

iz.

# Statica

și

# Rezistența

de

Gh. Em. Filipescu

III



Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului  
Imprimeria Națională  
București  
1935



BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITARĂ  
BUCUREȘTI

Cota ..... *63919 Sublot*

Inventar ..... *431967*

# Statica și Rezistența

# Statica construcțiunilor

și

# Rezistența materialelor

curs predat de

**Inginer Gh. Em. Filipescu**

Profesor la Școala Politehnică „Regele Carol II” din București



Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului

**Imprimeria Națională**

București

1935



Biblioteca Centrală Universitară  
Cota 63919 Onklet  
Inventar 43/1967

CC 96/03

*Toute drepturile de traducere, reproducere sau adaptare,  
rezervate, pentru toate țările.*

**B.C.U. Bucuresti**



**C431967**

## P R E F A Ț A

Cartea de față reprezintă aproximativ cursul ce-l predau la Școala Politehnică « Regele Carol II » din București.

Zic aproximativ pentru că în decursul celor 20 ani de când am fost însărcinat să predau « Rezistența Materialelor », cursul a suferit mereu transformări, importante mai ales, dela data când la această catedră s'a adăugat și « Statica Grafică ». Reunindu-le, am utilizat în ambele, deopotrivă și după cazuri, metodele analitice și grafice.

Cititorul va observa numaidecât că am dat o importanță deosebită calculului vectorial cu ajutorul căruia s'au putut rezolva în mod relativ simplu o serie întregă de chestiuni. În special calculul deplasărilor înfinit mici combinat cu principiul lucrului mecanic virtual au permis să se dea diverselor chestiuni — liniilor de influență la sistemele statice, de exemplu — o rezolvare aproape intuitivă.

Materia tratată se referă la calculul static determinat și nedeterminat al construcțiilor, la calculul rezistențelor din ele și la stabilitatea lor, chestiuni complet distincte între ele.

Se poate aduce obiecțiunea și cu drept cuvânt că lipsește o serie întregă de probleme. Răspund că chiar fără ele cursul a luat o proporție mai mare decât mă așteptam. Cred totuși că inginerii români vor găsi aci majoritatea chestiunilor ce-i interesează.

Deciziunea de a publica acest curs o datoresc insistenței foștilor mei elevi cărora le mulțumesc pentru anticipata lor apreciere, curajului ce mi l-a dat și înlesnirilor ce mi le-a făcut d-l Inginer Al. Bunescu, Director General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului fără de cari nici nu m'aș fi încumetat să public cursul, ajutorului neprecupețit al asistentului meu d-l Inginer I. C. Dumitrescu care a verificat manuscrisul, a făcut figurile și corecturile și îngrijit de tipărire, d-lui Inginer N. Georgescu și V. Ștefănescu dela Societatea Comunală a Tramvaielor București cari au făcut o serie întregă de calcule numerice și d-lor Ingineri Mărăcine B. și Constantinescu Z., precum și personalului dela Imprimeria Națională cari au pus o grijă deosebită la imprimare. Tuturor, pe această cale, le mulțumesc cu recunoștință.

București, 25 Martie 1935.

GII. EM. FILIPESCU





# TABLA DE MATERII

|  | Pagina |
|--|--------|
| <b>Cap. I. Generalități . . . . .</b>  | 3      |
| A) Elemente de construcție . . . . .   | 3      |
| B) Noțiuni asupra vectorilor . . . . .   | 5      |
| 1. Definiții și notații . . . . .  | 5      |
| 2. Algebra vectorială . . . . .  | 6      |
| 3. Operațiuni diferențiale . . . . .   | 17     |
| C) Forțele care acționează construcțiunile . . . . .                               | 20     |
| D) Echilibrul construcțiilor . . . . .   | 22     |
| <b>Cap. II. Compunerea și descompunerea forțelor . . . . .</b>                     | 24     |
| A) Coordonatele forței . . . . .   | 24     |
| 1. Sistemul cartezian . . . . .  | 24     |
| 2. Sistemul vectorial . . . . .  | 25     |
| 3. Sistemul grafic . . . . .   | 26     |
| B) Forțe concurente . . . . .  | 26     |
| 1. Compunerea forțelor concurente complanare . . . . .                             | 26     |
| 2. Descompunerea unei forțe după direcțiuni concurente complanare . . . . .        | 28     |
| 3. Compunerea forțelor concurente în spațiu . . . . .                              | 29     |
| 4. Descompunerea unei forțe în spațiu după direcțiuni concurente . . . . .         | 30     |
| C) Forțe oarecari în plan. Poligon funicular . . . . .                             | 34     |
| 1. Compunerea unui sistem de forțe oarecari în plan; poligonul funicular . . . . . | 34     |
| 2. Câteva observațiuni asupra poligonului funicular . . . . .                      | 37     |
| 3. Câteva aplicațiuni asupra poligoanelor funiculare . . . . .                     | 41     |
| 4. Descompunerea unei forțe după direcțiuni neconcurente, complanare . . . . .     | 44     |
| D) Forțe oarecari în spațiu . . . . .  | 47     |
| 1. Compunerea forțelor în spațiu . . . . .   | 47     |
| 2. Descompunerea unui sistem de forțe în spațiu . . . . .                          | 53     |
| 3. Câteva considerațiuni de reținut . . . . .                                      | 59     |



|   | <u>Pagina</u> |
|---|---------------|
| <b>E) Reazime și reacțiuni</b> . . . . .  | 60            |
| 1. Reazime simple . . . . .   | 60            |
| 2. Articulații . . . . .  | 61            |
| 3. Încastrări . . . . .   | 61            |
| 4. Reazime diferite . . . . .   | 62            |
| <br>  |               |
| <b>Cap. III. Curbe funiculare</b> . . . . .   | 72            |
| <b>A) Ecuația curbei funiculare</b> . . . . .   | 72            |
| <b>B) Curba funiculară a unei suprafețe de încărcări verticale</b> . . . . .  | 75            |
| 1. Generalități . . . . .   | 75            |
| 2. Parabola . . . . .   | 78            |
| 3. Lănțișorul . . . . .   | 81            |
| 4. Alte curbe funiculare . . . . .  | 84            |
| <br>  |               |
| <b>Cap. IV. Calculul momentelor statice și de inerție<br/>ale suprafețelor</b> . . . . .  | 95            |
| 1. Momentul static . . . . .  | 95            |
| 2. Momentul de inerție . . . . .  | 96            |
| <br>  |               |
| <b>Cap. V. Grinzi drepte</b> . . . . .  | 100           |
| <b>A) Momente încovoietoare și forțe tăietoare</b> . . . . .  | 100           |
| 1. Metoda secțiunilor. Definiții . . . . .  | 100           |
| 2. Fixarea semnelor cantităților $N$ , $T$ , $M_i$ și $M_r$ . . . . .   | 101           |
| 3. Teoreme generale . . . . .   | 102           |
| 4. Curbele forțelor tăietoare și momentelor încovoietoare . . . . .   | 104           |
| <b>B) Sarcini mobile și linii de influență</b> . . . . .  | 113           |
| 1. Generalități . . . . .   | 113           |
| 2. Linia de influență a forței tăietoare $T$ . . . . .  | 115           |
| 3. Forța tăietoare maximă . . . . .   | 115           |
| 4. Linia de influență a momentului încovoietor . . . . .  | 119           |
| 5. Momentul încovoietor maxim . . . . .   | 120           |
| <b>C) Determinarea liniilor de influență cu principiul lucrului mecanic<br/>virtual, sau al deplasărilor virtuale</b> . . . . . | 124           |
| 1. Linia de influență a forței tăietoare $T$ . . . . .  | 125           |
| 2. Linia de influență a momentului încovoietor . . . . .  | 126           |
| <b>D) Sarcini indirecte</b> . . . . .   | 127           |
| 1. Linia de influență a forței tăietoare . . . . .  | 127           |
| 2. Forța tăietoare maximă . . . . .   | 128           |
| 3. Linia de influență a momentului încovoietor $M$ . . . . .  | 129           |
| 4. Curbele forțelor tăietoare și momentelor încovoietoare . . . . .   | 130           |

|   | <u>Pagina</u> |
|---|---------------|
| E) Moment maxim maximorum . . . . .                                     | 131           |
| F) Încărcări uniform distribuite echivalente unui convoi de sarcini dat | 132           |

## Cap. VI. Grinzi cu zăbrele plane . . . . . 141

|  |     |
|--|-----|
| A) Generalități și definiții . . . . .   | 141 |
| 1. Definiții . . . . .   | 141 |
| 2. Relațiuni între numărul barelor, numărul nodurilor și poziția lor . . . . .                         | 142 |
| B) Determinarea eforturilor în bare . . . . .  | 148 |
| 1. Metoda separării nodurilor. Metoda lui Cremona . . . . .  | 149 |
| 2. Metoda secțiunilor oarecari . . . . .   | 154 |
| a) Metoda lui Culmann . . . . .  | 155 |
| b) Metoda lui Ritter . . . . .   | 156 |
| 3. Alte metode . . . . .   | 158 |
| a) Metoda lui Henneberg sau a înlocuirii barelor . . . . .   | 159 |
| b) Metoda pozițiilor false . . . . .   | 161 |
| c) Metoda nodurilor virtuale . . . . .   | 162 |
| C) Principiul strămutărilor virtuale aplicat la grinzi cu zăbrele . . . . .                            | 164 |
| 1. Deplasări virtuale . . . . .  | 164 |
| 2. Determinarea eforturilor în barele grinzelor cu zăbrele cu ajutorul strămutărilor virtuale. . . . . | 172 |
| D) Linii de influență la grinzi cu zăbrele . . . . .   | 174 |
| 1. Linii de influență la grinzi cu tălpi paralele . . . . .  | 174 |
| 2. Linii de influență la grinzi cu tălpi poligonale . . . . .  | 177 |
| 3. Grinzi cu diagonale în K . . . . .  | 181 |
| 4. Grinzi cu bare suplimentare . . . . .   | 187 |

## Cap. VII. Grinzi curbe sau arce . . . . . 195

|  |     |
|--|-----|
| A) Arce plane cu o articulație și un reazem simplu supuse la forțe, situate în același plan cu ele . . . . . | 195 |
| 1. Relații între $N$ , $T$ și $M$ în cazul general . . . . .   | 196 |
| 2. Determinarea reacțiunilor . . . . .   | 197 |
| 3. Forță axială, forță tăietoare și moment încovoietor . . . . .   | 200 |
| 4. Linii de influență . . . . .  | 201 |
| B) Arce plane cu trei articulații . . . . .  | 206 |
| 1. Definiții, reacțiuni. Curba momentelor încovoietoare . . . . .  | 206 |
| 2. Linii de influență . . . . .  | 210 |
| C) Arce plane cu trei articulații formate din grinzi cu zăbrele . . . . .                                    | 216 |
| D) Grinzi curbe plane supuse la forțe normale pe planul lor . . . . .  | 219 |
| 1. Considerații generale . . . . .   | 219 |
| 2. Expresiile cantităților $T$ , $M_i$ și $M_r$ , într'o secțiune oarecare . . . . .                         | 220 |
| 3. Linii de influență . . . . .  | 221 |
| E) Grinzi curbe în spațiu . . . . .  | 224 |

|  | <u>Pagina</u> |
|--|---------------|
| <b>Cap. VIII. Grinzi cu zăbrele în spațiu . . . . .</b>  | <b>225</b>    |
| A) Considerațiuni generale . . . . .   | 225           |
| B) Determinarea eforturilor în bare . . . . .  | 226           |
| 1. Metoda separării nodurilor . . . . .  | 226           |
| a) Metoda lui Cremona . . . . .  | 229           |
| b) Metoda lui Henneberg . . . . .  | 227           |
| 2. Metoda secțiunilor . . . . .  | 228           |
| C) Reazimile grinzilor cu zăbrele . . . . .  | 232           |
| <b>Cap. IX. Rezistențe . . . . .</b>   | <b>235</b>    |
| A) Rezistențe în spațiu . . . . .  | 235           |
| 1. Generalități și definiții . . . . .   | 235           |
| 2. Ecuațiile de echilibru . . . . .  | 236           |
| 3. Valoarea rezistenței $\bar{\alpha}$ după o direcțiune oarecare . . . . .                                      | 237           |
| 4. Componentele rezistenței $\bar{\alpha}$ . . . . .   | 239           |
| 5. Variația rezistențelor $\mathcal{R}$ . . . . .  | 241           |
| 6. Variația rezistențelor $\mathcal{S}$ . . . . .  | 245           |
| 7. Diagrama variației rezistențelor $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ . . . . .                                     | 246           |
| 8. Cazuri particulare . . . . .  | 248           |
| B) Rezistențe în plan . . . . .  | 248           |
| 1. Variația rezistențelor $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ . . . . .   | 249           |
| 2. Diagrama variației rezistențelor $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ . Cercul lui Mohr . . . . .                   | 250           |
| C) Suprafețe izostatice . . . . .  | 251           |
| D) Ecuațiile lui Cauchy . . . . .  | 253           |
| <b>Cap. X. Impingerea pământului . . . . .</b>   | <b>257</b>    |
| A) Teoria lui Rankine . . . . .  | 258           |
| 1. Calculul grafic al rezistențelor . . . . .  | 259           |
| 2. Calculul analitic al rezistențelor . . . . .  | 261           |
| B) Teoria lui Rebhann . . . . .  | 263           |
| <b>Cap. XI. Deformații . . . . .</b>   | <b>273</b>    |
| 1. Deplasări . . . . .   | 274           |
| 2. Deformațiuni specifice . . . . .  | 274           |
| 3. Variațiunea deformațiunilor specifice . . . . .   | 277           |
| 4. Expriarea deformațiunilor în coordonate carteziene . . . . .  | 279           |
| <b>Cap. XII. Legătura între rezistențe și deformațiuni pentru solicitări într'o singură direcțiune . . . . .</b> | <b>281</b>    |
| A) Relația între rezistențele normale $\mathcal{R}$ și lungimile specifice $\varepsilon$ . . . . .               | 282           |
| 1. Caracteristica materialelor cari ascultă de legea lui Hooke . . . . .   | 284           |
| 2. Lucrul mecanic necesar ruperii unei bare . . . . .  | 287           |
| 3. Caracteristica materialelor cari nu ascultă de legea lui Hooke . . . . .                                      | 289           |
| 4. Limita de elasticitate . . . . .  | 291           |
| B) Relația între rezistențele tangențiale $\mathcal{S}$ și lunecările specifice $\gamma$ . . . . .               | 292           |
| C) Ruperea materialelor prin oboseală . . . . .  | 293           |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Cap. XIII. Legătura între rezistențe și deformațiuni pentru solicitări în mai multe sensuri . . .</b> | <b>297</b> |
| 1. Ecuațiile lui Poisson . . . . .   | 298        |
| 2. Rezistențe reduse . . . . .   | 301        |
| 3. Lucru mecanic . . . . .   | 302        |
| 4. Relația între rezistențe și deformațiuni la corpurile plastice . . . . .                              | 305        |
| <br>   |            |
| <b>Cap. XIV. Ipoteze asupra ruperii materialelor . .</b>   | <b>307</b> |
| 1. Solicitări într'o singură direcțiune . . . . .  | 307        |
| 2. Solicitări în mai multe direcțiuni . . . . .  | 308        |
| <br>   |            |
| <b>Cap. XV. Aplicarea practică a ecuației de echilibru elastic . . . . .</b>                             | <b>316</b> |
| A) Rezistențe admisibile, coeficient de siguranță . . . . .  | 316        |
| B) Calculul rezistențelor la grinzi . . . . .  | 319        |
| <br>   |            |
| <b>Cap. XVI. Determinarea rezistențelor în grinzile supuse la forțe axiale . . . . .</b>                 | <b>321</b> |
| 1. Bare cu secțiune constantă. Legea de distribuție a rezistențelor pe secțiune . . . . .                | 321        |
| 2. Bare cu secțiuni variabile . . . . .  | 323        |
| 3. Secțiuni brute, secțiuni nete . . . . .   | 325        |
| 4. Bare compuse din materiale neomogene . . . . .  | 326        |
| 5. Calculul barelor la care dilatarea transversală este împiedecată (stâlpi fretați) . . . . .           | 328        |
| 6. Solid de egală rezistență la tensiune și compresiune . . . . .  | 330        |
| <br>   |            |
| <b>Cap. XVII. Determinarea rezistențelor la grinzile supuse la momente încovoetoare . . . . .</b>        | <b>341</b> |
| A) Grinzi făcute din materiale omogene . . . . .   | 341        |
| 1. Ipoteza lui Bernoulli . . . . .   | 341        |
| 2. Distribuția rezistențelor pe secțiune . . . . .   | 343        |
| 3. Aflarea axei neutre. Formula lui Navier . . . . .   | 343        |
| 4. Altă formă a formulei lui Navier . . . . .  | 345        |
| 5. Calculul rezistenței maxime din secțiune . . . . .  | 347        |
| 6. Suprafața rezistențelor . . . . .   | 348        |
| 7. Rezultatele teoriei comparate cu rezultatele experiențelor . . . . .                                  | 350        |
| 8. Deformațiunea grinzilor prin încovoiere . . . . .   | 352        |
| 9. Lucrul mecanic acumulat de grinzi prin încovoiere . . . . .   | 363        |
| 10. Dimensionarea grinzilor la încovoiere . . . . .  | 364        |
| 11. Grinzi făcute din materiale cari nu ascultă de legea lui Hooke . . . . .                             | 368        |



|   | <u>Pagina</u> |
|---|---------------|
| <b>B) Grinzi făcute din materiale neomogene. Grinzi de beton armat . . .</b>        | <b>369</b>    |
| 1. Generalități . . . . .   | 369           |
| 2. Secțiuni dreptunghiulare cu armătură simplă . . . . .                            | 371           |
| 3. Secțiuni dreptunghiulare cu armătură dublă . . . . .                             | 373           |
| 4. Secțiuni în T simplu armate . . . . .  | 376           |
| 5. Grinzi de beton făcute cu fiare profilate . . . . .                              | 379           |
| 6. Cazul general . . . . .  | 382           |
| <br><b>Cap. XVIII. Determinarea rezistențelor la grinzile su-</b>                   |               |
| <b>puse la forțe tăietoare . . . . .</b>  | <b>385</b>    |
| 1. Generalități . . . . .   | 385           |
| 2. Distribuția rezistențelor $\bar{\sigma}_z$ pe secțiune . . . . .                 | 386           |
| 3. Deformarea prin forfecare . . . . .  | 389           |
| 4. Lucru mecanic . . . . .  | 390           |
| 5. Comparația rezultatelor teoretice cu datele experiențelor . .                    | 390           |
| 6. Calculul secțiunilor la forfecare . . . . .                                      | 391           |
| <br><b>Cap. XIX. Determinarea rezistențelor la grinzile su-</b>                     |               |
| <b>puse la momente de răsucire . . . . .</b>  | <b>397</b>    |
| 1. Generalități . . . . .   | 397           |
| 2. Distribuția rezistențelor pe secțiune. Generalități . . . . .                    | 401           |
| 3. Calculul resoartelor helicoidale . . . . .                                       | 411           |
| 4. Secțiuni formate din materiale neomogene. Grinzi de beton<br>armat . . . . .     | 413           |
| <br><b>Cap. XX. Rezistențe compuse . . . . .</b>                                    | <b>415</b>    |
| <b>A) Determinarea rezistențelor în bare când sistemul solicitărilor se re-</b>     |               |
| <b>duce la o forță axială și un moment încovoietor sau o forță ex-</b>              |               |
| <b>centrică . . . . .</b>   | <b>415</b>    |
| 1. Determinarea rezistențelor . . . . .   | 415           |
| 2. Sâmbure central . . . . .  | 421           |
| 3. Calculul rezistențelor la încovoiere cu ajutorul sâmburelui<br>central . . . . . | 423           |
| 4. Calculul masivelor de zidărie . . . . .  | 423           |
| 5. Secțiuni formate din materiale neomogene. Secțiuni de beton<br>armat . . . . .   | 427           |
| 6. Ecuația axei deformată a barei . . . . .   | 432           |
| <b>B) Determinarea rezistențelor în bare când sistemul solicitărilor se reduce</b>  |               |
| <b>la o forță tăietoare și un moment de răsucire . . . . .</b>                      | <b>432</b>    |
| <b>C) Determinarea rezistențelor în bare când sistemul solicitărilor se re-</b>     |               |
| <b>duce la o forță axială sau un moment încovoietor și o forță tăie-</b>            |               |
| <b>toare sau un moment de răsucire . . . . .</b>                                    | <b>432</b>    |
| 1. Cazul când avem un moment încovoietor și o forță tăietoare                       | 433           |
| 2. Cazul când avem un moment încovoietor și unul de răsucire                        | 440           |
| <b>D) Calculul unui stâlp încastrat în pământ . . . . .</b>                         | <b>442</b>    |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Cap. XXI. Determinarea rezistențelor când ele depășesc limita de proporționalitate . . . . .</b>  | <b>445</b> |
| 1. Distribuția și calculul rezistențelor pe secțiune la grinzi supuse la încovoiere . . . . .        | 445        |
| 2. Ecuația axei deformate a grinzii . . . . .  | 449        |
| <b>Cap. XXII. Grinzi drepte static nedeterminate . . . . .</b>                                       | <b>453</b> |
| 1. Generalități . . . . .  | 453        |
| 2. Câteva cazuri de grinzi static nedeterminate . . . . .  | 456        |
| 3. Grindă continuă pe mai multe reazime . . . . .  | 460        |
| 4. Grinzi continui pe reazime elastice . . . . .   | 465        |
| 5. Grinzi așezate pe un teren elastic . . . . .  | 466        |
| <b>Cap. XXIII. Grinzi curbe sau arce . . . . .</b>   | <b>482</b> |
| <b>A) Determinarea rezistențelor în secțiunea unui arc . . . . .</b>                                 | <b>482</b> |
| 1. Determinarea rezistențelor . . . . .  | 482        |
| 2. Calculul exact și aproximativ al arcelor . . . . .  | 486        |
| <b>B) Deformația și lucrul mecanic al arcelor . . . . .</b>  | <b>488</b> |
| 1. Deformația arcelor . . . . .  | 488        |
| 2. Lucrul mecanic . . . . .  | 491        |
| <b>Cap. XXIV. Îmbinări . . . . .</b>   | <b>493</b> |
| <b>A) Piese de îmbinare . . . . .</b>  | <b>494</b> |
| 1. Buloane . . . . .   | 494        |
| 2. Pene . . . . .  | 502        |
| 3. Nituri . . . . .  | 503        |
| <b>B) Diferite probleme de îmbinări nituite . . . . .</b>  | <b>512</b> |
| 1. Îmbinări pentru construcții și poduri metalice . . . . .  | 512        |
| <b>Cap. XXV. Stabilitatea construcțiilor . . . . .</b>   | <b>525</b> |
| <b>A) Principiul stabilității și aplicarea lui . . . . .</b>   | <b>525</b> |
| 1. Ecuația principiului stabilității construcțiilor . . . . .  | 525        |
| 2. Aplicarea principiului stabilității construcțiilor . . . . .                                      | 527        |
| <b>B) Flambajul barelor supuse la compresiune . . . . .</b>  | <b>528</b> |
| 1. Definiția flambajului . . . . .   | 528        |
| 2. Grindă articulată la ambele extremități . . . . .   | 528        |
| 3. Alte cazuri de flambaj . . . . .  | 533        |
| 4. Limita de valabilitate a formulei lui Euler. Formulele lui Rankine, Johnson și Tetmajer . . . . . | 542        |
| <b>C) Dimensionarea secțiunilor . . . . .</b>  | <b>543</b> |
| 1. Primul caz, $\lambda \geq \lambda_0$ . . . . .  | 543        |
| 2. Al doilea caz, $\lambda < \lambda_0$ . . . . .  | 544        |
| 3. Stâlpi de beton armat . . . . .   | 549        |

|   | <u>Pagina</u> |
|---|---------------|
| D) Stabilitatea grinzilor supuse la încovoiere . . . . .                            | 557           |
| 1. Prima metodă . . . . .   | 557           |
| 2. Metoda a doua . . . . .  | 561           |
| E) Flambajul grinzilor curbate . . . . .  | 562           |
| <b>Cap. XXVI. Lucru mecanic . . . . .</b>   |               |
| A) Generalități . . . . .   | 565           |
| B) Teorema lui Castigliano . . . . .  | 567           |
| C) Teorema lui Maxwell . . . . .  | 573           |
| D) Principiul lucrului mecanic virtual aplicat la corpurile deformabile             | 577           |
| <b>Cap. XXVII. Construcțiuni făcute din bare . . . . .</b>                          |               |
| A) Generalități . . . . .   | 581           |
| B) Construcțiuni statice nedeterminate . . . . .                                    | 584           |
| C) Construcțiuni simple statice nedeterminate . . . . .                             | 587           |
| 1. Grinzi drepte . . . . .  | 587           |
| 2. Arce cu două articulații . . . . .   | 594           |
| 3. Grinzi suspendate . . . . .  | 597           |
| D) Construcțiuni triple statice nedeterminate . . . . .                             | 600           |
| 1. Grinzi oarecari plane . . . . .  | 600           |
| 2. Calculul unui arc încastrat la ambele extremități . . . . .                      | 613           |
| E) Cadre . . . . .  | 620           |
| 1. Cadru dreptunghiular . . . . .   | 620           |
| F) Cadre închise . . . . .  | 625           |
| 1. Cadru dreptunghiular închis . . . . .  | 625           |
| G) Cadre multiple . . . . .   | 630           |
| 1. Generalități . . . . .   | 630           |
| 2. Cadre articulate în reazime . . . . .  | 637           |
| 3. Cadre încastrate în reazime . . . . .  | 641           |
| H) Aplicarea metodei coeficienților nedeterminați la un caz mai complicat . . . . . | 644           |
| I) Calcule aproximative . . . . .   | 649           |
| J) Grinzi, arce, etc., cu zăbrele statice nedeterminate . . . . .                   | 653           |
| K) Calculul eforturilor suplimentare în barele unei grinzi cu zăbrele . . . . .     | 658           |
| L) Grinzi Vierendeel . . . . .  | 660           |
| <b>Cap. XXVIII. Linii de influență la sistemele static nedeterminate . . . . .</b>  |               |
| A) Linii de influență la sistemele simple statice nedeterminate . . . . .           | 669           |
| Grindă continuă cu două deschideri și reazime de nivel . . . . .                    | 669           |
| B) Linii de influență la sistemele multiple statice nedeterminate . . . . .         | 674           |
| 1. Procedeuul întâiu . . . . .  | 674           |
| 2. Procedeuul al doilea . . . . .   | 676           |
| 3. Metoda secțiunilor incomplete . . . . .  | 678           |
| 4. Procedeuul al patrulea . . . . .   | 684           |

|  | <u>Pagina</u>  |
|--|----------------|
| <b>Cap. XXIX. Eforturi dinamice . . . . .</b>  | <b>685</b>     |
| <b>A) Eforturi dinamice datorite mișcării . . . . .</b>  | <b>686</b>     |
| 1. Calculul unei bare de acoplare . . . . .  | 686            |
| 2. Calculul unei biele . . . . .   | 687            |
| 3. Calculul barei unui pendul . . . . .  | 689            |
| 4. Calculul unui arbore solicitat excentric . . . . .  | 692            |
| 5. Calculul eforturilor produse în șini din cauza neregularității<br>căii . . . . .  | 694            |
| 6. Calculul unui volan . . . . .   | 698            |
| <b>B) Sarcini dinamice . . . . .</b>   | <b>704</b>     |
| <b>C) Vibrația grinzilor . . . . .</b>   | <b>708</b>     |
| 1. Vibrația grinzilor neglijând masa lor . . . . .   | 709            |
| 2. Vibrația grinzilor ținând seamă de masa lor . . . . .   | 712            |
| 3. Vibrația grinzilor încărcate cu sarcini concentrate ținând cont<br>și de greutatea proprie . . . . .                    | 714            |
| 4. Viteza critică a unui arbore care se rotește . . . . .  | 716            |
| 5. Vibrația longitudinală a barelor . . . . .  | 717            |
| <br><b>Cap. XXX. Plăci . . . . .</b>   | <br><b>720</b> |
| <b>A) Geometria suprafețelor . . . . .</b>   | <b>720</b>     |
| 1. Elementele geometrice ale suprafeții mediane . . . . .  | 720            |
| 2. Curbe trasate pe o suprafață . . . . .  | 722            |
| <b>B) Studiul general al plăcilor . . . . .</b>  | <b>725</b>     |
| 1. Echilibrul plăcilor . . . . .   | 725            |
| 2. Legătura între $\bar{R}_x$ . . . și rezistențele din placă . . . . .  | 727            |
| 3. Variația lui $\bar{R}$ și $\bar{M}$ în jurul unui punct . . . . .   | 728            |
| 4. Clasificarea plăcilor . . . . .   | 729            |
| <br><b>Cap. XXXI. Plăci subțiri . . . . .</b>  | <br><b>730</b> |
| <b>A) Suprafețe de rotație . . . . .</b>   | <b>730</b>     |
| <b>B) Plăci subțiri de rotație și încărcări continue, ambele fiind simetrice<br/>    față de axul de rotație . . . . .</b> | <br><b>732</b> |
| 1. Cilindru cu bază circulară . . . . .  | 732            |
| 2. Con de rotație . . . . .  | 732            |
| 3. Sferă . . . . .   | 734            |
| 4. Cupolă eliptică . . . . .   | 736            |
| <b>C) Plăci subțiri și încărcări nesimetrice față de axul de rotație . . . . .</b>   | <b>742</b>     |
| 1. Cilindru circular . . . . .   | 745            |
| 2. Bolți Zeiss-Dywidag . . . . .   | 747            |
| <br><b>Cap. XXXII. Plăci plane subțiri . . . . .</b>   | <br><b>754</b> |
| 1. Deformația plăcilor plane subțiri . . . . .   | 754            |
| 2. Echilibrul unui element de placă . . . . .  | 756            |
| 3. Analogia între suprafața $\nabla v$ și curbele funiculare . . . . .   | 758            |

|   |                |
|---|----------------|
| <b>Cap. XXXIII. Plăci plane groase . . . . .</b>                                    | <b>762</b>     |
| <b>A) Teoria generală a plăcilor groase . . . . .</b>                               | <b>762</b>     |
| 1. Generalități . . . . .   | 762            |
| 2. Relația între solicitările $M_x$ . . . . . și deformația plăcii . . . . .        | 763            |
| 3. Analogia între plăci și grinzi . . . . .   | 766            |
| 4. Lucru mecanic . . . . .  | 767            |
| <b>B) Placă dreptunghiulară simplu rezemată pe contur . . . . .</b>                 | <b>768</b>     |
| 1. Încărcare uniform distribuită. . . . .   | 769            |
| <b>C) Plăci circulare . . . . .</b>   | <b>774</b>     |
| 1. Legăturile între solicitările $M_x$ . . . . . și deformațiunile plăcii . . . . . | 776            |
| 2. Placă încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată suprafața ei . . . . . | 777            |
| 3. Plăci încărcate parțial . . . . .  | 779            |
| <br><b>Cap. XXXIV. Blocuri . . . . .</b>  | <br><b>783</b> |
| 1. Calculul țevilor . . . . .   | 783            |
| 2. Calculul unui disc care se rotește . . . . .                                     | 790            |
| Indicele numelor și al denumirilor . . . . .  | 793            |

## 2. Metoda doua.

Din exemplele făcute până aci, se vede că ecuația diferențială (4) conduce în genere la soluțiuni cari sunt date de funcțiuni mai complicate. Ajungem foarte repede la soluțiuni aproximative cu ajutorul lucrului mecanic.

Creșterea lucrului mecanic datorit răsucirii este:

$$\frac{1}{2} \int M_r^2 dx / G I_r = \frac{1}{2} \int G I_r (d\theta/dx)^2 dx$$

iar cea datorită încovoierii laterale:

$$\frac{1}{2} \int M_i^2 \theta^2 dx / E I_y$$

așa încât:

$$dL_i = \frac{1}{2} \int M_i^2 \theta^2 dx / E I_y + \frac{1}{2} \int G I_r (d\theta/dx)^2 dx$$

Creșterea lucrului mecanic datorit lui  $M_i\theta$ , care apare în momentul când grinda părăsește poziția de echilibru, este:

$$dL_e = \int M_i^2 \theta^2 dx / E I_y$$

Egalând cele două expresii, găsim:

$$(27) \quad \int M_i^2 \theta^2 dx / E I_y = \int G I_r (d\theta/dx)^2 dx$$

care în cazul secțiunilor constante se reduce la

$$(28) \quad \int M_i^2 \theta^2 dx = G I_r E I_y \int (d\theta/dx)^2 dx$$

formulă care ne permite să găsim pe  $M_{imax}$ , care produce, ca să zicem așa, *flambajul grinzii supuse la încovoiere*. Formula (27) ne permite a găsi momentul critic și când secțiunea este variabilă. Dacă acum am cunoaște și valoarea exactă a lui  $\theta$ , chestiunea ar fi complet terminată. Avantajul metodei constă în aceea că pentru  $\theta$  putem lua o funcție arbitrară, care însă să satisfacă condițiile la limită.

Vom ilustra aceasta prin câteva exemple.



**Aplicația Nr. 128.** Să ne ocupăm de o grindă încastrată la o extremitate și solicitată de un moment încovoietor constant  $M_i$ , (prima metodă aplicația Nr. 123).

Cea mai simplă expresie a lui  $\theta$  care satisface condiția ca pentru  $x = 0$  să avem  $d\theta/dx = 0$  și pentru  $x = l$  să avem  $\theta = 0$ , este:

$$d\theta/dx = 2x = 2l\xi, \quad \theta = x^2 - l^2 = l^2(\xi^2 - 1).$$

Dacă punem aceste valori în (28) și ținem seama că  $M_i = cl$ , avem:

$$M_i^2 l^2 \int (\xi^2 - 1)^2 d\xi = 4GI_r EI_y \int \xi^2 dx$$

care integrată în intervalul  $0 - 1$ , ne dă

$$M_i = 1,58 \sqrt{GI_r EI_y} / l$$

rezultat care diferă de cel exact,  $\frac{1}{2}\pi$ , numai cu 0,6%.

**Aplicația Nr. 129.** Să ne ocupăm de grinda dela aplicația Nr. 124. Pentru 0 luăm aceeași funcțiune. Valoarea lui  $M_i$  este  $M_i = -M_{imax}$ . Introducând acestea în (28), obținem:

$$M_{imax}^2 l^2 \int \xi^2 (\xi^2 - 1)^2 d\xi = 4GI_r EI_y \int \xi^2 d\xi,$$

care integrată în aceleași condiții, ne dă:

$$M_{imax} = 4,18 \sqrt{GI_r EI_y} / l,$$

rezultat care diferă de cel exact, 4,0126, numai cu 4%.

Aceste aproximații și simplitatea metodei justifică cu prisosință utilizarea ei.

## E) Flambajul grinzilor curbe.

Ne vom ocupa numai de flambajul grinzilor în planul lor și numai de câteva cazuri foarte simple.

Vom presupune că avem o grindă curbă, supusă la un sistem de sarcini  $F$  și că într'o secțiune oarecare a ei avem forța axială

$N$  și momentul încovoietor  $M$  (fig. 414).

Poziția secțiunii o fixăm prin distanța  $s$ , măsurată pe axa grinzii dela o origine oarecare.

Dacă facem ca sistemul de sarcini  $F$  să crească oarecum, ajungem la o valoare a lor când grinda părăsește poziția ei de echilibru, un punct  $A$ , oarecare al ei, parcurgând drumul  $AA_1 = \varphi$ . Momentul încovoietor în secțiunea considerată în poziția deformată a grinzii, presupunând că  $N$  este compresiune, este:

$$M + N \varphi$$

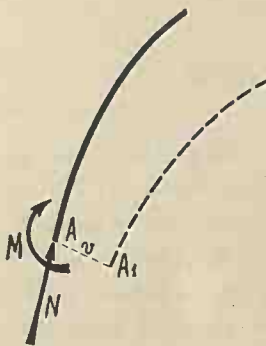


Figura 414

Dacă introducem această valoare în ecuația

(25) dela studiul deformației grinzilor curbe și dacă luăm  $I_1 \simeq I$ , avem

$$(1) \quad d^2v/ds^2 + v(N/EI + 1/r^2) = -M/EI$$

ecuația generală a flambajului grinzilor curbe în planul lor.

Se recunoaște numai deocâmt că integrarea acestei ecuații în cazul general este dificilă. Ne vom ocupa numai de câteva cazuri, când  $M = 0$  pe toată lungimea grinzii, când se știe că axa grinzii coincide cu curba funiculară a încărcărilor sau invers. Chiar așa fiind, ne vom ocupa numai cu două cazuri cu totul particulare.

### 1. Primul caz.

Un arc de cerc de raza  $r$  este supus la o sarcină uniform distribuită  $p$ , dirijată după raza cercului (fig. 415). Extremitățile arcului sunt fixate în articulațiile  $A$  și  $B$ .

Curba funiculară a încărcărilor este chiar arcul de cerc  $ACB$ , care are unghiul la centru egal cu  $2\varphi$ . În acest caz,  $N$  are valoarea constantă  $N = pr$ , și ecuația (1) se reduce la:

$$(2) \quad d^2v/ds^2 + v(N/EI + 1/r^2) = 0$$

care ne dă:

$$(3) \quad v = A \cos as + B \sin as$$

în care am notat:

$$(4) \quad a^2 = N/EI + 1/r^2$$

Deplasarea arcului fiind mică, din motive de simetrie se vede că punctul  $C$  dela mijlocul arcului va avea după deformare  $v = 0$ . Punctele  $A$  și  $B$  având de asemenea  $v = 0$ , rezultă:

$$A = 0, \quad \sin(\frac{1}{2}as) = 0 \quad \text{și deci} \quad a = 2\pi/s = \pi/r\varphi$$

care ne dă:

$$(5) \quad N = (\pi^2/\varphi^2 - 1) EI/r^2$$

### 2. Al doilea caz.

În condițiile exemplului precedent să avem un cerc complet supus la o încărcare uniform distribuită  $p$  (fig. 416).

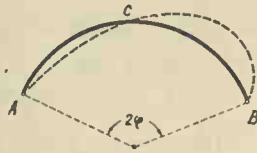


Figura 415



Deformația din motive de simetrie se va face ca în figura 416. Cazul se reduce la cel precedent în care facem  $2\varphi = \pi$ . Formula (5) ne dă:

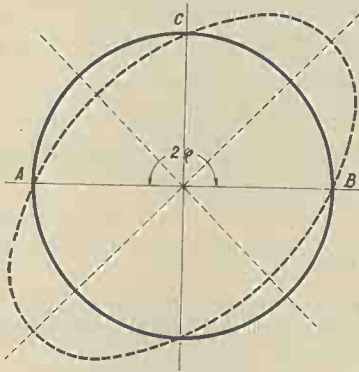


Figura 416

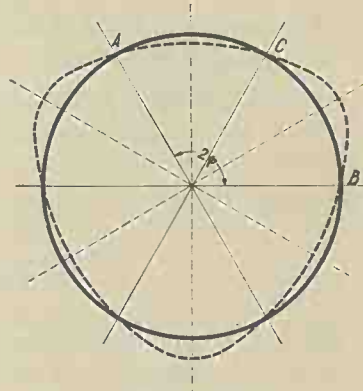


Figura 417

$$N_f = 3EI/r^2, \quad p = 3EI/r^3.$$

Deformația poate avea loc și ca în figura 417, când obținem:

$$N_f = 8EI/r^2, \quad p = 8EI/r^3, \text{ etc.}$$

## XXVI. LUCRU MECANIC.

### A) Generalități.

S'a arătat chiar dela început că pentru ca o construcțiune să fie în echilibru trebuie să satisfacă pe lângă ecuațiile de echilibru date de mecanică și ecuația de echilibru elastic:

$$(1) \quad L_e = L_i$$

în care  $L_e$  este lucrul mecanic al forțelor exterioare, iar  $L_i$  lucrul mecanic acumulat de construcțiune prin deformațiune, lucru pe care-l numim lucru mecanic interior.

Dacă sub acțiunea forțelor  $\bar{F}$  și momentelor  $\bar{M}$ , exterioare corpului, acesta se deformează oarecum și dacă deplasările punctelor de aplicație a forțelor sunt  $\bar{j}$ , iar rotațiile datorite momentelor sunt  $\bar{\omega}$ , atunci lucrul mecanic al forțelor exterioare este:

$$(2) \quad L_e = \frac{1}{2} [\Sigma \bar{F} \bar{j} + \Sigma \bar{M} \bar{\omega}]$$

Factorul  $\frac{1}{2}$  apare din cauză că ne ocupăm numai de corpuri cari ascultă de legea lui *Hooke* la care deplasările elastice cresc liniar cu solicitările.

În interiorul corpului se dezvoltă rezistente  $\mathfrak{X}$  și  $\mathfrak{T}$  cari produc lungiri și lunecări specifice  $\epsilon$  și  $\gamma$ . Lucrul mecanic interior acumulat de corp este:

$$(3) \quad L_i = \frac{1}{2} (\Sigma \mathfrak{X} \epsilon dV + \Sigma \mathfrak{T} \gamma dV)$$

Pentru bare, în cazul diferitelor solicitări, dacă se pune în loc de  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{T}$ ,  $\epsilon$  și  $\gamma$  valorile lor și se integrează pe întreaga secțiune, atunci căpătăm relațiile cunoscute pe care le recapitulăm.

## a) Tensiune.

$$\mathcal{X} = N/\Omega, \quad \varepsilon = N/E\Omega, \quad \varepsilon = \partial u/\partial s,$$

$$L_i = \frac{1}{2} \int \mathcal{X} \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int N \varepsilon ds = \frac{1}{2} \int N^2 ds / E\Omega = \frac{1}{2} \int E\Omega \varepsilon^2 ds = \frac{1}{2} \int E\Omega (\partial u/\partial s)^2 ds.$$

## b) Forfecare.

$$\mathcal{T} = T S/b I, \quad \gamma = kT/G\Omega, \quad \gamma = \partial v/\partial s,$$

$$L_i = \frac{1}{2} \int \mathcal{T} \gamma dV = \frac{1}{2} \int T \gamma ds = \frac{1}{2} \int kT^2 ds / G\Omega = \frac{1}{2} \int kG\Omega \gamma^2 ds = \frac{1}{2} \int kG\Omega (\partial v/\partial s)^2 ds.$$

## c) Incovoiere.

$$\mathcal{X} = M y/I, \quad \omega = M/EI, \quad \omega = -\partial^2 v/\partial s^2,$$

$$L_i = \frac{1}{2} \int \mathcal{X} \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int M \omega ds = \frac{1}{2} \int M^2 ds / EI = \frac{1}{2} \int EI \omega^2 ds = \frac{1}{2} \int EI (\partial^2 v/\partial s^2)^2 ds.$$

## d) Răsucire.

$$\mathcal{T} = M y/I_r, \quad \omega = M/GI_r, \quad \omega = -\partial \theta/\partial s,$$

$$L_i = \frac{1}{2} \int \mathcal{T} \gamma dV = \frac{1}{2} \int M \omega ds = \frac{1}{2} \int M^2 ds / GI_r = \frac{1}{2} \int GI_r \omega^2 ds = \frac{1}{2} \int GI_r (\partial \theta/\partial s)^2 ds.$$

## e) Influența temperaturii.

O bară oarecare mai acumulează lucru mecanic și din cauza căldurii.

Notăm cu  $t$  diferența de temperatură a axei neutre a grinzii între două stări oarecari și cu  $1/E_t$  coeficientul de dilatație prin căldură.

Axa neutră se va lungi cu  $\varepsilon_t = t/E_t$ . Cantitatea  $\varepsilon_t$  se numește *lungirea specifică produsă de căldură* sau prin variația de temperatură.

Dacă între cele două fețe ale grinzii (la  $-\frac{1}{2}h$  și  $+\frac{1}{2}h$ ) avem o diferență de temperatură  $t_0$  față de axa neutră și dacă presupunem că temperatura variază liniar între cele două fețe, atunci la distanța  $y$  de axa neutră vom avea o lungire specifică  $y t_0/h E_t$ . Cantitatea  $t_0/h E_t = \omega_t$  o numim *incovoiere specifică produsă prin variația de temperatură*.

Lucrul mecanic după formula (3) este:

$$L_i = \int \mathcal{X} (\varepsilon_t + y \omega_t) dV = \int N \varepsilon_t ds + \int M \omega_t ds.$$

În cazul când din cauza variației de temperatură nu se nasc eforturi  $N$  și  $M$ , adică grinda se dilată liber, atunci  $L_i = 0$ .

Când într'o secțiune oarecare avem mai multe solicitări, atunci lucrul mecanic acumulat de elementul de bară  $ds$  va fi egal cu suma lucrurilor mecanice a solicitărilor respective.

## B) Teorema lui Castigliano.

### a) Prima formă a teoremei lui Castigliano.

Să presupunem că pe o grindă oarecare aplicăm forța  $d\bar{F}_i = \bar{\varphi}_i dF_i$ . Drumul parcurs de punctul de aplicație al acestei forțe este  $\partial\bar{j}_i$ , iar lucrul mecanic acumulat  $\frac{1}{2} d\bar{F}_i \partial\bar{j}_i$  care fiind un infinit mic de ordinul al doilea se neglijează. Să presupunem că aplicăm apoi pe grindă grupul de forțe  $\bar{F}_1 \dots \bar{F}_i \dots \bar{F}_n$  ale căror puncte de aplicație parcurg drumurile  $\bar{j}_1 \dots \bar{j}_i \dots \bar{j}_n$ .

Lucrul mecanic  $L_i$  acumulat de grindă, dacă se ține seamă de relația (1), este dată de ecuația (2). Aplicând aceste sarcini, forța  $d\bar{F}_i$  parcurge cu întreaga ei intensitate drumul  $\bar{j}_i$  și produce un lucru mecanic suplimentar a cărui valoare este:

$$\partial L_i = d\bar{F}_i \cdot \bar{j}_i.$$

Dacă presupunem că direcția  $\bar{\varphi}_i$  a forței  $\bar{F}_i$  rămâne constantă și dacă notăm:

$$(4) \quad \bar{\varphi}_i \bar{j}_i = v_i$$

atunci avem:

$$(5) \quad \partial L_i / \partial F_i = v_i.$$

Așa dar, *derivata parțială a lucrului mecanic acumulat de un sistem oarecare prin deformație, în raport cu valoarea unei sarcini oarecare, este egală cu proiecția drumului parcurs de punctul de aplicație al acelei forțe pe direcția ei.*

Dacă direcția forței coincide chiar cu direcția drumului parcurs, atunci căpătăm chiar valoarea drumului parcurs.

Demonstrația rămâne absolut identică în cazul când am avea aplicate pe grindă monomentele  $\bar{M}_1 \dots \bar{M}_i \dots \bar{M}_n$  a căror axe sunt dirijate după  $\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_i \dots \bar{\mu}_n$  și rotesc prin deformație secțiunile în cari se aplică cu unghiurile  $\bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_i \dots \bar{\omega}_n$ . În acest caz, dacă notăm

$$(4) \quad \bar{\mu}_i \bar{\omega}_i = \theta_i,$$

avem

$$(5) \quad \partial L_i / \partial M_i = \theta_i,$$

care se enunță la fel și anume: *derivata parțială a lucrului mecanic în raport cu valoarea unui moment oarecare este egală cu unghiul produs de moment proiectat pe direcția momentului.*

Demonstrația rămâne la fel și în cazul când am avea aplicate pe grindă sau construcția noastră deodată forțe și momente.

Ecuatiile (5) exprimă teorema lui *Castigliano*.

După cum se vede, această teoremă ne dă posibilitatea ca din expresia lucrului mecanic să deducem direct cantitățile  $v_i$  și  $\theta_i$ .

Mai mult. Ea ne permite să găsim reacțiunile static nedeterminate.

În adevăr, în dreptul reacțiunilor, forțe sau momente, deplasările sunt nule. Ținând seamă de ecuația (5) vom avea:

$$(6) \quad \partial L / \partial V = 0 \quad , \quad \partial L / \partial M = 0.$$

Derivata fiind nulă lucrul mecanic acumulat este maxim sau minim.

Este totdeauna minim pentrucă  $\partial^2 L / \partial V^2 = \partial v / \partial V$  este totdeauna pozitiv, căci la o creștere  $+ \partial V$  avem totdeauna o creștere  $+ \partial v$  în sensul pozitiv al lui  $V$ , cu alte cuvinte grinda acumulează, nu degajează lucrul mecanic.

Deci, *reacțiunile static nedeterminate se dezvoltă așa fel încât lucrul mecanic acumulat prin deformațiune să fie minim.*

**Observare.** Reacțiunile static nedeterminate cari se exercită asupra unui corp pot fi de două feluri: *exterioare corpului sau interioare lui.*

Să presupunem că avem un corp sau un sistem de corpuri în interiorul cărui se dezvoltă o reacțiune static nedeterminată.

Despărțim sistemul în alte două la contactul cărora se dezvoltă reacțiunea  $V_i$ . În cele două sisteme vom avea:

$$\partial L_1 / \partial V_i = v_i \quad , \quad \partial L_2 / \partial V_i = v_i.$$

pentrucă punctul de aplicație al lui  $V_i$  parcurge același drum  $v_i$ . Observăm însă că, oricare ar fi deformațiunea care se produce la punctul de contact, una din reacțiuni — din cele două egale și de sens contrar — parcurge drumul în sensul deplasării, iar cealaltă în sens contrar. Deci, în cele două părți în care am descompus sistemul, deplasarea  $v_i$  are semne contrare și deci suma celor două expresii de mai sus este nulă, prin urmare:

$$\partial L_1 / \partial V_i + \partial L_2 / \partial V_i = 0.$$

Însă  $L_1 + L_2 = L$ , adică suma lucrurilor mecanice acumulate de cele două părți separate este egală cu lucrul mecanic acumulat de sistemul întreg și prin urmare:

$$(6) \quad \partial L / \partial V_i = 0.$$

Așa dar, teorema este generală și se aplică la fel fie că reacțiunile static nedeterminate sunt exterioare sau interioare sistemului.

Ecuția (6) nu o putem aplica reacțiunilor static determinate pentru că acestea sunt date de ecuațiile statice.

#### b) A doua formă a teoremei lui Castigliano.

Să presupunem că sistemul de sarcini  $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$  fiind aplicat pe grindă, dăm deplasării  $\bar{j}_i$  o creștere  $d\bar{j}_i$ . Lucrul mecanic suplimentar acumulat de grindă va fi:

$$\partial L_i = \bar{F}_i \cdot d\bar{j}_i = F_i \bar{\varphi}_i d\bar{j}_i.$$

Dacă forța  $\bar{F}_i$  păstrează și o direcțiune constantă, atunci:

$$\bar{\varphi}_i d\bar{j}_i = d(\bar{\varphi}_i \bar{j}_i) = dv_i$$

și deci:

$$(7) \quad \partial L_i / \partial v_i = F_i,$$

adică, *derivata lucrului mecanic în raport cu proiecția deplasării punctului de aplicație pe direcțiunea forței este egală cu valoarea forței aplicată în acel punct.*

În mod cu totul analog găsim și

$$(7) \quad \partial L_i / \partial \theta_i = M_i.$$

Mai mult. Să presupunem că, sistemul de forțe fiind aplicat pe grindă, dăm tuturor deplasărilor  $\bar{j}_i$  câte o creștere  $d\bar{j}_i$ . În acest caz, fiecare din forțele  $\bar{F}_i$  parcurge cu întreaga intensitate drumul  $d\bar{j}_i$ . Lucrul mecanic suplimentar acumulat de grindă va fi

$$dL_i = \Sigma \bar{F}_i d\bar{j}_i = \Sigma F_i dv_i.$$

Din ecuația (2) presupunând forțele  $\bar{F}$  constante, deducem:

$$dL_e = \frac{1}{2} \Sigma \bar{F}_i d\bar{j}_i = \frac{1}{2} \Sigma F_i dv_i.$$

Apropiind aceste două ecuații, căpătăm:

$$(8) \quad dL_i - 2 dL_e = 0.$$

Dacă ținem seama de (1), obținem ecuația generală

$$dL = 0.$$



Prin urmare, *deplasările punctelor de aplicație a forțelor, deci deformațiunile unui corp sub acțiunea unui sistem de sarcini dat, se face așa fel încât lucrul mecanic acumulat să fie minim.*

Această teoremă ne permite să găsim ecuația axei deformată a grinzilor.

Să presupunem că avem o grindă oarecare supusă la un sistem de sarcini dat. Deplasările punctelor de aplicație a forțelor sunt tocmai ordonatele axei deformată a grinzii. Așa dar, *ecuația axei deformată a grinzii este așa fel încât lucrul mecanic acumulat de grindă să fie minim.*

Am văzut cum determinăm axa deformată a unei grinzi prin integrarea ecuației diferențiale  $EI \frac{d^2v}{dx^2} = -M$ .

Ecuația (8) ne permite să o găsim direct din expresia lucrului mecanic.

Să presupunem că luăm drept ecuație a axei deformată a grinzii, expresia:

$$v = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots$$

în care  $f_0, f_1, \dots$  sunt funcțiuni oarecari, date de coordonatele punctului considerat, iar  $a_0, a_1, \dots$  niște coeficienți nedeterminați. Acești coeficienți vor fi astfel încât lucrul mecanic acumulat de grindă să fie minim, deci vor trebui să satisfacă ecuațiilor (8):

$$(8) \quad \begin{aligned} \partial L_i / \partial a_0 - 2 \partial L_e / \partial a_0 &= 0, \\ \partial L_i / \partial a_1 - 2 \partial L_e / \partial a_1 &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ecuații cari ne permit determinarea tuturor coeficienților  $a_0, a_1, \dots$

Avantajul acestei metode este că putem lua pentru  $v$  și o ecuație aproximativă și determina apoi coeficienții  $a_0, a_1, \dots$  așa fel încât să obținem pentru  $v$  aproximația care o voim.

#### Concluzie.

Din cele de mai sus rezultă că: *reacțiunile*, în cazul sistemelor static nedeterminate și deformațiunile, în cazul celor static determinate, se desvoltă așa fel încât lucrul mecanic acumulat de întregul sistem să fie minim.

Pentru aceste motive teorema lui *Castigliano* mai poartă și numele de teorema *lucrului mecanic minim*.

#### Calculul deformațiunilor $v_i$ și $\theta_i$ .

Am văzut că aceste deformațiuni derivă din expresia lucrului mecanic  $L_i$ . Acesta, la rândul lui, este o funcțiune de forța axială,

forța tăietoare, momentul încovoietor și de răsucire din secțiunea de care ne ocupăm. Când în această secțiune avem mai multe feluri de solicitări, atunci  $L_i$  este egal cu suma lucrurilor mecanice date de fiecare solicitare în parte.

a) Secțiuni solicitate de momente încovoietoare.

Cele ce vom spune pentru acest caz sunt aplicabile tuturor felurilor de solicitări.

Expresia momentului într'o secțiune oarecare  $x$ , este:

$$(9) \quad M_x = \sum m_{xif} F_i + \sum m_{xim} M_i,$$

o funcție liniară de valoarea solicitărilor ( $F_i$  și  $M_i$ ) și o funcție oarecare de poziția secțiunii  $x$  în care căutăm momentul, de direcția solicitărilor și de poziția lor pe grindă. Aceste funcțiuni sunt chiar coeficienții de influență  $m_{xif}$  și  $m_{xim}$  care se știe că sunt momentele ce se dezvoltă în secțiunea  $x$  când în secțiunea  $i$  este aplicată forța  $F_i = 1$  sau respectiv  $M_i = 1$ .

Din ecuația (9), deducem:

$$(10) \quad \partial M_x / \partial F_i = m_{xif} \quad ; \quad \partial M_x / \partial M_i = m_{x\dot{o}n},$$

relații cari ne dau valoarea și semnificarea derivatelor parțiale  $\partial M_x / \partial \dots$ .

Dacă introducem acestor valori în derivata lucrului mecanic dat de ecuația (3).

$$(11) \quad v_i = \partial L_i / \partial F_i = \int M (\partial M / \partial F_i) ds / EI,$$

găsim:

$$(11) \quad v_i = \int M_x m_{xif} d\omega$$

în care am notat:

$$(12) \quad d\omega = ds / EI,$$

cantitate pe care o vom denumi greutatea elastică a elementului  $ds$ , la încovoiere.

Se vede numaidecât că:

$$(11) \quad \theta_i = \int M_x m_{xim} d\omega.$$



## b) Secțiuni solicitate de forțe axiale.

Dacă procedăm exact ca mai sus, găsim:

$$(9) \quad N_x = \sum n_{xij} F_i + \sum n_{xim} M_i,$$

$$(10) \quad \partial N_x / \partial F_i = n_{xij} \quad , \quad \partial N_x / \partial M_i = n_{xim}$$

și deci:

$$(11) \quad v_i = \int N_x n_{xij} d\varepsilon \quad , \quad \theta_i = \int N_x n_{xim} d\varepsilon,$$

în care:

$$(12) \quad d\varepsilon = ds / E\Omega,$$

este greutatea elastică a elementului  $ds$  la forțe axiale.

Expresii absolut analoge obținem dacă în secțiune am avea o forță tăietoare sau un moment de răsucire.

Norma este absolut generală și se aplică oricărui fel de construcție.

Vom ilustra aceasta încă printr'un exemplu.

## c) Săgețile grinzilor cu zăbrele.

Să se găsească săgeata unei grinzi cu zăbrele, static determinată, în dreptul nodului  $n$ .

Lucrul mecanic acumulat de întreaga grindă sub acțiunea tuturor sarcinilor este

$$L_i = \frac{1}{2} \sum N_{ik}^2 l_{ik} / E\Omega_{ik}.$$

Proiecția săgeții după direcția forței  $\bar{F}_n$ , aplicată în nodul  $n$ , este:

$$v_n = \partial L_i / \partial F_n = \sum N_{ik} l_{ik} (\partial N_{ik} / \partial F_n) / E\Omega_{ik}.$$

Dacă ținem seamă că avem:

$$N_{ik} = n_{ik,1} F_1 + \dots + n_{ik,n} F_n \dots, \quad \therefore \partial N_{ik} / \partial F_n = n_{ik,n}$$

și notăm:

$$n_{ik,n} l_{ik} / E\Omega_{ik} = u_{ik,n} \quad , \quad N_{ik} l_{ik} / E\Omega_{ik} = u_{ik},$$

găsim:

$$(13) \quad v_n = \sum N_{ik} \cdot u_{ik,n} = \sum n_{ik,n} u_{ik},$$

formulă absolut analogă formulilor (11).

Aplicarea ei este foarte simplă. Aplicăm în nodul  $n$  forța  $F_n = 1$  și sub acțiunea ei găsim eforturile  $n_{ik,n}$  din bare și apoi lungirile  $u_{ik,n}$  datorite lor. Suma algebrică  $\sum N_{ik} \cdot u_{ik,n}$  ne dă pe  $v_n$ .

Analog se aplică și egalitatea doua.

### C) Teorema lui Maxwell.

Dacă se integrează ecuațiile de forma (11), se vede numai decît că atît  $v_i$  cît și  $\theta_i$  sunt funcțiuni liniare și omogene de valoarea solicitărilor și deci se pot pune sub forma:

$$(14) \quad \begin{aligned} v_i &= \partial L_i / \partial F_i = \Sigma v_{ikf} F_k + \Sigma v_{ikm} M_k, \\ \theta_i &= \partial L_i / \partial M_i = \Sigma \theta_{ikf} F_k + \Sigma \theta_{ikm} M_k, \end{aligned}$$

în care coeficienții de influență  $v_{ikf}$ , etc. sunt funcțiuni de poziția secțiunii în care căutăm deplasarea și de direcția și poziția solicitărilor pe grindă.

Se vede numai decît care este semnificarea acestor coeficienți de influență. Să facem egale cu zero toate solicitările de pe grindă afară de  $F_k$ , pentru care luăm valoarea  $F_k = 1$ .

Se vede atunci că  $v_{ikf}$  este proiecția săgeții din  $i$  pe direcția  $\varphi_i$ , atunci când în secțiunea  $k$  avem  $F_k = 1$ .

Ecuațiile (14) ne arată și unitățile în care se măsoară acești coeficienți de influență. Se vede că  $v_{ikf}$  are dimensiua  $m/kg$ ,  $v_{ikm}$  și  $\theta_{ikf}$  au dimensiua  $1/kg$ , pe când  $\theta_{ikm}$  are dimensiua  $1/kg m$ .

Ecuația (14) ne mai arată că deplasările datorite diverselor solicitări se pot suprapune.

Valorile lui  $v_k$  și  $\theta_k$ , în altă secțiune  $k$ , vor fi date evident tot de un grup de ecuații (14) și anume:

$$(14) \quad \begin{aligned} v_k &= \partial L_i / \partial F_k = \Sigma v_{kif} F_i + \Sigma v_{kim} M_i, \\ \theta_k &= \partial L_i / \partial M_k = \Sigma \theta_{kif} F_i + \Sigma \theta_{kim} M_i. \end{aligned}$$

Dacă din cele două grupe de ecuații (14) formăm derivata doua a lui  $L_i$  în raport cu toate solicitările, obținem:

$$(15) \quad \begin{aligned} \partial^2 L_i / \partial F_i \partial F_k &= v_{ikf} = v_{kif} \quad , \quad \therefore \bar{\varphi}_i \bar{J}_{ikf} = \bar{\varphi}_k \bar{J}_{kif} \\ \partial^2 L_i / \partial M_i \partial M_k &= \theta_{ikm} = \theta_{kim} \quad , \quad \therefore \bar{\mu}_i \bar{\omega}_{ikm} = \bar{\mu}_k \bar{\omega}_{kim} \\ \partial^2 L_i / \partial F_i \partial M_k &= v_{ikm} = \theta_{kif} \quad , \quad \therefore \bar{\varphi}_i \bar{J}_{ikm} = \bar{\mu}_k \bar{\omega}_{kif} \\ \partial^2 L_i / \partial F_k \partial M_i &= v_{kim} = \theta_{ikf} \quad , \quad \therefore \bar{\varphi}_k \bar{J}_{kim} = \bar{\mu}_i \bar{\omega}_{ikf} \end{aligned}$$

Să interpretăm prin vorbe unul din rezultatele de mai sus, de exemplu  $v_{ikf} = v_{kif}$ : proiecțiunea pe  $\bar{\varphi}_i$  a deplasării punctului de aplicație  $i$ , când în secțiunea  $k$  este aplicată sarcina  $F_k = 1$  dirijată după  $\bar{\varphi}_k$ , este egală cu proiecția pe  $\bar{\varphi}_k$  a deplasării punctului de aplicație  $k$ , când în  $i$  este aplicată sarcina  $F_i = 1$ , dirijată după  $\bar{\varphi}_i$ .

Este evident că atunci când cele două direcțiuni sunt paralele, adică avem  $\bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}_k$ , atunci chiar deplasările însăși se bucură de proprietatea de mai sus.

Aceasta-i teorema lui *Maxwell* sau a *reprociității deplasărilor*.

Se poate da o demonstrație simplă acestei teoreme în cazul când deplasările și rotațiile coincid respectiv cu direcția forțelor și momentelor. Ne vom ocupa de primul și al treilea caz.

*Primul.* Să presupunem că avem o grindă și că în secțiunea  $i$  aplicăm forța  $\bar{F}_i$ . Grinda se va încovoia și în dreptul și în direcția sarcinii se va produce săgeata  $v_i = F_i v_{ii}$ .

Lucrul mecanic acumulat de grindă va fi:  $\frac{1}{2} F_i^2 v_{ii}$ . Să presupunem că în secțiunea  $k$  aplicăm forța  $\bar{F}_k$ . În mod analog, lucrul mecanic acumulat de grindă va fi  $\frac{1}{2} F_k^2 v_{kk}$ . Când am aplicat  $\bar{F}_k$  pe grindă, atunci în dreptul lui  $\bar{F}_i$  se produce o săgeată a cărei valoare este  $v_{ik} F_k$ . Această săgeată, forța  $\bar{F}_i$  o parcurge cu întreaga sa intensitate și deci lucrul mecanic suplimentar acumulat va fi  $F_i F_k v_{ik}$ , iar lucrul mecanic total:

$$L = \frac{1}{2} F_i^2 v_{ii} + \frac{1}{2} F_k^2 v_{kk} + F_i F_k v_{ik}.$$

Să ridicăm sarcinile de pe grindă și să aplicăm întâiu pe  $\bar{F}_k$  și apoi pe  $\bar{F}_i$ . Primii doi termeni din expresia lui  $L$  rămân aceiași. Al treilea se modifică precum urmează. Când aplicăm pe  $\bar{F}_i$ , atunci, în dreptul lui  $\bar{F}_k$ , se produce o săgeată a cărei valoare este  $F_i v_{ki}$  pe care  $\bar{F}_k$  o parcurge cu întreaga intensitate acumulând un lucru mecanic  $F_k F_i v_{ki}$ . Egalând cele două expresii ale lucrului mecanic, căpătăm:

$$v_{ik} = v_{ki}.$$

N'am mai pus indicele  $f$  pentru că a fost vorba dela început numai de forțe.

*Al treilea.* Să presupunem că în secțiunea  $i$  aplicăm forța  $\bar{F}_i$ . Lucrul mecanic acumulat va fi  $\frac{1}{2} F_i^2 v_{ii}$ . Să presupunem că în secțiunea  $k$  aplicăm un moment  $\bar{M}_k$ . Rotirea produsă va fi  $M_k \theta_{kkm}$ , iar lucrul mecanic acumulat  $\frac{1}{2} M_k^2 \theta_{kkm}$ . Aplicând momentul  $\bar{M}_k$ , săgeata în dreptul forței  $\bar{F}_i$  se mărește cu  $v_{ikm} M_k$  pe care forța  $\bar{F}_i$  o parcurge cu întreaga ei intensitate, deci lucrul mecanic suplimentar este  $F_i M_k v_{ikm}$ .

Lucrul mecanic total va fi:

$$L = \frac{1}{2} F_i^2 v_{ii} + \frac{1}{2} M_k^2 \theta_{kkm} + F_i M_k v_{ikm}.$$

Să presupunem că aplicăm întâiu momentul  $\bar{M}_k$  și apoi fața  $\bar{F}_i$ .

Primii doi termeni din expresia lui  $L$  rămân aceiași. Al treilea se modifică și anume: Când aplicăm pe  $\bar{F}_i$ , atunci secțiunea  $k$ , în care se aplică momentul, se rotește cu un unghi  $\theta$  a cărui valoare este  $F_i \theta_{kij}$  pe care  $\bar{M}_k$  îl parcurge cu întreaga lui intensitate și dând astfel un lucru mecanic  $F_i M_k \theta_{kij}$ .

Egalând cele două expresii ale lui  $L$ , găsim:

$$v_{ilm} = \theta_{kij}.$$

### Calculul cantităților $v_{ik}$ , $\theta_{ik}$ , $v_{ilm} = \theta_{kij}$ , etc.

Avem la îndemână două căi: grafică și analitică.

#### a) Calea grafică.

1°. Să presupunem că voim să găsim pe  $v_{ik}$ . Să mai presupunem că ne dăm o grindă oarecare pe care ne dăm două secțiuni,  $i$  și  $k$ . Presupunem că în secțiunea  $i$  avem o forță  $F_i = 1$  dirijată după  $\bar{\varphi}_i$ . După norma dată la integrarea pe cale grafică a ecuației  $EId^2v/dx^2 = -M$  (pag. 362) construim axa deformată a grinzii și găsim săgeata,  $\bar{j}_{kij}$ , în secțiunea  $k$ . Proiecția acesteia după  $\bar{\varphi}_k$  ne dă tocmai  $\varphi_k \bar{j}_{kij} = v_{kij}$ . Putem proceda și invers, anume, să aplicăm în secțiunea  $k$  o forță  $F_k = 1$  după direcția  $\bar{\varphi}_k$ . În mod analog găsim  $v_{ik}$ . Conform teoremei lui Maxwell, aceste două cantități sunt egale. Aceasta ne servă de control al construcțiilor grafice făcute.

În cazul primei construcții, în dreptul secțiunii  $i$  avem  $\bar{j}_{iij}$  care proiectat pe  $\bar{\varphi}_i$  ne dă tocmai  $\varphi_i \bar{j}_{iij} = v_{kij}$ . În cazul celei de a doua, în dreptul secțiunii  $k$  avem  $\bar{j}_{kkj}$  care proiectată pe  $\bar{\varphi}_k$  ne dă  $\varphi_k \bar{j}_{kkj} = v_{kij}$ .

2°. Să presupunem că voim să găsim pe  $v_{ilm}$ . Vom aplica deci în secțiunea  $k$  un moment  $M_k = 1$  și vom construi axa deformată a grinzii. În dreptul secțiunii  $i$ , avem săgeata  $\bar{j}_{ilm}$ , care proiectată după  $\bar{\varphi}_i$  ne dă tocmai  $\varphi_i \bar{j}_{ilm} = v_{ilm}$ .

Putem proceda și invers. În secțiunea  $i$  aplicăm o forță  $F_i = 1$  după direcția  $\bar{\varphi}_i$  și aflăm unghiul  $\bar{\omega}_{kij}$ , cu care s'a rotit secțiunea  $k$ . Proiecția acestui unghi pe direcția  $\bar{\mu}_k$  a momentului ne dă  $\mu_k \bar{\omega}_{kij} = \theta_{kij}$ . Conform teoremei lui Maxwell, avem  $v_{ilm} = \theta_{kij}$ . Cu această relație facem controlul construcțiilor grafice făcute.

În aceste construcțiuni va trebui să ținem seamă că atât  $v$  cât și  $\theta$  sunt foarte mici în raport cu celelalte dimensiuni ale grinzilor și că în plus, avem posibilitatea ca  $F = 1$  sau  $M = 1$  să le luăm oricât de mici voim noi.

În aceste condiții, calculul grafic va urma norma aplicată cantităților infinit mici așa cum s'a indicat cu ocazia deplasărilor virtuale.

## b) Calea analitică.

Vom aplica pur și simplu ecuațiile (11) date de teorema lui Castigliano.

Ne vom ocupa mai întâiu de cazul când grinda e supusă la momente încovoietoare.

1°. Să găsim expresia lui  $v_{ikf}$ , adică săgeata în  $i$  când în  $k$  avem  $F_k = 1$ .

În acest caz,  $M_x = m_{xlf}$  și deci

$$(16) \quad v_{ikf} = v_{kif} = \int m_{xlf} m_{xif} d\omega.$$

Este evident că:

$$(16) \quad v_{iif} = \int m_{xif}^2 d\omega.$$

Analog găsim

$$(16) \quad \theta_{ikm} = \theta_{kim} = \int m_{xim} m_{xkm} d\omega, \quad \theta_{iim} = \int m_{xim}^2 d\omega.$$

2°. Să găsim pe  $v_{ikm}$ , adică săgeata în  $i$  când în  $k$  avem  $M_k = 1$ . În acest caz  $M_x = m_{xkm}$  și deci:

$$v_{ikm} = \int m_{xkm} m_{xif} d\omega.$$

Pentru  $\theta_{kif}$ , adică unghiul cu care se rotește secțiunea  $k$  atunci când în  $i$  avem  $F_i = 1$ , avem  $M_x = m_{xif}$  și deci:

$$(16) \quad \theta_{kif} = \int m_{xif} m_{xkm} d\omega,$$

care ne arată foarte clar că  $v_{ikm} = \theta_{kif}$ .

Absolut analog avem

$$(16) \quad v_{kim} = \theta_{ikf} = \int m_{xlf} m_{xim} d\omega.$$

Să presupunem că voim să găsim aceleași cantități în cazul când grinda e supusă la forțe axiale.

Să ne ocupăm de  $v_{ikf}$ , adică deplasarea secțiunii  $i$  când în  $k$  avem  $F_k = 1$ .

În acest caz avem,  $N_x = n_{xkf}$  și deci:

$$(16) \quad v_{ikf} = v_{kif} = \int n_{xkf} n_{xif} d\varepsilon$$

și deci:

$$(16) \quad v_{iif} = \int n_{xif}^2 d\varepsilon.$$



Analog:

$$(16) \quad \theta_{ikm} = \theta_{kmi} = \int n_{xim} n_{xkm} d\epsilon, \quad \theta_{iim} = \int n_{xim}^2 d\epsilon.$$

Procedând exact ca în cazul precedent, avem:

$$(16) \quad \begin{aligned} v_{ikm} &= \theta_{kij} = \int n_{xkm} n_{xij} d\epsilon, \\ v_{kin} &= \theta_{ifj} = \int n_{xif} n_{xim} d\epsilon. \end{aligned}$$

Procedăm absolut analog în cazul când am avea forțe tăietoare și momente de răsucire.

În cazul când grinda este supusă la mai multe solicitări, deplasarea totală va fi egală cu suma deplasărilor date de fiecare solicitare în parte. De exemplu, când pe grindă avem momente încovoietoare și foarte axiale atunci:

$$(16) \quad \begin{aligned} v_{ikf} &= \int m_{xif} m_{xif} d\omega + \int n_{xkf} n_{xif} d\epsilon, \\ v_{ifj} &= \int m_{xif}^2 d\omega + \int n_{xif}^2 d\epsilon. \end{aligned}$$

Norma este absolut generală și se aplică oricărui fel de construcție și solicitări.

Să mai facem o aplicație.

3°. Să presupunem că voim să aflăm  $v_{np}$  la o grindă cu zăbrele, adică săgeata care se produce în nodul  $n$  când în  $p$  calcă sarcină  $F_p = 1$ .

În acest caz  $N_{ik} = n_{ik,p}$ . Introducând această valoare în formula (13), găsim

$$(16) \quad v_{np} = \sum n_{ik,p} n_{ik,n} l_{ik} / E\Omega_{ik},$$

a cărei structură este identică cu a celorlalte ecuații (16).

## D) Principiul lucrului mecanic virtual aplicat la corpurile deformabile.

S'a arătat că teorema lui *Castigliano* ne permite să găsim reacțiunile static nedeterminate, fie că ele ar fi exterioare sau interioare sistemului, punând condiția ca  $\partial L / \partial \dots = v = 0$ .

Dacă construcția este supusă la un sistem oarecare de sarcini și de reacțiuni, oricare din ecuațiile (14) ne arată că avem, de exemplu:

$$(17) \quad \sum v_{ixf} F_x + \sum v_{ixm} M_x = 0.$$



Această ecuație exprimă, pur și simplu, că suma tuturor deplasărilor în secțiunea  $i$ , unde avem o reacțiune, este nulă.

Dacă ținem seamă că după teorema lui Maxwell, avem:

$$v_{ixf} = v_{xif} \text{ și } v_{ixm} = \theta_{xif},$$

atunci ecuația (17) o scriem:

$$(17) \quad \Sigma v_{xif} F_x + \Sigma \theta_{xif} M_x = 0.$$

Or, grupul  $F_x$  și  $M_x$  e un sistem de solicitări în echilibru, iar  $v_{xif}$  și  $\theta_{xif}$  sunt deplasările, în dreptul acestor solicitări, produse de sarcina  $F_i = 1$  aplicată în secțiunea  $i$ .

Or, în aceste condițiuni și sub această formă, ecuația de mai sus este exact ecuația lucrului mecanic virtual:

$$\Sigma Fv + \Sigma M\theta = 0.$$

Din cele de mai sus rezultă că ecuațiile (17) sunt identice cu toate că se pot enunța diferit.

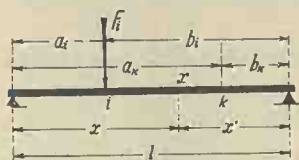


Figura 418

*In cazul când reacțiunea parcurge un drum cunoscut  $v_i$ , atunci în membrul al doilea în loc de zero vom pune această valoare.*

**Aplicația Nr. 130.** O grindă orizontală, cu secțiune constantă, de deschidere  $l$ , simplu rezemată la extremități, suportă în secțiunea  $i$  sarcina  $F_i$ . Să se găsească săgeata în secțiunea  $k$  (fig. 418).

Vom aplica formula (16). Pentru aceasta ne trebuie valorile lui  $m_{xif}$  și  $m_{xkf}$ . Expresiile lor pe diversele intervale ale grinzii sunt:

| Intervalul  | $m_{xif}$    | $m_{xkf}$    |
|-------------|--------------|--------------|
| $0 - a_i$   | $b_i x / l$  | $b_k x / l$  |
| $a_i - a_k$ | $a_i x' / l$ | $b_k x / l$  |
| $0 - b_k$   | $a_i x' / l$ | $a_k x' / l$ |

Efectuând calculele indicate de formula (16) găsim:

$$v_k = F_i a_i b_k (l^2 - a_i^2 - b_k^2) / 6 EI.$$

Săgeata, chiar în dreptul sarcinei, este:

$$v_i = Fa^2 b^2 / 3 EI$$

și dacă sarcina e la mijlocul grinzii:

$$v = Fl^3 / 48 EI$$

**Aplicația Nr. 131.** Fie o grindă simplu rezemată, acționată de sarcinile  $F_1, \dots, F_n$  și se cere să găsim săgeata în secțiunea  $i$  (fig. 419). Avem:

$$v_i = v_{i1} F_1 + v_{i2} F_2 + \dots + v_{ii} F_i + \dots + v_{in} F_n.$$

După teorema lui Maxwell, avem:

$$v_{i1} = v_{1i} \quad , \quad v_{i2} = v_{2i} \quad , \quad \dots \quad v_{in} = v_{ni}$$

și deci

$$v_i = v_{i1} F_1 + v_{i2} F_2 + \dots + v_{ii} F_i + \dots + v_{ni} F_n.$$

Or:  $v_{1i}, v_{2i}$ , etc. sunt săgețile care se produc în secțiunile 1, 2, ...  $i$ , ...  $n$  când în secțiunea  $i$  aplicăm sarcina  $F_i = 1$ .

Regula practică este foarte simplă. Aplicăm în secțiunea  $i$  o sarcină  $F_i = 1$  și construim axa deformată a grinzii după regulile cunoscute. Săgețile acestei curbe sunt chiar coeficienții de influență cari intră în expresia săgeții.

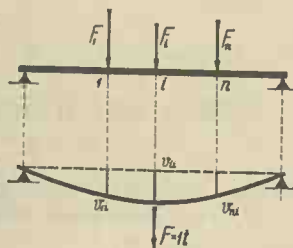


Figura 419

**Aplicația Nr. 132.** Să se găsească ecuația axei deformată a unei grinzi orizontale încastrată la o extremitate și suportând la capătul liber forța verticală  $F$ . Secțiunea grinzii este constantă.

Vom presupune că axa deformată a grinzii are ecuația:

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Grinda fiind încastrată, pentru  $x = 0$ , vom avea  $v = 0$  și  $\partial v / \partial x = 0$ , din care rezultă  $a_0 = a_1 = 0$ . Din ecuația  $EI \partial^4 v / \partial x^4 = p$ , pentru că aci avem  $p = 0$ , rezultă că avem și  $a_4 = a_5 = \dots = 0$ .

Așa dar, ecuația axei deformată se reduce la:

$$v = a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad \therefore \quad \partial^2 v / \partial x^2 = 2 a_2 + 6 a_3 x$$

Pentru a determina acești doi coeficienți aplicăm teorema lucrului mecanic minim și anume ecuațiile (8).

Din ecuația (2) avem:

$$L_e = \frac{1}{2} F (a_2 + a_3 l)^2$$

din care scoatem:

$$\partial L_e / \partial a_2 = \frac{1}{2} F l^2 \quad , \quad \partial L_e / \partial a_3 = \frac{1}{2} F l^3.$$

Apoi din:

$$L_i = \frac{1}{2} EI \int_0^l (\partial^2 v / \partial x^2)^2 dx \quad , \quad \partial L_i / \partial \dots = EI \int_0^l (\partial^2 v / \partial x^2) (\partial^3 v / \partial x^2 \partial x \dots) dx$$

scoatem:

$$\partial L_i / \partial a_2 = 2 EI l (2 a_2 + 3 a_3 l) \quad , \quad \partial L_i / \partial a_3 = 6 EI l^2 (a_2 + 2 a_3 l).$$

Introducând aceste valori în ecuațiile (8) găsim pe  $a_2$  și  $a_3$  și căpătăm:

$$v = F x^2 (3 l - x) / 6 EI$$

care este tocmai ecuația axei deformată a grinzii. Pentru  $x = l$ , adică la extremitatea grinzii, avem

$$v_l = Fl^3 / 3 EI$$



Dacă vrem să ne mulțumim cu un rezultat aproximativ, putem lua pentru axa deformată ecuația:

$$v = a_0 (1 - \cos ax) \quad , \quad \partial^2 v / \partial x^2 = a_0 a^2 \sin ax,$$

care satisface condiției ca pentru  $x = 0$  să avem  $v = 0$  și  $\partial v / \partial x = 0$ . Dacă punem condiția:

$$\cos al = 0 \quad , \quad al = \frac{1}{2} \pi,$$

atunci săgeata la extremitatea grinzii este tocmai  $a_0$ .

Avem:

$$\partial L_e / \partial a_0 = \frac{1}{2} F \quad , \quad \partial L_i / \partial a_0 = EI a_0 a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{4} EI a_0 a^2 \pi.$$

Aplicând ecuația (8) găsim:

$$a_0 = v_l = 32 Fl^3 / \pi^4 EI = Fl^3 / 3,044 EI,$$

rezultat care diferă de cel exact numai cu 1,4%.

Pentru că avem numai un singur coeficient nedeterminat am fi putut utiliza numai ecuația (1).

Să presupunem că voim un rezultat tot aproximativ, însă mai exact. Luăm atunci:

$$v = a_0 (1 - \cos ax) + a_1 (1 - \cos 3ax) \quad , \quad \partial^2 v / \partial x^2 = a^2 (a_0 \cos ax + 9 a_1 \cos 3ax)$$

cu doi coeficienți nedeterminați  $a_0$  și  $a_1$ .

Cu condiția  $al = \frac{1}{2} \pi$ , avem evident

$$v_l = a_0 + a_1$$

Se vede, de asemenea, că avem  $v = 0$ , și  $\partial v / \partial x = 0$  pentru  $x = 0$ .

Dacă aplicăm ecuația (8) găsim pentru  $a_0$  valoarea din cazul precedent iar pentru  $a_1 = 32 Fl^3 / 81 \pi^4 EI$ . Valoarea lui  $v_l$  este:

$$v_l = a_0 + a_1 = Fl^3 / 3,007 EI,$$

care diferă de cea exactă cu 2,3%.

Așa dar, și ecuația axei deformată va diferi de cea exactă cam în aceeași măsură.

## XXVII. CONSTRUCȚIUNI FĂCUTE DIN BARE.

### A) Generalități.

Am văzut la grinzile cu zăbrele cum, prin bare articulate la ambele extremități, putem fixa în mod invariabil între ele o serie de puncte și deci cum putem realiza construcțiunea numită grindă cu zăbrele.

Putem realiza și altfel de construcțiuni.

Un punct  $B$  putem să-l fixăm în mod invariabil de punctul  $A$  prin o grindă  $AB$  invariabilă ca formă și poziție.

Forma ei rămâne invariabilă, atunci când o considerăm nedeformabilă, adică rigidă.

Poziția ei rămâne invariabilă, atunci când, printr'un număr suficient de reazime, împiedecăm orice mișcare a ei. Se știe că — în plan — obținem aceasta prin trei reazime simple, printr'o articulație și un reazim simplu sau printr'o incastrare (fig. 420 c).

În acest mod nu numai cele două puncte  $A$  și  $B$  dar toate punctele de pe grinda  $AB$  sunt legate în mod invariabil între ele.

De punctele acestei grinzi putem fixa în același mod altă serie de puncte.

De exemplu, de punctele  $C$  și  $E$  ale grinzii  $AB$  putem fixa prin două bare articulate, punctul  $D$  (fig. 420 a). Acest punct putem să-l fixăm și prin bara  $CD$  incastrată în punctul  $C$  în grinda  $AB$  (fig. 420 b).

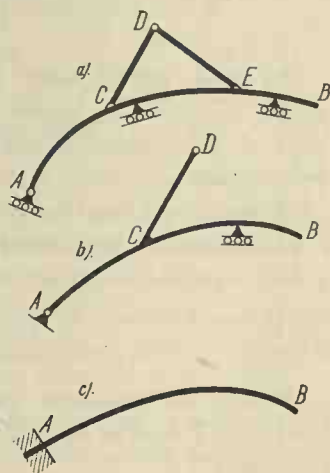


Figura 420

Continuând astfel, ajungem la un sistem format din bare drepte sau curbe care fixează în mod invariabil între ele o serie de puncte.

Punctele unde se leagă între ele două sau mai multe bare se numesc *noduri*. *Nod* este și punctul unde una sau mai multe bare se leagă de un reazim oarecare.

Acest sistem este în echilibru sub acțiunea solicitărilor: *forțele date și reacțiunile*.

Dacă separăm o bară de restul sistemului, atunci în extremitățile ei introducem necunoscutele  $N$ ,  $T$  și  $M$ .

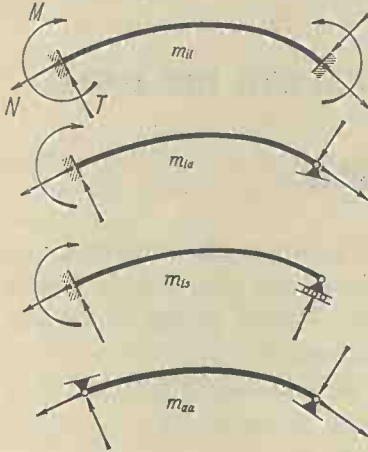


Figura 421

Făcând aceasta, observăm că avem un număr  $m_{ii}$  de bare încastrate la ambele extremități, fiecare cu câte 6 necunoscute, că avem alt număr  $m_{ia}$  de bare încastrate la un cap și articulate la celălalt, fiecare cu câte 5 necunoscute și că în fine avem un număr  $m_{is}$  de bare încastrate la un cap și simplu rezemate la celălalt și  $m_{aa}$  bare articulate la ambele extremități fiecare cu câte 4 necunoscute (fig. 421).

În total, pentru toate barele sistemului avem:

$$(1) \quad 6 m_{ii} + 5 m_{ia} + 4 (m_{is} + m_{aa})$$

necunoscute.

