul $\frac{P\,.\,Q}{D}$.

69. Aplicaţie. *Să se afle condiţia ca polinoamele*

$$ax^2 + bx + c, \quad a'x^2 + b'x + c'$$

să admită un divizor comun de gradul întâi.

Vom aplica metoda celui mai mare comun divizor şi vom scrie că restul de gradul zero în raport cu x, este nul. Avem

$$\begin{array}{lll|l} aa'x^2 & +ba'x & +ca' & a'x^2+b'x+c' \\ \cline{4-4} / & -ab'x & -ac' & a \\ \cline{1-3} & (ba'-ab')x+ca'-ac' & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll|l} & a'x^2 & +b'x & +c' & (ba'-ab')x+ca'-ac' \\ \cline{5-5} (^1) & a'(ba'-ab')x^2 & +b'(ba'-ab')x & +c'(ba'-ab') & a'x,[b'(ba'-ab)'-a'(ca'-ac') \\ & / & -a'(ca'-ac')x & & \\ \cline{1-4} & [b'(ba'-ab')-a'(ca'-ac')]x & +c'(ba'-ab') & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (^2) & [b'(ba'-ab')-a'(ca'-ac')](ba'-ab')x+c'(ba'-ab')^2 \\ & /\qquad (ac'-ca')b'(ba'-ab')-(ac'-ca')a'(ca'-ac') \\ \hline & -(ba'-ab')(cb'-bc')a'+a'(ac'-ca')^2 \end{array}$$

---

(1) Se presupune $ba'-ab' \neq 0$.

(2) S'a pus la cât, după $a'x$, virgulă, spre a arăta că adevăratul cât nu este $a'x + b'(ba'-ab') - a'(ca'-ac')$.

Deci, dacă $a' \neq 0$, şi $ab' - ba' \neq 0$, condiţia este

$$(ac' - ca')^2 - (cb' - bc')(ab' - ba') = 0.$$

iar divizorul comun este

$$(ba' - ab')x + ca' - ac'.$$

Observări. I. Acelaşi rezultat se mai poate obţine observând că divizorul de gradul întâi este

$$(ba' - ab')x + ca' - ac'.$$

Pentru a găsi condiţia ca polinoamele să aibă un divizor de gradul întâi, trebue să egalăm cu zero restul de gradul zero, adică restul diviziunii polinomului $ax^2 + bx + c$ prin divizorul

$$(ba' - ab')x + ca' - ac'.$$

In loc de a face împărţirea, se înlocueşte în $ax^2 + bx + c$, x cu

$$\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

şi se scrie că acest rezultat, care este restul împărţirii, este zero.

II. Divizorul comun polinoamelor $ax^2 + bx + c$, $a'x^2 + b'$, $x + c'$ divide şi o transformare a lor

$$a'(ax^2 + bx + c) - a(a'x^2 + b'x + c') = x(ba' - ab') + ca' - ac'.$$

Deci, acest divizor comun este

$$x(ba' - ab') + ca' - ac'.$$

Inlocuind în polinomul $ax^2 + bx + c$ pe x cu valoarea

$$\frac{ac' - a'c}{a'b - ba'},$$

ce se obţine egalând cu zero divizorul găsit, obţinem

$$(ac' - ca')^2 - (bc' - cb')(ab' - ba') = 0.$$

70. Rădăcini comune a două ecuaţii. Fie $F(x) = 0$ şi $f(x) = 0$ două ecuaţii cu coeficienţi numerici. Dacă polinoamele $F(x)$ şi $f(x)$ nu sunt prime între ele, fie $\varphi(x)$ cel mai mare comun divizor al lor. Atunci avem

$$F(x) = \varphi(x) F_1(x), \quad f(x) = \varphi(x) f_1(x),$$

unde $F_1(x)$ şi $f_1(x)$ sunt polinoame prime între ele, căci dacă aceste plinoame ar avea un divizor comun, şi polinoamele $F(x)$ şi $f(x)$ ar avea acelaşi divizor şi deci $F(x)$ şi $f(x)$ admiţând încă un divizor afară de $\varphi(x)$, atunci $\varphi(x)$ n'ar fi cel mai mare comun divizor al lor.

Prin urmare, orice rădăcină a ecuaţiei $\varphi(x) = 0$, va fi şi a ecuaţiilor $F(x) = 0$ şi $f(x) = 0$, reciproc. Deci, ecuaţia $\varphi(x) = 0$, obţinută egalând cu zero cel mai mare comun divizor al polinoamelor $F(x)$ şi $f(x)$ ne dă rădăcinile comune ecuaţiilor

$$F(x)=0 \quad \text{şi} \quad f(x)=0.$$

Exemplu. Să se găsească rădăcinile comune ecuaţiilor

$$F(x)=2x^3+x^2-3x+1=0,$$

$$f(x)=4x^4-2x^3-12x^2+12x-3=0.$$

Se va căuta cel mai mare comun divizor al polinoamelor $F(x)$ şi $f(x)$ şi acesta se va egala cu zero.

Procedăm astfel

$$\begin{array}{r|l}
4x^4-2x^3-12x^2+12x-3 & 2x^3+x^2-3x+1 \\ \hline
/\ -2x^3+6x^2-2x & 2x-2 \\ \cline{1-1}
-4x^3-6x^2+10x-3 & \\
/\ +2x^2-6x+2 & \\ \cline{1-1}
-4x^2+4x-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2x^3+x^2-3x+1 & 4x^2-4x+1 \\ \hline
4x^3+2x^2-6x+2 & x,\ 3 \\
/\ +4x^2-x & \\ \cline{1-1}
6x^2-7x+2 & \\
12x^2-14x+4 & \\
/\ +12x-3 & \\ \cline{1-1}
-2x+1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
4x^2-4x+1 & 2x-1 \\ \hline
/\ +2x & 2x-1 \\ \cline{1-1}
-2x+1 & \\
/\ -1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Cel mai mare comun divizor fiind $2x-1$, rădăcina comună $x=\frac{1}{2}$, e dată de ecuaţia $2x-1=0$.

71. Aplicaţii. I. *Să se rezolve ecuaţia*

(1) $$2x^3-x^2-2x+1=0,$$

ştiind că o rădăcină este de două ori mai mare ca alta.

Fie $2a$ şi a rădăcinile despre care este vorba. Să considerăm în locul ecuaţii (1), alta care să aibă ca rădăcini îndoitele rădăcinilor ecuaţiei (1); deci, însemnând cu y rădăcinile ecuaţiei ce vom obţine, care se mai numeşte şi transformata ecuaţiei (1), vom avea $y=2x$. Ecuaţia ce ne dă pe y, se obţine înlocuind în (1) pe x cu $\frac{1}{2}y$. Avem ecuaţia

$2\left(\frac{1}{2}y\right)^3-\left(\frac{1}{2}y\right)^2-2\frac{1}{2}y+1=0$

$$y^3-y^2-4y+4=0,$$

$2\frac{1}{8}y^3-\frac{1}{4}y^2-y+1=0$

sau în x,

(2) $$x^3-x^2-4x+4=0.$$

$y^3-y^2-4y+4=0$

Ecuaţiile (1) şi (2) au o rădăcină comună $2a$, care va fi dată de cel mai mare comun divizor al polinoamelor (1) şi (2).

Avem

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - x^2 - 2x + 1 & x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ \cline{2-2}
/ +2x^2 + 8x - 8 & 2 \\ \cline{1-1}
x^2 + 6x - 7 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 - 4x + 4 & x^2 + 6x - 7 \\ \cline{2-2}
/ -6x^2 + 7x & x - 7 \\ \cline{1-1}
-7x^2 + 3x + 4 & \\
/ +42x - 49 & \\ \cline{1-1}
45x - 45 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 6x - 7 & x - 1 \\ \cline{2-2}
/ + x & x + 7 \\ \cline{1-1}
7x - 6 & \\
/ + 7 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Cel mai mare comun divizor fiind $x-1$, rădăcina comună e dată de ecuaţia $x-1=0$; de unde $x=1$. Aşa dar $2a=1$; deci o rădăcină a ecuaţiei (1) este 1 şi alta $\frac{1}{2}$.

Pentru a găsî cealaltă rădăcină a ecuaţiei (1), vom împărţi polinomul (1) cu $(x-1)(x-\frac{1}{2})$. Câtul fiind $x+1$, ultima rădăcină este $x=-1$.

A treia rădăcină se mai află scriind că suma rădăcinilor este

$$1+\tfrac{1}{2}+x_2=\tfrac{1}{2}.$$

De unde

$$x_3=-1.$$

II. *Să se rezolve aceeaşi ecuaţie (1), ştiind că o rădăcină este egală şi de semn contrar cu alta.* Pentru aceasta, vom considera altă ecuaţie, care să aibă rădăcinile egale şi de semn contrar cu ale ecuaţii (1). Pentru a obţine acea ecuaţie, să înlocuim în (1) x cu $-x$, iar ecuaţia obţinută

(3) $$2x^3+x^2-2x-1=0$$

se numeşte *transformanta în* $-x$ a ecuaţii (1).

Ecuaţiile (1) şi (3) au o rădăcină comună a; două din rădăcinile ecuaţiei (1) fiind a, $-a$. Rădăcina comună a, se va obţine egalând cu zero cel mai mare comun divizor al polinoamelor (1) şi (3). Se va găsi $a=1$, iar pentru găsirea ultimei rădăcini a ecuaţiei (1), se va divide polinomul (1) cu $(x-1)(x+1)=x^2-1$ şi se va găsi $x=\frac{1}{2}$. Sau se scrie că suma rădăcinilor este

$$1-1+x=\tfrac{1}{2}.$$

Observare. Se putea rezolva ecuaţia (1) cu ajutorul relaţiilor dintre rădăcini şi coeficienţi. In adevăr, însemnând, în primul caz, rădăcinile cu a, $2a$ şi b, avem relaţiile

(4) $$\begin{cases} a+2a+b=\frac{1}{2}, \\ 2a^2+ab+2ab=-1 \\ 2a^2b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

care ne dau pe a şi b. Din prima scoatem $b=\frac{1}{2}-3a$, i înlocuind în a doua, găsim

$$14a^2-3a-2=0.$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{9+112}}{28}, \text{ de unde } a=\frac{1}{2}, \; a=-\frac{2}{7}.$$

Deci

$$a=\tfrac{1}{2}, \quad 2a=1, \quad b=-1.$$

A treia ecuaţie (4) ne arată că soluţia $a=-\frac{2}{7}$ nu convine problemei.

71. Exerciţii. 1. Pentru ce valoare a lui m, polinomul

$$x^3+y^3+z^3+mxyz$$

e divizibil cu $x+y+z$? Să se afle câtul.

R. Se înlocueşte x cu $-(y+z)$ şi se scrie că rezultatul este identic zero; $m=-3$. Pentru a găsi câtul, scriem că

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)\,[k(x^2+y^2+z^2)+k'(xy+yz+zx)]$$

k şi k' fiind doi coeficienţi necunoscuţi. Se face $z=0$ şi identificând se găseşte $k=1$, $k'=-1$. Câtul este

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx.$$

Deci, când

$$x+y+z=0, \text{ avem } x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

2. Care e condiţia ca polinoamele

$$x^3-4x+3, \qquad x^2-2x+a,$$

să aibă un divizor de gradul întâi?

R. Se află cel mai mare comun divizor şi se scrie că restul de gradul zero e nul. Sau mai scurt, se ajunge la un rest de gradul întâi, care va fi cel mai mare comun divizor. Se rezolvă ecuaţia obţinută egalând acest rest cu zero; condiţia se obţine înlocuind în restul de gradul al doilea (restul precedent) pe x cu valoarea găsită

$$x=\frac{3-2a}{a}.$$

Condiţia este

$$a^3+8a^2-18a+9=0; \quad a=1, \quad a=\frac{-9+3\sqrt{5}}{2}, \text{ sau } a=\frac{-9-3\sqrt{5}}{2}.$$

3. Să se rezolve ecuaţiile

$$x^3+mx+n=0, \qquad x^4+3nx+m=0,$$

ştiind că admit două rădăcini comune.

R. Se anulează identic restul de gradul întâi:

$$m^3+m^2+4n^2=0, \qquad mn(m+2)=0.$$

Rădăcinile comune sunt date de $mx^2-2nx-m=0$.

$m=-2$, $n=+1$; $x_1=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$, $x_2=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)$, $x_3=1$;

$$x'_1=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right),\; x'_2=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right),\; x'_3+x'_4=1;\; x'_3x'_4=2,$$

$m=2,\ n=-1;\ x_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\ x_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right),\ x_3=-1;$

$x'_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right),\ x'_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right),\ x'_3+x'_4=-1,\ x'_3\,x'_4=2$

$m=-1;\ n=0:\ x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=0;\ x'_1=1,\ x'_2=-1.\ x'_3+x'_4=9,\ x'_3x'_4=1.$

4. Să se afle rădăcinile comune ecuaţiilor

$$x^3-8x^2+17x-10=0,$$
$$x^4-3x^3+5x^2-9x+6=0.$$

R. Cel mai mare comun divizor e x^2-3x+2. Rădăcinile comune sunt 1 şi 2.

5. Să se rezolve ecuaţia

(5) $$x^4-7x^3+15x^2-7x-6=0,$$

ştiind că diferenţa a două rădăcini este 1.

R. Una din rădăcini fiind $x=y$, cealaltă va fi $x=y+1$. Ecuaţia

$$y^4-3y^3+6y-4=0,$$

sau

(6) $$x^4-3x^3+6x-4=0,$$

obţinută înlocuind x cu $y+1$, sau cu $x+1$ în (5), are cu ecuaţia (5) o rădăcină comună. Cel mai mare comun divizor al polinoamelor (5) şi (6) fiind $x-2$, rădăcina comună este 2. O rădăcină a ecuaţii (5) fiind 2, alta e 3; celelalte se obţin divizând polinomul (5) cu $(x-2)\ (x-3)$ sau scriind că suma rădăcinilor este

$$2+3+x_3+x_4=7;$$

şi produsul lor $2\times3\times x_3\times x_4=-6$, şi se găseşte $x_3, x_4=1\pm\sqrt{2}$.

6. Să se rezolve ecuaţiile

$$x^3-7x^2+36=0,\qquad x^3-3x^2-10x+24=0,$$

ştiind că prima are o rădăcină de trei ori mai mare ca o rădăcină a ecuaţii a doua

R. Se transformă ecuaţia a doua în alta care să aibă rădăcinile de trei. ori mai mari: $y=3x$; se înlocueşte în ea, x cu $\frac{1}{3}y$ sau $\frac{1}{3}x$. Ecuaţiile

$$x^3-7x^2+36=0,\qquad x^3-9x^2-90x+648=0$$

au o rădăcină comună $x=6$. Se divide primul polinom

$$x^3-7x^2+36,$$

cu $x-6$, al doilea

$$x^3-3x^2-10x+24,$$

cu $x-1$. Rezultatele $x^3-x-6=0$, $x^2-x-12=0$, ne dau celelalte rădăcini, Sau, scriind suma şi produsul rădăcinilor; una fiind 6, avem

$$x_1+x_2+6=7,\ x_1+x_2=1;\ x_1\,x_2\,6=-36,\ x_1\,x_2=-6 \text{ etc.}$$

7. Să se rezolve ecuaţiile dela ex. 6, ştiind că ecuaţia a doua are o rădăcină egală cu a primei ecuaţii, însă de semn schimbat.

R. Se înlocueşte în ecuaţia a doua x cu $-x$; se caută cel mai mare comun divizor între

$$x^3-7x^2+36=0 \quad \text{şi} \quad x^3+3x^2-10x-24.$$

Se găseşte x^2-x-5. Rădăcinile sunt $3, -2, 6; -3, 2, 4$.

8. Să se rezolve ecuaţia

$$3x^3-7x^2+q=0$$

ştiind că diferenţa a două rădăcini este egală cu 1.

R. Se scrie că ecuaţia, ce are ca rădăcini pe acelea ale ecuaţiei date mărite cu o unitate, are o rădăcină comună cu ecuaţia dată. Scăzând aceste ecuaţii, rădăcina comună este 1 sau $-\frac{4}{9}$; deci: $q=4$, $q=\frac{400}{343}$; $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-\frac{2}{3}$; $x_1=\frac{5}{9}$; $x_2=-\frac{4}{9}$, $x_3=\frac{20}{9}$.

9. Să se rezolve ecuaţia

$$f(x)\equiv x^5-55x+21=0,$$

ştiind că produsul a două rădăcini este egal cu 1.

R. Se află c. m. m. c. d. al primului membru al ecuaţii şi al transformatei în $\frac{1}{x}$, $21x^5-55x^4+1$. Se obţine

$$f(x)\equiv(x^2-3x+1)(x^3+3x^2+8x+21).$$

10. Să se rezolve ecuaţia

$$ax^5+bx^4+cx^2+d=0,$$

ştiind că are patru rădăcini comune cu transformata în $\frac{1}{x}$.

R. $x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)=dx^5+cx^3+bx+a$. Se anulează identic restul de gradul al treilea. $c(b^2d-bd^2+a^2c)=0$, $ad(b^2-c^2)=0$, $b(db^2-d^3+a^2d+a^2c)=0$, $a(b^2d-cd^2+a^2c)=0$; divizorul comun $bdx^4-acx^3+cdx^2-abx+d^2-a^2=0$,

1° $a=\pm b\sqrt{2}$, $c=-d=b$; $x^4\pm\sqrt{2}x^3+x^2\pm\sqrt{2}x+1=0$; $x^5=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2° $b=c$, $bd-d^2+a^2=0$; $x^4-\frac{a}{b}x^3+x^2-\frac{a}{d}x+1=0$; $x^5=-\frac{d}{a}$.

II *procedeu*. Se identifică

$$\frac{ax^5+bx^4+cx^2+d}{dx^5+cx^3+bx+a}\equiv\frac{a(x-u)}{d(x-v)};$$

$$d(b+au-av)=0,\ u=-\frac{d}{a}=\frac{a^2-d^2}{ab},\ v=\frac{-ac}{bd}=\frac{-ab}{cd},\ a^2u=d^2v.$$

III *procedeu*. Ecuaţia $f(x)=0$ şi transformata în $\frac{1}{x}$ având o rădăcină comună r, admit ca rădăcina comună şi pe $\frac{1}{r}$; rădăcinile comune sunt deci $\left(r,\frac{1}{r}\right)$, $\left(s,\frac{1}{s}\right)$. Se identifică

$$ax^5+bx^4+cx^2+d\equiv(x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\alpha x+1)\,a(x-t).$$

$$\alpha=-\frac{a}{d},\ \beta=1,\ t=-\frac{d}{a};\ b=c,\ bd=d^2-a^2.$$

Rezolvarea unei ecuații când are rădăcini multiple.

72. Condițiile ca o ecuație să aibă o rădăcină multiplă. Se zice că ecuația $f(x)=0$ de gradul m are o rădăcină multiplă de ordinul $p\,(p\leqslant m)$, când $f(x)$ se divide cu $(x-a)^p$.

Pentru a găsi condițiile ca o ecuație să aibă o rădăcină multiplă, să considerăm formula lui *Taylor*

$$f(y+h)=f(y)+\frac{h}{1}f'(y)+\frac{h^2}{1.2}f''(y)+...+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(y).$$

Pentru a găsi o desvoltare a lui $f(x)$ după puterile lui $x-a$, să punem $y+h=x$, $h=x-a$; având $y=x-h=a$ și deci făcând aceste înlocuiri în formula lui *Taylor*, găsim

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+...$$
$$+\frac{(x-a)^m}{m!}f^{(n)}(a).$$

De oarece $f(x)$ trebue să aibă ca factor pe $(x-a)^p$, desvoltarea precedentă trebue să înceapă cu $(x-a)^p$; deci

$$f(a)=0,\quad f'(a)=0,....f^{(p-1)}(a)=0,\quad f^{(p)}(a)\neq 0.$$

Așa dar *condițiile necesare și suficiente ca o ecuație* $f(x)=0$, *să admită o rădăcină a multiplă de ordinul* p, *sunt ca funcția* $f(x)$ *și cele dintâi* $p-1$ *derivate ale sale, să se anuleze pentru* $x=a$ *și derivata de ordinul* p *să fie diferită de zero pentru* $x=a$.

Prin urmare, a este o rădăcină comună tuturor ecuațiilor

$$f(x)=0,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0,...f^{(p-1)}(x)=0,$$

iar $f, f', f'',... f^{(p-1)}$ au un divizor comun de gradul întâi.

Observare. O rădăcină de ordinul p a lui $f(x)$ este rădăcină de ordinul $p-1$ al lui $f'(x)$. In adevăr, din

$$f(x)=(x-a)^p\,\varphi(x),$$

avem

$$f'(x)=p(x-a)^{p-1}\varphi+(x-a)^p\varphi'=(x-a)^{p-1}[p\varphi+(x-a)\varphi'].$$

Tot așa se vede că $f''(x)$ are pe a ca rădăcină de ordinul $p-2$, etc.

74. Aplicaţie. I. Să se arate că

$$nx^{n+1}-(n+1)x^n+1,$$

e divizibil cu $(x-1)^2$ şi că

$$x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n-n^2x^{n-1}+1$$

e divizibil cu $(x-1)^4$.

Polinomul

$$nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$$

şi derivata sa

$$n(n+1)x^n-n(n+1)x^{n-1},$$

se anulează pentru $x=1$.

Pentru polinomul $x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n-n^2x^{n-1}+1$, se arată că el şi cele dintâi trei derivate ale sale sunt nule pentru $x=1$.

75. Condiţia ca o ecuaţie să admită o rădăcină dublă este ca ecuaţiile $f(x)=0$, $f'(x)=0$ să aibă o rădăcină comună. Deci, se va anula restul de gradul zero (independent de x), ce se obţine în căutarea celui mai mare comun divizor, iar restul de gradul întâi egalat cu zero, ne va da rădăcina dublă.

Se pot uşura calculele, dacă facem primul membru al ecuaţii $f(x)=0$ funcţiune omogenă şi de gradul m în raport cu x şi cu o variabilă auxiliară y; se va aplica apoi formula lui *Euler* pentru funcţiile omogene.

In adevăr, fie $f(x,y)$ funcţiunea de gradul m şi omogenă, aşa că $f(x,1)=f(x)$. După formula lui *Euler* avem

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=mf(x,y), \tag{1}$$

f'_x şi f'_y fiind derivatele parţiale ale funcţiei $f(x,y)$, în raport cu x şi y.

Făcând în (1) $\cancel{x}$ $y=1$, găsim

$$xf'_x(x,1)+f'_y(x,1)=mf(x).$$

Insă

$$f'_x(x,1)=f'(x)$$

Deci egalitatea precedentă devine

$$xf'(x)+f'_y(x,1)=mf(x).$$

De aci se vede că divizorul comun lui f şi f'_y este divizorul comun lui f'_x şi f'_y, adică al derivatei în raport cu x şi al derivatei funcţiunii $f(x, y)$ în raport cu y, în care se face pe urmă $y=1$.

Deci pentru a găsi condiţia *ca o ecuaţie $f(x)=0$, să aibă o rădăcină dublă, se va scrie că f'_x şi f'_y admit un divizor comun de gradul întâi*, adică se va egala cu zero restul independent de x, ce se obţine în cursul operaţii.

Exemplu. Condiţia ca ecuaţia $x^3+px+q=0$ să admită o rădăcină dublă.

Avem

$$f(x, y)=x^3+pxy^2+qy^3,$$

$$f'_x=3x^2+py^2, \qquad f'_y=2pxy+3qy^2.$$

Facem $y=1$, şi avem

$$f'_x=3x^2+p, \qquad f'_y=2px+3q.$$

Cel mai mare comun divizor fiind de gradul întâi, nu poate fi decât $2px+3q$. Condiţia se va găsi scriind că $2px+3q$ divide pe $3x^2+p$, ceeace se obţine înlocuind în $3x^2+p$ pe x cu valoarea $\frac{-3q}{2p}$; de unde

$$3\frac{9q^2}{4p^2}+p=0, \qquad 4p^3+27q^2=0.$$

76. Condiţiile ca o ecuaţie să admită o rădăcină triplă *sunt ca polinoamele f, f', f'' să aibă un comun divizor de gradul întâi.*

Tot aşa putem face simplificări, aplicând formula lui *Euler* fiecăreia din funcţiile $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, care sunt omogene şi de gradul $m-1$. Avem

$$xf''_{x^2}(x, y)+yf''_{xy}(x, y)=(m-1)f'_x(x, y),$$

$$f''_{xy}(x, y)+yf''_{y^2}(x, y)=(m-1)f'_y(x, y).$$

Făcând $y=1$, găsim

$$xf''_{x^2}(x, 1)+f''_{xy}(x, 1)=(m-1)f'_x(x, 1)$$

$$xf''_{xy}(x, 1)+f''_{y^2}(x, 1)=(m-1)f'_y(x, 1).$$

Insă

$$f''_{x^2}(x, 1)=f''(x).$$

Formulele precedente devin

(2) $$xf''(x)+f''_{xy}(x, 1)=(m-1)f'(x).$$

(3) $$xf''_{xy}(x, 1)+f''_{y^2}(x, 1)=(m-1)f'_y(x, 1).$$

Condiţia ca ecuaţia $f(x)=0$ să aibă o rădăcină triplă fiind ca polinoamele $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ să aibă un divizor comun de gradul întâi, se observă că divizorul comun lui $f(x)$ şi $f'(x)$, va fi comun (conform aplicaţiei precedente) şi lui $f'(x)$ şi $f'_y(x, 1)$. Insă din (2) divizorul comun lui $f'(x)$ şi $f''(x)$ este şi al polinoamelor $f''(x)$ şi $f''_{xy}(x, 1)$; deci acest divizor este comun funcţiilor $f''_{xy}=f''_{yx}, f'_y(x, 1)$. Dar din (3), se vede că acest divizor este comun şi polinomului $f''_{y^2}(x, 1)$.

In rezumat, divizorul comun funcţiilor $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ este comun şi funcţiilor

$$f''_{x^2}(x, 1),\ f''_{xy}(x, 1),\ f''_{y^2}(x, 1).$$

Prin urmare, *condiţiile ca o ecuaţie să aibă o rădăcină triplă se obţin scriind că derivatele parţiale de ordinul al doilea $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ ale funcţiei omogene $f(x, y)$, admit un divizor de gradul întâi. Tot ca şi în cazul rădăcinii duble, după ce s'au luat derivatele de ordinul al doilea, se va înlocui y cu 1.*

Exemplu. Să se găsească condiţiile cu ecuaţia

$$x^4+4ax^3+6bx+c=0$$

să admită o rădăcină triplă şi în acest caz să se rezolve.

$$f(xy)=x^4+4ax^3y+6bxy^3+cy^4,$$
$$f'_x(x,y)=4x^3+12ax^2y+6by^3,$$
$$f'_y(x,y)=4ax^3+18bx^2y+cy^3,$$
$$f''_{x^2}=12x^2+24axy,\quad f''_{xy}=12ax^2+18by^2,$$
$$f''_{y^2}=36bxy+12cy^2;$$
$$f''_{x^2}(x,1)=12(x^2+2ax,)\quad f''_{xy}(x,1)=6(2ax^2+3b),$$
$$f''_{y^2}(x, 1)=12(3bx+c).$$

Divizorul comun lui $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ fiind de gradul întâi, nu poate fi decât $3bx+c$. Condiţiile se obţin scriind că acest divizor împarte pe x^2+2ax $2ax^2+3b$, ceeace se obţine înlocuind x cu $\frac{-c}{3b}$; de unde

$$c^2=6abc,\qquad 2ac^2+27b^3=0.$$

Dacă $c=6ab$, $c=-16a^4$, $3b=-8a^3$, avem rădăcina triplă $-2a$. Pentru a afla pe cealaltă, se ştie că suma rădăcinilor ecuaţii este $-4a$; deci a patra rădăcină va fi $2a$, etc.

Observare. Se putea rezolva ecuaţia propusă, servindu-ne de relaţiile între rădăcini şi coeficienţi. Rădăcinile fiind x_1, x_2, x_3, x_4, avem

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-4a.$$
$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=0,$$
$$x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-6b,$$
$$x_1x_2x_3x_4=c.$$

Cum însă $x_1 = x_2 = x_3$, relațiile devin

$$3x_1 + x_4 = -4a,$$
$$2x_1(x_1 + x_4) + x_1^2 + x_1 x_4 = 0,$$
$$x_1^2(x_1 + x_4) + 2x_1^2 x_4 = -6b,$$
$$x_1^3 x_4 = c.$$

Inlăturând cazul $x_1 = 0$, când rădăcina triplă e zero, $b=0$, $c=0$, rămâne

$$3x_1 + x_4 = -a,$$
$$x_1 + x_4 = 0,$$
$$x_1^2 x_4 = -3b, \qquad x_1^3 x_4 = c.$$

Deci

$$x_1 = -2a, \qquad x_4 = 2a$$

și condițiile

$$8a^3 = -3b, \qquad -16a^4 = c.$$

77. Exerciții. 1. Să se rezolve ecuația

$$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0,$$

știind că are o rădăcină dublă.

R. Polinomul și derivata au divizorul $x - 11$; rădăcina dublă este 11; $11 + 11 + x_3 = 15$, $x_3 = -7$.

3. Să se rezolve ecuația

$$x^4 - 4x^3 + 16x + a = 0.$$

știind că are o rădăcină dublă.

R. Restul de gradul întâi este $(a+16)(x+1)$. Rădăcina dublă $x = -1$; $a = 11$, $x^2 - 6x + 11$. Dacă $a = -16$, restul de gradul al doilea este $(x-2)^2$; 2 care este rădăcină dublă pentru derivată, va fi triplă pentru ecuație.

