SUR

L'INVARIABILITÉ DES GRANDS AXES

DES ORBITES PLANÉTAIRES,

PAR M. SPIRU C. HARETU.

EXTRAIT DES ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, MÉMOIRES, TOME XVIII.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1885

SUR

L'INVARIABILITÉ DES GRANDS AXES

DES ORBITES PLANÉTAIRES.

Spiru C. Haret (1851—1912) eminent profesor de matematici la Facultatea de ştiinţe; reorganizator al învăţămîntului.

SUR

L'INVARIABILITÉ DES GRANDS AXES

DES ORBITES PLANÉTAIRES,

PAR M. SPIRU C. HARETU.

EXTRAIT DES ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, MÉMOIRES, TOME XVIII.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1885

SUR L'INVARIABILITÉ

DES GRANDS AXES DES ORBITES PLANÉTAIRES,

PAR M. SPIRU C. HARETU.

1. Il y a peu de problèmes qui aient exercé la sagacité des géomètres les plus éminents pendant aussi longtemps que celui *des n corps*. L'importance pratique, ainsi que l'intérêt purement scientifique et philosophique qui s'attache à la loi de la gravitation universelle, explique la ténacité avec laquelle les savants, depuis Newton, ont poursuivi l'étude de ce problème.

Malheureusement les équations différentielles des mouvements des corps célestes sont loin d'être complètement intégrées; et, pour aborder la résolution numérique du problème, on est obligé de recourir à des méthodes d'approximation d'un emploi très laborieux; mais les propriétés auxquelles on arrive ainsi n'ont nécessairement qu'un degré d'exactitude relatif.

Cependant, parmi ces propriétés, il y en a une qui mérite une attention particulière, à cause des conséquences qu'on en peut tirer à l'égard de la stabilité du système du monde; elle est connue sous le nom d'*invariabilité des grands axes des orbites planétaires*. Voici en quoi elle consiste :

2. On sait que, à cause de la petitesse des masses des planètes par rapport à celle du Soleil, l'orbite que chacune d'elles décrit autour du Soleil s'écarte très peu de la forme de l'ellipse qu'elle décrirait si toutes les masses perturbatrices venaient à disparaître. Cela étant, il était naturel que les géomètres prissent le mouvement elliptique comme point de départ dans les calculs d'approximation qu'ils devaient faire pour arriver à la connaissance du mouvement réel. Tel est le principe de la *méthode de la variation des constantes arbitraires* de Lagrange. Dans cette méthode, on considère les *éléments elliptiques* de la planète comme variant sans cesse à cause des perturbations produites par les autres planètes, et l'on a trouvé des formules d'une simplicité remarquable qui expriment les variations des éléments elliptiques. Pour intégrer ces formules, il

est nécessaire de développer ce que l'on appelle la *fonction perturbatrice* R en une série convergente de sinus ou de cosinus d'arcs proportionnels au temps, ce que l'on peut toujours faire, vu que dans la nature R est toujours fini et continu, et que les orbites des diverses planètes sont toujours peu excentriques et peu inclinées les unes sur les autres. Cela fait, on considère, dans une première approximation, les éléments comme constants, et de simples quadratures donnent alors les *inégalités* que chaque terme du développement de R introduit dans la valeur des éléments elliptiques. Dans la seconde approximation, on substitue les valeurs trouvées pour chaque élément par la première approximation dans les formules qui donnent les variations de ces éléments, et par de nouvelles quadratures on trouve de nouvelles inégalités; et ainsi de suite.

On peut facilement se faire une idée du degré d'approximation que l'on réalise par ces diverses opérations. La fonction R est linéaire par rapport aux masses des planètes perturbatrices. En supprimant R, on suppose par cela même que ces masses sont nulles; on a alors les intégrales du mouvement elliptique. Dans la première approximation, l'intégration des équations qui donnent la variation des éléments elliptiques introduit dans les valeurs de ces éléments des termes du premier ordre par rapport aux masses perturbatrices. Ces valeurs étant substituées dans les mêmes équations, on aura, en intégrant, des termes du second ordre par rapport à ces masses; et ainsi de suite. Ainsi l'ordre des inégalités successivement introduites est égal au nombre des approximations successives que l'on a effectuées pour y arriver.

3. On doit distinguer deux espèces d'inégalités : 1° celles provenant des termes de R qui contiennent le temps explicitement, et qui par l'intégration donnent toujours des termes périodiques à courte période; ces inégalités sont peu importantes, parce que dans une longue suite de siècles elles se compensent et ne peuvent pas apporter des changements considérables dans le système du monde; 2° celles qui sont produites par les termes de R qui ne contiennent pas le temps explicitement; celles-ci augmentent lentement, mais continuellement, pendant très longtemps et toujours dans le même sens, et peuvent introduire avec le temps des modifications très sensibles dans la constitution de l'Univers : on les appelle des *inégalités séculaires*.

Or il est très remarquable que les grands axes des orbites planétaires ne sont pas affectés d'inégalités séculaires, du moins quand on tient compte seulement des deux premières puissances des masses; c'est en cela que consiste l'*invariabilité des grands axes des orbites*.

4. Ce n'est que peu à peu et avec beaucoup de difficultés que cette belle propriété a été établie. Laplace est le premier qui l'énonça (¹); mais il ne tenait compte que des premières puissances des masses et des quantités du premier et du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Lagrange démontra ensuite (²) qu'elle était vraie même quand on tenait compte de toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons; mais il ne dépassa pas la première puissance des masses. Dans un Mémoire lu à l'Institut le 20 juin 1808 (³), Poisson réussit à l'étendre aux secondes puissances des masses; mais son calcul est extrêmement long et pénible. Plus tard on réussit à le simplifier beaucoup en faisant usage de la méthode de la variation des constantes arbitraires, découverte par Lagrange; c'est cette méthode que M. Liouville a suivie dans ses leçons au Collège de France en 1841, et que M. V. Puiseux a reproduite avec quelques modifications dans la Thèse pour le Doctorat qu'il a présentée à la même époque à la Faculté des Sciences de Paris.

Dans le Mémoire de Poisson, ainsi que dans la Thèse de M. Puiseux, on doit distinguer deux parties : dans la première, on considère seulement les variations des éléments de la planète troublée, et l'on prouve qu'elles ne produisent pas, dans le grand axe, des inégalités séculaires du second ordre par rapport aux masses; cette partie de la démonstration est assez simple et facile à suivre. Dans la seconde, on tient compte des variations des éléments des planètes perturbatrices; le calcul diffère entièrement du précédent, par la raison que la fonction perturbatrice varie d'une planète à l'autre; c'est pourquoi on a été obligé de recourir à l'équation des forces vives et de faire des combinaisons très ingénieuses, mais indirectes et assez laborieuses, pour prouver qu'il n'existe pas dans le grand axe de l'orbite de la planète troublée d'inégalités séculaires du second ordre provenant de cette espèce de variations.

5. Lagrange a eu l'idée, en 1808 (⁴), de considérer le mouvement des corps célestes autour de leur centre de gravité commun; dans ce cas, la fonction perturbatrice est la même pour toutes les planètes; mais son calcul est entaché de plusieurs fautes de signe, ce qui en détruit toute la valeur.

(¹) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1773.

(²) *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1776.

(³) Ce Mémoire a été publié dans le XV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, année 1809, p. 1-56.

(⁴) *Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, t. IX, année 1808. — *Œuvres complètes*, édition de M. J.-A. SERRET, t. VI.

M. Tisserand, dans une Note insérée aux *Comptes rendus* [1], a indiqué un autre moyen pour arriver au même résultat : il fait usage d'un changement de coordonnées employé par Jacobi dans son célèbre Mémoire *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps*. Il arrive ainsi à faire en sorte que les diverses fonctions perturbatrices ne diffèrent que par un facteur constant, ce qui permet de ramener la seconde partie de l'analyse de Poisson à la première.

Je me propose, dans ce travail, d'exposer la méthode de M. Tisserand. De plus, je reprends une ancienne démonstration de Poisson [2] par laquelle l'illustre géomètre croyait être parvenu à prouver que le grand axe n'éprouve pas d'inégalités séculaires du troisième ordre par rapport aux masses, quand on tient compte seulement des variations des éléments de la planète troublée; il avait reculé devant la tâche d'aborder la seconde partie de la question, à cause de la complication excessive qu'auraient eue les calculs s'il avait appliqué la même méthode qui lui avait servi pour les carrés des masses. Mais la démonstration de Poisson n'est pas complète encore à un autre point de vue : c'est qu'il ne tient pas compte d'une classe de termes d'une forme particulière, qui s'introduisent dans l'expression du demi-grand axe, dès la seconde puissance des masses. En comblant cette lacune, je fais voir que des termes séculaires apparaissent dans la valeur du demi-grand axe, dès la troisième puissance des masses, ce qui est diamétralement opposé à la conclusion du Mémoire de Poisson. Dans la suite de ce Mémoire, je montre, d'après la méthode de Poisson, que les termes séculaires ainsi introduits ne peuvent pas disparaître avec d'autres, puisque tous les autres termes séculaires de l'ordre du cube des masses s'entre-détruisent; je complète cette partie de la démonstration de Poisson en tenant compte aussi des variations des éléments des planètes perturbatrices, ce qui n'est pas difficile si l'on fait usage de la transformation de M. Tisserand.

Ainsi cette propriété de l'invariabilité des grands axes, que beaucoup de géomètres, et Poisson lui-même, croyaient être tout à fait générale, à ce point qu'on avait même essayé de le prouver directement [3], n'existe pas même pour la troisième puissance des masses; ce qui est un résultat assez important, tant au point de vue analytique qu'à celui de la pratique de l'Astronomie mathématique.

---

(1) T. LXXXII, numéro du 21 février 1876.

(2) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. I, p. 55-67, année 1816.

(3) *Voir* un *Mémoire* de M. Maurice et plusieurs Notes sur ce Mémoire dans le tome XV des *Comptes rendus*.

I.

6. On sait que, dans le problème de $n+1$ corps, les équations différentielles du mouvement absolu des différents mobiles sont de la forme

$$\begin{aligned}
m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{m_i m_j (x_j - x_i)}{\delta_{ij}^3} + \frac{m_i m_k (x_k - x_i)}{\delta_{ik}^3} + \ldots,\\
m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{m_i m_j (y_j - y_i)}{\delta_{ij}^3} + \frac{m_i m_k (y_k - y_i)}{\delta_{ik}^3} + \ldots,\\
m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{m_i m_j (z_j - z_i)}{\delta_{ij}^3} + \frac{m_i m_k (z_k - z_i)}{\delta_{ik}^3} + \ldots,\\
m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} &= \frac{m_j m_i (x_i - x_j)}{\delta_{ij}^3} + \frac{m_j m_k (x_k - x_j)}{\delta_{jk}^3} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où

$$\delta_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2, \quad \ldots.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{U} = \sum \frac{m_i m_j}{\delta_{ij}},$$

le signe Σ s'étendant à tous les termes que l'on obtient quand on fait varier chacun des indices i et j de zéro jusqu'à n, sauf ceux pour lesquels $i = j$, ces équations prennent la forme

$$(1) \qquad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z_i}, \quad \ldots$$

U est ce que l'on appelle la *fonction des forces*.

7. Remplaçons maintenant les variables $x_i, y_i, z_i, x_j, \ldots$ par un système de coordonnées ainsi défini. Soient G_1 le centre de gravité de m_0 et de m_1; G_2 celui de m_0, m_1 et m_2; ...; G_{n-1} celui de $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$; G celui de tout le système. Nous prendrons pour nouvelles variables : ξ_1, η_1, ζ_1, coordonnées de m_1 par rapport à trois axes, parallèles aux axes fixes et passant par m_0; ξ_2, η_2, ζ_2 celles de m_2 par rapport à des axes passant par $G_1, \ldots$; ξ_n, η_n, ζ_n celles de m_n par rapport à G_{n-1}; enfin les coordonnées X, Y, Z de G par rapport aux axes fixes.

Soient X_i, Y_i, Z_i les coordonnées de G_i par rapport aux axes fixes, et posons

$$m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_i = \mu_i.$$

On a

$$(2)\qquad x_1 = x_0 + \xi_1,\quad x_2 = X_1 + \xi_2,\quad \ldots,\quad x_{n-1} = X_{n-2} + \xi_{n-1},\quad x_n = X_{n-1} + \xi_n.$$

Mais, d'après les propriétés du centre de gravité, on a aussi

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu_1 X_1 = m_0 x_0 + m_1 x_1, \\ \mu_2 X_2 = m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_n X_n = m_0 x_0 + m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n. \end{array}\right.$$

Substituant dans (2) ces valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, puis éliminant successivement entre les n équations qui résultent de cette substitution $n-1$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on trouve

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_0 + \xi_1, \\ x_2 = x_0 + \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 + \xi_2, \\ x_3 = x_0 + \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 + \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 + \xi_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_0 + \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 + \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 + \ldots + \frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}}\xi_{n-1} + \xi_n. \end{array}\right.$$

Portant ces valeurs dans la dernière équation (3), on obtient

$$x_0 = X - \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 - \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 - \ldots - \frac{m_n}{\mu_n}\xi_n;$$

et cette relation, combinée avec les équations (4), donnera enfin les formules de transformation suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0 = X - \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 - \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 - \frac{m_3}{\mu_3}\xi_3 - \ldots - \frac{m_n}{\mu_n}\xi_n, \\ x_1 = X + \frac{\mu_0}{\mu_1}\xi_1 - \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 - \frac{m_3}{\mu_3}\xi_3 - \ldots - \frac{m_n}{\mu_n}\xi_n, \\ x_2 = X + \frac{\mu_1}{\mu_2}\xi_2 - \frac{m_3}{\mu_3}\xi_3 - \frac{m_4}{\mu_4}\xi_4 - \ldots - \frac{m_n}{\mu_n}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = X + \frac{\mu_{n-2}}{\mu_{n-1}}\xi_{n-1} - \frac{m_n}{\mu_n}\xi_n, \\ x_n = X + \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\xi_n. \end{array}\right.$$

Un calcul identique donnerait $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et $z_0, z_1, \ldots, z_n$ en fonction de $Y, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ et $Z, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$.