Necunoscute mai sunt și reacțiunile. Dacă socotim că o încastrare  $i$  echivalează cu trei reazime simple  $s$  și o articulație  $a$  cu două, atunci numărul necunoscutelor  $r$  din reazime va fi:

$$(2) \quad r = 3 i + 2 a + s.$$

Pentru determinarea acestor necunoscute, statica ne dă mai întâi câte 3 ecuații de echilibru pentru fiecare din barele de mai sus, deci:

$$(3) \quad 3 (m_{ii} + m_{ia} + m_{is} + m_{aa})$$

ecuații.

Nodurile rămase prin separarea tuturor barelor trebuiesc să fie de asemenea în echilibru.

Observăm și aci că avem mai multe feluri de noduri (fig. 422). Avem un număr  $n_i$  de noduri în care se întâlnesc bare incastrate articulate sau simplu rezemate, pentru cari putem scrie câte 3 ecuații; avem un alt număr de noduri  $n_a$  în care se întâlnesc bare articulate la extremități sau simplu rezemate, pentru cari putem scrie câte două ecuații și în fine un număr de noduri  $n_s$  cu câte un reazim simplu, pentru cari nu putem scrie decât câte o ecuație de echilibru. Numărul  $n$  de ecuații dat de echilibrul nodurilor este:

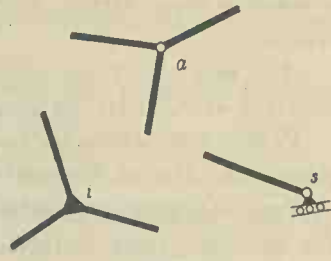


Figura 422

$$(4) \quad n = 3 n_i + 2 n_a + n_s.$$

Dacă notăm:

$$(5) \quad \begin{aligned} m &= 6 m_{ii} + 5 m_{ia} + 4 (m_{is} + m_{aa}) - 3 (m_{ii} + m_{ia} + m_{is} + m_{aa}) \\ &= 3 m_{ii} + 2 m_{ia} + m_{is} + m_{aa}, \end{aligned}$$

atunci diferența între numărul necunoscutelor și numărul ecuațiilor date de statică este

$$(6) \quad m + r - n.$$

În cazul când această diferență este nulă, deci când:

$$(7) \quad m + r - n = 0,$$

sistemul este static determinat. Această relație trebuie să fie satisfăcută și de oricare din părțile componente ale sistemului de bare.

Dacă pentru întregul sistem sau, dacă pentru anumite părți ale lui avem  $m + r - n < 0$ , atunci sistemul nu este în echilibru.

În cazul când  $m + r - n > 0$ , atunci sistemul este static nedeterminat.

Valoarea expresiei (6), în acest caz, ne dă *numărul cantităților static nedeterminate sau gradul de nestaticitate al sistemului de bare*.

Este evident că dacă pentru întregul sistem, sau pentru o parte din el, avem  $m + r - n > 0$ , dar dacă pentru o altă parte din el, avem  $m + r - n < 0$ , atunci sistemul nu este în echilibru cu toate că unele părți din el sunt chiar static nedeterminate.

Așa dar, condiția minimă de echilibru este să avem  $m + r - n \geq 0$  atât pentru sistemul întreg cât și pentru toate părțile din care se compune sistemul.

## B) Construcțiuni static nedeterminate.

Am văzut cari sunt criteriile după cari putem cunoaște dacă o construcțiune făcută dintr'un sistem de bare este în echilibru sau nu.

Am mai văzut, în cazul când este static nedeterminată, că numărul cantităților static nedeterminate este  $m + r - n$ .

Pentru a le determina vom aplica de atâtea ori ecuația lui *Castigliano*, de câte ori sistemul este static nedeterminat.

Pentru aceasta va trebui mai întâi să ne fixăm care anume din numărul total de necunoscute le alegem drept necunoscute static nedeterminate.

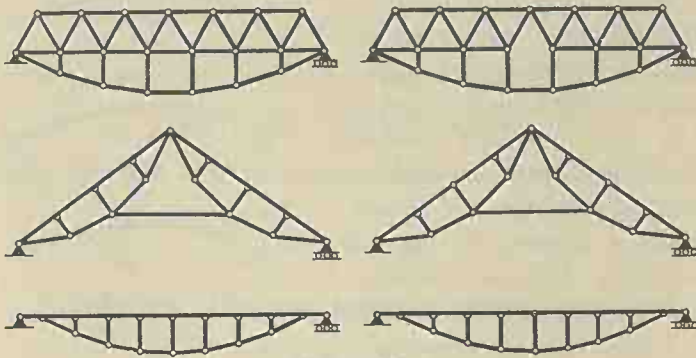


Figura 423

Dacă din sistemul dat suprimăm o serie de rezime sau legături al căror echivalent să fie  $m + r - n$ , atunci sistemul rămas este static determinat. Figura 423 arată construcții static nedeterminate în stânga transformate în corespunzătoarele static determinate în dreapta.

Pentru sistemul rămas și pentru părțile lui componente va trebui să fie satisfăcută mereu condiția  $m_1 + r_1 - n_1 = 0$ .

Necunoscutele introduse în locul rezimilor și legăturilor suprimate sunt necunoscutele static nedeterminate alese.

Sistemul fiind transformat în unul static determinat, atunci, într'o secțiune oarecare  $x$  a unei bare oarecare, vor exista momente încovoietoare și forțe axiale datorite cantităților static determinate și celor nedeterminate și care vor avea forma:

$$(8) \quad \begin{aligned} M &= M_s + \sum V_i m_{xif} + \sum M_i m_{xim}, \\ N &= N_s + \sum V_i n_{xif} + \sum M_i n_{xim}, \end{aligned}$$

în care  $M_s$  și  $N_s$  sunt momentele și forțele axiale datorite cantităților static determinate, iar  $V_i$ ,  $M_i$ ... sunt cantitățile static nedeterminate.

În cele ce urmează vom neglija, așa cum practica a consacrat, lucrul mecanic datorit forței tăietoare.

Odată acestea fixate vom aplica teorema lui *Castigliano* de atâtea ori câte necunoscute avem, deci vom avea:

$$(9) \quad \partial L / \partial V_i = v_i = 0 \quad , \quad \partial L / \partial M_i = \theta_i = 0.$$

Aceste ecuațiuni exprimă, pur și simplu, că deplasarea punctului de aplicație  $i$ , sub acțiunea tuturor sarcinilor, este nulă.

S'a arătat că această ecuație este echivalentă cu ecuația lucrului mecanic virtual și că deci o putem utiliza și sub forma

$$(10) \quad \Sigma F v + \Sigma M \theta = 0,$$

în care se știe care este semnificarea lui  $v$  și  $\theta$ .

Vom utiliza teorema lui *Castigliano*, după împrejurări, sub forma (9) sau (10).

În cazul când reacțiunea  $V_i$  sau  $M_i$  are o deplasare cunoscută  $v_{oi}$  sau  $\theta_{oi}$ , atunci, în partea doua a ecuațiilor (9) sau (10), în loc de zero vom pune aceste valori.

În aceste condiții, totul se reduce la rezolvarea grupului de ecuații liniare (9) sau (10).

Teoretic chestiunea este foarte simplă. Practic însă, trebuie să găsim calea cea mai lesnicioasă pentru a rezolva acest sistem de ecuații.

Aci joacă un foarte mare rol transformarea sistemului în unul static determinat, adică alegerea necunoscutelor static nedeterminate.

#### a) Prima metodă.

Vom ilustra aceasta printr'un exemplu. Să presupunem că avem o grindă continuă cu  $n$  deschideri.

1°. Aceasta o putem transforma în una static determinată suprimând toate reazimile intermediare, luând ca necunoscute static nedeterminate reacțiunile lor, adică  $V_1, \dots, V_{n-1}$ . Reacțiunea  $V_i$  a unui reazim  $i$  diferă de aceea a sistemului static tocmai cu  $V_i$ .

2°. Să presupunem că facem sistemul static introducând în grindă pe fiecare reazim câte o articulație și luând ca necunoscute static nedeterminate momentele pe reazime, așa după cum s'a arătat la stabilirea formulei lui *Clapeyron*. În acest caz, reacțiun-



nea într'un reazim  $i$  diferă de reacțiunea sistemului static cu:  $(M_{i-1} - M_i)/l_{i-1,i} + (M_{i+1} - M_i)/l_{i,i+1}$ , expresiune care are cel mult valoarea lui  $V_i$ .

3°. *Mai mult.* Să presupunem că transformăm grinda continuă într'un sistem de grinzi simplu rezemate, la extremitățile cărora se aplică niște momente  $M_{is}$ , date de noi. Necunoscutele problemei în acest caz vor fi  $M_i = M_{is} + \Delta M_i$  adică  $\Delta M_i$ . Valorile lui  $M_{is}$  fiind arbitrare, putem presupune că sunt acelea date de un sistem static nedeterminat mai simplu decât acela ce-l avem de calculat. În acest caz, teorema lui *Castigliano* ne dă diferențele  $\Delta M_i$  între aceleași cantități static nedeterminate din cele două sisteme.

Aceste diferențe ne arată în ce măsură putem înlocui un calcul exact prin unul aproximativ. Vom face mereu uz de calcule aproximative.

*Avantajul metodei expuse este că separă, dela început, calculul în două: unul static determinat și altul static nedeterminat.*

#### b) A doua metodă.

Mai avem la îndemână o cale, bazată pe faptul că alegerea cantităților static nedeterminate este arbitrară.

În acest caz, putem lua ca necunoscute static nedeterminate toate necunoscutele date de relațiile (1) și (2), știind că între ele există numărul de ecuații dat de relațiile (3) și (4), ecuații de forma:

$$(11) \quad f_1 = 0 \quad , \quad f_2 = 0, \dots$$

Necunoscutele, între care există relațiile (11) vor fi, după teorema lui *Castigliano*, astfel încât  $L_i$  să fie minim.

Avem deci de-a-face cu o chestiune de minimum relativ.

Dacă  $a_1, a_2, \dots$  sunt niște coeficienți nedeterminați, al căror număr este egal cu numărul ecuațiilor (11), vom avea:

$$(12) \quad \partial L_i / \partial V_i + a_1 \partial f_1 / \partial V_i + a_2 \partial f_2 / \partial V_i + \dots = 0.$$

Vom avea atâtea ecuații de această formă câte necunoscute avem.

Numărul ecuațiilor (11) și (12) este tocmai atât cât ne trebuie pentru găsirea tuturor coeficienților nedeterminați și a tuturor necunoscutelor problemei.

În cazul când deplasarea în dreptul necunoscutei  $V_i$  este dată,  $v_{oi}$ , atunci în partea doua a ecuației (12), în locul lui zero, vom pune această valoare.

Avantajul acestei metode este că putem avea oarecare simetrie în calcule și că putem pune în evidență deplasările din dreptul tuturor necunoscutelelor.

Are desavantajul că numărul ecuațiilor, deși simple, este foarte mare.

## C) Construcțiuni simplu static nedeterminate.

### 1. Grinzi drepte.

Cantitatea static nedeterminată ne-o putem alege după voie, fie o forță, fie un moment.

În fiecare din aceste două cazuri, forța axială și momentul încovoietor într'o secție oarecare  $x$  au valorile:

$$(1) \quad \begin{aligned} N &= N_s + V_i n_{xif} & , & & M &= M_s + V_i m_{xif}, \\ N &= N_s + M_i n_{xim} & , & & M &= M_s + M_i m_{xim}. \end{aligned}$$

Dacă introducem aceste valori în ecuația lui *Castigliano*, și dacă notăm:

$$(2) \quad \begin{aligned} v_{im} &= \int M_s m_{xif} d\omega & , & & \theta_{im} &= \int M_s m_{xim} d\omega, \\ v_{in} &= \int N_s n_{xif} d\varepsilon & , & & \theta_{in} &= \int N_s n_{xim} d\varepsilon, \\ v_{iim} &= \int m_{xif}^2 d\omega & , & & \theta_{iim} &= \int m_{xim}^2 d\omega, \\ v_{iin} &= \int n_{xif}^2 d\varepsilon & , & & \theta_{iin} &= \int n_{xim}^2 d\varepsilon, \end{aligned}$$

și:

$$v_{im} + v_{in} = v_i \quad , \quad v_{iim} + v_{iin} = v_{ii} \quad , \quad \theta_{im} + \theta_{in} = \theta_i \quad , \quad \theta_{iim} + \theta_{iin} = \theta_{ii},$$

atunci:

$$(3) \quad V_i = -v_i/v_{ii} \quad , \quad M_i = -\theta_i/\theta_{ii}.$$

În genere deplasările datorite forțelor axiale  $N$  și anume  $v_{in}$ ,  $v_{iim}$ ,  $\theta_{in}$  și  $\theta_{iim}$  sunt mici și în oarecare măsură neglijabile față de cele datorite momentelor. Dacă se fac aceste neglijări, atunci formulele aproximative:

$$V_i \simeq -v_{im}/v_{iim} \quad , \quad M_i \simeq -\theta_{im}/\theta_{iim},$$

dau valori foarte apropiate de rezultatele exacte.

**Aplicația Nr. 133.** O grindă orizontală cu secțiune constantă, incastată la o extremitate, reazimă prin intermediul unei articulații, pe un stâlp vertical articulată și la extremitatea de jos (fig. 424).

Să se găsească valoarea cantităților static nedeterminate presupunând grinda încărcată cu o sarcină verticală  $F$ .

Să găsim mai întâi numărul cantităților static nedeterminate.

Avem  $m_{ia} = 1$ ,  $m_{aa} = 1$ ;  $i = 1$ ,  $a = 1$ ;  $n_i = 1$ ,  $n_a = 2$  și deci  $m = 2.1 + 1.1 = 3$ ,  $r = 3.1 + 2.1 = 5$ ,  $n = 3.1 + 2.2 = 7$ ,  $m + r - n = 3 + 5 - 7 = 1$ .

Așa dar, sistemul este simplu static nedeterminat. Putem ajunge la acest rezultat și altfel.

Se vede că dacă suprimăm stâlpul 1—2, atunci restul construcției, adică grinda 0—1, este static determinată. Ajungem la același rezultat dacă incastarea din 0 o înlocuim printr'o articulație.

Pentru că alegerea cantității static nedeterminate este arbitrară, vom lua pe  $M_o$ , adică momentul din 0, drept cantitate static nedeterminată.

Pentru a găsi pe  $M_o$  ne trebuie valorile lui  $M_s$ ,  $m_{xom}$ , etc. în diferitele secțiuni ale sistemului, pe care le aranjăm în tabloul următor:

| Bara | Elementele barei   | $M_s$ | $m_{xom}$ | $N_s$     | $n_{xom}$ |
|------|--------------------|-------|-----------|-----------|-----------|
| 0—1  | $l, E, I$          | $M_s$ | $x'/l$    | —         | —         |
| 1—2  | $h, E_1, \Omega_1$ | —     | —         | $-V_{1s}$ | $-1/l$    |

Avem apoi:

$$\theta_{om} = \int_0^1 M_s x' d\omega/l = S_{10}/l EI, \quad \theta_{on} = - \int_1^2 N_s d\varepsilon/l = V_{1s} h/l E_1 \Omega_1,$$

$$\theta_{oom} = \int_0^1 x'^2 dx'/l^2 EI = l/3 EI, \quad \theta_{oon} = h/l^2 E_1 \Omega_1.$$

Dacă se multiplică totul cu  $EI$  și se notează:

$$EI/E_1 \Omega_1 = n i^2,$$

avem:

$$M_o = - (S_{10} + V_{1s} n h i^2) / (\frac{1}{3} l^2 + n h i^2/l).$$

Dacă neglijăm valorile lui  $\theta_{on}$  și  $\theta_{oon}$ , se obține:

$$M_o = - 3 S_{10}/l^2,$$

care este tocmai valoarea lui  $M_o$  când considerăm grinda incastată în 0 și simplu rezemată în 1, pe un reazim rigid.

Această formulă servă și pentru un început de dimensionare a secțiunii grinzilor.

Pentru o încărcare uniform distribuită pe toată grinda, avem, cu o aproximație destul de mare

$$M_o = - \frac{1}{8} (1 + 9 n h i^2/l^3) p l^2$$

**Aplicația Nr. 134.** O grindă orizontală 0—1—2, făcută dintr'o singură bucată, deci continuă, este articulată la mijlocul ei în punctul 1 de stâlpul 1—3—4, de asemenea continuu și incastrat în 4. Pentru ca grinda să nu se răstoarne se proptește cu două contrafișe care le considerăm articulate, în punctele 0,2 și 3, în grinzile precedente. O forță  $F$  se găsește pe grinda orizontală. Să se găsească eforturile în barele sistemului.

Sistemul este static nedeterminat. Dacă s'ar suprima una din contrafișe sistemul se transformă în unul static determinat. Deci sistemul este simplu static nedeterminat.

Am putea lua ca necunoscută static nedeterminată efortul dintr'o contrafișă. Calculele sunt lungi și nesimetrice.

Putem face sistemul static determinat și altfel și anume introducând în bara 0—2, în punctul 1, o articulație. Pentru a restabili continuitatea grinzii introducem acolo un moment necunoscut  $M_1$ .

Vom neglija în cele ce urmează influența forței tăietoare.

Observăm că  $M_1$ , cantitatea static nedeterminată, nu dă eforturi în consolele grinzii orizontale și pe porțiunea 3—4 din stâlp, deci pentru aceste porțiuni  $m_{x1}$  și  $n_{x1}$  vor fi nuli și dispar din ecuațiile lucrului mecanic, chiar dacă sarcina calcă pe consolă.

Pentru determinarea lui  $M_1$  avem nevoie de cantitățile din alăturatul tablou:

| Bara | Elementele barei  | $M_s$   | $m_{x1m}$ | $N_s$     | $n_{x1m}$ |
|------|-------------------|---------|-----------|-----------|-----------|
| 0—1  | $l, E, I, \Omega$ | —       | $x/l$     | —         | $1/h$     |
| 1—2  | $l, E, I, \Omega$ | $M_s$   | $x'/l$    | $Fa/h$    | $1/h$     |
| 1—3  | $h, E, \Omega_1$  | $Fay/h$ | —         | $-Fb/l$   | $2/l$     |
| 0—3  | $s, E, \Omega_2$  | —       | —         | —         | $-s/lh$   |
| 2—3  | $s, E, \Omega_2$  | —       | —         | $-Fas/hl$ | $-s/lh$   |

Dacă notăm:  $I/\Omega = i^2$ ,  $I/\Omega_1 = i_1^2$ ,  $I/\Omega_2 = i_2^2$  atunci avem:

$$\theta_{1m} = S_{21}/lEI \quad , \quad \theta_{1n} = F (a l^2 i^2 - 2 b h^2 i_1^2 + a s^2 i_2^2) / l^2 h^2 EI,$$

$$\theta_{11m} = 2 l / 3 E I \quad , \quad \theta_{11n} = 2 (l^3 i^2 + 2 h^3 i_1^2 + s^3 i_2^2) / l^2 h^2 E I.$$

Introducând aceste valori în ecuația (2) avem pe  $M_1$ .

Dacă neglijăm pe  $\theta_{1n}$  și  $\theta_{11n}$ , atunci din formula (3) obținem:

$$M_1 = -3S_{21}/2l^2,$$

adică momentul din 1 considerând grinda orizontală continuă pe reazimile rigide 0, 1 și 2.

Termenii neglijați corectează această valoare și sunt datoriti faptului că reazimile sunt elastice.

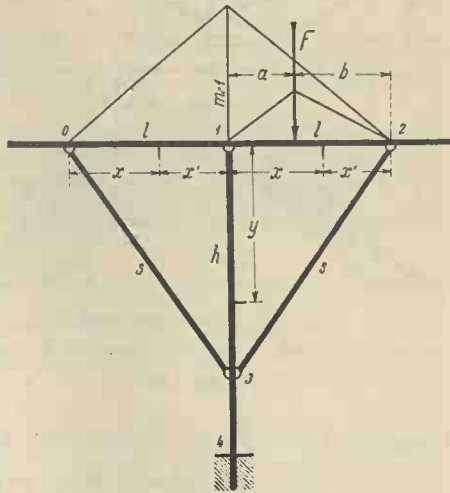


Figura 425

**Aplicația Nr. 135. Grinzi armate triunghiular.** Să presupunem că avem o grindă — făcută dintr'o singură bucată — simplu rezemată la extremitățile sale 0 și 1 (fig. 426). În cazul când dimensiunile grinzii ies prea mari sau când vrem să avem o soluție mai economică și dispunem de înălțime liberă

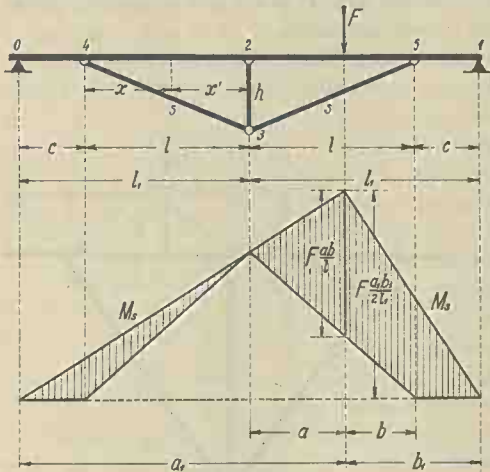


Figura 426

sub grindă, atunci de punctele 4 și 5 ale grinzii articulăm doi tiranți, 3—4 și 3—5 și mijlocul grinzii îl susținem cu popul 2—3, articulată de asemenea în grindă și în nodul 3. Aceasta e o grindă armată triunghiular.

Să se calculeze eforturile din grindă și diversele bare când grinda este supusă la forța  $F$  ca în figură.

Chestiunea este absolut analogă cu precedenta.

Vom face sistemul static determinat introducând o articulație în secțiunea 2 a grinzii. Curba momentelor  $M_s$ , pentru grinda 0—2—1, va fi ca în

figura 426. Valorile lui  $M_s$ ,  $N_s$ ,  $m_{x_2m}$ , etc. sunt date de tabloul următor:

| Bara | Elementele barei  | $M_s$ | $m_{x_2m}$ | $N_s$       | $n_{x_2m}$ |
|------|-------------------|-------|------------|-------------|------------|
| 24   | $l, E, I, \Omega$ | $M_s$ | $x/l$      | $-Fb_1/2h$  | $-1/h$     |
| 25   | $l, E, I, \Omega$ | $M_s$ | $x'/l$     | $-Fb_1/2h$  | $-1/h$     |
| 23   | $h, E, \Omega_1$  | —     | —          | $-Fb_1/l$   | $2/l$      |
| 34   | $s, E, \Omega_2$  | —     | —          | $Fb_1s/2lh$ | $s/lh$     |
| 35   | $s, E, \Omega_2$  | —     | —          | $Fb_1s/2lh$ | $s/lh$     |

Dacă se dezvoltă calculele ca în cazul precedent și cu aceleași notații, găsim:

$$\theta_{2m} = (S_{42} + S_{52})/lEI, \quad \theta_{2n} = Fb_1(l^3i^2 - 2h^3i_1^2 + s^3i_2^2)/l^2h^2EI,$$

$$\theta_{22m} = 2l/3EI, \quad \theta_{22n} = 2(l^3i^2 + 2h^3i_1^2 + s^3i_2^2)/l^2h^2EI.$$

Se observă și aci că valoarea aproximativă,

$$M_2 = -3(S_{42} + S_{52})/2l^2,$$

este tocmai momentul ce se produce în reazimul 2 dacă se consideră grinda 4—2—5 continuă pe aceste reazime, considerate și ele rigide, și supusă la momentele  $M_s$ .

Cu această valoare aproximativă putem începe dimensionarea grinzii.

**Aplicația Nr. 136. Grinzi armate trapezoidal.** Sunt la fel cu precedentele însă armătura și grinda prezintă forma unui trapez. În figura 427 grinda continuă 0—1 este armată cu un tirant 2—6—7—3 și cu doi popi 4—6 și 5—7.



Barele ce formează tirantul și popii se consideră articulate în punctele 2, 3, 4, 5, 6 și 7.

Grinda o presupunem încărcată cu un sistem oarecare de sarcini a căror curbă a momentelor este curba din figură.

Sistemul este simplu static nedeterminat pentru că dacă suprimăm, de exemplu, tirantul 6—7, grinda se transformă într-o grindă simplu rezemată.

Vom lua ca necunoscută static nedeterminată efortul  $H$  din bara 6—7.

Pentru că grinda 0—1 are o înălțime oarecare  $h$ , de care nu se poate face abstracție, și pentru că tiranții și popii se articulează în partea inferioară a grinzii, în acest exemplu vom ține seamă și de înălțimea grinzii 0—1.

În aceste condițiuni, eforturile — forțe și momente — în diversele bare sau porțiuni de grindă sunt date de formulele:

$$M = M_s + Hm_{x_{67}} \quad , \quad N = N_s + Hn_{x_{67}}$$

cu ajutorul tabloului următor:

| Bara       | Elementele barei       | $M_s$ | $m_{x_{67}}$        | $n_{x_{67}}$ |
|------------|------------------------|-------|---------------------|--------------|
| 0—2 și 1—3 | $l, E, I, \Omega, h$   | $M_s$ | —                   | —            |
| 2—4        | „                      | $M_s$ | $-h_1 x / l - h/2$  | -1           |
| 3—5        | „                      | $M_s$ | $-h_1 x' / l - h/2$ | -1           |
| 4—5        | $l_1, E, I, \Omega, h$ | $M_s$ | $-h_1 - h/2$        | -1           |
| 4—6 și 5—7 | $h_1, E, \Omega_1$     | —     | —                   | $-h_1/l$     |
| 2—6 și 3—7 | $s, E, \Omega_2$       | —     | —                   | $s/l$        |
| 6—7        | $l_1, E, \Omega_2$     | —     | —                   | 1            |

Fiindcă e vorba de lungirea barei 67, deplasările respective le vom nota cu litera  $u$ . Vom avea deci:

$$H = - (u_{67m} + u_{67n}) / (u_{6767m} + u_{6767n})$$

În cazul nostru, pentru că  $N_s \equiv 0$ , avem și  $u_{67n} = 0$ .

Avem apoi

$$-u_{67m} = (S_{24} + S_{35} + l\Omega_{45}) h_1 / lEI + \Omega_{23} h / 2EI,$$

în care:  $S_{24}$  este momentul static al suprafeței momentelor în grinda simplu rezemată 0—1 de pe intervalul 2—4, în raport cu punctul 2, etc.;  $\Omega_{45}$  este suprafața momentelor în aceleași condițiuni de pe intervalul 4—5, etc.

Avem apoi

$$u_{6767m} = [h_1^2 (l_1 + \frac{2}{3}l) + \frac{1}{4}h^2 (l_1 + 2l) + h h_1 (l + l_1)] / EI,$$

$$u_{6767n} = [(l_1 + 2l) i^2 + 2 h_1^3 i_1^2 / l^2 + (l_1 + 2 s^3 / l^2) i_2^2] / EI.$$

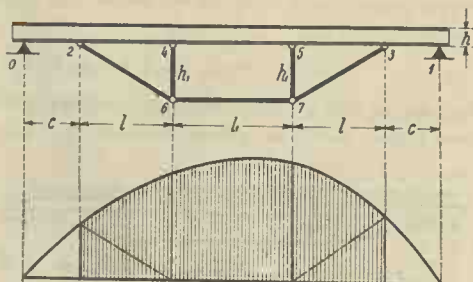


Figura 427



Se observă că, așa cum s'au aranjat, valorile lui  $u$  au toate pe  $EI$  la numitor, și că în valoarea lui  $H$ , această cantitate se reduce. Ori de câte ori vom putea vom urma această normă de calcul. Din inspectarea acestor formule se vede că chiar verificarea unei asemenea grinzi necesită calcule multe, necum proiectarea ei.

Dacă totuși se observă că  $u_{67m}$  este mic față de  $u_{6767m}$  și că în prima aproximație putem lua  $h = 0$ , atunci putem lua pentru  $u$  următoarele valori aproximative

$$-u_{67m} = (S_{24} + S_{35} + l \Omega_{45}) h_1/l, \quad u_{6767m} = h_1^2 (l_1 + \frac{2}{3} l)$$

formule în cari nu intră dimensia secțiunilor diverselor bare ale grinzii și dela care putem porni un calcul aproximativ al secțiunilor grinzii.

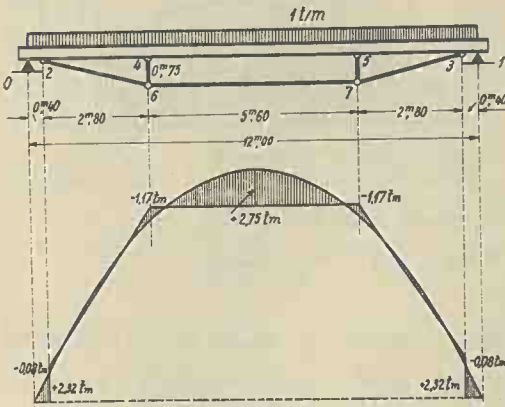


Figura 428

Din exemplul numeric ce urmează se vede mersul pentru proiectarea unor astfel de grinzi. Se va mai vedea că, cu toate aproximațiile ce se fac, suntem conduși relativ repede la soluția definitivă.

**Exemplu numeric.** O grindă de 12 m deschidere care suportă o sarcină uniform distribuită pe toată lungimea ei de 1 t/m este formată dintr'un fier I armat trapezoidal cu un tirant format dintr'o platbandă (fig. 428).

Să se dimensioneze grinda în ipoteza:  $c = 0,40$  m,  $l = 2,80$  m,  $l_1 = 5,60$  m,  $h_1 = 0,75$  m, iar  $\mathcal{X}$  să nu depășească 1000 kg/cm<sup>2</sup>.

Momentele  $M_2$ ,  $M_4$  și  $M_m$  (la mijlocul grinzii), calculate ca într'o grindă simplu rezemată de 12 m deschidere, sunt:

$$M_2 = 0,40 \cdot 12 \cdot 6,0 / 2 = 2,32 \text{ tm}, \quad M_4 = 3,20 \cdot 8,80 / 2 = 14,08 \text{ tm}, \quad M_m = 12^2 / 8 = 18 \text{ tm},$$

Valorile lui  $-u_{67m}$  și  $u_{6767m}$ , după formula aproximativă, sunt:

$$-u_{67m} = (2,32 + 8,14,08 + 9 \cdot 2,8^2 / 4) \cdot 2,8 \cdot 0,75 / 3 = 92,82 \text{ tm}^3, \quad u_{6767m} = 4,2 \text{ m}^3$$

și deci

$$H = 22,1 \text{ t} \quad ; \quad H h_1 = 16,575 \text{ tm}$$

În aceste condiții avem:

$$M_4 = 14,08 - 16,575 = -2,495 \text{ tm}, \quad M_m = 18 - 16,575 = 1,425 \text{ tm}$$

$$-N_{24} = -N_{45} = -N_{35} = N_{67} = 22,1 \text{ t}, \quad N_{36} = N_{57} = -5,92 \text{ t}, \quad N_{26} = N_{37} = 22,88 \text{ t}.$$

Pe baza acestor eforturi putem face o primă dimensiunare. Nu mai transcriem aci calculele respective, însă se poate verifica numaidecât, că o grindă formată dintr'un fier I Nr. 28 cu  $I_z = 7590$  cm<sup>4</sup>,  $W_z = 542$  cm<sup>3</sup>,  $\Omega = 61,1$  cm<sup>2</sup>,  $h = 28$  cm., cu doi popi de câte  $\Omega_1 = 12 \cdot 1,5 = 18$  cm<sup>2</sup> fiecare și cu un tirant de  $\Omega_2 = 12 \cdot 2,9 = 34,8$  cm<sup>2</sup> slăbite cu câte două nituri de diam. 2 cm, satisfac condiției de a avea  $\mathcal{X} < 1.000$  kg./cm<sup>2</sup>.

Pe baza acestor dimensiuni. procedăm la un al doilea calcul, însă utilizând formula exactă a lui  $H$ .

În acest caz —  $u_{67m}$  crește cu valoarea:

$$\frac{1}{2} \Omega_{23} h = (2,32 \cdot 11,20 + 11,20^2/12) 0,14 = 20,03 \text{ tm}^3 \text{ și vom avea deci}$$

$$-u_{67m} = 92,82 + 20,03 = 112,85 \text{ tm}^3.$$

Valoarea lui  $u_{6767m}$  crește cu:

$$\frac{1}{4} h^2 (l_1 + 2l) + h h_1 (l + l_1) = 0,14^2 \cdot 11,20 + 0,75 \cdot 0,28 \cdot 8,4 = 1,984 \text{ m}^3 \text{ și deci}$$

$$u_{6767m} = 4,2 + 1,984 = 6,184 \text{ m}^3$$

Ne mai trebuie  $u_{6767n}$ . Avem  $i^2 = 7590/61,1 = 0,0124 \text{ m}^2$ ,  $i_1^2 = 7590/18 = 0,0421 \text{ m}^2$ ,  $i_2^2 = 0,0218 \text{ m}^2$ ,  $s = 2,90 \text{ m}$ .

Făcând calculele găsim:  $u_{6767n} = 0,1389 + 0,0045 + 0,2577 = 0,401 \text{ m}^3$  și deci  $u_{6767m} + u_{6767n} = 6,184 + 0,401 = 6,585 \text{ m}^3$ .

Așa dar,  $H = 112,85/6,585 = 17,14 \text{ t}$ ,  $H (h_1 + \frac{1}{2} h) = 15,252 \text{ tm}$ .

În aceste condiții avem:

$$M_4 = 14,080 - 15,252 = -1,172 \text{ tm}, \quad M_m = 18 - 15,252 = 2,748 \text{ tm},$$

$$-N_{24} = -N_{45} = -N_{35} = N_{67} = 17,14 \text{ t}, \quad N_{46} = N_{67} = -4,59 \text{ t}, \quad N_{26} = N_{37} = 17,75 \text{ t}.$$

Vom dimensiona acum grinda pe baza acestor eforuri.

Se vede numaidecât că ne putem mulțumi cu acest calcul pentru că unul nou pe baza noilor dimensiuni va fi foarte apropiat de acesta. În special, dacă păstrăm același fier I Nr. 28, ceea ce va diferi în noul calcul va fi numai  $u_{6767n}$  a cărui variație având în vedere micimea lui, va fi neînsemnată și nu va influența asupra rezultatului.

Vom face acum verificarea secțiunilor nete și verificarea la flambaj a pieselor supuse la compresiune, după normele ce s'au indicat în capitolul respectiv.

Din fig. 428 se vede în ce măsură tirantul modifică momentele din grindă.

**Aplicația Nr. 137. Grinzi cu contrafișe** (fig. 429). Se fac în genere din lemn și se compun dintr'o grindă continuă 0—1, simplu rezemată în 0 și 1 și pe nodurile 2 și 3 dela intersecția contrafișelor 2—4 și 3—5 cu grinda orizontală 2—3. Grinzile orizontale, 0—1 și 2—3, pe intervalul 2—3, sunt solidarizate între ele cu buioane așa că se încovoie împreună.

Compresiunea din contrafișele 2—4 și 3—5 se transmite numai grinzii inferioare 2—3, grinda de sus nu participă, în genere, la această compresiune.

Se vede numaidecât că sistemul este simplu static nedeterminat. Vom lua ca necunoscută static nedeterminată componenta verticală  $V$  a compresiunii din contrafișă, adică reacțiunile verticale din 2 și 3 cari se văd că sunt egale.

În condițiile de mai sus, secțiunea care participă la încovoiere pe porțiunea 2—3 are  $1/E I_1 = \Sigma (1/E I)$ , iar la compresiune numai secțiunea  $\Omega_1$  a grinzii inferioare 2—3.

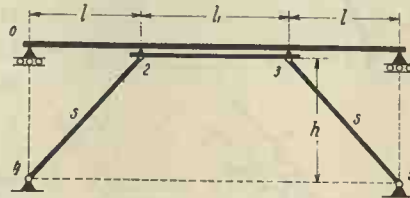


Figura 429

În aceste condiții avem:

| Bara       | Elementele barei        | $M_s$ | $m_{xv}$ | $n_{xv}$ |
|------------|-------------------------|-------|----------|----------|
| 0—2        | $l, E, I$               | $M_s$ | $-x$     | —        |
| 1—3        | „                       | $M_s$ | $-x'$    | —        |
| 2—3        | $l_1, E, I_1, \Omega_1$ | $M_s$ | $-l$     | $-l_1/h$ |
| 2—4 și 3—5 | $s, E, \Omega_2$        | —     | —        | $-s/h$   |

Din ecuația:

$$\int (M_s + Vm_{xv}) m_{xv} d\omega + \int (N_s + Vn_{xv}) n_{xv} d\epsilon = 0,$$

după ce am multiplicat totul cu  $lEI$  și am notat:

$$-v_{2m} = S_{02} + S_{13} + k l \Omega_{23}, \quad k = I/I_1,$$

$$v_{22m} = l^2 (k l_1 + \frac{1}{3} l), \quad v_{22n} = (l_1^3 i_1^2 + 2s^3 i_2^2)/h^2$$

găsim:

$$V = -v_{2m}/(v_{22m} + v_{22n}).$$

Pentru ca să putem începe un calcul de dimensionare aproximativă a grinzilor, presupunem  $v_{22n} = 0$  și secțiunile celor două grinzi orizontale aceiași, ceea ce ne dă  $k = \frac{1}{2}$ .

### Observare generală.

Din exemplele făcute se vede că putem grupa oricând cantitățile așa fel încât să putem face în prealabil un calcul aproximativ apropiat, aceasta în vederea dimensionării elementelor sistemului. Aceasta este posibil pentru că deformațiile datorite forțelor axiale sunt foarte mici în raport cu cele provocate de momente.

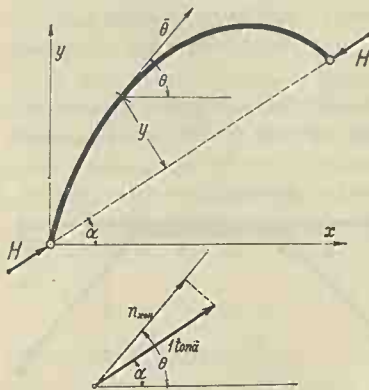


Figura 430

### 2. Arce cu două articulații.

Această construcție simplă static nedeterminată o transformăm în una static determinată fie transformând o articulație într'un reazim simplu, fie introducând într'un punct oarecare al arcului o articulație.

În ambele cazuri, dacă  $M_s$  și  $N_s$  sunt momentul încovoietor și forța axială într'o secțiune oarecare în sistemul static determinat,

atunci, în sistemul static nedeterminat, vom avea:

$$M = M_s + Hm_{x0H}, \quad N = N_s + Hn_{x0H}.$$

Dacă direcția lui  $H$  o luăm pozitivă ca în figura 430, atunci, după convențiile de până acum, avem:

$$m_{x0H} = -y, \quad n_{x0H} = -\cos(\theta - \alpha).$$

Dacă aplicăm teorema lui *Castigliano* și notăm

$$-u_{om} = \int M_s y d\omega \quad , \quad -u_{on} = \int N_s \cos(\theta - \alpha) d\epsilon,$$

$$u_{oom} = \int y^2 d\omega \quad , \quad u_{oon} = \int \cos^2(\theta - \alpha) d\epsilon,$$

$$u_{om} + u_{on} = u_o \quad , \quad u_{oom} + u_{oon} = u_{oo}$$

găsim aceeași formulă

$$H = -u_o/u_{oo}.$$

Chestiunea care se pune acum este numai calcularea diverselor valori ale lui  $u$ , atunci când ni se dă forma și dimensiile arcului precum și valoarea solicitărilor.

Afară de cazuri foarte simple, efectuarea integralelor definite, cari dau valorile lui  $u$ , se face prin metode aproximative, prin calcul sau grafic.

În genere arcul se face din unul și același material; așa fiind  $E$  dispăre din expresiile lui  $u$ .

Apoi, termenii  $u_{on}$  și  $u_{oon}$  fiind mici, o evaluare aproximativă a lor nu influențează mult asupra rezultatului.

Mai importanți sunt termenii  $u_{om}$  și  $u_{oom}$  a căror evaluare ne interesează mai mult.

Evaluarea prin calcul a valorilor lui  $u$  se face în modul următor.

Se împarte lungimea arcului într'un număr de părți, de obicei egale.

În punctele de diviziune se calculează valorile lui  $d\omega = ds/I$  și  $d\epsilon = ds/\Omega$ . E comod de multe ori de a multiplica toți termenii  $u$  cu o valoare  $I_0$  oarecare (de preferință o valoare apropiată de media momentelor de inerție  $I$  de pe întregul arc). Se notează atunci

$$I_0/I = k \quad , \quad I_0/\Omega = i^2.$$

În aceste condiții în punctele de diviziune, avem:

$$d\omega = k ds \quad , \quad d\epsilon = i^2 ds$$

În dreptul aceluiași puncte de diviziune, se calculează apoi  $y$ ,  $\cos(\theta - \alpha)$ ,  $M_s$  și  $N_s$ .

Facem apoi produsele indicate de formulele lui  $u$ . Insumarea lor o facem după regula trapezului, regula lui *Simpson* sau orice altă regulă de efectuarea aproximativă a integralelor definite.

În aceste condițiuni dacă lungimea  $s$  a arcului s'a împărțit în  $n$  părți egale, valorile lui  $u$  le putem înlocui cu cantitățile proporționale:

$$-u_{on} = \Sigma M_s y k \quad , \quad -u_{on} = \Sigma N_s i^2 \cos(\theta - \alpha) \quad , \quad u_{oon} = \Sigma y^2 k \\ u_{oon} = \Sigma i^2 \cos^2(\theta - \alpha).$$

Din inspectarea acestor formule, se vede că  $u_{on}$  va avea valoarea cea mai mică atunci când  $N_s$  va fi cel mai mic posibil. Aceasta nu o obținem decât în cazul când *facem arcul static determinat transformându-l într'o grindă curbă articulată la un cap și simplu rezemată la celălalt*. În acest caz,  $M_s$  sunt momentele produse în această grindă. În aceste condiții putem neglija  $u_{on}$  față de  $u_{om}$ .

De asemenea se vede că și  $u_{oon}$  este foarte mic față de  $u_{oom}$  și că luând pentru arce turtite  $\cos(\theta - \alpha) \simeq 1$ , avem  $u_{oon} = n i^2$  cu  $i^2 = I/\Omega$  în care  $I$  și  $\Omega$  sunt valorile medii pe lungimea arcului a acestor cantități. Așa dar, în aceste condiții avem:

$$u_{on} \simeq 0 \quad , \quad u_{oon} \simeq n i^2$$

și deci

$$H = \Sigma M_s y k / (\Sigma y^2 k + n i^2)$$

formulă curent întrebuințată pentru acest caz.

Această formulă ne dă pe  $H$  dirijat după direcția articulațiilor. Se observă că  $y$  se măsoară normal pe linia articulațiilor.

Dacă în loc de  $y$  luăm pe  $y_0$  măsurat după o verticală, atunci avem  $y = y_0 \cos \alpha$  și dacă notăm cu  $H_0 = H \cos \alpha$ , componenta orizontală a lui  $H$ , atunci avem:

$$H_0 = \Sigma M_s y_0 k / (\Sigma y_0^2 k + n i^2 / \cos^2 \alpha)$$

formulă tot atât de comodă ca și precedenta.

*Am putea face arcul statistic determinat introducând o articulație într'un punct oarecare, transformându-l astfel într'un arc cu trei articulații.*

În acest caz, momentele  $M_s$  sunt mult mai mici, însă  $N_s$  are valori însemnate. Dacă  $H_s$  este împingerea dirijată după direcția articulațiilor în arcul static determinat cu 3 articulații atunci avem:  $N_s \simeq -H_s \cos(\theta - \alpha)$  și deci

$$u_{on} \simeq H_s \Sigma i^2 \cos^2(\theta - \alpha) \simeq H_s n i^2$$

Componenta orizontală a lui  $H_s$  este  $H_{os} = H_s \cos \alpha$ .

Se știe dela arcele cu 3 articulații că valoarea momentului  $M_s$ , într'o secțiune oarecare, în cazul încărcărilor verticale, este:

$$M_s = H_{os} (m - y_0)$$



în care  $H_{os}$  este distanța polară — deci împingerea orizontală — a poligonului forțelor ce corespunde poligonului funicular care trece prin cele trei articulații,  $m$  este ordonata curbei momentelor în secțiunea considerată, iar  $y_0$  ordonata secțiunii arcului măsurată dela linia de închidere a articulațiilor. În acest caz dacă se împarte totul cu  $\cos^2 a$ , avem:

$$H_o = H_{os} [\Sigma(m - y_0) y_0 k - ni^2/\cos^2 a] / (\Sigma y_0^2 k + ni^2/\cos^2 a).$$

Această formulă ne arată că în cazul când axa arcului coincide cu o curbă funiculară a încărcărilor, deci când  $m \equiv y_0$ , atunci  $H_o$  este foarte mic față de  $H_{os}$  pentru că și  $ni^2/\cos^2 a$  este foarte mic față de  $\Sigma y_0^2 k$ .

Așa dar, în acest caz, sau în cazuri foarte apropiate, arcul cu trei articulații ne poate servi pentru un început de calcul aproximativ al secțiunilor.

Tot în acest caz, se mai vede că  $H_o$  este negativ și că deci momentul în dreptul articulației introduse este pozitiv. Cum articulația o putem lua în orice punct al arcului, rezultă că tot arcul este supus numai la momente positive, asta bine înțeles numai în cazul  $m \equiv y_0$ .

Evaluarea pe cale grafică a valorilor lui  $u$  se face cu ajutorul poligoanelor funiculare după normele cunoscute.

Cu ajutorul unui poligon de forțe format cu  $d\omega = ds/I$ , sau  $kds$  sau mai bine numai cu  $k$ , dacă arcul s'a împărțit în părți egale, evaluăm după normele cunoscute cantitățile  $y k$  și apoi, cu ajutorul acestora,  $y^2 k$  și  $M_s y k$ .

Evaluarea lui  $u_{oon}$  se face de obicei analitic și în mod aproximativ.

*Influența temperaturii.* Dacă arcul n'ar fi articulat atunci el s'ar dilata în direcția articulațiilor cu cantitatea  $u_o = \epsilon_t l$ .

Pentru că am multiplicat totul cu  $E$ , vom avea:

$$H = E \epsilon_t l / u_{oo},$$

produs din cauza variației de temperatură.

### 3. Grinzi suspendate.

Ele se compun din o grindă simplu rezemată care la intervale, în genere egale, este suspendată prin niște tiranți de un cablu fixat de două puncte date (fig. 431).

Lungimea tiranților se aranjează astfel încât extremitățile care susțin grinda să fie în linie dreaptă.



Aceasta putem s'o facem pentru cazul când grinda este complet descărcată sau pentru cazul când grinda este încărcată cu o sarcină oarecare.

În primul caz, cablul va lua forma unei curbe funiculare sub acțiunea tensiunilor tiranților și a cablului.

În cazul al doilea, grinda se prezintă ca o grindă continuă așezată pe reazime de nivel — în dreptul tiranților —, când cablul va lua forma unei curbe funiculare sub acțiunea greutateii cablului, a tiranților și a reacțiunilor din aceștia.

Putem lua distanța între tiranți așa de mică încât eforturile în grindă să fie oricât de mici voim noi. La limită, când presupunem distanța între tiranți nulă și dacă extremitățile lor sunt în linie dreaptă, atunci grinda neavând nicio deformațiune nu ia niciun efort și deci cablul e o curbă funiculară a greutateii lui, a greutateii tiranților și a încărcării date.

În definitiv, putem oricând aranja lungimea și poziția tiranților astfel încât grinda dată, oricare ar fi forma ei, să n'aibă niciun efort sub acțiunea unui sistem de sarcini dat.

Așa fiind, sub acțiunea acestui sistem de sarcini, putem găsi toate elementele geometrice ale cablului, deci  $H_s$ , etc.

În aceste condițiuni să aplicăm pe grindă un sistem suplimentar de sarcini. Grinda și cablul se vor deforma și ocupa o nouă poziție apropiată. Fiecare punct al lor se va deplasa pe verticala respectivă cu cantitatea  $v$ , iar direcțiunile  $\bar{\theta}$  ale axei cablului și grinzii vor varia

și ele față de poziția lor inițială. În aceste condițiuni să presupunem că  $H_s$  a crescut cu cantitatea  $H$ .

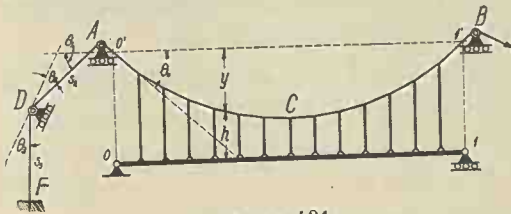


Figura 431

Sistemul se vede numai deocăci este simplu static nedeterminat.

Pentru a aplica teorema lui *Castigliano* ne trebuie  $N$  și  $M$  în toate secțiunile sistemului.

Cablul se ancorează cam cum se arată în figura 431.

În cazul figurii, pe diversele porțiuni de cablu vom avea următoarele valori pentru  $N$ :

$$\text{Porțiunea } AB: N = (H_s + H) / \cos(\theta + d\theta) \approx (H_s + H) / \cos\theta,$$

$$AD: N = (H_s + H) / \cos\theta_1,$$

$$DF: N = (H_s + H) \cos\theta_2 / \cos\theta_1 \cos\theta_3.$$

În tiranți avem:

$$N = (H_s + H) [tg(\theta_x + d\theta_x) - tg(\theta_{x+1} + d\theta_{x+1})] \approx (H_s + H) (tg\theta_x - tg\theta_{x+1}).$$

În cazul când presupunem că tiranții sunt așezați la distanțe infinite mici, atunci unui tirant de pe intervalul  $dx = 1$  îi revine efortul:

$$N_t = (H_s + H) d^2(y + \nu)/dx^2 \approx (H_s + H) d^2y/dx^2$$

neglijând pe  $\nu$  față de  $y$ .

Momentele în cablu și tiranți sunt nule. În grindă avem peste tot  $N = 0$ .

Să evaluăm momentul încovoietor în grindă. Vom observa mai întâi că primul sistem de sarcini nu dă momente în grindă pentru că așa am fixat elementele geometrice ale cablului. Prin urmare în expresia momentului nu vor intra  $H_s$  și nici partea de efort din tiranți datorită acestor încărcări.

Dacă  $F$  sunt forțele sistemului suplimentar de sarcini, atunci:

$$M_x = Vx - \Sigma F(x - a) + \Sigma N_t(x - x_t)$$

în care  $V$  este reacțiunea în reazimul grinzii și  $N_t$  efortul din tirantul la abscisa  $x_t$ , datorit numai sistemului suplimentar de sarcini. Însă momentul datorit eforturilor din tiranți putem să-l înlocuim cu momentul eforturilor dirijate după laturile extreme de poligon funicular ale acestui grup.

Să ducem în dreptul reazimilor 0 și 1 verticalele  $00'$  și  $11'$  până întâlnesc axa cablului și linia de închidere  $0'1'$ .

Efortul din cablu, în  $0'$ , să-l descompunem în două componente: una verticală  $V'$  și alta după linia de închidere  $0'1'$ .

Avem:

$$\Sigma N_t(x - x_t) = V'x - H(h + y + \nu) + Hh = V'x - H(y + \nu).$$

Pe de altă parte, dacă luăm momentul tuturor forțelor din încărcările suplimentare în raport cu  $1'$ , avem:

$$(V + V')l - \Sigma bF = 0.$$

Dacă ținem seamă de aceste valori și neglijăm  $\nu$ , față de  $y$ , găsim:

$$M_x = M_s - Hy$$

în ca e  $M_s$  este momentul ce se produce în grindă, sub acțiunea sistemului suplimentar de sarcini, considerând-o simplu rezemată la extremitățile sale.

Acestea fiind stabilite, putem trece la efectuarea calculului.

Vom presupune pentru simplificare că  $E$  este același pentru toate barele. Vom mai presupune că tiranții sunt infinit apropiați. Notăm cu  $I$  momentul de inerție al grinzii într'o secțiune oarecare,  $I_0$  un moment de inerție mediu,  $I_0/I = k$ , secțiunea cablului  $\Omega$ , secțiunea tiranților pe unitatea de lungime de grindă  $\Omega_1$ , apoi  $I_0/\Omega = i^2$ ,  $I_0/\Omega_1 = i_1^2$ .

Vom avea:

$$-u_{om} = \int M_s y k dx, \quad u_{oom} = \int y^2 k dx, \quad u_{on} = H_s u_{oon},$$

$$u_{oon} = i^2 \left( \int ds / \cos^2 \theta + 2s_2 / \cos^2 \theta_1 + 2s_3 \cos^2 \theta_2 / \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_3 \right)$$

$$+ i_1^3 \int (d^2 y / dx^2)^2 h dx,$$

din cari deducem valoarea lui  $H$ .

#### D) Construcțiuni triplu static nedeterminate.

În aceste construcțiuni  $N$  și  $M$  se exprimă în funcție de trei cantități static nedeterminate.

Din aplicațiunile făcute la construcțiile simplu static nedeterminate s'a văzut că deși ele sunt foarte variate totuși se găsește o normă generală de calcul.

Aci problema este evident mai complexă. Oricum s'ar prezenta problema, în mod general, în cazul de care ne ocupăm, se ajunge la rezolvarea unui sistem liniar de trei ecuații cu trei necunoscute.

Chestiunea care se pune este de a găsi o cale care să ne poată ușura acest calcul.

O ușurare nu putem avea decât în cazul când facem o serie de aproximații. Chestiunea este de a ști ce anume aproximații să facem chiar dela început, așa că rezultatele ce obținem să fie în cadrul aproximațiilor curent admise.

Construcțiile de acest gen sunt foarte variate. Vom face câteva aplicații.

##### 1. Grinzi oarecari plane.

În această categorie intră și o bucată de grindă separată dintr'o grindă mai mare sau care leagă două noduri oarecari.

Pentru a restabili echilibrul ei, introducem în cele două extremități forțele  $\bar{R}$  și momentele  $\bar{M}$ , cari vor trebui să satisfacă ecuațiile de echilibru static.

În alegerea necunoscutelor static nedeterminate avem completă libertate. Această alegere depinde de modul în care facem grinda static determinată.

Vom avea atâtea variante de calcul, câte moduri avem de a face grinda static determinată.

#### a) Varianta I-a.

În această variantă vom face grinda static determinată presupunând-o simplu rezemată în capătul 1 și articulată în 2.

Notăm cu  $\bar{R}_1 + \bar{V}_{1s}$ ,  $\bar{R}_2 + \bar{V}_{2s}$ ,  $\bar{M}_1$  și  $\bar{M}_2$  forțele și momentele introduse în cele două extremități ale grinzii (fig. 432).

Pentru echilibru avem:

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{R}_1 + \bar{V}_{1s} + \Sigma \bar{F} + \bar{R}_2 + \bar{V}_{2s} &= 0 \\ -\bar{l}_0(\bar{R}_1 + \bar{V}_{1s}) - \Sigma \bar{b}\bar{F} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ecuația de momente este proiecția momentelor după normala la plan, deci este o ecuație scalară.

Componentele  $\bar{V}_{1s}$  și  $\bar{V}_{2s}$  le determinăm prin condiția ca ele să fie reacțiunile grinzii static determinate, așa cum s'a presupus mai sus, deci să satisfacă:

$$(2) \quad \bar{V}_{1s} + \Sigma \bar{F} + \bar{V}_{2s} = 0, \quad -\bar{l}_0 \bar{V}_{1s} - \Sigma \bar{b}\bar{F} = 0.$$

Dacă scădem (2) din (1), găsim:

$$(3) \quad \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 0, \quad -\bar{l}_0 \bar{R}_1 + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 = 0.$$

Prima relație ne arată că  $\bar{R}_1$  este același pe toată grinda și de aceea îl vom nota pur și simplu cu  $\bar{R}$ .

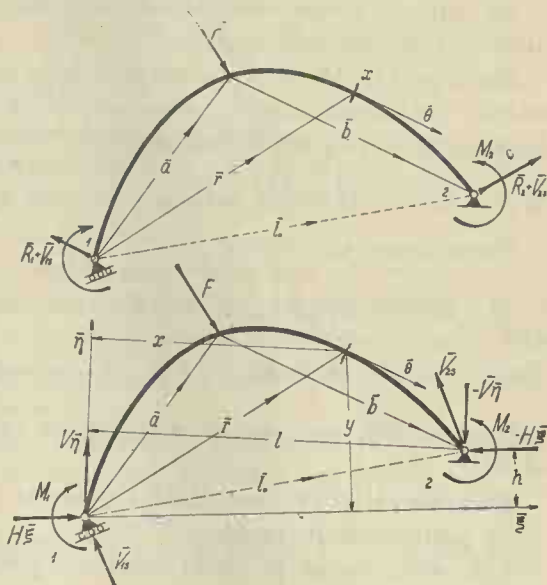


Figura 432

În acest caz, ecuația (3) de momente se transformă în:

$$(3) \quad f = -\bar{l}_0 \bar{R} + M_1 - M_2 = 0.$$

Să scriem expresia momentului încovoietor și a forței axiale într-o secțiune oarecare a grinzii.

Dacă notăm  $M_s$  și  $N_s$  momentul încovoietor și forța axială datorite cantităților static determinate și  $M_n$  și  $N_n$  aceleași, însă datorite cantităților static nedeterminate, atunci avem evident:

$$(4) \quad \bar{M} = \bar{M}_s + \bar{M}_n, \quad N = N_s + N_n.$$

După figura 432 avem:

$$(5) \quad \bar{M}_s = -\bar{r} \bar{V}_{1s} - \sum_1^x (\bar{r} - a) \bar{F}, \quad N_s = -(\bar{V}_{1s} + \sum_1^x \bar{F}) \bar{\theta},$$

$$\bar{M}_n = \bar{M}_1 - \bar{r} \bar{R}, \quad N_n = -\bar{R} \bar{\theta}.$$

Originea lui  $\bar{r}$  este evident în secțiunea în care avem momentul  $M_1$ .

Ecuațiile (4) și (5) sunt absolut generale.

Să particularizăm problema.

Vom descompune pe  $\bar{R}$  în două componente, după direcțiile  $\bar{\xi}$  și  $\bar{\eta}$ . Vom avea:

$$(6) \quad \bar{R} = H \bar{\xi} + V \bar{\eta}.$$

În acest caz, ecuația (3), de momente, se transformă în:

$$(3) \quad f = -H \bar{l}_0 \bar{\xi} - V \bar{l}_0 \bar{\eta} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 = 0.$$

În cazul când  $\bar{\xi}$  este paralel sau coincide cu direcția 1—2, atunci  $\bar{l}_0 \bar{\xi} = 0$  și ecuația precedentă se reduce la

$$(3) \quad f = -V \bar{l}_0 \bar{\eta} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 = 0.$$

Așa dar, între cele patru cantități  $H$ ,  $V$ ,  $M_1$  și  $M_2$  avem ecuațiile de legătură (3), cari sunt exact de forma aceleia găsită la grinzile drepte.

Vom raporta grinda la un sistem de axe  $\xi 1 \eta$  a cărui origine este în originea lui  $\bar{r}$ , adică în secțiunea în care avem momentul  $\bar{M}_1$ .

Coordonatele  $x, y$  ale unei secțiuni se fixează prin distanțele măsurate pe normalele la cele două axe. Se va observa că sistemul de axe ales are  $\bar{\xi} \bar{\eta} < 0$  pe când grinda, după sensul pozitiv ales, are  $\bar{\theta} \nu > 0$  și deci vor rezulta oarecari cantități cu semnul minus. N'avem ce face, întru cât practica a consacrat acest sistem de axe.



În acest caz, de pe figură, avem:

$$(7) \quad \overline{r\xi} = y, \quad \overline{r\eta} = -x, \quad \overline{l_0\xi} = h, \quad \overline{l_0\eta} = -l$$

și ecuațiile (3) și (5) se transformă în

$$(3) \quad j = -Hh + Vl + M_1 - M_2 = 0,$$

$$(5) \quad M_n = M_1 - Hy + Vx, \quad N_n = -H\overline{\xi\theta} - V\overline{\eta\theta},$$

formule cari se pot ușor controla pe figură.

*Calculul deplasărilor după  $H$ ,  $V$ ,  $M_1$  și  $M_2$ .*

Deplasările după direcția  $\overline{\xi}$  a celor două extremități 1 și 2 le notăm cu  $u_1$  și  $u_2$ . Mai notăm  $u_2 - u_1 = u$ .

În mod cu totul analog avem după  $\overline{\eta}$ :  $v = v_2 - v_1$ .

Rotirile secțiunilor din 1 și 2 le notăm cu  $\theta_1$  și  $\theta_2$  având  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ .

Pentru a le găsi vom aplica teorema lui *Castigliano*, ținând seama că între cele patru cantități  $H$ ,  $V$ ,  $M_1$  și  $M_2$  avem relația de condiție dată de ultima ecuație (3).

Vom utiliza metoda coeficienților nedeterminați, însemnând cu  $\alpha$  singurul coeficient nedeterminat de care avem nevoie.

Cu :

$$\partial f / \partial H = -h, \quad \partial f / \partial V = l, \quad \partial f / \partial M_1 = 1, \quad \partial f / \partial M_2 = -1.$$

Avem:

$$u = \partial L / \partial H - ah, \quad v = \partial L / \partial V + al, \quad \theta_1 = \partial L / \partial M_1 + \alpha, \quad \theta_2 = -\alpha,$$

cari ne dau

$$(8) \quad u - h\theta_2 = \partial L / \partial H, \quad v + l\theta_2 = \partial L / \partial V, \quad \theta = \partial L / \partial M_1.$$

Aceste ecuații sunt absolut similare celor ce am găsit la grinzile drepte. Deosebirea o avem numai în ceia ce privește semnele. Acolo sistemul de axe era pozitiv, adică  $\overline{\xi\eta} > 0$ , aci avem  $\overline{\xi\eta} < 0$ .

Se vede număidecât că dacă pentru o bucată de grindă ni se dă, de exemplu,  $v = 0$ , atunci putem determina toate celelalte deplasări.

Invers. Dacă ni se dau deplasările  $u$ ,  $v$ ,  $\theta_1$  și  $\theta_2$ , atunci ecuațiile (8) ne dau pe  $H$ ,  $V$  și  $M_1$ , iar din (3) deducem și pe  $M_2$ .

Să dezvoltăm ecuațiile (8).

Observăm că  $\partial L / \partial H$  reprezintă deplasarea datorită tuturor solicitărilor cari intră în expresia lucrului mecanic, după direcția lui  $H$ , adică a lui  $\overline{\xi}$ .

Această deplasare se compune din o parte  $u_s$  datorită încărcărilor considerând sistemul static determinat, din o parte  $Hu_{1H}$  datorită



lui  $H$ , o parte  $Vu_{11V}$  datorită lui  $V$  și, în fine o parte  $M_1u_{11M}$  datorită lui  $M_1$ .

Procedând la fel găsim și pentru celelalte deplasări expresiuni identice.

Vom avea deci:

$$(9) \quad \begin{aligned} u_s + Hu_{11H} + Vu_{11V} + M_1u_{11M} &= u - h\theta_2 \\ v_s + Hv_{11H} + Vv_{11V} + M_1v_{11M} &= v + l\theta_2 \\ \theta_s + H\theta_{11H} + V\theta_{11V} + M_1\theta_{11M} &= \theta. \end{aligned}$$

Dacă ținem seama de teorema lui *Maxwell* care ne arată că:

$$(10) \quad u_{11V} = v_{11H}, \quad u_{11M} = \theta_{11H}, \quad v_{11M} = \theta_{11V}$$

atunci avem și:

$$(9) \quad \begin{aligned} u_s + Hv_{11H} + Vv_{11H} + M_1\theta_{11H} &= u - h\theta_2 \\ v_s + Hu_{11V} + Vv_{11V} + M_1\theta_{11V} &= v + l\theta_2 \\ \theta_s + Hu_{11M} + Vv_{11M} + M_1\theta_{11M} &= \theta. \end{aligned}$$

Primul grup de ecuații (9) exprimă egalitatea deplasărilor, iar al doilea exprimă ecuația lucrului mecanic virtual. Se vede și se știe că aceste două grupuri sunt identice.

Acesta-i tipul de ecuații pe care ni-l dă orice sistem triplu static nedeterminat.

Se vede, fără nicio dificultate, că și în cazul unui sistem de  $n$  ori static nedeterminat grupul de ecuații (9) păstrează aceeași structură, cu singura deosebire că în loc de 3 ecuații avem  $n$ .

Nu ne rămâne decât să calculăm cantitățile  $u_s, \dots, u_{11H}, \dots$  etc.

S'a arătat cum se calculează aceste cantități. Aci nu vom face decât să aplicăm formulele găsite.

Din formulele (4) și (5) găsim:

$$(11) \quad \begin{aligned} m_{x1H} = \partial M / \partial H &= -y, & n_{x1H} = \partial N / \partial H &= -\bar{\xi}\bar{\theta}, \\ m_{x1V} = \partial M / \partial V &= x, & n_{x1V} = \partial N / \partial V &= -\bar{\eta}\bar{\theta}, \\ m_{x1M} = \partial M / \partial M_1 &= 1, & n_{x1M} = \partial N / \partial M_1 &= 0. \end{aligned}$$

Vom avea:

$$(12) \quad \begin{aligned} u_s &= -\int M_s y d\omega - \int N_s \bar{\xi}\bar{\theta} d\varepsilon, & v_s &= \int M_s x d\omega - \int N_s \bar{\eta}\bar{\theta} d\varepsilon, & \theta_s &= \int M_s d\omega \\ u_{11H} &= \int y^2 d\omega + \int \bar{\xi}\bar{\theta}^2 d\varepsilon, & v_{11V} &= \int x^2 d\omega + \int \bar{\eta}\bar{\theta}^2 d\varepsilon, & \theta_{11M} &= \int d\omega \end{aligned}$$

$$(13) \quad \begin{aligned} u_{11V} = v_{11H} &= -\int x y d\omega + \int \bar{\xi}\bar{\theta} \cdot \bar{\eta}\bar{\theta} d\varepsilon, \\ u_{11M} = \theta_{11H} &= -\int y d\omega, & v_{11M} = \theta_{11V} &= \int x d\omega. \end{aligned}$$

Se observă că termenii  $u_s$ ,  $v_s$  și  $\theta_s$  depind de forma și dimensiunile grinzii și de încărcări, pe când toți ceilalți termeni depind numai de forma și dimensiunile grinzii.

Pentru un calcul aproximativ, cu ajutorul căruia să putem face un început de dimensionare a grinzii, putem neglija termenii datorii forțelor axiale, adică a acelor termeni cari sub semnul integralei au ca variabilă pe  $\varepsilon$ .

În cele de mai sus am presupus că  $\bar{R}$  se aplică în extremitatea I a grinzii unde am și luat originea axelor. Putem presupune că  $\bar{R}$  se aplică în alt punct  $O$  și că acestei origini a axelor îi corespunde momentul  $M_0$ . În acest caz expresia lui  $M_n$  este:

$$\bar{M}_n = \bar{M}_0 - r\bar{R}.$$

$\bar{r}$  măsurându-se din originea  $O$ .

Nouii origini a axelor îi impunem condiția ca să avem:

$$(14) \quad \int y d\omega = 0, \quad \int x d\omega = 0, \quad \int xy d\omega = 0,$$

adică să coincidă cu centrul de greutate elastic al grinzii la încovoiere, iar axele să fie conjugate între ele. În aceste condiții, față de noul sistem de axe, dacă se neglijează termenul  $\int \bar{\xi}\bar{\theta} \cdot \bar{\eta}\bar{\theta} \cdot d\varepsilon$  în genere foarte mic, atunci avem:

$$u_{00V} = v_{00H} = 0, \quad u_{00M} = \theta_{00H} = 0, \quad v_{00M} = \theta_{00V} = 0.$$

Dacă presupunem că avem o grindă incastrată la ambele extremități, atunci  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta_2 = 0$  și grupul de ecuații (9) se reduce la:

$$(15) \quad u_s + H u_{00H} = 0, \quad v_s + V v_{00V} = 0, \quad \theta_s + M_0 \theta_{00M} = 0.$$

Se vede că alegerea convenabilă a axelor de coordonate ne-a permis să rezolvăm grupul de trei ecuații cu trei necunoscute.

Dacă față de noul sistem de axe de coordonate notăm cu  $x$ ,  $y$  coordonatele unei secțiuni oarecari,  $x_2$ ,  $y_2$  coordonatele lui 2, atunci ecuațiile (3) și (5) se transformă în:

$$(3) \quad -Hy_2 + Vx_2 + M_0 - M_2 = 0 \\ N_n = -H\bar{\xi}\bar{\theta} - V\bar{\eta}\bar{\theta}$$

$$(5) \quad M_n = +M_0 - Hy + Vx.$$

Pentru un calcul aproximativ se neglijează termenii datorii forțelor axiale.

Pentru arce de poduri sau poduri boltite se neglijează termenii  $\int N_s \bar{\eta} \theta d\epsilon$  și  $\int \bar{\eta} \bar{\theta}^2 d\epsilon$ .

Termenul  $\int \bar{\xi} \bar{\theta}^2 d\epsilon$ , având în vedere că este mic, se înlocuește cu valoarea aproximativă:

$\int \bar{\xi} \bar{\theta}^2 d\epsilon = \int \cos^2 \theta ds / E \Omega_m = l_o / E \Omega_m$  în care  $\Omega_m$  este o secțiune medie a arcului.

Termenul  $\int N_s \bar{\xi} \theta d\epsilon = \int N_s \cos \theta ds / E \Omega$  se neglijează și el de obicei. Se ține seamă de el numai când este vorba de calcule mai exacte sau când e vorba de deschideri mari.

#### b) Varianta II-a.

În această variantă vom presupune că facem grinda static determinată considerând-o articulată în punctele 1 și 2 și într'un punct oarecare al ei  $O$  (fig. 433). Notăm cu  $\bar{R}_1 + \bar{V}_{1s} + \bar{H}_{1s}$ ,  $\bar{R}_2 + \bar{V}_{2s} + \bar{H}_{2s}$ ,  $\bar{M}_1$  și  $\bar{M}_2$  forțele și momentele introduse în cele două extremități ale grinzii.

Pentru echilibru avem:

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{R}_1 + \bar{V}_{1s} + \bar{H}_{1s} + \sum_1^2 \bar{F} + \bar{R}_2 + \bar{V}_{2s} + \bar{H}_{2s} &= 0, \\ -\bar{l}_o (\bar{R}_1 + \bar{V}_{1s} + \bar{H}_{1s}) - \sum_1^2 \bar{b} \bar{F} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Componentele  $\bar{V}_{1s}$ ,  $\bar{H}_{1s}$ ,  $\bar{V}_{2s}$  și  $\bar{H}_{2s}$  le determinăm prin condiția ca ele să fie reacțiunile grinzii noastre articulată în cele trei puncte 1, 2 și  $O$ , deci să satisfacă:

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{V}_{1s} + \bar{H}_{1s} + \sum_1^2 \bar{F} + \bar{V}_{2s} + \bar{H}_{2s} &= 0, \\ -\bar{l}_o (\bar{V}_{1s} + \bar{H}_{1s}) - \sum_1^2 \bar{b} \bar{F} = 0, & \quad -\bar{l}_2 (\bar{V}_{1s} + \bar{H}_{1s}) - \sum_1^o (\bar{l}_2 - a) \bar{F} = 0. \end{aligned}$$

ecuații cari reprezintă 4 ecuații scalare cu 4 necunoscute.

Dacă scădem primele două ecuații (2) din (1), găsim:

$$(3) \quad \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 0, \quad -\bar{l}_o \bar{R}_1 + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 = 0,$$

adică aceleași ecuații ca la varianta I-a.

De aci încolo procedăm exact ca în cazul precedent.

Deosebirea între aceste două variante constă numai într'aceia că la prima  $M_s$  și  $N_s$  sunt momentele și forțele axiale într'o grindă articulată la un cap și simplu rezemată la celălalt, iar în a doua  $M_s$  și  $N_s$  sunt momentele și forțele axiale într'un arc cu trei articulații.

Să presupunem că avem un arc incastrat la ambele extremități și încărcat cu o serie de sarcini verticale.

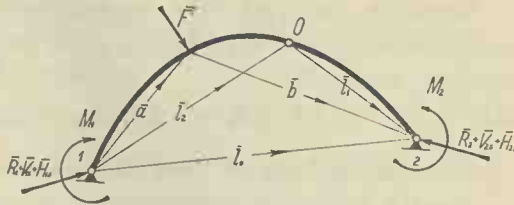


Figura 433

Să mai presupunem că axa arcului este astfel aleasă încât ea coincide cu curba funiculară a acestor încărcări:

În acest caz vom avea pe tot arcul  $M_s \equiv 0$ , și deci:

$$u_s = - \int N_s \bar{\xi} \bar{\theta} d\varepsilon \quad , \quad v_s = - \int N_s \bar{\eta} \bar{\theta} d\varepsilon \quad , \quad \theta_s = 0.$$

Pentru arce turtite putem lua aproximativ  $N_s \approx -H_s \bar{\xi} \bar{\theta}$ , și deci

$$u_s = H_s \int \bar{\xi} \bar{\theta}^2 d\varepsilon \quad ; \quad v_s = H_s \int \bar{\xi} \bar{\theta} \cdot \bar{\eta} \bar{\theta} \cdot d\varepsilon.$$

Din formula (15) deducem:

$$(16) \quad H = - H_s \int \bar{\xi} \bar{\theta}^2 d\varepsilon / u_{o0H}.$$

Având în vedere că termenul  $\int \bar{\xi} \bar{\theta}^2 d\varepsilon$  este foarte mic față de  $\int \eta^2 d\omega$ , atunci rezultă că și  $H$  este foarte mic față de  $H_s$ .

$H$  fiind de semn contrar cu  $H_s$ , se scade din acesta și deci valoarea  $H_s - H < H_s$ . Prin urmare, valoarea statică  $H_s$  este acoperitoare și ne poate servi pentru un început de calcul aproximativ.

### c) Varianta III-a.

Aci vom presupune, ca și în varianta doua, că facem grinda static determinată considerând-o ca un arc cu trei articulații în 1, 2 și O,

vom lua însă ca necunoscute static nedeterminate momentele  $M_o$ ,  $M_1$  și  $M_2$  din cele trei articulații (fig. 434).

Plecăm dela ecuațiile (3) cari aci sunt:

$$(3) \quad \bar{l}_o \bar{R} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 = 0 \quad , \quad -\bar{l}_2 \bar{R} + \bar{M}_1 - \bar{M}_o = 0.$$

Grupul de solicitări static nedeterminate  $\bar{R}$  și  $\bar{M}$  putem oricând să-l înlocuim cu trei forțe dirijate după trei direcțiuni neconcurente oarecari. Avem deci:

$$(17) \quad \bar{R} = X\xi + Y\eta + Z\zeta$$

Cele trei direcțiuni le luăm (2—1)  $\bar{\xi}$ , (O—2)  $\bar{\eta}$ , (1—O)  $\bar{\zeta}$ .

Această valoare va trebui evident să satisfacă ecuațiile (3).

Dacă se înlocuește în (3), se găsește că grupul de valori cari le satisface este:

$$(18) \quad M_o = Xd_o \quad , \quad M_1 = Yd_1 \quad , \quad M_2 = Zd_2,$$

în care  $d$  sunt înălțimile triunghiului  $O12$ .

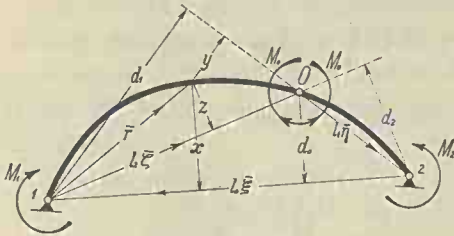


Figura 434

Aceste relații se pot scrie de altfel și direct. Așa dar, grupul de momente  $M_o$ ,  $M_1$  și  $M_2$  l-am înlocuit cu grupul de forțe  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  aplicate după dreptele 2—1, O—2 și 1—O.

Fiind dată legătura foarte simplă între  $M_o$  și  $X$ , etc., putem lua ca necunoscute, indiferent, unele sau altele.

Să găsim expresia momentului încovoietor și a forței axiale într'o secțiune oarecare.

Ca sistem de axe de coordonate luăm triunghiul  $1O2$ . Poziția unei secțiuni se fixează prin trei coordonate  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , măsurate după normalele la axele respective  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\zeta}$ . Convenim să considerăm o coordonată pozitivă, atunci când se găsește față de axa respectivă dela care se măsoară de aceeași parte ca și  $d$ -ul respectiv.

Dacă în primele ecuații (5):

$$(5) \quad \bar{M}_n = +\bar{M}_1 - \bar{r}\bar{R} \quad , \quad N_n = -\bar{R}\bar{\theta}$$

facem înlocuirile, găsim:

$$(19) \quad M_n = +Xx + Yy + Zz \quad , \quad N_n = -X\bar{\xi}\bar{\theta} - Y\bar{\eta}\bar{\theta} - Z\bar{\zeta}\bar{\theta}$$

Ne propunem să găsim unghiurile  $\theta_o$ ,  $\theta_1$  și  $\theta_2$  cu cari momentele  $M_o$ ,  $M_1$  și  $M_2$  rotesc secțiunile respective.

Dacă ținem seamă că acest grup de momente a fost înlocuit cu grupul de forțe  $X$ ,  $Y$  și  $Z$  atunci rezultă că perechile de sollicitări  $(M_0, -X)$ ,  $(M_1, -Y)$ ,  $(M_2, -Z)$  își fac echilibru. Dacă notăm cu  $u$ ,  $v$ ,  $w$  deplasările după cele trei axe, atunci, conform principiului lucrului mecanic virtual, avem

$$M_0\theta_0 - Xu = 0 \quad , \quad M_1\theta_1 - Yv = 0 \quad , \quad M_2\theta_2 - Zw = 0.$$

Ținând seama de (18) căpătăm:

$$(20) \quad u = d_0\theta_0 \quad , \quad v = d_1\theta_1 \quad , \quad w = d_2\theta_2$$

Putem deci calcula pe  $u$ ,  $v$ ,  $w$  în locul lui  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  și  $\theta_2$ .

Vom avea:

$$(21) \quad \begin{aligned} u &= u_s + Xu_x + Yu_y + Zu_z, \\ v &= v_s + Xv_x + Yv_y + Zv_z, \\ w &= w_s + Xw_x + Yw_y + Zw_z, \end{aligned}$$

și cum conform teoremei lui *Maxwell* avem:

$$(22) \quad u_y = v_x, \quad u_z = w_x, \quad v_z = w_y$$

rezultă și:

$$(21) \quad \begin{aligned} u &= u_s + Xu_x + Yv_x + Zw_x, \\ v &= v_s + Xu_y + Yv_y + Zw_y, \\ w &= w_s + Xu_z + Yv_z + Zw_z. \end{aligned}$$

Să calculăm cantitățile  $u_s, \dots, u_x, \dots$  etc. Din (19) găsim:

$$\begin{aligned} \partial M / \partial X &= x \quad , \quad \partial M / \partial Y = y \quad , \quad \partial M / \partial Z = z \\ \partial N / \partial X &= -\bar{\xi}\bar{\theta} \quad , \quad \partial N / \partial Y = -\bar{\eta}\bar{\theta} \quad , \quad \partial N / \partial Z = -\bar{\zeta}\bar{\theta}, \end{aligned}$$

cari ne dau:

$$(23) \quad \begin{aligned} u_s &= \int M_s x d\omega - \int N_s \bar{\xi}\bar{\theta} d\epsilon \quad , \quad v_s = \int M_s y d\omega - \int N_s \bar{\eta}\bar{\theta} d\epsilon, \\ w_s &= \int M_s z d\omega - \int N_s \bar{\zeta}\bar{\theta} d\epsilon, \end{aligned}$$

$$(24) \quad \begin{aligned} u_x &= \int x^2 d\omega + \int \bar{\xi}\bar{\theta}^2 d\epsilon \quad , \quad v_y = \int y^2 d\omega + \int \bar{\eta}\bar{\theta}^2 d\epsilon, \\ w_z &= \int z^2 d\omega + \int \bar{\zeta}\bar{\theta}^2 d\epsilon \quad , \quad u_y = \int x y d\omega + \int \bar{\xi}\bar{\theta} \cdot \bar{\eta}\bar{\theta} d\epsilon, \\ v_z &= \int y z d\omega + \int \bar{\eta}\bar{\theta} \cdot \bar{\zeta}\bar{\theta} d\epsilon \quad , \quad w_x = \int z x d\omega + \int \bar{\xi}\bar{\theta} \cdot \bar{\zeta}\bar{\theta} d\epsilon \end{aligned}$$

Aceste formule sunt absolut generale.



În cazul când se neglijează deformațiile datorite forțelor axiale, dacă aplicăm teorema lui *Castigliano* ținând seamă numai de prima ecuație (19), atunci avem

$$(25) \quad \int M_x d\omega = 0 \quad , \quad \int M_y d\omega = 0 \quad , \quad \int M_z d\omega = 0.$$

S'a văzut că atât poziția cât și direcția axelor  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  și  $\bar{\zeta}$  sunt absolut arbitrare.

În aceste condiții, ecuațiile (25) ne arată că momentul static al suprafeței momentelor  $\int M d\omega$  datorite cantităților static determinate și nedeterminate în raport cu 3 axe arbitrare sunt nule.

Aceste relații ne dau tocmai ecuațiile de cari avem nevoie.

Sub această formă aceste ecuații sunt absolut analoge celor găsite la grinzile drepte.

#### d) Varianta IV-a.

Vom pleca de la precedenta introducând încă o articulație într'un punct oarecare 2 al grinzii, punct ales arbitrar (fig. 435).

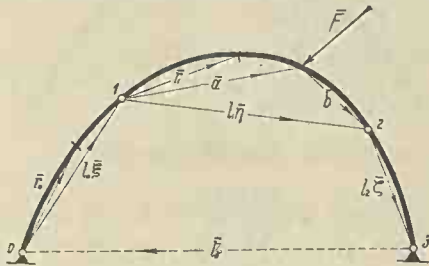


Figura 435

Deocamdată observăm că în acest mod construcția se transformă în una static deformabilă.

Pentru a ne fixa ideile, vom presupune încărcată numai porțiunea de grindă 1—2 pe care o considerăm de exemplu articulată în 1 și simplu rezemată în 2. Cele

3 reacțiuni, cari asigură echilibrul static al porțiunii de grindă, le considerăm aplicate după (0—1)  $\bar{\xi}$ , (1—2)  $\bar{\eta}$  și (2—3)  $\bar{\zeta}$ .

Pentru echilibru avem:

$$\begin{aligned} X_s \bar{\xi} + Y_s \bar{\eta} + Z_s \bar{\zeta} + \Sigma \bar{F} &= 0, \\ -l_1 \bar{X}_s - \Sigma b \bar{F} &= 0 \quad , \quad l_1 Z_s + \Sigma a \bar{F} = 0, \end{aligned}$$

ecuații din care scoatem valorile lui  $X_s$ ,  $Y_s$  și  $Z_s$ .

Pentru a împiedeca deformația statică a sistemului, e suficient, în cazul când considerăm porțiunea de grindă articulată în 1, să introducem în 0 un moment  $M_{0s}$ , sau în 1 un moment  $M_{1s}$ , sau, după direcția 1—3, o forță care să facă echilibru lui  $Y_s$ .

Cu ajutorul deplasărilor virtuale sau a ecuațiilor de momente putem deduce toate aceste valori. Vom avea de exemplu  $\bar{M}_{0s} + l_0 \bar{Y}_s = 0$ , etc.

În rezumat, am transformat grinda noastră într'un sistem static.

Având valorile lui  $X_s$ ,  $Y_s$  și  $Z_s$  putem scrie, în orice secțiune a grinzii, expresia lui  $N_s$ , și  $M_s$ . Dacă luăm cantitatea static nedeterminată sub forma (17), dacă scriem expresiile lui  $N$  și  $M$  în o secțiune oarecare și procedăm ca mai sus, dăm peste ecuațiile (19), (21), etc.

E comod de multe ori și în special când grinda se compune dintr'un contur polygonal de a lua ca necunoscute ale problemei momentele  $M_0, M_1, \dots$  din nodurile  $0, 1, \dots$

Să presupunem deocamdată că grinda se reduce la conturul polygonal  $0-1-2-3$  și că luăm ca necunoscute pe  $M_0, M_1, M_2$  și  $M_3$  (fig. 436).

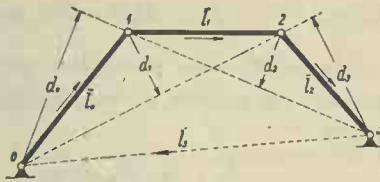


Figura 436

Sistemul fiind triplu static nedeterminat, atunci înseamnă că între cele patru momente există o relație statică. Am putea găsi această relație plecând dela formulele evidente:

$$(26) \quad \bar{M}_0 - \bar{M}_1 = \bar{l}_0 \bar{R} \quad , \quad \bar{M}_1 - \bar{M}_2 = \bar{l}_1 \bar{R}, \dots \quad \bar{M}_3 - \bar{M}_0 = \bar{l}_3 \bar{R}.$$

între cari eliminăm pe  $\bar{R}$ .

Acest calcul ne conduce la principiul lucrului mecanic virtual. Aplicăm deci de-a-dreptul acest principiu. Lungimea barelor rămânând invariabilă, facem ca unghiul din  $0$  să varieze cu  $\theta_0$ .

Unghiurile din celelalte noduri vor varia cu  $\theta_1, \theta_2$  și  $\theta_3$ .

Avem evident:

$$(27) \quad f = M_0 \theta_0 + M_1 \theta_1 + M_2 \theta_2 + M_3 \theta_3 = 0.$$

O ecuație care stabilește o legătură între patru momente dintre patru noduri consecutive.

Dacă am avea  $n$  noduri atunci putem scrie  $n - 3$  asemenea relații.

Raportul între cantitățile  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  și  $\theta_3$  se găsește pe baza celor stabilite la capitolul „Deplasări virtuale” (pag. 164—170) dela grinzile cu zăbrele.