3. Să se determine a și b astfel ca ecuația

$$x^4 - 4ax^3 + 6bx^2 - 8x + 1 = 0,$$

să aibă două rădăcini duble și în acest caz să se rezolve

R. Polinomul și derivata trebue să aibă un divizor de gradul al doilea. Sau, însemnând cu u și v rădăcinile duble, avem

$$x^4 - 4ax^3 + 6bx^2 - 8x + 1 \equiv (x-u)^2 \ (x-v)^2.$$

De unde

$$u + v = 2a, \ u^2v^2 = 1; \ u^2 + v^2 + 4uv = 6b, \ uv(u+v) = 4;$$
$$uv = \pm 1, \ u + v = \pm 4.$$

Se va forma ecuația de gradul al doilea ce dă pe u și v, când cunoaștem suma și produsul. Când $uv = 1$, $u + v = 4$, $u = 2 + \sqrt{3}$, $v = 2 - \sqrt{3}$, $a = 2$, $b = 3$, etc.

Sau, identificând

$$x^4 - 4ax^3 + 6bx^2 - 8x + 1 \equiv (x^2 + px + q)^2.$$
$$a = \pm 2, p = \mp 4, \ q = \pm 1.$$

Să se rezolve ecuaţia

$$2x^4 - 15x^3 + 42x^2 - 52x + 24 = 0,$$

ştiind că are o rădăcină triplă.

R. $x = 2$; $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{15}{2}$, $x_4 = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2}$.

5. Să se rezolve ecuaţia

$$x^5 - 5a^2x^3 + 5bx + c = 0,$$

ştiind că are două rădăcini duble.

R. Se va scrie că polinomul şi derivata au un divizor de gradul al doilea. Rădăcinile duble sunt rădăcini simple ale ecuaţiei

$$2x^2(2b - 3a^4) + cx + 2a^2b = 0.$$

Anulând identic restul de gradul întâi, se găseşte

$$4b(2b - 3a^4)(4b - 5a^4) = a^2c^2 = 0, \qquad c[(2b - 3a^4)^2 - a^4b] = 0.$$

Alt procedeu, se identifică cu

$$(x^3 + px + q)^2(x - u).$$

$$p = 0, \; q = -\frac{5a^2}{2}, \; 4b = 5a^4, \; c = 0, \; u = 0.$$

$$p = \pm a, \; q = -a^2, \; b = a^4, \; c = \pm 2a^5, \; u = \pm 2a.$$

6. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

ştiind că admite o rădăcină triplă.

R. $x = -\frac{3b}{4a}$, $8a^2 + 27b^2 = 0$, $\quad 32ac - 9b^2 = 0$; $\quad x_4 = \frac{9b}{4a}$.

7. Să se rezolve ecuaţiile

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

ştiind că au o rădăcină dublă comună.

Caz particular $a = 0$, $b = -\alpha^2$, $c = 2\beta^3$; $a' = 1$, $b = -\alpha$.

R. Se scrie că fiecare ecuaţie în parte are o rădăcină dublă, care trebue să fie aceeaşi pentru amândouă. Se scrie că f'_x şi f'_y admit un divizor comun ca la Nr. 75.

$$(9c - ab)^2 - 4(3b - a^2)(3ac - b^2) = 0, \quad (9c' - a'b')^2 - 4(3b' - a'^2)(2a'c' - b^2) = 0$$

$$\frac{9c - ab}{a^2 - 3b} = \frac{9c' - a'b'}{a'^2 - 3b'}.$$

In cazul particular, $\alpha = \beta = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = -\frac{2}{27}$, $b' = \frac{1}{3}$, $c' = \frac{1}{27}$

şi rădăcina dublă este $-\frac{1}{3}$,

$\alpha = -\beta = 1$, $b = -3$, $c = -2$, $b' = -1$, $c' = -1$, răd. dublă este -1.

8. Să se rezolve ecuaţia

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 - 4(a-1)x + 4a = 0,$$

ştiind că admite o rădăcină dublă independentă de a.

R. Ecuaţia se poate scrie

$$x(x^3 - 3x^2 + 4) + a(x^2 - 4x + 4) = 0,$$
$$x(x^3 - 3x^2 + 4) + a(x-2)^2 = 0.$$

Se caută rădăcina dublă a ecuaţiei $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. Se găseşte $x = 2$. Celelalte rădăcini se obţin scriind suma şi produsul rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = 0$.

9. Să se arate că dacă ecuaţiile

$$x^4 + px^2 + qx + 1 = 0,$$
$$x^4 + p'x^2 + q'x + 1 = 0$$

au o rădăcină dublă comună, ele au toate rădăcinile comune.

R. Rădăcinile comune sunt date de

$$[(p - p')x + q - q']\,x = 0.$$

$x = 0$ neputând fi rădăcină comună, ecuaţiile nu pot avea decât o rădăcină simplă comună, afară de cazul $p = p'$, $q = q'$, când le are pe toate.

10. Să se rezolve ecuaţia

$$x^5 + 10ax^3 + 5bx + c = 0,$$

ştiind că admite o rădăcină triplă diferită de zero.

R. $x = \pm\sqrt{-3a}$, $b = 9a^2$, $c^2 + 1728a^5 = 0$.

11. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + x^3 + px + q = 0,$$

ştiind că admite o rădăcină triplă.

R. $$x = -\frac{1}{2},\ p = -\frac{1}{4},\ q = -\frac{1}{16}.$$

12. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 2x^3 + ax - 1 = 0,$$

ştiind că admite o rădăcină triplă.

R. $a = 2$; $(x-1)^3(x+1) = 0$.

13. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + b - \frac{1}{4} = 0,$$

ştiind că admite o rădăcină dublă de patru ori mai mică decât cea simplă.

R. Se identifică cu $(x-u)^2(x-4u)$.

$$2a^3 - 3a^2 + 1 = 0;\quad a = 1,\quad b = \frac{3}{4},\quad u = -\frac{1}{2}.$$

14. Să se rezolve ecuaţia

$$f(x)=x^4+4ax^3+6bx^2+4cx+d=0,$$

ştiind că are o rădăcină comună cu derivata a doua, $f''(x)=0$, pentru care această rădăcină este dublă, iar inversele celorlalte trei rădăcini formează o progresie aritmetică.

R. $b=a^2$, $d=4ac-3a^4$; $x_1=-a$. Pentru a găsi celelalte rădăcini, se divide cu $x+a$ şi se scrie

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_2}.$$

$$6a^6-9a^3c+4c^2=0,\ c=a^3,\ x_2=x_3=x_4=-a;\ 4c=5a^3,\ x_2=-2a,$$
$$x_3=\frac{1}{2}a(-1\pm i\sqrt{3}).$$

78. Rezolvarea unei ecuaţii cu rădăcini multiple. Fie $f(x)=0$, ecuaţia care are rădăcini simple, duble, triple şi cuadruple; aşa că avem

$$f(x)=(x-a)(x-a')(x-b)^2(x-b')^2(x-c)^3(x-d)^4(x-d')^4.$$

Insemnând cu

$$X_1=(x-a)(x-a'),\quad X_2=(x-b)(x-b'),$$
$$X_3=(x-c),\quad X_4=(x-d)(x-d'),$$

avem

$$f(x)=X_1X_2^2X_3^3X_4^4,$$

polinoamele X_1, X_2, X_3, X_4 au numai rădăcini simple. Vrem să arătăm că aceste polinoame se pot obţine numai prin împărţiri.

Prin împărţiri succesive, se poate găsi cel mai mare comun divizor D, dintre f şi f'; f' va conţine factorii dubli ca simpli, factorii tripli ca dubli şi nu va mai conţine rădăcinile simple ale lui $f(x)$.

In adevăr, fie exemplul simplu

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2(x-c)^3.$$

Luând derivata acestui produs, avem

$$f'(x)=(x-b)^2(x-c)^3+2(x-a)(x-b)(x-c)^3$$
$$+3(x-a)(x-b)^2(x-c)^2,$$
$$f'(x)=(x-b)(x-c)^2[(x-b)(x-c)+2(x-a)(x-c)$$
$$+3(x-a)(x-b)].$$

Deci $f'(x)$ conţine factorul simplu $x-b$ şi factorul dublu $(x-c)^2$, care în $f(x)$ erau respectiv factori dublu şi triplu.

Insă, pentru a găsi cel mai mare comun divizor între două polinoame f şi f', descompuse în factori primi, vom lua factorii comuni

$$(x-b)\,(x-b')\ldots=X_2,$$

$$(x-c)^2\,(x-c')^2\ldots=X_3^2,\ldots,$$

cu exponenţii cei mai mici.

Deci, cel mai mare divizor comun D dintre f şi f', este

$$D=X_2\,X_3^2\,X_4^3.$$

De asemenea, fie D_1 cel mai mare comun divizor între D şi derivata sa D'; vom avea

$$D_1=X_3\,X_4^2.$$

Fie apoi D_2 cel mai mare comun divizor între D_1 şi derivata D'_1; găsim

$$D_2=X_4.$$

Avem tabloul

$$f(x)=X_1\,X_2^2\,X_3^3\,X_4^4,$$
$$D=X_2\,X_3^2\,X_4^3,$$
$$D_1=X_3\,X_4^2,$$
$$D_2=X_4.$$

Să dividem $f(x)$ cu D, D cu D_1, D_1 cu D_2; fie Q, Q_1, Q_2 câturile. Avem

$$Q=X_1\,X_2\,X_3\,X_4,\quad Q_1=X_2\,X_3\,X_4,\quad Q_2=X_3\,X_4,\quad D_2=X_4.$$

Impărţind Q cu Q_1, Q_1 cu Q_2, Q_2 cu D_2, obţinem

$$\frac{Q}{Q_1}=X_1,\quad \frac{Q_1}{Q_2}=X_2,\quad \frac{Q_2}{D_2}=X_3,\quad D_2=X_4.$$

Deci, rezolvarea lui $f(x)=0$, când are rădăcini multiple, se reduce la rezolvarea altor ecuaţii, $X_1=0$, $X_2=0,\ldots$, de grade mai mici, având rădăcinile simple.

Polinoamele X_1, X_2, $X_3,\ldots$ se obţin, după cum se vede, numai prin împărţiri.

Exemplu.

$$f(x)=x^7-2x^5-x^4+x^3+2x^2-1=0.$$

$$D=x^3-x^2-x+1,\qquad D_1=x-1.$$

D_1 fiind prim cu derivata sa, ecuaţia $f(x)=0$ n'are rădăcini de grad de multiplicitate superior lui 3; deci $D_1=0$ ne dă rădăcina triplă $x=1$.

Apoi

$$\frac{f(x)}{D} = Q = x^4 + x^3 - x - 1,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = x^2 - 1, \qquad D_1 = x - 1,$$

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1 = x^2 + x + 1,$$

$$\frac{Q_1}{D_1} = X_2 = x + 1, \qquad D_1 = X_3.$$

Deci

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x + 1)^2 (x - 1)^3.$$

79. **Exerciţii.** 1. Să se aplice teoria rădăcinilor egale, ecuaţii

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0.$$

R. $$f(x) = (x - 2)^2 (x + 1)^4.$$

2. Să se determine un polinom $f(x)$ de gradul al VII-lea, astfel ca $f(x) + 1$ să se dividă cu $(x - 1)^4$ şi $f(x) - 1$ cu $(x + 1)^4$.

R. $f'(x)$ are două rădăcini triple $x = 1$ şi $x = -1$.

$f'_x = a(x - 1)^3 (x + 1)^3 = a(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)$, $a = \text{const.}$; $f(x)$ este funcţia primitivă a lui $f'(x)$,

$$f(x) = a\left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} - x\right) + b, \quad b = \text{const.}$$

De oarece

$$f(1) + 1 = 0, \quad f(-1) - 1 = 0; \quad b = 0, \quad a = \frac{35}{16}.$$

3. Să se descompue în factori polinomul

$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3$$

ştiind că are factori multipli.

R. $$(x - 1)^3 (x^2 + x + 3).$$

Proprietăţile ecuaţiilor cu coeficienţii reali.

80. *Dacă $f(x)$ este un polinom cu coeficienţi reali, a şi b două numere reale, aşa că $f(a)$ şi $f(b)$ să fie de semne contrare, ecuaţia $f(x) = 0$ are o rădăcină sau un număr nepereche de rădăcini reale cuprinse între a şi b; dacă $f(a)$ şi $f(b)$ sunt de acelaşi semn, $f(x) = 0$ are un număr pereche de rădăcini în intervalul (a, b) sau nici una.*

In adevăr, dacă x variază continuu dela $x = a$, până la $x = b$, $f(x)$, care este funcţie continuă, variază continuu dela valoarea $f(a)$ până la valoarea fie $f(b)$; $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Din cauza continuităţii, $f(x)$ nu-şi poate schimba semnul fără a trece prin valoarea zero. Construcţia curbei $y=f(x)$ (fig. 24) probează mai uşor cele spuse. La abscisele a şi b, corespund două puncte A şi B situate de o parte şi de alta a axei Ox. Curba prezentând între A şi B o trăsătură continuă, va tăia pe Ox într'un punct, sau într'un număr fără soţ de puncte; abscisa fiecăruia din aceste puncte făcând $f(x)=0$, este o rădăcină a ecuaţiei $f(x)=0$.

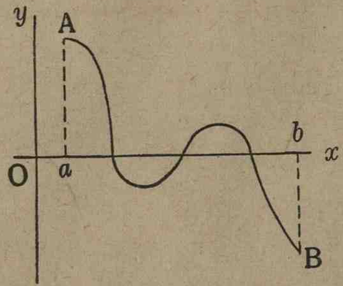

Fig. 24.

Când însă $f(a)$ şi $f(b)$ sunt de acelaşi semn (fig. 25) curba între A şi B având o trăsătură continuă, sau nu întâlneşte axa Ox, când curba e situată deasupra axea Ox, sau o întâlneşte într'un număr cu soţ de puncte şi deci putem să nu avem nici o rădăcină în intervalul (b, a), sau un număr pereche de rădăcini.

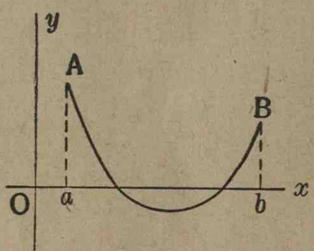

Fig. 25.

81. Aplicaţii. I. *Numerele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 fiind în ordinea de mărime descrescândă, ecuaţia*

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)+b^2(x-a_2)(x-a_4)(x-a_6)=0$$

are toate rădăcinile reale. In adevăr

$$f(a_1)=b^2(a_1-a_2)(a_1-a_4)(a_1-a_6)>0,$$
$$f(a_2)=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_3-a_5)<0.$$

Deci ecuaţia admite cel puţin o rădăcină între a_1 şi a_2.

Se arată la fel că există cel puţin câte o rădăcină reală în intervalele (a_3, a_4), (a_5, a_6). Cum ecuaţia n'are decât trei rădăcini, fiecare din intervalele (a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6), cuprinde câte o rădăcină reală.

II. *Ecuaţia*

$$F(x)\equiv\frac{A_1^2}{x-a_1}+\frac{A_2^2}{x-a_2}+\frac{A_3^2}{x-a_3}+\ldots\frac{A_n^2}{x-a_n}-M=0$$

are toate rădăcinile reale. In adevăr, fie

$$a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n.$$

Gonind numitorii, avem ecuaţia

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i^2(x-a_1)\ldots(x-a_i-1)(x-a_i+1)\ldots(x-a_n)-$$
$$-M(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Avem

$$f(a_1) = A_1^2 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) > 0,$$
$$f(a_2) = A_2^2 (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) < 0,$$
$$f(a_3) > 0, \ f(a_4) < 0; \dots$$

Deci, $f(x) = 0$ are cel puţin câte o rădăcină reală în fiecare din intervalele $(a_1, a_2), \dots (a_{n-1}, a_n)$; de asemenea, în intervalul $(-\infty, a_n)$ sau $(a_1, +\infty)$, $f(x)$ îşi schimbă semnul; prin urmare avem în total cel puţin n rădăcini reale, adică pe toate.

Observare. Putem arăta şi direct că ecuaţia $F(x) =$ are toate rădăcinile reale. In adevăr, funcţia $F(x)$ este continuă în intervalele

$$(-\infty, a_n - \varepsilon), \ (a_n + \varepsilon, a_{n-1} - \varepsilon), \ (a_{n-1} + \varepsilon, a_{n-2} - \varepsilon), \dots$$
$$(a_2 + \varepsilon, a_1 - \varepsilon), \ (a_1 + \varepsilon, \infty)$$

ε fiind un număr foarte mic şi pozitiv.

Pentru $x = \pm\infty$, $F(\pm\infty)$ tinde către $-M$, deci are semnul $-$. Pentru $x = a_n + \varepsilon$, de ex., $F(a_n + \varepsilon)$ are semnul fracţii

$$\frac{A_n^2}{x - a_n} = \frac{A_n^2}{a_n + \varepsilon - a_n} = \frac{A_n^2}{\varepsilon},$$

care este foarte mare, şi care tinde către $+\infty$, când ε tinde către zero. Deci $F(a_n + \varepsilon) > 0$. Tot aşa probăm că $F(a_{n-1} - \varepsilon) < 0$, căci va avea semnul fracţii

$$\frac{A_{n-1}^2}{x - a_{n-1}} = \frac{A_{n-1}^2}{-\varepsilon},$$

care când ε este foarte mic, are o valoare foarte mare şi negativă. Aşa dar

$$F(a_n + \varepsilon) > 0, \qquad F(a_{n-1} - \varepsilon) < 0;$$

prin urmare ecuaţia $F(x) = 0$, are cel puţin câte o rădăcină reală în fiecare din cele n intervale considerate, ultimul interval fiind $(a_1 + \varepsilon, \infty)$.

Ecuaţia $F(x) = 0$ fiind de gradul n, are numai câte o rădăcină în fiecare interval şi deci are toate rădăcinile reale.

82. *Dacă două numere a şi b cuprind între ele un număr nepereche de rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = 0$, $f(a)$ şi $f(b)$ sunt de semne contrare; dacă cuprind un număr cu soţ, $f(a)$ şi (b) sunt de acelaşi semn.*

Presupunem că intervalul (a, b) cuprinde p rădăcini

$$x_1, \ x_2, \dots x_p.$$

Avem

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p)\varphi(x),$$

$\varphi(x) = 0$ ne mai admiţând nici o rădăcină în intervalul (a, b).

Avem apoi

$$f(a) = (a - x_1)\,(a - x_2)\ldots(a - x_p)\,\varphi(a),$$
$$f(b) = (b - x_1)\,(b - x_2)\ldots(b - x_p)\,\varphi(b),$$
$$\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{a - x_1}{b - x_1} \cdot \frac{a - x_2}{b - x_2} \ldots \frac{a - x_p}{b - x_p} \cdot \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}.$$

Observăm că $\varphi(a)$ și $\varphi(b)$ sunt de același semn, căci altfel (Nr. 80), $\varphi(x) = 0$ ar mai admite o rădăcină între a și b, contra ipotezei.

Dar fiecare din câturile

$$\frac{a - x_i}{b - x_i},$$

este negativ, căci $a < x_i < b$.

Dacă p e fără soț, adică în intervalul (a, b) sunt un număr fără soț de rădăcini, avem un număr nepereche de câturi negative,

$$\frac{a - x_i}{b - x_i}.$$

și deci

$$\frac{f(a)}{f(b)} < 0,$$

adică $f(a)$ și $f(b)$ au semne contrare.

Când p e cu soț, având un număr pereche de câturi negative produsul lor e pozitiv, și deci $f(a)$ și $f(b)$ au același semn.

83. Proprietatea precedentă se aplică și când una sau mai multe rădăcini sunt multiple, socotind însă pe fiecare cu ordinul ei de multiplicitate. *Când x variind continuu, trece printr'o rădăcină a ecuații $f(x) = 0$, funcțiunea $f(x)$ își schimbă sau nu semnul, după cum gradul de multiplicitate al rădăcinii este nepereche sau pereche.*

In adevăr, fie a o rădăcină multiplă de ordinul p. Dacă h este un număr foarte mic, intervalul $(a - h, a + h)$ cuprinde p rădăcini egale cu a. Deci (Nr. 82), $f(a - h)$ și $f(a + h)$ au semne contrare, sau același semn, după cum p este fără soț sau cu soț.

Aplicație. *Să se studieze variația semnului polinomului*

$$f(x) = (2x - 3)\,(4x - 5)^2\,(x + 3)^3,$$

când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

Avem tabloul

x	$-\infty$		-3		$^5/_4$		$^3/_2$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

84. *Orice ecuație algebrică de grad fără soț admite cel puțin o rădăcină reală.* Să presupunem în ecuația de grad nepereche,

$$f(x) = A_0 x^{2p+1} + A_1 x^{2p} + \dots + A_{2p+1} = 0,$$

coeficientul primului termen $A_0 > 0$. Avem

$$f(x) = x^{2p+1} A_0 \left(1 + \frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{A_2}{A_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{A_{2p+1}}{A_0} \cdot \frac{1}{x^{2p+1}}\right).$$

Când x tinde către ∞, toți termenii din paranteză tind către zero, afară de 1 și deci când x este foarte mare, $f(x)$ are același semn ca primul său termen $A_0 x^{2p+1}$. Deci

$$f(-\infty) < 0, \qquad f(\infty) > 0.$$

Deci, între $-\infty$ și $+\infty$, $f(x)$ schimbându-și semnul, ecuația are cel puțin o rădăcină reală. Insă $f(0) = A_{2p+1}$; deci dacă $A_{2p+1} > 0$, rădăcina reală e cuprinsă între $-\infty$ și 0; dacă $A_{2p+1} < 0$, rădăcina este în intervalul $(0, +\infty)$.

Fie acum o ecuație de grad pereche

$$f(x) = A_0 x^{2p} + A_1 x^{2p-1} + \dots + A_{2p} = 0.$$

Dacă $A_0 > 0$, avem

$$f(-\infty) > 0, \quad f(0) = A_{2p}, \quad f(\infty) > 0.$$

Deci n'avem nici o rădăcină reală, sau avem un număr cu soț de rădăcini reale.

Dacă $A_{2p} < 0$, ecuația are un număr nepereche de rădăcini reale pozitive și un număr fără soț de rădăcini reale negative.

85. *Dacă o ecuație admite o rădăcină imaginară $a + bi$, admite și conjugata sa $a - bi$.* In adevăr, fie $f(x)$ un polinom cu coeficienți reali, $f(x)$ fiind o sumă de termeni de forma

$$M x^m = M(a + bi)^m = u + vi,$$

avem

$$f(a + bi) = A + Bi.$$

De oarece $a + bi$ este rădăcină, $f(a + bi) = 0$; deci

$$A + Bi = 0.$$

De unde $\qquad A = 0, \qquad B = 0.$

Schimbând semnul lui i, $M(a - bi)^m$ devine $u - vi$, pentru că M este real, iar $f(a - bi)$ devine $A - Bi$.

Insă, am văzut că $A=0$, $B=0$, deci

$$f(a-bi)=A-Bi=0,$$

ceeace probează că şi $a-bi$ este o rădăcină pentru ecuaţia $f(x)=0$, iar polinomul $f(x)$ se divide cu

$$(x-a-bi)\,(x-a+bi)=(x-a)^2+b^2.$$

Aşa dar, *rădăcinile imaginare ale unei ecuaţii sunt în număr cu soţ.*

Dacă $f(x)$ are coeficienţi imaginari, cum ar fi

$$f(x)=x^2-(3+i)x+3i,$$

teorema nu mai subsistă în general.

In adevăr

$$f(i)=i^2-(3+i)i+3i=-1+1+(3-3)i=0.$$

pe când

$$f(-i)=i^2+i(3+i)+3i=-2+6i\neq 0.$$

Aplicaţie. *Dacă o ecuaţie de gradul m are $m-1$ rădăcini reale, a m-a rădăcină trebue să fie reală.*

86. *Dacă o ecuaţie algebrică cu coeficienţi raţionali admite rădăcina iraţională $a+\sqrt{b}$, admite şi pe conjugata sa $a-\sqrt{b}$, în care a şi b sunt numere raţionale, iar b nu e patratul unui număr raţional.* In adevăr

$$f(a+\sqrt{b})=A_0(a+\sqrt{b})^m+\ldots A_m.$$

Insă puterile cu soţ ale lui $\sqrt{b}$ ne dau cantităţi raţionale, iar cele fără soţ ne dau $M\sqrt{b}$, M fiind raţional.

Deci

$$f(a+\sqrt{b})=A+B\sqrt{b}.$$

Fiindcă $a+\sqrt{b}$ e rădăcină, $A+B\sqrt{b}=0$; de unde $A=0$, $B=0$, căci altfel vom avea

$$\sqrt{b}=-\frac{A}{B},$$

adică un număr iraţional ar fi egal cu câtul a două numere raţionale A şi B, ceeace nu se poate.

Schimbând semnul radicalului, $\sqrt{b}$, avem

$$f(a-\sqrt{b})=A-B\sqrt{b}=0,$$

căci am avut A=0, B=0, deci şi $a-\sqrt{b}$ este o rădăcină pentru $f(x)=0$.

Aşa dar, *numărul rădăcinilor iraţionale ale unei ecuaţii cu coeficienţi raţionali e cu soţ.*

Mai reese de aci că dacă o ecuaţie $f(x)=0$, are rădăcina $a+\sqrt{b}$, polinomul $f(x)$ se divide cu
$(x-a-\sqrt{b})(x-a+\sqrt{b})=(x-a)^2-b.$

87. **Aplicaţii.** I. *Să se arate că polinomul*

$$f(x)=(1+x)^{6m+1}-(1+x)^{6p+2}-1.$$

e divizibil cu x^2+x+1. Se va arăta că $f(x)=0$ are rădăcinile ecuaţiei $x^2+x+1=0$.

Insă, rădăcinile ultimei ecuaţii sunt rădăcinile cubice complexe ale unităţii

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

între care avem relaţiile

$$1+\alpha+\alpha^2=0, \quad \alpha^3=1.$$

Deci $1+x=1+\alpha=-\alpha^2$, de unde înlocuind în $f(x)$ găsim

$$-\alpha^{12m+2}-\alpha^{12p+4}-1=-\alpha^2-\alpha-1=0.$$

Aşa dar α este o rădăcină a ecuaţiei $f(x)=0$, deci şi conjugata ei α^2 va fi tot o rădăcină a ecuaţiei date, iar polinomul $f(x)$ se divide cu x^2+x+1.

II. *Să se rezolve ecuaţia*

$$f(x)=x^4+x^3-25x^2+41x+66=0.$$

ştiind că admite rădăcina $3+i\sqrt{2}$. Ecuaţia admite şi pe $3-i\sqrt{2}$. Calculând suma şi produsul rădăcinilor ecuaţiei date, avem

$$x_1+x_2+3+i\sqrt{2}+3-i\sqrt{2}=-1,$$
$$x_1 x_2 (3+i\sqrt{2})(3-i\sqrt{2})=66;$$

de unde

$$x_1+x_2=-7, \quad x_1 x_2=6; \quad x^2+7x+6=0.$$

88. **Exerciţii.** 1. Să se arate că $(\cos a+x\sin a)^m-(\cos ma+x\sin ma)$ se divide cu x^2+1.

R. Se va înlocui x cu i, rădăcină a ecuaţiei cu x^2+1 şi se va aplica formula lui *Moivre*.

2. Polinomul $(x+1)^{6m+1}-x^{6m+1}-1$ e divizibil cu x^2+x+1.

R. Se va arăta că ecuaţia obţinută, egalând polinomul cu zero, are ca rădăcini pe cele cubice complexe ale unităţii.

3. Să se arate direct, fără a rezolva, că ecuaţia

$$\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}-c=0$$

are rădăcinile reale

R. Se vor goni numitorii, se va substitui p și q. Alt procedeu, considerând intervalele $(\infty, p-\varepsilon)$, $(p+\varepsilon, q-\varepsilon)$, $(q+\varepsilon, \infty)$;

$$f(p+\varepsilon)>0,\ f(q-\varepsilon)<0, \text{ etc.}$$

4. a și b fiind pozitivi, ecuația

$$f(x)=x^3+(a+b)x^2-(a^2+ab+b^2)x-(a+b)(a^2+b^2)=0$$

are rădăcinile reale.

R. Se va înlocui x cu $-\infty$, $-(a+b)$, 0 și $+\infty$.

5. Să se rezolve ecuația

$$x^4-7x^2+2x+2=0,$$

știind că admite rădăcina $1+\sqrt{2}$.

R. $\quad 1-\sqrt{2};\quad x_1+x_2+2=0,\quad x_1x_2=-2.$

6. Să se rezolve ecuația

$$x^6-x^5-8x^4+2x^3+21x^2-9x-54=0,$$

știind că admite rădăcina $i+\sqrt{2}$.

R. $\quad i+\sqrt{2},\ i-\sqrt{2},\ -i+\sqrt{2},\ -i-\sqrt{2},$

$$x_5+x_6=1,\ x_5x_6=-6;\ x^2-x-6=0.$$

7. Să se determine λ și μ și să se rezolve ecuația

$$x^4-4x^3-4x^2+4\lambda x+4\mu=0,$$

știind că admite o rădăcină dublă de forma $\alpha+\beta\sqrt{5}$, α și β fiind două numere raționale.

