Vieleu

CURSUL FACULTĂȚII DE ȘTIINȚE. UNIVERSITATEA DIN CLUJ

LECȚIUNI DE GEOMETRIE PURĂ INFINITEZIMALĂ

DE

N. ABRAMESCU

PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ

CU O PREFAȚĂ

DE

MAURICE D'OCAGNE

MEMBRU AL INSTITUTULUI FRANȚEI

PROFESOR LA ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN PARIS

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN CLUJ

1930

CURSUL FACULTĂŢII DE ŞTIINŢE. UNIVERSITATEA DIN CLUJ

LECŢIUNI
DE
GEOMETRIE
PURĂ
INFINITEZIMALĂ

DE

N. ABRAMESCU

PROFESOR LA FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ

CU O PREFAŢĂ

DE

MAURICE D'OCAGNE

MEMBRU AL INSTITUTULUI FRANŢEI

PROFESOR LA ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN PARIS

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN CLUJ

1930

au professeur V. Abramescu
de l'Université de Cluj
M. d'Ocagne

Dedic acest prim curs de Geometrie pură Infinitezimală imprimat în limba română, marelui geometru francez, Domnului

Maurice d'Ocagne,

Membru al Institutului Franței,
Profesor la Școala Politechnică din Paris,

în semn de admirație și respectuos omagiu.

PRÉFACE.

Certes, l'analyse peut être regardée comme l'instrument de recherche le plus puissant dont dispose le géomètre et l'on ne saurait trop s'émerveiller des conquêtes qui lui sont dues, mais l'enthousiasme que l'on en peut ressentir ne doit pas faire méconnaître le haut intérêt des méthodes de la géométrie dite synthétique *et conduir à les négliger. Il est d'ailleurs possible de faire appel sur ce point à l'opinion d'un illustre analyste,* Lagrange, *qui, dans les* Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin, *écrivait en 1773: „Quelques avantages que l'analyse algébrique ait sur les méthodes géométriques des anciens, qu'on appelle vulgairement, quoique fort improprement,* synthèse, *il est néanmoins des problèmes où celle-ci paraît préférable, tant par la clarté lumineuse qui l'accompagne que par l'élégance et la facilité des solutions qu'elle donne". Un tel jugement, émanant d'une pareille autorité, suffit à légitimer le maintien d'un enseignement de pure géométrie dans le cycle des hautes études mathématiques. Mais ce maintien peut se justifier encore par un autre ordre de considération. Les méthodes de la géométrie synthétique se montrent d'une remarquable fécondité dans le domaine des applications techniques où il semble qu'on les ait un peu trop négligées dans la période contemporaine, ce qui s'explique, au surplus, par la cammodité, la généralité qu'offre la méthode analytique, l'économie de pensée que comporte son emploi. Mais on pouvait déplorer que ces avantages fissent par trop négliger les admirables ressources que peut offrir aussi aux techniciens la méthode synthétique* (1). *C'est pourquoi je me suis efforcé, par mon enseignement de l'Ecole polytechnique de Paris, de remettre, dans la plus large mesure possible, cette méthode en honneur, alors que,*

---

(1) *Je crois devoir signaler à ce propos le remarquable ouvrage qu'un de mes anciens élèves,* M. Wolkowitsch, *vient de publier sous le titre:* Applications de la géométrie à la stabilité des constructions *(en deux volumes; Doin, éditeur; 1928--1930).*

dans un autre cours, nos élèves reçoivent un enseignement très élevé de l'analyse. Aussi, est ce avec une particulière satisfaction que j'ai vu, à ma suite, M. le professeur N. Abramesco *s'engager dans la même voie, adoptant même, sur beaucoup de points, mes propres démonstrations pour en répandre la connaissance dans son pays, y ajoutant d'ailleurs — ai-je besoin de le dire? — bien des choses intéressantes, tirées de son propre fonds. Je souhaite vivement de voir le livre qu'il consacre à ce sujet trouver, auprès du public roumain, tout le succès qu'il mérite.*

Maurice d'Ocagne,
Membre de l'Institut de France,
Professeur à l'Ecole Polytechnique de Paris.

Paris, le février 1930.

PRECUVÂNTARE.

Această lucrare este rezumatul lecţiunilor de Geometrie pură Infinitezimală, pe care le profesez la Universitatea din Cluj, cu scopul de a menţine, alături de metoda de cercetare a Analizei matematice, şi una intuitivă de Geometrie pură.

Primele lecţiuni de acest gen la noi în ţară, se datoresc D-lui Profesor universitar şi Inginer ER. PANGRATI, *fostul meu profesor, ale cărui neîntrecute prelegeri ce ne făcea la Universitatea din Bucureşti mi-au rămas ca model, şi de aceea îi aduc şi pe această cale omagiile mele de recunoştinţă.*

Acest curs este tipărit din fondul pe care Ministerul Instrucţiunii l'a pus la dispoziţia Universităţii din Cluj pentru publicarea manualelor didactice universitare. Exprim aci recunoscătoare mulţumiri Onor. Minister al Instrucţiunii şi Comisiunei însărcinată cu îngrijirea publicărei, precum şi Senatului universitar din Cluj pentru că a aprobat publicarea acestor lecţiuni.

Mulţumesc în acelaş timp şi Tipografiei Cartea Românească din Cluj, pentru stăruinţa depusă ca lucrarea să iasă cât mai bine.

N. Abramescu.

Cluj, Octombrie 1930.

INTRODUCERE.

1. Geometria Infinitezimală (sau diferenţială) studiază proprietăţile figurilor geometrice în vecinătatea unuia din elementele sale. Astfel, tangenta la o curbă este dreapta care uneşte un punct cu un punct infinit vecin, cercul osculator trece prin trei punct infinit vecine.

Acest studiu se poate face, sau în mod analitic, sau pur geometric. Studiul analitic al Geometriei Infinitezimale a fost desăvârşit de marele geometru francez *Darboux,* în monumentala sa lucrare, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.*

Matematicile considerate independent de aplicaţiunile lor, se divid în două ramuri distincte, Analiza şi Geometria.

Dacă, cum spune D-l *M. d'Ocagne* (1), Analiza constitue utilul prin excelenţă în cercetările matematice, dacă permite, chiar în domeniul faptelor din spaţiu, să confere fundamentelor teorii toată soliditatea pe care o cere o critică riguroasă, nu este mai puţin adevărat, după justa observare a eminentului analist, D. *P. Appell* (2), că, *dacă prin întrebuinţarea Analizei se câştigă repede o oarecare îndemânare în mânuirea formulelor, se sfârşeşte prin a se perde obişnuinţa raţionamentului direct, se renunţă la această metoadă, de altminterlea foarte instructivă, care consistă în a considera lucrurile aşa cum se prezintă (în ele înşi-le) şi fără a le perde din vedere în cursul raţionamentului (Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps,* § II).

Mai mult, Geometria pură se impune prin nenumăratele sale mijloace de cercetare, prin claritatea propoziţiunilor pe

(1) **M. d'Ocagne,** Prefaţa lucrărei sale, *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique,* 1917.

(2) **P. Appell,** Prefaţa la lucrarea D-lui **Demartres,** *Cours de Géométrie Infinitésimale,* 1913.

care le pune în evidenţă, prin simplicitatea şi eleganţa soluţiunilor pe care le dă.

La toate ramurile de aplicaţie, în legătură cu matematicile, metoda geometrică aduce ajutorul cel mai eficace, oferă soluţiunile cele mai variate, cele mai elegante şi mai potrivite, cele mai neprevăzute.

Primele cercetări de Geometrie pură Infinitezimală sunt tot atât de vechi ca şi începuturile Calculului Infinitezimal, iar ridicarea lor la rangul unui corp de doctrină este datorită geometrilor *Monge, Poncelet, Ossian Bonnet, Chasles, Mannheim, M. d'Ocagne*. Primele lucrări în acest sens (în Franţa) sunt ale lui *Chasles, Traité de Géométrie Supérieure* (1852), *Aperçu historique* (1889); *Mannheim, Principes et développements de Géométrie Cinématique* (1894); *Schoenflies* (traducere Speckel), *Géométrie du mouvement,* conţinând *Notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites* de *Fouret* (1893); a D-lui *M. d'Ocagne, Cours de Géométrie Descriptive et de Géométrie Infinitésimale* (1896). *Chasles, Mannheim* şi D-l *M. d'Ocagne* sunt întemeetorii Geometrii pure Infinitezimale. O altă lucrare în acest sens este a lui *Demartres, Cours de Géométrie Infinitésimale* (1913) şi în fine cea mai nouă, este a D-lui *M. d'Ocagne, Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (1917), a cărei nouă ediţie, *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique,* a apărut în 1930 şi de care ne-am servit în mare parte în alcătuirea acestor lecţiuni, expunând uneori chiar propriile şi neîntrecutele demonstraţiuni a D-lui M. d'Ocagne.

INFINIŢII MICI.

2. Infiniţii mici. Un infinit mic este, prin definiţie, o cantitate variabilă, care tinde către zero. Când se compară doi infiniţi mici α şi β, care variază simultan, se pot prezenta următoarele cazuri: $\frac{\beta}{\alpha}$ tinde către zero, când se zice că β este infinit mic în raport cu α; dacă $\frac{\beta}{\alpha}$ tinde către o limită diferită de zero sau infinit, sau mai general, rămâne cuprins între două numere de acelaş semn, se zice că β şi α sunt infiniţi mici de acelaş ordin.

Se compară, în general, infiniţii mici care figurează în aceaşi chestiune, cu unul dintre ei, θ, care se numeşte infinit mic principal. Un infinit mic α este de ordinul n, când raportul $\alpha : \theta^n$ tinde către o cantitate k, finită şi diferită de zero, adică

$$\lim \frac{\alpha}{\theta^n} \to k, \quad \alpha = k\theta^n + \varepsilon\theta^n,$$

ε tinzând către zero în acelaş timp cu θ. $k\theta^n$ se zice partea principală a infinitului mic α.

Asupra infiniţilor mici putem arăta următoarele proprietăţi.

1⁰ *Suma unui număr mărginit de infiniţi mici de acelaş ordin este un infinit mic de acelaş ordin.* În adevăr, să considerăm infiniţii mici de ordinul n,

$$\alpha = k\theta^n + \varepsilon\theta^n, \quad \alpha' = k'\theta^n + \varepsilon'\theta^n \ldots$$

Avem

$$\alpha + \alpha' + \ldots = (k + k' + \ldots)\,\theta^n + (\varepsilon + \varepsilon' + \ldots)\,\theta^n,$$

relaţiune care probează că suma $(\alpha + \alpha' + \ldots)$, de un număr determinat de termeni, este un infinit mic de acelaş ordin n cu cei daţi.

2⁰ *Diferenţa a doi infiniţi mici de acelaş ordin este un infinit mic de un ordin cel puţin egal cu acela al infiniţilor mici consideraţi.* În adevăr, avem

$$\alpha - \alpha' = (k - k')\,\theta^n + (\varepsilon - \varepsilon')\,\theta^n.$$

Diferenţa $(\alpha - \alpha')$ este un infinit mic de ordinul n când $k \neq k'$ şi este de ordin superior lui n când $k = k'$.

3⁰ *Produsul a doi infiniţi mici este un infinit mic de un ordin egal cu suma ordinelor infiniţilor mici consideraţi.* Fie

$$\alpha = k\theta^n + \varepsilon\theta^n, \quad \alpha' = k'\theta^m + \varepsilon'\theta^m; \quad \varepsilon, \varepsilon' \to 0.$$

Avem

$$\alpha\alpha' = kk'\theta^{m+n} + (k\varepsilon' + k'\varepsilon)\,\theta^{m+n} + \varepsilon\varepsilon'\theta^{m+n}.$$

Se vede că

$$\lim \frac{\alpha\alpha'}{\theta^{m+n}} \to kk',$$

ceea ce probează că produsul $\alpha\alpha'$ este un infinit mic de un ordin $(m+n)$, egal cu suma ordinelor m şi n ale infiniţilor mici consideraţi.

4⁰ *Câtul a doi infiniţi mici este un infinit mic de un ordin egal cu diferenţa ordinelor celor doi infiniţi mici consideraţi.* Fie

$$\alpha = k\theta^m + \varepsilon\theta^m, \quad \alpha' = k'\theta^n + \varepsilon'\theta^n, \quad m > n.$$

Avem

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{k+\varepsilon}{k'+\varepsilon'}\theta^{m-n}, \quad \lim \frac{\frac{\alpha}{\alpha'}}{\theta^{m-n}} = \lim \frac{k+\varepsilon}{k'+\varepsilon'} \to \frac{k}{k'},$$

ceea ce probează că $\frac{\alpha}{\alpha'}$ este un infinit mic de ordinul $(m-n)$.

5⁰ *Infiniţi mici echivalenţi*. Doi infiniţi mici se zic echivalenţi dacă au aceeaşi parte principală. De ex.,

$$\alpha = k\theta^n + \varepsilon\theta^n, \quad \alpha' = k\theta^n + \varepsilon'\theta^n.$$

Raportul a doi infiniţi mici echivalenţi este egal cu 1, căci

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = \lim \frac{k\theta^n + \varepsilon\theta^n}{k\theta^n + \varepsilon'\theta^n} = \lim \frac{k+\varepsilon}{k+\varepsilon'} = \frac{k}{k} = 1 \ (\varepsilon, \varepsilon' \to 0).$$

6⁰ *Limita raportului a doi infiniţi mici este egală cu limita raportului infiniţilor mici echivalenţi*. In adevăr, fie α, β doi infiniţi mici şi α', β' infiniţii mici echivalenţi. Avem

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1, \ \lim \frac{\beta}{\beta'} = 1,$$

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \ \frac{\alpha'}{\beta'} \ \frac{\beta'}{\beta}\right) = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

De aci rezultă că limita raportului a doi infiniţi mici nu se schimbă când înlocuim pe fiecare din ei cu partea lor principală.

7⁰ *Limita sumei mai multor infiniţi mici, de acelaş ordin, nu se schimbă dacă înlocuim infiniţii mici cu alţii echivalenţi*. În adevăr, fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, p infiniţi mici şi $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ echivalenţii lor, adică

$$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1, \ldots \lim \frac{\alpha_p}{\beta_p} = 1.$$

Să considerăm rapoartele

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots \frac{\alpha_p}{\beta_p}.$$

Să presupunem că am aranjat astfel notaţiile, în cât $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ să fie cel mai mic şi $\frac{\alpha_p}{\beta_p}$ să fie cel mai mare din aceste rapoarte.

Avem

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

deci

$$\alpha_1 < \beta_1 \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

$$\alpha_2 < \beta_2 \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

$$\alpha_{p-1} < \beta_{p-1} \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

$$\alpha_p = \beta_p \frac{\alpha_p}{\beta_p}.$$

Adunând aceste relații, avem

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p < \frac{\alpha_p}{\beta_p}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p),$$

(1)
$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p} < \frac{\alpha_p}{\beta_p}.$$

De asemenea,

$$\alpha_p > \beta_p \frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \alpha_{p-1} > \beta_{p-1} \frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \ldots \alpha_2 > \beta_2 \frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \alpha_1 = \beta_1 \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

De unde, adunând,

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p > \frac{\alpha_1}{\beta_1}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p),$$

(2)
$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Comparând (1) cu (2), urmează

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p} < \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

adică raportul

(3)
$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p}$$

este cuprins între cel mai mic și cel mai mare din rapoartele $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \ldots \frac{\alpha_p}{\beta_p}$.

Dar la limită aceste rapoarte tind către 1. Raportul (3) fiind cuprins între două cantități care tind către 1, urmează că acest raport are limita 1, adică

$$\lim \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p} = 1,$$

$$\lim (\alpha_1 + \ldots + \alpha_p) = \lim (\beta_1 + \ldots + \beta_p)$$

şi astfel proprietatea enunţată este verificată.

De aci urmează că *limita sumei de infiniţi mici nu se schimbă dacă înlocuim infiniţii mici cu părţile lor principale.*

3. Metoda infinitezimală constă în a înlocui infiniţii mici, care figurează în problema de rezolvat, cu alţii echivalenţi, pe care îi alegem astfel ca să simplificăm cât mai mult raţionamentele şi calculele. Rezultatul final nu va fi greşit din cauza acestor înlocuiri, căci, în definitiv, n'avem de calculat de cât limite de rapoarte sau limite de sume.

CURBELE PLANE.

CURBURA CURBELOR PLANE.

4. Lungimea unui arc de curbă. Să considerăm un arc de curbă plană AB (Fig. 1) cu simplă conexiune. Fie M şi M′ două puncte infinit vecine ale acestui arc. Tangenta în punctul M la curba AB este limita către care tinde dreapta MM′ când M′ tinde către M. Normala în M este perpendiculara în M pe tangenta în acest punct.

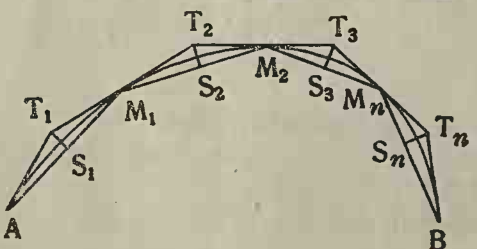

Fig. 1.

Să considerăm pe arcul AB punctele M_1, $M_2, \ldots M_n$, în ordinea după care un mobil ar descrie arcul AB, de la A spre B. Să presupunem că aceste puncte sunt aşa de apropiate, în cât arcele parţiale AM_1, $M_1M_2, \ldots M_nB$ să fie convexe şi că coardele subîntinse de aceste arce să facă unghiuri ascuţite cu tangentele duse la cele două extremităţi ale fiecărui arc. Fie T_1, $T_2, \ldots T_n$ punctele de intersecţie ale tangentelor duse în A, M_1, $M_2, \ldots M_n$, B. Aşa fiind, linia poligonală $AM_1 \ldots M_nB$ este înscrisă, iar linia poligonală $AT_1 \ldots T_nB$ este circumscrisă arcului AB.

In aceste condiţiuni, *lungimea arcului* AB *este limita către care tinde perimetrul linii poligonale înscrise în acest arc, când laturile acestei linii poligonale tind către zero.*

Pentru a justifica această definiţie, va trebui să arătăm că această *limită există* şi că este *unică*, adică este independentă de legea după care laturile tind către zero.

1⁰ Vom arăta, mai întâi, că *raportul perimetrelor unei linii poligonale înscrise şi a linii poligonale circumscrise corespunzătoare, tinde către* 1, *oricare ar fi legea după care laturile linii înscrise tind către zero.*

In adevăr, fie $S_1, S_2, \ldots S_n$ proecţiile punctelor $T_1, T_2, \ldots T_n$ pe laturile $AM_1, M_1M_2, \ldots M_nB$. Fiindcă fiecare coardă face unghiuri ascuţite cu tangentele la extremităţile sale, punctele $S_1, S_2, \ldots S_n$ cad respectiv în interiorul segmentelor AM_1, $M_1M_2, \ldots M_nB$.

Raportul perimetrelor liniilor poligonale circumscrise şi înscrise este egal cu

$$\frac{AT_1+T_1M_1+M_1T_2+\ldots+M_nT_n+T_nB}{AS_1+S_1M_1+M_1S_2+\ldots+M_nS_n+S_nB}. \tag{4}$$

Dar, această valoare este cuprinsă între cel mai mare şi cel mai mic din rapoartele

$$\frac{AT_1}{AS_1}, \frac{T_1M_1}{S_1M_1}, \ldots \frac{T_nB}{S_nB}. \tag{5}$$

Să considerăm unul oarecare din aceste rapoarte, de ex., $\frac{M_1T_2}{M_1S_2}$, care este egal cu

$$\frac{M_1T_2}{M_1S_2}=\frac{M_1T_2}{M_1T_2\cos T_2M_1S_2}=\frac{1}{\cos T_2M_1S_2}.$$

Dar când coardele $M_1M_2, \ldots$ tind către zero, unghiul $T_2M_1S_2$ tinde către zero, iar cosinusul său către 1, prin urmare, acest raport tinde către 1.

Deci, fiecare din rapoartele (5) tinde către 1 şi deci şi raportul (4) tinde către 1, adică raportul perimetrelor a unei linii poligonale înscrise şi a linii poligonale circumscrise corespunzătoare tinde către 1.

2⁰ Acestea fiind stabilite, să arătăm că *perimetrul unei linii poligonale înscrise ale cărei laturi tind către zero, are o limită determinată şi independentă de legea de înscriere a linii poligonale.*

In adevăr, fiind înscrisă o linie poligonală în arcul AB, să unim un punct oarecare al fiecărui arc subîntins de laturile linii poligonale cu extremităţile laturii corespunzătoare. Obţinem, astfel, o nouă linie poligonală, înscrisă în arçul AB, având de două ori mai multe laturi ca prima. Operând cu aceasta la fel ca cu prima, şi aşa mai departe, vom obţine o serie nelimitată de linii poligonale înscrise, *după o lege particulară*. Perimetrele $p_1, p_2, \ldots$ ale acestor linii vor creşte, şi cum sunt mai mici de cât perimetrul unei linii poligonale circumscrise arcului AB, ele vor tinde către o limită determinată L. De asemenea, perimetrele $P_1, P_2, \ldots$ ale liniilor poligonale circumscrise arcului AB, vor tinde (No. 4, 1°) către aceeaş limită L.

Aşa fiind, să considerăm acum un şir de linii poligonale înscrise în arcul AB, după *o lege oarecare,* şi ale căror laturi să tindă către zero. Fie p perimetrul uneia din aceste linii poligonale înscrise şi P perimetrul linii poligonale circumscrise corespunzătoare. P fiind mai mare de cât oricare din perimetrele $p_1, p_2, \ldots$, va fi mai mare sau egal cu limita lor L. De altă parte, p fiind mai mic de cât unul oarecare din perimetrele $P_1, P_2, \ldots$, va fi cel mult egal cu limita lor L.

Vom avea deci

$$p \leqq L \leqq P,$$

de unde

$$1 \leqq \frac{L}{p} \leqq \frac{P}{p}.$$

Dar (No. 4, 1°) $\frac{P}{p}$ are ca limită pe 1. Deci, raportul $\frac{L}{p}$ este cuprins între 1 şi o cantitate care tinde către, 1, are deci ca limită unitatea, adică şi p are ca limită pe L. Prin urmare, perimetrul unei linii poligonale înscrise, ale cărui laturi tind către zero, are o limită determinată şi independentă de legea de înscriere a linii poligonale, astfel că lungimea unui arc de curbă AB este limita către care tinde perimetrul unei linii poligoale înscrise în arcul AB, când laturile linii poligonale înscrise tind către zero.

5. Raportul dintre un arc infinit mic şi coarda sa. Să considerăm un arc infinit mic $M_1 M_2$ (Fig. 1) şi fie T_2 punctul de intersecţie a tangentelor duse la extremităţile M_1 şi M_2 ale arcului $M_1 M_2$. Avem

$$\text{coarda } M_1 M_2 < \text{arc } M_1 M_2 < M_1 T_2 + T_2 M_2,$$

de unde

$$1 < \frac{\text{arc } M_1 M_2}{\text{coarda } M_1 M_2} < \frac{M_1 T_2 + T_2 M_2}{M_1 S_2 + S_2 M_2}.$$

Dar, ultimul raport tinde (No. 4, 1[0]) către 1, când arcul $M_1 M_2$ tinde către zero, deci raportul

$$\frac{\text{arc } M_1M_2}{\text{coarda } M_1M_2}$$

tinde către 1, când arcul $M_1 M_2$ tinde către zero.

Deci, *raportul dintre arcul infinit mic şi coarda sa tinde către* 1 *când arcul tinde către zero.*

In studiul proprietăţilor curbelor se ia ca infinit mic principal arcul infinit mic de curbă. Arcul infinit mic şi coarda sa fiind infiniţi mici echivalenţi, vom lua, după împrejurări, ca infinit mic principal, fie arcul infinit mic, fie coarda corespunzătoare.

6. Curbura intr'un punct. Cerc de curbură. Să considerăm un punct M pe curba (M) şi punctul infinit vecin M′ (Fig. 2). Fie K punctul de intersecţie al tangentelor MT şi M′T′ la curbă in M şi M′.

Unghiul $\omega = TKT'$ format de tangentele în M şi M′ măsoară cantitatea cu care curba (M) se depărtează în M de forma rectilinie, când trecem de la M la M′. Unghiul ω se zice *unghiul de contingenţă* în M, sau *curbura totală a arcului* MM′.

Însemnând cu α şi $\alpha + d\alpha$ unghiurile făcute cu o dreaptă fixă $x'x$ de tangentele MT şi M′T′ în M şi M′, se vede că $\alpha + d\alpha = \alpha + \omega$, de unde $\omega = d\alpha$. Deci, unghiul de contingenţă este creşterea unghiului α ce-l face tangenta în M cu o direcţie fixă $x'x$.

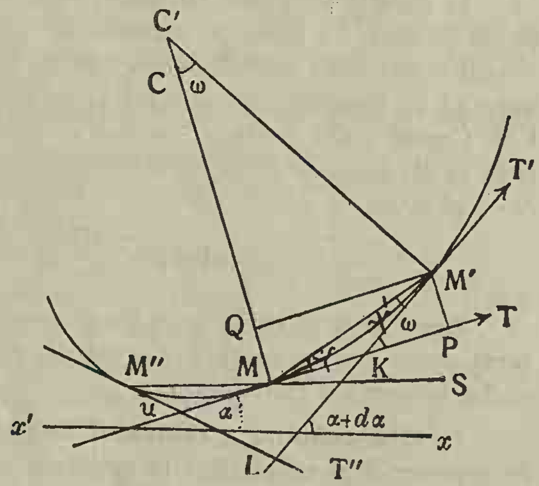

Fig. 2.

Unghiul de contingenţă este infinit mic de ordinul întâi, căci dacă ar fi de ordin superior, ar urma că creşterea unghiului α este infinit mic de ordin superior ordinului întâi, adică această creştere ar putea fi neglijată şi deci unghiul α ar rămâne acelaş când se trece de la M la M′, adică curba între M şi punctul infinit vecin M′ ar fi linie dreaptă.

Deci, unghiul de contingenţă este infinit mic de ordin superior ordinului întâi, numai în puncte particulare ale curbei (M) şi vom presupune că M nu este unul din aceste puncte singulare ale curbei.

Pentru aceleaşi motive, *unghiul* $\psi = \mathrm{KMM}'$, *făcut de coarda* MM′ *cu tangenta în* M *este infinit mic de ordinul întâi.*

Presupunând că ω reprezintă arcul ce corespunde pe cercul cu raza 1 unghiului de contingenţă, iar infiniţii mici arc MM′ şi ω fiind de acelaş ordin, raportul

$$\frac{\omega}{\mathrm{arc\ MM}'}$$

tinde către o limită, care se zice *curbura în punctul* M.

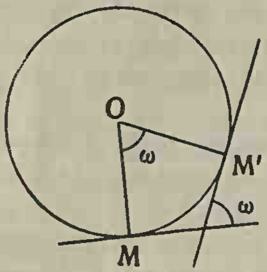

Fig. 3.

Când curba este un cerc (Fig. 3), avem arc $\mathrm{MM}' = \mathrm{R}\omega$, deci

$$\frac{\omega}{\mathrm{arc\ MM}'} = \frac{1}{\mathrm{R}} = \mathrm{const.},$$

ceea ce probează că în acest caz curbura este constantă, iar raza cercului este inversa curburei, adică limita raportului $\frac{\mathrm{arc\ MM}'}{\omega}$.

In cazul unei curbe oarecare, curbura variază de la un punct la altul. Să luăm pe normala în punctul M (Fig. 2), în sensul concavităţii curbei, o lungime MC egală cu inversa curburei şi să descriem din punctul C ca centru un cerc cu raza CM. Cercul astfel construit se zice *cercul de curbură în* M, raza sa R, *raza de curbură,* iar centrul său, C, *centrul de curbură* şi avem

$$\mathrm{R} = \lim\left(\frac{\mathrm{arc\ MM}'}{\omega}\right).$$

Acest cerc şi curba sunt tangente în punctul M şi au în acest punct aceeaş curbură. Cercul de curbură caracterizează curba în punctul considerat.

7. Altă definiţie a centrului de curbură. Fie C′ punctul de intersecţie al normalelor la curbă în punctele infinit vecine M şi M′ (Fig. 2). Să însemnăm cu Q proecţia punctului M′ pe normala în M. Egalând valorile lui QM′ din triunghiurile QMM′ şi C′QM′, avem

$$\mathrm{MM}' \sin \mathrm{QMM}' = \mathrm{C}'\mathrm{M}' \sin \mathrm{MC}'\mathrm{M}'.$$

Dar patrulaterul KMC′M′ având unghiurile din M şi M′

drepte (normalele sunt perpendiculare pe tangente), urmează că $MC'M'=\omega$. Deci relaţia precedentă devine

$$MM' \cos \psi = C'M' \sin \omega,$$

de unde

$$C'M' = \frac{MM' \cos \psi}{\sin \omega} = \frac{MM'}{\text{arc}\, MM'} \frac{\text{arc}\, MM'}{\omega} \frac{\omega}{\sin \omega} \cos \psi.$$

Dar

$$\lim \frac{MM'}{\text{arc}\, MM'} \to 1, \lim \frac{\omega}{\sin \omega} \to 1, \ \lim \cos \psi \to 1;$$

deci

$$\lim C'M' = \lim \frac{\text{arc}\, MM'}{\omega} = R,$$

adică $C'M'$ tinde către raza de curbură în M, sau că punctul C' tinde către centrul de curbură în M.

Deci, *centrul de curbură într'un punct* M *este limita punctului de intersecţie a normalei în* M *cu normala infinit vecină.*

8. **Cerc osculator.** Când punctul M' este infinit vecin de M, normalele MC' şi $M'C'$ (Fig. 2) pot fi considerate ca egale, deci triunghiul $MC'M'$ isoscel, iar unghiul $C'MM'=90^0-\frac{\omega}{2}$. Dar $C'M$ fiind perpendiculară pe tangenta MT, urmează că unghiurile ψ şi $C'MM'$ sunt complimentare, deci din punct de vedere infinitezimal, ψ egal cu $\frac{\omega}{2}$, sau ω echivalent cu 2ψ, care se poate scrie în mod convenţional, $\omega \backsim 2\psi$.

Dar, în triunghiul KMM' (Fig. 2), unghiul ω fiind exterior triunghiului, urmează că ω să fie egal cu $\psi+\psi'$; deci, din punct de vedere infinitezimal, unghiurile ψ şi ψ' sunt echivalente, $\psi \backsim \psi'$, triunghiul KMM' isoscel.

Acestea fiind stabilite, putem defini în mai multe feluri cercul de curbură.

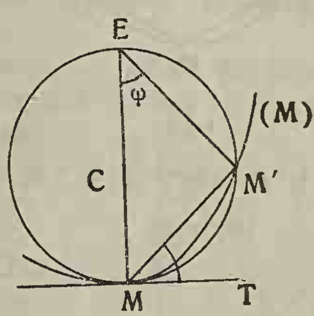

Fig 4.

1⁰ Să considerăm, în primul rând, cercul variabil ce este tangent curbei în punctul M (Fig. 4) şi ce trece prin punctul M'. ME fiind diametrul punctului M, avem

$$MM' = ME \sin \psi, \ MM' = 2\, MC \sin \psi, \ MC = \frac{MM'}{2 \sin \psi}.$$

Deci

$$\lim MC = \lim \frac{MM'}{2\sin\psi} = \lim \frac{MM'}{\operatorname{arc} MM'} \frac{\operatorname{arc} MM'}{2\psi} \frac{\psi}{\sin\psi}.$$

Dar 2ψ este echivalent cu ω; deci

$$\lim MC = \lim \frac{\operatorname{arc} MM'}{\omega} = R,$$

ceea ce probează că *cercul tangent în* M *și care trece prin punctul infinit vecin* M', *tinde către cercul de curbură în* M.

2⁰ Să luăm, de o parte și de alta a punctului M, arcele infinit mici, M″M, MM′ (Fig. 2). Unghiul de contingență (curbura totală) T″LT′ este egal cu suma unghiurilor de contingență T″UT, TKT′, ale arcelor M″M, MM′. Dar triunghiurile M″UM, MKM′ pot fi considerate, din punct de vedere infinitezinal, ca isoscele, deci unghiurile M″MU, KMM′ echivalente cu jumătățile curburilor totale (unghiurilor de contingență) ale arcelor M″M, MM′, adică, suma lor,

$$\sphericalangle M''UM + \sphericalangle KMM' = \pi - \sphericalangle M''MM',$$

este echivalentă cu jumătatea unghiului de contingență (a curburei totale) a arcului M″MM′. Deci, unghiul M″MM′, înscris în arcul M″M′, este suplimentul jumătății curburei totale a arcului M″M′ (oricare ar fi M între punctele infinit vecine M″ și M′). Deci, unghiul SMM′ este echivalent cu jumătatea curburei totale a arcului M″M′.

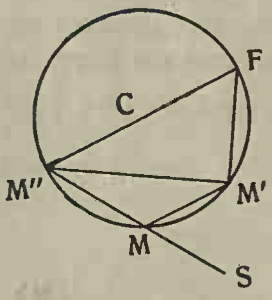

Fig. 5.

Așa fiind, să considerăm (Fig. 5) cercul ce trece prin punctul M și două puncte infinit vecine, M′ și M″. Însemnând cu M″CF diametrul lui M″, avem

$$M''M' = M''F \sin M''FM' = 2M''C \sin M''MM' = 2M''C \sin SMM'.$$

De unde

$$M''C = \frac{M''M'}{2\sin SMM'}.$$

Dar, am văzut că SMM′ este echivalent cu jumătatea curburei totale a arcului M″M′. Înlocuind sinusul cu arcul, se vede că limita lui M″C este egală cu limita raportului dintre arcul M″M′ și curbura totală a acestui arc, adică raza de curbură în M, către care tind M″ şi M′. Deci, *cercul ce trece prin punctul M şi două puncte infinit vecine, tinde către cercul de curbură în* M.

Cercul de curbură având în M trei puncte confundate cu curba, este complect determinat, căci un cerc este definit prin trei puncte. Cercul de curbură are cu curba în punctul M trei puncte confundate, are, după cum se mai spune, un contact de ordinul al doilea. Pentru acest motiv, cercul de curbură este *cercul osculator* în M.

In general, o curbă (Γ), pentru a cărei determinare trebue $(n+1)$ puncte, este perfect determinată dacă are cu altă curbă (M), în punctul M, un contact de ordinul n, adică $(n+1)$ puncte confundate. Se zice atunci că curba (Γ) este *osculatoare* curbei (M) în punctul M. De ex., o dreaptă fiind definită prin două puncte, un cerc prin trei, o parabolă prin patru, o conică prin cinci puncte, etc, va exista, în fiecare punct al curbei, o dreaptă osculatoare având cu curba un contact de ordinul întâi (tangenta); un cerc osculator, având un contact de al doilea ordin; o parabolă osculatoare, având un contact de ordinul al treilea; o conică osculatoare, având un contact de ordinul al patrulea, etc.

Dar, se poate, în mod excepţional, în anumite punte ale curbei considerate (M), curba (Γ) osculatoare curbei (M), să aibă cu aceasta un contact mai mare cu o unitate de cât acela pe care îl cere gradul său de determinare; se zice atunci că curba (Γ) este *supraosculatoare*. De ex., o dreaptă perfect determinată prin două puncte, poate, în anumite puncte, să aibă trei puncte confundate cu curba (M); această dreaptă supraosculatoare este ceea ce se zice *tangentă staţionară;* punctul său de contact este un *punct de inflexiune.*

9. Studiul unei curbe în vecinătatea unuia din punctele sale. Să considerăm pe o curbă plană punctul M şi punctul infinit vecin M′. Fie T (Fig. 6) punctul de intersecţie al tangentelor în M şi M′ la curba (M), C punctul de intersecţie a normalelor în punctele M şi M′. Să însemnăm cu ω unghiul de contingenţă şi ψ şi ψ' unghiurile coardei MM′ cu tangentele în M şi M′.

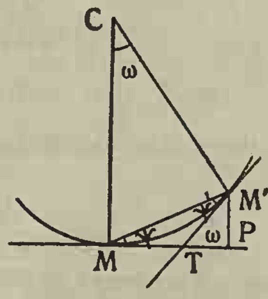

Fig. 6.

Ne propunem să vedem ce fel de infiniţi mici sunt elementele curbei determinate în vecinătatea punctului M.

I. *Infiniți mici de ordinul întâi.* 1⁰ *Unghiul ψ făcut de tangentă cu coarda.* Să ducem cercul ce trece prin M′ și e tangent în M curbei date. La limită, acest cerc este cercul osculator în M, centrul său este punctul C de întâlnire a două normale infinit vecine, raza sa devine raza de curbură. Din punct de vedere infinitezimal, unghiul ω este echivalent cu 2ψ, triunghiul MCM′ este isoscel.

Ducând diametrul punctului M, avem în acest cerc

$$MM' = 2MC \sin\psi, \quad \frac{\sin\psi}{MM'} = \frac{1}{2MC},$$

de unde

$$\frac{\psi}{\text{arc } MM'} = \frac{\psi}{\sin\psi} \, \frac{\sin\psi}{MM'} \, \frac{MM'}{\text{arc } MM'},$$

$$\frac{\psi}{\text{arc } MM'} = \frac{\psi}{\sin\psi} \, \frac{1}{2MC} \, \frac{MM'}{\text{arc } MM'}.$$

Deci

$$\lim \frac{\psi}{\text{arc } MM'} = \lim \frac{1}{2MC} = \frac{1}{2R}.$$

Deci ψ și arcul MM′ sunt de acelaș ordin atâta timp cât R este finit și diferit de zero. Când raza de curbură se anulează într'un punct, acesta este un punct de întoarcere (rebroussement); când $R \to \infty$, avem în acel punct o inflexiune.

In acelaș mod se arată că și unghiul ψ' este infinit mic de ordinul întâi.

2⁰ *Lungimile tangentelor* MT *și* M′T. În adevăr, din triunghiul MTM′, avem

$$\frac{MT}{MM'} = \frac{\sin\psi'}{\sin MTM'} = \frac{\sin\psi'}{\sin\omega}.$$

De unde

$$\frac{MT}{MM'} = \frac{\sin\psi'}{\psi'} \, \frac{\omega}{\sin\omega} \, \frac{\psi'}{\omega}.$$

Dar ψ' și ω fiind infiniți mici de ordinul întâi, raportul $\frac{\psi'}{\omega}$ tinde către o cantitate finită și deci

$$\lim \frac{MT}{MM'} = \lim \frac{\psi'}{\omega},$$

ceea ce probează că MT și MM′ sunt de acelaș ordin, sau că MT și arcul MM′ sunt de acelaș ordin.

3⁰ *Suma tangentelor* MT *și* M′T fiind suma a doi infiniţi mici de ordinul întâi, este infinit mic de ordinul întâi, ca şi arcul MM′ şi coarda MM′. Trebue făcută o distincţie între ei, căci din triunghiul MTM′, avem

$$\text{coarda } MM' < \text{arc } MM' < MT + M'T.$$

4⁰ *Proecţia coardei pe o direcţie neperpendiculară pe tangenta în* M este un un infinit mic de ordinul întâi. În adevăr, MF fiind proecţia coardei MM′ pe direcţia Mx (Fig. 7), avem

$$MF = MM' \cos FMM', \quad \frac{MF}{MM'} = \cos FMM'.$$

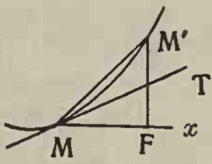

Fig. 7.

Dar, la limită, unghiul M′MF tinde către unghiul TMx ce-l face tangenta în M cu direcţia dată. Deci

$$\lim \frac{MF}{MM'} = \cos TMx.$$

Dacă direcţia Mx nu este perpendiculară pe tangenta în M, unghiul $TMx \neq 90^0$, raportul $\frac{MF}{MM'}$ tinde către o câtime finită şi diferită de zero; proecţia MF a coardei MM′ este infinit mic de acelaş ordin cu MM′, deci de acelaş ordin cu aıcul MM′.

Când direcţia Mx este perpendiculară pe tangenta în M, $\cos TMx \to 0$, raportul $\frac{MF}{MM'} \to 0$, deci proecţia MF este de ordin superior lui MM′.

II. *Infiniţi mici de ordinul al doilea.* 1⁰ *Distanţa ortogonală sau oblică de la un punct al curbei la tangenta într'un punct infinit vecin.* M şi M′ fiind două puncte infinit vecine Fig. 6), fie P intersecţia tangentei în M cu o dreaptă dusă prin M′, paralelă cu direcţia Δ. Din triunghiul MM′P, avem

$$\frac{M'P}{\sin PMM'} = \frac{MM'}{\sin MPM'}, \quad \frac{M'P}{MM'} = \frac{\sin PMM'}{\sin MPM'},$$

$$\frac{M'P}{MM'^2} = \frac{\sin PMM'}{PMM'} \, \frac{PMM'}{MM'} \, \frac{1}{\sin MPM'}.$$

Deci

$$\lim \frac{M'P}{MM'^2} = \lim \frac{PMM'}{MM'} \lim \frac{1}{\sin MPM'}.$$

Dar, la limită, unghiul MPM′ tinde către unghiul făcut de tangenta în M cu direcția Δ, deci sin MPM′ tinde către sin (MT, Δ), iar PMM′ și MM′ fiind infiniți mici de acelaș ordin, raportul lor este o câtime finită. Deci raportul $\frac{M'P}{\overline{MM'}^2}$ tinde către o cantitate finită și diferită de zero, adică distanța oblică M′P, de la punctul M′ la tangenta în punctul infinit vecin M, este infinit mic de ordinul al doilea.

In cazul distanței ortogonale, avem (Fig. 6)

$$\lim \frac{M'P}{\overline{MM'}^2} = \lim \frac{\sphericalangle PMM'}{MM'} = \frac{1}{2R}, \quad \lim \frac{M'P}{\overline{MP}^2} = \lim \frac{M'P}{(MM' \cos\psi)^2} = \frac{1}{2R}.$$

Deci, distanța M′P de la punctul M′ la tangenta infinit vecină, este echivalentă cu $\frac{(\text{arc}\, MM')^2}{2R}$, adică

$$M'P \backsim \frac{s^2}{2R},$$

s fiind arcul infinit mic MM′, iar R raza de curbură în M.

De asemenea,

$$M'P \backsim \frac{1}{2R} \cdot \overline{MP}^2, \quad M'P \backsim \lambda . \overline{MP}^2,$$

λ fiind o cantitate care nu se anulează în punctul M.

2^0 *Diferența celor două tangente,* MT—M′T. În adevăr, din triunghiul MTM′ (Fig. 6), avem

$$\frac{MT}{MM'} = \frac{\sin\psi'}{\sin\omega}, \quad MT = MM' \frac{\sin\psi'}{\sin\omega}, \quad M'T = MM' \frac{\sin\psi}{\sin\omega}.$$

Deci

$$MT - M'T = \frac{MM'}{\sin\omega}(\sin\psi' - \sin\psi) = \frac{MM'}{\sin\omega} 2 \sin\frac{\psi'-\psi}{2} \cos\frac{\psi'+\psi}{2}.$$

Dar $\frac{\psi+\psi'}{2}$ este echivalent cu $\frac{\omega}{2}$; deci, din punct de vedere infinitezimal, avem

$$MT - M'T \backsim 2 \frac{MM'}{\sin\omega} \sin\frac{\psi'-\psi}{2} \cos\frac{\omega}{2}.$$

MM′ și ω fiind de ordinul întâi, iar $\cos\frac{\omega}{2} \to 1$, urmează că (MT—M′T) este de acelaș ordin cu $\sin\frac{\psi'-\psi}{2}$, sau cu $(\psi'-\psi)$.

Dar, am văzut (No. 9, I, 1⁰) că

$$\lim \frac{\psi}{MM'} = \frac{1}{2R}, \quad \lim \frac{\psi'}{MM'} = \frac{1}{2R'},$$

R şi R′ fiind razele de curbură în M şi M′. Deci

$$\frac{\psi}{MM'} = \frac{1}{2R} + \varepsilon, \quad \frac{\psi'}{MM'} = \frac{1}{2R'} + \varepsilon',$$

astfel că

$$\frac{\psi'-\psi}{MM'} = \frac{1}{2R'} - \frac{1}{2R} + \varepsilon' - \varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{R-R'}{RR'} + \varepsilon' - \varepsilon.$$

Dar, la limită, când M′ se apropie de M, diferenţa (R′—R) a razelor de curbură tinde către zero; deci $\frac{\varphi'-\psi}{MM'} \to 0$, adică $(\psi'-\psi)$ este infinit mic de ordinul al doilea cel puţin faţă de MM′ şi deci şi echivalentul său (MT—M′T) este infinit mic de ordinul al doilea cel puţin.

3⁰ Să considerăm două curbe (C) şi (C′) tangente în punctul M (Fig. 8). Fie N şi N′ punctele lor de intersecţie cu o secantă neparalelă cu tangenta în M. Ducând MD perpendiculară pe NN′, avem

$$NN' = ND - N'D = MD\,\mathrm{tg}NMD - MD\,\mathrm{tg}N'MD,$$

$$\frac{NN'}{MD} = \mathrm{tg}\,NMD - \mathrm{tg}\,N'MD.$$

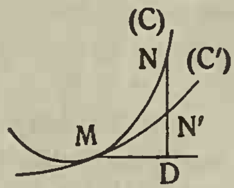

Fig. 8.

Dar, am văzut că proecţia MD a coardei MM′ este infinit mic de ordinul întâi, şi cum, la limită, când N şi N′ se apropie de M, unghiurile NMD, N′MD tind către unghiul făcut de tangenta comună în M cu direcţia perpendiculară pe NN′, urmează că limita raportului $\frac{NN'}{MD} \to 0$, adică NN′ este infinit mic de ordinul al doilea cel puţin.

Aşa dar, *fiind date două curbe* (C) *şi* (C′), *tangente în* M, *tăindu-le în* N *şi* N′ *cu o dreaptă neparalelă cu tangenta în* M, *distanţa* NN′ *dintre cele două puncte infinit vecine cu* M *este infinit mic de ordinul al doilea cel puţin.*

III. *Infiniţi mici de ordinul al treilea.* 1⁰ *Diferenţa dintre suma tangentelor şi coarda* MM′ (Fig. 9). Notând cu D piciorul perpendicularei din T pe coarda MM′, avem

$$MD = MT\cos\psi, \quad DM' = TM'\cos\psi',$$

$$MM' = MT \cos\psi + M'T \cos\psi'.$$

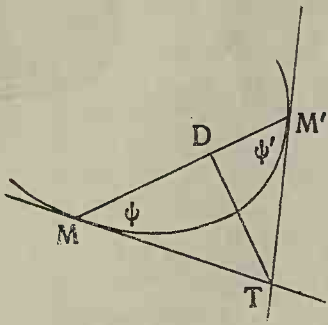

Fig. 9.

Dar ψ și ψ' fiind infiniți mici, atunci din punct de vedere infinitezimal, avem

$$\cos\psi \backsim 1-\varepsilon_2, \quad \cos\psi' \backsim 1-\varepsilon'_2,$$

ε_2 și ε'_2 fiind infiniți mici de ordinul al doilea. Deci

$$MM' \backsim MT(1-\varepsilon_2) + M'T(1-\varepsilon'_2),$$
$$MT + M'T - MM' \backsim MT.\varepsilon_2 + M'T.\varepsilon'_2.$$

Dar, MT și M'T fiind infiniți mici de ordinul întâi, produsele $MT.\varepsilon_2$, $M'T.\varepsilon'_2$ sunt de ordinul al treilea și deci suma lor este de ordinul al treilea, astfel că avem

$$MT + M'T - MM' \backsim \varepsilon_3.$$

2⁰ *Diferența dintre suma tangentelor și arcul* MM'. În adevăr, dacă în relația precedentă înlocuim coarda MM' cu o câtime mai mare, arcul MM', diferența devine cu atât mai mică și deci

$$MT + M'T - \text{arc}\, MM' \backsim \varepsilon'_3.$$

3⁰ *Diferența dintre arc și coardă.* Pentru a vedea care este această diferență, să substituim arcului infinit mic MM' al curbei (M) un arc de cerc ce trece prin M, M' și un al treilea punct M'' între cele două, infinit vecin de cele două.

Să considerăm punctul M'' în pozițiile succesive ce le poate ocupa pe arcul MM' de la M la M' (Fig. 10). Cercul ce trece prin punctele M, M'', M' are centrul pe perpendiculara pe mijlocul lui MM'. Când M'' este în M, centrul *c* al acestui cerc este la intersecția acestei perpendiculare cu normala în M; cercul este tangent curbei în M, arcul de cerc MM', în felul cum am făcut figura, este mai mare decât arcul curbei MM'. Când M'' este în M',

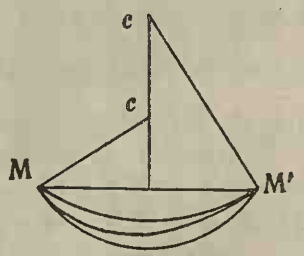

Fig. 10.

centrul *c'* al cercului este la intersecția perpendicularei cu normala în M'; cercul este tangent curbei în M', arcul MM' al acestui cerc este mai mic de cât arcul curbei MM'.

Există, deci, între cele două poziții extreme ale acestui cerc, o poziţie intermediară, pentru care cercul şi curba se traversează, astfel că arcul MM′ pe cerc şi pe curbă să aibă lungimi egale. Centrul acestui cerc este situat în interiorul segmentului cc', raza sa este cuprinsă între razele de curbură corespunzătoare în M şi M′. Vom zice că *acest cerc este echivalent cu curba în toată întinderea arcului* MM′.

Arcul MM′ fiind infinit mic, cele trei puncte infinit vecine, M, M″, M′, determină un segment de cerc capabil de un unghi egal cu jumătatea curburei acestui arc (No. 8, 2⁰), care poate fi substituit arcului de curbă în orice chestie în care vor interveni lungimile s şi l a arcului şi coardei.

Acestea fiind stabilite, fie ω unghiul de contingenţă, sau curbura totală a arcului MM′. În cercul echivalent, a cărui rază s'o notăm cu ρ, avem

$$MM' = 2\rho \sin\frac{\omega}{2}, \quad \text{arc}\, MM' = \rho\omega.$$

De unde

$$\text{arc}\, MM' - MM' = 2\rho\left(\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\right).$$

Dar, diferinţa dintre un arc infinit mic şi sinusul său are ca parte principală $\frac{1}{6}$ din cubul arcului, adică $\frac{1}{6}\left(\frac{\omega}{2}\right)^3 = \frac{\omega^3}{48}$. Deci, partea principală a diferenţei arcMM′ − MM′ este

$$2\rho\frac{\omega^3}{48} = \rho\frac{\omega^3}{24}.$$

Însă $\rho\omega = s$, deci, din punct de vedere infinitezimal, putem scrie

$$\text{arc}\, MM' - \text{coarda}\, MM' \backsim \frac{s^3}{24\rho^2}, \quad s = \text{arc}\, MM'.$$

Dar, ρ este cuprins între razele de curbură în M şi M′; deci, diferenţa dintre arc şi coardă,

$$\text{arc}\, MM' - \text{coarda}\, MM'$$

este echivalentă cu

$$\frac{s^3}{24R^2},$$

R fiind raza de curbură în M, şi se vede că această diferenţă este infinit mic de ordinul al treilea.

4⁰ Am arătat că distanţa ortogonală sau oblică de la un punct la tangenta într'un punct infinit vecin este infinit mic de ordinul al doilea.

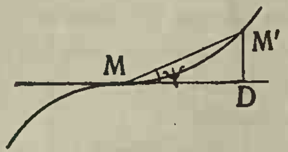

Fig. 11.

În cazul unui punct de inflexiune (Fig. 11), această cantitate M'D devine

$$M'D = MM' \sin \psi.$$

Dar, în acest caz, ψ este infinit mic de ordinul al doilea cel puţin şi deci şi $\sin \psi$ este de ordinul al doilea cel puţin; cum MM' este de ordinul întâi, urmează că produsul $MM' \sin\psi$ este infinit mic de ordinul al treilea cel puţin.

5⁰ *Diferenţa dintre normalele în două puncte infit vecine.* C fiind punctul de intersecţie al normalelor în punctele M şi M' (Fig. 12), avem

$$\frac{MC}{\sin MM'C} = \frac{M'C}{\sin M'MC}, \quad \frac{MC}{M'C} = \frac{\sin MM'C}{\sin M'MC}.$$

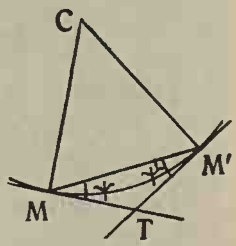

Fig. 12.

Dar

$$MM'C = \frac{\pi}{2} - \psi', \quad M'MC = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Deci

$$\frac{MC}{M'C} = \frac{\cos \psi'}{\cos \psi'},$$

de unde

$$\frac{MC - M'C}{M'C} = \frac{\cos \psi' - \cos \psi}{\cos \psi},$$

$$MC - M'C = \frac{M'C}{\cos \psi} 2 \sin \frac{\psi - \psi'}{2} \sin \frac{\psi + \psi'}{2}.$$

Dar, M'C tinde către raza de curbură în M, care în general este finită, afară de cazul punctului de infexiune; cos $\rightarrow 1$; $\sin \frac{\psi + \psi'}{2}$ este infinit mic de ordinul întâi; $\sin \frac{\psi - \psi'}{2}$ este de acelaş ordin cu $(\psi - \psi')$, care este (No. 9, II, 2⁰) de ordinul al doilea. Deci, produsul este de ordinul al treilea, aşa că diferenţa normalelor în două puncte infinit vecine este infinit mic de ordinul al treilea.

Observare. Am presupus până acum că punctul M, în vecinătatea căruia studiam curba, este un punct simplu al curbei, adică unghiul PMM', al coardei MM' cu tangenta în M, este infinit mic de ordinul întâi (Fig. 13). Distanţa M'P de la punctul M′ la tangenta în punctul infinit vecin M este infinit mic de ordinul al doilea. Se zice că în acest caz curba şi tangenta au în punctul M *un contact de ordinul întâi* şi avem, din punct de vedere infinitezial,

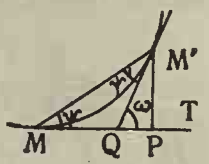

Fig. 13.

$$M'P \backsim \lambda\,\overline{MP}^2,$$

λ fiind o funcţiune de MP, care nu se anulează pentru $MP = 0$ (în M).

Când

$$M'P \backsim \lambda\,\overline{MP}^{n+1},$$

se zice că *curba şi tangenta au un contact de ordinul n*, adică M′P este infinit mic de ordinul $(n+1)$. In cazul inflexiunei este contact de ordin superior lui 1.

Să însemnăm cu ω unghiul de contingenţă, adică curbura totală a arcului MM′. Ştim că acest unghi ω este variaţia sau diferenţiala unghiului ce-l face tangenta în M cu o direcţie fixă; deci, din punct de vedere infinitezimal, $\mathrm{tg}\omega$ poate fi considerat ca diferenţiala tangentei unghiului PMM′.