După acele norme se găsește că în cazul când cele patru noduri formează vârfurile unui dreptunghi sau paralelogram dacă luăm  $\theta_0 = 1$ , atunci avem:

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_1 = -1, \quad \theta_2 = 1, \quad \theta_3 = -1,$$

care ne dă

$$(27) \quad f = M_0 - M_1 + M_2 - M_3 = 0.$$

Dacă nodurile formează vârfurile unui trapez ale cărui laturi  $l_1$  și  $l_3$  sunt paralele atunci:

$$\theta_0 = 1/l_3, \quad \theta_1 = -1/l_1, \quad \theta_2 = 1/l_1, \quad \theta_3 = -1/l_3,$$

care ne dă:

$$(27) \quad f = (M_0 - M_3)/l_3 + (M_2 - M_1)/l_1 = 0.$$

În cazul unui patrulater oarecare pe baza aplicației (38) dela grinzile cu zăbrele și cu notațiile de acolo, arătate pe figura 436, găsim:

$$\theta_0 = d_2/(d_0 + d_2), \quad \theta_1 = -d_3/(d_1 + d_3),$$

$$\theta_2 = d_0/(d_0 + d_2), \quad \theta_3 = -d_1/(d_1 + d_3),$$

care ne dă:

$$(27) \quad (M_0 d_2 + M_2 d_0)/(d_0 + d_2) - (M_1 d_3 + M_3 d_1)/(d_1 + d_3) = 0.$$

După cum se vede, relațiunile (27) depind numai de dimensiile cari fixează poziția nodurilor.

Să ne ocupăm de cazul în care grinda curbă se reduce la poligonul format de laturile  $l_0, l_1, l_2$  și să neglijăm termenii cari provin din deformațiile datorite forțelor axiale.

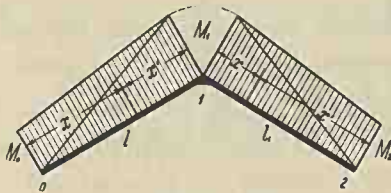


Figura 437

În acest caz, pe intervalul 0—1 expresia momentului datorit cantităților static nedeterminate este  $\bar{M}_0 - \bar{r}_0 \bar{R}$ . Cum  $\bar{R}$  este constant și direcția lui  $\bar{r}_0$  coincide cu a lui  $\bar{l}_0$ , atunci rezultă că, pe acest interval, momentul datorit cantităților static nedeterminate variază liniar, cum este arătat în figura 437.

Așa dar, vom avea pe intervalul 0—1 și 1—2:

$$M = M_s + M_0 x'/l_0 + M_1 x/l_0,$$

$$M = M_s + M_2 x/l_1 + M_1 x'/l_1.$$

Dacă aplicăm teorema lui *Castigliano* luând derivata parțială în raport cu  $M_1$ , dacă multiplicăm totul cu un moment de inerție arbitrar  $I$  notând:

$$(28) \quad I/I_0 = k_0, \quad I/I_1 = k_1, \dots, \quad l_0 k_0 = \lambda_0, \quad l_1 k_1 = \lambda_1, \dots$$

dacă notăm

$$(29) \quad S_{01}I/l_0I_0 + S_{21}I/l_1I_1 = S_{01}k_0/l_0 + S_{21}k_1/l_1 = \Omega_1$$

în care  $S_{01}$  și  $S_{21}$  sunt momentele statice a suprafeței momentelor  $M_s$  în raport cu 0 și 2, dacă ținem seama de ecuația (27) cu ajutorul unui coeficient nedeterminat  $\alpha$ , atunci găsim:

$$(30) \quad \lambda_0 M_0 + 2(\lambda_0 + \lambda_1)M_1 + \lambda_1 M_2 + 6\Omega_1 + \alpha \partial/\partial M_1 = 0,$$

adică tocmai formula lui *Clapeyron*, bine înțeles oarecum generalizată.

### Concluziuni.

1. Avem cea mai mare libertate în alegerea sistemului static determinat.

Mai mult. S'a văzut că putem suprima chiar mai multe legături cu condiția ca să introducem altele cari să asigure rigiditatea statică a sistemului.

2. Ca necunoscute static nedeterminate luăm grupul de solicitări  $\bar{M}, \bar{R}$  aplicat într'o secțiune oarecare a grinzii sau într'un punct oarecare, arbitrar ales. Avem libertatea ca acest grup să-l înlocuim cu oricare alt grup echivalent, cum ar fi, de exemplu, trei forțe aplicate după trei direcțiuni neconcurente arbitrar alese, sau trei momente aplicate în trei puncte, de asemenea arbitrar alese.

Mai mult. În loc de trei necunoscute static nedeterminate, putem lua mai multe însă cu condiția ca să ținem seamă de un număr corespunzător de ecuații statice ce există între toate sau o parte din necunoscute.

Din cele de mai sus rezultă că avem la îndemână o mare varietate de moduri de a trata problema.

Această împrejurare ne permite să aplicăm fiecărui caz metoda care duce cel mai repede la rezultat.

## 2. Calculul unui arc incastrat la ambele extremități.

Ne vom ocupa de un caz special și anume vom presupune că axa arcului este o parabolă cu axa verticală. Vom presupune

încăstrările de nivel și că săgeata la mijlocul deschiderii  $l$  este  $f$  (fig. 438). Vom mai presupune că momentul de inerție într'o secțiune oarecare este  $I = I_0/\cos\theta$ , în care  $\theta$  este unghiul tangentei la arc cu orizontala.

a) Arcul este supus la o forță verticală  $F$ , aplicată undeva pe el.

Sarcina fiind verticală, vom face sistemul static determinat transformându-l într'un arc simplu rezemat la extremitățile sale.

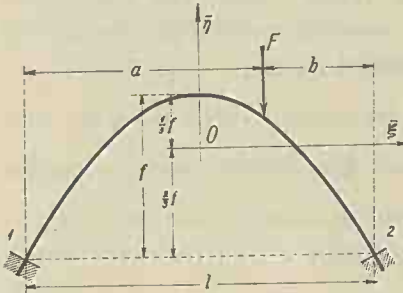


Figura 438

Ca necunoscute static nedeterminate luăm grupul  $\bar{R}, \bar{M}$  aplicat în centrul de greutate elastic al arcului.

Să determinăm acest punct. Din motive de simetrie el va fi situat la jumătatea deschiderii. Să-i determinăm poziția lui pe o verticală. El va trebui să satisfacă relația  $\int y d\omega = 0$ . Deci

$$\int y d\omega = \int y ds/I = (1/I_0) \int y \cos\theta ds = \int y dx = 0.$$

Așa dar, axa  $Ox$  ( $\xi$ ) împarte suprafața parabolei în două părți egale și deci se găsește la  $\frac{2}{3}f$  dela axa orizontală ce trece prin reazime.

Ecuția parabolei raportată la axele ce trec prin centrul de greutate elastic, este:

$$y = f \left( \frac{1}{3} - 4 \xi^2 \right)$$

în care  $\xi = x/l$  are valori cuprinse între  $-\frac{1}{2}$  și  $+\frac{1}{2}$ .

Mai avem:

$$d\omega = ds/I = \cos\theta \cdot ds/I_0 = dx/I_0$$

Dacă toate ecuațiile le multiplicăm cu  $I_0$ , atunci în loc de  $d\omega$  vom pune  $dx$ .

În acest caz notăm  $I_0/\Omega_m = i^2$  în care  $\Omega_m$  este secțiunea medie a arcului.

În aceste condițiuni găsim:

$$\int d\omega = l, \quad \int x^2 d\omega = l^3/12, \quad \int y^2 d\omega = 4l f^2/45$$

$$\int \bar{\xi} \bar{\theta}^2 \cdot d\epsilon \simeq l i^2, \quad \int \bar{\xi} \bar{\theta} \cdot \bar{\eta} \bar{\theta} \cdot d\epsilon = 0, \quad \int \bar{\eta} \bar{\theta}^2 \cdot d\epsilon \simeq 0.$$

Să evaluăm termenii cari depind de încărcări, adică:  $\int M_s d\omega, \dots$



Arcul l-am făcut static determinat presupunându-l simplu rezemat la extremitățile sale pentru că avem de-aface cu sarcini verticale.

Dacă notăm cu  $x_1$  și  $x_2$  abscisele unei secțiuni dela cele două rezizime 1 și 2, atunci expresia momentului  $M$  pe cele două intervale  $0 - a$  și  $0 - b$  este:

$$M_s = Fbx_1/l, \quad M_s = Fax_2/l.$$

Valoarea lui  $\int M_s d\omega$ , de exemplu, va fi:

$$\int M_s d\omega = F \left[ (b/l) \int_0^a x_1 d\omega + (a/l) \int_0^b x_2 d\omega \right].$$

Se recunoaște numaidecât că primul termen nu este altceva decât momentul ce se produce într'o grindă simplu rezemată la extremitățile sale, în dreptul sarcinei  $F$ , când încărcăm intervalul  $0 - a$  cu sarcinile  $d\omega$ .

Suma ambilor termeni reprezintă deci momentul ce se desvoltă în condițiile de mai sus în dreptul sarcinei  $F$  când încărcăm întreaga grindă cu sarcinile  $d\omega$ .

Printr'un raționament analog, găsim că  $\int M_s x d\omega$  și  $\int M_s y d\omega$  sunt egale cu momentul ce se desvoltă într'o grindă, simplu rezemată la extremitățile sale, în dreptul sarcinei  $F$ , când încărcăm întreaga grindă cu sarcinile  $x d\omega$  și  $y d\omega$ , multiplicând apoi acel moment cu  $F$ .

Asta în mod general.

În cazul nostru special pentru că  $d\omega = dx$ , avem:

$$\int M_s d\omega = \frac{1}{2} F a b, \quad \int M_s x d\omega = \frac{1}{12} F a b(a - b),$$

cari nu sunt altceva decât suprafața momentelor și momentul static a acestei suprafețe în raport cu axa  $Oy$  ( $\bar{\eta}$ ).

Evaluarea lui  $\int M_s y d\omega$  nu este tot așa de simplă. Pentru că valorile lui  $M_s$  sunt exprimate în funcție de  $x_1$  și  $x_2$ , vom scrie și ecuația arcului în funcție de acești parametri, și parabola, a cărei ordonate rămân neschimbate, are ecuația:

$$y = f(4x_1x_2/l^2 - \frac{2}{3}).$$



Făcând calculele găsim:

$$\int_0^a M_s y d\omega = -F a^2 b f (1 - 4a/l + 3a^2/l^2)/3l,$$

$$\int_0^b M_s y d\omega = -F a b^2 f (1 - 4b/l + 3b^2/l^2)/3l,$$

și deci

$$\int_0^l M_s y d\omega = F a^2 b^2 f / 3 l^2.$$

Dacă ducem aceste valori în ecuațiile (15) și notăm:

$$\nu = 1/(1 + 45 i^2/4 f^2)$$

a cărui valoare este foarte aproape de 1, avem:

$$H = 15 \nu F a^2 b^2 / 4 l^3 f, \quad V = -F a b (a - b) / l^3, \quad M_0 = -F a b / 2 l.$$

Aceste cantități sunt aplicate, evident, în centrul de greutate elastic al arcului.

Aceste valori duse în formula (5) ne dă  $M_n$  și  $N_n$  în orice secțiune a arcului la care se vor adăuga bine înțeles  $M_s$  și  $N_s$ .

Prin urmare, chestiunea este rezolvată pentru o sarcină concentrată.

**b) Arcul este încărcat cu o sarcină uniform distribuită pe o lungime oarecare  $a_1 - a$ .**

Vom presupune că pe acest interval avem sarcinile concentrate  $p dx$ .

Dacă facem calculele indicate de formule, găsim:

$$H = (\nu p / 8 f l^3) \left| a^3 (a^2 + 5 a b + 10 b^2) \right|_{a,b}^{a_1, b_1}$$

$$V = (p / 2 l^3) \left| a^2 b^2 \right|_{a,b}^{a_1, b_1}, \quad M_0 = - (p / 12 l) \left| a^2 (l + 2 b) \right|_{a,b}^{a_1, b_1}$$

Se obișnuiește adesea a se nota:

$$a = \alpha l, \quad b = \beta l.$$

Cu aceste notații avem:

$$H = (\nu p l^2 / 8 f) \left| \alpha^3 (\alpha^2 + 5 \alpha \beta + 10 \beta^2) \right|_{\alpha, \beta}^{\alpha_1, \beta_1}$$

$$V = \frac{1}{2} p l \left| \alpha^2 \beta^2 \right|_{\alpha, \beta}^{\alpha_1, \beta_1}, \quad M_0 = - \frac{1}{12} p l^2 \left| \alpha^2 (1 + 2 \beta) \right|_{\alpha, \beta}^{\alpha_1, \beta_1}$$

1°. Să presupunem arcul încărcat peste tot cu sarcina  $p$ .

La limita inferioară avem  $a = 0$ ,  $\beta = 1$ , iar la limita superioară  $a_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ . Avem deci:

$$H = \nu p l^2 / 8 f \quad , \quad V = 0 \quad , \quad M_o = -\frac{1}{12} p l^2$$

2°. Să presupunem încărcată numai jumătatea din stânga a arcului.

Avem:

$$a = 0 \quad , \quad \beta = 1 \quad , \quad a_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$$

și rezultă

$$H = \nu p l^2 / 16 f \quad , \quad V = \frac{1}{32} p l \quad , \quad M_o = -\frac{1}{24} p l^2$$

3°. Să presupunem încărcată tot o jumătate de grindă, însă în intervalul 0,21 până la 0,71. În acest caz avem  $a = 0,2$ ,  $\beta = 0,8$ ,  $a_1 = 0,7$ ,  $\beta_1 = 0,3$ . Făcând calculele găsim:

$$H = 0,779 \nu p l^2 / 8 f \quad , \quad V = 0,0185 \frac{1}{2} p l \quad , \quad M_o = -0,68 \frac{1}{12} p l^2$$

În cele trei ipoteze de încărcări momentele în reazime ( $M_1$  și  $M_2$ ) și la cheie ( $M_c$ ) sunt respectiv:

$$M_1 = -\frac{1}{12} (1 - \nu) p l^2; -\frac{1}{192} (11 - 8\nu) p l^2; -\frac{1}{12} (0,7355 - 0,779\nu) p l^2;$$

$$M_c = \frac{1}{24} (1 - \nu) p l^2; \frac{1}{48} (1 - \nu) p l^2; \frac{1}{24} (0,86 - 0,779\nu) p l^2;$$

$$M_2 = -\frac{1}{12} (1 - \nu) p l^2; -\frac{1}{192} (5 - 8\nu) p l^2; -\frac{1}{12} (0,6425 - 0,779\nu) p l^2.$$

Tot astfel putem scrie expresia momentului în orice secțiune.

### c) Arc parabolic dublu incastrat și cu extremitățile denivelate.

Să presupunem că avem exact cazul precedent cu deosebirea că cele două reazime sunt denivelate cu cantitatea  $h$ , (fig. 439).

În acest caz, nu mai este convenabil a lua originea axelor în

centrul de greutate elastic al arcului, pentru că axa  $Ox$ , conjugată axei verticale  $Oy$ , fiind înclinată, expresiile

$\int y^2 d\omega, \dots$  ies complicate.

Luăm originea axelor în vârful parabolic a cărei ecuație este

$$y = x^2 / 2 p_o$$

în care  $p_o$  este parametrul ei.

Dacă ni se dă ordonata  $y_1$  a vârfului parabolic, atunci rezultă și  $y_2$ .

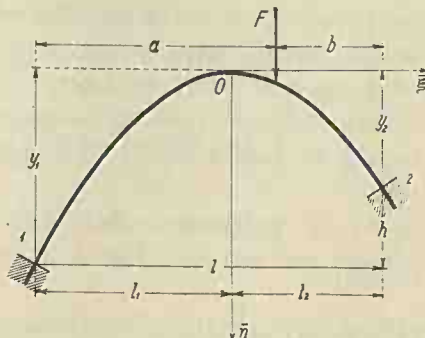


Figura 439

Abscisa vârfului parabolei este:

$$l_1 = l(y_1 - \sqrt{y_1 y_2}) / (y_1 - y_2)$$

cu relația evidentă  $l = l_1 + l_2$ .

În cazul când  $y_1 = y_2$ , găsim  $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}l$ .

Integrând între  $x = -l_1$  și  $x = l_2$ , găsim:

$$\int d\omega = l, \quad \int x d\omega = \frac{1}{2}(l_2^2 - l_1^2), \quad \int y d\omega = (l_2^3 + l_1^3) / 6 p_0$$

$$\int x y d\omega = (l_2^4 - l_1^4) / 8 p_0, \quad \int x^2 d\omega = \frac{1}{3}(l_2^3 + l_1^3), \quad \int y^2 d\omega = (l_2^5 + l_1^5) / 20 p_0^2$$

și luăm:

$$\int \bar{\xi} \bar{\theta}^2 d\varepsilon \simeq l i^2, \quad \int \bar{\xi} \bar{\theta} \cdot \bar{\eta} \bar{\theta} \cdot d\varepsilon \simeq 0, \quad \int \bar{\eta} \bar{\theta}^2 \cdot d\varepsilon \simeq 0.$$

Să calculăm termenii datorți încărcărilor. Avem:

$$\int M_s d\omega = \frac{1}{2} F a b, \quad \int M_s x d\omega = \frac{1}{6} F a b (l + a - 3 l_1).$$

Pentru evaluarea termenului  $\int M_s y d\omega$ , vom lua mai întâiu originea axei  $Ox$  în dreptul reazimului 1, când parabola are ecuația

$$y = (x_1 - l_1)^2 / 2 p_0$$

și vom integra între  $x_1 = 0$  și  $x_1 = a$  și apoi vom lua originea în dreptul reazimului 2 când parabola are ecuația

$$y = (x_2 - l_2)^2 / 2 p_0$$

și vom integra între  $x_2 = 0$  și  $x_2 = b$ .

Avem:

$$\int_0^a M_s y d\omega = F a^2 b (3 a^2 - 8 a l_1 + 6 l_1^2) / 24 p_0 l,$$

$$\int_0^b M_s y d\omega = F a b^2 (3 b^2 - 8 b l_2 + 6 l_2^2) / 24 p_0 l$$

și deci:

$$\int M_s y d\omega = F a b \left[ 3 l (l^2 - 3 a b) - 8 (a^2 l_1 + b^2 l_2) + 6 (a l_1^2 + b l_2^2) \right] / 24 p_0 l.$$

Luăm:

$$\int N_s \cdot \bar{\xi} \bar{\theta} \cdot d\varepsilon \simeq 0, \quad \int N_s \bar{\eta} \bar{\theta} \cdot d\varepsilon \simeq 0.$$

În raport cu sistemul de axe ales, avem:

$$M = M_s + Hy - Vx + M_o, \quad N \simeq -H \cdot \xi \bar{\theta}.$$

aplicând direct teorema lui *Castigliano*, avem:

$$\begin{aligned} H \left( \int y^2 d\omega + li^2 \right) - V \int xy d\omega + M_o \int y d\omega &= - \int M_s y d\omega \\ - H \int xy d\omega + V \int x^2 d\omega - M_o \int x d\omega &= - \int M_s x d\omega \\ H \int y d\omega - V \int x d\omega + M_o \int d\omega &= - \int M_s d\omega \end{aligned}$$

Am căpătat astfel trei ecuații cu trei necunoscute;  $H$ ,  $V$  și  $M_o$  pe cari le rezolvăm.

În cazul când axa arcului este o curbă oarecare și legea de variație a momentelor de încriție de asemenea oarecare, atunci evaluarea cantităților ce ne interesează se face după normele indicate la arcul cu două articulații.

#### d) Curba de presiune.

Oricare ar fi ipoteza de încărcări, după normele indicate aci, găsim pe  $H$ ,  $V$  și  $M_o$ . Deci, pentru fiecare ipoteză de încărcări, putem determina pe  $\bar{R} = H\bar{\xi} + V\bar{\eta}$ . Dacă, în cele trei secțiuni alese, compunem pe  $\bar{R}$  cu forțele determinate pe cale statică, găsim valoarea rezultantei cantităților static determinate și nedeterminate aplicate în centrul de greutate a fiecărei secțiuni. În fiecare secțiune putem găsi, oricând, un punct în care, aplicând rezultanta respectivă, să avem un sistem echivalent grupului  $\bar{R}$ ,  $\bar{M}$  din centrul de greutate al secțiunii.

Așa fiind, putem construi sau calcula o curbă sau un poligon funicular al *tuturor* forțelor, care să treacă prin cele trei puncte a celor trei secțiuni alese.

Aceasta poartă numele de curbă de presiune. Cu ajutorul ei, pe baza proprietăților stabilite la curbele funiculare, putem determina pe  $N$ ,  $T$  și  $M$  în orice secțiune a arcului.

Evident că aceste cantități le putem calcula și direct cu ajutorul ormulor date.

## E) C a d r e.

Se obișnuiește a se denumi *cadru* orice construcțiune făcută din bare drepte sau curbe cari leagă între ele în mod invariabil o serie de puncte.

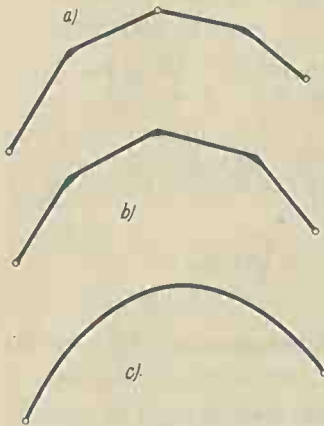


Figura 440

Punctele unde se întâlnesc două sau mai multe bare drepte sau curbe se numesc *noduri*. În noduri barele pot fi încastrate unele într'altele sau articulate.

După această definiție, aproape toate construcțiile sunt numai cadre.

Se pare însă că se rezervă această denumire numai construcțiilor făcute cum s'a arătat mai sus, cari însă sunt static nedeterminate și în special acelorla la cari momentele încovoietoare hotărăsc aproape exclusiv dimensionarea grinzilor.

Construcției din fig. 440 a deși este un cadru îi vom spune arc cu trei articulații. La fel construcțiilor din fig. 440 b și c le vom spune că sunt arce cu două articulații. Construcției din fig. 441 a îi vom spune că este un cadru. Același lucru cu fig. 441 b.

După cum se vede, o demarcare precisă între aceste denumiri nu se poate stabili și nici nu se face mare păcat dacă în caz de ambiguitate se numește într'un fel sau altul.

Ca aplicații ne vom ocupa de câteva cadre triplu static nedeterminate.

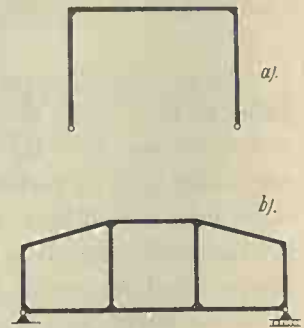


Figura 441

### 1. Cadru dreptunghiular.

Se compune din o grindă, în genere orizontală, de deschidere  $l$  și doi montanți verticali de înălțime  $h$  încastrați cu un cap în reazime și cu celălalt cap în grinda orizontală (fig. 442a).

Grinda orizontală are momentul de inerție  $J_0$ , iar montanții  $I_1$ . Vom neglija deformațiunile provenite din forțe axiale.

Putem utiliza oricare din variante, indicate mai sus.  
Vom întrebuița ultima variantă.

a) Vom presupune deocamdată că avem sarcini verticale.

Introducem în fiecare din cele 4 noduri câte o articulație (fig. 442 b). Sistemul se transformă în unul static deformabil. Pentru a-l face rigid, în unul din noduri vom introduce un moment. Sub acțiunea sarcinilor verticale se vede că acel moment este nul.

Vom aplica aici principiul lucrului mecanic virtual și formula lui *Clapeyron*, luând ca necunoscute momentele dela colțuri.

Dacă multiplicăm toate ecuațiile cu  $I_0$ , vom avea

$$k_0 = I_0/I_0 = 1 \quad , \quad k_1 = I_0/I_1 = k, \\ \lambda_0 = kh \quad , \quad \lambda_1 = l \quad , \quad \lambda_2 = kh,$$

și deci:

$$M_0 - M_1 + M_2 - M_3 = 0, \\ 2khM_0 + khM_1 + a = 0,$$

$$khM_0 + 2(l + kh)M_1 + lM_2 + 6\Omega_1 - a = 0, \\ (31) \quad lM_1 + 2(l + kh)M_2 + khM_3 + 6\Omega_2 + a = 0, \\ khM_2 + 2khM_3 - a = 0.$$

Din aceste ecuații scoatem:

$$(32) \quad 4M_0 - M_1 + 3M_2 = 0, \\ 4M_3 + 3M_1 - M_2 = 0, \\ 2a + 3kh(M_1 - M_2) = 0.$$

Dacă valorile lui  $M_0$ ,  $M_3$  și  $a$ , scoase din aceste ecuații, le introducem în ecuația treia și a patra din grupul precedent și dacă notăm:

$$(33) \quad A = (\Omega_1 + \Omega_2)/(2l + kh) = \Omega/(2l + kh), \\ B = -3(\Omega_1 - \Omega_2)/(l + 6kh) = \Omega(a - b)/l(l + 6kh),$$

în care  $\Omega$  este suprafața momentelor de pe intervalul 1—2, atunci căpătăm:

$$M_0 = A + B \quad , \quad M_1 = -2A + B \quad , \quad M_2 = -2A - B, \\ M_3 = A - B,$$

expresiuni destul de simple pentru momentele dela colțuri.

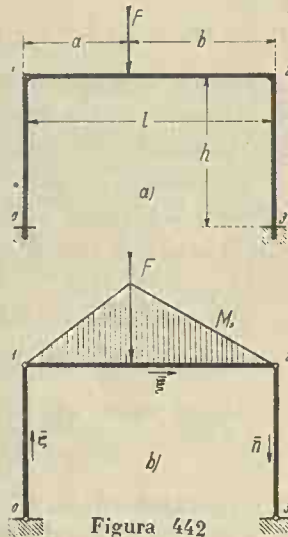


Figura 442



În cazul când grinda este încărcată așa fel încât  $\Omega_1 = \Omega_2$ , cum ar fi de exemplu cazul încărcărilor simetrice, atunci  $B = 0$  și deci

$$M_0 = M_3 = A \quad , \quad M_1 = M_2 = -2A.$$

Pentru o încărcare uniform distribuită pe toată lungimea 1—2, găsim:

$$M_0 = M_3 = \frac{1}{12}Pl_0/(2 + kh/l) \quad , \quad M_1 = M_2 = -\frac{1}{6}Pl^2/(2 + kh/l)$$

Pentru ca să putem găsi valoarea lui  $N_n$  și  $T_n$ , adică forța axială și tăietoare într'o secțiune oarecare datorite cantităților static nedeterminate, va trebui să găsim pe  $\bar{R}$ .

S'a văzut că grupul de momente  $M_0, M_1, \dots$  între cari există relația (27) este echivalent cu trei forțe aplicate după trei direcțiuni oarecari. Luăm deci forțele  $X, Y, Z$  aplicate, de exemplu, după (1—2)  $\bar{\xi}$ , (2—3)  $\bar{\eta}$  și (0—1)  $\bar{\zeta}$ .

Din ecuațiile (26) sau de pe figură, avem:

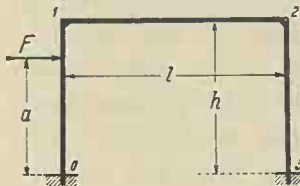
$$hX = M_0 - M_1 = M_3 - M_2 \quad , \quad lY = M_1 \quad , \quad lZ = M_2.$$

Aceste valori ale lui  $X, Y, Z$  introduse în (17) ne dau:

$$\bar{R} = \bar{\xi}(M_0 - M_1)/h + \bar{\eta}M_1/l + \bar{\zeta}M_2/l$$

S'a văzut că  $N_n = -\bar{R}\bar{0}$ . Dacă multiplicăm scalar  $\bar{R}$  cu  $-\bar{\xi}, -\bar{\eta}, -\bar{\zeta}$ , găsim valorile lui  $N_n$  după cele trei direcțiuni. Făcând aceasta găsim:

$$N_{12} = -3A/h \quad , \quad N_{23} = (2A - B)/l \quad , \quad N_{01} = (2A + B)/l.$$



Ca să avem pe  $N$  total, la aceste cantități vom adăuga respectiv pe cele static determinate.

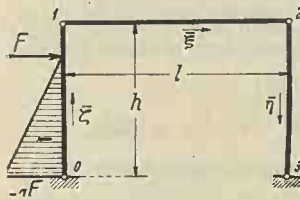


Figura 443

b) Să presupunem același cadru supus la o forță orizontală (fig. 443).

Facem sistemul static determinat introducând în cele patru colțuri câte o articulație. Observăm însă că în acest mod sistemul devine deformabil.

Pentru a împiedeca aceasta este suficient să introducem în  $O$  un moment egal cu  $M_{0s} = -aF$ .

Am putea proceda ca în cazul precedent. Ca variație de aplicație vom proceda după varianta treia, presupunând că grupul static

nedeterminat constă din trei forțe  $X, Y, Z$  aplicate fiecare respectiv după  $(1-2) \bar{\xi}$ ,  $(2-3) \bar{\eta}$  și  $(0-1) \bar{\zeta}$ .

Dacă neglijăm termenii datorți deformațiunilor axiale, s'a văzut că ecuațiile se reduc la grupul (25).

Cu notațiile din (28), după ce am multiplicat totul cu  $I_0$ , și am notat  $I_0/I_1 = k$ , din (23) și (24) scoatem:

$$u_s = kS_{10}, \quad v_s = kl \Omega_{01}, \quad w_s = 0$$

$$u_x = \frac{2}{3} k h^3, \quad v_y = w_z = l^2 \left( \frac{1}{3} l + kh \right), \quad u_y = w_x = \frac{1}{2} k h^2 l, \quad v_z = \frac{1}{6} l^3$$

Dacă punem aceste valori în ecuațiile (21), dacă multiplicăm totul cu 6 și dacă notăm  $\Omega_0 = S_{10}/h$  adică reacțiunea suprafeței momentelor  $\Omega$  pe reazimul 0 considerând grinda 0-1 ca simplu rezemată, atunci căpătăm:

$$(34) \quad \begin{aligned} 6k \Omega_0 + 4k h^2 X + 3k h l Y + 3k h l Z &= 0, \\ 6k \Omega_{01} + 3k h^2 X + 2l(l + 3kh) Y + l^2 Z &= 0, \\ 3k h^2 X + l^2 Y + 2l(l + 3kh) Z &= 0. \end{aligned}$$

Dacă notăm:

$$(35) \quad \begin{aligned} A &= k(2\Omega_1 - \Omega_0)/2(2l + kh), \quad B = 3k\Omega_{01}/(l + 6kh), \\ C &= 3\Omega_0/2h \end{aligned}$$

atunci avem:

$$hX = 3A - C, \quad lY = -2A - B, \quad lZ = -2A + B.$$

Valoarea momentelor la colțuri va fi:

$$M_0 = A - B - C, \quad M_1 = -2A - B, \quad M_2 = -2A + B,$$

$$M_3 = A + B - C$$

expresii de altfel destul de simple.

**Aplicația Nr. 138.** Un cadru cu  $l = 6$  m,  $h = 4$  m,  $I/I_1 = 3/2$ , suportă o sarcină verticală  $F = 1t$  așezată la distanța  $a = 2$  m,  $b = 4$  m. (fig. 444).

Să se afle curba momentelor.

Avem:

$$k = 3/2, \quad \Omega_{12} = \frac{1}{2} F a b = \frac{1}{2} 1 \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ tm}^2$$

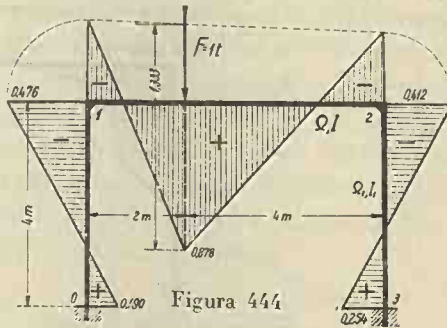
$$A = 4/(2 \cdot 6 + 3 \cdot 4/2) = 0,222 \text{ tm.}$$

$$B = 4(2 - 4)/6(6 + 6 \cdot 3 \cdot 4/2) = -0,032$$

$$M_0 = +0,190 \text{ tm}, \quad M_1 = -0,476 \text{ tm}, \quad M_2 = -0,412 \text{ tm}, \quad M_3 = 0,254 \text{ tm.}$$

În dreptul sarcinii, avem  $M = 0,878$  tm.

Pe figură se vede distribuția acestor momente.



**Aplicația Nr. 139.** Același cadru presupunem că este solicitat de o forță orizontală  $F = 1t$ , aplicată la înălțimea  $a = 3$  m. (fig. 445).

Avem  $M_{os} = -3tm$ ;  $\Omega_{01} = -4,5 tm^2$ ,  $\Omega_0 = -3,4,5/4 = -3,375 tm^2$   
 $\Omega_1 = -1,4,5/4 = -1,125 tm^2$

$$A = 3 (-2,1,125 + 3,375) / 2,2(2,6 + 3,4/2) = 0,047 tm$$

$$B = -3,3,4,5/2(6 + 6,3,4/2) = -0,482 tm$$

$$C = -3,3,375/2,4 = -1,266 tm$$

cari ne dau:

$$M_0 = 1,795 tm, \quad M_1 = 0,388 tm, \quad M_2 = -0,576 tm, \quad M_3 = 0,831 tm.$$

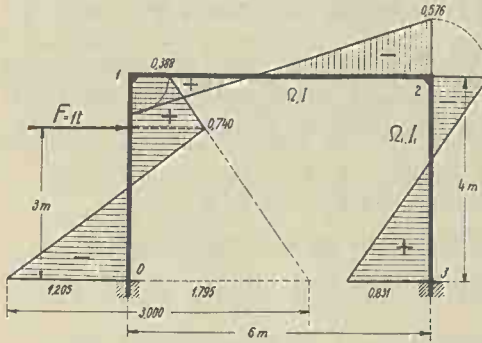


Figura 445

Momentul în nodul 0 va fi  $M_0 = -3 + 1,795 = -1,205 tm$ .

Dacă se face calculul, în dreptul sarcinii  $F$ , găsim  $M = 0,740 tm$ .

Pe figură este indicată variația acestor momente.

**Aplicația Nr. 140.** Același cadru, presupunem că este solicitat de o sarcină orizontală uniform distribuită pe toată înălțimea  $h$  a montanului 0—1.

$$\text{Vom avea: } M_{os} = -\frac{1}{2} p h^2 = -8p, \quad \Omega_{01} = -\frac{1}{2} \int p x^2 dx = -\frac{1}{6} p h^3$$

$$\Omega_0 = S_{10}/h = -\frac{1}{2} \int p x^2 dx / h = -\frac{1}{8} p h^3, \quad \Omega_1 = \Omega_{01} - \Omega_0 = -\frac{1}{24} p h^3$$

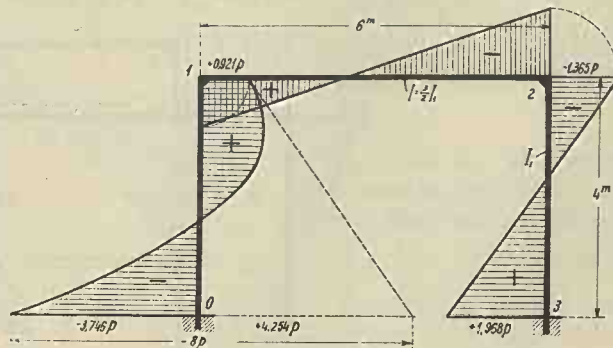


Figura 446

Făcând înlocuirile avem:

$$A = \frac{1}{9} p, \quad B = -\frac{3}{7} p, \quad C = -3 p$$

care ne dă:

$$M_0 = -3,746p, \quad M_1 = 0,921p, \quad M_2 = -1,365p, \quad M_3 = 1,968p.$$

Curba momentelor este trasată pe figura 446.

## F) Cadre închise.

Sunt formate din o grindă continuă care formează circuit închis. Echilibrul lor se asigură în genere prin o articulație și un reazim simplu (fig. 447).

Se vede că un cadru închis este triplu static nedeterminat. În adevăr  $m = 0$ ,  $n = 0$ ,  $r = 3$  și deci  $m + r - n = 3$ .

Pentru calculul lor putem utiliza oricare din variantele indicate. Pare însă avantajos de a face sistemul static determinat introducând 3 articulații arbitrare. Ca sistem static nedeterminat luăm sau grupul  $\bar{R}$ ,  $\bar{M}$  aplicate de preferință în centrul de greutate elastic la încovoiere al cadrului sau grupul  $\bar{R} = X\bar{\xi} + Y\bar{\eta} + Z\bar{z}$  în care componentele  $X, Y, Z$  sunt aplicate după direcția celor trei articulații, ceea ce este echivalent cu grupul de trei momente  $M_0, M_1$  și  $M_2$  aplicate în trei secțiuni arbitrare alese.

Avantajul metodei constă într'aceia că avem cea mai mare libertate în alegerea poziției articulațiilor ceea ce ne permite simplificări de calcule. Semnele momentelor se fixează după norma adoptată la grinzile curbe.

Aplicând acea normă aci rezultă că momentele sunt pozitive când produc într'un element de grindă dreaptă, convexitatea spre interiorul cadrului.

Metoda se pretează și calculului grafic. Pentru a avea pe  $N_s$  și  $M_s$  în orice secțiune a cadrului n'avem decât să facem ca poligonul funicular al forțelor date și al reacțiunilor statice să treacă prin cele trei articulații.

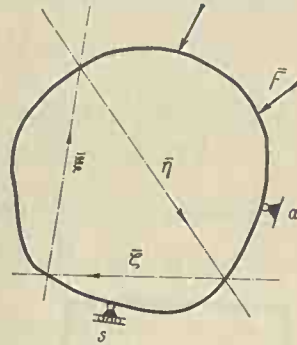


Figura 447

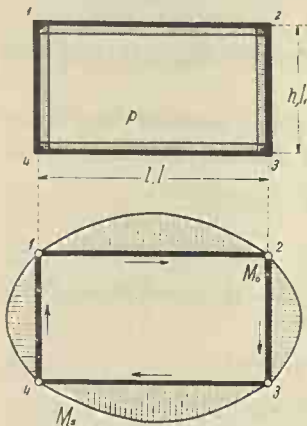


Figura 448

### Cadru dreptunghiular închis.

#### a) Cadru supus la încărcări simetrice.

Să presupunem că este supus la o încărcare uniform distribuită  $p$ . Ar fi cazul unui rezervor dreptunghiular, a unei celule de silos, etc. (fig. 448).

Dacă introducem câte o articulație în fiecare colț se vede că, din motive de simetrie, vom avea același moment în toate colțurile. După norma admisă pentru momente se vede că  $M_s$  vor avea semnul minus. Avem

$$M = -M_s + M_o$$

Aplicând teorema lui *Castigliano* și neglijând influența deplășărilor datorite forțelor axiale, avem

$$-\int M_s d\omega + M_o \int d\omega = 0.$$

Avem apoi:

$$\int M_s d\omega = \frac{1}{6} p (l^3/I + h^3/I_1), \quad \int d\omega = 2 (l/I + h/I_1)$$

Notând:  $k = I/I_1$ , găsim:

$$M_o = p (l^3 + kh^3)/12 (l + kh)$$

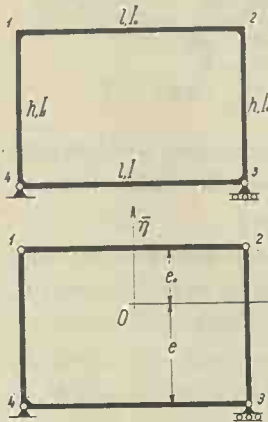


Figura 449

b) Cadru cu o articulație și un reazem simplu.

Fie un cadru complet închis 1—2—3—4 a cărui echilibru este asigurat printr'o articulație în 4 și un reazem simplu în 3 (fig. 449).

Vom aplica prima variantă, făcând sistemul static determinat prin introducerea a trei articulații în nodurile 1, 2 și 3.

Ca sistem static nedeterminat luăm grupul  $\bar{R}, \bar{M}$  aplicat în centrul de greutate elastic al cadrului.

Grupul de ecuații (15), aci ia forma:

$$H = \int M_s y d\omega / \int y^2 d\omega, V = -\int M_s x d\omega / \int x^2 d\omega, M_o = -\int M_s d\omega / \int d\omega$$

Aceste ecuații le vom multiplica cu  $I$ , notând

$$I/I_0 = k_0, \quad I/I_1 = k_1$$

În aceste condiții, greutatea elastică a cadrului este:

$$(36) \quad \int d\omega = l + k_0 l + 2k_1 h.$$



Centrul de greutate elastic îl găsim luând momentul static în raport cu axa care trece pe la jumătatea înălțimii și împărțind cu greutatea elastică. Distanța centrului de greutate dela mijlocul înălțimii spre  $+\bar{\eta}$  este:

$$(37) \quad lh(k_0 - 1)/2(l + k_0l + 2k_1h)$$

cari ne dă:

$$(37) \quad e_0 = h(l + k_1h)/(l + k_0l + 2k_1h), \quad e = h(k_0l + k_1h)/(l + k_0l + 2k_1h).$$

Cu aceste elemente căpătăm:

$$(38) \quad \int y^2 d\omega = h^2 \left[ (2k_0l + k_1h)(2l + k_1h) - k_0l^2 \right] / 3(l + k_0l + 2k_1h)$$

$$\int x^2 d\omega = \frac{1}{12} l^2 (l + k_0l + 6k_1h).$$

Acestea fiind stabilite putem trece la câteva cazuri de încărcări  
1°. Să presupunem grinda 1—2 încărcată cu o sarcină verticală  $F$ . În acest caz, dacă sensul în care parcurgem conturul cadrului este ca în figura 450, momentul produs în grinda 1—2, în sistemul static determinat, este pozitiv.

Notăm ca de obicei  $\Omega = \frac{1}{2} Fab$ .

Avem apoi

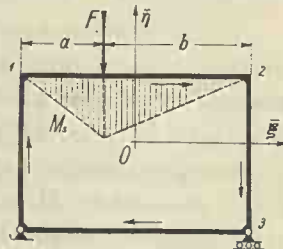


Figura 450

$$(39) \quad \int M_s d\omega = k_0 \Omega, \quad \int M_s y d\omega = k_0 \Omega e_0, \quad \int M_s x d\omega = \frac{1}{6} k_0 \Omega (a - b)$$

cari ne dau:

$$H = 3k_0(l + k_1h) \Omega / h [(2k_0l + k_1h)(2l + k_1h) - k_0l^2],$$

$$(40) \quad V = -2k_0 \Omega (a - b) / l^2 (l + k_0l + 6k_1h),$$

$$M_0 = -k_0 \Omega / (l + k_0l + 2k_1h).$$

În cazul când  $I = \infty$ , dacă notăm:

$$I_0 / I_1 = k,$$

găsim:

$$H = 3 \Omega / h (2l + kh), \quad V = -2 \Omega (a - b) / l^2 (l + 6kh),$$

$$M_0 = -\Omega / (l + 2kh)$$

Ca să avem momentele în orice secțiune, punem aceste valori în expresia  $M = M_s + M_0 - Hy + Vx$ .



Ca să avem momentele la colțuri, facem în această expresie  $M_s = 0$ .

2°. Să presupunem în aceleași condițiuni încărcată grinda 3—4.

În acest caz, conform convenției admise, momentul produs în grinda 3—4, în sistemul static determinat, este negativ.

Notăm deci:  $\Omega = -\frac{1}{2} Fab$ .

Vom avea:

$$(41) \quad \int M_s d\omega = \Omega, \quad \int M_s y d\omega = -\Omega e,$$

$$\int M_s x d\omega = \frac{1}{6} \Omega (a-b),$$

cari ne dau:

$$H = -3(k_0 l + k_1 h) \Omega / h [(2k_0 l + k_1 h)(2l + k_1 h) - k_0 l^2]$$

$$(42) \quad V = -2\Omega (a-b) / l^2 (l + k_0 l + 6k_1 h)$$

$$M_0 = -\Omega / (l + k_0 l + 2k_1 h).$$

3°. Să presupunem în aceleași condiții o forță orizontală pe montantul 4—1 al cadrului la distanța  $a$  de baza lui (fig. 452).

Se vede numai decît că în sistemul static momentele  $M_s$  produse de  $F$  sunt negative. Notăm deci

$$\Omega = -\frac{1}{2} Fal, \quad \Omega_1 = -\frac{1}{2} Fa^2.$$

Vom avea:

$$\int M_s d\omega = \Omega + k_1 \Omega_1, \quad \int M_s y d\omega = -\Omega e - k_1 \Omega_1 (e - \frac{1}{3} a)$$

$$\int M_s x d\omega = -\frac{1}{6} \Omega l - \frac{1}{2} k_1 \Omega_1 l$$

Introducem aceste valori în expresia lui  $H$ ,  $V$  și  $M_0$ .

**Aplicația Nr. 141.** Fie un cadru închis cu  $l = 4$  m,  $h = 3$  m,  $I/I_0 = 2$ ,  $I_0 = I_1$  (fig. 453).

Avem  $k_0 = k_1 = 2$ ,  $\int d\omega = 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ ,  $e_0 = 5/4$  m,  $e = 7/4$  m,

$$\int y^2 d\omega = 3^2 [(2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3)(2 \cdot 4 + 2 \cdot 3) - 2 \cdot 4^2] / 3 \cdot 24 = 69/2 \text{ m}^3,$$

$$\int x^2 d\omega = 4^2 (4 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 3) / 12 = 64 \text{ m}^3.$$

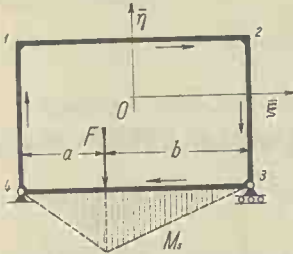


Figura 451

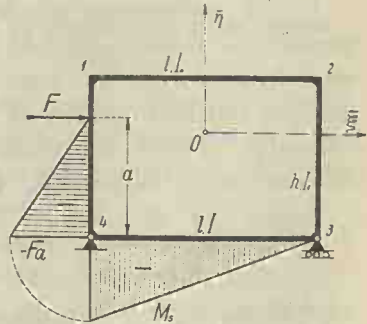


Figura 452

Să presupunem grinda 4—3 încărcată cu o sarcină  $F = 1$  t., așa că  $a = 1$  m  
 $b = 3$  m.

Avem  $\Omega = -1.1.3/2 = -3/2$  tm<sup>2</sup>,  $\int M_s dw = -3/2$ ,

$\int M_s y dw = 3.7/8 = 21/8$ ,  $\int M_s x dw = 3(3-1)/2.6 = 1/2$ .

Cu aceste valori găsim:

$H = 21.2/69.8 = 7/4.23 = 0,0761$  t,

$V = -1/2.6^4 = -0,0078$  t,

$M_0 = 3/2.2^4 = 1/16 = 0,0625$  tm.

Cu aceste valori avem:

$H e_0 = 0,0951$  tm.,

$H e = 0,1332$  tm.,  $\frac{1}{2} V l = 0,0156$  tm.

cu cari obținem momentele la colțuri:

$M_1 = -0,017$  tm ,  $M_2 = -0,048$  tm,

$M_3 = 0,180$  tm ,  $M_4 = 0,211$  tm.

Momentul în dreptul sarcinii este  $-0,547$  tm.

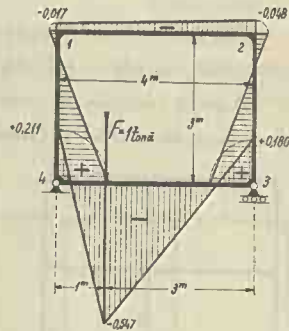


Figura 453

**Aplicația Nr. 142.** Să presupunem același cadru supus la o forță orizontală  $F = 1$  t aplicată în nodul 1 (fig. 454).

Avem:  $\Omega = -1.3.4/2 = -6$  tm<sup>2</sup>,  $\Omega_1 = 1.3.3/2 = -9/2$  tm<sup>2</sup>.

$\int M_s dw = -6 - 9.2/2 = -6 - 9 = -15$

$\int M_s y dw = 6.7/4 + 9 (7/4 - 1) = 69/4$

$\int M_s x dw = 6.4/6 + 9.4/2 = 22$

cari ne dau

$H = \frac{1}{2}$  t,  $V = -11/32$  t,  $M_0 = 5/8$  tm

$H e_0 = 5/8$  tm  $H e = 7/8$  tm  $\frac{1}{2} V l = 11/16$  tm

cu ajutorul cărora găsim momentele la colțuri:

$M_1 = 11/16$  tm ,  $M_2 = -11/16$  tm,

$M_3 = 13/16$  tm ,  $M_4 = +35/16$  tm.

Dacă se ține seamă că  $M_{4s} = -3$  tm, atunci avem momentul în 4:

$M_4 = -13/16$  tm.

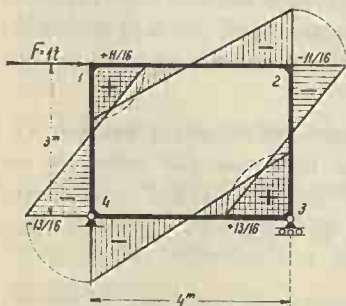


Figura 454

## G) Cadre multiple.

### 1. Generalități.

Vom numi astfel o construcțiune făcută dintr'o serie de bare legate la extremitățile lor numai prin incastrări sau prin incastrări și articulații.

Dacă barele ar fi legate numai prin articulații, am avea un sistem articulată, adică o grindă cu zăbrele.

Barele formează o serie de poligoane închise. Chiar poligoanele deschise cari leagă barele de reazime, le putem considera închise cu bare rigide așa cum se arată punctat pe figura 455.



Figura 455

Așa fiind, întreaga construcțiune poate fi considerată ca formată din juxtapunerea a o serie de cadre elementare. La calculul lor se ține seama, în genere, numai de deformațiunile datorite momentelor încovoietoare. Chiar cu această aproximație, calculul lor este greu din cauza marelui

număr de necunoscute static nedeterminate și de aceea o coordonare a acestor calcule este necesară.

Vom urma exact aceeași normă de calcul, oarecum generalizată, pe care am indicat-o la cadrele elementare.

#### a) Partea statică.

Vom face mai întâiu cadrul într'un mod oarecare static determinat. Prima soluție, ce ni se impune, este de a introduce câte o articulație în fiecare nod. Două cazuri se pot întâmpla. Întâiu: se poate întâmpla să cădem peste un sistem rigid static determinat. În acest caz avem de-aface cu o grindă cu zăbrele în care putem determina eforturile din bare.

În cazul general însă, cădem peste un sistem deformabil.

Pentru a face sistemul rigid, putem lega nodurile între ele cu bare articulate la extremități, ceea ce nu ne permite construcția sau prin introducerea de momente  $M_s$  la legătura între două bare oarecari.

Ne vom explica mai bine pe un exemplu. Să avem cadrul format din grinda continuă 1—3—5—7 care reazimă pe stâlpii 0—1, 2—3.

4—5, și 6—7, incastrați în grindă și articulați în reazimile 0, 2, 4 și 6 (fig. 456).

Dacă introducem articulații în nodurile 1, 3, 5 și 7, se vede că sistemul este deformabil. Pentru a împiedeca această deformare e suficient a lega între ele, de exemplu, nodurile 2 și 5 cu bara 2—5, sau ceea ce este tot una cu a considera barele 2—3 și 3—5 incastrate numai între ele în nodul 3. Dacă efortul din bara 2—5 este  $X$ , atunci

$$M_{235s} = d \cdot X.$$

În cazul cadrului considerat ca exemplu, se vede că în cazul unei forțe verticale oarecari  $M_{235s} = 0$ , iar în cazul unei forțe orizontale  $F$  aplicate la distanța  $a$  dela reazim, avem  $M_{235s} = aF$ , momentul în nodul 3 fiind  $aF$  și barele articulate în 2 și 5. Pe figură se vede distribuția lor liniară.

În loc de a proceda prin acest înconjur, putem proceda direct și anume: *introducem la capetele barelor atâtea articulații câte sunt necesare pentru a transforma cadrul dat în unul rigid și static determinat.*

S'au dat normele după care putem recunoaște aceasta.

Așa fiind, putem determina toate momentele  $M_s$  și toate forțele axiale  $N_s$  din toate barele cadrului.

Pentru aceasta vom utiliza ecuațiile de echilibru ce ni le dă statica sau principiul lucrului mecanic virtual, după cum s'a făcut în exemplul de care ne-am ocupat.

#### b) Alegerea necunoscutelor static nedeterminate și ecuațiile de legătură.

Luăm ca necunoscute *momentele* ce se dezvoltă la capetele barelor.

Așa dar, vom considera toate barele articulate în noduri și la capetele lor acționând o serie de momente static nedeterminate necunoscute.

Între acestea există o serie de relații statice.

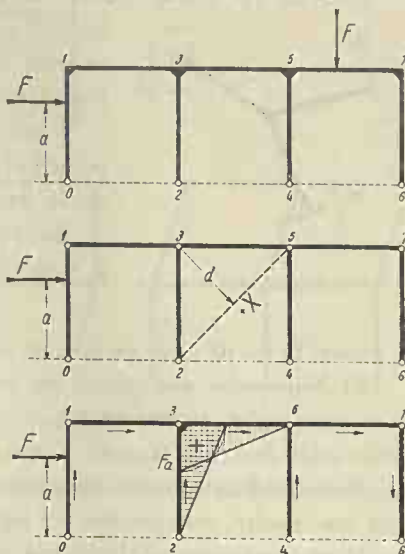


Figura 456

Să le găsim.

a) Să considerăm un nod  $i$  oarecare (fig. 457).

Dacă separăm nodul și introducem la capul barelor momentele  $M_{i1}$   $M_{i2}$   $M_{i3}$  etc., atunci, pentru echilibru, va trebui ca suma lor să fie nulă.

Pentru prescurtarea scrisului și pentru ca să nu târîm după noi mereu litera  $M$ , vom nota  $M_{i1} = \bar{i}1$ ,  $M_{i2} = \bar{i}2$ , etc.

Deci vom avea:

$$(43) \quad f_1 = \bar{i}1 + \bar{i}2 + \bar{i}3 = 0 \quad (\alpha)$$

Aceasta se referă numai la cantitățile static nedeterminate, fiindcă momentele  $M_s$ , din sistemul static, satisfac această relație pentru că așa au fost determinate.

Vom avea atâtea relațiuni (43) câte noduri avem în cari se întîlnesc mai mult decât două bare.

Evident că această relație se aplică și nodurilor cu două bare în care avem:

$$\bar{i}1 + \bar{i}2 = 0,$$

și atunci în loc de a lua pe  $\bar{i}1$  și pe  $\bar{i}2$  ca necunoscută, luăm numai pe  $\bar{i}$ .

b) Sistemului dat, fiind în echilibru sub acțiunea forțelor date și a eforturilor interioare (momente și forțe axiale), i se aplică principiul lucrului mecanic virtual.

Sistemul fiind făcut complet articulată, să-i dăm o deplasare, sau mai multe, compatibile cu legăturile sale.

Vom presupune că lungimea barelor rămâne constantă.

Momentele  $M_s$  din noduri și forțele  $F$ , fiind un sistem de sollicitări cari își fac echilibru, satisfac ecuația lucrului mecanic virtual. Atunci rezultă că și grupul de sollicitări static nedeterminat trebuie să satisfacă singur ecuația lucrului mecanic virtual.

Dacă bara  $i-k$ , care leagă nodurile  $i$  și  $k$ , se rotește cu  $\theta_{ik}$  și dacă momentele la cele două extremități sunt  $\bar{i}k$  și  $\bar{k}i$ , vom avea

$$(44) \quad f_2 = \Sigma (\bar{i}k - \bar{k}i) \theta_{ik} = 0 \quad (\beta),$$

pentru că aceeași bară se rotește cu același unghi  $\theta_{ik}$ .

Să presupunem că dând o rotație barei  $i-k$ , o parte din bare se rotesc iar altele nu. Pentru aceste din urmă bare  $\theta_{ik} = 0$ . Așa

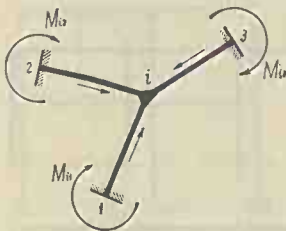


Figura 457



dar, sub semnul sumei intră numai barele cari se rotesc. Să ne explicăm. Să avem cadrul din figura 458. Introducând articulații în toate nodurile și dacă dăm o rotire barei 0—1, observăm că odată cu ea se rotesc numai barele 3—4 și 6—7, celelalte rămânând paralele cu ele însăși.

Așa dar, sub semnul sumei din ecuația (44) vor fi numai barele 0—1, 3—4 și 6—7. Să presupunem că dăm o rotire barei 1—2. Se vede numaidecât că această deplasare este diferită de precedenta și că sub

semnul sumei vor intra numai barele 1—2, 4—5 și 7—8.

Să dăm o rotire barei 1—4. Se vede iarăși că aceasta este imposibil, pentru că am presupus că lungimea barelor rămâne constantă. În aceste condiții, intră și barele 4—7, 2—5 și 5—8. În cazul exemplului luat

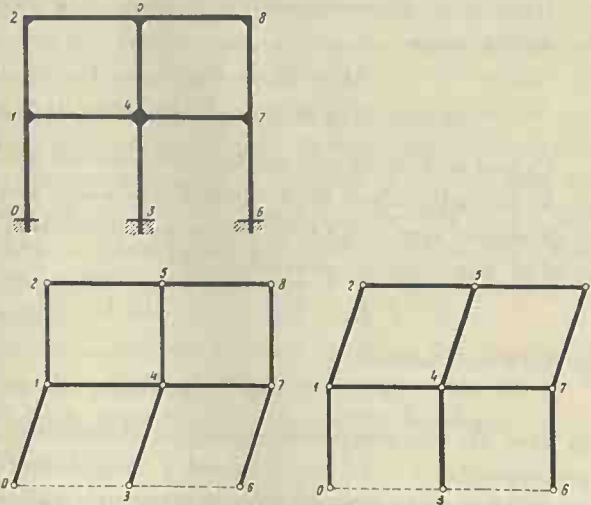


Figura 458

se vede că putem da cadrului, considerat articulat în nodurile sale, două deplasări distincte.

Vom avea deci atâtea ecuații (44) câte deplasări distincte putem da diverselor porțiuni de cadru.

Cu ajutorul cunoștințelor căpătate la „Deplasările virtuale” ale sistemelor articulate, putem afla toate unghiurile  $\theta_{ik}$ , pentru fiecare deplasare distinctă. Se știe că pentru o aceeași deplasare distinctă, putem exprima pe  $\theta_{ik}$  în funcțiune de un singur unghi pe care putem să-l luăm egal și cu 1.

În rezumat, relația (43) stabilește o relație statică între momentele dela capetele tuturor barelor cari se întâlnesc în același nod, iar relația (44) o relație statică între momentele dela capetele tuturor barelor cari aparțin aceleiași mișcări distincte.

În cazul figurii 458, vom avea 4 ecuații de forma (43) și două de forma (44).



## c) Aplicarea teoremei lui Castigliano.

În aceste condițiuni să aplicăm teorema lui *Castigliano* luând ca necunoscute momentele dela capetele barelor și ținând apoi seamă, cu ajutorul coeficienților nedeterminați  $\alpha, \beta, \dots$ , că între toate aceste momente există legăturile date de ecuațiile (43) și (44), pe cari în cele ce urmează le vom numi ecuațiile  $\alpha$  și  $\beta$ . Se știe că avem:

$$(45) \quad \partial L / \partial \bar{i}k + \alpha \partial f_1 / \partial \bar{i}k + \beta \partial f_2 / \partial \bar{i}k + \dots = 0.$$

Dacă  $\bar{i}k$  și  $\bar{k}i$  sunt momentele dela extremitățile barei  $i-k$ , se știe că avem

$$M = M_s + \bar{i}k x' / l_{ik} + \bar{k}i x / l_{ik}, \\ \partial L / \partial \bar{i}k = (2 \bar{i}k l_{ik}^2 / 6 + \bar{k}i l_{ik}^2 / 6 + S_{ki}) / EI_{ik} l_{ik}.$$

Cadrul se face de obicei în întregime din același material, deci nu se schimbă nimic dacă multiplicăm toate ecuațiile cu  $E$ . Dacă multiplicăm apoi toate ecuațiile cu un moment de inerție arbitrar  $I$ , notând după norma ecuațiilor (28):

$$I / I_{ik} = k_{ik}, \dots ; \quad k_{ik} l_{ik} = \lambda_{ik}, \dots$$

și dacă mai notăm

$$k_{ik} S_{ki} / l_{ik} = \Omega_i,$$

în care  $\Omega_i$  este reacțiunea suprafeței momentelor  $\Omega_{ik} = \int M_s ds$ , de pe intervalul  $i-k$ , în rezimul  $i$  considerând grinda  $l_{ik}$  simplu rezemată în extremitățile sale, când ecuația (45) ia forma:

$$(46) \quad 2\lambda_{ik} \bar{i}k + \lambda_{ik} \bar{k}i + 6\Omega_i + \alpha \partial f_1 / \partial \bar{i}k + \beta \partial f_2 / \partial \bar{i}k + \dots = 0.$$

În cazul când în nodul  $i$  se întâlnesc numai două bare  $1-i$  și  $i-2$  și dacă momentul din nodul  $i$  se notează cu  $\bar{i}$ , refăcând calculul de mai sus, găsim:

$$(46) \quad \lambda_{1i} \bar{1}i + 2(\lambda_{1i} + \lambda_{i2}) \bar{i} + \lambda_{i2} \bar{2}i + 6\Omega_i + \alpha \partial f_1 / \partial \bar{i} + \beta \partial f_2 / \partial \bar{i} + \dots = 0$$

în care  $\Omega_i$  are valoarea:

$$k_{1i} S_{1i} / l_{1i} + k_{i2} S_{2i} / l_{i2} = \Omega_i.$$

Ecuațiile (46) le vom numi ecuațiile lui *Clapeyron*.

Ecuațiile ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) și (46) rezolvă complet problema.

*Mersul de urmat este următorul.* Se rezolvă mai întâiu ecuațiile lui *Clapeyron* găsim valorile momentelor  $\bar{i}k, \bar{i}, \dots$  în funcțiune de coeficienții nedeterminați  $\alpha, \beta$  și de încărcări, bine înțelese.

Din faptul că un moment oarecare, de exemplu  $\bar{i}k$ , nu intră în toate ecuațiile (46) rezultă că această rezolvare o putem face pe grupe de 2, 3, 4... ecuații, cu tot atâtea necunoscute.

Forma specială a ecuațiilor (46) înlesnește foarte mult această rezolvare.

Dacă acum introducem momentele  $\overline{ik}, \overline{i}, \dots$  în ecuațiile ( $\beta$ ) găsim valorile lui  $\beta$  în funcțiune de coeficienții  $a$  și de încărcări.

Forma simplă a ecuațiilor ( $\beta$ ) ne permite să găsim ușor coeficienții  $\beta$ .

Putem acum exprima momentele numai în funcțiune de încărcări și de coeficienții  $a$ .

Aceste valori duse în ecuațiile ( $a$ ) ne dau valorile lui  $a$  în funcțiune de încărcări. Așa dar, totul se reduce la rezolvarea ecuațiilor ( $a$ ).

Am putea proceda și invers și anume să găsim întâiu coeficienții  $a$  în funcțiune de  $\beta$  și încărcări, făcând uz întâiu de ecuațiile ( $a$ ). Atunci, evident, vom exprima momentele în funcțiune de încărcări și coeficienții  $\beta$ . Acestea introduse în ecuațiile ( $\beta$ ) ne dă prin rezolvare valorile lui  $\beta$ . Vom proceda, după cazuri, într'un fel sau altul. E comod însă ca atunci când numărul ecuațiilor ( $\beta$ ) e mai mic ca acela al ecuațiilor ( $a$ ) să găsim pe  $\beta$  în funcție de  $a$  și să rezolvăm ecuațiile ( $a$ ).

Avantajul metodei constă într'aceia că ecuațiile date le putem rezolva pe grupe cu un număr restrâns de necunoscute.

Astfel am găsit toate momentele dela capetele barelor.

#### d) Fixarea semnelor cantităților static determinate și static nedeterminate.

Semnele momentelor din cele trei serii de ecuații trebuie să fie în concordanță. Pentru aceasta este suficient ca dela început să ne fixăm semnul momentului în fiecare cap de bară. Este bine însă ca și în această chestiune să ne fixăm oarecare norme.

Vom adopta și aci normele dela cadrele elementare. Prin urmare, pentru fiecare cadru elementar ne vom fixa sensul pozitiv în care parcurgem elementul  $ds$  a fiecărei bare. Pentru barele cari fac parte numai dintr'un cadru, chestiunea este clară, întru cât ea este solicitată numai de grupul  $\overline{R}, \overline{M}$  al cadrului căreia aparține.

O bară însă care separă două cadre elementare, va fi solicitată de grupurile static nedeterminate  $\overline{R}, \overline{M}$  a cadrelor pe cari le separă.

Această bară într'o secțiune oarecare are un singur moment și numai un fel de curbura. Dacă momentul încovoietor și curbura acestei bare după convențiile dintr'un cadru sunt pozitive, atunci după convenția din cadrul alăturat sunt negative.

Intr'adevăr, să presupunem că bara  $i-k$  separă cadrele 1 și 2 (fig. 459). Să presupunem că ne-am fixat sensul pozitiv în care parcurgem cele două cadre. Să presupunem că într'o secțiune a barei comune, grupul static nedeterminat a cadrului 1 produce momentul pozitiv  $M_1$ , cu semnul fixat după convenția acestui cadru. Acest semn este cel din figură. În aceeași secțiune, grupul static nedeterminat al cadrului 2 produce, după convenția din acest cadru, momentul pozitiv  $M_2$ , al cărui sens pozitiv este de asemenea indicat pe figură. Se vede, numai de câțât, că aceste momente se aplică pe fețele *opuse* ale aceleiași secțiuni. Prin urmare, în *aceiași* față a secțiunii momentul pozitiv după convenția din cadrul 1 va fi  $M_1 - M_2$ , iar după aceea din cadrul 2:  $M_2 - M_1$ .

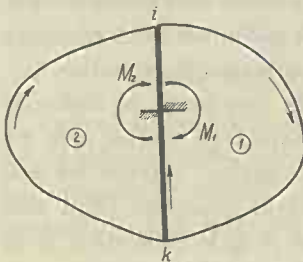


Figura 459

Pentru a înlătura orice ambiguitate, ne fixăm chiar dela început ca semnul momentelor din bara comună îl vom fixa, de exemplu, numai după convenția din cadrul 1, indicând aceasta prin o săgeată pusă de-a-lungul barei.

Aceiași normă se aplică forțelor axiale și cantităților static determinate.

#### Observarea I-a.

Să presupunem că în nodul  $i$  se întâlnesc mai multe bare cari aparțin mai multor cadre elementare (fig. 460).

Să presupunem că am calculat momentul în nodul  $i$  datorit grupului static nedeterminat aparținând cadrului 1 și pe care-l vom nota pur și simplu  $M_{i1}$ . Să presupunem că în același mod calculăm, în același nod  $i$ , momentul ce rezultă din cadrul elementar 2 și pe care-l vom nota  $M_{i2}$ , etc. Aceste momente le vom numi *momente în nod datorite cadrului cutare*.

Pentru simplificarea scrisului și ca să nu târim mereu după noi litera  $M$ , le vom nota prescurtat:

$$M_{i1} = \bar{i}_1, \quad M_{i2} = \bar{i}_2, \dots,$$

spre deosebire de  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots$  cari sunt *momentele produse la capetele barelor*  $i-1, i-2, \dots$  în imediata vecinătate a nodului  $i$ .

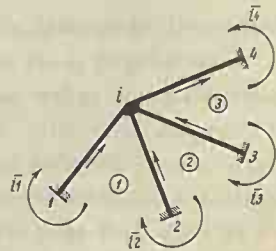


Figura 460

După normele de mai sus avem după fig. 460:

$$(47) \quad \begin{aligned} \bar{i}_1 &= \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 &= \bar{i}_2 - \bar{i}_1 \\ \bar{i}_3 &= \bar{i}_3 - \bar{i}_2 \\ \bar{i}_4 &= \bar{i}_3. \end{aligned}$$

Aceste relațiuni ne permit să găsim în fiecare nod momentul datorit fiecărui cadru elementar.

Cu ajutorul acestora găsim grupul  $X, Y, Z$  al fiecărui cadru elementar și deci forțele axiale și tăietoare în orice secțiune a barelor precum și reacțiunile în reazime și bare datorite cantităților static nedeterminate.

În treacăt se observă că dacă adunăm ecuațiile (47), dăm peste ecuațiile  $a$ .

**Observarea 2-a.** După ce am rezolvat problema se dă de obicei o reprezentare grafică a variației momentelor pe fiecare bară.

În conformitate cu cele stabilite până acum, convenim ca ordonatele ce reprezintă valoarea momentelor să le purtăm de partea barei unde momentele sunt pozitive.

În acest mod, curba momentelor ne va indica sensul în care are loc conexitatea barei și deci regiunea întinsă a secțiunii.

Dacă ne conformăm acestei convențiuni, în diagrama variației momentelor am putea să ne dispensăm de a mai pune semnele plus și minus.

Acest fapt își are importanța sa, mai ales la cadrele de beton armat unde trebuie să știm cu precizie care sunt părțile întinse ale secțiunilor.

O simplă inspectare a diagramei momentelor ne arată aceasta.

În acest mod, curba momentelor ne indică chiar modul cum se deformează cadrul, putând astfel schița forma lui în stare deformată.

De această convențiune am ținut seamă în toate reprezentările grafice de până acum.

Această metodă a coeficienților nedeterminați putem să o aplicăm tot așa de bine și cadrelor elementare, oricare ar fi gradul lor de nestaticitate (1—3).

Ea este generală și comodă pentru calcule numerice.

## 2. Cadre articulate în reazime.

Un cadru este format dintr'o grindă continuă 1—3—5 și din stâlpii 0—1, 2—3 și 4—5, incastrați în 1, 3 și 5 în grindă și articulați în reazimile 0, 2 și 4 (fig. 461).



Grinda are deschiderile  $l$  și momentul de inerție  $I$ , iar stâlpii înălțimea  $h$  și momentul de inerție  $I_1$ .

Presupunem că pe deschiderea 1—3 avem o forță verticală  $F$ , așezată la distanțele  $a$  și  $b$  de nodurile 1 și 3.

Dacă notăm  $I/I_1 = k$ , atunci pentru grindă avem  $\lambda = l$ , iar pentru stâlp  $\lambda = kh$ .

Facem sistemul static determinat introducând 3 articulații în 1, 3 și 5. Sub acțiunea sarcinei verticale sistemul este în echilibru și un este

nevoie să mai introducem vreun moment care să asigure echilibrul sistemului.

Se știe că avem:

$$\Omega = \frac{1}{2} F a b,$$

$$\Omega_{1(13)} = F a b (l + b) / 6 l,$$

$$\Omega_{3(13)} = F a b (l + a) / 6 l$$

Dacă aplicăm ecuația  $a$  nodului 3, avem:

$$f_1 = \bar{31} + \bar{32} - \bar{35} = 0 (a).$$

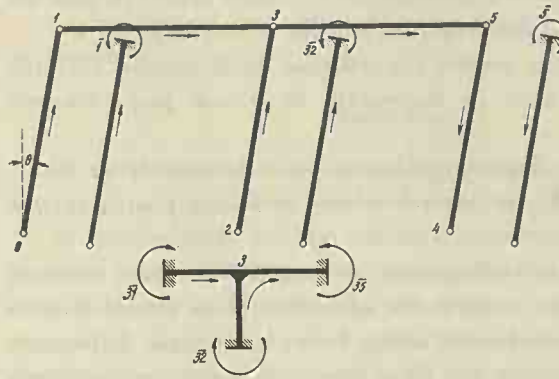
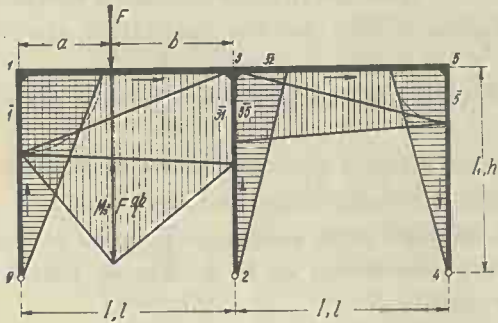


Figura 461

Să aplicăm ecuația ( $\beta$ ) dând o deplasare sistemului ca în figură. Se vede numai decât că momentele  $\bar{13}$ ,  $\bar{31}$ ,  $\bar{35}$  și  $\bar{53}$  nu se rotesc deloc, iar momentele  $\bar{10}$ ,  $\bar{32}$  și  $\bar{54}$  se rotesc cu același unghi. Inșă, după ecuația (47), avem  $\bar{10} = \bar{1}$  și  $\bar{54} = \bar{5}$ . Ecuația ( $\beta$ ) ne dă:

$$f_2 = \bar{1} + \bar{32} - \bar{5} = 0 (\beta).$$

Acum aplicăm diverselor porțiuni de cadru ecuațiile lui *Clapeyron* ținând seamă, cu ajutorul coeficienților nedeterminați  $a$  și  $\beta$ , de cele două ecuații de legătură de mai sus.

Vom avea:

$$(46) \quad 2(l + kh) \bar{1} + l \bar{31} + 6 \Omega_1 + \beta = 0,$$

$$l \bar{1} + 2l \bar{31} + 6 \Omega_3 + a = 0,$$

$$(46) \quad \begin{aligned} 2kh\bar{32} + \alpha + \beta &= 0, \\ 2l\bar{35} + l\bar{5} - \alpha &= 0, \\ l\bar{35} + 2(l + kh)\bar{5} - \beta &= 0. \end{aligned}$$

Am putea rezolva analitic acest sistem de ecuații. Osteneala este de prisos. Este bine ca în aceste ecuații să se pue valorile numerice ale lui  $l$ ,  $h$  și  $k$ .

**Aplicația Nr. 143.** Fie  $l = 4$  m,  $h = 3$  m,  $k = 2$ .  
Vom avea:

$$(46) \quad \begin{aligned} 20.\bar{1} + 4.\bar{31} + 6\Omega_1 + \beta &= 0, \\ 4.\bar{1} + 8.\bar{31} + 6\Omega_3 + \alpha &= 0, \\ 12.\bar{32} + \alpha + \beta &= 0, \\ 8.\bar{35} + 4.\bar{5} - \alpha &= 0, \\ 4.\bar{35} + 20.\bar{5} - \beta &= 0, \end{aligned}$$

din cari scoatem:

$$\begin{aligned} 36.\bar{1} &= -6(2\Omega_1 - \Omega_3) + \alpha - 2\beta, \\ 36.\bar{31} &= 6(\Omega_1 - 5\Omega_3) - 5\alpha + \beta, \\ 36.\bar{32} &= -3(\alpha + \beta), \\ 36.\bar{35} &= 5\alpha - \beta, \\ 36.\bar{5} &= -\alpha + 2\beta. \end{aligned}$$

Introducând aceste valori în ecuațiile (a) și (b), găsim:

$$\begin{aligned} 13\alpha + \beta &= 6(\Omega_1 - 5\Omega_3), & \alpha + 7\beta &= -6(2\Omega_1 - \Omega_3), \\ 10\alpha &= 6\Omega_1 - 24\Omega_3, & 10\beta &= -18\Omega_1 + 12\Omega_3. \end{aligned}$$

Cu ajutorul acestora, găsim:

$$\begin{aligned} \bar{1} &= (-13\Omega_1 + 2\Omega_3)/60; & \bar{31} &= (\Omega_1 - 14\Omega_3)/30 \\ \bar{32} &= (\Omega_1 + \Omega_3)/10 = \Omega/10; & \bar{35} &= (4\Omega_1 - 11\Omega_3)/30 \\ \bar{5} &= (-7\Omega_1 + 8\Omega_3)/60 \end{aligned}$$

a) Să presupunem deschiderea 1-3 încărcată cu o sarcină uniform distribuită  $p$  kg./m.

Vom avea  $\Omega_1 = \Omega_3 = \frac{1}{2}\Omega = 8p/3$

Inlocuind în formulele de mai sus avem:

$$\begin{aligned} \bar{1} &= -22p/45 \text{ tm.}, & \bar{31} &= -52p/45 \text{ tm.}, & \bar{32} &= 24p/45 \text{ tm.}, \\ \bar{35} &= -28p/45 \text{ tm.}, & \bar{5} &= 2p/45 \text{ tm.} \end{aligned}$$



b) Să presupunem deschiderea 1—3 încărcată cu o sarcină verticală  $F=1t$ , așezată la distanțele  $a=1m$ ,  $b=3m$  (fig. 462).

Avem:  $\Omega = 1 \cdot 1 \cdot 3/2 = 3/2$ ,  $\Omega_1 = 1 \cdot 1 \cdot 3(4+3)/6 \cdot 4 = 7/8$ ,  $\Omega_3 = 5/8$ .

Cu aceste valori găsim:  $\bar{1} = -27/160$  tm.,  $\bar{3} = -42/160$  tm.,  $\bar{5} = 24/160$  tm.,  $\bar{35} = -18/160$  tm.,  $\bar{5} = -3/160$ . In dreptul sarcinei găsim  $89,25/160$  tm.

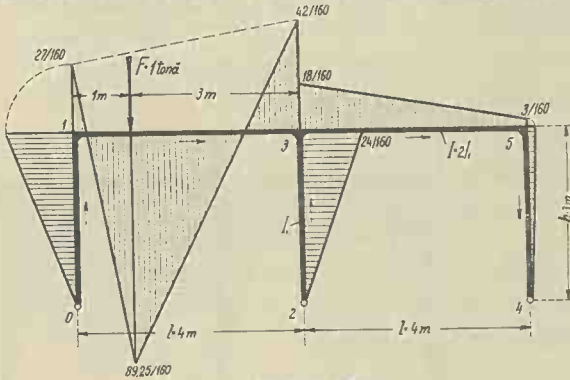


Figura 462

Curba momentelor este indicată pe figura 462.

c) Să presupunem același cadru supus la o forță orizontală  $F$  aplicată la înălțimea  $a$  (fig. 463).

Făcând sistemul static prin introducerea a câte o articulație în 1, 3 și 5, se vede că sistemul se deformează. Pentru a-i asigura echi-

librul este suficient să introducem în 1 un moment  $\bar{1}_s = aF$ .

Suprafața momentelor de pe stâlp, (fig. 463), dă în 1 o reacțiune:

$$\Omega_{1(10)} = \frac{1}{2} F a h - F a^3/6 h.$$

Suprafața momentelor de pe grindă dă în 1 o reacțiune egală cu  $\Omega_{1(13)} = \frac{1}{3} F a l$  iar în 3,  $\Omega_{3(13)} = \frac{1}{6} F a l$ . Valoarea lui  $\Omega_1$ , în 1, va fi

$$\Omega_1 = k \Omega_{1(10)} + \Omega_{1(13)}.$$

Dacă aplicăm ecuațiile precedente, găsim exact același lucru cu singura deosebire, că în prima ecuație, în loc de  $\Omega_{1(13)}$  vom pune valoarea lui  $\Omega_1$  de mai sus.

Prin urmare, formulele găsite, cu această înlocuire, rămân exact aceleași.

*Exemplu numeric.* Să presupunem cadrul din exemplul precedent supus la o forță orizontală  $F=1t$ , aplicată la distanța  $a=2.4m$ .

Avem:

$$\bar{1}_s = + aF = 2,4 \text{ tm}; \Omega_{1(10)} = 1 \cdot 2,4 \cdot 3/2 - 1 \cdot 2,4^3/6 \cdot 3 = 2,838,$$

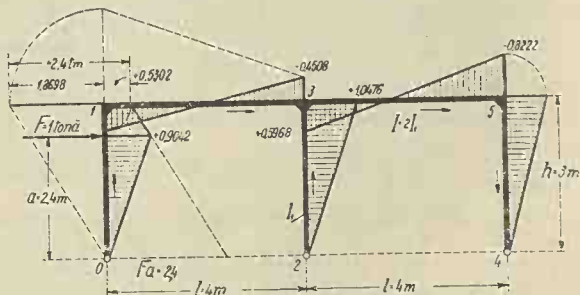


Figura 463

$$\Omega_{1(13)} = 1.2.4.4/3 = 3,200; \quad \Omega_{3(13)} = 1.2.4.4/6 = 1,600;$$

$$\Omega_1 = 2.2,838 + 3,200 = 8,876;$$

$$\bar{1} = -1,8698 \text{ tm}; \quad \bar{5} = 0,8222 \text{ tm};$$

$$\bar{32} = 1,0476 \text{ tm}; \quad \bar{31} = -0,4508 \text{ tm}; \quad \bar{35} = +0,5968 \text{ tm}.$$

În dreptul sarcinii, avem momentul  $+0,9042 \text{ tm}$ . Curba momentelor este trasată pe figura 463.

### 3. Cadre încastrate în reazime.

Să considerăm același cadru, însă încastrat în reazimile 0, 2 și 4.

Odată semnele momentelor fixate (fig. 464), ecuația (a) ne dă:

$$f_1 = \bar{31} + \bar{32} - \bar{35} = 0 \text{ (a)}.$$

Dacă introducem articulații în toate nodurile și în reazime și dacă dăm o deplasare virtuală cadrului, se vede că se rotesc cu același unghi  $\theta$  numai barele 0—1, 2—3 și 4—5.

Ecuația  $\beta$ ), ținând seamă și de (47), ne dă:

$$f_2 = \bar{0} - \bar{1} + \bar{2} - \bar{32} - \bar{4} + \bar{5} = 0 \text{ (}\beta\text{)}.$$

Pentru precizare, vom presupune numai grinda 1—3 încărcată cu sarcini verticale. Se vede că pentru a asigura echilibrul static n'avem nevoie de niciun moment  $M_s$ .

Să scriem ecuațiile lui *Clapeyron*. Vom avea:

$$2kh\bar{0} + kh\bar{1} + \beta = 0; \quad kh\bar{0} + 2(l + kh)\bar{1} + l\bar{31} + 6\Omega_1 - \beta = 0,$$

$$\bar{1} + 2l\bar{31} + 6\Omega_3 + a = 0,$$

$$(46) \quad 2kh\bar{2} + kh\bar{32} + \beta = 0; \quad kh\bar{2} + 2kh\bar{32} + a - \beta = 0,$$

$$2l\bar{35} + l\bar{5} - a = 0; \quad l\bar{35} + 2(l + kh)\bar{5} + kh\bar{4} + \beta = 0,$$

$$2kh\bar{4} + kh\bar{5} - \beta = 0.$$

**Aplicația No. 144.** Fie  $l = 4 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ ,  $k = 2$ . Avem:

$$12.\bar{0} + 6.\bar{1} + \beta = 0; \quad 6.\bar{0} + 20.\bar{1} + 4.\bar{31} + 6\Omega_1 - \beta = 0; \quad 4.\bar{1} + 8.\bar{31} + 6\Omega_3 + a = 0;$$

$$12.\bar{2} + 6.\bar{32} + \beta = 0; \quad 6.\bar{2} + 12.\bar{32} + a - \beta = 0;$$

$$8.\bar{35} + 4.\bar{5} - a = 0; \quad 4.\bar{35} + 20.\bar{5} + 6.\bar{4} + \beta = 0; \quad 12.\bar{4} + 6.\bar{5} - \beta = 0.$$



$$\bar{31} = -1,158 \text{ tm}; \quad \bar{2} = -0,345 \text{ tm}; \quad \bar{32} = 0,583 \text{ tm}; \quad \bar{35} = -0,575 \text{ tm}; \\ \bar{5} = 0,079 \text{ tm}; \quad \bar{4} = 0,014 \text{ tm}.$$

Pe baza acestor date și cu convențiunile admise am trasat curba momentelor.

De asemenea pe baza acestor momente s'a schițat deformațiunea cadrului, indicându-se punctele de inflexiune.

Dacă se consideră nodurile 0, 2 și 4 fixe, cum de fapt și sunt, și dacă se calculează deplasarea nodurilor 1, 3 și 5 se constată că ea există și este aceeași pentru toate aceste noduri. Așa dar, sub acțiunea sarcinilor verticale nodurile cadrului capătă deplasări orizontale în planul cadrului.

Se poate demonstra că aceste deplasări sunt nule numai în cazul când punctele de inflexiune sunt la a treia parte a înălțimii.

De aceste deplasări s'a ținut seamă la schițarea deformației cadrului.

Pentru a completa rezolvarea, vom căuta și forțele axiale în bare.

Pentru aceasta rezultanta  $\bar{R}$  a grupului static nedeterminat  $\bar{R}$ ,  $\bar{M}$  ce aparține cadrului 0-1-3-2, o presupunem descompusă după direcțiile (0-1)  $\bar{\xi}$  și (1-3)  $\bar{\eta}$ .

Vom avea:

$$\bar{R} = X\bar{\xi} + Y\bar{\eta}.$$

Dacă aplicăm ecuația (3) barelor 0-1 și 1-3, găsim:

$$\bar{0} - [3\bar{\xi}] [X\bar{\xi} + Y\bar{\eta}] = \bar{1} \quad ; \quad \bar{1} - [4\bar{\eta}] [X\bar{\xi} + Y\bar{\eta}] = \bar{31},$$

din care deducem:

$$4X = \bar{31} - \bar{1} \quad , \quad 3Y = \bar{0} - \bar{1}.$$

Să facem același lucru pentru cadrul al doilea 2-3-5-4 descompunând pe  $\bar{R}_1$  corespunzător, în componentele  $Y_1$  și  $Z$  paralele respectiv cu direcțiile (3-5)  $\bar{\eta}$  și (5-4)  $\bar{\xi}$ . Vom avea:

$$\bar{R}_1 = Y_1\bar{\eta} + Z\bar{\xi}$$

Aplicând aceiași ecuație (3) barelor 3-5 și 5-4, găsim:

$$\bar{35} - [4\bar{\eta}] [Y_1\bar{\eta} + Z\bar{\xi}] = \bar{5} \quad ; \quad \bar{5} - [3\bar{\xi}] [Y_1\bar{\eta} + Z\bar{\xi}] = \bar{4}$$

din care scoatem:

$$3Y_1 = \bar{4} - \bar{5} \quad , \quad 4Z = \bar{35} - \bar{5}.$$

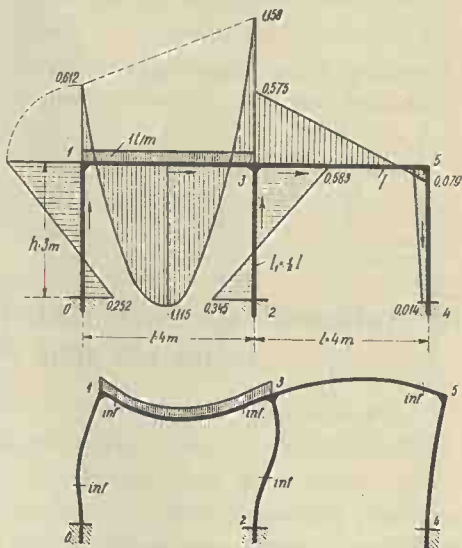


Figura 466

In cazul încărcării concentrate, avem:

$$X = -0,009 \text{ t} \quad , \quad Y = 0,099 \text{ t} \quad , \quad Y_1 = 0,013 \text{ t} \quad , \quad Z = -0,024 \text{ t}$$

Reacțiunile verticale în cele trei reazime vor fi:

$$V_0 = 0,741 \text{ t} \quad , \quad V_2 = 0,288 \text{ t} \quad , \quad V_4 = -0,024 \text{ t}$$

Barele 1—3 și 3—5 sunt supuse respectiv la compresiunile 0,099 t și 0,013 t.