R. Se identifică plinomul cu $[(x-\alpha)^2-5\beta^2]^2$.

Se găsește

$$\alpha=1,\ \beta=\pm1,\ \lambda=4,\ \mu=4.$$

8. Să se rezolve ecuația $x^4-4x^3+4x^2+a=0$, știind că admite rădăcina $x=1+i\sqrt{11}$.

R. Se divide cu $x^2-2x+12$; restul $a+144=0$.

Sau cu relațiile $\quad x_3+x_4=2,\ x_3x_4=\dfrac{a}{12},$

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=4;\ a=-144.$$

9. Să se rezolve ecuația

$$x^6+3x^5-12x^4-30x^3-21x^2+3x-2=0.$$

știind că admite rădăcina $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

R. $\quad x_5+x_6=-3,\quad x_5x_6=-2.$

10. Să se rezolve ecuația

$$x^3+px+q=0.$$

ştiind că rădăcinile ei, reprezentate în plan, în modul obicinuit, sunt vârfurile unui triunghiu echilateral.

R. Rădăcinele sunt a (reală), $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ (imaginare). Vârfurile triunghiului sunt $A(a, 0)$, pe axa Ox, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, -\beta)$, pe o perpendiculară pe Ox în punctul $D(\alpha, 0)$. Scriem că $BD = AD\,\mathrm{tg}\,30^0$. Din relaţii, deducem

$$a+2\alpha=0,\ 2a\alpha+\alpha^2+\beta^2=p,$$

$$(\alpha^2+\beta^2)a=-q;\ \beta\sqrt{3}=\alpha-a.$$

De unde

$$a=-2\alpha,\ \beta=\alpha\sqrt{3},\ p=0,\ q=8\alpha^3.$$

$$x^3+8\alpha^3\equiv(x+2\alpha)(x-2\alpha x+4\alpha^2).$$

Separarea rădăcinilor unei ecuaţii.

89. Am văzut, în capitolul precedent că, dacă ecuaţia are o formă particulară, putem găsi intervalele în care se află cuprinse rădăcinile cu metoda substituirii de cantităţi potrivit alese.

Avem însă ecuaţii scrise sub formă generală, cărora vrem să le separăm rădăcinile reale şi să le găsim numărul.

Aceasta o vom putea afla uşor cu ajutorul teoremei lui *Rolle*.

Pentru mai multă uşurinţă vom presupune că ecuaţia n'are decât rădăcini *simple*.

90. **Teorema lui Rolle.** *a şi b fiind două numere reale şi $f(x)$ un polinom în x, dacă $f(a)=0$ şi $f(b)=0$, atunci derivata $f'(x)$ a lui $f(x)$ se anulează pentru o valoare c cuprinsă în intervalul (a, b); sau, între două rădăcini ale funcţiunii este cel puţin o rădăcină a derivatei.*

In adevăr, $f(x)$ fiind o funcţie continuă şi x variind dela a la b, $f(x)$ creşte sau descreşte dela valoarea zero până la o valoare oarecare şi apoi începe să descrească sau să crească şi când x ajunge la b, $f(x)$ ajunge iar la zero. Deci în intervalul (a, b), $f(x)$ are cel puţin un maximum sau un minimum, şi pentru a preciza, să presupunem că pentru $x=c$, $f(c)$ este un maximum.

Să formăm expresiile

$$A=\frac{f(c-h)-f(c)}{-h},\quad B=\frac{f(c+h)-f(c)}{h},\quad h>0.$$

Avem

$$f(c)>f(c-h),\quad f(c)>f(c+h),$$

de unde

$$A>0,\quad B<0,$$

deci $AB < 0$, ori cât de mic ar fi h. Trecând la limită

$$\lim_{h=0} A = f'(c), \qquad \lim_{h=0} B = f'(c).$$

Umează deci că $f'(c)=0$, adică derivata funcţiei $f(x)$ se anulează pentru o valoare cuprinsă în intervalul (a, b), căci $f'(c)$ este limita comună a unui număr pozitiv şi a altuia negativ.

Deci, între două rădăcini consecutive ale ecuaţiei $f(x)=0$, se află cel puţin o rădăcină a derivatei $f'(x)=0$.

91. Rădăcinile derivatei separă pe ale ecuaţii. Metodă pentru separarea rădăcinilor unei ecuaţii. Să presupunem că m şi n sunt două rădăcini consecutive ale derivatei $f'(x)=0$, adică pentru m corespunde, de ex., pentru funcţia $f(x)$ un maximum $f(m)=mM$ şi pentru n un minimum $f(n)=nN$ (Fig. 26 şi 27).

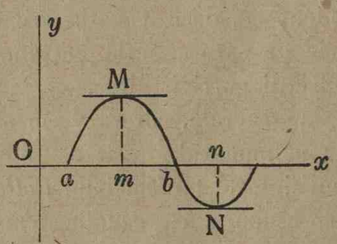

Fig. 26.

Dacă $f(m)$ şi $f(n)$ sunt de semne contrare (Fig. 26), atunci curba $y=f(x)$ tae axa Ox într'un punct corespunzător la o rădăcină b (Fig. 26) a ecuaţii $f(x)=0$. Deci, ecuaţia $f(x)=0$ are numai o rădăcină b cuprinsă între rădăcinile m şi n ale derivatei $f'(x)=0$.

Dacă $f(m)$ şi $f(n)$ sunt de acelaşi semn, de ex., ambele pozitive (fig. 27), atunci curba $y=f(x)$ nu taie axa Ox între m şi n, deci ecuaţia $f(x)=0$ n'are rădăcină între rădăcinile m şi n ale derivatei.

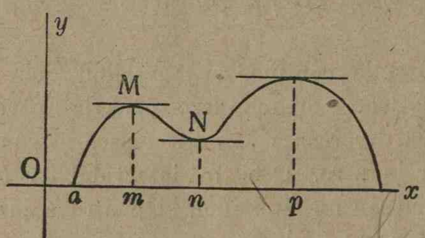

Fig. 27.

Urmează, de aci că intervalele în care e posibil să se afle rădăcinile ecuaţiei, sunt formate de rădăcinile derivatei, adică *rădăcinile ecuaţiei sunt separate de rădăcinile derivatei.*

Deci, pentru a separa rădăcinile unei ecuaţii $f(x)=0$, vom lua derivata $f'(x)$, vom rezolva ecuaţia $f'(x)=0$ şi după ce am găsit rădăcinile derivatei, vom vedea dacă în intervalele determinate de ele sunt *rădăcini reale* ale ecuaţiei, adică dacă rezultatele substituirii în $f(x)$ a două rădăcini consecutive ale derivatei au semne contrare.

Aşa dar, *pentru a vedea câte rădăcini reale are o ecuaţie* $f(x)=0$, *de gradul* m, *vom afla rădăcinile*

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1},$$

ale derivatei, vom face şirul zis al lui Rolle

$$f(-\infty) \quad f(a_1) \quad f(a_2) \ldots f(a_{m-1}) \quad f(\infty)$$

şi vom determina semnele acestor numere. Dacă doi termeni consecutivi au semne contrare, între valorile lui x corespunzătoare se àflă o rădăcină reală a ecuaţiei.

Când $f(a_i)=0$, atunci a_i anulează şi polinomul şi derivata, deci este o rădăcină multiplă a ecuaţiei $f(x)=0$.

92. Observări. I. Pentru calculul şirului lui *Rolle*, ne servim de următoarea observare. Dacă α este o rădăcină a derivatei, atunci $f'(\alpha)=0$. Considerând formula lui *Euler* pentru funcţia $f(x)$ de gradul m, făcută omogenă cu ajutorul variabilei y, avem

$$xf'_x(x, y)+yf'_y(x, y)=mf(x, y).$$

Inlocuind pe y cu 1, obţinem

$$xf'_x(x)+f'_y(x, 1)=mf(x).$$

Substituind în locul lui x pe α, avem $f'(\alpha)=0$, şi deci

$$f'_y(\alpha, 1)=mf(\alpha),$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{m}f'_y(\alpha, 1).$$

Deci, pentru a calcula termenii şirului lui *Rolle*, vom înlocui în derivata în raport cu y a funcţiei $f(x)$ făcută omogenă, pe x cu acea rădăcină a derivatei, iar pe y cu 1.

Se mai poate calcula $f(\alpha)$, făcând împărţirea polinomului $f(x)$ prin derivata sa $f'(x)$, şi apoi înlocuind în restul aflat pe x cu α.

II. Când pentru o ecuaţie $f(x)=0$, voim să aflăm numai numărul rădăcinilor reale, şi dacă $f'(x)=0$ are o rădăcină multiplă de ordin cu soţ de multiplicitate, nu mai este nevoe să introducem şi această rădăcină în şirul lui Rolle.

In adevăr, fie α, β, γ, trei rădăcini consecutive ale derivatei dintre care β este multiplă de ordin pereche de multiplicitate. Dacă $f(\alpha)$ şi $f(\gamma)$ sunt de semne contrare, este evident că oricare ar fi semnul lui $f(\beta)$, tot o singură rădăcină reală are $f(x)=0$ în intervalul (α, γ) şi deci nu mai e nevoe a introduce pe $f(\beta)$, în şirul lui Rolle.

Dacă $f(\alpha)$ şi $f(\gamma)$ au acelaşi semn, $f(\beta)$ nu poate avea semn contrar cu $f(\alpha)$, căci atunci $f(x)$ ar avea câte o rădăcină reală, a şi b, în fiecare dintre intervalele (α, β) şi (β, γ). Ar urma deci că între rădăcinile a şi b ale lui $f(x)=0$, să fie un număr fără soţ de rădăcini pentru $f'(x)=0$, ceeace este contra ipotezei, căci în acest interval (a, b), $f'(x)=0$ are un număr cu soţ de rădăcini reale, toate egale cu β. Deci $f(\beta)$, având acelaşi semn cu $f(\alpha)$ şi $f(\gamma)$ este de prisos a introduce în şirul lui Rolle, pe $f(\beta)$.

93. Aplicaţii. I. *Dacă o ecuaţie $f(x)=0$ are toate rădăcinile reale*, între două rădăcini ale ei fiind cel puţin câte o rădăcină a derivatei, *şi ecuaţia $f'(x)=0$ va avea toate rădăcinile reale.*

II. *Să se afle numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei*

$$f(x)=3x^4-20x^3+36x^2-7=0$$

şi să se separe rădăcinile.

Avem

$$f'(x)=12x(x^2-5x+6).$$

Rădăcinile derivatei fiind 0, 2, 3, şirul lui *Rolle* este

$f(-\infty)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(+\infty)$
$+$	-7	25	20	$+$

Şirul prezentând numai două variaţii ale semnului, ecuaţia are numai două rădăcini reale cuprinse între $-\infty$ şi 0, 0 şi 2.

Observare. Avantajul teoremei lui *Rolle* este că ne indică ce numere trebuesc substituite în $f(x)$, între care e posibil să existe o rădăcină reală a ecuaţii, pe când, în metoda substituţiei din capitolul precedent, făceam înlocuiri cu numere alese arbitrar.

III. *Care e condiţia ca ecuaţia*

$$x^3+px+q=0$$

să aibă toate rădăcinile reale. Rădăcinile derivatei $3x^2+p=0$ fiind $\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$, se impune condiţia $p<0$, fără de care derivata ar avea rădăcini imaginare.

Şirul lui *Rolle* este

$f(-\infty)$	$f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$	$f\left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$	$f(+\infty)$
$-$	$q-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	$q+\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	$+$

şi va trebui să prezinte numai variaţii ale semnului. Deci

(1) $\quad q-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}>0. \qquad$ (2) $\quad q+\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}<0.$

Vom distinge două cazuri. 1⁰ Dacă $q > 0$, (1) este verificată ca fiind o sumă de cantităţi pozitive; din (2) deducem

$$q < -\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}, \quad q^2 < \frac{4p^2}{9}\left(-\frac{p}{3}\right), \quad 27\,q^2 + 4\,p^3 < 0.$$

2⁰ Dacă $q < 0$, (2) este verificată; din (1) deducem

$$q > \frac{2\,p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}.$$

Ambele părţi ale acestei inegalităţi fiind negative, ridicând la pătrat, se schimbă sensul. Deci

$$q^2 < \frac{4\,p^2}{9}\left(-\frac{p}{3}\right), \qquad 27\,q^2 + 4\,p^3 < 0.$$

Aşa dar, condiţia ca ecuaţia dată să aibă toate rădăcinile reale este

$$4\,p^3 + 27,\ q^2 < 0, \quad p < 0$$

iar în caz când are o rădăcină dublă egală cu $\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$, trebue ca

$$4\,p^3 + 27\ \ q^2 = 0.$$

Dacă derivata are rădăcini imaginare, adică dacă $p > 0$, nu putem avea

$$4\,p^3 + 27\,q^2 < 0,$$

căci p fiind pozitiv, prima parte a inegalităţii de mai sus este o sumă de numere pozitive.

Neputând avea relaţia

$$4\,p^3 + 27\ q^2 < 0,$$

în cazul $p > 0$, ecuaţia $x^3 + px + q = 0$, *nu poate avea toate rădăcinile reale,* ci numai una reală, ceeace ştiam, căci ecuaţia având grad nepereche, trebue să aibă totdeauna o rădăcină reală.

IV. *Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei*

$$f(x) = x^3 - 5\,x^2 + 3\,x + \alpha = 0,$$

când α *variază dela* $-\infty$ *la* $+\infty$.

Şirul lui *Rolle* este

$f(-\infty)$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$f(3)$	$f(+\infty)$
$-$	$\alpha + \frac{13}{27}$	$\alpha - 9$	$+$

Numărul rădăcinilor reale va depinde de semnul expresiunilor $\alpha + \frac{13}{37}$, $\alpha - 9$, care îşi schimbă semnul când $\alpha = -\frac{13}{27}$, $\alpha = 9$.

Deci, valorile principale ale lui α sunt acelea care anulează aceste expresii. Tabloul discuției este următorul

α	$f(-\infty)$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$f(3)$	$f(+\infty)$	Natura rădăcinilor
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$+$	una reală; două răd. imag.
$-\frac{13}{27}$	$-$	0	$-$	$+$	trei răd, reale; $\frac{1}{3}$ e răd. dublă.
	$-$	$+$	$-$	$+$	trei răd. reale diferite.
9	$-$	$+$	0	$+$	trei răd. reale; 3 e răd. dublă.
$+\infty$	$-$	$+$	$+$	$+$	una reală; două răd. imag.

V. *Se dă ecuația*

$$f(x) = 6x^4 - 8ax^3 - 3a^2x^2 + 6a^3x - a^2b = 0,$$

si se cere să se separe rădăcinile. Să se rezolve în cazul când are rădăcini multiple. Presupunând a și b coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor.

Avem $f'(x) = 6(4x^3 - 4ax^2 - a^2x + a^3) = 0$, cu rădăcinile

$$a,\ \frac{1}{2}a,\ -\frac{1}{2}a.$$

Când $a > 0$, șirul lui *Rolle* este

$f(-\infty)$	$f\left(-\frac{1}{2}a\right)$	$f\left(\frac{1}{2}a\right)$	$f(a)$	$f(+\infty)$
$+$	$-\left(\frac{19}{8}a^2+b\right)a^2$	$\left(\frac{13}{8}a^2-b\right)a^2$	$a^2(a^2-b)$	$+$

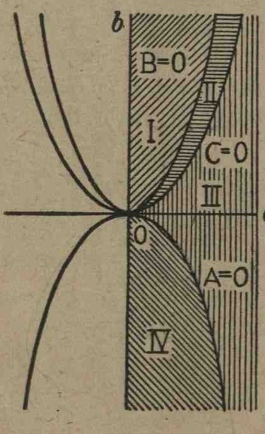

Fig. 28.

Să vedem semnele expresiilor

$$A = \frac{19}{3}a^2 + b,\quad B = \frac{13}{8}a^2 - b,\quad C = a^2 - b.$$

Insă $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ reprezintă în raport cu axele perpendiculare $(Oa, O)b$ (Fig. 28) parabole și se construesc ușor. $A = 0$ reprezintă o parabolă tangentă în origine la axa Oa, cu concavitatea în jos. Trebuind a fi de forma $a^2 - 2pb = 0$, are parametrul $p = -\frac{4}{19}$; $B = 0$ este o parabolă tangentă în origine axei Oa și $p = \frac{4}{13}$; $C = 0$ reprezintă o parabolă tangentă în origine la axa Oa; $p = \frac{1}{2}$ (Fig. 28); $C = 0$ este în afară de curba $B = 0$, căci la același $a = 1$, $b = \frac{13}{8}$ pentru $B = 0$ și $b = -1$ pentru $C = 0$; deci B este în interiorul lui C.

Fiecare din aceste curbe desparte planul în două regiuni, astfel că în interior avem un semn și în exterior semn contrar.

Așa, pentru $A = 0$, în interior avem semnul $-$, căci făcând $a = 0$, $b = -1$. $A < 0$. Tot așa găsim pentru $B = 0$, $C = 0$, semnul $-$ în interior și $+$ în exterior.

S'au format patru regiuni (Fig. 28), I, II, III, IV. In I, $A > 0$, $B < 0$, $C < 0$, şirul are două variaţii, avem deci două rădăcini reale.

Se obţine astfel tabloul următor

Regiuni	$f(-\infty)$	$f\left(-\frac{1}{2}a\right)$	$f\left(\frac{1}{2}a\right)$	$f(a)$	$f(\infty)$	
	$+$	$-\left(\frac{19}{8}a^2+b\right)a^2$	$\left(\frac{13}{8}a^2-b\right)a^2$	$a^2(a^2-b)$	$+$	Rădăcini:
I	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	Două reale
II	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	Patru reale
III	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	Două reale
IV	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	Nici una reală

Dealungul curbei $A=0$, avem rădăcina dublă $-\frac{1}{2}a$; dealungul lui $B=0$, rădăcina dublă $\frac{1}{2}a$; iar pentru curba $C=0$, rădăcina dublă a.

Tot aşa se studiază cazul când $a < 0$.

94. Metodă geometrică pentru separarea şi discuţia rădăcinilor unei ecuaţii. Se rezolvă ecuaţia $f(x)=0$ în raport cu parametrul variabil, dacă există, sau în raport cu unul din coeficienţii ecuaţiei, ales potivit, $k=P(x)$. Construim curba $y=P(x)$ şi vedem în câte puncte o taie o paralelă cu Ox, şi în special $y=k$. Abscisele acestor puncte corespund rădăcinilor ecuaţiei $f(x)=0$ şi astfel se poate găsi între ce numere sunt cuprinse rădăcinile, uneori mai uşor şi mai bine decât cu teorema lui Rolle, căci pe lângă rădăcinile derivatei $P'(x)$ mai intră şi valorile lui x pentru care $P(x)=0$. Pentru a vedea numărul rădăcinilor cuprinse între a şi b, considerăm paralelele la Ox cu ordonatele cuprinse între $k_a=P(a)$ şi $k_b=P(b)$.

Exemple. 1. *Să se discute ecuaţia* $x^3-x^2-x+\lambda=0$ (Examen Capacitate, 1943). Rezolvând în raport cu λ, $\lambda=-x^3+x^2+x$, curba $y=-x^3+x^2+x$ taie axa Ox (fig. 29) în punctele A, O, C, de abscise date de $-x^3+x^2+x=0$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 0, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Derivata este $y'=-3x^2+2x+1=-3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		∞
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

O paralelă la Ox sub D cu ordonata mai mică decât $-\frac{5}{27}$ taie curba într'un punct cu abscisa mai mare ca $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; deci pentru $\lambda < -\frac{5}{27}$ o rădă-

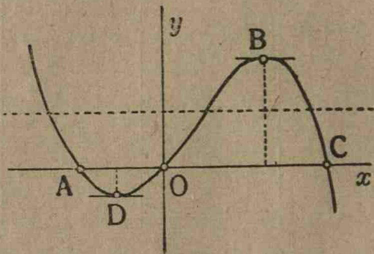

Fig. 29.

cină pozitivă mai mare ca $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; care cu teorema lui Rolle s'ar fi știut numai că este mai mare ca 1. O paralelă cu ordonata $-\frac{5}{27}$ o taie în două puncte confundate și altul; deci pentru $\lambda = -\frac{5}{27}$ o rădăcină dublă egală cu $-\frac{1}{3}$ și alta mai mare ca $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. O paralelă între D și Ox, cu ordonata între $-\frac{5}{27}$ și O, taie curba în trei puncte; deci $-\frac{5}{27} < \lambda < 0$, trei rădăcini cuprinse în intervalele $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$. Când paralela este între Ox și B are ordonata între O și 1, taie curba în trei puncte; deci $0 < \lambda < 1$, trei rădăcini una mai mică decât $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ și altele în intervalele $(0, 1)$ $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Pentru $\lambda = 1$ o rădăcină dublă egală cu 1 și alta mai mică decât $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Când $\lambda > 1$, avem o rădăcină reală mai mică decât $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2. *Să se discute ecuația* $x^4 - l^2x^2 + 4b^3l - 12a^4 = 0$ *știind că* $x < l$. Punem $x^2 = u$, $l^2 = m$, $4b^3l - 12a^4 = -k$. Ecuația devine $K = u^2 - mu$. Construim curba $v = u^2 - mu$, $\left(u - \frac{m}{2}\right)^2 = v + \frac{m^2}{4}$, o parabolă (fig. 30) cu vârful $V\left(\frac{m}{2}, -\frac{m^2}{4}\right)$, care taie axa Ou în O și $N(m, 0)$. Trebuie să avem $x < l$, deci $u < m$.

Tăind curba cu paralelele $v = k$, cu ordonate $k > 0$, punctul de intersecție M are abscisa mai mare ca a lui N, avem $u > m$, deci nu corespunde soluție.

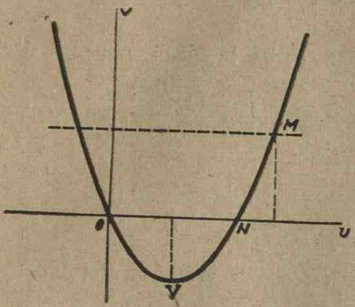

Fig. 30.

Trebue deci ca paralelele să fie cuprinse între V și axa O u, ordonata k a paralelelor să fie cuprinsă între aceea a lui V și zero,

$$-\frac{m^2}{4} \leqq k \leqq 0, \quad -\frac{l^2}{4} \leqq 12\,a^4 - 4\,b^3 l \leqq 0,$$

$$b^3 \geqq \frac{3a^4}{l}, \quad b^3 \leqq \frac{3\,a^4}{l} + \frac{l^3}{16},$$

$$\frac{3\,a^4}{l} \leqq b^3 \leqq \frac{3\,a^4}{l} + \frac{l^3}{16}.$$

3. *Să se discute ecuația*

$$-\,am^2 - (2 + m^2)\cos\theta - a\,(1 - m^2)\cos^2\theta + r\,(1 + m^2)\cos^3\theta = 0.$$

E destul să luăm $0 < \theta < \pi$. Insemnând $\cos\theta = t$, avem

(1) $$u_1 = \frac{a}{r}, \quad u_1 = t\,\frac{(1 + m^2)\,t^2 - (2 + m^2)}{(1 - m^2)\,t^2 + m^2},$$

Rădăcinile $t = \cos\theta$ trebue că fie cuprinse între -1 și $+1$. Limitele între care poate să varieze parametrul $\frac{a}{r}$ se obțin înlocuind în (1) pe t cu -1 și $+1$, avem $u_1\,(-1) = 1$, $u_1\,(1) = -1$. Să construim curba (fig. 31) $u = u_1\,(t)$. Avem

$$u = t\,\frac{(1 + m^2)\,t^2 - (2 + m^2)}{(1 - m^2)\,t^2 + m^2}, \quad u' = \frac{[(1 + m^2)\,t^2 - m^2]\,[(1 - m^2)\,t^2 - (2 + m^2)]}{[m^2 + (1 - m^2)\,t^2]^2}.$$

Cum $|t| = |\cos\theta| < 1$, rădăcina $\dfrac{2 + m^2}{1 - m^2}$ fiind mai mare ca 2, nu convine. Obținem tabloul și curba reprezentativă.

t	$\frac{du}{dt}$	u_1	Puncte
-1	$+$	1	A
		cr	
$-\frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$	0	$\frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}$	C
	$-$	des	
0		0	O
	$-$	des	
$\frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$	0	$-\frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}$	D
		cr	
1	$+$	-1	B

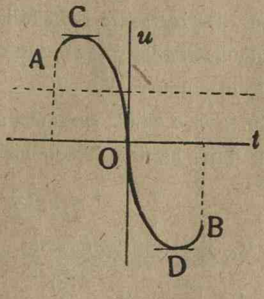

Fig. 31.

Se vede (fig. 31) că o paralelă la Ot, sub A, $u < 1$, taie curba într'un punct; deci $\frac{a}{r} < 1$, o singură rădăcină acceptabilă pentru $t = \cos\theta$. Paralelele cuprinse între A și C, $1 < u < \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$, taie curba în două puncte; deci $1 < \frac{a}{r} < \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$, două rădăcini pentru $\cos\theta$. Pentru $\frac{a}{r} > \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$, ecuația n'are rădăcini acceptabile pentru $\cos\theta$.

Punând $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{m}$, din $t_1 = \cos\theta_1 = -\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, rezultă $\theta_1 = \pi - \beta$ și $\pi - \beta$ este cuprinsă intre cele două rădăcini $\pi - \alpha$, $\pi - \gamma$ ale ecuației date.

95. Exerciții. 1. Să se afle numărul rădăcinilor reale ale ecuațiilor

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0, \quad x^3 - 12x + 3 = 0,$$

$$x^4 + 8x^3 - 14x^2 - 5 = 0, \quad 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0.$$

R. Una reală; trei reale; două reale; două reale.

2. Să se discute ecuația

$$3x^5 - 25x^3 + 60x + \alpha = 0.$$

R. Rădăcinile derivatei sunt ± 1, ± 2. Când $\alpha < -38$, este o rădăcină reală; $-38 < \alpha < -16$, trei reale; $-16 < \alpha < 16$, una reală; $16 < \alpha < 38$, trei reale; $\alpha > 38$, una reală.

3. Să se discute ecuația

$$5x^6 - 18x^5 + 15x^4 + \alpha = 0.$$

R. $\alpha < -2$, două reale; $-2 < \alpha < 0$, patru reale; $0 < \alpha < 16$, două reale; $\alpha > 16$, nici una reală; $\alpha = 0$, șase reale; $\alpha = -2$, 0 și 16, rădăcini duble sau multiple.

4. Să se discute ecuația

$$x^4 - 4x^3 + 16x + \alpha = 0.$$

R. Derivata are rădăcinile -1, 2, 2; $\alpha < -16$, două reale; $\alpha = -16$, 2 e rădăcină triplă; $-16 < \alpha < 11$, două reale; $\alpha = 11$, -1 rădăcină dublă; $\alpha > 11$, nici una reală.

5. a și b fiind coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor ecuației

$$x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2 + (b^2 - 1)a^2 = 0.$$

R. Șirul lui *Rolle* este

$f(-\infty)$	$f(0)$	$f(a)$	$f(2a)$	$f(+\infty)$
$+$	$(b^2-1)a^2$	$a^2(a^2+b^2-1)$	$(b^2-1)a^2$	$+$

Se vor construi curbele $b^2 - 1 = 0$, adică $b - 1 = 0$, $b + 1 = 0$ şi cercul $a^2 + b^2 = 1$. Pentru $a > 0$ avem fig. 32.

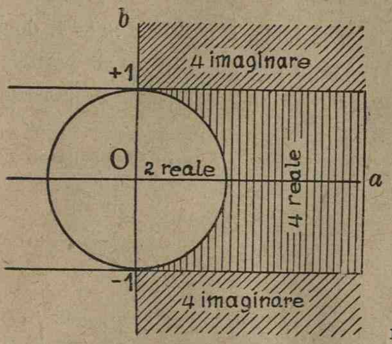

Fig. 32.

6. Problemă analoagă, ca la exercițiul 5, pentru ecuația

$$3x^4 + 4px^3 - 12p^2x^2 + p^2(q - q^2) = 0,$$

p şi q fiind coordonatele unui punct din plan.

R. Se vor construi curbele

$$32p^2 + q^2 - q = 0 \text{ (elipsă)},$$

$$5p^2 + q^2 - q = 0 \text{ (elipsă)}.$$

In I, toate reale; în II, două reale, două imaginare; în III, toate imaginare; pe contururi câte o rădăcină dublă.

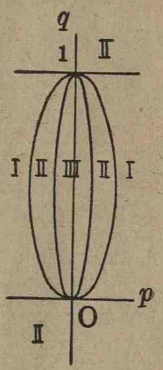

Fig. 33.

7. Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$f(x) = \lambda x^4 - 12x^3 + 4x + 3 = 0,$$

λ fiind un parametru variabil.

R. Se va aplica teorema lui Rolle ecuației

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Pentru ecuația dată, avem $\lambda < 0$, două rădăcini reale; $\lambda = 0$, o rădăcină dublă infinită şi două reale; $0 < \lambda < 5$, patru rădăcini reale; $\lambda = 5$, o rădăcină dublă egală cu 1 şi două reale; $5 < \lambda < 32$, două reale; $\lambda = 32$, o rădăcină dublă egală cu $-\frac{1}{2}$; $\lambda > 32$, toate imaginare.

8. Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x^6 - 3x^5 + mx^3 - 3x + 1 = 0,$$

m fiind variabil.

R. Se împarte cu x^3 şi se pune

$$x + \frac{1}{x} = y.$$

Se discută ecuația

$$y^3 - 3y^2 - 3y + m + 6 = 0,$$

în intervalele $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$, căci observăm şi semnul realizantului, $y^2 - 4$, din ecuația $x + \frac{1}{x} = y$,

Pentru ecuația în y, dacă $m < 4$, una reală; $m = 4$, una reală şi una dublă egală cu 2; $4 < m < 4\sqrt{2} - 1$, două reale; $m = 4\sqrt{2} - 1$, una dublă, egală cu $1+\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}-1 < m < 8$, nici una reală; $m=8$, una dublă egală cu -2; $m>8$, una reală.