Dar,

$$\mathrm{tg}\sphericalangle PMM' = \frac{M'P}{MP},\quad \mathrm{tg}PMM' \backsim \lambda\overline{MP}^n.$$

Deci

$$\mathrm{tg}\omega \backsim \frac{d(M'P)}{d(MP)} \backsim \frac{d(\lambda\overline{MP}^{n+1})}{d(MP)} \backsim \lambda(n+1)\overline{MP}^n \backsim (n+1)\,\mathrm{tg}\sphericalangle PMM'.$$

Prin urmare, considerând numai părţile principale, avem, din punct de vedere infinitezimal,

$$\omega \backsim (n+1)\sphericalangle PMM'.$$

Triunghiul QMM′ (Fig. 13) *nu mai este isoscel ca în cazul punctului ordinar, ci unghiul* MM′Q *este echivalent cu n ori unghiul* PMM′.

10. Alte expresii ale razei de curbură. 1⁰ Să considerăm cercul osculator în punctul M la curba (M) (Fig. 14). Fie N un punct vecin de M pe tangenta MT la curba (M). Diametrul cercului osculator ce trece prin N tae curba în M′, iar cercul în M″ şi D.

Puterea punctului N faţă de cercul C fiind $\overline{MN}^2$ sau NM″.ND, avem

$$\overline{MN}^2 = NM''(NM''+2R), \tag{6}$$

R fiind raza de curbură.

Dar NM″ este distanţa oblică de la un punct M″ al cercului la tangenta în punctul infinit vecin M. Se ştie (No. 9, II, 1⁰) că distanţa oblică NM″ este infinit mic de ordinul al doilea. Dezvoltând formula (6), se poate neglija $\overline{NM''}^2$, care este infinit mic de ordinul al patrulea şi avem

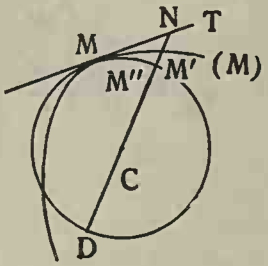

Fig. 14.

$$\overline{MN}^2 \backsim 2NM''.R,$$

de unde

$$R \backsim \frac{\overline{MN}^2}{2NM''}. \tag{7}$$

Dar, $NM'' - NM' = M'M''$ este distanţa oblică a două puncte infinit vecine a două curbe tangente în M (cercul osculator şi curba). Deci (No. 9, II, 3⁰) M′M″ este infinit mic de ordinul al doilea cel puţin, se poate înlocui NM″ cu NM′ şi deci formula (7) devine

$$R \backsim \frac{\overline{MN}^2}{2NM'}.$$

Aşa dar, raza de curbură într'un punct este echivalentă cu raportul dintre pătratul segmentului MN determinat pe tangenta în M de normala în punctul infinit vecin M′, şi de două ori distanţa NM′ de la punctul infinit vecin M′ la tangentă, măsurată pe normala în M′.

2⁰ Pentru a găsi altă expresie a razei de curbură, să ducem din punctul infinit vecin M′ al curbei (M) (Fig. 15) o perpendiculară pe tangenta în M, pe care o tae în N, iar cercul osculator în punctul P (cel mai apropiat de M). MD fiind diametrul cercului osculator, avem din triunghiul dreptunghic MPD,

$$\overline{PQ}^2 = MQ.\ QD = MQ(2R - MQ),\ \overline{MN}^2 = NP(2R - NP).$$

Dar NP fiind infinit mic de ordinul al doilea, $\overline{NP}^2$ este infinit mic de ordinul al patrulea, pe care neglijându-l, avem

$$\overline{MN}^2 \backsim 2NP.R, \quad R \backsim \frac{\overline{MN}^2}{2NP}.$$

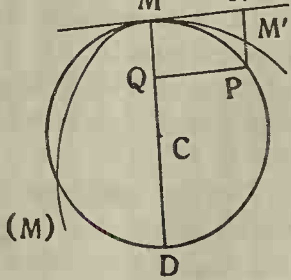

Fig. 15.

Cum M′P este (No. 9, II, 3⁰) infinit mic de ordinul al doilea, se poate înlocui NP cu NM′ şi deci formula precedentă devine

$$(8) \qquad R \backsim \frac{\overline{MN}^2}{2NM'},$$

adică, raza de curbură este echivalentă cu raportul dintre pătratul segmentului de pe tangentă şi de două ori distanţa ortogonală pe tangentă, de la tangentă la curbă.

11. Alte proprietăţi ale cercului de curbură. Să considerăm cercul (Γ) tangent în M la curba (M) (Fig. 16) şi fie m, M', P intersecţiile cu o perpendiculară pe tangenta în M a cercului (Γ), a curbei (M) şi a tangentei MT.

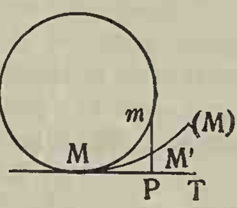

Fig. 16.

Să însemnăm cu ρ şi R razele de curbură în M ale cercului şi curbei. Observând formula (8), aceste raze sunt date de

$$\rho \backsim \frac{\overline{MP}^2}{2mP}, \quad R \backsim \frac{\overline{MP}^2}{2M'P},$$

de unde

$$mM' = mP - M'P \backsim \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{MP}^2}{\rho} - \frac{\overline{MP}^2}{R}\right) \backsim \frac{\overline{MP}^2}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right).$$

Ştim că MP este infinit mic de ordinul întâi. Deci, câtă vreme $\rho \neq R$, adică cercul (Γ) nu este cercul osculator, distanţa mM' dintre cercul (Γ) şi curbă este infinit de ordinul al doilea. Această distanţă este de ordinul al treilea cel puţin când $\rho = R$, adică în cazul când cercul (Γ) devine cercul osculator în M.

Deci, *dintre toate cercurile tangente în* M *la curba* (M), *cercul osculator se apropie cel mai mult de curba* (M) *în punctul* M, fiindcă distanţa de la un punct al lui, vecin cu M, la curba (M), este infinit mic de ordinul al treilea.

Această distanţă este infinit mic de ordinul al treilea în raport cu MP. Deci, această distanţă depinde de $\overline{MP}^3$ şi deci îşi schimbă semnul odată cu MP, adică, parcurgând curba (M), distanţa schimbă semnul în M, ceea ce însemnează că, înainte de M, cercul osculator este interior curbei, iar după M, exterior sau interior, cu alte cuvinte, *cercul osculator traversează curba în punctul considerat.*

CURBE ÎNFĂŞURĂTOARE.

12. Curbe înfăşurătoare. Să considerăm o curbă (C) variabilă, care se deplasează continuu ocupând diferite poziţii în plan (Fig. 17). Insemnând cu M_k unul din punctele de intersecţie a două curbe infinit vecine (C_{k-1}) şi (C_k) din familia (C), să presupunem că acest punct tinde către o limită determinată m_k.

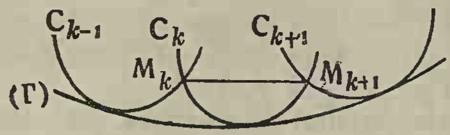

Fig. 17.

Punctul m_k se zice *punctul caracteristic* al curbei (C_k). Locul punctelor caracteristice m_k se zice curba înfăşurătoare (Γ) a curbelor (C).

Curba (Γ) are o proprietate interesantă şi anume este tangentă la fiecare din curbele familii (C), respectiv în punctul caracteristic al fiecărei curbe (C). In adevăr, fie M_k punctul de intersecţie al curbelor vecine (C_{k-1}), (C_k); să considerăm punctul M_{k+1} vecin cu M_k, şi care este la intersecţia curbei (C_k) cu curba (C_{k+1}) infinit vecină. Când curbele (C_{k-1}) şi (C_{k+1}) tind către curba (C_k), coarda $M_k M_{k+1}$ tinde către tangenta în punctul m_k al înfăşurătoarei (Γ), care este locul punctelor M_k. Dar $M_k M_{k+1}$ fiind coardă şi în curba (C_k), va tinde la limită, către tangenta la curba (C_k) în punctul limită al lui M_k, adică în m_k. Deci, curbele (C_k) şi (Γ) sunt tangente în punctul m_k. Aşa dar, curba (Γ) este înfăşurătoarea curbelor (C_k).

13. Desfăşurata unei curbei plane. Infăşurătoarea (Γ) a normalelor unei curbe date (C) se zice *desfăşurata* curbei (C). Punctul caracteristic al unei normale în punctul M al curbei (C) este centrul de curbură μ în punctul M, ca fiind intersecţia normalei în M cu cea infinit vecină (Fig. 18). Curba (C) se zice *desfăşurătoarea* curbei (Γ).

Curba desfăşurată are o proprietate caracteristică. In adevăr, să considerăm două normale vecine $M\mu$, $M'\mu'$, ale curbei (C) şi μ şi μ' punctele lor de contact cu desfăşurata (Γ). Insemnând cu P intersecţia normalelor, avem

$$M'\mu' - M\mu = (M'P + P\mu') - (MP - P\mu) = M'P - MP + (P\mu' + P\mu).$$

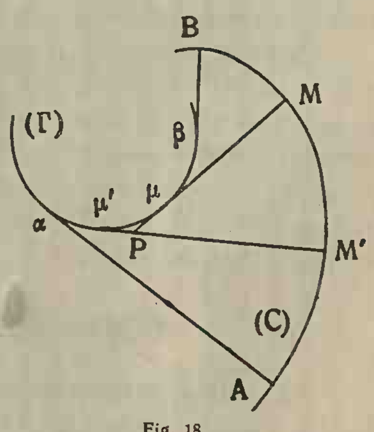

Fig. 18.

Dar, am văzut (No. 9, III, 5⁰) că diferenţa $(M'P - MP)$ a două normale infinit vecine este infinit mic de ordinul al treilea; deci, se poate neglija şi putem înlocui $(M'\mu'-M\mu)$ cu $(P\mu'+P\mu)$.

Insă, am văzut (No. 9, III, 2⁰) că, pentru curba (Γ), diferenţa dintre suma tangentelor $(P\mu'+P\mu)$ şi arcul $\mu\mu'$ este infinit mic de ordinul al treilea. Se poate deci înlocui $(P\mu'+P\mu)$ cu arcul $\mu\mu'$ al desfăşuratei. Deci, din punct de vedere infinitezimal, avem

$$M'\mu'-M\mu \backsim \text{arc } \mu\mu',$$

sau

$$d(M\mu)=d(\mu),$$

adică variaţia normalei $M\mu$ este egală cu variaţia arcului al desfăşuratei (μ).

Integrând de la punctul A al curbei (C) până la punctul M, avem

$$A\alpha-M\mu=\text{arc } \alpha\mu,$$

adică, lungimea unui arc al desfăşuratei este egal cu diferenţa razelor de curbură corespunzătoare ale desfăşurătoarei.

Rezultă de aci un procedeu de construcţie al desfăşurătoarei. Să ne închipuim un fir flexibil şi inextensibil fixat cu una din extremităţile sale în punctul α al desfăşuratei, înfăşurându-se pe arcul $\alpha\beta$ şi întins în linie dreaptă după tangenta βB. Dacă lungimea acestui fir este astfel că extremitatea sa să fie în B, va fi destul a-l desfăşura ţinându-l mereu întins, pentru ca extremitatea sa cea liberă să vie să coincidă cu toate punctele arcului AB ale desfăşurătoarei.

Această proprietate justifică numele de desfăşurată dată curbei (Γ), locul centrelor de curbură a curbei (C).

14. Să observăm că desfăşurătoarea, curba (C), descrisă de extremitatea firului, este traectoria ortogonală a tangentelor la desfăşurată, curba (Γ) (adică tae ortogonal aceste tangente). In adevăr, să presupunem că firul, a cărui o extremitate este în α, şi care este întins pe arcul $\alpha\beta$ al desfăşuratei, are o lungime determinată, cealaltă extremitate fiind în B. Desfăşurându-l şi ţinându-l întins, se obţin poziţiile M, M'... ale extremităţii sale (Fig. 18). La limită, lungimile MP şi M'P sunt egale, deci triunghiul MPM' poate fi considerat ca isoscel şi deci, la limită, unghiurile $PMM'=MM'P\rightarrow 90^0$. Dar, la limită, MM' tinde către tangenta în M la curba (C) descrisă de extremitatea firului. Deci, această tangentă este perpendiculară pe dreapta PM, cu

alte cuvinte, *curba* (C), *descrisă de extremitatea firului, este traectoria ortogonală a tangentelor la curba* (Γ).

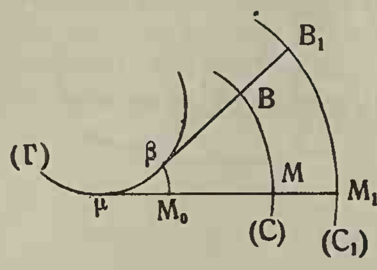

Fig. 19.

Variind lungimea firului, fiecărei lungimi îi corespunde o desfăşurătoare, toate desfăşurătoarele fiind traectorii ortogonale ale tangentelor la desfăşurată, curba (Γ). Deci, unei curbe (Γ), îi corespund o infinitate de desfăşurătoare.

Să considerăm două desfăşurătoare (C) şi (C_1) (Fig. 19).

Avem

$$M\mu - B\beta = \text{arc}\,\mu\beta, \quad M_1\mu - B_1\beta = \text{arc}\,\mu\beta,$$

urmează deci

$$M\mu - B\beta = M_1\mu - B_1\beta,$$

$$M\mu - B\beta = M_1M + M\mu - (B\beta + B_1B),$$

$$BB_1 = MM_1.$$

Deci, curba (C_1) se obţine din curba (C), luând pe normalele la curba (C) aceeaş lungime. *Curbele desfăşurătoare* (C) şi (C_1) *sunt curbe paralele.*

Observare. Proprietatea desfăşuratei aduce problema calculului lungimei unui arc dintr'o curbă la determinarea unei desfăşurătoare a acestei curbe. Dacă se consideră desfăşurătoarea curbei (Γ) ce trece prin punctul β (Fig. 19) al curbei considerate, arcul μβ al acestei curbe este egal cu segmentul rectiliniu μM_0 (βM_0 fiind arcul corespunzător din desfăşurătoare).

15. Asupra desfăşuratelor şi desfăşurătoarelor avem următoarele proprietăţi.

1⁰ Dacă curba desfăşurătoare întâlneşte desfăşurata, desfăşurătoarea are un punct de întoarcere de specia întâi (Fig. 20). Aceasta se poate uşor observa, considerând normalele înainte de punctul A de întâlnire al desfăşuratei cu desfăşurătoarea. Se obţine, astfel, ramura (C_1) a desfăşurătoarei, tangentă în A la normala în A la desfăşurata (Γ). Pentru normalele dincolo de A, corespunde altă ramură (C_2) a desfăşurătoarei, tangentă în A normalei în A la curba (Γ). Deci curba desfăşurătoare are în punctul A un punct de întoarcere de specia întâi.

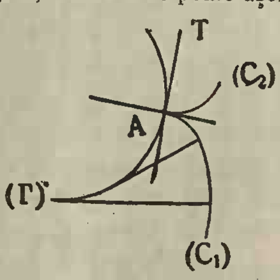

Fig. 20.

2⁰ Când curba desfăşurătoare prezintă un vârf, un punct unde raza de curbură este maximă sau minimă, îi corespunde pe desfăşurată un punct de înapoere de specia întâi (Fig. 21). A fiind vârful curbei desfăşurătoare, îi corespunde pe desfăşurată punctul α. Plecând de la punctul A pe curba (C), raza de curbură creşte, în A raza de curbură este un minimum.

De ex., desfăşurata (Γ) a elipsei (E) are patru puncte de întoarcere de specia întâi (Fig. 22), căci elipsa are patru vârfuri. Curba (E) este o desfăşurătoare a curbei (Γ). Considerând mai multe desfăşurătoare ale curbei (Γ), unele sunt interioare acestei curbe, altele exterioare. Cele exterioare nu întâlnesc curba, sunt curbe paralele cu elipsa; cele interioare pot întâlni curba (Γ) şi pot prezenta puncte de întoarcere.

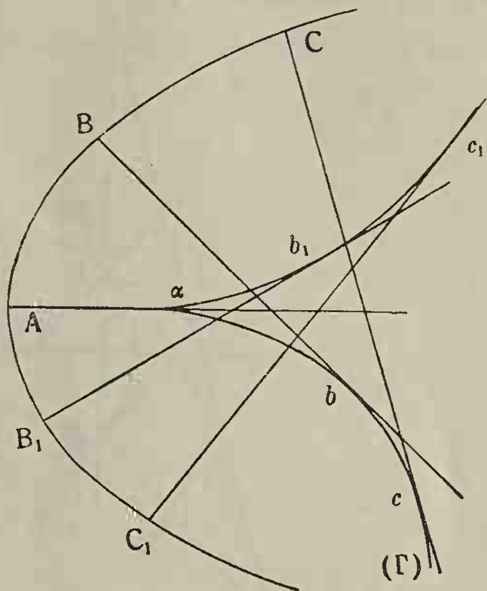

Fig. 21.

16. **Aplicaţie.** *Să studiem înfăşurătoarea*[1] *unui cerc variabil al cărui centru* C *descrie curba* (C) (Fig. 23). Considerând o poziţie infinit vecină a cercului, coarda lor comună este perpendiculară pe linia centrelor. Punctele de contact ale cercului cu înfăşurătoarea sa sunt limitele A şi B ale punctelor de intersecţie ale cercului C cu această coardă comună. Prin urmare înfăşurătoarea este compusă din două ramuri de curbă, (A) şi (B).

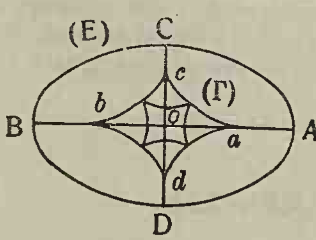

Fig. 22.

La limită, dreapta care uneşte centrele a două poziţii infinit vecine ale cercului (Γ), este tangenta în C la curba (C), astfel că coarda AB, care uneşte punctele de contact, la limită este perpendiculară pe tangenta în C la curba (C); mai mult, tangentele în A şi B la curbele (A) şi (B) se tae în acelaş punct T pe tangenta în C la curba (C).

Să ne propunem acum *să găsim punctul de contact al dreptei* AB *cu înfăşurătoarea sa.* Pentru aceasta, să considerăm două poziţii infinit vecine ale triunghiului ABC. Aceste triunghiuri sunt omologice, pentrucă vârfurile lor corespunzătoare se găsesc pe drepte concurente în T. Rezultă că punctele de întâlnire ale laturilor corespunzătoare sunt în linie dreaptă. Dar, la limită, punctul de intersecţie a laturei AC şi corespunzătoarei sale este centrul a de curbură în A la curba (A), căci AC

[1] A se vedea, M. d'Ocagne, în *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1915, p. 435).

este normală în (A la curba (A). De asemenea, BC fiind normala în B la curba (B), intersecția acestei laturi cu poziția ei infinit vecină este centrul de curbură b al curbei (B) în B; în fine punctul de intersecție al dreptei AB cu poziția ei infinit vecină este punctul de contact c al

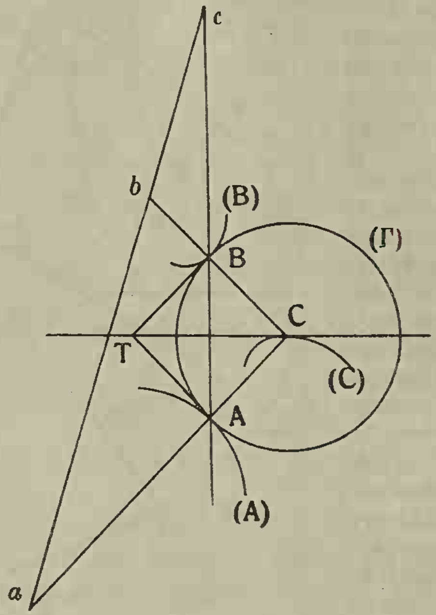

Fig. 23.

dreptei AB cu înfășurătoarea sa. Deci, punctele a, b, c sunt colineare și prin urmare punctul de contact c al dreptei AB cu înfășurătoarea sa, este intersecția acestei drepte cu dreapta care unește centrele de curbură ale curbelor (A) și (B) în punctele A și B.

PROPRIETĂȚI FUNDAMENTALE.

În vederea aplicațiunilor ce le vom face, vom stabili mai întâi câteva proprietăți fundamentale de care vom avea nevoe.

17. Variația unui arc de curbă limitat de două tangente la altă curbă. Să considerăm două tangente infinit vecine la curba (A), care determină pe curba (B) punctele B și B′ (Fig. 24). Ne propunem să studiem variația arcului BB′.

Fie T intersecția tangentelor în A și A′ la curba (A), β unghiul ce face cu AB tangenta în B la curba (B), φ unghiul format de BB′ cu tangenta în B, ω unghiul tangentelor în A și A′; ω, coarda BB′, φ sunt infiniți mici.

Din triunghiul TBB′ avem

$$\frac{BB'}{\sin\omega}=\frac{BT}{\sin TB'B}, \quad BB'\sin B'=BT\sin\omega.$$

Dar diferenţa dintre arcul BB′ şi coarda BB′ este infinit

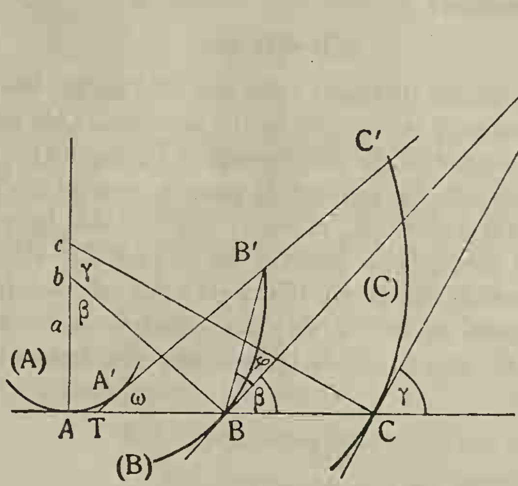

Fig. 24.

mic de ordinul al treilea, $\text{arc}BB'-BB' \backsim \varepsilon_3$; apoi $BT=AB-AT \backsim AB-\varepsilon_1$; avem apoi

$$\omega+B'=B'BC=\beta+\varphi,\ B'=\beta+\varphi-\omega,\ \sin B' \backsim \sin\beta+\varepsilon'_1.$$

Înlocuind în (1), avem

$$(\text{arc}BB'-\varepsilon_3)(\sin\beta+\varepsilon'_1) \backsim (AB-\varepsilon_1)\sin\omega,$$

$$\text{arc}\,BB'\sin\beta \backsim AB\sin\omega,$$

(2) $$\text{arc}\,BB' \backsim \frac{AB}{\sin\beta}\omega.$$

Însemnând cu α unghiul tangentei în A la curba (A) cu o direcţie fixă, ştim că $\omega=d\alpha$, aşa că formula (2) devine

(3) $$\text{arc}\,BB' \backsim \frac{AB}{\sin\beta}d\alpha.$$

Însemnând cu d(B) variaţia arcului curbei (B), adică tocmai arcul infinit mic BB′, descris de punctul B pe curba (B), formula (3) devine

(4) $$d(B)=\frac{AB}{\sin\beta}d\alpha.$$

Notând cu b punctul de intersecţie al normalelor în A şi B la curbele (A) şi (B), din triunghiul dreptunghic ABb (Fig. 24) avem

$$AB = bB \sin AbB, \quad AB = bB \sin\beta, \quad \frac{AB}{\sin\beta} = bB,$$

astfel că formula (4) devine

$$d(B) = bB \, . \, d\alpha. \tag{5}$$

Deci, creşterea (variaţia) unui arc de curbă (B) cuprins între două tangente infinit vecine de pe curba (A), este egală cu produsul unghiului de contingenţă a curbei (A) prin segmentul de normală din punctul B până în punctul unde această normală tae normala în A, B fiind punctul de intersecţie al curbei (B) cu tangenta în punctul de origină A.

Considerând altă curbă (C), fie C punctul de intersecţie al ei cu tangenta în A (Fig. 24) şi c punctul de intersecţie al normalei în A cu normala în C la curba (C). Avem, ca şi pentru curba (B),

$$d(C) = cC \, . \, d\alpha. \tag{6}$$

Împărţind (5) cu (6), obţinem

$$\frac{d(B)}{d(C)} = \frac{bB}{cB}, \tag{7}$$

formulă stabilită de Mannheim.

Scriind relaţia (4) şi pentru curba (C), avem

$$d(C) = \frac{AC}{\sin\gamma} d\alpha,$$

pe care împărţind-o cu (4), rezultă

$$\frac{d(A)}{d(C)} = \frac{AB}{AC} \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}. \tag{8}$$

Însemnând cu S intersecţia tangentelor în B şi C la curbele (B) şi (C), din triunghiul BSC (Fig. 24), avem

$$\frac{BS}{CS} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

şi deci formula (8) devine

$$\frac{d(B)}{d(C)} = \frac{AB}{AC} \frac{BS}{CS}. \tag{9}$$

Această formulă a fost stabilită de Newton.

18. Variaţia de lungime a unui segment de dreaptă. Să evaluăm variaţia segmentului AB (Fig. 24), A fiind punctul de contact al segmentului AB cu curba (A), iar B punctul de intersecţie al tangentei în A cu curba (B). Considerând poziţia infinit vecină a segmentului AB, variaţia segmentului e dată de

$$d(\mathrm{AB})=\mathrm{A'B'}-\mathrm{AB}.$$

Scriind că proecţia conturului TBB′ pe tangenta AB este nulă, avem

$$\mathrm{TB'}\cos\omega=\mathrm{TB}+\mathrm{BB'}\cos\mathrm{B'BC}.$$

De unde

$$(\mathrm{TA'}+\mathrm{A'B'})\cos\omega \backsim \mathrm{AB}-\mathrm{AT}+(\mathrm{arcBB'}-\varepsilon_3)\cos(\varphi+\beta),$$

$$(\mathrm{TA'}+\mathrm{A'B'})(1-\varepsilon_2)\backsim \mathrm{AB}-\mathrm{AT}+(\mathrm{arcBB'}-\varepsilon_3)(\cos\varphi\cos\beta-\sin\varphi\sin\beta).$$

BB′ şi φ fiind infiniţi mici de ordinul întâi, ştiind apoi că produsul a doi infiniţi mici este un infinit mic de ordin mai mare, dezvoltând relaţia de mai sus şi lăsând de o parte infiniţii mici de ordin mai mare ca doi, avem

$$\mathrm{TA'}+\mathrm{A'B'}\backsim \mathrm{AB}-\mathrm{AT}+\mathrm{arc\,BB'}\cos\beta,$$

$$\mathrm{A'B'}-\mathrm{AB}\backsim \mathrm{arc\,BB'}\cos\beta-(\mathrm{TA'}+\mathrm{AT}).$$

Dar (TA′+AT) diferă de arcul AA′ cu un infinit mic de ordinul al treilea; deci

$$\mathrm{A'B'}-\mathrm{AB}\backsim \mathrm{arc\,BB'}\cos\beta-\mathrm{arcAA'},$$

(10) $$d(\mathrm{AB})=d(\mathrm{B})\cos\beta-d(\mathrm{A}).$$

Dar, din (5) avem

$$d(\mathrm{B})=b\mathrm{B}d\alpha,$$

$d\alpha$ fiind unghiul de contingenţă A. Apoi, prin definiţie, a fiind centrul de curbură în A la curba (A), $d\alpha$ unghiul de contingenţă, Aa raza de curbură în A, avem

$$\mathrm{A}a=\frac{d(\mathrm{A})}{d\alpha},\quad d(\mathrm{A})=\mathrm{A}a.d\alpha,$$

aşa că formula (10) devine

(11) $$d(\mathrm{AB})=b\mathrm{B}\cos\beta d\alpha-\mathrm{A}a.d\alpha.$$

Din triunghiul dreptunghic ABb (Fig. 24), avem

$$b\mathrm{B}\cos\beta=\mathrm{A}b;$$

deci (11) devine

$$d(\mathrm{AB})=\mathrm{A}b.d\alpha-\mathrm{A}a.d\alpha,$$

(12) $$d(\mathrm{AB})=ab.d\alpha.$$

Aceasta este formula care dă variaţia segmentului AB, a fiind centrul de curbură în A, iar b intersecţia normalei în A cu normala în B.

Aplicaţii. 1⁰ Dacă $\beta = 90^0$, adică dacă curba (B) este desfăşurătoarea curbei (A), b se confundă cu A, $ab = Aa = R$, raza de curbură în A, iar formula (12) devine

$$d(AB) = R d\alpha.$$

Dar, din definiţie, $R d\alpha = d(A)$ şi deci avem

$$d(AB) = d(A).$$

In acest caz AB este raza de curbură în B, curba (A) este desfăşurata curbei (B), $d(AB)$ este variaţia razei de curbură a curbei (B), iar $d(A)$ este variaţia arcului de desfăşurată. Am regăsit, deci, proprietatea cunoscută a desfăşuratei, că *diferenţa a două raze de curbură a desfăşurătoarei este egal cu arcul corespunzător din desfăşurată.*

2^0 Dacă *segmentul* AB *are o lungime constantă,* atunci $d(AB) = 0$, deci, din formula (12), $ab = 0$, ceea ce înseamnează că *normala în* B *la curba* (B) *trece prin centrul de curbură al curbei* (A), *corespunzător punctului* A. Deci, *dacă pe tangentele la o curbă* (A) *se duce o lungime constantă* AB, *normala în* B *la curba descrisă de* B *trece prin centrul de curbură în* A *la curba* (A).

3^0 Presupunând că tangenta în A tae altă curbă (C) în punctul C, avem analog cu (10),

$$d(AC) = d(C)\cos\gamma - d(A),$$

pe care scăzând-o din (10), urmează

$$d(BC) = d(AC) - d(AB) = d(C)\cos\gamma - d(B)\cos\beta. \tag{13}$$

Putem da altă formă acestei relaţii. In adevăr, avem analog cu (12), pentru curba (C),

$$d(AC) = ac.d\alpha,$$

c fiind punctul unde normala C tae normala în A.

Scăzând această relaţie din (12), avem

$$d(BC) = d(AC) - d(AB) = ac,d\alpha - ab.d\alpha,$$

$$d(BC) = bc.d\alpha, \tag{14}$$

care dă variaţia segmentului BC, determinat între două curbe (B) şi (C) de tangenta în A la curba (A).

În particular, dacă $BC = \text{const.}$, urmează că $d(BC) = 0$, deci $bc = 0$; adică *normalele la curbele descrise de extremitățile unui segment constant se întâlnesc pe normala la înfășurătoarea segmentului* BC.

Deci, dacă pe fiecare normală la o curbă, se ia, începând de la punctul de incidență B, o lungime BC constantă, locul punctului C admite de asemenea ca normală dreapta BC. Curbele (B) și (C) sunt zise curbe paralele. Se obțin astfel toate desfășurătoarele ale desfășuratei curbei date.

4⁰ Dacă pe segmentul BC se ia punctul M, astfel ca $BM = k \,.\, BC$, $k = \text{const.}$, avem $d(BM) = k d(BC)$, și prin urmare, conform relații (14), $bm = k \,.\, bc$. Deci, *dacă punctul* M *divide segmentul* BC *într'un raport constant și normala la înfășurătoarea acestui segment tae în b, m, c normalele la curbele* (B), (M), (C), *avem*

$$\frac{bm}{bc} = \frac{BM}{BC}.$$

În particular, dacă M este mijlocul lui BC, m este mijlocul lui bc.

19. **Variația unui unghi.** Să ducem din punctul A al unei curbe (A) tangentele AM și AN la două curbe (M) și (N) și să ne propunem a calcula variația unghiului MAN sau α (Fig. 25).

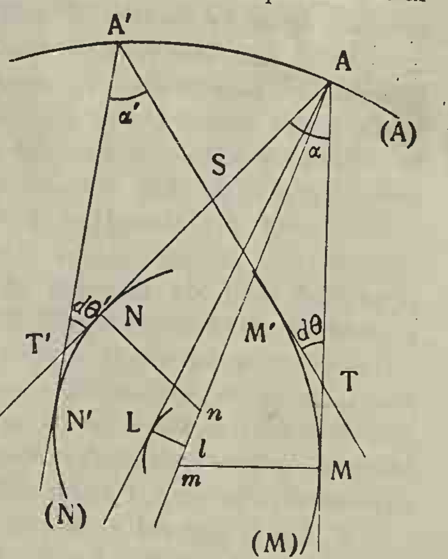

Fig. 25.

Să ducem din punctul infinit vecin A' tangentele A'M', A'N'. Diferența $(\alpha' - \alpha)$ a unghiurilor MAN și M'A'N' este variația unghiului α, adică

$$d(\alpha) = \alpha' - \alpha.$$

S fiind intersecția dreptelor AN și A'M', din triunghiurile AST și A'ST', avem

$$\alpha + \sphericalangle STA = \alpha' + \sphericalangle ST'A',$$

de unde

$$\alpha' - \alpha = STA - ST'A'. \tag{15}$$

Dar unghiurile STA și ST'A' sunt unghiurile de contingență a curbelor (M) şi (N). Însemnând cu θ şi θ' unghiurile făcute de AT şi AT′ cu o direcție dată, ştim că unghiurile de contingență sunt egale cu $d\theta$ şi $d\theta'$.

Înlocuind în (15), avem

$$d(\alpha) = d\theta - d\theta'. \tag{16}$$

Însemnând cu m şi n punctele de intersecție ale normalei în A la curba (A) cu normalele în M şi N la curbele (M) şi (N), aplicând relația (5), avem

$$d(\mathrm{A}) = \mathrm{A}m \,.\, d\theta, \quad d(\mathrm{A}) = \mathrm{A}n \,.\, d\theta'\,;$$

de unde
$$d\theta = \frac{d(\mathrm{A})}{\mathrm{A}m}, \quad d\theta' = \frac{d(\mathrm{A})}{\mathrm{A}n}.$$

Înlocuind în (16), avem

$$d(\alpha) = d(\mathrm{A})\left(\frac{1}{\mathrm{A}m} - \frac{1}{\mathrm{A}n}\right), \tag{17}$$

care dă variația unghiului MAN $= \alpha$. Această formulă a fost găsită de Mannheim.

Aplicații. 1^0 Dacă unghiul α este constant, variația sa, $d\alpha = 0$; deci $\mathrm{A}m = \mathrm{A}n$, punctele m şi n coincid. Deci, *normalele la înfăşurătoarele laturilor unui unghi constant se tae pe normala la curba descrisă de vârful unghiului.*

Dacă una din laturile unghiului constant, AN, de ex., *coincide cu normala în* A, *atunci* n *coincide cu centrul de curbură a al curbei* (A) *în punctul* A. Deci, *punctul de contact* M *al laturei* AM *cu înfăşurătoarea sa este piciorul perpendicularei lăsate pe* AM *din centrul de curbură a al curbei* (A).

Această proprietate se poate interpreta şi altfel. Dacă unghiul făcut de normala în A cu AM este constant, atunci şi unghiul făcut de tangenta în A la curba (A) cu AM este constant (ca fiind complimentul unui unghi constant). Deci, *dacă o latură a unui unghi constant rămâne tangentă la locul descris de vârful unghiului, atunci punctul de contact al celeilalte laturi cu înfăşurătoarea sa este piciorul perpendicularei lăsate pe ea din centrul de curbură al curbei descrisă de vârful unghiului şi în vârful unghiului.*

2^0 Fie L punctul unde bisectoarea unghiului MAN atinge înfăşurătoarea sa (L) şi l punctul unde normala la (L) tae normala în (A). Aplicând relația (17) unghiurilor MAL şi LAN, avem

$$d(\mathrm{MAL}) = d(\mathrm{A})\left(\frac{1}{\mathrm{A}m} - \frac{1}{\mathrm{A}l}\right), \quad d(\mathrm{NAL}) = d(\mathrm{A})\left(\frac{1}{\mathrm{A}l} - \frac{1}{\mathrm{A}n}\right).$$

Dar $\sphericalangle MAL = \sphericalangle NAL$; deci

$$\frac{1}{Am} - \frac{1}{Al} = \frac{1}{Al} - \frac{1}{An},$$

$$\frac{2}{Al} = \frac{1}{Am} + \frac{1}{An}.$$

Această relaţie probează că *punctul l este conjugatul armonic al lui* A *faţă de m şi n.*

În particular, *dacă bisectoarea* AL *se confundă necontenit cu normala* A*a în* A, punctul *l* se confundă cu centrul de curbură *a* în A la (A). Deci, în acest caz, *punctele m şi n divid armonic raza de curbură* A*a*. Curbele (M) şi (N) se zic atunci *causticele prin reflexiune* faţă de curba (A).

Observare. Dacă curba înfăşurătoare a unei drepte variabile se reduce la un punct, pentru fiecare din poziţiile dreptei variabile, normala la înfăşurătoare este atunci perpendiculara la această dreaptă în acel punct.

20. **Normale la curbele descrise de punctele sau înfăşurate de dreptele unei figuri de formă invariabilă. Centru instantaneu de rotaţie. Metoda lui Chasles.** Să considerăm în mod continuu poziţiile succesive ale unei figuri invariabile ca formă, ale cărei două din punctele sale descriu curbele cunoscute (A) şi (B) (Fig. 26). Să ne propunem, pentru o poziţie oarecare a figurei, să găsim normala la curba descrisă de un punct oarecare C al figurei şi normala la înfăşurătoarea uneia din dreptele *d* ale figurei, pe care o putem presupune dusă prin punctul C, dealtfel şi el ales arbitrar.

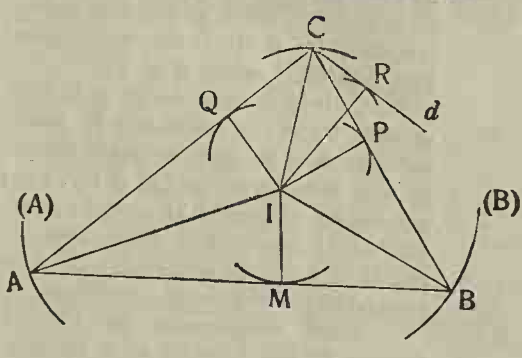

Fig. 26.

Segmentul AB, fiind de lungime constantă, avem punctul M unde AB atinge înfăşurătoarea sa (No. 18, 3⁰), coborând din punctul I, de întâlnire al normalelor în A şi B la curbele descrise de aceste puncte, o perpendiculară IM pe AB.

Unghiul CAB fiind constant, normala la înfăşurătoarea laturei AC, se obţine (No. 19, 1⁰) ducând pe CA perpendiculara

IQ din punctul I, de întâlnire al normalei în A la curba descrisă de vârful A, cu normala în M la înfăşurătoarea laturei AB.

De asemenea, perpendiculara IP coborâtă din I pe BC, este normala la înfăşurătoarea laturei BC.

În mod analog, unghiul C fiind constant, normala în punctul C la locul descris de punctul C, este dreapta ce uneşte punctul C cu punctul I de întâlnire al normalelor IP şi IQ la înfăşurătoarele dreptelor CA şi CB.

În fine, bazându-ne pe aceleaşi proprietăţi stabilite, unghiul dreptei d cu BC fiind constant, normala la înfăşurătoarea acestei drepte este perpendiculara coborâtă pe această dreaptă din punctul I de întâlnire al normalelor IC şi IP.

În rezumat, *normalele la toate curbele descrise de punctele, sau la înfăşurătoarele dreptelor unei figuri de formă invariabilă, trec, pentru aceeaş poziţie a figurei, prin acelaş punct* I.

Această proprietate a fost descoperită de *Chasles*, care a numit punctul I *centru instantaneu de rotaţie*. Vom vedea, mai departe, pentru ce a fost dată această numire punctului I.

Exemple. I. Se ştie că un punct oarecare M al unui segment de dreaptă AB, de mărime constantă, ale cărui extremităţi A şi B descriu dreptele perpendiculare Ox şi Oy, descrie o elipsă, ale cărei axe sunt îndreptate după Ox şi Oy şi ale căror lungimi sunt a = MB, b = MA (Fig. 27).

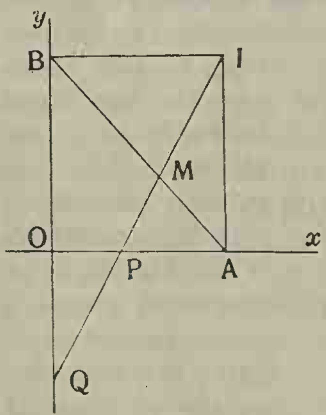

Fig. 27.

Curbele descrise de A şi B fiind dreptele Ox şi Oy, normalele la aceste curbe în A şi B sunt perpendicularele în A şi B respectiv pe Ox şi Oy. Fie I punctul de intersecţie al acestor perpendiculare. I este centrul instantaneu de rotaţie în mişcarea figurei AB de formă invariabilă, la momentul considerat.

După proprietatea lui Chasles, dreapta MI este normala în M la elipsa descrisă de M.

Din triunghiurile asemenea MPA şi BMI, avem

$$\frac{MA}{MP}=\frac{MB}{MI}, \quad MP=\frac{MA \cdot MI}{MB}.$$

În mod analog, din triunghiurile asemenea MBQ, MAI, avem

$$\frac{MQ}{MB}=\frac{MI}{MA}, \quad MQ=\frac{MB \cdot MI}{MA}.$$

De unde

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{MA \cdot MI}{MB}:\frac{MB \cdot MI}{MA}=\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

a și b fiind semiaxele elipsei descrisă de M ; regăsim astfel o proprietate a normalei la elipsă într'un pr nct, referitoare la raportul segmentelor cuprinse pe normală între punctul considerat pe elipsă și punctele unde normala tae axele elipsei.

II. *Tangenta (normala) într'un punct* M *al unei figuri variabile ca formă care rămâne asemenea cu ea însăși.* Fie că două puncte A și B (Fig. 28) ale figurei mobile descriu curbele (A) și (B), iar mișcarea figurei în plan o definim prin curba la care rămâne tangentă dreapta AB. Fie E punctul ei de contact cu înfășurătoarea. Unghiul A fiind constant, punctul de contact al dreptei AM cu înfășurătoarea sa este piciorul F al perpendicularei pe AM din punctul α de intersecție al normalelor în A și E.

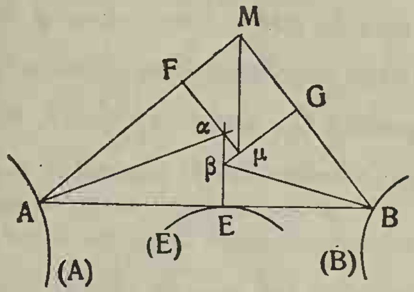

Fig. 28.

De asemenea, punctul de contact G al lui MB cu înfășurătoarea este piciorul perpendicularei pe MB din punctul β de intersecție al normalelor în B și E. Unghiul M fiind constant, normala în M trece prin punctul μ de intersecție al normalelor în F și G și este $M\mu$.

21. **Normale la curbele descrise de punctele sau la înfășurătoarele dreptelor unei figuri de formă variabilă. Metoda lui Mannheim.** Fie M, P, Q punctele de contact cu înfășurătoarele ale laturilor triunghiului ABC, de formă variabilă (Fig. 29). Normalele la aceste înfășurătoare tae în a, b, b', c', c'', a'', normalele la curbele (A), (B), (C), descrise de punctele A, B, C.

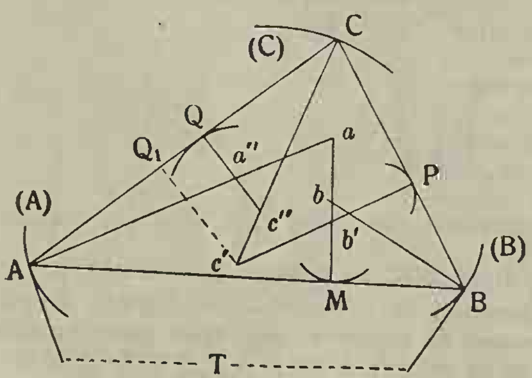

Fig. 29.

Conform celor stabilite la variația unui arc de curbă, avem (No. 17)

$$\frac{d(\mathrm{A})}{d(\mathrm{B})}=\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{B}b},\quad \frac{d(\mathrm{B})}{d(\mathrm{C})}=\frac{\mathrm{B}b'}{\mathrm{C}c'},\quad \frac{d(\mathrm{C})}{d(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{C}c''}{\mathrm{A}a''}.$$

Înmulțind aceste relațiuni, obținem

$$\frac{\mathrm{A}a\,.\,\mathrm{B}b'\,.\,\mathrm{C}c''}{\mathrm{B}b\,.\,\mathrm{C}c'\,.\,\mathrm{A}a''}=1.$$

Această formulă stabilită de Mannheim, permite, cunoscând cinci din cele şase normale, $Aa''a$, $Bb'b$, $Cc''c'$, Mba, $Pb'c'$, $Qa''c''$, să se construiască a şasea.

Să presupunem că normala necunoscută este aceea care corespunde la unul din vârfuri, normala $Cc''c'$, de ex. Din formula de mai sus se deduce o valoare λ pentru $\frac{Cc'}{Cc''}$, căci celelalte expresiuni sunt cunoscute. Va fi destul a lua pe CQ punctul Q_1, astfel ca $\frac{CQ}{CQ_1} = \lambda$. Perpendiculara în Q_1 pe CQ tae normala Pb' în punctul c' căutat.

Să presupunem acum că normala necunoscută este aceea care corespunde uneia din laturi, normala Mba, de ex. Din formula de mai sus, se găseşte o valoare μ pentru $\frac{Aa}{Bb}$, căci celelalte cantităţi sunt cunoscute. Dacă T este punctul de întâlnire al tangentelor în A şi B la curbele (A) şi (B), avem [No. 17, formulele (7) şi (9)]

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{Aa}{Bb}, \qquad \frac{d(A)}{d(B)} = \frac{MA \,.\, TA}{MB \,.\, TB},$$

de unde

$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{MA \,.\, TA}{MB \,.\, TB}.$$

Cum $\frac{Aa}{Bb} = \mu$, avem

$$\frac{MA \,.\, TA}{MB \,.\, TB} = \mu,$$

de unde se deduce valoarea raportului $\frac{MA}{MB}$, căci $\frac{TA}{TB}$ este cunoscut. Acest raport fiind aflat, se găseşte punctul M pe latura AB şi deci şi normala la înfăşurătoarea acestei drepte.

22. **Centrul instantaneu de mişcare a unei figuri plane variabile care rămâne asemenea cu ea însăşi** [1]. I. AB şi A′B′ (Fig. 30) fiind două elemente lineare a două figuri asemenea F şi F′ şi P punctul de intersecţie al dreptelor AB şi A′B′, să însemnăm cu I punctul de intersecţie al cercurilor PAA′ şi PBB′. Triunghiurile IAB şi IA′B′ au egale unghiurile din A şi A′, B şi B′, sunt deci asemenea. I este deci propriul său omolog în aceste triunghiuri, este punctul dublu al figurilor asemenea F şi F′. Cum unghiurile BIA = B′IA′, urmează că rotind figura F′ în jurul lui I de acest unghi, figura F′ ia poziţia F_1 omotetică cu F, în raportul k = AB : A′B′. Deci, se poate obţine figura F′ din F, printr'o rotaţie în

(1) A se vedea nota mea din *Nouvelles Annales de Mathématiques*, février 1926.

jurul punctului dublu I şi o dilatare (amplificare) în raportul de omotetie (asemănare) k.

Când punctul A' este infinit vecin de A, dreapta AA' tinde către tangenta AT în A la traectoria descrisă de A. Cum unghiurile $IAA'=IBB'$, urmează că, *în mişcarea unei figuri plane în planul său, variabilă cu păstrare de similitudine, tangentele* AT *la diferitele traectorii ale punctelor* A, *la un moment dat, fac acelaş unghi cu razele vectoare* IA *ce unesc punctul dublu cu acele puncte.* I este *centrul instantaneu de mişcare* la momentul considerat.

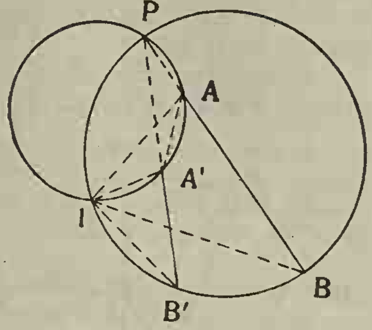

Fig. 30.

Deci, curba pe care se mişcă un punct oarecare al figurei, la un moment dat, pentru a trece infinitezimal la o poziţie infinit vecină, este astfel că tae subt un unghi constant razele vectoare ce se obţin unind un punct fix I din plan cu acele puncte M; aceaste curbe, numite în *Cinematica mediilor deformabile, curbe de curent,* sunt deci *spirale logaritmice.*

II. Mişcarea continuă a unei figuri F variabilă, care rămâne asemenea cu ea însăşi este cunoscută [1] dacă se dau curbele (A) şi (B) descrise de două puncte A şi B ale figurei F şi curba (γ) înfăşurătoarea dreptei AB.

Fie AT (Fig. 31) şi BS tangentele în A şi B la curbele (A) şi (B) şi γ punctul de contact al lui AB cu înfăşurătoarea sa (γ). AT şi BS sunt limitele dreptelor AA' şi BB' şi γ limita punctului P. Deci *centrul instantaneu de mişcare,* I, *la momentul considerat, este punctul de întâlnire al cercurilor trecând prin* γ *şi tangente respectiv în* A *şi* B *la dreptele* AT *şi* BS.

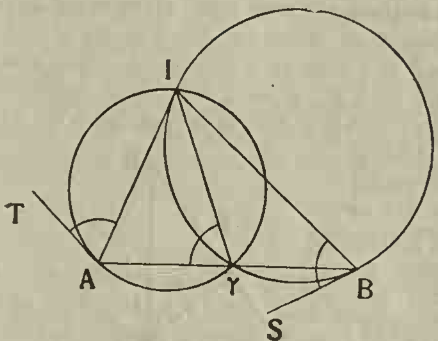

Fig. 31.

Luând un sens pe tangentele AT şi BS, se vede că unghiurile $I\gamma A=IAT=IBS$. M fiind un punct oarecare al figurei F în mişcare, care rămâne asemenea cu ea însăşi, *tangenta* [2] *în* M *la curba descrisă de* M *este dreapta* MR, *astfel ca unghiurile* $IMR=IAT=IBS$.

De asemenea, *punctul de contact,* N, *la momentul considerat al unei drepte* Δ *a figurei mobile* F *este astfel ca unghiurile* $IN\Delta=IMR=IAT=IBS=I\gamma A$.

---

(1) N. Abramescu, *Sour le mouvement des figures planes variables avec conservation da similitude ou d'aire (Bull. de la Soc. roumaine des sciences math.,* vol. *XXVI,* ianuarie–iulie 1924).

(2) A se vedea şi metoda lui *Mannheim,* expusă la No. 20, exemplul II.

Deci, *în mişcarea unei figuri plane, care rămâne asemenea cu ea însăşi, dreptele care tae, la un moment dat, subt acelaş unghi constant, potrivit ales, traectoriile diferitelor puncte ale figurei în mişcare, se întâlnesc în acelaş punct* I.

Ca aplicaţie, să considerăm normala în M la curba (M) care tae o curbă (N) (Fig, 32) în punctul N; se ia, în sensul arcelor crescătoare a curbei (M), pe perpendiculara în N pe MN, un vector $NM' = k \cdot MN$ (k = const.). Pentru a găsi tangenta în M′ la curba descrisă de acest punct, se observă că triunghiul MNM′ rămâne asemenea cu el însuşi. Însemnând cu MT tangenta în M la curba (M) în sensul arcelor crescătoare, cu μ centrul de curbură în M la curba (M), prin NS tangenta în N la curba (N), centrul instantaneu I de mişcare al figurei care rămâne asemenea cu ea însăşi, este la intersecţia cercului de diametru Mμ cu cercul ce trece prin μ şi este tangent în N la curba (N). Tangenta în M′ la curba (M′) este dreapta M′R astfel ca unghiurile TMI = INS = IM′R.

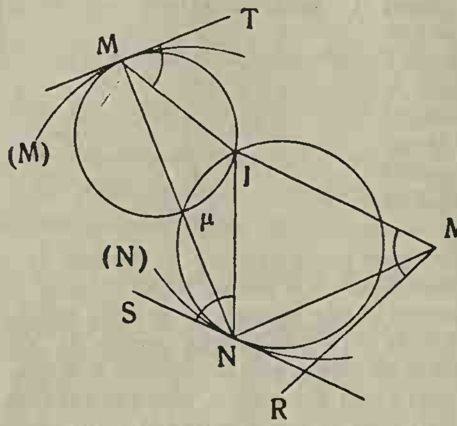

Fig. 32.

23. Centrul instantaneu de mişcare ale unei figuri plane variabile cu păstrare de arie [1]. I. Fiind date două segmente AB (Fig. 33) şi A′B′, punctul I, astfel ca ariile AIB = A′IB′, este pe o dreaptă Δ, care trece prin intersecţia R a dreptelor AB şi A′B′, şi care este locul punctelor astfel ca raportul distanţelor la dreptele AB şi A′B′ să fie egal cu A′B′ : AB.

Fiind date două triunghiuri ABC şi A′B′C′, de aceeaşi arie, există în planul lor un punct I, astfel ca ariile AIB = A′IB′, BIC = B′IC′, CIA = C′IA′; acest punct este la intersecţia dreptelor Δ_a, Δ_b, Δ_c, corespunzătoare egalităţii ariilor BIC=B′IC′, CIA=C′IA′, AIB=A′IB′. A′, B′, C′, fiind omoloagele punctelor A, B, C, punctul I este propriul său omolog în triunghiurile ABC, A′B′C′.

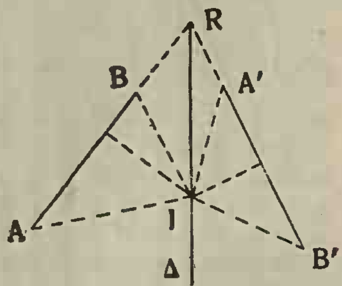

Fig. 33.

Fiind date două figuri F şi F′ de aceeaşi arie, astfel ca triunghiurile ABC, A′B′C′ să fie omoloage în figurile F şi F′, se ştie [2] că există un punct I care este propriul său omolog în figurile F şi F′.

---

[1] A se vedea nota mea din *Nouvelles Annales de Math.*, Avril 1926.

[2] N. Abramescu, *Sur le mouvement des figures planes variables avec conservation de similitude ou d'aire (Bull. de la Soc. roumaine des sciences math*, vol. XXVI, ianuarie—iulie 1924).

Să considerăm o figură plană F care are o deformare omogenă cu păstrare de arie. Fie ABC un triunghi al figurei F. Mişcarea acestei figuri este cunoscută dacă se dau curbele (A) şi (B) descrise de punctele A şi B, înfăşurătoarele (γ) şi (β) ale laturilor AB şi AC şi aria triunghiului ABC. Fie F′ poziţia infinit vecină a figurei F şi A′B′C′ omologul triunghiului ABC în figura F′. Dacă A′B′ tinde către AB, punctul R de întâlnire a lui AB şi A′B′ tinde către punctul γ de contact al lui AB cu înfăşurătoarea sa şi punctul I este pe dreapta care trece prin γ şi cum $A'B' : AB \rightarrow 1$, locul lui I este bisectoarea exterioară a unghiului dreptelor, AB şi A′B′, adică tinde către normala în γ la curba (γ).