In cazul încărcării uniform distribuite, avem:

$$X = -0,137 \text{ t} \quad , \quad Y = 0,288 \text{ t} \quad , \quad Y_1 = -0,021 \text{ t} \quad , \quad Z = -0,163 \text{ t}$$

Reacțiunile verticale sunt:

$$V_0 = 1,863 \text{ t} \quad , \quad V_2 = 2,300 \text{ t} \quad , \quad V_4 = -0,163 \text{ t}$$

Bara 1—3 este comprimată pe când 3—5 este întinsă.

## H) Aplicarea metodei coeficienților nedeterminați la un caz mai complicat.

Vom indica aplicarea acestei metode la cadrul din figura 467.

Mai întâiu vom face sistemul static determinat și rigid.

Se observă că dacă considerăm grinzile 2—3—4 și 6—7—8 continui, grinzile 1—3 și 7—9 articulate în 3 și 7, grinzile 0—1 și 9—10 articulate la capetele lor, grinzile continui 2—3—4 și 6—7—8

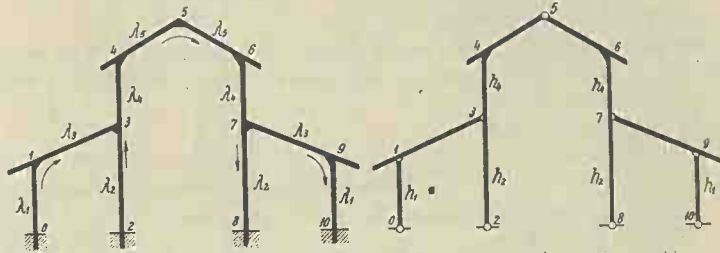


Figura 467

articulate în 2 și 8 și încastrate, în 4 și 6, în grinzile 4—5 și 5—6, iar acestea articulate în 5, am obținut un cadru rigid static determinat.

Obținem același rezultat dacă în condițiile de mai sus considerăm grinzile continui 2—3—4 și 6—7—8, articulate în 4 și 6 și încastrate în 2 și 8.

Prin urmare, avem mai multe posibilități de a face un cadru și rigid și static determinat.

Vom profita de această libertate pentru a simplifica, într-o măsură destul de mare, calculele noastre.

Calculele vor fi cu atât mai simple cu cât vom avea mai puține bare solicitate la momentele  $M_s$ .



Vom arăta câteva exemple.

*Exemplul Nr. 1.* Să presupunem că pe stâlpul 0—1 se aplică forța orizontală  $F = 1$  (fig. 468). Se vede numaidecât că dacă considerăm 0—1 încastrată în 0 și articulată în 1, 4—5—6 încastrate în 5, grinzile continue 2—3—4 și 6—7—8 articulate la extremitățile lor, iar restul ca în figură, am obținut de asemenea un cadru rigid static determinat. Avantajul acestuia, asupra precedentului, este că

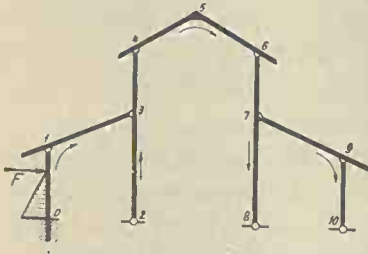


Figura 468

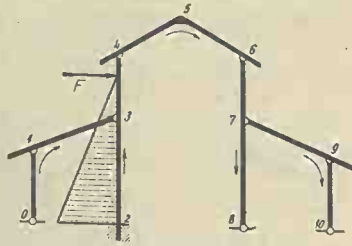


Figura 469

numai bara 0—1 va fi încărcată cu o suprafață de momente  $M_s$ , pe când pentru toate celelalte bare  $M_s = 0$ .

*Exemplul Nr. 2.* Să presupunem că o forță orizontală  $F = 1$  se aplică pe grinda 3—4 (fig. 469). Pe figură este indicat cadrul rigid static determinat. Se vede în acest caz că numai barele 2—3 și 3—4 vor fi încărcate cu o suprafață de momente  $M_s$ .

*Exemplul Nr. 3.* Să presupunem că avem câte o forță verticală pe grinzile 1—3 și 4—5—6 (fig. 470).

Pe figură s'a indicat suprafața momentelor  $M_s$  pe grinda 1—3 și pe grinzile 4—5—6, considerate încastrate între ele în 5. Pe figură este indicat și cadrul rigid static determinat ce corespunde acestor încărcări.

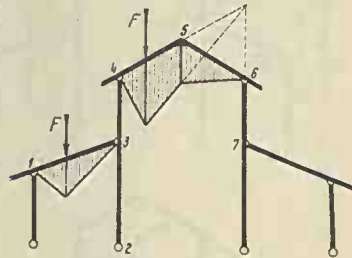


Figura 470

Prin urmare, pentru fiecare fel de încărcări putem găsi un cadru rigid static determinat așa fel, ca un număr minim de bare să fie încărcate cu suprafețe de momente  $M_s$ . Evident că pentru toate celelalte bare  $M_s = 0$ .

Această procedură ne aduce o mare ușurare în calculele ce avem de făcut.

Cadrul fiind astfel pregătit, putem aplica mai departe metoda aceasta.

Vom scrie mai întâiu echilibrul nodurilor în care se întâlnesc mai mult de 3 bare.

Sensul în care parcurgem fiecare bară fiind fixat, rezultă precis semnele momentelor și deci și regiunea întinsă a secțiunii barelor. Aceste sensuri sunt indicate pe figură. Pentru cele două noduri 3 și 7 (fig. 471), ecuația ( $\alpha$ ) ne dă:

$$\overline{32} + \overline{31} - \overline{34} = 0 (\alpha_1) \quad \overline{78} + \overline{79} - \overline{76} = 0 (\alpha_2)$$

Să scriem ecuațiile ( $\beta$ ). Pentru aceasta vom da deplasări virtuale diverselor bare considerând întregul sistem articulat în toate nodurile sale.

Să presupunem că dăm barei 0—1 o rotire oarecare  $\theta_{01}$  (fig. 472a). Se vede de pe figură că singurile bare care primesc o deplasare, sunt 0—1, 1—3, 2—3 și 3—4 din cari bara 1—3 nu se rotește deloc.

În cazul nostru, ținând seamă și de (47), avem:

$$(\overline{0} - \overline{1}) \theta_{01} + (\overline{2} - \overline{32}) \theta_{23} + (\overline{34} - \overline{4}) \theta_{34} = 0 (\beta_1).$$

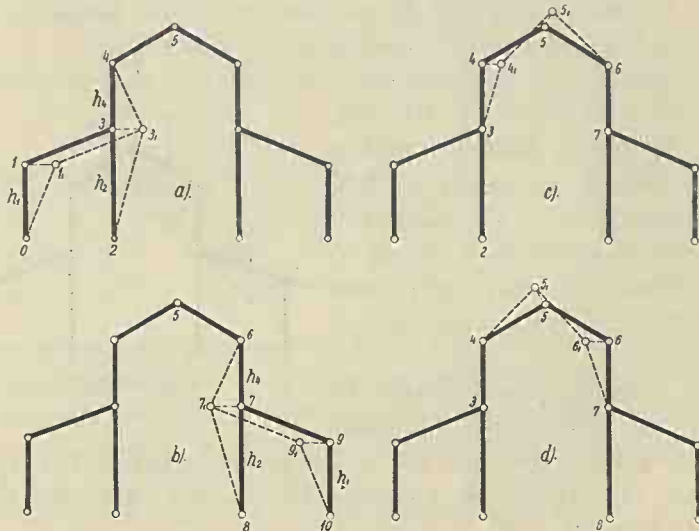


Figura 472

În mod absolut analog, avem pentru barele 6—7, 7—8, 7—9 și 9—10 (fig. 472 b):

$$(\overline{10} - \overline{9}) \theta_{910} + (\overline{8} - \overline{78}) \theta_{87} + (\overline{76} - \overline{6}) \theta_{76} = 0 (\beta_2).$$

În cazul acesta putem evalua imediat aceste unghiuri. Dacă dăm nodurilor 1 și 3 o deplasare orizontală  $u$  oarecare, care poate fi și  $u = 1$ ,

$$\theta_{01} = \theta_{10,9} = 1/h_1, \quad \theta_{23} = \theta_{37} = 1/h_2, \quad \theta_{34} = \theta_{76} = -1/h_4$$

Pentru ultimul unghi am pus semnul minus fiindcă, pe când primele două bare 0—1 și 2—3 sau 10—9 și 8—7 se rotesc într'un sens, ultimile se rotesc în sens invers.

Cu acestea, ecuațiile de mai sus le scriem din nou sub forma:

$$(\bar{0} - \bar{1})/h_1 + (\bar{2} - \bar{32})/h_2 + (\bar{4} - \bar{34})/h_4 = 0 (\beta_1),$$

$$(\bar{10} - \bar{9})/h_1 + (\bar{8} - \bar{78})/h_2 + (\bar{6} - \bar{76})/h_4 = 0 (\beta_2).$$

Să presupunem că dăm o rotire barei 3—4 (fig. 472 c). De pe figură se vede că se rotesc numai barele 4—5 și 5—6. Vom avea deci:

$$(\bar{34} - \bar{4}) \theta_{34} + (\bar{4} - \bar{5}) \theta_{45} + (\bar{5} - \bar{6}) \theta_{56} = 0 (\beta_3).$$

Dacă dăm o rotire barei 6—7, (fig. 472 d) avem analog:

$$(\bar{76} - \bar{6}) \theta_{67} + (\bar{6} - \bar{5}) \theta'_{56} + (\bar{5} - \bar{4}) \theta'_{45} = 0 (\beta_4).$$

Aceste unghiuri le determinăm după norma dată la „Deplasările virtuale a sistemelor articulate”.

Pe fig. 473 a și b s'au făcut construcțiile indicate de această metodă.

Avem:

$$a \theta_{34} = b \theta_{45} \quad ; \quad a_1 \theta_{56} = b_1 \theta_{45};$$

$$a_1 \theta'_{45} = b_1 \theta'_{56} \quad , \quad a \theta_{67} = b \theta'_{56}$$

în care  $a, b, \dots$  sunt dimensiunile arătate pe figură.

Se observă, la prima deplasare, că pe când 3—4 și 5—6 se rotesc într'un sens 4—5 se rotește în sens invers. Aceiași observație și la cea de-a doua mișcare.

Se știe că într'o mișcare putem lua unul din unghiuri arbitrar.

Luăm deci:

$$\theta_{45} = \theta'_{56} = -1$$

și atunci rezultă:

$$\theta_{34} = \theta_{67} = b/a \quad , \quad \theta_{56} = \theta'_{45} = b_1/a_1.$$

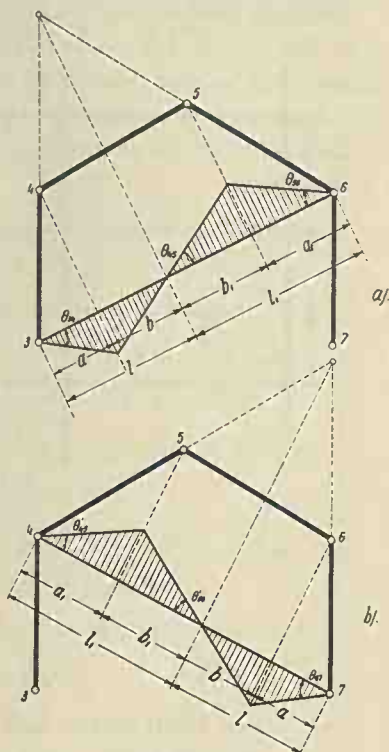


Figura 473

În aceste condiții, ultimile ecuații le scriem sub forma:

$$\begin{aligned} \overline{34} b/a - \overline{4} l/a + \overline{5} l_1/a_1 - \overline{6} b_1/a_1 &= 0, \\ -\overline{4} b_1/a_1 + \overline{5} l_1/a_1 - \overline{6} l/a + \overline{76} b/a &= 0. \end{aligned}$$

Asta în mod general

Aceste ecuații se pot simplifica în cazul când conturul 4—5—6 are ca axă de simetrie axa verticală care trece prin nodul 5. Se recunoaște numaidecât că în acest caz  $a_1 = b_1 = \frac{1}{2} l_1$ .

Grupul de mai sus îl înlocuim cu una din ecuații și cu diferența lor. Căpătăm:

$$\begin{aligned} \overline{34} b/a - \overline{4} l/a + 2 \cdot \overline{5} - \overline{6} &= 0 (\beta_3), \\ \overline{34} - \overline{4} + \overline{6} - \overline{76} &= 0 (\beta_4). \end{aligned}$$

Prin urmare, avem două ecuații ( $\alpha$ ) și patru ecuații ( $\beta$ ), deci în total 6 coeficienți nedeterminați.

Acestea fiind stabilite, putem scri ecuațiile lui *Clapeyron*.

Ca sistem de încărcări presupunem o forță orizontală  $F$  aplicată pe stâlpul 0—1 (fig. 468).

Conform convențiilor admise, suprafața de momente este negativă. Noi o vom lua deocamdată pozitivă urmând ca la aplicația numerică să se țină seamă de semnul ei. Această suprafață dă în cele două noduri reacțiunile  $\Omega_0$  și  $\Omega_1$ .

Le notăm cu un singur indice pentru că nu avem ambiguitate. Vom avea:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \overline{0} + \lambda_1 \overline{1} + \beta_1/h_1 &= -6\Omega_0, \\ \lambda_1 \overline{0} + 2(\lambda_1 + \lambda_3) \overline{1} + \lambda_3 \overline{31} - \beta_1/h_1 &= -6\Omega_1, \\ \lambda_3 \overline{1} + 2\lambda_3 \overline{31} + a_1 &= 0, \\ 2\lambda_2 \overline{2} + \lambda_2 \overline{32} + \beta_1/h_2 = 0, \quad \lambda_2 \overline{2} + 2\lambda_2 \overline{32} + a_1 - \beta_1/h_2 &= 0, \\ 2\lambda_4 \overline{34} + \lambda_4 \overline{4} - a_1 - \beta_1/h_4 + \beta_3 b/a + \beta_4 &= 0, \\ \lambda_4 \overline{34} + 2(\lambda_4 + \lambda_5) \overline{4} + \lambda_5 \overline{5} + \beta_1/h_4 - \beta_3 l/a - \beta_4 &= 0, \\ \lambda_5 \overline{4} + 4\lambda_5 \overline{5} + \lambda_5 \overline{6} + 2\beta_3 &= 0, \\ \lambda_5 \overline{5} + 2(\lambda_5 + \lambda_4) \overline{6} + \lambda_4 \overline{76} + \beta_2/h_4 - \beta_3 + \beta_4 &= 0, \\ \lambda_4 \overline{6} + 2\lambda_4 \overline{76} - a_2 - \beta_2/h_4 - \beta_4 &= 0, \\ 2\lambda_2 \overline{8} + \lambda_2 \overline{78} + \beta_2/h_2 = 0, \quad \lambda_2 \overline{8} + 2\lambda_2 \overline{78} + a_2 - \beta_2/h_2 &= 0, \\ 2\lambda_1 \overline{10} + \lambda_1 \overline{9} + \beta_2/h_1 &= 0, \\ \lambda_1 \overline{10} + 2(\lambda_1 + \lambda_3) \overline{9} + \lambda_3 \overline{79} - \beta_2/h_1 &= 0, \\ \lambda_3 \overline{9} + 2\lambda_3 \overline{79} + a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvarea acestor ecuații se face după norma indicată mai sus. S'a dat acest exemplu pentru a se vedea cum obținem ecuațiile (a), (β) și ale lui *Clapeyron*.

### I) Calcule aproximative.

Sunt necesare fiindcă, pentru un cadru multiplu, numărul necunoscutelor este foarte mare și deci și dificultatea rezolvării ecuațiilor crește.

Calcululele aproximative se bazează pe faptul că cu cât ne îndepărtăm de sarcina dată, cu atât momentele în capetele barelor scad. Aceasta s'a văzut din exemplele precedente.

Putem deci presupune că la o depărtare oarecare momentele acestea sunt nule.

#### 1. Exemplu de calcul aproximativ.

Să presupunem că avem un cadru format din barele 0—2, 2—1, 2—3, ... care la rândul lui face parte din alt cadru mai mare. Să considerăm încărcată numai deschiderea 2—5 (fig. 474).

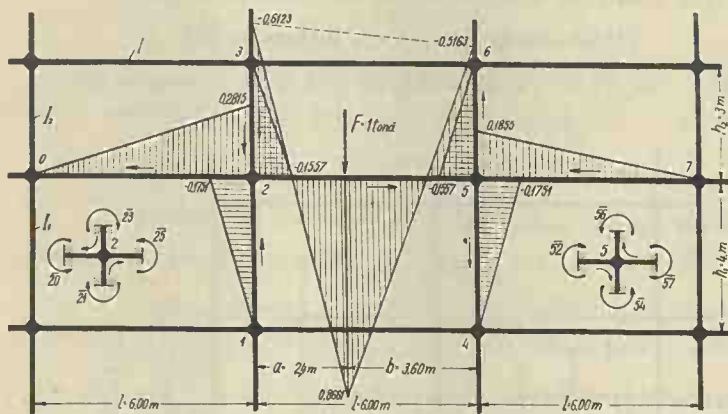


Figura 474

Aproximația va consta în aceea că vom presupune momentele din 0, 3, 6, 7, 4 și 1 nule.

Ecuațiile statice sunt:

a) Cazul general.

1. Suma momentelor în nodurile 2 și 5 este nulă, deci

$$-\bar{20} + \bar{21} - \bar{25} + \bar{23} = 0 \quad (a_1) \quad ; \quad \bar{52} - \bar{54} + \bar{57} - \bar{56} = 0 \quad (a_2).$$



2. Din două deplasări distincte ale sistemului, avem:

$$-\overline{21} + \overline{54} = 0 (\beta_1) \quad , \quad -\overline{23} + \overline{56} = 0 (\beta_2).$$

Să scriem acum formulele lui *Clapeyron* pentru acest grup de bare.

Vom avea:

$$\begin{aligned} 2 \lambda_{02} \overline{20} - a_1 = 0 \quad , \quad 2 \lambda_{12} \overline{21} + a_1 - \beta_1 = 0 \quad , \quad 2 \lambda_{23} \overline{23} + a_1 - \beta_2 = 0, \\ 2 \lambda_{57} \overline{57} + a_2 = 0 \quad , \quad 2 \lambda_{45} \overline{54} - a_2 + \beta_1 = 0 \quad , \quad 2 \lambda_{56} \overline{56} - a_2 + \beta_2 = 0, \\ 2 \lambda_{25} \overline{25} + \lambda_{25} \overline{52} + 6 \Omega_2 - a_1 = 0 \quad , \quad \lambda_{25} \overline{25} + 2 \lambda_{25} \overline{52} + 6 \Omega_5 + a_2 = 0. \end{aligned}$$

b) Caz particular.

Să presupunem că avem:

$$\lambda_{02} = \lambda_{25} = \lambda_{57} = \lambda \quad , \quad \lambda_{12} = \lambda_{45} = \lambda_1 \quad , \quad \lambda_{23} = \lambda_{56} = \lambda_2.$$

În aceste condiții, ținând seama de ecuațiile ( $\beta$ ), din ecuațiile de mai sus deducem:

$$a_1 + a_2 = 2 \beta_1 = 2 \beta_2.$$

Dacă rezolvăm acum ecuațiile lui *Clapeyron*, găsim:

$$2 \lambda \overline{20} = a_1 \quad , \quad 2 \lambda \overline{57} = -a_2,$$

$$4 \lambda_1 \overline{21} = 4 \lambda_1 \overline{54} = 4 \lambda_2 \overline{23} = 4 \lambda_2 \overline{56} = -a_1 + a_2,$$

$$3 \lambda \overline{25} = 2 a_1 + a_2 - 6 (3 \Omega_2 - \Omega),$$

$$3 \lambda \overline{52} = -a_1 - 2 a_2 - 6 (3 \Omega_5 - \Omega).$$

Dacă ducem aceste valori în ecuațiile ( $a$ ) și notăm:

$$A = 7/6 + \lambda (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)/4 \quad , \quad B = -1/3 + \lambda (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)/4,$$

găsim:

$$A a_1 - B a_2 = 2 (3 \Omega_2 - \Omega) \quad ; \quad B a_1 - A a_2 = 2 (3 \Omega_5 - \Omega).$$

**Aplicația Nr. 145.** Presupunem  $l = 6$  m,  $h_1 = 4$  m,  $h_2 = 3$  m,  $I/I_1 = k_1 = 2$ ,  $I/I_2 = k_2 = 3$ .

Cu aceste valori, avem:

$$\lambda = 6$$
 m ,  $\lambda_1 = 8$  m ,  $\lambda_2 = 9$  m ,  $A = 73/48$  ,  $B = 1/48$

cari ne dau:

$$a_1 = 4 \Omega_2 - 50 \Omega / 37 \quad , \quad a_2 = -4 \Omega_5 + 50 \Omega / 37 \quad , \quad a_1 - a_2 = 48 \Omega / 37.$$

Valorile momentelor sunt:

$$12. \overline{20} = 4 \Omega_2 - 50 \Omega / 37 \quad ; \quad 12. \overline{57} = 4 \Omega_5 - 50 \Omega / 37,$$

$$32. \overline{21} = 32. \overline{54} = 36. \overline{23} = 36. \overline{56} = -48 \Omega / 37,$$

$$18. \overline{25} = -6(\Omega_2 - 4\Omega/37) \quad , \quad 18. \overline{52} = -6(\Omega_5 - 4\Omega/37).$$

Ca încărcare vom presupune că pe grinda 2—5 avem o sarcină concentrată verticală,  $F = 1t$ , la distanțele  $a = 2,4$  m,  $b = 3,6$  m.

Momentul în dreptul sarcinei ca grindă simplu rezemată în 2 și 5 este:

$$M_s = 1 \cdot 2,4 \cdot 3,6 / 6 = 1,44 \text{ tm} \quad , \quad \Omega = \frac{1}{2} \cdot 1,44 \cdot 6 = 4,32 \text{ tm}^2$$

$$\Omega_2 = 4,32 (6 + 3,6) / 3,6 = 2,304 \text{ tm}^2 \quad , \quad \Omega_5 = 2,016 \text{ tm}^2$$

Cu aceste valori, căpătăm:

$$\overline{20} = 0,2815 \text{ tm} \quad , \quad \overline{57} = 0,1855 \text{ tm} \quad , \quad \overline{21} = \overline{54} = -0,1751 \text{ tm}$$

$$\overline{25} = -0,6123 \text{ tm} \quad , \quad \overline{52} = -0,5163 \text{ tm} \quad , \quad \overline{23} = \overline{56} = -0,1557 \text{ tm}.$$

Momentul în dreptul sarcinei este 0,8661 tm.

Să comparăm momentele  $\overline{25}$  și  $\overline{52}$  și acela din dreptul sarcinei concentrate cu aceleași momente când consider grinda 2—5 încastrată în extremitățile sale și cu cazul când consider grinda 0—2—5—7 continuă pe reazime de nivel.

Făcând calculele, găsim că, în cele trei ipoteze, aceste momente au valorile:

|                      | $\overline{25}$ | $\overline{52}$ | $M_f$     |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------|
| încastrată . . . . . | 0,8640 tm       | 0,5760 tm       | 0,6912 tm |
| cadru . . . . .      | 0,6123 „        | 0,5163 „        | 0,8661 „  |
| continuă . . . . .   | 0,4800 „        | 0,3840 „        | 0,9984 „  |

Calculul acestor grinzi ca făcând parte din cadru nu este necesar numai din cauza acestor diferențe, ci mai ales pentru că nu avem alt mijloc pentru a afla în ce măsură se încarcă și stâlpii cu o parte din moment.

## 2. Alt exemplu de calcul aproximativ.

b) Să presupunem că avem cadrul precedent căruia îi lipsește întreaga construcție dela stânga stâlpilor 1—2 și 2—3 (fig. 475).

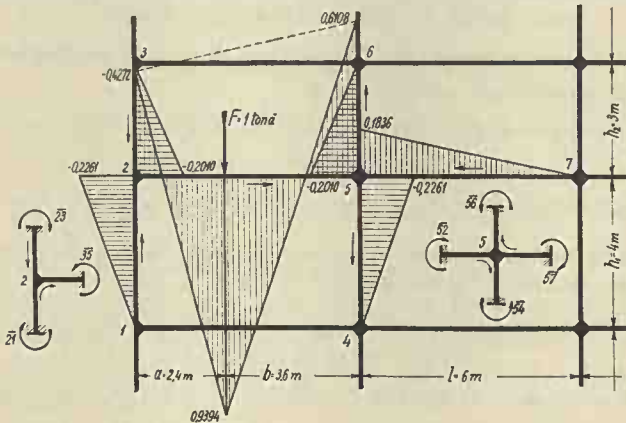


Figura 475

Prin urmare, cadrul se compune din grinzile orizontale 1—4, . . . 2—5—7 . . . 3—6, . . . și stâlpii 1—2—3, 4—5—6, etc.

Vom presupune încărcată numai grinda extremă 2—5 cu sarcini verticale.

Pentru ușurință, vom presupune că ne ocupăm de cazul special precedent și anume când:

$$\lambda_{25} = \lambda_{57} = \lambda \quad , \quad \lambda_{12} = \lambda_{45} = \lambda_1 \quad , \quad \lambda_{23} = \lambda_{56} = \lambda_2.$$

Ecuatiile statice din echilibrul nodurilor și din cele două deplasări distincte ce putem da sunt:

$$\begin{aligned} \overline{21} - \overline{25} + \overline{23} &= 0 \quad (a_1) \quad ; \quad \overline{52} - \overline{54} + \overline{57} - \overline{56} = 0 \quad (a_2) \\ -\overline{21} + \overline{54} &= 0 \quad (\beta_1) \quad \quad \quad -\overline{23} + \overline{56} = 0 \quad (\beta_2) \end{aligned}$$

Dacă scriem ecuațiile lui *Clapeyron* găsim, exact aproape ca în cazul precedent:

$$\begin{aligned} 2 \lambda_1 \overline{21} + a_1 - \beta_1 &= 0 \quad , \quad 2 \lambda_2 \overline{23} + a_1 - \beta_2 = 0 \\ 2 \lambda \overline{57} + a_2 &= 0 \quad , \quad 2 \lambda_1 \overline{54} - a_2 + \beta_1 = 0 \quad , \quad 2 \lambda_2 \overline{56} - a_2 + \beta_2 = 0 \\ 2 \lambda \overline{25} + \lambda \overline{52} + 6 \Omega_2 - a_1 &= 0 \quad , \quad \lambda \overline{25} + 2 \lambda \overline{52} + 6 \Omega_5 + a_2 = 0, \end{aligned}$$

Găsim absolut analog:

$$a_1 + a_2 = 2\beta_1 = 2\beta_2$$

și deci:

$$\begin{aligned} 2 \lambda \overline{57} &= -a_2, \\ 4 \lambda_1 \overline{21} &= 4 \lambda_1 \overline{54} = 4 \lambda_2 \overline{23} = 4 \lambda_2 \overline{56} = -a_1 + a_2, \\ 3 \lambda \overline{25} &= 2 a_1 + a_2 - 6 (3 \Omega_2 - \Omega), \\ 3 \lambda \overline{52} &= -a_1 - 2 a_2 - 6 (3 \Omega_5 - \Omega). \end{aligned}$$

Dacă ducem aceste valori în ecuațiile  $a$  și dacă pe lângă notațiile din cazul precedent, mai avem și:

$$C = 2/3 + \lambda (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)/4$$

găsim:

$$C a_1 - B a_2 = 2 (3 \Omega_2 - \Omega) \quad , \quad B a_1 - A a_2 = 2 (3 \Omega_5 - \Omega).$$

**Aplicația Nr. 146.** Dacă pentru exemplul numeric luăm aceleași dimensiuni ca în cazul precedent, atunci găsim  $C = 49/48$  și deci:

$$\begin{aligned} 149 a_1 &= 12 (49 \Omega_2 - 25 \Omega_6) \quad , \quad 149 a_2 = 12 (17 \Omega_2 - 33 \Omega_5), \\ 149 (a_1 - a_2) &= 96 (3 \Omega_2 + \Omega), \\ \overline{57} &= (33 \Omega_5 - 17 \Omega_2)/149 \quad , \quad \overline{21} = \overline{54} = -3 (3 \Omega_2 + \Omega)/149 \\ \overline{23} = \overline{56} &= -8 (3 \Omega_2 + \Omega)/447 \quad , \quad \overline{25} = -17 (3 \Omega_2 + \Omega)/447 \\ \overline{52} &= - (17 \Omega_2 + 116 \Omega_5)/447. \end{aligned}$$

Ca încărcări luăm aceiași forță și în aceeași poziție ca în cazul precedent. Obținem:  $\overline{57} = 0,1836$  tm;  $\overline{21} = \overline{54} = -0,2261$  tm;  $\overline{23} = \overline{56} = -0,2010$  tm;  $\overline{25} = -0,4272$  tm;  $\overline{52} = -0,6108$  tm, iar în dreptul sarcinei avem  $M_f = +0,9394$  tm.

Pe figurile 474 și 475 s'a trasat curba momentelor în cele două cazuri. Dacă se compară valorile momentelor respective se constată diferențe destul de importante după cum se vede din tabloul ce urmează:

| $\bar{20}$ | $\bar{21} = \bar{54}$ | $\bar{23} = \bar{56}$ | $\bar{25}$ | $\bar{52}$ | $\bar{57}$ | $M_f$   |
|------------|-----------------------|-----------------------|------------|------------|------------|---------|
| 0,2815;    | -0,1751;              | -0,1557;              | -0,6123;   | -0,5163;   | 0,1855;    | 0,8661; |
| —          | -0,2261;              | -0,2010;              | -0,4272;   | -0,6108;   | 0,1836;    | 0,9394; |

Din calculul făcut s'a văzut că aceste momente sunt funcții de încărcări.

Așa dar, nu poate fi vorba de reguli sau formule empirice cari să ne arate în ce măsură se distribuie momentele la noduri. *Calculul indicat este prea simplu pentru ca un cadru dintr'o construcție să nu merite a fi calculat cu aproximația care s'a indicat.*

## J) Grinzi, arce, etc. cu zăbrele, static nedeterminate.

È vorba aci de un sistem format din bare articulate la extremități, sistem static nedeterminat.

Norma de calcul este aceeași de până acum și anume *se suprimă atâtea bare și reazime până când grinda sau arcul se transformă într'un sistem rigid static determinat.*

Dacă eforturile din barele, sau forțele din reazimile, suprinate sunt  $X, Y, \dots$ , atunci efortul din o bară oarecare este:

$$N_{ik} = N_{ik,s} + n_{ik,x} X + n_{ik,y} Y + \dots$$

Dacă aplicăm teorema lui *Castigliano* și cu notațiile adoptate la găsirea săgeții grinzilor cu zăbrele, căpătăm:

$$\sum u_{ik,s} n_{ik,x} + X \sum u_{ik,x} n_{ik,x} + Y \sum u_{ik,y} n_{ik,y} + \dots = 0.$$

Vom scri atâtea ecuații câte necunoscute avem.

Semnificarea termenilor este cunoscută. De exemplu,  $u_{ik,y}$  este lungirea barei  $ik$ , atunci când asupra grinzii lucrează numai forța  $Y=1$ , iar  $n_{ik,x}$  este efortul din bara  $ik$ , atunci când asupra grinzii lucrează numai forța  $X = 1$ .

**Aplicația Nr. 147.** Să presupunem că avem o grindă sistem triunghiular dublu ca în figura 476.

Nodurile tălpii superioare sunt pe o dreaptă orizontală, cele ale tălpii inferioare pe o parabolă ale cărei ordonate sunt:  $01 = 2,2$  m,  $23 = 3,2$  m,  $45 = 3,8$  m și  $67 = 4$  m. Grinda are 6 panouri a câte 4 m și este simetrică față de verticala care trece prin mijlocul ei.

Vom presupune o forță verticală  $F = 1 \text{ t}$  aplicată în nodul 9. În asemenea condiții presupun grinda simplu rezemată în nodurile 0 și 12.

Cele două reacțiuni vor fi  $V_0 = 1/3 \text{ t}$ ,  $V_{12} = 2/3 \text{ t}$ . Dacă se examinează grinda față de relația  $m = 2n - 3$ , se găsește că este simplu static nedeterminată.

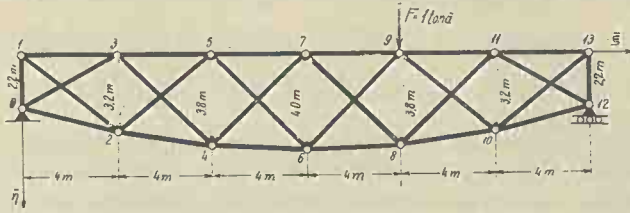


Figura 476

Prin urmare, o transformăm în una static determinată suprimând o bară oarecare din grindă.

Vom suprima bara 01.

Sistemul rămas fiind static

determinat, putem determina toate eforturile din bare cu ajutorul metodei lui Cremona. Le vom determina analitic.

Pentru aceasta avem nevoie de unghiurile ce diversele bare fac între ele.

Raportăm grinda la două axe de coordonate, una orizontală  $\bar{\xi}$  dela stânga la dreapta și alta verticală  $\bar{\eta}$  de sus în jos cu originea în nodul 1.

O bară oarecare, de exemplu  $\bar{34}$ , în mărime și direcție o vom nota  $\overline{34}$ , iar valoarea ei cu  $|34|$ , direcția ei fiind  $\overline{34}/|34|$ .

După dimensiunile geometrice ale grinzii, pentru această bară, avem:

$$\overline{34} = 4\bar{\xi} + 3,8\bar{\eta}.$$

Altă bară, de exemplu  $\overline{30}$ , are expresia

$$\overline{30} = -4\bar{\xi} + 2,2\bar{\eta}.$$

Produsul

$$\overline{34} \cdot \overline{30} = 8,8 + 15,2 = 24,0,$$

reprezintă produsul laturilor  $\bar{34}$  și  $\bar{30}$  multiplicat cu sinusul unghiului ce fac direcțiile lor pozitive în sensul dela  $\bar{34}$  către  $\bar{30}$ .

Valoarea sinusului va fi evident:

$$\overline{34} \cdot \overline{30} / |34| \cdot |30| = 24,0 / |34| \cdot |30|.$$

La efectuarea produsului vectorial ținem seamă de ordinea factorilor.

Analog avem:

$$\overline{34} \cdot \overline{30} = -16 + 8,36 = -7,64,$$

iar valoarea cosinului va fi evident:

$$\overline{34} \cdot \overline{30} / |34| \cdot |30| = -7,64 / |34| \cdot |30|,$$

acestea fiind stabilite, să scriem echilibrul nodului 0.

Observăm că, bara 01 fiind suprimată, eforturile în barele 12 și 13 vor fi nule și astfel în nodul 0 descompunerea o facem numai după două bare. Avem:

$$-\bar{\eta}/3 + N_{03s} \overline{03}/|03| + N_{02s} \overline{02}/|02| = 0.$$



Pentru ușurința calculului vom lua ca necunoscute:

$$N'_{03s} = N_{03s}/[03] \quad , \quad N'_{02s} = N_{02s}/[02], \text{ etc.,}$$

adică valoarea efortului din bară împărțit prin lungimea ei.

Ecuția de mai sus se scrie atunci:

$$-\bar{\eta}/3 + N'_{03s}\bar{03} + N'_{02s}\bar{02} = 0.$$

Dacă se multiplică vectorial această ecuație pe rând cu  $\bar{03}$  și  $\bar{02}$ , obținem:

$$N'_{02s} = 95/912 \quad ; \quad N'_{03s} = -95/912$$

Așa procedăm și cu celelalte noduri.

Acum îndepărtăm forța  $F$  de pe grindă și aplicăm după bara 0—1 un efort  $N_{01} = +1$ . Calculăm ca mai sus eforturile din toate barele.

Pentru că rezultatele le-am păstrat sub forma de fracții ordinare, le-am adus pe toate la același numitor comun:  $11^2 \cdot 912 = 110352$  și în tabloul ce urmează am scris drept efort  $N'$  numărătorii acestor fracții. Așa dar, rezultatele din tablou trebuie împărțite cu acest numitor comun. Vom avea de exemplu:

$$N_{34s} = [34] N'_{34s} = 5,517.6655/110352 = 0,3327 \text{ t};$$

$$n_{46x} = [46] n'_{46x} = 4,005.15972/110352 = 0,5797 \text{ t}.$$

Ca să găsim necunoscuta static nedeterminată aplicăm teorema lui *Castigliano*, care ne dă:

$$\sum N'_{iks} n'_{ikx} l_{ik} / \Omega_{ik} + X \sum n'^2_{ikx} l_{ik} / \Omega_{ik} = \sum N'_{iks} n'_{ikx} l^3_{ik} / \Omega_{ik} + X \sum n'^2_{ikx} l^3_{ik} / \Omega_{ik} = 0.$$

Pentru a găsi pe  $X$  ne trebuie valorile lui  $\Omega_{ik}$  pentru fiecare bară. Dacă avem secțiunile, problema este rezolvată.

Să presupunem că ne propunem să găsim secțiunile barelor astfel ca să avem aceeași rezistență în toate.

Din expresia lucrului mecanic:

$$L = \frac{1}{2} (\sum N'_{iks} + X n'_{ikx})^2 l_{ik} / \Omega_{ik} E$$

dacă punem:

$$(N'_{ikx} + X n'_{ikx}) / \Omega_{ik} = \mathcal{X} = ct,$$

deducem

$$L = \frac{1}{2} \mathcal{X}^2 (\sum l_{ik} \Omega_{ik}) / E.$$

Valorile lui  $N'_{ikx}$  și  $n'_{ikx}$  fiind oarecari, rezultă că nu putem avea  $\mathcal{X} = ct$  decât atunci când  $X \equiv 0$ , adică atunci când sistemul este static determinat, când  $\sum l_{ik} \Omega_{ik}$ , adică volumul grinzii este un minim.

Grinda dată putem s'o facem static determinată prin suprimarea unei bare oarecari. Alegerea barei ce urmează a fi suprimată fiind arbitrară, vom căpăta atâtea grinzi static determinate câte moduri avem de a suprima câte o bară oarecare.

| $l_{ik}$ | $\bar{l}_{ik}$                          | $N'_{iks}$ | $n'_{ikx}$ | $\Omega_{ik=ct}$<br>$N_{ik}, \text{Kg}$ | static<br>$N_{ik}, \text{Kg}$ | $\bar{l}_{ik}$                              | $N'_{iks}$ | $n'_{ikx}$ | $\Omega_{ik=ct}$<br>$N_{ik}, \text{Kg}$ | static<br>$N_{ik}, \text{Kg}$ |
|----------|---|------------|------------|---|-------------------------------|---|------------|------------|---|-------------------------------|
| 2,200    | $\bar{01} = -2,2\bar{\eta}$             | —          | 50160      | 534                                     | 454                           | $\bar{12.13} =$                             | 68400      | 50160      | 829                                     | 909                           |
| 4,423    | $\bar{02} = 4\bar{\xi} + \bar{\eta}$    | 41495      | 34485      | 259                                     | 156                           | $\bar{12.10} = -4\bar{\xi} + \bar{\eta}$    | 24035      | 34485      | 209                                     | 312                           |
| 4,565    | $\bar{03} = 4\bar{\xi} - 2,2\bar{\eta}$ | —11495     | —34485     | 287                                     | 173                           | $\bar{12.11} = -4\bar{\xi} - 2,2\bar{\eta}$ | 24035      | 34485      | 232                                     | 346                           |
| 5,122    | $\bar{12} = 4\bar{\xi} + 3,2\bar{\eta}$ | —          | —34485     | 856                                     | 728                           | $\bar{13.10} = -4\bar{\xi} + 3,2\bar{\eta}$ | 47025      | 34485      | 1327                                    | 1455                          |
| 4,000    | $\bar{13} = 4\bar{\xi}$                 | —          | 34485      | 668                                     | 568                           | $\bar{13.11} = -4\bar{\xi}$                 | —47025     | —34485     | —1036                                   | —1136                         |
| 4,045    | $\bar{24} = 4\bar{\xi} + 0,6\bar{\eta}$ | 12705      | —19965     | 857                                     | 798                           | $\bar{10.8} = -4\bar{\xi} + 0,6\bar{\eta}$  | 52635      | 19965      | 1538                                    | 1597                          |
| 5,122    | $\bar{25} = 4\bar{\xi} - 3,2\bar{\eta}$ | —1210      | 19965      | 551                                     | 477                           | $\bar{10.9} = -4\bar{\xi} - 3,2\bar{\eta}$  | —29645     | —19965     | —881                                    | —955                          |
| 5,517    | $\bar{34} = 4\bar{\xi} + 3,8\bar{\eta}$ | 6655       | 19965      | 201                                     | 121                           | $\bar{11.8} = -4\bar{\xi} + 3,8\bar{\eta}$  | —43915     | —19965     | —162                                    | —242                          |
| 4,000    | $\bar{35} = 4\bar{\xi}$                 | —18150     | —19965     | 271                                     | 329                           | $\bar{11.9} = -4\bar{\xi}$                  | —9075      | 19965      | —716                                    | —658                          |
| 4,005    | $\bar{46} = 4\bar{\xi} + 0,2\bar{\eta}$ | 26620      | 15972      | 656                                     | 703                           | $\bar{86} = -4\bar{\xi} + 0,2\bar{\eta}$    | 31460      | —15972     | 1452                                    | 1405                          |
| 5,517    | $\bar{47} = 4\bar{\xi} - 3,8\bar{\eta}$ | —7260      | —15972     | 64                                      | —                             | $\bar{87} = -4\bar{\xi} - 3,8\bar{\eta}$    | 7260       | 15972      | —64                                     | —                             |
| 5,657    | $\bar{56} = 4\bar{\xi} + 4\bar{\eta}$   | 968        | —15972     | 487                                     | 422                           | $\bar{96} = -4\bar{\xi} + 4\bar{\eta}$      | —3872      | 15972      | —636                                    | —574                          |
| 4,000    | $\bar{57} = 4\bar{\xi}$                 | —20328     | 15972      | —1046                                   | —1000                         | $\bar{97} = -4\bar{\xi}$                    | —34848     | —15972     | —954                                    | —1000                         |

Se pune întrebarea: care din aceste grinzi static determinate are eforturile cele mai apropiate de ale grinzii date?

O găsim în modul următor:

Să presupunem deocamdată că toate barele grinzii au aceeași secțiune.

În acest caz, avem:

$$\sum N'_{ik} n'_{ikx} l^3_{ik} + X \sum n''_{ikx} l^3_{ik} = 0,$$

din care deducem valoarea lui  $X$  și eforturile din toate barele. Acest calcul după cum se vede este independent de valoarea secțiunilor.

Pe baza acestor eforturi dimensionăm barele și, pe baza secțiunilor obținute, calculăm din nou valoarea lui  $X$  și eforturile din bare.

Procedând astfel, se observă că efortul a cărui valoare absolută este cea mai mică, calculat în ipoteza  $\Omega_{ik} = ct$ , seade mereu.

La limită ajunge zero. Așa fiind, putem suprima această bară.

Așa dar, sistemul static cel mai apropiat de grinda dată este acela în care suprimăm bara care în ipoteza  $\Omega_{ik} = ct$  a avut efortul cel mai mic în valoare absolută.

Dacă ne gândim bine, acest lucru este chiar evident.

În cazul nostru în această condiție se găsesc barele 47 și 87.

Dacă se calculează valoarea lui  $X$  în cele două ipoteze se găsește:

$$X = -0,534439 \quad ; \quad X = -0,454545$$

cu ajutorul acestor valori găsim eforturile, înscrise în ultimile două coloane ale tabloului și exprimate în kg.

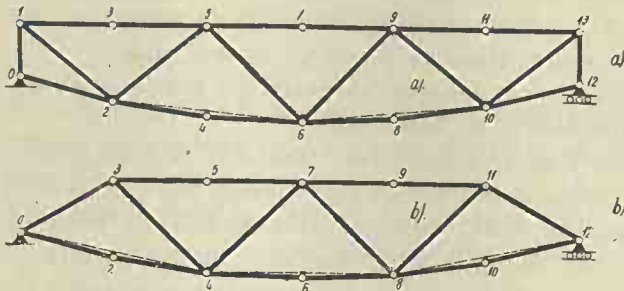


Figura 477

În penultima coloană avem eforturile în ipoteza  $\Omega_{ik} = ct$ , iar în ultima în cazul grinzii statice.

Din inspectarea lor se vede că diferențele între ele nu sunt mari și că deci pe baza eforturilor maxime putem proceda la dimensionarea secțiunilor.

În practică sistemul acesta se descompune în două grinzi static determinate așa cum se arată în figurile 477 a și b. Se dă fiecărei grinzi sarcinile ce-i revin la nod și se calculează fiecare grindă în parte. Se suprapun apoi eforturile din cele două grinzi pentru aceeași bară.

Se vede număidecât că această procedare practică nu-i nici justificată și nici exactă, întrucât dă erori mari.

## K) Calculul eforturilor suplimentare în barele unei grinzi cu zăbrele.

Una din ipotezele cari stau la baza calculului eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele este că barele se consideră articulate la ambele extremități. În realitate, această ipoteză nu se realizează din cauza îmbinării capetelor barelor. Prin îmbinările cari se fac, barele sunt, pur și simplu, incastrate unele în altele în noduri, cu alte cuvinte, unghiurile între direcțiile diverselor bare ce pleacă dintr'un nod rămân invariabile.

Dacă este așa, atunci în extremitățile barelor iau naștere niște momente din cauza cărora se vor produce rezistențe suplimentare în bare.

E vorba să determinăm valoarea acestor momente.

Așa cum se prezintă grinda, este în realitate un sistem multiplu static nedeterminat.

După regulile date, gradul de nestaticitate este  $3m_u + r - 3n$ . Însă cum  $m_u = 2n - 3$ ,  $r = 3$ , atunci rezultă că grinda reală este de  $3(n - 2)$  ori static nedeterminată.

Sistemul se transformă în unul static determinat presupunând momentele, dela capetele barelor, nule.

Așa dar, grinda cu zăbrele articulată la noduri nu este altceva decât un sistem static al grinzii cu zăbrele reale.

Am văzut cum calculăm eforturile din bare și deplasările nodurilor sistemului static determinat.

Pentru a ne fixa ideile vom considera că deplasările nodurilor față de dimensiunile grinzii sunt infiniți mici de ordinul întâiu.

În grinda reală, distanța între noduri se modifică pe de o parte din cauza lungirii barelor, iar pe de altă parte din cauza încovoierii, provocată de momentele ce se aplică la capetele barelor.

S'a arătat la calculul deformației grinzilor drepte că din cauza momentelor, deplasările în lungul barei sunt infiniți mici de ordinul al II-lea. Dacă facem abstracție de aceste deplasări, atunci rezultă că poziția nodurilor grinzii reale în stare deformată coincide cu poziția nodurilor în aceeași stare a grinzii static determinate.

Prin urmare calculul deplasărilor nodurilor așa cum s'a arătat că se face pentru grinda static determinată rămâne valabil și pentru grinda reală.

Să trecem la calculul momentelor dela capul barelor.

Să considerăm un triunghi oarecare 021 din grinda cu zăbrele (fig. 478).

Acest triunghi îl facem static determinat introducând trei articulații în vârfurile lui. Așa fiind, triunghiul se găsește tocmai în condițiile în care este sollicitat în grinda cu zăbrele cu barele articulate la extremitățile lor.

În acest caz, pentru toate laturile  $M_s = 0$ , iar  $N_s$  este efortul din bara respectivă în sistemul static determinat.

În grinda reală barele fiind incastrate unele în altele avem

$\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ , de unde rezultă că și  $u = v = w = 0$ .

În acest caz, ecuațiile (21) se reduc la:

$$Xu_x + Yv_x + Zw_x = \int N_s \bar{\xi} \bar{\theta} d\epsilon$$

$$Xu_y + Yv_y + Zw_y = \int N_s \bar{\eta} \bar{\theta} d\epsilon$$

$$Xu_z + Yv_z + Zw_z = \int N_s \bar{\zeta} \bar{\theta} d\epsilon$$

Semnul sumei se întinde asupra tuturor barelor triunghiului.

Să evaluăm de exemplu pe  $\int N_s \bar{\xi} \bar{\theta} d\epsilon$ . Observăm că, pentru o aceeași bară,  $\bar{\xi} \bar{\theta}$  păstrează o valoare constantă, iar  $\int N_s d\epsilon$  reprezintă chiar lungirea barei în sistemul static determinat.

Dacă notăm cu  $u_{12}$ ,  $u_{10}$  și  $u_{02}$  aceste lungiri, făcând calculele, găsim:

$$\int N_s \bar{\xi} \bar{\theta} d\epsilon = u_{12} - u_{10} \cos \beta - u_{02} \cos \gamma.$$

Dacă se compară această expresie cu formula (12) dela aplicația (39) dela grinzile cu zăbrele, se constată că sunt identice. Deci punem

$$\int N_s \bar{\xi} \bar{\theta} d\epsilon = d_0 \Delta \alpha \quad , \quad \int N_s \bar{\eta} \bar{\theta} d\epsilon = d_1 \Delta \beta \quad , \quad \int N_s \bar{\zeta} \bar{\theta} d\epsilon = d_2 \Delta \gamma$$

în care  $\Delta \alpha, \dots$  sunt cantitățile cu cari au variat unghiurile  $\alpha, \dots$  considerând grinda cu zăbrele cu barele articulate în noduri.

Dimensiunile barelor grinzii cu zăbrele fiind cunoscute și solicitările fiind date, aceste cantități le putem calcula numaidecât.

Ne mai rămâne să calculăm termenii  $u_x, \dots$

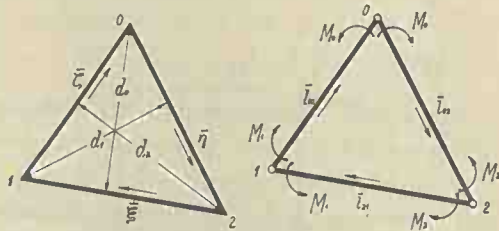


Figura 478



Din formulele (24) se recunoaște numaidecât că putem neglija termenii ce au pe  $\varepsilon$  ca variabilă. Se găsește foarte ușor:

$$u_x = \int x^2 d\omega = d_0^2 (I_{10}/I_{10} + l_{02}/I_{02})/3E; \quad u_y = \int x y d\omega = d_0 d_1 l_{10}/6EI_{10},$$

$$v_y = \int y d\omega = d_1^2 (l_{12}/I_{12} + l_{10}/I_{10})/3E; \quad v_z = \int y z d\omega = d_1 d_2 l_{12}/6EI_{12},$$

$$w_z = \int z^2 d\omega = d_2^2 (l_{20}/I_{20} + l_{21}/I_{21})/3E; \quad w_x = \int x z d\omega = d_0 d_2 l_{02}/6EI_{02},$$

în care  $I$  sunt momentele de inerție ale secțiunii barelor în raport cu axa neutră ce trece prin centrul de greutate al secțiunii.

Dacă introducem aceste valori în grupul de ecuații de mai sus, dacă se ține seamă de (18), dacă multiplicăm totul cu un  $I$  oarecare și dacă ținem seama de notațiile din (28), găsim:

$$M_1 \lambda_{01} + 2M_0 (\lambda_{01} + \lambda_{02}) + M_2 \lambda_{02} = 6EI \Delta\alpha$$

$$M_2 \lambda_{12} + 2M_1 (\lambda_{12} + \lambda_{10}) + M_0 \lambda_{10} = 6EI \Delta\beta$$

$$M_0 \lambda_{20} + 2M_2 (\lambda_{20} + \lambda_{21}) + M_1 \lambda_{21} = 6EI \Delta\gamma$$

adică tocmai formulele lui *Clapeyron*.

Pentru fiecare triunghi al grinzii cu zăbrele putem scrie un asemenea grup de câte trei ecuații.

Odată determinate momentele în noduri, cu ajutorul formulei (47) putem calcula momentele în capetele barelor ce se întâlnesc în același nod.

Cu aceste momente calculăm grinda așa cum se prezintă în realitate.

Acest calcul ne arată că surplusul de rezistență în grinda reală poate ajunge până la 50% din rezistențele grinzii considerată cu nodurile articulate.

Acolo unde însă sarcinile se aplică cu oarecari excentricități, când sarcinile se aplică între noduri sau când există momente  $M_3$  în noduri, deosebirile sunt foarte mari și calculul indicat este necesar.

În cazul indicat s'a văzut că sistemul de  $3(n-2)$  ori static nedeterminat s'a redus la rezolvarea a  $n-2$  grupe de câte trei ecuații cu câte trei necunoscute.

## L) Grinzi Vierendeel.

Modul în care se confecționează construcțiile de beton armat și sudarea pieselor la construcțiile de oțel ne impun condiția ca să nu mai putem considera barele unei grinzi cu zăbrele ca articulate în noduri. În aceste condiții nodurile prezintă o rigiditate oarecare,

care ar putea asigura stabilitatea grinzii chiar în cazul când am suprima diagonalele.

O grindă Vierendeel este o grindă cu zăbrele formată din tălpi și montanții căreia i s'au suprimat diagonalele și la care barele dintr'un nod se consideră incastrate unele într'alte.

În genere ele se prezintă ca în figura 479 a.

Așa fiind, le putem considera formate din juxtapunerea a o serie de cadre elementare  $a, b, \dots$  și deci le putem calcula după norma acestora.

Vom face mai întâiu sistemul static determinat.

Observăm că dacă introducem articulații în toate nodurile, sistemul se transformă în unul

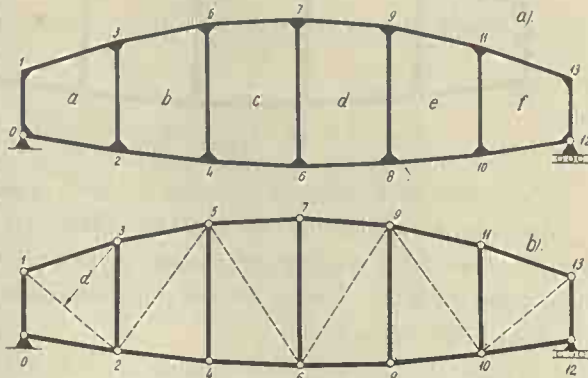


Figura 479

articulat deformabil. Pentru a obține un sistem rigid este suficient a introduce diagonalele 1—2, 2—5, etc. (fig. 479 b). Se observă numaidecât că avem o grindă cu zăbrele formată dintr'un sistem de bare articulate la capetele lor și în cari putem determina toate eforturile după normele date la grinzile cu zăbrele.

Găsim astfel și eforturile în diagonalele introduse 1—2, 2—5, etc.

Aceste bare însă nu există în construcția dată și trebuiesc suprimate. Ca să suprimăm bara 1—2 e suficient ca în nodul 3 aparținând cadrului  $a$  să introducem un moment  $\bar{3}_c$  și să considerăm barele 1—3 și 3—2 incastrate una într'alta.

Dacă efortul din bara 1—2 este  $N_{12}$  și dacă distanța dela nodul 3 la bara 1—2 este  $d$ , se vede că putem suprima această bară când

$$\bar{3}_{as} = dN_{12}$$

Am pus indicele  $s$  pentru a arăta că acest moment a fost dedus pe cale statică.

În mod analog suprimăm barele 2—5, etc.

În acest mod grinda dată am transformat-o într'o grindă cu zăbrele articulată în toate nodurile sale, afară de nodurile 3, 7

și 11 în care considerăm barele încastrate unele într'altele. Momentele  $M_s$  deduse pe cale statică se prezintă ca în fig. 480.

Așa dar, am transformat grinda dată într'un sistem rigid și static determinat.

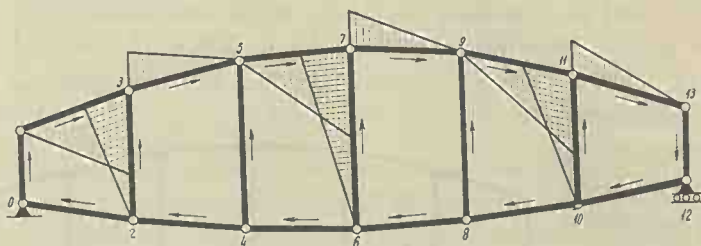


Figura 480

S'a arătat că în această privință avem o mare libertate.

Am putea transforma sistemul și altfel. De exemplu. Considerăm barele tălpii superioare încastrate unele într'altele împreună cu primul montant. Restul de bare le considerăm articulate între ele și în talpa superioară.

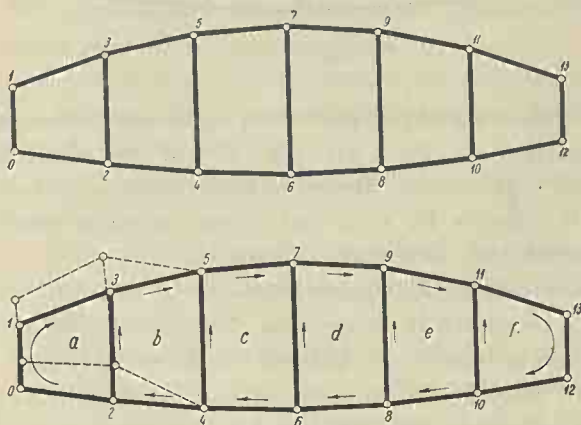


Figura 481

Oricum ar fi, putem găsi suprafața momentelor  $\Omega$  datorite momentelor  $M_s$  care se aplică pe fiecare bară.

Să ne ocupăm de partea static nedeterminată.

Presupunem pentru aceasta barele articulate în toate nodurile

și la capetele lor aplicate momentele static nedeterminate.

Vom scrie apoi ecuațiile ce rezultă din echilibrul nodurilor. Cu sensurile din figura 481 avem:

$$(a) \quad \begin{aligned} -\overline{20} - \overline{23} + \overline{24} &= 0 (a_2) & \overline{31} + \overline{32} - \overline{35} &= 0 (a_3) \\ -\overline{42} - \overline{45} + \overline{46} &= 0 (a_4) & \overline{53} + \overline{54} - \overline{57} &= 0 (a_5) \end{aligned}$$

Să scriem acum ecuațiile ( $\beta$ ) ce rezultă din deplasările virtuale distincte ce putem da sistemului.

Dacă dăm o deplasare virtuală cadrului elementar  $b$ , care este un trapez, atunci după formula (27) avem:

$$(\bar{4}_b - \bar{5}_b)/h_4 + (\bar{3}_b - \bar{2}_b)/h_2 = 0.$$

Însă după formula (47) avem:

$$\bar{4}_b = \bar{42} \quad , \quad \bar{5}_b = \bar{53} \quad , \quad \bar{3}_b = \bar{35} \quad , \quad \bar{2}_b = \bar{24}$$

Dacă facem înlocuirile și procedăm la fel cu toate cadrele elementare obținem:

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad & (\bar{20} - \bar{31})/h_2 - (\bar{0} - \bar{1})/h_0 = 0 \quad (\beta_a); \\
 & (\bar{42} - \bar{53})/h_4 - (\bar{24} - \bar{35})/h_2 = 0 \quad (\beta_b); \\
 & (\bar{64} - \bar{75})/h_6 - (\bar{46} - \bar{57})/h_4 = 0 \quad (\beta_c); \\
 & (\bar{86} - \bar{97})/h_8 - (\bar{68} - \bar{79})/h_6 = 0 \quad (\beta_d); \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Vom avea astfel  $(n - 4)$  ecuații  $(\alpha)$  și  $\frac{1}{2}(n - 2)$  ecuații  $(\beta)$ , dacă  $n$  este numărul nodurilor. În total vom avea  $\frac{3}{2}n - 5$  coeficienți nedeterminați.

Să scriem acum ecuațiile lui *Clapeyron*. Vom avea:

$$\left\{ \begin{aligned}
 2 \lambda_{20} \bar{20} + \lambda_{20} \bar{0} - a_2 + \beta_a/h_2 &= 0; \\
 \lambda_{20} \bar{20} + 2(\lambda_{02} + \lambda_{01})\bar{0} + \lambda_{01}\bar{1} - \beta_a/h_0 &= 0, \\
 \lambda_{01} \bar{0} + 2(\lambda_{01} + \lambda_{13})\bar{1} + \lambda_{13} \bar{31} + \beta_a/h_0 + 6 \Omega_1 &= 0, \\
 \lambda_{13} \bar{1} + 2\lambda_{13} \bar{31} + a_3 - \beta_a/h_2 + 6 \Omega_3 &= 0,
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 2 \lambda_{23} \bar{23} + \lambda_{23} \bar{32} - a_2 + 6 \Omega_2 &= 0, \\
 \lambda_{23} \bar{23} + 2 \lambda_{23} \bar{32} + a_3 + 6 \Omega_3 &= 0,
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 2 \lambda_{24} \bar{24} + \lambda_{24} \bar{42} + a_2 - \beta_b/h_2 &= 0, \\
 \lambda_{24} \bar{24} + 2 \lambda_{24} \bar{42} - a_4 + \beta_b/h_4 &= 0,
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 2 \lambda_{35} \bar{35} + \lambda_{35} \bar{53} - a_3 + \beta_b/h_2 + 6 \Omega_3 &= 0, \\
 \lambda_{35} \bar{35} + 2 \lambda_{35} \bar{53} + a_5 - \beta_b/h_4 + 6 \Omega_5 &= 0,
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 2 \lambda_{45} \bar{45} + \lambda_{45} \bar{54} - a_4 &= 0, \\
 \lambda_{45} \bar{45} + 2 \lambda_{45} \bar{54} + a_5 &= 0, \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right.$$

Vom avea  $3n - 8$  asemenea ecuații cari ne dau destul de lesne valorile momentelor în funcțiune de coeficienții nedeterminați și de încărcări.

Aceste valori duse în ecuațiile ( $\alpha$ ) și ( $\beta$ ) ne dau coeficienții nedeterminați  $\alpha$  și  $\beta$ .

Dificul atea constă însă tocmai în rezolvarea sistemului de  $\frac{3}{2}n - 5$  ecuații.

Putem face un calcul *aproximativ* bazându-ne pe considerațiunea că sistemul de ecuații este liniar și omogen și că deci putem suprapune efectele.

Prin urmare putem considera în primul cadru,  $a$ , încărcate cu suprafețe de momente numai barele 1—3 și 3—2 și anume cu momentele ce rezultă din momentul  $\bar{3}_{as}$  pe care l-am determinat pe cale statică, iar toate celelalte bare libere de orice moment  $M_s$ .

În aceste condițiuni, rezolvând cele  $\frac{3}{2}n - 5$  ecuații, găsim momentele dela extremitățile tuturor barelor.

Cu cel de al doilea cadru  $b$  procedăm la fel și anume considerăm încărcate cu suprafețe de momente numai barele 3—5 și 3—2 și anume cu momentele ce rezultă din  $\bar{3}_{bs}$ , iar toate celelalte bare libere de orice moment.

Dacă se procedează la fel cu toate cadrele și dacă se suprapun efectele se capătă evident acelaș rezultat ca și când am considera barele încărcate cu toate suprafețele de momente așa cum se arată pe figura 480.

Se constată însă, când calculăm cadrul  $a$ , ca momentele din nodurile 4 și 5 sunt mici, iar cele din nodurile 6, 7 și cele ce urmează, neglijabile.

Prin urmare nu facem o eroare mare dacă la calculul cadrului  $a$  considerăm în ecuațiile ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) și ale lui *Clapeyron* momentele din nodurile 4, 5 și următoarele *nule*.

Pentru calculul momentelor în barele cadrului  $a$  și a celor ce-l leagă cu  $b$  obținem patru ecuații cu patru necunoscute.

La calculul cadrului  $b$ , considerăm, în aceleași ecuații, *nule* momentele din 0, 1, 6, 7 și următoarele. Obținem astfel un grup de 7 ecuații cu 7 necunoscute.

Pentru calculul cadrului  $c$ , vom considera *nule* momentele 2, 3 și toate nodurile dela stânga acestui montant precum și momentele din nodurile 8, 9 și a tuturor acelor dela dreapta acestui montant.

Obținem iarăși 7 ecuații cu 7 necunoscute.

În total vom avea de rezolvat 2 grupe de câte patru ecuații și  $(n - 6)/2$  grupe de câte 7 ecuații.



Suprapunem apoi efectele.

Evident că vom avea atâtea feluri de calcule aproximative câte feluri de aproximații putem face.

**Aplicația Nr. 148.** Să avem o grindă Vierendeel de 16 m deschidere și 3 m înălțime împărțită în 4 panouri prin montanți verticali. Tălpile sunt paralele (fig. 482 a). Dacă  $I$  și  $I_1$  sunt momentele de inerție ale tălpilor și montanților, vom presupune că avem

$k = I/I_1 = 2$ . Pentru fiecare cadru elementar avem deci

$$\lambda = 4 \text{ m} \quad ; \quad \lambda_1 = 6 \text{ m}$$

vom presupune că în nodul 7 se aplică o forță verticală  $F = 1$ .

Putem face sistemul rigid static determinat introducând articulații în toate nodurile și diagonalele 1—2, 2—5, 5—6 și 6—9 (fig. 482 b). Astfel putem determina eforturile în toate barele.

Pentru a suprima diagonala 1—2 e suficient ca în nodul 3 în bara 3—1 să introducem momentul  $\overline{31}_s$  a cărui valoare să fie egal cu aceea a momentului efortului din diagonala 1—2 în raport cu nodul 3 (fig. 482 c).

Putem face aceasta mai simplu cu ajutorul deplasărilor virtuale.

Dacă unghiul  $\angle 132$  variază cu  $\theta$ , atunci partea din dreapta a grinzii se rotește cu  $\theta_i$ . De pe figura 482 d se vede că avem

$$\theta = 4 \theta_i$$

Momentul  $\overline{31}_s$  după sensul din figură este pozitiv și se rotește cu  $\theta$ , iar forța  $F$  se lasă în jos cu  $4 \theta_i$  în care 4 este lungimea panoului 6—8. Rezultă deci  $\overline{31}_s = 1 \text{ tm}$ . Exact la fel găsim:  $\overline{35}_s = -1 \text{ tm}$ ,  $\overline{75}_s = 1 \text{ tm}$ ,  $\overline{79}_s = 3 \text{ tm}$ .

Scrind echilibrul nodurilor 3 și 7 găsim  $\overline{32}_s = -2 \text{ tm}$ ,  $\overline{76}_s = 2 \text{ tm}$ .

Acestea sunt momentele în barele sistemului rigid static determinat ales.

Pe figura 483 a, la scară și după convențiile admise, sunt reprezentate aceste momente.

Pe această cale putem găsi și eforturile axiale în bare cari ne dau exact aceleași valori ca în grinda cu zăbrele. Nu le mai determinăm pentru că în deformația sistemului nu ținem seama de lungirea barelor. Ținem seama de aceste eforturi la fine, la calculul rezistențelor.

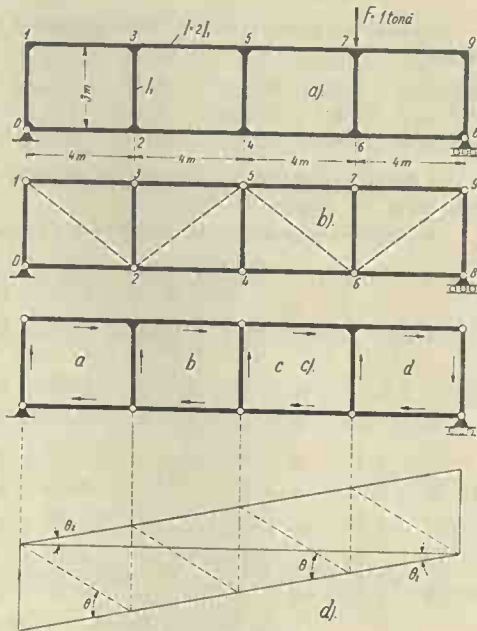


Figura 482

Să trecem la partea nestatică a problemei.

Ecuatiile (a) de echilibru nodurilor ne dau:

$$(a) \quad \begin{array}{ll} \overline{31} + \overline{32} - \overline{35} = 0(a_3) & -\overline{20} - \overline{23} + \overline{24} = 0(a_2) \\ \overline{53} + \overline{54} - \overline{57} = 0(a_5) & -\overline{42} - \overline{45} + \overline{46} = 0(a_4) \\ \overline{75} + \overline{76} - \overline{79} = 0(a_7) & -\overline{64} - \overline{67} + \overline{68} = 0(a_6), \end{array}$$

iar ecuațiile din deplasările virtuale distincte ce putem da sistemului ne dau:

$$(\beta) \quad \begin{array}{ll} \overline{20} - \overline{0} + \overline{1} - \overline{31} = 0(\beta_a), & \overline{42} - \overline{24} + \overline{35} - \overline{53} = 0(\beta_b) \\ \overline{64} - \overline{46} + \overline{57} - \overline{75} = 0(\beta_c), & \overline{8} - \overline{68} + \overline{79} - \overline{9} = 0(\beta_d) \end{array}$$

Înainte de a aplica ecuațiile lui *Clapeyron* să evaluăm numericeste 6  $\Omega_{1(13)}$ .....

Avem:

$$\begin{array}{llll} 6\Omega_{1(13)} = 4\text{tm}^2, & 6\Omega_{2(13)} = 8\text{tm}^2 & 6\Omega_{2(23)} = -12\text{tm}^2, & 6\Omega_{3(23)} = -24\text{tm}^2 \\ 6\Omega_{3(35)} = -8\text{tm}^2, & 6\Omega_{5(55)} = -4\text{tm}^2, & 6\Omega_{5(57)} = 4\text{tm}^2, & 6\Omega_{7(57)} = 8\text{tm}^2 \\ 6\Omega_{7(67)} = 24\text{tm}^2, & 6\Omega_{8(67)} = 12\text{tm}^2, & 6\Omega_{7(79)} = 24\text{tm}^2, & 6\Omega_{9(79)} = 12\text{tm}^2 \end{array}$$

În această evaluare s'a ținut seamă că pentru montanți avem  $k = 2$  în conformitate cu formulele (28).

Să scrim acum direct formulele lui *Clapeyron*.

$$\begin{array}{l} 8.\overline{20} + 4.\overline{0} - a_2 + \beta_a = 0, \\ 4.\overline{20} + 20.\overline{0} + 6.\overline{1} - \beta_a = 0, \\ 6.\overline{0} + 20.\overline{1} + 4.\overline{31} + \beta_a + 4 = 0, \\ 4.\overline{1} + 8.\overline{31} + a_3 - \beta_a + 8 = 0, \\ 12.\overline{32} + 6.\overline{23} + a_3 - 24 = 0, \quad 6.\overline{32} + 12.\overline{23} - a_2 - 12 = 0, \\ 8.\overline{35} + 4.\overline{53} - a_3 + \beta_b - 8 = 0, \quad 4.\overline{35} + 8.\overline{53} + a_5 - \beta_b - 4 = 0, \\ 8.\overline{24} + 4.\overline{42} + a_2 - \beta_b = 0, \quad 4.\overline{24} + 8.\overline{42} - a_4 + \beta_b = 0, \\ 12.\overline{54} + 6.\overline{45} + a_5 = 0, \quad 6.\overline{54} + 12.\overline{45} - a_4 = 0, \\ 8.\overline{57} + 4.\overline{75} - a_5 + \beta_c + 4 = 0, \quad 4.\overline{57} + 8.\overline{75} + a_7 - \beta_c + 8 = 0, \\ 8.\overline{46} + 4.\overline{64} + a_4 - \beta_c = 0, \quad 4.\overline{46} + 8.\overline{64} - a_6 + \beta_c = 0, \\ 12.\overline{76} + 6.\overline{67} + a_7 + 24 = 0, \quad 6.\overline{76} + 12.\overline{67} - a_6 + 12 = 0, \\ 8.\overline{79} + 4.\overline{9} - a_7 + \beta_d + 24 = 0, \\ 4.\overline{79} + 20.\overline{9} + 6.\overline{8} - \beta_d + 12 = 0, \\ 6.\overline{9} + 20.\overline{8} + 4.\overline{68} + \beta_d = 0, \\ 4.\overline{8} + 8.\overline{68} + a_6 - \beta_d = 0. \end{array}$$

Rezolvând aceste ecuații găsim:

$$\begin{array}{ll} 192.\overline{0} = -6a_2 - 2a_3 + 24\beta_a & ; \quad 192.\overline{1} = 2a_2 + 6a_3 - 24\beta_a \\ 192.\overline{20} = 27a_2 + a_3 - 36\beta_a & ; \quad 192.\overline{31} = -a_2 - 27a_3 + 36\beta_a - 192 \\ 18.\overline{32} = -a_2 - 2a_3 + 36 & ; \quad 18.\overline{23} = 2a_2 + a_3 \\ 12.\overline{35} = 2a_3 + a_5 - 3\beta_b + 12 & ; \quad 12.\overline{53} = -a_3 - 2a_5 + 3\beta_b \\ 12.\overline{24} = -2a_2 - a_4 + 3\beta_b & ; \quad 12.\overline{42} = a_2 + 2a_4 - 3\beta_b \\ 18.\overline{54} = -a_4 - 2a_5 & ; \quad 18.\overline{45} = 2a_4 + a_5 \\ 12.\overline{57} = 2a_5 + a_7 - 3\beta_c & ; \quad 12.\overline{75} = -a_5 - 2a_7 + 3\beta_c - 12 \\ 12.\overline{46} = -2a_4 - a_6 + 3\beta_c & ; \quad 12.\overline{64} = a_4 + 2a_6 - 3\beta_c \\ 18.\overline{76} = -a_6 - 2a_7 - 36 & ; \quad 18.\overline{67} = 2a_6 + a_7 \\ 192.\overline{79} = a_6 + 27a_7 - 36\beta_d - 576 & ; \quad 192.\overline{68} = -27a_6 - a_7 + 36\beta_d \\ 192.\overline{9} = -2a_6 - 6a_7 + 24\beta_d & ; \quad 192.\overline{8} = 6a_6 + 2a_7 - 24\beta_d \end{array}$$

Dacă aceste momente le introducem în ecuațiile ( $\beta$ ) găsim:

$$\begin{aligned} 10\beta_a &= 3a_2 + 3a_3 + 16, & 4\beta_b &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 4 \\ 4\beta_c &= a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + 4 ; & 10\beta_d &= 3a_6 + 3a_7 - 48 \end{aligned}$$

Aceste valori ale lui  $\beta$  introduse în ecuațiile de mai sus, ne dă:

$$\begin{aligned} 960. \bar{0} &= 6a_2 + 26a_3 + 192 ; & 960. \bar{1} &= -26a_2 - 6a_3 - 192 \\ 960. \bar{20} &= 81a_2 - 49a_3 - 288 ; & 960. \bar{31} &= 49a_2 - 81a_3 - 672 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 48. \bar{35} &= -3a_2 + 5a_3 - 3a_4 + a_5 + 36 ; & 48. \bar{53} &= 3a_2 - a_3 + 3a_4 - 5a_5 + 12 \\ 48. \bar{24} &= -5a_2 + 3a_3 - a_4 + 3a_5 + 12 ; & 48. \bar{42} &= a_2 - 3a_3 + 5a_4 - 3a_5 - 12 \\ 48. \bar{57} &= -3a_4 + 5a_5 - 3a_6 + a_7 - 12 ; & 48. \bar{75} &= 3a_4 - a_5 + 3a_6 - 5a_7 - 36 \\ 48. \bar{46} &= -5a_4 + 3a_5 - a_6 + 3a_7 + 12 ; & 48. \bar{64} &= a_4 - 3a_5 + 5a_6 - 3a_7 - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 960. \bar{79} &= -49a_6 + 81a_7 - 2016 ; & 960. \bar{68} &= -81a_6 + 49a_7 - 864 \\ 960. \bar{9} &= 26a_6 + 6a_7 - 576 ; & 960. \bar{8} &= -6a_6 - 26a_7 + 576 \end{aligned}$$

Aceste valori le introducem în ecuațiile (a). Obținem 6 ecuații cu 6 necunoscute  $\alpha$ .

Se observă că dacă aceste ecuații le adunăm și scădem două câte două obținem:

$$a_2 = a_3 \quad , \quad a_4 = a_5 \quad , \quad a_6 = a_7$$

și grupul:

$$\begin{aligned} 29a_2 - 5a_4 &= 66, \\ -a_2 + 6a_4 - a_6 &= 12, \\ 5a_4 - 29a_6 &= 78, \end{aligned}$$

ale cărei soluțiuni sunt:

$$a_2 = 3126/1189 \quad , \quad a_4 = 2436/1189 \quad , \quad a_6 = -2778/1189$$

Valoarea momentelor este deci:

$$\begin{aligned} \bar{0} &= -1 = a_2/30 + 0,2 \quad ; \quad \bar{20} = a_2/30 - 0,3 \quad ; \quad \bar{31} = -a_2/30 - 0,7 \\ \bar{32} &= -a_2/6 + 2 \quad ; \quad \bar{23} = a_2/6 \quad ; \quad \bar{35} = (a_2 - a_4)/24 + 0,75 \\ \bar{53} &= (a_2 - a_4)/24 + 0,25 \quad ; \quad \bar{24} = -(a_2 - a_4)/24 + 0,25 \\ \bar{42} &= -(a_2 - a_4)/24 - 0,25 \quad ; \quad \bar{45} = -\bar{54} = a_4/6 \\ \bar{57} &= (a_4 - a_6)/24 - 0,25 \quad ; \quad \bar{75} = (a_4 - a_6)/24 - 0,75 \\ \bar{46} &= -(a_4 - a_6)/24 + 0,25 \quad ; \quad \bar{64} = -(a_4 - a_6)/24 - 0,25 \\ \bar{76} &= -a_6/6 - 2 \quad ; \quad \bar{67} = a_6/6 \quad ; \quad \bar{79} = a_6/30 - 2,1 \\ \bar{68} &= -a_6/30 - 0,9 \quad ; \quad \bar{8} = -\bar{9} = -a_6/30 + 0,6 \end{aligned}$$

Dacă la aceste momente se adaugă cu semnele lor momentele deduse pe cale statică și anume  $\bar{31}_s, \bar{32}_s, \text{etc.}$ , obținem în definitiv valorile:

$$\begin{aligned} \bar{0} &= -\bar{1} = 0,288 \quad ; \quad \bar{31} = -\bar{20} = 0,212 \quad ; \quad \bar{23} = -\bar{32} = 0,438 \\ \bar{24} &= -\bar{35} = 0,226 \quad ; \quad \bar{53} = -\bar{42} = 0,274 \quad ; \quad \bar{45} = -\bar{54} = 0,341 \\ \bar{46} &= -\bar{57} = 0,067 \quad ; \quad \bar{75} = -\bar{64} = 0,433 \quad ; \quad \bar{76} = -\bar{67} = 0,389 \\ \bar{79} &= -\bar{68} = 0,822 \quad ; \quad \bar{8} = -\bar{9} = 0,678 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Cu ajutorul acestor valori s'a trasat pe grindă curba momentelor (fig. 483 b).

Din inspectarea valorilor de mai sus și a curbei momentelor se constată că la mijlocul montanților momentele sunt nule și că cele două tălpi ale grinzii, în același panou, sunt solicitate la fel din punctul de vedere al momentelor. De asemenea se observă că și calculele prezintă oarecare simetrie.

Dacă pentru o altă poziție a sarcinii  $F$  am repeta calculul de mai sus și dacă am ține seamă de particularitățile acestei grinzi semnalate aci, atunci evident calculele se simplifică sensibil.

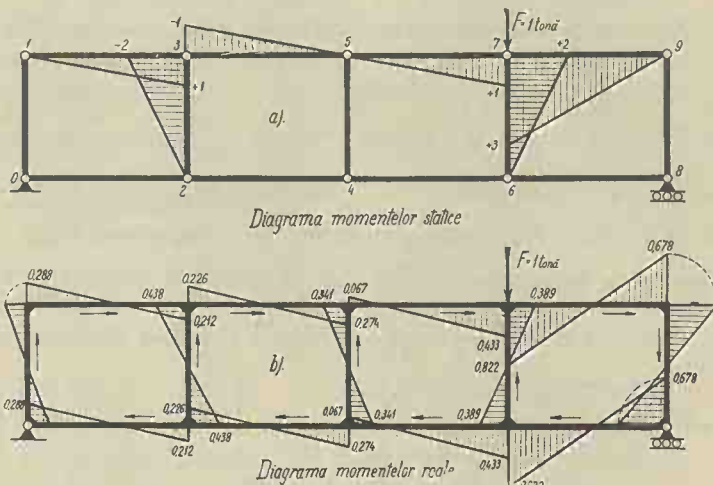


Figura 483

Pentru a putea calcula rezistențele în diferitele porțiuni de grindă ne mai trebuie să calculăm forțele axiale și tăietoare.

S'a arătat la alte aplicații cum din momentele la capul barelor deducem forța  $\bar{R} = X\bar{\xi} + Y\bar{\eta}$  pentru fiecare cadru elementar. Având pe  $X$  și  $Y$ , avem deci eforturile axiale în bare datorite cantităților static nedeterminate.

Dacă la acestea se adaugă cele rezultate din calculul static, atunci rezultă eforturile axiale totale și deci avem toate elementele pentru a putea proceda la calculul secțiunilor.

## XXVIII. LINII DE INFLUENȚĂ LA SISTEMELE STATIC NEDETERMINATE.

Cantitățile static nedeterminate se găsesc cu ajutorul teoremei lui *Castigliano*, deci cu ajutorul deformațiilor.

Deformațiunile s'au văzut că sunt funcțiuni liniare de încărcări și funcțiuni de un grad mai înalt de elementele (parametrii) cari fixează poziția forței și secțiunea în care se caută deplasarea. Prin urmare, și liniile de influență a cantităților static nedeterminate vor fi funcțiuni liniare de încărcări. Aceasta este important, căci vom putea suprapune efectele.

### A) Liniile de influență la sistemele simplu static nedeterminate.

Vom începe cu acestea pentru că sunt cele mai simple. Vom face câteva exemple.

#### 1. Grindă continuă cu 2 deschideri și reazime de nivel.

##### a) Liniile de influență ale reacțiilor.

Presupunem totdeauna că sarcina  $F = 1$  tonă este aplicată în secțiunea  $i$ .

Vom găsi deocamdată linia de influență a reacțiunii  $V_0$  pe două căi pentru a o desluși mai bine.

1°. Cu ajutorul lucrului mecanic virtual Sarcina  $F = 1$  tonă și reacțiunile  $V_0$ ,  $V_1$  și  $V_2$  formează un sistem de sarcini în echilibru, deci avem:

$$1 = \sum V$$



Pentru a aplica principiul lucrului mecanic virtual, dăm numai reazimului 0 o deplasare, celelalte rămânând pe loc (fig. 484).  $V_o$  fiind vertical, dăm reazimului 0 o deplasare verticală și anume deplasarea ce rezultă când în reazimul 0 aplicăm o sarcină verticală

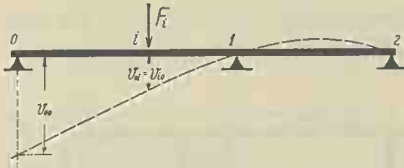


Figura 484

$V_o = 1$  tonă. În acest caz, rezultă în dreptul reazimului o săgeată  $v_{oo}$ , iar în dreptul sarcinii  $F$  o săgeată  $v_{io}$ . Conform principiului lucrului mecanic virtual avem:

$$1 \cdot v_{io} = V_o v_{oo}$$

și deci

$$V_o = v_{io}/v_{oo}$$

2°. Cu ajutorul teoremei lui Maxwell. Suprimăm reazimul 0 (fig. 485). Sub acțiunea lui  $F$ , extremitatea 0 a grinzii se va mișca oricum în sens vertical. Va trebui să aplicăm în reazimul 0 o reacțiune  $V_o$  așa fel ca să se aducă extremitatea grinzii în pozițiunea sa inițială. Deci săgeata în 0, sub acțiunea lui  $V_o$  și  $F = 1$  tonă, trebuie să fie egală cu zero. Ori, expresia săgeții în acest punct este:

$$V_o v_{oo} - 1 v_{oi} = 0.$$

Ori, conform teoremei lui Maxwell, avem:

$$v_{oi} = v_{io},$$

și deci

$$V_o = v_{io}/v_{oo}$$

Factorul  $1/v_{oo}$  este multiplicatorul liniei de influență.

Construcțiunea este foarte simplă. Suprimăm reazimul 0 și aplicăm acolo o sarcină  $V_o = 1$  tonă (fig. 485 b). Construim axa deformată a grinzii presupunând grinda simplu rezemată pe reazimile 1 și 2. În mod cu totul analog, suprimând reazimul 1, găsim linia de influență a lui  $V_1$  (fig. 485 c) care este:

$$V_1 = v_{i1}/v_{11}.$$

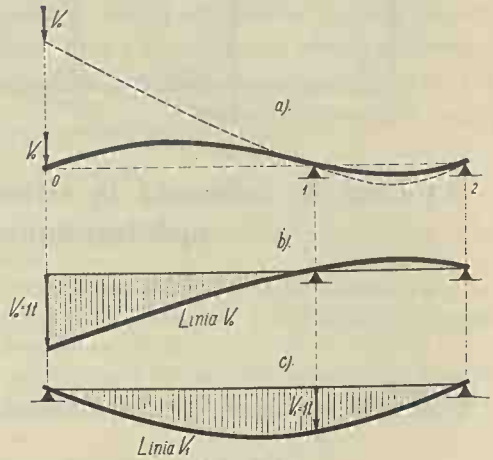


Figura 485

b) Liniile de influență ale forței tăietoare și momentului încovoietor.