Deci pentru ecuația în x rezultă $m<4$, două pozitive; $m=4$, două pozitive și una cuadruplă egală cu 1; $4<m<4\sqrt{2}-1$, patru pozitive; $m=4\sqrt{2}-1$, una dublă; $4\sqrt{2}-1<m<8$, nici una reală; $m=8$, una cuadruplă egală cu -1; $m>8$, două negative.

9. Dacă ecuația $f(x)=0$ are toate rădăcinile reale, atunci și ecuația

$$f(x)+kf'(x)=0$$

are toate rădăcinile reale

R. Ecuația

$$F(x)=e^{\frac{x}{k}}f(x)=0$$

având rădăcini reale și $E'(x)=0$ are rădăcini reale.

10. Să se cerceteze numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}=0.$$

R. Ecuația $f(x)=0$ are același număr de rădăcini reale ca și

$$F(x)=e^{-x}f(x)=0.$$

$F'(x)=-e^{-x}\frac{x^n}{n!}$. Șirul lui Rolle depinde de $f(-\infty)$, $f(0)$, $f(\infty)$, și de paritatea lui n. Admite una sau nici una reală.

11. Să se arate că dacă ecuația $f(x)=0$ are toate rădăcinile reale, și ecuația

$$f(x)+mf'(x)=0$$

va avea toate rădăcinile reale, punând-o sub forma

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{m}=0,$$

R. $$\frac{f'(x)}{f(x)}\equiv\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\dots+\frac{1}{x-a_n}$$

Se vor substitui valorile

$$(-\infty,\ a_1-\varepsilon),\ (a_1+\varepsilon,\ a_2-\varepsilon),\ (a_2+\varepsilon,\ a_3-\varepsilon),\dots\ (a_n+\varepsilon,\ \infty).$$

12. Să se separe, fără a desvolta, rădăcinile ecuației

$$f(x)\equiv\frac{1}{(x)-1^2}+\frac{1}{(x)+3^2}-1=0.$$

R. $f(x)$ este continuă în intervalele.

$$(-\infty,\ -3-\varepsilon),\ (-3+\varepsilon,\ 1-\varepsilon),\ (1+\varepsilon,\ \infty).$$

Aplicăm teorema lui Rolle în aceste intervale

$$f'(x) \equiv -\frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x+3)^3} = 0,$$

$$(x-1)^3 + (x+3)^3 = 0.$$

O rădăcină este

$(x-1)+(x+3)=0$, $x=-1$; căci $(u^3+v)^3 = (u+v)(u^2-uv+v^2)$.

Şirul lui Rolle este

x	$-\infty$	$-3-\varepsilon$	$-3+\varepsilon$	-1	$1-\varepsilon$	$1+\varepsilon$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
	I		II		III	IV	

Sunt patru rădăcini reale, separate.

13. Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} - \lambda = 0.$$

fără a desvolta ecuaţia, λ fiind variabil.

R. $\lambda < 0$, imaginare; $0 < \lambda < 8: (a-b^2)$, două reale; $\lambda > 8: (a-b)^3$, patru reale.

14. Să se separe rădăcinile ecuaţiei

$$(x-1)^4 - (2x-1)^3 = 0.$$

R. Se aplică teorema lui Rolle intervalelor

$$\left(-\infty, \frac{1}{2} - \varepsilon\right), \quad \left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \infty\right),$$

căci ecuaţia se poate scrie

$$f(x) \equiv \frac{(x-1)^4}{(2x-1)^3} - 1 = 0.$$

Şirul lui Rolle este

$f(-\infty)$	$f(-1)$	$f\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)$	$f\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$	$f(1)$	$(f\infty)$
$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

Două rădăcini reale cuprinse între

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad (1, \infty).$$

15. Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$x^4 - 15x^2 + \lambda x - 12 = 0.$$

R. Punem ecuaţia sub forma

$$f(x) \equiv x^3 - 15x + \lambda - \frac{12}{x} = 0,$$

și aplicăm teorema lui Rolle în intervalele $(-\infty, -\varepsilon)$, (ε, ∞), $\varepsilon > 0$. Rădăcinile reale ale lui $f'(x) = 0$ sunt ± 2, ± 1. Șirul lui Rolle este

$f(-\infty)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(-\varepsilon)$	$f(\varepsilon)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(\infty)$.
$-$	$\lambda+28$	$\lambda+26$	$+$	$-$	$\lambda-26$	$\lambda-28$	$+$

$\lambda < -28$, două reale; $-28 < \lambda < -26$, patru reale; etc.

16. Să se înscrie într'un cerc de rază R un triunghiu isoscel cu suprafață egală cu a^2. Discuție.

R. Insemnând cu x înălțimea triunghiului, se va discuta ecuația

$$x^4 - 2\,\mathrm{R}\,x^3 - a^4 = 0.$$

Dacă

$$a^2 < \frac{3\,\mathrm{R}^2\sqrt{3}}{4},$$

ecuația are două rădăcini pozitive.

17. Să se determine dimensiunile unui trapez isoscel circumscris unui cerc, cunoscând perimetrul trapezului $4a$ și volumul $\frac{2}{3}\pi a^2 b$ al trunchiului de con născut prin învârtirea acestui trapez împrejurul dreptei care unește mijloacele celor două baze. Discuție. Să se considere cazul

$$b = \frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

R. Fie x, y, z jumătatea bazei mici, jumătatea bazei mari și înălțimea. Ecuațiile sunt

$$4x + 4y = 4a,\quad z^2 + (y-x)^2 = (x+y)^2,$$
$$z(x^2 + y^2 + xy) = 2a^2 b.$$

Ecuația care dă pe z este

$$f(z) = z^3 - 4a^2 z + 8a^2 b = 0,$$

iar ecuația care dă pe x și y este

$$x^2 - ax + \frac{z^2}{4} = 0.$$

Realitatea lui x și y depinzând de $a^2 - z^2$, șirul lui Rolle este numai

$$f(-a),\ f(a),$$

Dacă $-\frac{3a}{8} < b < \frac{3a}{8}$, una reală pentru z și reale și pentru x, y.

Când $b = \frac{2a}{3\sqrt{3}}$; $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ dublă pentru z; x, y imaginare.

18. Fiind dată ecuația

$$f(x) = 3ax^4 + 4x^3 + bx^2 + 12(a^2-1)x + \frac{6(a^2-1)}{a} = 0,$$

se cere

1° Să se determine b în funcţie de a, astfel ca derivata lui $f(x)$ să aibă două rădăcini egale şi de semn contrar.

2° Coeficientul b astfel determinat, să se aplice teorema lui Rolle,

R. $b = 6a(a^2 - 1)$. Presupunând $1 - a^2 > 0$, avem $-\frac{1}{a} < -\sqrt{1-a^2}$, căci se deduce $a^4 - a^2 + 1 > 0$, ceeace este adevărat, căci trinomul $a^4 - a^3 + 1$ are rădăcini imaginare, este o sumă de pătrate, are semnul primului termen, adică, plus.

Când $0 < a < 1$, şirul lui Rolle este

$$f(-\infty) > 0, \quad f\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^3} < 0,$$

$$f(-\sqrt{1-a^2}) = -\frac{1-a^2}{a}[3(a\sqrt{1-a^2})^2 - 8(a\sqrt{1-a^2}) + 6] < 0,$$

$$f(\sqrt{1-a^2}) = -\frac{1-a^2}{a}[3(a\sqrt{1-a^2})^2 + 8(a\sqrt{1-a^2}) + 6] < 0.$$

Paranteza cea mare în raport cu $a\sqrt{1-a^2}$ are rădăcini imagiuare, deci este o sumă de pătrare. Două reale.

Dacă $-1 < a < 0$; $f(-\infty) < 0$, $f\left(-\sqrt{1-a^2}\right) > 0$, $f(\sqrt{1-a^2}) > 0$.

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) < 0, \; f(\infty) > 0.$$

$a > 1$; $f(-\infty) > 0$, $f\left(-\frac{1}{a}\right) < 0$, $f(\infty) > 0$.

$a < -1$; $f(-\infty) < 0$, $f\left(-\frac{1}{a}\right) > 0$, $f(\infty) < 0$.

16. Să se aplice teorema lui Rolle ecuaţiei

$$16x^5 - 20p^2x^3 + 5p^4x - q^5 = 0.$$

p şi q fiind coordonatele unui punct din plan.

R. $f' = 0$ are ca rădăcini

$$-p\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}, \quad -p\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}, \quad p\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}, \quad p\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.$$

Semnele şirului lui Rolle depind de ale numerelor

$$p^5 - q^5, \; -p^5 - q^5,$$

care reprezintă drepte ce trec prin originea axelor. Cele reale sunt bisectoarele axelor.

20. Să se discute ecuaţia

$$x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 x - \frac{1}{4}\beta(\alpha^2 - \beta^2) = 0,$$

α şi β fiind coordonatele unui punct din plan. Să se rezolve ştiind că are o rădăcină dublă de patru ori mai mică ca rădăcina simplă.

R. Şirul lui Rolle este

$$f(-\infty),\quad f\left(\frac{\alpha+\beta}{6}\right),\quad f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\quad f(\infty)\qquad [\alpha+\beta>0].$$

Se vor cerceta semnele expresiilor

$$\frac{1}{108}(\alpha+\beta)(2\alpha^2-23\alpha\beta+29\beta^2),\quad -\frac{1}{4}\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta).$$

Pentru a rezolva în cazul particular, se identifică ecuaţia cu

$$(x-u)^2(x-4u).$$

Sau se observă că rădăcinile duble nu pot fi decât

$$\frac{1}{6}(\alpha+\beta),\quad \frac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

cea simplă este $\frac{2}{3}(\alpha+\beta)$ în primul caz cu condiţia

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2-23\alpha\beta+29\beta^2)=0,$$

şi $2(\alpha+\beta)$, în al doilea caz cu condiţia $\beta(\alpha^2-\beta^2)=0$.

21. Să se formeze ecuaţia care dă muchiile unui triedru tridreptunghic O A B C, cunoscându-se suma muchilor $OA+OB+OC=a$, suprafaţa totală a tetraedului egală cu $\frac{b^2}{2}$ şi volumul tetraedrului $\frac{c^3}{6}$. Să se discute ecuaţia în cazul $2(b^4+2ac^3)=a^2b^2$. Să se rezolve în cazul când, pe lângă această condiţie mai avem $a=3c\sqrt[3]{2}$.

R. Ecuaţiile problemei sunt

$$x+y+z=a,\qquad xyz=c^3,$$

$$xy+yz+zx+\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}=b^2.$$

Ecuaţia care are ca rădăcini pe x, y, z este

$$x^3-ax^2+\frac{b^4+2c^3z}{2b^2}x-c^3=0.$$

$$f(x)=x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x-c^3=0.$$

Şirul lui Rolle este

$$f(-\infty)\qquad f\left(\frac{a}{6}\right)\qquad f\left(\frac{a}{2}\right)\qquad f(\infty)$$

$$-\qquad \frac{a^3}{54}-c^3\qquad -c^3<0\qquad +$$

Dacă $a<3c\sqrt[3]{2}$, o singură rădăcină reală. Când $a<3c\sqrt[3]{2}$, trei rădăcini reale. Când $a=3c\sqrt[3]{2}$, $(a:6)$ este o rădăcină dublă, iar cea simplă este $(2a:3)$.

22. Se dă ecuaţia

$$f(x)=x^4+4ax^3+6bx^2+4cx+a^4=0$$

și se cere să se determine b și c în funcție de a, știind că suma patratelor rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ este egală cu 16 și că rădăcinile derivatei formează o progresie aritmetică. Să se studieze apoi natura rădăcinilor, când a variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

R. Avem

$$\Sigma x^2 = \Sigma (x)^2 - 2 \Sigma x_1 x_2; \quad 3b = 4a^2 - 4, \quad c = 2a(a^2 - 2).$$

Rădăcinile derivatei fiind $u - v$, u, $u + v$, avem șirul lui Rolle

$$f(-\infty) \quad f(-a - \sqrt{4 - a^2}) \quad f(-a) \quad f(-a + \sqrt{4 - a^2}) \quad f(\infty)$$

și condiția

$$2a(a^2 - 2) = c.$$

Când $4 - a^2 < 0$, șirul lui Rolle se reduce la

$$+ \qquad f(-a) = 2a^2(4 - a^2) < 0, \qquad +$$

și avem două rădăcini reale.

Când $4 - a^2 > 0$, pentru calculul termenilor șirului lui Rolle ne servim de observarea

$$f'_y(\alpha, 1) = m f(\alpha),$$

fiind o rădăcină a derivatei, și obținem

$$+, \quad -(3a^4 - 16a^2 + 16), \quad +, \quad -(3a^4 - 16a^2 + 16), \quad +$$

Dacă a este în intervalele $\left(-2, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$ nici o rădăcină reală; dacă a este în intervalul $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ avem patru rădăcini reale.

23. Se consideră ecuația

$$f(x) = x^6 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

în care se știe că suma a trei rădăcini este egală cu zero, și că prima parte se descompune într'un produs de doi factori de gradul al treilea. Să se afle relația de condiție și să se discute ecuația dată în cazul

$$p = 4a, \; q = 2, \; r = 3a^2, \; s = 2a.$$

R. Se identifică cu $(x^3 + \alpha x + \beta)(x^3 + \alpha' x + \beta')$. Se elimină α' și β' și din ecuațiile obținute se elimină α. Se obține

$$4tr - rq^2 - s^2 + pqs - p^2 t = 0.$$

In cazul particular, $t = 0$ și $(x^3 + 3ax + 2)(x^2 + a)x = 0$, sau $(x^3 + ax + 2)(x^2 + 3a)x = 0$. In prima ipoteză, dacă $a < -1$, $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale; $-1 < a < 0$, patru reale; $a > 0$, două reale.

Pentru ecuația $(x^3 + ax + 2)(x^2 + 3a)x = 0$, $a < -3$, toate rădăcinile reale; $-3 < a < 0$, patru reale; $a > 0$, două reale.

24. Fie A B un segment de dreaptă de lungime b. In A se ridică o perpendiculară pe A B. Să se determine pe această perpendiculară un punct C, astfel că ducând dela C spre B o lungime $CD = a$, proectând pe D în D′ pe perpendiculara A C și apoi pe D′ în E pe BC, să avem $CE = BD$. Discuție.

R. $AC = x$.

$$f(x) = \frac{(b^2 + x^2)^3}{(b^2 + 2x^2)^2} - a^2 = 0.$$

Șirul lui Rolle este $f(-\infty)$, $f\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \frac{24}{32} b^2 - a^2$, $f(0) = b^2 - a^2$, $f\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \frac{27}{32} b^2 - a^2$, $f(\infty)$.

Dacă $a < -b$, două reale; $-b < a < -\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} b$, patru reale; $-\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} b < a < \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} b$, nici una reală; $\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} b < a < b$, patru reale; $a > b$, două reale.

25. Să se arate că ecuația

$$f(x) = 4(x^2 - x + 1)^3 - 27a(x^2 - x)^2 = 0,$$

unde a este un parametru variabil, este reciprocă și că rădăcinile ei verifică relațiile $x_1 + x_2 = 1$, $x_3 + x_4 = 1$, $x_5 + x_6 = 1$. Să se deducă expresia tuturor rădăcinilor în funcție de una din ele, precum și rădăcinile multiple și valorile corespunzătoare ale lui a. Să se cerceteze numărul rădăcinilor reale și multiple ale acestei ecuații, sau aplicând teorema lui Rolle ecuației

$$F(x) = \frac{4(x^2 - x + 1)^3}{27(x^2 - x)^2} - a = 0,$$

sau studiind variația funcției

$$a = \frac{4(x^2 - x + 1)^3}{27(x^2 - x)^2},$$

x variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

R. Se va înlocui x cu $\frac{1}{x}$ și x cu $1 - x$ și se va arăta că $f(x)$ rămâne aceeași. Rădăcinile sunt

$$x_1,\ x_2 = 1 - x_1,\ x_3 = \frac{1}{x_1},\quad x_4 = 1 - \frac{1}{x_1},\quad x_5 = \frac{1}{1 - x_1},\quad x_6 = \frac{x_1}{x_1 - 1}.$$

Șirul lui Rolle pentru $F(x) = 0$ este

$F(-\infty)$	$F(-1)$	$F(-\varepsilon)$	$F(\varepsilon)$	$F\left(\frac{1}{2}\right)$	$F(1-\varepsilon)$	$F(1+\varepsilon)$	$F(2)$	$F(\infty)$
$+$	$1-a$	$+$	$+$	$1-a$	$+$	$+$	$1-a$	$+$

Dacă $a < 1$, nici o rădăcină reală; când $a = 1$, trei rădăcini duble, -1, $\frac{1}{2}$, 2; când $a > 1$, șase rădăcini reale, separate.

Variația funcției a se urmărește pe tabloul

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		∞
a'		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
a	$+\infty$	desc	1 cr		$+\infty$	desc	1 cr		$+\infty$	desc	1 cr		$+\infty$

Deci, dacă $a < 1$, o paralelă cu Ox nu taie curba, nici o rădăcină reală; dacă $a = 1$, paralela atinge curba în trei puncte, de abscise -1, $\frac{1}{2}$, 2, care sunt rădăcini duble; dacă $a > 1$, o paralelă cu Ox la această depărtare, a, taie curba în şase puncte, deci şase rădăcini reale.

26. Să se determine valorile lui α, β, γ, δ, astfel ca ecuaţia

$$f(x) = 4x^6 - 12x^5 - 3(9a-8)x^4 + 2(27a-14)x^3 - 3(9a-8)x^2 - 12x + 4 = 0,$$

să se poată pune sub forma $a(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)^2 = 4(a-1)(x^2 - x + 1)^3$.

Să se arate că rădăcinile au două câte două aceeaşi sumă şi să se găsească valoarea acestei sume. Să se deducă expresia tuturor rădăcinilor în funcţie de una din ele, precum şi rădăcinile multiple şi valorile corespunzătoare ale lui a.

Să se aplice teorema lui Rolle ecuaţiei

$$(1) \qquad F(x) = \frac{(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)^2}{(x^2 - x + 1)^3} - \frac{4(a-1)}{a} = 0.$$

R. $f(x)$ fiind reciprocă, (1) va trebui să rămână neschimbată când se înlocueşte x cu $\frac{1}{x}$; deci $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$.

$$\frac{a\alpha^2 - 4(a-1)}{4} = \frac{2a\alpha\beta + 12(a-1)}{-12} = \frac{a(\beta^2 + 2\alpha\beta) - 24(a-1)}{-3(9a-8)} = \frac{a(\alpha^2 + \beta^2) + 14(a-1)}{27a - 14}$$

$$= \frac{a\alpha^2 - 4(a-1) - [2a\alpha\beta + 12(a-1)] + [a(\beta^2 + 2\alpha\beta) - 24(a-1)] - [a(\alpha^2 + \beta^2) \mp 14(a-1)]}{4 + 12 - 3(9a-8) - 27a + 14} = \frac{1-a}{1-a}$$

Presupunând $a - 1 \neq 0$, valoarea rapoartelor este 1 şi deci

$$\alpha = \delta = \pm 2, \qquad \beta = \gamma = \mp 3.$$

Se înlocueşte în (1) pe x cu $1 - x$ şi rămâne neschimbată. $x_1 + x_2 = 1$ $x_3 + x_4 = 1$, $x_5 + x_6 = 1$. Rădăcinile sunt

$$x_1, \ 1 - x_1; \ \frac{1}{x_1}, \ 1 - \frac{1}{x_1}; \ \frac{1}{1 - x_1}, \ \frac{x_1}{x_1 - 1}.$$

Şirul lui Rolle este

$$F(-\infty), \ F(-1), \ F(0) \ F\left(\frac{1}{2}\right), \ F(1), \ F(2), \ F(\infty).$$

Când $a < 0$, patru reale; când $0 < a < 1$, nici una reală; când $a > 1$, şase reale.

Când $a = 0$, $f(x)$ se reduce la $(x^2 - x + 1)^3 = 0$; când $a = 1$, $f(x)$ se reduce la $(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ şi -1, 2, $\frac{1}{2}$ sunt rădăcini duble.

Teorema lui Descartes.

96. Generalităţi. Fie $f(x)$ un polinom ordonat după puterile descrescătoare ale lui x. Dacă doi termeni consecutivi n'au acelaşi semn, se zice că $f(x)$ prezintă o *variaţie* a semnului între acei doi termeni; dacă au acelaşi semn, polinomul prezintă o *permanenţă*:

$f(x)$ va avea atâtea variaţii v câte schimbări de semn sunt între termenii săi consecutivi.

De exemplu, polinomul $x^3 - x^2 + 4x + 6$ are două variaţii între termenii $x^3, -x^2$ şi $-x^2, 4x$, şi o permanenţă între $4x$ si 6.

Când polinomul $f(x)$ este complet, cum e de exemplu,

$$x^3 - x^2 + 4x + 6,$$

în care nu lipseşte nici un termen, numărul permanenţelor este egal cu numărul variaţiilor v' ale transformatei în $-x$, adică ale polinomului obţinut înlocuind în $f(x)$ pe x cu $-x$.

In adevăr, polinomul dat $x^3 - x^2 + 4x + 6$ are o permanenţă între $+4x$, $+6$, iar polinomul transformat, $-x^3 - x^2 - 4x + 6$ are o variaţie între $-4x, +6$, fiindcă unul din termeni îşi schimbă neapărat semnul.

Mai mult, când $f(x)$ este complet, avem

$$v + v' = m$$

m fiind gradul polinomului. Căci în polinomul

$$x^3 - x^2 + 4x + 6,$$

plecând dela primul termen până la cel din urmă, avem trei treceri dela un termen la altul, cât arată gradul ecuaţiei $f(x) = 0$. Insă v arată trecerile cu schimbare a semnului, şi v' numărul trecerilor fără schimbare a semnului; deci $v + v'$ este numărul total al trecerilor, adică gradul polinomului $f(x)$. In cazul considerat

$$v = 2, \ v' = 1, \ v + v' = 3.$$

Când însă ecuaţia $f(x) = 0$ nu e completă, adică $f(x)$ *prezintă lacune*, numărul v' al variaţiilor transformatei în $-x$, nu mai este egal cu numărul permanenţelor ecuaţiei date. In adevăr, să presupunem că avem o permanenţă între doi termeni de grad pereche şi consecutivi ai ecuaţiei date. Făcând transformata în $-x$, aceşti termeni de grad pereche îşi vor păstra semnul şi deci tot permanenţă va avea şi transformata între aceşti doi termeni, pe când în cazul ecuaţiei complete, la orice permanenţă a ecuaţiei date corespunde câte o variaţie a transformatei.

De exemplu, ecuaţia

$$x^7 - 4x^3 - x^2 + 1 = 0$$

are două variaţii, $v = 2$ şi o permanenţă; transformata în $-x$

$$-x^7 + 4x^3 - x^2 + 1 = 0,$$

are trei variaţii, $v'=3$, pe când ecuaţia dată are numai o permanenţă.

Mai mult, în acest caz, observăm că $v+v'=5$, e mai mic decât gradul ecuaţiei. Deci, când o ecuaţie prezintă lacune, avem

$$v+v'\leqslant m,$$

m fiind gradul ecuaţiei.

97. *Dacă primul şi ultimul termen al unui polinom au acelaşi semn, polinomul are un număr cu soţ de variaţii, $v=2k$; dacă aceşti doi termeni au semne contrare, numărul variaţiilor e fără soţ, $v=2k+1$.*

In adevăr, să presupunem că primul şi ultimul termen au acelaşi semn $+$. Plecând dela primul termen al ecuaţiei, cu semnul $+$, vom întâlni diferiţi termeni şi la fiecare schimbare a semnului corespunde câte o variaţie. Insă, trebuind să dăm peste ultimul termen cu semnul $+$, va trebui să se facă un număr cu soţ de schimbări ale semnului, adică vom avea un număr cu soţ de variaţii.

De exemplu, polinoamele

$$x^3+x^2-2x+1,$$

$$x^3-x+1,$$

$$x^6-4x^4+x^3-x^2+1,$$

au un număr cu soţ de variaţii; iar polinomul

$$4x^3-2x^2+6x-1,$$

are un număr fără soţ de variaţii.

98. *Diferenţa dintre numărul variaţiilor lui $f(x)$ şi $(x-a)\,f(x)$ este un număr fără soţ, când a este un număr pozitiv.*

In adevăr, dacă primul şi ultimul termen ai polinomului $f(x)$ au acelaşi semn, $f(x)$ are un număr cu soţ de variaţii (Nr. 97), $v=2p$. Dacă $a>0$, $(x-a)\,f(x)$ are primul şi ultimul termen cu semne contrare, deci are un număr fără soţ de variaţii $2h+1$.

Prin urmare, diferenţa dintre numărul variaţiilor lui $f(x)$ şi $(x-a)\,f(x)$ este $2p-2h-1$, sau $2h+1-2p$, adică în tot cazul un număr fără soţ.

Dacă primul şi ultimul termen ai polinomului $f(x)$ au semne contrare, $f(x)$ are un număr fără soţ de variaţii, $v=2q+1$; iar $(x-a)\,f(x)$ având primul şi ultimul termen de acelaşi semn, are un număr cu soţ de variaţii $2r$. Deci diferenţa dintre numărul variaţiilor lui $f(x)$ şi $(x-a)\,f(x)$ este $2q+1-2r$, sau $2r-2q-1$, adică un număr fără soţ.

Putem demonstra că în orice caz $(x-a)\,f(x)$ are mai multe variaţii ca $f(x)$. Să considerăm polinomul

$$\begin{aligned} f(x)=&A_m x^m+\ldots+A_{n+1}x^{n+1}-A_n x^n-\ldots-A_{p+1}x^{p+1}\\ &+A_p x^p+\ldots+A_{t+1}x^{t+1}-A_t x^t-\ldots-A_s x^s, \end{aligned}$$

unde A_m, A_n, A_p, A_t, A_s însemnează numere positive, A_{n+1}, A_{p+1},...A_{t+1}, numere pozitive sau nule.

Efectuând produsul $(x-a)\,f(x)$, avem

$$\begin{array}{l|l|l|l} A_m x^{m+1}+\ldots-A_n & x^{n+1}-\ldots+A_p & x^{p+1}+\ldots-A_t & x^{t+1}-\ldots+a\,A_s x^s \\ \qquad -a\,A_{n+1} & \qquad +a\,A_{p+1} & \qquad -a\,A_{t+1} & \end{array}$$

$f(x)$ conţine o singură variaţie între $A_m x^m$, $A_n x^n$; partea corespunzătoare produsului $(x-a)\,f(x)$ conţine cel puţin una, căci ea începe prin termenul pozitiv $A_m x^{m+1}$ şi se termină prin termenul negativ $-(A_n+a\,A_{n+1})\,x^{n+1}$. Deasemenea, $f(x)$ are o singură variaţie între x^n şi x^p, pe când $(x-a)\,f(x)$ are cel puţin una în partea cuprinsă între termenii ce conţin pe x^{n+1}, x^{p+1}.

Continuând astfel până la termenul $-A_t x^t$, se găseşte că $(x-a)\,f(x)$ are cel puţin tot atâtea variaţii ca şi $f(x)$. Plecând însă dela x^t, $f(x)$ nu mai prezintă variaţii, pe când în produsul $(x-a)\,f(x)$ există cel puţin una între x^{t+1} şi x^s; această concluzie subsistă şi în cazul când ultima grupă din $f(x)$ este înlocuită numai printr'un singur termen $-A_t x^t$.

Rezultă de aci că produsul $(x-a)\,f(x)$ are cel puţin o variaţie mai mult ca $f(x)$ şi deci diferenţa dintre numărul variaţiilor lui $(x-a)\,f(x)$ şi $f(x)$ este un număr pozitiv $2k+1$.

99. Teorema lui Descartes. *Numărul rădăcinilor pozitive ale unei ecuaţii este egal cu numărul variaţiilor, sau diferă cu un număr cu soţ.*

In adevăr, fi ea a_1, a_2... a_p toate rădăcinile pozitive ale ecuaţiei $f(x)=0$, de gradul $m>p$.

Avem

$$f(x)=(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_p)\,\varphi(x),$$

unde $\varphi(x)=0$ nu mai are nici o rădăcină pozitivă. Deci $\varphi(x)=0$ n'are nici o rădăcină între 0 şi ∞, sau $\varphi(0)$ şi $\varphi(+\infty)$ au acelaşi semn, ceeace însemnează că primul şi ultimul termen din $\varphi(x)$ au acelaşi semn.

Aşa dar, $\varphi(x)$ are un număr cu soţ de variaţii $2k$.

Inmulţind pe $\varphi(x)$ cu $x-a_1$, numărul variaţiilor creşte cu $2k_1+1$ (Nr. 97); rezultatul înmulţit cu $x-a_2$ are cu $2k_2+1$ mai multe variaţii; etc. Deci produsul

$$f(x)=(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_p)\,\varphi(x),$$

va avea un număr de variaţii egal cu

$$v=2k+(2k_1+1)+(2k_2+1)+\ldots+(2k_p+1),$$

sau

$$v=2\,(k+k_1+\ldots+k_p)+p;$$

însă (Nr. 98) $k_1, k_2 \ldots k_p$ sunt pozitive şi deci

$$v=2h+p, \qquad h=\sum_{i=0}^{p} k_i, \; (k_0=k),$$

de unde

$$p=v-2h, \; p\leqslant v,$$

adică, numărul rădăcinilor pozitive p diferă de numărul variaţiilor v cu un număr cu soţ $2h$.