De asemenea, punctul I este pe normala în β la curba (β). Deci, punctul de contact α al lui BC cu înfăşurătoarea sa (α) este piciorul perpendicularei coborâte din I pe BC.

Deci, *în deformarea omogenă a unui figuri plane variabilă cu conservare de arie, normalele la înfăşurătoarele dreptelor figurei concură, la un moment dat, în acelaş punct* I. Acest punct I este *centrul instantaneu de mişcare*, analog cu centrul instantaneu de rotaţie în cazul figurei de formă invariabilă.

Pentru a găsi *tangenta în* C *la curba descrisă de punctul* C *al figurei* F, se vede că, în deformarea triunghiului variabil ABC, se cunosc cinci normale, în vârfurile A şi B, şi la înfăşurătoarele laturilor AB, BC, CA, şi deci *se poate întrebuinţa metoda lui Mannheim* (No. 21) *pentru a găsi a şasea normală*, în C, şi deci şi tangenta în C.

II. Se pot extinde aceleaşi consideraţiuni la o *figură variabilă care are o deformare omogenă cu conservare de volum*. Se vede întâi, că fiind date două tetraedre ABCD, A′B′C′D′, de acelaş volum, există un punct I, astfel ca volumele $IABC = IA'B'C'$, $IBCD = IB'C'D'$, $ICDA = IC'D'A'$ şi deci $IBDA = IB'D'A'$. Se deduce că (P) fiind un plan al figurei în mişcare, *planele duse prin caracteristicile planelor* (P) [caracteristica unui plan (P) fiind limita intersecţii planului (P) şi a poziţii infinit vecine], *perpendiculare pe planul* (P), *concură în acelaş punct* I.

APLICAŢII.

24. **Determinări de normale.** 1° *Normală la concoidă.* Se ştie că concoida unei curbe (B) se obţine (Fig. 34) luând o lungime constantă $BC = l$ pe raza vectoare OB, care uneşte polul O cu un punct oarecare B al curbei (B). Segmentul BC fiind constant, normalele în B şi C la curbele descrise de aceste puncte, se întâlnesc pe normala în punctul de contact al dreptei BC cu înfăşurătorea sa. Segmentul BC trecând necontenit prin punctul O, înfăşurătoarea sa se reduce la punctul O, astfel că normala în O la înfăşurătoarea lui BC este perpendiculară în O pe BC. Fie D punctul unde normala în B la curba (B) tae perpendiculara în O pe BC. Normala în C la curba descrisă de punctul C este dreapta DC.

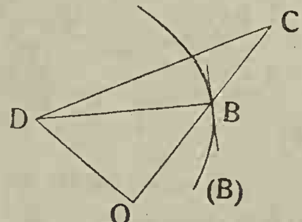

Fig. 34.

2° *Normală la podară.* Fiind date curba (A) şi punctul O, podara curbei (A) este locul proecţiilor M ale punctului O pe tangentele la curba (A) (Fig. 35). Pentru a găsi normala în M, să considerăm unghiul constant (drept) AMO, a cărui una din laturi este tangentă în A la curba (A), iar cealaltă latură trece prin punctul fix O. Normala în M trece prin punctul de intersecţie al normalelor în A şi O la curbele descrise de aceste puncte. Normala în O este perpendiculara în O pe OM, care se tae cu normala în A în punctul I. Normala în M este MI şi trece prin mijlocul lui AO.

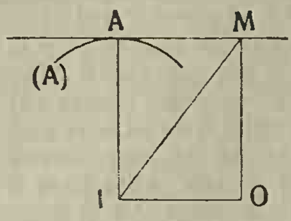

Fig. 35.

3° *Normala la curba omotetică cu o curbă dată.* Fiind dat punctul O şi curba (B), omotetica curbei (B) se obţine (Fig. 36) luând pe raza OB punctul C, astfel că

$$\frac{OB}{OC}=K=\text{const.}$$

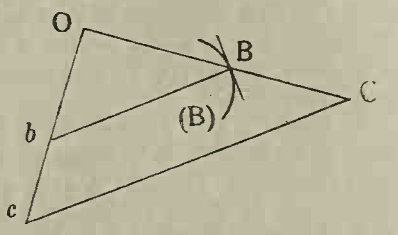

Fig. 36.

Să presupunem că normalele la curbele (B) şi (C) în punctele B şi C tae în b şi c perpendiculara în O pe BC; cum BC trece prin punctul O, înfăşurătoarea sa este punctul O, iar normala la înfăşurătoarea lui BC este perpendiculara în O pe BC, centrul de curbură în O este chiar punctul O.

Aplicând o proprietate cunoscută relativă la variaţia unui segment [No. 18, formula (12)], avem

$$d(OB)=Ob\,.\,d\alpha,\quad d(OC)=Oc\,.\,d\alpha,$$

$d\alpha$ fiind unghiul de contingenţă din O. De unde

$$\frac{d(OB)}{d(OC)}=\frac{Ob}{Oc}.$$

Cum

$$\frac{d(OB)}{d(OC)}=\frac{OB}{OC}=K,$$

rezultă că

$$\frac{Ob}{Oc}=\frac{OB}{OC},$$

ceeace probează că normalele Bb, Cc, în B şi C sunt paralele.

Deci, normala la omotetica unei curbe este paralelă cu normala la curba dată.

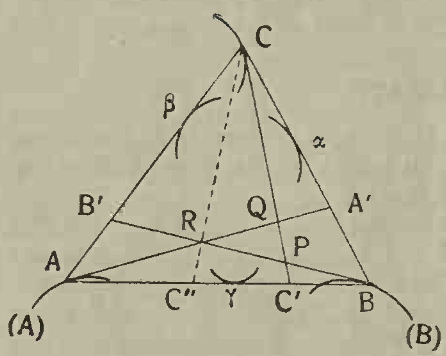

Fig. 37.

4° *Vârfurile* A *şi* B *ale unui triunghi variabil* ABC (Fig. 37) *descriu două curbe* (A) *şi* (B), *latura* AB *rămâne tangentă la o curbă* (γ), *iar laturile* AC *şi* BC *au direcţiuni fixe. Să se determine normala în* C *la curba* (C) *descrisă de punctul* C. Fie α, β, γ punctele de contact ale laturilor BC, CA, AB cu înfăşurătoarele lor şi R, P, Q punctele de intersecţie ale tangentelor în A şi B la curbele (A) şi (B), în B şi C la curbele (B) şi (C), în C şi A la curbele (C) şi (A).

După o proprietate stabilită [No. 17, formula (9)], avem

$$\frac{d(A)}{d(B)}=\frac{\gamma A.RA}{\gamma B.RB}, \quad \frac{d(B)}{d(C)}=\frac{\alpha B.PB}{\alpha C.PC}, \quad \frac{d(C)}{d(A)}=\frac{\beta C.QC}{\beta A.QA}.$$

Înmulţindu-le, obţinem

$$\frac{\gamma A}{\gamma B}\cdot\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{RA}{RB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}=1.$$

În cazul problemei, AC şi BC fiind de direcţie dată, îşi ating înfăşurătoarele lor la infinit, deci punctele β şi α sunt la infinit pe aceste drepte şi deci

$$\frac{\beta C}{\beta A}=1, \quad \frac{\alpha B}{\alpha C}=1.$$

Relaţia precedentă devine

$$\frac{\gamma A}{\gamma B}\cdot\frac{RA}{RB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}=1.$$

Fie A′, B′, C′ intersecţiile laturilor BC, CA, AB cu AQ, BR, CP. Avem

$$\frac{RA}{RB}=\frac{\sin B'BA}{\sin A'AB}, \quad \frac{PB}{PC}=\frac{\sin C'CB}{\sin B'BC}, \quad \frac{QC}{QA}=\frac{\sin A'AC}{\sin C'CA}.$$

Relaţia de mai sus devine

$$\frac{\gamma A}{\gamma B}\,\frac{\sin B'BA \sin C'CB \sin A'AC}{\sin A'AB \sin B'BC \sin C'CA}=1.$$

Dar, din triunghiurile AB′B, BB′C, avem

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{\sin ABB'}{\sin AB'B}, \quad \frac{B'C}{BC}=\frac{\sin B'BC}{\sin CB'B}; \quad \frac{\sin ABB'}{\sin CBB'}=\frac{AB'}{B'C}\,\frac{BC}{AB},$$

căci sin AB′B = sin CB′B. În mod analog,

$$\frac{\sin BCC'}{\sin ACC'}=\frac{BC'}{AC'}\,\frac{AC}{BC}, \quad \frac{\sin CAA'}{\sin BAA'}=\frac{A'C}{A'B}\,\frac{AB}{AC}.$$

Înlocuind, relaţia găsită devine după oarecari reduceri

(18) $$\frac{\gamma A}{\gamma B}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{C'B}{C'A}=1.$$

Fie C″ punctul unde CR tae pe AB. Avem

$$\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{C''B}{C''A}=-1,$$

astfel că, neţinând seamă de semn, relaţia precedentă devine

$$\frac{C'B}{C'A}:\frac{C''B}{C''A}=\frac{\gamma B}{\gamma A}, \quad \frac{C'B}{C'A}=\frac{\gamma B}{\gamma A}\cdot\frac{C''B}{C''A}.$$

Punctele C″, γ fiind cunoscute pe latura AB, valoarea raportului C′B : C′A este cunoscută şi deci poziţia punctului C′ este determinată. Tangenta în punctul C este dreapta CC′.

Observări. I. Să presupunem că curbele (A) și (B) sunt două drepte. Tangentele la aceste curbe în A și B sunt chiar aceste drepte. Dacă curba (γ) este o iperbolă, iar curbele (A) și (B) asimptotele sale, punctul de contact γ al dreptei AB cu iperbola este mijlocul segmentului AB; deci $\gamma A : \gamma B = 1$, iar relația obținută (18), arată că dreptele AA′, BB′, CC′ sunt concurente, tangenta în C este dreapta CR.

II. Dacă, pe lângă condiția ca curbele (A) și (B) să fie două drepte, mai punem condiția ca dreptele duse prin A și B să fie paralele cu aceste drepte, atunci A′ și B′ sunt aruncate la infinit, căci CA paralelă cu BR, CB paralelă cu AR, așa că relația (18) devine (Fig. 38)

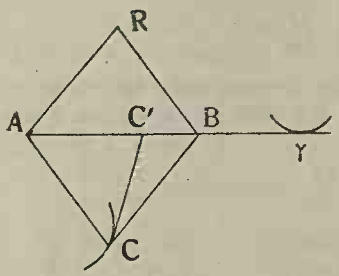

Fig. 38.

$$\frac{\gamma A}{\gamma B}\frac{C'B}{C'A} = -1, \quad \frac{C'B}{C'A} = -\frac{\gamma B}{\gamma A},$$

adică punctele C′ și γ sunt conjugate armonic în raport cu A și B.

III. Se observă că relația generală ce dă a șasea normală (la noi tangenta) în C, când se cunosc cinci, depinde numai de tangenta în γ la curba (γ). Deci, tangenta în C la curba descrisă de C depinde numai de tangenta în γ. Transformarea (γ, C) este deci de contact, așa că o exprimare geometrică a unei *transformări de contact* este: *tangenta la o curbă* (γ) *tae două curbe în* A *și* B; *se duce din* A *tangenta la o curbă* (β) *și din* B *tangenta la o curbă* (α). *Punctul de intersecție* C *al acestor tangente este astfel în cât transformarea* (γ, C) *este de contact.*

25. **Înfășurătoare de drepte.** 1° *Coardă care subîntinde într'o curbă un arc de lungime constantă.* Dacă dreapta variabilă AB determină, pentru fiecare din pozițiile sale (Fig. 39) pe curba (C) un arc AB de lungime constantă, avem

$$d(A) = d(B).$$

Însemnând cu T intersecția tangentelor în A și B la curba (C), avem [No. 17, formula (9)]

$$\frac{MA \cdot AT}{MB \cdot BT} = 1,$$

de unde

$$\frac{MA}{MB} = \frac{TB}{TA}.$$

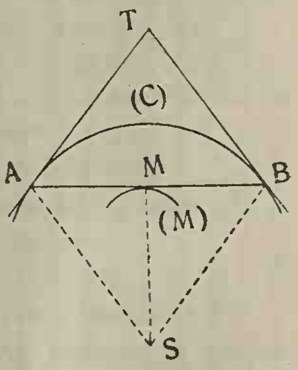

Fig. 39.

Să ducem prin A și B paralelele la BT și AT, care se tae în S.

Avem

$$\frac{MA}{MB} = \frac{SA}{SB},$$

ceeace probează că SM este bisectoarea unghiului ASB și astfel punctul M de contact al dreptei AB cu înfășurătoarea sa este determinat.

2° *Înfășurătoarea unei coarde a unei curbe văzută dintr'un punct fix subt un unghi constant* (¹). Fie AB o coardă a curbei (C), văzută din

(¹) A se vedea, **M. d'Ocagne,** *Sur l'enveloppe de certaines droites variables (Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1883, p. 252; 1886, p. 88; 1897, p. 238).

punctul O subt unghiul constant AOB (Fig. 40). Să găsim punctul M de contact al coardei AB cu înfășurătoarea sa.

Fie T intersecția tangentelor în A și B la curba (C). Dar știm [No. 17, formula (9)] că

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{MA \cdot TA}{MB \cdot TB}.$$

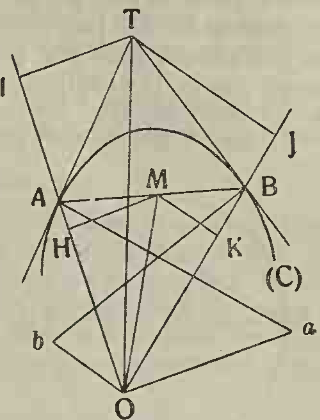

Fig. 40.

Fie a și b intersecțiile normalelor în A și B la curba (C) cu perpendicularele ridicate în O pe OA și OB.

Dar, din cauză că unghiul AOB este constant, urmează că OA și OB se învârtesc cu acelaș unghi $d\theta$ și deci [No. 17, formula (5)]

$$d(A) = Aa \cdot d\theta, \quad d(B) = Bb \cdot d\theta,$$

de unde

$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{AM \cdot AT}{BM \cdot BT},$$

sau

$$\frac{AM}{BM} = \frac{Aa \cdot BT}{AT \cdot Bb}. \tag{19}$$

Să coborâm din T pe OA și OB perpendicularele TI și TJ. Din asemănarea triunghiurilor OAa și ITA, de o parte, OBb și JTB, de alta, avem

$$\frac{Aa}{AT} = \frac{OA}{TI}, \quad \frac{Bb}{BT} = \frac{OB}{TJ}.$$

Înlocuind în (19), obținem

$$\frac{AM}{BM} = \frac{OA \cdot TJ}{TI \cdot OB}.$$

Să lăsăm din punctul M perpendicularele MH și MK pe OA și OB. Avem

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\text{aria OAM}}{\text{aria OBM}} = \frac{OA \cdot MH}{OB \cdot MK}.$$

Relația precedentă devine

$$\frac{OA \cdot MH}{OB \cdot MK} = \frac{OA \cdot TJ}{OB \cdot TI}, \quad \frac{MH}{MK} = \frac{TJ}{TI}.$$

Triunghiurile HMK, JTI, având unghiurile HMK = JTI, ca suplimentele unghiului IOJ, având, de asemenea, și laturile care formează aceste unghiuri proporționale, sunt triunghiuri asemenea. Deci, unghiurile MHK = TJI. Dar, din patrulaterele inscriptibile OHMK, OITJ, rezultă egalitatea unghiurilor MHK = MOK, TJI = TOI și deci, observând egalitatea unghiurilor MHK = TJI, urmează egalitatea unghiurilor MOK = TOI. Deci, dreptele TO și MO fac unghiuri egale cu laturile unghiului O, sunt simetrice față de bisectoarea unghiului AOB, sunt, cum se mai zice *isogonale*. Deci, punctul de contact M al dreptei AB cu înfășurătoarea sa este intersecția dreptei AB cu isogonala dreptei OT față de unghiul AOB.

Dacă curba (C) dată este o elipsă cu centrul O, polara punctului T în raport cu elipsa este AB. Punctul de la infinit al dreptei AB are ca polară diametrul conjugat direcţii AB, adică dreapta care uneşte punctul O cu mijlocul lui AB. Dar, polara acestui punct trece prin polul dreptei pe care se găseşte, adică prin polul lui AB, punctul T. Deci, dreapta care uneşte punctul O cu mijlocul lui AB trece prin T, sau, dreapta OT trece prin mijlocul lui AB.

Atunci, dreapta OM, isogonala lui OT, este isogonala medianei triunghiului OAB, este, cum se mai zice, *simediana* vârfului O din triunghiul OAB.

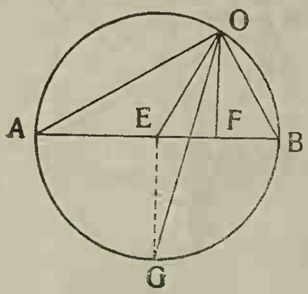

Fig. 41.

Să presupunem, mai mult, că unghiul AOB este drept (Fig. 41). Mediana triunghiului AOB este OE, bisectoarea unghiului O este OG, G fiind mijlocul arcului AB. Ducând înălţimea unghiului drept O, avem egalitatea unghiurilor GOF = OGE = EOG, ceea ce probează că dreapta OF este simetrica medianei OE în raport cu bisectoarea OG, adică simediana unghiului drept O este înălţimea acestui unghi drept.

Aşa fiind, să presupunem că se consideră coarda AB a unei elipse cu centrul O, care e văzută din centrul O subt un unghi drept. Punctul de contact M al coardei AB cu înfăşurătoarea sa este la intersecţia coardei AB cu simediana unghiului drept O, adică cu perpendiculara din O pe AB. Deci, înfăşurătoarea coardei AB este o curbă astfel că normala într'un punct M oarecare al ei trece prin punctul fix O, adică este un cerc. Aşa dar, *înfăşurătoarea coardelor elipsei văzute din centrul O al elipsei subt un unghi drept este un cerc cu centrul în* O.

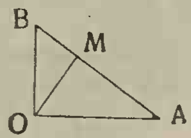

Fig. 42.

Pentru a găsi raza acestui cerc, să considerăm poziţia particulară a coardei AB şi anume aceea ce uneşte vârfurile A şi B ale elipsei (Fig. 42). Raza cercului este perpendiculara OM. Din triunghiul dreptunghic AOB, avem

$$\overline{OM}^2 = AM.BM = \frac{\overline{OA}^2}{AB}\frac{\overline{OB}^2}{AB} = \frac{\overline{OA}^2 . \overline{OB}^2}{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}, \quad \overline{OM}^2 = \frac{a^2 . b^2}{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{\overline{OM}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

astfel că raza cercului este dată în funcţiune de semiaxele a şi b ale elipsei.

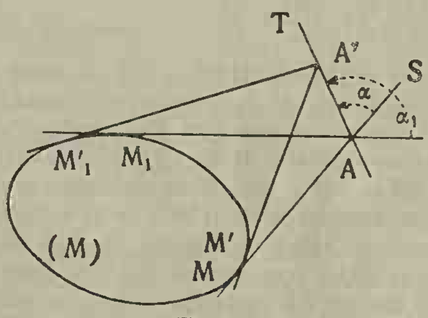

Fig 43.

26. **Teoremele lui Graves şi Chasles asupra arcelor elipsei.** 1⁰ Fie AM şi AM_1 tangentele duse din A la elipsa (M) (Fig. 43). Dacă punctul A se deplasează pe elipsa (A) omofocală cu (M), se ştie că tangenta în A la (A) este bisectoarea AT exterioară a unghiului MAM_1 a tangentelor, căci se cunoaşte proprietatea conicelor omofocale, că tangentele duse din

acelaş punct la conicele omofocale admit aceleaşi bisectoare şi aceste bisectoare sunt tangentele în acest punct la cele două conice omofocale ce trec prin acel punct.

Urmează că unghiurile α şi α_1 ce le fac AT cu direcţiile MA şi M_1A sunt suplimentare, căci $\sphericalangle M_1AA' = \alpha$, AA′ fiind bisectoarea unghiului M_1AS. Deci

$$\alpha + \alpha_1 = \pi, \quad \cos\alpha + \cos\alpha_1 = 0.$$

Considerând tangentele duse la conica (M) dintr'un punct A′ infinit vecin de A pe conica (A), vedem că, dacă unghiul elementului MM′ cu MA tinde către zero, şi prin urmare cosinusul său tinde către 1, unghiul lui $M_1M'_1$ cu M_1A tinde către π şi prin urmare, cosinusul său tinde către -1.

Aplicând proprietatea relativă la variaţia unui segment [No. 18, 3°, formula (13)], avem pentru segmentul MA, pentru care unghiurile β şi γ din formula (13) sunt aci egale cu α şi 0,

$$d(MA) = d(A)\cos\alpha - d(M). \tag{20}$$

Pentru segmentul M_1A, pentru care unghiurile β şi γ din formula (13) sunt respectiv α_1 şi π, avem

$$d(M_1A) = d(A)\cos\alpha_1 + d(M_1).$$

Adunând această formulă cu (20), obţinem

$$d(MA) + d(M_1A) = d(M_1) - d(M) = d(\text{arc } MM_1),$$

pe care integrând-o, găsim

$$MA + M_1A - \text{arc } MM_1 = \text{const.}$$

Deci, *diferenţa dintre suma tangentelor duse dintr'un punct al elipsei* (A) *la elipsa omofocală* (M), *şi arcul acestei elipse* (M) *cuprins între punctele de contact, este constantă*. Aceasta este teorema lui *Graves*.

2° Să presupunem acum că conica (A) omofocală cu elipsa (M) să fie o iperbolă (Fig. 44). Tangenta în A este bisectoarea interioară a unghiului MAM_1; în acest caz, unghiurile α şi α_1 pe care le face AT respectiv cu MA şi M_1A, fac 360° şi avem

$$\alpha + \alpha_1 = 2\pi, \quad \cos\alpha = \cos\alpha_1.$$

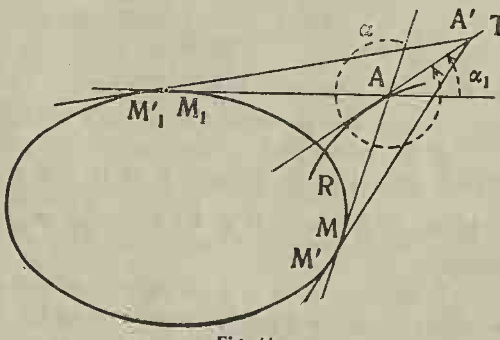

Fig. 44.

Dar, unghiurile γ din formula (13) (No. 18), care sunt aci unghiurile lui MM′ cu MA şi al lui $M_1M'_1$ cu M_1A, tind amândouă către π când A′ vine în A, şi deci cosinusurile lor tind către -1. Aplicând formula (13) (No 18) pentru MA si M_1A, avem

$$d(MA) = d(A)\cos\alpha + d(M), \quad d(M_1A) = d(A)\cos\alpha_1 + d(M_1), \quad \cos\alpha = \cos\alpha_1.$$

Scăzând aceste două relaţii, obţinem

$$d(MA) - d(M_1A) = d(M) - d(M_1).$$

Notând cu R punctul de intersecție al iperbolei (A) cu elipsa (M), avem

$$d(\text{MA}) - d(\text{M}_1\text{A}) = d(\text{arcRM}) - d(\text{arcRM}_1)$$

Integrând și observând că integralele ambilor membrii se anulează deodată când punctul A vine în R, avem

$$\text{MA} - \text{M}_1\text{A} = \text{arc RM} - \text{arc RM}_1.$$

Deci, *diferența lungimilor tangentelor* AM *și* AM_1 *duse dintr'un punct* A *la elipsa* (M) *este egală cu diferența arcelor determinate între punctele de contact* M *și* M_1 *de punctul unde elipsa* (M) *este întâlnită de iperbola omofocală ce trece prin* A. Aceasta este teorema lui *Chasles.*

27. Determinarea centrelor de curbură ale conicelor (¹). I. *Elipsa.* 1° Normala într'un punct oarecare M al unei conice fiind bisectoarea unghiului FMF′ (Fig. 45) (F și F′ focarele) ale razelor vectoare, se știe (No. 19,2°) că *centrul de curbură m este conjugatul armonic al lui* M *în raport cu punctele f și f′ de intersecție ale normalei în* M *cu perpendicularele în* F *și* F′ *pe* MF *și* MF′ (căci înfășurătoarele laturilor MF și MF′ ale unghiului MFM′ sunt punctele F și F′).

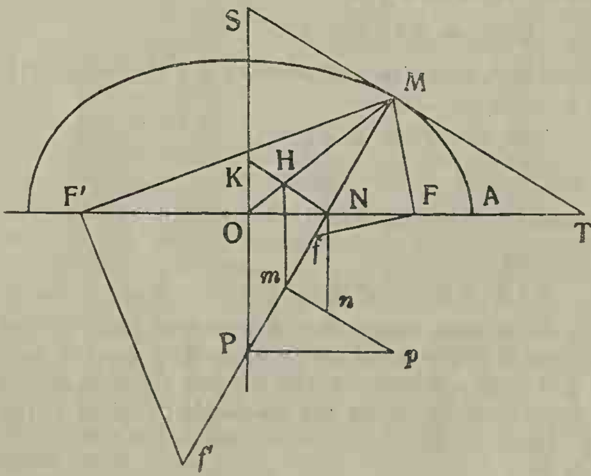

Fig. 45.

Așa se găsește centrul de curbură al elipsei când se cunosc focarele.

2° Se poate găsi o altă construcție pentru centrul de curbură al elipsei. Știm [No. 20, Exemplu], că N și P fiind punctele unde normala în M tae axele elipsei (Fig. 45), avem $\frac{\text{MN}}{\text{MP}} = \frac{b^2}{a^2}$, a și b fiind semiaxele elipsei.

Însemnând cu n și p punctele unde perpendicularele în P la OP și în N la ON tae normala la înfășurătoarea lui NP (adică perpendiculara în m la NP), avem [No. 18, Aplicația 4°]

$$\frac{mn}{mp} = \frac{\text{MN}}{\text{MP}}. \tag{21}$$

Fie T și S punctele de intersecție ale axelor elipsei cu tangenta în M, perpendiculara pe MN. Triunghiurile asemenea mnN și NMT, de o

(¹) A se vedea, M. d'Ocagne, în *L'Enseignement mathématique*, 1915 (p. 307).

parte, mpP și MPS, de alta, dau

$$\frac{mn}{MN}=\frac{mN}{MT},\quad \frac{mp}{MP}=\frac{mP}{MS}.$$

Împărțindu-le și observând (21), avem

$$\frac{mn}{mp}\,\frac{MP}{MN}=\frac{mN}{mP}\,\frac{MS}{MT},$$

$$\frac{mN}{mP}=\frac{MT}{MS}. \tag{22}$$

În punctul N să ridicăm perpendiculara NK pe MN, care tae diametrul OM al punctului M în H. Avem

$$\frac{MT}{MS}=\frac{HN}{HK}.$$

Comparând această egalitate cu (22), rezultă

$$\frac{mN}{mP}=\frac{HN}{HK},$$

relație care probează că Hm este paralelă cu KP, adică perpendiculară pe OA.

Se obține, deci, construcția următoare a lui Mannheim. *Prin punctul* N *unde normala* MN *tae axa* OA, *ridicăm la această normală o perpendiculară ce tae diametrul* OM *în punctul* H. *Perpendiculara din acest punct pe* OA *tae normala* MN *în centrul de curbură căutat.*

3° Să presupunem că vrem a găsi *centrul de curbură într'unul din vârfurile elipsei.* Din formula generală (Fig. 46)

$$\frac{MN}{MP}=\frac{b^2}{a^2},$$

se vede că în vârfurile axei mari, când M tind către A, MN tinde către normala infinit vecină de AO și deci punctul N al lor de intersecție este centrul de curbură în A, astfel că MN tinde către raza de curbură în A. Din formula de mai sus, avem

$$\lim MN=\frac{b^2}{a^2}\lim MP=\frac{b^2}{a^2}\,OA=\frac{b^2}{a^2}\,a=\frac{b^2}{a},$$

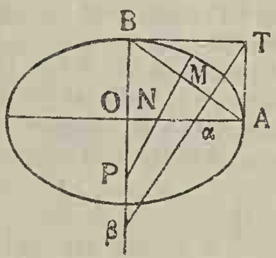

Fig. 46.

expresiune care dă raza de curbură în A. La fel se vede că raza de curbură în B este $\frac{a^2}{b}$.

Construcția o facem astfel. Considerăm dreptunghiul OATB format de OA, OB și tangentele la elipsă în vârfurile A și B. Perpendiculara din T pe AB tae axele OA și OB în α și β. Din triunghiurile asemenea OAB, ATα, BβT, avem

$$\frac{OB}{OA}=\frac{A\alpha}{AT}=\frac{BT}{B\beta},$$

de unde

$$A\alpha = \frac{OB \,.\, AT}{OA} = \frac{b^2}{a}, \quad B\beta = \frac{OA \,.\, BT}{OB} = \frac{a^2}{b},$$

ceea ce probează că centrele de curbură în A şi B la elipsă sunt punctele α şi β.

II. *Iperbola.* Se poate întrebuinţa o construcţie analoagă cu prima dată la elipsă, în cazul când se cunosc focarele. Avem, însă, şi următoarea construcţie. Fie M un punct al iperbolei cu asimptotele Ox şi Oy (Fig. 47). Tangenta în M la iperbolă este dreapta ST dusă prin M, care, mărginită la asimptote, are mijlocul său în M. Normala în M este perpendiculara în M pe ST.

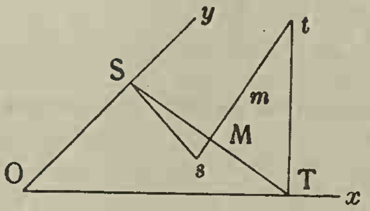

Fig. 47.

M fiind mijlocul lui ST, *centrul de curbură* m *este* [No. 18, Aplicaţia 4°] *mijlocul segmentului* st *din normala în* M, *cuprins între perpendicularele ridicate în* S *şi* T *pe* Ox *şi* Oy.

Să considerăm acum cazul iperbolei echilatere. Unghiul asimptotelor Ox şi Oy este drept (Fig. 48), astfel că bisectoarea ON a unghiului xOy este axa transversă a iperbolei echilatere. Fie N punctul unde această bisectoare tae cercul de diametru ST. Unghiurile SON = NOT, apoi, M fiind mijlocul lui ST, MN = OM, ca raze ale cercului. ST fiind tangenta în M la iperbola echilateră, MN este normala în M, astfel că, M fiind un punct al iperbolei echilatere cu centrul O, normala în M tae axa transversă a iperbolei (bisectoarea ON a unghiului xOy) în punctul N,

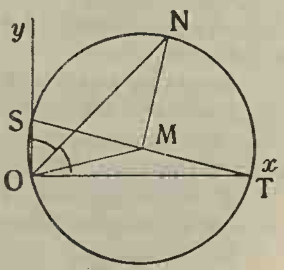

Fig. 48.

în aşa fel că OM = MN. De aci, un procedeu de a construi normala într'un punct M al iperbolei echilatere; cercul cu centrul în M şi raza OM, tae a doua oară axa transversă în N, aşa că normala în M este MN.

Aşa fiind, să considerăm un punct M al iperbolei echilatere cu axa transversă OA; se construeşte normala MN, care tae axa netransversă în P (Fig. 49). Avem OM=MN=MP. Deci, normala PN are mijlocul său în M, punctul M divide segmentul PN într'un raport constant, se poate aplica acelaş procedeu ca şi la elipsă pentru găsirea centrului de curbură în M, şi anume, se ridică în punctul N unde normala tae axa o perpendiculară pe normală ce tae în H diametrul OM al punctului M; perpendiculara din H pe axa OA tae normala în m centrul de curbură în punctul M al iperbolei echilatere.

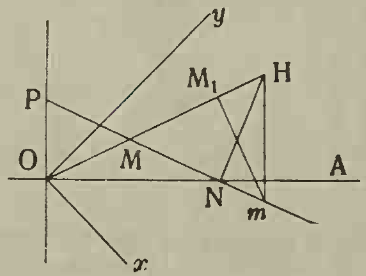

Fig. 49.

Se poate mai mult simplifica această construcţie. Să ducem din m perpendiculara mM_1 pe OM. Unghiurile $MmH = MHm$ ca fiind complimentele unghiurilor egale MNO, MON. Triunghiul MHm este isoscel, triunghiurile $MM_1m = MHN$, deci $MM_1 = MN$. Cum $OM = MN$, rezultă $OM = MM_1$, deci, *se prelungeşte* OM *cu o lungime egală* $MM_1 = OM$, *perpendiculara în* M_1 pe OM *tae normala* MN *în centrul de curbură m.*

Când punctul M *este vârful unei iperbole oarecare* (Fig. 50), se vede, din figura 47, că tangenta ST este perpendiculară pe axa iperbolei, care devine normala la vârf, iar punctele *s* şi *t* se confundă cu centrul de curbură *m*. Deci, centrul de curbură într'un vârf al unei iperbole oarecare, se obţine ducând tangenta la vârf care tae asimptotele în S şi T. Perpendicularele în S şi T pe asimptote se tae în centrul de curbură α.

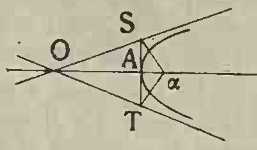

Fig. 50.

În cazul *iperbolei echilatere*, unghiul SOT este drept, figura αSOT este pătrat, deci α este simetricul lui O faţă de A şi deci *centrul de curbură în vârful unei iperbole echilatere este simetricul centrului în raport cu vârful iperbolei.*

Observare. Dacă punctele M şi *m* sunt date (Fig. 49), locul punctului M_1 este cercul descris pe M*m* ca diametru, iar acela al punctului O este cercul simetric al precedentului în raport cu punctul M. Avem deci următoarea proprietate: *Locul centrelor iperbolelor echilatere având în punctul* M *un contact de ordinul al doilea cu o curbă dată, este un cerc având ca diametru simetricul în raport cu* M, *a razei de curbură în punctul* M *la curba dată.*

III. *Parabola.* Această curbă se poate considera ca un caz particuar al conicelor cu centru, presupunând că unul din focare este aruncat la infinit (Fig 51). F fiind focarul şi Δ directoarea parabolei, se ştie că normala în M este bisectoarea unghiului format de dreapta FM cu paralela din M la axa parabolei (perpendiculara pe directoare).

Ducând această bisectoare, se ştie că centrul de curbură *m* este conjugatul armonic al lui M în raport cu punctele *f* şi *f'* de intersecţie ale normalei în M (această bisectoare) cu perpendicularele în focarele F şi F' pe dreptele FM şi F'M. Cum F' este presupus la infinit, perpendiculara în F' pe F'M tae normala la infinit. Deci punctul *f'* este la infinit pe normală şi conjugat armonic cu *f* în raport cu M şi *m*, adică *f* este mijlocul lui M*m*. Cum *f* este construit, centrul de curbură *m* la parabolă este simetricul lui M faţă de *f*.

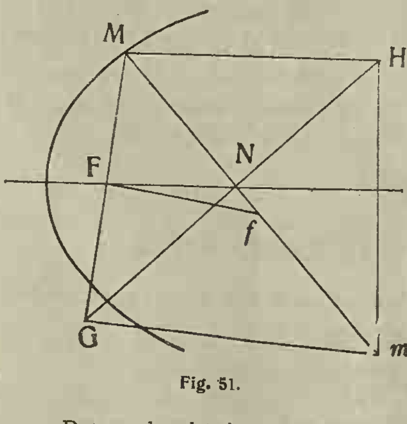

Fig. 51.

Se poate face şi altfel această construcţie. Fie G simetricul lui M faţă de F; perpendiculara în G pe MG tae normala în *m*, centrul de curbură.

Putem da altă interpretare acestei construcţii. Fie N punctul unde normala în M tae axa parabolei, care este paralelă cu MH (Fig. 51). Deci unghiurile FMN=FNM, căci MN este bisectoarea unghiului FMH. Rezultă că FN=MF și cum FG=MF, urmează că, MF=FG=FN, deci F este centrul unui cerc ce trece prin M, N, G, cu diametru MG, sau că unghiul MNG este drept, adică NG perpendiculară pe MN. Punctul m fiind pe bisectoarea unghiului GMH, care este înălțime în triunghiul GMH, urmează că $Gm = mH$, GM=MH, deci triunghiurile $MGm=MHm$. Dar unghiul MGm fiind drept, urmează că și egalul său MHm să fie drept, adică Hm perpendiculară pe MH, sau pe axa parabolei.

De aci rezultă următoarea construcție pentru centrul de curbură în M la parabolă. *Fie* N *punctul unde normala în* M *tae axa parabolei,* H *punctul de intersecție al paralelei la axă dusă prin* M *cu perpendiculara în* N *pe normală. Perpendiculara din* H *pe axă tae normala în centrul de curbură.*

În caz când punctul M este *vârful parabolei* (Fig. 51), N tinde către punctul de intersecție al normalei la vârf cu normala infinit vecină, adică centrul de curbură α la vârf. Dar, avem necontenit MF = FN, deci focarul F este mijlocul distanței de la vârf la centrul de curbură α. Deci, *centrul de curbură în vârful parabolei este simetricul vârfului în raport cu focarul.*

28. **Tractricea** (¹) este curba (M) ale cărei tangente mărginite de la punctul de contact M până la o curbă dată (A) au aceeaș lungime, adică MA=const. (Fig. 52).

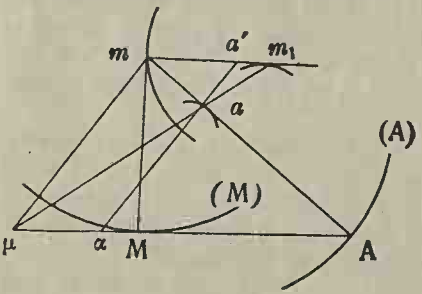

Fig. 52.

Centrul de curbură m al curbei (M) este (No. 18,2⁰) intersecția normalei în M la această curbă cu normala în A la curba (A).

Centrul de curbură m_1 al desfășuratei curbei (M) depinde de centrul de curbură a al curbei (A). În adevăr, să considerăm triunghiul mMA, căruia să-i aplicăm metoda lui Mannheim [No. 21]. Însemnând cu a' intersecția normalei în m la desfășurata curbei (M) cu normala în a la desfășurata curbei (A) (adică perpendiculara în a pe Am), avem

$$\frac{d(M)}{d(A)} = \frac{Mm}{Am}, \quad \frac{d(A)}{d(m)} = \frac{Aa}{ma'}, \quad \frac{d(m)}{d(M)} = \frac{mm_1}{Mm}.$$

Înmulțind aceste relații, rezultă

$$1 = \frac{Aa \, . \, mm_1}{Am \, . \, ma'}, \quad \frac{Aa}{Am} = \frac{ma'}{mm_1}.$$

Fie α punctul de întâlnire al lui aa' cu MA și μ intersecția aceleaș drepte MA cu perpendiculara în m pe Am. Avem

$$\frac{Aa}{Am} = \frac{A\alpha}{A\mu},$$

(¹) A se vedea, M. d'Ocagne, *Théorie géométrique du virage à bicyclette (Génie Civil*, t. XXIX, 1896, p. 140).

deci

$$\frac{A\alpha}{A\mu} = \frac{ma'}{mm_1},$$

relație care probează că dreapta $m_1\mu$ trece prin a, de unde urmează următoarea construcție. *Se ridică în centrul de curbură m al curbei* (M), *perpendiculara pe Am ce tae AM în μ; dreapta care unește acest punct μ cu centrul de curbură a al curbei* (A) *trece prin centrul celei de a doua curburi, m_1, a curbei* (M).

Să considerăm, în particular, *cazul când curba* (A) *este o linie dreaptă* X'X și să ne propunem a studia *curba* (T) *tractrice* corespunzătoare (Fig. 53).

Fie mt o tangentă la tractrice mărginită între punctul de contact m și punctul t unde tae dreapta OX; avem $mt = a =$ const. Numind cu α unghiul Xtm, distanța mp, de la m la OX, este egală cu $a \sin\alpha$; aceasta descrește de la valoarea a la 0 când α crește dela $\frac{\pi}{2}$ la π. Punctul A unde tangenta este perpendiculară pe OX este deci cel mai depărtat de OX. mp devine nul când m este la infinit, deci curba are pe OX ca asimptotă și are două ramuri simetrice în raport cu dreapta AO.

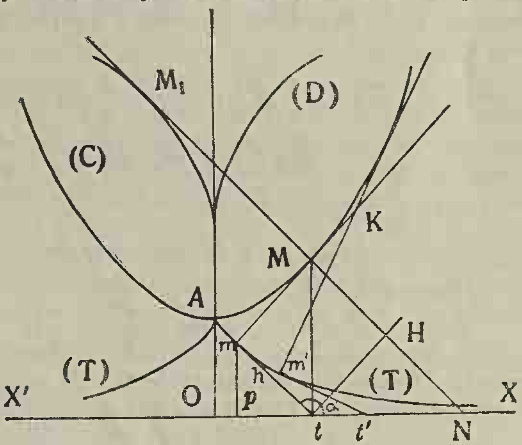

Fig. 53.

Curbura tractricei. Fie mK, $m'K$ normalele la (T) în două puncte infinit vecine. Triunghiurile dreptunghice tmK, $t'm'K$ au prin ipoteză $mt = m't'$; laturile mK și $m'K$ sunt echivalente ca având limită comună raza de curbură în m. Centrul M de curbură în m la (T) este (No. 18,2⁰) la intersecția normalei în m cu perpendiculara în t pe OX; *raza de curbură este* $m\mathrm{M} = -a \operatorname{cotg}\alpha$.

Scriind relația care dă raza de curbură a unei curbe, avem

$$\frac{d(\text{arc } Am)}{d\alpha} = -a \operatorname{cotg}\alpha. \tag{23}$$

Lungimea arcului și cuadratura tractricei. Integrând ecuația (23), avem

$$\text{arc } Am = -a \log \sin\alpha,$$

care dă lungimea arcului de tractrice.

Aplicând segmentului mt formula (10) (No. 18), care dă variația unui segment, avem

$$d(mt) = d(t)\cos(\pi - \alpha) - d(m).$$

Dar $mt =$ const., deci $d(mt) = 0$. Deci, t descriind dreapta OX,

$d(t) = d(\mathrm{O}t)$, iar $d(m) = d(\text{arc } \mathrm{A}m)$, din formula precedentă rezultă

$$0 = -\, d(\mathrm{O}t)\cos\alpha - d(\text{arc } \mathrm{A}m),$$

$$\frac{d(\text{arc } \mathrm{A}m)}{d\alpha} = -\frac{d(\mathrm{O}t)}{d\alpha}\cos\alpha$$

şi ţinând seamă de (23), avem

$$\frac{-d(\mathrm{O}t)}{d\alpha}\cos\alpha = -\, a \operatorname{cotg}\alpha,$$

(24)
$$\frac{d(\mathrm{O}t)}{d\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Să considerăm patrulaterul curbiliniu $\mathrm{AO}tm$ şi cel infinit vecin cu el, $\mathrm{AO}t'm'$. Diferenţa ariilor lor, care este variaţia $d(\mathrm{AO}tm)$, sau creşterea acestei arii, diferă de aria triunghiului htt' cu aria mhm'. Dar aria $mhm' = \frac{1}{2} mh \,.\, hm' \sin mhm' = \frac{1}{2}\, mh \,.\, hm' \sin thm' = \frac{1}{2} mh . hm' \sin(d\alpha)$. Cum mh, $m'h$, $\sin(d\alpha)$, sau $d\alpha$, sunt infiniţi mici, produsul lor este infinit mic cel puţin de ordinul al treilea şi deci, se poate înlocui $d(\mathrm{AO}tm)$ cu aria triunghiului htt'.

Însă, aria $htt' = \frac{1}{2}\, ht \,.\, ht' \sin tht' = \frac{1}{2}\,(mt - mh)\,(m't' + hm')\, \sin\,(d\alpha) \backsim$

$$\frac{1}{2}\, mt \,.\, m't' \,.\, d\alpha, \quad \text{aria} htt' \backsim \frac{a^2}{2}\, d\alpha.$$

Avem, deci,

$$d(\mathrm{AO}tm) = \frac{a^2}{2}\, d\alpha.$$

Integrând,

$$\mathrm{AO}tm = \frac{a^2}{2}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

care este formula de cuadratură ce dă aria cuprinsă între AO, curbă şi o tangentă oarecare. Făcând $\alpha = \pi$ şi dublând, se vede că aria totală cuprinsă între tractrice şi baza sa X′X este egală cu $\frac{\pi a^2}{2}$.

Desfăşurata tractricei. Din (24) deducem

$$d(\mathrm{O}t) = a\,\frac{d\alpha}{\sin\alpha}, \quad \mathrm{O}t = a \operatorname{logtg}\frac{\alpha}{2}.$$

Din triunghiul dreptunghic $\mathrm{M}mt$, avem

$$mt = \mathrm{M}t \cos mt\mathrm{M}, \quad a = \mathrm{M}t\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{M}t\sin\alpha,$$

$$\mathrm{M}t = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Faţă de axele OX şi OY, lungimile $\mathrm{O}t = x$, $\mathrm{M}t = y$ sunt coordonatele punctului M, centrul de curbură al tractricei în m. Avem

$$x = a \operatorname{logtg}\frac{\alpha}{2}, \quad y = \frac{\alpha}{\sin\alpha}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{x}{a}}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{y}.$$

Dar

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{a}{y} = \frac{2\,e^{\frac{x}{a}}}{1+e^{2\frac{x}{a}}}.$$

Împărţind cu $e^{\frac{x}{a}}$,

$$\frac{a}{y} = \frac{2}{e^{-\frac{x}{a}}+e^{\frac{x}{a}}},$$

de unde

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

care este ecuaţia curbei *chaînette*. Deci, *desfăşurata tractricei este curba chaînette.*

Proprietăţile curbei chaînette sunt date imediat de cele ale tractricei.

1⁰ Când α creşte de la $\frac{\pi}{2}$ la π, Ot creşte de la 0 la infinit, Mt de la a la infinit, curba (C) are convexitatea către OX şi forma din figura 53.

2⁰ Pentru a găsi normala în M, să ducem din t perpendiculara tH pe normala MN în M. Se vede că în dreptunghiul MmtH avem MH$=mt=a$. Deci, normala în M se află descriind din M ca centru un cerc de rază a şi ducând din M perpendiculara Mt pe X′X, iar din t se duce la cerc o tangentă tH ce face cu OX un unghi ascuţit. Dreapta care uneşte punctul M cu punctul de contact H este normala în M la curba chaînette

3⁰ Să considerăm arcul AM al acestei curbe. Se ştie de la proprietăţile desfăşuratelor, că chaînette fiind desfăşurata tractricei a cărei rază de curbură în m este R, avem $d(\mathrm{M}) = d(\mathrm{R})$. Cum raza $\mathrm{R} = -a\cot g\alpha$, urmează că $d(\mathrm{M}) = d(-a\cot g\alpha) = \frac{a}{\sin^2\alpha}d\alpha$. Aşa dar, raza de curbură în M la chaînette este, conform definiţii,

$$\mathrm{R}_1 = \frac{d(\mathrm{M})}{d\alpha} = \frac{a}{\sin^2\alpha}.$$

Prelungind normala în M până tae pe OX în N, din triunghiul MtN, avem

$$\overline{\mathrm{M}t}^2 = \mathrm{MN}\,.\,\mathrm{MH} = \mathrm{MN}\,.\,a, \quad \mathrm{M}t = \frac{a}{\sin\alpha}, \quad \mathrm{MN} = \frac{a}{\sin^2\alpha}.$$

Deci, raza de curbură a curbei chaînette este egală cu normala limitată la dreapta OX şi dirijată în sens contrar.

29. **Caustice. Podare.** Să presupunem că razele MA, tangente la o curbă (A), se refractă pe o curbă (M), astfel că unghiurile α şi β, făcute cu normala în M la curba (M), de raza incidentă MA şi raza refractată MB, să fie legate cu relaţia

$$\sin\beta = n\sin\alpha,$$

n fiind indicele de refracţie (Fig. 54). Curba (B), înfăşurătoarea razei refractate, este zisă *caustica* curbei (A) produsă de curba *dirimantă* (M).

Să stabilim relaţia dintre punctele A şi B a curbei date şi a causticei sale. Să diferențiăm relația dată și avem

$$\cos\beta \, d\beta = n \cos\alpha \, d\alpha. \tag{30}$$

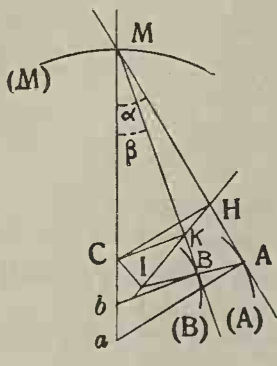

Fig. 54.

Să coborâm din centrul de curbură C al lui (M) perpendicularele CH și CK pe MA și MB. Se vede că

$$\mathrm{CH} = \mathrm{CM}\sin\alpha, \quad \mathrm{CK} = \mathrm{CM}\sin\beta,$$

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CK}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}.$$

Egalitatea (30) se poate scrie

$$\mathrm{CH}\cos\beta \, d\beta = \mathrm{CK}\cos\alpha \, d\alpha. \tag{31}$$

Patrulaterul MCKH fiind inscriptibil, unghiurile CKI, CHI sunt respectiv egale cu α și β. Să ducem CI perpendiculară din C pe HK; avem

$$\mathrm{HI} = \mathrm{CH}\cos\beta, \quad \mathrm{IK} = \mathrm{CK}\cos\alpha,$$

și deci relația (31) devine

$$\mathrm{IH}\,d\beta = \mathrm{IK}\,d\alpha. \tag{32}$$

Însemnând cu a, b intersecțiile normalei în M cu normalele în A și B la înfășurătoarele (A) și (B), să aplicăm formula (17) de la variația unui unghi (No. 19) și avem pentru unghiurile α și β,

$$d(\alpha) = d(\mathrm{M})\left(\frac{1}{\mathrm{MC}} - \frac{1}{\mathrm{M}a}\right) = \frac{\mathrm{M}a - \mathrm{MC}}{\mathrm{MC}\,.\,\mathrm{M}a}\,d(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{C}a\,.\,d(\mathrm{M})}{\mathrm{MC}\,.\,\mathrm{M}a} = \frac{\mathrm{HA}\,.\,d(\mathrm{M})}{\mathrm{MA}\,.\,\mathrm{MC}},$$

$$d(\beta) = d(\mathrm{M})\left(\frac{1}{\mathrm{MC}} - \frac{1}{\mathrm{M}b}\right) = \frac{\mathrm{M}b - \mathrm{MC}}{\mathrm{MC}\,.\,\mathrm{M}b}\,d(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{C}b\,.\,d(\mathrm{M})}{\mathrm{MC}\,.\,\mathrm{M}b} = \frac{\mathrm{KB}\,.\,d(\mathrm{M})}{\mathrm{MC}\,.\,\mathrm{MB}}.$$

Înlocuind în (32) obținem,

$$\mathrm{IH}\frac{\mathrm{KB}\,.\,d(\mathrm{M})}{\mathrm{MC}\,.\,\mathrm{MB}} = \mathrm{IK}\frac{\mathrm{HA}\,.\,d(\mathrm{M})}{\mathrm{MA}\,.\,\mathrm{MC}},$$

sau

$$\mathrm{IH}\,.\,\mathrm{MA}\,.\,\mathrm{KB} = \mathrm{IK}\,.\,\mathrm{HA}\,.\,\mathrm{BM},$$

ceea ce probează că punctele A, B, I, considerate pe laturile triunghiului MHK, sunt colineare.

Se obține, deci, următoarea proprietate [1], pe care Cornu a obținut-o analitic: *Dreapta care unește punctele* A *și* B, *unde raza incidentă și raza refractată ating înfășurătoarele lor, trece prin piciorul* I *al perpendicularei coborâte din centru de curbură* C *al curbei dirimante pe dreapta care unește picioarele* H *și* K *ale perpendicularelor coborâte din acelaș centru* C *pe cele două raze.*

În cazul reflexiunei, $n = -1$, razele MA și MB sunt simetrice în

---

[1] A se vedea, **M. d'Ocagne**, în *Nouvelles Annales de Math.* (1915, p. 505). Pentru alte numeroase aplicații, a se vedea, **M. d'Ocagne**, *Sur les adjointes infinitesimales des courbes planes (American Journal of Mathematics*, 1889, p. 55 și 1892, p. 227; *Nouvelles Annales de Math.*, 1900, p. 219; *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 52, p. 132 și 395), *Théorème général sur la détermination des normales (Nouvelles Annales de Math.*, 1890, p. 289 și 1894, p. 501).

raport cu normala MC, dreapta HK este perpendiculară la această normală şi punctul I se află pe această normală (Fig. 55).

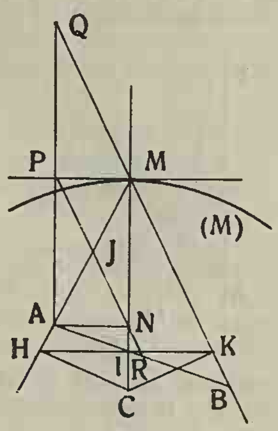

Fig. 55.

Deci, în acest caz, *punctul* I *prin care trece dreapta* AB *este piciorul perpendicularei coborâte pe* MC *din piciorul* H *al perpendicularei coborâte pe raza incidentă* MA *din centrul de curbură* C *al curbei dirimante* (M).

Să presupunem, mai mult, că raza incidentă MA, în loc de a avea o înfăşuratoare curba (A), să treacă printr'un punct fix A. Construcţia punctului B unde raza reflectată MB atinge înfăşurătoarea rămâne aceeaş.

Să coborâm atunci pe tangenta în M, la curba dirimantă, perpendiculara AP. Locul punctului P (Fig. 55) este *podara curbei* (M) în raport cu punctul A şi se ştie (No. 22, 2°) că normala PN la această podară trece prin mijlocul J al lui AM.

Presupunând că AP tae pe MB în Q, punctul Q este simetricul lui A în raport cu P. Curba (Q) este deci omotetica curbei (P) în raport cu A şi cum dreapta QM este paralelă cu PN, normala la curba (P), rezultă (No. 22, 3°) că QM este normala în Q (normalele la două curbe omotetice sunt paralele). Deci, *caustica prin reflexiune a punctului* A *în raport cu curba* (M) *este desfăşurata omoteticei în raport cu* A, *în raportul de omotetie* 2, *a podarei curbei* (M) *relativ la* A.