1°. Să presupunem că vom să construim linia de influență a forței tăietoare din secțiunea  $x$ , secțiune cuprinsă în prima deschidere.

Dacă sarcina este la dreapta secțiunii, atunci forța tăietoare este chiar reacțiunea  $V_o$ . Dacă forța  $F = 1$  tonă, calcă la stânga secțiunii, atunci:

$$T = V_o - 1 = v_{io}/v_{oo} - 1,$$

sau

$$T = (v_{io} - v_{oo})/v_{oo} = -(v_{oo} - v_{io})/v_{oo}.$$

Prin urmare chestiunea este foarte simplă (fig. 486 a).

2°. Să presupunem că vom să găsim linia de influență a momentului încovoietor în aceeași secțiune  $x$ .

Presupun că sarcina  $F = 1$  tonă calcă la dreapta secțiunii. Atunci momentul este dat numai de reacțiunea  $V_o$ , deci:

$$M = V_o x = v_{io} x/v_{oo}.$$

Prin urmare, aceleași ordonate ale axei deformatate a grinzii servesc și pentru linia de influență a momentului încovoietor,

ceea ce diferă este numai multiplicatorul care aici este:  $x/v_{oo}$ .

Să presupunem că sarcina calcă la stânga secțiunii. Atunci:

$$M = V_o x - 1(x - a) = [v_{io} - v_{oo}(x - a)/x] x/v_{oo}$$

Pe figura 486 b se vede valoarea ordonatei  $v_{oo}(x - a)/x$ , care se scade din  $v_{io}$ .

Să vedem cum executăm grafic aceste linii de influență.

Suprimăm reazimul 0 și aplicăm în el o forță  $V_o = 1$  tonă (fig. 487). Avem de-a-face cu o grindă simplu rezemată pe reazimile 1 și 2. Curba momentelor este un triunghi și valoarea

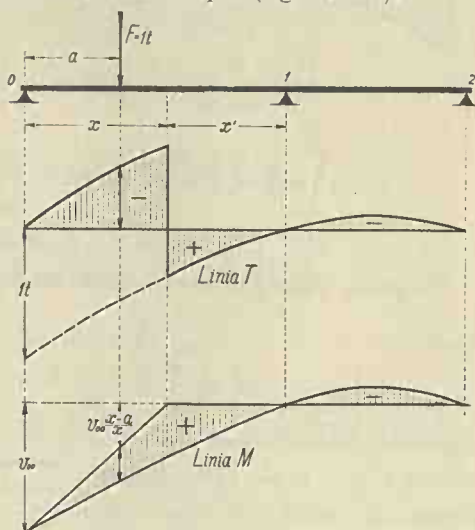


Figura 486

momentului pe reazimul 1 este  $-l_{01}$ . Cu această curbă de momente ca încărcătură și cu o distanță polară oarecare, construim axa deformată. Pentru că săgețile în reazimul 1 și 2 sunt nule, linia de închidere va fi dreapta care are săgețile nule în aceste puncte.

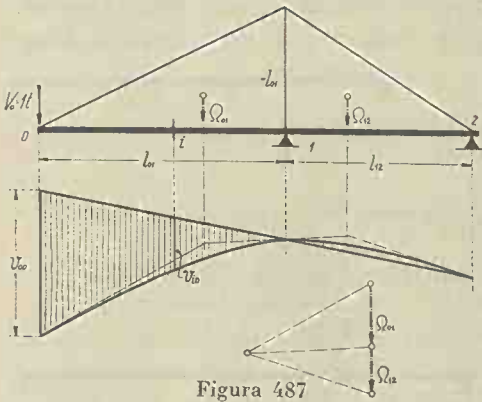


Figura 487

Săgețile se măsoară dela această linie de închidere.

Această curbă ne dă valorile lui  $v_{10}$  și  $v_{00}$ , deci tot ce ne trebuie pentru linie de influență precedente.

Să găsim prin calcul valorile lui  $v_{00}$  și  $v_{10}$ . Presupunem  $EI$  constant pe toată lungimea grinzii.

Avem:

$$v_{00} = \int m_{x_0}^2 ds/EI = \left[ \int_0^{l_{01}} x^2 dx + l_{01}^2 \int_0^{l_{12}} x_1^2 dx_1/l_{12}^2 \right] /EI,$$

$$v_{00} = 2 l_{01}^2 l_{02}/6 EI.$$

Să găsim valoarea lui  $v_{10}$ , când sarcina calcă pe prima deschidere.

Avem: 
$$v_{10} = \int m_{x_1} m_{x_0} ds/EI.$$

Prin urmare, va trebui să construim curba momentelor când sarcina  $F = 1$  tonă calcă în secțiunea  $i$ , adică pe  $m_{xi}$ , căci pe  $m_{x_0}$  l-am avut. Pe prima deschidere:  $m_{x_0} = -x$ , pe a doua:  $m_{x_0} = -l_{01} x_1/l_{12}$ . Pe prima deschidere (fig. 488 a) în intervalul  $0 - a$ :  $m_{xi} = 0$ , iar pe intervalul  $a - l_{01}$ :  $m_{xi} = -(x - a)$ . Pe a doua deschidere:  $m_{xi} = -b x_1/l_{12}$ .

Deci:

$$v_{10} = (1/EI) \left[ \int_a^{l_{01}} x(x - a) dx + \int_0^{l_{12}} l_{01} b x_1^2 dx_1/l_{12}^2 \right],$$

$$v_{10} = b \left[ 2 l_{01} l_{12} + b(2 l_{01} + a) \right] /6 EI.$$

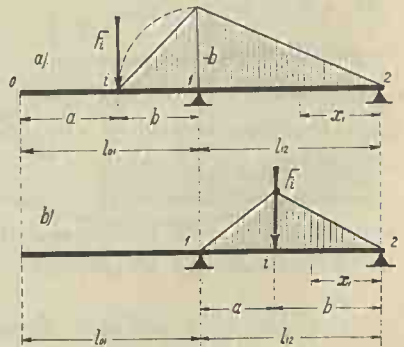


Figura 488

Când sarcina cade pe deschiderea doua  $l_{12}$ , aplicăm aceeași formulă (fig. 488 b).

Atunci  $m_{xi} = 0$  pe prima deschidere, iar pe a doua, în intervalul  $0 - a$ :  $m_{xi} = b x/l_{12}$  și  $m_{xi} = a x_1/l_{12}$  pe intervalul  $a - l_{12}$ , deci:

$$v_{io} = - (l_{01}/l_{12}^2 EI) \left[ b \int_0^a x x_1 dx + a \int_0^b x_1^2 dx_1 \right],$$

$$v_{io} = - l_{01} a b (l_{12} + b)/6 l_{12} EI.$$

E util adesea pentru calculul și construcția liniei de influență de a utiliza notațiile:

$$a/l = \alpha, \quad b/l = \beta,$$

cu  $\alpha + \beta = 1$  și, în acest caz,  $\alpha$  și  $\beta$  variază între 0 și 1.

În acest caz, pe prima deschidere, avem:

$$v_{io} = l_{01}^3 \beta \left[ 2 l_{12}/l_{01} + \beta (2 + \alpha) \right] /6 EI,$$

pe a doua:

$$v_{io} = - l_{01} l_{12}^2 \alpha \beta (1 + \beta)/6 EI,$$

și deci, pe prima deschidere:

$$v_{io}/v_{oo} = \frac{1}{2} \beta \left[ 2 l_{12}/l_{01} + \beta (2 + \alpha) \right] l_{01}/l_{02},$$

și pe a doua:

$$v_{io}/v_{oo} = \frac{1}{2} \alpha \beta (1 + \beta) l_{12}^2/l_{01} l_{02},$$

expresiuni cari se pot calcula foarte ușor, cu ajutorul tabloului următor:

| $\alpha$ | $\alpha \beta (1 + \beta)$ | $\beta^2 (2 + \alpha)$ | $\beta$ |
|----------|----------------------------|------------------------|---------|
| 0,0      | 0,000                      | 2,000                  | 1,0     |
| 0,1      | 0,171                      | 1,701                  | 0,9     |
| 0,2      | 0,288                      | 1,408                  | 0,8     |
| 0,3      | 0,357                      | 1,127                  | 0,7     |
| 0,4      | 0,384                      | 0,864                  | 0,6     |
| 0,42     | 0,385                      |                        | 0,58    |
| 0,5      | 0,375                      | 0,625                  | 0,5     |
| 0,6      | 0,336                      | 0,416                  | 0,4     |
| 0,7      | 0,273                      | 0,243                  | 0,3     |
| 0,8      | 0,192                      | 0,112                  | 0,2     |
| 0,9      | 0,099                      | 0,029                  | 0,1     |
| 1,0      | 0,000                      | 0,000                  | 0,0     |

## B) Linii de influență la sistemele multiplu static nedeterminate.

Prin o serie de exemple, vom indica procedeele cari se întrebunțează în asemenea cazuri.

### 1. Procedeeul întâiu.

Se face într'un mod oarecare sistemul static determinat suprimând atâtea reazime, legături sau bare câte este nevoie pentru a ajunge la aceasta. Reacțiunile reazimilor, a legăturilor sau eforturile din barele suprimate, le luăm ca necunoscute static nedeterminate.

Necunoscuta a cărei linie de influență ne interesează, o exprimăm în funcțiune de  $F = 1$  și de poziția acesteia. Aceasta va fi linia de influență.

a) Liniile de influență ale reacțiunilor la o grindă continuă pe trei deschideri, cu reazime de nivel.

Să găsim linia de influență a reacțiunii  $V_1$ .

Suprimând reazimile 1 și 2, grinda rămâne o grindă static determinată pe reazimile 0 și 3 și acționată de

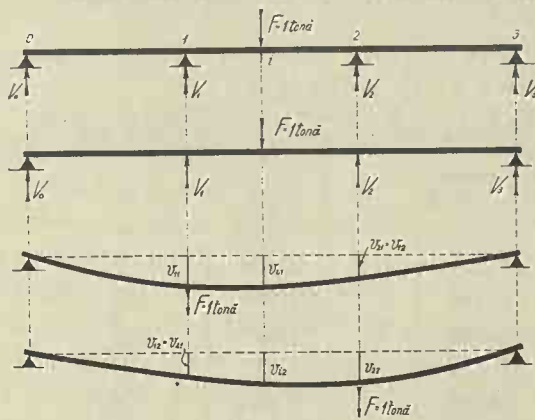


Figura 489

forța  $F = 1$  tonă (fig. 489) și reacțiunile necunoscute  $V_1$  și  $V_2$ .

Grinda fiind continuă, vom scrie că săgețile sunt nule în dreptul reazimilor 1 și 2 sub acțiunea forțelor  $F = 1$  tonă și a necunoscutelor  $V_1$  și  $V_2$ .

Vom avea:

$$v_{11} - V_1 v_{11} - V_2 v_{12} = 0,$$

$$v_{21} - V_1 v_{21} - V_2 v_{22} = 0,$$

sau

$$V_1 v_{11} + V_2 v_{12} = v_{11},$$

$$V_1 v_{21} + V_2 v_{22} = v_{21}.$$



Prin urmare, în dreptul reazimului 1, vom aplica o forță  $V_1 = 1$  tonă și vom găsi  $v_{11}$ ,  $v_{12}$  și  $v_{i1}$ . Făcând același lucru cu  $V_2 = 1$  tonă aplicată în reazimul 2, căpătăm pe  $v_{21}$ ,  $v_{22}$  și  $v_{i2}$ .

Ne rămâne acum să rezolvăm aceste două ecuațiuni și vom găsi valorile lui  $V_1$  și  $V_2$  sub forma:

$$V_1 = A_1 v_{i1} + B_1 v_{i2},$$

$$V_2 = A_2 v_{i1} + B_2 v_{i2}.$$

Prin urmare, valoarea lui  $V_1$  este suma celor două ordonate  $v_{i1}$  și  $v_{i2}$  multiplicatate respectiv cu  $A_1$  și  $B_1$ .

Metoda, după cum se vede este foarte simplă însă necesită multiplicarea ordonatelor axei deformatate cu coeficienții  $A_1$  și  $B_1$  sau ceea ce e mai simplu reconstruirea lor cu alte distanțe polare așa ca să avem direct termenii  $A_1 v_{i1}$  și  $B_1 v_{i2}$  pe cari îi adunăm apoi.

Să presupunem că avem un sistem triplu statis nedeterminat, un caz foarte curent.

*b) Linii de influență la grindă continuă cu patru deschideri.*

Vom avea absolut la fel.

$$v_{1i} = V_1 v_{11} + V_2 v_{12} + V_3 v_{13}$$

$$v_{2i} = V_1 v_{21} + V_2 v_{22} + V_3 v_{23}$$

$$v_{3i} = V_1 v_{31} + V_2 v_{32} + V_3 v_{33},$$

cari rezolvate ne dau:

$$V_1 = A_1 v_{1i} + B_1 v_{2i} + C_1 v_{3i},$$

$$V_2 = A_2 v_{1i} + B_2 v_{2i} + C_2 v_{3i},$$

$$V_3 = A_3 v_{1i} + B_3 v_{2i} + C_3 v_{3i}.$$

Prin urmare metoda este generală și foarte simplă. Necesită însă rezolvarea acestui sistem de ecuații.

Inconvenientul acestui procedeu este că în cazul când, de exemplu, termenul  $A_1 v_{1i}$  este foarte mare și termenii  $B_1 v_{2i} + C_1 v_{3i}$  sunt de același ordin de mărime însă de semn contrar cu precedentul, atunci rezultă pentru  $V_1$  o valoare foarte mică.

În acest caz, toți termenii trebuie calculați cu mare exactitate pentru ca valoarea lui  $V_1$  să nu fie afectată de erori prea mari.

Pentru a evita asemenea inconveniente, trebuie să fim foarte atenți la alegerea necunoscutelor static nedeterminate.

Acest procedeu mai are inconvenientul că nu se pretează bine la calcule aproximative.

Procedeu în genere este universal aplicat.

## 2. Procedul al doilea.

a) Liniile de influență ale reacțiunilor la o grindă continuă cu trei deschideri.

Forța  $F = 1$  și reacțiunile își fac echilibru (fig. 490), deci avem:

$$1 = \Sigma V.$$

Să presupunem că dăm o deplasare numai reazimului 1, și anume deplasarea care s'ar produce acolo când în 1 aplicăm sarcina  $V_1 = 1$  tonă.

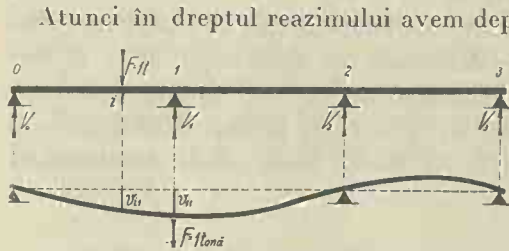


Figura 490

Atunci în dreptul reazimului avem deplasarea  $v_{11}$ , iar în dreptul forței  $v_{12}$  și conform principiului lucrului mecanic virtual, avem:

$$1 v_{i1} = V_1 v_{11}$$

pentru că deplasarea celorlalte reazime este nulă.

Formula aceasta ne indică precis ce trebuie să facem.

În acest mod, am adus problema liniei de influență la cazul sistemelor simplu static nedeterminate, însă pentru găsirea lui  $v_{i1}$  și  $v_{11}$  va trebui să rezolvăm în prealabil o problemă static nedeterminată.

S'o rezolvăm în acest caz. Vom avea deci o grindă continuă cu două deschideri  $l_{01} + l_{12}$  și  $l_{23}$  și pe prima deschidere, la distanțele  $l_{01}$  și  $l_{12}$  de cele două reazime 0 și 2, se aplică o sarcină de  $V_1 = 1$  tonă (fig. 491). Ca să găsim axa deformată, trebuie găsită curba momentelor.

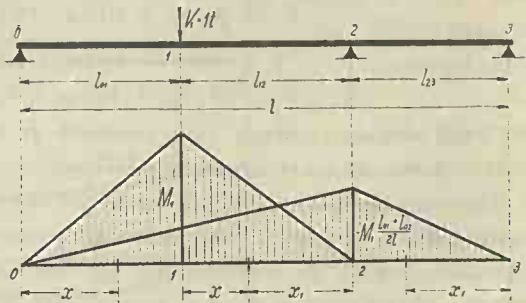


Figura 491

Vom proceda așa, cum s'a arătat la grinzile continue. Momentul în dreptul sarcinii  $V_1 = 1$  tonă este, considerând deschiderea  $l_{01} + l_{12}$  ca grindă simplu rezemată:

$$M_1 = l_{01} l_{12} / l_{02},$$

iar momentul negativ în dreptul reazimului 2 este:

$$M_2 = -l_{01}l_{12}(l_{01} + l_{02})/2l_{02}l = -M_1(l_{01} + l_{02})/2l,$$

în care

$$l = l_{01} + l_{12} + l_{23}.$$

Putem acum determina unghiurile axei deformată în punctele 0, 2 și 3.

Avem:

$$\theta_0 = [M_1(l_{12} + l_{02}) + M_2 l_{02}]/6 E I,$$

$$\theta_2 = 2M_2 l_{23} / 6 E I,$$

$$\theta_3 = M_2 l_{23} / 6 E I,$$

deci toate datele pentru a putea scri expresia săgeții pe orice deschidere.

Pe prima deschidere  $l_{01}$ , expresia ei va fi:

$$v_{i1} = \theta_0 x - x^3[M_1/l_{01} + M_2/l_{02}]/6EI,$$

pe a doua:

$$v_{i1} = \theta_2 x_1 - x_1^2[M_1 x_1/l_{12} - M_2 x_1/l_{02} + 3M_2]/6EI,$$

pe a treia:

$$v_{i1} = \theta_3 x_1 - x_1^2 M_2 / 6 l_{23} EI,$$

iar

$$v_{11} = l_{01}l_{12}[2M_1 + M_2(l_{01} + l_{02})/l_{02}]/6EI.$$

Avem toate elementele pentru a construi prin puncte, linia de influență

#### b) Linia de influență a momentului încovoetor pe reazemul 1.

În grindă, în dreptul reazimului, continuitatea grinzii o înlocuim cu o articulație în care facem să acționeze un moment  $M_1$ , care echilibrează forța  $F=1$  tonă.

Ca deplasări ale sistemului, dăm deplasarea care se produce când în 1 acționează momentul  $M_1 = 1$  tm. Cele două tangente la fibra deformată în 1 fac unghiul  $\theta_{11}$ , iar în dreptul lui  $F$  avem  $v_{i1}$  (fig. 492), și, conform principiului deplasărilor virtuale, vom avea:

$$M_1 \theta_{11} = 1 v_{i1}.$$

Să găsim expresia lui  $v_{i1}$  și  $\theta_{11}$ .

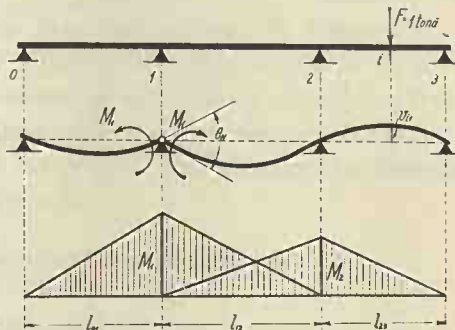


Figura 492

Pe prima deschidere avem, o grindă static determinată la extremitatea căreia este aplicat  $M_1 = 1 \text{ tm.}$ ; vom avea:

$$\theta_0 = l_{01}/6EI \quad , \quad \theta_{1s} = 2l_{01}/6EI.$$

S'a pus indicele  $s$  pentru a arăta că este unghiul la stânga rezimului din 1. Cealaltă parte rămasă este o grindă continuă la extremitatea căreia se aplică un moment  $M_2$ . Cu ajutorul teoremei lui *Clapeyron* găsim:

$$M_2 = - \frac{1}{2} l_{12}/l_{13}.$$

Putem găsi deci:

$$\theta_{1d} = l_{12} (2 + M_2)/6 E I.$$

$$\theta_2 = 2 M_2 l_{23}/6 E I.$$

$$\theta_3 = M_2 l_{23}/6 E I.$$

Avem:

$$\theta_{11} = \theta_{1s} + \theta_{1d} = [2 l_{02} + l_{12} M_2]/6 E I.$$

Pe prima deschidere avem:

$$v_{i1} = \theta_0 x - x^3/6 l_{01} EI = x (l_{01}^2 - x^2)/6 l_{01} E I,$$

pe deschiderea doua:

$$v_{i1} = \theta_{1d} x + \theta_2 x_1 - (x^3 + x_1^3)/6 l_{12} E I,$$

iar pe a treia:

$$v_{i1} = \theta_3 x_1 - x_1^3 M_2/6 l_{23} EI.$$

Avem deci toate elementele necesare pentru construirea liniei de influență.

Exemplele de mai sus ne arată că putem găsi oricând *direct* linia de influență a oricărei cantități static nedeterminate, oricare ar fi gradul de nestaticitate al sistemului.

Vom da în cele ce urmează o metodă generală care se aplică în mod relativ comod.

### 3. Metoda secțiunilor incomplete.

#### a) Generalități.

Când facem o secțiune într'o bară oarecare, pentru a restabili echilibrul, va trebui ca în fiecare din cele două fețe ale secțiunii

ce rezultă, să introducem — egale și de sens contrar — câte un moment  $M_1$ , o forță tăietoare  $T$  și o forță axială  $N$ .

Dacă, secțiunea fiind făcută, cele două fețe ale ei se deplasează după normala comună cu  $u = u_s + u_d$ ,  $u_s$  fiind deplasarea feței din stânga secțiunii și  $u_d$  a celei din dreapta, dacă în planul secțiunii se deplasează cu  $v = v_s + v_d$  și dacă ele se rotesc cu  $\theta = \theta_s + \theta_d$ , atunci lucrul mecanic virtual al celor trei cantități din secțiunea considerată (fig. 493) va fi:

$$L = M\theta + Tv + Nu.$$

Dacă, în loc de a face o secțiune completă, facem una *incompletă* așa fel, de exemplu, ca după deformație,  $u$  și  $v$  să fie identice pentru ambele fețe ale secțiunii și numai *orientarea celor două fețe să difere*, atunci evident că  $Tv = 0$ ,  $Nu = 0$  și deci lucrul mecanic are expresia:

$$L = M\theta.$$

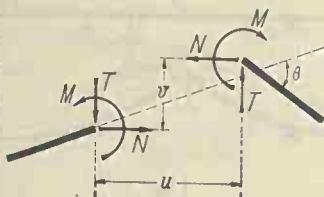


Figura 493

Aceasta revine la a zice că în secțiunea considerată am introdus o *articulație*, căci numai în acest caz deplasările  $u$  și  $v$ , după deformație, sunt aceleași pentru ambele fețe ale secțiunii.

În același mod, putem face o secțiune *incompletă* așa fel ca cele două fețe ale ei, după deformație, să aibă aceeași orientare, și deplasarea în sensul normalei să fie aceeași, cu alte cuvinte, cele două fețe ale secțiunii după deformație să prezinte una față de alta numai o deplasare în planul lor. În acest caz, expresia lucrului mecanic, relativ la această secțiune, va fi:

$$L = Tv,$$

căci  $M\theta = 0$  și  $Nu = 0$ .

Prin urmare, cu ajutorul secțiunilor incomplete putem face ori-când ca din expresia lucrului mecanic să dispară toate cantitățile afară de aceea care ne interesează.

### b) Ecuațiile liniilor de influență.

Să presupunem că avem un sistem multiplu static nedeterminat acționat în secțiunea  $i$  de o forță  $F = 1$  tonă. Să presupunem că în secțiunea  $x$  introducem o articulație în care acționează un moment  $M$  care echilibrează forța  $F = 1$  tonă, cu alte cuvinte,  $M$  este



momentul care se dezvoltă în secțiunea  $x$  când în secțiunea  $i$  este sarcina,  $F = 1$  tonă (fig. 494).

Ca deplasări ale sistemului luăm axa deformată a grinzii ce rezultă când în secțiunea  $x$  aplicăm un moment  $M = 1$  tm. Atunci cele două fețe ale secțiunii fac între ele un unghi  $\theta_{xxm}$ , iar în secțiunea  $i$  se produce o săgeată  $v_{ixm}$ . Conform principiului lucrului mecanic virtual vom avea

$$1 v_{ixm} = M \theta_{xxm},$$

pentru că lucrul mecanic a tuturor celorlalte cantități static nedeterminate sau static determinate este nul, deoarece

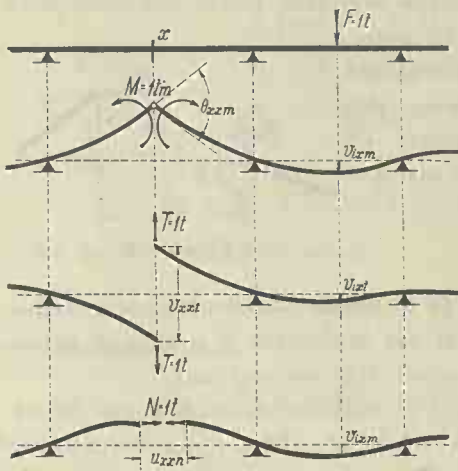


Figura 494

terminate sau static determinate este nul, deoarece sau au deplasări care se anulează, adică sunt egale și de sens contrar, sau sunt nule.

În acest mod, obținem pe rând:

$$T v_{ixt} = v_{ixt},$$

$$N v_{ixn} = v_{ixn}.$$

După norma arătată anterior, semnificarea lui  $v_{ixt}$  este: săgeata cu care se deplasează în planul ei secțiunea  $x$  când în ea aplicăm

o forță tăietoare  $T = 1$  tonă, iar  $v_{ixt}$  este săgeata care se produce în acest caz în secțiunea  $i$ .

Din cele de mai sus rezultă că putem exprima direct pe  $M$ ,  $T$  și  $N$  din secțiunea considerată în funcțiune de  $v_{ix}$ , deci putem construi direct liniile de influență pentru fiecare din cantitățile de mai sus. Prin urmare, metoda e generală.

E vorba acum să găsim explicit expresiile lui  $\theta_{xx}$ ,  $v_{xx}$ ,  $v_{ix}$ , etc.

Observăm mai întâi că inversul cantităților  $\theta_{xx}$ ,  $v_{xx}$  și  $u_{xx}$  vor fi multiplicatorii liniilor de influență a căror ordonate vor fi date de  $v_{ix}$ .

Pentru a găsi explicit aceste valori, trebuie făcută încă o observație generală și aplicabilă tuturor ecuațiilor de mai sus.

Pentru a o concretiza, ne vom ocupa de linia de influență a momentului încovoietor.

## c) Linia de influență a momentului încovoetor.

Când în secțiunea  $x$  am introdus o articulație și când, asupra celor două extremități de grindă cari își au capetele lor în această secțiune, am aplicat un moment  $M = 1 \text{ tm}$ , pentru ca deplasările celor două extremități să fie *aceleași* va trebui ca  $u$  și  $v$  ale lor să fie identice. Pentru aceasta va trebui ca să introducem în cele două extremități câte un  $T$  și  $N$  necunoscute așa fel ca să satisfacă acestei condițiuni (fig. 495).

Vom afecta cu indicele  $s$  deplasările extremității grinzii din stânga și cu indicele  $d$  aceleași pentru grinda din dreapta.

Pentru că acum este vorba numai de secțiunea  $x$ , pentru simplificarea scrisului vom suprima indicii  $xx$ . Ținând seamă de sensul solicitărilor din figura 495, vom avea:

$$u_{sm} - Nu_{sn} - Tu_{st} = u_{dm} - Nu_{dn} + Tu_{dt},$$

$$v_{sm} - Nv_{sn} - Tv_{st} = v_{dm} - Nv_{dn} + Tv_{dt}.$$

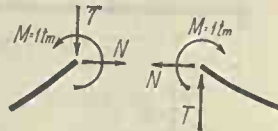


Figura 495

Indicii  $m$ ,  $n$  și  $t$  arată că deplasările sunt produse respectiv de:  $M = 1 \text{ tm}$ ,  $N = 1 \text{ t}$ , și  $T = 1 \text{ t}$ , aplicate în secțiunea  $x$ .

Din aceste două ecuații deducem pe  $N$  și  $T$ , întru cât toate celelalte sunt cunoscute.

Odată  $N$  și  $T$  cunoscute, putem scri valoarea lui  $\theta_{xx}$  și  $v_{ix}$  în funcțiune de aceste cantități și de  $M = 1 \text{ tm}$ .

Vom avea de exemplu, pentru  $\theta_{xx}$  valoarea:

$$\theta_{xx} = \theta_{sm} + \theta_{dm} - N(\theta_{sn} + \theta_{dn}) - T(\theta_{st} - \theta_{dt}).$$

Valoarea lui  $v_{ix}$  pentru ramura din stânga, va fi:

$$v_{ix} = v_{ixm} - Tv_{ixt} - Nv_{ixn},$$

iar pentru cea din dreapta:

$$v_{ix} = v_{ixm} + Tv_{ixt} - Nv_{ixn}.$$

Ultimele două ecuații ne arată că linia de influență  $v_{ix}$  este suma a trei linii de influență date de  $M = 1 \text{ tm}$ ,  $T = 1 \text{ t}$  și  $N = 1 \text{ t}$ , însă ordonatele ultimilor două sunt multiplicare cu  $T$  și  $N$  date de ecuațiile de mai sus.

Grafic chestiunea se simplifică pentru că odată aflate  $T$  și  $N$  putem construi *direct* linia de influență cu aceste valori și cu  $M = 1 \text{ tm}$ .

## d) Linia de influență a forței tăietoare.

Vom proceda în mod cu totul analog. Secțiunea incompletă va fi așa ca să permită numai o lunecare a secțiunii în planul ei, pe când deplasarea în sensul axei barei și orientarea celor două fețe ale secțiunii după deformație să rămână aceleași (fig. 496).

Vom avea:

$$u_{st} + Mu_{sm} - Nu_{sn} = -u_{dt} - Mu_{dm} + Nu_{dn},$$

$$\theta_{st} - M\theta_{sm} - N\theta_{sn} = +\theta_{dt} + M\theta_{dm} - N\theta_{dn},$$

ecuații cari ne dau valorile lui  $M$  și  $N$ .

Valoarea lui  $v_{xx}$  va fi:

$$v_{xx} = v_{st} + v_{dt} - M(v_{sm} - v_{dm}) - N(v_{sn} + v_{dn}).$$

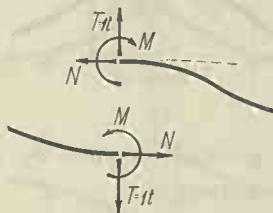


Figura 496

Pentru ramura din stânga avem:

$$v_{ix} = -v_{ixl} + Mv_{ixm} + Nv_{ixn}.$$

și pentru ramura din dreapta:

$$v_{ix} = v_{ixr} + Mv_{ixm} - Nv_{ixn}.$$

Absolut analog se procedează și la determinarea liniei de influență a lui  $N$ .

Din cele de mai sus, se vede că oricare ar fi gradul de nestabilitate al sistemului, de îndată ce putem scrie sau construi valorile lui  $u$ ,  $v$  și  $\theta$  pentru ambele capete ale grinzii din secțiunea  $x$  sub acțiunea lui  $N = 1$  t,  $T = 1$  t și  $M = 1$  tm., atunci cu ajutorul secțiunilor incomplete — pe baza egalității deplasărilor — putem afla două din cantitățile static nedeterminate din secțiune. Cu ajutorul acestora și a celei de a treia — egală cu unitatea — putem scrie deplasările în orice punct al sistemului și deci putem afla linia de influență a cantității care ne interesează.

În cazul nostru, când am considerat în secțiune trei cantități  $N$ ,  $T$  și  $M$ , deplasările  $u$ ,  $v$  și  $\theta$  din secțiunea  $x$  sunt în număr de 18. În cazul cel mai general când am considera toate cele 6 solicitări din secțiune, numărul deplasărilor  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta$ , etc. . . . este de 72.

Se înțelege că în cazul general când vom avea de aflat 5 cantități din secțiune, chestiunea este mult mai anevoioasă, numai din punctul de vedere al calculului.

**Aplicația Nr. 149.** Se dă o grindă orizontală încastrată la ambele capete, de deschidere  $l$  și de secțiune constantă. Secțiunea  $x$  în care se caută linia de

influență este fixată prin distanțele  $x$  și  $x_1$  dela cele două capete (stânga și dreapta) ale grinzii. Secțiunea  $i$  în care calcă sarcina  $F = 1$  este fixată în același mod prin distanțele  $a$  și  $b$  (fig. 497). Vom presupune peste tot  $N = 0$  și că  $u = 0$  pe tot lungul grinzii.

În aceste condiții, din formulele precedente ne rămâne să evaluăm:

$$\begin{aligned} \theta_{sm} &= x & , & \quad v_{sm} = \frac{1}{2} x^2 & , & \quad v_{sixm} = \frac{1}{2} a^2, \\ \theta_{dm} &= x_1 & , & \quad v_{dm} = \frac{1}{2} x_1^2 & , & \quad v_{dixm} = \frac{1}{2} b^2, \\ \theta_{st} &= \frac{1}{2} x^2 & , & \quad v_{st} = \frac{1}{3} x^3 & , & \quad v_{sixt} = \frac{1}{6} a^2 (3x - a), \\ \theta_{dt} &= \frac{1}{2} x_1^2 & , & \quad v_{dt} = \frac{1}{3} x_1^3 & , & \quad v_{dixt} = \frac{1}{6} b^2 (3x_1 - b). \end{aligned}$$

Toate cantitățile de mai sus trebuiesc împărțite cu  $EI$  care în formula liniei de influență va dispărea întru cât intră la numărător și numitor.

1. Să găsim linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea  $x$ .

Introducând valorile de mai sus în expresia care ne dă pe  $T$  pentru acest caz avem:

$$T = 3(x^2 - x_1^2)/2(x^3 + x_1^3).$$

Valoarea lui  $\theta_{xx}$  va fi:

$$\theta_{xx} = l^3/4(x^2 + x_1^3).$$

Valoarea lui  $v_{ix}$ , pentru ramura din dreapta, de exemplu, va fi:

$$v_{ix} = lb^2[lx + a(x - x_1)]/4(x^3 + x_1^3),$$

și deci

$$M = v_{ix}/\theta_{xx} = b^2[lx - a(x - x_1)]/l^3.$$

În mod analog pentru ramura din stânga:

$$M = a^2[lx_1 - b(x - x_1)]/l^3.$$

2. Să găsim linia de influență a forței tăietoare din secțiunea  $x$ .

Introducând valorile găsite anterior în expresia care ne dă valoarea momentului avem:

$$M = \frac{1}{2}(x - x_1).$$

Valoarea lui  $v_{xx}$  va fi:

$$v_{xx} = \frac{1}{12}l^3.$$

Valoarea lui  $v_{ix}$  pentru ramura din dreapta, este:

$$v_{ix} = \frac{1}{12}b^2(l + 2a)$$

și deci

$$T = v_{ix}/v_{xx} = b^2(l + 2a)/l^3,$$

iar pentru ramura din stânga:

$$T = -a^2(l + 2b)/l^3$$

Linia de influență a forțelor tăietoare are aceeași formă în raport cu parametrul  $a$  și  $b$ .

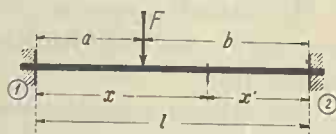


Figura 497

#### 4. Procedeu al patrului.

Se știe că deformațiunile se exprimă în funcțiune de suprafețele  $\Omega$  și momentele statice  $S$  ale suprafeței momentelor a tuturor solicitărilor static determinate și nedeterminate.

Prin urmare, deformațiunile vor varia întocmai ca aceste cantități,  $\Omega$  și  $S$ .

La construcțiunile static nedeterminate toate solicitările s'au separat în două: solicitări ale sistemului static determinat cari ne dau  $\Omega_s$  și  $S_s$  și solicitări static nedeterminate cari ne dau  $\Omega_n$  și  $S_n$ .

În ultimele expresiuni intră numai cantitățile static nedeterminate, pe când în primele intră forțele  $F$  cu mărimea, direcția și poziția lor.

S'a văzut că linia de influență se construiește pentru  $F = 1$  tonă și o direcție dată a acesteia. Ceea ce variază în expresiile  $\Omega_s$  și  $S_s$  este numai poziția forței. Cum putem scrie oricând expresiile lui  $\Omega_s$  și  $S_s$  în funcție de poziția forței  $F = 1$  tonă, înseamnă că am scris chiar expresia liniilor de influență a cantităților ce ne interesează.

Aplicațiile făcute la arce, cadre, etc., sunt chiar liniile de influență a cantităților calculate acolo.



## XXIX. EFORTURI DINAMICE.

În toate cazurile de până acum am considerat că sarcinile se aplică pe construcțiuni în mod static, adică cresc în mod continuu dela valoarea inițială zero până la valoarea finală  $F$ .

Am mai presupus până acum că sarcinile aplicate pe construcțiuni sunt în repaos.

În cele ce urmează vom presupune, pe de o parte, că parte din construcțiuni nu mai sunt în repaos, ci în mișcare, iar pe de altă parte, că sarcinile nu se mai aplică static, ci brusc sau cu o oarecare iuțeală.

Din prima categorie fac parte toate organele de mașini cari sunt în mișcare. Acestea fiind în mișcare, diferitele lor particule sunt animate de diferite accelerații cari multiplicare cu masele respective ne dau forțele de cari sunt animate acele particule. Având forțele cari solicită diferitele elemente ale construcției, putem determina momentele încovoietoare, forțele tăietoare, etc., deci putem determina rezistențele interioare a pieselor în mișcare. Din cele de mai sus se vede că problema principală este una de dinamică și numai după ce aceasta a fost rezolvată trecem la partea propriu zisă, de rezistență. Prin urmare, problema este identică ca la sarcinile statice unde mai întâi este vorba de o problemă de statică și în urmă una de rezistență.

Din a doua categorie de probleme fac parte acelea la cari sarcinile se aplică brusc sau prin lovire. Din acest mod de aplicare a sarcinilor, rezultă un surplus de rezistențe în piese față de aceleași sarcini dacă s'ar aplica static.

O altă categorie de probleme este aceea în care și sarcinile și construcția sunt în mișcare. Acestei categorii aparține vibrația construcțiilor. Ne vom ocupa pe rând de fiecare din aceste probleme.

## A) Eforturi dinamice datorite mișcării.

Aci intră calculul tuturor pieselor în mișcare. Vom arăta prin câteva exemple în ce constă acest gen de probleme.

### 1. Calculul unei bare de acuplare.

Bara  $AB = l$ , articulată în  $A$  și  $B$ , se rotește în jurul punctelor  $O_1$  și  $O$ , fiind legată de acestea cu barele  $O_1A = OB = r$ . Iuțeala constantă de rotație este  $\omega$  (fig. 498). Greutatea barei pe unitatea de lungime o notăm cu  $p$  și masa corespondentă cu  $m$ .

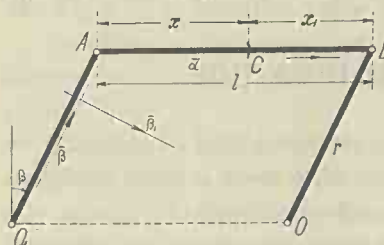


Figura 498

Punctul  $C$  de pe bara  $AB$  este definit de:

$$\vec{C} = r\vec{\beta} + x\vec{a},$$

$\vec{a}$  și  $\vec{\beta}$  fiind direcțiunile barelor  $AB$  și  $O_1A$ .

Derivând în raport cu  $t$  (timp) avem:

$$d\vec{C}/dt = \vec{v} = r d\vec{\beta}/dt,$$

pentru că  $r$ ,  $x$  și  $\vec{a}$  sunt constante.

Însă

$$d\vec{\beta}/dt = \vec{\beta}_1 d\beta/dt = \vec{\beta}_1 \omega, \text{ și deci:}$$

$$\vec{v} = \vec{\beta}_1 r \omega.$$

Dacă mai derivăm odată, avem:

$$\vec{v}' = -\vec{\beta} r \omega^2,$$

pentru că:

$$d\vec{\beta}_1/dt = -\vec{\beta} d\beta_1/dt = -\vec{\beta} d\vec{\beta}/dt = -\vec{\beta} \omega$$

și  $d\omega/dt = 0$ .

Se vede că reacțiile datorite acestei accelerații sunt dirijate către  $-\vec{\beta}$ .

Componenta acestei accelerații după normala la secțiunea barei  $AB$  o notăm cu  $v'_n$ , iar după tangenta la secțiune cu  $v'_t$ . Vom avea:

$$v'_t = -r\omega^2 \cos\beta \text{ și } v'_n = -r\omega^2 \sin\beta,$$

cari sunt maxime pentru  $\beta = 0$  și  $\beta = \pi/2$ , când au valorile  $r\omega^2$ .

Bara  $AB$  o vom calcula cu o grindă simplă rezemată în  $A$  și  $B$ , deci de deschidere  $l$ , supusă la forțele  $m r \omega^2$  pe unitatea de lungime,

care ne dă un moment maxim de  $\frac{1}{3} m r \omega^2 l^2$ . La rezistențele ce rezultă din această formulă vom adăuga rezistențele din greutatea proprie și din forțele ce transmite punctul  $A$  punctului  $B$ .

Bara  $O_1A$  este supusă la o tensiune care rezultă din reacțiunea barei  $AB$  egală cu  $\frac{1}{2} m r \omega^2 l$  și din accelerația elementelor barei  $O_1A$ . Într'un punct al acestei bare avem  $m_1 r_1 \omega^2 dr_1$  și va fi maximă în  $O_1$  unde are valoarea

$$\int_0^r m_1 r_1 \omega^2 dr_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega^2.$$

Aci  $m_1$  este masa barei  $O_1A$  pe unitatea de lungime.

## 2. Calculul unei biele.

Să presupunem că biela se află în poziția din figura 499.  $O_1$  este poziția punctului mort,  $O$  axa de rotație,  $A$  și  $B$  extremitățile bielei. Notăm  $O_1A = \bar{a} = a\bar{\alpha}$ ,  $AB = \bar{l} = l\bar{\beta}$ ,  $OB = \bar{r} = r\bar{\varphi}$ . Vectorii unitate normali pe  $\bar{\beta}$  și  $\bar{\varphi}$  îi notăm respectiv cu  $\bar{\beta}_1$  și  $\bar{\varphi}_1$  și vor avea direcțiile pozitive în sensul mișcării.

Mai notăm cu  $v_o$  viteza punctului  $A$ ,  $v$  viteza unui punct oarecare de pe bielă,  $\omega_1$  iuteala de rotație a bielei și  $\omega$  aceea a arborelui presupusă constantă.

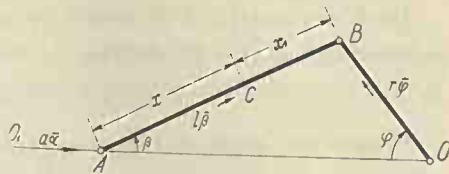


Figura 499

Ori în ce poziție ar fi biela, distanța  $O_1O$  rămâne constantă. Să exprimăm aceasta:

$$a\bar{\alpha} + l\bar{\beta} - r\bar{\varphi} = (l+r)\bar{a},$$

sau

$$(1) \quad l\bar{\beta} - r\bar{\varphi} = (l+r-a)\bar{a}.$$

Dacă derivăm această ecuație de două ori în raport cu  $t$  vom găsi relații între  $v_o$ ,  $v'_o$ ,  $\omega$ ,  $\omega_1$  și  $\omega'_1$ .

Dacă se ține seama că  $l$ ,  $r$ ,  $a$  și  $\omega$  sunt constante și că:

$$\begin{aligned} d\bar{\beta}/dt &= \bar{\beta}_1 d\beta/dt = \bar{\beta}_1 \omega_1, \\ d^2\bar{\beta}/dt^2 &= d(\bar{\beta}_1 \omega_1)/dt = -\bar{\beta} \omega_1^2 + \bar{\beta}_1 \omega'_1, \end{aligned}$$

pentru că

$$d\bar{\beta}_1/dt = -\bar{\beta} d\beta/dt = -\bar{\beta} d\beta/dt = -\bar{\beta} \omega_1,$$

atunci căpătăm:

$$(2) \quad \bar{\beta}_1 l \omega_1 - \bar{\varphi}_1 r \omega = -a v'_o$$

$$(3) \quad l(\bar{\beta}_1 \omega'_1 - \bar{\beta} \omega_1^2) + \bar{\varphi} r \omega^2 = -a v'_o.$$

Din aceste relații scoatem toate legăturile între cantitățile care ne interesează.

Dacă multiplicăm ecuațiile (1) (2) și (3) vectorial cu  $\bar{a}$ , avem

$$(4) \quad l \sin \beta = r \sin \varphi,$$

$$(5) \quad l \omega_1 \cos \beta = r \omega \cos \varphi,$$

$$(6) \quad \omega_1' = (\omega_1^2 - \omega^2) \operatorname{tg} \beta.$$

Multiplicând convenabil ecuațiile 1, 2 și 3 scalar sau vectorial cu  $\bar{a}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\beta}_1$  și  $\bar{\varphi}_1$  căpătăm alte serii de relații care nu ne interesează.

Să considerăm pe bielă punctul  $C$  fixat prin distanțele  $x$  și  $x_1$  și definit de relația:

$$\bar{C} = \bar{a}x + \bar{\beta}x_1.$$

Dacă se derivează în raport cu  $t$  și se notează  $d\bar{C}/dt = \bar{v}$ , avem, ținând cont și de relațiile precedente stabilite prin derivare:

$$(7) \quad \bar{v} = \bar{a}v_0 + x\bar{\beta}_1\omega_1,$$

$$(8) \quad \bar{v}' = \bar{a}v_0' + x(\bar{\beta}_1\omega_1' - \bar{\beta}\omega_1^2).$$

Dacă din ecuația 3 se scoate valoarea expresiei  $\bar{\beta}_1\omega_1' - \bar{\beta}\omega_1^2$  și se înlocuește în (8) se găsește:

$$(9) \quad \bar{v}' = (\bar{a}x_1v_0' - \bar{\varphi}x r \omega^2)/l.$$

Figura 500 arată distribuția accelerațiilor dealungul bieii  $AB$ :

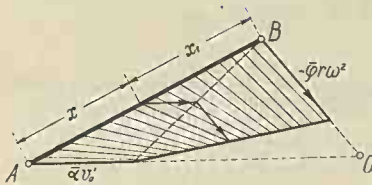


Figura 500

Pentru a găsi momentul încovoietor, forța tăietoare și forța axială ne trebuie componentele acestei accelerații după normala la secțiune  $v_n'$  și după planul tangent la secțiune  $v_t'$ . Căpătăm aceste două accelerații din (8) sau (9) multiplicându-le scalar cu  $\bar{\beta}$  și  $\bar{\beta}_1$ . Avem:

$$v_n' = x_1\omega_1^2 + r\omega^2 \cos(\beta + \varphi),$$

$$v_t' = -x_1\omega_1' - r\omega^2 \sin(\beta + \varphi).$$

Expresia momentului încovoietor într-o secțiune oarecare  $x$  este:

$$M = \frac{1}{8} x x_1 [\omega_1' (l + x_1) + 3 r \omega^2 \sin(\beta + \varphi)],$$

expresie care depinde de doi parametri  $x$  și  $\varphi$ , al cărui maxim este mai complicat. Se adoptă în acest caz o soluție aproximativă. Având în vedere că raportul  $r/l$  este mic, vom admite în mod aproximativ că paranteza este maximă atunci când  $\sin(\beta + \varphi) = \text{maxim} = 1$ .

În acest caz:

$$\beta + \varphi = \pi/2 \quad , \quad \cos\beta = \sin\varphi \quad , \quad \operatorname{tg}\beta = r/l.$$

$$\omega_1 = \omega r^2/l^2 \quad , \quad \omega_1' = -r\omega^2(1 - r^4/l^4)/l,$$

din care rezultă:

$$v_i' = -r\omega^2(x + x_1 r^4/l^4)/l.$$

Aceasta ne arată că accelerația pe bielă variază liniar (fig. 501).

Numai în cazul când se neglijează termenul  $r^4/l^4$ , numai atunci variația este după un triunghi.

Dacă această accelerație se multiplică cu masa  $m$  a elementului de bară se găsește forța la care este supus fiecare element.

În aceeași ipoteză:

$$v_n' = x_1 \omega_1^2 = x_1 \omega^2 r^4/l^4,$$

deci neglijabilă.

În cazul  $\cos(\beta + \varphi) = 1$ , avem:

$$\omega_1 = \omega r/l \quad , \quad \omega_1' = 0,$$

$$v_n' = r\omega^2(1 + x_1 r/l^2) \quad ; \quad v_i' = 0.$$

Forțele ce rezultă din aceste accelerații se adună la forțele axiale ce rezultă în bielă din cauza presiunii de piston.

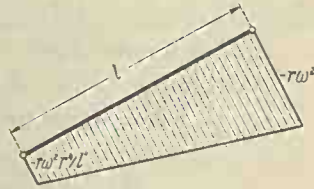


Figura 501

### 3. Calculul barei unui pendul.

O bară grea oscilează în jurul unui punct  $O$ , având la extremitatea ei,  $A$ , aplicată o forță verticală  $F$  (fig. 502).

Să se găsească reacțiunea în  $O$ , momentele încovoietoare, forțele tăietoare și normale în bara  $OA$ .

Bara are greutatea  $p$  și masa  $m$  pe unitatea de lungime. Lungimea ei este  $l$ .

Mai întâi va trebui să găsim condițiile de mișcare ale întregului sistem.

Vom utiliza teoremele relative la cantitatea de mișcare. Considerăm punctul  $\bar{B}$  de pe bara  $OA$ . Avem:

$$\bar{B} = x\bar{\varphi} \quad , \quad \bar{v} = x\omega\bar{\varphi}_1,$$

$$\bar{v}' = x(\omega_1'\bar{\varphi}_1 - \omega^2\bar{\varphi}).$$

Din prima teoremă deducem:

$$(\omega'\bar{\varphi}_1 - \omega^2\bar{\varphi}) \left( \int_0^l m x dx + Fl/g \right) = (F + p l) \bar{a} + \bar{R}$$



Figura 502



Paranteza doua reprezintă momentul static în raport cu punctul  $O$  al maselor în mișcare pe care-l notăm cu  $S_0$ , și mai notăm  $F + pl = F_1$ . Vom avea deci:

$$(1) \quad (\omega' \bar{\varphi}_1 - \omega^2 \bar{\varphi}) S_0 = F_1 \bar{a} + \bar{R}.$$

Luăm acum momentul tuturor forțelor în raport cu punctul  $O$ . Notăm  $\bar{\varphi} \varphi_1 = \bar{\beta}$  și ținând cont că  $\bar{\varphi} a = -\bar{a} \varphi = -\bar{\beta} \sin \varphi$ , avem:

$$(2) \quad \omega' J = -M_0 \sin \varphi,$$

în care  $J$  este momentul de inerție al maselor în mișcare în raport cu punctul  $O$ , și notând  $M_0 = (F + \frac{1}{2} p l) l$ , din (2) deducem:

$$(3) \quad \frac{1}{2} J \omega^2 = M_0 (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

$\varphi_0$  fiind amplitudinea oscilației.

Din ecuațiile (2) și (3) avem  $\omega'$  și  $\omega$ .

Aceste valori introduse în (1) după ce am notat:

$$F_2 = M_0 S_0 / J,$$

$$\bar{\delta}^* = \bar{\varphi}_1 \sin \varphi + 2 \bar{\varphi} (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

ne dă:

$$(4) \quad \bar{R} + F_1 \bar{a} + F_2 \bar{\delta} = 0.$$

Cu ajutorul forței fictive  $F_2$  am adus problema la o problemă de statică, în care  $\bar{R}$  este o funcție numai de  $\varphi$ .

Se poate studia variația lui  $\bar{R}$  analitic, însă e mai ușor grafic ca în fig. 503, care interpretează ecuația (4).

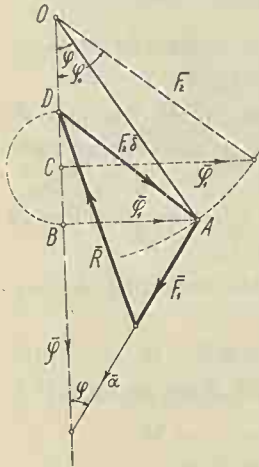


Figura 503

Dintr'un punct  $O$  descriem un cerc cu raza  $F_2$ . Ne fixăm direcția  $\bar{\varphi}$  și unghiul  $\varphi_0$ . Luăm o rază  $OA$  care face unghiul  $\varphi$  cu direcția  $\bar{\varphi}$ . Direcția  $\bar{\varphi}_1$  este normală pe  $\bar{\varphi}$ .  $BA$  reprezintă tocmai  $\bar{\varphi}_1 F_2 \sin \varphi$ .  $CB$  reprezintă  $F_2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ . Luăm  $CD = CB$  și atunci avem  $DB = 2 F_2 \bar{\varphi} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ . Compunem  $DB$  cu  $BA$  și rezultanta  $DA$  reprezintă tocmai  $F_2 \bar{\delta}$ . Aceasta la rândul ei o compunem cu  $F_1 \bar{a}$  care face unghiul  $\varphi$  cu direcția  $\bar{\varphi}$ . Atunci  $ED = \bar{R}$ . Urmărind această construcție foarte simplă se vede că  $\bar{R}$  este maximum pentru  $\varphi = 0$ , când are valoarea

$$R_1 = -[F_1 + 2 F_2 (1 - \cos \varphi_0)]$$

și minimum pentru  $\varphi = \varphi_0$ , când are valoarea:

$$R_2^2 = F_1^2 + F_2 (F_2 - 2 F_1) \sin^2 \varphi_0.$$

\*)  $\bar{\delta}$  aci nu este vector unitar, ci are și o valoare scalară diferită de unitate.

De pe figură se vede și direcția reacțiunii  $\bar{R}$  în raport cu direcția  $\bar{a}$  sau  $\bar{\varphi}$ .

Să căutăm celelalte elemente cerute de enunțul problemei.

Accelerația într'un punct al barei este:

$$\bar{v}' = -\bar{\delta} x F_2/S_0.$$

Forțele ce acționează bara pe intervalul dela  $x$  la  $l$ , adică pe distanța  $l - x = x_1$  sunt:

1. Masa barei multiplicată cu accelerația pe acest interval, deci:

$$-\frac{1}{2} m (l^2 - x^2) \bar{\delta} F_2/S_0 = -\frac{1}{2} p (l^2 - x^2) \bar{\delta} F_2/gS_0.$$

2. Forța ce rezultă din accelerația masei  $F/g$  care are accelerația  $-\bar{\delta} l F_2/S_0$ , deci

$$-F \bar{\delta} l F_2/g S_0.$$

Notăm  $[Fl + \frac{1}{2} p (l^2 - x^2)]/g = S_x$ , care nu este altceva decât momentul static în raport cu punctul  $O$  al maselor situate la dreapta secțiunii  $x$ , adică pe intervalul  $x_1$ . Așa dar, avem până aci:

$$-\bar{\delta} F_2 S_x/S_0.$$

3. Mai avem apoi greutatea barei și forța  $F$  care ne dau rezultanta

$$(F + p x_1) \bar{a}.$$

În rezumat, suma tuturor forțelor dela stânga secțiunii este, luând  $\bar{F}_3$  cu semn schimbat:

$$\bar{F}_3 = (F + p x_1) \bar{a} + \bar{\delta} F_2 S_x/S_0.$$

Forța axială o găsim proiectând  $\bar{F}_3$  după direcția  $\bar{\varphi}$ , deci  $\bar{F}_3 \bar{\varphi}$ , și rezultă:

$$N = (F + p x_1) \cos \varphi + 2 F_2 S_x (\cos \varphi - \cos \varphi_0)/S_0.$$

Forța tăietoare va fi proiecția lui  $\bar{F}_3$  pe direcția  $-\bar{\varphi}_1$ , deci:

$$T = -(F + p x_1 - F_2 S_x/S_0) \sin \varphi$$

Momentul încovoietor îl deducem din relația  $M = \int T dx$ , integrând între  $x$  și  $l$ . Găsim:

$$M_x = -x_1 \left\{ F + \frac{1}{2} p x_1 - [Fl + \frac{1}{2} p x_1 (2l + x)] F_2/gS_0 \right\} \sin \varphi.$$

Momentul este nul în  $O$  și  $A$  și este maxim pentru  $\varphi = \varphi_0$  și în secțiunea în care  $T = 0$ .

#### 4. Calculul unui arbore solicitat excentric.

Un volan este montat înclinat cu un unghi  $\theta$  pe arborele care-l susține și care are o viteză unghiulară  $\omega$ . Să se găsească momentul încovoietor din arbore și valoarea reacțiilor din lagăre (fig. 504).

Direcția axei de rotație o notăm cu  $\bar{a}$ , direcția normalei pe planul volanului o notăm cu  $\bar{\theta}$ . Aceste două axe fac între ele unghiul  $\theta$ .

Presupunem că  $m$  este masa elementului de arc  $ds = 1$  a volanului concentrată la distanța  $\bar{r} = r\bar{\varphi}$  de centrul  $O$  al volanului. Elementul de masă  $dm = mds = mrd\varphi$  este supus la o forță centrifugă normală pe axa  $\bar{a}$  a cărei mărime și direcție este:

$$dm \cdot \omega^2 \cdot \overline{BA}.$$

Însă,  $\overline{BA}$  este componenta lui  $\bar{r}$  descompusă după direcția  $\bar{a}$  și normala la aceasta și are valoarea și direcția:

$$\overline{BA} = \bar{a}r \cdot \bar{a}$$

Momentul acestei forțe în raport cu punctul  $O$ , va fi:

$$d\bar{M} = dm \cdot \omega^2 \cdot \overline{r \cdot \bar{a} r \cdot \bar{a}} = dm \cdot \omega^2 \cdot \bar{a} r \cdot \bar{a} r,$$

$$d\bar{M} = dm \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot \bar{a} \bar{\varphi} \cdot \bar{a} \bar{\varphi}.$$

Ne rămâne să evaluăm cantitățile  $\bar{a} \bar{\varphi}$  și  $\bar{a} \bar{\varphi}$ .

Notăm cu  $\bar{\gamma}$  vectorul unitate normal pe planul determinat de  $\bar{a}$  și  $\bar{\theta}$  și a cărui valoare și direcțiune este  $\bar{\gamma} = \bar{a}\bar{\theta}/\sin\theta$ .

Din  $A$ , în planul volanului, cobor o perpendiculară pe direcțiunea  $\bar{\gamma}$  și notăm direcția  $CA$  cu  $\bar{\beta}$ . Această direcțiune este normală și pe  $\bar{\theta}$  pentru că este cuprinsă într'un plan normal acesteia și deci avem  $\bar{\beta} = \bar{\theta}\bar{\gamma}$ .

În triunghiul  $OAC$  avem:

$$r\bar{\varphi} = \bar{\gamma}r \cos\varphi + \bar{\beta}r \sin\varphi,$$

sau

$$\bar{\varphi} = \bar{\gamma} \cos\varphi + \bar{\beta} \sin\varphi.$$

notând cu  $\varphi$  unghiul între direcțiile  $\bar{\gamma}$  și  $\bar{\varphi}$ . Multiplicând această relație scalar și vectorial cu  $\bar{a}$ , avem:

$$\bar{a}\bar{\varphi} = \sin\varphi \sin\theta,$$

$$\bar{a}\bar{\varphi} = \bar{a}\bar{\gamma} \cos\varphi + \bar{a}\bar{\beta} \sin\varphi.$$

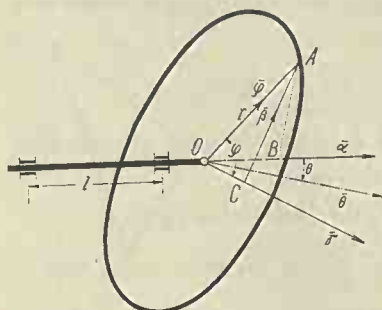


Figura 504

Produsele  $\overline{a\gamma}$  și  $\overline{a\beta}$  sunt independente de poziția punctului  $A$  pe volan.

Vom avea:

$$\begin{aligned} d\overline{M} &= dm \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot \sin\theta \left( \frac{1}{2} \overline{a\gamma} \sin 2\varphi + \overline{a\beta} \sin^2\varphi \right), \\ &= m\omega^2 r^3 \sin\theta \left( \frac{1}{2} \overline{a\gamma} \sin 2\varphi + \overline{a\beta} \sin^2\varphi \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Momentul total se va găsi însumând toate acestea în intervalul  $0 - 2\pi$ .

Avem:

$$\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \pi,$$

și deci

$$\overline{M} = \pi r \cdot m\omega^2 r^2 \sin\theta \cdot \overline{a\beta}.$$

Dacă momentul de inerție al volanului în jurul axei  $\bar{\theta}$  este  $J$ , știm că avem

$$J = 2 \pi r m \cdot r^2,$$

și deci:

$$\overline{M} = \frac{1}{2} J \omega^2 \cdot \sin\theta \cdot \overline{a\beta}.$$

Însă

$$\overline{a\beta} = \overline{a \cdot \bar{\theta}\gamma} = -\bar{\gamma} \cos\theta,$$

și deci:

$$\overline{M} = -\frac{1}{4} J \omega^2 \sin 2\theta \cdot \bar{\gamma}.$$

Prin urmare, axa momentului este dirijată către  $-\bar{\gamma}$  și are valoarea

$$M = \frac{1}{4} J \omega^2 \sin 2\theta = \frac{1}{2} J \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

Acest moment se învârteste odată cu arborele. Dacă distanța între lagăre este  $l$ , atunci reacțiunea pe un lagăr va fi  $M/l$ .

*Exemplu numeric.* Greutatea unui volan este 4000 kg,  $r = 1,2$  m cu 180 rotații pe minut, volanul fiind montat deviat dela planul normal pe arbore cu  $30'$ . Avem

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4} (4000/9,81) 1,2^2 \cdot \omega^2 \sin 2\theta \\ \omega &= 180 \times 2\pi/60 = 18,850 \quad , \quad \sin 2\theta = 0,01745, \end{aligned}$$

care dă  $M = 910$  kg m.

Rezultă de aci importanța ce trebuie dată montajului acestor volane.

### 5. Calculul eforturilor produse în șini și în osia unui vagon, din cauza neregularității căii.

Să presupunem că *una* din șini, într'o regiune oarecare, prezintă un hop, fiind denivelată față de cealaltă cu o cantitate oarecare. Vom presupune roțile calate pe osie. Denivelarea are loc pe o lungime  $2l$  (fig. 505) și presupunem că ordonatele ei sunt date de ecuația:

$$y = \frac{1}{2} y_0 (1 - \cos \pi x / l),$$

în care  $y_0$  este adâncitura maximă la mijlocul hopului.

Rotirea trenului de roți are loc în jurul punctului  $O$ , punctul de contact dintre roata și șina dreaptă.

În acest punct, să considerăm sistemul de axe  $\bar{a}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$ , solidar cu trenul de roți, în care  $\bar{a}$  este dirijat după direcția mișcării,  $\bar{\beta}$  după direcția osiei și  $\bar{\gamma}$  normală pe precedentele așa ca să avem  $\bar{a}\bar{\beta}\bar{\gamma} = +1$ .

În cele ce urmează, planului care conține direcțiile  $\bar{\beta}$  și  $\bar{\gamma}$  îi vom zice planul  $\bar{a}$ , adică îl botezăm cu indicele normalei sale. Același

lucru și pentru ce-

lălalte. Dacă  $v_0$  este iu-  
țeala vagonului și  $r_0$   
raza de contact a  
roții cu șina, atunci  
iuțeala de rotație a  
trenului de roți este:

$$(1) \quad \omega_0 = v_0 / r_0.$$

Iuțeala de coborîre în jos,  
a roții care parcurge hopul, o  
căpătăm derivând  $y$  în raport  
cu  $t$ . Dacă notăm  $dx/dt = v_0$ ,  
vom avea:

$$(2) \quad v_1 = \frac{1}{2} \pi y_0 v_0 (\sin \pi x / l) / l.$$

Din cauza denivelării, trenul de roți se rotește în jurul axei  $\bar{a}$  cu iuțeala unghiulară:

$$(3) \quad \omega_1 = v_1 / b,$$

în care  $b$  este distanța între axele șinilor, adică aproximativ 1,5 m.

Accelerația de rotire va fi:

$$(4) \quad \omega_1' = \frac{1}{2} \pi^2 y_0 v_0^2 (\cos \pi x / l) / l^2 b.$$

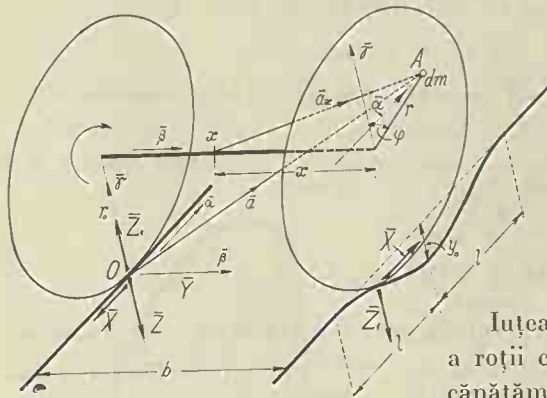


Figura 505



Valorile lor maxime vor fi:

$$(5) \quad \omega_1 = 1,5 y_0 v_0 / l b,$$

$$(6) \quad \omega'_1 = \bar{\omega} y_0 v_0^2 / l^2 b.$$

luând pentru  $\pi$  valori aproximative pentru că și curba hopului e cu totul aproximativă.

În această mișcare, un punct  $A$  al sistemului parcurge un drum oarecare. Masa  $dm$  a punctului  $A$  este animată de o accelerație, de asemenea oarecare  $\bar{w}$ . Se știe că un sistem de forțe — în cazul nostru  $\int \bar{w} dm$  — se poate reduce la o rezultantă unică  $\bar{R}$  aplicată într'un punct arbitrar ales și la un moment  $\bar{M}$  ce corespunde acestui punct. Vom presupune că alegem acest punct chiar centrul instantaneu de rotație  $O$ .

Distanța  $\bar{a}$  dela  $O$  la  $A$ , după figura 505, se vede că are expresia:

$$(7) \quad \bar{a} = r \sin \varphi \cdot \bar{\alpha} + b \cdot \bar{\beta} + (r_0 + r \cos \varphi) \cdot \bar{\gamma}$$

Se știe că avem:

$$\bar{v} = \bar{a}' \quad , \quad \bar{w} = \bar{v}' = \bar{a}''$$

așa dar:

$$(8) \quad \int \bar{a}'' dm = \bar{R} \quad ; \quad \int \bar{a} \bar{a}'' dm = \bar{M}.$$

Dacă derivăm pe  $\bar{a}$  în raport cu  $t$  și ținem seamă că:

$$d\varphi/dt = \omega_0 \quad , \quad d\bar{\beta}/dt = -\omega_1 \bar{\gamma} \quad , \quad d\bar{\gamma}/dt = \omega_1 \bar{\beta},$$

atunci obținem:

$$(9) \quad \bar{a}' = -r\omega_0^2 \sin \varphi \cdot \bar{\alpha} - [b\omega_1^2 + 2r\omega_0\omega_1 \sin \varphi - (r_0 + r \cos \varphi) \omega_1'] \bar{\beta} \\ - [b\omega_1' + r_0\omega_0^2 \cos \varphi + (r_0 + r \cos \varphi)\omega_1^2] \bar{\gamma}$$

Dacă facem operațiile indicate de formulele (8), dacă ținem seamă că:

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0$$

și dacă pentru întreaga masă a trenului de roți notăm:  $S_{e\beta}$  momentul static equatorial în raport cu planul  $\bar{\beta}$ ,  $S_{e\gamma}$  momentul static equatorial în raport cu planul  $\bar{\gamma}$ ,  $J_a$  momentul de inerție axial în raport cu axa  $\bar{a}$  și  $J_{ea}$  momentul de inerție equatorial în raport cu planul  $\bar{a}$ , toate trecând prin  $O$ , atunci avem:

$$(10) \quad \bar{R} = -(S_{e\beta} \omega_1^2 - S_{e\gamma} \omega_1') \bar{\beta} - (S_{e\beta} \omega_1' + S_{e\gamma} \omega_1^2) \bar{\gamma}, \\ \bar{M} = -J_a \omega_1' \bar{a} - 2 J_{ea} \omega_0 \omega_1 \bar{\gamma}.$$

Prin urmare,  $\bar{R}$  se găsește în planul  $\bar{a}$ , iar  $\bar{M}$  în planul  $\bar{\beta}$ .

Cantitățile  $S$  și  $J$  se evaluează foarte ușor. Dacă notăm cu  $F$ ,  $F_r$ ,  $F_0$  și  $g$  greutatea întregului tren de roți, a unei roți, a osiei și accelerația gravitației, atunci avem:

$$S_{e\beta} = bF/2g \quad , \quad S_{r\gamma} = r_0F/g \quad , \quad J_{e\alpha} = 2i^2F_r/g$$

$$J_{\alpha} = J_{e\beta} + J_{e\gamma} = [b^2 + 2(r_0^2 + i^2)]F_r/g + (r_0^2 + \frac{1}{3}b^2)F_0/g$$

în care  $i^2$  este raza de rotație ecuatorială a discului roților în raport cu o axă ce trece prin centrul roții. Dacă roata ar fi un disc plin, de grosime constantă, atunci  $i^2$  ar avea valoarea  $\frac{1}{2}r_0^2$ .

Valorile lui  $J$  sunt aproximative pentru că am considerat grosimea osiei și a discurilor roților egale cu zero. Aceasta însă este o aproximație curentă care se face.

Conform principiului lui *d'Alembert*,  $\bar{R}$  și  $\bar{M}$  date de ecuațiile (10) sunt chiar reacțiunile pe care șina le exercită asupra trenului de roți. Acestea luate cu semn schimbat ne dau eforturile pe cari trenul de roți le exercită asupra șinei.

#### a) Calculul eforturilor din șină.

1°. *Ne ocupăm mai întâiu de forța:*  $\bar{Y} = (S_{e\beta}\omega_1^2 - S_{e\gamma}\omega_1')\bar{\beta}$ .

Dacă înlocuim  $\omega_1$  și  $\omega_1'$  cu valorile lor, se constată că această forță este nulă pentru punctul care satisface relația:

$$\sin(\pi x/l) \cdot \operatorname{tg}(\pi x/l) = 4r_0/y_0$$

Cum  $y_0$  este foarte mic în raport cu  $r_0$ , atunci vom avea ca soluții:

$$\pi x/l = \frac{1}{2}\pi \quad \text{și} \quad \pi x/l = \frac{3}{2}\pi.$$

Deci această forță se anulează în punctele  $x = \frac{1}{2}l$  și  $x = \frac{3}{2}l$ .

Tot din expresia acestei forțe se vede că în intervalele extreme ( $0 - \frac{1}{2}l$  și  $\frac{3}{2}l - 2l$ ) ea este dirijată către  $-\bar{\beta}$ , iar în intervalul central ( $\frac{1}{2}l - \frac{3}{2}l$ ) către  $+\bar{\beta}$ . Cum bandajele roților n'au buză decât spre interiorul căii, atunci rezultă că trenul de roți pe intervalele extreme împinge asupra șinei drepte, iar pe intervalul central asupra șinei cu hop. În ambele cazuri, această forță tinde să lărgească calea dacă frecarea între șină și bandaj este întrecută.

Această forță poartă numele de forță de șerpuire și se vede că una din cauzele care o produc este și neregularitatea căii, neregularitate inevitabilă pentru că cele două șini nu se comportă *identic* sub acțiunea celor două roți.

2°. *Să ne ocupăm de forța:*  $\bar{Z} = (S_{e\beta}\omega_1' + S_{e\gamma}\omega_1^2)\bar{\gamma}$ .

Dacă se procedează ca mai sus se găsește că ea este nulă când:

$$\sin(\pi x/l) \cdot \operatorname{tg}(\pi x/l) = -b^2/r_0y_0$$

Dacă se face aceeași aproximație ca în cazul precedent, se găsește că ea este nulă în aceleași puncte:  $x = \frac{1}{2}l$  și  $x = \frac{3}{2}l$ .

Tot din expresia acestei forțe, se vede că în intervalele extreme ea este dirijată către  $+\gamma$ , deci descarcă șina dreaptă, iar în intervalul central fiind dirijată către  $-\gamma$ , o încarcă. Ea n'are nicio acțiune asupra șinei cu hop.

3°. Momentul  $J_a\omega_1\bar{a}$  putem să-l punem sub forma:  $b\bar{\beta}\gamma J_a\omega_1'/b = b\bar{Z}_1$ , în care am notat  $\bar{Z}_1 = \gamma J_a\omega_1'/b$ . Am înlocuit deci momentul prin cuplul format de forțele  $+\bar{Z}_1$  și  $-\bar{Z}_1$  cari se găsesc la distanța  $b$ .

Din semnul momentului se vede că șina dreaptă este parcursă de forța  $-\bar{Z}_1$  pe când cea cu hop de  $+\bar{Z}_1$ . Se vede iarăși că șina dreaptă pe intervalele extreme se încarcă, iar pe intervalul central se descarcă. Pentru șina cu hop, pe aceleași intervale lucrurile se petrec exact invers.

Pentru hopuri scurte și adânci și pentru viteze mari această forță provoacă ruperea șinelor.

4°. În fine momentul  $2 J_{ca}\omega_0\omega_1\bar{\gamma}$  îl punem sub forma:

$$-b\bar{\beta}a 2 J_{ca}\omega_0\omega_1/b = -b\bar{X},$$

în care am notat  $\bar{X} = a \cdot 2 J_{ca}\omega_0\omega_1/b$ . Din semnul momentului se vede că șina dreaptă este parcursă de forța  $+\bar{X}$ , iar cea cu hop de  $-\bar{X}$ .

Și forța  $\bar{X}$  schimbă de valoare și semn pe parcursul hopului și este o cauză care favorizează șerpuirea.

#### b) Calculul eforturilor din osie.

Componentele calculate mai sus, luate cu semn schimbat reprezintă reacțiunile șinei asupra roții.

Pentru că pe parcursul hopului ele schimbă de valoare și semn, pe figura 505 s'au indicat cu semnele ce ele le au în primul interval extrem, adică între 0 și  $\frac{1}{2}l$ .

Să considerăm în osie o secțiune oarecare  $x$ . La dreapta acestei secțiuni se găsesc reacțiunile  $+\bar{X}$  și  $-\bar{Z}_1$  precum și forțele de inerție a porțiunii din trenul de roți care se găsește la dreapta acestei secțiuni.

Acestea le vom reduce la o rezultantă  $\bar{R}_x$  aplicată în centrul de greutate a secțiunii  $x$  și la momentul corespunzător acestei secțiuni pe care-l notăm  $\bar{M}_x$ .

Conform principiului lui *d'Alembert* le vom lua cu semn schimbat.

Dacă notăm cu  $S_{e\beta x}$  și  $S_{e\gamma x}$  momentele statice equatoriale în raport cu planele  $\bar{\beta}$  și  $\bar{\gamma}$ , trecând prin  $O$ , a porțiunii trenului de roți ce se găsește la dreapta secțiunii  $x$ , atunci din (8) și (9), dacă notăm prescurtat:

$$(S_{e\beta x}\omega_1^2 - S_{e\gamma x}\omega_1')\bar{\beta} = \bar{Y}_x, \quad (S_{e\beta x}\omega_1' + S_{e\gamma x}\omega_1^2)\bar{\gamma} = \bar{Z}_x,$$

avem:

$$\bar{R}_x = \bar{Y}_x + \bar{Z}_x.$$

Să evaluăm pe  $\bar{M}_x$ . Notăm cu  $\bar{a}_x$  distanța dela centrul de greutate a secțiunii  $x$  până la punctul  $A$  și cu  $x$  abscisa respectivă măsurată după  $\bar{\beta}$ .

În aceste condițiuni avem:

$$\bar{a}_x = r \sin \varphi \cdot \bar{a} + x \cdot \bar{\beta} + r \cos \varphi \cdot \bar{\gamma}.$$

Dacă facem operațiile indicate de formula (8) și dacă notăm:

$$\omega_1' \left( \int_0^x bx \, dm + \int_0^x r^2 \cos^2 \varphi \, dM \right) + r_0 \omega_1^2 \int_0^x x \, dm = M_a, \quad \int_0^x r^2 \sin^2 \varphi \, dm = J_{eax},$$

atunci găsim:

$$\bar{M}_x = M_a \bar{a} + 2 J_{eax} \omega_0 \omega_1 \bar{\gamma}.$$

În rezumat, în secțiunea considerată, avem forța axială  $\bar{Y}_x$ , forțele tăietoare  $\bar{X}$ ,  $\bar{Z}_1$  și  $\bar{Z}_x$ , momentele încovoietoare  $x\bar{Z}_1$ ,  $x\bar{X}$  și  $\bar{M}_x$  și momentul de răsucire  $r_0\bar{\gamma}\bar{X}$ , așa dar, toate elementele pentru calculul acestei secțiuni.

*Concluziuni.* Din cele de mai sus se vede că neregularitatea căii produce tot felul de eforturi în osie și că aceste eforturi schimbă de valoare și semn pe parcursul hopului. Această schimbare are loc într'un interval de timp foarte scurt. Dacă hopul are ecuația dată, atunci aceste eforturi apar și dispar brusc deci dau lovituri foarte importante atât în materialul de cale cât și în cel rulant.

## 6. Calculul unui volan.

Un volan se compune dintr'o obadă circulară de secțiune și moment de inerție  $\Omega_0$  și  $I_0$ , fixată printr'un număr oarecare de spițe, cu secțiunea și momentul de inerție  $\Omega$  și  $I$ , de un butuc. Obada, spițele și butucul se fac din același material. Butucul se fixează pe un arbore.

Volanul se toarnă într'o singură bucată sau în două bucăți cari se bulonează între ele. In aceste condiții spițele sunt încastrate în obada și butucul volanului.

Ne vom ocupa de un volan turnat dintr'o singură bucată.

Volanul servă ca regulator al mișcării de rotație. La un moment dat, el se mișcă cu o viteză de rotație  $\omega$  și are accelerația  $\omega'$ . In perioada în care acumulează lucru mecanic,  $\omega'$  este pozitiv.

Mai notăm cu  $r$  raza dela axa de rotație până la centrul de greutate al secțiunii obezii,  $2\varphi$  unghiul între două spițe, și  $m$  masa unității de volum a materialului din care este făcut volanul.

Sistemul se vede că este static nedeterminat. Să-l transformăm în unul static determinat.

Vom face câte o secțiune la mijlocul intervalului dintre două spițe și în fiecare din ele vom introduce necunoscutele static nedeterminate  $N$ ,  $T$  și  $M$  (fig. 506).

Din motive de simetrie, se vede că valorile celor trei cantități sunt egale în cele două secțiuni. Un element de obadă de lungime  $ds = 1$ , este supus la o forță centrifugă  $m\Omega_0\omega^2r$ , dirijată după raza respectivă.

Dacă n'ar exista spițele sau dacă există și ar avea  $\Omega = 0$ , atunci tensiunea în obadă ar fi:

$$(1) \quad N_0 = m\Omega_0\omega^2r^2.$$

In acest caz, forța  $F$  dirijată după direcția spiței, care solicită porțiunea de obadă din intervalul  $2\varphi$ , are valoarea:

$$F = 2 N_0 \sin \varphi.$$

Prin faptul că există spițe, tensiunea în obadă nu va mai fi  $N_0$  ci una mai mică pe care o notăm cu  $N_0 - N$ . Inșă atunci în spiță se dezvoltă o tensiune  $F_1$ .

Dacă proiectăm totul după direcțiunea spiței, avem:

$$F - 2(N_0 - N) \sin \varphi - F_1 = 0,$$

din care scoatem:

$$(2) \quad F_1 = 2N \sin \varphi.$$

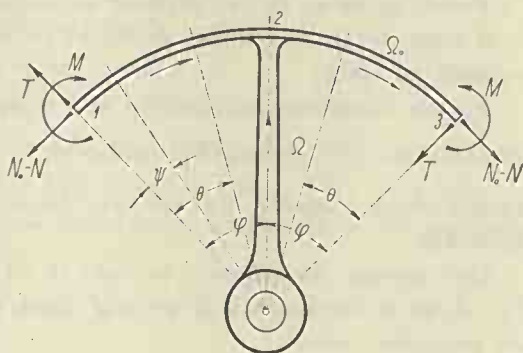


Figura 506



Așa dar, am găsit o relație între tensiunea din spiță și cantitatea cu cât variază  $N_o$ , atunci când ținem seamă de această tensiune.

În aceste condițiuni, în secțiunile 1 și 3 vom considera aplicate forțele axiale  $N_o - N$ , în care  $N_o$  este forța definită de relațiunea (1) și care nu este altceva decât tensiunea ce se dezvoltă în obadă când am considera-o singură sub acțiunea forțelor centrifuge:

$$m\Omega_o\omega^2r.$$

În acest caz, cercul este curba funiculară a acestor încărcări.

*Să scriem acum expresiile forțelor axiale și momentelor încovoitoare din obadă și spiță.*

Ne vom ocupa mai întâi de  $N_s$  și  $M_s$ , adică de acelea datorite sarcinilor din sistemul static.

*În obadă.* Tensiunea  $N_s$  în obadă este constantă și egală cu  $N_o$ .

Momentul datorit forțelor centrifuge este  $M_s \equiv 0$ , pentru că cercul este curba funiculară a acestor încărcări.

Pentru ca obezii să i se imprime accelerația  $\omega'$ , va trebui ca în 2, la contactul între spiță și obadă, să se desvolte o reacțiune  $V$  normală pe spiță:

Forțele elementare  $m\Omega_o\omega'r^2d\psi$  sau  $N_1d\psi$ , dacă notăm:

$$(3) \quad N_1 = m\Omega_o\omega'r^2,$$

dirijată după tangenta la obadă, dau în secțiunea  $\theta$  o forță axială  $N_s = N_1\theta$ .

Din motive de simetrie se vede că în secțiunile 1 și 3, acest  $N_s = 0$ , iar în secțiunea  $\theta$  de pe cele două intervale 1—2 și 2—3, are respectiv valorile:

$$(4) \quad N_s = \pm N_1\theta,$$

dacă sensul accelerației pozitive este acela din figură, adică dela 1 spre 3.

În aceste condițiuni, reacțiunea  $V$  în spiță, definită ca mai sus, este:

$$(5) \quad V = 2N_1\varphi$$

Forțele elementare  $N_1d\psi$ , dau în obadă, în secțiunea  $\theta$ , și un moment a cărui valoare este:

$$M = -r \int_0^\theta N_s [1 - \cos(\theta - \psi)] d\psi.$$

Dacă în această expresie punem în locul lui  $N_s$  valoarea sa din

secțiunea  $\psi$ , adică  $N_1\psi$  și dacă integrăm între  $0 - \theta$ , atunci găsim pentru cele două intervale 1—2 și 2—3, respectiv valorile:

$$(6) \quad M_s = \mp N_1 r \left( \frac{1}{2} \theta^2 + \cos \theta - 1 \right),$$

direcția pozitivă a lui  $\omega'$  rămânând aceeași ca mai sus.

*In spiță.* Forțele centrifuge din obadă fiind echilibrate de  $N_o$ , nu dau nici o tensiune în spiță.

Forța centrifugă din spiță datorită masei acesteia dă o tensiune  $N_s$  a cărei valoare (fig. 507) este:

$$N_s = m\Omega\omega^2 \int_0^x (x_1 + u) du,$$

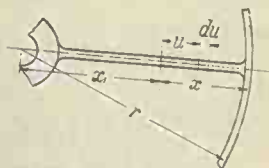


Figura 507

considerând secțiunea spiței constantă. Dacă facem calculele și notăm:

$$(7) \quad N_2 = m\Omega\omega^2 r^2,$$

găsim:

$$(8) \quad N_s = \frac{1}{2} N_2 x (r + x) / r^2.$$

Reacțiunea  $V$  dă în spiță un moment:

$$(9) \quad M_s = xV.$$

Momentele  $M_s$  date de formula (6) dau, în capul spiței, un moment:

$$(10) \quad M_s = 2 N_1 r \left( \frac{1}{2} \varphi^2 + \cos \varphi - 1 \right).$$

În fine, pentru a înprina masei spiței accelerația  $\omega'$ , în secțiunea  $x$  se dezvoltă momentul:

$$M = m\Omega\omega' \int_0^x (x_1 + u) u du,$$

a cărui valoare, dacă notăm:

$$(11) \quad N_3 = m\Omega\omega' r^2,$$

este:

$$(12) \quad M_s = \frac{1}{6} N_3 x^2 (2r + x) / r^2.$$

2°. Să ne ocupăm de cantitățile static nedeterminate:  $N_n$  și  $M_n$ .

*In obadă*, de pe figura 506 se vede că, pe cele două intervale 1—2 și 2—3, avem:

$$(13) \quad N_n = -N \cos \theta \pm T \sin \theta,$$

$$M_n = M + Nr (1 - \cos \theta) \pm Tr \sin \theta,$$

iar în spiță:

$$(14) \quad N_n = 2 N \sin \varphi,$$

$$M_n = -2 x_1 T \sin \varphi.$$

Putem acum scri expresiile complete ale lui  $N_x$  și  $M_x$  în orice secțiune.

În obadă, pe cele două intervale, avem respectiv:

$$(15) \quad \begin{aligned} N_x &= N_o \pm N_1\theta - N \cos\theta \pm T \sin\theta, \\ M_x &= \mp N_1r \left(\frac{1}{2}\theta^2 + \cos\theta - 1\right) + M + Nr(1 - \cos\theta) \pm Tr \sin\theta, \end{aligned}$$

iar în spiță:

$$(16) \quad \begin{aligned} N_x &= \frac{1}{2}N_2x(r + x_1)/r^2 + 2N \sin\varphi, \\ M_x &= 2N_1[x\varphi + r(\frac{1}{2}\varphi^2 + \cos\varphi - 1)] + \frac{1}{6}N_3x^2(2r + x_1)/r^2 - 2x_1T \sin\varphi. \end{aligned}$$

Acestea fiind stabilite să aplicăm teorema lui *Castigliano*.