8. On sait que, lorsque la fonction des forces existe, ce qui est notre cas, Lagrange a donné le moyen d'écrire les équations du mouvement dans un système de coordonnées quelconques. Pour cela, on exprime U, la fonction des forces, et T, la demi-somme des forces vives, en fonction des nouvelles coordonnées réduites au plus petit nombre possible par les équations de liaison; alors les équations du mouvement sont de la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \xi_i'} - \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0.$$

Dans le problème de $n+1$ corps, U, étant simplement fonction des différences des coordonnées rectangulaires, $x_0, x_1, \ldots$, sera indépendant de X, Y, Z, d'après la forme des équations (5); on aura donc

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0.$$

Les équations (5) étant linéaires, T sera indépendant de $X, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $Y, \ldots$. On trouve facilement

$$\begin{aligned} 2T = \mu_n(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) &+ \frac{\mu_0 m_1}{\mu_1}(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2) \\ &+ \frac{\mu_1 m_2}{\mu_2}(\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2) + \ldots + \frac{\mu_{n-1} m_n}{\mu_n}(\xi_n'^2 + \eta_n'^2 + \zeta_n'^2), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i'} = \frac{\mu_{i-1} m_i}{\mu_i}\xi_i', \quad \frac{\partial T}{\partial \xi_i} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial X'} = \mu_n X', \quad \frac{\partial T}{\partial X} = 0.$$

Les équations du mouvement seront donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0, \\ &\frac{\mu_{i-1} m_i}{\mu_i}\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0, \quad \frac{\mu_{i-1} m_i}{\mu_i}\frac{d^2 \eta_i}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial \eta_i} = 0, \quad \frac{\mu_{i-1} m_i}{\mu_i}\frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les trois premières donnent la propriété bien connue du mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité.

9. Supposons maintenant que m_0 soit le Soleil, dont je prends la masse pour unité, les masses des diverses planètes étant considérées comme de petites

quantités du premier ordre. Alors

$$U = \sum \frac{m_i}{\delta_{0i}} + \sum \frac{m_i m_j}{\delta_{ij}};$$

mais

$$x_i - x_0 = \xi_i + \frac{m_1}{\mu_1}\xi_1 + \frac{m_2}{\mu_2}\xi_2 + \ldots + \frac{m_{i-1}}{\mu_{i-1}}\xi_{i-1};$$

et, si l'on pose

$$r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2,$$

on a

$$\delta_{0i}^2 = r_i^2 + P,$$

P ne contenant que des termes du premier et du second ordre par rapport aux masses; par suite

$$\sum \frac{m_i}{\delta_{0i}} = \sum \frac{m_i}{r_i}\left(1 + \frac{P}{r_i^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{m_i}{r_i} + Q,$$

Q étant du second ordre; d'autre part, $\sum \frac{m_i m_j}{\delta_{ij}}$ est encore du second ordre; donc $U - \sum \frac{m_i}{r_i}$ est une quantité du second ordre, et il en est de même de

$$U - \sum \frac{m_i(1+m_i)\mu_{i-1}}{\mu_i}\frac{1}{r_i} = V.$$

Si, dans (6), on remplace U par sa valeur tirée de cette relation, les équations du mouvement prendront la forme

$$\frac{\mu_{i-1}m_i}{\mu_i}\frac{d^2\xi_i}{dt^2} + \frac{m_i(1+m_i)\mu_{i-1}}{\mu_i}\frac{\xi_i}{r_i^3} - \frac{\partial V}{\partial \xi_i} = 0$$

ou bien

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} + \dfrac{(1+m_i)\xi_i}{r_i^3} - \dfrac{\mu_i}{m_i\mu_{i-1}}\dfrac{\partial V}{\partial \xi_i} = 0; \\ \text{et de même} \\ \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} + \dfrac{(1+m_i)\eta_i}{r_i^3} - \dfrac{\mu_i}{m_i\mu_{i-1}}\dfrac{\partial V}{\partial \eta_i} = 0, \\ \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} + \dfrac{(1+m_i)\zeta_i}{r_i^3} - \dfrac{\mu_i}{m_i\mu_{i-1}}\dfrac{\partial V}{\partial \zeta_i} = 0. \end{array}\right.$$

On voit que c'est exactement la forme des équations du mouvement d'une planète autour du Soleil, avec la fonction perturbatrice

$$R_i = -\frac{\mu_i}{m_i \mu_{i-1}} V = -\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{\mu_{i-1}}\right) V,$$

qui est la même pour toutes les planètes, au facteur constant $\frac{\mu_i}{m_i \mu_{i-1}}$ près. Cette fonction est encore du premier ordre par rapport aux masses, comme dans le calcul ordinaire des perturbations; mais, au lieu d'être linéaire, elle contient des termes de tous les ordres, entiers et positifs, par rapport à ces masses.

10. Négligeons d'abord entièrement les masses perturbatrices et considérons simplement les équations

$$(8) \qquad \frac{d^2\xi_i}{dt^2} + \frac{(1+m_i)\xi_i}{r_i^3} = 0, \quad \frac{d^2\eta_i}{dt^2} + \frac{(1+m_i)\eta_i}{r_i^3} = 0, \quad \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} + \frac{(1+m_i)\zeta_i}{r_i^3} = 0.$$

Leur intégration donnera le mouvement elliptique de m_i autour de G_{i-1}, et introduira six constantes arbitraires, qui sont les *éléments du mouvement elliptique* de m_i. J'adopterai les éléments astronomiques, qui sont : le *demi-grand axe* a_i de l'orbite, qui est lié au *moyen mouvement* n_i par la relation

$$n_i = \sqrt{\frac{1+m_i}{a_i^3}};$$

l'*excentricité* de l'orbite e_i; l'*inclinaison* φ_i du plan de cette orbite sur le plan XOY; la *longitude du nœud ascendant* θ_i; la *longitude du périhélie* ϖ_i; la *longitude moyenne de l'époque* ε_i.

Mais, si l'on veut avoir les intégrales du système (7), il faut considérer les éléments elliptiques non pas comme des constantes, mais comme des fonctions du temps, assujetties à la condition que les valeurs de ξ_i, η_i, ζ_i, données par l'intégration du système (8), et dans lesquelles on considère ces éléments comme variables, satisfassent au système (7). Si, de plus, on s'impose la condition que les dérivées premières de ξ_i, η_i, ζ_i par rapport au temps aient la même forme dans le mouvement troublé que dans le mouvement elliptique, on arrive aux équations suivantes, qui donnent les variations des divers éléments, produites par la force perturbatrice R_i :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{da_i}{dt} &= -\frac{2}{n_i a_i}\frac{\partial R_i}{\partial \varepsilon_i},\\
\frac{de_i}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e_i^2}}{n_i a_i^2 e_i}\frac{\partial R_i}{\partial \pi_i} + \frac{\sqrt{1-e_i^2}\left(1-\sqrt{1-e_i^2}\right)}{n_i a_i^2 e_i}\frac{\partial R_i}{\partial \varepsilon_i},\\
\frac{d\varphi_i}{dt} &= \frac{1}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}\sin\varphi_i}\frac{\partial R_i}{\partial \theta_i} + \frac{\tang\frac{\varphi_i}{2}}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\left(\frac{\partial R_i}{\partial \pi_i} + \frac{\partial R_i}{\partial \varepsilon_i}\right),\\
\frac{d\theta_i}{dt} &= -\frac{1}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}\sin\varphi_i}\frac{\partial R_i}{\partial \varphi_i},\\
\frac{d\pi_i}{dt} &= -\frac{\tang\frac{\varphi_i}{2}}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial R_i}{\partial \varphi_i} - \frac{\sqrt{1-e_i^2}}{n_i a_i^2 e_i}\frac{\partial R_i}{\partial e_i},\\
\frac{d\varepsilon_i}{dt} &= \frac{2}{n_i a_i}\frac{\partial R_i}{\partial a_i} - \frac{\sqrt{1-e_i^2}\left(1-\sqrt{1-e_i^2}\right)}{n_i a_i^2 e_i}\frac{\partial R_i}{\partial e_i} - \frac{\tang\frac{\varphi_i}{2}}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial R_i}{\partial \varphi_i}.
\end{aligned}
\right.
$$

Je dis qu'il suffit de prouver que, en vertu des équations (9), a_i n'a pas d'inégalités séculaires d'un ordre quelconque, pour en conclure que, dans la nature, les demi-grands axes des ellipses que décrivent les planètes autour du Soleil n'en ont pas non plus. En effet, d'après le système de coordonnées adopté, les équations (7) donnent pour m_1 précisément le mouvement troublé autour du Soleil; et, comme on peut prendre pour m_1 n'importe laquelle des planètes considérées, la proposition est démontrée.

11. V est fonction des coordonnées elliptiques $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \ldots$; mais ces coordonnées, étant des fonctions périodiques du temps, peuvent être développées en séries suivant les sinus ou les cosinus d'angles tels que $\alpha(n_i t + \varepsilon_i)$, $\beta(n_j t + \varepsilon_j)$, ... Or, si V_1 désigne l'ensemble des termes de V qui sont du second ordre par rapport aux masses, V_2 ceux du troisième ordre, etc., on peut se convaincre que $V_1, V_2, \ldots$ ont les formes suivantes :

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \Sigma m_i m_j f_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \xi_j, \eta_j, \zeta_j),\\
V_2 &= \Sigma m_i m_j m_k f_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \xi_j, \eta_j, \zeta_j, \xi_k, \eta_k, \zeta_k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

et, après le développement,

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \Sigma C_1 m_i m_j \,{}^{\sin}_{\cos}\left[\alpha(n_i t + \varepsilon_i) + \beta(n_j t + \varepsilon_j) + \omega_1\right],\\
V_2 &= \Sigma C_2 m_i m_j m_k \,{}^{\sin}_{\cos}\left[\alpha(n_i t + \varepsilon_i) + \beta(n_j t + \varepsilon_j) + \gamma(n_k t + \varepsilon_k) + \omega_2\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$C_1, C_2, \ldots, \omega_1, \omega_2, \ldots$ sont des fonctions des éléments elliptiques des diverses planètes considérées, mais qui ne contiennent pas les ε ni les m; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des nombres entiers qui prennent toutes les valeurs possibles entre $-\infty$ et $+\infty$.

Enfin on sait que, pour éviter que $\frac{\partial R_i}{\partial a_i}$ contienne t en dehors des signes sin et cos, il suffit de remplacer, dans les équations (9), ε_i par $\varepsilon_i - n_i t + \int n_i dt$, et d'y supprimer la partie de $\frac{\partial R_i}{\partial a_i}$ qui provient de la variation de $\int n_i dt$. De même pour les autres planètes.

Pour faciliter l'écriture, je poserai

$$M_i = -\frac{\mu_i}{m_i \mu_{i-1}} = -\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{\mu_{i-1}}\right), \quad \rho_i = \int n_i dt,$$
$$l_i = \int n_i dt + \varepsilon_i = \rho_i + \varepsilon_i, \quad \psi = \alpha l_i + \beta l_j;$$

l_i est la *longitude moyenne* de la planète m_i.

12. L'équation

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{2}{n_i a_i}\frac{\partial R_i}{\partial \varepsilon_i} = -\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} \tag{10}$$

montre immédiatement que a_i n'a pas d'inégalités séculaires du premier ordre par rapport aux masses. En effet, pour avoir ces inégalités, il est clair qu'il suffira de considérer, dans le second membre de l'équation (10), le terme $+\frac{2}{m_i n_i a_i}\frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon_i}$, et de prendre dans le développement de V_1 seulement les termes dont l'argument ne renferme pas t, en y regardant les éléments elliptiques comme constants. Or ces termes sont en même temps indépendants de ε_i, et, par suite, $\frac{da_i}{dt} = 0$.

II.

13. Passons aux termes de l'ordre du carré des masses, et prouvons qu'il n'en existe pas dans la valeur de $\frac{da_i}{dt}$ qui soient indépendants du temps.

Si l'on néglige les termes d'un ordre supérieur au second, on a d'abord

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{2}{m_i n_i a_i}\frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon_i} + \frac{2}{\mu_{i-1} n_i a_i}\frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon_i} + \frac{2}{m_i n_i a_i}\frac{\partial V_2}{\partial \varepsilon_i}, \tag{11}$$

et ces termes sont entièrement périodiques.

Mais ce ne sont pas là les seuls termes du second ordre qui se trouvent dans $\frac{da_i}{dt}$; en effet, supposons que l'on intègre les équations (9) en ne tenant compte que des premières puissances des masses; on obtiendra alors, pour les divers éléments, des valeurs de cette forme :

$$a_i + \delta a_i,\quad \theta_i + \Delta\theta_i + \delta\theta_i;\quad e_i + \Delta e_i + \delta e_i,\quad \ldots,\quad a_j + \delta a_j,\quad \ldots,$$

Δ désignant les inégalités séculaires et δ les inégalités périodiques; toutes ces inégalités sont du premier ordre par rapport aux masses. Si donc, dans le second membre de (11), on remplace les divers éléments par les valeurs précédentes, les nouveaux termes que l'on obtiendra en dehors de ceux qui s'y trouvent déjà seront au moins de l'ordre du carré des masses. Il s'agit d'examiner si, dans cette substitution, il ne se produit pas des combinaisons de nature à donner naissance à des termes non périodiques du second ordre dans la valeur de a_i.

Pour cette analyse, il suffirait de conserver dans (11) seulement le terme $+\frac{2}{m_i n_i a_i}\frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon_i}$; car, les deux autres étant déjà du second ordre, leurs variations seront du troisième. Cependant il est préférable de considérer la formule générale

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}$$

et de supposer que l'on néglige partout les termes de $M_i V$, dont l'ordre est supérieur à celui que l'on veut conserver. Cette manière de procéder, que nous conserverons aussi quand il s'agira des termes du troisième ordre, permettra d'apporter quelques simplifications et plus d'uniformité dans les calculs qui se rapportent aux carrés et aux cubes des masses.

De plus, il est inutile d'introduire les variations séculaires Δ. En effet, on sait que ces variations s'expriment par des sinus et des cosinus dont les arguments sont de l'ordre des masses; les termes de V, au contraire, ont des arguments finis, et, par conséquent, il est impossible que la multiplication de ces deux espèces de termes fasse disparaître le temps dans les arguments et donne naissance à des termes séculaires.