Cum punctele omoloage P şi Q ale acestor două curbe omotetice, sunt în linie dreaptă cu A, se vede (No. 18,4°) că centrele de curbură în punctele omoloage vor fi în linie dreaptă cu A. Centrul de curbură în Q, la curba (Q), fiind B, *centrul de curbură* R *în* P *la curba podară* (P), *este la intersecţia dreptei* AB *cu normala în* P, *adică dreapta* PN. Deci, următoarea construcţie pentru centrul de curbură R al podarei (P): *Fie* H *proecţia pe* AM *a centrului* C *de curbură a curbei* (M) *şi* I *proecţia pe normala în* M *a punctului* H; N *fiind proecţia pe* MC *a punctului* A, *centrul de curbură* R *la podara* (P) *este la intersecţia dreptelor* PN *şi* AI.

Să aplicăm această construcţie la podara cercului C *în raport cu punctul* A (Fig. 56). Ducând CS perpendiculară pe AP, se vede că SP=CM, raza cercului, o constantă; locul lui S este cercul de diametru AC. P este deci obţinut prelungind raza vectoare AS a cercului de diametru AC cu o lungime constantă SP, adică P descrie *melcul lui Pascal,* după însăşi definiţia sa. Centrul de curbură în P se află astfel: Fie H proecţia lui C pe AM; I proecţia lui H pe MN, N proecţia lui A pe MC; dreptele PN şi AI se tae în centrul de curbură R.

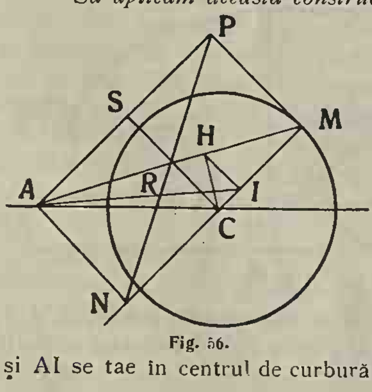

Fig. 56.

O altă aplicație să facem la *podara unei iperbole echilatere*, care este o *lemniscată a lui Bernoulli* (Fig. 57) de acelaș centru și vârfuri. Se știe că centrul de curbură al iperbolei echilatere în M se obține prelungind raza vectoare AM cu o lungime egală MH; se ia o dreaptă ME egal înclinată ca și AM pe axa iperbolei (bisectoarea unghiului xOy) și ME este normala în M la iperbolă; perpendiculara ridicată în H pe AH tae normala ME în centrul de curbură C.

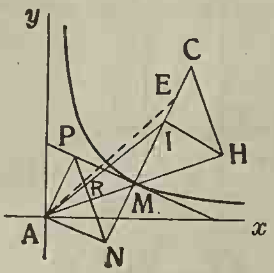

Fig. 57.

Revenind la construcția centrului de curbură a unei podare (Fig. 55), se vede că în figura 57, piciorul H al perpendicularei scoborâtă din centrul de curbură C al iperbolei echilatere pe diametrul AM este simetricul lui A față de M. Rezultă că dacă se duce din A și H perpendicularele AN si HI pe normala ME (Fig. 57), centrul de curbură R al podarei (P) în P este la intersecția dreptelor PN cu AI. Însă, din triunghiurile asemenea ARP, RNI, avem

$$\frac{PR}{RN}=\frac{AP}{IN}=\frac{MN}{IN}.$$

Dar cum A și H sunt simetrice față de M, urmează că N și I sunt simetrice față de M și deci NM = MI, NI = 2MN și deci relația de mai sus devine

$$\frac{PR}{RN}=\frac{MN}{IN}=\frac{1}{2},$$

de unde

$$PR=\frac{RN}{2},\quad PN=3PR,\quad PR=\frac{PN}{3}.$$

Deci, *raza de curbură* PR *a lemniscatei este egală cu o treime din normala sa polară* PN *când polul este așezat în centrul curbei.*

30. **Cicloida.** Se zice cicloidă curba descrisă de un punct dat al unui cerc care se rostogolește fără să alunece pe o dreaptă X′X (Fig. 58). Fie O un punct al lui X′X cu care coincide la momentul inițial punctul M ce se mișcă. Pentru a construi cicloida prin puncte, se va descrie un cerc tangent la X′X într'un punct variabil A, cu o rază constantă și totdeauna de aceeaș parte a lui X′X. Se va lua pe cerc, de la A către O, un arc AM egal cu segmentul de dreaptă AO; M este un puuct al cicloidei. Curba se compune dintr'o infinitate de bucle consecutive, analoage cu OSO_1, toate egale între ele. Fiecare dintre ele

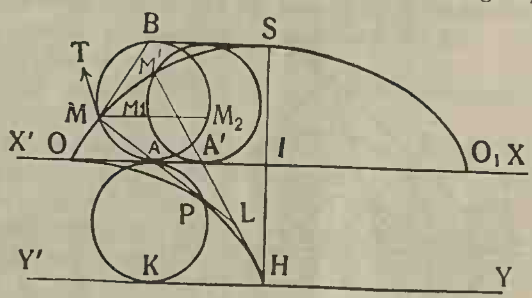

Fig. 58.

admite o axă de simetrie perpendiculară pe OX, căci o buclă poate fi obţinută, fie prin rostogolirea cercului, efectuată în sensul OO_1, fie prin rostogolirea în sensul de la O_1 la O. Amplitudinea OO_1 a fiecărei bucle este egală cu $2\pi a$, a fiind raza cercului mobil.

Normala. Fie A şi A′ două puncte de contact infinit vecine ale cercului mobil cu dreapta X′X şi M şi M′ punctele corespunzătoare ale cicloidei. Să ducem de la un cerc la altul MM_1 paralelă cu OX; avem $MM_1 = AA'$. De asemenea,

$$\text{arc } M_1M' = \text{arc } A'M' - \text{arc } A'M_1 = OA' - OA = AA'.$$

Triunghiul infinit mic MM_1M' poate fi considerat ca isoscel, căci $MM_1 = AA' = M_1M'$; deci unghiurile M, M′ ale acestui triunghi au limite egale. Limita dreptei MM′, sau tangenta la cicloidă, este deci egal înclinată pe MM_1 (direcţia OX) şi M_1M' (direcţia tangentei MT în M la cerc); deci unghiurile $TMB = BMM_2$, adică această tangentă trece prin mijlocul B al arcului MM_2; normala în M trece deci prin A. Aşa dar, *normala într'un punct al cicloidei, trece prin punctul de contact al cercului mobil cu dreaptă fixă.*

Curbură. Desfăşurată. Să descriem un cerc simetric cu primul în raport cu punctul A şi fie P intersecţia lui cu normala MA. Să ducem tangenta KY la acest cerc, paralelă cu X′X şi fie H punctul ei de intersecţie cu axa SI a buclei considerate. Avem

$$\text{arc } KP = \text{arc } KPA - \text{arc } AP = \pi a - \text{arc } MA = OI - OA = AI = KH.$$

Cum punctul H este fix, rezultă că locul lui P este o cicloidă cu baza Y′Y cu punctul de întoarcere H.

Dar, tangenta în P la această cicloidă trebuind să treacă prin punctul cercului generator cel mai depărtat de bază, va fi PA, adică normala la cicloida precedentă. Aceasta a doua cicloidă este deci înfăşurătoarea normalelor primei, cu alte cuvinte desfăşurata. Raza de curbură în M este egală cu MP şi egală cu îndoitul normalei în A.

Deci, *raza de curbură a cicloidei este egală cu îndoitul normalei şi dirijată în acelaş sens; desfăşurata este altă cicloidă egală cu prima şi având ca vârfuri punctele de întoarcere ale acesteia.*

Lungimea arcului. Arcul de cicloidă OP, după teoria generală a desfăşuratelor, este egal cu segmentul rectiliniu MP; deci este îndoitul lui AP. Raţionând la fel pentru desfăşurătoare, se vede că arcul SM este îndoitul lui BM. Deci, *arcul de cicloidă, cuprins între vârf şi un punct oarecare al curbei, este egal cu îndoitul tangentei în acest punct, socotită de la punctul de contact până la tangenta la vârf.* Dacă M vine în O, MB devine diametrul $2a$ al cercului mobil; arcul SO are deci lungimea $4a$. Aşa dar, *lungimea unei bucle întregi este egală cu de 8 ori raza cercului mobil.*

Cuadratura. Fie L punctul de întâlnire al normalei MA şi normalei infinit vecine, M′A′. Triunghiurile LAA′, LMM′ având unghiul L comun, raportul ariilor este egal cu

$$\frac{LA \,.\, LA'}{LM \,.\, LM'},$$

care are ca limită $\frac{1}{4}$; deci, aria triunghiului ALA′ este echivalentă cu o treime din aria patrulaterului curbiliniu MAA′M′. Urmează că ariile triunghiurilor curbilinii finite OMA și OAP sunt în raportul 3 : 1. În particular, pentru aria jumătății de buclă OSI, avem

$$\text{aria OMSI} = 3\ \text{aria OPHI} = 3\ (\text{aria dreptunghiului cu laturile OI, IS} - \text{aria OMSI}),\quad 4\ \text{aria OMSI} = 3\,.\,\text{OI.IS},$$

$$\text{aria OMSI} = \frac{3}{4}\pi a\,.\,2a = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Deci, *aria buclei întregi este $2\pi a^2$, adică de trei ori aria cercului mobil.*

31. **Spirala logaritmică** este curba ale cărei tangente MT tae razele vectoare sub un unghi constant (Fig. 59).

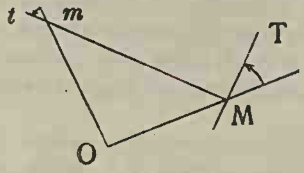

Fig. 59

Unghiul OMT fiind constant și una din laturi rămânând tangentă la curba descrisă de vârful său M, rezultă (No. 19, Aplicația 1⁰) că centrul de curbură m al spiralei în M este la intersecția perpendicularei în O pe OM cu normala în M (perpendiculara pe MT).

Locul lui m este tot o spirală logaritmică, de oarece raza vectoare Om face cu tangenta mt un unghi constant, egal cu cel făcut de OM și MT. Desfășurata spiralei este însăși spirala dată.

32. **Aria coroanei determinată de un punct al unei coarde de lungime constantă într'o curbă dată.** Fie M un punct determinat pe o coardă AB de lungime constantă, mobilă în curba închisă (C), cu conexiune simplă, astfel că MA $= a$, MB $= b$, suma $a + b = l =$ const. (Fig. 60) fiind lungimea coardei.

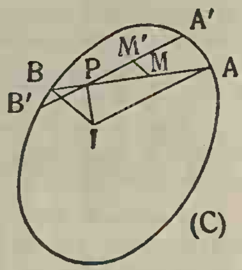

Fig. 60.

Fie I intersecția normalelor la curba (C) în A și B. Punctul de contact P al coardei AB cu înfășurătoarea sa este (No. 20) piciorul P al perpendicularei din I pe AB.

Să ducem prin P poziția infinit vecină A′B′ a coardei AB și fie M′ punctul corespunzător lui M pe coarda A′B′. Însemnând cu ρ distanța variabilă AP, se vede că aria infinitezimală MM′A′A are ca valoare principală pe aceea a diferenței (PAA′−PMM′) adică

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left[\rho^2 - (\rho - a)^2\right] d\theta,\quad d\sigma = \frac{a}{2}(2\rho - a)\, d\theta.$$

Deci, aria coroanei cuprinsă între curba (M) și curba (C), care corespunde la o variație a lui θ de la 0 la 2π, este dată de

$$\sigma = a\int_0^{2\pi} \rho d\theta - \pi a^2. \tag{33}$$

Dar, aria coroanei cuprinsă între curba (C) şi înfăşurătoarea lui AB poate fi obţinută, prin integrarea, fie de arii elementare PAA′, fie prin integrarea de arii elementare PBB′. Avem deci

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(l-\rho)^2 d\theta,$$

de unde

$$\int_0^{2\pi}[\rho^2-(l-\rho)^2]d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi}(2\rho - l)d\theta = 0,$$

şi deci

$$\int_0^{2\pi}\rho d\theta = \pi l.$$

Înlocuind această valoare în (33), avem

$$\sigma = a\pi l - \pi a^2 = \pi a(l-a) = \pi a(a+b-a),$$
$$\sigma = \pi ab,$$

care dă expresia arii căutate.

În particular, coroana limitată la curba descrisă de mijlocul coardei are o arie egală cu aceea a unui cerc având această coardă ca diametru.

33. **Determinarea geometrică a maximelor şi minimelor a unor elemente legate de o figură mobilă.** Să presupunem că am putut exprima geometric variaţia unora din elementele unei figuri variabile. Se poate observa că, dacă vreunul din aceste elemente trece printr'un maximum sau minimum, atunci variaţia sa este nulă şi deci, de aci, un mijloc de a găsi condiţia geometrică pe care trebue să o îndeplinească acest element. În adevăr, când un asemenea element trece printr'un maximum sau minimum, este ca şi cum, pentru o variaţie infinit mică a poziţii sale, plecând dela aceasta, ar rămâne constant.

1° De ex., să considerăm o coardă AA_1 care închide în curba (A) un segment de arie constantă. Când trecem de la poziţia AA_1 la cea infinit vecină $A'A'_1$ (Fig. 61), variaţia arii segmentului este diferenţa ariilor triunghiurilor infinitezimale MAA', $MA_1A'_1$, adică

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\overline{MA}^2 - \overline{MA_1}^2\right)d\theta.$$

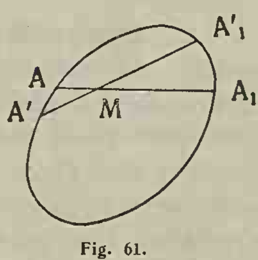

Fig. 61.

Deci, când variaţia aceasta este nulă, urmează $MA = MA_1$ şi M este mijlocul lui AA_1. Dar poziţia M unde se tae două coarde infinit vecine, AA_1 şi $A'A'_1$ este punctul de contact al coardei AA_1 cu înfăşurătoarea sa. Deci, *segmentul închis de această coardă trece printr'un maximum sau minimum pentru o poziţie a coardei care atinge înfăşurătoarea în mijlocul său.* Sau, *o coardă* AA_1, *care determină într'o curbă* (A) *un segment de arie constantă, atinge înfăşurătoarea în mijlocul ei.*

2° Să considerăm alt exemplu. Să căutăm *triunghiul de arie minimum circumscris la o elipsă*. Să lăsăm fixe două tangente ce formează triunghiul, AB şi AC, de ex., şi să facem să varieze a treia, BC. Vedem, după cele stabilite mai sus, că elipsa trebue să atingă pe BC în mijlocul ei. Aplicând acelaş raţionament celorlalte două laturi, se vede că elipsa trebue să atingă laturile triunghiului ABC respectiv în mijlocul lor.

Pentru a construi un astfel de triunghi, vom considera cercul a cărui proecţie este elipsa. Triunghiul circumscris la acest cerc, a cărui proecţie este ABC, este astfel că punctele de contact ale sale cu cercul coincid cu mijloacele laturilor, ceea ce arată că triunghiul este echilateral. Se vede deci că sunt o infinitate de triunghiuri circumscrise la elipsă, toate de aceeaş arie, care corespund condiţii de minimum. Se zice *poligon semiregulat* circumscris la elipsă, proecţia poligonului regulat circumscris la cercul a cărui proecţie este elipsa. Deci, *triunghiurile semiregulate, circumscrise la elipsă, toate de aceeaş arie, sunt acelea pentru care, printre toate triunghiurile circumscrise la elipsă, această arie este minimă.*

3° Se poate, de asemenea, determina *triunghiurile de arie maximum înscrise în elipsă*. Pentru aceasta, să considerăm un triunghi ABC, înscris în elipsă, având baza BC fixă, iar vârful A variabil pe elipsă. Dacă ABC este o poziţie corespunzătoare maximului, atunci variaţia infinit mică a ariei este nulă pentru această poziţie, aşa că noua poziţie A′BC, infinit vecină a triunghiului ABC, are aceeaş arie cu ABC, adică AA′ este paralelă cu BC. Dar AA′ tinde la limită către tangenta în A la curbă; deci, BC fiind fixă, triunghiul ABC corespunde arii maxime când tangenta în A este paralelă cu BC. Aşa dar, un astfel de triunghi variabil, înscris într'o elipsă, are o arie maximă, când tangentele în vârfurile sale la curba la care este înscris triunghiul, sunt paralele cu laturile opuse triunghiului.

Considerând cercul a cărei proecţie este elipsa, se vede că aceste triunghiuri înscrise în elipsă corespund triunghiurilor din cerc care se bucură de aceeaş proprietate, adică tangentele în vârfuri sunt paralele cu laturile opuse, deci sunt echilaterale (un poligon regulat).

Se deduce, ca şi pentru cazul precedent, că *triunghiurile semiregulate înscrise într'o elipsă, toate de aceeaş arie, sunt acelea pentru care, printre toate triunghiurile înscrise în aceeaş elipsă, această arie este maximum.*

NOŢIUNI DE GEOMETRIE CINEMATICĂ PLANĂ.

34. **Generalităţi.** O figură invariabilă, fiind formată dintr'o reunire de mai multe puncte ale căror distanţe mutuale sunt invariabile, *Geometria Cinematică* are ca obiect studiul proprietăţilor geometrice ale traectoriilor descrise simultan de punctele unei figuri invariabile în mişcare. Primele cercetări în acest sens se găsesc la Cauchy şi Chasles, dar întemeetorul Geometrii Cinematice a fost *Mannheim*, ale cărui rezultate au fost publicate în lucrarea sa, *Principes et développements de Géométrie Cinématique* (1894).

În Geometria Cinematică se consideră o succesiune continuă a poziţiilor ocupate de elementele figuri invariabile ca formă, fără să se ţie seamă de timpul întrebuinţat pentru a trece de la o poziţie la alta. Când se ia în considerare şi timpul, se trece de la domeniul Geometrii Cinematice la acela al *Cinematicei pure*.

Este de altfel o legătură între Geometria Cinematică şi Cinematica propriu zisă. În adevăr, dacă se consideră variaţiunile de poziţie ale figurei mobile, care depinde de un parametru oarecare, se poate, sau să considerăm variaţiile infinit mici simultane ale diferitelor elemente ale figurei, sau să considerăm derivatele lor în raport cu parametrul variabil şi figurate geometric. În primul caz, avem Geometria Cinematică, în cazul al doilea, când se dă parametrului variabil numele de *timp*, avem Cinematică propriu zisă.

În general, se consideră că mişcarea figurei mobile depinde de un parametru variabil. Dar, se poate închipui că ansamblul poziţiilor figurei mobile corespunzător la o variaţie continuă, depinde nu numai de un singur parametru, ci de mai mulţi, că este deci o *mişcare cu mai mulţi parametrii*. Să vedem care este numărul acestor parametrii.

Un solid, în spaţiu, poate fi raportat la un triedru tridreptunghic de care să fie invariabil legat, astfel că, pentru determinarea poziţii în spaţiu a solidului, trebue cunoscută poziţia acestui triedru, şi anume, trei cantităţi, coordonatele vârfului triedrului şi alte trei, care să determine direcţiile muchilor triedrului. În total poziţia unui solid în spaţiu depinde de şase parametrii. Se zice că un solid variabil de poziţie în spaţiu, nefiind supus la nici o condiţie, are *şase grade de libertate* (se bucură de *al şaselea grad de libertate)*. Dacă trebue să satisfacă la o condiţie simplă dată, aceasta însemnează că cei şase parametrii care definesc poziţia solidului verifică o relaţie, sau, că numărul parametrilor se reduce la cinci (de care depinde poziţia). Solidul se bucură atunci de *al cincilea grad de libertate* şi ansamblul variaţiilor continue necesare de a-l face să treacă de la una oarecare din aceste poziţii la toate cele pe care le poate ocupa, poartă numele de *mişcare cu cinci parametrii*.

Se poate uşor extinde definiţia aceasta la cazul a patru, a trei, sau doi parametrii arbitrari. În acest ultim caz, punctele figurei în mişcare descriu suprafeţe traectorii. În fine, mişcarea cu un parametru corespunde primului grad, este mişcarea propriu zisă în sensul obişnuit al Mecanicei. De aceasta ne vom ocupa în cele ce urmează.

În plan, poziţia unei figuri plane depinde de trei parametrii, căci trebue a cunoaşte poziţia unghiului drept, două cantităţi, şi direcţia uneia din laturile unghiului, încă o cantitate, deci în total trei parametrii. În plan, *mişcarea cu un grad de libertate poate fi determinată dacă se cunosc traectoriile a două din punctele figurei mobile.*

35. **Deplasare finită.** Se zice deplasare, transformarea care permite a trece de la o figură (F) din plan la o altă figură egală (F′). Fie AB, A′B′ două segmente omoloage ale figurilor egale (F) şi (F′) (Fig. 62). Putem aduce A în A′ cu o rotaţie în jurul unui punct aşezat pe perpendiculara pe mijlocul lui AA′. De asemenea, putem aduce punctul B peste B′, cu o rotaţie în jurul unui punct aşezat pe perpendiculara pe mijlocul lui BB′. Fie I intersecţia perpendicularelor ridicate pe mijloacele dreptelor AA′ şi BB′. Triunghiurile AIB, A′IB′ au AB=A′B′, IA=IA′, IB=IB′; deci sunt egale şi prin urmare unghiurile BIA=B′IA′, BIB′=AIA′. Deci, se poate trece de la figura (F) la figura (F′) cu o rotaţie în jurul punctului I, de unghiul AIA′=BIB′.

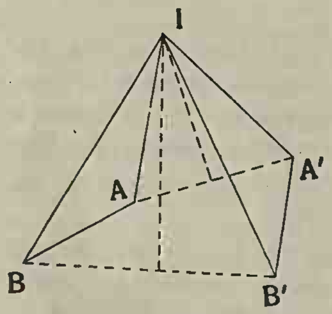

Fig. 62.

Dacă dreptele AA′ şi BB′ sunt paralele, se pot întâmpla două cazuri, sau AB este egală şi paralelă cu A′B′, sau AB

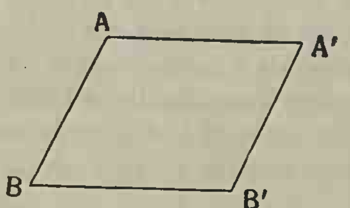

Fig 63.

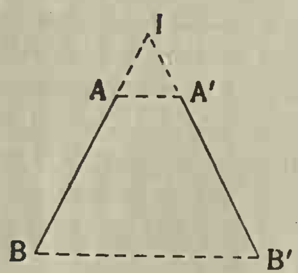

Fig. 64.

şi A′B′ sunt simetric înclinate pe AA′ şi BB′. În primul caz (Fig. 63), punctul I este aruncat la infinit, şi se trece de la figura (F) la figura (F′) cu o translaţie egală cu AA′=BB′. În cazul al doilea (Fig. 64), I fiind intersecţia dreptelor AB şi A′B′, se trece de la figura (F) la figura (F′) cu o rotaţie în jurul punctului I, de un unghi egal cu AIA′.

36. **Deplasare infinitezimală. Mişcare continuă.** Dacă o figură plană (F) se mişcă continuu, fiecare punct M al său descrie o traectorie. Fie (F) şi (F′) două poziţii infinit vecine ale figurei mobile şi M′ omologul lui M. Am văzut că se poate trece de la figura (F) la figura (F′) cu o rotaţie în jurul unui punct I (aruncat la infinit dacă rotaţia se reduce la o translaţie), iar perpendiculara pe mijlocul lui MM′ trece prin punctul I. La limită, această perpendiculară devine normala în M la traectoria lui M. Deci, pentru o poziţie oarecare a figurei (F), *normalele la traectoriile tuturor punctelor sale trec printr'un punct* I, *numit centru instantaneu de rotaţie al figurei* (F) *pentru poziţia considerată.*

După cum punctele unei figuri (F), cu un grad de libertate, descriu traectorii, liniile (curbele) cari aparţin acestei figuri admit curbe înfăşurătoare, ale căror puncte de contact voim a le determina. Fie (C) şi (C′) (Fig. 65) două poziţii infinit vecine ale unei curbe oarecare ce aparţine figurei mobile. Dacă (C) şi (C′) se tae în M′, punctul caracteristic al curbei (C) [de contact al curbei (C) cu înfăşurătoarea sa], este limita P a punctului M′ pe (C). Dacă, la fiecare moment, privim punctul M′ ca fixat pe curba (C′), îi corespunde pe (C) un punct M, care la limită, se confundă cu P ca şi M′. Dar, se poate trece de la M la M′ cu o rotaţie, perpendiculara pe mijlocul lui MM′ trecând prin centrul instantaneu de rotaţie. Aşa dar, la limită, *normala în* P *la curba* (C) *trece prin centrul instantaneu de rotaţie.* Deci, *normalele în punctele de contact cu înfăşurătoarele ale curbelor ce aparţin unei figuri de formă invariabilă, trec prin centrul instantaneu de rotaţie.*

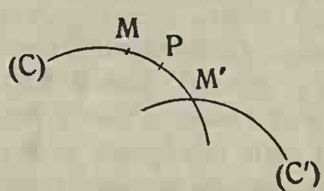

Fig. 65.

Aşa dar, punctele caracteristice ale curbelor (C) sunt picioarele normalelor duse la aceste curbe prin centrul instantaneu de rotaţie. Dacă se cunoaşte, deci, un punct caracteristic al unei linii al figurei mobile, centrul instantaneu de rotaţie se află pe normala în acest punct. În particular, dacă o linie a figurei mobile trece printr'un punct fix, normala la această linie dusă prin punctul fix conține centrul instantaneu de rotație.

Aplicație. Să considerăm un unghi drept ale cărui laturi MP, MP′ sunt tangente la o conică (C) de centru O (Fig. 66). Normalele în P și P′ la conica (C) tăindu-se în I, normala în M, la curba descrisă de M, este MI. Figura IPMP′ fiind un dreptunghi, diagonalele PP′ și MI se tae în mijlocul lor ω. Dar PP′ este polara punctului M în raport cu conica (C). Polara punctului de la infinit de pe dreapta PP′ este locul mijloacelor coardelor conicei paralele cu PP′, adică diametrul Oω al conicei conjugat direcții PP′. Dar acest punct de la infinit, fiind pe PP′, polara sa trece prin polul M al dreptei PP′ pe care se află acest punct; așa dar, diametrul Oω trece prin M și deci dreapta care unește punctul M cu mijlocul ω al segmentului polarei sale trece prin centrul O al conicei. Toate normalele la traectoria (M) trecând prin O, această curbă este un cerc de centru O. Regăsim astfel teorema lui Monge: *Locul vârfurilor unghiurilor drepte circumscrise la o conică este cercul lui Monge (ortoptic).*

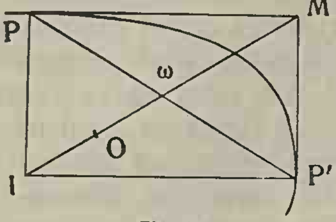

Fig. 66.

37. **Mișcarea cea mai generală a unei figuri plane în planul său.** Dacă însemnăm cu (II) planul fix pe care se mișcă figura (F), se poate presupune că figura mobilă este desenată pe un plan nemărginit (II_1) mereu aplicat pe planul fix (II). Dacă, pentru fiecare poziție a figurei mobile, înțepăm poziția centrului instantaneu I, urma astfel însemnată descrie pe planul (II) o curbă (Γ) numită *bază*, iar pe planul (II_1) o curbă (Γ_1) numită *rulantă*. Vom arăta că *mișcarea figurei* (F) *pe planul* (II) *poate fi obținută prin rostogolirea curbei* (Γ_1) *pe curba* (Γ), *cele două curbe fiind tangente în fiecare moment în centrul instantaneu I corespunzător poziții considerate* [1].

În adevăr, să însemnăm cu t parametrul variabil (care poate fi numit timpul dacă voim) de care depinde mișcarea care este cu un grad de libertate. Pentru o valoare dată lui t, curbele (Γ) și (Γ_1) au comun punctul I centrul instantaneu de rotație corespunzător (Fig. 67). Fie I′ și I'_1 punctele pe (Γ) și (Γ_1) care vor veni să coincidă cu centrul instantaneu de rotație corespunzător valorii $t + \Delta t$ a parametrului, pentru care poziția planului (II_1) va fi notată cu (II'_1). Trece-

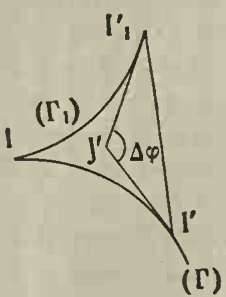

Fig. 67.

[1] *Cauchy*, cel dintâi, a observat aceasta în 1827, iar *Chasles*, doi ani mai târziu, introducând noțiunea de centru instantaneu de rotație, a precizat această teorie.

rea de la poziţia (Π_1) la (Π'_1) se poate face cu o rotaţie $\Delta\varphi$ în jurul unui punct J' care va tinde către I în acelaş timp cu I' şi I'_1; cu această rotaţie se aduce I'_1 peste I', astfel că punctul J' este vârful unui triunghi isoscel cu baza $I'I'_1$ şi cu unghiul de la vârf egal cu $\Delta\varphi$. Aşa fiind, avem

$$\frac{I'I'_1}{\Delta t}=\frac{I'I'_1}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{2I'J'\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=I'J'\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Dar $\dfrac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}$ are limita 1, iar $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ o valoare finită, pe când $I'J'$ tinde către zero. Deci $\lim\dfrac{I'I'_1}{\Delta t}\to 0$.

Întrebuinţând notaţia vectorială, avem

$$\overrightarrow{I'I'_1}=\overrightarrow{II'}-\overrightarrow{II'_1},$$

adică $\overrightarrow{I'I'_1}$ este diferenţa vectorilor $\overrightarrow{II'}$ şi $\overrightarrow{II'_1}$. Cum $\dfrac{\overrightarrow{I'I'_1}}{\Delta t}\to 0$, întrebuinţând tot notaţia vectorială, urmează că avem

$$\lim\frac{\overrightarrow{II'_1}}{\Delta t}=\lim\frac{\overrightarrow{II'}}{\Delta t}.$$

Egalitatea acestor două derivate geometrice (viteze dacă t este timpul) arată că tangentele în I la curbele (Γ) şi (Γ_1) sunt aceleaşi, adică *aceste curbe sunt tangente* în I; apoi, că, dacă ds şi ds_1 reprezintă diferenţialele arcelor ale acestor curbe în I, avem $ds=ds_1$ şi integrând, pornind de la două puncte corespunzătoare oarecare (care coincid) ale curbelor (Γ) şi (Γ_1), urmează că $s=s_1$. Deci, *este o rostogolire a curbei* (Γ_1) *(ruletei) pe curba* (Γ) *(baza)*.

Se poate vedea, pe cale inversă, că dacă se defineşte mişcarea planului (Π_1) pe planul (Π) prin rostogolirea unei curbe (Γ_1) pe o curbă (Γ), centrul instantaneu este la fiecare moment punctul de contact al celor două curbe.

Traectoriile în planul fix a punctelor însemnate pe planul (Π_1), în mişcarea astfel determinată, sunt numite *rulete*.

De ex., să considerăm *mişcarea segmentului* PQ *de lungime con-*

stantă $(a+b)$, *care se sprijină cu extremitățile sale* P *și* Q *pe două drepte perpendiculare* Ox *și* Oy (Fig. 68). Un punct M al segmentului, definit astfel că $QM=a$, $MP=b$, descrie o elipsă cu centrul O și cu axele Ox și Oy.

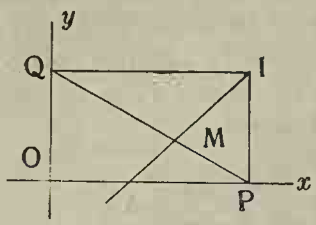

Fig. 68.

Centrul instantaneu de rotație este punctul I de intersecție al perpendicularelor în P și Q pe Ox și Oy. De oarece $OI=PQ$, locul punctului I pe planul fix este cercul cu centrul O și raza $(a+b)$. Deci baza este cercul de centru O și raza $OI=a+b$.

Față de segmentul PQ, locul punctului I este cercul descris PQ ca diametru, cu raza pe jumătate ca a primului cerc. Rulanta este deci cercul de diametru PQ.

Mișcarea figurei se face prin rostogolirea cercului de diametru PQ în interiorul și pe cercul cu centrul O și cu raza îndoită ca a primului.

38. **Centrele de curbură ale traectoriilor punctelor figurei mobile.** Fie M un punct invariabil legat de curba (Γ_1) care se rostogolește peste curba (Γ) (Fig. 69). Normala în punctul M la traectoria sa (M) este dreapta MI care-l unește cu centrul instantaneu de rotație I, punctul de contact al bazei (Γ) cu rulanta (Γ_1). Vom presupune că aceste curbe au curburile de acelaș sens și că deci razele lor de curbură Ii și Ii_1 sunt de acelaș semn.

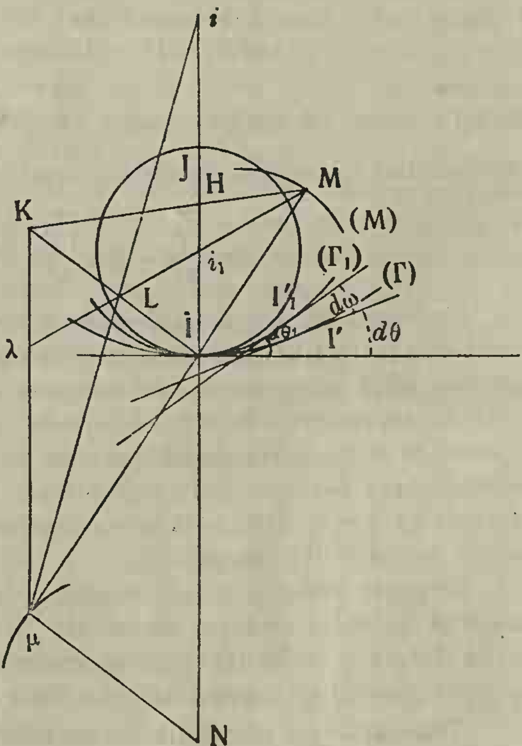

Fig. 69.

Să căutăm centrul de curbură μ al curbei (M). Însemnând cu d(I) și d(M) diferențialele arcelor descrise simultan de punctele I și M pe curbele (Γ) și

(M), fie N punctul de intersecţie al normalei în I la curba (Γ) cu normala la înfăşurătoarea dreptei MI, adică cu perpendiculara în μ la MI. Avem (No. 17)

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{I})} = \frac{\mathrm{M}\mu}{\mathrm{IN}}. \tag{34}$$

Pe de altă parte, $d\omega$ fiind unghiul de rotaţie infinit de mică în jurul lui I, avem

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{IM}d\omega. \tag{35}$$

Dar, această rotaţie infinit de mică aduce tangenta în punctul I'_1, infinit vecin de I pe (Γ_1), să coincidă cu tangenta în punctul I', infinit vecin de I pe (Γ). Deci, notând cu $d\theta_1$ şi $d\theta$ unghiurile de contingenţă respective ale curbelor (Γ_1) şi (Γ), avem

$$d\theta_1 - d\theta = d\omega.$$

Însă

$$d\theta_1 = \frac{d(\mathrm{I})}{\mathrm{I}i_1}, \quad d\theta = \frac{d(\mathrm{I})}{\mathrm{I}i},$$

astfel că relaţia precedentă devine

$$\frac{d(\mathrm{I})}{\mathrm{I}i_1} - \frac{d(\mathrm{I})}{\mathrm{I}i} = d\omega, \quad d(\mathrm{I})\left(\frac{1}{\mathrm{I}i_1} - \frac{1}{\mathrm{I}i}\right) = d\omega.$$

Înlocuind în această formulă pe $d(\mathrm{M})$ şi $d(\mathrm{I})$ cu valorile lor din (34) şi (35), avem

$$\frac{\mathrm{M}\mu}{\mathrm{IN}} = \mathrm{IM}\left(\frac{1}{\mathrm{I}i_1} - \frac{1}{\mathrm{I}i}\right). \tag{36}$$

Fie H conjugatul armonic al punctului i în raport cu extremităţile diametrului IJ al cercului osculator la (Γ_1). Avem

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{\mathrm{I}i} + \frac{1}{\mathrm{IH}}, \quad \frac{2}{2\mathrm{I}i_1} = \frac{1}{\mathrm{I}i} + \frac{1}{\mathrm{IH}}, \\ &\frac{1}{\mathrm{I}i_1} = \frac{1}{\mathrm{I}i} + \frac{1}{\mathrm{IH}}, \quad \frac{1}{\mathrm{I}i_1} - \frac{1}{\mathrm{I}i} = \frac{1}{\mathrm{IH}}. \end{aligned} \tag{37}$$

Egalitatea (36) devine

$$\frac{\mathrm{M}\mu}{\mathrm{IN}} = \frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IH}}. \tag{38}$$

Ducând prin μ paralela μK la IN, avem

$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IH}} = \frac{\mu\mathrm{M}}{\mu\mathrm{K}},$$

şi comparând cu relaţia (38), rezultă

$$\frac{M\mu}{IN}=\frac{M\mu}{\mu K}, \qquad IN=\mu K,$$

adică figura μKIN este un paralelogram şi că IK, paralelă cu μN, este perpendiculară pe MI.

De aci urmează construcţia punctului μ. *Se ia conjugatul armonic* H *al centrului de curbură i al bazei* (Γ) *în raport cu extremităţile diametrului* IJ *al cercului osculator al rulantei* (Γ_1). *Se ia punctul de intersecţie* K *al lui* MH *cu perpendiculara ridicată în* I *pe* MI. *Centrul de curbură* μ *este la intersecţia dreptei* MI *cu paralela dusă din* K *la* I*i*.

Să căutăm a simplifica această construcţie. Pentru aceasta, să ducem Mi_1 care tae μK în λ. Avem

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda K}=\frac{i_1 I}{i_1 H},$$

sau, pentrucă punctele H şi i sunt conjugate în raport cu cercul de centru i_1 şi de rază $i_1 I$ $(\overline{i_1 I}^2=i_1 H . i_1 i)$,

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda K}=\frac{i_1 i}{i_1 I},$$

ceea ce arată că dreptele λi_1, μi şi KI se întâlnesc în L, care probează că *punctul* L *se găseşte pe dreapta* μI, de unde urmează construcţia lui *Savary: Centrul de curbură* μ *al traectorii punctului* M *este la intersecţia normalei* MI *şi a dreptei care uneşte centrul de curbură i al bazei cu punctul de intersecţie al perpendicularei ridicate în* I *pe* MI *cu dreapta care uneşte centrul de curbură* i_1 *al rulantei cu punctul* M.

Observare. Să găsim locul punctelor M, care pentru poziţia considerată, trece printr'un punct de inflexiune ale traectoriilor lor. Pentru aceasta, trebue ca μ şi deci şi punctul K (Fig. 69) să fie la infinit, adică MH perpendiculară pe MI. Atunci unghiul HMI este drept şi locul punctelor M este cercul de diametru IH. De aceea acest cerc se zice *cercul inflexiunilor.* De asemenea, $M\mu$ este nulă, numai când M şi μ se confundă în I, adică M să fie pe rulanta (Γ_1).

39. **Centrele de curbură ale înfăşurătoarelor liniilor figurei mobile.** Determinarea centrului de curbură al înfăşurătoarei unei curbe antrenată de planul (Π_1) se aduce imediat la cazul unei simple traectorii cu ajutorul următoarei observări.

Punctul caracteristic N al curbei (C) antrenată în rostogolirea lui (Γ_1) pe (Γ), adică punctul unde își atinge înfășurătoarea sa (N), este piciorul normalei IN dusă la această curbă prin centrul instantaneu I (Fig. 70). De asemenea, în poziția infinit vecină (C′), punctul caracteristic este puntul N′ al normalei I′N′ la curba (C′).

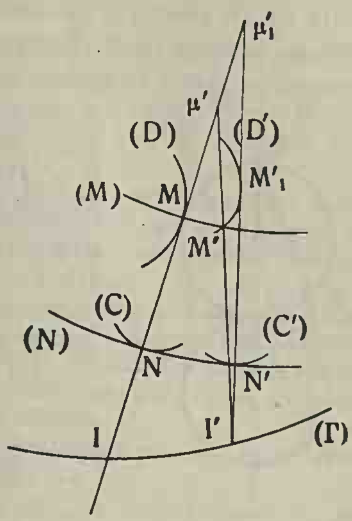

Fig. 70.

Considerând desfășurata (D) a curbei (C), antrenată odată cu ea, normala IN o atinge în M, centrul de curbură a lui (C) corespunzător punctului N. În poziția infinit vecină, I′N′ atinge desfășurata (D′) în M'_1, centrul de curbură al lui (C′), corespunzător lui N′. Dar, dacă presupunem că am însemnat punctul M pe (D), acest punct a venit în M′ infinit vecin de M'_1 pe D′ și normala în M′ la traectoria (M) a acestui punct însemnat este I′M′.

Deci, centrul de curbură al înfășurătoarei (N) este limita punctului de întâlnire μ'_1 a lui IN și I′N′, după cum centrul de curbură al curbei (M) este limita punctului de întâlnire μ' a lui IM cu I′M′.

Din triunghiurile $I'M'M'_1$ și $I'\mu'\mu'_1$, avem

$$\frac{M'M'_1}{\sin I'} = \frac{I'M'_1}{\sin M'}, \quad \frac{\mu'\mu'_1}{\sin I'} = \frac{I'\mu'_1}{\sin \mu'}.$$

De unde

$$\frac{\mu'\mu'_1}{M'M'_1} = \frac{I'\mu'_1}{I'M'_1}\,\frac{\sin M'}{\sin \mu'}.$$

Dar, în membrul al doilea ambii factori tind către limite finite (observând că unghiurile M′ și μ' sunt doi infiniți mici de ordinul întâi). Deci, amândoi termenii ai fracții primului membru sunt de acelaș ordin. Așa dar, $\mu'\mu'_1$ este infinit mic ca și $M'M'_1$ și limita lui μ'_1 este aceeaș ca limita lui μ'. Deci, *centrul de curbură al înfășurătoarei* (N) *este tocmai centrul de curbură a traectorii* (M) *descrisă de centrul de curbură* M *al curbei* (C).

Dacă presupunem că curba (C) este o dreaptă, ar părea, la prima vedere, că teorema nu se poate aplica, căci centrul de curbură M al acestei drepte este aruncat la infinit. Vom arăta că, în acest caz, punctul μ tinde către o poziție determinată la distanță finită. Pentru aceasta, să observăm, că, după

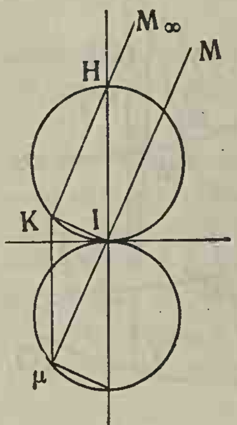

Fig. 71.

prima construcție a centrului de curbură μ corespunzător lui M (No. 39), când acest punct M se depărtează la infinit pe IM (Fig. 71), punctul K devine piciorul perpendicularei coborâte din M pe IK și se găsește prin urmare pe cercul de diametru IH. Pe de altă parte, punctul μ este al patrulea vârf al paralelogramului construit pe IH și IK.

Deci, *locul punctelor* μ *corespunzătoare punctelor* M *de la infinit (prin urmare centrele de curbură ale înfășurătoarelor dreptelor figurei) este cercul simetric în raport cu* I *al aceluia descris pe* IH *ca diametru.* Acesta se zice *cercul rebrusmentelor.*

40. **Aplicație.** *Centrul de curbură la curba capa* (1), *locul vârfului* M *a unui unghi drept a cărei o latură trece mereu prin punctul fix* O (Fig. 72), *pe când un punct* A *însemnat pe o latură* (MA$=a$) *parcurge o dreaptă fixă trecând prin punctul* O. Luând aceasta dreaptă ca Ox, origina O, perpendiculara în O ca Oy, ecuația curbei este

$$y^2(x^2+y^2)=a^2x^2.$$

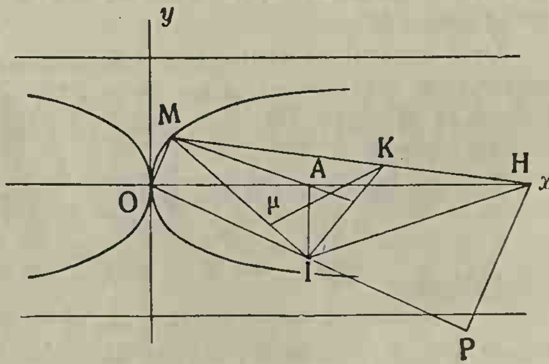

Fig. 72

Simetrică în raport cu axele, tangentă la Oy, asimptotele fiind $y=\pm a$ (duble), curba este unicursală.

Perpendiculara în O pe OM (normala la înfășurătoarea acestei laturi) și perpendiculara în A la OA (normala la locul lui A), tăindu-se în I, centrul instantaneu de rotație al unghiului drept mobil, normala în M la *Capa* este MI. Centrul de curbură este punctul μ unde MI atinge înfășurătoarea.

Dar, raza de curbură a înfășurătoarei lui OM redusă la O, este nulă; punctul O aparține deci cercului rebrusmentelor al înfășurătoarelor dreptelor și prin urmare, simetricul său P în raport cu I este pe cercul inflexiunilor a traectoriilor. Dar a doua extremitate H a diametrului lui I,

(1) A se vedea, M. d'Ocagne, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Janv. 1925, p. 153).

în cercul inflexiunilor, este pe Ox (toate punctele lui Ox fiind de inflexiune pentru că traectoria lui A este rectilinie); rezultă că H este la intersecția lui Ox cu perpendiculara în P pe OP. Odată H obținut, se duce MH ce tae în K perpendiculara în I la MI, paralela din K la IH trece prin centrul de curbură μ în M la *capa*.

41. Epicicloide [1]. Când baza (Γ) și rulanta (Γ_1) sunt cercuri, traectoria a oricărui punct invariabil legat de cercul (Γ_1) este o *epicicloidă*. Se vede că pentru un cerc de rază r, orice epicicloidă este definită prin următorii parametrii: 1° raportul ρ al razei r_1 a cercului (Γ_1) către raza r a cercului (Γ), luat cu semnul $+$ sau $-$, după cum cele două cercuri sunt tangente interioare sau exterioare; 2° raportul δ a distanței cuprinsă între punctul considerat (mobil) M și centrul i_1 al cercului (Γ_1) la raza acestui cerc, raport care totdeauna poate fi luat pozitiv alegând ca rază jumătatea de dreaptă ce pornește din i_1 și se dirijează către M.

Presupunând că δ este egal, superior sau mai mic de cât 1, *epicicloida* este *ordinară, alungită*, sau *scurtată*.

Când ρ este pozitiv și mai mic de cât 1, se dă curbei numele de *hypocicloidă*.

Dacă $\rho=0$, aceasta nu poate să aibă loc (când se exclude soluția $r_1=0$, ceea ce ar da un cerc) de cât dacă $r \to \infty$, adică dacă baza este o dreaptă, în care caz curba se zice *cicloidă*.

Dacă $\rho \to \infty$, adică $r_1 \to \infty$, avem o *desfășurătoare a cercului*.

1° Construcția lui Savary se aplică la centrele de curbură a epicicloidelor, punctele i și i_1 fiind în acest caz centrele cercurilor (Γ) și (Γ_1). În cazul *epicicloidei ordinare*, M fiind un punct al cercului (Γ_1) (Fig. 73), punctul L din figura 69 devine diametral opus lui M în cercul (Γ_1). Dar, din triunghiul MIi_1, tăiat cu transversala $Li\mu$ (Fig. 73), avem

$$\frac{Ii}{ii_1}\,\frac{Li_1}{LM}\,\frac{\mu M}{\mu I}=1.$$

Dar

$$\frac{Ii}{ii_1}=\frac{r}{r_1-r},\quad \frac{Li_1}{LM}=\frac{1}{2},$$

astfel că relația precedentă dă

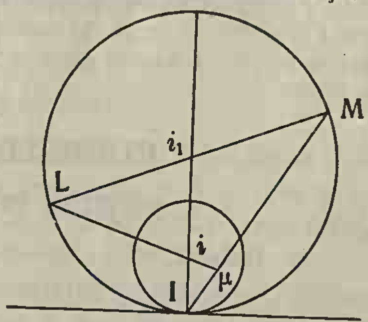

Fig. 73.

$$\frac{\mu M}{I\mu}=\frac{2(r_1-r)}{r}=\text{Const.}$$

Așa dar, *centrul de curbură* μ *divide normala* MI *într'un raport constant*. Deci raportul $I\mu : IM$ este totdeauna constant, așa că *locul centrelor de curbură* μ *corespunzătoare, la fiecare moment, diferitelor puncte* M *ale cercului* (Γ_1), *este tot un cerc*.

2° În cazul *când cercul* (Γ_1) *are diametrul egal cu raza cercului* (Γ) (Fig. 74), cercul (Γ_1) trece necontenit prin centrul i al cercului (Γ). Apli-

[1] A se vedea, **M. d'Ocagne**, *L'étude géométrique sur la rectification et la quadrature des épi — et hypocycloïdes (Nouvelles Annales de Math.*, 1915, p. 533). De asemenea, **J. Lemaire**, *Hypocycloïdes et épicycloïdes* (Vuibert, 1929).

când construcția lui Savary pentru centrul de curbură corespunzător unui punct M_1 al cercului (Γ_1), atunci L_1 din figura 69 devine diametrul opus lui M_1 în cercul (Γ_1) (Fig. 74) și iL_1 este paralelă cu M_1I; punctul μ de intersecție al dreptelor M_1I și L_1i este la infinit, centrul de curbură μ este aruncat la infinit, raza de curbură în M_1 este infinită. Cum această proprietate este verificată pentru orice punct M_1 pe traectoria sa, locul lui M_1 este o dreaptă, care trece neapărat prin punctul i. Regăsim teorema lui *La Hire*: *Orice punct a unui cerc ce se rostogolește în interiorul unui cerc de rază dublă, descrie un diametru al cercului al doilea.*

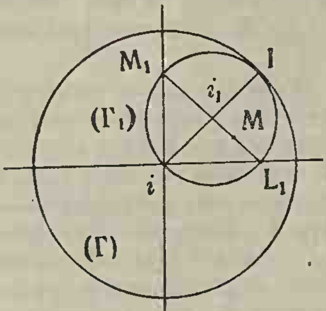

Fig. 74.

Este asemenea ușor de văzut ce fel de epicicloidă descrie un punct M oarecare legat de cercul (Γ_1). Fie L_1, M_1 extremitățile diametrului cercului Γ_1 și care trece prin M. După teorema precedentă, locurile descrise de M_1 și L_1 sunt doi diametrii perpendiculari iM_1, iL_1 ai cercului (Γ). Cum L_1M_1 este diametrul cercului (Γ_1), deci o constantă, M este un punct al unui segment L_1M_1 de lungime constantă ce se sprijină pe două drepte perpendiculare, deci descrie o elipsă.

Observare. Pentru ca o epicicloidă să prezinte puncte de inflexiune, trebue (No. 39, Observare) ca cercul de centru i_1 ce trece prin punctul M (însemnat), să tae pe ii_1 între punctul I și punctul H conjugatul armonic al lui i în raport cu extremitățile I și J ale diametrului lui (Γ_1) trecând prin I (Fig. 69). În cazul cicloidei, punctul H coincide cu i_1, și se vede deci că pentru ca această curbă să aibă puncte de inflexiune trebue ca să fie turtită.

CURBELE STRÂMBE.

NOȚIUNI INTRODUCTIVE.

42. Infiniți mici. Metoda infinitezimală constă în a înlocui cantitățile infinit mici variabile care figurează, cu alți infiniți mici echivalenți, pe care îi alegem astfel ca să se simplifice cât mai mult raționamentul și calculele. Aceasta o putem face ușor dacă ținem seamă de următoarele proprietăți.

1^0 *Un segment rectiliniu infinit mic este echivalent cu proecția sa pe un plan sau pe o axă care face un unghi infinit mic cu direcția segmentului.* În adevăr, fie AB segmentul din spațiu, AB′ proecția sa pe o axă sau un plan ce face cu direcția segmentului unghiul θ; avem

$$AB' = AB \cos\theta.$$

Dar θ fiind infinit mic, $\cos\theta$ este echivalent cu 1, deci proecția AB′ și segmentul AB sunt echivalenți.

2° *Un unghi variabil infinit mic este echivalent cu proecția sa pe un plan care face cu planul acestui unghi un unghi infinit mic.* În adevăr, fie θ unghiul făcut de planul unghiului ABC (Fig. 75) cu planul de proecție și $B'A'C'$ proecția acestui unghi.

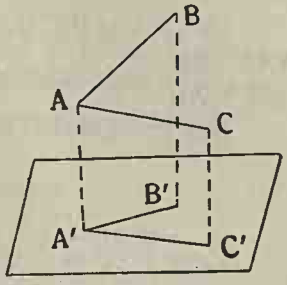

Fig. 75.

Să luăm pe laturile unghiului dat lungimile $AB=c$, $AC=b$ și fie β, γ unghiurile ce le fac respectiv AB și AC cu planul de proecție. Avem

$$A'B' = AB\cos\beta = c\cos\beta,\quad A'C' = b\cos\gamma.$$

Știm că

$$\text{aria } A'B'C' = \text{aria } ABC\cos\theta. \tag{1}$$

Dar

$$\text{aria } ABC = \frac{1}{2}\cdot bc\,\sin BAC,$$

$$\text{aria} A'B'C' = \frac{1}{2} A'B'.A'C'\sin B'A'C' = \frac{1}{2} bc\cos\beta\cos\gamma\sin B'A'C'.$$

Înlocuind în relația (1), avem

$$\frac{1}{2} bc\cos\beta\cos\gamma\sin B'A'C' = \frac{1}{2} bc\sin BAC\cos\theta,$$

de unde

$$\frac{\sin B'A'C'}{\sin BAC} = \frac{\cos\theta}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Unghiurile β, γ, θ fiind infiniți mici, membrul al doilea tinde către 1, deci raportul sinusurilor este egal cu 1 și deci și raportul unghiurilor BAC, $B'A'C'$ tinde către 1, adică sunt infiniți mici echivalenți.

3° *Două segmente rectilinii,* AB, $A'B'$, *sunt echivalente și au aceeaș direcție limită, dacă cele două segmente* AA' *și* BB' *sunt infiniți mici în raport cu* AB. În adevăr, să ducem $A'B''$ (Fig. 76) egală și paralelă cu AB. În triunghiul $BB'B''$, avem

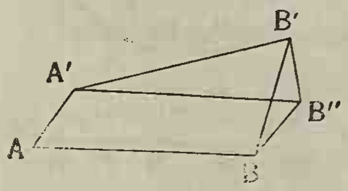

Fig. 76.

$$B'B'' = BB''\cos B'' + BB'\cos B',$$

de unde

$$\frac{B'B''}{A'B''} = \frac{BB''}{A'B''}\cos B'' + \frac{BB'}{A'B''}\cos B',$$

$$\frac{B'B''}{A'B''} = \frac{AA'}{AB}\cos B'' + \frac{BB'}{AB}\cos B'.$$

Dar, AA′ şi BB′ fiind infiniţi mici în raport cu AB, rapoartele $\frac{AA'}{AB}$, $\frac{BB'}{AB}$ tind către zero şi deci şi $\frac{B'B''}{A'B''}$ tinde către zero.