Dacă aceste valori le introducem în expresia lucrului mecanic și facem  $\partial L/\partial M = 0$ , găsim:

$$(17) \quad M = -Nr(\varphi - \sin\varphi)/\varphi.$$

Dacă facem același lucru cu  $N$  și notăm:

$$\begin{aligned} 1/I_n &= [(\varphi/\sin\varphi + \cos\varphi)/\Omega_o + 4\sin\varphi/\Omega]/r^2 \\ &+ (\varphi/\sin\varphi + \cos\varphi - 2\sin\varphi/\varphi)/I_o, \end{aligned}$$

găsim:

$$(18) \quad N = \frac{4}{3}m\omega^2 I_n.$$

În fine, dacă facem aceleași operațiuni și cu  $T$  și dacă notăm:

$$(19) \quad \begin{aligned} k_o \sin\varphi &= \varphi \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 \cos\varphi + 2\cos\varphi - 2, \\ k_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\varphi^2 + \cos\varphi - 1, \end{aligned}$$

$$k = r^2 \sin\varphi(k_o \Omega_o/I_o + k_1 \Omega_o/I + \Omega/30I) + \varphi \cos\varphi - \sin\varphi,$$

$$1/I_l = (\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)(1/r^2 \Omega_o + 1/I_o) + \frac{4}{3}\sin^2\varphi/I,$$

găsim:

$$(20) \quad T = 2m\omega'kI_l.$$

Calculul făcut este aproximativ, fiindcă nu s'a ținut seamă de deformația butucului și fiindcă, pentru spiță, integrarea s'a făcut între zero și  $r$  în loc să se facă numai până la marginea butucului. Cele două erori se compensează într'o măsură oarecare.

Se mai observă că  $N$  și  $M$  depind numai de  $\omega$ , pe când  $T$  numai de  $\omega'$ . Accelerația  $\omega'$  este pozitivă sau negativă după cum energia cinetică a volanului crește sau scade. Dacă cunoaștem variația cuplului motor și a celui rezistent putem afla numai decât valoarea lui  $\omega'$  în orice moment. Rezistențele datorite lui  $T$  sunt deci alternative și de acest fapt va trebui ținut seamă la fixarea rezistențelor admisibile.

Mai trebuie observat că o parte din termenii cari intră în formulele de mai sus au valori mici și pentru calculul numeric putem să-i suprimăm. De exemplu în valoarea lui  $k$  termenul care conține pe  $k_0$  este foarte mic. De asemenea și termenul  $\varphi \cos \varphi - \sin \varphi$  este mic față de ceilalți. În expresia lui  $1/I_t$  putem neglija  $1/r^2 \Omega_0$  față de  $1/I_0$ .

Așa fiind în cadrul aproximațiilor curent admise luăm:

$$(19_1) \quad k = r^2 \sin \varphi (k_1 \Omega_0 + \Omega/30)/I$$

$$1/I_t = (\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)/I_0 + \frac{1}{3} \sin^2 \varphi/I.$$

Elementele geometrice ale volanului fiind cunoscute, toate cantitățile de mai sus se pot numai decît calcula. Având  $N$ ,  $T$  și  $M$ , putem construi curba forțelor axiale tăietoare și a momentelor încovoetoare.

Se găsește, de exemplu, că momentul în obadă, în dreptul spiței, când  $\omega' = 0$ , este  $+Nr(\sin \varphi/\varphi - \cos \varphi)$  și că este sensibil egal cu dublul momentului din secțiunea 1, etc.

În genere volanele se fac cu 6 sau 8 spițe. Dăm mai jos valorile lui  $1/I_n$  și ale lui  $k$  și  $1/I_t$  calculate după formulele simplificate (19<sub>1</sub>) pentru 4, 6 și 8 spițe.

*Pentru 4 spițe:*

$$(\varphi - \sin \varphi)/\varphi = 0,100 \quad ; \quad \sin \varphi/\varphi - \cos \varphi = 0,193;$$

$$1/I_n = (1,818/\Omega_0 + 2,828/\Omega)/r^2 + 0,017193/I_0,$$

$$k = r^2 (0,2467 \Omega_0 + 0,02357 \Omega)/I,$$

$$1/I_t = 0,2854/I_0 + 2/3 I.$$

*Pentru 6 spițe:*

$$(\varphi - \sin \varphi)/\varphi = 0,0451 \quad ; \quad \sin \varphi/\varphi - \cos \varphi = 0,0889;$$

$$1/I_n = (1,913/\Omega_0 + 2/\Omega)/r^2 + 0,003365/I_0,$$

$$k = r^2 (0,1682 \Omega_0 + 0,01667 \Omega)/I,$$

$$1/I_t = 0,0906/I_0 + 1/3 I.$$

*Pentru 8 spițe:*

$$(\varphi - \sin \varphi)/\varphi = 0,0255 \quad ; \quad \sin \varphi/\varphi - \cos \varphi = 0,0506;$$

$$1/I_n = (1,950/\Omega_0 + 1,531/\Omega)/r^2 + 0,001063/I_0,$$

$$k = r^2 (0,1279 \Omega_0 + 0,01276 \Omega)/I,$$

$$1/I_t = 0,0391/I_0 + 0,19526/I.$$

## B) Sarcini dinamice.

În această categorie de probleme intră acelea în care sarcinile nu se aplică în mod static, adică crescând continuu dela valoarea zero la valoarea lor finală  $F$ , ci se aplică sau cu întreaga intensitate sau cu o intensitate inițială oricare, alta afară de zero.

Dacă deplasarea grinzii, să zicem sub acțiunea forței  $F$  statică, este  $v_s$ , atunci săgeata ce se produce în oricare alte condiții va fi:

$$v = v_s + v_d.$$

$v_d$  poartă numele de săgeată dinamică.

Din relația precedentă se mai deduce următoarea:

$$v = v_s (1 + v_d/v_s)$$

Raportul  $v_d/v_s$ , poartă numele de *impact* și se notează cu litera  $\eta$ , deci:

$$\eta = v_d/v_s,$$

iar coeficientul:

$$1 + \eta = \mu,$$

poartă numele de *multiplicatorul impactului*.

Vom arăta în cele ce urmează că dacă într'un mod oarecare am deduce pe  $\eta$ , atunci putem calcula grinzile sub acțiunea sarcinilor dinamice. În adevăr, să presupunem că o grindă oarecare este acționată de o forță  $F_1$ .

Lucrul mecanic acumulat de grindă va fi:

$$L_1 = \frac{1}{2} F_1 v_1 = \frac{1}{2} F_1^2 v_{11} = \frac{1}{2} v_1^2 / v_{11}.$$

Dacă aceeași grindă, exact în aceleași condiții, este supusă la forța  $F_2$ , adică după aceeași direcțiune și același punct de aplicație, vom avea:

$$L_2 = \frac{1}{2} F_2 v_2 = \frac{1}{2} F_2^2 v_{22} = \frac{1}{2} v_2^2 / v_{22}.$$

asa dar:

$$L_1/L_2 = F_1^2/F_2^2 = v_1^2/v_2^2.$$

Deci, lucrul mecanic acumulat de 2 grinzi identice și solicitate exact în aceleași condițiuni dar numai sub valori diferite de forțe, este proporțional cu patratul forțelor, cu patratul săgeților sau cu patratul rezistențelor, cum ușor se poate demonstra

ajutându-ne de formula lui Navier.

Să presupunem că o sarcină  $F$  cade pe o grindă dela înălțimea  $h$  (fig. 508). În momentul când atinge grinda, lucrul mecanic al forței este:

$$L_e = Fh.$$

După ce atinge grinda, parcurge împreună cu punctul de aplicație săgeata  $v_s + v_d$  cu întreaga intensitate  $F$ .

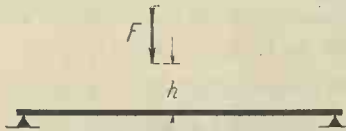


Figura 508.



Lucrul mecanic total pe care trebuie să-l acumuleze grinda este

$$L_e + F(v_s + v_d)$$

Să presupunem că aceeași sarcină în aceleași condiții o aplic static.

Lucrul mecanic va fi

$$L_s = \frac{1}{2} F v_s$$

Aceste două lucruri mecanice se găsesc între ele în raportul

$$L_e/L_s + 2(1 + \eta)$$

care este egal cu raportul patratelor săgeților, deci cu:

$$(v_s + v_d)^2/v_s^2 = (1 + \eta)^2,$$

așa dar,

$$L_e/L_s + 2(1 + \eta) = (1 + \eta)^2,$$

de unde deducem:

$$\eta = \sqrt{1 + L_e/L_s}.$$

Așa dar am găsit valoarea impactului, și deci am găsit norma după care vom calcula piesele. Așa dar, vom calcula piesa noastră ca și când ar fi solicitată de forța:

$$F\mu = F(1 + \eta).$$

Prin urmare, la sarcina statică  $F$  se adaugă cantitatea  $F\eta$ .

Nu tot lucrul mecanic exterior  $L_e$  este acumulat de grindă prin deformațiunea ei. O parte produce șgomot, alta deformațiuni locale, căldură, etc. In acest caz, raportul  $L_e/L_s$  se afectează de un coeficient totdeauna mai mic ca 1. Mai există o pierdere de lucru mecanic din cauza lovirii sarcinei  $F$  de grindă. Această pierdere se poate calcula.

Să presupunem că sarcina  $F$  căzând dela înălțimea  $h$  are viteza  $V_0$  dată de relația:

$$h = V_0^2/2g$$

Aplicând teorema cantităților de mișcare avem:

$$V_0 F + 0 \cdot \int p dx = VF + \int p V_x dx = (F + p) \int V_x dx/V,$$

$V$  fiind viteza punctului de aplicație al forței.

Dacă în membrul al doilea multiplicăm vitezele  $V_x$ ,  $V$ , cu timpul  $t$  în care au loc, atunci  $V_x t = v_x$ ,  $Vt = v$ , ne dă tocmai săgețile în diferite puncte ale grinzii și săgeata în punctul de aplicație a forței. Inșă  $v_x/v = v_{x1}/v_{11}$ , deci:

$$\int p V_x dx/V = pl \int v_{x1} dx/v_{11} l = pl k_1.$$

Așa dar,  $pl k_1$  este o greutate convențională care echivalează, din

punctul de vedere al cantității de mișcare, cu grinda ale cărei diferite elemente au diferite iuțeli. Din relația precedentă deducem:

$$V = FV_0 / (F + plk_1)$$

Grupul compus din forța  $F$  animată de iuțeala  $V$  și grinda ale cărei iuțeli sunt variabile, însă având în punctul de aplicație iuțeala  $V$  se vor mișca, până se stabilește echilibrul, adică până când iuțeala ajunge zero.

Lucrul mecanic care trebuie acumulat de grinda va fi:

$$L = (1/2g)[FV^2 + \int pdx \cdot V_x^2] = (V^2/2g) (F + \int pdx V_x^2/V^2).$$

Dacă facem aceeași operație ca mai sus, găsim o altă greutate convențională care din punctul de vedere al forțelor vii să fie echivalentă cu grinda ale cărei diferite elemente au diferite iuțeli, deci:

$$plk_2 = \int pdx V_x^2/V^2 = pl \int v_{x1}^2 dx / v_{11}^2 l.$$

Lucrul mecanic va avea expresia:

$$L = (F + plk_2) V^2/2g = Fh \cdot (F + plk_2)F / (F + plk_1)^2.$$

Însă  $Fh = L_e$ , și dacă notăm:

$$k = F(F + plk_2) / (F + plk_1)^2,$$

atunci avem:

$$L = kL_e,$$

și deci:

$$\eta = \sqrt{1 + kL_e/L_s},$$

cu notațiile:

$$v_{11}k_1l = \int v_{x1} dx \quad v_{11}^2k_2l = \int v_{x1}^2 dx.$$

**Aplicația Nr. 150.** Sarcina  $F$  cade dela înălțimea  $h$  pe o grindă orizontală simplă rezemată la ambele extremități (fig. 509). Grinda se va calcula ca și

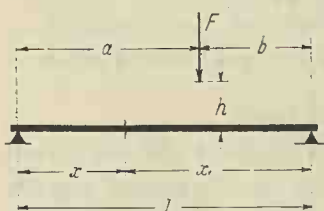


Figura 509

când s'ar aplica pe grindă în același loc forța  $\mu F$ . Pentru a determina pe  $\mu=1 + \eta$ , ne trebuiesc:

$$L_e = Fh \quad , \quad L_s = F^2 a^2 b^2 / 6 EI$$

$$v_{11} = a^2 b^2 / 3 EI,$$

$$v_{x1} = xb (l^2 - b^2 - x^2) / 6 EI$$

$$v_{11}k_1 = \int v_{x1} dx \quad , \quad v_{11}^2k_2 = \int v_{x1}^2 dx.$$

Dacă punem:

$$a = al \quad , \quad b = \beta l \quad \text{și} \quad a\beta = \xi,$$

căpătăm:

$$k_1 = (1 + \xi) / 8 \xi$$

$$k_2 = [2(1 + \xi)^2 + \xi^2] / 105 \xi^2.$$

Pentru  $\alpha = \beta = 1/2$ , avem  $\xi = 1/4$  și:

$$k_1 = 5/8, \quad k_2 = 17/35$$

Pentru  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 2/3$ , avem  $\xi = 2/9$  și

$$k_1 = 11/16, \quad k_2 = 41/70, \text{ etc.}$$

**Aplicația Nr. 151.** Să presupunem că în aceleași condiții,  $F$  cade pe o grindă incastrată la o extremitate (fig. 510).

Avem:

$$v_{11} = a^3/3EI, \quad \vartheta_{11} = a^2/2EI$$

Săgețile sunt:

Pe partea din stânga,

$$v_{x1} = (3ax^2 - x^3)/6EI,$$

iar pe partea din dreapta,

$$v_{x1} = (2a^3 + 3a^2x)/6EI.$$

Se găsește, cu notațiile  $a = \alpha l$ ,  $b = \beta l$ :

$$k_1 = (3 + 2\beta + \beta^2)/8\alpha, \quad k_2 = (33 + 41\alpha\beta + 70\beta^2 + 2\beta^3)/140\alpha^2.$$

În cazul când sarcina cade la capul grinzii:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0 \text{ și deci:}$$

$$k_1 = 3/8, \quad k_2 = 33/140$$

În cazul când sarcina cade la jumătatea grinzii

$$\alpha = 1/2, \quad \beta = 1/2, \quad \alpha\beta = 1/4$$

și deci:

$$k_1 = 17/16, \quad k_2 = 61/35.$$

**Aplicația numerică 1°.** O greutate de 100 kg cade de la 8 cm înălțime pe o grindă incastrată la un cap. Sarcina cade la jumătatea grinzii. Grinda, lungă de 4 m, este formată dintr'un fier  $I$  profil 24, pentru care:

$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad p = 36,19 \text{ kg/m}, \quad I = 4264 \text{ cm}^4, \quad W = 354 \text{ cm}^3.$$

Dacă sarcina s'ar aplica static, atunci rezistența ar fi:

$$\sigma = M/W = 200 \times 100/354 = 56,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Să determinăm valoarea lui  $k_1$  și  $k_2$ , multiplicată cu  $pl$ . Avem

$$pl k_1 = 36,19 \times 4 \times 17/16 = 153,7$$

$$pl k_2 = 36,19 \times 4 \times 61/35 = 252,3.$$

Deci:

$$k = F(F + k_2 pl) / (F + k_1 pl)^2 = 100 \times 352,3 / 253,7^2 = 0,549$$

$$L_e = Fh = 100 \cdot 8 = 800 \text{ kg cm},$$

$$L_s = \frac{1}{2} F^2 v_{11} = F^2 a^3 / 6EI = 100^2 \times 200^3 / 6 \times 2,1 \times 10^6 \times 4264 = 1,49 \text{ kg cm}.$$

Deci:

$$kL_e/L_s = 0,549 \times 800/1,49 = 294,8$$

$$\eta = \sqrt{1 + kL_e/L_s} = 17,2.$$

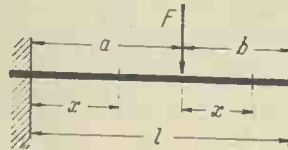


Figura 510

Deci  $\mu = 18,2$  și rezistența totală datorită lui  $F$  va fi:

$$\mathcal{R} = 18,2 \times 56,5 = 1028 \text{ kg/cm}^2,$$

la care va trebui să adăugăm rezistența datorită greutateii proprii care este

$$\mathcal{R}_1 = M/W = pl^2/2W = 82 \text{ kg/cm}^2$$

Deci rezistența totală va fi  $1028 + 82 = 1110 \text{ kg/cm}^2$ .

*Aplicația numerică 2°.* Să presupunem că avem exact același caz însă sarcina se aplică la extremitatea grinzii.

Dacă sarcina s'ar aplica static rezistența ar fi:

$$\mathcal{R} = 400 \times 100/354 = 113 \text{ kg/cm}^2.$$

Avem:

$$plk_1 = 36,19 \times 4 \times 3/8 = 54,3 \quad ; \quad plk_2 = 36,19 \times 4 \times 33/140 = 34,1.$$

Deci:

$$k = F(F + plk_2)/(F + plk_1)^2 = 100 \times 134,1/154,3^2 = 0,565,$$

$$L_s = F^2 l^3 / 6EI = 100^2 \times 400^3 / 6 \times 2,1 \times 10^6 \times 4264 = 11,9 \text{ kg cm}$$

$$kL_e/L_s = 0,565 \times 800/11,9 = 37,98 \quad ; \quad \eta = \sqrt{38,98} = 6,24$$

Rezistența datorită forței  $F$  este

$$(1 + \eta) \mathcal{R} = 7,24 \times 113 = 818 \text{ kg/cm}^2,$$

la care adăugând și cea din greutatea proprie adică  $82 \text{ kg/cm}^2$  ne dă  $900 \text{ kg/cm}^2$

Așa dar, în acest caz, rezistența este mai mică decât în cazul precedent cu  $210 \text{ kg/cm}^2$ . Deci cazul precedent este mai defavorabil cu  $210/900 \sim 23\%$ .

Aceasta se datorește multiplicatorului impactului care în primul caz a fost  $18,2$ , iar în al doilea  $7,24$ , adică de  $\sim 2,5$  ori mai mare.

### C) Vibrația grinzilor.

Această chestiune nu are numai un interes teoretic, cum ar părea la prima vedere.

În adevăr. Să presupunem că avem o grindă încărcată cu un sistem de sarcini dat și că echilibrul static și elastic e satisfăcut. Să presupunem că pe grindă mai aplicăm static un sistem de sarcini arbitrar, însă *infiniț de mic*. Este evident că grinda se va găsi de asemenea în echilibru static și elastic.

Să presupunem însă că sistemul infiniț mic de sarcini se aplică intermitent cu o frecvență de  $n$  ori pe secundă. Această sarcină acționând în acest mod se numește *excitație*.

Dacă în aceste condițiuni grinda vibrează, atunci înseamnă că ea are mai multe pozițiuni de echilibru sub acțiunea sarcinilor *date*, cu alte cuvinte nu mai are stabilitate.

Pentru ca grinda să vibreze trebuie să fie în rezonanță cu excitația. Ca să nu vibreze trebuie ca numărul de vibrații propriu al grinzii să difere sensibil de frecvența excitației.

Se vede că aceasta nu-i de cât o chestiune de stabilitate, absolut analoagă flambajului.

Fiecare mașină din cauza mișcărilor sau aplicării sarcinilor are o excitație de o anumită frecvență. Toate piesele mașinei care sunt în rezonanță cu excitația vibrează puternic și sfârșesc prin a se rupe.

Accidente clasice întâmplăte în construcția turbinelor cu aburi au explicat cu prisosință aceasta.

Desigur, ca și multe din accidentele avioanelor, calculate corect după toate celelalte reguli de construcție, se datoresc lipsei de stabilitate a unora din piesele lor, stabilitate înțeleasă în sensul celor spuse mai sus.

Așa dar, cunoașterea numărului de vibrații proprii a unei grinzi este de o importantă capitală.

Problema e complexă și dificilă. În cele ce urmează ne vom ocupa de câteva cazuri simple.

## 1. Vibrația grinzilor neglijând masa lor.

Ne vom ocupa mai întâi de cazul când se neglijează greutatea proprie a grinzii.

În cazul când sarcinile se aplică static pe grindă, săgeata în secțiunea  $i$  este:

$$(1) \quad v_i = \sum F_1 v_{i1}.$$

În cazul când sarcinile  $F_1$  sunt în mișcare în direcția săgeților, valoarea forței care se aplică asupra grinzii nu mai este  $F_1$  ci

$$F_1 - (F_1/g)d^2v_1/dt^2.$$

Dacă introducem această valoare în ecuația (1), avem:

$$(2) \quad v_i = \sum F_1 v_{i1} - (1/g)\sum F_1 v_{i1}d^2v_1/dt^2.$$

Primul termen din partea doua a acestei ecuații nu este altceva decât săgeata statică produsă în secțiunea  $i$ , pe care o notăm  $v_{is}$ , iar al doilea termen este săgeata dinamică în aceeași secțiune, pe care o notăm  $v_{id}$ .



Deci:

$$(3) \quad v_i = v_{is} + v_{id},$$

$$(4) \quad g v_{id} = - \Sigma F_1 v_{i1} d^2 v_{1d} / dt^2.$$

Din ecuația (3) deducem:

$$d^2 v_i / dt^2 = d^2 v_{id} / dt^2,$$

așa că ecuația (4) se transformă în:

$$(5) \quad g v_{id} + \Sigma F_1 v_{i1} d^2 v_{1d} / dt^2 = 0.$$

Desvoltând ecuația (5) se găsește:

$$(6) \quad \begin{aligned} g v_{1d} + F_1 v_{11} d^2 v_{1d} / dt^2 + F_2 v_{12} d^2 v_{2d} / dt^2 + \dots &= 0, \\ g v_{2d} + F_1 v_{21} d^2 v_{1d} / dt^2 + F_2 v_{22} d^2 v_{2d} / dt^2 + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Vom avea atâtea ecuații câte forțe  $F_1$  avem.

Acest sistem de ecuații diferențiale se rezolvă în modul următor:

Se elimină  $d^2 v_{1d} / dt^2$  între primele două ecuații, și se capătă atunci  $v_{1d}$  în funcție de  $v_{2d}$ ,  $d^2 v_{2d} / dt^2$ , etc.

Dacă  $v_{1d}$ , astfel căpătat, se derivează de două ori în raport cu  $t$  și se introduce în ecuația doua, căpătăm o relație numai între celelalte săgeți și derivatele lor, fără  $v_{1d}$  și derivatele sale.

Dacă cu restul de ecuații procedăm la fel, ajungem la fine la o ecuație de ordinul  $2n$ , numai cu derivate de ordin par și numai în  $v_{nd}$ .

Chestiunea, după cum se vede, nu este așa simplă decât în cazuri foarte simple.

Vom face câteva aplicații.

**Aplicația Nr. 152.** O sarcină concentrată  $F_1$  este așezată pe o grindă simplu rezemată și care vibrează transversal ei (fig. 511).

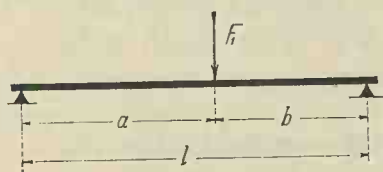


Figura 511

Din ecuația (6) deducem:

$$d^2 v_{1d} / dt^2 + v_{1d} g / F_1 v_{11} = 0.$$

Dacă se notează:

$$\lambda = \sqrt{g / F_1 v_{11}},$$

atunci:

$$v_{1d} = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t.$$

Durata  $t_1$ , a unei oscilații complete, este dată de relația:

$$\lambda t_1 = 2 \pi,$$

iar numărul de vibrații este:

$$n = \lambda / 2 \pi = \sqrt{g / F_1 v_{11}} / 2 \pi,$$

în care  $v_{11}$  are valoarea:

$$v_{11} = a^2 b^2 / 3 E I l.$$

Valoarea forței care acționează asupra grinzii este:

$$F_1 - (F_1/g)d^2v_d/dt^2,$$

deci:

$$F_1 + v_{1d}/v_{11}.$$

Pentru ca forța să fie dirijată de sus în jos și deci pentru ca reacțiunile să fie oricând pozitive, trebuie să avem:

$$F_1 > v_{1d}/v_{11},$$

adică:

$$v_{1d} < F_1 v_{11} = v_{1v}.$$

Altfel avem reacțiuni negative.

**Aplicația Nr. 153.** Să considerăm același caz însă cu două sarcini concentrate (fig. 512).

Dacă între ecuațiile (6) eliminăm pe  $v_{1d}$  sau pe  $v_{2d}$  și dacă notăm:

$$F_1 F_2 (v_{11} v_{22} - v_{12}^2)/g^2 = \alpha^2,$$

$$(F_1 v_{11} + F_2 v_{22})/g = \beta^2,$$

în care:

$$v_{11} = a_1^2 b_1^2 / 3 EI l,$$

$$v_{12} = a_1 b_2 (l^2 - a_1^2 - b_2^2) / 6 EI l,$$

obținem ecuația diferențială:

$$\alpha^2 d^4 v_d / dt^4 + \beta^2 d^2 v_d / dt^2 + v_d = 0.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt date de relația:

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2 = -(\beta^2 \pm \sqrt{\beta^4 - 4\alpha^2/2a^2}),$$

care ne dă soluțiile:

$$v_{1d} = A_1 \cos \lambda_1 t + B_1 \sin \lambda_1 t + C_1 \cos \lambda_2 t + D_1 \sin \lambda_2 t,$$

$$v_{2d} = A_2 \cos \lambda_1 t + B_2 \sin \lambda_1 t + C_2 \cos \lambda_2 t + D_2 \sin \lambda_2 t.$$

Se vede de aci că punctul de aplicație a forței  $F_1$  este supus la o mișcare care rezultă din suma altor două mișcări simple și a căror număr de vibrații sunt respectiv:

$$n_1 = \lambda_1 / 2 \pi \quad \text{și} \quad n_2 = \lambda_2 / 2 \pi$$

Dacă se scoate  $d^2 v_{1d} / dt^2$  și  $d^2 v_{2d} / dt^2$  din ecuațiile (6) în funcție de  $v_{1d}$  și  $v_{2d}$ , putem găsi valoarea:

$$F_1 - (F_1/g) d^2 v_{1d} / dt^2,$$

adică acțiunea forței  $F_1$  asupra grinzii și care este:

$$F_1 + F_1 (v_{1d} v_{22} - v_{2d} v_{12}) / (v_{11} v_{22} - v_{12}^2),$$

care are o parte constantă  $F_1$  și una variabilă cu timpul. Partea doua este nulă când:

$$v_{1d} v_{22} - v_{2d} v_{12} = 0.$$

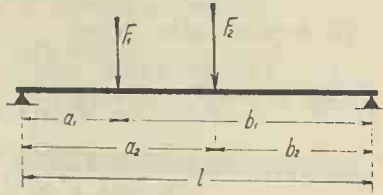


Figura 512

## 2. Vibrația grinzilor ținând seamă de masa lor.

Greutatea grinzii pe unitatea de lungime o notăm cu  $p$ , iar masa respectivă  $m = p/g$ .

Grinda fiind în mișcare, elementul de masă,  $mdx$ , va fi supus la o accelerație oarecare.

Dacă săgeata într'un punct oarecare este  $v$ , atunci avem:

$$(1) \quad v = v_s + v_d$$

adică săgeata se compune din două părți: una statică și alta dinamică. Vom avea:

$$d^2v/dt^2 = d^2v_d/dt^2.$$

Elementul de masă fiind în mișcare, el este supus la forța:

$$-mdx \cdot d^2v_d/dt^2.$$

Pe de altă parte, avem:

$$EI d^2v/dx^2 = -M, \quad EI d^3v/dx^3 = -T,$$

$$EI d^4v/dx^4 = p_1,$$

în care  $p_1$  este încărcarea pe grindă. Din (1) deducem

$$d^4v/dx^4 = d^4v_s/dx^4 + d^4v_d/dx^4.$$

Deci:

$$EI d^4v_s/dx^4 + EI d^4v_d/dx^4 = p_1 + p_d.$$

$p_d$  fiind o încărcare dinamică convențională care are valoarea:

$$p_d = EI d^4v_d/dx^4.$$

Prin urmare, elementul de grindă produce o reacțiune verticală dirijată de jos în sus  $-p_d \cdot dx$ .

Sub acțiunea acestor forțe, elementul de grindă trebuie să fie în echilibru, deci:

$$-EI d^4v_d/dx^4 \cdot dx - mdx \cdot d^2v_d/dt^2 = 0,$$

sau

$$(2) \quad EI d^4v_d/dx^4 + (p/g) d^2v_d/dt^2 = 0.$$

ecuația generală pentru vibrația grinzilor supuse la încovoiere.

Integrarea ei se face în modul următor: Se ia

$$(3) \quad v_d = XT,$$

în care  $X$  este o funcție numai de  $x$  și  $T$ , funcție numai de  $t$ .

Dacă această valoare se înlocuește în (2) și se împarte cu produsul  $XT$ , se capătă:

$$(EI/X) d^4X/dx^4 + (p/gT) d^2T/dt^2 = 0.$$

Aceasta este satisfăcută când prima parte este egală, de exemplu, cu o constantă  $k^4$ , iar a doua cu  $-k^4$ . Deci avem:

$$(4) \quad \begin{aligned} d^4 X/dx^4 - (k^4/EI)X &= 0, \\ d^2 T/dt^2 + (k^4 g/p)T &= 0. \end{aligned}$$

Se notează:

$$k^4/EI = a^4, \quad k^4 g/p = \lambda^2.$$

din cari scoatem:

$$(5) \quad \lambda = a^2 \sqrt{EIg/p}$$

și atunci ecuațiile (4) se transformă în:

$$\begin{aligned} d^4 X/dx^4 - a^4 X &= 0, \\ d^2 T/dt^2 + \lambda^2 T &= 0. \end{aligned}$$

cari ne dau:

$$(6) \quad \begin{aligned} X &= A \cos ax + B \sin ax + C \operatorname{ch} ax + D \operatorname{sh} ax, \\ T &= A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t. \end{aligned}$$

Pe  $a$  îl deducem din condițiile de rezemare sau fixare a grinzii.

**Aplicația Nr. 154.** Să presupunem că avem o grindă simplu rezemată, încărcată cu o sarcină uniform distribuită  $p$  (fig. 513).

În acest caz, pentru  $x=0$  și  $x=l$ , săgețile și momentele sunt nule.



Figura 513

Avem:

$$\begin{aligned} X &= A \cos ax + B \sin ax + C \operatorname{ch} ax + D \operatorname{sh} ax, \\ (d^2 X/dx^2)/a^2 &= -A \cos ax - B \sin ax + C \operatorname{ch} ax + D \operatorname{sh} ax. \end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D \cdot 0 &= 0, \\ A \cos al + B \sin al + C \operatorname{ch} al + D \operatorname{sh} al &= 0, \\ -A \cdot 1 - B \cdot 0 + C \cdot 1 + D \cdot 0 &= 0, \\ -A \cos al - B \sin al + C \operatorname{ch} al + D \operatorname{sh} al &= 0, \end{aligned}$$

Pentru ca să avem deplasări pentru  $va$ , trebuie ca:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos al & -1 & -\cos al \\ 0 & \sin al & 0 & -\sin al \\ 1 & \operatorname{ch} al & 1 & \operatorname{ch} al \\ 0 & \operatorname{sh} al & 0 & \operatorname{sh} al \end{vmatrix} = 0,$$

care ne dă:

$$2 \sin al \operatorname{sh} al = 0.$$

O primă valoare care o satisface este:

$$al = \pi, \text{ și deci } a^2 = \pi^2/l^2,$$

care ne dă:

$$\lambda = \pi^2 \sqrt{EIg/p}/l^2$$

**Aplicația Nr. 155.** Să presupunem că avem o grindă încastrată la o extremitate și liberă la cealaltă și încărcată cu o sarcină uniform distribuită  $p$  (fig. 514).

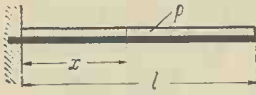


Figura 514

În acest caz pentru  $x=0$ , avem  $v_d=0$ ,  $dv_d/dx=0$ , iar pentru  $x=l$ :  $M=0$ , și  $T=0$  și se obține:

$$\cos \alpha l + 1 = 0,$$

a cărei primă rădăcină este:

$$\alpha l = 1,8751,$$

și deci:

$$\lambda = 3,5160 \sqrt{EIg/p/l^2},$$

iar numărul de vibrații este:

$$n = 0,5596 \sqrt{EIg/p/l^2}.$$

**Aplicația Nr. 156.** Pentru o grindă încastrată la o extremitate și simplu rezemată la cealaltă (fig. 515) găsim:  $\tan \alpha l = \tanh \alpha l$ , care ne dă:

$$\alpha l \approx \frac{5}{4} \pi$$



Figura 515

### 3. Vibrația grinzilor încărcate cu sarcini concentrate ținând cont și de greutatea proprie.

Ecuția aței deformată între două sarcini concentrate este:

$$v_d = XT,$$

care comportă constantele  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $\lambda$  și  $\alpha$ , în total 8 constante.

Dacă avem  $n$  forțe pe grindă, vom avea  $(n+1)$  intervale și deci 8  $(n+1)$  constante.

Se observă, mai întâi, că, în dreptul forțelor mișcarea este aceeași pentru ambele ramuri de curbe care se racordează în dreptul ei. Așa dar, în dreptul forței  $F_i$ , pentru că și săgețile sunt aceleași, avem:

$$(A_1 \cos \lambda_1 t + B_1 \sin \lambda_1 t)_i = (A_2 \cos \lambda_2 t + B_2 \sin \lambda_2 t)_i,$$

care este satisfăcută pentru

$$A_1 = A_2 = \dots = A, \quad B_1 = B_2 = \dots = B,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda.$$

De aci rezultă că și  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha$ . Dacă originea timpurilor o luăm așa ca pentru  $t=0$ ,  $v_d=0$ , atunci:

$A=0$  și  $B$  îl luăm egal cu 1. În aceste condiții, ecuația săgeții este:

$$v_d = v_1 \sin \lambda t.X.$$



Prin urmare, ne rămâne să determinăm numai constantele  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , deci în total 4 ( $n + 1$ ) constante.

Din acestea, patru constante le determinăm prin condițiile de rezemare a grinzii, iar celelalte 4n precum urmează:

În dreptul fiecărei forțe, pentru două ramuri adiacente de curbă, avem aceeași săgeată, aceeași tangentă și același moment încovoiator. Tot în dreptul forței, forța tăietoare variază cu  $F_i$ . Așa dar, în dreptul forței avem 4 condiții, deci avem tocmai atâtea ecuații câți coeficienți. Așa dar, vom putea găsi eliminantul lor.

Chestiunea, în general, nu este simplă.

**Aplicația Nr. 157.** O grindă încastrată are la extremitatea liberă o forță  $F$ . Să se găsească numărul de vibrații ținând cont de masa grinzii (fig. 516).

Avem condițiile: pentru  $x = 0$ ,  $v_d = 0$ ,  $dv_d/dx = 0$ , iar pentru  $x = l$ ,  $M = 0$  și  $T = + (F/g) d^2v_d/dt^2$ .

Deci:

$$EI \cdot T \cdot d^3 X / dx^3 = - (F/g) X \cdot d^2 T / dt^2.$$

Punând:

$$pl/F = \beta,$$

și ținând cont că:

$$\lambda = \alpha^2 \sqrt{EIg/p},$$

ajungem la:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\cos \alpha l & (\beta \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l) \\ 0 & 1 & -\sin \alpha l & -(\beta \cos \alpha l + \alpha l \sin \alpha l) \\ 1 & 0 & \operatorname{ch} \alpha l & (\beta \operatorname{sh} \alpha l - \alpha l \operatorname{ch} \alpha l) \\ 0 & 1 & \operatorname{sh} \alpha l & (\beta \operatorname{ch} \alpha l - \alpha l \operatorname{sh} \alpha l) \end{vmatrix} = 0,$$

din care scoatem:

$$\alpha l \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l (\operatorname{tg} \alpha l - \operatorname{th} \alpha l) / (1 + \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l) = \beta.$$

Această ecuație transcendentă în  $\alpha l$  se rezolvă prin încercări.

În cazul când  $F = 0$ ,  $\beta = \infty$  și deci  $1 + \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = 0$ , adică dăm peste cazul deja tratat.

Se mai vede că, atunci când  $\beta = 0$ , o valoare care satisface ecuația de condiție este și  $\alpha l = 0$ . Deci, pentru valori foarte mici ale lui  $\beta$ , corespund valori mici pentru lui  $\alpha l$ .

Dacă dezvoltăm în serie termenii cari dau pe  $\beta$ , obținem:

$$\beta = \alpha^4 l^3 / 3,$$

și deci:

$$\alpha^2 = \sqrt{3 \beta} / l^2.$$

Așa dar:

$$\lambda = \sqrt{3 EIg \beta / p} / l^2 = \sqrt{g / F v_{11}},$$

în care  $v_{11}$  este săgeata care se produce la extremitatea grinzii sub sarcina  $F = 1$ . Aceasta corespunde cazului când neglijăm greutatea proprie a grinzii.

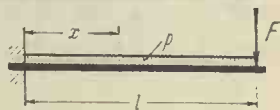


Figura 516

#### 4. Viteza critică a unui arbore care se rotește.

Arborii de turbină, pompe centrifuge, etc. suportă greutatea rotorilor calați pe ei. Sub acțiunea lor, în dreptul punctului de aplicație, arborele prezintă săgeata:

$$v = Fa^2 b^2 / 3 E I l,$$

în care  $F$  este greutatea rotorului.

Aci am neglijat și în cele ce urmează vom neglija greutatea arborelui.

Pe de altă parte, oricâte precauțiuni am lua nu putem monta rotorul așa ca centrul lui de greutate să coincidă exact cu axa matematică a arborelui. Va rezulta neapărat o excentricitate  $c$ .

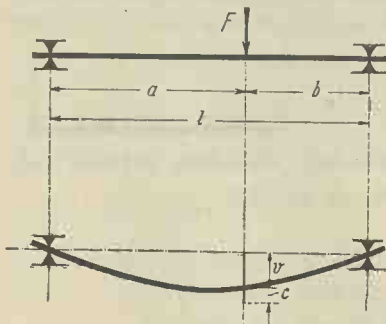


Figura 517

Așa dar, centrul de greutate al rotorului se găsește la distanța  $v + c$  de axa lagărelor (fig. 517).

În aceste condițiuni, rotorul este supus la forța centrifugă:

$$(F/g) \omega (v + c),$$

în care  $\omega$  este viteza de rotație.

Acestei forțe se opune forța ce rezultă din inerția masei:

$$(F/g) d^2 v / dt^2$$

și forța ce rezultă din rigiditatea grinzii:

$$3 E I l v / a^2 b^2.$$

Pentru echilibru avem:

$$(F/g) \omega^2 (v + c) - (F/g) d^2 v / dt^2 - 3 E I l v / a^2 b^2 = 0.$$

Dacă notăm:

$$(1) \quad \omega_c^2 = 3 E I l g / Fa^2 b^2, \quad \omega_c^2 - \omega^2 = a^2,$$

atunci avem:

$$(2) \quad d^2 v / dt^2 + a^2 v = \omega^2 c.$$

$\omega_c$  se numește viteza critică de rotație și vom vedea numai decât de ce se numește așa.

Pentru a integra ecuația (2) vom presupune că  $\omega$  crește de la zero la o valoare oarecare.

Vom distinge două cazuri.

*Primul:*  $\omega < \omega_c$ . În acest caz,  $a^2 > 1$  și deci:

$$v = A \cos at + B \sin at + c / (\omega_c^2 / \omega^2 - 1)$$

Din această ecuație se vede că arborele are deplasări finite atâta timp cât  $\omega < \omega_c$ . Când  $\omega = \omega_c$ , atunci arborele are deplasări infinite, deci se rupe. Pentru acest motiv  $\omega_c$  se numește viteză critică și valoarea ei este dată de ecuația (1).

Al doilea caz:  $\omega > \omega_c$ . Avem  $a^2 < 1$  și deci:

$$v = Ae^{at} + Be^{-at} - c/(1 - \omega_c^2/\omega^2).$$

Termenul al doilea dispare cu cât crește  $t$ , iar primul este nul pentru că experiența arată că  $v$  are valori finite. Așa dar:

$$v = -c/(1 - \omega_c^2/\omega^2).$$

Când raportul  $\omega_c^2/\omega^2$  este neglijabil, adică atunci când viteza de rotație depășește cu mult viteza critică, atunci:

$$v = -c.$$

Așa dar, rotorul se aranjează așa ca centrul lui de greutate să fie pe axa lagărelor. Când  $c = 0$ , atunci și  $v = 0$ . Prin urmare, arborele nu suportă nici o greutate.

Pentru acest motiv arborii turbinelor cu un mare număr de rotații se fac destul de subțiri.

Când viteza  $\omega$  trece prin viteza critică,  $\omega_c$  arborele vibrează puternic însă nu se rupe pentru că trecerea se face destul de repede.

Acest frumos exemplu de stabilitate se datorește lui *Stodola*.

## 5. Vibrația longitudinală a barelor.

Vibrația longitudinală a unei bare.

Când bara este supusă la o forță axială  $N$ , încărcarea ei în sensul lungimeii fiind  $p$ , atunci am avut:

$$u = Nx/E\Omega \quad , \quad du/dx = N/E\Omega,$$

$$d^2u/dx^2 = (1/E\Omega) dN/dx \quad , \quad dN/dx = -p,$$

și deci:

$$E\Omega d^2u/dx^2 = -p.$$

Dacă  $u_s$  este deplasarea statică și  $u_d$  cea dinamică, atunci avem:

$$u = u_s + u_d.$$

Din care deducem:

$$d^2u/dx^2 = d^2u_s/dx^2 + d^2u_d/dx^2.$$

$$d^2u/dt^2 = d^2u_d/dt^2.$$

Vom avea deci:

$$E\Omega d^2u/dx^2 = E\Omega d^2u_s/dx^2 + E\Omega d^2u_d/dx^2 = -p - p_d,$$

în care  $p_d$  reprezintă încărcarea dinamică, deci:

$$E\Omega d^2u_d/dx^2 = -p_d.$$

Reacțiunea barei asupra elementului de bară  $dx$ , va fi:

$$p_d = E\Omega d^2u_d/dx^2.$$

Din cauza accelerației elementului de bară, se dezvoltă forța:

$$-(p/g) d^2u_d/dt^2.$$

Pentru echilibru suma acestor două forțe trebuie să fie nulă, deci:

$$E\Omega d^2u_d/dx^2 - (p/g) d^2u_d/dt^2 = 0.$$

Notăm

$$E\Omega g/p = a^2.$$

Ecuția precedentă se transformă în:

$$a^2 d^2u_d/dx^2 - d^2u_d/dt^2 = 0,$$

a cărei una din soluțiile particulare este:

$$u_d = XT,$$

și urmând calea arătată la celelalte cazuri anterioare, ne dă:

$$d^2X/dx^2 + k^2X = 0,$$

$$d^2T/dt^2 + \lambda^2T = 0,$$

notând:

$$\lambda = ak.$$

Avem deci:

$$X = A \cos kx + B \sin kx.$$

$$T = A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t.$$

**Aplicația Nr. 158.** 1°. Să presupunem că avem o bară încastrată la o extremitate și liberă la cealaltă (fig. 518).

Pentru  $x = 0$ ,  $u = 0$ , pentru  $x = l$   $du/dx = 0$ , deci  $\cos kl = 0$ , și deci

$$\lambda = a\pi/2l$$



Figura 518

și numărul de vibrații este:

$$n = \lambda/2\pi = a/4l.$$

2°. Să presupunem bara înțepenită la ambele capete.

În acest caz,  $u = 0$  pentru  $x = 0$  și  $x = l$  deci:

$$\sin kl = 0$$

și deci:

$$n = a/2l$$

3° Să presupunem bara liberă la ambele capete. Atunci pentru  $x = 0$  și  $x = l$ , trebuie ca  $du/dx = 0$ , deci

$$\sin kl = 0,$$

ceea ce ne dă tot  $n = a/2l$

În ultimele două cazuri, vibrațiile sunt duble ca în primul caz, pentru că undele parcurg numai jumătate din lungimea barei.

**Aplicație numerică.** Să presupunem că în primul caz avem o bară de oțel lungă de 1 m. Avem:

$$E\Omega g/p = E\Omega g/\gamma\Omega = Eg/\gamma = \alpha^2,$$

în care  $\gamma$  este greutatea specifică a oțelului egală cu 7,85 și

$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

Avem:

$$\alpha = \sqrt{Eg/\gamma} = 5,16 \cdot 10^5$$

$$n = 1290 \text{ per./sec.}$$

Din  $u_d = XT$ , putem deduce lungirile specifice și rezistențele când ni se dă amplitudinea mișcării.

În exemplele precedente s'au făcut o serie de simplificări.

Prima este că nu s'a considerat decât vibrația fundamentală, deci s'au neglijat celelalte secundare.

A doua simplificare este că s'a neglijat influența mediului, care se traduce prin o frânare sau amortizare a vibrațiilor. Dacă s'ar fi ținut seamă și de acești factori formulele ce ar fi rezultat ar fi fost mult mai complicate.



## XXX. PLĂCI.

S'a spus chiar dela început, că elementele geometrice cari vor caracteriza o placă sunt forma și dimensiunile suprafeței mediane și grosimea plăcii pe care o vom nota totdeauna cu  $h$ .

Admitem că suprafața mediană împarte peste tot grosimea plăcii în două părți egale.

Alt element care va caracteriza o placă este materialul din care este făcută.

Din acest punct de vedere, pentru calculul lor vom admite aceleași ipoteze ca pentru grinzi și anume:

1. Că avem de-a face cu materiale isotrope în sensul admis în rezistența materialelor.

2. Că materialul ascultă de legea lui *Hooke*, și

3. Că li se aplică ipoteza lui *Bernoulli* și anume că secțiunile plane și normale pe suprafața mediană înainte de deformațiune, rămân plane și după deformațiune și normale pe suprafața mediană deformată.

În ce privește ultima ipoteză, admitem că este adevărată numai pe lățimi de secțiuni infinit mici, pentrucă pe lățimi finite nu este adevărată.

În privința calculului plăcilor vom urma exact norma dela grinzi.

### A) Geometria suprafețelor.

#### 1. Elementele geometrice ale suprafeței mediane.

Să presupunem că avem o placă a cărei suprafață mediană este oarecare.

Pe suprafață, să considerăm un punct oarecare  $O$  și să ducem prin el planul tangent la suprafață și alte două plane normale între ele și normale pe planul tangent.

În cele ce urmează vom boteza fiecare plan cu numele normalei lui.

Intersecția acestor trei plane determină triedrul  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ . Sensul pozitiv al acestor direcțiuni îl vom lua așa ca să avem  $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta} = +1$  și prin urmare să avem de exemplu:

$$(1) \quad \bar{\zeta}\bar{\xi} = \bar{\eta}.$$

Direcțiunea  $\bar{\eta}$ , normală în  $O$  pe planul tangent și care este identică cu intersecția planelor normale pe planul tangent, ne fixează direcțiunea normalei la suprafață în punctul  $O$ . Celelalte două direcțiuni  $\bar{\xi}$  și  $\bar{\zeta}$  situate în planul tangent la suprafață, vor fi tangente la suprafață.

Planul  $\bar{\zeta}$  care conține direcțiunile  $\bar{\xi}$  și  $\bar{\eta}$ , taie suprafața dată după o curbă  $OA_1$ . În vecinătatea punctului  $O$ , pe această curbă, să considerăm punctul  $A_1$  la distanța  $dx_1$  măsurată după elementul de curbă.

În aceste condițiuni tangenta la curba  $OA_1$  în originea  $O$ , este chiar  $\bar{\xi}$ .

Absolut analog, planul  $\bar{\xi}$  taie suprafața dată după curba  $OC_1 = dz_1$  a cărei tangentă în origine este  $\bar{\zeta}$ .

Ambele curbe, fiind situate în câte un plan, sunt curbe plane.

Un punct de pe suprafață, de exemplu  $O$ , este perfect determinat când cunoaștem raza vectorie  $\bar{r}$  dela un reper dat la acest punct.

În aceste condițiuni, expresiile tangentelor la cele două curbe plane sunt:

$$(2) \quad \bar{\xi} = \partial\bar{r}/\partial x_1, \quad \bar{\zeta} = \partial\bar{r}/\partial z_1.$$

Dacă derivăm odată aceste expresiuni, avem:

$$(3) \quad \partial^2\bar{r}/\partial x_1^2 = \partial\bar{\xi}/\partial x_1 = \bar{\eta}/r_x, \quad \partial^2\bar{r}/\partial z_1^2 = \partial\bar{\zeta}/\partial z_1 = \bar{\eta}/r_z$$

în care  $r_x$  și  $r_z$  sunt razele de curbură a arcelor de curbă  $OA_1 = dx_1$  și  $OC_1 = dz_1$ .

Să presupunem că voim să găsim raza de curbură după arcul  $ds$ .

Avem evident:

$$d\bar{s} = \bar{\xi}dx_1 + \bar{\zeta}dz_1, \quad dx_1/ds = a, \quad dz_1/ds = c,$$

și deci:

$$(4) \quad \begin{aligned} \partial\bar{r}/\partial s &= a \partial\bar{r}/\partial x_1 + c \partial\bar{r}/\partial z_1 \\ \partial^2\bar{r}/\partial s^2 &= a^2 \partial^2\bar{r}/\partial x_1^2 + 2ac \partial^2\bar{r}/\partial x_1 \partial z_1 + c^2 \partial^2\bar{r}/\partial z_1^2. \end{aligned}$$

Normala la suprafață în punctul  $A_1$  diferă evident de aceea din punctul  $O$  și avem:

$$(5) \quad \partial\bar{\xi}/\partial z_1 = \partial\bar{\zeta}/\partial x_1 = \partial^2\bar{r}/\partial x_1 \partial z_1 = \bar{\eta}/r_y.$$

Din ultimile trei ecuații, dacă punem:

$$\partial^2\bar{r}/\partial s^2 = \bar{\eta}/r_s,$$

scoatem:

$$(6) \quad 1/r = a^2/r_x + 2ac/r_y + c^2/r_z.$$

Această formulă ne dă legea de variație a lui  $1/r$ , adică a curburei în punctul  $O$  după un plan oarecare normal la suprafață.

Se recunoaște numaidecât analogia între această lege și aceea a variației rezistențelor în plan.

Prin urmare, întocmai ca și acolo, vom avea două plane principale după care avem razele principale  $r_1$  și  $r_3$ , din care una este maximă iar cealaltă minimă.

Pentru planele principale vom avea  $1/r_y = 0$ . Raza  $r_y$  poartă numele de *rază geodesică de răsucire*.

Dacă raportăm totul la planele principale, vom avea:

$$(7) \quad 1/r = a^2/r_1 + c^2/r_3, \quad 1/r_y = ac(1/r_1 - 1/r_3).$$

Mai rezultă că:

$$(8) \quad 1/r_x + 1/r_z = 1/r_1 + 1/r_3 \quad \text{și} \quad 1/r_y^2 - 1/r_x r_z = -1/r_1 r_3$$

sunt invarianții suprafeței.

Dacă derivăm ecuația (1) mai găsim și:

$$9) \quad \partial \bar{\eta} / \partial x_1 = -\bar{\xi} / r_x - \bar{\zeta} / r_y, \quad \partial \bar{\eta} / \partial z_1 = -\bar{\zeta} / r_z - \bar{\xi} / r_y.$$

Cu aceste elemente suprafața este complet determinată în punctul  $O$ .

## 2. Curbe trasate pe o suprafață.

Putem oricând considera raza vectoriale  $\bar{r}$ , care fixează punctul  $O$  la un reper dat, că este o funcțiune de scalarii  $x$  și  $z$ . Pentru evidențiere o vom pune sub forma  $\bar{r}(x, z)$ .

Dacă dăm lui  $z$  o valoare oarecare  $z_0$ , constantă, atunci  $\bar{r}(x, z_0)$  reprezintă o curbă cuprinsă în întregime pe suprafața dată. Dând diferite valori lui  $z$ , obținem o familie de curbe cari se găsesc de asemenea, în întregime, pe suprafața dată.

Dacă facem aceeași operație și cu  $x$ , obținem altă familie de curbe cari se găsesc și ele în întregime pe suprafața dată.

Aceste două familii de curbe împart suprafața dată într'o serie de patrulatere curbilinii.

Notăm cu  $\bar{\xi}$  și  $\bar{\zeta}$  direcțiile tangentelor la cele două familii de curbe în punctul  $O$ .

Când în orișice punct al suprafeței avem:

$$\bar{\xi} \bar{\zeta} = 0,$$

zicem că cele două familii de curbe sunt *ortogonale*.

În cele ce urmează ne ocupăm numai cu astfel de curbe.

Să presupunem că prin  $O$  trece curba  $OA = dx$ . Această curbă se găsește în planul ei osculator.

Să considerăm în punctul  $O$  (fig. 519) triedrul lui *Frenet*,  $\bar{\theta}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$  dirijat după tangenta  $\bar{\theta}$  la curbă, după normala principală  $\bar{\nu}$  pe care se găsește centrul curbei  $OA$  de rază  $r_c$  și după binormala  $\bar{\beta}$ , care este în același timp și direcția planului osculator.

Să mai considerăm în punctul  $O$  și triedrul lui *Darboux*,  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  dirijat altfel în cât  $\bar{\xi}$  să coincidă cu tangenta  $\bar{\theta}$  la curba  $OA$  în origine, iar  $\bar{\eta}$  cu normala la suprafață în același punct.

Aceste două triedre au o latură comună ( $\bar{\theta} \equiv \bar{\xi}$ ), iar celelalte fac între ele unghiul  $\varphi$ .

Avem deci:

$$(10) \quad \bar{\eta}\bar{\nu} = \bar{\xi}\bar{\beta} = \cos\varphi.$$

S'a văzut însă că planul normal  $\bar{\zeta}$  taie suprafața după curba  $OA_1 = dx_1$  a cărei tangentă în  $O$  este tot  $\bar{\xi}$ .

Și curba:

$OA_2 = dx_2$ ,  
proiecția curbei  $OA$  pe planul  $\bar{\eta}$  tangent la suprafață în punctul  $O$ , are în origine aceeași tangentă  $\bar{\xi}$ .

În aceste condiții, ecuația curbei  $OA$ , în planul ei osculator, este:

$$\partial\bar{\xi}/\partial x = \bar{\nu}/r_c.$$

Ecuația curbei  $OA_1$  în planul ei  $\bar{\xi}$ , este dată de relația (3), deci:

$$\partial\bar{\xi}/\partial x_1 = \bar{\eta}/r_x.$$

Ecuația curbei  $OA_2$  cuprinsă în planul  $\bar{\eta}$ , tangent la suprafață este:

$$\partial\bar{\xi}/\partial x_2 = \bar{\xi}/r_{xz},$$

în care  $r_{xz}$  este raza de curbură geodesică dirijată evident după  $\bar{\zeta}$  pe care se găsește punctul  $O_{xz}$ , centrul curbei  $OA_2$ .

Să ducem prin  $A$  un plan paralel cu planul  $\bar{\xi}$ . Acest plan taie tangenta  $\bar{\xi}$  și curbele  $OA_1$  și  $OA_2$  pe rând în punctele  $O_1, A_1$  și  $A_2$ . Patrulaterul  $O_1 A_2 A A_1$ , neglijând infiniții mici de ordin superior, este un dreptunghi.

De pe figură se vede că avem:

$$\overline{O_1 A_1} = \overline{A_2 A} = (\partial\bar{\xi}/\partial x_1) dx_1, \quad \overline{O_1 A} = (\partial\bar{\xi}/\partial x) dx, \quad \overline{O_1 A_2} = (\partial\bar{\xi}/\partial x_2) dx_2.$$

Elementele diferențiale  $dx, dx_1$  și  $dx_2$  a celor trei curbe, toate tangente în  $O$  la  $\bar{\xi}$ , diferă între ele prin câte un infinit mic de ordin superior și deci avem:

$$dx = dx_1 = dx_2.$$

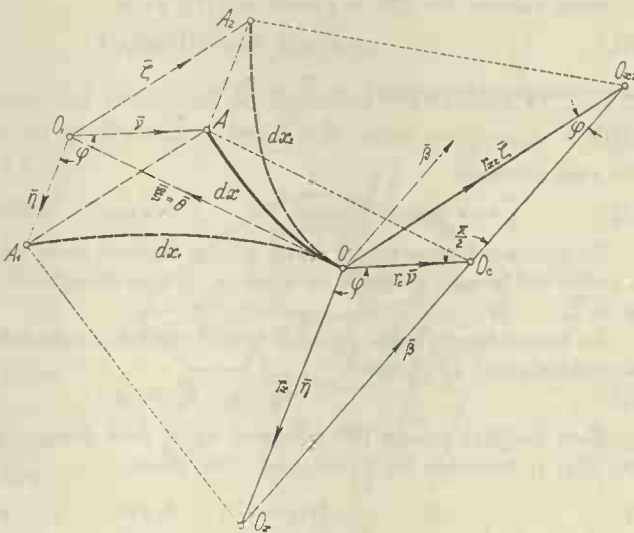


Figura 519

Din triunghiul  $O_1A_2A$ , dreptunghic în  $A_2$ , avem:

$$\overline{O_1A} = \overline{O_1A_2} + \overline{A_2A} \text{ sau } \partial\bar{\xi}/\partial x = \partial\bar{\xi}/\partial x_1 + \partial\bar{\xi}/\partial x_2.$$

Dacă în această relație punem valorile de mai sus, căpătăm:

$$(11) \quad \bar{v}/r_c = \bar{\eta}/r_x + \bar{\zeta}/r_{xz}.$$

Această ecuație reprezintă o dreaptă paralelă cu  $\bar{\beta}$  care trece prin centrul de curbură  $O_c$  a curbei  $OA$ .

Ea detașează pe direcțiile  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{v}$  și  $\bar{\zeta}$ , plecând din  $O$ , segmente egale cu  $r_x$ ,  $r_c$  și  $r_{xz}$ .

În adevăr, dacă o multiplicăm scalar pe rând cu  $\bar{\eta}$  și  $\bar{\zeta}$ , căpătăm:

$$(12) \quad r_c = r_x \cos\varphi = r_{xz} \sin\varphi.$$

Relațiunea (11) este fundamentală și putem să o punem și sub alte forme.

Dacă valorile din (12) le punem în (11), avem:

$$(11_1) \quad \bar{v} = \bar{\eta} \cos\varphi + \bar{\zeta} \sin\varphi,$$

care multiplicată vectorial cu  $\bar{\xi}$  ne dă și

$$(11_1) \quad \bar{\beta} = \bar{\zeta} \cos\varphi - \bar{\eta} \sin\varphi,$$

din care scoatem:

$$(13) \quad \bar{\eta} = \bar{v} \cos\varphi - \bar{\beta} \sin\varphi, \quad \bar{\zeta} = \bar{v} \sin\varphi + \bar{\beta} \cos\varphi.$$

Cu ajutorul acestor relații putem găsi și legătura între raza de răsucire  $r_r$  a curbei  $OA$  și raza geodesică de răsucire  $r_y$ , care corespunde tangentelor  $+\bar{\xi}$  și  $+\bar{\zeta}$ .

Se demonstrează foarte lesne că pentru ambele curbe  $OA$  și  $OA_1$  care au aceeași tangentă în  $O$ , avem:

$$(14) \quad \partial\bar{\eta}/\partial x = \partial\bar{\eta}/\partial x_1.$$

Dacă derivăm ecuația (10) în raport cu  $x$ , dacă ținem seamă de ecuațiile (9), (14) și formulele lui *Frenet* (pag. 19), găsim:

$$(15) \quad 1/r_y = 1/r_r + d\varphi/dx.$$

Dacă derivăm acum ultima ecuație (13) și ținem seamă de (13) și (15) avem și:

$$(16) \quad \partial\bar{\zeta}/\partial x = \bar{\eta}/r_y - \bar{\xi}/r_{xz}.$$

În rezumat, pentru familia de curbe  $x$ , avem:

$$(17) \quad \partial\bar{\xi}/\partial x = \bar{\eta}/r_x + \bar{\zeta}/r_{xz}, \quad \partial\bar{\eta}/\partial x = -\bar{\xi}/r_x - \bar{\zeta}/r_y, \quad \partial\bar{\zeta}/\partial x = \bar{\eta}/r_y - \bar{\xi}/r_{xz}.$$

Dacă facem același calcul și pentru cealaltă familie de curbe,  $z$ , în ipoteza din figură, găsim absolut analog:

$$(17) \quad \partial\bar{\zeta}/\partial z = \bar{\eta}/r_z + \bar{\xi}/r_{xz}, \quad \partial\bar{\eta}/\partial z = -\bar{\zeta}/r_z - \bar{\xi}/r_y, \quad \partial\bar{\xi}/\partial z = \bar{\eta}/r_y - \bar{\zeta}/r_{xz}.$$

Așa dar, putem studia o curbă pe o suprafață oarecare cu ajutorul elementelor geometrice ale secțiunilor normale pe suprafață și cu ajutorul razelor geodezice de curbura ( $r_{xz}$ ).

Formulele (17) au pentru plăci aceeași importanță ca formulele lui *Frenet* pentru grinzi.



Pentru ceea ce ne trebuie nouă, mai avem nevoie de o formulă.

Să considerăm și curbele infinit vecine curbelor  $OA$  și  $OC$ . Ele împreună determină un patrulater curbiliniu a cărui suprafață este  $dx \cdot dz = d\Omega$ .

Pentru că  $dx$  diferă de  $dx_2$  cu un infinit mic de ordinul al doilea, vom avea:

$$\partial dx_2/dx_2 = \partial dx/dx = - dz/r_{xz}.$$

Vom avea deci:

$$(18) \quad \delta dx = - d\Omega/r_{xz} \quad , \quad \delta dz = - d\Omega/r_{xz}$$

Am pus semnul minus, pentru că atunci când  $r_{xz}$  este pozitiv, adică dirija către  $+\xi$ , arcul  $dx$  scade când  $dz$  crește.

## B) Studiul general al plăcilor.

### 1. Echilibrul plăcilor.

Să presupunem că elementul de suprafață  $OABC$  este un patrulater curbiliniu mărginit la două familii de curbe ortogonale. Lungimile de arc  $OA$  și  $OC$  măsurate după cele două familii de curbe le notăm cu  $dx$  și  $dz$  (fig. 520).

În fiecare punct al patrulaterului presupunem că grosimea plăcii o măsurăm după direcțiunea normalei din acel punct.

Pe fața superioară a plăcii avem o încărcare  $\bar{p}$  kg/m<sup>2</sup>. Fața superioară a plăcii este sensibil

egală cu suprafața mediană. În cele ce urmează vom presupune că sarcina  $\bar{p}$  se aplică pe suprafața mediană.

Notăm cu  $\bar{R}_z$  și  $\bar{M}_z$  forța și momentul din fața  $OA$  (fig. 520), pe unitatea de lungime de arc. În aceeași condițiuni, în fața  $OC$  vom avea  $\bar{R}_x$  și  $\bar{M}_x$ .

Pe fețele opuse vom avea aceleași solicitări, cu direcțiuni contrare plus creșterile respective.

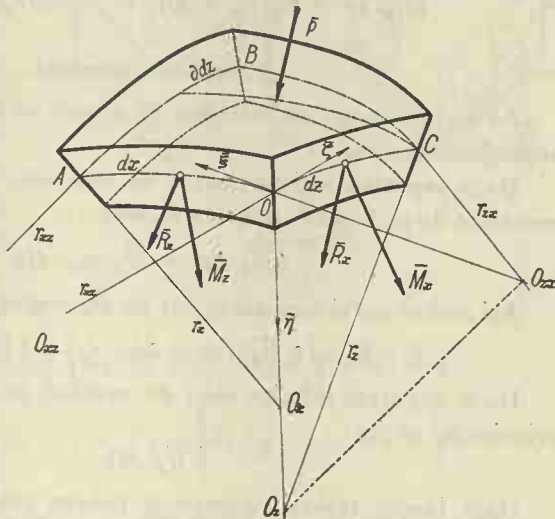


Figura 520

Lungimile  $dx$  și  $dz$  fiind infinit mici, vom presupune că fiecare din solicitările de mai sus se distribuie uniform pe intervalul respectiv și că se aplică în centrul de greutate a suprafeței respective.

În aceste condițiuni, să scriem echilibrul elementului de suprafață mediană.

a) Poligonul forțelor.

Pe fața  $OC$  vom avea o forță  $\bar{R}_x dz$ , iar pe fața opusă  $(\bar{R}_x + \partial \bar{R}_x)(dz + \partial dz)$  a căror rezultantă este evident:

$$[\partial(\bar{R}_x dz)/\partial x] dx$$

sau:

$$(\partial \bar{R}_x / \partial x - \bar{R}_x / r_{zx}) d\Omega.$$

Dacă facem aceeași operație și pe fața  $OA$  și dacă ținem seamă că forța exterioară are expresia  $\bar{p} d\Omega$ , scriind că suma forțelor este nulă, găsim:

$$(1) \quad \partial \bar{R}_x / \partial x - \bar{R}_x / r_{zx} + \partial \bar{R}_z / \partial z - \bar{R}_z / r_{xz} + \bar{p} = 0.$$

b) Ecuația de momente.

Să scriem ecuația de momente în raport cu centrul de greutate al suprafeței mediane.

Dacă repetăm raționamentul de mai sus, găsim că momentul resultant de pe fața  $OC$  și opusa ei, este:

$$(\partial \bar{M}_x / \partial x - \bar{M}_x / r_{zx}) d\Omega.$$

Aci mai avem și momentul dat de  $\bar{R}_x$  a cărui expresie este:

$$\frac{1}{2}[\bar{\xi}] [\bar{R}_x + \partial \bar{R}_x] (dz + \partial dz) dx + \frac{1}{2} \bar{\xi} \bar{R}_x dx dz.$$

Dacă neglijăm infiniții mici de ordinul întâiu față de valorile principale, găsim:

$$\bar{\xi} \bar{R}_x d\Omega.$$

Dacă facem aceeași operație și pentru celelalte fețe, obținem:

$$(2) \quad \partial \bar{M}_x / \partial x - \bar{M}_x / r_{zx} + \partial \bar{M}_z / \partial z - \bar{M}_z / r_{xz} + \bar{\xi} \bar{R}_x + \bar{\zeta} \bar{R}_z = 0.$$

Ecuațiile (1) și (2) sunt ecuațiile de echilibru cele mai generale ale unui element de placă oarecare.

Se recunoaște numaidecât analogia între aceste ecuații și acelea stabilite la grinzile curbe.

În cazul când nu avem momente, deci când  $\bar{M}_x = 0$ ,  $\partial \bar{M}_x / \partial x = 0$ , etc., atunci ecuația (2) se reduce la:

$$(3) \quad \bar{\xi} \bar{R}_x + \bar{\zeta} \bar{R}_z = 0.$$

## 2. Legătura între $\bar{R}_x$ ..... și rezistențele din placă.

Să considerăm o prizmă triunghiulară ale cărei laturi  $dx$ ,  $h$  și  $dz$  sunt dirijate după laturile triedrului  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\zeta}$ , după cum se arată pe figura 521.

Lungimea  $dx$  și lățimea  $dz$  fiind infinit mici, vom presupune că rezistențele după aceste direcțiuni se distribuie uniform. Nu aceeași presupunere o putem face după grosimea sau înălțimea  $h$  a plăcii, care este finită. Prin urmare, după direcțiunea  $\bar{\eta}$ , vom presupune că rezistențele sunt variabile.

Să considerăm pe suprafața laterală a prizmei o fâșie de suprafață, înaltă de  $dy$  și la distanța  $y$  de suprafața mediană.

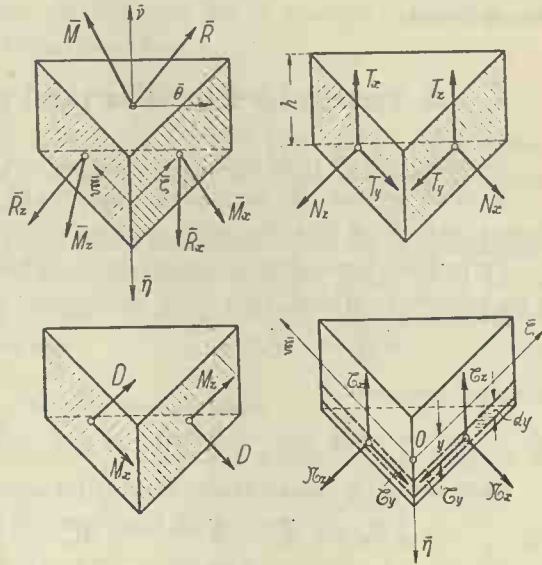


Figura 521

De pe figura 521 avem:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int \mathcal{X}_x dy, & N_z &= \int \mathcal{X}_z dy, \\
 T_x &= \int \mathcal{C}_x dy, & T_y &= \int \mathcal{C}_y dy, & T_z &= \int \mathcal{C}_z dy \\
 M_x &= \int \mathcal{X}_x y dy, & M_y &= 0, & M_z &= \int \mathcal{X}_z y dy \\
 D &= \int \mathcal{C}_y y dy.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Tot de pe figura se vede că avem:

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_x &= \bar{\xi} N_x + \bar{\eta} T_z + \bar{\zeta} T_y, & \bar{R}_z &= \bar{\zeta} N_z + \bar{\xi} T_y + \bar{\eta} T_x, \\
 \bar{M}_x &= -\bar{\xi} D + \bar{\zeta} M_z, & \bar{M}_z &= \bar{\zeta} D - \bar{\xi} M_x.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Acı pentru simplificarea scrisului și evidențiere, am notat momentul de răsucire cu  $D$ .

Se observă că axele momentelor sunt în planul tangent la suprafața mediană.

Dacă valorile din (5) le introducem în ecuațiile (1)—(3) vom găsi condițiile de echilibru ale unui element de placă în funcțiune de  $N_x, N_z, T_y$ , etc.

Formulele stabilite sunt absolut generale și se aplică pentru orice fel de placă.

### 3. Variația lui $\bar{R}$ și $\bar{M}$ în jurul unui punct.

Să găsim pe  $\bar{R}$  și  $\bar{M}$  într'o secțiune infinit vecină originii  $O$ :

Această secțiune de lungime  $ds$ , împreună cu planele de coordonate și cele două fețe ale plăcii formează o priză triunghiulară.

Perimetrul bazei acestei prizme triunghiulare și suprafața totală a ei, vectorial vorbind, sunt nule, deci avem:

$$(6) \quad \bar{\theta} ds = -\bar{\xi} dx + \bar{\zeta} dz, \quad \bar{v} ds = \bar{\xi} dz + \bar{\zeta} dx,$$

din cari scoatem:

$$(6) \quad \bar{v}\bar{\zeta} = -\bar{\theta}\bar{\xi} = a = dx/ds, \quad \bar{v}\bar{\xi} = \bar{\theta}\bar{\zeta} = c = dz/ds.$$

Dacă scriem că suma tuturor eforturilor este nulă, avem:

$$(7) \quad a \bar{R}_z + c \bar{R}_x = \bar{R}, \quad a \bar{M}_z + c \bar{M}_x = \bar{M},$$

neglijând infiniții mici de forma  $\frac{1}{2}\bar{p}acds, \frac{1}{2}\bar{\xi}\bar{R}_xadz, \dots$

Dacă în cele două expresii de mai sus punem, valorile din (5), căpătăm:

$$(8) \quad \begin{aligned} \bar{R}\bar{v} &= a^2 N_z + 2ac T_y + c^2 N_x = N, \\ \bar{M}\bar{v} &= a^2 M_z + 2ac D + c^2 M_x = M. \end{aligned}$$

Se vede imediat că aceste cantități urmează exact aceeași lege de variație ca și rezistențele în plan.

Exact ca acolo, vom determina valorile și direcțiile principale pentru cari avem  $T_y = 0$  și  $D = 0$ .

Intocmai ca la studiul rezistențelor, cantitățile:

$$(9) \quad \begin{aligned} N_x + N_z &= P, \\ T_y^2 - N_x N_z &= Q^2, \\ M_x + M_z &= M, \\ D^2 - M_x M_z &= L^2, \end{aligned}$$

sunt niște invarianți într'un punct dat al suprafeței mediane.

#### 4. Clasificarea plăcilor.

Din punctul de vedere al calculului, plăcile se clasifică în trei categorii:

##### a) Plăci subțiri.

Se numesc așa acele plăci în care *nu se dezvoltă niciun moment și cari, deci, au pe toată întinderea lor:*

$$M_x = M_z = D \equiv 0.$$

Intocmai după cum cablul este o curbă funiculară a încărcărilor ce-l solicită, tot așa și aci placa subțire este suprafața de echilibru a încărcărilor ce o solicită.

Se vede numaidecât, că *placa plană subțire este un caz particular*, pentru că ea nu poate fi o suprafață de echilibru decât după ce s'a deformat sub acțiunea sarcinilor. Acest caz este analog aplicațiilor 54 și 55.

##### b) Plăci plane groase.

Ele în genere sunt supuse la încărcări dirijate după normala la plan.

La aceste plăci, pe tot cuprinsul lor avem:

$$N_x = N_z = T_y \equiv 0.$$

Ele fac echilibrul încărcărilor numai prin momentele  $M_x$ ,  $M_z$ , și  $D$  și prin forțele tăietoare  $T_x$  și  $T_z$  ce se dezvoltă în diversele secțiuni ale plăcii.

Cazul lor este absolut analog grinzilor drepte care fac echilibrul încărcărilor numai prin momentele încovoietoare, de răsucire și forțele tăietoare ce se dezvoltă în diversele ei secțiuni.

##### c) Plăci oarecari.

Aci vom cuprinde plăcile de orice formă și la care se dezvoltă toate solicitările de care s'a vorbit până aci.



### XXXI. PLĂCI SUBȚIRI.

S'a văzut că plăcile subțiri s'au definit prin condiția ca:

$$M_x = M_z = D \equiv 0.$$

În aceste condiții, există relația (3) care exprimă că momentul tuturor eforturilor din placă este nul.

Dacă valorile din (5) le ducem în (3) găsim și

$$T_x = T_z \equiv 0.$$

În acest caz, avem:

$$\bar{R}_x = \bar{\xi}N_x + \bar{\zeta}T_y, \quad \bar{R}_z = \bar{\zeta}N_z + \bar{\xi}T_y.$$

Așa dar,  $\bar{R}_x$  și  $\bar{R}_z$  sunt cuprinse în planul tangent la suprafața mediană.

Dacă aceste valori le introducem în ecuația (1), dacă facem operațiile arătate de acea formulă și dacă punem:

$$(10) \quad \bar{p} = \bar{\xi}p_x + \bar{\eta}p_y + \bar{\zeta}p_z,$$

atunci rezultă:

$$(11) \quad \begin{aligned} \partial N_x / \partial x + (N_z - N_x) / r_{zx} + \partial T_y / \partial z - 2T_y / r_{xz} + p_x &= 0, \\ N_x / r_x + N_z / r_z + 2T_y / r_y + p_y &= 0, \\ \partial N_z / \partial z + (N_x - N_z) / r_{zx} + \partial T_y / \partial x - 2T_y / r_{xz} + p_z &= 0. \end{aligned}$$

Acestea-s ecuațiile de echilibru cele mai generale a unui element de suprafață a unei plăci subțiri, a cărei suprafață mediană este oarecare.

#### A) Suprafețe de rotație.

În practică, în genere, nu avem de-a face cu suprafețe oarecari. Suprafețele curent întâlnite sunt cele de rotație.

Să ne ocupăm de elementele lor geometrice.

Vom presupune că un element de suprafață este definit prin intersecția suprafeței cu planele meridiene și paralele.

Vom presupune că axele  $\bar{\eta}$  și  $\bar{\zeta}$  sunt cuprinse în planul meridian. Se vede numai decât că, în acest caz,  $\partial\bar{\xi}/\partial z = 0$  și deci  $1/r_y = 0$ . Prin urmare, planele meridiene și paralele sunt plane principale ale suprafeței.

Dacă notăm cu  $r_c$  raza paralelului, atunci avem și:

$$1/r_{zx} = 0, \quad r_c = r_x \cos \varphi = r_{xz} \sin \varphi$$

În acest caz, ecuațiile (11) se transformă în:

$$(11_1) \quad \begin{aligned} \partial N_x / \partial x + \partial T_y / \partial z - 2T_y / r_{xz} + p_x &= 0, \\ N_x / r_x + N_z / r_z + p_y &= 0, \\ \partial N_z / \partial z + (N_x - N_z) / r_{xz} + \partial T_y / \partial x + p_z &= 0. \end{aligned}$$

Aceste ecuații sunt aplicabile oricărei suprafețe de rotație.

Aci avem un caz interesant prin aplicațiile sale și anume, *cazul când suprafața de rotație și încărcările au axul de rotație al suprafeței ca ax de simetrie.*

În acest caz, din motive de simetrie, avem  $\partial N_x / \partial x = 0$  și  $T_y = 0$ , cu alte cuvinte, planele principale ale suprafeței sunt și plane principale de rezistență.

În adevăr, dacă luăm momentul tuturor forțelor care soliciță elementul de suprafață în raport cu axa de rotație (fig. 522), se găsește că momentul lor este nul, afară de al forțelor  $T_y$  din fețele  $OA$  și  $BC$ . Or,  $T_y$  din aceste două fețe sunt egale, însă atât suprafețele pe cari se exercită cât și brațele de pârghie până la axa de rotație sunt manifest diferite.

Momentul lor nu este nul decât în cazul când  $T_y \equiv 0$ .

Vom avea deci:

$$(9_1) \quad \bar{R}_x = \bar{\xi} N_x, \quad \bar{R}_z = \bar{\zeta} N_z.$$

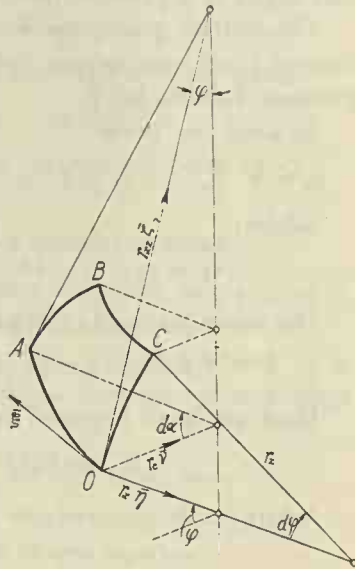


Figura 522

În aceste condițiuni, ecuațiile (11<sub>1</sub>) se reduc la:

$$(11_2) \quad \begin{aligned} \partial N_x / \partial x = 0 \quad , \quad N_x / r_x + N_z / r_z + p_y = 0, \\ \partial N_z / \partial z + (N_x - N_z) / r_{xz} + p_z = 0, \end{aligned}$$

ecuații a căror simplitate ne permite a face o serie de aplicațiuni.  
Ne vom ocupa deci întâiu cu acest caz.

## B) Plăci subțiri de rotație și încărcări continui, ambele fiind simetrice față de axul de rotație.

În cele ce urmează ne ocupăm numai de suprafețele cele mai usuale, întrebuințate în construcții, precum: cilindrul, conul, sfera și elipsoidul de rotație.

### 1. Cilindru cu bază circulară.

Problema care se pune curent este următoarea: un vas cilindric este supus la o presiune interioară  $p$ .

Cilindrul se presupune destul de lung ca să putem neglija influența fundurilor asupra deformației pereților cilindrului. Să se găsească valorile lui  $N$ .

În acest caz avem:

$$r_x = r \quad , \quad 1/r_z = 1/r_{xz} = 0 \quad , \quad p_y = -p \quad , \quad p_z = 0.$$

Găsim:

$$N_x = pr \quad , \quad \partial N_z / \partial z = 0 \quad , \quad \dots N_z = ct.$$

Din cauza presiunii pe funduri avem:

$$p\pi r^2 = 2\pi r N_z \text{ și deci } N_z = \frac{1}{2}pr.$$

Dacă grosimea peretelui este  $h$ , atunci:

$$\mathfrak{X}_x = N_x/h \quad , \quad \mathfrak{X}_z = N_z/h.$$

Aceste rezultate se pot găsi și direct foarte ușor.

### 2. Con de rotație.

Notăm cu  $\varphi$  unghiul ce fac între ele axa conului, presupusă verticală, cu generatoarea suprafeței mediane.

În acest caz avem:  $1/r_z = 0$ .

Problemele care se pun practic sunt cam următoarele.

a) Eforturile sub acțiunea greutateii proprii.

Să se găsească eforturile  $N$  într'o cupolă conică, cu vârful în sus, de grosime constantă, sub acțiunea greutateii proprii.

Dacă notăm cu  $p$  greutatea pe unitatea de suprafață mediană a conului, atunci:

$$p_y = p \sin \varphi \quad , \quad p_z = -p \cos \varphi.$$

Dacă introducem aceste valori în a doua ecuație (11<sub>2</sub>), avem:

$$N_x = -pr_c \operatorname{tg} \varphi = -pr_{xz} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi.$$

Pentru a găsi pe  $N_z$ , vom utiliza ultima ecuație (11<sub>2</sub>). Vom observa însă că, din modul cum s'au luat axele, rezultă că la o creștere  $dz$  corespunde o scădere de aceeași valoare pentru  $r_{xz}$  și că deci avem:  $dz = -dr_{xz}$ . În aceste condiții, ecuația de care este vorba se transformă în:

$$\partial N_z / \partial r_{xz} + N_z / r_{xz} - N_x / r_{xz} - p_z = 0,$$

în care introducând valoarea lui  $N_x$  de mai sus, ne dă:

$$\partial N_z / \partial r_{xz} + N_z / r_{xz} + p / \cos \varphi = 0.$$

Dacă integrăm această ecuație în intervalul  $0 - r_{xz}$ , găsim:

$$N_z = -\frac{1}{2} p r_{xz} / \cos \varphi = -pr_c / \sin 2\varphi.$$

Se vede că, în acest caz, atât  $N_x$  cât și  $N_z$  cresc liniar cu  $r_c$ .

b) Eforturile sub acțiunea unei încărcări uniforme.

Să presupunem aceeași cupolă conică încărcată cu o sarcină  $p$ , uniform distribuită pe unitatea de suprafață orizontală.

În acest caz, sarcina pe unitatea de suprafață mediană va fi  $p \sin \varphi$ . Așa dar, în formulele precedente înlocuim  $p$  cu această valoare. Avem:

$$N_x = -pr_c \sin^2 \varphi / \cos \varphi \quad , \quad N_z = -\frac{1}{2} pr_c / \cos \varphi$$

c) Eforturile în fundul conic al unui rezervor.

Să presupunem că în condițiile de mai sus cupola cu vârful în sus este fundul unui rezervor plin cu apă. Înălțimea apei deasupra vârfului conului este  $h_0$ .

Dacă  $\gamma$  este greutatea specifică a apei, atunci avem:

$$p_y = \gamma (h_0 + r_{xz} \cos \varphi) \quad , \quad p_z = 0.$$

Din a doua formulă (11<sub>2</sub>), deducem:

$$N_x = -\gamma r_x (h_0 + r_{xz} \cos \varphi) = -\gamma r_{xz} (h_0 + r_{xz} \cos \varphi) \operatorname{tg} \varphi.$$

Cu această valoare din ultima ecuație (11<sub>2</sub>) deducem:

$$\partial N_z / \partial r_{xz} + N_z / r_{xz} + \gamma (h_0 + r_{xz} \cos \varphi) \operatorname{tg} \varphi = 0,$$

care integrată în intervalul  $0 - r_{xz}$ , ne dă:

$$N_z = -\gamma r_c (h_0/2 \cos \varphi + \frac{1}{3} r_{xz}).$$

Dacă suprafața conului are vârful în jos și dacă  $h_0$  este înălțimea nivelului apei deasupra vârfului, atunci făcând calculele, obținem:

$$N_x = \gamma r_x (h_0 - r_{xz} \cos \varphi), \quad N_z = \gamma r_c (h_0/2 \cos \varphi - \frac{1}{3} r_{xz}).$$

În acest caz, avem numai tensiuni pe când în cazul precedent am avut numai compresii. Primul caz convine construcțiilor de beton, al doilea aceloră făcute din table de fier.

### 3. Sferă.

În acest caz, avem:

$$r_x = r_z = r.$$

Problemele cari se pun în practică sunt cam următoarele.

#### a) Cupolă sferică sub acțiunea greutății proprii.

Să se găsească eforturile  $N$  la o cupolă de forma unei calote sferice, de grosime constantă, sub acțiunea greutății proprii.

Din a doua ecuație (11<sub>2</sub>), deducem:

$$N_x + N_z + p_y r = 0.$$

Dacă această valoare o introducem în ultima ecuație (11<sub>2</sub>) și dacă ținem seamă de valorile lui  $p_y$  și  $p_z$ , găsim:

$$\partial N_z / \partial z - 2N_z / r_{zz} - p / \cos \varphi = 0.$$

Dacă mai ținem seamă că avem:

$$dz = r d\varphi \quad \text{și} \quad r_c = r \cos \varphi = r_{zz} \sin \varphi.$$

ecuația de mai sus se transformă în:

$$\partial N_z / \partial \varphi - 2N_z \operatorname{tg} \varphi - pr / \cos \varphi = 0,$$

care integrată în intervalul de la  $\varphi$  la  $\frac{1}{2}\pi$ , ne dă:

$$N_z = -pr / (1 + \sin \varphi).$$

Valoarea lui  $N_x$  este:

$$N_x = pr [1/(1 + \sin \varphi) - \sin \varphi].$$

Pentru valori ale lui  $\varphi$  cuprinse între zero și  $\frac{1}{2}\pi$ ,  $N_x$  variază între  $-pr$  și  $-\frac{1}{2}pr$ , iar  $N_x$  între  $+pr$  și  $-\frac{1}{2}pr$ , fiind nul pentru  $\varphi = 38^\circ 10'$ .

**b) Cupolă sferică sub acțiunea unei sarcini verticale uniforme.**

Aceeași cupolă este supusă numai la o sarcină  $p$  uniform distribuită pe unitatea de suprafață orizontală.

Atunci încărcarea pe unitatea de suprafață înclinată va fi  $p \sin \varphi$  și deci:

$$p_y = p \sin^2 \varphi, \quad p_z = -p \sin \varphi \cos \varphi.$$

Procedând ca în exemplul precedent, avem:

$$\partial N_x / \partial \varphi - 2N_x \operatorname{tg} \varphi - pr \operatorname{tg} \varphi = 0,$$

care integrată între  $\varphi$  și  $\frac{1}{2}\pi$  ne dă:

$$N_x = -\frac{1}{2} pr,$$

cu ajutorul căreia deducem:

$$N_x = \frac{1}{2} pr \cos 2\varphi.$$

**c) Fund sferic de rezervor.**

Aceeași cupolă formează fundul unui rezervor în care nivelul apei este la înălțimea  $h_0$  deasupra creștetului cupolei.