14. Faisons d'abord varier seulement les éléments de la planète troublée m_i; si l'on pose

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} = V'_i,\quad \frac{\partial V}{\partial \rho_j} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_j} = V'_j,$$

on aura

$$(12)\qquad \begin{aligned}\frac{d\mathrm{a}_i}{dt} = &-\frac{2\mathrm{M}_i}{n_i\mathrm{a}_i}\mathrm{V}'_i - \frac{\mathrm{M}_i}{n_i\mathrm{a}_i^2}\mathrm{V}'_i\delta\mathrm{a}_i - \frac{2\mathrm{M}_i}{n_i\mathrm{a}_i}\frac{\partial\mathrm{V}'_i}{\partial\rho_i}\delta\rho_i\\ &-\frac{2\mathrm{M}_i}{n_i\mathrm{a}_i}\left(\frac{\partial\mathrm{V}'_i}{\partial\varepsilon_i}\delta\varepsilon_i + \frac{\partial\mathrm{V}'_i}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial\mathrm{V}'_i}{\partial q_i}\delta q_i + \ldots\right);\end{aligned}$$

p_i, q_i, ... désignent les divers éléments de m_i. Dans $\mathrm{M}_i\mathrm{V}$ et ses dérivées, il faut négliger tous les termes d'un ordre supérieur au premier, excepté dans $-\frac{2\mathrm{M}_i}{n_i\mathrm{a}_i}\mathrm{V}'_i$, où l'on doit conserver ceux du premier et du second ordre. Quant aux variations $\delta\varepsilon_i$, δp_i, δq_i, ..., on les calculera par les formules (9), dans les seconds membres desquelles on ne conservera que les termes du premier ordre, et l'on considérera les éléments comme constants.

Le premier terme de (12), $-\frac{2\mathrm{M}_i}{n_i\mathrm{a}_i}\mathrm{V}'_i$, est périodique.

Dans le second, V'_i et $\delta\mathrm{a}_i$ sont tous les deux périodiques; et, pour avoir un terme séculaire, il faudrait multiplier des termes de même argument de V'_i et de $\delta\mathrm{a}_i$. Si l'on réduit $\mathrm{M}_i\mathrm{V}$ aux seuls termes dont l'argument est ψ, on a

$$(13)\qquad \mathrm{M}_i\mathrm{V} = \mathrm{A}\sin\psi + \mathrm{B}\cos\psi = \mathrm{C}\sin(\psi+\omega),$$

où A, B, C, ω ne contiennent ni t, ni ε_i, ε_j, ... et A, B, C sont du premier ordre on tire de là

$$\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i = \mathrm{C}\alpha\cos(\psi+\omega),$$

et alors (10) donne

$$\delta\mathrm{a}_i = -\frac{2\mathrm{C}\alpha}{n_i\mathrm{a}_i(\alpha n_i + \beta n_j)}\sin(\psi+\omega);$$

donc

$$-\frac{\mathrm{M}_i}{n_i\mathrm{a}_i^2}\mathrm{V}'_i\delta\mathrm{a}_i = \frac{\mathrm{C}^2\alpha^2}{n_i^2\mathrm{a}_i^3(\alpha n_i + \beta n_j)}\sin 2(\psi+\omega),$$

quantité périodique.

Le terme $-\frac{2\mathrm{M}_i}{n_i\mathrm{a}_i}\frac{\partial\mathrm{V}'_i}{\partial\rho_i}\delta\rho_i$ est encore périodique; en effet,

$$\mathrm{M}_i\frac{\partial\mathrm{V}'_i}{\partial\rho_i} = -\mathrm{C}\alpha^2\sin(\psi+\omega);$$

ensuite

$$\rho_i = \int n_i dt,\quad \frac{d^2\rho_i}{dt^2} = -\frac{3}{2}\frac{n_i}{\mathrm{a}_i}\frac{d\mathrm{a}_i}{dt} = \frac{3\mathrm{M}_i}{\mathrm{a}_i^2}\mathrm{V}'_i,$$

$$\delta\rho_i = -\frac{3\mathrm{C}\alpha}{\mathrm{a}_i^2(\alpha n_i + \beta n_j)^2}\cos(\psi+\omega);$$

donc

$$-\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_i}\delta\rho_i = -\frac{3C^2\alpha^3}{n_i a_i^3(\alpha n_i + \beta n_j)^2}\sin 2(\psi+\omega).$$

Enfin, pour le dernier terme, on doit remarquer que, en vertu des formules (9), on a

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_i &= +\,FM_i\int\frac{\partial V}{\partial p_i}dt + GM_i\int\frac{\partial V}{\partial q_i}dt + \ldots,\\
\delta p_i &= -\,FM_i\int\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}dt + HM_i\int\frac{\partial V}{\partial q_i}dt + \ldots,\\
\delta q_i &= -\,GM_i\int\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}dt - HM_i\int\frac{\partial V}{\partial p_i}dt + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

F, G, H, ... étant fonctions de p_i, q_i, ..., mais ne contenant pas ε_i; donc ce dernier terme sera composé de parties de la forme

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{2FM_i^2}{n_i a_i}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial \varepsilon_i}\int\frac{\partial V}{\partial p_i}dt - \frac{\partial V'_i}{\partial p_i}\int\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}dt\right) - \ldots,\\
&-\frac{2HM_i^2}{n_i a_i}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial p_i}\int\frac{\partial V}{\partial q_i}dt - \frac{\partial V'_i}{\partial q_i}\int\frac{\partial V}{\partial p_i}dt\right) - \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace $M_i V$ par $A\sin\psi + B\cos\psi$, on trouve

$$\begin{aligned}
M_i^2\frac{\partial V'_i}{\partial \varepsilon_i}\int\frac{\partial V}{\partial p_i}dt &= M_i^2\frac{\partial V'_i}{\partial p_i}\int\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}dt\\
&= \frac{\alpha^2}{\alpha n_i + \beta n_j}(A\sin\psi + B\cos\psi)\left(\frac{\partial A}{\partial p_i}\cos\psi - \frac{\partial B}{\partial p_i}\sin\psi\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_i^2\frac{\partial V'_i}{\partial p_i}\int\frac{\partial V}{\partial q_i}dt &= M_i^2\frac{\partial V'_i}{\partial q_i}\int\frac{\partial V}{\partial p_i}dt\\
&= -\frac{\alpha}{\alpha n_i + \beta n_j}\left(\frac{\partial A}{\partial p_i}\cos\psi - \frac{\partial B}{\partial p_i}\sin\psi\right)\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\cos\psi - \frac{\partial B}{\partial q_i}\sin\psi\right);
\end{aligned}$$

la dernière partie de $\frac{da_i}{dt}$, dans (12), est donc nulle, quant aux termes séculaires.

15. Il importe de remarquer que, parmi les termes compris dans l'expression générale (14), il s'en trouve un certain nombre qui ne peuvent pas se réduire à la forme $A\cos(\psi+\omega)$; ce sont ceux que l'on forme en prenant pour V, sous le signe d'intégration, dans l'expression (14), ses termes constants. On obtient alors des termes tels que $At\cos(\psi+\omega)$. Les termes de cette espèce introdui-

ront dans la valeur de a_i des inégalités de la forme $At \sin(\psi + \omega)$, qui sont, en quelque sorte, intermédiaires entre les inégalités séculaires et les inégalités périodiques. En effet, la période du cosinus est $\frac{2\pi}{\alpha n_i + \beta n_j}$, et elle est ordinairement assez peu considérable; mais, d'autre part, la valeur absolue du terme peut devenir très grande, à cause du facteur t qu'il renferme en dehors du signe cos, ce qui rapproche l'inégalité à laquelle il donne lieu des inégalités séculaires, dont la valeur maxima est d'habitude beaucoup plus considérable que celle des inégalités périodiques.

Du reste, on peut remarquer que tous les termes de la forme $At\cos(\psi + \omega)$ que l'on introduit ainsi sont du second ordre, et que la forme la plus générale de leur argument est $\psi = \alpha l_i + \beta l_j$.

16. Examinons maintenant les termes qui proviennent de la variation des éléments des planètes perturbatrices. Ce sont

$$(15)\qquad -\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j}\delta\rho_j - \ldots - \frac{2M_i}{n_i a_i}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial \varepsilon_j}\delta\varepsilon_j + \frac{\partial V'_i}{\partial p_j}\delta p_j + \frac{\partial V'_i}{\partial q_j}\delta q_j + \ldots\right) - \ldots.$$

Comme la fonction perturbatrice est la même, à un facteur constant près, pour toutes les planètes, le calcul à faire pour prouver que ces termes sont périodiques est identique au précédent. Ainsi l'on a

$$M_i \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j} = -C\alpha\beta \sin(\psi + \omega),$$

$$\rho_j = \int n_j dt, \quad \frac{d^2\rho_j}{dt^2} = -\frac{3}{2}\frac{n_j}{a_j}\frac{da_j}{dt} = \frac{3M_j}{a_j^2}V'_j,$$

$$\delta\rho_j = -\frac{3M_j C\beta}{M_i a_j^2(\alpha n_i + \beta n_j)^2}\cos(\psi + \omega);$$

$$-\frac{2M_i}{n_i a_i}\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j}\delta\rho_j = -\frac{3M_j C^2\alpha\beta^2}{M_i a_j^2 n_i a_i(\alpha n_i + \beta n_j)^2}\sin 2(\psi + \omega).$$

On voit déjà que le premier des termes (15) est périodique.

On a ensuite

$$\delta\varepsilon_j = +FM_j\int \frac{\partial V}{\partial p_j}dt + GM_j\int\frac{\partial V}{\partial q_j}dt + \ldots,$$

$$\delta p_j = -FM_j\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_j}dt + HM_j\int\frac{\partial V}{\partial q_j}dt + \ldots,$$

$$\delta q_j = -GM_j\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_j}dt - HM_j\int\frac{\partial V}{\partial p_j}dt + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Le second terme (15) sera donc de la forme

$$-\frac{2FM_iM_j}{n_i a_i}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial \varepsilon_j}\int\frac{\partial V}{\partial p_j}dt-\frac{\partial V'_i}{\partial p_j}\int\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_j}dt\right)-\ldots,$$

$$-\frac{2HM_iM_j}{n_i a_i}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial p_j}\int\frac{\partial V}{\partial q_j}dt-\frac{\partial V'_i}{\partial q_j}\int\frac{\partial V}{\partial p_j}dt\right)-\ldots.$$

Effectuant le calcul, on verra encore que, dans cette quantité, la partie non périodique est nulle. Cependant on peut voir qu'elle renferme aussi des termes de la forme $At\cos(\psi+\omega)$.

L'invariabilité des grands axes est donc démontrée pour les secondes puissances des masses, comme elle l'a été pour les premières.

III.

17. Passons aux termes du troisième ordre. Des termes de cette espèce se trouvent d'abord dans $M_iV'_i$ lorsqu'on y considère les éléments comme constants. On en forme d'autres quand on fait varier ces éléments dans chacun des facteurs $\frac{1}{n_i a_i}$ et $M_iV'_i$, en allant jusqu'aux termes du troisième ordre.

Faisons d'abord varier seulement $\frac{1}{n_i a_i}$; on a alors

$$(16)\qquad \frac{da_i}{dt}=-\frac{2}{n_i a_i}M_iV'_i-\frac{1}{n_i a_i^2}M_iV'_i\delta a_i+\frac{1}{4n_i a_i^3}M_iV'_i\delta a_i^2.$$

On doit considérer les coefficients $\frac{2}{n_i a_i}$, $\frac{1}{n_i a_i^2}$, $\frac{1}{4n_i a_i^3}$, dans le second membre, comme des constantes absolues. Ensuite, pour avoir tous les termes du troisième ordre, comme $M_iV'_i$ et δa_i sont chacun du premier ordre, il faut, dans le premier terme, calculer $M_iV'_i$ jusqu'au troisième ordre; dans le deuxième, remplacer chacun des facteurs $M_iV'_i$ et δa_i par sa valeur jusqu'aux quantités du second ordre; dans le troisième, prendre pour $M_iV'_i$ et δa_i seulement leurs termes du premier ordre.

18. Considérons la partie

$$-\frac{1}{n_i a_i^2}M_iV'_i\delta a_i.$$

L'équation

$$\frac{da_i}{dt}=-\frac{2M_iV'_i}{n_i a_i},$$

dans laquelle on calcule le second membre jusqu'aux termes du second ordre inclusivement, donnera δa_i avec ce degré d'approximation; on aura donc

$$-\frac{1}{n_i a_i^2} M_i V'_i \delta a_i = +\frac{2}{n_i a_i^2} M_i V'_i \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt.$$

D'autre part, on a

$$n_i a_i = n_i a_i - \frac{n_i}{2} \delta a_i = n_i a_i + n_i \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt,$$

en considérant les éléments comme constants dans le second membre. Multiplions le second membre de l'équation précédente par cette valeur de $n_i a_i$ et par $\frac{1}{n_i a_i}$; on aura

$$(17) \qquad -\frac{1}{n_i a_i^2} M_i V'_i \delta a_i = \frac{2}{a_i} \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt + \frac{2}{a_i^2} \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} \left(\int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt \right)^2;$$

les coefficients $\frac{2}{a_i}$ et $\frac{2}{a_i^2}$ sont des constantes absolues.