Din triunghiul B′B″A′, avem

$$\sin A' = \frac{B'B''}{A'B''} \sin A'B'B''.$$

Cum $\frac{B'B''}{A'B''} \to 0$, rezultă că $\sin A' \to 0$, deci unghiul A′ tinde către zero şi deci vectorii AB, A′B′ au aceeaş direcţie limită.

Din triunghiul A′B′B″, avem

$$A'B' = A'B'' \cos A' + B''B' \cos A'B'B'',$$

de unde

$$\frac{A'B'}{AB} = \cos A' + \frac{B''B'}{AB} \cos A'B'B''.$$

Dar, am văzut că $\frac{B''B'}{A'B''} = \frac{B''B'}{AB} \to 0$ şi unghiul $A' \to 0$; deci raportul $\frac{A'B'}{AB} \to 1$, şi prin urmare vectorii A′B′, AB sunt echivalenţi.

43. **Lungimea unui arc.** Fie AB un arc de curbă strâmbă (Fig. 77), *ab* proecţia sa ortogonală pe planul (Q), M un punct oarecare al acestui arc şi *m* proecţia acestui punct. Într'un plan oarecare să ducem o dreaptă *xy* (Fig. 77) şi să luăm pe

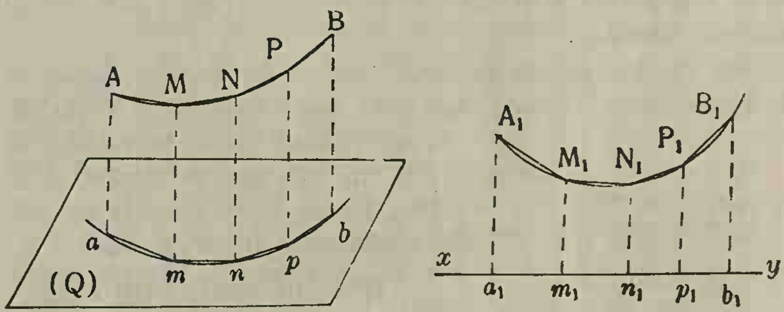

Fig. 77.

această dreaptă, pornind de la un punct oarecare a_1, lungimea a_1m_1 egală cu lungimea arcului *am*. Să ridicăm apoi în m_1 o perpendiculară m_1M_1 egală cu *m*M. La orice punct M al curbei

(AB) va corespunde astfel un punct M_1 şi când punctul M descrie arcul AB, punctul M_1 descrie un arc de curbă plană (A_1B_1), a cărui lungime să o notăm cu l.

Aşa fiind, să înscriem în arcul (AB) linia poligonală AMNPB şi fie *amnpb*, $A_1M_1N_1P_1B_1$ liniile poligonale corespunzătoare înscrise în proecţia (ab) şi în curba plană (A_1B_1). Se ştie că valoarea raportului

$$(2) \qquad \frac{AM+MN+NP+PB}{A_1M_1+M_1N_1+N_1P_1+P_1B_1}$$

este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare valoare din acelea ale rapoartelor

$$(3) \qquad \frac{AM}{A_1M_1}, \quad \frac{MN}{M_1N_1}, \quad \frac{NP}{N_1P_1}, \quad \frac{PB}{P_1B_1}.$$

Să luăm unul din aceste rapoarte, de ex., $\frac{MN}{M_1N_1}$. Să însemnăm cu δ diferenţa $Nn-Mm$, sau egala sa $N_1n_1-M_1m_1$. Avem

$$\overline{MN}^2=\overline{mn}^2+\delta^2, \quad \overline{M_1N_1}^2=\overline{m_1n_1}^2+\delta^2.$$

Deci

$$\left(\frac{MN}{M_1N_1}\right)^2=\frac{\overline{mn}^2+\delta^2}{\overline{m_1n_1}^2+\delta^2}.$$

Valoarea raportului $\left(\frac{MN}{M_1N_1}\right)^2$ este cuprinsă între rapoartele

$$\left(\frac{mn}{m_1n_1}\right)^2, \quad \frac{\delta^2}{\delta^2}=1,$$

sau între rapoartele

$$\left(\frac{\text{coarda } mn}{\text{arc } mn}\right)^2, \quad 1.$$

Dar, când arcul de curbă plană *mn* tinde către zero, şi primul raport tinde către 1, deci, la limită, $\frac{MN}{M_1N_1}\to 1$.

Prin urmare, fiecare din rapoartele (3) tind către 1 şi deci şi raportul (2) tinde către 1, adică numărătorul

$$AM+MN+NP+PB$$

tinde către aceeaş limită ca şi numitorul $(A_1M_1+M_1N_1+N_1P_1+P_1B_1)$. Dar, numitorul tinde către lungimea l a arcului de curbă plană (A_1B_1), ori care ar fi legea după care tind către zero laturile linii poligonale AMNPB.

Aşa dar, suma (AM+MN+NP+PB) tinde către limita l, oricare ar fi legea după care laturile linii poligonale înscrise în curba dată tind către zero. Aceasta este, prin definiţie, lungimea arcului AB.

Deci, *lungimea unui arc de curbă* (AB) *este limita către care tinde perimetrul linii poligonale înscrise în acest arc de curbă. Această limită este unică şi nu depinde de legea după care tind către zero laturile acestei linii poligonale.*

44. **Arcul infinit mic şi coarda sa sunt infiniţi mici echivalenţi.** Să considerăm arcul MN al curbei (AB) şi reprezentarea sa plană, arcul M_1N_1 al curbei (A_1B_1) (Fig. 77). Am văzut că $\operatorname{arc} MN = \operatorname{arc} M_1N_1$, deci

$$\frac{\operatorname{arc} MN}{MN} = \frac{\operatorname{arc} M_1N_1}{MN} = \left(\frac{\operatorname{arc} M_1N_1}{M_1N_1}\right)\left(\frac{M_1N_1}{MN}\right).$$

Dar, pentru curba plană (A_1B_1), raportul

$$\frac{\operatorname{arc} M_1N_1}{M_1N_1}$$

tinde către 1, când arcul tinde către zero. De asemenea, am arătat că raportul $\frac{M_1N_1}{MN}$ tinde către 1. Deci raportul

$$\frac{\operatorname{arc} MN}{MN}$$

tinde către 1, adică arcul MN infinit mic şi coarda sa MN sunt infiniţi mici echivalenţi.

Pentru a studia o curbă în vecinătatea unui punct M, se ia, de obicei, arcul infinit mic ca infinit mic principal. Cum arcul infinit mic este echivalent cu coarda sa, urmează că se va putea lua ca infinit mic principal şi coarda.

45. **Două arce infinit de mici, corespunzătoare pe două curbe strâmbe care se corespund punct cu punct, sunt infiniţi mici de acelaş ordin.** Fie M şi N două puncte corespunzătoare pe curbele (M) şi (N) şi fie M' şi N' punctele infinit vecine corespunzătoare pe aceleaşi curbe (Fig. 78). Să ducem prin N segmentul NP egal şi paralel cu MM'. Avem

$$\frac{\operatorname{arc} MM'}{\operatorname{arc} NN'} = \frac{\operatorname{arc} MM'}{MM'}\ \frac{NN'}{\operatorname{arc} NN'}\ \frac{MM'}{NN'}. \tag{4}$$

Dar, din triunghiul $NN'P$, avem

$$\frac{NP}{\sin NN'P} = \frac{NN'}{\sin N'PN},$$

de unde

(5) $$\frac{NP}{NN'} = \frac{\sin NN'P}{\sin N'PN}.$$

Însă, a zice că curbele (M) şi (N) se corespund punct cu punct, înseamnă că, fiind date punctele omoloage M şi N pe cele două curbe, punctul N′ se obţine din M′ cu o operaţie determinată, care face ca să existe, pentru punctul N, direcţiile NN′ şi PN′, astfel că, ducând prin punctele N şi P paralele cu aceste direcţii, să obţinem univoc punctul N′.

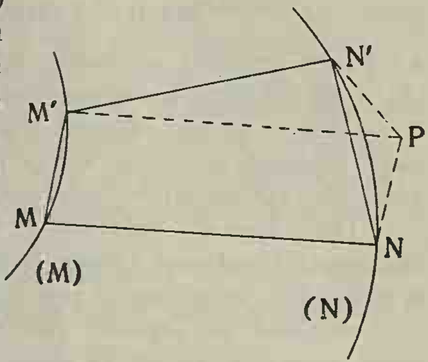

Fig 78.

Aşa dar, triunghiul NN′P are, pentru punctele N şi N′, unghiuri determinate, aşa că, la limită, raportul (5) tinde către o valoare determinată şi deci şi raportul

$$\frac{\text{arc } MM'}{\text{arc } NN'}$$

tinde către o valoare determinată, adică arcele MM′, NN′, corespunzătoare, sunt infiniţi mici de acelaş ordin.

Această proprietate ne permite a înlocui arcul unei curbe date cu arcul altei curbe, care se corespunde punct cu punct cu cea dintâi, dar ale cărei proprietăţi sunt mai uşor de determinat.

46. **Variaţia de lungime a unui segment rectiliniu.** Fie AB, A′B′ două poziţii infinit vecine ale unui segment rectiliniu variabil (Fig. 79). Să însemnăm cu A″, B″ proecţiile pe dreapta AB ale punctelor A′, B′. Unghiul lui A′B′ cu AB fiind infinit mic, ştim (No. 42,1⁰) că A′B′ şi A″B″ sunt echivalenţi.

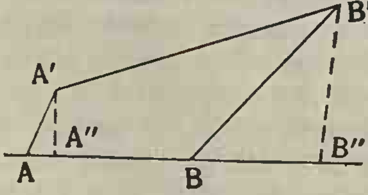

Fig. 79

Variaţia segmentului variabil este AB — A′B′, care este echivalentă cu

$$AB - A''B'' = AA'' + A''B - A''B - BB'' = AA'' - BB''.$$

Însemnând cu α şi β unghiurile ce le fac la limită AA′ şi BB′ cu direcţia AB, avem că variaţia segmentului AB este

$$d(AB) = AA'\cos\alpha - BB'\cos\beta.$$

Presupunând că extremitățile A și B se mișcă pe curbele (A) și (B), AA′ și BB′ sunt respectiv d(A) și d(B), astfel că variația segmentului AB este dată de

$$d(\mathrm{AB}) = d(\mathrm{A})\cos\alpha - d(\mathrm{B})\cos\beta, \tag{6}$$

α și β fiind respectiv unghiurile tangentelor în A și B la curbele (A) și (B) cu direcția segmentului AB.

Aceasta se mai exprimă zicând că *variația de lungime a unui segment rectiliniu are ca parte principală diferența deplasărilor extremităților sale, proectate pe direcția segmentului.*

Din relația (6) deducem: 1⁰ *Când un segment rectiliniu se deplasează rămânând normal la traectoriile extremităților sale* ($\alpha = \beta = 90^0$), *lungimea sa este o constantă.*

2⁰ *Când un segment rectiliniu de lungime constantă rămâne normal la traectoria uneia din extremități, el rămâne de asemenea normal la traectoria celeilalte extremități.*

Să considerăm, de ex., o curbă (C), astfel că planul său normal, adică planul perpendicular pe tangentă, în fiecare punct, să treacă necontenit printr'un punct fix A. Dacă B și B′ sunt două puncte infinit vecine ale acestei curbe, variația AB′—AB va fi nulă, căci, din (6), se vede că AA′ și cosβ sunt amândouă nule, și deci d(AB) = 0, adică AB este o constantă. De aci rezultă că *orice curbă al cărei plan normal trece printr'un punct fix este trasă pe o sferă având ca centru acest punct.*

CURBE SFERICE.

47. **Curbe sferice.** Multe din proprietățile curbelor plane se extind imediat la curbele sferice (trase pe sferă) și folosesc la studiul curbelor strâmbe în general. Înainte de a studia curbele strâmbe, vom face deci o scurtă privire asupra curbelor sferice.

Cercul mare joacă pe sferă acelaș rol ca dreapta în plan.

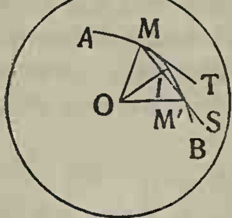

Fig. 80.

Tangentă la o curbă sferică. AB fiind un arc al unei curbe sferice, să considerăm două puncte M și M′ pe această curbă (Fig. 80). Triunghiul OMM′ fiind isoscel (OM=OM′), coarda MM′ este perpendiculară pe dreapta OI care unește centrul O cu mijlocul I al coardei MM′. La limită, când M′ se apropie de M, MM′ devine tangenta MT în M, OI se confundă cu OM, astfel că tangenta în M la curba sferică este perpendiculară pe raza OM.

Cerc mare tangent şi cerc mare normal la o curbă sferică. Cerc mare tangent într'un punct M al unei curbe sferice este limita cercului mare cu centrul în centrul O al sferei şi care trece prin punctul M şi punctul M′ infinit vecin de M pe curba sferică. Cerc mare normal în punctul M al curbei sferice este cercul mare ce trece prin M şi al cărui plan este perpendicular pe acela al cercului mare tangent în M curbei sferice.

Cercul mare tangent într'un punct M împarte sfera în două emisfere din care numai una conţine punctele curbei situate în vecinătatea punctului M. Vom presupune totdeauna că cercul normal într'un punct este dirijat, plecând de la acest punct, în regiunea concavităţii.

Deci, o curbă sferică se poate considera ca locul intersecţiilor succesive ale unei familii de cercuri mari depinzând de un parametru.

48. **Variaţia unui arc de cerc mare.** Proprietatea relativă la variaţia unui segment rectiliniu se extinde la un arc de cerc mare mobil pe sfera dată.

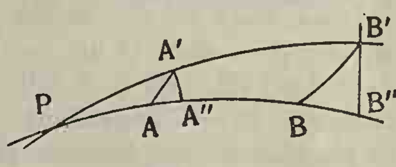

Fig. 81.

Să considerăm, în adevăr, două poziţii infinit vecine AB şi A′B′ ale acestui arc (Fig. 81). Cercurile mari din care fac parte aceste arce se tae în punctul P şi în altul diametral opus pe sferă. Din punctul P, ca pol, să descriem arcele de cercuri A′A″, B′B″. Avem

$$A'B' - AB = A''B'' - AB = BB'' - AA''.$$

Variaţia lungimei unui arc de cerc mare este deci echivalentă cu diferenţa deplasărilor extremităţilor sale, proectate pe direcţia segmentului.

Se deduce din această proprietate următoarele:

1⁰ *Dacă un arc de cerc mare se deplasează rămânând normal la traectoriile extremităţilor, lungimea sa rămâne constantă.*

2⁰ *Dacă un arc de cerc mare, de lungime constantă, rămâne normal la traectoria uneia din extremităţile sale, el rămâne normal şi la traectoria celeilalte extremităţi.*

3⁰ *Orice curbă sferică al cărei cerc mare normal trece printr'un punct fix, este un cerc având acest punct ca pol.*

49. **Desfăşurată sferică.** Este, de asemenea, analogie între curbele plane şi cele sferice în ce priveşte teoria desfăşuratelor.

Se zice desfăşurată sferică a unei curbe (C) înfăşurătoarea cercurilor mari normale la această curbă. Fie A şi B două puncte oarecare ale curbei (C), A_1 şi B_1 punctele corespunzătoare pe desfăşurata (C_1) (Fig. 82). Arcul A_1B_1 al desfăşuratei este egal cu diferenţa arcelor BB_1, AA_1, de unde rezultă, ca şi pentru curbele plane, un procedeu de a construi o curbă sferică cu ajutorul unui fir întins pe desfăşurata sa.

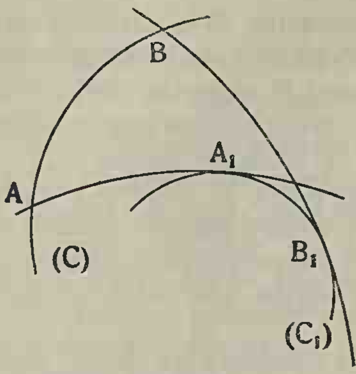

Fig. 82.

50. Curbură sferică. Înainte de a studia curbura unei curbe sferice, avem nevoe de oarecare noţiuni pregătitoare.

Triunghiuri sferice. Să considerăm pe o sferă O un cerc mare ABC (Fig, 83) şi fie PP′ diametrul sferei perpendicular pe planul cercului. Punctele P şi P′ se zic polii cercului mare ABC. Considerând un cerc mic DE, tras pe sferă, al cărui plan este perpendicular pe PP′, punctele P şi P′ se zic polii acestui cerc. Vom alege ca pol pentru cercul mic DE acel punct P, cel mai apropiat de planul cercului, care se obţine la intersecţia sferei cu diametrul sferei perpendicular pe planul cercului. Punctele cercului DE sunt depărtate egal de polul P, înţelegând prin depărtarea a două puncte M şi N de pe sferă arcul de cerc mare MN ce trece prin aceste puncte.

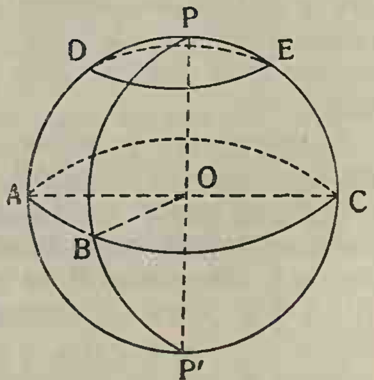

Fig. 83.

Unghiul cercurilor mari PAP′, PBP′, este unghiul tangentelor în P la aceste cercuri şi este egal cu unghiul AOB (Fig. 83) corespunzător diedrului format de planele acestor cercuri. Acest unghi se măsoară cu arcul AB al cercului mare ABC cu planul perpendicular pe PP′ (Fig. 83).

Fie A, B, C trei din punctele de intersecţie a trei cercuri mari trase pe sferă. Triunghiul curbiliniu ABC (Fig. 84) se zice un triunghi sferic. Laturile sale sunt arcele BC, CA, AB, măsurate pe cercurile mari din care fac parte aceste arce. Unghiurile triunghiului sferic sunt A, B, C, egale cu unghiurile diedrelor formate de planele cercurilor mari care determină triunghiul.

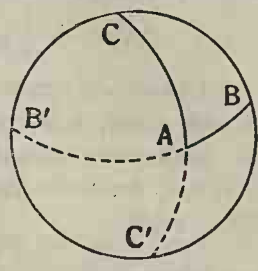

Fig. 84.

Aria unui fus sferic. Porţiunea din aria unei sfere determinată de arcele ADA', AEA' (Fig. 85) de cercuri mari, se zice *fus sferic.* Mărimea sa depinde de unghiul A al diedrului format de planele cercurilor mari şi se notează fusul A. Unghiul A este măsurat cu arcul DE.

Să considerăm două fuse A şi A_1 ale aceleaş sfere. Se vede că ariile lor stau în acelaş raport ca unghiurile lor corespunzătoare A şi A_1. Deci

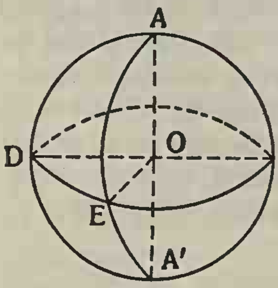

Fig. 85.

$$\frac{\text{fus A}}{\text{fus A}_1} = \frac{\text{ungh. A}}{\text{ungh. A}_1} \tag{7}$$

Să luăm ca unitate de măsură a ariilor de pe sferă triunghiul sferic tridreptunghic, adică a opta parte din aria sferei, iar ca unitate a unghiurilor, unghiul drept. Luând ungh. $A_1=1$ unghi drept, atunci fus A_1 este a patra parte din sferă, adică două triunghiuri sferice tridreptunghice, deci aria sa este reprezentată de numărul 2. Relaţia (7) devine

$$\frac{\text{fus A}}{2\,\text{aria triungh. tridrept}} = \frac{\text{ungh. A}}{1\ \text{drept}},$$

sau

$$\text{măs. arii fus A} = 2\,\text{măs. ungh. A}.$$

Aşa dar, dacă se ia ca unitate de măsură a arii, aria triunghiului sferic tridreptunghic, iar ca unitate de unghi, unghiul drept, măsura arii unui fus sferic este de două ori măsura unghiului său.

Aria unui triunghi sferic. Fie ABC un triunghi sferic (Fig. 84). Să complectăm cercul mare CB şi să prelungim laturile CA şi BA până în punctele C', B' unde tae acest cerc mare. Avem

$$ABC+B'AC'=\text{fus A},\quad CBA+CAB'=\text{fus B},\quad ACB+C'AB=\text{fus C}.$$

Adunând, avem

$$2ABC + CAB + ABC' + AC'B' + B'AC = \text{fus}A + \text{fus}B + \text{fus}C,$$

$$2ABC + \frac{1}{2}(\text{aria sferii}) = \text{fus}A + \text{fus}B + \text{fus}C.$$

Luând ca unitate de unghi, unghiul drept, ca unitate de măsură a arii, aria triunghiului sferic tridreptunghic, jumătatea arii sferii este măsurată cu numărul 4 şi dacă se notează cu S, A, B, C numerile care măsoară aria şi unghiurile triunghiului ABC, avem

$$4 + 2S = 2A + 2B + 2C,$$

de unde

$$S = A + B + C - 2.$$

Deci, *aria triunghiului sferic are ca măsură suma numerilor care măsoară unghiurile, micşorată cu 2.*

Aria unui poligon sferic. Se zice poligon sferic poligonul ale cărui laturi sunt arce de cercuri mari ale sferii. Luând un punct în interiorul unui poligon de n laturi şi unind acest punct cu vârfurile poligonului, cu ajutorul arcelor de cercuri mari, împărţim poligonul în n triunghiuri sferice. Scriind ariile acestor triunghiuri cu formula de mai sus şi adunând, avem

măs. arii. polig. = suma numer. ce măsoară ungh. polig. $+ 4 - 2n$,

deci

măs. arii polig. sferic = suma numer. ce măsoară ungh. pol. $- 2(n-2)$.

În cazul unui patrulater sferic ABCD, măsura arii este egală cu suma numerilor ce măsoară unghiurile sale micşorate cu 4, adică

$$\text{măs. arii } ABCD = A + B + C + D - 4.$$

Aria unui triunghi isoscel tras pe sferă. Să considerăm o calotă sferică cu baza cercul EBCF (Fig. 86) şi înălţimea AD. Să ducem prin vârful A al calotei două arce de cercuri mari, AB şi AC. S'a format un triunghı isoscel ABC tras pe sferă, căruia îi corespunde unghiul A şi a cărui arie este în legătură cu calota AEBCF. În adevăr, dacă la un unghi A, corespunde aria triunghiului ABC, când unghiul creşte, aria triunghiului obţinut se măreşte şi când ajunge ca unghiul A să fie 180^0 sau π, aria sa este jumătate din calota AEBCF. Deci

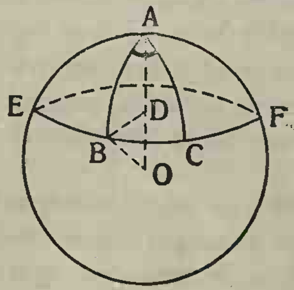

Fig. 86.

la ungh. π corespunde $\frac{1}{2}$ aria calotei . . . $\frac{1}{2}\, 2\pi r \, . \, AD$,

„ „ A „ ABC . . . $\hat{A} \, . \, r \, . \, AD$,

adică *aria triunghiului isoscel* ABC *(arc* AB $=$ *arc* AC) *este egală cu produsul dintre măsura unghiului* A, *raza sferii şi înălţimea calotei din care face parte acest triunghi,* sau,

măs. $ABC = \hat{A} \, . \, r \, . \, AD$.

Acestea fiind stabilite, să studiem *curbura unei curbe sferice*. Să considerăm arcul MM′ al unei curbe sferice (Fig. 87) şi fie P unul din punctele de intersecţie ale cercurilor mari tangente în M şi M′ la arcul MM′. Unghiul α format de planele acestor cercuri se zice *curbura sferică a arcului* MM′. Când arcul MM′ este infinit mic, acest unghi se zice *unghi de contingenţă sferică. Curbura sferică într'un punct* M este limita raportului $\frac{\alpha}{\text{arc MM}'}$, când $MM' \to 0$.

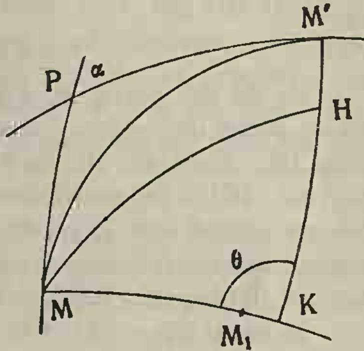

Fig. 87.

Fie K punctul, situat în regiunea concavităţii arcului MM′, unde se tae cercurile normale în M şi M′ la arcul MM′. Să ducem din punctul K ca pol arcul de cerc MH şi să considerăm triunghiul MKH. Acest triunghi isoscel face parte din calota cu vârful K şi înălţimea h distanţa de la polul K la planul cercului ce conţine arcul MH. Presupunând că sfera are raza 1, aria acestui triunghi curbiliniu MKH este măsurată cu produsul $\theta . h$, θ fiind unghiul cercurilor mari normale în M şi M′. Să calculăm acum pe h. Pentru aceasta, ne raportăm la figura 86. Înălţimea h a calotei AEF este $AD = OA - OD = 1 - OD$. Pe OD îl calculăm din triunghiul dreptunghic OBD ($D = 90^\circ$), unde unghiul la centru BOD este măsurat cu arcul AB, care, în cazul figurei 87, este arcul MK. Dar, $OD = OB \cos BOD = \cos(\text{arc AB}) = \cos(\text{arc MK})$. Deci,

$$h = AD = 1 - OD = 1 - \cos(\text{arc MK}),$$

iar aria triunghiului sferic MKH este măsurată cu $\theta\, [1 - \cos(\text{arc MK})]$, luând raza sferei egală cu 1, unitatea de unghi, unghiul drept şi unitatea de arie, aria triunghiului sferic tridreptunghic.

Pe de altă parte, triunghiul MHK este echivalent, din punct de vedere infinitezimal, cu patrulaterul sferic KMPM′, a cărui arie este măsurată cu suma unghiurilor sale micşorată cu 4, adică

$$\sphericalangle PMK + \sphericalangle MKM' + \sphericalangle KM'P + \sphericalangle M'PM - 4,$$

sau

$$1 \text{ drept.} + \theta + 1 \text{ drept.} + 2 \text{ dr.} - \alpha - 4 \text{ dr.} = \theta - \alpha.$$

Avem, deci, din punct de vedere infinitezimal,

$$\theta\,[1 - \cos(\text{arc } MK)] \backsim \theta - \alpha,$$

sau

(8) $$\alpha \backsim \theta . \cos(\text{arc } MK).$$

Pe de altă parte, arcul MM′ (Fig. 87) este echivalent, din acelaş punct de vedere, cu arcul MH, care, în figura 85, este arcul BC. Acest arc BC face parte din cercul EBCF (Fig. 86) cu raza $BD = OB \sin BOD = OB \sin(\text{arc } AB)$. Cum ştim că măsura arcului este egală cu produsul dintre raza cercului şi unghiul la centru corespunzător, urmează că arcul BC are ca măsură $BD\,(\text{unghiul } BDC) = OB \sin(\text{arc } AB)\,(\text{unghiul } A)$.

În cazul figurei 87, $OB = R = 1$, raza sferii, pe care e trasă curba sferică, arc AB=arc MK, unghiul $A =$ ungh. θ. Deci, arcul MM′ e dat de

(9) $$\text{arc } MM' = R\,\theta \sin(\text{arc } MK) = \theta . \sin(\text{arc } MK).$$

Divizând (8) cu (9), avem

(10) $$\frac{\alpha}{\text{arc } MM'} \backsim \frac{\theta . \cos(\text{arc} MK)}{\theta . \sin(\text{arc } MK)} \backsim \text{cotg}(\text{arc } MK).$$

Când M′ se apropie indefinit de M, $\frac{\alpha}{\text{arc } MM'}$ tinde către curbura sferică în M, punctul K de intersecţie a cercurilor normale în M şi M′ tinde către punctul M_1 al desfăşuratei sferice corespunzător lui M, arc MK tinde către arcul de cerc mare $MM_1 = \varphi$. Deci, *curbura sferică* în M, dată de (10), este

(11) $$\text{cotg}\varphi.$$

Dacă curba (C) se reduce la un cerc, punctul K este fix şi coincide cu polul cercului; curbura sferică este deci constantă. Reciproc, cercul este singura curbă a cărei curbură sferică este constantă. În adevăr, pentru orice arc MM′ al unei astfel de curbe, avem $MM_1 = M'M'_1 = 0$ şi desfăşurata sferică se reduce la un punct. Cercul mare normal trece printr'un punct fix al sferii şi curba este un cerc având acest punct ca pol.

51. **Cerc de curbură.** Să descriem din punctul M_1 ca pol un cerc mic de rază sferică M_1M (Fig. 86); acest cerc atinge curba în punctul M şi are în toate punctele sale, aceeaş curbură sferică ca şi curba (C) în punctul M. Acesta se zice *cercul de curbură.* Arcul MM_1 este *raza de curbură sferică*, iar M_1 *polul de curbură.*

CURBE STRÂMBE. CURBURĂ. TORSIUNE.

52. **Curbură. Rază de curbură.** Pe curba (M) să adoptăm un sens de parcurs determinat şi să însemnăm cu s arcul de curbă AM, cuprins între un punct A ales ca origină şi un punct oarecare M, precedat de semnul + sau —, după cum direcţia de la A la M este direcţia pozitivă sau negativă (Fig. 88).

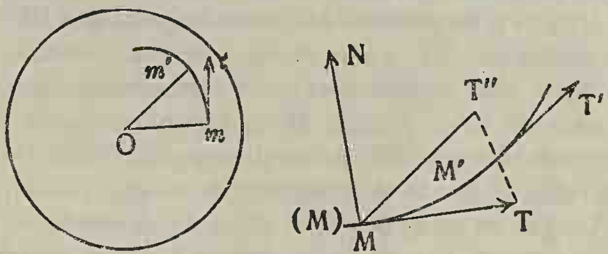

Fig. 88.

Fie MT direcţia pozitivă a tangentei în M, adică aceea care corespunde la arcele crescătoare. Ducând printr'un punct O al spaţiului paralele cu tangentele MT, M'T', . . ., se formează conul (S). Să însemnăm cu (Σ) curba de intersecţie a acestui con cu sfera descrisă din O ca centru şi cu raza egală cu unitatea de lungime. Curba (Σ) se zice *indicatoarea sferică* a tangentelor curbei (M). Curbele (M) şi (Σ) se corespund punct cu punct; astfel punctului M îi corespunde pe (Σ) punctul m, unde paralela la tangenta MT tae sfera. Când M descrie curba (M) în sensul pozitiv, punctul m descrie curba (Σ), într'un anumit sens pe care îl vom adopta ca sens pozitiv pe curba (Σ), astfel că arcele s şi σ ale acestor două curbe cresc în acelaş timp.

Se zice *curbura în punctul* M limita raportului

$$\frac{\text{arc}\, mm'}{\text{arc}\, MM'},$$

când M' se apropie indefinit de punctul M, adică

$$\frac{d\sigma}{ds}.$$

Se zice punct de inflexiune punctul curbei unde curbura este nulă.

Inversa curburei, adică

$$\frac{ds}{d\sigma}$$

se zice *raza de curbură* în M şi se notează cu R.

53. **Normală principală. Centru de curbură. Cerc de curbură.** Curba (M) admite o infinitate de normale, toate situate în planul perpendicular în M pe tangente MT şi care se zice *planul normal* în M la curba (M). Să considerăm acea normală care este paralelă cu tangenta *mt* la indicatoarea sferică în *m* (Fig. 88). Această normală se zice *normala principală*. Vom lua ca sens pozitiv pe această normală MN, sensul tangentei *mt*. Să ducem prin M o paralelă cu tangenta M′T′ şi să luăm pe această dreaptă şi pe tangenta MT două lungimi egale, MT″=MT. Direcţia limitei lui TT″ va fi precis aceea a normalei principale. Aceasta este dirijată deci către concavitatea curbei, adică de aceeaş parte ca şi punctul M′ în raport cu planul dus prin MT perpendicular pe MN. Acest plan se zice *plan rectifiant*.

Să luăm pe normala principală, în sensul pozitiv, un segment MC egal cu lungimea R a razei de curbură. C se zice *centru de curbură*, iar cercul cu centrul în C şi cu raza R se zice *cerc de curbură*.

54. **Plan osculator.** Planul dus prin tangenta MT şi normala principală MN se zice *planul osculator* în M. Acest plan se bucură de mai multe proprietăţi.

1° Planul osculator fiind limita planului MTT″ (Fig. 88) se vede, deci, că *acest plan este limita planului dus prin tangenta* MT *şi paralel cu tangenta infinit vecină* M′T′.

2° Fie A, B, C trei puncte infinit vecine ale curbei (M) situate în planul (P), arcul AB fiind deasupra planului (P), iar arcul BC dedesubt (Fig. 89). Să presupunem că punctele A, B, C sunt puncte ordinare şi că nu sunt puncte de inflexiune sau singulare pe arcele AB, BC. Să considerăm punctele A′ al arcului AB, B′ al arcului BC, cel mai deasupra şi cel mai de jos faţă de planul (P). Ducând în indicatoare punctele *a*′, *b*′ corespunzătoare tangentelor în A′ şi B′, care sunt paralele cu planul (P), urmează că planul O*a*′*b*′, paralel cu tangentele în A′ şi B′, este paralel cu planul P.

Să presupunem că punctele A, B, C variază şi se apropie nemărginit de un acelaş punct limită M. Atunci punctele a', b'

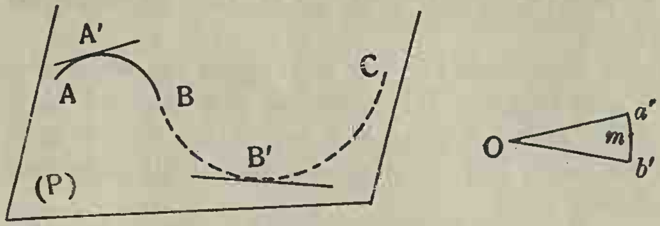

Fig. 89.

vor avea ca limită comună punctul m corespunzător lui M. Dar, la limită, planul $Oa'b'$ tinde către planul care este paralel cu planul osculator în M. Deci, planul (P), care trece prin punctele A, B, C, tinde către planul osculator în M, când punctele A, B, C, infinit vecine, tind către punctul M.

Aşa dar, *dacă trei puncte infinit vecine au ca limită un punct* M, *care nu este nici singular şi nici punct de inflexiune, planul acestor trei puncte are ca limită planul osculator în* M.

De aci rezultă că *curba traversează planul osculator* în M, căci între partea care precede şi aceea care urmează acestui plan osculator, curba are trei puncte confundate în M comune cu planul şi altele nu mai poate avea.

3⁰ Demonstraţia precedentă subsistă când două puncte A şi B se confundă în A; planul acestor trei puncte A, B, C e determinat atunci de punctul C şi tangenta în A. Deci, *planul osculator este limita planului ce trece prin tangenta într'un punct şi prin punctul infinit vecin.*

4⁰ Să ducem prin tangenta MT în M la curba (M) un plan (II) (Fig. 90) şi fie M′ un punct infinit vecin de M, E piciorul perpendicularei din M′ pe planul (II), F proecţia lui M′ pe tangenta MT. Unghiul M′FE este unghiul plan corespunzător diedrului format de planele (II) şi M′MF. Avem

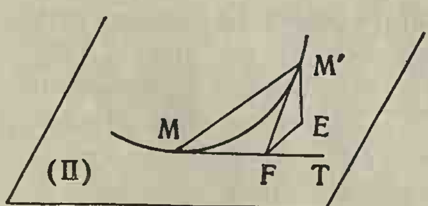

Fig. 90.

$$M'E = M'F \sin M'FE = MM' \sin M'MF \sin M'FE.$$

Dar, MM′ şi $\sin M'MF$ sunt infiniţi mici de ordinul întâi când se ia arcul MM′ ca infinit mic principal. De asemenea, câtă vreme planul (II) nu trece prin punctul M′ (nu se confundă cu planul M'MF), unghiul M'FE este diferit de zero şi sinM'FE tinde către o limită finită. Aşa fiind, distanţa M'E la planul (II) de la un punct M' infinit vecin de M, este infinit mic de ordinul al doilea.

Când, însă, sinM'FE este şi el infinit mic, adică planul (II), ce trece prin tangenta MT, trece şi prin punctul M' infinit vecin de M, atunci distanţa M'E este infinit mic de ordinul al treilea, cel puţin. Dar, în acest caz, planul (II) tinde către planul osculator în M.

Deci, *dintre toate planele ce trec prin tangenta* MT, *planul osculator este acela care se apropie mai mult de curbă în* M *de cât orice alt plan.* De aceea i se zice plan osculator, căci are cu curba un contact de ordinul al doilea, are trei puncte confundate cu curba în M, tocmai câte trebue pentru a determina un plan.

5^0 Planul tangent la conul (S) dealungul generatoarei O*m* (Fig. 88) este definit de O*m* şi tangenta *mt* şi cum O*m* şi *mt* sunt respectiv paralele cu tangenta MT şi normala principală MN, urmează că planul tangent la con dealungul generatoarei O*m* este paralel cu planul osculator în M la curba (M).

Dar, două plane tangente infinit vecine de O*m* la conul (S) se tae la limită dealungul generatoarei O*m*; deci şi două plane osculatoare infinit vecine de M se vor tăia la limită după o dreaptă paralelă cu O*m*, adică după tangenta MT. Rezultă că *două plane osculatoare infinit vecine de punctul* M *al curbei* (M) *se tae la limită după tangenta* în M. Ştiind că intersecţia a două poziţii infinit vecine a două suprafeţe variabile se zice *caracteristică*, urmează că *caracteristica planului osculator în* M *este tangenta în acel punct.*

55. **Dreaptă polară. Suprafaţă polară.** Să proectăm curba strâmbă (M) pe planul TMT'' (Fig. 91). Unghiul de contingentă TMT'' (a două tangente infinit vecine) este echivalent cu acela al proecţiunii. Acest unghi este dealtminterlea egal cu unghiul planelor normale în M şi M'. Coarda MM' este echivalentă cu proecţia ei, fiindcă face cu planul variabil TMT'' un unghi infinit mic. Urmează de aci că curburile curbei şi proecţii sale, în punctul comun M, sunt egale şi deci curba (M) şi proecţia sa au acelaş centru de curbură

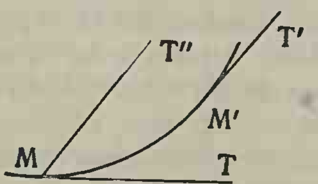

Fig. 91.

Dar centrul de curbură c al proecţii este în planul TMT″ la intersecţia normalelor la curba proectată în proecţiile punctelor M şi M′. Aceste normale se găsesc în planele normale la curba (M) în M şi M′ şi deci punctul c este la intersecţia planului TMT″ cu dreapta de intersecţie a planelor normale în M şi M′ la curba (M). Dar TMT″ tinde către planul osculator în M. Deci, *centrul de curbură* C *al curbei în* M *este limita intersecţii planului osculator cu dreapta de intersecţie a planelor normale în* M *şi în punctul infinit vecin cu* M.

Dar, intersecţia planului normal în M şi a celui infinit vecin cu el este *caracteristica planului normal* în M. Se zice *dreaptă polară* caracteristica planului normal. Deci, *dreapta polară este perpendiculară în centrul de curbură pe planul osculator.* Locul dreptelor polare pentru o curbă se zice *suprafaţă polară.*

56. **Cerc osculator.** Am văzut că planul osculator în M este limita planului (P) ce trece prin punctul M şi două puncte M′, M″ infinit vecine de M. Să proectăm curba (M) pe planul (P) format de punctele M′, M, M″. Cercul circumscris triunghiului M′MM″ coincide cu proecţia sa pe planul (P) şi la limită tinde către cercul de curbură al curbei proectate (care este o curbă plană) pe planul osculator. Dar, am văzut mai sus că, dacă se proectează o curbă (M) pe planul TMT″, care are aceeaş limită ca şi (P), curba şi proecţia au la limită acelaş centru de curbură în M (acelaş cerc de curbură). Deci, *cercul de curbură al curbei în* M, *coincide cu limita către care tinde cercul ce trece prin punctul* M *şi două puncte* M′ *şi* M″ *infinit vecine de* M.

Cercul de curbură în M se zice şi *cercul osculator în* M, căci are cu curba trei puncte confundate în M, are, cum se mai zice, în acest punct, un contact de ordinul al doilea.

Cercul de curbură (osculator) se află în planul osculator, iar centrul său este la intersecţia planului osculator cu caracteristica planului normal în M.

Este evident că, în orice chestiune, unde vor interveni trei puncte infinit vecine, se va înlocui curba cu cercul său osculator.

57. **Binormală. Torsiune.** Se zice *binormală* perpendiculara MB în M pe planul osculator (Fig. 92). Binormala este deci paralelă cu limita perpendicularei comune la tangentele MT şi M′T′, de unde şi numele de binormală.

Această dreaptă este paralelă cu dreapta polară Δ, limita intersecţii planelor normale în M şi M'.

Pe sfera, pe care am figurat indicatoarea (Σ) a tangentelor, să figurăm o indicatoare analoagă a binormalelor. Pentru aceasta,

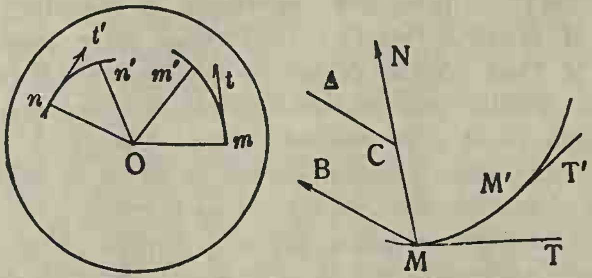

Fig. 92.

vom lua ca sens pozitiv pe binormala MB, acela pentru care triedrul tridreptunghic, cu muchile, tangenta MT, normala principală MN, binormala MB, să aibă acelaş sens cu un triedru direct Oxyz. Se ştie că triedrul Oxyz este direct, când un observator, aşezat dealungul lui Oz, cu picioarele în O, şi capul spre z, privind Ox şi Oy, ar trebui să învârtească în sens direct (invers ca àcele unui ceasornic) axa Ox ca să o aştearnă peste Oy.

Triedrul format de tangenta MT, normala principală MN binormala MB, în sensul indicat, este *triedrul principal* în M.

Să ducem prin centrul O al sferii o rază paralelă cu MB şi fie n punctul unde înţeapă sfera (Fig. 92). Când punctul M descrie curba (M), punctul n descrie curba (θ), indicatoarea binormalelor. Fie nt' tangenta în n la această curbă şi mt tangenta la indicatoarea tangentelor.

Să considerăm conul (S_1) cu vârful O şi directoarea curba (θ). Generatoarea On a acestui con este perpendiculară pe Om şi mt, adică pe planul tangent dealungul lui Om la conul (S) cu vârful O şi directoarea curba (Σ). Deci, conul (S_1) este suplimentar cu conul (S) şi este reciprocitate, adică, generatoarea Om este perpendiculară pe planul tangent la conul (S_1) dealungul lui On, adică dreapta Om este perpendiculară pe dreptele On şi nt' şi cum nt' este tangentă la o curbă trasă pe sferă, e perpendiculară pe raza On. Deci, nt' este perpendiculară pe On şi Om, adică pe planul mOn. De asemenea, mt este perpendiculară pe Om şi On, deci pe planul mOn. *Tangentele mt şi nt' la indicatoarea tangentelor şi binormalelor în punctele cores-*

punzătoare m și n, fiind perpendiculare pe planul mOn, sunt paralele între ele.

Aceste două indicatoare au tangentele mt și nt' de acelaș sens sau de sens contrar, după cum s'a luat pe binormala MB sensul pozitiv sau negativ. Vom lua ca sens pozitiv pe indicatoarea (θ), acela în care se deplasează punctul n când M descrie curba (M) în sensul pozitiv; în rezumat, arcele MM', mm', nn' sunt câte trele de acelaș sens.

Arcul infinit mic nn' este echivalent cu unghiul binormalelor, sau cu unghiul planelor osculatoare în M și M'. Acest unghi se zice *unghiul de torsiune* și-l vom nota cu $d\tau$. Unghiul de torsiune dă o idee de cantitatea cu care curba, în vecinătatea lui M, se depărtează de forma plană, după cum unghiul tangentelor (de contingență) măsoară cantitatea cu care se depărtează de forma rectilinie.

Raportul $\frac{ds}{d\tau} = \text{T}$ se zice *raza de torsiune* în punctul M și este o cantitate pozitivă.

Torsiunea este o cantitate algebrică, a cărei valoare absolută este inversa razei de torsiune, egală cu $\frac{1}{\text{T}}$, și al cărei semn este determinat de dispoziția ce o are curba față de planul său osculator. Pe când în cazul curburei, $\frac{1}{\text{R}}$, n'aveam nevoe să ținem seamă de sens, căci curba în vecinătatea lui M era toată așezată de aceeaș parte a planului rectifiant (dus prin tangentă perpendicular pe normala principală), în cazul torsiunei se schimbă, căci planul osculator traversează curba și poate fi așezată în raport cu acest plan în două feluri deosebite.

Planul osculator desparte spațiul în două regiuni. Să ne închipuim un observator așezat în picioare pe acest plan, cu picioarele în M, privind spre centrul de curbură. După cum punctele curbei, vecine de M, din aceeaș regiune cu observatorul, sunt așezate la dreapta sau la stânga sa, vom zice că dispoziția curbei este *dextrorsum* sau *sinistrorsum*. Dispoziția rămâne aceeaș dacă trecem de la una la alta din cele două regiuni separate de planul osculator.

Așa fiind, vom lua pentru măsura torsiunei $-\frac{1}{\text{T}}$ în primul caz și $+\frac{1}{\text{T}}$ în cazul al doilea; $\frac{1}{\text{T}}$ fiind egală cu $\frac{d\tau}{ds}$ este esențialmente pozitivă.

Este de observat că, cele două dispoziţii pe care le-am definit, corespund celor două orientări distincte ale triedrului format de tangenta, normala principală şi binormala şi că $-\frac{1}{T}$ corespunde sensului direct ce am luat mai sus pe binormala MB.

Observare. Să presupunem că torsiunea este nulă dealungul curbei (M). Indicatoarea binormalelor se reduce atunci la un punct n şi indicatoarea tangentelor la un cerc mare tras pe sferă cu centrul O şi având punctul n ca pol. Tangenta MT este deci paralelă cu un plan fix (P). Distanţa sa la acest plan, când trecem dela punctul M la punctul infinit vecin M′, creşte cu un infinit mic, care rămâne constant de ordinul al doilea, cel puţin. Această distanţă rămâne deci constantă şi curba este necesar plană. Torsiunea la o curbă strâmbă se anulează deci numai pentru anumite puncte particulare; de aceea se mai zice linie cu dublă curbură la o curbă care nu e plană.

Se zice punct de a *doua inflexiune* unui punct al unei curbe strâmbe unde torsiunea este nulă.

58. **Relaţiunile dintre cele două indicatoare.** Indicatoarea tangentelor (Σ) şi aceea a binormalelor (Θ) (Fig. 93) sunt

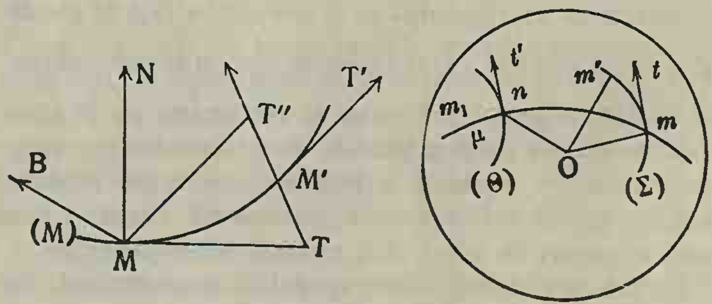

Fig. 93.

două curbe sferice suplimentare, adică On este perpendiculară pe planul tangent în m la conul cu vârful O şi directoarea (Σ), după cum Om este perpendiculară pe planul tangent în n la conul cu vârful O şi directoarea (Θ). Ele au aceeaş desfăşurată sferică, căci cercul mare $m\mu$ (Fig. 93), normal la curba (Σ) în m, este normal şi la curba (Θ) în n, tangentele în m şi n la aceste curbe fiind paralele. Planul cercului mare mn este paralel cu planul rectifiant dus prin tangenta MT şi binormala MB; deci cercul mare mn reprezintă sferic planul rectifiant al curbei (M). Polul de curbură m_1 [limita intersecţii a două cercuri mari normale în două puncte infinit vecine de m pe curba (Σ)] este deci reprezentarea sferică a caracteristicei planului rectifiant. Raza de curbură sferică, egală cu arcul m_1m, măsoară (No. 50) înclinarea φ a acestei caracteristice pe tangenta MT. Aşa fiind, unghiurile de contingenţă şi de torsiune în punctul M, $d\sigma$, şi $d\tau$, sunt măsurate respectiv cu arcul mm' al indicatoarei (Σ) şi prin unghiul de contingenţă sferică al arcului mm'.

Dar, am văzut (No. 50) că curbura sferică a curbei (Σ) în punctul m este limita raportului

$$\frac{\text{ungh. conting. a arc } mm'}{\text{arc } mm'}.$$

Deci, acest raport este egal cu

$$\frac{d\tau}{d\sigma}. \tag{12}$$

Dar, tot curbura sferică în m este dată de formula (No. 50) (11),

$$\frac{\text{cotg}\varphi}{\text{R}},$$

care, în cazul nostru, este

$$\text{cotg}\varphi. \tag{13}$$

Egalând expresiunile (12) şi (13), care reprezintă curbura sferică în m, avem

$$\text{cotg}\varphi = \frac{d\tau}{d\sigma},$$

de unde

$$\text{tg}\varphi = \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\text{T}}{\text{R}}. \tag{14}$$

Să observăm, de asemenea, că unghiul θ din formulele (8) şi (9) (No. 50) devine, când se aplică aceste formule la indicatoarele (Σ) şi (Θ), unghiul $d\omega$ a două normale principale infinit vecine. Aceste formule se pot scrie deci

$$d\tau = d\omega \cos\varphi, \qquad d\sigma = d\omega \sin\varphi \tag{15}$$

şi deci, între unghiurile infinit mici, $d\sigma$, $d\tau$, $d\omega$, avem relaţia

$$d\omega^2 = d\sigma^2 + d\tau^2. \tag{16}$$

59. **Sferă osculatoare.** Prin punctul M al unei curbe (M) şi prin alte trei puncte M′, M″, M‴, infinit vecine de M, se poate face să treacă o sferă şi numai una. Această sferă (S) variabilă, când ultimele trei puncte se apropie indefinit de pri-

mul, tinde către o poziţie limită şi devine ceea ce se zice *sfera osculatoare* în M. Această sferă osculatoare conţine evident cercul osculator, centrul său este situat pe dreapta polară şi deci, pentru a cunoaşte această sferă, e destul a şti, în mărime şi în semn, distanţa centrului său la centrul de curbură.

Pentru a determina această distanţă, să considerăm un poligon sferic variabil, cu vârfurile în punctele M, M′, M″, M‴; acest poligon este în întregime aşezat pe sfera variabilă (S) şi va tinde către o curbă limită (M_1) situată pe sfera osculatoare. Curba (M_1) şi curba (M) vor putea evident să fie substituite una alteia, dacă nu trebue a considera de cât infiniţi mici de ordinul al treilea cel mult. Fie atunci Δ dreapta polară (Fig. 94), caracteristica planului normal în M, adică intersecţia planului normal în M cu planul normal în punctul infinit vecin de M. Centrul C_1 al sferei osculatoare în M este pe dreapta Δ, iar proecţia C a lui M pe Δ este centrul de curbură în M la curba (M) (centrul cercului osculator în M) Să însemnăm cu R raza de curbură CM (raza cercului osculator) şi cu $C_1M = r$ raza sferei osculatoare.

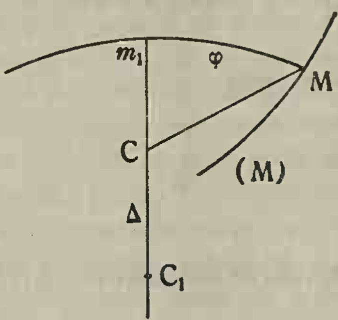

Fig. 94.

Să considerăm pe sfera osculatoare curba (M_1), cercul mare normal în M la curba (M_1) şi cercul mare normal la aceeaş curbă în punctul infinit vecin de M. Planele acestor cercuri normale sunt planele normale în M şi punctul infinit vecin, aşa că punctul m_1 de intersecţie a acestor cercuri normale este pe dreapta polară Δ. Punctul m_1 pentru curba sferică (M_1) trasă pe sfera osculatoare, este polul de curbură în M la această curbă, iar arcul de cerc mare $m_1M = \varphi$ este raza de curbură sferică a curbei (M_1) în M.

Pentru a calcula raza sferei osculatoare, să considerăm triunghiul dreptunghic CC_1M (unghiul drept în C), în care avem

$$CM = C_1M \sin CC_1M, \quad R = r \sin\varphi.$$

Raza r a sferei osculatoare este constantă faţă de variaţia arcului φ a cercului mare normal la curba (M_1) trasă pe sfera osculatoare. Deci, diferenţiind, avem

$$dR = r \cos\varphi d\varphi.$$

Dar, din acelaş triunghi dreptunghic CC_1M, avem

$$C_1C = C_1M \cos\varphi = r\cos\varphi,$$

astfel că relaţia precedentă devine

$$dR = C_1C\, d\varphi. \tag{17}$$

Însă $d\varphi$ este variaţia arcului de cerc mare normal la curba sferică (M_1), este diferenţa dintre razele de curbură sferică ale curbei (M_1), în punctul M şi punctul infinit vecin de M, şi cum m_1 este punctul desfăşuratei sferice corespunzător punctului M al curbei sferice (M_1), după proprietăţile desfăşuratelor, urmează că variaţia razei de curbură sferică este egală cu variaţia arcului de desfăşurată. Deci, $d\varphi = d(m_1)$, înţelegând prin (m_1) curba descrisă pe sfera osculatoare de punctul m_1.

Dar, C_1m_1 este dreapta polară în M, este paralelă cu binormala în M, deci $d(m_1)$ reprezintă arcul de curbă sferică (m_1) care măsoară pe sferă unghiul a două binormale infinit vecine. Însă, acest unghi ştim că este unghiul de torsiune în M, adică $\frac{ds}{T}$, deci

$$d\varphi = \frac{ds}{T},$$

iar formula (17) devine

$$dR = C_1C\, \frac{ds}{T},$$

sau

$$CC_1 = -T\frac{dR}{ds},$$

T fiind raza de torsiune.

Acestea fiind stabilite, din triunghiul dreptunghic CC_1M, avem

$$\overline{C_1M}^2 = \overline{C_1C}^2 + \overline{CM}^2 = \left(T\frac{dR}{ds}\right)^2 + R^2,$$

deci raza r a sferei osculatoare în M la curba (M) este dată de

$$r^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2. \tag{18}$$

Observare. Din formulele stabilite, se vede că curba (M) şi curba sferică (M_1) au, în punctul M, aceeaş curbură, aceeaş torsiune şi aceeaş derivată a curburei în raport cu arcul s al curbei (M).