Exemplu. Ecuaţia $x^6-4x^3+x^2-1=0$ are, sau trei rădăcini pozitive, sau una.

100. *Numărul n al rădăcinilor negative ale unei ecuaţii nu întrece numărul variaţiilor v' ale transformatei în $-x$ şi diferenţa lor este cu soţ.* In adevăr, rădăcinile negative ale ecuaţiei $f(x)=0$, sunt rădăcini pozitive ale ecuaţiei $f(-x)=0$ şi deci, câte variaţii v' are $f(-x)$, atâtea rădăcini pozitive are $f(-x)=0$ sau diferă cu un număr cu soţ; deci $n\leqslant v'$.

101. *Când o ecuaţie are toate rădăcinile reale, numărul rădăcinilor pozitive este egal cu numărul variaţiilor v, iar numărul celor negative este egal cu v'.*

Fie p numărul rădăcinilor pozitive, n numărul rădăcinilor negative ale unei ecuaţii de gradul m; v şi v' numărul variaţiilor ecuaţiei şi ale transformatei în $-x$.

Să observăm că $v+v'\leqslant m$. Deci după teorema lui *Descartes*

$$p\leqslant v, \quad n\leqslant v'.$$

de unde

$$p+n\leqslant v+v', \quad p+n\leqslant m.$$

Insă rădăcinile fiind toate reale, trebue ca $p+n=m$, deci $p=v$, $n=v'$.

Observare. Când ecuaţia e complectă, v' este numărul permanenţelor.

102. *Când ecuaţia e necomplectă, adică prezintă lacune, ea are în general şi rădăcini imaginare.*

Fie de ex. ecuaţia

$$x^8 - 4x^5 - 6x^3 + 2x + 1 = 0,$$

în care $$v = 2 \quad v' = 2, \text{ deci } p \leqslant 2, \ n \leqslant 2.$$

Dar, în acest caz

$$v + v' < m (= 8);$$

şi deci

$$p + n \leqslant v + v' < 8,$$

adică numărul rădăcinilor pozitive şi negative e mai mic decât gradul ecuaţiei, deci vom avea şi rădăcini imaginare, în număr de cel puţin $m - (v + v')$ şi prin urmare ecuaţia are cel puţin patru rădăcini imaginare.

103. Aplicaţie. *Fiind dată ecuaţia*

$$x^3 + px + q = 0,$$

să se afle numărul rădăcinilor pozitive şi numărul rădăcinilor negative.

1° $p > 0$, $q > 0$; $v = 0$, $v' = 1$; ecuaţia are o rădăcină negativă şi două imaginare.

2° $p > 0$, $q < 0$; $v = 1$, $v' = 0$; una pozitivă, două imaginare.

3° $p < 0$, $q > 0$; $v = 2$, $v' = 1$; una negativă, două sau nici una pozitive

4° $p < 0$, $q < 0$; $v = 1$, $v' = 2$; una pozitivă, nici una sau două negative

104. Exerciţii. 1. Să se aplice teorema lui *Descartes* ecuaţiilor

$$x^6 + 2x^3 + x - 3 = 0.$$

R. Una poz. una neg.

2. $$x^4 - 3x^3 + 4x - 1 = 0.$$

R. una neg.; una sau trei pozitive.

3. $$x^3 - x + a = 0.$$

R. $a < 0$, una pozitivă; nici una, sau două negative; $a > 0$, una negativă; nici una, sau două pozitive.

Rezolvarea ecuaţiilor algebrice cu coeficienţi numerici.

Transformarea ecuaţiilor.

105. A transforma o ecuaţie $f(x)=0$, însemnează a deduce din ea o altă ecuaţie $F(y)=0$, ale cărei rădăcini y să fie legate de rădăcinile x ale ecuaţiei $f(x)=0$, prin o relaţie cunoscută.

Ecuaţia $F(y)=0$ se numeşte transformata ecuaţiei $f(x)=0$.

106. *Fiind dată o ecuaţie $f(x)=0$, să se găsească ecuaţia care admite ca rădăcini pe acelea ale ecuaţiei $f(x)=0$, cu semnul schimbat.*

y fiind o rădăcină a ecuaţiei căutate şi x a ecuaţiei date, avem

$$y=-x,\ f(x)=0.$$

Inlocuind pe x cu valoarea $-y$, ecuaţia care dă pe y va fi $f(-y)=0$. Schimbând pe y în x, ceeace n'are nici o importanţă, se poate zice că ecuaţia transformată se obţine schimbând x în $-x$ în ecuaţia dată.

Această nouă ecuaţie se numeşte *transformata în* $-x$, de care ne-am servit la Nr. 96.

107. *Să se transforme ecuaţia $f(x)=0$ în alta, care să aibă ca rădăcini pe acelea ale ecuaţiei $f(x)=0$, înmulţite cu un factor constant k.*

Prin urmare, vom avea $y=kx$, $f(x)=0$. Inlocuind pe x cu $\frac{y}{k}$, avem $f\left(\frac{y}{k}\right)=0$. Deci ecuaţia se obţine înlocuind pe x cu $\frac{y}{k}$.

Exemplu. Să se înmulţească cu 2 rădăcinile ecuaţiei

$$3x^4-7x^2+8x-3=0.$$

Se va înlocui x cu $\frac{1}{2}x$ şi gonind numitorii, avem

$$3x^4-28x^2+64x-48=0.$$

Observare. Această problemă cuprinde pe cea precedentă, anume când $k=-1$.

108. *Să se transforme o ecuaţie*

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$

în alta, tot cu coeficienţi întregi, în care primul coeficient să fie 1.

Fie y o rădăcină a ecuaţiei transformate şi x a primei ecuaţii.

Să punem $y = A_0 x$; de unde

$$f\left(\frac{y}{A_0}\right) = A_0 \frac{y^m}{A_0^m} + A_1 \frac{y^{m-1}}{A_0^{m-1}} + \dots + A_m = 0,$$

sau

$$A_0 y^m + A_1 A_0 y^{m-1} + \dots + A_m A_0^m = 0.$$

Simplificând cu A_0, găsim ecuaţia cerută

$$y^m + A_1 y^{m-1} + \dots + A_m A_0^{m-1} = 0.$$

Problema admite de multe ori o soluţie mai simplă.

De exemplu, fie ecuaţia

$$48 x^4 - 13 x^2 + 6 x - 5 = 0.$$

Inlocuind x cu $\frac{x}{k}$, avem

$$\frac{48}{k^4} x^4 - 13 \frac{x^2}{k^2} + 6 \frac{x}{k} - 5 = 0.$$

Va fi de ajuns să luăm $k = 12 = 2^2.3$, adică să conţină factorii 2 şi 3 ai primului termen, astfel că după ce vom simplifica toţi termenii, numitorul primului termen să fie cel mai mare, iar nu $k = A_0 = 48$, şi ecuaţia transformată este

$$x^4 - 39 x^2 + 216 x - 2160 = 0.$$

109. *Să se formeze ecuaţia care admite ca rădăcini inversele rădăcinilor unei ecuaţii* $f(x) = 0$.

Vom avea $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{y}$, $f(x) = 0$.

De unde

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = 0.$$

Deci, ecuaţia se obţine înlocuind x cu $\frac{1}{x}$, iar ecuaţia $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ se numeşte *transformata în* $\frac{1}{x}$.

Când transformata în $\frac{1}{x}$ se confundă cu ecuaţia dată, aceasta din urmă se zice *ecuaţia reciprocă*. La orice rădăcină a corespunde $\frac{1}{a}$.

Exemplu. $f(x)=x^4-5x^3+4x^2-5x+1=0,$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^4}-5\frac{1}{x^3}+4\frac{1}{x^2}-5\frac{1}{x}+1=0,$$

sau

$$x^4-5x^3+4x^2-5x+1=0,$$

adică $f(x)=0$.

Orice ecuaţie reciprocă de grad nepereche admite sau rădăcina 1 sau pe -1, căci rădăcinile fiind grupate perechi,

$$\left(a, \frac{1}{a}\right), \quad \left(b, \frac{1}{b}\right), \ldots,$$

rădăcina care rămâne, trebue să fie egală cu inversa ei, adică este ± 1. Se divide apoi ecuaţia reciprocă cu $x \mp 1$ şi prin urmare orice ecuaţie reciprocă de grad nepereche se reduce la o ecuaţie reciprocă de grad pereche, care se ştie cum se poate reduce la alta de grad pe jumătate, divizând cu x^m, dacă $2m$ e gradul ecuaţiei, şi punând $x+\frac{1}{x}=y$.

110. Exerciţii. 1. Să se transforme ecuaţia

$$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{2}{9}=0,$$

în alta cu coeficienţi întregi.

2. Să se aducă la forma $x^3+px+q=0$ ecuaţiile

$$x^3-5x^2+3x-7=0, \qquad 2x^3-7x^2+10=0.$$

R. Se va face să dispară termenul al doilea, punând $x=y+k$ şi determinând pe k aşa ca noua ecuaţie să nu mai aibă termen în y^2.

Avem $k=\frac{7}{6}$ pentru a doua şi $k=\frac{5}{3}$ pentru prima.

3. Să se transforme ecuaţia

$$2x^3-3x^2+7x-1=0,$$

într'alta în care coeficientul primului termen să fie 1 şi al termenului al doilea 0.

R. Se va pune $x=py+q$ şi se va determina p şi q aşa ca în noua ecuaţie coeficientul lui y^3 să fie 1 şi al lui y^2 zero. Avem

$$p^3=\frac{1}{2}, \quad q=\frac{1}{2}.$$

4. Să se formeze pentru ecuaţia

$$x^3-x^2+2x-3=0,$$

ecuaţia care are ca rădăcini inversele rădăcinilor.

R. $$3x^3-2x^2+x-1=0.$$

Limitele rădăcinilor reale.

111. Se zice că un număr pozitiv L este o limită superioară a rădăcinilor pozitive ale unei ecuaţii $f(x)=0$, când ecuaţia n'are rădăcini mai mari ca L.

Exemplu, dacă rădăcinile ecuaţii $f(x)=0$ sunt mai mici ca 10, 10 e limită superioară; dar şi 11, 12,... sunt limite superioare. Se caută însă, de obicei, o limită superioară cât mai mică.

Deasemenea, l va fi o limită inferioară a rădăcinilor pozitive, când ecuaţia n'are rădăcini pozitive mai mici decât l. De exemplu, dacă rădăcinile ecuaţiei sunt mai mari ca 4, 4 este o limită inferioară, însă şi 3, 2,... sunt limite inferioare. Se caută de obicei o limită inferioară cât mai mare.

Căutarea limitei inferioare se reduce la căutarea limitei superioare, căci, pentru ca l să fie limită inferioară pentru $f(x)=0$, va fi de ajuns ca $\frac{1}{l}$ să fie limită superioară a rădăcinilor pozitive pentru $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Deci, pentru a găsi limita inferioară a rădăcinilor pozitive, se va căuta limita superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuaţii transformate în $\frac{1}{x}$; inversa acestei limite este limita inferioară a ecuaţiei date.

Determinând limitele L' şi l', superioară şi inferioară, ale rădăcinilor pozitive din ecuaţia transformată în $-x$, orice rădăcină negativă a ecuaţiei $f(x)=0$ va fi cuprinsă între $-L'$ şi $-l'$, aşa că $-L'$ va fi o limită inferioară şi $-l'$ o limită superioară a rădăcinilor negative din ecuaţia dată.

In definitiv, totul se reduce la căutarea unei limite superioare a rădăcinilor pozitive.

112. Determinarea limitei superioare a rădăcinilor. Vom stabili mai întâi următoarea proprietate. *Când un polinom $f(x)$ are o singură variaţie şi primul termen pozitiv, dacă valoarea polinomului pentru $x=a$, $a>0$, este mai mare ca zero, atunci pentru orice valoare a lui $x>a$, valoarea polinomului este pozitivă.*

In adevăr, fie

$$f(x)=4x^6+2x^5-3x^4-7x^3-x^2-6,$$

un polinom cu o singură variaţie care e pozitiv pentru $x=2$,

$f(2)=106>0$. Pentru orice valoare a lui x egală cu 3, 4, 5,..., valoarea polinomului rămâne tot pozitivă; căci acem

$$f(x)=4x^6+2x^5-(3x^4+7x^3+x^2+6),$$

$$f(x)=x^4\left[4x^2+2x-\left(3+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^4}\right)\right].$$

Fiindcă $f(2)>0$, avem, pentru $x=2$,

$$4x^2+2x>3+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^4}.$$

Insă când x crește, $4x^2+2x$ crește, iar

$$3+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^4}$$

descrește, căci fiecare termen descrește; deci, cu atât mai mult vom avea

$$f(3)>0,\quad f(4)>0,\ldots$$

Rezultă deci că nu există nici o valoare a lui x mai mare ca 2, pentru care să avem $f(x)=0$, adică nu mai este nici o rădăcină a ecuației mai mare ca 2. Așa dar o limită superioară este $L=2$.

Prin urmare, când prima parte a unei ecuații $f(x)=0$ prezintă o singură variație și primul termen e pozitiv, limita superioară este egală cu o valoare a lui x pentru care $f(x)>0$.

Pentru a găsi o astfel de valoare, înlocuim pe x succesiv cu 1, 2, 3... și vedem care din cantitățile $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$... este pozitivă.

113. Când o ecuație are mai multe variații, problema e mai puțin simplă. O vom rezolva prin două metode.

Metoda grupării termenilor. Se obține o limită superioară a rădăcinilor pozitive, ale unei ecuații $f(x)=0$, descompunând prima parte $f(x)$ în o sumă de polinoame cu o singură variație și căutând pentru fiecare în parte câte un număr x care le face valoarea pozitivă.

Cel mai mare dintre aceste numere va fi o limită superioară L; căci toate polinoamele având o singură variație, și devenind pozitive pentru numere mai mici ca L, cu atât mai mult ele sunt pozitive pentru $x>L$ și deci tot pozitivă va fi suma lor.

Exemple. 1. Să se afle limita superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuației

$$x^5+x^4-x^3+x-1000=0.$$

Grupând termenii, avem

$$(x^5 - 1000) + (x^4 - x^3) + x.$$

Ultima grupă rămâne pozitivă pentru $x > 0$; a doua

$$x^4 - x^3 = x^3(x-1),$$

e pozitivă pentru $x=2$; iar întâia $x^5 - 1000$, pentru $x=3{,}982$, căci trebuind să avem $x^5 - 1000 > 0$, sau $x^5 > 1000$, găsim aplicând logaritmii, $x \geq 3{,}982$, sau mai bine $x > 4$. Deci $L = 4$.

2. Fie ecuația $x^4 - 5x^3 + 17x^2 - 23x + 1 = 0$.

Grupând termenii, avem

$$x^2(x^2 - 5x + 7) + x(10x - 23) + 1.$$

Insă $x^2 - 5x + 7 = 0$ are rădăcinile sale imaginare; deci polinomul $x^2 - 5x + 7$ e totdeauna pozitiv. Binomul $10x - 23$ e pozitiv când $x > 2{,}3$; deci $L = 2{,}3$.

114. Metoda lui Newton. *Se obține o limită superioară* L, *căutând un număr care face pozitiv poilnomul $f(x)$, de gradul m, și toate derivatele sale.*

In adevăr, după formula lui *Taylor*, avem

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a).$$

Dacă, pentru $x=a$, $f(a) > 0$, $f'(a) > 0 \ldots$ $f^{(m)}(a) > 0$, $h > 0$, atunci și $f(a+h) > 0$, adică și pentru valoarea $a+h$ a lui x, mai mare ca a, polinomul $f(x)$ e pozitiv. Deci, un număr mai mare ca a nu mai poate fi rădăcină și atunci $L = a$.

Avem aceeași concluzie dacă unele derivate se anulează pentru $x = a$.

Exemplu. Polinomul fiind

$$f(x) = x^5 + 7x^4 - 12x^3 - 58x^2 + 52x - 13,$$

avem

$$f'(x) = 5x^4 + 28x^3 - 36x^2 - 116x + 52,$$

$$\frac{f''(x)}{1.2} = 10x^3 + 42x^2 - 26x - 58,$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = 10x^2 + 28x - 12,$$

$$\frac{f^{(IV)}(x)}{4!} = 5x + 7,$$

$$\frac{f^{V)}(x)}{5!} = 1.$$

Se caută o valoare a lui x anulând derivata $f^{(IV)}(x)=5x+7$, adică $x=-\frac{7}{5}$; se vede apoi dacă această valoare, sau numărul imediat superior 0, face nulă sau pozitivă derivata $f'''(x)$. Cum $f'''(0)$ este negativ, se caută o valoare superioară lui 0 făcând $f'''(x)>0$; găsim că $f'''(1)>0$. Se substitue această valoare 1 în $f''(x)$ și se vede semnul; cum însă $f''(1)<0$, se încearcă cu numărul imediat mai mare 2, și găsim $f''(2)>0$. Se vede dacă $f'(2)>0$. Fiindcă $f'(2)<0$, se substitue 3 și găsim $f'(3)>0$. Se observă semnul lui $f(3)$, și fiindcă $f(3)>0$, avem $L=3$.

115. Exerciții. Să se afle limitele rădăcinilor ecuației

$$x^4-5x^3-37x^2+3x+39=0.$$

R. Grupând, $x^2(x^2-5x-37)+3x+29$. $L=10$, $l=\frac{1}{2}$, căci transformata în $\frac{1}{x}$ este $39x^4+3x^3-37x^2-5x+1=0$. sau

$$x^2(39x^2-37)+x(3x^2-5)+1;\ l=\frac{1}{2}-.$$

Transformata în $-x$, fiind

$$x^4+5x^3-37x^2+3x+39=0,\quad -L'=-7,\quad -l'=-\frac{1}{2}-.$$

2. Să se aplice metoda lui *Newton* ecuațiilor

$$x^5+5x^4-10x^3+x^2-16x-7=0.$$

$$x^6-20x^4+70x^3-10x^2-3x-5=0.$$

R. $L=3$; $L=5$.

Calcularea rădăcinilor întregi și fracționare.

116. Calcularea rădăcinilor întregi. După ce am găsit intervalele în care se află rădăcinile unei ecuații, să ne propunem a calcula aceste rădăcini.

Ne vom ocupa mai întâi de rădăcinile întregi și fracționare. Fie a o rădăcină întreagă a ecuației cu coeficienți întregi

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0.$$

Deci

$$f(a)=A_0a^m+A_1a^{m-1}+\ldots+A_m=0.$$

De unde

$$A_m=-a(A_0a^{m-1}+A_1a^{m-2}+\ldots A_{m-1}).$$

Membrul al doilea fiind divizibil cu a, A_m e divizibil cu a.

Deci rădăcinile întregi sunt divizori ai ultimului termen A_m al ecuaţiei. Dacă $A_m = \pm 1$, ecuaţia n'are rădăcini întregi, decât cel mult pe ± 1.

Polinomul $f(x)$ fiind cu coeficienţi întregi, câtul lui $f(x)$ prin $x - a$ este un polinom cu coeficienţi întregi. Deci ordonând invers polinomul după puterile crescătoare ale lui x, câtul polinomului

$$A_m + A_{m-1}x + \ldots + A_0 x^m$$

prin $a - x$, trebue să fie cu coeficienţi întregi. Făcând împărţirea avem

$$\begin{array}{l|l}
A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + \ldots & a - x \\
\hline
/ \quad \dfrac{A_m}{a} & \dfrac{A_m}{a} + \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{A_m}{a} + A_{m-1}\right)x + \ldots \\
\hline
\left(\dfrac{A_m}{a} + A_{m-1}\right)x + \ldots &
\end{array}$$

Trebue, deci, ca $\dfrac{A_m}{a}$ să fie întreg, adică rădăcina să fie divizor al ultimului termen, ceeace am găsit mai sus şi pe altă cale; apoi suma întregului $\dfrac{A_m}{a}$ cu A_{m-1} să fie divizibilă cu a; etc. Dacă nu e divizibilă, câtul n'are coeficienţii întregi şi deci a nu poate fi rădăcină a ecuaţii.

Continuând astfel împărţirea şi presupunând că toţi coeficienţii sunt întregi, mai trebue ca A_0 plus ceiace i se adaugă să fie zero. Dacă nu e aşa, a nu e rădăcină.

Exemplu. Să se afle rădăcinile întregi ale ecuaţiei

$$f(x) = 4x^4 - x^3 - 56x^2 + 57x + 36 = 0.$$

Scriind

$$f(x) = x^2(4x^2 - x - 56) + 57x + 36,$$

găsim $L = 4$. Făcând transformata în $-x$,

$$f(-x) = 4x^4 + x^3 - 56x^2 - 57x + 36 = 0,$$

limita superioară a rădăcinilor pozitive ale acestei ecuaţii fiind 5, limita inferioară a rădăcinilor negative din ecuaţia $f(-x) = 0$ va fi -5, ceeace se vede grupând primii patru termeni.

Rădăcinile întregi pot fi între divizorii lui 36 cuprinşi în intervalul $(-5, 4)$ şi anume:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, -4.$$

Se vede că $f(1)=40$, $f(-1)=-72$; deci ± 1 nu sunt rădăcini. Pentru a încerca ceilalţi divizori, se aşează astfel operaţia:

(1)	4	-1	-56	57	36	
				—	18	2
				—	-18	-2
(2)	0	-4	-11	23	12	3
				—	4	3
				—	-4	-3
				—	3	4
(3)		0	4	-5	-3	-4

E de observat că aceste calcule de încercare sunt mai simple decât introducerea lui a direct în $f(x)$ şi verificând dacă $f(a)$ e nul sau nu.

Ajungem deci, la regula următoare. Se scrie in prima linie coeficienţii (1) ai ecuaţiei. Când lipseşte vreun termen, se înlocueşte coeficientul cu 0. Se încearcă cu divizorii cari se scriu la dreapta, începând cu cei mai mici, de exemplu cu 2. Se face câtul dintre $A_m=36$ şi $a=2$; se adaugă acest cât 18 la $A_{m-1}=57$ şi suma lor nefiind divizibilă cu $a=2$, urmează că 2 nu este rădăcină. Se încearcă la fel cu -2, care deasemenea nu e rădăcină. Ne oprim la divizorul 3; câtul 12 dintre $A_m=36$ şi $a=3$ se scrie sub 36; se adună 12 cu 57 şi câtul acestei sume prin 3, adică 23, se scrie sub 57; se adaugă lui -56 pe 23 şi se divide cu 3; câtul -11 se scrie sub -56; se adună -1 cu -11 şi câtul -4 se scrie sub -1; acest cât adunat cu $A_0=4$ fiind zero, 3 este rădăcină.

Coeficienţii (2) sunt ai ecuaţiei

$$-4x^3-11x^2+23x+12=0.$$

care s'a obţinut din prima divizând cu $x-3$ şi care ecuaţie admite celelalte rădăcini.

Incercăm divizorii rămaşi cu coeficienţii (2). Se poate ca 3 să fie rădăcină multiplă, deci încercăm din nou divizorul 3 faţă de coeficienţii (2). Câturile nefiind întregi, se găseşte pentru a doua rădăcina -4.

Numerele corespunzătoare (3) sunt coeficienţii câtului polinomului $f(x)$ cu $(x-3)(x+4)$.

Ecuaţia dată se poate se scrie

$$f(x)=(x-3)(x+4)(4x^2-5x-3)=0.$$

Ultimele două rădăcini sunt date de ecuaţia

$$4x^2-5x-3=0,$$

şi se găseşte

$$x=\frac{1}{8}(5\pm\sqrt{73}).$$

117. *Observare.* Se poate reduce numărul încercărilor, având în vedere că, a fiind o rădăcină întreagă, avem

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

unde $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sunt cu coeficienţi întregi.

Inlocuind pe x succesiv cu $+1$ şi -1, găsim

$$\frac{f(1)}{1-a}=\varphi(1),\quad \frac{f(-1)}{a+1}=-\varphi(-1).$$

Numerele $\varphi(1)$ şi $\varphi(-1)$ fiind întregi, numai pe acei divizori, a, îi încercăm, care fac ca

$$\frac{f(1)}{1-a} \quad \text{şi} \quad \frac{f(-1)}{a+1}$$

să fie numere întregi.

Exemplu. $f(x)=x^3-44x^2-45x+12600=0.$

Avem $L=45$, $-L'=-17$. Va fi de ajuns să găsim numai o rădăcină căci divizând pe $f(x)$ cu $x-a$, a fiind rădăcina, ecuaţia rămasă va fi gradul al II-lea.

Divizorii lui 12600 cuprinşi între 45 şi -17 sunt ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±7, ±8, ±9, ±10, ±12, ±14, ±15, 18, 20, 21, 24, 25, 28, 30, 35, 36, 40, 42.

Avem $f(1)=12512$, $f(-1)=12600$. Vom încerca numai acei divizori a, pentru care $f(1)$ e divizibil cu $1-a$, iar $f(-1)$ e divizibil cu $1+a$.

Aplicând această observare, rămân de încercat divizorii 2, 3, 5, 9, 24, 35, -3, -7, -15.

Incercând aceşti divizori, găsim o rădăcină -15; deci

$$f(x)=(x+15)(x^2-59x+840)=0.$$

118. Calcularea rădăcinilor fracţionare. Să considerăm ecuaţia cu coeficienţi întregi

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$

care admite rădăcina fracţionară $\frac{a}{b}$. Deci

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=A_0\frac{a^m}{b^m}+A_1\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+\ldots+A_m=0,$$

de unde

$$A_0a^m + A_1a^{m-1}b + A_2a^{m-2}b^2 + \ldots + A_{m-1}ab^{m-1} + A_mb^m = 0,$$

(4) $$A_0a^m = -b(A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2}b + \ldots + A_mb^{m-1}),$$

(5) $$A_mb^m = -a(A_0a^{m-1} + A_1a^{m-2}b + \ldots + A_{m-1}b^{m-1}).$$

Din egalitatea (4) se vede că b divizând partea a doua, divide şi pe A_0a^m. Insă a şi b fiind primi (căci totdeauna se poate simplifica fracţia $\frac{a}{b}$ până devine ireductibilă), şi a^m şi b sunt primi între ei; deci b divide pe A_0. In acelaşi mod, din (5), deducem că a divide pe A_m.

Aşa dar, dacă o ecuaţie admite o rădăcină fracţionară, numărătorul a este divizorul ultimului termen A_m, iar numitorul b divizorul primului coeficient A_0.

119. *Observare.* O ecuaţie în care coeficientul A_0 al primului termen este 1, n'are rădăcini fracţionare, căci numitorul unei astfel de rădăcini trebue să dividă pe A_0 care este 1.

120. *Se poate totdeauna aduce calculul rădăcinilor fracţionare la acela al rădăcinilor întregi.* In adevăr, fie $f(x)=0$ o ecuaţie cu coeficienţi întregi. Dacă primul termen are coeficientul 1, ecuaţia n'are rădăcini fracţionare (Nr. 119). Dacă acest coeficient este diferit de 1, se va transforma ecuaţia $f(x)=0$ într'alta în care coeficientul primului termen să fie 1 (Nr. 108), înmulţind rădăcinile ecuaţii $f(x)=0$ cu un număr k ales potrivit.

Va fi de ajuns a calcula rădăcinile întregi ale ecuaţiei celei nouă şi a le împărţi cu k spre a găsi rădăcinile fracţionare ale ecuaţiei date.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$f(x) = 12x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Se găseşte $L = 2$, $-L' = -2$. Rădăcinile întregi sunt divizorii lui 6 cuprinşi între -2 şi 2, adică ± 1. Insă $f(1) = -6$, $f(-1) = 0$; deci -1 este rădăcină.

Dividem $f(x)$ cu $x+1$, ceeace se face uşor scriind ca la rădăcinile întregi

12	−8	−21	5	6	
0	−12	20	1	−6	−1

Celelalte rădăcini sunt date de ecuaţia

(6) $$12x^3 - 20x^2 - x + 6 = 0.$$

Ne mai având rădăcina -1, ecuaţia are rădăcini fracţionare.

Pentru a le găsi, transformăm ecuaţia (6) în alta, în care primul termen să aibă coeficientul 1. Se pune $y=kx$, $x=\frac{y}{k}$ şi se obţine

$$12\frac{y^3}{k^3}-20\frac{y^2}{k^2}-\frac{y}{k}+6=0.$$

Se ia pentru k valori mai mici ca $A_0=12$, când coeficientul al doilea din ecuaţie conţie factori de ai coeficientului întâi.

E avantajos a se pune $k=6$. Găsim ecuaţia transformată

$$x^3-10x^2-3x+108=0, \tag{7}$$

schimbând pe y cu x.

Se vor căuta rădăcinile întregi ale ecuaţiei (7). Limitele fiind $2\times6=12$, $-2\times6=-12$, divizorii lui $108=2^2\times3^3$, cuprinşi în intervalul $(-12, 12)$, sunt

$$\pm1, \quad \pm2, \quad \pm3, \quad \pm4, \quad \pm9.$$

Din aceste numere ar trebui excluse acelea, care împărţite cu 6 ar da numere întregi. Aci încercăm cu toate, ±1, ±2, ±3, ±4, ±9.

Insă $$f(1)=96, \quad f(-1)=100.$$

$$\frac{f(1)}{a-1}=\frac{96}{a-1}, \quad \frac{f(-1)}{a+1}=\frac{100}{a+1}.$$

Se vede, că rămâne de încercat cu -2, ±3, 4, 9.