Avem:

$$p_y = \gamma [h_0 + r (1 - \sin \varphi)] \quad , \quad p_z = 0,$$

și prin urmare:

$$N_x + N_z + \gamma r [h_0 + r (1 - \sin \varphi)] = 0,$$

$$\partial N_x / \partial \varphi - 2 N_x \operatorname{tg} \varphi - \gamma r [h_0 + r (1 - \sin \varphi)] \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Ultima ecuație integrată între  $\varphi$  și  $\frac{1}{2}\pi$ , ținând cont că avem:

$$(1 - \sin^3 \varphi) / \cos^2 \varphi = 1 + \sin^2 \varphi / (1 + \sin \varphi),$$

ne dă:

$$N_x = -\gamma r \left[ \frac{1}{2} (h_0 + r) - \frac{1}{3} r (1 + \sin^2 \varphi / (1 + \sin \varphi)) \right],$$

cu ajutorul căreia găsim:

$$N_x = -\gamma r \left[ \frac{1}{2} (h_0 + r) + \frac{1}{3} r (1 + \sin^2 \varphi / (1 + \sin \varphi)) - r \sin \varphi \right].$$

Când  $\varphi$  variază în intervalul dela zero la  $\frac{1}{2}\pi$ , atunci  $N_x$  variază dela  $-\frac{1}{2} \gamma r (h_0 + \frac{1}{3}r)$  la  $-\frac{1}{2} \gamma r h_0$ , iar  $N_x$  dela  $-\frac{1}{2} \gamma r (h_0 + \frac{5}{3}r)$  la  $-\frac{1}{2} \gamma r h_0$ .

*Toată cupola este supusă numai la compresiuni.*



Dacă cupola este întoarsă cu fundul în jos și dacă  $h_0$  este înălțimea apei deasupra fundului rezervorului, atunci avem:

$$p_y = -\gamma[h_0 - r(1 - \sin\varphi)] \quad , \quad p_z = 0.$$

Cu aceste valori, găsim:

$$N_x + N_z - \gamma r [h_0 - r(1 - \sin\varphi)] = 0,$$

$$\partial N_z / \partial \varphi - 2 N_x \operatorname{tg} \varphi + \gamma r [h_0 - r(1 - \sin\varphi)] \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Procedând exact ca în cazul precedent avem:

$$N_z = \gamma r \left[ \frac{1}{2} (h_0 - r) + \frac{1}{3} r (1 + \sin^2 \varphi / (1 + \sin \varphi)) \right].$$

$$N_x = \gamma r \left[ \frac{1}{2} (h_0 - r) - \frac{1}{3} r (1 + \sin^2 \varphi / (1 + \sin \varphi)) + r \sin \varphi \right].$$

Când  $\varphi$  variază între zero și  $\frac{1}{2}\pi$ , atunci  $N_z$  variază dela:

$$\frac{1}{2} \gamma r (h_0 - \frac{1}{3} r) \text{ la } \frac{1}{2} \gamma r h_0, \text{ iar } N_x \text{ dela } \frac{1}{2} \gamma r (h_0 - \frac{5}{3} r) \text{ la } \frac{1}{2} \gamma r h_0.$$

Dacă  $h_0 > \frac{5}{3} r$ , vom avea pe toată întinderea cupolei numai tensiuni.

Ca și la cupolele conice primul caz convine construcțiilor de beton armat, al doilea aceloră făcute din tablă de fier.

#### 4. Cupolă eliptică.

Să presupunem că avem o cupolă cu vârful în sus a cărei curbă meridiană este o elipsă, suprafața fiind bine înțeleasă de rotație, având axa de rotație verticală (fig. 523).

Să stabilim mai întâi elementele geometrice ale acestei suprafețe.

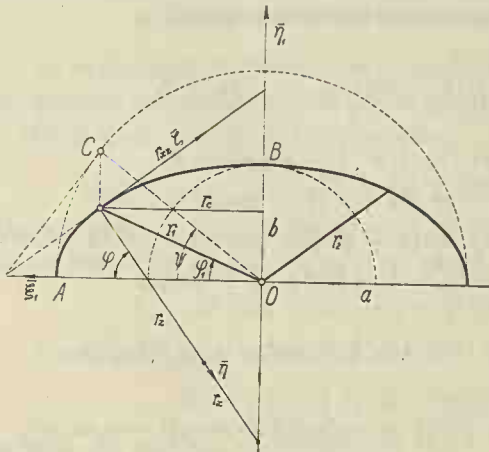


Figura 523

Ecuția elipsei o scoatem din una din proprietățile sale, de exemplu din construcția ei cu ajutorul a două cercuri ale căror raze sunt respectiv semi-axa mare și mică a elipsei.

Vom avea:

$$\bar{r}_1 = \bar{\xi}_1 a \cos \psi + \bar{\eta}_1 b \sin \psi,$$

în care  $\bar{r}_1$  este raza vectorială ce pleacă din centrul elipsei la un punct oarecare al ei, iar  $\psi$  unghiul din figură dintre  $\bar{\xi}_1$  și  $OC$ .

Dacă expresia de mai sus o ridicăm la patrat, găsim valoarea numerică a lui  $r_1$ , deci:

$$r_1^2 = a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi.$$

Să ne ocupăm de tangenta la elipsă.

Din relația evidentă  $d\bar{r}_1 = d\bar{z}$ , scoatem:

$$d\bar{r}_1/d\psi = d\bar{z}/d\psi = -\bar{\xi}_1 a \sin\psi + \bar{\eta}_1 b \cos\psi.$$

Valoarea numerică a lui  $d\bar{z}$  este:

$$dz = r_2 d\psi.$$

în care am notat:

$$r_2^2 = a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi,$$

raza conjugată lui  $r_1$ .

Ca să găsim direcția tangentei, n'avem decât să împărțim vectorul  $d\bar{r}_1$  prin valoarea sa numerică, adică  $dz$ .

Avem deci:

$$\bar{\zeta} = d\bar{r}_1/r_2 d\psi.$$

Ca să avem  $\cos\varphi$  și  $\sin\varphi$ , facem produsele  $\bar{\zeta}\bar{\eta}_1$ , și  $\bar{\zeta}\bar{\xi}_1$  cari ne dau:

$$\cos\varphi = b \cos\psi/r_2, \quad \sin\varphi = a \sin\psi/r_2.$$

Avem tot ce ne trebuie ca să găsim raza  $r_c$  a cercului paralel, razele principale  $r_x$  și  $r_z$ , precum și raza de curbură geodesică  $r_{xz}$ .

Avem:

$$r_c = a \cos\psi, \quad r_x = a r_2/b, \quad r_z = r_2^2/ab, \quad r_{xz} = r_2 \operatorname{ctg}\psi.$$

Ne mai trebuie unghiul  $\varphi_1$ , pe care raza vectoare  $r_1$  îl face cu  $+\bar{\xi}_1$ .

Din relația evidentă  $r_c = r_1 \cos\varphi_1$ , deducem:

$$\cos\varphi_1 = a \cos\psi/r_1.$$

Acum avem tot ce ne trebuie ca să putem aplica ecuațiile (11<sub>2</sub>).

#### a) Cupolă eliptică supusă la greutatea proprie.

Ca aplicație, vom determina eforturile din cupolă sub acțiunea greutății proprii, presupunând grosimea peretelui cupolei constantă.

În acest caz, avem:

$$p_y = p b \sin\psi/r_2, \quad p_z = -p a \cos\psi/r_2.$$

Introducând aceste valori în ecuațiile (11<sub>2</sub>), avem:

$$N_x = -N_z a^2/r_2^2 - p a^2 \sin\psi/b$$

$$\partial N_z/\partial\psi - N_z(1 + a^2/r_2^2) \operatorname{tg}\psi - p r_2^2/b \cos\psi = 0,$$

ecuații analoage celorla găsite la sferă pentru cazul similar.

Din prima ecuație, rezultă că în creștetul cupolei unde  $N_x = N_z$ , avem  $r_2 = a$ ,  $\sin\psi = 1$  și deci:

$$N_x = N_z = -pa^2/2b$$

Integrarea o facem ca și în cazurile precedente și anume, punem:

$$N_z = uv.$$

Dacă această valoare și derivatele sale le introducem în ecuația diferențială, obținem următoarele două ecuații:

$$dv/d\psi = v(1 + a^2/r_2^2) \operatorname{tg} \psi,$$

$$du/d\psi = p r_2^2/vb \cos\psi.$$

Dacă notăm:

$$(a^2 - b^2)/a^2 = \varepsilon^2,$$

atunci din expresia lui  $r_2$ , obținem:

$$r_2^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2\psi).$$

Dacă ducem această valoare în expresia lui  $dv/d\psi$  și integrăm, găsim:

$$v = Cr_2/a \cos^2\psi,$$

în care  $C$  este o constantă de integrare.

Această valoare dusă în a doua ecuație diferențială și înlocuind pe  $r_2$  cu valoarea sa, ne dă:

$$du = (pa^2/bC) \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2\psi} \cos\psi d\psi,$$

care integrată ne dă:

$$u = \frac{1}{2} (pa/bC) [r_2 \sin\psi + (b^2/a\varepsilon) \operatorname{arsh} (a\varepsilon \sin\psi/b) + C_1],$$

în care  $C_1$  este o nouă constantă de integrare.

Valoarea lui  $N_z$  va fi deci:

$$N_z = \frac{1}{2} (pr_2/b \cos^2\psi) [r_2 \sin\psi + (b^2/a\varepsilon) \operatorname{arsh} (a\varepsilon \sin\psi/b) + C_2].$$

Noua constantă de integrare  $C_2$  o determinăm prin condiția ca în creștetul cupolei, să avem, pentru  $N_z$ , valoarea găsită anterior.

Trebuie să avem deci:

$$-\frac{1}{2} pa^2/b = \frac{1}{2} (pa^2/b.0) [a + (b^2/a\varepsilon) \operatorname{arsh} (a\varepsilon/b) + C_2],$$

din care rezultă numai de câț:

$$C_2 = -a - (b^2/a\varepsilon) \operatorname{arsh} (a\varepsilon/b),$$

cu ajutorul căreia, dacă notăm prescurtat:

$$\beta = \operatorname{arsh} (a\varepsilon/b) - \operatorname{arsh} (a\varepsilon \sin\psi/b),$$

avem:

$$N_z = -\frac{1}{2} (pr_2/b \cos^2\psi) (a - r_2 \sin\psi - b^2\beta/a\varepsilon).$$

Aceasta-i valoarea exactă a lui  $N_z$ .

Se observă că, în creștet,  $N_z$  se prezintă sub formă nedeterminată.

Pentru a ridica nedeterminarea, punem:

$$\cos^2\psi = 1 - \sin^2\psi = (1 + \sin\psi)(1 - \sin\psi).$$

Se găsește numai decît, că pentru  $\psi = \frac{1}{2}\pi$ , avem valorile ade-vărate:

$$(a - r_2 \sin\psi)/(1 - \sin\psi) = a + r_2 \quad , \quad \beta/(1 - \sin\psi) = 0.$$

Dacă se ține seamă de aceste valori, se găsește că în jurul crește-tului cupolei avem formula aproximativă:

$$(1) \quad N_z = -\frac{1}{2} pr_2 (a + r_2)/b (1 + \sin\psi),$$

care pentru creștetul cupolei este riguros exactă, după cum ușor se poate recunoaște.

La baza cupolei (ecuator), adică pentru  $\psi = 0$ , avem:

$$N_z = -\frac{1}{2} p [a + (b^2/a\varepsilon) \operatorname{arsh}(a\varepsilon/b)].$$

Formula aproximativă (1) de mai sus ne dă:

$$N_z = -\frac{1}{2} p (a + b),$$

ale cărei rezultate sunt mai mari ca cele exacte, în cazurile practice, cu cel mult 10%.

Având pe  $N_z$ , avem numai decît și pe  $N_x$ . La baza cupolei (ecu-ator), avem:

$$N_x = -N_z a^2/b^2,$$

deci o tensiune, pentru că  $N_z$  este compresiune.

Există deci un paralel unde  $N_x = 0$ . Valorii lui  $\psi$  ce corespunde acestui paralel nu i se poate da o expresie simplă analitică, valoarea lui se găsește prin încercări.

#### b) Cupolă eliptică cu sarcină verticală uniform distribuită.

Să presupunem aceeași cupolă *supusă la o sarcină uniform distri-buită pe unitatea de suprafață orizontală*, cum ar fi de exemplu greu-tatea  $p$  a zăpezii.

În acest caz,  $p \sin\varphi$  reprezintă valoarea încărcării verticale pe unitatea de suprafață mediană și atunci rezultă:

$$p_y = pa^2 \sin^2\psi/r_2^2 \quad , \quad p_z = -\frac{1}{2} pab \sin 2\psi/r_2^2.$$

Dacă introducem aceste valori în ecuațiile (11<sub>2</sub>), găsim:

$$N_x = -N_z a^2/r_2^2 - pa^3 \sin^2\psi/br_2$$

$$\partial N_z/\partial\psi - N_z (1 + a^2/r_2^2) \operatorname{tg}\psi - par_2 \operatorname{tg}\psi/b = 0.$$

Dacă se urmează exact calea din cazul precedent, punând condiția, la determinarea constantei  $C_2$ , ca în creștetul cupolei să avem:

$$N_z = -\frac{1}{2} pa^2/b,$$

se găsește:

$$N_z = -\frac{1}{2} par_2/b.$$

La baza cupolei, avem:

$$N_z = -\frac{1}{2} pa.$$

Dacă ducem valoarea lui  $N_z$  în expresia lui  $N_x$ , găsim:

$$N_x = \frac{1}{2} pa^3 \cos 2\psi / br_2,$$

care este nulă pentru  $\psi = \frac{1}{4}\pi$ , iar la bază are valoarea:

$$N_x = \frac{1}{2} pa^3/b^2.$$

**Observare.** 1°. Să presupunem că în toate cazurile precedente tăiem cupola printr'o secție orizontală. S'a văzut că  $N_z$ , în această secție, este dirijat după tangenta la meridian. Componentele lui  $N_z$  după o verticală și orizontală sunt:

$$V = N_z \cos \varphi, \quad H = N_z \sin \varphi.$$

Pe tot conturul secțiunii valoarea componentei verticale va fi  $2\pi r N_z \cos \varphi$ . Aceasta echilibrează forța  $F$  verticală a încărcărilor de pe cupolă din interiorul secțiunii făcute.

Dacă notăm  $F_1 = F/2\pi r$ , atunci avem:

$$F_1 = N_z \cos \varphi,$$

relație din care deducem valoarea și variația lui  $N_z$  în diversele secțiuni ce facem.

Pentru ca să găsim pe  $N_x$ , n'avem decât să introducem această valoare de exemplu în ecuația doua (11).

2°. Bazele acestor cupole se fixează într'un inel care va trebui să desvolte niște reacțiuni care să echilibreze eforturile cu care cupola îl soliciță.

Pe unitatea de lungime de inel, vom avea solicițările verticale și orizontale:

$$V = F_1, \quad H = F_1 \operatorname{tg} \varphi.$$

Solicițarea verticală  $V$  va trebui să fie luată prin reazime, iar cea orizontală,  $H$ , prin tensiunea sau compresiunea ce se desvoltă în inel. Dacă raza centrului de greutate a inelului de reazim este  $r$ , atunci forța axială  $N$  din acest inel este:

$$N = \pm F_1 \operatorname{tg} \varphi$$

Vom avea tensiune când  $N_z$  este compresiune și invers în cazul contrar.

Forța  $N$ , din inelul de reazim, este destul de importantă. *Intze* a imaginat rezervoare de forma din figura 524. În acest caz, dacă  $F$  este greutatea sarcinei din interiorul inelului de reazim și  $F'$  aceea din exteriorul lui, pentru ca cele două solicitări orizontale să se anuleze, trebuie să avem:

$$F \operatorname{tg} \varphi = F' \operatorname{tg} \varphi'$$

În acest caz, inelul de reazim se calculează numai la solicitările verticale  $V$ .

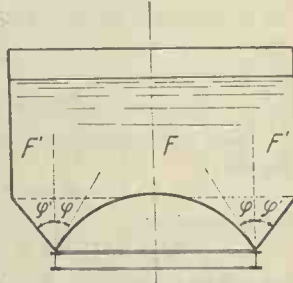


Figura 524

**Aplicația Nr. 159. Exemplu numeric.** Să se găsească rezistențele într-o cupolă eliptică făcută din beton armat sub acțiunea greutății proprii și a unei încărcări cu zăpadă de  $100 \text{ kg/m}^2$ , presupunând  $a = 30 \text{ m}$ ,  $b = 15 \text{ m}$  (semiaxele elipsei meridiene).

Să determinăm mai întâi elementele geometrice care intră în formule.

Avem:  $\varepsilon^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 0,75$ ,  $\varepsilon = 0,866$ ,  $a\varepsilon/b = 30 \cdot 0,866/15 = 1,732$ ,  $\operatorname{arsh}(a\varepsilon/b) = 1,317$ ,  $b^2/a\varepsilon = 15^2/30 \cdot 0,866 = 8,660$ ,  $(b^2/a\varepsilon) \operatorname{arsh}(a\varepsilon/b) = 11,41$ .

1°. Să ne ocupăm de rezistențele date de greutatea proprie.

Greutatea specifică a betonului armat este  $2400 \text{ kg/m}^3$ . Dacă grosimea cupolei este  $h \text{ cm}$ , atunci  $24h$ ,  $h$  fiind exprimat în  $\text{cm}$ , ne dă încărcarea pe  $\text{m}^2$  de suprafață mediană și deci:

$$p = 24h \text{ kg/m}^2$$

Dacă în formulele de până aci punem toate dimensiunile în metri, atunci obținem  $N$  în  $\text{kg/m}$ . Ca să avem rezistențele în  $\text{kg/cm}^2$ , vom împărți pe  $N$  cu suprafața  $\Omega = 100h$ .

Prin urmare, dacă în formule punem în loc de  $p$ , valoarea:

$$p/\Omega = 24h/100h = 0,24,$$

obținem chiar valoarea rezistențelor respective.

Rezultă numaidecât, că pentru încărcarea proprie, rezistențele sunt independente de grosimea păretelui, depinzând numai de greutatea specifică a materialului din care e făcută cupola. Am fi tentați să facem grosimi foarte mici, dacă n'ar interveni stabilitatea cupolei, adică o chestiune analoagă flambajului barelor supuse la compresiune.

În creștetul cupolei avem:

$$\mathcal{X}_z = \mathcal{X}_x = -\frac{1}{2} 0,24 \cdot 30^2/15 = -7,20 \text{ kg/cm}^2,$$

iar la ecuator:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_z &= -\frac{1}{2} 0,24 (30 + 11,41) = -4,97 \text{ kg/cm}^2, \\ \mathcal{X}_x &= 4,97 \cdot 30^2/15^2 = 19,88 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Dacă utilizăm formula aproximativă, la ecuator, găsim:

$$\mathcal{X}_z = -\frac{1}{2} 0,24 (30 + 15) = -5,40 \text{ kg/cm}^2,$$

deci un rezultat cu aproape 9% mai mare ca cel exact.



2°. Să ne ocupăm de rezistențele date de zăpadă.

Dacă punem în formule,  $p = 100 \text{ kg/m}^2$ , celelalte dimensiuni fiind exprimate în metri, pentru rezistențele datorite zăpezii, obținem  $N$  în  $\text{kg/m}$ .

Pentru a avea rezistențele direct, vom împărți totul prin  $\Omega = 100 h$ ,  $h$  fiind exprimat în cm. Prin urmare, dacă în formule în loc de  $p = 100 \text{ kg/m}^2$ , punem  $p/100 h = 100/100 h = 1/h$ , obținem chiar valoarea rezistențelor.

În creștetul cupolei avem:

$$\mathcal{X}_z = \mathcal{X}_x = -\frac{1}{2} 30^2/15 h = -30/h,$$

iar la ecuator:

$$\mathcal{X}_z = -\frac{1}{2} 30/h = -15/h, \quad \mathcal{X}_x = \frac{1}{2} 30^2/15^2 h = 60/h.$$

Dacă luăm pentru cupolă o grosime de  $h = 12 \text{ cm}$ , obținem în creștetul cupolei:

$$\mathcal{X}_z = \mathcal{X}_x = -30/12 = -2,50 \text{ kg/cm}^2,$$

iar la ecuator:

$$\mathcal{X}_z = -15/12 = -1,25 \text{ kg/cm}^2, \quad \mathcal{X}_x = 60/12 = 5 \text{ kg/cm}^2.$$

Însumând rezistențele din cele două încărcări, avem:

în creștet:

$$\mathcal{X}_z = \mathcal{X}_x = -7,20 - 2,50 = -9,70 \text{ kg/cm}^2$$

la ecuator

$$\mathcal{X}_z = -6,17 \text{ kg/cm}^2, \quad \mathcal{X}_x = 24,88 \text{ kg/cm}^2$$

Tensiunea dată de  $\mathcal{X}_x$  se ia prin fierărie. Grosimea păretelui fiind  $h$ , atunci, pe fiecare cm de meridian, avem:

$$N_x = 12 \cdot 24,88 \approx 300 \text{ kg/cm}.$$

Dacă, de exemplu, luăm rezistența fierului  $600 \text{ kg/cm}^2$ , atunci avem nevoie de  $\Omega_f = 300/600 = 0,5 \text{ cm}^2/\text{cm}$ , ceea ce ne dă  $10 \text{ } \varnothing \text{ } 25 \text{ mm/m}$ . Asta la baza cupolei. Pe rest, fierăria se proporționează cu valoarea lui  $N_x$  din regiunea întinsă.

### C) Plăci subțiri și încărcări nesimetrice față de axul de rotație.

Încărcarea curent întâlnită este presiunea vântului.

O construcție pusă în calea vântului deviază curentul de aer dând o presiune pe fața bătută de vânt și o succiune pe partea opusă (fig. 525 și 526).

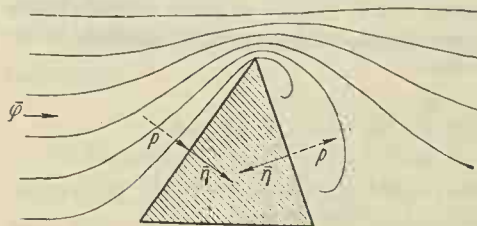


Figura 525

În calculele noastre valoarea presiunii o luăm egală cu a succiunii.

Dacă în calcule ținem seamă numai de valoarea presiunii, atunci zicem că avem o încărcare nesimetrică, dacă

însă ținem seamă de valoarea presiunii și a sucțiunii zicem că avem o încărcare *antisimetrică*.

Dacă notăm cu  $p$  presiunea vântului pe unitatea de suprafață normală direcției lui, dacă  $\bar{\varphi}$  este direcția vântului și  $\bar{\eta}$  direcțiunea normalei la suprafață, atunci pentru presiunea normală pe suprafață, se ia valoarea:

$$(1) \quad p_y = p \cos \varphi,$$

în care  $\varphi$  este unghiul între  $+\bar{\varphi}$  și  $+\bar{\eta}$  (fig. 526).

Această formulă ne dă valoarea presiunii și a sucțiunii, căci pentru fața pentru care avem  $\varphi > \frac{1}{2} \pi$ , avem o presiune negativă.

Experiența arată însă că valoarea:

$$(2) \quad p_y = p \cos^2 \varphi,$$

dedusă din legea de variație a rezistențelor, este mai aproape de realitate.

Această expresiune a lui  $p_y$  însă, nu-și schimbă semnul pe fața supusă sucțiunii. Pentru a scoate în evidență semnul minus pe intervalul  $\frac{1}{2} \pi - \pi$ , redresăm funcția  $f = \cos^2 \varphi$ .

Seria *Fourier* care reprezintă în aceste condițiuni funcția  $f$ , adică își schimbă semnul când  $\varphi$  trece de  $\frac{1}{2} \pi$ , este:

$$f = (8/\pi) \left( \frac{1}{3} \cos \varphi + \frac{1}{1.3.5} \cos 3\varphi - \frac{1}{3.5.7} \cos 5\varphi + \dots \right).$$

În calcule intervin derivatele de ordinul întâiu și al doilea a acestei funcțiuni.

Derivata întâia este:

$$df/d\varphi = -\frac{4}{\pi} C \sin 2\varphi,$$

în care:

$$C = \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos 3\varphi + \frac{1}{5} \cos 5\varphi - \dots$$

Se demonstrează foarte lesne, că valoarea lui  $C$  pe cele două intervale  $0 - \frac{1}{2} \pi$  și  $\frac{1}{2} \pi - \pi$  este respectiv  $+\frac{1}{4} \pi$  și  $-\frac{1}{4} \pi$  și că  $dC/d\varphi = 0$  pe tot intervalul  $0 - \pi$ .

În aceste condițiuni, derivata doua este:

$$d^2f/d\varphi^2 = -\frac{8}{\pi} C \cos 2\varphi.$$

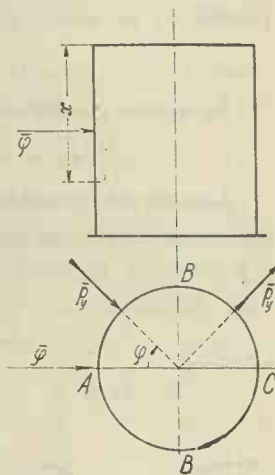


Figura 526

Valoarea acestei derivate pentru  $\varphi = \frac{1}{2}\pi - 0$  este  $+2$ , iar pentru  $\varphi = \frac{1}{2}\pi + 0$  este  $-2$ , deci prezintă un salt, având pentru  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  valoarea zero.

Din motive de continuitate, admitem că racordarea celor două ramuri ale funcțiunii  $d^2f/d\varphi^2$  se face, pe intervalul  $\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi$ , luând pentru  $C$ , pe acest interval, valoarea arbitrară:

$$C = \frac{\pi}{4} \sin 2\varphi.$$

În aceste condițiuni, pe acest interval, avem:

$$df/d\varphi = \sin^2 2\varphi, \quad d^2f/d\varphi^2 = -\sin 4\varphi,$$

Această soluție arbitrară are, față de toate celelalte soluții, de asemenea arbitrară, avantajul că cel puțin pe intervalele  $0 - \frac{1}{4}\pi$  și  $\frac{3}{4}\pi - \pi$  și în punctul  $\frac{1}{2}\pi$ , rezultatele sunt riguros exacte, însă du-

bioase sau arbitrare pe intervalul  $\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi$ . Admițând acestea, rezultă că, pe intervalul  $\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi$ , valoarea lui  $\cos^2 \varphi$  nu mai este dată de seria Fourier de mai sus, ci de o altă funcțiune. Având însă în vedere că între  $\frac{1}{4}\pi$  și  $\frac{3}{4}\pi$  avem  $\cos^2 \varphi < \frac{1}{2}$ , eroarea care se face nu este prea mare.

În aceste condițiuni, admitem că, pe diversele intervale, funcția

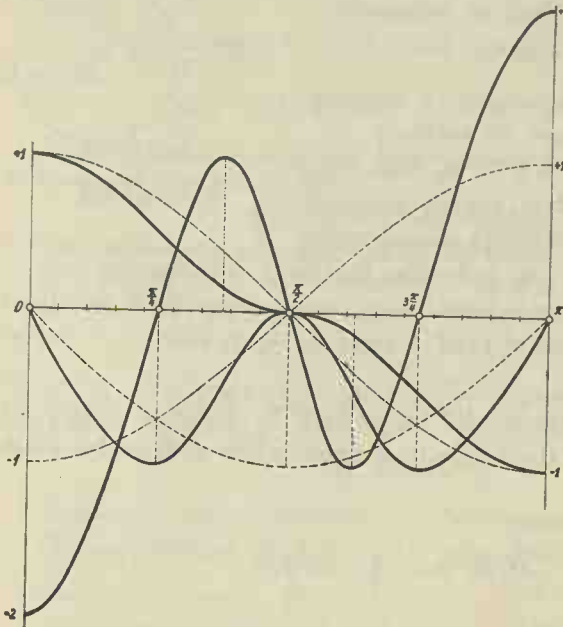


Figura 527

$f$  și derivatele sale au valorile din următorul tablou:

| Intervalul | $0$ | $\pi/4$            | $\pi/2$ | $3\pi/4$          | $\pi$ |
|------------|-----|--------------------|---------|-------------------|-------|
| Funcția    |     | $\cos^2 \varphi$   |         | $-\cos^2 \varphi$ |       |
| Derivata I |     | $-\sin 2\varphi$   |         | $\sin 2\varphi$   |       |
| „ II       |     | $-2 \cos 2\varphi$ |         | $2 \cos 2\varphi$ |       |

Pe figura 257 s'a trasat în linii întrerupte funcția  $f = \cos \varphi$  și primele sale două derivate, iar în linii pline aceleași elemente ale funcției  $f_1 = \cos^2 \varphi$ , în condițiile arătate mai sus, pentru a se vedea diferențele.

D-l *Dischinger*, luând:

$$\cos^2 \varphi = 0,85 \cos \varphi + 0,15 \cos 3\varphi,$$

adică numai primii doi termeni din seria *Fourier* — cu aproximație — a ajuns cam la aceleași rezultate.

### 1. Cilindru circular,

Să presupunem că avem o suprafață cilindrică dreaptă, cu axul vertical, bătută de un vânt orizontal.

Vom lua în cazul acesta axa  $\bar{\xi}$  paralelă cu axa cilindrului. Elementele geometrice ale acestei suprafețe sunt:

$$1/r_x = 1/r_y = 1/r_{xz} = 1/r_{zx} = 0, \quad r_z = r_c = r.$$

Dacă notăm:

$$p_y = pf,$$

atunci ecuațiile (11) se transformă în:

$$\partial N_x / \partial x + \partial T_y / \partial z = 0, \quad N_z / r + pf = 0, \quad \partial N_z / \partial z + \partial T_y / \partial x = 0,$$

două ecuații diferențiale independente.

Din a doua ecuație scoatem:

$$N_z = -prf.$$

Dacă derivăm pe  $N_z$  în raport cu  $z$  și ținem seamă că  $dz = rd\varphi$ , din ultima ecuație deducem:

$$T_y = px \, df/d\varphi$$

Constanta de integrare este nulă pentru că pentru  $x = 0$ , trebuie să avem  $T_y \equiv 0$ .

Această valoare dusă în prima ecuație, ne dă:

$$N_x = -\frac{1}{2} (px^2/r) \, d^2f/d\varphi^2,$$

constantă de integrare fiind de asemenea nulă, pentru că pentru  $x = 0$ , avem de asemenea  $N_x \equiv 0$ .

Să ne ocupăm de câteva cazuri de încărcări.

1°. Să presupunem partea din stânga bătută de vânt; iar pe partea opusă  $p_y = 0$ . Pe această parte vom avea peste tot:

$$N_z = T_y = N_x = 0.$$

Aceste valori trebuie să coincidă cu cele de pe partea stângă pentru  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ . Nu se poate aceasta, deci echilibru nu poate exista. Pentru ca să existe trebuie să intervină și ecuațiile de momente. Deci, cilindrul dat nu este o suprafață de echilibru a acestor încărcări.

2°. Să presupunem că partea opusă este supusă la sucțiune și că legea de variație a lui  $p_y$  este:

$$p_y = p f = p \cos \varphi$$

In acest caz, se găsește:

$$N_z = -pr \cos \varphi, \quad T_y = -px \sin \varphi, \quad N_x = \frac{1}{2} p x^2 \cos \varphi / r,$$

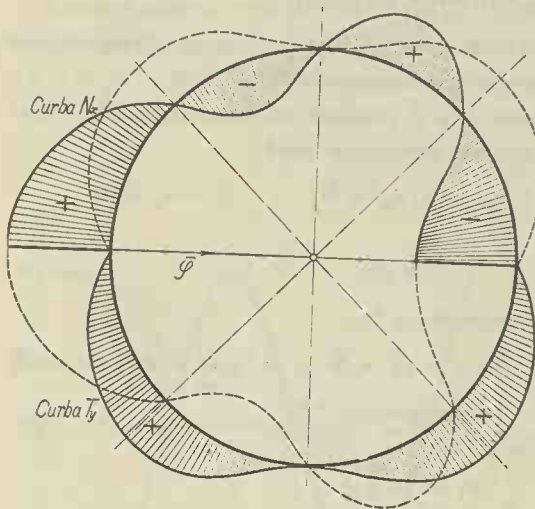


Figura 528

Se vede imediat că pentru  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ , avem aceleași valori pentru toate cantitățile.

Așa dar, suprafața cilindrică este o suprafață de echilibru pentru acest fel de încărcări.

Valorile maxime în secțiunea  $x$ , sunt:

$$N_z = -pr,$$

$$T_y = -px,$$

$$N_x = \frac{1}{2} p x^2 / r.$$

3°. Să presupunem acum cilindrul supus la încărcarea antisimetrică dată de:

$$p_y = p f = p \cos^2 \varphi.$$

In acest caz, pe diversele intervale, avem:

| Intervalul | 0 | $\pi/4$                  | $\pi/2$                              | $3\pi/4$                  | $\pi$ |
|------------|---|--------------------------|--------------------------------------|---------------------------|-------|
| $N_z$      |   | $-pr \cos^2 \varphi$     |                                      | $pr \cos^2 \varphi$       |       |
| $T_y$      |   | $-px \sin 2\varphi$      | $-px \sin^2 2\varphi$                | $px \sin 2\varphi$        |       |
| $N_x$      |   | $px^2 \cos 2\varphi / r$ | $\frac{1}{2} px^2 \sin 4\varphi / r$ | $-px^2 \cos 2\varphi / r$ |       |

Variația lui  $T_y$  și  $N_x$  este arătată pe figura 528, pe care se vede că pentru  $N_x$  există trei axe neutre.

Dacă se compară aceste rezultate cu acelea din cazul precedent se vede că  $T_y$  are aceeași valoare maximă, însă altă distribuție,

iar  $N_x$  pe lângă altă distribuție are și valoarea maximă dublă. Prin urmare, în acest caz, deși valorile numerice ale lui  $p_y$  sunt mai mici, totuși din cauza legii de distribuție a lor rezultă eforturi mai mari în peretele cilindrului.

Mai rezultă că suprafața mediană a cilindrului este o suprafață de echilibru a încărcărilor antisimetrice  $p_y = p \cos^2 \varphi$ .

## 2. Bolți Zeiss-Dywidag.

Sunt bolți cu pereți subțiri ale căror suprafețe mediane sunt în genere niște cilindri cu axa orizontală.

Secțiunea transversală este o curbă definită prin raza de curbură  $r_z$ .

Elementele geometrice ale acestei suprafețe sunt:

$$1/r_x = 1/r_y = 1/r_{xz} = 1/r_{zx} = 0, \quad dz = r_z d\varphi$$

În privința încărcărilor, luăm cazul curent întâlnit în practică și anume *al sarcinilor provenite din greutatea proprie, presupunând grosimea plăcii constantă și a unei încărcări uniform distribuită pe unitatea de suprafață orizontală.*

În acest caz, avem  $p_x = 0$  și ecuațiile (11), dacă notăm:

$$T = \partial N_z / \partial z + p_z$$

se reduc la:

$$\partial N_x / \partial x + \partial T_y / \partial z = 0, \quad N_z = -p_y r_z, \quad T + \partial T_y / \partial x = 0.$$

În cazul încărcărilor noastre,  $p_y$  și  $p_z$  sunt funcțiuni numai de  $z$  și atunci rezultă că  $N_z$  și  $T$  sunt de asemenea funcțiuni numai de  $z$ .

În aceste condițiuni, dacă integrăm ultima ecuație în raport cu  $x$  și dacă luăm originea absciselor în  $x_0 = 0$ , avem:

$$T_y = -xT + f_1(z),$$

în care  $f_1(z)$  este o funcție de integrare.

Dacă derivata lui  $T_y$  o introducem în prima ecuație diferențială și integrăm iarăși în raport cu  $x$  în aceleași condițiuni, avem:

$$N_x = \frac{1}{2} x^2 \partial T / \partial z - x \partial f_1(z) / \partial z + f_2(z),$$

în care  $f_2(z)$  este o nouă funcțiune de integrare.

Funcțiunile  $f_1$  și  $f_2$  le vom determina ținând seama de sistemul de rezemare.

Rezemarea, înțelegem că se face totdeauna pe toată întinderea secțiunii transversale.

Vom da două exemple de modul cum se determină aceste două funcțiuni.



1°. Să presupunem că avem o boltă incastrată la o extremitate și liberă la cealaltă. În capătul liber, unde luăm originea lui  $x$ , avem  $T_y \equiv 0$ . Rezultă, în acest caz,  $f_1(z) = 0$  și deci și  $\partial f_1(z)/\partial z = 0$ . Tot în capătul liber avem:  $N_x \equiv 0$ , care ne dă și  $f_2(z) = 0$ .

Așa dar, în acest caz, avem:

$$T_y = -xT \quad , \quad N_x = \frac{1}{2} x^2 \partial T / \partial z.$$

2°. Să presupunem că avem o boltă simplu rezemată la extremitățile sale. Luăm originea absciselor  $x$  în unul din cele două reazime care se găsesc între ele la distanța  $l$ . În acest caz, pentru acel reazim avem  $x_0 = 0$ .

Bolta fiind încărcată peste tot, din motive de simetrie, trebuie ca la mijlocul deschiderii să avem  $T_y \equiv 0$ , oricare ar fi valoarea lui  $z$ . De aci deducem:

$$\frac{1}{2} l T = f_1(z) \quad , \quad \frac{1}{2} l \partial T / \partial z = \partial f_1(z) / \partial z$$

cu ajutorul cărora găsim:

$$T_y = (\frac{1}{2} l - x) T.$$

Dacă aceste valori le introducem în expresia lui  $N_x$  și dacă punem condiția ca pentru  $x = 0$  și  $x = l$ , să avem  $N_x \equiv 0$ , oricare ar fi valoarea lui  $z$ , găsim  $f_2(z) = 0$  și deci:

$$N_x = -\frac{1}{2} x(l-x) \partial T / \partial z.$$

Procedând astfel și pentru alte sisteme de rezemare, găsim că cei doi coeficienți cari multiplică pe  $T$  și  $\partial T / \partial z$  sunt forța tăietoare și momentul încovoietor (acesta cu semn schimbat), ce se produc într'o grindă dreaptă care are același sistem de rezemare ca și boltă dată și care este încărcată cu o sarcină uniform distribuită de-a-lungul ei, egală cu  $p = 1$ .

Dacă notăm acești coeficienți respectiv cu  $T_1$  și  $M_1$ , atunci avem:

$$T_y = T_1 T \quad , \quad N_x = -M_1 \partial T / \partial z.$$

Vom face câteva aplicațiuni.

#### a) Boltă semicirculară simplu rezemată la capetele sale.

Suprafața mediană fiind un cilindru circular, avem  $r_z = r$ .

1°. Ne ocupăm mai întâi de greutatea proprie. Avem:

$$p_y = p \sin \varphi \quad , \quad p_z = -p \cos \varphi,$$

$$N_z = -pr \sin \varphi \quad , \quad T = -2p \cos \varphi \quad , \quad \partial T / \partial z = 2p \sin \varphi / r$$

$$T_1 = \frac{1}{2} l - x \quad , \quad M_1 = \frac{1}{2} x(l-x)$$

și deci:

$$T_y = p(2x - l) \cos \varphi \quad , \quad N_x = -p x(l-x) \sin \varphi / r.$$

Pentru  $\varphi = 0$  și  $\varphi = \pi$ , avem:

$$N_z = 0, \quad N_x = 0, \quad T_y = p(2x - l).$$

$N_z$  fiind nul, marginea bolții n'are nevoie să fie sprijinită.

Lunecarea produsă de  $T_y$ , se ia de o grindă suplimentară pusă la marginea inferioară și în care se desvoltă tensiunea:

$$N = - \int T_y dx = p x (l - x),$$

a cărei valoare maximă,  $N = \frac{1}{4}pl^2$ , are loc la mijlocul deschiderii.

Având valorile lui  $N_x$ ,  $N_z$  și  $T_y$  în fiecare punct al bolții, putem, după normele cunoscute, să determinăm direcțiile principale a rezistențelor în fiecare punct.

Se vede ușor, că pentru  $\varphi = 0$  și  $\varphi = \pi$ , direcțiile principale fac cu generatoarea cilindrului unghiuri egale cu  $\frac{1}{4}\pi$ , iar pentru  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  ele coincid chiar cu direcția generatoarei și a directoarei.

Așa dar, când facem bolta din beton armat, avem numaidecât direcțiile după care trebuie să dirijăm în fiecare punct fierăria întinsă.

În cazul când n'am avea un semicerc complet, ci un arc cuprins între  $\varphi_0$  și  $\pi - \varphi_0$ , atunci la marginea plăcii avem:

$$N_z = - pr \sin \varphi_0$$

și deci va trebui să punem un reazim care să ia această compresiune.

2°. Să presupunem acum bolta încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe unitatea de suprafață orizontală, cum ar fi de exemplu greutatea zăpezii.

Urmăm exact calea de mai sus. Avem:

$$\begin{aligned} p_y &= p \sin^2 \varphi, & p_z &= -\frac{1}{2}p \sin 2\varphi, \\ N_z &= -pr \sin^2 \varphi, & T &= -\frac{3}{2}p \sin 2\varphi, \\ \partial T / \partial z &= -3p \cos 2\varphi / r \end{aligned}$$

care ne dă:

$$T_y = \frac{3}{4}p(2x - l) \sin 2\varphi, \quad N_x = \frac{3}{2}p x (l - x) \cos 2\varphi / r$$

Pentru  $\varphi = 0$  și  $\varphi = \pi$ , avem:

$$N_z = 0, \quad T_y = 0, \quad N_x = \frac{3}{2}p x (l - x) / r,$$

deci nu mai avem nevoie să punem grinda suplimentară care să ia lunecările provocate de  $T_y$ .

Se mai vede că pentru  $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ , avem o axă neutră pentru  $N_x$ , unde  $T_y$  este maxim.

În cazul când bolta este făcută din beton armat, trebuie să determinăm direcțiile principale cari se vede că diferă complet de cele din cazul precedent.

b) Bolți semieliptice.

Au avantajul asupra celor precedente, că necesită o înălțime de construcție mult mai mică.

Vom presupune și aci că sunt simplu rezemate la capete (fig. 529).

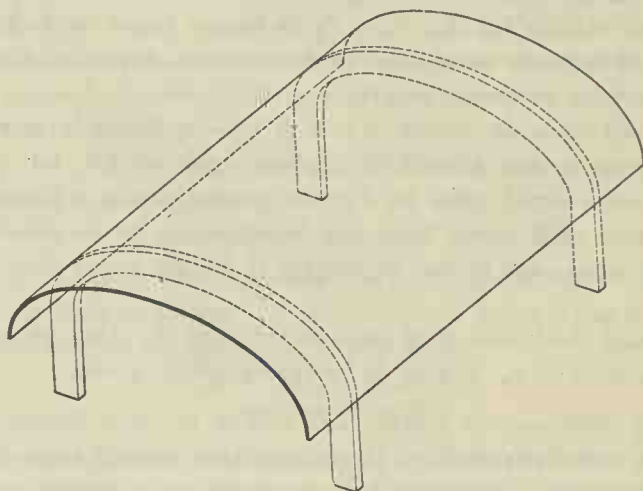


Figura 529

Elementele geometrice ale suprafeței mediane sunt aceleași ca în cazul precedent cu singura deosebire că:

$$r_z = r_2^3/ab \quad , \quad dz = r_2 d\psi,$$

în care  $r_2$  s'a văzut că are valoarea:

$$r_2^2 = a^2(1 - \varepsilon^2 \cos^2\psi).$$

1°. Să ne ocupăm mai întâi de greutatea proprie.

Avem:

$$p_y = pa \sin\psi/r_2 \quad , \quad p_z = -pb \cos\psi/r_2,$$

$$N_z = -pr_2^2 \sin\psi/b$$

$$T = -p(3r_2^2 - b^2) \cos\psi/br_2,$$

$$\partial T/\partial z = p(6 - 3a^2/r_2^2 - a^2b^2/r_2^4) \sin\psi/b,$$

valori cari le introducem în expresiile lui  $T_y$  și  $N_x$ .

La creștet avem:

$$N_z = -p a^2/b, \quad T_y = 0, \quad N_x = -\frac{1}{2} p x (l-x) (3 - b^2/a^2)/b,$$

iar la bază:

$$N_z = N_x = 0, \quad T_y = p (2x - l).$$

Grinda suplimentară care ia lunecarea longitudinală  $T_y$ , se dimensionează la fel ca în cazul precedent.

Se mai vede că atunci când  $a^2 > 1,5 b^2$ , vom avea pentru  $N_x$  o axă neutră acolo unde:

$$6 - 3 a^2/r_2^2 - a^2 b^2/r_2^4 = 0 \quad \therefore \quad r_2^2 = \frac{1}{3} a^2 (1 + \sqrt{1 + 8 b^2/3 a^2}).$$

În acest caz, pentru valori mai mici decât unghiul  $\psi$  ce corespunde acestor egalități, avem tensiuni, iar pentru valori mai mari compresiuni.

2°. Să presupunem bolta încărcată cu zăpadă.

Avem:

$$p_y = p a^2 \sin^2 \psi / r_2^2, \quad p_z = -\frac{1}{2} p a b \sin 2\psi / r_2^2,$$

$$N_z = -p a r_2 \sin^2 \psi / b,$$

$$T = -\frac{3}{2} p a \sin 2\psi / b, \quad \partial T / \partial z = -3 p a \cos 2\psi / b r_2,$$

valori pe cari le ducem în expresiile lui  $T_y$  și  $N_x$ .

La creștet, pentru  $\psi = \frac{1}{2} \pi$ , avem:

$$N_z = -p a^2/b, \quad T_y = 0, \quad N_x = -\frac{3}{2} p x (l-x)/b,$$

iar la bază, pentru  $\psi = 0$ :

$$N_z = T_y = 0, \quad N_x = \frac{3}{2} p x (l-x) a/b^2.$$

Pentru acest sistem de încărcări, avem, pentru  $N_x$ , o axă neutră la  $\psi = \frac{1}{4} \pi$ .

Unghiul  $\varphi_1$  al razei vectoriale  $r_1$ , ce corespunde acestei valori a lui  $\psi$ , este dat de relația:

$$\cos \varphi_1 = a / \sqrt{a^2 + b^2}$$

#### Observațiuni.

1°. Calculul este identic în cazul când secția transversală a suprafeței mediane ar fi o parabolă, un lăntișor, etc. Bine înțeles, că, pentru fiecare caz în parte, trebuie găsite elementele geometrice ale suprafeței respective.

Avantajul acestor bolți constă într'aceea că necesită grosimi foarte mici.

Incercările făcute, arată o concordanță perfectă între calcul și rezultatele încercărilor.

Problema interesantă ce urmează a se rezolva este de a se găsi suprafața mediană a unei bolți *Zeiss-Dywidag*, pentru un sistem de încărcări dat, altul decât greutatea proprie și zăpada.

2°. Reazimile acestor bolți constau din părăți sau grinzii rigide.

În cazul grinzilor, ele se calculează ca o grindă curbă simplu rezemată la extremitățile ei, supusă la reacțiuni și la eforturile  $T_y$  aplicate pe spinarea ei. Acest calcul se face după norma dată la grinzile curbe, cu deosebirea că  $T_y$  este dirijat după tangenta la conturul grinzii.

În acest mod, nu avem nici împingeri orizontale în reazime și deci pentru încărcări verticale putem sprijini toată construcția numai pe stâlpi verticali.

**Aplicația Nr. 160.** O boltă de beton armat sistem *Zeiss-Dywidag*, are o lungime  $l = 24$  m și e simplu rezemată la extremități.

Secția transversală a suprafeței mediane este o elipsă cu  $a = 6$  m,  $b = 3,6$  m și cu o grosime de perete de  $h = 5$  cm.

Să se găsească rezistențele ce se desvoltă în boltă sub acțiunea greutății proprii și a unei încărcări cu zăpadă de  $100$  kg/m<sup>2</sup>.

1° *Să ne ocupăm de greutatea proprie.* S'a văzut, cu ocazia aplicației Nr. 159 că greutatea în kg/m<sup>2</sup> de suprafață mediană este  $p = 24 h$ , în care  $h$  este grosimea peretelui, exprimată în cm.

S'a văzut, tot acolo, că dacă în formulele care ne dau valorile lui  $N_x$ , ... punem  $p = 0,24$ , obținem chiar rezistențele în kg/cm<sup>2</sup>.

Ne ocupăm numai de rezistențele maxime.

La creștet avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_z &= -p a^2/b = -0,24 \cdot 6^2/3,6 = -2,4 \text{ kg/cm}^2, & \mathcal{C}_y &= 0 \\ \mathcal{X}_x &= -\frac{1}{8} p l^2 (3 - b^2/a^2)/b = -\frac{1}{8} \cdot 0,24 \cdot 24^2 (3 - 3,6^2/6^2)/3,6 = -12,67 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

La bază:

$$\mathcal{X}_z = \mathcal{X}_x = 0, \quad \mathcal{C}_y = -p l = -0,24 \cdot 24 = -5,76 \text{ kg/cm}^2.$$

Rezistențele  $\mathcal{X}_x$  sunt nule pentru  $\varphi_1 = \psi = 0$  și acolo unde avem:

$$r_2^2 = \frac{1}{4} a^2 (1 + \sqrt{1 + 8 b^2/3 a^2}) = 4,65 \text{ m}^2; \quad r_1^2 = 5,23 \text{ m}^2$$

căreia corespunde  $\varphi_1 \simeq 25^\circ$ .

Așa dar, rezistențele  $\mathcal{X}_x$  sunt nule pentru  $\varphi_1 = 0$  și  $\varphi_1 = 25^\circ$ , fiind pozitive în acest interval și negative în intervalul  $25^\circ - \frac{1}{2} \pi$ . Pentru cealaltă jumătate de elipsă, avem simetrie.

Tensiunea maximă în grinda suplimentară, care ia lunecarea longitudinală este:

$$N = \frac{1}{4} p l^2 = \frac{1}{4} \cdot 24 \cdot 5 \cdot 24^2 = 17280 \text{ kg}.$$

Dacă luăm în armătura de fier o rezistență admisibilă numai de  $600$  kg/cm<sup>2</sup>, avem nevoie de  $6 \text{ } \varnothing 25$  mm.

2° Să ne ocupăm de zăpadă. Dacă punem în formule  $p = 100 \text{ kg/m}^2$ , obținem pentru  $N$  valori exprimate în  $\text{kg/m}$ . Ca să avem direct rezistențele în  $\text{kg/cm}^2$  împărțim totul cu  $100 h = 500$ . Așa dar, în formule punem în loc de  $p$  valoarea  $100/500 = 0,2$ .

La creștet avem:

$$\mathfrak{X}_z = -0,2 \cdot 6^2/3,6 = -2 \text{ kg/cm}^2, \quad \mathfrak{T}_y = 0,$$

$$\mathfrak{X}_x = -\frac{3}{2} \cdot 0,2 \cdot 12^2/3,6 = -12 \text{ kg/cm}^2.$$

La bază:

$$\mathfrak{X}_z = \mathfrak{T}_y = 0, \quad \mathfrak{X}_x = \frac{3}{2} \cdot 0,2 \cdot 12^2 \cdot 6/3,6^2 = +20 \text{ kg/cm}^2.$$

Așa dar, pentru  $\mathfrak{X}_x$  este o axă neutră acolo unde  $\cos \varphi_1 = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ , pentru care corespunde  $\varphi_1 \simeq 31^\circ$ .

Tensiunea  $\mathfrak{X}_x$ , dacă admitem în armatura de fier o rezistență numai de  $600 \text{ kg/cm}^2$ , necesită o secțiune de fier:

$$\Omega_f = 20 \cdot 5 \cdot 100/600 = 16,67 \text{ cm}^2/\text{m} = 10 \text{ } \varnothing \text{ } 15 \text{ mm/m}.$$

3° Pentru a avea rezistențele din ambele solicitări, vom suprapune efectele calculând în fiecare punct rezistențele.

În creștetul cupolei, de exemplu, vom avea:

$$\mathfrak{X}_x = -12,67 - 12 = -24,67 \text{ kg/cm}^2.$$

Dacă în regiunea comprimată adoptăm un procent de armare de 2%, atunci rezistența în beton este:

$$\mathfrak{X}_{rb} = 24,67/(1 + 0,02 \cdot 15) \simeq 19 \text{ kg/cm}^2.$$

Evident că distribuția fierăriei, care trebuie să ia toate tensiunile din boltă se studiază după normele cunoscute.

Avantajul acestor bolti este evident. Din exemplul de mai sus se vede că putem acoperi o suprafață de  $12 \times 24 = 288 \text{ m}^2$ , numai cu o placă groasă de 5 cm, fără alte reazime decât cele din cele patru colțuri.

Convin în special pentru acoperișuri.



## XXXII. PLĂCI PLANE SUBȚIRI.

Se întâlnește rar în construcțiuni. Au mai mult un interes teoretic după cum se va vedea mai târziu.

Vom considera plăcile solicitate numai la *încărcări uniforme distribuite normale pe planul plăcii*.

Se vede dela început, că eforturile cari se dezvoltă în asemenea plăci, dacă nu ținem seamă de deformația lor, sunt infinite, pentru că razele  $r_x, r_z, r_y, \dots$  sunt infinite.

Un calcul, nu-l putem face decât în starea deformată a plăcii, când suprafața plană se transformă într'o suprafață de echilibru a încărcărilor și când apar razele  $r$ .

### 1. Deformația plăcilor plane subțiri.

Deformațiunile specifice  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$  și  $\gamma_y$ .

Raportăm placa la sistemul de axe rectangular  $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta} = +1$ , care are axele  $\bar{\xi}$  și  $\bar{\zeta}$  cuprinse în planul plăcii, iar  $\bar{\eta}$  normală pe placă și dirijată după direcția pozitivă a încărcărilor  $p_y$ .

Să presupunem că un punct oarecare  $O$  al plăcii, a parcurs în direcția celor trei axe de coordonate drumurile  $u, v, w$ .

Punctul  $A$  (fig. 530) de pe axa  $\bar{\xi}$ , infinit vecin lui  $O$ , va parcurge drumurile:

$$\bar{\xi}dx \cdot \partial u / \partial x, \quad \bar{\eta}dx \cdot \partial v / \partial x, \quad \bar{\zeta}dx \cdot \partial w / \partial x.$$

Vectorul  $\overline{OA} = \bar{\xi}dx$ , prin deformație, se transformă în  $\overline{OA}_1$ , a cărui expresie este:

$$(1) \quad \overline{OA}_1 = [\bar{\xi}(1 + \partial u / \partial x) + \bar{\eta} \partial v / \partial x + \bar{\zeta} \partial w / \partial x] dx.$$

Având această expresie, avem tot ce ne trebuie.

Putem găsi acum valoarea lui  $\varepsilon_x$ , adică lungirea specifică a lui  $OA$ . Se știe că avem:

$$\varepsilon_x = (OA_1 - OA)/OA.$$

Partea scalară a lui  $OA$  este  $dx$ . Pentru ca să găsim partea scalară a lui  $\overline{OA}_1$ , n'avem decât să ridicăm  $\overline{OA}_1$  la pătrat și să extragem apoi rădăcina pătrată.

Dacă facem aceasta, găsim:

$$(2) \quad \varepsilon_x = \partial u/\partial x + \frac{1}{2} (\partial u/\partial x)^2 + \frac{1}{2} (\partial v/\partial x)^2 + \frac{1}{2} (\partial w/\partial x)^2,$$

neglijând la extragerea rădăcinii pătrate infiniții mici de ordin superior ordinului doi.

Dacă procedăm absolut la fel și cu  $\overline{OC}$ , găsim:

$$(1) \quad \overline{OC}_1 = [\bar{\zeta}(1 + \partial w/\partial z) + \bar{\eta}\partial v/\partial z + \bar{\xi}\partial u/\partial z]dx,$$

din care scoatem:

$$(2) \quad \varepsilon_z = \partial w/\partial z + \frac{1}{2} (\partial u/\partial z)^2 + \frac{1}{2} (\partial v/\partial z)^2 + \frac{1}{2} (\partial w/\partial z)^2.$$

Dacă neglijăm infiniții mici de ordinul al doilea, obținem:

$$(2_1) \quad \varepsilon_x = \partial u/\partial x, \\ \varepsilon_z = \partial w/\partial z.$$

Pentru plăci cu deformațiuni mari, termenii  $\partial v/\partial x$  și  $\partial v/\partial z$  au valori relativ importante și atunci pentru aceste plăci se ia:

$$(2_2) \quad \varepsilon_x = \partial u/\partial x + \frac{1}{2} (\partial v/\partial x)^2, \quad \varepsilon_z = \partial w/\partial z + \frac{1}{2} (\partial v/\partial z)^2$$

Putem găsi acum direcția  $\bar{\xi}_1$  a vectorului  $\overline{OA}_1$ . Pentru aceasta n'avem decât să-l împărțim cu partea lui scalară care este evident  $(1 + \varepsilon_x)dx$ . Dacă facem această împărțire și neglijăm infiniții mici de ordin superior, găsim:

$$(3) \quad \bar{\xi}_1 = \bar{\xi} + \bar{\eta} \partial v/\partial x + \bar{\zeta} \partial v/\partial x.$$

În mod cu totul analog găsim și:

$$(4) \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{\zeta} + \bar{\eta} \partial v/\partial z + \bar{\xi} \partial u/\partial z.$$

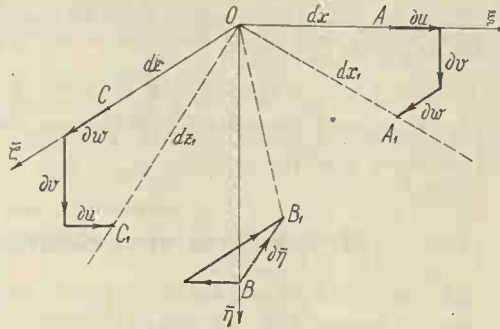


Figura 530

Putem găsi acum și valoarea lui  $\gamma_y$ . Din relația  $\overline{\zeta}\overline{\xi} = \cos \frac{1}{2}\pi$ , axele fiind normale între ele, găsim, că prin deformație, unghiul drept se modifică cu:

$$\partial(\overline{\zeta}\overline{\xi}) = \partial \cos \frac{1}{2}\pi = -\sin \frac{1}{2}\pi \cdot d\varphi = -d\varphi.$$

Ori, cantitatea cu cât se micșorează unghiul drept, este tocmai  $\gamma_y$ , deci:

$$\partial(\overline{\zeta}\overline{\xi}) = \gamma_y.$$

Prin urmare, dacă facem produsul scalar  $\overline{\zeta}_1\overline{\xi}_1$  și din el scădem  $\overline{\zeta}\overline{\xi}$ , adică zero, atunci găsim  $\partial(\overline{\zeta}\overline{\xi})$ .

Făcând această operație, găsim:

$$(4) \quad \gamma_y = \partial u / \partial z + \partial v / \partial x + (\partial v / \partial x) (\partial v / \partial z)$$

Pentru ca să găsim direcțiunea normalei la planul  $OA_1C_1$ , n'avem decât să facem produsul vectorial  $\overline{\zeta}_1\overline{\xi}_1$ . Partea scalară a acestui vector este sinusul unghiului ce fac între ele direcțiile  $\overline{\zeta}_1$  și  $\overline{\xi}_1$ , adică  $\sin(\frac{1}{2}\pi + \gamma)$  care, în cadrul aproximațiilor ce facem în mod curent, este egal cu 1.

Dacă facem acest produs vectorial și neglijăm infiniții mici de ordin superior, găsim:

$$(5) \quad \overline{\eta}_1 = \overline{\eta} - \overline{\xi} \partial v / \partial x - \overline{\zeta} \partial v / \partial z.$$

În rezumat, am găsit direcțiunea axelor după deformație și deformațiile specifice  $\epsilon$  și  $\gamma$ .

## 2. Echilibrul unui element de placă.

Să presupunem că avem o placă dreptunghiulară. Să presupunem că axele  $\overline{\xi}$  și  $\overline{\zeta}$  le luăm paralele cu laturile plăcii, iar  $\overline{\eta}$  dirijată în jos, ca în figura 531.

Să presupunem că prin drepte paralele cu cele două axe, împărțim suprafața plăcii în o serie de dreptunghiuri cu laturile  $dx$  și  $dz$ .

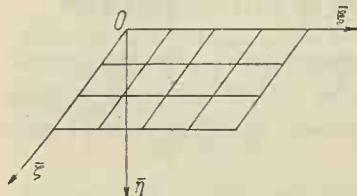


Figura 531

Prin deformația plăcii, aceste drepte se transformă în niște curbe, suprafața însăși a plăcii transformându-se într'o suprafață oarecare.

S'a văzut la deformația acestor plăci, cari sunt direcțiile ce le iau direcțiile  $\overline{\xi}$  și  $\overline{\zeta}$  într'un punct oarecare și am determinat și direcția normalei într'un punct oarecare al suprafeței.

Să considerăm un dreptunghi oarecare. Prin deformare el se transformă într'un patrulater curbiliniu, oarecare (fig. 532).

Să scriem ecuația de echilibru a acestui element de suprafață.

Dacă se urmează exact norma indicată la echilibrul plăcilor subțiri, se găsește imediat:

$$(6) \quad \begin{aligned} dx \cdot \partial [dz_1(\bar{\xi}_1 N_x + \bar{\zeta}_1 T_y)] / \partial x + \\ dz \cdot \partial [dx_1(\bar{\xi}_1 N_z + \bar{\xi}_1 T_y)] / \partial z + \bar{p} dx_1 dz_1 = 0. \end{aligned}$$

Aceasta-i ecuația cea mai generală a plăcilor subțiri plane, supuse la sarcini normale pe planul lor.

Ca să facem calculele indicate de această formulă va trebui să observăm următoarele:

1°. Cu aproximația unor infiniții mici de ordin superior, avem:

$$dx dz = dx_1 dz_1 = dxdz_1 = dx_1 dz_1 = d\Omega.$$

2°. Valorile lui  $\partial \bar{\xi}_1 / \partial x$ ,  $\partial \bar{\xi}_1 / \partial z$ , ... le scoatem din formulele (3).

3°. Din relația evidentă  $dx_1 = (1 + \varepsilon_x) dx$ , scoatem  $\partial dx_1 / \partial z = dx \cdot \partial \varepsilon_x / \partial z$ , și prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} dz \cdot \partial dx_1 / \partial z &= d\Omega [\partial^2 u / \partial x \partial z + (\partial v / \partial x) \partial^2 v / \partial x \partial z], \\ dx \cdot \partial dz_1 / \partial x &= d\Omega [\partial^2 w / \partial x \partial z + (\partial v / \partial z) \partial^2 v / \partial x \partial z]. \end{aligned}$$

4°. Sarcina  $\bar{p}$ , am spus că e normală pe planul plăcii și deci, avem:

$$\bar{p} = \bar{\eta} p_y = \bar{\eta} p \quad , \quad p_x = 0 \quad , \quad p_z = 0.$$

În aceste condițiuni, integrarea ecuației (6) este foarte grea. Putem ajunge la o ecuație mai simplă, dacă ținem seamă că, în cazul deformațiilor mici, putem neglija o serie de termeni.

1°. În acest caz, termenii  $\partial u / \partial z$  și  $\partial w / \partial x$  sunt foarte mici și deci luăm:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial z &= 0 \quad , \quad \partial w / \partial x = 0, \\ \partial^2 u / \partial z^2 &= 0 \quad , \quad \partial^2 u / \partial x \partial z = 0, \\ \partial^2 w / \partial x^2 &= 0 \quad , \quad \partial^2 w / \partial x \partial z = 0. \end{aligned}$$

2°. Se neglijează de asemenea și valoarea tangentelor și deci se ia:

$$\partial v / \partial x = 0 \quad , \quad \partial v / \partial z = 0.$$

Dacă ținem seamă de toate aceste considerații și aproximații și dacă facem calculele indicate de formula (6) pe care o multiplicăm apoi scalar succesiv cu  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\zeta}$ , obținem:

$$(7) \quad \begin{aligned} N_x \partial^2 v / \partial x^2 + 2 T_y \partial^2 v / \partial x \partial z + N_z \partial^2 v / \partial z^2 + p &= 0, \\ \partial N_x / \partial x + \partial T_y / \partial z &= 0, \quad \partial N_z / \partial z + \partial T_y / \partial x = 0. \end{aligned}$$

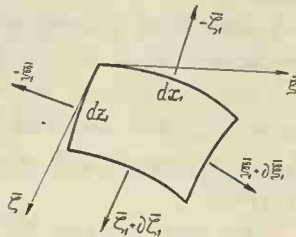


Figura 532

Dacă grosimea plăcii este  $h$ , atunci avem:

$$N_x = \mathfrak{X}_x \cdot h \cdot l \quad , \quad N_z = \mathfrak{X}_z \cdot h \cdot l \quad , \quad T_y = \mathfrak{T}_y \cdot h \cdot l.$$

Avem de asemenea după ecuația (5) dela pag. 300:

$$\mathfrak{X}_x = E (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_z)/(1 - \mu^2) \quad , \quad \mathfrak{X}_z = E (\varepsilon_z + \mu\varepsilon_x)/(1 - \mu^2),$$

$$\mathfrak{T}_y = G\gamma_y.$$

Dacă ținem seamă de aproximațiile ce am făcut pentru a deduce din ecuația exactă (6), ecuația aproximativă (7), rezultă că am făcut implicit și aproximația  $\gamma_y = 0$ . Așa fiind, pe toată suprafața, avem  $T_y \equiv 0$  și deci  $N_x = N_z = N$ .

În aceste condițiuni, dacă notăm:

$$(8) \quad \nabla v = \partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial z^2,$$

ecuațiile (7) se reduc la:

$$(9) \quad \nabla v + p/N = 0.$$

Să presupunem că avem o plasă plană formată din două șiruri de fire normale între ele și înodate la intersecția lor.

Dacă fiecare nod se încarcă cu aceeași sarcină  $F$  normală pe planul plasei, aceasta se va deforma. Prin deformare, firele se vor lungi și deci în ele se vor desvolta niște tensiuni  $N$ . Este evident că plasa fiind formată din fire, prin deformare, nu se vor desvolta rezistențe  $\mathfrak{T}_y$  și deci nici eforturi  $T_y$ .

Să presupunem firele din ambele șiruri infinit apropiate. În acest caz, sub acțiunea sarcinilor  $pd\Omega$ , toate nodurile se vor afla pe suprafața dată de ecuația (9) care îndeplinește tocmai condiția  $T_y \equiv 0$ .

Așa dar, ecuația (9) este ecuația suprafeței deformate a unui plan subțire care se numește și *membrană*, sub acțiunea sarcinei  $p$ , în cazul când nu se desvoltă eforturi  $T_y$ .

### 3. Analogia între suprafața $\nabla v$ și curbele funiculare.

Să presupunem că, în plan, considerăm rețeaua de noduri determinate prin intersecția a o serie de drepte paralele cu axa  $Ox$ , așezate între ele la distanța  $\lambda_z$  și altă serie, paralelă cu  $Oz$ , la distanța  $\lambda_x$ .

Ele determină nodurile  $o_0, h_0, m_0$  etc. (fig. 533). Prin deformația planului, ele parcurg drumurile  $o_0o, h_0h, \dots$  și ocupă o nouă poziție, așa cum se arată în figură.

La limită, când punctele  $o, h, m, \dots$  sunt infinit apropiate, dreapta  $o_0h_0m_0$  din plan, se transformă în curba  $ohm$  cuprinsă pe suprafața deformată.

Să considerăm în special nodul  $i$ . Să presupunem că tangenta la curba  $hij$  este  $\bar{\theta}$  și că tensiunea pe unitatea de lungime de curbă  $kil$  este  $N_x$ . Vom presupune analog că tangenta în  $i$  la curba  $kil$  este  $\bar{\vartheta}$  și în aceleași condițiuni, după  $kil$ , avem tensiunea  $N_z$  pe unitatea de curbă  $hij$ .

Intocmai ca la curbele funiculare, să scriem echilibrul nodului  $i$ .

avem:

$$(9) \quad \bar{\eta} p dx dz + dz \partial (N_x \bar{\theta}) + dx \partial (N_z \bar{\vartheta}) = 0.$$

Dacă această ecuație o multiplicăm scalar respectiv cu  $\bar{\xi}$  și  $\bar{\zeta}$ , obținem:

$$\partial (N_x \bar{\xi} \bar{\theta}) = 0 \quad \partial (N_z \bar{\zeta} \bar{\vartheta}) = 0,$$

care ne dă:

$$(10) \quad N_x \bar{\xi} \bar{\theta} = H_x = ct \quad , \quad N_z \bar{\zeta} \bar{\vartheta} = H_z = ct.$$

Dacă aceeași ecuație o multiplicăm scalar cu  $\bar{\eta}$  și dacă urmărim aceeași cale ca la curbele funiculare, găsim:

$$(11) \quad H_x \partial^2 v / \partial x^2 + H_z \partial^2 v / \partial z^2 + p = 0.$$

În privința semnelor, rămâne valabilă convenția făcută la curbele funiculare. În cazul când  $H_x = H_z = H$ , avem:

$$\nabla v = -p/H,$$

adică, tocmai ecuația (8), cu singura deosebire că aci  $H$  este proiecția lui  $N$ , care, pentru deformațiuni mici, sunt sensibil egale.

Să scriem aceleași ecuații, însă pentru distanțe finite între noduri.

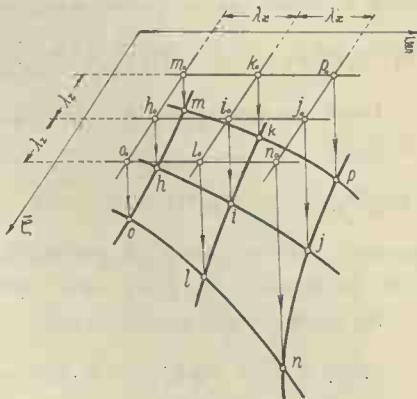


Figura 533



În acest caz, curba  $hij$  se compune din două segmente de drepte  $ih$  și  $ij$ . Același lucru în celălalt sens.

Notăm cu  $N_{ih}$  efortul pe unitatea de lungime în sensul axei  $Oz$ , dirijat după direcțiunea  $\bar{ih}$ . Direcțiunea pozitivă  $\bar{hi}$  o notăm cu  $\bar{\theta}_h$ , iar direcțiunea pozitivă  $\bar{ij}$  cu  $\bar{\theta}_i$ , analog  $\bar{ki}$  cu  $\bar{\theta}_k$  și  $\bar{il}$  cu  $\bar{\theta}_l$ .

În aceste condiții, să scriem din nou ecuația (9). Vom avea, dacă  $p_i$  e sarcina ce revine nodului  $i$ :

$$(9_1) \quad \bar{\eta} p_i \lambda_x \lambda_z + \lambda_z (-N_{ih} \bar{\theta}_h + N_{ij} \bar{\theta}_i) + \lambda_x (-N_{ik} \bar{\theta}_k + N_{il} \bar{\theta}_l) = 0.$$

Dacă această ecuație o multiplicăm scalar respectiv cu  $\bar{\xi}$ , și  $\bar{\zeta}$ , obținem:

$$(10_1) \quad N_{ih} \bar{\theta}_h \bar{\xi} = N_{ij} \bar{\theta}_i \bar{\xi} = H_x = ct, \quad N_{ik} \bar{\theta}_k \bar{\zeta} = N_{il} \bar{\theta}_l \bar{\zeta} = H_z = ct,$$

expresii care ne arată că proiecțiile pe planul  $xOz$ , a celor două serii de eforturi  $N_x$  și  $N_z$ , sunt constante.

Să multiplicăm aceeași ecuație (9<sub>1</sub>), scalar cu  $\bar{\eta}$ . Vom avea:

$$p_i \lambda_x \lambda_z + \lambda_z (-N_{ih} \bar{\theta}_h \bar{\eta} + N_{ij} \bar{\theta}_i \bar{\eta}) + \lambda_x (-N_{ik} \bar{\theta}_k \bar{\eta} + N_{il} \bar{\theta}_l \bar{\eta}) = 0.$$

Primul termen din prima paranteză putem să-l punem sub forma:

$$N_{ih} \bar{\theta}_h \bar{\eta} = N_{ih} \bar{\theta}_h \bar{\xi} \cdot \bar{\theta}_h \bar{\eta} / \bar{\theta}_h \bar{\xi} = H_x \bar{\theta}_h \bar{\eta} / \bar{\theta}_h \bar{\xi}.$$

Însă:

$$\bar{\theta}_h \bar{\eta} / \bar{\theta}_h \bar{\xi} = \operatorname{tg}(\bar{\theta}_h, \bar{\xi}) = (v_i - v_h) / \lambda_x.$$

Făcând aceeași operație și pentru ceilalți termeni, obținem:

$$(11_1) \quad p_i + H_x (v_h - 2v_i + v_j) / \lambda_x^2 + H_z (v_k - 2v_i + v_l) / \lambda_z^2 = 0.$$

Dacă facem o apropiere între ecuațiile (11) și (11<sub>1</sub>) și dacă notăm:

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta v_{ix} &= \frac{1}{2}(v_j - v_h), & \Delta v_{iz} &= -\frac{1}{2}(v_l - v_k), \\ \Delta^2 v_{ix} &= v_h - 2v_i + v_j, & \Delta^2 v_{iz} &= v_k - 2v_i + v_l, \\ \Delta^2 v_{ixz} &= \frac{1}{4}(v_o + v_p - v_m - v_n), \end{aligned}$$

constatăm că:

$$(13) \quad \begin{aligned} \partial v / \partial x &= \lim \Delta v_{ix} / \lambda_x, & \partial v / \partial z &= \lim \Delta v_{iz} / \lambda_z, \\ \partial^2 v / \partial x^2 &= \lim \Delta^2 v_{ix} / \lambda_x^2, & \partial^2 v / \partial z^2 &= \lim \Delta^2 v_{iz} / \lambda_z^2, \\ \partial^2 v / \partial x \partial z &= \lim \Delta^2 v_{ixz} / \lambda_x \lambda_z, \end{aligned}$$

când  $\lambda_x$  și  $\lambda_z$  tind respectiv către  $dx$  și  $dz$ .

Aşa dar, ecuația  $\nabla v$  putem s'o înlocuim cu o ecuație cu diferențe finite.

Intocmai după cum putem construi curbele funiculare cu ajutorul unui poligon funicular, tot așa și aci cu o plasă dată de ecuațiile (11<sub>1</sub>) și (12) putem afla puncte ale suprafeței  $\nabla v$ .

În cazul când  $H_x = H_z = H$ , avem:

$$(14) \quad \Delta^2 v_{ix} / \lambda_x^2 + \Delta^2 v_{iz} / \lambda_z^2 + p_i / H = 0.$$

Dacă  $\lambda_x = \lambda_z = \lambda$ , atunci avem:

$$(15) \quad 4v_i - v_h - v_j - v_k - v_l = p_i \lambda^2 / H,$$

care o aplicăm de atâtea ori, câte noduri avem.

### XXXIII. PLĂCI PLANE GROASE.

#### A) Teoria generală a plăcilor groase.

##### 1. Generalități.

Acesta e cazul curent întâlnit în practică.

Ele rezistă, în genere, prin momentele încovoietoare care se dezvoltă în diversele secțiuni.

La aceste plăci, eforturile  $N_x$ ,  $N_z$  și  $T_y$  sunt nule. Se dezvoltă numai momentele încovoietoare  $M_x$  și  $M_z$ , momentul de răsucire,  $D$ , și forțele tăietoare,  $T_x$  și  $T_z$ .

În aceste condițiuni, ecuațiile (5) dela pag. 727 se reduc la:

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{R}_x &= -\bar{\eta} T_z, & \bar{R}_z &= -\bar{\eta} T_x, \\ \bar{M}_x &= -\bar{\xi} D + \bar{\zeta} M_z, & \bar{M}_z &= \bar{\zeta} D - \bar{\xi} M_x. \end{aligned}$$

Sub acțiunea sarcinilor, placa se deformează oarecum.

Să presupunem că tăiem placa prin plane verticale paralele cu axele  $O_x$  și  $O_z$ . Intersecția lor cu suprafața mediană ne dă două serii de curbe, care au, într'un punct oarecare, săgeata  $v$  și tangentele  $\bar{\xi}_1$  și  $\bar{\zeta}_1$ .

Întru cât nu avem eforturi  $N_x$  și  $N_z$ , vom presupune că deplasările  $u$  și  $w$ , ale suprafeței mediane, precum și derivatele lor, sunt nule.

Dela deformația plăcilor subțiri, în acest caz, avem:

$$\bar{\xi}_1 = \bar{\xi} + \bar{\eta} \partial v / \partial x, \quad \bar{\eta}_1 = \bar{\eta} - \bar{\xi} \partial v / \partial x - \bar{\zeta} \partial v / \partial z, \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{\zeta} + \bar{\eta} \partial v / \partial z.$$

Dacă se face aproximația curent admisă și anume de a neglija valoarea tangentelor vom avea:

$$\bar{\xi}_1 \approx \bar{\xi}, \quad \bar{\eta}_1 \approx \bar{\eta}, \quad \bar{\zeta}_1 \approx \bar{\zeta},$$

și dela studiul liniilor trasate pe o suprafață curbă, se recunoaște că, în acest caz, avem:

$$1/r_{xz} = 1/r_{zx} = 0.$$

Astfel, ecuațiile (17) dela pag. 724 se reduc la:

$$(2) \quad \begin{aligned} \partial \bar{\xi}_1 / \partial x &= \bar{\eta} / r_x, & \partial \bar{\eta}_1 / \partial x &= -\bar{\xi} / r_x - \bar{z} / r_y, & \partial \bar{\zeta}_1 / \partial x &= \bar{\eta} / r_y, \\ \partial \bar{\xi}_1 / \partial z &= \bar{\eta} / r_z, & \partial \bar{\eta}_1 / \partial z &= -\bar{\zeta} / r_z - \bar{\xi} / r_y, & \partial \bar{\zeta}_1 / \partial z &= \bar{\eta} / r_y. \end{aligned}$$

Dacă toate aceste valori le introducem în ecuațiile generale de echilibru (1) și (2) dela pag. 726, obținem:

$$(3) \quad \partial T_x / \partial z + \partial T_z / \partial x = -p,$$

$$(4) \quad T_x / r_z + T_z / r_y = 0, \quad T_z / r_x + T_x / r_y = 0,$$

$$(5) \quad \partial M_x / \partial z + \partial D / \partial x = T_x, \quad \partial M_z / \partial x + \partial D / \partial z = T_z,$$

$$(6) \quad D(1/r_x - 1/r_z) + (M_x - M_z) / r_y = 0.$$

Se vede că ecuațiile (3) și (5) nu depind de deformația plăcii.

Ecuațiile (3)—(6) sunt generale, oricare ar fi deformația plăcii.

Dacă eliminăm pe  $r_y$ , între ecuațiile (4) și pe  $T_x$  și  $T_z$ , între ecuațiile (3) și (5), obținem și:

$$(7) \quad T_x^2 / r_z = T_z^2 / r_x,$$

$$(8) \quad \partial^2 M_x / \partial z^2 + 2 \partial^2 D / \partial x \partial z + \partial^2 M_z / \partial x^2 = -p.$$

Această ultimă ecuație stabilește o legătură statică între momentele  $M_x$ ,  $M_z$  și  $D$  și între încărcarea  $p$ .

Se vede, de asemenea, că ecuațiile (3), (5) și (8) sunt absolut analoge aceloră găsite la grinzile drepte.

La grinzile drepte am avut:

$$\partial^2 M_z / \partial x^2 = -p.$$

Cu alte cuvinte, sarcina  $p$  este echilibrată de momentul  $M_z$  din secțiunea  $x$ .

La plăci, sarcina  $p$  este echilibrată de cele trei momente  $M_x$ ,  $M_z$  și  $D$ , cari se desvoltă într'un punct oarecare al plăcii.

## 2. Relația între solicitările $M_x, \dots$ și deformația plăcii.

Intocmai ca la grinzi, dacă  $v$  este săgeata, atunci avem:

$$(9) \quad u = -y \partial v / \partial x, \quad w = -y \partial v / \partial z,$$

din care deducem:

$$(10) \quad \varepsilon_x = -y \partial^2 v / \partial x^2, \quad \varepsilon_z = -y \partial^2 v / \partial z^2, \quad \gamma_y = -2y \partial^2 v / \partial x \partial z.$$

Dacă observăm că avem:

$$(11) \quad \partial^2 v / \partial x^2 = 1/r_x, \quad \partial^2 v / \partial z^2 = 1/r_z, \quad \partial^2 v / \partial x \partial z = 1/r_y,$$

atunci ecuațiile (10) se scriu:

$$(10) \quad \varepsilon_x = -y/r_x, \quad \varepsilon_z = -y/r_z, \quad \gamma_y = -2y/r_y.$$

Pe baza ecuațiilor (5) de la pag. 300, avem:

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_x &= -Ey(1/r_x + \mu/r_z)/(1 - \mu^2), \\ \mathcal{X}_z &= -Ey(1/r_z + \mu/r_x)/(1 - \mu^2), \\ \mathcal{T}_y &= -2Gy/r_y. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, dacă ținem seamă de ecuațiile (35) ale lui Cauchy (pag. 254) avem:

$$(12) \quad \begin{aligned} \partial \mathcal{T}_x / \partial y &= -\partial \mathcal{X}_x / \partial x - \partial \mathcal{T}_y / \partial z, \\ \partial \mathcal{T}_x / \partial z &= -\partial \mathcal{X}_z / \partial x - \partial \mathcal{T}_y / \partial x. \end{aligned}$$

Dacă integrăm pe toată înălțimea plăcii și ținem seamă de valorile lui  $\mathcal{X}_x$ ,  $\mathcal{X}_z$  și  $\mathcal{T}_y$  din ecuațiile de mai sus, căpătăm:

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_x &= -ES\partial(1/r_x + 1/r_z)/\partial z (1 - \mu^2) \\ \mathcal{T}_z &= -ES\partial(1/r_x + 1/r_z)/\partial x (1 - \mu^2) \end{aligned}$$

în care am notat:

$$S = \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} y^2,$$

momentul static al părții care tinde să lunece.

În rezumat, avem exprimate toate rezistențele în funcțiune de deformațiunile plăcii.

Cum între rezistențe și solicitări avem ecuațiile de legătură (5) dela pag. 727 și dacă facem integrarea pe întreaga înălțime a plăcii, găsim:

$$(13) \quad \begin{aligned} M_x &= -EI_c(1/r_x + \mu/r_z) \\ M_z &= -EI_c(1/r_x + \mu/r_z) \\ D &= -2GI/r_y \\ T_x &= -EI_c\partial(1/r_x + 1/r_z)/\partial z \\ T_z &= -EI_c\partial(1/r_x + 1/r_z)/\partial x \end{aligned}$$

în care am notat:

$$I = \frac{1}{12} h^3, \quad I_c = \frac{1}{12} h^3/(1 - \mu^2),$$

momente de inerție, exprimate în cm<sup>3</sup>.

Dacă în locul rezistențelor efective  $\mathcal{X}_x$  și  $\mathcal{X}_z$  luăm rezistențele reduse, atunci avem evident:

$$\mathcal{X}_{xred} = -Ey/r_x, \quad \mathcal{X}_{zred} = -Ey/r_z,$$

și dacă integrăm pe întreaga înălțime a plăcii, avem și:

$$(13) \quad M_{xred} = -EI/r_z, \quad M_{zred} = -EI/r_x.$$

Dacă într'un mod oarecare am găsi valoarea solicitărilor  $M_x, \dots$ , atunci ecuațiile (11) și (13) ne permit să găsim valoarea rezistențelor. Într'adevăr, dacă împărțim între ele aceste ecuații, obținem:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_x &= M_x y/I, & \mathfrak{X}_z &= M_z y/I, & \mathfrak{T}_y &= Dy/I, \\ \mathfrak{X}_{zred} &= M_{zred} y/I, & \mathfrak{X}_{xred} &= M_{xred} y/I, \\ \mathfrak{T}_x &= ST_x/I, & \mathfrak{T}_z &= ST_z/I. \end{aligned}$$

În rezumat, am exprimat toate solicitările și rezistențele în funcțiune de deformațiile plăcii.

*Toată chestiunea care se pune este să se găsească deformația plăcii.*

Dacă valorile lui  $M_x, M_z$  și  $D$  din (13) le punem în (8) și ținem seamă de (11), obținem:

$$(15) \quad \partial^4 \nu / \partial x^4 + 2 \partial^4 \nu / \partial x^2 \partial z^2 + \partial^4 \nu / \partial z^4 = p/EI_c,$$

ecuația clasică a lui *Lagrange*.

Soluția acestei ecuațiuni rezolvă complet problema, căci odată avut  $\nu$ , avem tot ce ne trebuie.

Este evident că  $\nu$  va fi o funcțiune de încărcări și de variabilele  $x$  și  $z$ .

În cazul încărcărilor continui și uniform distribuite pe toată placa,  $\nu$  va fi funcțiune numai de  $x$  și  $z$ .

*Funcția  $\nu$  se determină așa fel încât să fie satisfăcute condițiunile pe contur.*

Să ne explicăm.

Să presupunem că avem o placă dreptunghiulară simplu rezemată pe conturul ei, pe care deci se pot desvolta și reacțiuni negative.

În aceste condițiuni, funcțiunea  $\nu$  va trebui să satisfacă condițiile:

$$\nu = 0, \quad M_x = 0, \quad M_z = 0$$

pe tot conturul ei.

Dacă placa este incastrată pe tot conturul ei, atunci  $\nu$  va trebui să satisfacă condițiile:

$$\nu = 0, \quad \partial \nu / \partial x = 0, \quad \partial \nu / \partial z = 0$$

pe tot conturul său.

Dacă placa, pe unele laturi, e simplu rezemată, iar pe altele incastrată, vom pune pentru fiecare fel de laturi una sau alta din condițiile de mai sus, etc.

Determinarea funcției  $\nu$  este dificilă.