60. **Formulele lui Frenet—Serret.** Consideraţia indica-

toarelor sferice ne permite să stabilim formulele fundamentale în teoria curbelor strâmbe, care dau variaţia cosinusurilor directoare (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ ale tangentei, normalei principale şi binormalei, muchile triedrului principal.

Pentru aceasta, să ducem prin centrul O al axelor de coordonate rectangulare $Oxyz$, paralele cu tangenta, normala principală şi binormala, şi fie m, p, n intersecţiile acestora cu o sferă cu centrul O şi raza unitatea. Punctul m descrie indicatoarea tangentelor, iar n indicatoarea binormalelor.

Fie m' şi n' punctele infinit vecine de m şi n pe indicatoare, corespunzătoare punctului M' infinit vecin de M pe curba (M). Se ştie că tangentele în m şi n la indicatoarele respective sunt paralele cu normala principală, adică cu Op. Dreptele mm' şi nn' tind, la limită, către tangentele în m şi n la indicatoarele respective, deci sunt, la limită, paralele cu Op. Dar, arcele $mm'=d\sigma$, $nn'=d\tau$ şi sunt deci egale cu

$$\frac{ds}{R}, \quad \frac{ds}{T}.$$

Însă, afară de infiniţi mici de ordinul al treilea, aceste arce sunt egale cu coardele mm', nn'.

Aşa fiind, să observăm că coordonatele punctelor m şi n sunt (α, β, γ), $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, iar ale punctelor m' şi n' sunt $(\alpha+d\alpha, \beta+d\beta, \gamma+d\gamma)$, $(\alpha''+d\alpha'', \beta''+d\beta'', \gamma''+d\gamma'')$. Deci, $d\alpha, d\beta, d\gamma$ sunt proecţiile pe cele trei axe ale segmentului mm', iar $d\alpha'', d\beta'', d\gamma''$, proecţiile pe aceleaşi axe ale segmentului nn'.

Proectând pe mm' pe Ox, avem

$$d\alpha = mm' \cos(Ox, mm') = \frac{ds}{R}\alpha', \quad d\alpha = \frac{ds}{R}\alpha',$$

de unde

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}. \tag{19}$$

Proectând pe nn' pe Ox, avem

$$d\alpha'' = nn' \cos(Ox, nn') = \frac{ds}{T}\alpha', \quad d\alpha'' = \frac{ds}{T}\alpha',$$

de unde

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \quad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \quad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}. \tag{20}$$

Dar, avem

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$

. . . .

De unde

$$\alpha d\alpha + \alpha' d\alpha' + \alpha'' d\alpha'' = 0,$$

$$\alpha' d\alpha' = -\alpha d\alpha - \alpha'' d\alpha'',$$

şi ţinând seamă de (19) şi (20), urmează

$$\alpha' d\alpha' = -\alpha \frac{\alpha'}{R} ds - \alpha'' \frac{\alpha'}{T} ds$$

de unde

$$21) \quad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \quad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \quad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}.$$

Formulele (19), (20), (21) sunt formulele lui Serret-Frenet şi servesc a cunoaşte variaţia celor nouă cosinusuri directoare ale triedrului principal în funcţiune de aceste cosinusuri şi razele R şi T.

61. **Desfăşurătoarele unei curbe strâmbe.** Pe când normalele la o curbă plană sunt tangente la aceeaş curbă, desfăşurata acelei curbe, normalele principale nu sunt tangente la aceeaş curbă.

Se poate, însă, să se găsească, ca şi la curbele plane, desfăşurătoarele unei curbe strâmbe (M), adică curbele la care sunt normale toate tangentele curbei (M). Fie, în adevăr, A punctul unde tangenta în M întâlneşte una din desfăşurătoarele (A). Să aplicăm formula (6) de la No. 46, care dă variaţiunea unui segment rectiliniu. În cazul actual, segmentul este MA, unghiurile subt care acest segment tae curbele (M) şi (A), descrise de extremităţile sale, sunt 0 şi 90°; deci, această formulă devine

$$d(\mathrm{MA}) = d(\mathrm{M}),$$

şi integrând de la o poziţie M_0 oarecare, avem

$$\mathrm{MA} - \mathrm{M_0A_0} = \mathrm{arc MM_0}.$$

Pentru a găsi o desfăşurătoare a unei curbe (M), n'avem de cât să aplicăm dealungul curbei (M) un fir flexibil şi să fixăm unul din capetele firului pe curbă. Deslipind celalt capăt al firului de curba (M) şi ţinându-l întins, extremitatea firului descrie o desfăşurătoare a curbei (M).

Mai urmează de aci că segmentul determinat pe toate tangentele la (M) de două desfăşurătoare ale acestei curbe este constant.

62. **Studiul unei curbe în vecinătatea unui punct.** Fie MT, M'T' tangentele la extremităţile unui arc infinit mic MM'

al curbei (M). Să proectăm figura pe un plan variabil (P), paralel cu aceste două tangente. Punctul de întâlnire al tangentelor la curba proectată (M_1), în M_1 şi M'_1, este piciorul perpendicularei comunei la MT şi M'T' (Fig. 95). Curbura totală a arcului MM' este egală cu curbura totală a proecţiunii $M_1M'_1$; unghiurile şi segmentele rectilinii sunt de altfel echivalente cu proecţiile lor, din punct de vedere infinitezimal, şi proprietăţile demonstrate pentru curbele plane, pentru un punct ordinar (No. 9), se extind şi la curbele strâmbe şi anume:

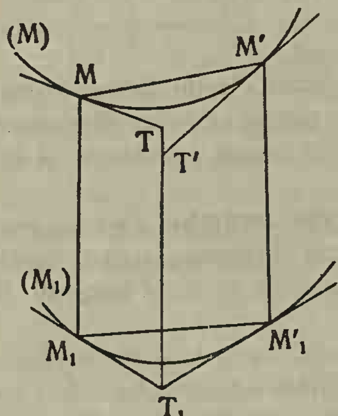

Fig. 95.

1⁰ *Segmentele tangentelor la extremităţile unui arc infinit mic, limitate la perpendiculara comună la aceste tangente, sunt infiniţi mici echivalenţi.*

2⁰ *Unghiul format de coarda unui arc infinit mic şi tangenta la una din extremităţile sale este echivalent cu jumătatea unghiului de contingenţă.*

3⁰ *Unghiul înscris într'un arc infinit mic este echivalent cu suplimentul jumătăţii curburei totale a acestui arc.*

4⁰ Deci, cercul osculator în M va putea fi substituit curbei însăşi, dacă nu se consideră decât relaţiuni dintre trei puncte infinit vecine. Se poate, ca şi în cazul curbelor plane, să se arate că *diferenţa dintre un arc şi coarda sa are ca parte principală* $\frac{ds^3}{24R^2}$.

5⁰ *Distanţa de la planul osculator la punctul infinit vecin.* Să luăm acum ca plan de proecţie (P), un plan perpendicular pe tangenta MT (Fig. 96). Fie $M_1M'_1$ proecţia arcului MM'. Cele două arce M''M, MM', care pornesc din punctul M, fiind situate de aceeaş parte a planului rectifiant şi de o parte şi de alta a planului osculator, punctul M_1 este un punct de întoarcere al curbei (M_1). Curba (M_1) are deci două ramuri tangente

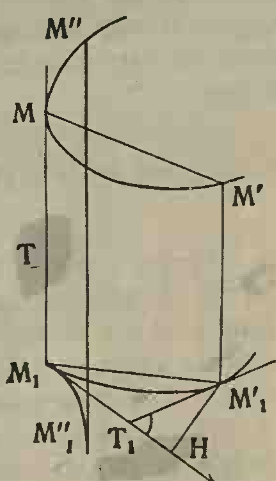

Fig. 96.

în M_1 la dreapta M_1T_1, urma planului osculator pe planul de proecție. Ordinul de contact al fiecărei ramuri cu tangenta comună M_1T_1 este $\frac{1}{2}$, adică

$$M'_1H = \lambda \overline{M_1H}^{\frac{1}{2}+1},$$

λ fiind o funcțiune de M_1H care nu se anulează când $M_1H \to 0$.

Dar, unghiul de contingență M'_1T_1H este diferențiala unghiului ce tangenta în M_1 face cu o direcție fixă. Deci

$$\operatorname{tg}HM_1M'_1 = \frac{M'_1H}{M_1H}, \quad \operatorname{tg}HM_1M'_1 = \lambda \overline{M_1H}^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg}HT_1M'_1 = \frac{d(M'_1H)}{d(M_1H)} = \lambda\left(\frac{1}{2}+1\right)\overline{M_1H}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\operatorname{tg}HM_1M'_1.$$

Considerând numai părțile principale, avem, din punct de vedere infinitezimal,

$$\sphericalangle HM_1M'_1 = \frac{2}{3}\sphericalangle HT_1M'_1.$$

Dar, unghiul M'_1T_1H este unghiul plan corespunzător diedrului format de planele MM_1T_1, planul osculator în M, cu planul dus prin tangenta în M' la curba (M) paralel cu tangenta MT în M.

Pe indicatoarea sferică (Fig. 97), acest unghi este egal cu unghiul planelor Omt și Omm', care, din punct de vedere infinitezimal, este egal cu unghiul coardei mm' cu tangenta mt, ce este echivalent cu jumătatea unghiului de contingență al indicatoarei sferice mm'. Dar acest unghi este tocmai unghiul de torsiune, așa că unghiul M'_1T_1H este echivalent cu jumătatea unghiului de torsiune, iar unghiul $HM_1M'_1$ este echivalent cu o treime din unghiul de torsiune, $\frac{d\tau}{3}$.

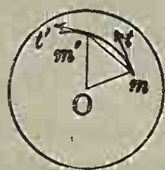

Fig. 97.

Acestea fiind stabilite, expresiunea distanței punctului M' la planul osculator în M este dată de

$$M'_1H = M_1M'_1 \sin M'_1M_1H = MM' \sin M'MT \sin M'_1M_1H.$$

Dar MM' este echivalent cu ds; $\sin M'MT$ cu unghiul format de coarda MM' cu tangenta la extremitatea M a arcului, deci echivalent cu jumătatea unghiului de contingență a arcului MM', adică $\frac{d\sigma}{2}$; $\sin M'_1M_1H$ echivalent cu unghiul M'_1M_1H, echivalent cu o treime din unghiul de torsiune, adică $\frac{d\tau}{3}$.

Deci, distanţa de la punctul M′ la planul osculator în punctul infinit vecin are ca parte principală

$$(22) \qquad \Delta = ds\frac{d\sigma}{2}\frac{d\tau}{3} = \frac{ds\,d\sigma\,d\tau}{6}.$$

Urmează că această distanţă este infinit mic de ordinul al treilea, deci schimbă semnul odată cu ds, aşa că într'un punct ordinar, planul osculator traversează curba, ceea ce ştiam.

Să proectăm acum curba pe planul rectifiant (dus prin tangentă, perpendicular pe planul osculator). Urma planului osculator pe planul rectifiant, adică tangenta MT, va fi tangentă la proecţia curbei. Dar, planul osculator având trei puncte confundate în M, în proecţie, curba va avea trei puncte confundate în M, aşa că în punctul M curba va avea un punct de inflexiune. Deci, proecţia curbei pe planul rectifiant are în punctul M o inflexiune.

6⁰ *Cea mai scurtă distanţă dintre două tangente infinit vecine.* Să considerăm tangentele MT şi M′T′ în două puncte infinit vecine. Să proectăm figura pe un plan perpendicular pe tangenta MT (Fig. 96). Planul dus prin tangenta M′T′ paralel cu MT este perpendicular pe planul de proecţie şi are urma $T_1M'_1$, tangentă la curba de proecţie. Perpendiculara comună la tangentele MT, M′T′ este egală cu distanţa de la punctul M_1 la dreapta $T_1M'_1$. Deci, însemnând cu δ cea mai scurtă distanţă a tangentelor, avem

$$(23) \qquad \delta = M_1M'_1 \sin M_1M'_1T_1 = MM' \sin M'MT \sin M_1M'_1T_1.$$

Dar, $HT_1M'_1$ este echivalent cu jumătatea unghiului de torsiune; $HM_1M'_1$ echivalent cu o treime din unghiul de torsiune şi observând că $HT_1M'_1$ este exterior triunghiului $T_1M_1M'_1$, avem

$$\sphericalangle M_1M'_1T_1 = \sphericalangle HT_1M'_1 - \sphericalangle HM_1M'_1 = \frac{d\tau}{2} - \frac{d\tau}{3} = \frac{d\tau}{6}.$$

Înlocuind în (23) pe MM′ cu echivalentul său ds, $\sin M'MT$ cu echivalentul său $\sphericalangle M'MT$, sau $\frac{d\sigma}{2}$, pe $\sin M_1M'_1T_1$ cu $\frac{d\tau}{6}$, urmează că partea principală a distanţei δ dintre două tangente infinit vecine, este

$$(24) \qquad \delta \backsim \frac{ds}{1}\frac{d\sigma}{2}\frac{d\tau}{6} = \frac{ds\,d\sigma\,d\tau}{12}.$$

Formulele (22) şi (24) se datoresc lui O. Bonnet.

63. Aplicații. Elicea. Înainte de a termina studiul curbelor strâmbe, să aplicăm cele stabilite pentru elice, una din curbele strâmbe cea mai întrebuințată.

Se zice *elice* curba trasă pe un cilindru, ale cărei tangente fac un unghi constant cu generatoarele cilindrului, sau, ale cărei tangente fac un unghi constant α cu secțiunile drepte ale cilindrului. Elicea se zice în acest caz de unghiul α (Fig. 98).

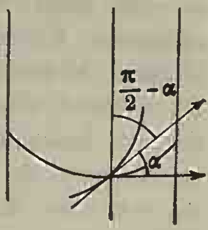

Fig. 98.

Dacă se desfăşoară pe un plan cilindrul pe care e trasă elicea, unghiurile se conservă, deci transformata elicei este o dreaptă tăind dreptele care sunt transformatele generatoarelor cilindrului subt unghiul $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Această proprietate fundamentală a elicei îi poate servi de definiție.

1° Fie G paralela la generatoarele cilindrului dusă prin centrul O al sferei cu raza 1 (Fig. 99). Tangenta la elice făcând un unghi constant cu G, paralelele duse prin centrul O al acestei sfere la aceste tangente, fac un unghi constant cu G şi deci formează un con de rotație. Acest con tae sfera după un cerc mic, astfel că indicatoarea (m) a tangentelor la elice este un cerc mic, al cărui plan este perpendicular pe G. Fie m punctul pe indicatoare corespunzător punctului M de pe elice.

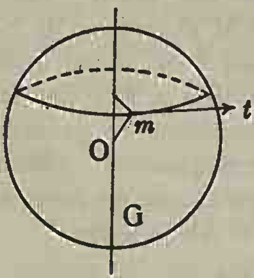

Fig. 99.

Tangenta în m la indicatoare este perpendiculară pe Om şi G, deci pe tangenta în M la elice (paralelă cu Om) şi generatoarea cilindrului ce trece prin M. Aşa dar, *normala principală la elice,* care e paralelă cu tangenta mt în m la indicatoare, *este perpendiculară pe direcția fixă a generatoarelor* sau *este paralelă cu un plan perpendicular la direcția generatoarelor.*

Planul tangent la cilindru în M fiind determinat de generatoarea ce trece prin M şi tangenta în M la elice, se vede că *normala principală la elice* este perpendiculară pe acest plan, deci *se confundă cu normala în* M *la cilindru.*

2° Binormala în M la elice fiind perpendiculară pe tangenta în M şi normala principală, este situată în planul tangent în M la cilindru şi fiind perpendiculară pe tangenta MT, face un unghi constant cu generatoarea ce trece prin M. Deci, *binormala la elice face un unghi constant cu direcția generatoarelor.*

Planul rectifiant la elice în M, format de tangentă și binormală, se confundă cu *planul tangent la cilindru în* M.

3⁰ Fie (M_1) secțiunea dreaptă a cilindrului, cu alte cuvinte. proecția elicei (M) pe un plan perpendicular pe direcția generatoarelor. Fie $M_1M'_1$ arcul care reprezintă proecția arcului MM' al elicei. M' fiind infinit vecin de M, coarda MM' face cu planul de secțiune unghiul α, ce-l face tangenta în M cu secțiunea dreaptă. Însemnând cu s și s_1 arcele socotite pe elice și proecția sa, începând de la două puncte A și A_1, avem $M_1M'_1 \backsim MM'\cos\alpha$, $ds_1 = ds\cos\alpha$, de unde, întegrând,

$$s_1 = s\cos\alpha. \tag{25}$$

Deci, *un arc oarecare al elicei este proporțional cu proecția sa pe un plan perpendicular pe direcția generatoarelor.*

4⁰ *Curbura și torsiunea elicei.* Să considerăm, în general, pe o curbă (M), triunghiul ABC format de trei puncte infinit vecine, având toate aceeaș limită punctul M al curbei (M). Să proectăm figura pe un plan ce face unghiul θ cu planul osculator în M și cu tangenta în M unghiul φ. Fie a, b, c unghiurile făcute de laturile triunghiului ABC cu planul de proecție, R și R_1 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și proecții sale. λ unghiul planului ABC cu planul de proecție. Însemnând cu $A_1B_1C_1$ proecția triunghiului ABC, avem

$$\text{aria}\,A_1B_1C_1 = \text{aria}\,ABC\cos\lambda.$$

Dar,

$$\text{aria } ABC = \frac{AB.BC.CA}{4R}, \quad \text{aria } A_1B_1C_1 = \frac{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1}{4R_1}.$$

Deci, relația precedentă devine

$$\frac{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1}{R_1} = \frac{AB.BC.CA}{R}\cos\lambda.$$

Dar $A_1B_1 = AB\cos c$, $B_1C_1 = BC\cos a$, $C_1A_1 = CA\cos b$; deci relația de mai sus devine

$$\frac{\cos\lambda}{R} = \frac{\cos a\cos b\cos c}{R_1}.$$

Trecând la limită, se vede că a, b, c au ca limită comună unghiul φ, iar λ tinde către unghiul θ; deci, însemnând cu R și R_1 razele de curbură în M la curba (M) și la proecția sa, avem relația generală

$$(26) \qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{\cos^3\varphi}{R_1}.$$

În cazul elicei de unghiul α, să luăm ca plan de proecţie planul secţiunei drepte. Planul osculator în M este format de tangenta în M şi de normala principală (care e normala la cilindru în M); acest plan face cu planul de proecţie unghiul α, deci în cazul nostru, $\lambda = \alpha$. Unghiul format de tangenta MT în M la elice cu planul de proecţie este tot α. Deci relaţia (26) devine

$$(27) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1},$$

de unde deducem *raza de curbură* R *la elice în* M, R_1 fiind raza de curbură a secţiunei drepte în M.

Pentru a afla valoarea *razei de torsiune*, să observăm că normalele principale în două puncte infinit vecine M şi M′ fiind paralele cu planul secţiunei drepte, unghiul lor $d\omega$ se proectează în adevărata mărime pe acest plan şi măsoară curbura totală a arcului $M_1M'_1$, proecţia arcului MM′.

Aplicând formula (16), No. 58,

$$d\omega^2 = d\sigma^2 + d\tau^2,$$

avem

$$\frac{ds_1^2}{R_1^2} = \frac{ds^2}{R^2} + \frac{ds^2}{T^2}, \quad \frac{ds_1^2}{R_1^2} = ds^2\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}\right).$$

Ţinând seamă de relaţiunile (25) şi (27), şi înlocuind pe ds şi R, avem

$$\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} = \frac{\cos^4\alpha}{R_1^2} + \frac{1}{T^2},$$

de unde

$$(28) \qquad \frac{1}{T} = \left|\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{R_1}\right|.$$

De aci urmează că *raza de curbură şi raza de torsiune a elicei în* M *sunt şi una şi alta proporţionale cu curbura secţiunei drepte;* apoi, *raportul dintre razele de curbură şi torsiunea în* M *la elice este constant,* egal cu $|tg\alpha|$.

5° Reciproc, să presupunem că raportul curburei către torsiune are o valoare constantă dealungul unei curbe (M). Dar, am văzut [No. 58, formula (14)] că raza de curbură sferică a indicatoarei tangentelor este dată de raportul dintre razele de curbură R şi torsiune T; deci este constantă. Însă, raza de curbură sferică fiind constantă, urmează (No. 50) că această indicatoare a tangentelor este un cerc şi deci curba (M) este o elice. De aci rezultă următoarea proprietate datorită lui Bertrand, anume, *orice curbă a cărei curbură şi torsiune sunt într'un raport constant este elice.*

6⁰ *Raza r a sferei osculatoare* e dată de (No. 59)

$$r^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2. \tag{29}$$

Dar

$$R = \frac{R_1}{\cos^2\alpha},$$

deci

$$\frac{dR}{ds} = \frac{dR_1}{ds}\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{dR_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Însă, din (25), $ds_1 = ds\cos\alpha$; deci

$$\frac{dR}{ds} = \frac{dR_1}{ds_1}\frac{1}{\cos\alpha}. \tag{30}$$

Fie μ_1 centrul de curbură al curbei (M_1) proecţia curbei (M); avem $R_1 = M_1\mu_1$, iar curba (μ_1) este desfăşurata curbei (M_1). Unghiul de contingenţă în μ_1 la curba (μ_1) este acelaş ca unghiul de contingenţă $d\omega_1$ în M_1 la curba (M_1), căci tangentele în M_1' şi μ_1 sunt perpendiculare. Deci, însemnând cu R_2 raza de curbură în μ_1 la curba (μ_1), avem

$$R_2 = \frac{d(\mu_1)}{d\omega_1},$$

şi cum, după proprietatea desfăşuratelor, $dR_1 = d(\mu_1)$, avem

$$R_2 = \frac{dR_1}{d\omega_1}.$$

De asemenea,

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\omega_1}.$$

Deci

$$\frac{dR_1}{ds_1} = \frac{dR_1}{d\omega_1}\frac{1}{\frac{ds_1}{d\omega_1}} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Formula (30) devine

$$\frac{dR}{ds} = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\cos\alpha},$$

iar, din (29), avem

$$r^2 = R^2 + T^2 \frac{R_2^2}{R_1^2 \cos^2\alpha}.$$

Inlocuind pe R şi T cu valorile lor, (27), (28),

$$R = \frac{R_1}{\cos^2\alpha}, \quad T = \frac{R_1}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

avem

$$r^2 = \frac{R_1^2}{\cos^4\alpha} + \frac{R_1^2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \frac{R_2^2}{R_1^2\cos^2\alpha},$$

(31) $$r^2 = \frac{1}{\cos^4\alpha}\left(R_1^2 + \frac{R_2^2}{\sin^2\alpha}\right).$$

Avem deci expresia razei sferei osculatoare în funcţiune de raza de curbură R_1 a secţiunei drepte şi a razei de curbură R_2 a desfăşuratei acestei secţiuni drepte.

7⁰ *Elicea circulară*. Când cilindrul pe care e trasă elicea este de rotaţie, elicea se zice circulară. În acest caz, secţiunea dreaptă este un cerc cu centrul O pe axa cilindrului; *normala principală a elicei* este îndreptată după normala la acest cerc, deci *întâlneşte axa cilindrului*.

Reciproc, dacă normalele principale la o curbă strâmbă întâlnesc toate, subt un unghi drept, o dreaptă fixă, curba este o elice circulară.

În acest caz, raza de curbură a secţiunei drepte este constantă şi egală cu raza cilindrului. Deci, *razele de curbură şi torsiune ale elicei circulare sunt constante.*

Reciproc, dacă curbura şi torsiunea unei curbe cu dublă curbură sunt constante, raportul lor este constant, curba este elice. Dar, din (27), rezultă că R_1 este constant, deci secţiunea dreaptă are raza de curbură constantă, este un cerc, elicea este trasă pe un cilindru de rotaţie. De unde rezultă proprietatea lui Puiseux, *orice curbă cu dublă curbură, ale cărei curbură şi torsiune sunt constante, este o elice circulară.*

În cazul elicei circulare, secţiunea dreaptă este un cerc, desfăşurata secţiunei drepte este centrul acestui cerc, iar raza de curbură R_2 a acestei desfăşurate este zero. Deci formula (31) devine

$$r^2 = \frac{R_1^2}{\cos^4\alpha}, \quad r = \frac{R_1}{\cos^2\alpha},$$

ceea ce probează că raza r a sferei osculatoare în M la elice este egală cu raza R a cercului osculator în M. Deci, *la elicea circulară, centrul sferei osculatoare coincide cu centrul cercului osculator.*

Elicea circulară se bucură încă de o proprietate interesantă. Însemnând cu M_0 un punct al elicei așezat pe generatoarea de origină a cilindrului de rotație (Fig. 100) și cu M un punct oarecare al elicei, fie m intersecția cercului de secțiune dreaptă ce trece prin M_0 cu generatoarea lui M. Să notăm cu ω unghiul M_0Om. Tăind cilindrul dealungul generatoarei lui M_0 și desfășurându-l pe un plan, arcul M_0M devine o dreaptă M_0M' (Fig. 101) ce face unghiul α cu dreapta ce reprezintă desfășurarea secțiunei drepte. Arcul M_0m se transformă în dreapta M_0m', astfel că

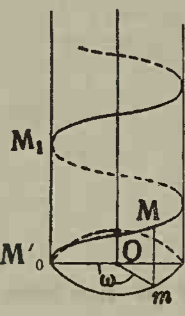

Fig. 100.

$$M_0m' = \text{arc}\, M_0M = r\omega,$$

r fiind raza cilindrului (cercului de secțiune dreaptă). De asemenea (Fig. 100), (Fig. 101),

$$Mm = M'm' = M_0M'\text{tg}\alpha = r\omega\text{tg}\alpha = h\omega, \quad h = r\text{tg}\alpha,$$

h zicându-se pasul redus al elicei.

Deci, se obține un punct al elicei, rotind raza OM_0 a cercului secțiunei drepte de un unghi ω, până ajunge în poziția Om, apoi dând o translație punctului m, paralelă cu axa cilindrului, egală cu $h\omega$ (proporțională cu unghiul ω).

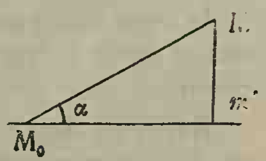

Fig. 101.

Această proprietate fundamentală poate servi ca definiție a elicei circulare, iar mișcarea, în felul descris, a punctului M pe elice, se zice *mișcare elicoidală.*

Presupunând că m a făcut ocolul complect pe cercul O, punctul M ajunge în M_1 pe generatoarea lui M_0 (Fig. 100), astfel că $\omega = 2\pi$ și deci

$$M_0M_1 = r.\ 2\pi.\text{tg}\alpha = \text{H};$$

H se zice *pasul elicei*. Se vede că pasul redus este egal cu

$$h = r\text{tg}\alpha = \frac{\text{H}}{2\pi}.$$

64. **Ordinul de contact a două curbe strâmbe.** Se zice că doău linii cu dublă curbură (C) și (C_1) au, în punctul dat

M, un contact de ordinul n, când, făcând să varieze infinit de puţin curba (C_1), de ex., se poate face ca ele să aibă, afară de punctul M, n alte puncte comune M_1, M_2,... M_n, infinit vecine de M. Pentru aceasta, trebue ca curbele (C_1) şi (C) să îndeplinească în punctul M anumite condiţii pe care le vom determina. Fie (C'_1) curba care rezultă din deformarea lui (C_1); să presupunem că (C'_1) revine, după o deformare egală şi contrară, să coincidă cu (C_1). Atunci punctele M_1, M_2,... M_n se vor deplasa pe curba (C), apropiindu-se indefinit de M. Dacă $n=1$, secanta MM_1 devine, la limită, tangenta comună curbelor (C) şi (C_1); cele două linii date (C) şi (C_1) trebue să fie tangente în M, care este condiţia *contactului de ordinul întâi.*

Pentru $n=2$, cercul circumscris triunghiului MM_1M_2 va avea ca limită, când (C_1') va redeveni curba (C_1), un cerc osculator de odată la cele două curbe; acestea vor trebui să aibă, în punctul M, aceeaş tangentă, aceeaş direcţie a normalei principale, aceeaş rază de curbură. Acestea sunt condiţiile unui *contact de ordinul al doilea.*

Când $n=3$, sfera circumscrisă tetraedrului $MM_1M_2M_3$ va avea ca limită, în aceleaşi condiţii, o sferă care va fi osculatoare deodată curbelor (C) şi (C_1); distanţa centrului acestei sfere la centrul de curbură, a cărui valoare este (No. 59) $T\frac{dR}{ds}$, va avea aceeaş valoare pentru cele două linii date. Dar, este evident, că, în acest caz, curbele (C) şi (C_1) vor avea în punctul M_1, infinit vecin de M, un contact de ordinul al doilea, şi după cele ce am văzut mai sus, cele două raze de curbură în M_1 trebue să aibă aceeaş valoare. Însă $R+dR=R_1+dR_1$, deci neglijând infiniţii mici de ordin superior, avem

$$R+MM_1\frac{dR}{ds}=R_1+MM_1\frac{dR_1}{ds_1}.$$

Ţinând seamă că $R=R_1$, urmează $\frac{dR}{ds}=\frac{dR_1}{ds_1}$. Deci, condiţiile pentru un contact de ordinul al treilea sunt să aibă aceleaşi tangente, aceleaşi normale principale şi

$$R=R_1,\quad \frac{dR}{ds}=\frac{dR_1}{ds_1},\quad T=T_1.$$

În general, dacă avem un contact de ordinul n în M, adică curbele (C) şi (C_1) au comune punctele M_1, M_2,.. M_n, infinit vecine de M, ele au în comun $(n-1)$ puncte comune infinit vecine de M_1, deci curbele au în M_1 un contact de ordinul $(n-1)$. Vom avea, deci, condiţiile căutate, derivând în raport cu arcul condiţiile obţinute pentru contactul de ordinul $(n-1)$.

Urmează, deci, că, pentruca două curbe cu dublă curbură să aibă într'un punct dat un contact de ordinul n, trebue: 1⁰ *Să aibă aceeaş tangentă şi aceeaş normală principală;* 2⁰ *Curbura şi cele dintâi* $(n-2)$ *derivate în raport cu arcul să fie egale pentru cele două curbe;* 3⁰ *Torsiunea şi cele dintâi* $(n-3)$ *derivate ale sale în raport cu arcul să fie egale pentru cele două curbe.*

Observare. După cum în plan am considerat, în fiecare punct al unei curbe, *cercul osculator,* care să aibă aceeaş tangentă şi curbură ca şi curba considerată, se poate, analog, să ne închipuim, în fiecare punct al unei curbe strâmbe, *elicea circulară,* care să aibă acelaş triedru principal, aceeaş curbură, aceeaş torsiune. Pentru a defini această elice tangentă în M la MT, va fi de ajuns a cunoaşte: 1) unghiul α, pe care, în planul rectifiant în M, îl face generatoarea cilindrului, pe care e trasă elicea, cu binormala; 2) raza R_1 a cilindrului tangent la acest plan rectifiant dealungul generatoarei. În adevăr, din (27) şi (28), avem

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{R}{T}, \quad R_1=\frac{R.T^2}{R^2+T^2}.$$

Această elice s'ar putea numi *elicea de curbură şi de torsiune,* iar nu elicea osculatoare, cum este uneori necorect numită, căci o curbă este osculatoare la altă curbă dată, când are un contact de ordinul cel mai mare compatibil cu gradul său de determinare, adică, în cazul de faţă, un contact de ordinul al treilea şi nu de ordinul al doilea cum este în cazul elicei mai sus considerată. Pentru elicea osculatoare, pe lângă că trebue să fie aceleaşi, pentru curbă şi elice, curbura şi torsiunea, mai trebue ca şi $\frac{dR}{ds}$ să fie egale pentru cele două curbe.

65. **Ordinul de contact a unei curbe şi a unei suprafeţe.** Se zice că o curbă (C) are cu suprafaţa (S) un contact de ordinal n, când, după o variaţie infinit mică a curbei (C), noua poziţie (C′) a acestei curbe tae suprafaţa în n puncte $M_1, M_2, \ldots$

M_n, infinit vecine de M. Aşa fiind, o linie cu dublă curbură are un contact de ordinul al doilea cu planul său osculator (într'un punct ordinar) şi de al treilea ordin cu sfera sa osculatoare. Condiţiile generale de contact depind de condiţiile în care variază curburile şi torsiunile liniilor, în număr infinit, pe care le putem face să treacă prin punctul M pe suprafaţa (S). Aceste condiţii se pot obţine derivând de $(n-1)$ ori, în raport cu arcul s al curbei, pe acelea care exprimă că curba şi suprafaţa au în comun punctul M.

NOŢIUNI SUMARE ASUPRA SUPRAFEŢELOR RIGLATE. SUPRAFEŢE DESFĂŞURABILE. APLICAŢIE LA STUDIUL CURBELOR STRÂMBE

66. **Determinarea suprafeţelor riglate. Ordinul suprafeţelor riglate.** Când un punct descrie o curbă (C), triedrul format de tangenta, normala principală, binormala, variază de asemenea, astfel că fiecare din muchile acestui triedru nasc câte o suprafaţă. Cum aceste suprafeţe sunt riglate, pentru a stabili relaţiunile ce există între aceste suprafeţe şi curba (C), vom face o expunere sumară asupra suprafeţelor riglate.

Să considerăm trei curbe (C_1), (C_2), (C_3) şi un punct oarecare M_1 pe curba (C_1). Conurile cu vârful în M_1 şi având ca directoare curbele (C_2) şi (C_3), admit, în general, o generatoare comună $M_1M_2M_3$, M_2 şi M_3 fiind puncte pe curbele (C_2) şi (C_3). Cum punctul M_1 a fost ales arbitrar pe curba (C_1), rezultă că este o simplă infinitate de drepte Δ care să se sprijine pe directoarele (C_1), (C_2), (C_3). Deci, dacă mai punem condiţia ca această dreaptă Δ să întâlnească încă o directoare, curba (C_4), vor fi un număr hotărât de drepte Δ care să întâlnească de odată curbele (C_1), (C_2), (C_3), (C_4).

Numind condiţie simplă faptul că dreapta căutată întâlneşte o curbă directoare, rezultă că pentru ca o dreaptă să fie determinată, trebue *patru condiţii simple.*

Tot o condiţie simplă este şi faptul că dreapta e tangentă la o suprafaţă dată, numită *nucleu.*

Aşa fiind, dacă o dreaptă Δ este supusă numai la trei condiţii, adică să întâlnească trei directoare date (C_1), (C_2), (C_3), atunci există o simplă infinitate de drepte Δ care nasc o *suprafaţă* numită *riglată.* Dreptele Δ se zic *generatoarele* suprafeţei.

Dacă printr'un punct al spaţiului se duc paralele la generatoarele unei suprafeţe riglate, se obţine un *con director* al acestei suprafeţe. Suprafaţa trece prin curba de la infinit a acestui con, care poate să fie luată ca una din directoarele acestei suprafeţe. Dacă conul acesta se reduce la un *plan director*, suprafaţa conţine dreapta de la infinit a acestui plan.

În caz când suprafaţa are un plan director (generatoarele sunt paralele cu un plan) şi are o directoare rectilinie, se zice *conoid*. Conoidul e drept când directoarea rectilinie e perpendiculară pe planul director.

Când cele trei directoare (C_1), (C_2), (C_3) sunt linii drepte, suprafaţa este un *iperboloid cu o pânză,* care degenerează într'un *paraboloid iperbolic*, când cele trei directoare sunt paralele cu un plan (un paraboloid iperbolic mai este născut de o generatoare care se sprijină pe două directoare linii drepte şi este paralelă cu un plan director).

Amândouă aceste cuadrice riglate au un al doilea sistem de generatoare rectilinii, fiecare din generatoarele unui sistem întâlnind pe acelea ale celuilalt sistem şi neîntâlnind nici una din acelaş sistem din care face parte. Se zice *semicuadrică* ansamblul tuturor generatoarelor aparţinând la acelaş sistem, iar cele două semicuadrice ale unei aceleaş cuadrice riglate se zic complimentare.

Cele două semicuadrice ale unui aceluiaş iperboloid admit acelaş con director, care, când se aşează vârful său în centrul suprafeţei, se confundă cu conul asimptotic. Cele două semicuadrice ale unui paraboloid au planele directoare distincte, dreapta de la infinit a fiecăruia dintre ele aparţinând la semicuadrica complimentară. Când aceste plane directoare sunt perpendiculare unul pe altul, *paraboloidul* se zice *echilater.*

Să presupunem că o suprafaţă riglată (Σ) are ca directoare trei curbe algebrice (C_1), (C_2), (C_3), respectiv de ordinele m_1, m_2, m_3, şi care n'au nici un punct comun între ele. Ordinul Δ_{m_1,m_2,m_3}, al acestei suprafeţe (Σ), este numărul de puncte în care o dreaptă oarecare D întâlneşte suprafaţa (Σ), sau, mai bine, numărul de drepte care întâlnesc de odată pe (C_1), (C_2), (C_3) şi (D). Pentru a obţine aceste drepte, se poate, invers, considera suprafaţa rigală $\Delta_{m_1,m_2,1}$ cu directoarele (C_1), (C_2), (D) şi să luăm punctele sale de întâlnire cu curba (C_3). Aceasta fiind de ordinul m_3, acest număr este $m_3\Delta_{m_1 m_2,1}$ şi deci, avem egalitatea

$$\Delta_{m_1,m_2,m_3} = m_3\Delta_{m_1,m_2,1}.$$

Raţionând la fel, avem

$$\Delta_{m_1,m_2,1} = m_2 \Delta_{m_1,1,1}, \quad \Delta_{m_1,1,1} = m_1 \Delta_{1,1,1}.$$

Cum $\Delta_{1,1,1}$ este ordinul unei suprafeţe cu trei directoare rectilinii, adică o cuadrică, avem

$$\Delta_{m_1,m_2,m_3} = 2\, m_1.m_2.m_3.$$

Să observăm că, prin fiecare punct M_1 al directoarei (C_1) trec generatoarele comune conurilor cu vârfurile în M_1, având ca directoare (C_2) şi (C_3), adică în total $m_2.m_3$ generatoare. Punctul M_1 este multiplu de ordinul $m_2 m_3$ şi deci directoarea (C_1) este o linie a suprafeţei de ordinul $m_2 m_3$ de multiplicitate.

Deci, *suprafaţa riglată* (Σ), *definită de trei directoare respectiv de ordinele* m_1, m_2, m_3, *este de ordinul* $2\, m_1 m_2 m_3$, *directoarele fiind pe* (Σ) *ca linii respectiv de ordinele de multiplicitate* $m_2 m_3$, $m_3 m_1$, $m_1 m_2$.

Să presupunem acum că două directoare, (C_2) şi (C_3), de ex., au un punct comun, $A_{2,3}$. Se vede că generatoarele conului cu vârful $A_{2,3}$ şi directoarea (C_1) fac parte din acele drepte care întâlnesc pe (C_1), (C_2), (C_3) şi deci, locul propriu zis, în afară de acest con strein de ordinul m_1, se compune numai din suprafaţa (Σ) de ordinul $2\, m_1 m_2 m_3 - m_1$, pe care directoarea (C_1) este o linie multiplă de ordinul $(m_2 m_3 - 1)$ de multiplicitate, fiindcă una din dreptele care satisfac la condiţiile arătate, care trec prin fiecare punct M_1 al lui (C_1), se găseşte pe conul strein cu vârful $A_{2,3}$.

În mod analog, se vede că *dacă curbele* (C_1), (C_2), *au* $\alpha_{1,2}$ *puncte comune,* (C_2) *şi* (C_3) *au* $\alpha_{2,3}$ *puncte,* (C_3) *şi* (C_1) *au* $\alpha_{3,1}$ *puncte comune, suprafaţa* (Σ) *este de ordinul*

$$2 m_1 m_2 m_3 - (\alpha_{2,3} m_1 + \alpha_{3,1} m_2 + \alpha_{1,2} m_3),$$

liniile (C_1), (C_2), (C_3) *având pe* (Σ) *ordinele de multiplicitate respectiv egale cu*

$$m_2 m_3 - \alpha_{2,3}, \quad m_3 m_1 - \alpha_{3,1}, \quad m_1 m_2 - \alpha_{1,2},$$

aceste rezultate fiind găsite de Salmon.

67. **Proprietăţile planului tangent la o suprafaţă riglată.** 1° Vom arăta mai întâi existenţa planului tangent pentru o suprafaţă oarecare. Să considerăm trei curbe (C_1), (C_2), (C_3) trecând prin punctul M al suprafeţei (Fig. 102), situate în întregime pe suprafaţă. Să lăsăm fixe curbele (C_1) şi (C_2) şi să facem să varieze continuu curba (C_3), rămânând mereu pe supra-

față, până ajunge în poziția (C'_3) și care tae curbele (C_1) și (C_2) în punctele M_1 și M_2. Să facem printr'o variație, efectuată în sens invers, ca să aducem curba (C'_3) în poziția inițială (C_3), făcând-o să treacă prin aceleași poziții intermediare. Laturile triunghiului M_1M_2M fiind mereu în acelaș plan, și cum ele au ca limită, afară de cazuri excepționale al lui M, tangentele în acest punct la curbele (C_1), (C_2), (C_3), urmează că tangentele în acest punct, la trei curbe oarecare trecând prin punctul M sunt așezate în acelaș plan, care este, prin definiție, *planul tangent în* M *la suprafață*, format de tangentele la curbele (C_1) și (C_2) situate pe suprafață și trecând prin punctul M. Un astfel de punct, pentru care tangentele la toate curbele trase pe suprafață și trecând prin M, sunt în acelaș plan, se zice un punct ordinar al suprafeței. Sunt și puncte pentru care aceste tangente nu mai sunt în acelaș plan; un exemplu de punct singular este vârful unui con, unde tangentele la curbele ce trec prin acest punct, adică generatoarele conului, nu sunt în acelaș plan, ci formează chiar conul. Astfel de puncte ale unei suprafețe se zic *puncte conice*.

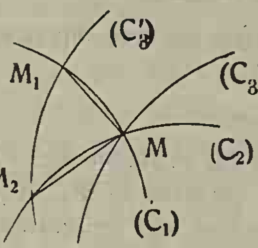

Fig. 102.

Așa fiind, planul tangent într'un punct ordinar al unei suprafețe este format de tangentele la două curbe trase pe suprafață și care trec prin acel punct. Normala la suprafață într'un punct este perpendiculara în acel punct pe planul tangent la suprafață în punctul considerat.

2⁰ Planul tangent într'un punct M al unei suprafețe riglate (Σ) conține generatoarea G a suprafeței și care trece prin punctul M.

Să considerăm acum suprafața născută de o dreaptă mobilă, care are un singur grad de libertate (depinde de un parametru variabil); fie G și G′ două poziții infinit vecine ale acestei generatoare (Fig. 103), M și M′ intersecțiile lor cu un plan (P) perpendicular pe G, M′H proecția lui G′ pe acest plan. Să ducem din M o perpendiculară MH pe această proecție și fie K punctul lui G′ care se proectează în H. Să ducem prin K o paralelă la HM care tae pe G în L. Dreapta LK

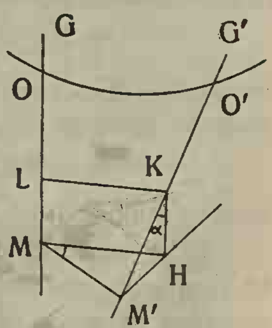

Fig. 103.

este perpendiculara comună la generatoarele G şi G'. Lungimea $\delta = \mathrm{LK}$ măsoară cea mai scurtă distanţă între aceste generatoare care fac între ele unghiul $\mathrm{M'KH} = \alpha$.

Din triunghiurile dreptunghice HMM', M'HK, avem

$$\mathrm{M'H} = \mathrm{KH}\,\operatorname{tg}\alpha = \mathrm{MH}\,\operatorname{tg}\mathrm{HMM'},$$

$$\operatorname{tg}\mathrm{M'MH} \backsim \frac{\mathrm{ML}}{\delta}\alpha. \tag{1}$$

Luând unghiul α ca infinit mic principal, să presupunem că distanţa δ este infinit mic de acelaş ordin; atunci $\frac{\delta}{\alpha}$ tinde către o limită determinată, k; piciorul L al perpendicularei comune celor două generatoare G şi G' tinde către un punct O, numit *punctul central* al generatoarei G. Planul OLK tinde către planul tangent la suprafaţă în acest punct central, care se zice *planul central* pentru generatoarea G; planul GMM' tinde către planul tangent în M; distanţa ML tinde către MO; unghiul M'MH tinde către unghiul φ făcut de planul tangent în M cu planul central.

Notând cu $\mathrm{MO} = x$, relaţia (1) devine

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{k}. \tag{2}$$

Această formulă a lui Chasles face să se cunoască distribuţia planelor tangente dealungul generatoarei G. k se zice *parametru de distribuţie* pentru generatoarea G. Pentru a înlătura orice ambiguitate, parametrul de distribuţie va avea semnul $+$ sau $-$, după cum, când punctul M se depărtează de O, într'un sens sau într'altul, planul tangent se învârteşte în sensul direct sau retrograd pentru un observator cu capul în M şi picioarele în O.

3⁰ Relaţiunea (2) arată că fiecărui punct al generatoarei G îi corespunde un plan tangent şi invers, la fiecare plan ce trece prin generatoarea G, îi corespunde un punct de contact a cărui distanţă x de punctul central e dată de relaţia (2). Deci, există între aceste puncte şi aceste plane o corespondenţă omografică şi deci *raportul anarmonic a patru plane tangente în patru puncte ale generatoarei este egal cu acela al celor patru puncte de contact.*

Să considerăm două plane perpendiculare între ele, de unghiurile φ_1 şi φ'_1, adică $\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi'_1 + 1 = 0$. Avem $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{x_1}{k}$,

$\text{tg}\varphi'_1 = \frac{x'_1}{k}$, deci $x_1 x'_1 + k^2 = 0$. Însemnând cu M_1, M'_1 punctele de contact corespunzătoare distanţelor x_1, x'_1 de punctul central, relaţia $x_1 x'_1 + k^2 = 0$ arată că $OM_1.OM'_1 + k^2 = 0$, adică *diviziunile (punctualele) descrise de punctele* M_1, M'_1 *sunt în involuţie, punctul central al involuţii fiind* O, de aceea s'a dat numirea de punct central punctului O.

4⁰ Când punctul M se depărtează nemărginit de O, $\text{tg}\varphi$ tinde către ∞, iar $\varphi \to \frac{\pi}{2}$. Planul tangent în punctul de la infinit al lui G, zis *plan asimptotic*, este deci perpendicular pe planul central. Planul G'KH (Fig. 103), perpendicular pe LK, deci pe planul GLK, rămâne tot timpul perpendicular, chiar când trecem la limită. Acest plan se confundă deci la limită cu planul asimptotic şi cum acest plan la limită este paralel cu planul tangent corespunzător la conul director, se vede că *planul asimptotic al unei generatoare este paralel cu planul tangent la conul director dealungul generatoarei corespondente.*

Ducând prin fiecare generatoare un plan perpendicular la fiecare din planele precedente, se vede că *planul central dealungul unei generatoare este paralel cu planul normal la conul director dealungul generatoarei corespondente.*

În particular, *dacă suprafaţa este cu plan director, planele asimptotice ale acestei suprafeţe sunt toate paralele şi planele centrale sunt perpendiculare la acest plan director.*

5⁰ Locul punctelor centrale O ale suprafeţei este o curbă care se zice *linia de stricţiune* a suprafeţei. Linia de stricţiune nu tae ortogonal generatoarele. În adevăr, dacă G' tinde către G, sau G către G', L în primul caz, K în al doilea, tind, unul pe G, altul pe G', către poziţii limite aparţinând linii de stricţiune, dar dreapta care uneşte aceste două poziţii limită are o direcţie care diferă de aceea a lui LK, astfel că nu trebue confundat LK cu arcul infinit mic al linii de stricţiune.

68. **Punctul reprezentativ al distribuţii planelor tangente.** 1⁰ Adoptând pe generatoarea G un sens pozitiv indicat de săgeată (Fig. 104), să ridicăm pe această generatoare prin punctul său central O, o perpendiculară OI egală cu parametrul de distribuţie k şi dusă într'un sens astfel ca săgeata ce indică sensul pozitiv al lui G să tindă să facă să se învârtească braţul de pârghie IO în sensul direct sau retrograd, după cum k este pozitiv sau negativ. Se vede că punctul I este astfel că

unghiul MIO, *luat cu sensul său, este egal cu acela ce planul tangent în* M *face cu planul central.* Pentru acest motiv, punctul I, considerat întâia oară de Mannheim, a fost numit *punct reprezentativ al distribuţii planelor tangente dealungul generatoarei* G.

Rezultă de aci că, *unghiul sub care se vede din* I *un segment oarecare* MM′ *al lui G face să se cunoască unghiul, cu sensul său, care-l fac între ele planele tangente în* M *şi* M′.

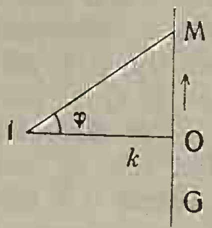

Fig. 104.

Se vede de aci că, dacă se cunosc planele tangente în trei puncte M_1, M_2, M_3 ale generatoarei G, se poate afla planul tangent într'un punct oarecare al acestei generatoare. În adevăr, să observăm că punctul reprezentativ I este la intersecţia segmentelor de cercuri descrise pe M_1M_2 şi M_2M_3 şi capabile de unghiurile ce fac între ele, de o parte planele tangente în M_1 şi M_2, de altă parte planele tangente în M_2 şi M_3. Punctul I fiind construit, unind un punct oarecare M al generatoarei cu I, unghiul MIM_1 este unghiul făcut de planul tangent în M cu planul tangent în M_1 şi deci se poate construi planul tangent în M, căci este cunoscut planul tangent în M_1 (¹).

2⁰ Dacă două suprafeţe au o generatoare comună G, există pentru ele, pe această generatoare, două *puncte de racordare*, adică puncte unde planul tangent este acelaş şi pentru una şi pentru cealaltă suprafaţă. Aceste puncte pot fi reale, confundate sau imaginare. În adevăr, planele tangente dealungul lui G ale uneia din suprafeţe pe de o parte, şi ale celeilalte suprafeţe pe de altă parte, formează două fascicole omografice, care au, după cum se ştie, două plane duble.

Pentru a obţine aceste plane duble, observăm că, dacă N_1 este unul din aceste puncte de racordare, unghiurile pe care planul tangent comun în N_1 le face cu planele centrale ale celor două suprafeţe fiind date de OIN_1 şi $O'I'N_1$, atunci unghiul IN_1I' este egal cu unghiul acestor plane centrale. *Punctele de racordare sunt deci la intersecţia generatoarei* G *cu segmentul capabil de unghiul celor două plane centrale construit pe dreapta ce uneşte punctele reprezentative* I *şi* I′.

(¹) Pentru determinarea punctului reprezentativ în cazul unei suprafeţe strâmbe trecând printr'o directoare dată şi circumscrisă la o suprafaţă (nucleu) dată, dealungul unei curbe date, a se vedea *Nota* D-lui M. d'Ocagne în *Comptes Rendus de l'Acad. des Sc.*, 1-er semestre 1928, p. 64.

Dacă, în afară de aceste două puncte de racordare pe generatoarea G *mai există un al treilea, toate punctele generatoarei sunt puncte de racordare, cu alte cuvinte cele două suprafețe se racordează dealungul generatoarei* G. Aceasta rezultă din faptul că, din cunoașterea planelor tangente în trei puncte ale lui G, se poate afla planul tangent în orice punct al lui G.

69. **Suprafețe de racordare. Paraboloidul normalelor.** Din cele de mai sus rezultă că, pentru a determina planele tangente la o suprafață riglată (Σ), dealungul unei generatoare G, se va putea substitui suprafeței (Σ) o altă suprafață (Σ'), trecând prin G, cu condiție ca să aibă acelaş plan tangent cu (Σ) în trei puncte ale lui G.

Se va putea să se ia pentru (Σ') o cuadrică care să fie de racordare cu (Σ) în trei puncte M_1, M_2, M_3 ale lui G. Va fi deajuns să se ia pentru directoarele lui (Σ'), trei drepte, D_1, D_2, D_3, trecând prin M_1, M_2, M_3 şi situate respectiv în planele tangente la (Σ) în aceste puncte. Dacă aceste drepte D_1, D_2, D_3 sunt obținute la intersecția planelor tangente în M_1, M_2, M_3 cu plane paralele cu un plan (π), cuadrica de racordare este un paraboloid iperbolic, având planul (π) ca plan director; celalt plan director va fi (N. 67,4°) paralel cu planul asimptotic al lui (Σ) dealungul lui G.

Dacă planul (π) este perpendicular pe G, toate generatoarele paraboloidului de racordare dealungul lui G sunt ortogonale la această generatoare, şi cum cele două plane directoare sunt perpendiculare unul pe altul, paraboloidul este echilater.

Să rotim în jurul lui G de un unghi drept acest paraboloid al tangentelor ortogonale. Fiecare din aceste generatoare, perpendiculară pe G, va rămâne perpendiculară şi după rotire, mai mult, fiecare generatoare devenind perpendiculară pe poziția primitivă a sa, este perpendiculară pe o a doua dreaptă din planul tangent corespunzător la (Σ); ea este deci perpendiculară pe acest plan tangent, adică se confundă cu normala corespunzătoare la (Σ). Deci, *locul normalelor la o suprafață riglată dealungul uneia din generatoarele sale* G *este un paraboloid echilater, al cărui unul din planele directoare este perpendicular pe* G, *celalt fiind paralel cu planul central al lui* G.

Planul tangent în vârful paraboloidului este perpendicular pe direcția axei paraboloidului, care este dată de intersecția celor două plane directoare, unul perpendicular pe G, altul confundat cu planul central, amândouă, prin urmare, perpendiculare pe planul asimptotic, aşa că direcţia axei paraboloidului este perpendiculară pe planul asimptotic. Planul tangent la vârf va fi deci planul asimptotic. Făcând o rotaţie inversă de 90^0, acest paraboloid al normalelor devine paraboloidul de racordare, planul asimptotic precedent devine planul central al cărui punct de contact este punctul central. Deci, *punctul central* O *al generatoarei* G *este vârful paraboloidului normalelor dealungul generatoarei* G.

70. **Aplicaţii.** I *Se dă planul tangent într'un punct* M *al unei generatoare şi două din cele trei elemente, punctul central* O, *planul central (adică unghiul* φ*), parametrul de distribuţie* k *(adică lungimea* OI, fig. 104); *să se găsească al treilea din aceste elemente.*

1^0 Se dă punctul M şi cantităţile φ şi k. Se duce prin punctul M (Fig. 104) o dreaptă care face cu partea negativă a generatoarei unghiul $\frac{\pi}{2}-\varphi$ şi se duce o paralelă la generatoare la distanţa k care tae dreapta construită în punctul I. Din punctul I se lasă perpendiculara IO pe generatoare şi astfel găsim punctul central O.