On a aussi

$$(18) \qquad +\frac{1}{4 n_i a_i^3} M_i V'_i \delta a_i^2 = +\frac{1}{n_i a_i^3} M_i V'_i \left(\int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt \right)^2.$$

Pour avoir les termes du troisième ordre, il suffit, dans le dernier terme de (17) et dans le second membre de (18), de considérer les éléments comme constants, en conservant seulement les termes du premier ordre de $M_i V'_i$, et, dans le premier terme du second membre de (17), de calculer $\frac{M_i V'_i}{n_i a_i}$ jusqu'aux quantités du second ordre; on aura donc

$$(19) \quad -\frac{1}{n_i a_i^2} M_i V'_i \delta a_i + \frac{1}{4 n_i a_i^3} M_i V'_i \delta a_i^2 = \frac{2}{a_i} \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} \int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i} dt + \frac{3}{n_i^3 a_i^5} M_i^3 V'_i \left(\int V'_i dt \right)^2.$$

19. On a vu (n[os] **13**, **14**, **15**, **16**) que $\frac{M_i V'_i}{n_i a_i}$ ne renferme pas de termes séculaires jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement; on peut donc poser, avec ce degré d'approximation, et en désignant respectivement par ψ et χ des angles dont l'expression la plus générale est $\alpha l_i + \beta l_j$ et $\alpha' l_i + \beta' l_j + \gamma' l_k$,

$$\frac{M_i V'_i}{n_i a_i} = \Sigma C_1 \sin(\psi + \omega_1) + \Sigma C_2 \sin(\chi + \omega_2) + \Sigma C'_2 t \sin(\psi + \omega_3),$$

où C_1 est du premier ordre, C_2 et C'_2 du second ordre par rapport aux masses;

on tire de là

$$\int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i}\,dt = -\sum \frac{C_1}{\alpha n_i + \beta n_j}\cos(\psi+\omega_1) - \sum \frac{C_2}{\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k}\cos(\chi+\omega_2)$$
$$-\sum \frac{C'_2 t}{\alpha n_i + \beta n_j}\cos(\psi+\omega_3) + \sum \frac{C'_2}{(\alpha n_i + \beta n_j)^2}\sin(\psi+\omega_3).$$

La partie du troisième ordre $\frac{M_i V'_i}{n_i a_i}\int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i}\,dt$ est

$$\frac{M_i V'_i}{n_i a_i}\int \frac{M_i V'_i}{n_i a_i}\,dt$$
$$= -\sum \frac{C_1 C_2}{2(\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k)}[\sin(\psi+\chi+\omega_1+\omega_2) + \sin(\psi-\chi+\omega_1-\omega_2)]$$
$$-\sum \frac{C_1 C_2}{2(\alpha n_i + \beta n_j)}[\sin(\psi+\chi+\omega_1+\omega_2) - \sin(\psi-\chi+\omega_1-\omega_2)]$$
$$-\sum \frac{C_1 C'_2 t}{2(\alpha n_i + \beta n_j)}[\sin(2\psi+\omega_1+\omega_3) + \sin(\omega_1-\omega_3)]$$
$$-\sum \frac{C_1 C'_2}{2(\alpha n_i + \beta n_j)^2}[\cos(2\psi+\omega_1+\omega_3) - \cos(\omega_1-\omega_3)]$$
$$-\sum \frac{C_1 C'_2 t}{2(\alpha n_i + \beta n_j)}[\sin(2\psi+\omega_1+\omega_3) + \sin(\omega_3-\omega_1)].$$

Dans les deux premières lignes, on pourra avoir des termes séculaires si $\psi+\chi=0$ ou $\psi-\chi=0$, c'est-à-dire si l'on a

$$(\alpha+\alpha')n_i + (\beta+\beta')n_j + \gamma' n_k = 0$$

ou

$$(\alpha-\alpha')n_i + (\beta-\beta')n_j - \gamma' n_k = 0;$$

mais, dans la nature, ces conditions ne sont jamais remplies, si ce n'est lorsque l'on a en même temps

$$\alpha+\alpha'=0,\quad \beta+\beta'=0,\quad \gamma'=0,$$

ou

$$\alpha-\alpha'=0,\quad \beta-\beta'=0,\quad \gamma'=0,$$

et alors les deux termes séculaires formés s'annulent mutuellement.

Les trois dernières lignes renferment trois termes séculaires, dont deux se détruisent; mais il en reste encore un, qui est

$$\frac{C_1 C'_2}{2(\alpha n_i + \beta n_j)^2}\cos(\omega_1-\omega_3); \tag{20}$$

donc le premier des termes (19) renferme un terme séculaire du troisième ordre.

Cependant on ne peut pas encore affirmer que l'expression du demi-grand axe renferme des termes séculaires de cet ordre; pour pouvoir le faire, il faut prouver que le terme (20) n'est pas détruit par d'autres termes séculaires qui se trouveraient dans les parties non encore examinées de $\frac{da_i}{dt}\cdot$ Or je vais démontrer que ces parties ne sont composées que de termes périodiques.

Et d'abord, dans le dernier terme de l'expression (19), on a

$$V'_i(\int V'_i dt)^2 = \frac{1}{3}\,\frac{d.(\int V'_i dt)^3}{dt}.$$

Comme V'_i n'est composé que de termes périodiques du premier ordre, $(\int V'_i dt)^3$ ne peut renfermer que des termes périodiques ou des termes constants; mais ces derniers disparaîtront par la différentiation.

20. Il reste à examiner le terme $-\frac{2M_i V'_i}{n_i a_i}$, et en particulier $M_i V'_i$, puisque l'autre facteur est constant.

Avant d'aller plus loin et pour simplifier, je ferai un changement des constantes arbitraires choisies au n° **10**, que je remplacerai par les valeurs initiales des coordonnées et de leurs dérivées premières par rapport au temps. L'avantage de ce changement consiste en ce que, dans les équations analogues à (9), relatives aux nouvelles constantes arbitraires, tous les coefficients des dérivées partielles de R_i, qui se trouvent dans le second membre, seront égaux à zéro, à $+1$ ou à -1, ce qui nous dispensera de chercher leurs variations.

En effet, on sait que les équations qui donnent les variations des constantes arbitraires ont la forme générale suivante, qui leur a été donnée par Poisson :

$$\frac{da_i}{dt} = (a_i, b_i)\frac{\partial R_i}{\partial b_i} + (a_i, c_i)\frac{\partial R_i}{\partial c_i} + \ldots;$$

on sait, de plus, que les coefficients $(a_i, b_i), (a_i, c_i), \ldots$ sont de simples fonctions des constantes arbitraires, indépendantes du temps, et qu'ils ont la forme

$$(a_i, b_i) = \frac{\partial a_i}{\partial \xi_i}\frac{\partial b_i}{\partial \xi'_i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi'_i}\frac{\partial b_i}{\partial \xi_i} + \frac{\partial a_i}{\partial \eta_i}\frac{\partial b_i}{\partial \eta'_i} - \frac{\partial a_i}{\partial \eta'_i}\frac{\partial b_i}{\partial \eta_i} + \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_i}\frac{\partial b_i}{\partial \zeta'_i} - \frac{\partial a_i}{\partial \zeta'_i}\frac{\partial b_i}{\partial \zeta_i}.$$

Supposons maintenant que les équations du mouvement elliptique aient donné les intégrales

$$\xi_i = a_i + \varphi_i(t),\quad \eta_i = b_i + \psi_i(t),\quad \zeta_i = c_i + \chi_i(t),$$
$$\xi'_i = a'_i + \varphi'_i(t),\quad \eta'_i = b'_i + \psi'_i(t),\quad \zeta'_i = c'_i + \chi'_i(t),$$

a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i étant des constantes arbitraires et $\varphi_i(t)$, $\varphi'_i(t)$, $\psi_i(t)$, ... des fonctions du temps qui s'annulent pour $t = 0$; pour cette époque particulière, on aura donc

$$(a_i, a'_i) = -(a'_i, a_i) = 1, \quad (b_i, b'_i) = -(b'_i, b_i) = 1, \quad (c_i, c'_i) = -(c'_i, c_i) = 1;$$

toutes les autres combinaisons seront nulles. Or, comme ces coefficients sont indépendants du temps, ils conserveront ces mêmes valeurs pour toutes les valeurs de t, et, par conséquent, les différentielles des nouvelles constantes arbitraires seront données par les équations

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \mathrm{M}_i\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}, & \frac{db_i}{dt} &= \mathrm{M}_i\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b'_i}, & \frac{dc_i}{dt} &= \mathrm{M}_i\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial c'_i},\\ \frac{da'_i}{dt} &= -\mathrm{M}_i\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_i}, & \frac{db'_i}{dt} &= -\mathrm{M}_i\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b_i}, & \frac{dc'_i}{dt} &= -\mathrm{M}_i\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial c_i}. \end{aligned}\right.$$

21. Formons maintenant l'expression de $\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i$ jusqu'au troisième ordre, en faisant varier en même temps les éléments de la planète troublée, ainsi que ceux des planètes perturbatrices; on aura ainsi

$$(22)\quad \begin{aligned} \mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i &= (\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i)_0 + \mathrm{M}_i\delta\mathrm{V}'_i\\ &= (\mathrm{M}_i\mathrm{V}'_i)_0 + \mathrm{M}_i\Big(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i}\delta\rho_i + \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_i}\delta a_i + \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_i}\delta a'_i + \ldots\\ &\quad + \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j}\delta\rho_j + \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_j}\delta a_j + \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j}\delta a'_j + \ldots\\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i^2}\delta\rho_i^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_i^2}\delta a_i^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_i'^2}\delta a_i'^2 + \ldots\\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j^2}\delta\rho_j^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j^2}\delta a_j^2 + \ldots\\ &\quad + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i\partial a_i}\delta\rho_i\delta a_i + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i\partial a'_i}\delta\rho_i\delta a'_i + \ldots\\ &\quad + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_i\partial a'_i}\delta a_i\delta a'_i + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_i\partial b_i}\delta a_i\delta b_i + \ldots\\ &\quad + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j\partial a_j}\delta\rho_j\delta a_j + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j\partial a'_j}\delta\rho_j\delta a'_j + \ldots\\ &\quad + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j\partial a'_j}\delta a_j\delta a'_j + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j\partial b_j}\delta a^j\delta b_j + \ldots\\ &\quad + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i\partial \rho_j}\delta\rho_i\delta\rho_j + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i\partial a_j}\delta\rho_i\delta a_j + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i\partial a'_j}\delta\rho_i\delta a'_j + \ldots \end{aligned}$$

(22) Suite.
$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_i\,\partial a_j}\delta a_i\,\delta a_j+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_i\,\partial a'_j}\delta a_i\,\delta a'_j+\ldots\\
&+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j\,\partial a_i}\delta \rho_j\,\delta a_i+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j\,\partial a'_i}\delta \rho_j\,\delta a'_i+\ldots\\
&+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial a'_i\,\partial a'_j}\delta a'_i\,\delta a'_j+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial a'_i\,\partial a_j}\delta a'_i\,\delta a_j+\ldots\\
&+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j\,\partial \rho_k}\delta \rho_j\,\delta \rho_k+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j\,\partial a_k}\delta \rho_j\,\delta a_k+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j\,\partial a'_k}\delta \rho_j\,\delta a'_k+\ldots\\
&\qquad+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j\,\partial a_k}\delta a_j\,\delta a_k+\frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j\,\partial a'_k}\delta a_j\,\delta a'_k+\ldots\Big).
\end{aligned}
$$

Il est inutile d'aller au delà des termes du second ordre par rapport aux variations δ, puisque ces variations sont du premier ordre par rapport aux masses, ainsi que $M_i V'_i$. De plus, il suffira de prendre les parties du premier et du second ordre des δ dans les termes du premier ordre par rapport à ces variations, et seulement celles du premier dans les termes du second ordre. Les constantes arbitraires doivent être considérées comme des constantes absolues dans tous les coefficients des variations; d'où il résulte déjà que le terme $(M_i V'_i)_0$, dans lequel on supprime les parties d'ordre supérieur au troisième, est périodique.

22. Les termes du premier ordre des variations se déduisent des équations (21) et de

$$
\frac{d^2\rho_i}{dt^2}=\frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}V'_i, \tag{23}
$$

ainsi que de leurs analogues pour les autres planètes; ce sont

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
\delta\rho_i=\dfrac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}\displaystyle\iint V'_i\,dt^2, & \delta a_i=M_i\displaystyle\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt, & \delta a'_i=-M_i\displaystyle\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt, & \ldots,\\
\delta\rho_j=\dfrac{3M_j}{\mathrm{a}_j^2}\displaystyle\iint V'_j\,dt^2, & \delta a_j=M_j\displaystyle\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt, & \delta a'_j=-M_j\displaystyle\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt, & \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots,
\end{array}
\right. \tag{24}
$$

Pour avoir les termes du premier et du second ordre des mêmes variations, il faudra prendre les variations du premier ordre des seconds membres des équations (23) et (21) par rapport à tous les éléments des planètes considérées, et intégrer. Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_i^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial\varepsilon_i^2}=V''_i,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial\rho_j^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial\varepsilon_j^2}=V''_j,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial\rho_i\,\partial\rho_j}=\frac{\partial^2 V}{\partial\varepsilon_i\,\partial\varepsilon_j}=V''_{ij},
$$

l'équation (23) donnera

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\rho_i}{dt^2} &= \frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}V'_i + 3M_iV'_i\,\delta\frac{1}{\mathrm{a}_i^2} + \frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}\,\partial V'_i \\
&= \frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}V'_i + \frac{12M_i^2V'_i}{n_i\mathrm{a}_i^4}\int V'_i\,dt \\
&\quad + \left(\frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}\right)^2 V''_i\int\!\!\int V'_i\,dt^2 + \frac{3M_i^2}{\mathrm{a}_i^2}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right) \\
&\quad + \frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}\,\frac{3M_j}{\mathrm{a}_j^2}V''_{ij}\int\!\!\int V'_j\,dt^2 + \frac{3M_iM_j}{\mathrm{a}_i^2}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right) + \dots,
\end{aligned}$$

et intégrant

$$\begin{aligned}
\delta\rho_i &= \frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}\int\!\!\int V'_i\,dt^2 + \frac{12M_i^2}{n_i\mathrm{a}_i^4}\int\!\!\int\left(V'_i\,dt^2\int V'_i\,dt\right) \\
&\quad + \left(\frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}\right)^2\int\!\!\int\left(V''_i\,dt^2\int\!\!\int V'_i\,dt^2\right) + \frac{3M_i^2}{\mathrm{a}_i^2}\int\!\!\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right)dt^2 \\
&\quad + \frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}\,\frac{3M_i}{\mathrm{a}_j^2}\int\!\!\int\left(V''_{ij}\,dt^2\int\!\!\int V'_j\,dt^2\right) + \frac{3M_iM_j}{\mathrm{a}_i^2}\int\!\!\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right)dt^2 + \dots.
\end{aligned}$$

On trouvera de même

$$\left\{\begin{aligned}
\delta\rho_j &= \frac{3M_j}{\mathrm{a}_j^2}\int\!\!\int V'_j\,dt^2 + \frac{12M_j^2}{n_j\mathrm{a}_j^4}\int\!\!\int\left(V'_j\,dt^2\int V'_j\,dt\right) \\
&\quad + \left(\frac{3M_j}{\mathrm{a}_j^2}\right)^2\int\!\!\int\left(V''_j\,dt^2\int\!\!\int V'_j\,dt^2\right) + \frac{3M_j^2}{\mathrm{a}_j^2}\int\!\!\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt - \frac{\partial V'_j}{\partial a'_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right)dt^2 \\
&\quad + \frac{3M_j}{\mathrm{a}_j^2}\,\frac{3M_i}{\mathrm{a}_i^2}\int\!\!\int\left(V''_{ji}\,dt^2\int\!\!\int V'_i\,dt^2\right) + \frac{3M_iM_j}{\mathrm{a}_j^2}\int\!\!\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt - \frac{\partial V'_j}{\partial a'_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right)dt^2 + \dots, \\
\delta a_i &= M_i\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt + \frac{3M_i^2}{\mathrm{a}_i^2}\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a'_i}dt\int\!\!\int V'_i\,dt^2\right) + M_i^2\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a'_i\,\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial a_i'^2}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right)dt \\
&\quad + \frac{3M_iM_j}{\mathrm{a}_j^2}\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a'_i}dt\int\!\!\int V'_j\,dt^2\right) + M_iM_j\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a'_i\,\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial a'_i\,\partial a'_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right)dt + \dots, \\
\delta a_j &= M_j\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt + \frac{3M_j^2}{\mathrm{a}_j^2}\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a'_j}dt\int\!\!\int V'_j\,dt^2\right) + M_j^2\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a'_j\,\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial a_j'^2}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right)dt \\
&\quad + \frac{3M_jM_i}{\mathrm{a}_i^2}\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a'_j}dt\int\!\!\int V'_i\,dt^2\right) + M_jM_i\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a'_j\,\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial a'_j\,\partial a'_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right)dt + \dots, \\
\delta a'_i &= -M_i\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt - \frac{3M_i^2}{\mathrm{a}_i^2}\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_i}dt\int\!\!\int V'_i\,dt^2\right) - M_i^2\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2}\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\,\partial a'_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right)dt \\
&\quad - \frac{3M_iM_j}{\mathrm{a}_j^2}\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_i}dt\int\!\!\int V'_j\,dt^2\right) - M_iM_j\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i\,\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\,\partial a'_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right)dt - \dots, \\
\delta a'_j &= -M_j\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt - \frac{3M_j^2}{\mathrm{a}_j^2}\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_j}dt\int\!\!\int V'_j\,dt^2\right) - M_j^2\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_j^2}\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial a_j\,\partial a'_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \dots\right)dt \\
&\quad - \frac{3M_jM_i}{\mathrm{a}_i^2}\int\left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_j}dt\int\!\!\int V'_i\,dt^2\right) - M_jM_i\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\,\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial a_j\,\partial a'_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \dots\right)dt - \dots, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right. \tag{25}$$

Dans les seconds membres de toutes ces variations, du premier et du second ordre, il faut considérer les constantes arbitraires comme des constantes absolues.