### 3. Analogia între plăci și între grinzi.

Dacă am notat cu  $\nabla$  operatorul:

$$\nabla = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2,$$

atunci ecuația (15) a lui *Lagrange* putem s'o scriem sub forma:

$$(15) \quad \nabla^2 v = p/EI_c.$$

Dacă punem:

$$(16) \quad \nabla v = -(1 - \mu) M/EI,$$

atunci rezultă:

$$(17) \quad \nabla M = -(1 + \mu) p.$$

Ecuațiile (16) și (17) sunt, întru totul, analoge ecuațiilor:

$$\partial^2 v/\partial x^2 = -M/EI, \quad \partial^2 M/\partial x^2 = -p,$$

dela grinzi.

S'a văzut la grinzi cum, cu ajutorul încărcărilor  $p$ , putem construi curba momentelor  $M$  și cum apoi, cu ajutorul lui  $M$  și cu un poligon funicular, putem construi curba lui  $v$ , deci axa deformată a grinzii.

Absolut analog aci. Cu sarcinile  $(1 + \mu) p$  ce revin nodurilor unei plase plane, construim suprafața momentelor  $M$ , care nu sunt altceva decât ordonatele nodurilor plășii pentru care luăm  $N = H = 1$ . Cu aceste valori  $M$  luate ca încărcări ale nodurilor și cu  $N = H = EI/(1 - \mu)$ , găsim deplasările  $v$ , care sunt chiar săgețile plăcii date.

*Să vedem care este semnificarea lui  $M$ .*

Din ecuația (16) rezultă:

$$(18) \quad \nabla v = \partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial z^2 = 1/r_x + 1/r_z = -(1 - \mu) M/EI.$$

Dacă adunăm primele ecuații (13), cu ajutorul ecuației (18), găsim:

$$(19) \quad M_x + M_z = M,$$

care s'a arătat că este un *invariant*, într'un punct oarecare al suprafeței mediane a plăcii.

Așa dar, ceea ce găsim prin integrarea ecuației (17), este invariantul  $M$ .

*Să presupunem că voim să construim suprafețele a căror ordonate să ne dea chiar pe  $M_x$ ,  $M_z$ ,  $D$ , prin urmare suprafețele  $\nabla M_x$ ,  $\nabla M_z$ , și  $\nabla D$ .*

Din ecuația (19) scoatem:

$$\nabla M_x = \nabla M - \nabla M_z.$$

Dacă, facem dezvoltările necesare ținând cont de cele de mai sus, găsim:

$$\begin{aligned}
 (1 + \mu) \nabla M_x &= \partial^2 M / \partial z^2 + \mu \partial^2 M / \partial x^2 \\
 (20) \quad (1 + \mu) \nabla M_z &= \partial^2 M / \partial x^2 + \mu \partial^2 M / \partial z^2 \\
 (1 + \mu) \nabla D &= (1 - \mu) \partial^2 M / \partial x \partial z.
 \end{aligned}$$

Așa dar, dacă prin integrarea ecuației (17) găsim expresia lui  $M$ , și dacă valorile lui  $\partial^2 M / \partial z^2, \dots$  le introducem în (20) și integrăm din nou, avem pe  $M_x, M_z$  și  $D$ .

Din (18) și (13) mai deducem:

$$(20) \quad (1 + \mu) T_x = \partial M / \partial z \quad \text{și} \quad (1 + \mu) T_z = \partial M / \partial x.$$

Așa dar, am exprimat deformația plăcii și toate eforturile interioare în funcțiune, de funcțiunea  $M$ . Așa dar, totul s'ar reduce la determinarea acestei funcțiuni. Aceasta pare a fi calea naturală a rezolvării chestiunii plăcilor.

#### 4. Lucrul mecanic.

Sub acțiunea sarcinilor verticale, placa, presupusă orizontală, se deformează, sarcinile  $p \, d\Omega$  parcurgând drumurile  $\nu$ .

Lucrul mecanic,  $L_e$ , datorit forțelor exterioare, în acest caz, este evident:

$$(21) \quad L_e = \frac{1}{2} \int p \, \nu \, d\Omega.$$

Să vedem care este expresia lucrului mecanic interior  $L_i$ .

La pag. 302, s'a stabilit formula (11), care ne dă expresia lui  $L_i$  acumulat de un volum  $V = 1$ , în funcțiune de invariанții  $p$  și  $q^2$ .

Dacă în acea expresie se pun valorile din formulele (11) dela pag. 764, dacă se integrează pe toată înălțimea plăcii, dacă se neglijează, ca de obicei, efectul lui  $T_x$  și  $T_z$ , atunci expresia lui  $L_i$ , în funcțiune de invariанții  $M$  și  $L^2$  din formulele (9) dela pag. 728, este:

$$(22) \quad L_i = (1/2EI) \int M^2 d\Omega + (1/2GI) \int L^2 d\Omega.$$

Dacă exprimăm pe  $M$  și  $L^2$  în funcție de elementele geometrice ale suprafeței deformată, găsim:

$$(23) \quad L_i = \frac{1}{2} EI_c \int [(1/r_x + 1/r_z)^2 + 2(1 - \mu)(1/r_y^2 - 1/r_x r_z)] d\Omega,$$

exprimat în funcție de cei doi invariанți ai suprafeței.

## B) Placă dreptunghiulară simplu rezemată pe contur.

Această problemă a fost rezolvată în mod elegant de *Navier*, încă dela 1820.

Metoda indicată de el constă în a reprezenta printr'o serie *Fourier* dublă funcțiunea  $p = f(xz)$ , care definește sarcina într'un punct oarecare al plăcii.

Orice funcțiune  $f(xz)$ , de două variabile, poate fi reprezentată în interiorul dreptunghiului cu laturile  $l_x$  și  $l_z$ , sau dacă notăm:

$$(24) \quad \xi = \pi x/l_x, \quad \zeta = \pi z/l_z,$$

în intervalele:

$$0 < \xi < \pi, \quad 0 < \zeta < \pi,$$

prin seria dublă:

$$f(xz) = \Sigma \Sigma (a_{mn} \cos m\xi \cos n\zeta + \dots + b_{mn} \sin m\xi \sin n\zeta)$$

în care  $b_{mn}$ , de exemplu, are valoarea:

$$b_{mn} = (4/\pi^2) \int_0^\pi \int_0^\pi f(\xi\zeta) \sin m\xi \sin n\zeta d\xi d\zeta.$$

*Navier* a considerat fiecare element de suprafață al plăcii încărcat cu sarcina elementară:

$$(25) \quad p_{mn} = b_{mn} \sin m\xi \sin n\zeta,$$

dată de fiecare termen al seriei. În aceste condițiuni, suma tuturor termenilor seriei dă valoarea sarcinei  $p$  de pe elementul de suprafață considerat.

Ecuția lui *Lagrange*, care corespunde acestei încărcări elementare, este:

$$\nabla^2 v = (1/EI_c) b_{mn} \sin m\xi \sin n\zeta.$$

Această ecuație este satisfăcută de soluția:

$$(26) \quad v_{mn} = c_{mn} \sin m\xi \sin n\zeta.$$

Dacă această valoare o introducem în ecuația lui *Lagrange*, căpătăm condițiunea:

$$(27) \quad c_{mn} = b_{mn}/\pi^2 EI_c (m^2/l_x^2 + n^2/l_z^2).$$

Deocamdată se observă, fără mare greutate, că funcțiunea  $p_{mn}$  a fost aleasă așa fel încât condițiunile pe conturul plăcii să fie satisfăcute.

Se recunoaște numai decît că pentru:  $\xi = 0$ ,  $\xi = \pi$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\zeta = \pi$ , avem pe conturul plăcii  $v \equiv 0$ ,  $M_x \equiv 0$ ,  $M_z \equiv 0$ .

Din seria *Fourier* se vor lua atâția termeni  $p_{mn}$ , pînă  $f(xz)$  ne va da cu aproximația ce voim valoarea sarcinei  $p$  din punctul considerat al plăcii.

### Incărcare uniform distribuită.

Să presupunem că avem de-aface cu o sarcină uniform distribuită:

$$p = f(xz) = ct.$$

Coefficientul  $b_{mn}$  din seria lui Fourier are expresia:

$$\begin{aligned} b_{mn} &= (4p/\pi^2) \int_0^\pi \sin m\xi \, d\xi \int_0^\pi \sin n\zeta \, d\zeta \\ &= (4p/\pi^2) (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi)/mn. \end{aligned}$$

Se vede numaidecât, că  $b_{mn}$  este nul pentru toate valorile pare ale lui  $m$  și  $n$  și are valoarea:

$$(28) \quad b_{mn} = 16 p/mn\pi^2,$$

pentru orice valori impare ale lui  $m$  și  $n$ . Acum putem scrie expresia tuturor elementelor ce ne interesează.

#### a) Expresia săgeții $v$ .

Dacă notăm:

$$(29) \quad l_{mn}^A = 1/mn (m^2/l_x^2 + n^2/l_z^2)^2,$$

atunci avem:

$$(30) \quad v = (16 p/\pi^6 EI_c) \sum l_{mn}^A \sin m\xi \sin n\zeta.$$

Această expresie o mai transformăm în modul următor.

Dacă notăm:

$$(31) \quad l_x/l_z = k, \quad l_z/l_x = k_1, \quad \text{și } kk_1 = 1,$$

atunci  $l_{mn}^A$  ia formele:

$$(29_1) \quad \begin{aligned} l_{mn}^A &= l_x^2 l_z^2 / mn (m^2 k_1 + n^2 k)^2, \\ l_{mn}^A &= l_x^4 / mn (m^2 + n^2 k^2)^2, \\ l_{mn}^A &= l_z^4 / mn (m^2 k_1^2 + n^2)^2. \end{aligned}$$

În fine, dacă notăm:

$$(32) \quad \begin{aligned} a &= (16/\pi^6) \sum \sin m\xi \sin n\zeta / mn (m^2 k_1 + n^2 k)^2, \\ a(k) &= (16/\pi^6) \sum \sin m\xi \sin n\zeta / mn (m^2 + n^2 k^2)^2, \\ a(k_1) &= (16/\pi^6) \sum \sin m\xi \sin n\zeta / mn (m^2 k_1 + n^2)^2, \end{aligned}$$

atunci găsim, pentru săgeată, următoarele expresii:

$$(30_1) \quad \begin{aligned} v &= a p l_x^2 l_z^2 / EI_c, \\ v &= a(k) p l_x^4 / EI_c, \\ v &= a(k_1) p l_z^4 / EI_c. \end{aligned}$$

Între seriile  $a$ ,  $a(k)$  și  $a(k_1)$  există niște relațiuni foarte simple.

Intr'adevăr, în același punct, avem aceeași săgeată și deci rezultă:

$$(33) \quad a = k^2 a(k) = k_1^2 a(k_1), \quad a(k) = k^4 a(k_1), \quad a(k_1) = k^4 a(k).$$

Așa dar, e suficient să calculăm valoarea unei serii, pentru a avea pe toate celelalte.

b) Expresiile celorlalte elemente geometrice ale suprafeței.

Dacă derivăm succesiv pe  $\nu$  în raport cu  $x$  și  $z$ , obținem:

$$(34) \quad \begin{aligned} 1/r_x &= -\beta(k) p l_x^2 / EI_c, \\ 1/r_z &= -\beta(k_1) p l_z^2 / EI_c, \\ 1/r_y &= \gamma(k) p l_x l_z / EI_c, \\ \partial(1/r_x + 1/r_z) / \partial x &= -\delta(k) p l_x / EI_c, \\ \partial(1/r_x + 1/r_z) / \partial z &= -\delta(k_1) p l_z / EI_c, \end{aligned}$$

în care am notat:

$$(35) \quad \begin{aligned} \beta(k) &= (16/\pi^4) \Sigma \sin m\xi \sin n\zeta \cdot m/n (m^2 + n^2 k^2), \\ \beta(k_1) &= (16/\pi^4) \Sigma \sin m\xi \sin n\zeta \cdot n/m (m^2 k_1^2 + n^2)^2, \\ \gamma(k) &= (16/\pi^4) \Sigma \cos m\xi \cos n\zeta / (m^2 k_1^2 + n^2 k^2)^2, \\ \delta(k) &= (16/\pi^3) \Sigma \cos m\xi \sin n\zeta / n (m^2 + n^2 k^2), \\ \delta(k_1) &= (16/\pi^3) \Sigma \sin m\xi \cos n\zeta / m (m^2 k_1^2 + n^2). \end{aligned}$$

Dacă aceste valori le introducem în ecuațiile (13), găsim:

$$(36) \quad \begin{aligned} M_x &= [\beta(k_1) + \mu k^2 \beta(k)] p l_z^2, & M_{xred} &= \beta(k_1) (1 - \mu^2) l_z^2, \\ M_z &= [\beta(k) + \mu k_1^2 \beta(k_1)] p l_x^2, & M_{zred} &= \beta(k) (1 - \mu^2) l_x^2, \\ D &= -\gamma(k) (1 - \mu) p l_x l_z, \\ T_x &= \delta(k_1) p l_z, & T_z &= \delta(k) p l_x, \end{aligned}$$

formule, de altfel, destul de simple dacă cunoaștem valoarea seriilor. În cursul: *Résistance des Matériaux et Elasticité* (1920) a d-lui Gaston Pigeaud, după care am luat cele de mai sus, se demonstrează că aceste serii sunt absolut convergente și nu ne vom mai ocupa aci de această chestiune.

c) Calculul momentelor  $M_x$  și  $M_z$  la mijlocul plăcii.

Pentru acest punct, avem  $\xi = \zeta = \frac{1}{2} \pi$ . În acest caz, seriile  $\beta$  se reduc la:

$$(37) \quad \begin{aligned} \beta(k) &= (16/\pi^4) \Sigma (-1)^{(m+n-2)/2} m/n (m^2 + n^2 k^2)^2, \\ \beta(k_1) &= (16/\pi^4) \Sigma (-1)^{(m+n-2)/2} n/m (m^2 k_1^2 + n^2)^2. \end{aligned}$$

Or în aceste serii, ordinea factorilor  $m$  și  $n$  este absolut indiferentă și cum  $k$  este inversul lui  $k_1$ , atunci rezultă că ambele serii reprezintă una și aceeași funcțiune de  $k$ , în care acesta ia toate valorile cuprinse între 0 și  $\infty$ .

Valorile seriilor  $\beta(k)$  și  $\beta(k_1)$  pentru  $k = 0$ , sunt respectiv:

$$\beta(0) = \pi^4/128 \quad , \quad \beta(\infty) = 0.$$

Pentru aplicații, notăm:

$$(38) \quad \beta = \beta(k)/\beta(0) \quad , \quad \beta_1 = \beta(k_1)/\beta(0).$$

În tabloul de pe pag. 772, am dat valorile acestor rapoarte pentru diferite valori ale lui  $k$ .

În aceste condițiuni, expresiunile momentelor încovoietoare la mijlocul plăcii, sunt:

$$(39) \quad \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{8} (\beta_1 + \mu k^2 \beta) p l_x^2 \quad , \quad M_{xred} = \frac{1}{8} \beta_1 (1 - \mu^2) p l_x^2, \\ M_z &= \frac{1}{8} (\beta + \mu k_1^2 \beta_1) p l_z^2 \quad , \quad M_{zred} = \frac{1}{8} \beta (1 - \mu^2) p l_z^2. \end{aligned}$$

Pe restul suprafeței plăcii, momentele variază precum variază seriile  $\beta(k)$  și  $\beta(k_1)$  din formulele (35).

#### d) Calculul momentului de răsucire $D$ .

Din expresia lui  $\gamma$  din formulele (36), se vede că variația lui este dată de variația seriei  $\gamma$ . Are valorile maxime la colțuri. Pentru  $\xi = \zeta = 0$  și  $\xi = \zeta = \pi$ , are aceeași valoare maximă negativă, iar pentru grupul de valori  $\xi = 0$ ,  $\zeta = \pi$ , și  $\xi = \pi$ ,  $\zeta = 0$ , are aceeași valoare maximă, însă pozitivă. Să găsim această valoare.

În acest caz, seria  $\gamma$  se reduce la:

$$(40) \quad \gamma(k) = (16/\pi^4) \sum 1/(m^2 k_1 + n^2 k)^2.$$

Această serie pentru  $k = 0$  și  $k = 1$ , are valorile:

$$\gamma(0) = 0 \quad , \quad \gamma(1) = (5/8\pi^3) sh \frac{1}{2} \pi = 0,0464.$$

Dacă, întocmai ca în cazul precedent, notăm:

$$(41) \quad \gamma = \gamma(k)/\gamma(1),$$

atunci valoarea momentului de răsucire la colțuri, este:

$$(42) \quad D = 0,0464 \gamma (1 - \mu) p l_x l_z.$$



În tabela de mai jos sunt date valorile lui  $\gamma$  pentru diferite valori ale lui  $k$ .

| $k$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $k$ | $\beta$  | $\gamma$ | $\delta$ |
|-----|---------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|
| 0,0 | 1,0000  | 0,0000   | 1,0000   | 1,4 | 0,1236   | 0,9158   | 0,5161   |
| 0,1 | 1,0000  | 0,1463   | 0,9999   | 1,5 | 0,09961  | 0,8815   | 0,4851   |
| 0,2 | 0,9960  | 0,2925   | 0,9993   | 1,6 | 0,08041  | 0,8462   | 0,4572   |
| 0,3 | 0,9603  | 0,4385   | 0,9912   | 1,7 | 0,06504  | 0,8111   | 0,4320   |
| 0,4 | 0,8796  | 0,5813   | 0,9679   | 1,8 | 0,05271  | 0,7769   | 0,4091   |
| 0,5 | 0,7717  | 0,7125   | 0,9298   | 1,9 | 0,04280  | 0,7440   | 0,3884   |
| 0,6 | 0,6564  | 0,8228   | 0,8821   | 2,0 | 0,03482  | 0,7125   | 0,3695   |
| 0,7 | 0,5465  | 0,9061   | 0,8299   | 2,2 | 0,02318  | 0,6549   | 0,3365   |
| 0,8 | 0,4485  | 0,9615   | 0,7761   | 2,4 | 0,01555  | 0,6042   | 0,3088   |
| 0,9 | 0,3644  | 0,9915   | 0,7242   | 2,6 | 0,01049  | 0,5598   | 0,2851   |
| 1,0 | 0,2947  | 1,0000   | 0,6752   | 2,8 | 0,007110 | 0,5208   | 0,2648   |
| 1,1 | 0,2374  | 0,9930   | 0,6297   | 3,0 | 0,004848 | 0,4867   | 0,2472   |
| 1,2 | 0,1909  | 0,9741   | 0,5881   | 3,5 | 0,001891 | 0,4176   | 0,2129   |
| 1,3 | 0,1534  | 0,9473   | 0,5503   |     |          |          |          |

Pe restul suprafeței, momentul de răsucire  $D$  variază ca valoarea seriei  $\gamma(k)$  din formulele (35).

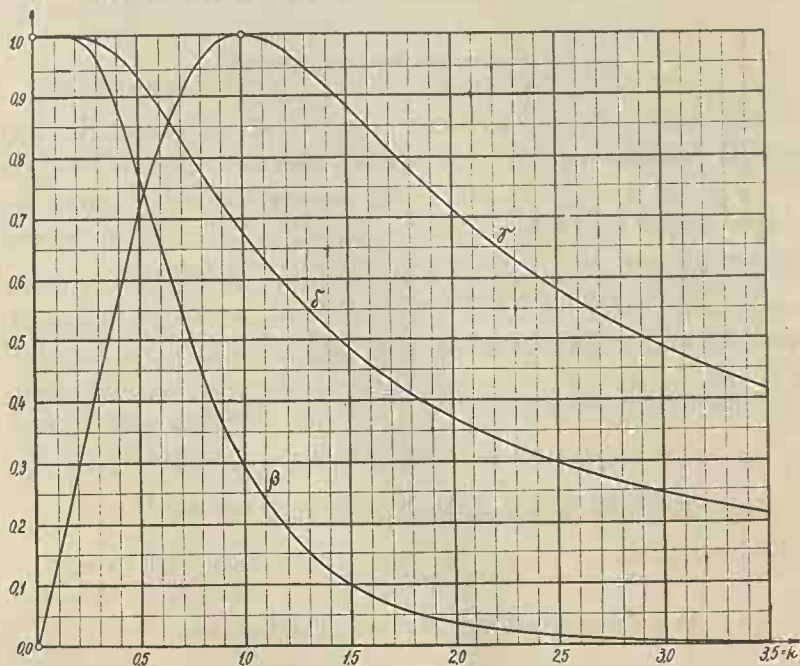


Figura 534

e) Calculul forțelor tăietoare  $T_x$  și  $T_z$ , la mijlocul laturilor pe contur.

Să ne ocupăm de exemplul de  $T_z$ . Din formulele (35) și (36), se vede că pentru  $\xi = 0$  și  $\zeta = \frac{1}{2}\pi$ , seria  $\delta$  se reduce la:

$$(43) \quad \delta(k) = (16/\pi^2) (-1)^{(n-1)/2/n} (m^2 + n^2 k^2).$$

Se mai vede, că ambele serii  $\delta(\cdot)$  și  $\delta(\cdot_1)$  sunt una și aceeași funcțiune de  $k$ , atunci când acesta ia toate valorile cuprinse între 0 și  $\infty$ .

Valorile sericii  $\delta$ , pentru  $k = 0$  și  $k_1 = \infty$ , sunt respectiv:

$$\delta(0) = \pi^2/32, \quad \delta(\infty) = 0$$

și dacă, întocmai ca în cazurile precedente, notăm:

$$(44) \quad \delta = \delta(k)/\delta(0), \quad \delta_1 = \delta(k_1)/\delta(0),$$

atunci avem:

$$(45) \quad T_x = \frac{1}{2}\delta_1 p l_z, \quad T_z = \frac{1}{2}\delta p l_x.$$

Valoarea rapoartelor  $\delta$  este dată în tabloul de pe pag. 772.

Variația forței tăietoare  $T_z$ , de-a-lungul laturii  $l_z$ , este dată de seria  $\delta(k)$  din formulele (35), în care facem  $\cos m\xi = 1$ . Forțele tăietoare la colțurile plăcii sunt nule.

Curbele din fig. 534 reprezintă grafic variația rapoartelor  $\beta$ ,  $\gamma$  și  $\delta$  în funcțiune de  $l$ .

**Aplicația Nr. 164.** O placă de  $4 \times 5$  m., simplu rezemată de contur, este încărcată cu o sarcină uniform distribuită  $p = 1$  t/m<sup>2</sup>.

1°. Să găsim momentele încovoietoare la mijlocul plăcii.

Luăm  $l_x = 4$  m,  $l_z = 5$  m, de unde rezultă  $k = 0,8$  și  $k_1 = 1,25$ . Din tabelă găsim:

$$\beta = 0,4485, \quad \beta_1 = 0,1721,$$

pentru această din urmă valoare făcând o interpolare liniară.

Să presupunem  $\mu = 0$ . În acest caz, avem:

$$M_x = \frac{1}{8} 0,1721 \cdot 5^2 = 0,538 \text{ tm/m}, \quad M_z = \frac{1}{8} 0,4485 \cdot 4^2 = 0,897 \text{ tm/m}.$$

Să presupunem  $\mu = 0,25$ . Vom avea:

$$M_x = \frac{1}{8} (0,1721 + 0,25 \cdot 0,8^2 \cdot 0,4485) 5^2 = 0,762 \text{ tm/m},$$

$$M_z = \frac{1}{8} (0,4485 + 0,25 \cdot 0,1721) 4^2 = 1,031 \text{ tm/m},$$

iar momentele reduse au valorile:

$$M_{xred} = (1 - 0,25^2) 0,538 = 0,504 \text{ tm/m}, \quad M_{zred} = 0,841 \text{ tm/m}.$$

Pentru plăci de beton armat A. Mesnager, în „Cours de béton armé”, recomandă pentru  $\mu$  valoarea  $\mu = 0,1$ .

2°. Să găsim momentul de răsucire la colțuri. Din tabelă, pentru  $k=0,8$ , găsim  $\gamma = 0,9615$ . Să presupunem  $\mu = 0$ . Avem:

$$D = 0,0464 \cdot 0,9615 \cdot 4 \cdot 5 = 0,892 \text{ tm/m.}$$

Pentru  $\mu = 0,25$  avem:  $D = 0,669 \text{ m/m.}$

La colțuri, momentele încovoietoare  $M_x$  și  $M_z$  sunt nule. Atunci rezultă că, pentru direcțiuni cari fac unghiuri egale cu  $\frac{1}{4}\pi$ , cu axele de coordonate, vom avea momente încovoietoare ale căror valori sunt egale cu  $\pm D$ . Aceste momente produc tensiuni pe fața superioară a plăcii, în direcția bisectoarelor unghiurilor, iar pe fața inferioară în direcția normală pe bisectoare. Asta explică foarte clar crăpăturile ce se ivesc la plăcile de beton armat în regiunea din apropierea colțurilor.

Forțele tăietoare maxime la mijlocul laturilor  $l_x$  și  $l_z$ , cu  $\delta = 0,7761$  și  $\delta_1 = 0,5692$ , luate din tablou, sunt:

$$T_x = \frac{1}{2} \delta_1 p l_z = \frac{1}{2} 0,5692 \cdot 1,5 = 1,423 \text{ t/m,}$$

$$T_z = \frac{1}{2} \delta p l_x = \frac{1}{2} 0,7761 \cdot 1,4 = 1,552 \text{ t/m.}$$

Din exemplul numeric făcut, se vede că *momentul de răsucire* e de același ordin de mărime ca și momentele încovoietoare dela mijlocul plăcii și că, prin urmare, *nu poate fi neglijat*. Mai trebuie observat că momentele încovoietoare  $\pm D$ , dela colțuri, trebuiesc să fie luate de o construcție suplimentară. Deci, placa va fi prelungită dincolo de reazim suficient pentru ca în dreptul reazimului să poată fi încărcată cu momentul respectiv. Dacă această măsură nu este observată, crăpăturile de cari am vorbit mai sus sunt inevitabile.

### C) Plăci circulare.

Vom presupune că avem de-a face cu plăci orizontale supuse la sarcini verticale, *uniform distribuite pe toată suprafața sau numai pe un cerc concentric cu periferia plăcii*.

Elementele geometrice ale acestei suprafețe, dacă luăm razele ce pleacă din centru drept meridiane și cercurile concentrice de raze  $r$  drept cercuri paralele, sunt:

$$1/r_x = 1/r_y = 1/r_z = 1/r_{zx} = 0, \quad 1/r_{xz} = 1/r.$$

În aceste condiții, ecuațiile (17) dela studiul suprafețelor ne dau:

$$(1) \quad \partial \bar{\xi} / \partial x = \bar{\zeta} / r, \quad \partial \bar{\eta} / \partial x = 0, \quad \partial \bar{\zeta} / \partial x = -\bar{\xi} / r \\ \partial \bar{\zeta} / \partial z = \partial \bar{\eta} / \partial z = \partial \bar{\xi} / \partial z = 0.$$

Să scriem ecuațiile de echilibru. Mai întâi vom presupune că în planul suprafeței mediane avem  $N_x = N_z = 0$ , când rezultă că și  $T_y \equiv 0$ .

Pe de altă parte, din motive de simetrie, toate elementele aparținând aceluiași cerc concentric, se comportă la fel și prin urmare, toate derivatele,  $\delta \dots / \delta x$ , ale cantităților scalare sunt nule.

Așa fiind, ecuațiile (1) și (2) dela pag. 726 se reduc la:

$$(2) \quad \begin{aligned} \partial \bar{R}_x / \partial x + \partial \bar{R}_z / \partial z - \bar{R}_z / r + \bar{p} &= 0, \\ \partial \bar{M}_x / \partial x + \partial \bar{M}_z / \partial z - \bar{M}_z / r + \xi \bar{R}_x + \zeta \bar{R}_z &= 0, \end{aligned}$$

iar ecuațiile (5) dela pag. 727 la:

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{R}_x &= \bar{\eta} T_z, & \bar{R}_z &= \bar{\eta} T_x, \\ \bar{M}_x &= -\bar{\xi} D + \bar{\zeta} M_z, & \bar{M}_z &= \bar{\xi} D - \bar{\zeta} M_x. \end{aligned}$$

Dacă aceste valori le introducem în ecuația (2), dacă ținem seamă de ecuațiile (1) de mai sus și punem  $z = r$ , găsim:

$$(4) \quad \begin{aligned} dT_x/dr - T_x/r + p &= 0, \\ 2D/r - dD/dr - T_z &= 0, \\ (M_x - M_z)/r - dM_x/dr - T_x &= 0. \end{aligned}$$

Se recunoaște, din motive de simetrie, că  $T_z \equiv 0$  și că prin urmare, avem:

$$2D/r - dD/dr = 0, \quad \dots \quad D = Cr^2.$$

În origine, din motive de simetrie, având  $M_x = M_z$ , avem și  $D = 0$ , iar pe conturul plăcii avem de asemenea,  $D = 0$ . De aci rezultă că pe întreaga placă avem:  $D \equiv 0$ .

Așa dar, direcția razelor și a cercurilor concentrice, în fiecare punct al plăcii, sunt direcții principale pentru momente.

Prin urmare, din grupul de ecuații (4) nu putem utiliza decât prima și ultima.

Să ne ocupăm de prima ecuație.

1°. Să presupunem placa încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată suprafața ei.

În acest caz, valoarea lui  $T_x$  este:

$$T_x = p\pi r^2 / 2\pi r = \frac{1}{2}pr.$$

și deci:

$$(5) \quad dT_x/dr = -\frac{1}{2}p \quad \dots \quad T_x = -\frac{1}{2}pr.$$

Așa dar, forța tăietoare  $T_x$  variază liniar cu  $r$ .

2°. Să presupunem că avem la mijlocul plăcii o forță concentrată  $F$ .

Vom avea analog,  $p$  fiind nul:

$$T_x = F/2\pi r,$$

care ne dă:

$$(6) \quad dT_x/dr - F/2\pi r^2 = 0, \quad \dots \quad T_x = -F/2\pi r.$$

Se vede că în acest caz  $T_x$  variază după o hiperbolă. În centrul plăcii, după această formulă avem  $T_x = \infty$ . S'a atras atențiunea chiar

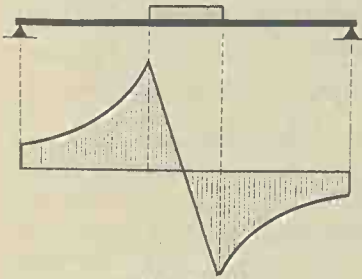


Figura 535

dela început (pg. 22) că forțele concentrate nu există în realitate, ci rezultă dintr'o convențiune ce o facem. Așa dar, și ele se repartizează pe o suprafață oarecare.

În acest caz, curba forțelor tăietoare se prezintă ca în figura 535.

Prin urmare, e o chestiune absolut analoagă ca la grinzi.

### 1. Legătura între solicitările $M_x \dots$ și deformațiunile plăcii.

Sub acțiunea sarcinilor continui simetric așezate față de centrul plăcii, suprafața mediană deformată va fi o suprafață de rotație.

S'a notat cu  $r$  raza unui cerc paralel. După cum s'a arătat la suprafețele de rotație, elementele lor geometrice sunt:

$$1/r_y = 1/r_{zx} = \theta, \quad r = r_{zx} \sin \varphi = r_x \cos \varphi.$$

Să găsim pe  $r_x$  și  $r_z$  în funcție de deformațiunile plăcii. Vom observa mai întâi că deformațiunile plăcilor sunt de același ordin de mărime ca la grinzi și deci vom face aceleași aproximații.

Dacă  $v$  este săgeata unui punct oarecare al plăcii, atunci unghiul ce face tangenta la curba meridiană cu orizontala, are valoarea:

$$(7) \quad \theta = dv/dr.$$

Aici am și făcut aproximația  $\theta = tg \theta$ .

În aceste condiții, avem:

$$(8) \quad 1/r_x = d\theta/dr = d^2v/dr^2.$$

făcând și aproximația  $dz = dr$ .

De pe figura 536 se vede că avem  $\theta + \varphi = \frac{1}{2} \pi$  și din relațiile de mai sus deducem:

$$r = r_{zx} = r_x \theta.$$

care ne dă:

$$(9) \quad 1/r_x = \theta/r.$$

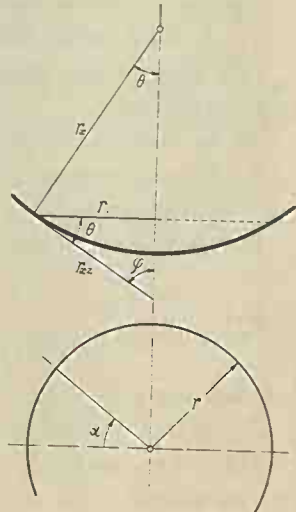


Figura 536

Dacă aceste valori le introducem în ecuațiile (13), găsim:

$$(10) \quad \begin{aligned} M_x &= -EI_c (d\theta/dr + \mu \theta/r), \\ M_z &= -EI_c (\theta/r + \mu d\theta/dr), \end{aligned}$$

iar invariantul  $M$  are valoarea:

$$(11) \quad M = -EI_c (1 + \mu) (d\theta/dr + \theta/r) = -EI_c (1 + \mu) d(r\theta)/rdr.$$

Dacă aceste valori le introducem în ultima ecuație (4), obținem:

$$(12) \quad \begin{aligned} EI_c d(d\theta/dr + \theta/r)/dr + T_x &= 0, \\ dM/dr &= (1 + \mu)T_x, \end{aligned}$$

iar din (11), avem:

$$(13) \quad r\theta = -[(1 - \mu)/EI] \int Mrdr,$$

pentru că pentru  $r = 0$ , avem  $\theta \cdot \theta_0 = 0$ .

Prima ecuație din grupul (4) și ecuațiile (12) și (13) sunt absolut asemănătoare celorla dela grinzii.

Acum avem tot ce ne trebuie pentru a găsi momentele incoivoitoare și rezistențele din placă.

În genere, se caută valoarea rezistențelor reduse, rezultate numai din momentele incovoitoare.

Din formule rezultă și se poate arăta și direct, că valorile maxime a rezistențelor reduse, sunt:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathfrak{r}_{r \text{ red}} &= -\frac{1}{2} E h d\theta/dr, \\ \mathfrak{r}_{x \text{ red}} &= -\frac{1}{2} E h \theta/r. \end{aligned}$$

Vom face câteva aplicații.

## 2. Placă încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată suprafața ei.

S'a văzut în acest caz că forța tăietoare are expresia:

$$T_x = -\frac{1}{2} pr,$$

Introducând această valoare în ecuația (12), găsim:

$$M = M_0 - \frac{1}{4} (1 + \mu) pr^2,$$

în care  $M_0$  este valoarea lui  $M$  în origine, adică pentru  $r = 0$ .

Cu această valoare a lui  $M$ , din (13) scoatem:

$$(16) \quad \begin{aligned} \theta/r &= [(1 - \mu)/2EI] [\frac{1}{8} (1 + \mu) pr^2 - M_0], \\ d\theta/dr &= [(1 - \mu)/2EI] [\frac{3}{8} (1 + \mu) pr^2 - M_0]. \end{aligned}$$

Valoarea lui  $M_0$  o vom determina după sistemul de rezemare al plăcii.



1°. Să presupunem că avem o placă de rază  $r_1$  încastrată pe tot conturul ei. In acest caz, pentru  $r = r_1$ , avem  $\theta = 0$ , de unde rezultă:

$$(17) \quad M_0 = \frac{1}{3} (1 + \mu) pr_1^2.$$

In origine, vom avea:

$$\theta/r = d\theta/dr = -(1 - \mu) M_0/2EI,$$

iar la periferie:

$$\theta/r = 0, \quad d\theta/dr = (1 - \mu) M_0/EI,$$

Ca să găsim rezistențele reduse, n'avem decât să introducem aceste valori în formulele (14).

Dacă luăm  $\mu = 0,3$ , găsim că rezistența cea mai mare are loc la periferia plăcii și are valoarea:

$$\mathcal{X}_{r\text{red}} = -0,68 pr_1^2/h^2.$$

Ca să găsim săgețile n'avem decât să integrăm ecuația:

$$(18) \quad dv/dr = 0.$$

Dacă facem această operație și punem condiția că, pentru  $r = r_1$  să avem  $v = 0$ , găsim:

$$v = p (r_1^2 - r^2)^2/64EI_c.$$

Săgeata maximă la mijlocul plăcii este:

$$v_0 = 0,17 pr_1^4/Eh^3.$$

2°. Să presupunem aceeași placă simplă rezemată pe conturul ei.

In acest caz, pe toată periferia ei, adică pentru  $r = r_1$ , trebuie să avem:  $M_x = 0$ , și deci:

$$d\theta/dr + \mu \theta/r = 0.$$

Din ecuațiile (16), găsim:

$$M_0 = \frac{1}{3} (3 + \mu) pr_1^2.$$

Cu această valoare, pentru  $r = 0$ , găsim:

$$\mathcal{X}_{\text{red}} = 0,866 pr_1^2/h^2.$$

iar la periferia plăcii:

$$\mathcal{X}_{x\text{red}} = 0,52 pr_1^2/h^2, \quad \mathcal{X}_{r\text{red}} = -0,16 pr_1^2/h^2.$$

Pentru aflarea săgeții, dacă procedăm ca mai sus, găsim:

$$v = [3p (1 - \mu)/16Eh^3] [(1 + \mu) r^4 - 2r^2 r_1^2 + (5 + \mu) r_1^4],$$

iar la mijlocul plăcii:

$$v_0 = 0,70 pr_1^4/Eh^3.$$

### 3. Plăci încărcate parțial.

Vom considera placa încărcată numai pe suprafața unui cerc de rază  $r_1$ , concentric cu periferia. Sarcina o considerăm uniform distribuită.

Chestiunea este absolut analoagă cu aceea dela grinzi.

Pe partea încărcată, suprafața deformată va avea o ecuație, pe partea descărcată, o alta. Cele două suprafețe se racordează pe cercul de contact, având același  $\theta$  și  $d\theta/dr$ , după cum foarte ușor se poate demonstra cu ajutorul ecuației (13).

Vom avea:

$$p\pi r_1^2 = F.$$

Pe cercul de raza  $r < r_1$ , elementele geometrice ale suprafeței deformată sunt date de ecuațiile (16).

Să stabilim aceleași elemente pe partea descărcată, adică pentru  $r > r_1$ .

Am avut:

$$(19) \quad T_x = -F/2\pi r = -\frac{1}{2}pr_1^2/r.$$

Cu această valoare, din ecuația (12), deducem:

$$(20) \quad M = M_1 - \frac{1}{2}p(1 + \mu)r_1^2 \lg(r/r_1),$$

în care  $M_1$  este valoarea momentului  $M$  pe cercul de racordare a celor două suprafețe.

Dacă această valoare o introducem în ecuația (13) și dacă exprimăm pe  $M_1$  și  $r_1\theta_1$  în funcțiune de  $M_0$ , găsim:

$$(21) \quad \begin{aligned} \theta/r &= [(1 - \mu)/2EI] [\frac{1}{8}(1 + \mu) pr_1^2(r_1^2/r^2 + 4\lg(r/r_1)) - M_0] \\ d\theta/dr &= [(1 - \mu)/2EI] [\frac{1}{8}(1 + \mu) pr_1^2(4 - r_1^2/r^2 + 4\lg(r/r_1)) - M_0]. \end{aligned}$$

Așa dar, pentru  $r < r_1$ , elementele geometrice ale suprafeței sunt date de ecuațiile (16), iar pentru  $r > r_1$ , de ecuațiile (21).

a) Să presupunem că avem o placă de rază  $r_2$  încastrată pe tot conturul ei.

În acest caz, pentru  $r = r_2$  avem  $\theta = 0$  și deci:

$$M_0 = \frac{1}{8}(1 + \mu) pr_1^2(r_1^2/r_2^2 + 4\lg(r_2/r_1)).$$

Avem, prin urmare, valoarea invariantului  $M_0$  în centrul plăcii, deci tot ce ne trebuie.

Din această expresie se vede că, atâta timp cât  $p$  sau  $pr_1$  păstrează o valoare constantă, atunci  $r_1^2 \lg(r_2/r_1)$  și  $r_1 \lg(r_2/r_1)$  sunt nule pentru  $r_2 = r_1$  și pentru  $r_1 = 0$ .

Ambele expresii sunt maxime pentru o anumită valoare a lui  $r_2/r_1$ . Cum raportul  $r_1/r_2 < 1$ , putem presupune că maximum expresiei  $r_1^2 (r_1^2/r_2^2 + 4\lg(r_2/r_1))$  are loc odată cu al expresiei  $4r_1^2 \lg(r_2/r_1)$ .

Dacă  $pr_1^2$  păstrează o valoare constantă când  $r_1 = 0$ , cum ar fi cazul unei sarcini concentrate, aplicată în mijlocul plăcii, când avem  $F = \pi r_1^2$ , atunci se vede că pentru  $r_1 = 0$ , valoarea lui  $M_0$  este infinită.

În acest caz, va trebui să presupunem neapărat că forța concentrată  $F$  se repartizează pe o suprafață oarecare.

1°. Să căutăm rezistențele reduse la mijlocul plăcii.

După formulele (14) și (16), avem:

$$\mathfrak{X}_{x\text{ red}} = \mathfrak{X}_{r\text{ red}} = 3(1 - \mu) M_0/h^2.$$

Dacă înlocuim  $M_0$  cu valoarea lui, găsim:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{red} &= 3(1 - \mu^2) (r_1^2/r_2^2 + 4\lg(r_2/r_1)) F/8\pi h^2, \\ &= 0,1086 (r_1^2/r_2^2 + 4\lg(r_2/r_1)) F/h^2, \\ &= (0,11 r_1^2/r_2^2 + k) F/h^2, \end{aligned}$$

în care  $k$  este dat de relația:

$$r_2/r_1 = 10^k.$$

Asta ne arată că, în cazurile reale, rezistențele  $\mathfrak{X}_{red}$  la mijlocul plăcii nu ating niciodată valori infinite.

2°. Să găsim rezistențele reduse pe conturul plăcii.

Avem evident  $\mathfrak{X}_{x\text{ red}} = 0$ .

Găsim apoi:

$$\mathfrak{X}_{r\text{ red}} = -3(1 - \mu^2) pr_1^2(2 - r_1^2/r_2^2)/4h^2.$$

Dacă avem la mijlocul plăcii sarcina concentrată  $F = \pi pr_1^2$  atunci:

$$\mathfrak{X}_{r\text{ red}} = 0,43 F/h^2.$$

deci independentă de  $r_2$ .

Ca să găsim săgețile, vom integra ecuația  $\theta = dv/dr$ , pe cele două intervale. Constantele de integrare le vom determina prin condiția ca ambele curbe să aibă aceeași săgeată pe cercul de racordare de raza  $r_1$ , și săgeata zero, pentru  $r = r_2$ .

3°. Să găsim săgeata maximă când placa este încărcată cu o sarcină concentrată la mijloc.

În acest caz, având  $r_1 = 0$ , valoarea lui  $v$ , dată de ecuația (16) pe partea centrală, va fi nulă pe intervalul  $0 - r_1$ . Nu ne rămâne deci de integrat decât prima ecuație (21).

Se recunoaște numaidecât, că pentru  $r = r_1 = 0$ , avem  $\theta = 0$ . Dacă în ecuația (21) punem valoarea lui  $M_0$  și neglijăm toți termenii cari se anulează odată cu  $r_1 = 0$ , găsim:

$$\theta = (F/4\pi EI_c) r \lg(r/r_2).$$

Dacă integrăm această ecuație și punem condiția ca să avem  $v = 0$ , pentru  $r = r_2$ , găsim:

$$v = (F/16\pi EI_c) (r_2^2 - r^2 + 2r^2 \lg(r/r_2)),$$

iar la mijlocul plăcii:

$$v_0 = 0,22 Fr_2^2/Eh^3.$$

b) *Placă simplu rezemată pe contur, încărcată cu o sarcină concentrată la mijloc.*

În acest caz, pentru  $r = r_2$ , avem  $M_x = 0$  și deci:

$$d\theta/dr + \mu \theta/r = 0,$$

care ne dă:

$$M_0 = \frac{1}{3} pr_1^2 [4 - (1 - \mu) r_1^2/r_2^2 + 4(1 + \mu) \lg(r_2/r_1)]$$

1°. *Să căutăm rezistențele reduse la mijlocul plăcii.*

Dacă urmăm exact calea de mai sus, avem:

$$\mathcal{K}_{red} = 3(1 - \mu^2) [4/(1 + \mu) - (1 - \mu) r_1^2/(1 + \mu) r_2^2 + 4 \lg(r_2/r_1)] F/8\pi h^2 = (0,334 - 0,058 r_1^2/r_2^2 + k) F/h^2,$$

în care  $k$  are aceeași valoare ca mai sus.

2°. *Să găsim săgeata la mijlocul plăcii.*

Dacă procedăm exact ca în cazul precedent, găsim:

$$v = (1 - \mu)[(1 + \mu)(2 \lg(r/r_2) - 1) r^2 - 2r^2 + (3 + \mu) r_2^2] F/16\pi EI,$$

care, pentru mijlocul plăcii, ne dă:

$$v_0 = 0,55 Fr_2^2/Eh^3.$$

**Aplicația Nr. 161.** O placă în formă de coroană circulară de raze  $r_1$  și  $r_2$  este simplu rezemată pe conturul său (fig. 537). Pe marginea interioară suportă o sarcină uniform distribuită  $p$  așa ca  $2\pi r_1 p = F$ .

Să se găsească rezistențele din placă și săgeata în dreptul razei  $r_1$ .

Valoarea forței tăietoare în dreptul razei  $r$ , este:

$$T_x = -F/2\pi r = -pr_1/r,$$

Cu ajutorul ecuațiilor (12) și (13), deducem:

$$M = M_1 - (1 + \mu) p r_1 \lg(r/r_1),$$

$$\theta/r = r_1 \theta_1/r^2 - [(1 - \mu)/4EI] [2(1 - r_1^2/r^2) M_1 - (1 + \mu) pr_1(2 \lg(r/r_1) - 1 + r_1^2/r^2)]$$

$$d\theta/dr = -r_1 \theta_1/r^2 - [(1 - \mu)/4EI] [2(1 + r_1^2/r^2) M_1 - (1 + \mu) pr_1(2 \lg(r/r_1) + 1 - r_1^2/r^2)].$$



Figura 537

Avem de determinat constantele  $\theta_1$  și  $M_1$ .

Pentru acest caz, vom pune condiția ca pentru  $r = r_1$  și  $r = r_2$ , să avem  $M_x = 0$ , adică  $d\theta/dr + \mu \theta/r = 0$ .

Dacă facem calculele respective, găsim:

$$\theta_1/r_1 = -M_1/EI, \quad M_1 = pr_1 \left[ \frac{1}{2} (1 - \mu) + \lg (r_2/r_1) / (1 - r_1^2/r_2^2) \right],$$

avem deci tot ce ne trebuie, pentru a calcula, fie rezistențele reale, fie cele reduse.

Ca să găsim o expresie simplă pentru săgeată, vom presupune  $r_1$  foarte mic față de  $r_2$ .

Dacă se urmează aceeași cale ca în cazurile precedente, găsim:

$$\nu = (1 - \mu) (r_2^2 - r_1^2) M_1 / 2 EI,$$

iar la  $r_1$  pe care-l luăm  $r_1 \simeq 0$ , avem:

$$\nu_0 = (1 - \mu) r_2^2 M_1 / 2 EI$$

**Observare.** După tipul calculelor date până aci se poate rezolva orice problemă relativă la plăcile circulare încărcate cu sarcini simetrice față de centrul plăcii.

**Aplicația Nr. 162.** O placă de  $r_2 = 50$  cm, simplu rezemată pe contur, suportă la mijloc o sarcină concentrată de 10 tone. Să se dimensioneze placa în ipoteza că rezistențele reduse să nu treacă de  $1400 \text{ kg/cm}^2$  și  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

Vom presupune sarcina concentrată repartizată uniform pe un cerc de rază  $r_1$ , așa ca să avem  $p = 1400 \text{ kg/cm}^2$ .

Avem  $\Omega = 10000/1400 = 7,15 \text{ cm}^2$ ,  $r_1 = 1,51 \text{ cm}$ ,  $r_2/r_1 = 33,1$ ,  $r_1^2/r_2^2 \simeq 0$ ,  $k = 1,520$

$$\mathfrak{R}_{red} = 1400 = 1,854 \cdot 10000/h^2$$

care ne dă:

$$h = 3,65 \simeq 3,7 \text{ cm}, \quad \nu_0 = 0,55 \cdot 10000 \cdot 50^2 / 2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,7^3 = 1,3 \text{ mm}.$$

**Aplicația Nr. 163.** Să presupunem că plăcii din aplicația precedentă, îi dăm o gaură la mijloc de  $\varnothing = 3$  cm. Cu sarcină maximă uniform distribuită, de-a lungul cercului de rază  $r_1 = 1,5$  cm, poate suporta placa, așa ca rezistențele reduse maxime să nu depășească  $\mathfrak{R}_{red} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ ? Care-i săgeata maximă în acest caz?

Avem:

$$M_1 = p \cdot 1,5 [0,35 + \lg (50/1,5) / (1 - 1,5^2/50^2)] = 5,78 p,$$

$$\theta_1/r_1 = -M_1/EI, \quad d\theta_1/dr_1 = \mu M_1/EI,$$

$$\mathfrak{R}_{red} = 1400 = 5,78 \cdot 6 p/h^2, \quad p = 550 \text{ kg/cm}, \quad F = 5200 \text{ kg},$$

$$M_1 = 3180 \text{ kg cm/cm}, \quad \nu_0 = 3,15 \text{ mm}.$$

Așa dar, prin găurire placa nu poate suporta decât  $1/2$  din sarcină și dă o săgeată de  $2 1/2$  ori mai mare.

## XXXIV. BLOCURI.

În această categorie intră o serie de piese al căror calcul diferă evident esențial de calculul barelor și a plăcilor.

Calculul bilelor sferice sau cilindrilor cari servă de rulemenți, al secțiunii marilor barage, al rezistențelor ce se dezvoltă în masivele indefinite sub acțiunea sarcinilor, etc., intră în această categorie.

### 1. Calculul țevilor.

Nu ne vom ocupa aci decât de o singură problemă și anume de calculul tuburilor cilindrice cu baza circulară însă cu pereți groși, cum ar fi de exemplu țevile de tun.

La studiul tuburilor cu pereți subțiri am presupus că rezistențele într'o secțiune meridiană se distribuie uniform. La tuburile cu pereți groși pe care le vom numi țevi, această ipoteză nu mai este adevărată.

#### a) Țevi cilindrice

Să presupunem că secțiunea normală pe axa țevii este o coroană circulară.

Să considerăm un element de suprafață  $d\Omega$ , limitat între două cercuri concentrice distanțate între ele de  $dr$  și mărginit între două raze ce fac între ele unghiul  $d\varphi$  (fig. 538).

Notăm cu  $\mathcal{K}_t$  și  $\mathcal{K}_r$ , rezistențele dirijate după tangenta și raza ce trec prin elementul de suprafață  $d\Omega$ .

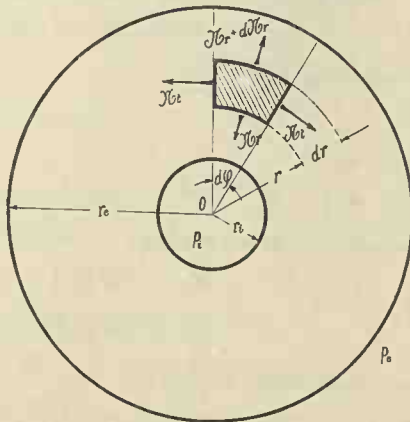


Figura 538



Din motive de simetrie, se vede că rezistențele  $\mathfrak{C}$  dirijate după rază sunt nule. Atunci urmează că cercurile concentrice și razele sunt linii isostatice.

Formulele (34) dela pag. 253, în acest caz, ne dau:

$$(1) \quad d\mathfrak{X}_r/dr + (\mathfrak{X}_r - \mathfrak{X}_t)/r + \gamma_1 = 0.$$

Cealaltă ecuație se reduce la zero, pentrucă  $d\mathfrak{X}_t/ds = 0$  și raza de curbură a razei ce pleacă din centru, este  $\infty$ .

În cele ce urmează, vom neglija valoarea lui  $\gamma_1$ .

Ecuația (1) o punem și sub forma:

$$(2) \quad d(r \mathfrak{X}_r)/dr = \mathfrak{X}_t.$$

Această ecuație se poate stabili ușor și direct, urmând aceeași cale ce a servit la stabilirea formulelor (33), mult mai generale, dela pag. 253.

Să stabilim deformațiunile păretului țevii. Să presupunem că elementul de suprafață se deplasează în sensul razei cu cantitatea  $u$ . După formula (3) pag. 275 avem:

$$(3) \quad \varepsilon_r = du/dr.$$

Dacă raza s'a mărit cu  $u$ , atunci cercul s'a lungit cu  $2\pi u$  și lungirea după tangentă va fi:

$$(3) \quad \varepsilon_t = 2\pi u/2\pi r = u/r.$$

În acest caz, formulele (5) dela pag. 300 ne dau:

$$\mathfrak{X}_r = E(du/dr + \mu u/r)/(1 - \mu^2), \quad \mathfrak{X}_t = E(u/r + \mu du/dr)/(1 - \mu^2).$$

Introducând aceste valori în ecuația de echilibru (2), căpătăm:

$$(4) \quad r^2 d^2u/dr^2 + r du/dr - u = 0,$$

a cărei soluție este:

$$(5) \quad u = ar + b/r,$$

care ne dă:

$$(6) \quad u/r = a + b/r^2, \quad du/dr = a - b/r^2, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_r + \varepsilon_t = 2a.$$

Cu aceste valori găsim:

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_r &= 2G [a(1 + \mu)/(1 - \mu) - b/r^2], \\ \mathfrak{X}_t &= 2G [a(1 + \mu)/(1 - \mu) + b/r^2], \end{aligned}$$

iar rezistențele reduce:

$$(8) \quad \mathfrak{X}_{rred} = E(a - b/r^2), \quad \mathfrak{X}_{tred} = E(a + b/r^2).$$

Constantele  $a$  și  $b$  le vom determina prin condițiile pe contur.

Să presupunem că valoarea lui  $\mathcal{X}_r$  pe fața interioară a țevii adică pentru  $r = r_i$  este presiunea  $p_i$ , iar pe cea exterioară, adică pentru  $r = r_e$ , este presiunea  $p_e$  (fig. 539).

În aceste condițiuni, ținândseamă de semnele lui  $p$ , avem:

$$(10) \quad \begin{aligned} -p_i &= 2G [a(1 + \mu)/(1 - \mu) - b/r_i^2], \\ -p_e &= 2G [a(1 + \mu)/(1 - \mu) - b/r_e^2], \end{aligned}$$

din cari, dacă notăm:

$$(11) \quad k = r_e^2/r_i^2, \quad \mathcal{X} = (p_i - k p_e)/(k - 1),$$

scoatem:

$$(12) \quad \begin{aligned} a &= (1 - \mu) \mathcal{X}/E, \\ b &= (1 + \mu) (p_i - p_e) r_e^2/E (k - 1). \end{aligned}$$

Dacă aceasta valoare a lui  $a$  o introducem în ecuațiile (7), atunci căpătăm:

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_r &= \mathcal{X} - 2G b/r^2, \\ \mathcal{X}_t &= \mathcal{X} + 2G b/r^2. \end{aligned}$$

Din inspectarea acestor formule se vede că rezistențele  $\mathcal{X}_r$  și  $\mathcal{X}_t$ , cât și cele reduse, variază după o hiperbolă (fig. 539).

Din formulele (8) se vede că rezistența cea mai mare este  $\mathcal{X}_{red}$ , pe baza căreia se și face dimensionarea. Dacă punem condiția ca această rezistență să atingă maximum  $\mathcal{X}_a$ , rezistența admisibilă, atunci, din formula (8), avem:

$$\mathcal{X}_a = E (a + b/r_i^2).$$

Dacă în această expresie introducem valorile lui  $a$  și  $b$  de mai sus, căpătăm:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_a &= [(1 - \mu + (1 + \mu) k) p_i - 2k p_e]/(k - 1), \\ k &= [\mathcal{X}_a + (1 - \mu) p_i]/[\mathcal{X}_a - (1 + \mu) p_i + 2 p_e], \\ p_i &= [\mathcal{X}_a (k - 1) + 2k p_e]/[1 - \mu + (1 + \mu) k], \end{aligned}$$

formule care servesc la dimensionarea sau la verificarea unei țevi.

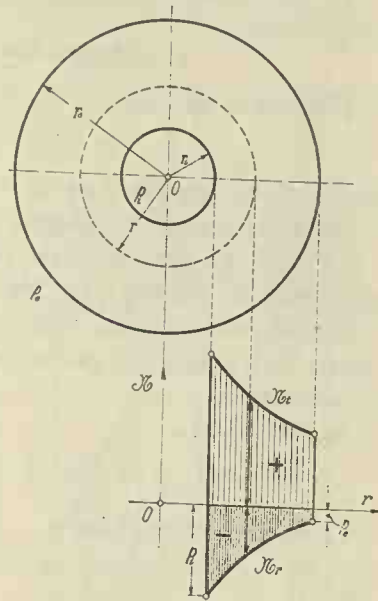


Figura 539

## b) Țevi înfundate.

Formulele de mai sus sunt valabile numai în cazul când în lungul țevii nu se dezvoltă rezistențe  $\mathfrak{X}_x$ .

În cazurile practice, țevile fiind înfundate, vom avea și rezistențe  $\mathfrak{X}_x$ .

Să le evaluăm. Din cauza presiunii interioare,  $p_i$ , se produce în lungul țevii o rezistență la tensiune egală cu:

$$p_i \pi r_i^2 / \pi (r_e^2 - r_i^2) = p_i / (k - 1),$$

presupunând că ea se repartizează uniform pe secțiune, ceea ce nu este de loc adevărat, mai ales în apropierea fundurilor. Așa dar, e vorba de o soluție *aproximativă*.

În același mod, presiunea exterioară,  $p_e$ , produce rezistența la compresiune:

$$p_e \pi r_e^2 / (r_e^2 - r_i^2) = k p_e / (k - 1).$$

Rezultanta lor este:

$$\mathfrak{X}_x = (p_i - k p_e) / (k - 1),$$

adică tocmai valoarea dată de formula (11).

Să presupunem că lungirea specifică în lungul țevii este  $\varepsilon_x$ .

În acest caz, avem de-aface cu rezistențe în spațiu și vom aplica deci formulele (5) dela pag. 298 sau 299.

Introducând valoarea rezistențelor date de aceste formule în ecuația de echilibru (2), găsim aceeași ecuație diferențială (5) și deci aceeași soluție.

Așa dar, avem:

$$u/r = a + b/r^2, \quad du/dr = a - b/r^2, \quad \varepsilon_v = 2a + \varepsilon_x.$$

Cu aceste valori găsim:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_r &= 2G [a - b/r^2 + \varepsilon_v \mu / (1 - 2\mu)], \\ (15) \quad \mathfrak{X}_t &= 2G [a + b/r^2 + \varepsilon_v \mu / (1 - 2\mu)], \\ \mathfrak{X}_x &= 2G [\varepsilon_x + \varepsilon_v \mu / (1 - 2\mu)]. \end{aligned}$$

Rezistențele reduse  $\mathfrak{X}_r$  și  $\mathfrak{X}_t$  au aceleași expresiuni ca și în cazul precedent (formulele 8).

Constantele de integrare le determinăm după aceleași norme.

Făcând calculul, găsim:

$$(16) \quad a = \varepsilon_x = \frac{1}{3} \varepsilon_v = (1 - 2\mu) \mathfrak{X} / E,$$

iar  $b$  are aceeași expresie ca în cazul precedent (formula 12).

Dacă această valoare a lui  $a$  o introducem în formulele (15), găsim tocmai formulele (13) din cazul precedent.

Și în acest caz, rezistența maximă redusă este:

$$\mathfrak{X}_{red} = E(a + b/r^2)_i$$

care va trebui să fie cel mult egală cu  $\mathfrak{X}_a$ .

Dacă în această expresie se pun valorile lui  $a$  și  $b$  de mai sus, se capătă:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_a &= [(1 - 2\mu + (1 + \mu)k)p_i - (2 - \mu)k p_e] / (k - 1); \\ (17) \quad k &= (\mathfrak{X}_a + (1 - 2\mu)p_i) / [\mathfrak{X}_a - (1 + \mu)p_i + (2 - \mu)p_e], \\ p_i &= [\mathfrak{X}_a(k - 1) + (2 - \mu)k p_e] / [1 - 2\mu + (1 + \mu)k]. \end{aligned}$$

Dacă se examinează formulele (14) și (17) se constată că nu este o diferență prea mare între ele.

### c) Țevi cercuite (fretate).

Din formulele (14) sau (17) se vede că dacă am avea o țeavă de grosime infinită deci cu  $k = \infty$ , atunci valoarea lui  $p_i$ , în cazul țevilor înfundate este:

$$p_i = [\mathfrak{X}_a + (2 - \mu)p_e] / (1 + \mu).$$

În cazurile obișnuite,  $p_e = 1$ , adică presiunea atmosferică și deci neglijabilă.

Așa dar, cu un material a cărui rezistență admisibilă este  $\mathfrak{X}_a$  nu putem realiza țevi care să suporte presiuni mai mari decât  $\mathfrak{X}_a / (1 + \mu)$ .

În practică însă avem nevoie de țevi care să suporte presiuni mai mari.

În acest caz, țeava se cercuește sau se fretează cu un manșon, sau fretă, care strânge țeava așa ca înainte de a se exercita presiunea interioară,  $p_i$ , el să fie supus la compresiune. Pentru aceasta dacă diametrul exterior al țevii este ceva mai mare decât diametrul

interior al manșonului este suficient să introducem tubul în manșon

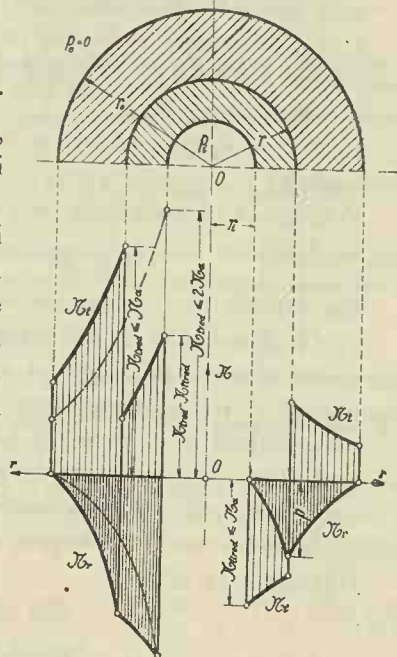


Figura 540

cu forța, cu ajutorul unei prese hidraulice. În acest mod, se realizează în tub o compresiune inițială.

Notăm cu  $r_i$ ,  $r_e$  și  $r$  respectiv raza interioară a țevii, raza exterioară a manșonului și raza lor comună (fig. 540). Mai notăm:

$$(18) \quad k_i = r^2/r_i^2, \quad k_e = r^2/r_e^2, \quad k = r_e^2/r_i^2.$$

Sub acțiunea presiunii  $p_i$ , la contactul între țevă și manșon, se dezvoltă o presiune  $p$ . Aceasta se determină așa că în manșon să avem  $\mathcal{X}_{tred}$  cel mult egal cu  $\mathcal{X}_a$ . Având  $p$  cu ajutorul formulelor (17) deducem pe  $p_i$ .

Grupul format din țevă și manșon lucrează ca un singur bloc și putem găsi pe  $\mathcal{X}_{tred}$  la interiorul țevii,  $\mathcal{X}_{tred}$  care este evident mai mare decât  $\mathcal{X}_a$ . Dacă țeava înainte de exercitarea presiunii a avut o compresiune  $\mathcal{X}_{tired}$ , atunci trebuie să avem relația evidentă:

$$(19) \quad \mathcal{X}_{tred} - \mathcal{X}_{tired} = \mathcal{X}_a.$$

Însă  $\mathcal{X}_{tred}$  nu poate avea o valoare mai mare decât  $\mathcal{X}_a$ , deci  $\mathcal{X}_{tred}$  nu poate avea o valoare mai mare decât  $2\mathcal{X}_a$  (fig. 540).

Prin urmare, chestiunea care se pune este următoarea:

1°. *Ce presiune  $p$  trebuie să fie între țevă și manșon, înainte de exercitarea presiunii  $p_i$ , deci când  $p_i = 0$ , așa ca la interiorul țevii să avem compresiunea  $\mathcal{X}_{tired}$ .*

Dacă  $p_i = 0$ , atunci țeava și manșonul se comportă ca două țevi desfundate.

Vom aplica în consecință țevii formulele (14), care ne dă imediat:

$$(20) \quad p = (k_i - 1) \mathcal{X}_{tired} / 2 k_i.$$

Mai rămâne de rezolvat următoarea chestiune:

2°. *Cu cât trebuie să fie mai mare raza exterioară a țevii față de raza interioară a manșonului așa ca prin introducerea forțată a țevii în manșon să se realizeze presiunea  $p$ ?*

Să presupunem că raza  $r$  a țevii se scurtează prin compresiune cu cantitatea  $u_i$ , atunci raza înainte de deformațiune trebuie să fie  $r + u_i$ . Dacă raza  $r$  a manșonului se lungeste cu  $u_e$ , atunci raza manșonului înainte de deformațiune trebuie să fie  $r - u_e$ .

Diferența lor este:

$$(21) \quad u = u_i + u_e.$$

Cantitățile  $u_i$  și  $u_e$  le calculăm pe fiecare în parte însă ele fiind cantități infinit mici de ordinul întâiu față de  $r$ , valorile lor individuale n'au importanță. Importă numai suma lor. Prin urmare, ajungem la rezultatul dorit dacă diferența razelor  $r$  este  $u$ .

Să calculăm valoarea lui  $u$ . Țeava este supusă la presiunea exterioară  $p$  dată de formula (20), iar manșonul la aceeași presiune  $p$  însă interioară.

Cu ajutorul formulelor (11), (12) și (5), găsim:

$$(22) \quad u_i = pr [(k_i + 1)/(k_i - 1) - \mu]/E, u_e = 2 pr/E (k_e - 1),$$

$$u = pr [(k_i + 1)/(k_i - 1) + 2/(k_e - 1) - \mu]/E.$$

Dacă avem  $p$  și coeficientul de frecare între tub și manșon, avem și forța  $F$  cu care trebuie să apese presa hidraulică țeava în manșon.

**Aplicația Nr. 165.** Să se găsească grosimea unei țevi a cărei rază interioară este  $r_i = 6$  cm, și care suportă o presiune  $p_i = 600$  kg/cm<sup>2</sup>, în ipoteza  $\mathcal{X}_a = 1200$  kg/cm<sup>2</sup> și  $\mu = 0,25$ . Vom presupune țeava înfundată.

Presiunea exterioară  $p_e$  fiind presiunea atmosferică, deci  $p_e = 1$ , o vom neglija.

După a doua formulă (17), avem:

$$k = [1200 + (1 - 2 \cdot 0,25) 600] / [1200 - (1 + 0,25) 600] = 10/3,$$

$$r_e/r_i = \sqrt{10/3} = 1,83; r_e - r_i = 6 (1,83 - 1) = 4,98 \approx 5 \text{ cm.}$$

**Aplicația Nr. 166.** Ce presiune interioară  $p_i$  poate suporta țeava dimensionată ca în aplicația precedentă, dacă  $\mathcal{X}_a = 1500$  kg/cm<sup>2</sup>?

Avem  $r_i = 6$  cm,  $r_e = 6 + 5 = 11$  cm.,  $k = 11^2/6^2 = 3,36$ .

Din ultima formulă (17) avem:

$$p_i = [1500 (3,36 - 1)] / [1 - 2 \cdot 0,25 + (1 + 0,25) 3,36] = 753 \text{ kg/cm}^2.$$

**Aplicația Nr. 167.** Ce presiune interioară poate suporta tubul din cazul precedent dacă se cercuește cu un manșon gros de 3 cm. Resistențele admisibile se iau  $\mathcal{X}_a = 1500$  kg/cm<sup>2</sup>.

Avem  $r_i = 6$  cm,  $r = 11$ ,  $r_e = 14$  cm,

$$k_i = 11^2/6^2 = 3,36, \quad k_e = 14^2/11^2 = 1,62, \quad k = 14^2/6^2 = 5,44$$

Manșonul poate suporta o presiune interioară lui, după ultima formulă (17) în care facem  $p_e = 0$ ,

$$p_i = [1500 (1,62 - 1)] / [1 - 2 \cdot 0,25 + (1 + 0,25) 1,62] = 368 \text{ kg/cm}^2,$$

iar țeava, după aceeași formulă, în care acum facem  $p_e = 368$  kg/cm<sup>2</sup>, suportă o presiune interioară de:

$$p_i = [1500 (3,36 - 1) + (2 - 0,25) 368] / [1 - 0,25 \cdot 2 + (1 + 0,25) 3,36]$$

$$p_i = 1214 \text{ kg/cm}^2.$$

Această presiune dă în țeavă, considerând grupul țeavă și manșon, o tensiune maximă dată de prima ecuație (17) în care facem  $p_e = 0$  și  $p_i = 1214$  kg/cm<sup>2</sup>,

$$\mathcal{X}_t = [1 - 2 \cdot 0,25 + (1 + 0,25) 5,44 \cdot 1214] / (5,44 - 1) = 1996 \text{ kg/cm}^2.$$



Prin urmare, în țevă trebuie să avem o compresiune inițială de:

$$\mathfrak{X}_t = 1996 - 1500 = 496 \text{ kg/cm}^2.$$

Efectul manșonului este că țeva poate suporta o presiune de cca 1,6 ori mai mare ca în cazul când n'are manșon.

Dacă facem ca  $p_i = 0$ , atunci în țevă trebuie să avem  $\mathfrak{X}_{\text{trez}} = 496 \text{ kg/cm}^2$

$$\text{Formula (20) ne dă } p = (3,36 - 1) 496/2 = 3,36 = 174 \text{ kg/cm}^2$$

Țeva va trebui presată în manșon așa ca la contactul lor să avem  $p = 174 \text{ kg/cm}^2$ . Pentru aceasta este suficient ca diferența razelor de 11 cm. să fie:

$$u = 174 \times 11 [(3,36 + 1) / (3,36 - 1) + 2 / (1,62 - 1) - 0,25] / 2,1 \cdot 10^6 = 0,0044 \text{ cm.}$$

$$u = 0,044 \text{ mm.}$$

## 2. Calculul unui disc care se rotește.

Chestiunea este analoagă celei precedente, cu deosebirea că în sensul razei avem și accelerația  $\gamma_1$ , așa cum arată formula (1).

Ecuția (2) în acest caz, ia forma:

$$d(r \mathfrak{X}_r) / dr - \mathfrak{X}_t + \gamma_1 r = 0.$$

Dacă  $m$  este masa unității de volum, atunci avem:

$$\gamma_1 = m \omega^2 r,$$

în care  $\omega$  este viteza de rotație a discului.

### a) Disc cilindric în rotație.

Deformațiile sunt aceleași ca în cazul precedent. Dacă valorile  $\mathfrak{X}_r$  și  $\mathfrak{X}_t$  date de ecuațiile (5) de la pag. (300) le introducem în ecuația de echilibru de mai sus, căpătăm:

$$r^2 d^2 u / dr^2 + r du / dr - u + 8 c r^3 = 0,$$

în care am notat:

$$\frac{1}{8} (1 - \mu^2) m \omega^2 / E = c.$$

Soluția acestei ecuații este:

$$u = ar + b/r - cr^3$$

căre ne dă:

$$u/r = a + b/r^2 - cr^2, \quad du/dr = a - b/r^2 - 3cr^2.$$

Avem:

$$\mathfrak{X}_r = [a(1 + \mu) - b(1 - \mu)/r^2 - (3 + \mu)cr^2] E / (1 - \mu^2),$$

$$\mathfrak{X}_t = [a(1 + \mu) + b(1 - \mu)/r^2 - (1 + 3\mu)cr^2] E / (1 - \mu^2).$$

Constantele  $a$  și  $b$  le determinăm prin condiția ca  $\mathfrak{X}_r = 0$ , pentru  $r_i$  și  $r_e$ .

Avem:

$$a = (3 + \mu) c (r_e^2 + r_i^2) / (1 + \mu) \quad , \quad b = (3 + \mu) c r_e^2 r_i^2 / (1 - \mu).$$

Ne interesează rezistența redusă maximă. Se vede numai deocâmt că  $\mathfrak{X}_{\text{red}}$  va atinge valoarea maximă.

Valoarea ei este:

$$\mathfrak{X}_{\text{red}} = \frac{1}{8} m \omega^2 [(3 + \mu) (1 - \mu) (r_e^2 + r_i^2) + (3 + \mu) (1 + \mu) r_e^2 r_i^2 / r^2 - (1 - \mu^2) r^2]$$

care, pentru  $r = r_i$ , ne dă:

$$\mathfrak{X}_{\text{red}} = \frac{1}{8} m \omega^2 [(3 + \mu) r_e^2 + (1 - \mu) r_i^2].$$

Dacă discul este plin, avem  $r_i = 0$ .

#### b) Disc de egală rezistență.

Din exemplul precedent se vede că  $\mathfrak{X}_{\text{red}}$  variază foarte repede cu  $r$ . Același lucru se petrece și cu  $\mathfrak{X}_r$  și  $\mathfrak{X}_t$ .

Se pune chestiunea să găsim un profil de disc așa ca să avem peste tot  $\mathfrak{X}_r = \mathfrak{X}_t = \mathfrak{X} = ct$ , adică să fie de egală rezistență. Să presupunem că grosimea discului la distanța  $r$  de axul de rotație este  $x$  (fig. 541).

Ecuția:

$$d(r \mathfrak{X}_r) / dr - \mathfrak{X}_t + \gamma_1 r = 0,$$

a fost stabilită în ipoteza că în sensul axei de rotație avem un element de volum de lungime 1. Dacă luăm o lungime egală cu  $x$ , variabilă cu raza, vom avea, ținând seama că  $\mathfrak{X} = ct$ :

$$d(rx) / dr - x + \gamma_1 rx / \mathfrak{X} = 0,$$

sau:

$$dx / dr + m \omega^2 r x / \mathfrak{X} = 0,$$

care, dacă notăm:

$$m \omega^2 r^2 / 2\mathfrak{X} = m \omega^2 / 2\mathfrak{X} = k,$$

ne dă:

$$x = x_0 e^{-k}.$$

Acest profil se dă discurilor turbinelor cu iuțeala mare de rotație.

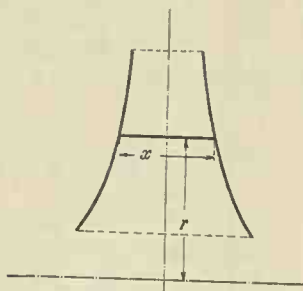


Figura 541

## Indicele numelor și al denumirilor

- d'Alembert* 696, 697.  
Arbore solicitat excentric 692.  
Arce 195.  
„ cu două articulații 594.  
„ „ trei „ 206.  
„ „ „ „ cu zăbrele 217  
Armare (coeficient de) 371.  
Armătură de fier 370.  
Articulații 61.  
Axa barei 3.  
„ centrală 48.  
„ neutră 342.
- Bach* 290, 312, 324, 350, 351, 505.  
Bară de acuplare 686.  
*Bauschinger* 328.  
Beton armat 326.  
„ „ circuit (fretat) 329.  
*Bernoulli* 341, 342, 343, 350, 368, 369, 389, 445.  
*Bessel* 537, 559.  
Bielă 687.  
*Bleich* 510.  
Bloc 4, 783.  
*Bow* 154.  
*Büljinger* 290.  
Buloane 494.
- Cadre 620.  
„ închise 625.  
„ multiple 630.  
Calitate (coeficient de) 289.  
Caracteristică (curba) 283.
- Castigliano* (teorema lui) 567, 568, 569, 570, 576, 577, 584, 585, 586, 595, 598, 603, 610, 613, 619, 626, 634, 653, 655, 669, 702.  
*Cauchy* 253.  
Centru instantaneu de rotație 165.  
*Clapeyron* 460, 461, 462, 464, 466, 474, 475, 476, 585, 613, 621, 634, 638, 641, 648, 649, 650, 652, 660, 663, 664, 666, 678.  
Coeficienți nedeterminați (metoda) 586, 644.  
*Coker* 390.  
Conjugat (plan) 49.  
„ (poliedri) 50.  
Contrațiune 286.  
Contraverticală pe reazem 464.  
*Coulomb* 258, 263.  
*Cremona* 152, 153, 217, 226, 227, 229, 230, 654.  
*Culmann* 97, 155, 217, 265.
- Darboux* 723.  
Deformație 273.  
„ (a arcelor) 488.  
„ elastică 291.  
„ grinzilor drepte 352.  
„ mare (limita lor) 285.  
„ permanentă 291.  
„ specifice (lungiri, lunecări) 274, 275.  
Deformație specifice (variația lor) 277.  
Deplasări 274.  
„ virtuale 164.

- Deplasări virtuale (ecuația lor) 23.  
 Dinam (răsucitor) 48.  
 Dinți (grinzi cu) 393.  
 Disc, — de egală rezistență, 790, 791.  
*Dischinger* 745.  
 Dualitatea rezistențelor  $\bar{\sigma}$  240.  
 Echilibrul construcțiilor 22.  
 Eforturi în bare 148.  
 „ dinamice 685.  
 „ suplimentare 658.  
 Elastică (regiune) 446.  
 Elasticitate (coeficient de) 283.  
 „ (limită de) 291.  
 Elemente de construcție 3.  
 Epruvetă 282.  
*Euler* 533, 540, 542, 543, 545, 547, 550,  
 551, 552, 553, 554.  
 Excitație 708.  
 „ (frecvența ei) 709.  
 Flambaj 528.  
 „ (coeficient de) 545.  
 „ (grinzilor curbe) 562.  
 „ (prin incovoiere) 561.  
 „ (lungime de) 540.  
 „ (rezistență la) 542.  
 Flexibilitate 411.  
*Föppl* 164, 308, 310.  
 Forțe (vezi încărcări).  
 „ (compunere și descompunere) 26.  
 „ (coordonatele lor) 24.  
 „ (de lunecare) 392  
 „ (normale sau axiale) 101.  
 „ (poligon de) 28.  
 „ (reprezentarea lor) 24.  
 „ (tăietoare) 101.  
 „ ( „ curba) 104  
 „ ( „ maximă) 115  
*Fourier* 408, 743, 744, 745, 768.  
*Frenet* 19, 220, 224, 723.  
 Funicular (curba) 72.  
 „ (lănțișor) 81.  
 „ (oarecari) 84.  
 „ (parabola) 78.  
 Greutate elastică 571.  
 Grinzi 3.  
 „ armate trapezoidal 591.  
 Grinzi armate triunghiular 590.  
 „ continue 460.  
 „ cu contrafișe 593.  
 „ curbe 195.  
 „ drepte 100.  
 „ „ static nedeterminate 453.  
 „ rigide 142.  
 „ suspendate 597.  
 „ cu zăbrele, plane (diagonale,  
 montanți, tălpi) 141, 142.  
 Grinzi cu zăbrele, cu bare suplimentare  
 187.  
 Grinzi cu zăbrele, cu diagonale în k  
 181.  
 Grinzi cu zăbrele în spațiu 225.  
*Groth* 308.  
*Guest* 309.  
*Henneberg* 159, 227.  
*Hodgkinson* 290.  
*Hooke* 284, 286, 289, 290, 291, 292,  
 293, 305, 342, 343, 368, 369, 442,  
 465, 467, 483, 720.  
*Huber* 312, 313.  
 Hysteresis 295.  
 Imbinari 492.  
 Impact (multiplicator) 704.  
 Impingerea pământului 257.  
 Încărcări, accidentale, concentrate, con-  
 tinuie, dinamice, mobile și perma-  
 nente 20, 21.  
 Încărcări echivalente 132.  
 Încăstrări 61.  
 Incovoiere specifică 342.  
 Indeformabilitate strictă 146, 510.  
*Intze* 741.  
 Invarianti 244, 279, 299, 728, 766.  
*Ionescu Ion* 137, 140, 508, 510, 544.  
 Isostatice (suprafețe) 251.  
 Isotrop, isotropie 300.  
*Johnson* 542, 543, 545, 546, 547, 552,  
 553, 554.  
*Jurawski* 387.  
*Kirkaldy* 323.  
*Lagrange* 766, 768.  
*Lamé* 253.

- Linii de influență, coeficient de, suprafața liniei de influență, multiplicatorul ei 113, 114, 115, 126, 174.  
 Idem, la sistemele static nedeterminate 669, 670.  
*Ljungberg* 295.  
 Lucru mecanic, admisibil, exterior, interior 316, 318.  
 Lucru mecanic, admisibil, interior, prin deformațiune 302.  
 Lucru mecanic minim 568.  
 „ „ specific 228.  
 „ „ virtual 23, 164, 577, 632.  
 Lunecare specifică 275.  
 „ (forța de) 392.  
 Lungire (efectivă, la rupere, specifică) 143, 274, 286, 307.  
*Maxwell* 573, 574, 575, 577, 578, 579, 604, 609, 670.  
*Mesnager* 773.  
*Mohr* 97, 247, 250, 259, 269, 272, 309, 310, 311, 312, 313, 324, 347.  
 Moment încovoietor (curba lui, maxim, maximum maximum, suprafața momentelor, moment static al suprafeței) 101, 104, 120, 131, 355.  
 Moment de răsucire 101.  
 „ de răsturnare, stabilitate 270.  
 „ rezistent (efectiv, necesar) 344, 365.  
 Moment static, static absolut, static ecuatorial, de inerție, ecuatorial, axial, centrifugal 95, 96, 347, 447, 695.  
*Mörsch* 312.  
*Navier* 343, 344, 345, 346, 348, 350, 351, 387, 451, 768.  
 Nituri 505.  
 Noduri 142, 225, 582.  
 „ (metoda separării) 144, 226.  
 „ virtuale 162.  
 Obosala (rupere prin) 293.  
 Oșii 694.  
 Pendul 689.  
 Pene 502.  
 „ (grinzi cu) 393.  
 Piez 235.  
*Pigeaud* 770.  
*Piobert* 310.  
 Plăci, clasificarea lor 4, 720, 729.  
 „ (ecuații generale de echilibru) 726.  
 „ (plane groase, dreptunghiulare, circulare) 762, 768, 774.  
 Plăci subțiri (echilibru) 730, 756.  
 „ „ plane (deformația) 754.  
 Plan (conjugat, al momentului) 49.  
 Plastică (regiune) 446.  
 Plasticitate (coeficient de, limită de) 285, 305.  
 Pleoștire 215.  
*Poisson* 286, 298, 299, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 308, 329.  
 Pol, distanța polară, rază polară 35, 36, 37.  
 Poligon (de forțe, de poziție, funicular) 28, 34, 36.  
*Polonceau* 150.  
 Poziții false 161.  
 Potențială (legea) 296.  
*Prandtl* 557.  
 Presiune (curba de) 619.  
 Proporționalitate (limita de) 285.  
 Puncte fixe 463.  
*Rankine* 258, 542, 543, 550, 551.  
 Răspândire (coeficient de) 545.  
 Răsucire specifică 398.  
 Răsucitor 48.  
 Raza (de curbură, de răsucire) 19.  
 „ (de curbură geodesică, principală, de răsucire geodesică) 722, 723.  
 Reacțiuni 22, 60.  
 „ (curba de reacțiuni) 119.  
 „ (a suprafețelor de momente) 461.  
 Reazime (elastice) 465.  
 „ (simple, articulații, încastrări) 60.  
 Reazime (a grinzilor cu zăbrele în spațiu) 232.  
*Rebhan* 263, 271.  
 Reciproce (figuri) 39, 50, 153.

- Reciprocitatea deplasărilor 574.  
Resort elicoidal 224.  
Rezistență, normală, de tensiune, de compresiune, tangențială, de tăiere, de forfecare, de lunecare 235, 236.  
Rezistență de adeziune 326.  
„ la rupere, totală, prin obo-seală (alternativă și repetată) 286, 294.  
Rezistențe active și pasive 261.  
„ componentele lor 239.  
„ variația lor, direcții principale, direcții conjugate, valori principale, diagrama variației lor 238, 239, 240, 241, 242, 245, 246.  
Rezistențe în plan 248.  
„ admisibile 316.  
„ reduse 301.  
„ compuse 415.  
„ (coeficient de) 288.  
„ flambaj 542.  
„ (suprafețe de) 348.  
„ (solid de egală) 330.  
„ (disc de egală) 791.  
Rigiditate (modul de) 352.  
*Ritter* 156, 181, 217.  
Săgeată 356.  
„ grinzilor în zăbrele 572.  
Sâmbure central 421.  
*Saint-Venant (Barré de)* 308, 312, 324.  
Sarcini (vezi încărcări) 405, 408, 410.  
„ critice 527.  
„ dinamice 704.  
„ directe și indirecte 127.  
„ elastice 323.  
Scări 38, 435, 470.  
*Schüle* 290.  
Surgere (limita de) 285.  
Secțiune (a barei) 3.  
„ brută, netă, ideală 325, 327.  
„ periculoasă 326.  
Secțiune (metoda secțiunilor) 100, 154, 228.  
Siguranță (coeficient de) 316.  
*Simpson* 437, 595.  
Șini 694.  
Sistem nul 50.  
Stabilitate 525, 708.  
Sten 235.  
*Stodola* 717.  
Strămutări (vezi deplasări).  
Subțirime (coeficient de) 542.  
Suprafețe (geometria lor) 720.  
Suprapunerea efectelor 149, 297.  
Taluz natural 257.  
Teavă 783.  
„ cu mașon (cercuită) 787.  
Temperatură (variație de) 566.  
„ (influența ei) 597.  
Teren elastic 466.  
*Tetmajer* 542, 543, 545, 546, 547, 553, 554.  
*Timocenko* 533.  
Trisectoare 463.  
Utilizare (coeficient de) 514.  
Vectori 5.  
„ (scalarul, direcția și algebra) 5, 6.  
Vectori (diferențierea lor) 17.  
Vibrația grinzilor 708.  
„ (frecvența ei) 709.  
*Vierendeel* 660, 661, 665.  
Vitesa critică 716.  
*Whitworth* 495, 496.  
*Winkler* 119.  
*Wöhler* 294.  
*Zeiss-Dywidag* 747, 752.  
Zid de sprijinire 257.

VERIFICAT  
2007



VERIFICAT  
1987

VERIFICAT  
2017