2^0 Dacă se dă O şi k, punctul I se găseşte imediat pe perpendiculara în O pe generatoare la distanţa k; unindu-l cu punctul M, avem unghiul $\mathrm{OIM}=\varphi$.

3^0 Dacă se dau O şi φ, se ridică în O o perpendiculară pe generatoare şi se duce prin M o dreaptă care face cu partea negativă a generatoarei unghiul $\frac{\pi}{2}-\varphi$; această dreaptă tae perpendiculara în I, iar IO este parametrul de distribuţie k.

II. *Se dau planele tangente în două puncte* M *şi* M′ *şi unul din cele trei elemente, punctul central, planul central, parametrul de distribuţie. Să se afle celelalte două elemente.*

1^0 Elementul dat este punctul central O. Fie α unghiul (cu semnul său) al planelor tangente în M şi M′ (Fig. 105). Punctul I este la intersecţia perpendicularei în O pe generatoare cu segmentul de cerc ce trece prin M şi M′ şi capabil de unghiul α. Sunt două soluţii, una sau nici una, după cum cercul tae, este tangent sau nu tae perpendiculara în O. OI este parametrul de distribuţie şi unghiul MIO este unghiul făcut de planul central cu planul tangent în M.

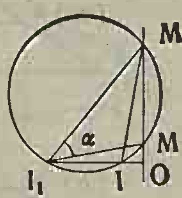

Fig. 105.

2^0 Dacă se dă planul central, se cunosc unghiurile φ şi φ' pe care planele tangente în M şi M′ (Fig. 106) le face cu planul central. Ţinând seamă de sens, se duc prin M şi M′ dreptele ce fac cu generatoarea unghiurile $\frac{\pi}{2}-\varphi$, $\frac{\pi}{2}-\varphi'$. Punctul lor de întâlnire este punctul reprezentativ, I, de unde se deduce punctul central O şi parametrul de distribuţie, $\mathrm{IO}=k$.

3^0 Dacă se dă parametrul de distribuţie k, punctul reprezentativ I este (Fig. 107) la intersecția paralelei cu generatoarea la distanța k, cu segmentul de cerc descris pe MM′ capabil de unghiul α egal cu acela al

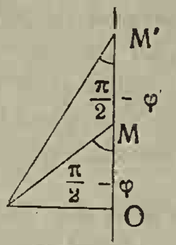

Fig. 106.

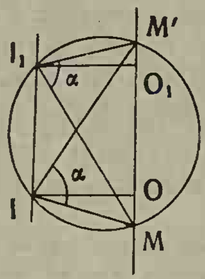

Fig. 107.

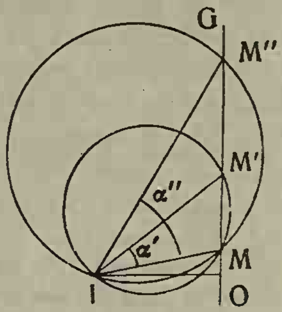

Fig. 108.

planelor tangente în M și M′. Odată găsit punctul I, punctul central O este piciorul perpendicularei din I pe generatoare. Sunt două soluții, una, sau nici una.

III. *Se dau planele tangente în trei puncte* M, M′, M″, *să se afle punctul central, planul central și parametrul de distribuție.* Să măsurăm unghiurile α' și α'' cu care trebue a învârti planul tangent în M pentru a-l aplica pe planele tangente în M′ și M″. Punctul reprezentativ I (Fig. 108) este la intersecția segmentelor de cercuri descrise pe MM′ și MM″ respectiv capabile de unghiurile α' și α''. În toate cazurile avem o singură soluție. Perpendiculara IO din I pe G ne dă punctul central O, parametrul de distribuție este $IO = k$, iar unghiul IOM este egal cu cel făcut de planul tangent în M cu planul central.

IV. *Plan tangent la o suprafață riglată cu două curbe directoare*

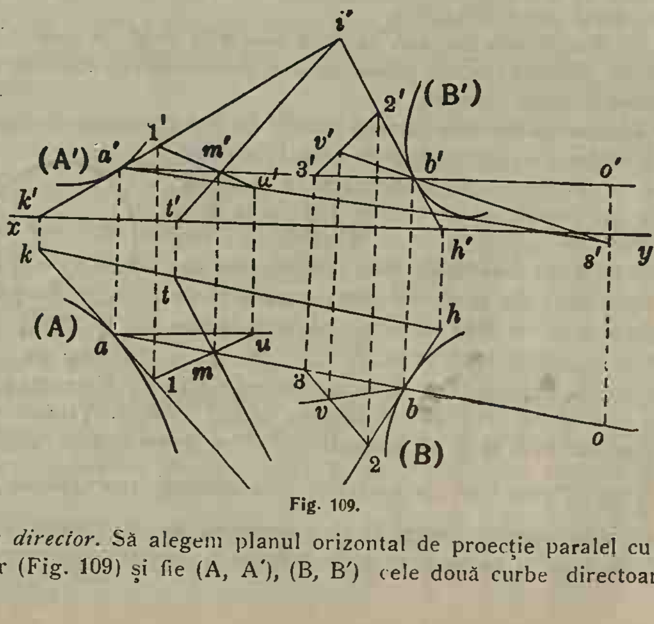

Fig. 109.

și plan director. Să alegem planul orizontal de proecție paralel cu planul director (Fig. 109) și fie (A, A′), (B, B′) cele două curbe directoare. Să ducem planul tangent în punctul (m, m') al generatoarei $(ab, a'b')$, care este o orizontală ce se sprijină pe curbele directoare. Pentru aceasta, să considerăm paraboloidul de racordare dealungul generatoarei $(ab, a'b')$, care are ca plan director un plan orizontal şi pentru directoare tangentele în (a, a'), (b, b') la curbele date. Acest paraboloid este de racordare, căci, în punctele (a, a'), (b, b') şi punctul de la infinit pe dreapta $(ab, a'b')$, are acelaş plan tangent ca şi suprafaţa.

Va trebui să construim planul tangent în (m, m') la acest paraboloid, care va fi planul tangent căutat. Pentru aceasta, ne servim de faptul că planul tangent la paraboloid într'un punct, este determinat de cele două generatoare de sisteme diferite ce trec prin acel punct. Să găsim deci generatoarea de al doilea sistem ce trece prin (m, m') şi se sprijină pe cele din sistemul întâi. Printre generatoarele sistemului întâi, la fel cu $(ab, a'b')$, paralele cu planul orizontal, este şi aceea perpendiculară pe planul vertical ce se sprijină pe tangentele în (a, a'), (b, b'), adică o dreaptă perpendiculară pe vertical ce trece prin punctul i' de intersecţie al dreptelor ce reprezintă proecţiile verticale ale tangentelor în (a, a'), (b, b'). Generatoarele sistemului al doilea întâlnind pe aceasta, de sistemul întâi, proecţia lor verticală trece prin i'; generatoarea de sistemul al doilea ce trece prin (m, m'), este $m'i'$, a cărui proecţie orizontală, pe urma orizontală kh a planului format de tangentele în (a, a'), (b, b'), urma paraboloidului, este (t, t'). Generatoarea a doua este $(mt, m't')$, iar planul tangent în (m, m') la suprafaţă este format de $(ab, a'b')$ şi $(mt, m't')$.

Punctul central al generatoarei $(ab, a'b')$ este punctul acestei generatoare, care reprezintă punctul de contact al paraboloidului cu planul tangent la paraboloid trecând prin generatoarea considerată şi perpendicular pe planul director, adică pe planul orizontal. Se va duce, deci, prin această generatoare un plan perpendicular pe planul orizontal şi se va găsi, cum se ştie, punctul său de contact cu paraboloidul, care va fi punctul central al generatoarei.

Aceasta o mai putem face şi pe alte cale, în modul următor. Printre paraboloizii de racordare cu suprafaţa dealungul lui $(ab, a'b')$, să considerăm pe acela care are ca directoare dreptele din planele tangente în (a, a'), (b, b') la suprafaţă şi care sunt frontale. Acest paraboloid are planele de proecţie ca plane directoare, iar directoarele sale sunt frontalele $(au, a'u')$, $(bv, b'v')$. Fie s' punctul unde se tae proecţiile lor verticale. Generatoarele din acelaş sistem cu aceste drepte trec în proecţie verticală prin s', proecţia verticală a generatoarei de acelaş sistem cu $(ab, a'b')$, a paraboloidului şi care este perpendiculară pe planul vertical de proecţie. Prin acest punct trece proecţia verticală a unei generatoare frontală, care întâlnind pe $(ab, a'b')$, se proectează orizontal în o (pe planul orizontal generatoarele se proectează trecând prin o). Planul tangent în (o, o') este format de $(ab, a'b')$ şi de perpendiculara în o pe planul orizontal, este deci perpendicular pe orizontal, pe planul director al suprafeţei, este planul central al generatoarei, iar (o, o') este punctul central căutat.

Se mai observă că planul central este perpendicular pe planul orizontal, este un plan tangent al cărui punct de contact este un punct al conturului aparent orizontal. Deci, linia de stricţiune a suprafeţei, locul punctelor centrale, se proectează pe planul orizontal după curba care este proecţia orizontală a conturului aparent orizontal, adică după curba înfăşurătoare a proecţiilor generatoarelor pe planul orizontal.

Dacă directoarele $a's'$, $b's'$ sunt paralele, punctul s' este aruncat la infinit, punctul central o este de asemenea la infinit. Sunt, deci, generatoare singulare, pentru care punctul central este la infinit.

Curba de umbră este formată de punctele de contact ale planelor tangente paralele cu o direcţie dată, sau un fascicol de raze luminoase, duse, prin fiecare generatoare, fie paralel cu direcţia razelor, sau trecând prin punctul ce reprezintă sorgintea luminoasă.

V. *Suprafaţă strâmbă cu două curbe directoare şi con director.* Pentru a construi o generatoare ce trece prin punctul (a,a') al uneia din curbele directoare, se transportă conul director ca să aibă vârful în (a,a'); el este tăiat de cealaltă curbă directoare într'un număr de puncte; dreptele ce unesc aceste puncte cu punctul (a,a') sunt generatoarele suprafeţei. Dacă, pentru una din aceste drepte, se cere planul tangent în (m,m') (Fig. 110), se întrebuinţează paraboloidul de racordare care are ca plan director planul tangent la conul director dealungul generatoarei paralelă cu $(ab, a'b')$ şi aceleaşi plane tangente ca şi suprafaţa în (a,a'), (b,b').

Să considerăm cazul când *conul director este de rotaţie.* Să luăm ca plan orizontal (Fig. 110) un plan perpendicular pe axa acestui con. Pentru o generatoare oarecare a suprafeţei, planul central fiind perpendicular pe planul tangent la conul director, este paralel cu planul meridian al conului (ce trece prin generatoarea de contact a conului cu planul tangent şi prin axa conului), este deci (vertical) perpendicular pe planul orizontal.

Acestea fiind stabilite, se vede că planul central al suprafeţei strâmbe pentru generatoarea $(ab, a'b')$ (Fig. 110), este unul din planele directoare ale paraboloidului normalelor la această suprafaţă pentru generatoarea considerată. Generatoarele acestui paraboloid, care nu sunt paralele cu acest plan central, adică normalele la suprafaţa strâmbă, se proectează atunci orizontal după drepte care trec prin acelaş punct. Se cunoaşte planul tangent la suprafaţa riglată în (a,a'), unde ab întâlneşte una din directoarele date, şi deci normala în acest punct la suprafaţă; de asemenea, în punctul (b,b'). Punctul c de întâlnire al proecţiilor orizontale ale acestor două normale este punctul prin care trec proecţiile orizontale ale normalelor la suprafaţa riglată pentru diferitele puncte ale generatoarei ab. Prin urmare, pentru un punct (m,m'), normala la suprafaţă se proectează orizontal după dreapta cm şi urma orizontală a planului tangent în (m,m') este perpendiculara coborâtă pe cm din urma t a generatoarei ab pe planul orizontal.

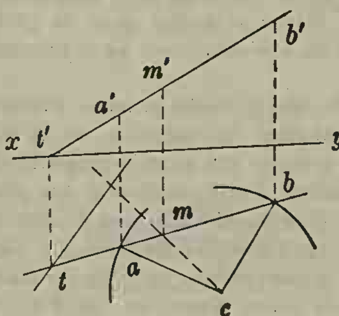

Fig. 110.

Am văzut că planul central pentru o generatoare este planul proectant orizontal al acestei generatoare şi cum este tangent în punctul central, rezultă că linia de stricţiune (locul punctelor centrale) este locul punctelor de contact ale planelor tangente la suprafaţă perpendiculare pe planul orizontal, adică *linia de stricțiune este curba de contur aparent orizontal.*

VI. *Suprafață strâmbă cu trei directoare curbe.* Pentru generatoarea *abc*, care întâlnește directoarele date în *a*, *b*, *c* (Fig. 111), cunoaștem planele tangente la suprafață în aceste puncte, ele sunt plane determinate de generatoare și tangentele la curbele directoare în *a*, *b*, *c*. Să luăm în aceste plane tangente respectiv dreptele A, B, C și să considerăm iperboloidul de racordare ce are ca directoare aceste trei drepte. Pentru a determina planul tangent în *m* al generatoarei *abc*, vom construi planul tangent în *m* la iperboloidul de racordare. Pentru aceasta, să ducem două generatoare G_1 și G_2 ale acestui iperboloid, de acelaș gen cu *abc* (adică două drepte care să se sprijine pe A, B, C). Dreapta ce trece prin *m* și se sprijină pe G_1 și G_2 este generatoarea iperboloidului de acelaș sistem cu A, B, C. Această dreaptă și generatoarea *abc* determină planul tangent la suprafață în *m*.

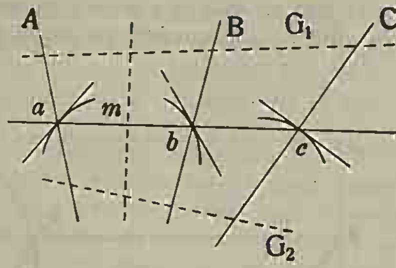

Fig. 111.

Invers, dacă prin generatoarea *abc* se duce un plan oarecare, se obține punctul de contact unde acest plan atinge suprafața riglată, luând punctul de întâlnire al generatoarei *abc* cu dreapta după care acest plan tae iperboloidul de racordare. Această dreaptă de intersecție a planului cu iperboloidul este aceea care unește urmele lui G_1 și G_2 pe planul dat dus prin *abc* și avem astfel punctul de contact al acestui plan cu suprafața riglată.

Exemplu. Biais passé. Această suprafață ce se întâlnește în cursul de Stereotomie, *are ca directoare două cercuri egale cu planele paralele și perpendiculara la aceste plane dusă prin mijlocul segmentului de dreaptă cuprins între centrele cercurilor.*

Să luăm ca plan vertical de proecție acel paralel cu planele cercurilor C_1 și C_2 (Fig. 112) și ca plan orizontal un plan perpendicular pe acesta și dus prin linia centrelor cercurilor. Cercurile se proectează vertical după cercuri egale $p'_1q'_1$, $p'_2q'_2$ și orizontal după dreptele paralele cu linia de pământ p_1q_1, p_2q_2. Directoarea D are ca proecție verticală punctul o' egal depărtat de centrele cercurilor și ca proecție orizontală o perpendiculară pe linia de pământ (dreaptă perpendiculară pe vertical și situată în planul orizontal).

Fie $a'b'c'd'$ proecția verticală a unei generatoare, proecțiile orizontale ale acestor puncte fiind a, b, c, d. Punctul (o, o') unde aceste generatoare tae directoarea D are proecția orizontală o egal depărtată de proecțiile orizontale ale centrelor cercurilor. Proecția verticală $a'b'$, ce trece prin o', corespunde la patru drepte ce întâlnesc cele trei directoare date; dar, printre aceste patru, sunt totdeauna două care trec prin acelaș punct o. Ansamblul acestor două drepte formează un con având ca vârf punctul (o, o') și ca directoare cercurile date. *Suprafața biais passé este aceea născută de celelalte drepte, ca ad și bc.*

Prin punctul *o* să ducem *ol* paralelă cu *ad* și *bc*; punctul *l* este mijlocul lui *bd*. Proectând pe *l* în *l'* pe *d'b'*, *l'* este mijlocul lui *d'b'*. Pentru o generatoare oarecare a suprafeței, avem un punct *l'*. Locul acestor puncte este un cerc care trece prin centrul lui C'_1, acesta este urma conului director al suprafeței pe planul acestui cerc director.

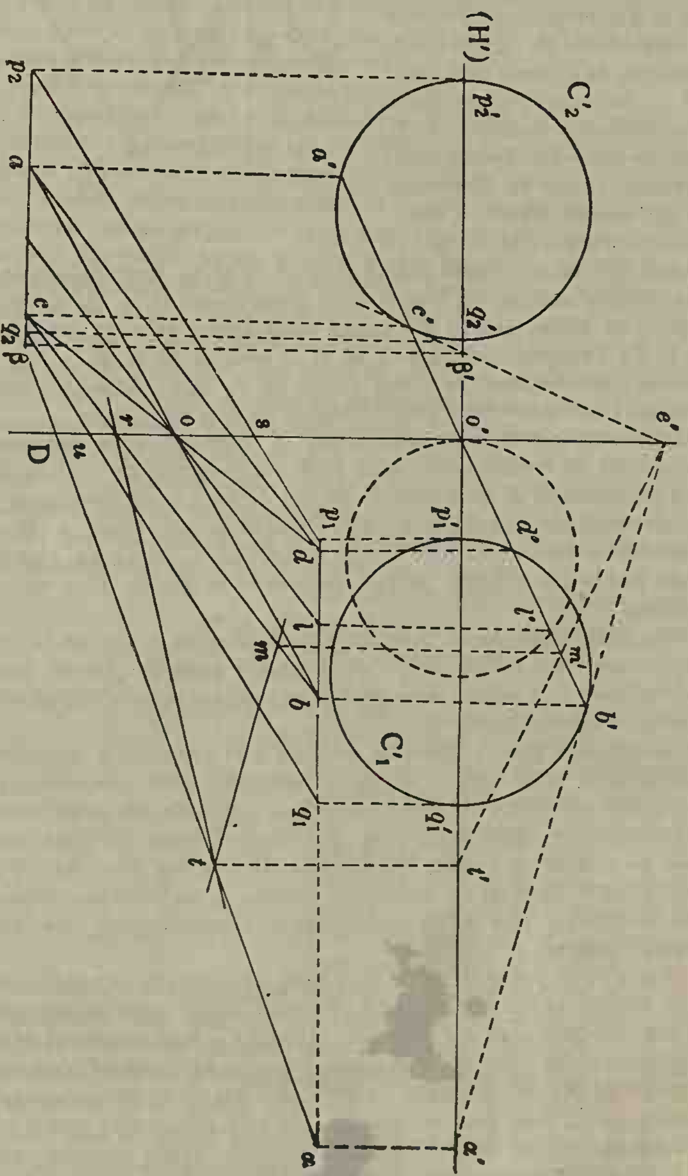

Fig. 112.

Deci, așezând în *o vârful conului director, acest con va avea ca urmă pe planele cercurilor* C'_1, C'_2, *un cerc.*

Plan tangent într'un punct. Să luăm un punct (m, m') pe generatoarea $(bc, b'c')$. Vom întrebuința iperboloidul de racordare dealungul generatoarei $(bc, b'c')$. Să ducem în punctul c' o tangentă la C'_2; această tangentă se proectează orizontal pe segmentul de dreaptă după care se proectează cercul. Să ducem și tangenta în (b,b') la cercul C'_1. Proecțiile verticale ale acestor tangente se tae în e', pe prelungirea lui D, căci $o'e'$ este perpendiculară pe linia centrelor cercurilor și egal depărtată de aceste cercuri cu raze egale.

Iperboloidul de racordare are ca directoare tangentele în b',c' la cercurile directoare si directoarea rectilinie D a suprafeței biais passé. Pentru a construi planul tangent în (m,m'), trebue a căuta generatoarea acestui iperboloid care întâlnește două drepte ale acestei suprafețe, de acelaș sistem cu bc. Să luăm, pentru una din aceste drepte, urma iperboloidului pe planul orizontal (H'), care conține deja directoarea rectilinie D; această urmă se găsește unind urmele α,β pe acest plan ale tangentelor la cercurile directoare, tangente care sunt directoarele iperboloidului.

Perpendiculara în e' pe planul vertical întâlnește directoarele iperboloidului proectate după $e'c'$, $e'b'$ și dreapta D cu care este paralelă. Această perpendiculară pe planul vertical este deci de asemenea o dreaptă a iperboloidului de acelaș sistem cu generatoarea ce conține punctul m. Unind e' cu m', avem proecția verticală a generatoarei acestui iperboloid și cum urma acestei drepte pe (H') trebue să fie pe urma iperboloidului pe acelaș plan, această urmă este în punctul t, pe $\alpha\beta$. Unind m cu t, avem proecția orizontală a dreptei $e'm'$. Dreapta $(mt, m't')$ și generatoarea $(bc, b'c')$ definesc planul tangent căutat. Urma pe (H') a acestui plan tangent este dreapta rt.

Generatoarele singulare ale suprafeței sunt cele situate în planul orizontal $(p_2p_1, p'_2p'_1)$, $(q_2q_1, q'_2q'_1)$; ele întâlnesc directoarea rectilinie în s și u. Aceste generatoare întâlnesc cercurile directoare în puncte unde planele tangente sunt verticale și confundate. Planul tangent este acelaș dealungul acestor generatoare; este diferit în punctele s și u care sunt punctele centrale pe aceste generatoare.

Alte generatoare singulare sunt acelea care se proectează vertical după drepte duse prin o', tangente la proecțiile verticale ale cercurilor directoare. În punctele unde aceste drepte întâlnesc cercurile directoare, avem, pentru fiecare din aceste drepte, acelaș plan tangent.

Punctul central pentru generatoarea $(bc, b'c')$ este punctul acestei generatoare unde planul tangent în acest punct este perpendicular pe planul tangent la conul director dealungul generatoarei $(ol, o'l')$ paralelă cu $(bc, b'c')$. Planul tangent la conul director e determinat de $(ol, o'l')$ și tangenta în (l, l') la cercul $o'l'$ din planul cercului C'_1. Se va găsi deci planul ce trece prin $(bc, b'c')$ și perpendicular pe acest plan, iar urma sa pe planul (H') trece prin r și va tăia pe $\beta\alpha$ în punctul θ, a cărui proecție verticală este θ'; $\theta'e'$ tae pe $b'c'$ în punctul μ', a cărui proecție orizontală μ este pe bc; (μ, μ') este punctul central. Locul acestor puncte este linia de stricțiune.

71. Suprafețe desfășurabile. Fie G și G′ două generatoare infinit vecine, O și O′ punctele centrale corespunzătoare

(Fig. 113), $LK = \delta$ perpendiculara lor comună, α unghiul lor. Ducând OF paralelă cu LK şi FE perpendiculară pe G', se vede că OE este perpendiculara din O pe G', iar OE este distanţa de la O la G'. Din triunghiul OFE, avem

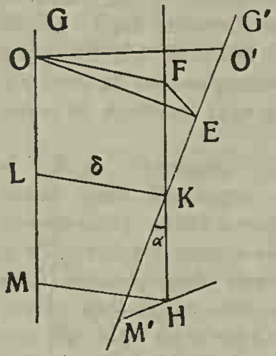

Fig. 113.

$$OE = \sqrt{\overline{OF}^2 + \overline{FE}^2},$$

$$OE = \sqrt{\overline{LK}^2 + \overline{FK}^2 \sin^2\alpha},$$

$$OE = \sqrt{\delta^2 + \overline{OL}^2 \sin^2\alpha} = \delta \sqrt{1 + \left(\frac{OL\sin\alpha}{\delta}\right)^2}.$$

Din triunghiul $OO'E$, avem

$$OE = OO' \sin OO'E,$$

deci, egalând,

$$\delta \sqrt{1 + \left(\frac{OL\sin\alpha}{\delta}\right)^2} = OO' \sin OO'E. \tag{3}$$

Am văzut că, dacă δ şi α sunt infiniţi mici de acelaş ordin, însemnând cu φ unghiul format de planul tangent în M cu planul central, avem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{k}, \quad k \to \lim \frac{\delta}{\alpha}, \quad x = OM. \tag{4}$$

Să presupunem că δ este infinit mic faţă de α. Atunci suprafaţa riglată se zice *suprafaţă desfăşurabilă*. Din (3) se vede că OL şi α fiind infiniţi mici, raportul $\frac{OL\sin\alpha}{\delta}$ poate avea o limită finită, deci, membrul întâi este infinit mic de acelaş ordin cu δ; deci, şi membrul al doilea este infinit mic cel puţin de ordinul al doilea. Deci, trebue, sau ca OO' să fie infinit mic de ordinul al doilea, sau ca unghiul $OO'E$ să fie infinit mic.

Dacă OO' este infinit mic superior în raport cu unghiul a două generatoare infinit vecine, înseamnă că O este fix faţă de aceste două generatoare, adică generatoarele trec prin acelaş punct fix; suprafaţa ar fi un con.

Lăsând la o parte acest caz particular, să presupunem că $\sphericalangle OO'E$ este infinit mic, adică are ca limită pe 0 (zero). Aceasta înseamnă că direcţia limită a lui OO' coincide cu G; această *generatoare* G *este deci tangentă în punctul* O *la linia de stricţiune*. Se poate deci defini *o suprafaţă desfăşurabilă ca locul tangentelor la o curbă strâmbă.*

Parametrul de distribuție $k = \lim \frac{\delta}{\alpha} \to 0$, deci, din formula (4) se vede că $\operatorname{tg}\varphi \to \infty$, $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, deci, *planul tangent la o suprafață desfășurabilă în orice punct al unei generatoare este acelaș.* Acest plan e perpendicular pe limita planului determinat de GLK, planul central. Dar, dreapta LK devine la limită binormala la linia de stricțiune (ca fiind perpendiculară pe două tangente infinit vecine, G și G′); deci, planul GLK tinde către planul rectifiant la linia de stricțiune. Așa dar, *planul tangent la suprafață,* care am văzut că îi este perpendicular, *este planul osculator la linia de stricțiune,* care se zice *muchia de întoarcere* (rebroussement).

Observare. Am văzut (No. 62) că cea mai scurtă distanță a două tangente infinit vecine a unei linii cu dublă curbură este infinit mic, cel puțin de ordinul al treilea. Deci, dacă o dreaptă se deplasează continuu, cea mai mică distanță dintre două poziții consecutive nu va putea să fie de ordinul al doilea; dacă nu este de ordinul întâi, ea trebue să fie cel puțin de ordinul al treilea și atunci dreapta rămâne tangentă la o curbă strâmbă. Aceasta este teorema lui Bouquet.

72. **Înfășurătoarea unui plan mobil.** Să considerăm un plan variabil, a cărui poziție depinde de un parametru și fie P și P′ două poziții infinit vecine ale planului. Voim să arătăm că dacă P′ tinde către P, intersecția Δ a acestor două plane tinde către o dreaptă G, bine determinată în planul P. În adevăr, fie D urma planului mobil P pe un plan fix Q, E urma dreptei Δ pe acelaș plan. Când planul P variază, dreapta D înfășură o curbă (C), și când P′ tinde către P, punctul E tinde către punctul de contact M al dreptei D cu înfășurătoarea sa. Urma dreptei Δ pe un plan oarecare tinde către un punct limită perfect determinat și deci Δ va tinde către o dreaptă determinată G.

Limita G a intersecții Δ a planului P și a celui infinit vecin se zice *caracteristica* planului variabil P. Când P variază, dreapta G naște o suprafață riglată. Planul P, conținând, de altfel, tangenta la curba (C) intersecția acestei suprafețe cu planul Q, este tangent în M la această suprafață. Cum această suprafață are acelaș plan tangent în toate punctele generatoarei G (dealtminterlea oarecare), este o *suprafață desfășurabilă, este înfășurătoarea planului mobil* P.

Punctul central al caracteristicei G se numeşte punct de întoarcere, locul acestor puncte, cu alte cuvinte linia de stricţiune a suprafeţei, se zice *muchia de întoarcere* (rebroussement).

Deci, dacă planul mobil rămâne tangent la o curbă (trece prin tangenta la curbă), caracteristica sa trece prin punctul de contact Aşa dar, *tangenta într'un punct variabil al unei linii cu dublă curbură coincide cu caracteristica planului osculator.*

73. **Diferite moduri de generare ale suprafeţelor desfăşurabile.** Am văzut că, în definiţia unei suprafeţe desfăşurabile, se poate dispune de două condiţii arbitrare pe care să le impunem generatoarelor, aşa că aceste condiţii pot fi, sau ca generatoarele să întâlnească două curbe (directoare), sau să fie tangente la două suprafeţe (zise nuclei) date, sau să întâlnească o curbă dată şi să fie tangentă la o suprafaţă dată, sau, dacă se presupune că această curbă să fie situată pe această suprafaţă, generatoarele să fie tangente la o suprafaţă dealungul unei curbe date pe suprafaţă.

Dacă admitem că planul tangent la o curbă este orice plan ce trece prin tangenta la această curbă, se vede că, în fiecare din aceste cazuri, suprafaţa desfăşurabilă este înfăşurătoarea planelor tangente comune la cele două elemente directoare (directoare sau nuclei daţi) ce au servit să o definească.

Să considerăm cazul când generatoarele întâlnesc două directoare date, curbele (A) şi (B). Dacă AB este o generatoare a suprafeţei desfăşurabile (Σ) ce trece prin aceste curbe, planele tangente în A şi B fiind determinate de AB şi tangentele în A şi B la curbele (A) şi (B), cum aceste plane sunt confundate, urmează că tangentele în A şi B trebue să se întâlnească într'un punct T. Se obţin deci generatoarele AB ale suprafeţei (Σ), alegând punctele A şi B astfel ca tangentele în aceste puncte la curbele (A) şi (B) să se întâlnească. Aceasta se poate face astfel. Să considerăm suprafeţele desfăşurabile (Σ'), (Σ'') născute de tangentele la curbele (A) şi (B); fie (T) curba de intersecţie a suprafeţelor (Σ') şi (Σ''). Dintr'un punct T al acestei curbe, care aparţine deodată la desfăşurabilele (Σ') şi (Σ''), se poate duce o tangentă TA la curba (A) şi una TB la curba (B); dreapta AB care uneşte punctele de contact a acestor tangente este o generatoare a suprafeţei (Σ) desfăşurabile căutată. Acest procedeu îl aplicăm cu succes în cazul când curbele (A) şi (B) sunt plane, fără să fie în acelaş plan; desfăşurabilele (Σ') şi (Σ'') sunt planele acestor curbe, iar curba (T) este dreapta de intersecţie a acestor plane.

Mai putem obţine generatoarea AB şi în modul următor. Să considerăm conul cu vârful A şi directoare curba (B); prin tangenta în A la curba (A) să ducem la acest con un plan tangent a cărui generatoare de contact tae curba (B) în punctul B. Tangenta în B la această curbă, conţinută în planul tangent la con dealungul lui AB, întâlneşte deci tangenta în A prin care acest plan a fost dus; deci AB aparţine suprafeţei desfăşurabile (Σ).

Fiecare con cu vârful A şi directoarea (B) fiind tangent la (Σ) dealungul lui (AB), această *suprafaţă desfăşurabilă* (Σ) *poate fi considerată ca înfăşurătoarea conurilor trecând prin curba* (B), *ce aparţine suprafeţei* (Σ) *şi având ca vârfuri punctele unei alte curbe* (A) *a lui* (Σ). În particular, se poate lua ca curbă (B) curba situată la infinit pe suprafaţa (Σ). Fiecare con cu vârful A este atunci un con director al suprafeţei. Deci, *orice suprafaţă desfăşurabilă este înfăşurătoarea conurilor sale directoare având ca vârfuri punctele unei curbe oarecare care aparţine suprafeţei.*

74. **Proprietăţile liniilor trase pe o suprafaţă desfăşurabilă.** Fia AMM′ muchia de întoarcere a suprafeţei desfăşurabile (Fig. 114). Un punct M_1 al suprafeţei este cunoscut, dacă se ştie punctul central M al generatoarei ce trece prin M_1, adică tangenta MM_1 la curba (C), muchia de întoarcere, şi vectorul MM_1. Trebue deci a cunoaşte arcul $AM = s$, socotit de la un punct fix A al curbei (C) şi valoarea algebrică l a vectorului MM_1. Pentru ca M_1 să descrie o curbă (C_1), trebue ca l să fie o funcţie dată de arcul s, $l = f(s)$. Fie i unghiul subt care curba (C_1) tae generatoarea MM_1. Însemnând cu $d\sigma$ unghiul de contingenţă al muchei de întoarcere, ds_1 arcul $M_1M'_1$, aplicând formula relativă la variaţia lungimei unui segment rectiliniu, avem

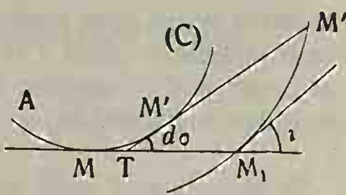

Fig. 114.

(5) $$dl = -ds + ds_1 \cos i.$$

Din triunghiul TM'_1M_1, găsim

$$\frac{M_1M'_1}{\sin(d\sigma)} = \frac{TM_1}{\sin TM'_1M_1},$$

deci

$$M_1M'_1 \sin(i - d\sigma) \sim TM_1 \sin(d\sigma),$$

$$M_1M'_1 \sin i \sim TM_1\, d\sigma, \quad M_1M'_1 \sin i \sim MM_1 d\sigma,$$

(6) $$ds_1 \sin i = l d\sigma.$$

Fie mm', $m_1m'_1$ indicatoarele sferice ale tangentelor pentru muchia de întoarcere (C) şi curba (C_1) (Fig. 115). Planul tangent la suprafaţa desfăşurabilă în M_1 fiind definit de tangenta în M la (C) şi tangenta în M_1 la (C_1), planul cercului mare mm_1 este paralel cu acest plan tangent. Cum acest plan tangent este planul osculator în M la muchia (C), planul cercului mare mm_1 este paralel cu planul osculator în M la curba (C).. Deci acest cerc mare mm_1 este tangent în m arcului mm', căci, şi pentru arcul mm_1 şi pentru arcul mm', sunt confundate în m punctele indicatoarei corespunzătoare la două tangente infinit vecine la curba (C). De asemenea, cercul $m'm'_1$ este tangent în m' arcului mm'.

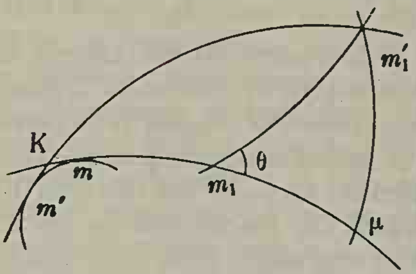

Fig. 115.

Planul format de centrul sferei, punctul m_1 şi tangenta în m_1 la curba $m_1m'_1$ este paralel cu planul osculator în M_1 la curba (C_1). Deci, unghiul θ al arcelor mm_1 şi $m_1m'_1$, în punctul m_1, este egal cu unghiul format de planul tangent în M_1 la suprafaţa desfăşurabilă cu planul osculator în M_1 la curba (C_1).

Să observăm că arcul mm_1 măsoară unghiul i, unghiul tangentelor în M_1 la curba (C_1) şi în M la curba (C); deci

$$mm_1 - m'm'_1 = d\,(mm_1) = di.$$

Să aplicăm proprietatea variaţii de lungime a arcului de cerc mare mm_1 şi anume, variaţia lungimei unui arc de cerc mare mm_1 este echivalentă cu diferenţa deplasărilor extremităţilor m şi m_1, proectate pe direcţia arcului mm_1. Însemnând cu θ unghiul arcelor mm_1 şi $m_1m'_1$, cu $d\sigma \sim$ arc mm', $d\sigma_1 \sim$ arc $m_1m'_1$, unghiurile de contingenţă ale curbelor (C) şi (C_1), se vede că m se deplasează pe mm_1, deci deplasarea extremităţii m face unghiul zero cu direcţia mm_1, iar deplasarea extremităţii m_1, adică $m_1m'_1$, face unghiul θ cu mm_1; deci

(7) $$di = d\sigma_1 \cos\theta - d\sigma.$$

Relaţiunile (5) şi (6) se pot scrie

$$\frac{ds_1}{ds}\cos i = \frac{dl}{ds}+1, \quad \frac{ds_1}{ds}\sin i = l\frac{d\sigma}{ds},$$

sau

(8) $$\frac{ds_1}{ds}\cos i = f'(s)+1, \quad \frac{ds_1}{ds}\sin i = \frac{l}{R},$$

R fiind raza de curbură în M la (C).

Ridicând la pătrat şi adunând, avem

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \left[f'(s)+1\right]^2 + \frac{l^2}{R^2},$$

de unde

(9) $$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\left[f'(s)+1\right]^2 + \frac{l^2}{R^2}}.$$

Din (8) deducem

$$\operatorname{cotg} i = \frac{f'(s)+1}{\left(\frac{l}{R}\right)},$$

(10) $$\operatorname{cotg} i = \frac{R}{f(s)}\left[1+f'(s)\right].$$

Din (7) avem

$$d\sigma_1 \cos\theta = di + d\sigma, \quad \frac{d\sigma_1}{ds_1}\cos\theta = \left(\frac{di}{ds}+\frac{d\sigma}{ds}\right)\frac{ds}{ds_1},$$

(11) $$\frac{\cos\theta}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{\left[f'(s)+1\right]^2+\frac{l^2}{R^2}}}\left(\frac{di}{ds}+\frac{1}{R}\right),$$

R_1 fiind raza de curbură în M_1 la (C_1).

Fie K punctul de intersecţie ale cercurilor mai mari mm_1, $m'm'_1$, (Fig. 115). Să descriem din punctul K ca pol, pe sfera de centru O şi raza 1, un arc de cerc mic, $m'_1\mu$. Fie H intersecţia diametrului HO al sferei (Fig. 116) cu planul dus prin $m'_1\mu$ perpendicular pe KO. Arcul $\mu m'_1$ face parte din cercul cu centrul H şi raza Hm'_1. În triunghiul OHm'_1 (Fig. 116), unghiul HOm'_1 este măsurat de arcul Km'_1, care, afară de infiniţi mici de ordin superior, este echivalent cu arcul de cerc mare $m'm'_1$ (Fig. 115), adică i. Deci, din triunghiul dreptunghic HOm'_1, avem $Hm'_1 \backsim Om'_1 \sin i \backsim \sin i$. Lungimea arcului $m'_1\mu$ în cercul cu centru H şi raza $Hm'_1 \backsim \sin i$ (Fig. 116), este arc $m'_1\mu =$ $Hm'_1 \sphericalangle m'_1 H\mu$. Dar, unghiul $m'_1 H\mu$ măsoară unghiul planelor

$OKm'_1, OK\mu$, adică unghiul planelor cercurilor mari $m'm'_1$, mm_1 (Fig 115); cum aceste plane sunt paralele cu planele osculatoare în M′ şi M la muchia (C), urmează că unghiiul lor, $m'_1H\mu$, este egal cu unghiul de torsiune $d\tau$. Deci, arcul $m'_1\mu = d\tau \sin i$.

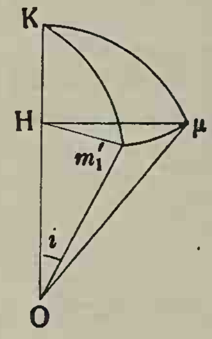

Fig. 116.

În triunghiul dreptunghic $m_1m'_1\mu$ (Fig. 115), avem

$$m'_1\mu \backsim m'_1m_1\sin\theta \qquad d\tau\sin i = d\sigma_1\sin\theta.$$

De unde

$$\frac{d\tau}{ds}\sin i = \frac{d\sigma_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\sin\theta,$$

$$(12)\quad \frac{1}{T}\sin i = \frac{1}{R_1}\sqrt{\left[f'(s)+1\right]^2 + \frac{l^2}{R^2}}\sin\theta.$$

Formulele (9), (10), (11), (12) ne dau toate proprietăţile curbei (C_1) trasă pe supıafaţa desfăşurabilă considerată.

Observare. Să proectăm figura pe planul tangent la suprafaţa desfăşurabilă în M_1. Acest plan este planul osculator în M la muche şi este reprezentat pe sferă cu planul cercului mare mm_1. Planul osculator in M_1 la curba (C_1) este reprezentat pe sferă de Om_1 şi tangenta în M_1 la arcul $m_1m'_1$, deci unghiul θ este unghiul format de planul osculator în M_1 la (C_1) cu planul tangent în M_1 la suprafaţă.

Acest plan tangent trecând prin tangenta în M_1 la curba (C_1), face cu această tangentă unghiul zero. Deci, proectând curba (C_1) pe planul tangent în M_1 la suprafaţă, însemnând cu ρ_1 raza de curbură a proecţii şi aplicând formula (26) de la No. 63, avem

$$\frac{\cos\theta}{R_1} = \frac{1}{\rho_1}.$$

Deci, $\frac{\cos\theta}{R_1}$ este curbura proecţii curbei (C_1) pe planul tangent în M_1 la suprafaţa desfăşurabilă. Din aceasta cauză i se dă numele de *curbură tangenţială* a curbei (C_1) în M_1. Aceasta se mai numeşte şi *curbura geodezică.*

75. **Desfăşurarea suprafeţei desfăşurabile.** Să considerăm mai întâi o curbă plană (c) a cărei curbură este o funcţiune dată $F(s)$ de arcul s al curbei. Însemnând cu α unghiul ce face cu OX tangenta la curba (c) şi la extremitatea arcului s al

curbei, curbura e dată de $\frac{d\alpha}{ds}$; deci $\frac{d\alpha}{ds} = F(s)$. Întregând, avem

$$\alpha = \alpha_0 + f(s),$$

α_0 fiind o constantă. Din relațiile $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$, întegrând, obținem

$$x = x_0 + \varphi(s), \quad y = y_0 + \psi(s).$$

De aci rezultă că funcțiunei $F(s)$ dată, îi corespunde o singură curbă (c), căci constantele x_0, y_0, α_0, care caracterizează fiecare soluție particulară, servesc pentru a fixa în plan poziția curbei (c) și nu au nici o influență asupra formei și dimensiunilor curbei.

Deci, *se poate construi numai o curbă plană și una singură pentru care curbura să fie funcțiunea dată de arc.*

Așa fiind, să considerăm suprafața (S), locul tangentelor la o curbă (C). Însemnând cu s arcul curbei (C), socotit de la origina fixă A, curbura la extremitatea M a arcului s este o funcțiune dată a acestui arc.

Conform proprietății precedente, putem construi în planul P (Fig. 117) o linie (c), a cărei curbură să fie definită de aceeaș lege ca și pentru curba (C). Curbele (c) și (C) se corespund punct cu punct, astfel că curburile în două puncte corespunzătoare sunt egale ca și lungimile arcelor corespunzătoare. Fie M_1 un punct oarecare al suprafeței (S) (Fig. 114), M punctul corespunzător al muchei de întoarcere, m punctul pe (c) (Fig. 117) omologul lui M. Să luăm ca omolog al punctului M_1 al suprafaței punctul m_1 al planului, obținut luând pe tangenta în m la curba (c) un vector mm_1 egal în mărime și în semn în vectorul $MM_1 = l$. Suprafața și planul se corespund atunci punct cu punct, astfel că cantitățile s, $\frac{1}{R}$, l au aceleași valori pe suprafață și pe plan pentru două puncte omoloage. Din relațiile (9), (10), (11), unde figurează numai aceste cantități și derivatele lor în raport cu arcul s, se deduce pentru curbele (c) și (C) aceleași valori pentru $\frac{ds_1}{ds}$, $\operatorname{tg} i$, $\frac{\cos\theta}{R_1}$.

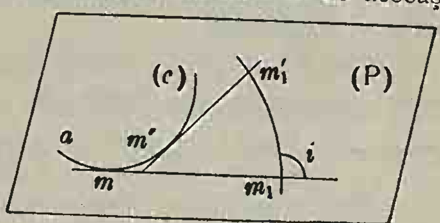

Fig. 117.

De aci rezultă, 1) că această transformare conservă lungimile de arc; 2) de asemenea, se conservă şi unghiurile, căci dacă două curbe care se tae în M_1 pe suprafaţă formează unghiurile i şi j cu generatoarea ce trece prin M_1, curbele omoloage care se tae în m_1, formează cu transformata acestei generatoare aceleaşi unghiuri i şi j; diferenţa $(i-j)$ este aceeaş în plan şi pe suprafaţă, şi deci două linii ale suprafeţei se tae subt acelaş unghi ca şi liniile omoloage din plan.

Această proprietate rezultă de altfel din precedenta, căci este evident că orice transformare a unei suprafeţe care conservă arcele, conservă şi unghiurile.

3) Această transformare conservă şi curbura tangenţială $\frac{\cos\theta}{R_1}$. Planul osculator în cazul unei curbe plane confundându-se cu planul curbei, $\cos\theta$ devine egal cu 1 şi curbura tangenţială este chiar curbura proprie; însemnând cu r_1 raza de curbură a curbei transformate, avem

$$\frac{\cos\theta}{R_1}=\frac{1}{r_1}, \tag{13}$$

de unde numele de *curbură de desfăşurare* care se mai dă curburei tangenţiale.

Când $\theta=0$, atunci planul osculator în M_1 se confundă cu planul tangent la suprafaţă în M_1; curba (M_1) este muchia de întoarcere, $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{r_1}$, adică, *în desfăşurarea pe un plan, raza de curbură a muchii de întoarcere se conservă.*

Din cele expuse de mai sus, rezultă *că suprafaţa locul tangentelor la o curbă, poate fi aplicată pe un plan cu conservarea lungimii arcelor, de unde şi numele de suprafaţă desfăşurabilă dată acestei suprafeţe.*

Transformarea suprafeţei desfăşurabile pe un plan poate fi obţinută cu o deformare continuă. Pentru aceasta, va fi deajuns să facem ca muchia de întoarcere să devină curbă plană, lăsând invariabile lungimea arcului cuprins între două puncte oarecare şi curbura în fiecare punct. Această deformare continuă se zice *desfăşurarea* suprafeţei (S).

Aplicabilitatea suprafeţei desfăşurabile pe un plan poate fi stabilită, procedând astfel. Să înscriem în muchia (C) (Fig. 118) linia poligonală $M_1M_2M_3\ldots$, cu laturi infinit de mici. Laturile M_1M_2, $M_2M_3,\ldots$, prelungite, formează o suprafaţă poliedrală, care se confundă, la limită, cu suprafaţa desfăşurabilă a cărei muche este (C). Dar suprafaţa poliedrală considerată poate fi desfăşurată pe un plan prin rotaţii succesive în jurul laturilor M_1M_2, M_2M_3,... Această proprietate subsistă la limită şi astfel se poate aplica suprafaţa desfăşurabilă pe un plan. Trăgând pe suprafaţa polilderală o linie poligonală $N_1N_2N_3$..., lungimile elementelor acestei linii după desfăşurare, ca şi unghiurile cu muchile adiacente nu sunt alterate. Trecând la limită, se vede că lungimea arcului unei curbe cuprins între două generatoare oarecare şi unghiurile acestei curbe cu generatoarele se conservă în desfăşurare.

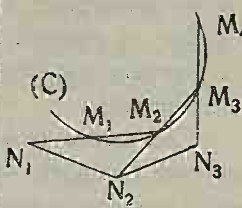

Fig 118.

76. **Liniile geodezice ale suprafeţei desfăşurabile.** Se zice *linie geodezică* a unei suprafeţe desfăşurabile, o linie trasă pe această suprafaţă, pentru care *curbura tangenţială este nulă în fiecare punct.* Din formula (13) se vede că curbura tangenţială este nulă când $\theta = 90^0$, adică *planul osculator la curbă este normal la suprafaţa desfăşurabilă.*

De aci urmează că dacă se desfăşoară suprafaţa pe un plan, *o linie geodezică se transformă* într'o curbă a cărei curbură $\frac{1}{r_1} = 0$, deci o *linie dreaptă.* Aceste linii se bucură de următoarele proprietăţi. Ea măsoară pe suprafaţă cea mai scurtă distanţă de la un punct la altul; prin două puncte ale suprafeţei putem face să treacă numai o linie geodezică şi numai una; orice linie trasă pe suprafaţă admite în fiecare din punctele sale o linie geodezică tangentă; unghiul format de cele două linii geodezice tangente la extremităţile unui arc, este egal cu unghiul tangentelor rectilinii duse la extremităţile arcului transformat; curbura tangenţială într'un punct al unei linii oarecare este deci egală cu unghiul format de liniile geodezice la extremităţile arcului, divizat prin lungimea arcului infinit mic ce înconjură acel punct; din această cauză curbura tangenţială se zice *curbura geodezică.*

APLICAŢII.

77. **Suprafaţa strâmbă a binormalelor. Suprafaţa desfăşurabilă a tangentelor.** Ca aplicaţiuni a celor stabilite, să considerăm suprafeţele riglate născute de muchile, sau înfăşurate de feţele triedrului principal al unei curbe strâmbe,

format de tangenta, binormala și normala principală a unei curbe strâmbe. O astfel de linie poate fi considerată ca muchia de întoarcere a *desfășurabilei, înfășurătoarea planului osculator* în punctul variabil M, tangenta MT fiind caracteristica planului osculator și punctul M punctul de întoarcere (rebroussement).

Cea mai scurtă distanță dintre două binormale infinit vecine este egală cu arcul $MM' = ds$ al curbei date, unghiul acestor binormale este unghiul de torsiune; parametrul de distribuție al planelor tangente la *suprafața riglată a binormalelor* este egal cu $\frac{ds}{d\tau} = T$, raza de torsiune; punctul M este punctul central, curba strâmbă dată este linia de stricțiune comună desfășurabilei descrisă de tangentă și suprafeței strâmbă riglată a binormalelor; astfel de suprafețe se zic conjugate.

78. **Suprafața rectifiantă.** Planul rectifiant conținând tangenta MT, caracteristica sa, sau dreapta rectifiantă, trece prin punctul M. Dar, am văzut [No. 58, formula (14)] că ea face cu planul osculator un unghiu φ, a cărui tangentă este $\frac{T}{R}$, relație care o determină complect. Planul rectifiant fiind perpendicular pe planul osculator în M, unghiul θ din formula (11) (No. 74) este 90^0, deci curbura tangențială este nulă, deci curba dată este o linie geodezică a suprafeței rectifiante și se transformă deci într'o linie dreaptă când se așează suprafața pe un plan, de unde și numele de *plan rectifiant* și *suprafață rectifiantă*.

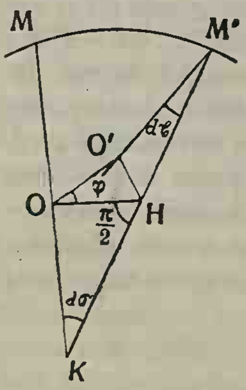

Fig. 119.

79. **Suprafața strâmbă a normalelor principale.** Fie MO și M'O' două normale principale infinit vecine (Fig. 119), O și O' punctele centrale, K centrul de curbură în M. M'K poate fi considerată ca proecția lui M'O' pe planul osculator în M. Să coborâm O'H perpendiculară pe dreapta M'K și să unim O cu H. Triunghiul O'OH este dreptunghic în H.

Planele rectifiante în M și M' sunt respectiv perpendiculare pe MO și M'O'; deci dreapta rectifiantă, adică limita intersecții acestor două plane, este perpendiculară pe MO și M'O', adică paralelă cu limita dreptei OO', care se apropie de perpendiculara comună a dreptelor MO, M'O'. Planul MKM' tinde către planul osculator în M și cum OH este proecția lui OO' pe planul MKM', urmează că unghiul O'OM la limită tinde către unghiul φ format de dreapta rectifiantă cu planul osculator în M. Dar, am văzut [No. 58, formula (14)], că $\operatorname{tg}\varphi = \frac{T}{R}$.

Unghiurile, MKM' este echivalent cu unghiul de contingență $d\sigma$; O'M'H este echivalent cu unghiul format de planele osculatoare în M și M', este deci echivalent cu unghiul de torsiune, $d\tau$.

În triunghiurile O'M'H, OO'H, OHK, avem

$$O'H = O'M' \sin O'MH, \quad O'H \backsim O'M' \sin d\tau, \quad O'H \backsim OM d\tau,$$
$$O'H = OH \operatorname{tg} O'OH, \quad O'H \backsim OH \operatorname{tg}\varphi,$$
$$OH = OK \sin OKH, \quad OH \backsim OK d\sigma.$$

De unde

$$\frac{MO}{OK} \backsim \frac{O'H}{OH}\frac{d\sigma}{d\tau} \backsim \frac{d\sigma}{d\tau}\operatorname{tg}\varphi.$$

Cum $\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{T}{R} = \operatorname{tg}\varphi$, avem, la limită,

$$\frac{MO}{OK} = \operatorname{tg}^2\varphi,$$

de unde

$$\frac{MO}{\sin^2\varphi} = \frac{OK}{\cos\varphi} = \frac{MO + OK}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = R,$$

(14) $$MO = R\sin^2\varphi, \quad OK = R\cos^2\varphi, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{T}{R}.$$

Dar, după formula (16) (No. 58), $d\omega$ fiind unghiul a două normale principale infinit vecine, avem

$$d\omega^2 = d\sigma^2 + d\tau^2,$$

sau

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2, \quad \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2},$$

de unde

$$\frac{d\omega}{ds} = \pm\frac{1}{T}\sqrt{1 + \frac{T^2}{R^2}}, \quad \frac{d\omega}{ds} = \pm\frac{1}{T}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \pm\frac{1}{T\cos\varphi},$$

(15) $$\frac{d\omega}{ds} = \pm\frac{1}{T\cos\varphi}.$$

Pentru a avea parametrul de distribuție la această suprafață a normalelor principale, să observăm că planul tangent în M este format de normala principală MO şi tangenta în M la curba (C), adică planul osculator în M la curba (C). Aplicând formula (2) (No. 67) care dă parametrul de distribuţie al planelor tangente, avem

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{x}{k},$$

φ fiind unghiul format de planul tangent în M cu planul central (tangent în O), $x = \mathrm{OM}$, k parametrul de distribuţie. Dar, planul tangent în M este planul osculator în M; planul tangent în O este limita planului format de MO şi OO'; deci, unghiul acestor două plane tangente este dat de unghiul O'OH, adică tocmai unghiul din formulele de mai sus şi deci parametrul de distribuţie este dat de

$$k = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{tg}\varphi} = \frac{\mathrm{R}\sin^2\varphi}{\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \mathrm{R}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Dar, din (14), $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}$, $\mathrm{R}\sin\varphi = \mathrm{T}\cos\varphi$, deci

(16) $$k = \mathrm{T}\cos^2\varphi,$$

Cea mai scurtă distanţă OO' este dată din triunghiul OO'H,

$$\mathrm{OH} = \mathrm{OO}'\cos\varphi, \quad \mathrm{OO}' = \frac{\mathrm{OH}}{\cos\varphi} = \frac{\mathrm{OK}\sin\mathrm{OKH}}{\cos\varphi} \backsim \frac{\mathrm{R}\cos^2\varphi d\sigma}{\cos\varphi},$$

(17) $$\mathrm{OO}' \backsim \mathrm{R}\cos\varphi d\sigma, \quad \mathrm{OO}' \backsim \frac{ds}{d\sigma}\cos\varphi\, d\sigma, \quad \mathrm{OO}' \backsim ds\cos\varphi.$$

Aplicaţii. Formulele (14), (15), (16), (17) dau toate relaţiile ce pot exista între curba (C) şi suprafaţa strâmbă formată de normalele principale. Ca aplicaţie, *să determinăm curbele* (C) *aşa ca normalele sale principale să fie normale principale la altă curbă* (C_1).