23. Il s'agit maintenant de substituer toutes ces valeurs dans l'expression (22) et de démontrer que tous les termes du troisième ordre qui en résultent sont périodiques ou nuls. Cette opération ne laisse pas d'être assez délicate, à cause du grand nombre de termes que l'on a à considérer. Je les partagerai en cinq classes, que j'examinerai l'une après l'autre.

Prenons d'abord les termes qui sont du second ordre par rapport à $M_i V$ et à ses dérivées; ce sont

$$(26)\quad \begin{aligned} &+\frac{3M_i^2}{a_i^2}\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_i}\iint V_i' dt^2 + M_i^2\left(\frac{\partial V_i'}{\partial a_i}\int\frac{\partial V}{\partial a_i'}dt - \frac{\partial V_i'}{\partial a_i'}\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt + \ldots\right)\\ &+\frac{3M_jM_i}{a_j^2}\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_j}\iint V_j' dt^2 + M_iM_j\left(\frac{\partial V_i'}{\partial a_j}\int\frac{\partial V}{\partial a_j'}dt - \frac{\partial V_i'}{\partial a_j'}\int\frac{\partial V}{\partial a_j}dt + \ldots\right) + \ldots.\end{aligned}$$

Réduisons $M_i V_i'$ aux seuls termes qui contiennent les angles dont l'expression générale est

$$\psi = \alpha l_i + \beta l_j \quad \text{et} \quad \chi = \alpha' l_i + \beta' l_j + \gamma' l_k,$$

en négligeant ceux qui sont d'un ordre supérieur au second; on a alors

$$M_i V_i' = C_1 \sin(\psi + \omega_1) + C_2 \sin(\chi + \omega_2),$$

C_1 étant du premier et C_2 du second ordre par rapport aux masses; par suite,

$$\begin{aligned} M_i^2\frac{\partial V_i'}{\partial \rho_i}\iint V_i' dt^2 = {} & [\alpha C_1 \cos(\psi + \omega_1) + \alpha' C_2 \cos(\chi + \omega_2)]\\ & \times \iint [C_1 \sin(\psi + \omega_1) + C_2 \sin(\chi + \omega_2)]\, dt^2.\end{aligned}$$

Je néglige le terme du second ordre, qui est périodique, et celui du quatrième; ceux du troisième ordre sont

$$\begin{aligned} &\alpha C_1 \cos(\psi + \omega_1)\iint C_2 \sin(\chi + \omega_2)\, dt^2\\ &= -\frac{\alpha C_1 C_2}{(\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k)^2}\cos(\psi + \omega_1)\sin(\chi + \omega_2)\\ &= -\frac{\alpha C_1 C_2}{2(\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k)^2}[\sin(\psi + \chi + \omega_1 + \omega_2) + \sin(\chi - \psi + \omega_2 - \omega_1)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha' C_2 \cos(\chi + \omega_2)\iint C_1 \sin(\psi + \omega_1)\, dt^2\\ &= -\frac{\alpha' C_1 C_2}{(\alpha n_i + \beta n_j)^2}\cos(\chi + \omega_2)\sin(\psi + \omega_1)\\ &= -\frac{\alpha' C_1 C_2}{2(\alpha n_i + \beta n_j)^2}[\sin(\psi + \chi + \omega_1 + \omega_2) + \sin(\psi - \chi + \omega_1 - \omega_2)].\end{aligned}$$

Dans ces deux expressions, les termes séculaires ne peuvent prendre naissance que si l'on a

$$(\alpha + \alpha')n_i + (\beta + \beta')n_j + \gamma' n_k = 0$$

ou

$$(\alpha - \alpha')n_i + (\beta - \beta')n_j - \gamma' n_k = 0.$$

Or, dans la nature, ces conditions ne sont jamais remplies que si l'on a séparément

$$\alpha + \alpha' = 0, \quad \beta + \beta' = 0, \quad \gamma' = 0$$

ou

$$\alpha - \alpha' = 0, \quad \beta - \beta' = 0, \quad \gamma' = 0,$$

et les termes non périodiques que l'on forme ainsi s'annulent mutuellement.

Si l'on pose

$$M_j V'_j = C_1 \sin(\psi + \omega_1) + C_2 \sin(\chi + \omega_2),$$

on verra aussi que le terme

$$\frac{3 M_j M_i}{a_j^2} \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j} \int\int V'_j dt^2$$

est périodique.

Prenons maintenant les termes

$$M_i^2 \left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_i} \int \frac{\partial V}{\partial a'_i} dt - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i} \int \frac{\partial V}{\partial a_i} dt \right),$$

et posons

$$M_i V = C_1 \sin(\psi + \omega_1) + C_2 \sin(\chi + \omega_2);$$

on aura alors

$$M_i^2 \frac{\partial V'_i}{\partial a_i} \int \frac{\partial V'}{\partial a'_i} dt = - \left[\alpha \frac{\partial C_1}{\partial a_i} \cos(\psi + \omega_1) + \alpha' \frac{\partial C_2}{\partial a_i} \cos(\chi + \omega_2) \right]$$
$$\times \left[\frac{1}{\alpha n_i + \beta n_j} \frac{\partial C_1}{\partial a'_i} \cos(\psi + \omega_1) + \frac{1}{\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k} \frac{\partial C_2}{\partial a'_i} \cos(\chi + \omega_2) \right],$$

$$M_i^2 \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i} \int \frac{\partial V}{\partial a_i} dt = - \left[\alpha \frac{\partial C_1}{\partial a'_i} \cos(\psi + \omega_1) + \alpha' \frac{\partial C_2}{\partial a'_i} \cos(\chi + \omega_2) \right]$$
$$\times \left[\frac{1}{\alpha n_i + \beta n_j} \frac{\partial C_1}{\partial a_i} \cos(\psi + \omega_1) + \frac{1}{\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k} \frac{\partial C_2}{\partial a_i} \cos(\chi + \omega_2) \right].$$

Les termes du second ordre, ainsi que ceux du quatrième, se détruisent dans ces deux expressions; si on les supprime, les valeurs précédentes se réduisent à

$$M_i^2 \frac{\partial V'_i}{\partial a_i} \int \frac{\partial V}{\partial a'_i} dt = - \frac{\alpha}{\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k} \frac{\partial C_1}{\partial a_1} \frac{\partial C_2}{\partial a'_i} \cos(\psi + \omega_1) \cos(\chi + \omega_2)$$
$$- \frac{\alpha'}{\alpha n_i + \beta n_j} \frac{\partial C_2}{\partial a_i} \frac{\partial C_1}{\partial a'_i} \cos(\psi + \omega_1) \cos(\chi + \omega_2),$$

$$M_i^2 \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i} \int \frac{\partial V}{\partial a_i} dt = -\frac{\alpha}{\alpha' n_i + \beta' n_j + \gamma' n_k} \frac{\partial C_1}{\partial a'_i} \frac{\partial C_2}{\partial a_i} \cos(\psi + \omega_1)\cos(\chi + \omega_2)$$
$$- \frac{\alpha'}{\alpha n_i + \beta n_j} \frac{\partial C_2}{\partial a'_i} \frac{\partial C_1}{\partial a_i} \cos(\psi + \omega_1)\cos(\chi + \omega_2).$$

Elles pourraient contenir des termes non périodiques si l'on avait la relation

$$(\alpha + \alpha')n_i + (\beta + \beta')n_j + \gamma' n_k = 0$$

ou

$$(\alpha - \alpha')n_i + (\beta - \beta')n_j - \gamma' n_k = 0;$$

mais, pour cela, il faut avoir simultanément

$$\alpha + \alpha' = 0, \quad \beta + \beta' = 0, \quad \gamma' = 0$$

ou

$$\alpha - \alpha' = 0, \quad \beta - \beta' = 0, \quad \gamma' = 0,$$

et alors les termes séculaires qui prendraient naissance se détruiraient dans l'expression

$$M_i^2 \left(\frac{\partial V'_i}{\partial a_i} \int \frac{\partial V}{\partial a'_i} dt - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i} \int \frac{\partial V}{\partial a_i} dt \right).$$

On verra de même que, dans toutes les autres parties restantes de (26), les termes séculaires s'annulent mutuellement.

24. En second lieu, je considère les termes de $M_i \delta V'_i$ qui sont du troisième ordre et qui ne contiennent que les variations des éléments de m_i; ce sont

$$(27) \quad M_i \left(\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_i} \delta\rho_i + \frac{\partial V'_i}{\partial a_i} \delta a_i + \frac{\partial V'_i}{\partial a'_i} \delta a'_i + \ldots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_i^2} \delta\rho_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_i^2} \delta a_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_i'^2} \delta a_i'^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_i \partial a_i} \delta\rho_i \delta a_i + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_i \partial a'_i} \delta\rho_i \delta a'_i + \ldots + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_i \partial a'_i} \delta a_i \delta a'_i + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_i \partial b_i} \delta a_i \delta b_i + \ldots \right).$$

Dans cette expression, ainsi que dans les autres parties de $M_i \delta V'_i$, que nous aurons encore à examiner par la suite, il suffit de prendre pour $M_i V$ seulement les termes du premier ordre par rapport aux masses; puis, ainsi qu'il a été dit au n° **21**, il faudra substituer à la place des δ les valeurs (24) dans les termes du second ordre par rapport aux δ; pour ceux du premier ordre, on doit prendre dans (25) les deux premières lignes de $\delta\rho_i$ et la première seulement de δa_i, $\delta a'_i$, ..., $\delta c'_i$, sauf le premier terme de chacune de ces valeurs. Les termes que l'on obtient ainsi peuvent être partagés en cinq catégories, que je désignerai par des notations particulières ; ce sont

$$
(28)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{A}^{(i)} = \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i}\int\!\!\int (\mathrm{V}''_i\, dt^2 \int \mathrm{V}'_i\, dt),\\
&\mathrm{B}^{(i)} = \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i}\int\!\!\int (\mathrm{V}''_i\, dt^2 \int\!\!\int \mathrm{V}'_i\, dt^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i^2}\left(\int\!\!\int \mathrm{V}'_i\, dt^2\right)^2,\\
&(da_i, da'_i)^{(i)} = \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i}\int\!\!\int\left(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_i}dt^2\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\right)\\
&\qquad - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_i}\int\left(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_i}dt\int\!\!\int \mathrm{V}'_i\, dt^2\right) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i \partial a_i}\left(\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\right)\left(\int\!\!\int \mathrm{V}'_i\, dt^2\right),\\
&(da_i da'_i, da_i, da'_i) = \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_i \partial a'_i}\left(\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\right)\left(\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_i}dt\right)\\
&\qquad - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_i}\int\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_i \partial a'_i}dt\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\right) - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_i}\int\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_i \partial a'_i}dt\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_i}dt\right),\\
&(da_i^2, da'_i) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_i^2}\left(\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\right)^2 - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_i}\int\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_i^2}dt\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\right).
\end{aligned}\right.
$$

Des trois dernières de ces combinaisons, on en peut déduire d'autres par de simples changements de lettres. A l'aide de ces notations, l'expression (27) peut être écrite sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
(29)\quad & + \frac{12\mathrm{M}_i^3}{n_i \mathrm{a}_i^4}\mathrm{A}^{(i)} + \mathrm{M}_i\left(\frac{3\mathrm{M}_i}{\mathrm{a}_i^2}\right)^2\mathrm{B}^{(i)}\\
& + \frac{3\mathrm{M}_i^3}{\mathrm{a}_i^2}\left[(da_i, da'_i)^{(i)} + (db_i, db'_i)^{(i)} + (dc_i, dc'_i)^{(i)} - (da'_i, da_i)^{(i)} - (db'_i, db_i)^{(i)} - (dc'_i, dc_i)^{(i)}\right]\\
& + \mathrm{M}_i^3\left[(da_i db_i, db'_i, da'_i) + (da_i dc_i, dc'_i, da'_i) + (db_i dc_i, dc'_i, db'_i) + (da'_i db'_i, db_i, da_i)\right.\\
&\qquad + (da'_i dc'_i, dc_i, da_i) + (db'_i dc'_i, dc_i, db_i) - (da_i da'_i, da_i, da'_i) - (da_i db'_i, db_i, da'_i)\\
&\qquad - (da_i dc'_i, dc_i, da'_i) - (db_i da'_i, da_i, db'_i) - (db_i db'_i, db_i, db'_i) - (db_i dc'_i, dc_i, db'_i)\\
&\qquad \left. - (dc_i da'_i, da_i, dc'_i) - (dc_i db'_i, db_i, dc'_i) - (dc_i dc'_i, dc_i, dc'_i)\right]\\
& + \mathrm{M}_i^3\left[(da_i^2, da'_i) + (db_i^2, db'_i) + (dc_i^2, dc'_i) + (da_i'^2, da_i) + (db_i'^2, db_i) + (dc_i'^2, dc_i)\right].
\end{aligned}
$$