Se găseşte că rădăcinile ecuaţiei (7) sunt -3, 4 şi 9, iar rădăcinile ecuaţiei (6) vor fi

$$x=\frac{y}{k}=\frac{y}{6}, \quad -\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}, \quad \frac{4}{6}=\frac{2}{3}, \quad \frac{9}{1}=\frac{2}{3}.$$

121. Aplicaţie. *Pentru ce valori ale lui x avem*

$$f(x)=3x^5+2x^4-4x^3+4x^2-7x+2>0.$$

Se va rezolva $f(x)=0$. Avem $L=2$ şi

3	2	-4	4	-7	2	1
0	-3	-5	-1	-5	2	-2
	0	3	-1	3	-1	

Două rădăcini sunt 1 şi -2; celelalte sunt date de ecuaţia

$$3x^3-x^2+3x-1=0,$$

sau

$$(3x-1)(x^2+1)=0.$$

Deci avem

$$f(x) = (x-1)(x+2)(3x-1)(x^2+1).$$

Formăm tabloul

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

care ne arată că $f(x) > 0$ când

$$-2 < x < \frac{1}{3} \text{ şi } x > 1.$$

122. **Exerciţii.** Să se rezolve ecuaţiile

1. $$x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 6 = 0.$$

R. 1, -1, -2, 3, $\pm i$.

2. $$2x^3 - 12x^2 + 13x + 15 = 0.$$

R. 3.

3. $$x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 37x^2 - 41x - 30 = 0;$$

$$12x^5 + 40x^4 + 13x^3 - 11x - 6 = 0.$$

R. -2, 3, -5; -3, $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.

4. $$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0.$$

R. $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{5}$.

5. $$8x^6 - 38x^5 + 57x^4 - 60x^3 + 52x^2 - 22x + 3 = 0.$$

R. 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$.

6. Să se descompună în factori polinomul

$$3x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x + 4.$$

R. $(x-3)(3x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

7. Să se rezolve ecuaţia

$$8\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-3x^2-4x+9} = 125.$$

R. Avem

$$\frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-3x^2-4x+12} = 1.$$

Trebue ca $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$. Rezultatul 3, 2, -2.

8. Să se găsească baza unui sistem de numeraţie în care numărul 824 din sistemul zecimal e scris 3452.

R. $$3x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 824.$$

$$x = 6.$$

9. Să se rezolve ecuația

$$2x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 4x - 3 = 0,$$

știind că admite rădăcina $1 + \sqrt{2}$.

R. Se divide cu $(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$. Ecuația rămasă admite pentru x valorile $1, -1, \frac{3}{2}$.

10. Să se rezolve ecuația

$$x^6 - 3x^5 + 8x^3 - 3x + 1 = 0,$$

R. Ecuația reciprocă se divide cu x^3. Două rădăcini sunt date de

$$x + \frac{1}{x} = -2.$$

11. Să se rezolve inegalitățile

$$a)\ \frac{x^3+3x+2}{x+1} > \frac{2x^2+3x-2}{x-1}; \quad b)\ 27x + \frac{25}{2x+1} > \frac{72x^2-49x-13}{x^3-1}.$$

R. $$a)\ \frac{x(x+2)(x^2-5x+2)}{(x-1)(x+1)} > 0;$$

$$x < -2, \quad -1 < x < 0, \quad \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17}) < x < 1, \ x > \frac{1}{2}(5 + \sqrt{17}).$$

$$b)\ -1 < x < -\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} < x < 1, \quad x > 2.$$

12. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + x^2 + 2x + m = 0,$$

știind că

$$x_1 + x_2 = x_3 x_4.$$

R. Se înlocuește în relațiile între rădăcini și coeficienți.

$$x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4) = x_3 x_4 = u, \quad x_1 x_2 = v.$$

Ecuația care dă pe u este $u^3 - 2u^2 + u - 2 = 0$,

și are rădăcina $u = 2$; $v = 3$, $m = 6$.

13. Să se rezolve ecuația

$$2x^4 - 15x^3 + mx^2 + nx + 8 = 0,$$

știind că rădăcinile sunt în progresie geometrică.

R. Se înlocuesc în relațiile între rădăcini și coeficienți.

$$x_1 = \frac{u}{q^3}, \quad x_3 = \frac{u}{q}, \quad x_4 = uq, \quad x_2 = uq^3.$$

Se obțin relațiile

$$u^4 = 4, \quad u\left(\frac{1}{q^3} + q^3 + \frac{1}{q} + q\right) = \frac{15}{2},$$

$$u^3\left(\frac{1}{q^3}+q^3+\frac{1}{q}+q\right)=-\frac{n}{2},\quad u^2\left(q^3+\frac{1}{q^3}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)+2u^2=\frac{m}{2}.$$

$$u=\pm\sqrt{2};\; n=-30.$$

Rămân ecuaţiile

$$\left(q^3+\frac{1}{q^3}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)=\frac{m}{4}-2,\quad q^3+\frac{1}{q^3}+q+\frac{1}{q}=\frac{15}{2\sqrt{2}}.$$

Se pune $q+\frac{1}{q}=z$, şi ecuaţia ce dă pe z este

$$z^3-2z-\frac{15}{2\sqrt{2}}=0.$$

Se face transformarea $z=\frac{y}{\sqrt{2}}$. Se găseşte

$$q+\frac{1}{q}=\frac{3}{\sqrt{2}};\quad m=35;\ \text{rădăcinile } \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4.$$

14. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4+px^3+47x^2-72x+q=0.$$

ştiind că trei rădăcini sunt în progresie aritmetică, iar a patra egală cu suma primelor trei.

R. $x_1=u-v$, $x_3=u$, $x_2=u+v$, $x_4=u+3v$. Din ecuaţiile $\Sigma x_1 x_2=47$, $\Sigma x_1 x_2 x_3=72$ se găseşte $u=2$, $v=\pm 1$; $p=-12$, $q=36$. Rădăcinile sunt 1, 2, 3, 6.

Calcularea rădăcinilor iraţionale.

123. Pentru a rezolva o ecuaţie algebrică, cu coeficienţi întregi, se caută mai întâi rădăcinile întregi şi fracţionare.

Se consideră apoi ecuaţia rămasă divizând pe cea dată cu factorii ce rezultă din rădăcinile întregi şi fracţionare. Ecuaţia rămasă, dacă mai are *rădăcini reale*, ele nu pot fi decât *iraţionale*.

Calcularea rădăcinilor iraţionale ale unei ecuaţii cu coeficienţi întregi sau iraţionali se descompune în două părţi. 1⁰ Separarea rădăcinilor; 2⁰ Calcularea rădăcinilor cu o aproximaţie dată.

Ne vom ocupa numai de rădăcinile pozitive, căci căutarea celor negative se reduce la a celor pozitive, a transformatei în $-x$.

124. *Separarea rădăcinilor.* Dacă se poate rezolva ecuaţia derivată $f'(x)=0$ a ecuaţiei $f(x)=0$, pentru a separa rădăcinile, se aplică teorema lui *Rolle.*

Dacă această rezolvare a derivatei e imposibilă, se substitue în $f(x)$ numere întregi, până se găsesc două numere consecutive pentru care valorile lui $f(x)$ sunt de semne contrare.

Chiar dacă cu teorema lui *Rolle* am găsit că o rădăcină irațională e cuprinsă între două numere a și b, se substitue în $f(x)$ numerele întregi cele mai apropiate de a și b, până se găsesc două, care dau rezultate de semne contrare. Toate aceste operații preliminare au de scop să ne dea intervale în care să se găsească câte o singură rădăcină pe care o putem presupune simplă.

125. Metoda de aproximație prin părți proporționale. Fie a și b două numere întregi consective între care se află cuprinsă o rădăcină; de exemplu 3 și 4. Am putea să substituim în $f(x)$ numerele 3,1; 3,2;... până când două rezultate consecutive sunt de semne contrare.

Pentru a limita aceste încercări, știm că pentru $f(x)$ corespund creșteri foarte mici, când variabila x crește foarte puțin; admitem atunci că creșterile funcției sunt proporționale cu ale variabilei.

Prin urmare, rădăcina fiind mai mare ca a, o putem scrie $a+h$; și atunci $f(a+h)=0$. Avem

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{f(a)-f(a+h)}{a-(a+h)}$$

și fiindcă $f(a+h)=0$, avem

$$h=-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(a)-f(b)}, \tag{8}$$

iar valoarea apropiată a rădăcini este $a+h$, unde h trebue să fie pozitiv și mai mic ca $b-a$.

Dacă $b>a$, e mai bine să se ia

$$h=-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Dacă $f(a)>0$, $f(b)<0$, se calculează $f(a+h)$; când $f(a+h)>0$ rădăcina este în intervalul $(a+h,\ b)$; când $f(a+h)<0$, intervalul este $(a,\ a+h)$.

Se aplică din nou intervalului găsit aceiași metodă și se găsește o valoare mai apropiată a necunoscutei; etc.

126. Aplicație. Să se calculeze cu două zecimale exacte rădăcina pozitivă a ecuației

$$f(x)=x^3-x-1=0.$$

$f(x)$ prezentând o variație, după teorema lui *Descartes*, ecuația are o rădăcină pozitivă. Avem

$$f(0)<0,\quad f(1)=-1<0,\quad f(2)=5>0.$$

Deci între 1 şi 2 este o rădăcină. Aplicăm formula (8) şi avem

$$h=\frac{1}{6},\quad h=0{,}1.$$

Substituim în $f(x)=x(x^2-1)-1$ numerele 1,1; 1,2;... şi găsim

$$f(1{,}1)<0,\ f(1{,}2)=-0{,}472,\ f(1{,}3)=-0{,}103<0,$$
$$f(1{,}4)=0{,}344>0.$$

Deci rădăcina este în intervalul (1,3 ; 1,4).

Aplicăm din nou acestui interval formula (8) şi găsim

$$h=\frac{0{,}103\times 0{,}1}{0{,}447}=0{,}02\ldots$$

Substituim 1,32; 1,33... şi avem

$$f(1{,}32)=-0{,}020032,$$
$$f(1{,}33)=\quad 0{,}022637.$$

Deci rădăcina, cu două zecimale exacte, este 1,32.

127. Interpretarea grafică a metodei prin părţi proporţionale. Fie $f(x)=0$ o ecuaţie, care are o rădăcină în intervalul (a, b) şi fie că $f(a)>0$; atunci $f(b)<0$.

Să considerăm curba $y=f(x)$ (Fig. 34) raportată la două axe perpendiculare Ox şi Oy. Curba se va construi, calculând valorile lui $f(x)$ pentru diferitele valori ale lui x.

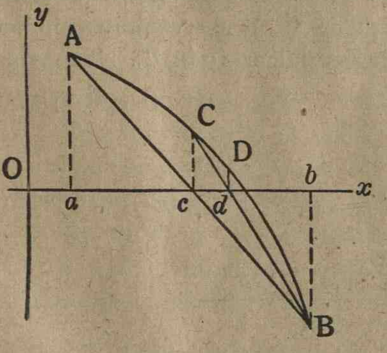

Fig. 34.

A rezolva ecuaţia $f(x)=0$, înseamnă a găsi abscisa punctului de intersecţie al curbei cu axa Ox. Dacă curba $y=f(x)$ are forma indicată (Fig. 34), să considerăm punctul c, unde coarda AB tae axa Ox.

Din triunghiurile dreptunghice asemenea Aac, Bbc, obţinem

$$\frac{ac}{cb}=\frac{Aa}{Bb}.$$

Ţinând seamă de sens, avem

$$\frac{ac}{cb}=\frac{f(a)}{-f(b)}.$$

De unde

$$\frac{ac}{ac+cb}=\frac{f(a)}{f(a)-f(b)},$$

$$\frac{ac}{ab}=\frac{f(a)}{f(a)-f(b)}.$$

Insă $$ab=Ob-Oa=b-a.$$

Deci $$ac=\frac{-(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Dar această valoare este egală tocmai cu h din formula (8), întrebuințând metoda prin părţi proporţionale.

Prin urmare, a întrebuința această metodă, însemnează a înlocui una din limitele intervalului (a, b) cu punctul unde dreapta AB tae axa Ox.

Dacă curba are forma indicată în fig. 34, adică cu convexitatea în sus, spre y pozitiv, atunci se vede chiar pe figură că $f(c)>0$, deci intervalul va fi (c, b).

Pentru a micşora şi mai mult intervalul, se duce linia CB, care tae axa Ox în d. Fiindcă $f(d)>0$, intervalul va fi (d, b), etc.

Prin urmare, totul depinde să se ştie mai dinainte ce dispoziție are curba $y=f(x)$; căci dacă ar fi cu convexitatea în jos (Fig. 35), spre y negativ, atunci intervalul ar fi (a, d), și nu vom

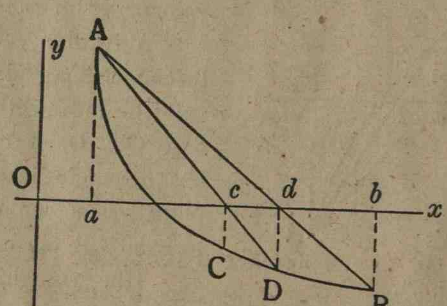

Fig. 35

mai susbstitui numere mai mari ca d; considerând linia AD, care tae pe Ox în c, intervalul mai mic va fi (a, c), etc.

128. Metoda de aproximaţie a lui Newton. Dacă (a, b) este intervalul unde se află rădăcina, fie h ceiace trebue adăugat lui a, şi k ceiace trebue scăzut din b, pentru ca rădăcina să fie $a+h$ sub $b-k$. Deci

$$f(a+h)=0, \quad f(b-k)=0.$$

Aplicând formula lui *Taylor*, avem

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(a)=0,$$

$$f(b-k)=f(b)-\frac{k}{1}f'(b)+\frac{k^2}{2!}f''(b)-\ldots\pm\frac{k^m}{m!}f^{(m)}(b)=0.$$

Cum h şi k sunt mici, puterile lor sunt şi mai mici; deci putem neglija puterile lor dela a doua în sus, aşa că avem

$$f(a)+hf'(a)=0,$$
$$f(b)-kf'(b)=0.$$

De unde

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}, \quad k=\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

E de observat că h şi k trebue să fie *pozitivi* şi mai mici ca intervalul (a, b), căci altfel, în loc să micşorăm intervalul rădăcinilor, eşim din acest interval.

După cum vedem, putem lua ca valoare apropiată sau $a+h$, sau $b-k$; dacă $f(a)>0$ şi $f(b)<0$, când $f(a+h)>0$, intervalul este $(a+h, b)$; dacă $f(a+h)<0$, luăm ca interval $(a, a+h)$. Noului interval i se aplică aceiaşi metodă.

Intrebuinţarea metodei lui *Newton* cere multă atenţie, căci se pot face calcule lungi în zadar, neştiind pe care să calculăm, pe h sau pe k, şi cu ce interval trebue înlocuit cel vechiu.

Această nesiguranţă va dispare, când se va avea în vedere interpretarea geometrică ce se va da acestei metode de aproximaţie.

129. Interpretarea grafică a metodei lui Newton. Rădăcina fiind cuprinsă în intervalul (a, b), să construim curba A B în acest interval (Fig. 36) şi să ducem tangenta la curbă în punctul A. Să însemnăm cu T punctul de intersecţie al acestei tangente cu axa Ox şi cu $OP=a$ abscisa punctului A. Din triunghiul dreptunghic A P T, avem

$$PT=AP\,\text{cotg}\,PTA=\frac{AP}{\text{tg}\,PTA}=\frac{AP}{-\text{tg}\,xTA}.$$

Inlocuind $AP = f(a)$, obținem

$$PT = -\frac{f(a)}{\operatorname{tg} x\,TA}.$$

Insă, se știe că *derivata unei funcții* $f(x)$ *pentru* $x=a$, *este egală cu valoarea tangentei trigonometrice a unghiului pe care tangenta la curba* $y=f(x)$, *în punctul de coordonate* $x=a$, $y=f(a)$, *îl face cu axa* Ox.

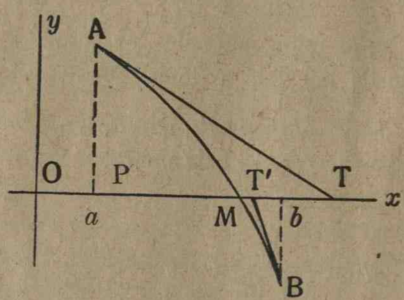

Fig. 36

Inlocuind deci pe $\operatorname{tg} x\,TA = f'(a)$, avem

$$PT = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Insă această expresie este identică cu corecția

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

dată de metoda lui *Newton* și deci revine a înlocui intervalul (a, b), cu altul în care una din extremități ar fi punctul unde tangenta în A la curbă tae axa Ox. Dar în cazul figurei 36, punctul T este afară din interval; deci iată că cu metoda lui *Newton*, rău întrebuințată, în loc să ne apropiem, ne depărtăm de rădăcină.

Insă se observă, că, la fig. 36 ne apropiem de rădăcină ducând tangenta BT' în punctul B și printr'un calcul analog găsim

$$b\,T' = \frac{f(b)}{f'(b)} = k,$$

adică, trebue să aplicăm metoda lui *Newton* la cealaltă extremitate B a curbei.

Putem avea însă mai multe cazuri de figură. Când curba are forma din figura 37, se duce tangenta în punctul B şi $k = \frac{f(b)}{f'(b)}$; pentru figura 38, ducem tangenta în A şi aplicăm $h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$; la figura 39 se duce tangenta în A, având $h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$, iar la fig. 40 vom duce tangenta în B şi avem $k = \frac{f(b)}{f'(b)}$.

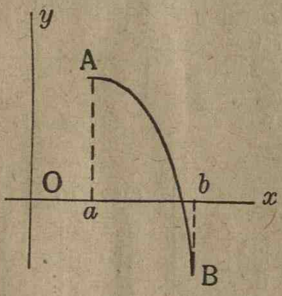

Fig. 37.

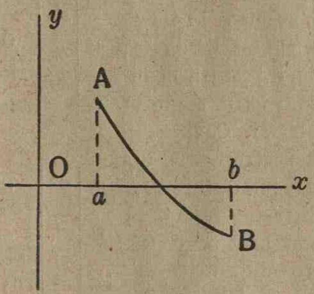

Fig. 38.

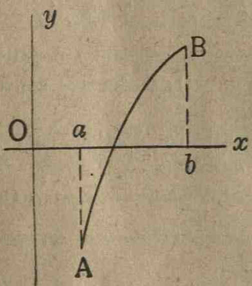

Fig. 39.

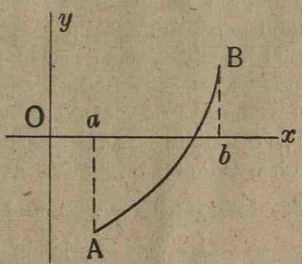

Fig. 40.

Vedem că totul se reduce la a şti când curba e cu convexitatea în sus, ca în fig. 37 şi 39 şi când are convexitatea în jos, ca în fig. 38 şi 40.

Odată ce s'a construit curba între A şi B, se aplică metoda lui *Newton* şi noului interval, observând la ce extremitate trebue operat.

130. Metodă pentru a determina forma curbei $y = f(x)$ în intervalul (a, b).

Fie $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ecuaţia tangentei în $M(x_0, y_0)$ la curba $y = f(x)$. Ducând o paralelă cu Oy (Fig. 41), care tae curba în P şi tangenta în Q, avem $bP = y = f(x)$, $bQ = y_0 + f'(x)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $u = QP = bP - bQ = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Forma curbei în intervalul (a, b), care cuprinde punctul M (x_0, y_0), se vede studiind variaţia funcţiei u. Avem $u' = f'(x) - f'(x_0)$, $u'' = f''(x)$. Avem două cazuri de considerat. Intâi, $f''(x) > 0$; avem tabloul şi forma curbei în intervalul (a, b) (Fig. 41). Funcţia u'', derivata lui u', este pozitivă în intervalul (a, b); deci u' creşte în acest interval şi cum se anulează pentru $x = x_0$, rezultă că în intervalul (a, x_0) este negativă, iar în intervalul (x_0, b) este pozitivă. Derivata u' a funcţiei u fiind negativă în intervalul (a, x_0), u descreşte; iar u' fiind pozitivă în intervalul $(x_0\ b)$, u creşte în acest interval. Cum u se anulează pentru $x = x_0$, urmează că în intervalul (a, x_0) este pozitivă, descreşte până la zero şi apoi iar creşte. Deci, diferenţa u dintre ordonatele unui punct al curbei şi al tangentei, corespunzătoare la aceeaşi valoare a lui x, este pozitivă, curba este deasupra tangentei (Fig. 41), are convexitatea către y negativi.

x	u''	u'	u
a			
	$+$	$-$ cr	descr. $+$
x_0		0	0
	$+$	$+$ cr	creşte $+$
b			

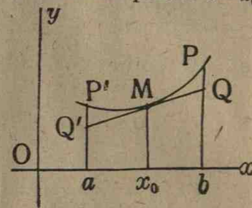

Fig. 41.

x	u''	u'	u
a			
	$-$	desc $+$	cr. $-$
x_0		0	0
	$-$	desc $-$	desc. $-$
b			

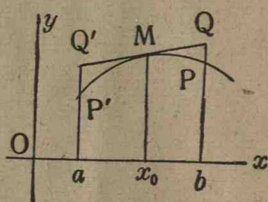

Fig. 42.

Când $f''(x) < 0$, avem tabloul şi curba (Fig. 42); curba are convexitatea către y pozitivi, curba este dedesubtul tangentei.

In rezumat, când $f'(x) \neq \infty$, adică tangenta nu e paralelă cu Oy, dacă $f'(x) \neq 0$, curba este convexă în vecinătatea lui x, dacă $f''(x) < 0$, are convexitatea spre y pozitivi (Fig. 42), dacă $f''(x) > 0$, are convexitatea spre y negativi (Fig. 41).

131. Aplicaţie. *Să se afle cu 4 zecimale exacte rădăcinile ecuaţii*

$$f(x) = x^3 - 8x - 1 = 0.$$

Polinomul $f(x)$ având o variaţie, el va avea o rădăcină pozitivă; $(f - x)$ având două variaţii, ecuaţia are două rădăcini negative sau nici una.

Pentru a ne face idee de intervalele rădăcinilor, să aplicăm teorema lui *Rolle*. Rădăcinile derivatei

$$f'(x) = 3x^2 - 8 = 0,$$

fiind $\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, şirul lui *Rolle* devine

$f(-\infty)$	$f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$	$f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$	$f(\infty)$
$-$	$\frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} - 1$	$-\frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{1}} - 1$	$+$

Deci intervalele sunt

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{8}{3}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right), \quad \left(\sqrt{\frac{8}{3}}, \infty\right).$$

Substituind numere întregi consecutive, găsim

$$f(-3) = -4, \quad f(-2) = 7, \quad f(-1) = 6, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = -8,$$
$$f(2) = -9, \quad f(3) = 2.$$

Urmează că intervalele rădăcinilor sunt

$$(-3, -2), (-1, 0), (2, 3).$$

Să calculăm rădăcina pozitivă cuprinsă în intervalul 2, 3 cu 4 zecimale exacte cu metoda prin părţi proporţionale.

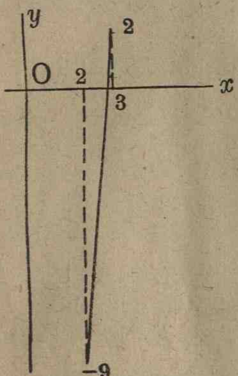

Fig. 43.

Avem $f''(x) = 6x$; deci în intervalul (2, 3), $f''(x) > 0$, adică curba are forma alăturată (Fig. 43). De unde urmează

$$h = -\frac{(a-b)\,fa}{f(a) - f(b)} = \frac{9}{11} = 0{,}81\ldots$$

Intervalul va fi 2,8 şi 3. Avem

$$f(2{,}8) = x(x^2 - 8) - 1 = 1{,}448,$$

$$h = \frac{(2{,}8 - 3)\ 1{,}448}{-3{,}448} = 0{,}08\ldots$$

Noul interval va fi (2,88; 3). Aplicăm din nou metoda, şi avem

$$h = -\frac{(2{,}88 - 3)\ f(2{,}88)}{f(2{,}88) - f(3)} = 0{,}008\ldots$$

Se vede că rădăcina pozitivă este 2,8888.

Pentru a calcula rădăcinile negative, facem transformata în $-x$,

$$\varphi(x) = x^3 - 8x + 1 = 0$$

şi avem

$$\varphi(2) = -7, \qquad \varphi(3) = 4.$$

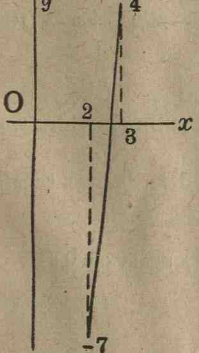

Fig. 44.

Să aplicăm metoda lui *Newton* intervalului 2, 3. Fiindcă $\varphi''(x) > 0$ în interval, curba are forma din figura 44, cu convexitatea în jos. Va trebui să ducem tangenta în punctul 4 şi avem

$$k = \frac{\varphi(3)}{\varphi'(3)} = \frac{4}{27 - 8} = \frac{4}{19} = 0{,}2\ldots$$

Intervalul nou va fi 2 şi $3 - 0{,}2 = 2{,}8$

Avem

$$\varphi(2,\ 8) = x(x^2 - 8) + 1 = 0{,}552,$$
$$\varphi'(2,\ 8) = 15{,}52;$$

de unde $\quad k' = \dfrac{0{,}552}{15{,}52} = 0{,}03.$

Noul interval va fi 2 şi 2,8 — 0,03 = 2,77. Avem

$$k'' = \frac{\varphi(2{,}77)}{\varphi'(2{,}77)} = 0{,}006,$$

deci intervalul este 2 şi 2,77 — 0,006 = 2,764. Aplicăm aceiaşi metodă noului interval şi avem

$$k''' = \frac{\varphi(2{,}764)}{\varphi'(2{,}764)} = 0{,}0001.$$

Deci rădăcina este aproximativ — 2,7639.

Intrebuinţând aceiaşi metodă şi la intervalul (— 1,0) se găseşte că rădăcina este — 0,2251.

132. Exerciţii. 1. Să se calculeze rădăcina pozitivă a ecuaţiei

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

R. 2,09445.

2. Să se afle cu patru zecimale exacte rădăcina pozitivă a ecuaţiei

$$x^3 - 7x - 7 = 0.$$

R. 3,0482.

3. Să se rezolve ecuaţia

$$20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0.$$

R. 0,1127 ; 0,5 : 0,88729.

4. Să se rezolve ecuaţia

$$20x^3 - 24x^2 + 3 = 0.$$

R. — 0,31469 ; 0,44603 : 1,06865.

5. Ecuaţia

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 13x + 4 = 0$$

are o rădăcină în intervalul (1, 2). Să se afle cu patru zecimale exacte acea rădăcină.

R. 1,6369.

6. Să se calculeze cu cinci zecimale exacte rădăcina pozitivă a ecuaţiei

$$x^3 - 13x - 28 = 0.$$

R. 4,40034.

7. Să se împartă o jumătate de sferă de rază 1 în două părţi echivalente printr'un plan paralel cu baza.

R. Distanţa dela centrul sferei la planul căutat fiind x, obţinem ecuaţia

$$fx \equiv x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Trei rădăcini reale; una pozitivă în intervalul (0; 1) egală cu 0,347.

8. Fie

$$f(x) = (x + a)(l^2 - x^2) - c^2$$

şi $-l < x_0 < l$; ştiind că $f(x_0) \geqslant 0$, să se arate

1° Că ecuaţia $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale.

2º Că una din rădăcini e cuprinsă între 0 şi l $(l > 0)$.

3º Presupunând $c \neq 0$, dacă ecuaţia are două rădăcini egale, ele sunt egale cu x_0.

4º Să se calculeze cu trei zecimale exacte rădăcina pozitivă a ecuaţiei, când $a = 2$, $l = c = 1$.

R. 1º Se vede că şirul

$$f(-\infty) \qquad f(-l) \qquad f(x_0) \qquad (f\,l)$$

are numai variaţii.

2º Rădăcinile derivatei fiind x_1, x_2, $x_1 > x_2$, $x_1 > 0$, şirul lui Rolle va fi

$$f(-\infty) > 0, \quad f(x_2) < 0, \quad f(x_1) > 0, \quad f(l) < 0,$$

căci l este o limită superioară a rădăcinilor. Şirul trebue să prezinte numai variaţii, căci rădăcinile ştim că sunt reale. Insă

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 3\,l^2}}{3} > 0,$$

deci o rădăcină este între x_1 şi l.

3º Căci din primul şir ar rezulta că ecuaţia are patru rădăcini, fiind trei intervale, într'unul fiind o rădăcină dublă.

4º Se va calcula rădăcina pozitivă a ecuaţiei

$$x^3 + 2\,x^2 - x - 1 = 0$$

şi se obţine $x = 0{,}802$.

9. Să se calculeze prin rezolvarea unei ecuaţii de gradul al treilea valoarea lui $\sin 50^0$.

R. Se ştie că $\sin 30^0 = \sin 150^0 = \dfrac{1}{2}$,

$$\sin 3\,u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u.$$

Se pune $u = 50^0$ şi $\sin 50^0 = x$. Se calculează rădăcinile ecuaţiei

$$8\,x^3 - 6\,x + 1 = 0.$$

Se aplică teorema lui Rolle; intervalele sunt

$$(-1\,;\,-0{,}5),\ (0\,;\,0{,}5),\ (0{,}5\,;\,1).$$

Obţinem cu trei zecimale exacte $\sin 50^0 = 0{,}766$.