25. Je passe aux termes de $\mathrm{M}_i \delta \mathrm{V}'_i$ qui sont du troisième ordre et dont chacun ne renferme que des variations relatives à une seule des planètes perturbatrices ; ce sont

$$
\begin{aligned}
(30)\quad \mathrm{M}_i\Big(& \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j}\delta\rho_j + \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_j}\delta a_j + \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j}\delta a'_j + \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial b_j}\delta b_j + \ldots + \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_k}\delta\rho_k + \ldots\\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j^2}\delta\rho_j^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j^2}\delta a_j^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j'^2}\delta a_j'^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_k^2}\delta\rho_k^2 + \ldots\\
& + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j \partial a_j}\delta\rho_j\,\delta a_j + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j \partial a'_j}\delta\rho_j\,\delta a'_j + \ldots\\
& + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j \partial a'_j}\delta a_j\,\delta a'_j + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j \partial b_j}\delta a_j\,\delta b_j + \ldots + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_k \partial a_k}\delta\rho_k\,\delta a_k + \ldots\Big).
\end{aligned}
$$

Je fais les substitutions exactement comme au numéro précédent; j'adopte encore les notations

$$
(31)\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{A}^{(j)} = \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j}\int\!\!\int (\mathrm{V}'_j dt^2 \int \mathrm{V}'_j dt),\\
&\mathrm{B}^{(j)} = \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j}\int\!\!\int (\mathrm{V}'_j dt^2 \int\!\!\int \mathrm{V}'_j dt^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j^2}(\int\!\!\int \mathrm{V}'_j dt^2)^2,\\
&(da_j, da')^{(j)} = \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j}\int\!\!\int\left(\frac{\partial \mathrm{V}'_j}{\partial a_j}dt^2 \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\right)\\
&\qquad - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j}\int\left(\frac{\partial \mathrm{V}'_j}{\partial a_j}dt \int\!\!\int \mathrm{V}'_j dt^2\right) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j \partial a_j}\left(\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\right)(\int\!\!\int \mathrm{V}'_j dt^2),\\
&(da_j da'_j, da_j, da'_j) = \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j \partial a'_j}\left(\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\right)\left(\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_j}dt\right)\\
&\qquad - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_j}\int\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_j \partial a'_j}dt \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\right) - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j}\left(\int \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_j \partial a'_j}dt \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_j}dt\right),\\
&(da_j^2, da'_j) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j^2}\left(\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\right)^2 - \frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j}\left(\int \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_j^2}dt \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\right).
\end{aligned}\right.
$$

On peut former d'autres symboles par des changements de lettres dans les trois derniers. La quantité (30) prend la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
(32)\quad & + \frac{12\mathrm{M}_j^2\mathrm{M}_i}{n_j \mathrm{a}_j^4}\mathrm{A}^{(j)} + \ldots + \left(\frac{3\mathrm{M}_j}{\mathrm{a}_j^2}\right)^2 \mathrm{M}_i \mathrm{B}^{(j)} + \ldots \\
& + \frac{3\mathrm{M}_j^2\mathrm{M}_i}{\mathrm{a}_j^2}[(da_j, da'_j)^{(j)} + (db_j, db'_j)^{(j)} + (dc_j, dc'_j)^{(j)} - (da'_j, da_j)^{(j)} - (db'_j, db_j)^{(j)} - (dc'_j, dc_j)^{(j)}] + \ldots \\
& + \mathrm{M}_j^2\mathrm{M}_i[(da_j db_j, db'_j, da'_j) + (da_j dc_j, dc'_j, da'_j) + (db_j dc_j, dc'_j, db'_j) + (da'_j db'_j, db_j, da_j) \\
&\qquad + (da'_j dc'_j, dc_j, da_j) + (db'_j dc'_j, dc_j, db_j) - (da_j da'_j, da_j, da'_j) - (da_j db'_j, db_j, da'_j) \\
&\qquad - (da_j dc'_j, dc_j, da'_j) - (db_j da'_j, da_j, db'_j) - (db_j db'_j, db_j, db'_j) - (db_j dc'_j, dc_j, db'_j) \\
&\qquad - (dc_j da'_j, da_j, dc'_j) - (dc_j db'_j, db_j, dc'_j) - (dc_j dc'_j, dc_j, dc'_j)] + \ldots \\
& + \mathrm{M}_j^2\mathrm{M}_i[(da_j^2, da'_j) + (db_j^2, db'_j) + (dc_j^2, dc'_j) + (da'^2_j, da_j) + (db'^2_j, db_j) + (dc'^2_j, dc_j)] + \ldots .
\end{aligned}
$$

26. Occupons-nous des termes de $\mathrm{M}_i \delta \mathrm{V}'_i$, qui contiennent en même temps la variation d'un élément de la planète troublée et celle d'un élément d'une quelconque des planètes perturbatrices. Ils constituent la quantité suivante :

$$
\begin{aligned}
& + \mathrm{M}_i\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i \partial \rho_j}\delta\rho_i\delta\rho_j + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i \partial a_j}\delta\rho_i\delta a_j + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i \partial a'_j}\delta\rho_i\delta a'_j + \ldots\right. \\
&\qquad + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j \partial a_i}\delta\rho_j\delta a_i + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j \partial a'_i}\delta\rho_j\delta a'_i + \ldots \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_i \partial a_j}\delta a_i\delta a_j + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_i \partial a'_j}\delta a_i\delta a'_j + \ldots + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_j \partial a'_i}\delta a_j\delta a'_i + \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j \partial a'_i}\delta a'_j\delta a'_i + \ldots\right) + \ldots .
\end{aligned}
$$

Il faut y adjoindre la quantité

$$\begin{aligned}+\mathrm{M}_i\Big(&\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i}\delta\rho_i+\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_i}\delta a_i+\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_i}\delta a'_i+\dots\\&+\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_j}\delta\rho_j+\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_j}\delta a_j+\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j}\delta a'_j+\dots+\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_k}\delta\rho_k+\dots\Big),\end{aligned}$$

dans laquelle on remplace $\delta\rho_i$, δa_i, $\delta a'_i$, ..., $\delta c'_i$ par les sommes des termes que nous n'avons pas encore considérés dans leurs valeurs [formules (25)]; $\delta\rho_j$, $\delta\rho_k$, ... par les troisièmes lignes, et δa_j, $\delta a'_j$, ..., δa_k, $\delta a'_k$, ... par les secondes lignes de leurs valeurs respectives. Je pose

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{B}^{(ij)}&=\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial\rho_i}\iint\Big(\mathrm{V}''_{ij}dt^2\iint \mathrm{V}'_j dt^2\Big)+\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial\rho_j}\iint\Big(\mathrm{V}''_{ij}dt^2\iint \mathrm{V}'_i dt^2\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial\rho_i\partial\rho_j}\Big(\iint \mathrm{V}'_i dt^2\Big)\Big(\iint \mathrm{V}'_j dt^2\Big),\\
(da_j, da'_j)^{(i)}&=\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial\rho_i}\iint\Big(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_j}dt^2\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\Big)-\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j}\int\Big(\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a_j}dt\iint \mathrm{V}'_i dt^2\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial\rho_i\partial a_j}\Big(\iint \mathrm{V}'_i dt^2\Big)\Big(\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\Big),\\
(da_i, da'_i)^{(j)}&=\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial\rho_j}\iint\Big(\frac{\partial \mathrm{V}'_j}{\partial a_i}dt^2\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\Big)-\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_i}\int\Big(\frac{\partial \mathrm{V}'_j}{\partial a_i}dt\iint \mathrm{V}'_j dt^2\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial\rho_j\partial a_i}\Big(\iint \mathrm{V}'_j dt^2\Big)\Big(\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\Big),\\
(da_i da_j, da'_i, da'_j)&=\frac{\partial^2 \mathrm{V}'_i}{\partial a_i\partial a_j}\Big(\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\Big)\Big(\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\Big)-\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_i}\int\Big(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_i\partial a_j}dt\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_j}dt\Big)\\
&\qquad-\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial a'_j}\int\Big(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial a_i\partial a_j}dt\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'_i}dt\Big),
\end{aligned}\right.$$

et d'autres notations analogues. L'expression qui nous occupe en ce moment prendra alors la forme

$$(34)\quad\begin{aligned}
&+\frac{3\mathrm{M}_i^2}{\mathrm{a}_i^2}\Big(\frac{3\mathrm{M}_j}{\mathrm{a}_j^2}\mathrm{B}^{(ij)}+\frac{3\mathrm{M}_k}{\mathrm{a}_k^2}\mathrm{B}^{(ik)}+\dots\Big)\\
&+\frac{3\mathrm{M}_i^2\mathrm{M}_j}{\mathrm{a}_i^2}\big[(da_j,da'_j)^{(i)}+(db_j,db'_j)^{(i)}+(dc_j,dc'_j)^{(i)}-(da'_j,da_j)^{(i)}-(db'_j,db_j)^{(i)}-(dc'_j,dc_j)^{(i)}\big]+\dots\\
&+\frac{3\mathrm{M}_i^2\mathrm{M}_j}{\mathrm{a}_j^2}\big[(da_i,da'_i)^{(j)}+(db_i,db'_i)^{(j)}+(dc_i,dc'_i)^{(j)}-(da'_i,da_i)^{(j)}-(db'_i,db_i)^{(j)}-(dc'_i,dc_i)^{(j)}\big]+\dots\\
&+\mathrm{M}_i^2\mathrm{M}_j\big[(da_i da_j, da'_i, da'_j)+(da_i db_j, da'_i, db'_j)+(da_i dc_j, da'_i, dc'_j)+(db_i da_j, db'_i, da'_j)\\
&\quad+(db_i db_j, db'_i, db'_j)+(db_i dc_j, db'_i, dc'_j)+(dc_i da_j, dc'_i, da'_j)+(dc_i db_j, dc'_i, db'_j)\\
&\quad+(dc_i dc_j, dc'_i, dc'_j)+(da'_i da'_j, da_i, da_j)+(da'_i db'_j, da_i, db_j)+(da'_i dc'_j, da_i, dc_j)\\
&\quad+(db'_i da'_j, db_i, da_j)+(db'_i db'_j, db_i, db_j)+(db'_i dc'_j, db_i, dc_j)+(dc'_i da'_j, dc_i, da_j)\\
&\quad+(dc'_i db'_j, dc_i, db_j)+(dc'_i dc'_j, dc_i, dc_j)-(da_i da'_j, da'_i, da_j)-(da_i db'_j, da'_i, db_j)\\
&\quad-(da_i dc'_j, da'_i, dc_j)-(db_i da'_j, db'_i, da_j)-(db_i db'_j, db'_i, db_j)-(db_i dc'_j, db'_i, dc_j)\\
&\quad-(dc_i da'_j, dc'_i, da_j)-(dc_i db'_j, dc'_i, db_j)-(dc_i dc'_j, dc'_i, dc_j)-(da'_i da_j, da_i, da'_j)\\
&\quad-(da'_i db_j, da_i, db'_j)-(da'_i dc_j, da_i, dc'_j)-(db'_i da_j, db_i, da'_j)-(db'_i db_j, db_i, db'_j)\\
&\quad-(db'_i dc_j, db_i, dc'_j)-(dc'_i da_j, dc_i, da'_j)-(dc'_i db_j, dc_i, db'_j)-(dc'_i dc_j, dc_i, dc'_j)\big]+\dots
\end{aligned}$$

27. Il reste enfin à examiner les termes de $M_i\delta V'_i$, qui dépendent en même temps des variations des éléments de deux quelconques des planètes perturbatrices. Ces termes proviennent d'abord de la partie

$$\begin{aligned}+ M_i\Big(&\frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial\rho_k}\delta\rho_j\delta\rho_k + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial a_k}\delta\rho_j\delta a_k + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial a'_k}\delta\rho_j\delta a'_k + \ldots\\ &+ \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_k\partial a_j}\delta\rho_k\delta a_j + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_k\partial a'_j}\delta\rho_k\delta a'_j + \ldots\\ &+ \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j\partial a_k}\delta a_j\delta a_k + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j\partial a'_k}\delta a_j\delta a'_k + \ldots\\ &\qquad + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_k\partial a'_j}\delta a_k\delta a'_j + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a'_k\partial a'_j}\delta a'_k\delta a'_j + \ldots\Big) + \ldots,\end{aligned}$$

et ensuite de

$$+ M_i\left(\frac{\partial V'_i}{\partial\rho_j}\delta\rho_j + \frac{\partial V'_i}{\partial a_j}\delta a_j + \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\delta a'_j + \ldots + \frac{\partial V'_i}{\partial\rho_k}\delta\rho_k + \ldots\right),$$

lorsqu'on y remplace $\delta\rho_j$, δa_j, $\delta a'_j$, ..., $\delta\rho_k$, ... par les sommes des termes que nous n'avons pas encore employés dans leurs valeurs (25). Posons

$$(35)\quad\left\{\begin{aligned}B^{(jk)} &= \frac{\partial V'_i}{\partial\rho_j}\iint(V''_{jk}dt^2\iint V'_k dt^2)\\ &\quad + \frac{\partial V'_i}{\partial\rho_k}\iint(V''_{kj}dt^2\iint V''_j dt^2) + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial\rho_k}(\iint V'_j dt^2)(\iint V'_k dt^2),\\ (da_k, da'_k)^{(j)} &= \frac{\partial V'_i}{\partial\rho_j}\int\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_k}dt^2\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}dt\right)\\ &\quad - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_k}\int\left(\frac{\partial V'_j}{\partial a_k}dt\iint V'_j dt^2\right) + \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial a_k}(\iint V'_j dt^2)\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}dt\right),\\ (da_j da_k, da'_k, da'_j) &= \frac{\partial^2 V'_i}{\partial a_j\partial a_k}\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt\right)\left(\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}dt\right)\\ &\quad - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_j}\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\partial a_k}dt\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}dt\right) - \frac{\partial V'_i}{\partial a'_k}\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\partial a_k}dt\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt\right),\end{aligned}\right.$$

et les combinaisons analogues; alors les termes qu'il nous reste à formuler formeront l'expression suivante :

$$(36)\quad\begin{aligned}&+ M_i\left(\frac{3M_j}{a_j^2}\frac{3M_k}{a_k^2}B^{(jk)} + \frac{3M_j}{a_j^2}\frac{3M_l}{a_l^2}B^{(jl)} + \frac{3M_k}{a_k^2}\frac{3M_l}{a_l^2}B^{(kl)} + \ldots\right)\\ &+ \frac{3M_iM_jM_k}{a_j^2}[(da_k, da'_k)^{(j)} + (db_k, db'_k)^{(j)} + (dc_k, dc'_k)^{(j)} - (da'_k, da_k)^{(j)} - (db'_k, db_k)^{(j)} - (dc'_k, dc_k)^{(j)}] + \ldots\\ &+ \frac{3M_iM_kM_j}{a_k^2}[(da_j, da'_j)^{(k)} + (db_j, db'_j)^{(k)} + (dc_j, dc'_j)^{(k)} - (da'_j, da_j)^{(k)} - (db'_j, db_j)^{(k)} - (dc'_j, dc_j)^{(k)}] + \ldots\end{aligned}$$

36)
uite).

$$
\begin{aligned}
&+\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j\mathrm{M}_k[(da_j\,da_k,\,da'_k,\,da'_j)+(da_j\,db_k,\,db'_k,\,da'_j)+(da_j\,dc_k,\,dc'_k,\,da'_j)+(db_j\,da_k,\,da'_k,\,db'_j)\\
&+(db_j\,db_k,\,db'_k,\,db'_j)+(db_j\,dc_k,\,dc'_k,\,db'_j)+(dc_j\,da_k,\,da'_k,\,dc'_j)+(dc_j\,db_k,\,db'_k,\,dc'_j)\\
&+(dc_j\,dc_k,\,dc'_k,\,dc'_j)+(da'_j\,da'_k,\,da_k,\,da_j)+(da'_j\,db'_k,\,db_k,\,da_j)+(da'_j\,dc'_k,\,dc_k,\,da_j)\\
&+(db'_j\,da'_k,\,da_k,\,db_j)+(db'_j\,db'_k,\,db_k,\,db_j)+(db'_j\,dc'_k,\,dc_k,\,db_j)+(dc'_j\,da'_k,\,da_k,\,dc_j)\\
&+(dc'_j\,db'_k,\,db_k,\,dc_j)+(dc'_j\,dc'_k,\,dc_k,\,dc_j)-(da_j\,da'_k,\,da_k,\,da'_j)-(da_j\,db'_k,\,db_k,\,da'_j)\\
&-(da_j\,dc'_k,\,dc_k,\,da'_j)-(db_j\,da'_k,\,da_k,\,db'_j)-(db_j\,db'_k,\,db_k,\,db'_j)-(db_j\,dc'_k,\,dc_k,\,db'_j)\\
&-(dc_j\,da'_k,\,da_k,\,dc'_j)-(dc_j\,db'_k,\,db_k,\,dc'_j)-(dc_j\,dc'_k,\,dc_k,\,dc'_j)-(da'_j\,da_k,\,da'_k,\,da_j)\\
&-(da'_j\,db_k,\,db'_k,\,da_j)-(da'_j\,dc_k,\,dc'_k,\,da_j)-(db'_j\,da_k,\,da'_k,\,db_j)-(db'_j\,db_k,\,db'_k,\,db_j)\\
&-(db'_j\,dc_k,\,dc'_k,\,db_j)-(dc'\,da_k,\,da'_k,\,dc_j)-(dc'_j\,db_k,\,db'_k,\,dc_j)-(dc'_j\,dc_k,\,dc'_k,\,dc_j)]+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

L'expression complète de $\mathrm{M}_i\delta\mathrm{V}'_i$ se compose de la somme des quantités (26), (29), (32), (34) et (36). Nous avons vu que la première ne renferme pas de termes séculaires du troisième ordre; les quatre autres sont des fonctions linéaires d'un certain nombre de quantités, qui peuvent se réduire aux dix-sept types compris dans les formules (28), (31), (33), (35). Or ces dernières quantités se ramènent elles-mêmes à huit formes seulement de la manière suivante.

28. Je désigne par P, Q, R trois fonctions qui, comme V, peuvent se développer en séries convergentes de termes procédant suivant les sinus ou les cosinus d'arcs proportionnels au temps, tels que ψ, et je pose, comme pour V,

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \rho_i}=\mathrm{P}'_i,\quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \rho_j}=\mathrm{P}'_j,\quad \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \rho_i^2}=\mathrm{P}''_i,\quad \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \rho_j^2}=\mathrm{P}''_j,\quad \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \rho_i\,\partial \rho_j}=\mathrm{P}''_{ij},$$

et de même pour Q et R.

Examinons successivement les diverses quantités $\mathrm{A}^{(i)}$, $\mathrm{B}^{(i)}$, ...

On a d'abord

$$\textstyle\int\int(\mathrm{V}'_i dt^2 \int \mathrm{V}'_i dt)=\frac{1}{2}\int(\int \mathrm{V}'_i dt)^2 dt;$$

donc

$$\mathrm{A}^{(i)}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{V}'_i}{\partial \rho_i}\int(\int \mathrm{V}'_i dt)^2 dt;$$

et, si l'on pose

$$\mathrm{P}=\int \mathrm{V}'_i dt,$$

on a

$$(a)\qquad \mathrm{A}^{(i)}=\frac{1}{2}\,\frac{d\mathrm{P}'_i}{dt}\int \mathrm{P}^2 dt.$$

$\mathrm{A}^{(j)}$ se ramène exactement à la même forme en posant

$$\mathrm{P}=\int \mathrm{V}'_j dt.$$

Pour transformer $B^{(i)}$, je prends

$$P = \int\int V'_i dt^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_i} = \frac{d^2 P'_i}{dt^2}, \quad \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_i^2} = \frac{d^2 P''_i}{dt^2};$$

alors

$$(b) \qquad B^{(i)} = \frac{d^2 P'_i}{dt^2} \int\int\left(\frac{d^2 P'_i}{dt^2} P\, dt^2\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2 P''_i}{dt^2} P^2.$$

Pour $B^{(j)}$, on aura aussi

$$P = \int\int V'_j dt^2, \quad V''_j = \frac{d^2 P'_j}{dt^2}, \quad \frac{\partial V'_i}{\partial \rho_j} = \frac{d^2 P'_i}{dt^2}, \quad \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_j^2} = \frac{d^2 P''_{ij}}{dt^2},$$

$$(c) \qquad B^{(j)} = \frac{d^2 P'_i}{dt^2} \int\int\left(\frac{d^2 P'_j}{dt^2} P\, dt^2\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2 P''_{ij}}{dt^2} P^2.$$

$B^{(ij)}$ se transforme d'une manière analogue en posant

$$P = \int\int V'_i dt^2, \quad Q = \int\int V'_j dt^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V'_i}{\partial \rho_i} = \frac{d^2 P'_i}{dt^2}, \quad V''_{ij} = \frac{d^2 P'_j}{dt^2} = \frac{d^2 Q'_i}{dt^2}, \quad \frac{\partial^2 V'_i}{\partial \rho_i \partial \rho_j} = \frac{d^2 P''_{ij}}{dt^2} = \frac{d^2 Q''_i}{dt^2};$$

d'où il suit

$$(d) \qquad B^{(ij)} = \frac{d^2 P'_i}{dt^2} \int\int \frac{d^2 Q'_i}{dt^2} Q\, dt^2 + \frac{d^2 Q'_i}{dt^2} \int\int \frac{d^2 P'_i}{dt^2} P\, dt^2 + \frac{d^2 Q''_i}{dt^2} PQ;$$

mais il faut faire attention à la forme particulière que doivent avoir les quantités P et Q dans $B^{(ij)}$. Supposons que l'on réduise en un seul tous les termes de V qui dépendent d'un même argument $\psi = \alpha l_i + \beta l_j$, et prenons

$$V = G \sin(\psi + \omega);$$

on en tire

$$V'_i = G\alpha \cos(\psi + \omega), \quad V'_j = G\beta \cos(\psi + \omega),$$

et, par conséquent,

$$P = \int\int V'_i dt^2 = -\frac{G\alpha}{(\alpha n_i + \beta n_j)^2} \cos(\psi + \omega),$$

$$Q = \int\int V'_j dt^2 = -\frac{G\beta}{(\alpha n_i + \beta n_j)^2} \cos(\psi + \omega).$$

On voit que, si P contient un terme tel que $G\alpha \cos(\psi + \omega)$, Q doit contenir le terme $G\beta\cos(\psi+\omega)$; de plus, tous les termes de P contiennent ρ_i et tous ceux de Q, ρ_j.

On ramène $B^{(jk)}$ à une forme analogue à (b), (c), (d), en posant

$$P=\int\int V'_j dt^2,\quad Q=\int\int V'_k dt^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V'_i}{\partial\rho_j}=\frac{d^2P'_i}{dt^2},\quad \frac{\partial V'_i}{\partial\rho_k}=\frac{d^2Q'_i}{dt^2},\quad V''_{jk}=\frac{d^2P'_k}{dt^2}=\frac{d^2Q'_j}{dt^2},\quad \frac{\partial^2 V'_i}{\partial\rho_j\partial\rho_k}=\frac{d^2P''_{ik}}{dt^2}=\frac{d^2Q''_{ij}}{dt^2},$$

ce qui donne

$$(e)\qquad B^{(jk)}=\frac{d^2P'_i}{dt^2}\int\int\frac{d^2Q'_j}{dt^2}Q\,dt^2+\frac{d^2Q'_i}{dt^2}\int\int\frac{d^2P'_k}{dt^2}P\,dt^2+\frac{d^2P''_{ik}}{dt^2}PQ.$$

On verra encore que, si P contient le terme $G\beta\cos(\psi+\omega)$, Q contiendra $G\gamma\cos(\psi+\omega)$, et que tous les termes de P dépendent de ρ_j et ceux de Q de ρ_k.

L'expression $(da_i, da'_i)^{(i)}$ se transforme en posant

$$P=\int\int V'_i dt^2,\quad Q=\frac{\partial V'_i}{\partial a_i},\quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt;$$

on a alors

$$(f)\qquad (da_i, da'_i)^{(i)}=\frac{d^2P'_i}{dt^2}\int\int QR\,dt^2-\frac{dR'_i}{dt}\int QP\,dt+Q'_iPR.$$

C'est encore à la forme (f) que l'on ramène les quantités suivantes :

$$(da_j, da'_j)^{(j)},\quad \text{en posant}\quad P=\int\int V'_j dt^2,\quad Q=\frac{\partial V'_j}{\partial a_j},\quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt;$$

$$(da_j, da'_j)^{(i)},\quad \text{en posant}\quad P=\int\int V'_i dt^2,\quad Q=\frac{\partial V'_i}{\partial a_j},\quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_j}dt;$$

$$(da_i, da'_i)^{(j)},\quad \text{en posant}\quad P=\int\int V'_j dt^2,\quad Q=\frac{\partial V'_j}{\partial a_i},\quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt;$$

$$(da_k, da'_k)^{(j)},\quad \text{en posant}\quad P=\int\int V'_j dt^2,\quad Q=\frac{\partial V'_j}{\partial a_k},\quad R=\int\frac{\partial V}{\partial a'_k}dt.$$

Si l'on prend

$$P=\int\frac{\partial V}{\partial a_i}dt,\quad Q=\int\frac{\partial V}{\partial a'_i}dt,\quad R=\frac{\partial^2 V}{\partial a_i\partial a'_i},$$

on aura

$$(g)\qquad (da_i da'_i, da_i, da'_i)=PQR'_i-\frac{dP'_i}{dt}\int QR\,dt-\frac{dQ'_i}{dt}\int PR\,dt.$$

Pour donner cette forme aussi aux expressions $(da_j\, da'_j,\ da_j,\ da'_j)$, $(da_i\, da_j,\ da'_i,\ da'_j)$, $(da_j\, da_k,\ da'_k,\ da'_j)$, il suffira de poser respectivement

$$P = \int \frac{\partial V}{\partial a_j} dt, \quad Q = \int \frac{\partial V}{\partial a'_j} dt, \quad R = \frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial a'_j},$$

$$P = \int \frac{\partial V}{\partial a'_i} dt, \quad Q = \int \frac{\partial V}{\partial a'_j} dt, \quad R = \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j},$$

$$P = \int \frac{\partial V}{\partial a'_j} dt, \quad Q = \int \frac{\partial V}{\partial a'_k} dt, \quad R = \frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial a_k}.$$

Enfin on prendra

$$P = \int \frac{\partial V}{\partial a'_i} dt, \quad R = \frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2},$$

et alors on aura la forme

$$(h) \qquad (da_i^2,\ da'_i) = \tfrac{1}{2} P^2 R'_i - \frac{dP'_i}{dt} \int PR\, dt,$$

à laquelle on ramènera aussi $(da_j^2,\ da'_j)$, en posant

$$P = \int \frac{\partial V}{\partial a'_j} dt, \quad R = \frac{\partial^2 V}{\partial a_j^2}.$$

Ce qui nous reste à faire maintenant, c'est de démontrer que les huit formes (a), (b), ..., (h) ne sont composées que de termes périodiques; mais, comme (h) se déduit de (g) en y faisant $P = Q$, il suffit de nous occuper seulement des sept premières.

Je supposerai que, dans les séries qui représentent P, Q, R, on ait réuni en un seul tous les termes qui dépendent d'un même argument ψ, et je poserai, pour abréger l'écriture,

$$\psi + \psi' + \psi' + \omega + \omega' + \omega'' = u.$$

29. *Forme* $A^{(i)}$. — Prenons dans le développement de P les trois termes suivants :

$$P = G\cos(\psi + \omega) + G'\cos(\psi' + \omega') + G''\cos(\psi'' + \omega'');$$

on sait que G, G′, G″, ω, ω', ω'' sont des constantes qui ne renferment pas ε_i, ε_j, ..., et

$$\psi = \alpha l_i + \beta l_j, \quad \psi' = \alpha' l_i + \beta' l_j, \quad \psi'' = \alpha'' l_i + \beta'' l_j.$$

On tire de là

$$\frac{dP_i}{dt} = -G\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)\cos(\psi + \omega)$$
$$- G'\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)\cos(\psi' + \omega') - G''\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)\cos(\psi'' + \omega'').$$

Avec ces valeurs, je forme l'expression (a) de $A^{(i)}$ et je réunis tous les termes qui dépendent de $\sin u$; ce sont

$$-\frac{GG'G''}{4}\sin u \times \left[\frac{\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)}{(\alpha' + \alpha'')n_i + (\beta' + \beta'')n_j} + \frac{\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)}{(\alpha + \alpha'')n_i + (\beta + \beta'')n_j} + \frac{\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)}{(\alpha + \alpha')n_i + (\beta + \beta')n_j}\right].$$

Il suffit de considérer ce seul terme, car tous les autres qui résultent de la valeur précédente de P peuvent s'en déduire, en y supposant égales entre elles quelques-unes des constantes G, G′, G″; α, α', α''; β, β', β'', ou bien en changeant leurs signes. Or, pour que ce terme donne lieu à une inégalité séculaire, il faut que u soit indépendant du temps, c'est-à-dire que l'on ait

$$(37)\qquad (\alpha + \alpha' + \alpha'')n_i + (\beta + \beta' + \beta'')n_j = 0.$$

Mais, dans la nature, les quantités n_i, n_j sont toujours incommensurables entre elles; et, comme α, α', α'', β, β', β'' sont des nombres entiers, cette équation se décompose en deux autres

$$(38)\qquad \alpha + \alpha' + \alpha'' = 0, \quad \beta + \beta' + \beta'' = 0,$$

et, dans ce cas, le coefficient qui multiplie $-\frac{GG'G''}{4}\sin u$ devient

$$-\alpha - \alpha' - \alpha'' = 0.$$

Les termes constants de $A^{(i)}$ sont donc nuls.