10. Să se discute ecuaţia

$$f(\sin x) = \sin^3 x + \sin^2 x - a = 0.$$

Să se afle forma arcelor când $a = \dfrac{1}{8}$.

R. Se pune $\sin x = y$ şi aplicând teorema lui Rolle ecuaţiei $f(y) = 0$, obţinem şirul

$$\begin{array}{cccc} f(-1) & f\left(-\dfrac{2}{3}\right) & f(0) & f(1) \\ -a & \dfrac{4}{27} - a & -a & 2 - a \end{array}$$

Când $0 < a < \frac{4}{27}$, sin x are trei valori; dacă $\frac{4}{27} < a < 2$, o singură valoare.

Când $a = \frac{1}{8}$, o rădăcină este $-\frac{1}{2}$, iar arcele corespunzătoare sunt 210°, 18°, $180^\circ + 54^\circ$.

11. Să se discute ecuația

$$x^3 - 3x^2 - 3x + a = 0$$

și să se rezolve când $a = 2$. Să se calculeze cea mai mică rădăcină pozitivă cu trei zecimale exacte.

R. Șirul lui Rolle depinde de semnul câtimilor $a - 5 + 4\sqrt{2}$, $a - 5 - 4\sqrt{2}$. Pentru $5 - 4\sqrt{2} < a < 5 + 4\sqrt{2}$ vom avea trei rădăcini reale. Când $a = 2$, rădăcina este egală cu 0,476.

12. Intr'un cerc O să se ducă o coardă A B, astfel că ducând tangentele A C, BC, suma A B + O C să fie egală cu un număr dat a. Să se examineze cazurile particulare $a = 2$ R și $a = $ R.

In ultimul caz să se calculeze raportul între distanța coardei A B de centru, și raza R, cu patru zecimale exacte.

R. Insemnând cu x distanța dela centru la coarda A B, ecuația problemei este

$$f(x) = 4x^4 + x^2(a^2 - 4R^2) - 2aR^2x + R^4 = 0.$$

Când $a = 2$ R, două rădăcini reale în intervalele

$$\left(0, \frac{R}{\sqrt[3]{4}}\right), \quad \left(\frac{R}{\sqrt[3]{4}}, R\right).$$

Când $a = $ R, o rădăcină este R și una reală în intervalul (0, R).

Raportul căutat este egal cu 0,6342.

13. Dându-se $\operatorname{tg} 3\alpha = 2$, să se calculeze cu trei zecimale valoarea negativă a lui $\operatorname{tg}\alpha$. Să se găsească arcul corespunzător valorii aflate, știind că $\operatorname{tg} 63^\circ 26' = 2$.

R. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = x$.

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 3x + 2 = 0$; rădăcina în intervalul $(-1,0)$. Se face transformata în $-x$ și se găsește $x = -0{,}805$.

Se dă $3\alpha = 63^\circ 26'$, $180^\circ + 63^\circ 26'$, $360^\circ + 63^\circ 26'$;

$$\alpha = \frac{1}{3}\, 63^\circ 26', \; 60^\circ + \frac{1}{3} 63^\circ 26', \; 120^\circ + \frac{1}{3}\, 63^\circ 26'.$$

In cazul problemei $\alpha = 60^\circ + \frac{1}{3}\, 63^\circ 26'$.

Ecuaţii transcendente.

133. Generalităţi. Orice funcţie care nu este algebrică se zice transcendentă. Când prima parte a unei ecuaţii (a doua fiind egală cu zero) conţine funcţii transcendente, ecuaţia se zice transscedentă, De exemplu, $\sin x - x = 0$; $x - \log x = 0$.

Nu este o metodă specială pentru rezolvarea ecuaţiilor transscendente. Rezolvarea unora se reduce la rezolvarea de ecuaţii algebrice. Aceasta se întâmplă când ecuaţia dată nu conţine decât aceiaşi transcendentă, sau mai multe care se pot exprima în funcţie de una singură. De exemplu, pentru

$$a \sin x + b \cos x + c = 0,$$

se pune

$$tg \frac{1}{2} x = y, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

şi se va obţine o ecuaţie algebrică.

Alt exemplu, este ecuaţia transcendentă

$$ae^{px} + be^{qx} + ce^{rx} + \ldots + l = 0,$$

care se reduce la ecuaţia algebrică

$$ay^p + by^q + \ldots + l = 0,$$

punând $e^x = y$, $x = \mathrm{L}y$.

Aproape fiecare ecuaţie transcendentă se studiază în mod special, şi ca să ne dăm seamă de diversitatea acestor probleme, să considerăm ecuaţia $e^x = 0$, care *n'are nici o rădăcină reală finită*, pe când ecuaţia $\sin x = 0$, *are o infinitate de rădăcini.*

134. Am văzut că toate procedeele pentru discuţia şi rezolvarea ecuaţiilor algebrice, erau întemeiate pe consideraţii de gradul ecuaţiei sau pe consideraţie de continuitate, căci prima parte a unei ecuaţii algebrice fiind un polinom, este o funcţie continuă.

Deci şi la ecuaţiile transcendente, pentru care vom şti că prima parte este o funcţie continuă, se vor putea aplica proprietăţile bazate pe continuitate.

Intre aceste proprietăţi, se pot aplica cu folos următoarele.

I. Când prima parte $f(x)$ a unei ecuaţii transcendente, $f(x) = 0$, este o funcţie *continuă* în intervalul (a, b), şi dacă

$f(a)$ şi $f(b)$ sunt deasemenea contrare, ecuaţia $f(x)=0$ are o rădăcină reală cuprinsă în acest interval; când sunt de acelaşi semn, avem un număr cu soţ sau nici o rădăcină reală.

II. Teorema lui *Rolle* subsistă pentru ecuaţiile transcendente, şi studiul ecuaţiei derivate poate ajuta la separarea rădăcinilor.

III. Odată rădăcinile separate, ne putem apropia de ele întrebuinţând metoda lui *Newton* sau prin *părţi proporţionale.*

135. *Să se rezolve ecuaţia*

$$f(x)=\cos x-2x=0.$$

Avem $f'(x)=-\sin x-2\neq 0$; $f'(x)=0$ n'are nici o rădăcină, deci şirul lui *Rolle* se reduce la $f(-\infty)$, $f(+\infty)$; prin urmare numai o singură rădăcină reală poate să aibă ecuaţia $f(x)=0$.

Substituind 0 şi $\frac{\pi}{2}$, avem

$$f(0)=1, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi;$$

deci în intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ există o rădăcină. Pentru a ne apropia de ea substituim numere mai mici şi găsim

$$f(10^0)=\cos 10^0-2\,\text{arc}\,10^0.$$

Pentru a calcula valorile naturale ale funcţiilor trigonometrice, ne vom servi de tabele, de exemplu ale lui *Dupuis*, cu 5 zecimale, şi vom căuta la pagina 149 *(Lignes trigonométriques naturelles)*. Pe prima coloană sunt scrise gradele şi ne servim la aceste tabele identic ca la tabela logaritmilor liniilor trigonometrice, observând numai că se dau valorile pentru arce din 30 în 30 minute.

Găsim $\cos 10^0=0{,}985$. Mai rămâne de calculat lungimea arcului de 10^0, care se află tot în aceleaşi tabele, pag. 130 şi aflăm (raza cercului fiind 1)

$$\text{arc}\,10^0=0{,}174,$$

luând numai trei zecimale. Deci

$$f(10^0)=0{,}986-2.0{,}174=0{,}637>0.$$

In mod analog, avem

$$f(20^0)=0{,}940-2.0{,}349=0{,}242>0.$$
$$f(30^0)=0{,}866-2.0{,}523=-0{,}180<0.$$

Rădăcina este cuprinsă între 20^0 şi 30^0. Aplicăm metoda lui *Newton*. Fiindcă $f''(x) = -\cos x$ este negativă în interval, curba are convexitatea în sus (Fig. 45).

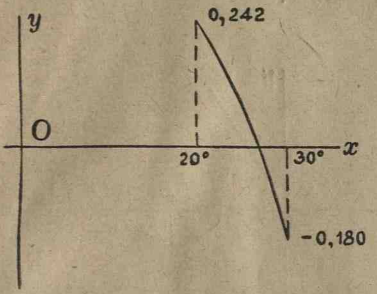

Fig. 45.

Calculăm deci

$$k = \frac{f(30^0)}{f'(30^0)} = \frac{-0{,}180}{-\sin 30^0 - 2},$$

$$k = \frac{0{,}180}{2{,}5} = 0{,}072.$$

Să vedem câte grade corespund lui 0,072. La pag. 130, tabelele lui Dupuis, lui 0,069831 corespund 4^0; rămâne

$$0{,}072 - 0{,}069813 = 0{,}002187;$$

dar lui 0,002036 (coloana *minute*) corespund $17'$ şi rămâne

$$0{,}002187 - 0{,}002036 = 0{,}000151,$$

care corespunde lui $31''$.

Rădăcina este $30^0 - 4^0 7' 31'' = 25^0 52' 29''$.

136. Observare. Pentru separarea rădăcinilor unei ecuaţii transcendente şi aflarea numărului lor, putem întrebuinţa uneori metoda geometrică, în modul următor. Scriind ecuaţia

$f(x) = \cos x - 2x = 0$, sub forma $\cos x = 2x$, să punem

$$y = \cos x, \quad y = 2x,$$

şi să construim curbele reprezentate de aceste ecuaţii. Punctele lor comune având ordonatele egale, rezultă că vom avea $\cos x = 2x$ şi deci abscisele punctelor de intersecţie sunt tocmai rădăcinile ecuaţiei date $\cos x - 2x = 0$.

Insă $y = 2x$ reprezintă o dreaptă (Fig. 46), care trece prin originea axelor de coordonate şi se construeşte făcând $x = 1$, de unde $y = 2$, şi unind acest punct cu originea O; $y = \cos x$ reprezintă o cosinusoidă, adică variaţia cosinusului şi anume când

$$x = 0,\ y = 1;\ x = \frac{\pi}{2},\ y = 0;\ x = \pi,\ y = -1, \text{ etc. (Fig 46).}$$

Curbele având numai un singur punct de intersecţie, abscisa Om, a punctului M, este rădăcina ecuaţiei.

Deci ecuaţia are o singură rădăcină reală cuprinsă între 0 şi $\frac{\pi}{1}$; prin urmare, cu metoda geometrică aflăm atât numărul rădăcinilor reale cât şi intervalele rădăcinilor.

137. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^x = 2.$$

E avantajos să aplicăm logaritmii şi avem

$$x \log x = \log 2.$$

Fiindcă $\log 2 = 0{,}30103$ avem de rezolvat ecuaţia

$$f(x) = x \log x - 0{,}30103 = 0.$$

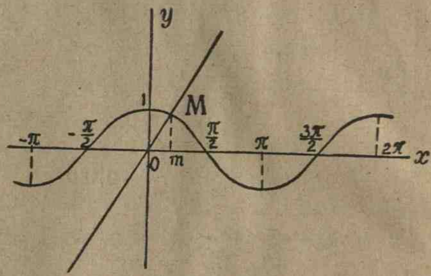

Fig. 46.

Scriind

$$\log x = \frac{0{,}30103}{x},$$

vom construi curbele I şi II (Fig. 47) având ecuaţiile

$$y = \log x, \quad y = \frac{0{,}30130}{x}.$$

Prima, $y = \log x$, este funcţia logaritmică şi când x variază dela 0 la $+\infty$ (numerele negative n'au logaritmi), y variază dela $-\infty$ la $+\infty$. Curba

$$y = \frac{0{,}30103}{x}, \quad xy = 0{,}30103$$

reprezintă o iperbolă echilaterală, având axele de coordonate ca asimptote (Fig. 47).

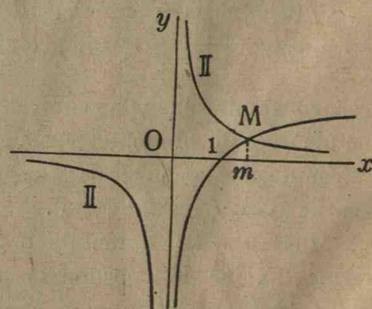

Fig. 47.

Curbele tăindu-se în punctul M, avem o singură rădăcină reală mai mare ca 1.

Avem

$$f'(x) = \log x + \log e,$$

$$f''(x) = \frac{\log e}{x};$$

$$f(1) = -0{,}30103 < 0,$$

$$f(2)=2\log 2-\log 2=0{,}30103>0.$$

Fiindcă $f''(x)>0$ în intervalul (1, 2), curba are dispoziţia fig. 48. Aplicăm metoda lui *Newton* şi avem

$$k=\frac{f(2)}{f'(2)}=\frac{0{,}30103}{0{,}30103+0{,}43429}=0{,}4...,$$

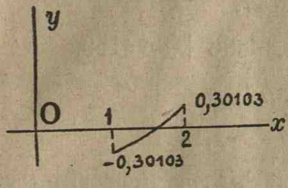

Fig. 48.

căci $\log e=0{,}43429$ (*Dupuis*, pag. 33). Deci intervalul este (1 ; 1,6).

Avem din nou,

$$k=\frac{f(1{,}6)}{f'(1{,}6)}=\frac{0{,}2556}{0{,}63841}=0{,}0403;$$

urmează că valoarea apropiată a rădăcinii este 1,559.

138. *Să se rezolve ecuaţia*

$$f(x)=x-\operatorname{tg} x=0.$$

Vom construi curbele $y=x$, $y=\operatorname{tg} x$; prima (Fig. 49) reprezintă bisectoarea întâia a axelor de coordonate Ox şi Oy; $y=\operatorname{tg} x$ reprezintă curba tangentoida. Dreapta tăind ramurile curbei, ecuaţia are un număr infinit de rădăcini reale, căci tangentoida are o infinitate de ramuri.

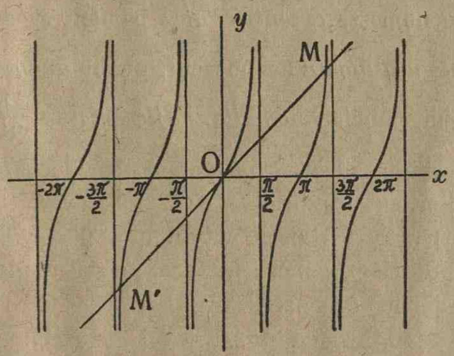

Fig. 49.

După cum se vede din fig. 49, intervalele rădăcinilor sunt

$$\left(x, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)...; \quad \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \quad \left(-\frac{5\pi}{2}, -2x\right),...$$

Pentru a calcula rădăcina ecuației

$$f(x)=x-tg\,x=0,$$

cuprinsă în intervalul $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, să substituim 250^0 şi 260^0 şi avem

$$arc\,250^0=arc\,70^0+arc\,180^0=1{,}22173+3{,}14159,$$

$$tg\,250^0=tg\,70^0=2{,}747,$$

$$arc\,260^0=arc\,80^0+arc\,180^0=1{,}39626+3{,}14159,$$

$$tg\,260^0=tg\,80^0=5{,}671,$$

$$f(250^0)=1{,}61632, \quad f(260^0)=-1{,}13315.$$

Deci avem o rădăcină între 250^0 și 260^0. Avem în acest interval

$$f'(x)=1-\frac{1}{cos^2 x}=-tg^2 x,$$

$$f''(x)=-2\,tg\,x(1+tg^2 x)<0.$$

$$k=\frac{f(260^0)}{f'(260^0)}=0{,}0352.$$

Se găseşte $x=260^0-2^0 1' 2''=257^0 59' 58''$.

139. *Să considerăm ecuația lui Kepler*

$$\zeta=nt=u-e\,sin\,u,$$

unde $e=\frac{1}{60}$ se numeşte *excentricitatea* pământească (a orbitei pământeşti), *u este un unghiu* necunoscut, numit *anomalia excentrică*, nt tot un unghiu numit *anomalia mijlocie*, $n=\frac{2\pi}{T}$ e numit viteza unghiulară în orbită, valoare constantă și egală cu $59'$ și în fine t fiind timpul exprimat în zile.

Rezolvarea acestei ecuaţii constă în a găsi valoarea lui u la diferite epoce de timp, adică a găsi expresia unghiului u pentru diferite valori ale lui t (în zile).

Făcând $t=30$, ecuaţia de rezolvat este (înlocuind necunoscuta u cu x).

$$x-\frac{1}{60}sin\,x=59'\times 30.$$

Insă lui $59'$ corespunde lungimea 0,017162 și deci ecuaţia devine

$$f(x)=60\,x-\sin x-30{,}8916=0.$$

O scriem sub fărma

$$60\,x - 30{,}8916 = \sin x.$$

şi construim curbele

$$y = \sin x, \quad y = 60\,x - 30{,}8016.$$

Prima ecuaţie

$$y = \sin x,$$

reprezintă sinosoida (Fig. 50); a doua ecuaţie

$$y = 60\,x - 30{,}8916$$

reprezintă o linie dreaptă, care se va construi unind punctele unde tae axele de coordonate(¹) (Fig. 50). Pentru a găsi unde tae pe $O\,x$, şi pe $O\,y$, vom face, respectiv în ecuaţia dreptei $y=0$ şi $x=0$ şi vom găsi 0,51486 şi $-30{,}8916$.

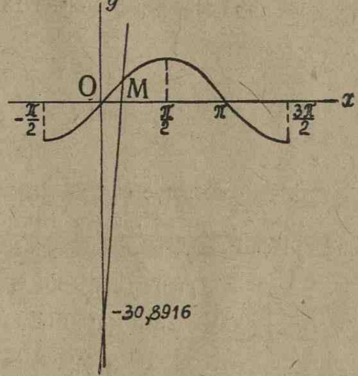

Fig. 50.

Aceste curbe tăindu-se numai în punctul M, ecuaţia are o singură rădăcină reală cuprinsă în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Avem

$f(20^0) = 20{,}94396 - 0{,}342 - 30{,}8916 = -10{,}28964,$

$f(80^0) = 0{,}02434.$

Rădăcina este deci cuprinsă între 20^0 şi 30^0. Să vedem ce formă are curba $y=f(x)$ în acest interval. Avem

$f(x) = 60 - \cos x, \quad f''(x) = \sin x;$

fiindcă $f''(x) > 0$, curba are convexitatea în jos (Fig. 51).

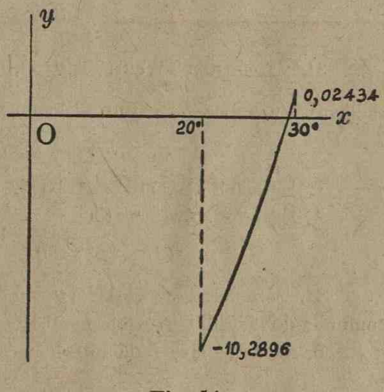

Fig. 51.

Deci

$$k = \frac{f(30^0)}{f'(30^0)} = \frac{0{,}02434}{59{,}134} = 0{,}000411,$$

$$k = 0{,}000411.$$

(¹) Dreapta fiind foarte înclinată faţă de $O\,x$, s'a exagerat înclinaţia ei pentru a obţine intersecţia cu sinusoida într'un punct distinct de origine.

Insă lui 0,000411 îi corespunde $1' \, 24''$; deci valoarea lui x este $29^0 59' 60'' - 1' 24'' = 29^0 58' 36''$.

140. Exerciții. 1. Să se discute ecuația

$$x - 2 \sin x = 0,$$

și să se calculeze rădăcina cu patru zecimale.

R. $x = 1{,}89549$, sau $108^0 36' 13''$. Se construesc curbele

$$y = \frac{1}{2} x, \quad y = \sin x.$$

2. Să se rezolve ecuația

$$3 \sin x = 2^x.$$

3. Se construesc curbele $y = 3 \sin x$. $y = 2^x$.

Inspre x negativ, avem o infinitate de rădăcini, înspre x pozitiv numai două rădăcini reale. Se aplică logaritmii și avem

$$f(x) = x \times 0{,}30103 - \log \sin x - 0{,}47712 = 0.$$

$$f(20^0) = 0{,}349 \times 0{,}30103 - \overline{1}{,}53405 - 0{,}47712 = 0{,}09387947,$$

$$f(30^0) = -0{,}01865131.$$

$$x = 20^0 + 60^0 1' 22'' \text{ sau } 0{,}454174\,;$$

$$f(90^0) = -0{,}0042633, \quad f(100^0) = 0{,}054827,$$

$$x = 100^0 - 8^0 18' 28''.$$

3. Să se rezolve ecuația

$$2 \, tg \, x - x^2 = 0.$$

R. Se construesc curbele $y = \frac{x^2}{2}$ (parabolă) și $y = tg \, x$. O infinitate de rădăcini. Se aplică logaritmii și avem

$$\log 2 + \log tg \, x = 2 \log x.$$

O rădăcină este $265^0 - 20' 87''$.

4. Să se rezolve ecuația

$$x^2 - 10 \log x - 10 = 0.$$

R. Se construesc curbele $y = x^2 - 10$ și $y = 10 \log x$. Sunt două puncte comune; două rădăcini egale cu 0,1002 și 4,0029.

5. Să se separe rădăcinile ecuației

$$e^x + x^2 - 2 = 0.$$

R. Se construesc curbele $y = e^x$ și $y = 2 - x^2$. Sunt două puncte comune; două rădăcini reale în intervalele $(-\sqrt{2}; -1)$, $(0; 1)$.

Se consideră ecuația $f(x) = x \log e - \log(2 - x^2) = 0$, $x = 1 - 0{,}3$.

6. Să se separe rădăcinile ecuației

$$2 x \, \mathrm{L}(x + 1) - 10 x + 1 = 0.$$

R. Se discută ecuaţia

$$f(x) \equiv 2\,L(x+1) - 10 + \frac{1}{x} = 0,$$

a cărei derivată e algebrică. Şirul lui Rolle este

$f(-1)$	$f-\left(\frac{1}{2}\right)$	$f(-\varepsilon)$	$f(\varepsilon)$	$f(1)$	$f(\infty)$
$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

Două rădăcini reale în intervalele (0, 1; 0, 2), (147; 148).

7. Să se studieze variaţia funcţiei $y = x\,e^{\frac{1}{x}}$ şi să se separe rădăcinile ecuaţiei

$$x\,e^{\frac{1}{x}} - 4 = 0.$$

Să se găsească partea întreagă a rădăcinilor reale.

R. Luând derivata y', curba porneşte dela $-\infty$, creşte până la 0, ceeace se vede făcând $x = -\varepsilon$, apoi sare brusc la $+\infty$ când $x = \varepsilon$ (0 este un punct de discontinuitate), de unde scade până la un minimum egal cu e, pe urmă creşte până la $+\infty$. Pentru ecuaţia considerată, două rădăcini reale cuprinse în intervalele (0; 1), (2; 3).

8. Să se discute ecuaţia

$$sin^3 x + cos^3 x = a.$$

Să se rezolve când $a = \frac{1}{2}$.

R. Ridicăm ambele părţi la pătrat, se înlocueşte $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$, şi luăm ca necunoscută $\sin 2x$; se discută ecuaţia

$$f(y) = y^3 - 3y^2 + 4(1 - a^2) = 0.$$

Când $-1 < a < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, două valori acceptabile pentru $\sin 2x$; când $-\frac{1}{\sqrt{2}} < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ una acceptabilă; când $\frac{1}{\sqrt{2}} < a < 1$, două acceptabile.

Când $a = \frac{1}{2}$, $\sin 2x = -0{,}88$; deci

$$2x = 62^0 + 180^0;\ 360^0 - 62^0;\ 62^0 + 180^0 + k.360^0;\ 360^0 - 62^0 + k.360^0.$$

Sisteme de ecuaţii.

141. Generalităţi. Fie

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

$$f(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n$$

două polinoame întregi de gradele m şi n, care admit un divizor comun $x - a$; adică

(1) $$F(x) \equiv (x-a) F_1(x),$$

(2) $$f(x) \equiv (x-a) f_1(x),$$

$F_1(x)$ şi $f_1(x)$ fiind polinoame întregi de grade $m-1$ şi $n-1$.

Să înmulţim relaţia (1) cu $f_1(x)$ şi (2) cu $F_1(x)$ şi apoi să le scădem; găsim

(3) $$F(x) f_1(x) - f(x) F_1(x) = 0.$$

Insă această egalitate este adevărată pentru orice valoare a lui x; deci este o identitate. Prin urmare, coeficienţii diferitelor puteri ale lui x din polinomul (3) trebue să fie nuli.

Rezultă deci că dacă polinoamele $F(x)$ şi $f(x)$ de grade m şi n admit un divizor de gradul întâi, există două polinoame de grade $m-1$ şi $n-1$,

$$F_1(x) = \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1},$$

$$f_1(x) = \beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1},$$

aşa încât expresia

$$F(x) f_1(x) - f(x) F_1(x)$$

să fie identic nulă.

Reciproc, când există două polinoame $F_1(x)$ şi $f_1(x)$ de grade $m-1$ şi $n-1$, care verifică identitatea

$$F(x) f_1(x) - f(x) F_1(x) \equiv 0,$$

$F(x)$ şi $f(x)$ au un divizor comun de gradul întâi.

In adevăr, din relaţia dată, deducem identitatea următoare

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$

care arată că termenii $f(x)$, $F(x)$, ai fracţiei întâi, trebue să aibă un divizor comun la gradul întâi, căci gradele $m-1$ şi $n-1$ ale polinoamelor $f_1(x)$ şi $F_1(x)$ sunt cu o unitate mai mici ca ale lui $f(x)$ şi $F(x)$ şi deci fracţia

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

trebue să se simplifice.

142. Eliminarea unei necunoscute între două ecuaţii. Fie

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

$$f(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n = 0,$$

două ecuații algebrice de grade m și n care admit o rădăcină comună $x=a$.

Să presupunem că am putut rezolva una din ecuații, de exemplu pe $F(x)=0$ și am găsit valoarea necunoscutei a în funcțiune de coeficienții A ai ecuații.

Această valoare a fiind rădăcină și pentru a doua ecuație $f(x)=0$, rezultatul înlocuirii lui x cu a în $f(x)$, trebue să fie nul.

Deci, în cazul când ecuațiile au o rădăcină comună, va exista o relație între coeficienții celor două ecuații, care se numește *eliminantul* sau *rezultantul* acelor două ecuații, iar înlocuirea valorii lui x din prima ecuație într'a doua se zice *eliminarea lui x între cele două ecuații*. De fapt, a elimina pe x între ecuațiile date, însemnează a scoate valoarea lui x dintr'una și a o înlocui în a doua. Insă pentru a elimina pe x, sau cu alte cuvinte, spre a găsi rezultantul celor două ecuații, nu vom proceda în felul cum s'a zis mai sus. Pentru a găsi metode practice de eliminare, ne vom baza pe faptul că cele două ecuații au o rădăcină comună.

143. Metoda lui Bézout. Pentru ușurință, să presupunem $m=5$, $n=3$ și să ne propunem a elimina pe x între ecuațiile

$$F(x)=A_0x^5+A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+A_4x+A_5=0,$$
$$f(x)=B_0x^3+A_1x^2+B_2x+B_3=0.$$

Ecuația $F(x)=0$ și $f(x)=0$ având o rădăcină comună, polinoamele $F(x)$ și $f(x)$ au un divizor comun de gradul întâi și deci (Nr. 141) există două polinoame de gradele 4 și 2,

$$F_1(x)=\alpha_0x^4+\alpha_1x^3+\alpha_2x^2+\alpha_3x+\alpha_4,$$
$$f_1(x)=\beta_0x^2+\beta_1x+\beta_2,$$

așa încât să avem

$$F(x)(\beta_0x^2+\beta_1x+\beta_2)-f(x)(\alpha_0x^4+\ldots+\alpha_4)\equiv 0.$$

Anulând coeficienții lui x^7, $x^6\ldots.x$, avem

$$\begin{aligned}
A_0\beta_0-B_0\alpha_0&=0,\\
A_1\beta_0+A_0\beta_1-B_1\alpha_0-B_0\alpha_1&=0,\\
A_2\beta_0+A_1\beta_1+A_0\beta_2-B_2\alpha_0-B_1\alpha_1-B_0\alpha_2&=0,\\
A_3\beta_0+A_2\beta_1+A_1\beta_2-B_3\alpha_0-B_2\alpha_1-B_1\alpha_2-B_0\alpha_3&=0,\\
A_4\beta_0+A_3\beta_1+A_2\beta_2-B_3\alpha_1-B_2\alpha_2-B_1\alpha_3-B_0\alpha_4&=0,\\
A_5\beta_0+A_4\beta_1+A_8\beta_2-B_3\alpha_2-B_2\alpha_3-B_1\alpha_4&=0,\\
A_5\beta_1+A_4\beta_2-B_3\alpha_3-B_2\alpha_4&=0,\\
A_8\beta_2-A_3\alpha_4&=0,
\end{aligned}$$

Am obţinut $m+n=8$ ecuaţii omogene în raport cu 8 necunoscute $\alpha_0\ \alpha_1,\dots\ \alpha_4,\ \beta_0,\dots\ \beta_2$. Acum, sau necunoscutele $\alpha_0,\dots\ \alpha_4,\dots\ \beta_2$ sunt toate nule şi atunci determinantul coeficienţilor este diferit de zero, sau necunoscutele nu sunt toate nule şi atunci determinantul coeficienţilor acestor ecuaţiei este zero. Insă ele nu pot fi toate nule, căci n'ar mai exista polinoamele F_1 şi f_1 şi deci trebue să avem

$$R=\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_0 & 0 & B_1 & B_0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & A_0 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ A_4 & A_3 & A_2 & 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \\ A_5 & A_4 & A_3 & 0 & 0 & B_3 & B_2 & B_1 \\ 0 & A_5 & A_4 & 0 & 0 & 0 & B_3 & B_2 \\ 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_3 \end{vmatrix}=0.$$

Desvoltând acest determinant şi egalându-l cu zero, se obţine rezultantul celor două ecuaţii.

144. Aplicaţie. Să se elimine x între ecuaţiile

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

$$A'x^2+B'x+C'=0.$$

Avem

$$R=\begin{vmatrix} A & 0 & A' & 0 \\ B & A & B' & A' \\ C & B & C' & B' \\ 0 & C & 0 & C' \end{vmatrix}=0.$$

Pentru a desvolta acest determinant, scădem coloana a patra înmulţită cu C, din a doua înmulţită cu C' şi avem

$$\begin{vmatrix} A & 0 & A' & 0 \\ B & AC'-CA' & B' & A' \\ C & BC'-CB' & C' & B' \\ 0 & 0 & 0 & C' \end{vmatrix}=0.$$

Acest determinant se reduce la

$$\begin{vmatrix} A & 0 & A' \\ B & AC'-CA' & B' \\ C & BC'-CB' & C' \end{vmatrix}$$

In fine, scădem coloana a treia înmulţită cu A, din prima înmulţită cu A' şi avem

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & A' \\ A'B - B'A & AC' - CA' & B' \\ CA' - AC' & BC' - CB' & C' \end{vmatrix} = 0$$

Desvoltând, găsim

$$(AC' - CA')^2 = (AB' - BA')(BC' - CB').$$

145. Metoda lui Sylvester. Fie ecuaţiile

$$F(x) = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0,$$
$$f(x) = B_0 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3 = 0,$$

între care vrem să eliminăm pe x. Aceasta însemnează că ecuaţiile admit o rădăcină comună x. Insă acea rădăcină verifică şi ecuaţiile

$$x^2 F(x) = 0, \quad x F(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$
$$x^3 f(x) = 0, \quad x^2 f(x) = 0, \quad x f(x) = 0, \quad f(x) = 0,$$

adică

$$(4) \left\{ \begin{aligned} A_0 x^6 + A_1 x^5 + A_2 x^4 + A_3 x^3 + A_4 x^2 &= 0, \\ A_0 x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x &= 0, \\ A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 &= 0, \\ B_0 x^6 + B_1 x^5 + B_2 x^4 + B_3 x^3 &= 0, \\ B_0 x^5 + B_1 x^4 + B_2 x^3 + B_3 x^2 &= 0, \\ B_0 x^4 + B_1 x^3 + B_2 x^2 + B_3 x &= 0, \\ B_0 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Am obţinut 7 ecuaţii liniare cu 6 necunoscute $x^6, x^5, \ldots x$. Insă, din primele şease ecuaţii putem scoate valori pentru aceste necunoscute, pe care înlocuindu-le în a şaptea, găsim condiţia ca sistemul să fie compatibil.

Aceasta însemnează că se elimină $x^6, x^5, \ldots$ între ecuaţiile de mai sus, ceeace se obţine scriind că determinantul coeficienţilor este nul. Deci

$$R = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Am obţinut, rezultantul sub forma unui determinant de ordinul $m+n=7$.

Se poate observa, că schimbând liniile în coloane, determinanţii obţinuţi cu metodele lui *Bézout* şi *Sylvester* sunt identici.

146. Metoda lui Cauchy. I. *Vom presupune mai întâi că ecuaţiile* $F(x)=0$ şi $f(x)=0$ *sunt de acelaşi grad*, adică

$$F(x)=A_0 x^m+A_1 x^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$
$$f(x)=B_0 x^m+B_1 x^{m-1}+\ldots+B_m=0.$$

Să le scriem sub forma

$$A_0 x^m=-(A_1 x^{m-1}+\ldots+A_m),$$
$$B_0 x^m=-(B_1 x^{m-1}+\ldots+B_m);$$
$$A_0 x^m+A_1 x^{m-1}=-(A_2 x^{m-2}+\ldots+A_m),$$
$$B_0 x^m+B_1 x^{m-1}=-(B_2 x^{m-2}+\ldots+B_m);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Să dividem respectiv egalităţile alăturate; deducem

$$\frac{A_0}{B_0}=\frac{A_1 a^{m-1}+\ldots+A_m}{B_1 x^{m-1}+\ldots+A_m},$$
$$\frac{A_0 x+A_1}{B_0 x+B_1}=\frac{A_2 x^{m-2}+\ldots+A_m}{B_2 x^{m-2}+\ldots+B_m},$$
$$\frac{A_0 x^2+A_1 x+A_2}{B_0 x^2+B_1 x+B_2}=\frac{A_3 x^{m-3}+\ldots+A_m}{B_3 x^{m-3}+\ldots+B_m},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{A_0 x^{m-1}+A_1 x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}}{B_0 x^{m-1}+B_1 x^{m-2}+\ldots+B_{m-1}}=\frac{A_m}{B_m}.$$

Gonind numitorii, se vor pune aceste n ecuaţii sub forma întreagă, iar coeficienţii diferitelor puteri ale lui x vor fi funcţiuni întregi şi de gradul întâi în raport cu coeficienţii ecuaţiilor date.

Sistemul va fi de forma

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l} A_{11} x^{m-1}+A_{12} x^{m-2}+\ldots+A_{1m}=0,\\ A_{21} x^{m-1}+A_{22} x^{m-2}+\ldots+A_{2m}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{m1} x^{m-1}+A_{m2} x^{m-2}+\ldots+A_{mm}=0. \end{array}\right.$$

Am obţinut deci, m ecuaţii cu $m-1$ necunoscute x^{m-1},

$x^{m-2}, \ldots x$. Dacă ecuaţiile $F=0$, $f=0$ au o rădăcină comună x, acea rădăcină verifică sistemul (5); deci, acest sistem este compatibil şi prin urmare determinantul coeficienţilor trebue să fie nul adică

$$R=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} \end{vmatrix}=0.$$

Se poate uşor observa că $A_{1m}=A_{m1}$, $A_{2m}=A_{m2}, \ldots$; deci determinantul R având elementele, de aceeaşi parte a diagonalei, egale, este un determinant simetric.

Reciproc, dacă $R=0$, sistemul (5) este compatibil, adică ecuaţiile (5) admit o soluţie comună; deci şi ecuaţiile din care am dedus pe acestea au o rădăcină comună şi prin urmare şi ecuaţiile date $f(x)=0$, $F(x)=0$, au o rădăcină comună.

Aplicaţie. Să se elimine x între ecuaţiile

$$Ax^2+Bx+C=0, \quad A'x^2+B'x+C'=0.$$

Avem

$$\frac{A}{A'}=\frac{Bx+C}{B'x+C'}. \qquad \frac{Ax+B}{A'x+B'}=\frac{C}{C'}.$$

$$(AB'-BA')x+AC'-CA'=0,$$

$$(AC'-CA')x+BC'-CB'=0.$$

Eliminând pe x, găsim

$$R=\begin{vmatrix} AB'-BA' & AC'-CA' \\ AC'-CA' & BC'-CB' \end{vmatrix}=0,$$

sau

$$R=(AC'-CA')^2-(AB'-BA')(BC'-CB')=0.$$

147. II. *Cazul când ecuaţiile* $F(x)=0$, $f(x)=0$ *sunt de grade diferite*. Fie ecuaţiile

$$F(x)=A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4=0,$$

$$f(x)=B_0x^2+B_1x+B_2=0.$$

Inmulţind a doua cu x^2, ca să fie de grad egal cu prima, aplicând metoda lui *Cauchy* ecuaţiilor de acelaşi grad $F(x)=0$ şi $x^2 f(x)=0$, avem

$$\frac{A_0}{B_0}=\frac{A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4}{B_1x^3+B_2x^2}$$

$$\frac{A_0 x + A_1}{B_0 x + B_1} = \frac{A_2 x^2 + A_3 x + A_4}{B_2 x^2}$$

Aducând aceste ecuaţii la formă întreagă, avem

$$(6)\qquad \begin{aligned} A_{11} x^3 + A_{12} x^2 + A_{13} x + A_{14} = 0, \\ A_{21} x^3 + A_{22} x^2 + A_{23} x + A_{24} = 0. \end{aligned}$$

Am obţinut prin urmare, numai două ecuaţii, care să presupunem că au necunoscutele x^3, x^2, x. La acestea vom adăuga încă două ecuaţii, $xf(x) = 0$ şi $f(x) = 0$, care împreună cu (6) să facă 4 ecuaţii, adică numărul ecuaţiilor să fie cu 1 mai mare ca al necunoscutelor; deci, pe lângă sistemul (6), mai avem ecuaţiile

$$(7)\qquad \begin{aligned} x f(x) = B_0 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x = 0, \\ f(x) = B_0 x^2 + B_1 x + B_2 = 0, \end{aligned}$$

care sunt verificate toate patru numai de trei necunoscute x^3, x^2, x.

Prin urmare, determinantul coeficienţilor ecuaţiilor (6) şi (7) este nul, adică

$$R = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ B_0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Observare. După cum se vede, prin metoda lui *Cauchy*, se pune rezultantul sub formă de determinant de un ordin egal cu cel mai mare grad al ecuaţiilor, pe când, cu metoadele lui *Bézout* şi *Sylvester*, determinanţii erau de ordine mai ridicate.

148. Calculul rădăcinii comune la două ecuaţii. Fie $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, două ecuaţii care au o rădăcină comună.

Am văzut, că rezultantul sau eliminantul lor era nul. Insă acea rădăcină comună, x, verifică deodată mai multe ecuaţii; aşa, cu metoda lui *Sylvester*, rădăcina verifica sistemul (4), iar cu metoda lui *Cauchy*, rădăcina verifica ecuaţiile (6) şi (7).

Deci, pentru a găsi rădăcina comună la două ecuaţii, ne vom convinge mai întâi că ele admit în adevăr o rădăcină comună, observând dacă rezultantul ecuaţiilor este nul. Apoi, pentru a calcula rădăcina comună, se va rezolva în raport cu necunoscuta x, fie şease din ecuaţiile sistemului (4), fie trei din ecuaţiile (6) şi (7), şi vom avea pentru fiecare caz

$$(8)\quad x=\frac{\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & -A_4 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}},\qquad x=\frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12}-A_{14} \\ A_{21} & A_{22}-A_{24} \\ B_0 & B_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

149. Aplicaţii. I. *Să se rezolve ecuaţiile*

$$x^3-4x+3=0,\qquad x^2-2x+a=0,$$

ştiind că au o rădăcină comună.

Aplicăm metoda lui *Cauchy* ecuaţiilor

$$x^3-4x+3=0,\qquad x^3-2x^2+ax=0.$$

Avem

$$1=\frac{-4x+3}{-2x^2+ax},\qquad \frac{x}{x-2}=\frac{-4x+3}{ax}.$$

Considerăm ecuaţiile

$$\begin{aligned} &2x^2-(4+a)x+3=0,\\ (9)\qquad &(a+4)x^2-11x+6=0,\\ &x^2-2x+a=0. \end{aligned}$$

Condiţia ca să aibă o rădăcină comună este

$$\begin{vmatrix} 2 & -a-4 & 3 \\ a+4 & -11 & 6 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}=0.$$

De unde

$$a^3+8a^2-18a+9=0,\quad a=1$$

Rădăcina comună se obţine rezolvând în raport cu x^2 şi x primele două ecuaţii ale sistemului (9); avem

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -4-a \\ -6 & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4-a \\ a+4 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{9-6a}{a^2+8a-6} = \frac{3}{3} = 1.$$

II. *Să se elimine x între ecuaţiile*

$$a(1+x^4) - cx(1+x^2) = 0,$$
$$b(1+x^4) - cx(1-x^2) = 0.$$

Aplicăm metoda lui *Cauchy* acestor ecuaţii, care se pot scrie

$$ax^4 - cx^3 - cx + a = 0,$$
$$bx^4 + cx^3 - cx + b = 0,$$

de unde

$$\frac{a}{b} = \frac{-cx^3 - cx + a}{cx^3 - cx + a},$$
$$\frac{ax-c}{bx+c} = \frac{-cx+a}{-cx+b}.$$
$$\frac{ax^3-cx^2-c}{bx^3+cx^2-c} = \frac{a}{b}.$$

Ele se reduc numai la următoarele două

$$x^2(a+b) + b - a = 0,$$
$$x^2(b-a) + 2cx - b - a = 0;$$

de unde eliminând pe x, găsim

$$(a^2+b^2)^2 = c^2(a^2-b^2).$$

Observare. Mai putem elimina pe x între ecuaţiile date, operând astfel

$$a(1+x^4) = cx(1+x^2),$$
$$b(1+x^4) = cx(1-x^2).$$

Impărţindu-le, avem

$$\frac{a}{b} = \frac{1+x^2}{1-x^2}, \quad x^2 = \frac{a-b}{a+b}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

Inlocuim pe x într'una din ecuaţii, o ridicăm la pătrat şi găsim aceeaşi condiţie.

150. Rezolvarea a două ecuaţii cu două necunoscute. Fie $F(x, y)=0$, $f(x, y)=0$ două ecuatii cu două necunoscute x şi y. Dacă $x=x_0$, $y=y_0$ este o soluţie a sistemului, avem

$$F(x_0, y_0)=0, \quad f(x_0 y_0)=0.$$

Prin urmare, ecuaţiile $F(x, y_0)=0$, $f(x, y_0)=0$ au o rădăcină comună x_0; urmează că rezultantul polinoamelor $F(x, y_0)$, $f(x, y_0)$, în care x e variabila, este nul.

Insă acest rezultant depinde de coeficienţii termenilor în x ai polinoamelor; deci este o funcţie întreagă de y_0, pe care o notăm cu $R(y_0)=0$. Rezultă că y_0 este rădăcina ecuaţiei $R(y)=0$. Reciproc, fie y_0 o rădăcină a ecuaţiei $R(y)=0$. Deci $R(y_0)=0$ şi prin urmare ecuaţiile al căror rezultant este $R=0$, au o rădăcină comună x_0, adică

$$F(x_0, y_0)=0, \quad f(x_0 y_0)=0,$$

şi x_0, y_0 reprezintă o soluţie a sistemului.

Aşa dar, pentru a rezolva ecuaţiile date, se va elimina x între ele şi se va rezolva eliminantul $R(y)=0$. Inlocuind pe y în relaţia (8), care ne dă soluţia comună celor două ecuaţii, aflăm pe x.

151. Aplicaţie. *Să se rezolve ecuaţiile*

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$
$$g(x, y) = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0.$$

Punând

$$A = a, \quad B = 2by + 2d, \quad C = cy^2 + 2ey + f,$$
$$A' = a', \quad B' = 2b'y + 2d', \quad C' = c'y^2 + 2e'y + f',$$

ecuaţiile propuse sunt de forma

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$
$$A'x^2 + B'x + C' = 0.$$

Eliminând pe x între ele, găsim relaţia [1]

$$(AC' - CA')^2 - (AB' - BA')(BC' - CB') = 0,$$

care este o ecuaţie de gradul al 4-lea în y.

Vom obţine pentru y patru valori. Inlocuindu-le în ecuaţia care dă soluţia comună

$$(AB' - BA')x + AC' - CA' = 0,$$

se obţin patru valori pentru x.

Ecuaţiile admit patru sisteme de valori, adică *un număr egal cu produsul gradelor celor două ecuaţii.*

---

[1] Aceasta se poate obţine înmulţind prima ecuaţie cu A', pe a doua cu A, şi scăzând, avem $(AB' - BA')x + AC' - CA' = 0$. Se scoate de aici valoarea lui x şi apoi se înlocueşte în prima ecuaţie $Ax^2 + Bx + C = 0$.

152. Exemple. I. *Să se rezolve sistemul*

$$x^2 - y^2 = 1,$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Se scad ecuaţiile şi apoi se înlocueşte valoarea lui x în prima; y e dat de ecuaţia

$$y(y^3 - 2y^2 + 2y - 2) = 0,$$

care admite soluţia $y = 0$ şi alte trei, din care una reală cuprinsă între 1 şi 2. Valoarea lui x e dată de ecuaţia obţinută, scăzând prima din a doua,

$$y^2 - x - y + 1 = 0.$$

Când $y = 0$, $x = 1$; înlocuind pe y cu celelalte valori, vom mai avea pentru x încă trei valori, aşa că ecuaţiile admit patru sisteme de soluţii $x = 1$, $y = 0$; $x = 1{,}96$, $y = 1{,}6$; celelalte imaginare.

Observare. Să construim curbele reprezentate de ecuaţiile date. Prima $x^2 - y^2 = 1$ reprezintă o iperbolă echilateră, ale cărei asimptote sunt bisectoarele axelor, care tae axa $0x$ în punctele (1, 0), $(-1{,}0)$.

Ecuaţia $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ reprezintă un cerc cu centrul în punctul (1, 1), cu raza 1, tangent la axele de coordonate.

Aceste curbe se tae numai în două puncte de intersecţie; deci ecuaţiile au numai două sisteme de valori reale pentru x şi y, care sunt coordonatele punctelor de intersecţie ale curbelor.

II. *Să se rezolve sistemul*

$$5(x^2 + y^2) - 6xy - 6(x + y) + 5 = 0,$$

$$x^3 + y^3 + xy(x + y) + x^2 + y^2 - 9xy + x + y + 1 = 0.$$

Vom lua ca necunoscute $x + y = u$, $xy = v$; de unde

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v.$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv.$$

Ecuaţiile devin

$$5u^2 - 16v - 6u + 5 = 0,$$

$$u^3 + u^2 + u - 2uv - 11v + 1 = 0.$$

Inlocuind în a doua valoarea lui v scoasă din prima, avem ecuaţia

$$6u^3 - 27u^2 + 72u - 39 = 0,$$

sau

$$2u^3 - 9u^2 + 24u - 13 = 0,$$

care dă valorile lui u, două imaginare şi una reală cuprinsă între 0 şi 1.

La cele trei valori ale lui u, corespund trei valori ale lui v, date de ecuaţia

$$v = \frac{5u^2 - 6u + 5}{16}.$$

Cunoscând u şi v, se va forma ecuaţia de gradul al doilea

$$X^2 - uX + v = 0,$$

care ne va da pe x şi y.

Realitatea valorilor lui x şi y depinde de semnul expresiei $u^2 - 4v$.

Construind în raport cu două axe perpendiculare, Ou şi Ov, curbele (parabolele)

$$v = \frac{1}{16}(5u^2 - 6u + 5), \quad v = \frac{1}{4}u^2,$$

se vede că în intervalul (0, 1) valorile lui v, corespunzătoare primei parabole, sunt mai mari ca cele corespunzătoare parabolei a doua; deci, între valorile $u = 0$, şi $u = 1$, arcul parabolei întâia este interior parabolei a doua. Insă în interiorul acestei parabole, semnul expresiei $u^2 - 4v$ este negativ, ceeace rezultă înlocuind pe u şi v cu 0 şi 1, coordonatele unui punct al axei Ov. Deci, rădăcinei reale u, cuprinsă în intervalul (0, 1) corespund valori imaginare pentru x şi y.

Prin urmare, sunt trei sisteme de valori imaginare pentru x şi y. In realitate sunt şase, din care trei se zice că sunt infinite. Acest rezultat se mai poate obţine scriind că $u^2 - 4v > 0$; de unde înlocuind pe v, trebue să avem $u^2 - 6u + 5 < 0$ adică $1 < u < 6$, ceeace este imposibil, căci ecuaţia de gradul al treilea ce dă pe u, are o rădăcină reală în intervalul (0, 1).

III. *Să se rezolve ecuaţia iraţională*

$$1 - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 0.$$

Se pune $\sqrt{x} = u$, $\quad \sqrt[3]{x} = v$, de unde

$$-u + v + 1 = 0,$$

$$u^2 = x \qquad v^3 = x.$$

Să eliminăm u şi v între aceste ecuaţii. Din prima găsim $u = 1 + v$, pe care înlocuind-o în a doua, avem

$$v^2 + 2v = x - 1, \qquad v^3 = x.$$

Inmulţim prima cu v şi ţinem seamă de a doua; deducem

$$2v^2 - (x-1)v + x = 0,$$

$$v^2 + 2v - x + 1 = 0.$$

De unde, eliminând pe v, avem ecuaţia

$$(-3x + 2)^2 = (x + 3)(x^2 - 4x + 1),$$

sau

$$x^3 - 10x^2 + x - 1 = 0,$$

care are o rădăcină cuprinsă între 9 şi 10.

Altfel, se înlocueşte $\sqrt[6]{x} = y$ şi se discută ecuaţia $y^3 - y^2 - 1 = 0$, care are o rădăcină reală între 1,4 şi 1,5.

IV. *Să se discute sistemul de ecuaţii*

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

$$x^2 - y^2 + x - y - k = 0.$$

Să luăm ca necunoscute $u = x + y$, $v = x - y$; deci

$$xy = \frac{1}{4}(u^2 - v^2),$$

$$x^3+y^3-3xy=(x+y)^3-3xy(x+y+1)=$$

$$u^3-\frac{3}{4}(u^2-v^2)(u+1)=0.$$

$$x^2-y^2+x-y-k=(x-y)(x+y+1)-k$$

$$=v(u+1)-k=0;$$

de unde

$$u^3+3uv^2-3u^2+3v^2=0,$$

$$v=\frac{k}{u+1}.$$

Inlocuind pe v în prima ecuație, avem

$$f(u)=u^4-2u^3-3u^2+3k^2=0.$$

Șirul lui Rolle, pentru ecuația $f(u)=0$, devine

$f(-\infty)$	$f\left(\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)$	$f(0)$	$f\left(\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$	$f(+\infty)$
$+$	$3k^2-\frac{207-33\sqrt{33}}{32}$,	$3k^2$,	$3k^2-\frac{207+33\sqrt{33}}{32}$	$+$

Fie

$$k_1^2=\frac{69-11\sqrt{33}}{32}, \qquad k_1^2=\frac{69+11\sqrt{33}}{32}.$$

Din cele ce preced, deducem următoarele concluziuni:

1^0 $k^2<k_1^2$, avem patru sisteme de valori pentru u și v și deci patru sisteme de valori pentru x și y.

2^0 $k^2=k_1^2$, două sisteme confundate.

3^0 $k_1^2<k^2<k_2^2$, două sisteme distincte reale.

4^0 $k^2=k_2^2$, două sisteme confundate.

5^0 $k^2>k_2^2$, nici un sistem real.

In toate cazurile, două din sisteme, care ar trebui să fie în număr de șase sunt înfinit de mari.

V. *Să se calculeze* $\sqrt[4]{1+i}$ *pe cale algebrică*, $(i=\sqrt{-1})$.

Rezultatul va fi de forma $x+iy$. Avem

$$1+i=(x+iy)^4=x^4-6x^2y^2+y^4+i(4x^3y-4xy^3).$$

Egalând părțile reale și coeficienții lui i, avem de rezolvat ecuațiile

$$x^4-6x^2y^2+y^4=1, \quad 4x^3y-4xy^3=1.$$

Punând $y=tx$ și împărțindu-le obținem

(10) $$t^4+4t^3-6t^2-4t+1=0.$$

Pentru a rezolva această ecuație reciprocă, să punem

(11) $$t-\frac{1}{t}=u;$$

şi ecuaţia (10) pusă sub forma

$$t^2 + \frac{1}{t^2} + 4\left(t - \frac{1}{t}\right) - 6 = 0.$$

devine

$$u^2 + 4u - 4 = 0,$$

de unde

$$u = -2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Valoarea lui t e dată de ecuaţia

$$t^2 - ut - 1 = 0;$$

deci

$$t = \frac{u \pm \sqrt{u^2+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2} \pm \sqrt{16 \mp 8\sqrt{2}}}{2},$$

$$t = -1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{2}\sqrt{2 \mp \sqrt{2}},$$

x şi y sunt daţi de ecuaţiile

$$x^4 = \frac{1}{4t(1-t^2)}, \quad y = tx.$$

Vom avea pentru fiecare valoare a lui t, patru valori pentru x; în total 16 sisteme de valori pentru x şi y.

153. *Observare.* Fiind date două ecuaţii

(12) $$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

să construim curbele lor reprezentative, în raport cu două axe perpendiculare Ox şi Oy.

A rezolva sistemul (12), însemnează a găsi punctele comune celor două curbe reprezentate de ecuaţiile date; căci dacă un sistem de valori (x, y) verifică de odată ambele ecuaţii, atunci punctul ale cărui coordonate (abscisă şi ordonată) sunt x şi y, se găseşte pe ambele curbe, şi deci este un punct de intersecţie al lor.

Dacă curbele sunt respectiv de gradul m şi n, sistemul admite $m \times n$ sisteme de soluţii, adică $m \times n$ puncte de intersecţie.

154. Exerciţii. 1. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x = (y-6)^2, \quad y = (x-6)^2$$

şi să se dea o reprezentare geometrică.

R. Prima ecuaţie reprezintă o parabolă tangentă la Oy în punctul (0,6) situată la dreapta lui Oy; a doua este o parabolă tangentă la Ox în (6,0) situată deasupra lui Ox. Se taie în patru puncte, două pe bisectoarea întâia, celelalte două simetrice faţă de bisectoarea întâia. Se scad ecuaţiile

$(x-y)\ (x+y-11)=0$; $x=y=4$ şi 9; $\left[\frac{1}{2}(11+\sqrt{21})\ \frac{1}{2}(11-\sqrt{21})\right]$, $\left[\frac{1}{2}(11-\sqrt{11}),\ \frac{1}{2}(11+\sqrt{21})\right]$.

2. Să se rezolve sistemul

$$x^3+2yx^2+2y(y-2)x+y^2-y=0.$$
$$x^2+2xy+2y^2-5y+3=0.$$

R. Scăzând din prima ecuaţie, pe a doua înmulţită cu x, şi apoi înlocuind în a doua valoarea lui x, avem

$$y^3-10y^2+36y-27=0.$$
$$y=1,\ x=0.$$

3. Să se rezolve sistemul

$$x^3+3xy^2+(3y^2-y+1)x+y^3-y^2+2y=0,$$
$$x^2+2xy+y^2-y=0.$$

R. Se scade din prima ecuaţie, pe a doua înmulţită cu x; apoi din rezultat se scade a doua ecuaţie înmulţită cu y şi avem $x+2y=0$. Inlocuind în a doua,

$$y^3(y^2-y+2)(y-1)=0.$$

Inlocuind valorile lui y în soluţia comună $x=-2y$, avem sistemele

$$x=0,\ g=0;\ x=-2,\ y=1.$$

Soluţia comună $x=-2y$ se mai poate obţine considerând ecuaţiile (6) şi (7) cu metoda lui *Cauchy*.

4. Să se elimine x între ecuaţiile

$$x^3+px+q=0,\qquad x^3+p'x+q'=0.$$

R. $(p-p')^2(pq'-qp')-(q-q')^3=0.$

5. Să se afle condiţia ca ecuaţiile $x^3+px+q=0$, $qx^3+px^2+1=0$ să aibă o rădăcină comună şi să se afle acea rădăcină.

R. Se adună ecuaţiile înmulţite respectiv cu $-q$ şi 1; 1 şi $-q$. Se elimină x între ecuaţiile

$$px^2-pqx+1-q^2=0,\ (1-q^2)x^2-pqx+p=0.$$
$$(p+q^2-1)^2(p+q+1)(p-q+1)(1-q^2)=0.$$

$q^2=1$ nu corespunde; $q=p+1$, $x=-1$; $q=-p-1$, $x=1$; $p=1-q^2$, două rădăcini comune date de

$$1+x^2-qx=0.$$

6. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x^2+4y^2=a^2,\ x^2+y-ax-by=0.$$

R. Se construesc curbele

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1,\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2).$$

care au două puncte de intersecţie reale, din care unul este $(a, 0)$. Eliminând x, se obţine ecuaţia

$$f(y)=9y^3+6by^2+(b^2-2a^3)y-2a^2b=0.$$

care are o rădăcină cuprinsă în intervalul $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, $(b>0)$.

Pentru a calcula pe y, se ia ca necunoscută $y:a=u$. Se obţine

$$y=0{,}4a; \quad x=a(1-0{,}4-0{.}48).$$

7. Să se găsească numărul sistemelor de soluţii reale comune ecuaţiilor

$$x^4+y^3=0, \quad a^2xy+ay+x=0.$$

R. Se construesc curbele reprezentate de aceste ecuaţii, care au trei puncte confundate în origine şi alte două distincte.

Punând $y=tx$, ecuaţia în t este $a^2t^4-at-1=0$, care are două rădăcini reale: $x=-t^3$, $y=-t^4$; Pentru ca x şi y să fie reali, trebue ca t să fie real: ecuaţiile au două sisteme de soluţii comune reale, diferite de zero.

Sau, se elimină y între ecuaţiile date şi se discută ecuaţia $a^3x(ax+1)^3-1=0$; rădăcinile derivatei sunt $-\frac{1}{a}$ şi $-\frac{1}{4a}$.

8. Să se rezolve complect ecuaţia

$$z^4-z+1=0, \quad z=x+iy.$$

R. Ecuaţia n'are rădăcini reale; x şi y sunt daţi de ecuaţiile

$$x^4+y^4-6x^2y^2-x+1=0, \quad 4x(x^2-y^2)-1=0; \quad y=\pm\sqrt{\frac{4x^3-1}{4x}}.$$

De unde $64x^6-16x^2-1=0$.

y real pentru valorile lui x exterioare intervalului $\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$. Pentru x două reale în intervalele $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[4]{12}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \infty\right)$, la care corespund patru valori pentru y.