Dans ce calcul, j'ai pris des termes de P qui dépendent des longitudes moyennes des deux mêmes planètes; mais il conduit au même résultat si les trois termes considérés de P renferment des longitudes moyennes relatives à des planètes différentes; seulement, dans ce cas, l'équation (37) se décomposerait en un nombre d'équations secondaires égal à celui des planètes dont les moyens mouvements y figurent.

On peut remarquer que $A^{(i)}$ contient aussi des termes de la forme $At\cos(\psi + \omega)$; tel est, par exemple,

$$-\frac{G^3}{4}\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)t\cos(\psi + \omega).$$

30. *Forme* $B^{(i)}$. — La même valeur de P donne encore

$$\frac{d^2P'_i}{dt^2} = G\alpha\,(\alpha n_i + \beta n_j)^2\sin(\psi + \omega) + G'\alpha'\,(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2\sin(\psi' + \omega') + G''\alpha''\,(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2\sin(\psi'' + \omega''),$$

$$\frac{d^2P''_i}{dt^2} = G\alpha^2(\alpha n_i + \beta n_j)^2\cos(\psi + \omega) + G'\alpha'^2(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2\cos(\psi' + \omega') + G''\alpha''^2(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2\cos(\psi'' + \omega'').$$

Le terme en $\cos u$ de $B^{(i)}$, que je considère seul, est alors

$$\frac{GG'G''}{4}\cos u \times \left\{ \frac{\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2[\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 + \alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2]}{[(\alpha'+\alpha'')n_i + (\beta'+\beta'')n_j]^2} + \frac{\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2[\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2 + \alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha'')n_i + (\beta+\beta'')n_j]^2} + \frac{\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2[\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha')n_i + (\beta+\beta')n_j]^2} + \alpha^2(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \alpha'^2(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 + \alpha''^2(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2 \right\}.$$

Or les conditions (38), nécessaires et suffisantes pour que ce terme soit indépendant du temps, réduisent le coefficient entre crochets à

$$[\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 + \alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2](\alpha + \alpha' + \alpha''),$$

quantité nulle, à cause de $\alpha + \alpha' + \alpha'' = 0$; donc $B^{(i)}$, pas plus que $A^{(i)}$, ne donne des termes séculaires.

31. *Forme* $B^{(j)}$. — Un calcul analogue au précédent montrera que le terme en $\cos u$ de $B^{(j)}$ est

$$\frac{GG'G''}{4}\cos u \times \left\{ \frac{\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2[\beta'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 + \beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2]}{[(\alpha'+\alpha'')n_i + (\beta'+\beta'')n_j]^2} + \frac{\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2[\beta(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha'')n_i + (\beta+\beta'')n_j]^2} + \frac{\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2[\beta(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \beta'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2]}{[(\alpha+\alpha')n_i + (\beta+\beta')n_j]^2} + \alpha\beta(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \alpha'\beta'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 + \alpha''\beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2 \right\},$$

et le coefficient entre crochets devient, par les relations (38),

$$[\beta(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \beta'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 + \beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2](\alpha + \alpha' + \alpha'') = 0.$$

32. *Forme* $B^{(ij)}$. — Puisque chaque terme de P doit contenir ρ_i et chaque terme de Q, ρ_j, et comme P et Q doivent être formés respectivement de termes tels que $G\alpha\cos(\psi + \omega)$ et $G\beta\cos(\psi + \omega)$, je pose

$$P = G\alpha\cos(\psi + \omega) + G'\alpha'\cos(\psi' + \omega') + G''\alpha''\cos(\psi'' + \omega''),$$
$$Q = G\beta\cos(\psi + \omega) + G'\beta'\cos(\psi' + \omega') + G''\beta''\cos(\psi'' + \omega''),$$

où

$$\psi = \alpha l_i + \beta l_j, \quad \psi' = \alpha' l_i + \beta' l_j, \quad \psi'' = \alpha'' l_i + \beta'' l_j.$$

La démonstration qui va suivre pourra s'étendre aussi aux termes de P et Q qui dépendent des longitudes moyennes des autres planètes.

On a

$$\frac{d^2 P'_j}{dt^2} = \frac{d^2 Q'_i}{dt^2} = G\alpha\beta\,(\alpha n_i + \beta n_j)^2 \sin(\psi + \omega) + G'\alpha'\beta'\,(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 \sin(\psi' + \omega')$$
$$+ G''\alpha''\beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2 \sin(\psi'' + \omega''),$$

$$\frac{d^2 P'_i}{dt^2} = G\alpha^2\,(\alpha n_i + \beta n_j)^2 \sin(\psi + \omega) + G'\alpha'^2\,(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 \sin(\psi' + \omega')$$
$$+ G''\alpha''^2(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2 \sin(\psi'' + \omega''),$$

$$\frac{d^2 Q''_i}{dt^2} = G\alpha^2\beta(\alpha n_i + \beta n_j)^2 \cos(\psi + \omega) + G'\alpha'^2\beta'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 \cos(\psi' + \omega')$$
$$+ G''\alpha''^2\beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2 \cos(\psi'' + \omega'').$$

Si l'on forme l'expression (d), on verra que le terme de $B^{(ij)}$, qui contient $\cos u$, est

$$\frac{GG'G''}{4}\cos u \times \left\{ \frac{\beta'\beta''\alpha^2(\alpha n_i + \beta n_j)^2[\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 + \alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2]}{[(\alpha' + \alpha'')n_i + (\beta' + \beta'')n_j]^2} \right.$$
$$+ \frac{\beta\beta''\alpha'^2(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2[\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2]}{[(\alpha + \alpha'')n_i + (\beta + \beta'')n_j]^2}$$
$$+ \frac{\beta\beta'\alpha''^2(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2[\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2]}{[(\alpha + \alpha')n_i + (\beta + \beta')n_j]^2}$$
$$+ \frac{\alpha'\alpha''\alpha\beta(\alpha n_i + \beta n_j)^2[\beta'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2 + \beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2]}{[(\alpha' + \alpha'')n_i + (\beta' + \beta'')n_j]^2}$$
$$+ \frac{\alpha\alpha''\alpha'\beta'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2[\beta(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2]}{[(\alpha + \alpha'')n_i + (\beta + \beta'')n_j]^2}$$
$$+ \frac{\alpha\alpha'\alpha''\beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2[\beta(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \beta'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2]}{[(\alpha + \alpha')n_i + (\beta + \beta')n_j]^2}$$
$$+ \alpha^2\beta(\alpha n_i + \beta n_j)^2(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta') + \alpha'^2\beta'(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2(\alpha\beta'' + \alpha''\beta)$$
$$\left. + \alpha''^2\beta''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2(\alpha\beta' + \alpha'\beta) \right\}.$$

Les conditions (38) réduisent le coefficient de $\frac{GG'G''}{4}\cos u$ à

$$[\alpha\beta(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta')(\alpha n_i + \beta n_j)^2 + \alpha'\beta'(\alpha''\beta + \alpha\beta'')(\alpha' n_i + \beta' n_j)^2$$
$$+ \alpha''\beta''(\alpha'\beta + \alpha\beta')(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)^2](\alpha + \alpha' + \alpha'') = 0,$$

et, par conséquent, $B^{(ij)}$ ne renfermera pas de terme indépendant du temps.

33. *Forme* $B^{(jk)}$. — Soient

$$\psi = \alpha l_i + \beta l_j, \quad \psi' = \alpha' l_i + \gamma l'_k, \quad \psi'' = \beta'' l_j + \gamma'' l_k.$$

D'après ce qui a été dit au n° 28, à chaque terme tel que $G''\beta''\cos(\psi''+\omega'')$ de P correspond un terme $G''\gamma''\cos(\psi''+\omega'')$ de Q; de plus, tous les termes de P dépendent de ρ_j et tous ceux de Q de ρ_k. Pour notre démonstration, il suffit de considérer les termes suivants :

$$P = G\beta\ \cos(\psi+\omega) + G''\beta''\cos(\psi''+\omega''),$$
$$Q = G'\gamma'\cos(\psi'+\omega') + G''\gamma''\cos(\psi''+\omega''),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2P'_i}{dt^2} = G\alpha\beta(\alpha n_i+\beta n_j)^2\sin(\psi+\omega),$$
$$\frac{d^2Q'_i}{dt^2} = G'\alpha'\gamma'(\alpha' n_i+\gamma' n_k)^2\sin(\psi'+\omega'),$$
$$\frac{d^2P'_k}{dt^2} = \frac{d^2Q'_j}{dt^2} = G''\beta''\gamma''(\beta'' n_j+\gamma'' n_k)^2\sin(\psi''+\omega'').$$

On a aussi

$$P''_{ik} = 0,$$

car chaque terme de P ne dépend en même temps que des moyens mouvements de deux planètes, dont l'une est toujours m_j. D'après cela, l'expression de $B^{(jk)}$ sera formée de termes tels que

$$+\frac{GG'G''}{4}\beta\beta''\gamma'\gamma''(\beta'' n_j+\gamma'' n_k)^2\left\{\frac{\alpha(\alpha n_i+\beta n_j)^2}{[\alpha' n_i+\beta'' n_j+(\gamma'+\gamma'')n_k]^2}+\frac{\alpha'(\alpha' n_i+\gamma' n_k)^2}{[\alpha n_i+(\beta+\beta'')n_j+\gamma'' n_k]^2}\right\}\cos u;$$

et, pour que le temps disparaisse, il faut avoir

$$(\alpha+\alpha')n_i+(\beta+\beta'')n_j+(\gamma'+\gamma'')n_k = 0.$$

Or, dans la nature, les moyens mouvements des planètes ne remplissent jamais cette condition, si ce n'est lorsqu'on a simultanément

$$\alpha+\alpha' = 0,\quad \beta+\beta'' = 0,\quad \gamma'+\gamma'' = 0;$$

mais, dans ce cas, le coefficient de $\frac{GG'G''}{4}\cos u$ devient

$$\beta\beta''\gamma'\gamma''(\beta'' n_j+\gamma'' n_k)^2(\alpha+\alpha'),$$

et il est nul.

34. *Forme* $(da_i, da'_i)^{(i)}$. — Soient encore

$$\psi = \alpha l_i+\beta l_j,\quad \psi' = \alpha' l_i+\beta' l_j,\quad \psi'' = \alpha'' l_i+\beta'' l_j,$$

et prenons dans chacune des fonctions P, Q, R un terme dépendant des moyens mouvements des deux mêmes planètes

$$P = G\cos(\psi + \omega), \quad Q = G'\cos(\psi' + \omega'), \quad R = G''\cos(\psi'' + \omega'');$$

d'où

$$\frac{d^2 P'_i}{dt^2} = G\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2 \sin(\psi + \omega), \quad Q'_i = -G'\alpha'\sin(\psi' + \omega'),$$

$$\frac{dR'_i}{dt} = -G''\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)\cos(\psi'' + \omega'').$$

Le terme en $\sin u$ de $(da_i, da'_i)^{(t)}$ est

$$-\frac{GG'G''}{4}\sin u \times \left\{ \frac{\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)^2}{[(\alpha' + \alpha'')n_i + (\beta' + \beta'')n_j]^2} - \frac{\alpha''(\alpha'' n_i + \beta'' n_j)}{(\alpha + \alpha')n_i + (\beta + \beta')n_j} + \alpha' \right\},$$

et, quand il est indépendant du temps, il se réduit à

$$-\frac{GG'G''}{4}\sin(\omega + \omega' + \omega'') \times (\alpha + \alpha' + \alpha'') = 0.$$

Il est facile de voir que $(da_i, da'_i)^{(t)}$ renferme aussi des termes de la forme $At\cos(\psi + \omega) + Bt^2\cos(\psi + \omega)$.

35. *Forme* $(da_i da'_i, da_i, da'_i)$. — Je prends encore

$$P = G\cos(\psi + \omega), \quad Q = G'\cos(\psi' + \omega'), \quad R = G''\cos(\psi'' + \omega''),$$

ce qui donne

$$\frac{dP'_i}{dt} = -G\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)\cos(\psi + \omega), \quad \frac{dQ'_i}{dt} = -G'\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)\cos(\psi' + \omega'),$$

$$R'_i = -G''\alpha''\sin(\psi'' + \omega'').$$

L'expression (g) sera formée de termes tels que

$$\frac{GG'G''}{4}\sin u \times \left[\frac{\alpha(\alpha n_i + \beta n_j)}{(\alpha' + \alpha'')n_i + (\beta' + \beta'')n_j} + \frac{\alpha'(\alpha' n_i + \beta' n_j)}{(\alpha + \alpha'')n_i + (\beta + \beta'')n_j} - \alpha'' \right],$$

qui, lorsqu'on leur applique les conditions (38), prennent la forme

$$-\frac{GG'G''}{4}(\alpha + \alpha' + \alpha'')\sin(\omega + \omega' + \omega'');$$

or cette quantité est nulle.

En dehors des termes simplement périodiques, on trouve aussi, dans $(da_i da'_i, da_i, da'_i)$, des termes de la forme $At\cos(\psi + \omega)$.

36. Il est facile de s'assurer que les démonstrations exposées dans les nos 29, 30, ..., 35 sont tout à fait générales; par conséquent, $M_i \delta V'_i$ ne contient pas des termes constants du troisième ordre par rapport aux masses. Il résulte de là que le terme séculaire (20) ne peut pas se réduire avec d'autres, et, par suite, le demi-grand axe est soumis à des inégalités séculaires du troisième ordre.

Il est inutile de pousser plus loin l'approximation pour voir ce qui arrive à l'égard des termes du quatrième, du cinquième, ... ordre. En effet, l'existence de termes de la forme A, $Bt\cos(\psi + \omega)$, $Ct^2\cos(\psi + \omega)$ parmi ceux du deuxième et du troisième ordre permet d'admettre d'une manière presque certaine que, parmi les termes d'un ordre supérieur au troisième, on en doit trouver de séculaires. L'invariabilité des grands axes n'existe donc que pour la première et la seconde puissance des masses.