Să observăm (No. 46) mai întâi că segmentul MM_1 din normala comună cuprins între două puncte corespunzătoare ale curbelor (C) şi (C_1), trebue să aibă o lungime constantă; fie l această lungime.

Să considerăm indicatoarele tangentelor la curbele (C) şi (C_1). Tangentele la aceste curbe sferice în punctele m şi m_1, corespunzătoare punctelor M şi M_1, sunt paralele cu normalele principale în M şi M_1, adică sunt paralele. Razele Om şi Om_1 ale sferei, fiind ambele perpendiculare pe direcţia comună a acestor tangente, cercul mare mm_1 este normal la aceste două indicatoare; are deci o lungime constantă şi unghiul i, măsurat de arcul mm_1, este şi el constant. Urmează deci următoarele proprietăţi pentru curbele (C) şi (C_1).

1⁰ *Distanţa* MM_1 *a două puncte corespunzătoare are o lungime constantă,* l.

2⁰ *Unghiul format de tangentele la cele două curbe, în două puncte corespunzătoare are o valoare constantă* i.

3⁰ Să considerăm suprafaţa născută de normala principală MM_1; unghiul i este egal cu unghiul planelor tangente la suprafaţă în M şi M_1. Dacă O este punctul central, k parametrul de distribuţie al planelor tangente, aplicând formula (2) (No. 67), avem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MO}{k}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{M_1O}{k},$$

de unde

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{\frac{M_1O}{k} - \frac{MO}{k}}{1 + \frac{MO.M_1O}{k^2}} = \frac{MM_1.k}{k^2 + MO.M_1O},$$

$$\operatorname{tg} i = \frac{lk}{k^2 + MO(l + MO)},$$

relaţiune în care intră numai elementele curbei (C).

Înlocuind în această relaţie pe MO şi k prin valorile lor (14) şi (16), $k = T\cos^2\varphi$, $OM = R\sin^2\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{T}{R}$, avem

$$k = \frac{TR^2}{T^2 + R^2}, \qquad OM = \frac{RT^2}{T^2 + R},$$

$$\overline{OM}^2 + k^2 = \frac{T^2R^4}{(T^2+R^2)^2} + \frac{R^2T^4}{(T^2+R^2)^2} = \frac{R^2T^2}{R^2+T^2},$$

şi deci

$$\operatorname{tg} i = \frac{l\frac{TR^2}{T^2+R^2}}{\frac{R^2T}{T^2+R^2} + l\frac{RT^2}{T^2+R^2}} = \frac{lR}{RT + lT}, \quad \frac{\cos i}{\sin i} = \frac{R}{T} + \frac{T}{l},$$

sau

$$\frac{\cos i}{T} = \frac{\sin i}{R} + \frac{\sin i}{l}. \tag{18}$$

De aci urmează că, *dacă normalele principale ale unei curbe* (C) *sunt în acelaş timp normale principale la o a doua curbă* (C_1), *curbura şi torsiunea curbei* (C) *verifică o relaţie lineară.* Curbele (C) care se bucură de această proprietate se zic *curbele lui Bertrand.*

Să observăm că elicea este un caz particular al curbelor lui Bertrand, pentrucă raportul curburei către torsiune este constant. Dacă se consideră în particular elicea circulară, pentru care R şi T sunt constante, este evident că normalele principale sunt normale principale la o infinitate de elice de aceeaş axă; suprafaţa formată de aceste normale se zice *elicoidul strâmb.*

4⁰ Să presupunem acum că relaţia (18) este verificată pentru două sisteme de valori i_1, i_2, şi l_1 l_2, ale lui i şi l. Vom avea atunci două ecuaţii care ne dau pe $\frac{1}{R}$ şi $\frac{1}{T}$; aceste două ecuaţii încetează de a mai fi compatibile când $i_1 = i_2$. Dar aceasta nu se poate, căci ar urma ca planul tangent să fie acelaş în două puncte ale aceleaş normale principale, ceea ce este imposibil, căci normalele principale la o curbă strâmbă nu formează o suprafaţă desfăşurabilă, ceea ce se vede din relaţia (16) care dă parametrul de distribuţie. Deci, valorile lui i_1 şi i_2, corespunzătoare la două valori diferite ale lui l, sunt neapărat diferite. Rezultă că valorile lui $\frac{1}{R}$ şi $\frac{1}{T}$, corespunzătoare curbei (C) sunt constante şi această curbă este deci elice circulară. Avem deci următoarea proprietate: *Dacă normalele principale ale unei curbe* (C) *sunt în acelaş timp normale principale la două curbe* (C_1) *şi* (C_2), *ele sunt la o infinitate de curbe; toate aceste curbe sunt elice circulare de aceeaş axă şi normalele lor principale formează un elicoid strâmb.*

80. **Suprafaţa înfăşurătoare a planelor normale.** Am văzut că caracteristica planului normal (No. 55) coincide cu *dreapta polară* (perpendiculara în centrul de curbură pe planul osculator), de aceea se dă numele de *suprafaţă polară* la înfăşurătoarea planelor normale la o curbă strâmbă.

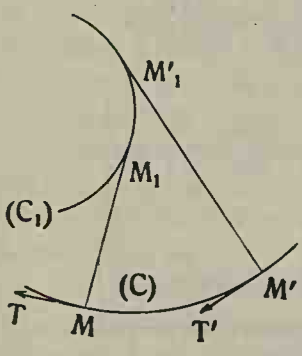

Fig. 120.

Pentru a determina punctul de contact al dreptei polare cu înfăşurătoarea sa, să considerăm sfera care atinge curba (C) în punctul M şi în alt punct infinit vecin M'; această sferă are ca limită sfera osculatoare în M. Cum centrul său este în planul normal în M', centrul sferei osculatoare este deci limita punctului de intersecţie a caracteristicei planului normal în M cu planul normal infinit vecin, adică punctul de contact al dreptei polare cu înfăşurătoarea sa. *Muchia de întoarcere a suprafeţei polare este deci locul centrelor sferelor osculatoare, iar tangenta la curba descrisă de centrul sferei osculatoare este paralelă cu binormala.*

Desfăşurata unei curbe (C) este o altă curbă (C_1), ale cărei tangente tae normal curba (C_1) (Fig. 120). Proprietăţile găsite la curbele plane au loc şi pentru curbele strâmbe. Aşa, de ex., variaţia de lungime a unui segment MM_1 este egal cu arcul corespunzător din desfăşurată şi desfăşurătoarea se obţine prin acelaş procedeu ca şi la curbele plane. O curbă plană sau strâmbă admite o infinitate de desfăşurate, fiecare fiind muchia de întoarcere a unei desfăşurabile (Σ) trecând prin curba (C) şi care este o traectorie ortogonală a generatoarelor. Planul tangent la suprafaţa (Σ), MM_1T, dus prin M_1 şi tangenta MT la curba (C), este (No. 71) osculator desfăşuratei (C_1) în punctul M_1. Binormala desfăşuratei în M_1 este deci perpendiculară pe MT, ea este deci situată în planul normal la (C); punctul M_1 aparţine deci dreptei polare a lui M. Se vede că planul osculator al desfăşuratei conţinând pe MT, este perpendicular pe planul normal în M, adică pe planul tangent la suprafaţa polară. Deci, *curba* (C_1) *este o curbă trasă pe suprafaţa polară,* al cărei plan osculator în M_1 este perpendicular pe planul tangent în M_1 la suprafaţa polară, este, deci, conform definiţii, o *geodezică a suprafeţei polare.*

Deci, *desfăşuratele unei curbe* (C) *sunt pe suprafaţă polară şi formează pe această suprafaţă o familie de linii geodezice.*

Desfăşurarea suprafeţei polare. Rezultă deci că dacă se întinde suprafaţa polară pe un plan, desfăşuratele se transformă în linii drepte. Fie PK dreapta polară relativă la M (Fig. 121), K centrul de curbură. Prin fiecare punct M_1 al lui PK trece o desfăşurată şi numai una şi această desfăşurată tae dreapta PK subt un unghi i, a cărui tangentă este egală cu $\frac{R}{M_1K}$.

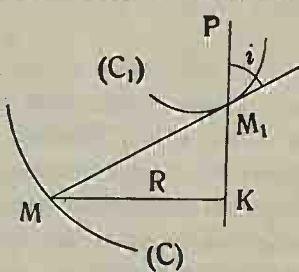

Fig. 121.

Efectuând desfăşurarea, fie (Γ) (Fig 122) curba în care se transformă muchia de întoarcere a suprafaţei polare; PK se transformă într'o tangentă μk la această curbă (Γ); prin fiecare punct m_1 al acestei drepte trece o dreaptă m_1O care este transformata uneia din desfăşurate, iar unghiul i se conservă în desfăşurare.

Fie O punctul unde această dreaptă întâlneşte perpendiculara în k pe μk (Fig. 122). Triunghiul dreptunghic Km_1O (Fig. 122) este egal cu triunghiul KM_1M (Fig. 121), ca având unghiurile din M_1 şi m_1 egale şi latura unghiului drept $m_1k = M_1K$. Urmează deci $Ok = MK = R$ şi deci punctul O este independent de linia geodezică considerată. Avem, astfel următoarea proprietate a lui *Lancret*, *Când se desfaşoară pe un plan suprafaţa polară, desfăşuratele se transformă într'un sistem de drepte concurente şi curba transformată a locului centrelor de curbură este podara punctului lor de întâlnire în raport cu transformata muchii de întoarcere.*

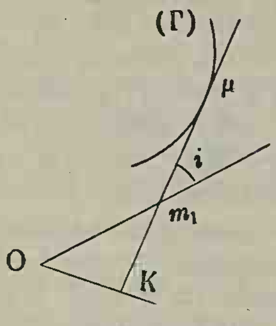

Fig 122.

Observări. I. Să considerăm o desfăşurată ce tae dreapta polară sub unghiul i; această desfăşurată este o geodezică pentru suprafaţa polară, deci planul tangent la suprafaţa desfăşurabilă în M_1 (Fig. 121) este perpendicular pe planul osculator în M_1 la muchia de întoarcere, (M_1). Deci unghiul θ din formula (7) (No. 74) este 90^0 şi deci avem $di = -d\sigma_0$, $d\sigma_0$ fiind unghiul de contingenţă al muchii. Dar, tangenta la muche este dreapta polară, paralelă ca binormala, aşa că unghiul de contingenţă $d\sigma_0$ este unghiul a două binormale infinit vecine, adică tocmai torsiunea $d\tau$ a curbei (C). Deci, $di = -d\tau$, sau $di = -\frac{ds}{T}$ Însemnând cu α unghiul lui MM_1 cu MK (Fig. 121), urmează $\alpha = 90^0 - i$, deci $d\alpha = -di$, $d\alpha = \frac{ds}{T}\cdot$ Intregând,

$$\alpha = \alpha_0 + \int_0^s \frac{ds}{T}\cdot$$

Considerând două valori ale unghiului α, corespunzătoare la două valori diferite ale lui α_0, diferenţa acestor două unghiuri este constantă dealungul curbei (C). Se vede, deci, că, *două normale ale curbei* (C), *care sunt tangente la două desfăşurate diferite, se tae subt un unghi constant.* Deci, dacă se cunoaşte o familie de normale la curba (C) care nasc o desfăşurabilă, adică dacă se cunoaşte o desfăşurată a curbei (C), se obţin celelalte desfăşurate ale curbei (C) învârtind primele normale de un un unghi constant în jurul punctului unde tae curba (C).

II. Locul centrelor de curbură nu poate fi desfăşurată. În adevăr, dacă ar fi aşa, podara punctului O, în raport cu curba (Γ) (Fig. 122) ar fi o dreaptă ce trece prin O, tangentele la curba (Γ) ar fi toate paralele cu aceeaş direcţie fixă şi curba ar fi plană.

Este uşor de văzut care e tangenta în centrul de curbură K al curbei (C) la curba (K) descrisă de acest punct. Pentrucă, afară de infiniţi mici de ordinul al treilea, axele de curbură (dreptele polare) corespunzătoare punctelor infinit vecine M şi M′ ale curbei (C) pot fi socotite că se tae în centrul S al sferei osculatoare în M, apoi, aceste axe fiind respectiv perpendiculare pe planele osculatoare în M şi M′, dreapta KK′ este perpendiculară la intersecţia acestor plane. Deci, la limită, tangenta căutată este perpendiculară pe tangenta MT în M la curba (C). Pe de altă parte, unghiurile MKS, MK′S fiind drepte, elementul KK′ aparţine sferei de diametru MS. Deci, tangenta la locul centrelor de curbură se confundă cu tangenta în K conţinută în planul normal în M la (C), la sfera de diametru MS, sau, încă, cu tangenta în K la cercul circumscris triunghiului MKS.

81. **Suprafeţe de egală pantă. Elicoidul desfăşurabil.** Să considerăm acele suprafeţe desfăşurabile, al căror con director este de rotaţie, cu axa verticală. Planul tangent dealungul fiecărei generatoare G este paralel cu planul tangent la conul director dealungul generatoarei corespunzătoare g. Dar, planul tangent la con admite generatoarea g ca linie de cea mai mare pantă; deci, G este linia de cea mai mare pantă a planului tangent la suprafaţa desfăşurabilă. Planele tangente ale acesteia au deci o pantă constantă, egală cu aceea p a generatoarelor, de unde şi numele de *suprafeţe de egală pantă* ce se dă acestor suprafeţe.

Din cele ce am văzut (No. 73), aceste suprafeţe pot fi considerate ca înfăşurătoarea conurilor directoare, având vârfurile pe una oarecare din liniile ce-i aparţine.

Pentru a ne face idee de forma suprafeţei, să presupunem că dintr'un punct deasupra unui plan orizontal lăsăm să cadă nisip; acesta va lua forma unui con de rotaţie, ale cărui generatoare au în raport cu orizontul o pantă caracteristică ce depinde de natura nisipului. Rezultă, deci, că dacă turnăm la fel nisip dealungul unei linii oarecare, nisipul turnat va lua forma unei suprafeţe de egală pantă ce trece prin această linie.

Fie (H) o secţiune orizontală a unei suprafeţe (Σ). Pentrucă pe fiecare con cu vârful H, generatoarea suprafeţei (Σ) se obţine ducând la con un plan tangent prin tangenta în H la curba (H), se deduce că generatoarea G este normală la (H). Toate generatoarele G ale suprafeţei desfăşurabile (Σ), fiind normale la (H), muchia de întoarcere a suprafeţei (Σ) este o desfăşurată (D) a lui (H). Este deci situată pe suprafaţa polară a lui (H), care este cilindrul vertical (Γ), având ca secţiune dreaptă (D_1) desfăşurata lui (H) situată în acelaş plan cu (H). Generatoarele G, tangente la (D), fiind egal închinate pe orizont, această curbă (D) este o elice trasă pe cilindrul (Γ).

Deci *orice suprafaţă de egală pantă* (Σ) *este locul tangenteor la o elice trasă pe un cilindru vertical* (Γ). Cum planul tangent dealungul fiecărei generatoare se confundă cu planul osculator la această elice [care este muchia de întoarcere a lui (Σ)], urmează că *suprafaţa* (Σ) *tae ortogonal cilindrul* (Γ) *dealungul acestei elice.*

Să considerăm cazul când cilindrul (Γ) este de rotaţie, iar elicea (D) este circulară. Suprafaţa (Σ) se zice atunci *elicoid desfăşurabil.* Desfăşurând elicoidul pe un plan, raza de curbură a muchii de întoarcere se conservă (No. 75) şi cum raza de curbură a elicei circulare este constantă, urmează că curba desfăşurată are raza de curbură constantă, este un cerc. Deci, dacă dintr'o foae subţire de hârtie, se tae un cerc de rază $R = \frac{r}{\cos^2\alpha}$ (r raza cilindrului şi α unghiul elicei, R raza de curbură a elicei, No. 63), apoi, tăind foaia rămasă dealungul uneia din razele cercului, o răsucim pentru a o aşeza ortogonal pe un cilindru de rază $R\cos^2\alpha$, dealungul unei elice de unghiul α, foaia ia forma unui elicoid desfăşurabil, numit *şurupul lui Arhimede.*

NOŢIUNI ASUPRA SUPRAFEŢELOR. PROPRIETĂŢILE CURBELOR TRASE PE O SUPRAFAŢĂ.

82. **Aşezarea unei suprafeţe faţă de planul tangent.** Orice dreaptă ce trece printr'un punct O al unei suprafeţe şi care este situată în planul tangent în acest punct, are cu suprafaţă două puncte comune, confundate cu O. Deci O este un punct dublu al secţiunei făcute în suprafaţă prin planul tangent în O, iar această curbă de secţiune prezintă în O două ramuri.

Tangentele în O la aceste două ramuri se zic *tangente asimptotice*. Aceste tangente au în punctul O trei puncte comune cu suprafaţa, au contact de ordinul al doilea. Orice secţiune plană dusă prin una din ele are punctul O ca punct de inflexiune.

Fie M un punct al suprafeţei a cărui distanţă de punctul O (Fig. 123) să fie infinit mic de ordinul întâi. Să însemnăm cu P proecţia acestui punct pe planul tangent în O. Dacă în punctul O suprafaţa nu prezintă nici o singularitate, distanţa MP este, în general, de ordinul al doilea; această distanţă poate deveni de ordinul al treilea, când punctul P este aşezat pe una din tangentele asimptotice X'X, Y'Y. Se obseră că PM rămâne de aceeaş parte a planului tangent atâta vreme cât proecţia sa P rămâne în interiorul unghiului XOY, sau opusul său X'OY'; PM este de cealaltă parte a planului tangent, dacă P este în celelalte unghiuri X'OY, XOY'. Se pot prezenta trei cazuri.

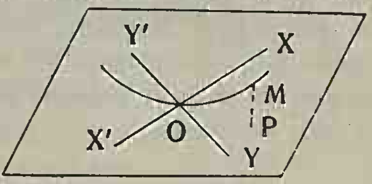

Fig. 123.

1⁰ *Cele două tangente asimptotice sunt imaginare*. În acest caz MP are acelaş semn şi suprafaţa este în vecinătatea lui O faţă de planul tangent cum ar fi elipsoidul. Punctul O se zice *eliptic* şi este un punct dublu izolat al secţiunei prin planul tangent.

2⁰ *Cele două tangente asimptotice sunt reale şi distincte*. Aceste drepte împart planul tangent în două regiuni distincte, fiecare fiind formată din cele două unghiuri opuse la vârf (cu vârful în O). Punctele suprafeţei, vecine de O, sunt aşezate de o parte şi de alta a planului tangent, după cum proecţiile lor sunt în una sau în alta din regiunile determinate în planul tangent de tangentele asimptotice. Suprafaţa, în vecinătatea lui O, este dispusă, faţă de planul său tangent, cum ar fi o suprafaţă riglată de ordinul al doilea. Pentru secţiunea prin planul tangent, punctul O este un punct dublu cu tangente distincte şi punctul O se zice *punct iperbolic*.

3⁰ *Tangentele asimptotice sunt confundate*. Punctul O este atunci un punct de întoarcere al secţiunei cu planul tangent şi se zice *punct parabolic*. În vecinătatea punctului O suprafaţa faţă de planul tangent se prezintă ca o suprafaţă desfăşurabilă într'un punct al muchii sale de întoarcere.

83. Forma suprafeței. Indicatoare. Pentru a ne face o idee de forma suprafeței, într'un punct dat O, vom tăia suprafața cu plane paralele cu planul tangent în O, infinit vecine și echidistante de planul tangent. Distanța MP este o funcțiune de coordonatele x și y ale punctului P raportat la axe fixe din planul tangent; cum această distanță este de ordinul al doilea, partea sa principală este un trinom de gradul al doilea, $ax^2+2bxy+cy^2$. Neglijând infiniții mici de ordinul al treilea, secțiunile făcute cu planele $MP = \pm h$, se proectează pe planul tangent în O după sistemul de două conice conjugate, reprezentate de ecuațiile

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \pm h.$$

Având în vedere numai *forma* suprafeței în O, putem substitui lui h o valoare finită și constantă oarecare, de ex., 1, iar conicele obținute,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \pm 1,$$

sunt omotetice și concentrice cu precedentele. Aceste două conice formează ceea ce se numește *indicatoarea* în punctul O. Ea se compune din două iperbole conjugate având ca asimptote tangentele asimptotice, când punctul este iperbolic; dintr'o elipsă reală și una imaginară, când punctul este eliptic; când punctul O este parabolic, indicatoarea se reduce la două drepte paralele.

84. Curbura unei curbe trase pe suprafață. Teorema lui Meusnier. Fie M un punct al unei curbe (M) trasă pe o suprafață (S) (Fig. 124), MT tangenta în M, M′ un punct infinit vecin. Să luăm în planul tangent axele Mx, My paralele cu axele indicatoarei în M. Fie M_0 piciorul perpendicularei din M′ pe planul tangent, M_0M_1 perpendiculara pe MT. Observând că MM′ diferă de proecția sa MM_0 pe planul tangent Mxy cu un infinit mic de ordinul al doilea, raza de curbură R a curbei (M) în M este dată de

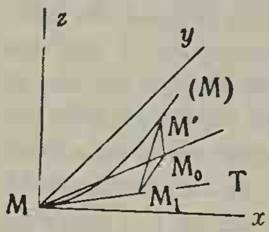

Fig. 124.

$$(1)\qquad R = \lim \frac{\overline{MM_0}^2}{2M'M_1} = \lim \frac{\overline{MM_0}^2}{2M'M_0} \cos \sphericalangle M_0M'M_1.$$

Dar, însemnând cu (x,y) coordonatele punctului M_0, față axele Mx, My, avem

$\overline{MM_0}^2 = x^2 + y^2$ şi deci

$$x = MM_0 \cos xMM_0, \quad y = MM_0 \cos xMM_0.$$

Însă, între $M'M_0 = z$ şi (x, y) avem relaţia

$$z = M'M_0 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2, \tag{2}$$

care este ecuaţia indicatoarei în punctul M, alegând pentru Mx, My paralele cu axele indicatoarei.

Înlocuind în (2) pe x şi y, avem

$$M'M_0 = \overline{MM_0}^2 (\alpha_1 \cos^2 xMM_0 + \alpha_2 \sin^2 xMM_0),$$

aşa că relaţia (1) devine

$$R = \lim \frac{1}{2} \frac{\cos M_0M'M_1}{\alpha_1 \cos^2 xMM_0 + \alpha_2 \sin^2 xMM_0}. \tag{3}$$

La limită, planul MM_0M' devine planul normal dus la suprafaţă prin tangenta MT, planul MM_1M' devine planul osculator în M la (M). Deci, însemnând cu θ unghiul planului osculator cu planul normal şi cu φ limita unghiului xMM_0, adică xMT, avem din (3)

$$R = \frac{\cos\theta}{2(\alpha_1 \cos^2\varphi + \alpha_2 \sin^2\varphi)}. \tag{4}$$

Această expresie rămânând constantă pentru aceeaş valoare a lui φ când θ este acelaş, se vede că R *este acelaş pentru toate curbele trase pe suprafaţă având acelaş plan osculator în* M, *în particular pentru secţiunea făcută în suprafaţă prin planul osculator*. Aceasta aduce studiul curburei unei curbe trasă pe suprafaţă în M la acela al secţiunii plane.

Făcând în (4) pe $\theta = 0$, se vede că

$$R_1 = \frac{1}{2(\alpha_1 \cos^2\varphi + \alpha_2 \sin^2\varphi)} \tag{5}$$

este raza de curbură a secţiunii normale dusă prin MT. Însemnând cu R raza de curbură a secţiunii dusă prin MT ce face cu secţiunea normală unghiul θ, din (4), avem

$$R = R_1 \cos\theta.$$

Adică, *raza de curbură a unei secţiuni plane duse prin tangenta* MT *este proecţia pe planul acestei secţiuni a razei de curbură a secţiunii normale dusă prin* MT. Această teoremă a lui Meusnier reduce încă studiul curburei în M la acela al secţiunilor normale.

85. **Curbura secţiunilor normale.** Să însemnăm cu R raza de curbură a unei secţiuni normale, ce trece prin normala într'un punct M al unei suprafeţe. Valoarea acestei raze este dată de expresia (5),

$$R = \frac{1}{2(\alpha_1 \cos^2\varphi + \alpha_2 \sin^2\varphi)}, \tag{6}$$

unde α_1 şi α_2 sunt coeficienţii din ecuaţia indicatoarei în M, iar φ unghiul format de tangenta MT din planul tangent în M la suprafaţă cu axa Ox, adică cu direcţia uneia din axele indicatoarei.

Făcând în (6) $\varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$, obţinem

$$R_1 = \frac{1}{2\alpha_1}, \quad R_2 = \frac{1}{2\alpha_2},$$

care sunt razele de curbură ale secţiunilor normale corespunzătoare axelor indicatoarei în M, care se zic *secţiuni normale principale.*

Din aceste relaţii, deducem

$$\alpha_1 = \frac{1}{2R_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2R_2},$$

şi deci relaţia (6) devine

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \tag{7}$$

Această relaţie a lui Euler dă raza de curbură R a unei secţiuni normale oarecare în funcţiune de razele de curbură principale R_1 şi R_2 şi de unghiul φ făcut de planul secţiunii normale principale cu planul secţiunii normale.

Inlocuind în relaţia (2), pe α_1 şi α_2 cu valorile lor, ecuaţia indicatoarei devine

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 2z, \quad \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 2h,$$

Însemnând cu ρ semidiametrul indicatoarei ce face unghiul φ cu Mx, avem

$$\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\rho^2\sin^2\varphi}{R_2} = 2h,$$

şi comparând cu (7), urmează

$$\rho^2 = 2hR,$$

deci, *raza de curbură a fiecărei secţiuni normale este propor-*

ţională cu pătratul semidiametrului indicatoarei dirijat după urma acestei secţiuni normale pe planul tangent. Graţie acestei teoreme a lui *Dupin*, variaţia curburei în jurul punctului M este figurată de indicatoare.

Rezultă de aci că dacă două suprafeţe tangente într'un punct au în acel punct aceeaş indicatoare, toate secţiunile determinate în ambele suprafeţe de planele normale comune au aceeaş curbură în punctul considerat. Se zice atunci că cele două *suprafeţe* sunt *osculatoare în punctul considerat.*

Din proprietatea lui Dupin şi acelea ale conicelor, urmează.

1⁰ Printre secţiunile normale corespunzătoare lui M, cele două secţiuni principale sunt acelea ale căror raze de curbură sunt maximum sau minimum.

2⁰ Suma curburilor a două secţiuni normale rectangulare este constantă şi egală cu suma curburilor principale.

3⁰ Suma razelor de curbură a celor două secţiuni normale duse prin doi diametrii conjugaţi ai indicatoarei, este constantă şi egală cu suma razelor de curbură principală.

Aceste ultime două proprietăţi sunt enunţate pentru cazul indicatoarei eliptică. Dacă indicatoarea ar fi iperbolică, trebue înlocuit cuvântul sumă cu diferenţă. De altfel, această distincţie devine inutilă dacă se convine a privi curbura unei secţiuni normale ca pozitivă sau negativă, după cum centrul de curbură este de o parte sau de alta a planului tangent.

Toate aceste rezultate sunt conţinute în formula (7) a lui Euler,

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}.$$

Observări. I. Curbura secţiunii normale se anulează, când planul trece printr'o asimptotă a indicatoarei, ceea ce rezultă din faptul că secţiunea normală corespunzătoare admite punctul M ca punct de inflexiune.

Condiţia ca o conică să fie de gen parabolic exprimându-se cu o singură relaţie între parametrii, urmează că punctele parabolice ale unei suprafeţe sunt aşezate pe o linie care separă suprafaţa în două regiuni, din care una conţine punctele eliptice, cealaltă punctele iperbolice.

II. Sunt pe orice suprafaţă puncte eliptice pentru care indicatoarea este un cerc. Un astfel de punct, care se zice *ombilic*, este, în general, un punct izolat, căci condiţiile ca indicatoarea să fie redusă la un cerc se exprimă prin două relaţii între parametrii conicei. Se poate întâmpla, însă, că pe o suprafaţă particulară, una din aceste ecuaţii să se reducă la o identitate; în acest caz ombilicurile formează un şir continuu şi sunt aşezate pe o linie.

86. **Tangente conjugate.** Când un punct M descrie o curbă (C) pe o suprafaţă, planul tangent în M, a cărui poziţie depinde de un parametru, înfăşură o desfăşurabilă circumsrisă suprafeţei dealungul curbei (C) şi caracteristica planului tangent trece prin punctul M. Există între direcţiile acestei caracteristice şi tangenta MT la curba (C) o relaţie remarcabilă.

În adevăr, fie M′ (Fig. 125) un punct variabil al curbei (C), infinit vecin de M. Planele tangente (P) şi (P′) în M şi M′ se tae după o dreaptă (D) care, la limită, devine caracteristica MT_1 şi care atinge suprafaţa în M. Trebue deci ca ea să întâlnească suprafaţa în două puncte M_1, M'_1, infinit vecine de M. Să presupunem că punctul M este iperbolic; cele patru puncte M, M′, M_1, M_1' sunt vârfurile unui patrulater curbiliniu, format de cele patru ramuri ale secţiunilor făcute în suprafaţă prin planele (P) şi (P′). Tangentele în M_1 şi M_1' la aceste patru ramuri formează un patrulater strâmb $M_1 M_1' \mu\mu'$ a cărui diagonală $\mu\mu'$ este intersecţia planelor tangente (P_1), (P'_1) în punctele M_1, M'_1. Să observăm că una cel puţin din cele două coarde MM_1, MM'_1 nu este infinit mic în raport cu coarda MM′, căci în acest caz cele trei segmente M′M, $M'M_1$, $M'M'_1$ ar avea aceeaş direcţie limită şi punctul M ar fi parabolic. Pe de altă parte, $M\mu$ este infinit mic cel puţin în raport cu una din coardele MM_1, MM'_1, căci altfel, direcţia sa limită ar fi tangentă de o dată la cele două ramuri de curbă ce pleacă din M, ceea ce este imposibil. Deci $M\mu$ este infinit mic în raport cu MM′ şi de asemenea şi $M'\mu'$. Deci dreptele $\mu\mu'$ şi MM′ au aceeaş direcţie limită şi tangenta MT se deduce din MT_1, după cum MT_1 se deduce din MT. Aceste două tangente se zic pentru acest motiv *tangente conjugate.*

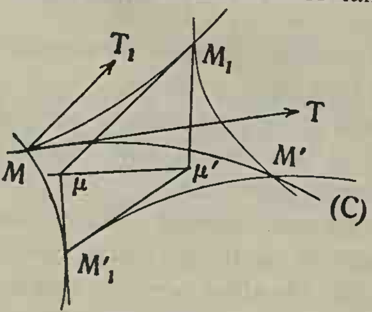

Fig. 125.

Din cele de mai sus rezultă că o tangentă variabilă şi conjugata sa descriu, în planul tangent, două fascicole în involuţie. Pentru ca MT să se confunde cu MT_1, trebue ca punctul M să fie punctul de întoarcere al planului tangent. Dacă MT se confundă cu MT_1, planul tangent, ce conține tangenta MT, are în acest caz drept caracteristică tangenta în M la curba (C), este deci planul osculator în M la curba (C). Secțiunea normală dusă prin MT trebue să aibă un punct de inflexiune în M; deci, când MT se confundă cu MT_1, atunci MT trebue să fie una din tangentele asimptotice. Dar când MT se confundă cu MT_1, aceasta este o rază dublă a involuții determinate și deci razele duble ale involuții determinate de tangentele conjugate sunt asimptotele indicatoarei.

Rezultă de aci că o pereche de tangente conjugate, formând un fascicol armonic cu razele duble, coincide cu un sistem de diametrii conjugați ai indicatoarei și în particular, axele acestei conice formează perechea de raze perpendiculare ale acestei involuții.

Se știe însă că, dacă într'un sistem în involuție, sunt două perechi de raze perpendiculare, razele duble sunt izotrope și atunci toate perechile de raze conjugate sunt perpendiculare. Indicatoarea este atunci un cerc și punctul M este un ombilic.

Se vede de asemenea că caracteristica planului tangent este nedeterminată când să deplasează pe tangenta asimptotică ce pornește dintr'un punct parabolic.

87. **Linii asimptotice**. 1⁰ Se zice *linie asimptotică* o linie trasă pe suprafață, a cărei tangentă în fiecare punct coincide cu conjugata sa; o astfel de linie atinge, în fiecare punct al său, una din asimptotele indicatoarei. Există, deci, în general, pe o suprafață oarecare, două familii de linii asimptotice, reale sau imaginare, după cum suprafața admite sau nu puncte iperbolice.

2⁰ Orice dreaptă situată pe suprafață este o linie asimptotică, căci orice plan trecând prin această dreaptă dă loc la o secțiune ale cărei toate punctele sunt puncte de inflexiune. Dacă, mai mult, planul tangent este acelaș dealungul acestei drepte, caracteristica sa este în fiecare punct nedeterminată, iar cele două raze duble ale involuții se confundă, căci cele două tangente asimptotice se confundă. În acest caz, cele două linii asimptotice, în fiecare punct al dreptei considerate, se confundă cu această dreaptă; toate punctele sunt parabolice.

Așa dar, pe o suprafață desfășurabilă, cele două familii de linii asimptotice se reduc la una singură, formată din generatoare, și toate punctele unei astfel de suprafață sunt puncte parabolice.

Reciproc, *orice suprafață (S) ale cărei toate punctele sunt parabolice este o suprafață desfășurabilă.* În adevăr, pe o astfel de suprafață, cele două familii de linii asimptotice se reduc la una singură. Deplasându-ne dealungul uneia din aceste linii asimptotice, caracteristica planului tangent este într'una nedeterminată, ceea ce însemnează că planul tangent este invariabil. Suprafața admite deci un sistem de generatoare, astfel că planul tangent este acelaș dealungul lor. Fie (G) o astfel de generatoare a suprafeței (S). Planul (P) tangent la suprafață dealungul lui (G) depinde de acelaș parametru de care depinde generatoarea (G), deci de un singur parametru. Așa dar, planul (P) când variază admite o caracteristică (D). Dar acest plan este tangent la suprafața (S) în punctul M, care se găsește pe caracteristica (D). Să presupunem că în mișcarea planului tangent, punctul de contact descrie pe suprafață drumul infinit mic MM'. Dar, necontenit punctul de contact M este pe caracteristica (D), oricare ar fi poziția acestui punct pe generatoarea (G); cu alte cuvinte, toate punctele generatoarei (G) aparțin lui (D), sau că generatoarele suprafeței (S) sunt linii drepte. Deci *dacă suprafața admite o familie de generatoare, astfel că dealungul lor planul tangent să fie invariabil, aceste generatoare sunt linii drepte, suprafața este desfășurabilă.*

Observare. Planele tangente la o suprafață oarecare depind în general de doi parametrii (formează, în general, un ansamblu dublu infinit); numai la suprafețele desfășurabile planele tangente depind de un singur parametru (o simplă infinitate). Nu există, în general, pe o suprafață, o curbă, dealungul căreia planul tangent să fie invariabil, aceasta poate să aibă loc excepțional pentru o curbă izolată, cum sunt, de ex., paralelele extreme ale torului. În cazul suprafețelor desfășurabile, această proprietate aparține la toate generatoarele.

3° Dealungul unei linii asimptotice, tangentele conjugate se confundă, adică tangenta într'un punct M al acestei linii este caracteristica planului tangent la suprafață când ne deplasăm pe această linie (Fig. 125). Dar planul tangent la suprafață conținând tangenta MT și având caracteristică chiar această dreaptă, este planul osculator la curba (C) în M, căci caracteristica planului osculator este tangenta la curba strâmbă. Deci, *o linie asimptotică este o linie trasă pe suprafață astfel că planul osculator într'un punct al ei este tangent la suprafață. Sau, linia asimptotică coincide cu muchia de întoarcere a supra-*

feței desfășurabile circumscrisă suprafeței (S) *dealungul acestei linii.*

4^0 Să presupunem că toate suprafețele desfășurabile circumscrise dealungul liniilor asimptotice ale unei aceleaș familii au în comun o curbă (Γ). Fie (g) o astfel de linie asimptotică-μ punctul unde tangenta în M întâlnește curba (Γ) (Fig. 126) Se poate ca punctul μ să rămâe invariabil când M variază; linia (g) ale cărui toate tangentele trec prin acelaș punct μ este evident linie dreaptă și suprafața (S) este desfășurabilă. Dacă μ variază cu M, planul osculator al lui (g) în M atinge suprafața desfășurabilă născută de Mμ în fiecare punct al acestei drepte. Cum curba (Γ) este presupusă situată pe această suprafață desfășurabilă, planul tangent conține tangenta μt la curba (Γ).

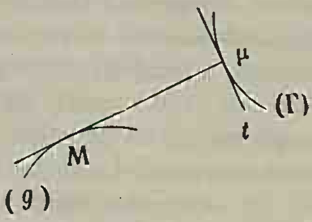

Fig. 126.

Dacă această proprietate are loc pentru toate liniile asimptotice ale unei aceleaș familii, se vede că toate planele tangente la suprafața (S) vor fi tangente la aceaș curbă (Γ). Aceste plane tangente la suprafața (S) depind de un singur parametru, suprafața este deci o suprafață desfășurabilă. Deci, *dacă suprafețele desfășurabile născute de tangentele la toate liniile asimptotice ale unei aceleaș familii a suprafeței* (S) *au în comun o curbă* (Γ), *suprafața* (S) *este desfășurabilă.*

5° În acest ultim caz cele două familii de linii asimptotice se confundă. Deci, dacă proprietatea enunțată aparține numai la una din cele două familii de asimptotice, trebue ca μ să fie invariabil pe (Γ) pentru fiecare generatoare (g) și variază numai când se trece de la o generatoare la alta. Suprafața (S) este deci o suprafață strâmbă riglată trecând prin curba (Γ).

Deci, *dacă suprafețele desfășurabile circumscrise dealungul unei aceleaș familii de linii asimptotice se tae după aceaș curbă* (Γ), *aceste linii asimptotice sunt drepte.*

6° Dacă se ține seamă că orice suprafață dublu riglată este cuadrică, urmează că *dacă două familii de suprafețe desfășurabile circumscrise dealungul celor două familii asimptotice trec respectiv prin două curbe fixe* (Γ) *și* (Γ'), *suprafața considerată este de ordinul al doilea.*

Observare. Este evident că se poate înlocui în cele ce preced curba fixă (Γ) cu o suprafață fixă (Σ), la care să fie circumscrise suprafețele desfășurabile dealungul asimptoticelor. Se poate deasemenea presupune că cele două curbe (Γ) și (Γ'), sunt distincte sau confundate.

7⁰ Sa aplicăm cele ce preced la cazul când una din cele două curbe, (Γ) de ex., este cercul de la infinit. Suprafata este atunci o srprafață riglată cu generatoare izotrope. Asimptotele indicatoarei sunt drepte izotrope, deci indicatoarea este un cerc, punctele suprafeței sunt ombilicuri. Dacă presupunem că această suprafață este reală, ea va fi dublu riglată și cum trebue să conție cercul de la infinit, ea este o sferă. Deci, *sfera este singura suprafață reală ale cărei toate punctele sunt ombilicuri.*

8⁰ *Aplicație.* Orice suprafață de ordinul al doilea fiind dublu riglată, are ca linii asimptotice aceste două sisteme de generatoare. Dar, este evident că suprafața (S) formată de normalele principale ale unei curbe strâmbe (C) admite această curbă ca linie asimptotică, căci planul osculator al acestei linii (C) este evident tangent la suprafața (S) [planul osculator este format de normala principală și tangenta în M la cucba (C), cere fiind tangente la două curbe de pe suprafața (S) formează planul tangent la suprafața (S)]. Deci, *normalele principale ale unei curbe strâmbe nu pot niciodată să formeze o suprafață de ordinul al doilea, ele nu pot niciodată să întâlnească trei drepte fixe, nici să întâlnească două drepte fixe rămânând paralele cu un plan fix.*

9⁰ *Aplicație la elicoid șurup pătrat. Exemplu de determinare de linii asimptotice ale unei suprafețe riglate.* Să considerăm suprafața (S) născută de normalele la un cilindru circular dealungul unei elice trasă pe cilindru, suprafață care se numește *elicoid șurup pătrat.* Fie M un punct care descrie elicea. Dacă M se ridică cu cantitatea z dealungul axei când raza cilindrului ce trece prin acel punct se rotește de unghiul ω, se știe că $z = h\omega$. Dar, pentru orice punct însemnat M' pe raza punctului M, z și ω sunt aceleași. Deci acest punct M' descrie o elice de acelaș pas redus ca și acela al lui M. Se vede astfel că intersecțiile elicoidului cu cilindrii circulari având ca axă axa cilindrului dat, sunt elice de acelaș pas. În fiecare punct al acestei suprafețe planul tangent e determinat de tangenta la elice și de generatoarea rectilinie, adică normala la cilindru pe care e trasă elicea; deci acest plan se confundă cu planul osculator la elice. Așa dar, *fiecare din aceste elice este* *o linie asimptotică a elicoidului*. Cele două linii asimptotice, elicea şi normala la cilindru, sunt ortogonale în fiecare punct; indicatoarea este iperbolă echilateră şi, cum vom vedea, suprafaţa aparţine categorii de suprafeţe minime.

88. **Linii de curbură.** 1⁰ Se zice linie de curbură o linie care atinge în fiecare din punctele sale una din cele două axe ale indicatoarei. Din această definiţie rezultă că există pe fiecare suprafaţă o reţea conjugată ortogonală formată de liniile de curbură. Această reţea este totdeauna reală, pe când reţeaua asimptotică este când reală când imaginară.

2⁰ Este uşor de văzut ce sunt liniile de curbură pe suprafeţe particulare. Pe o suprafaţă desfăşurabilă, liniile pe curbură sunt generatoarele şi traectoriile lor ortogonale, ceea ce rezultă din faptul că într'un punct parabolic cele două direcţii coincid cu una din direcţiile principale.

3⁰ De aci rezultă o proprietate importantă a liniilor de curbură pentru o suprafaţă oarecare. În cazul unei *suprafeţe desfăşurabile, normalele la suprafaţă dealungul unei generatoare* (care formează un sistem de linii de curbură) *formează un plan, deci o suprafaţă desfăşurabilă*.

Fie o curbă oarecare (C) trasă pe o suprafaţă desfăşurabilă şi două puncte infinit vecine M şi M′ (Fig. 127), m şi m' punctele corespunzătoare ale muchii de întoarcere. Normalele în M şi M′ la suprafaţă sunt perpendiculare pe planele tangente în M şi M′, adică pe planele osculatoare în m şi m' la muchie; deci aceste normale la suprafaţă în M şi M′ sunt paralele cu binormalele în m şi m' la muchia de întoarcere.

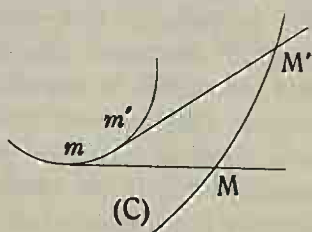

Fig. 127.

Planul normal în m este paralel cu limita către care tinde planul format de binormalele în m şi m'. Deci, un plan dus prin normala în M şi paralel cu normala în M′ este la limită paralel cu planul normal în m, adică cu planul dus prin M perpendicular pe mM. Aşa dar, cea mai scurtă distanţă dintre normalele în M şi M′ are ca parte principală distanţa de la punctul M′ la planul dus prin M perpendicular pe mM. Dar această distanţă are ca parte principală produsul lui MM′ cu cosinusul unghiului sub care curba (C) tae pe mM. Însă, pentruca suprafaţa născută de normalele în M şi M′ să fie desfăşurabilă, trebue ca cea mai scurtă distanţă a lor să fie infinit mic de un ordin superior; deci trebue să fie zero cosinusul unghiului sub care curba MM′ tae pe mM, adică curba (C) să fie traec-.oria ortogonală a generatoarelor rectilinii a suprafeţei desfăşurabile date.

Aşa dar, pe o suprafaţă desfăşurabilă, normalele la suprafaţă dealungul generatoarelor rectilinii şi traectoriilor lor ortogonale, nasc suprafeţe desfăşurabile. Dar, pe o suprafaţă desfăşurabilă, generatoarele rectilinii şi traectoriile lor ortogonale formează reţeaua ortogonală de linii de curbură. Deci, pentru suprafeţele desfăşurabile, normalele la suprafaţă dealungul liniilor de curbură nasc suprafeţe desfăşurabile.

Această proprietate a liniilor de curbură are loc şi pentru o suprafaţă oarecare. În adevăr, M fiind un punct al unei linii de curbură a unei suprafeţe (S), planul tangent dealungul acestei linii de curbură descrie o suprafaţă desfăşurabilă (Σ) care conţine linia de curbură (M). Dar, caracteristica (G) a planului tangent în M este conjugată cu tangenta în M la linia de curbură. Însă această tungentă MT este o axă a indicatoarei. Caracteristica fiind conjugată în indicatoare cu ea, este cealaltă axă, adică perpendiculară pe MT.

Deci, generatoarea (G) a suprafeţei (Σ) tae ortogonal curba (M); deci, pe suprafaţa desfăşurabilă (Σ), (G) şi (M) sunt două linii de curbură. Dar suprafeţele (S) şi (Σ) au aceleaşi plane tangente dealungul linii de curbură şi deci şi aceleaşi normale. Însă, normalele la suprafaţa desfăşurabilă (Σ) dealungul linii de curbură (M) formează o suprafaţă desfăşurbilă. Deci, *pentru orice linie de curbură a unei suprafeţe, normalele la suprafaţă dealungul linii de curbură nasc o suprafaţă desfăşurabilă.* Această proprietate a liniilor de curbură îi poate servi ca definiţie.

Dacă se consideră, de ex., o suprafaţă de rotaţie, suprafeţele născute de normalele dealungul meridianelor sunt plane, cele relative la paralele sunt conuri de rotaţie. Deci cele două familii de linii de curbură sunt compuse din meridianele şi paralelele suprafeţei de rotaţie.

Observare. Într'un ombilic, direcţiile principale sunt nedeterminate, liniile de curbură ale uneia din cele două familii se reunesc toate, cum sunt meridianele în vârful unei suprafeţe de rotaţie; acelea din a doua familie înconjură acest ombilic, ca paralelele în jurul vârfului suprafeţei de rotaţie.

4⁰ Normala MN la suprafaţă este normală şi curbei (M). Dar se ştie că punctul de contact al acestei normale cu înfăşurătoarea sa este pe dreapta polară a curbei (M) pentru punctul M, adică pe perpendiculara pe planul osculator dusă prin centrul de curbură al curbei (C) în M. Dar, după teorema lui Meusnier, această perpendiculară trece prin centrul de curbură al secţiunii normale conţinând pe MT şi cum MT este o axă a indicatoarei, această secţiune normală este secţiunea normală principală conţinând pe MT. Aşa dar, această perpendiculară trece prin centrul de curbură al secţiunii normale principale ce conţine pe MT şi deci *punctul de contact al normalei* MN *cu înfăşurătoarea sa este centrul de curbură al secţiunii principale ce conţine pe* MT. Aşa dar, *înfăşurătoarea normalelor dealungul unei linii de curbură se confundă cu locul centrelor de curbură principale corespunzătoare.*

Pentrucă fiecare linie de curbură (M_1) admite ca muche de întoarcere (C_1) a normalii sale (suprafaţa desfăşurabilă născută de normalele la suprafaţă dealungul acestei curbe) locul centrelor de curbură principală (C_1) corespunzătoare, dacă se consideră toate liniile de curbură ale unui aceluiaş sistem cu (M_1), muchile de întoarcere (C_1) (Fig. 128) nasc o suprafaţă (Σ_1) la care toate normalele suprafeţei (S) date sunt tangente, pentru că sunt tangente fiecare la o curbă (C_1) a suprafeţei (Σ_1). De asemenea, locul curbelor (C_2) ale centrelor de curbură principale corespunzătoare sistemului al doilea (M_2) de linii de curbură nasc o suprafaţă (Σ_2) la care toate normalele suprafeţei (S) sunt tangente.

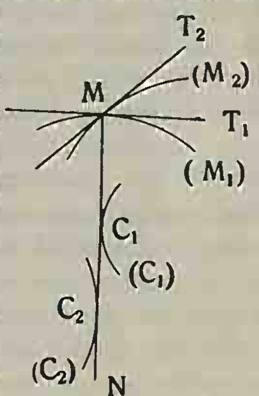

Fig. 128.

Deci, *toate normalele suprafeţei* (S) *sunt tangente deodată la pânzele* (Σ_1) şi (Σ_2), *amândouă constituind desfăşurata suprafeţei* (S).

5⁰ Să determinăm planul tangent la această desfăşurată în fiecare din punctele C_1 şi C_2. Considerând mai întâi punctul C_1 (Fig. 128), se vede că normala MN rămânând tangentă la (C_2), ea naşte o suprafaţă desfăşurabilă. Cum rămâne tangentă la (Σ_1), desfăşurabila pe care ea o naşte este circumscrisă la această suprafaţă, al cărei plan tangent în C_1 este acelaş ca cel tangent la desfăşurabilă dealungul generatoarei C_2M. Dar, acest plan tangent în M e determinat de generatoarea C_2M şi tangenta MT_2 la curba (M_2) pe care o descrie M, adică planul principal NMT_2. De asemenea, planul tangent la (Σ_2) în M_2, este planul principal NMT_1. Deci, *planul tangent la desfăşurată în fiecare din centrele de curbură principală, situate pe aceeaş normală, este planul principal corespunzător la celalt.*

Să observăm că aceste plane tangente sunt perpendiculare şi cum planul NMT_1, tangent la desfăşurabila a cărei muche este (C_1) este osculator la această muche în C_1, unde planul tangent la desfăşurată este NMT_2, urmează că *curbele* (C_1) *şi* (C_2) *sunt astfel că în fiecare din punctele lor planul lor osculator este normal la desfăşurata suprafeţei.*

6⁰ Dacă punctul M se mişcă pe o curbă oarecare a suprafeţei ce trece prin M, normala MN nu mai naşte o desfăşurabilă, dar pentrucă ea rămâne tangentă la (Σ_1) şi (Σ_2), planele tangente la suprafaţa pe care o nasc sunt aceleaşi ca cele tangente la (Σ_1) şi (Σ_2) în C_1 şi C_2, adică MT_2N şi MT_1N. Avem astfel teorema lui Mannheim, *toate normaliile corespunzătoare la toate liniile suprafeţei ce trec prin* M *se racordează în centrele de curbură principale* C_1 *şi* C_2 *situate pe normala în* M, *planul tangent comun în fiecare dintre ele fiind planul principal corespunzător la celalt.*

7⁰ Din faptul că dealungul linii de curbură, normalia este desfăşurabilă, urmează importante proprietăţi. Să considerăm o linie comună (M) la două suprafeţe, care este linie de curbură pe fiecare din ele; normaliile la cele două suprafeţe dealungul acestei linii fiind desfăşurabile, cele două familii de normale la curba (M) admit câte o desfăşurată şi deci (No. 80, observarea I) normalele respective în fiecare punct al curbei (M) fac un unghi constant. Aşa dar, *cele două suprafeţe se tae dealungul linii* (M) *sub un unghi constant.*

Se vede, de asemenea, *că dacă două suprafeţe se tae subt un unghi constant după o linie care este linie de curbură pentru una din ele, este de asemenea şi pentru cealaltă.*

Acestea sunt proprietăţile lui Ioachimsthal.

Ca un caz particular, se vede *că dacă o suprafaţă* (S′) *este circumscrisă unei suprafeţe* (S) *dealungul unei linii de curbură* (M) *a suprafeţei* (S), *suprafaţa* (S′) *admite şi ea linia* (M) *ca linie de curbură.*

8⁰ Orice linie trasă pe un plan sau pe sferă putând fi privită ca o linie de curbură a planului sau a sferei, se vede că, *dacă un plan sau o sferă tae o suprafaţă* (S) *dealungul unei curbe* (M) *subt un unghi constant, această curbă* (M) *este o* *linie de curbură a lui* (S) *și reciproc, dacă o linie de curbură* (M) *a unei suprafețe* (S) *este plană sau sferică, planul sau sfera care conține* (M) *întâlnește suprafața* (S) *dealungul acestei linii subt un unghi constant.*

89. **Exemple de determinare geometrică a liniilor de curbură.** Am văzut că liniile de curbură a suprafețelor desfășurabile sunt generatoarele și traectoriile lor ortogonale (desfășurătoarele muchii de întoarcere a acestei desfășurabile). Dacă desfășurabila este suprafață de egală pantă în raport cu orizontul, al doilea sistem de linii de curbură este dat de secțiunile sale orizontale.

Pentru un con, al doilea sistem de linii de curbură, traectoriile ortogonale ale generatoarelor sunt intersecțiile conului cu sfere având centrul în vârful conului.

Considerând suprafața înfășurătoare de sfere, cercul după care această suprafață este atinsă de fiecare sferă este o linie de curbură a acestei suprafețe și reciproc, *orice suprafață posedând un sistem de linii de curbură circulare este o suprafață înfășurătoare de sfere.*

Fie N centrul sferei variabile descriind curba (N). Se vede că toate normalele la suprafață dealungul cercului de contact (M) al sferei și al suprafeței [situat în planul normal la (N) în punctul N] trec prin centrul N care constitue desfășurata (γ) a linii de curbură (M). Centrul N este deci deodată centrul de curbură principală pentru toate secțiunile normale tangente la cercul (M). Deci, în acest caz, pânza (Σ) a desfășuratei a suprafeței se reduce la curba (N).

Ca exemplu de suprafețe înfășurătoare de sfere, putem cita cazul când razele sferelor au o valoare constantă, când suprafața se zice *suprafață canal*, și apoi cazul când locul (N) al centrelor sferelor este o linie dreaptă, când *suprafața* se zice *de rotație.*

Se vede deci că suprafețele de rotație admit ca linii de curbură: 1) paralelele (cercurile de contact cu sferele înfășurate), astfel că pentru toate punctele ale unui aceluiaș paralel centrul de curbură principal corespunzător este vârful conului normalelor; 2) meridianele, care sunt traectoriile ortogonale, astfel că pentru fiecare din punctele sale, centrul de curbură principal corespunzător este acela al meridianului însuși (al cărui plan este normal la suprafață).

Să considerăm suprafața de rotație, născută din rotația unei chaînette în jurul bazei sale, numită *catenoidă (aliseidă)*. Fie C centrul de curbură într'un punct al unei chaînette şi N punctul unde normala MN tae baza, să ştie că $CM = MN$. Razele de curbură principală pentru catenoidă sunt, MC pentru meridian (chaînette) şi MN pentru paralelul descris de M. Cum $MN = CM$, C şi N fiind simetrice în raport cu M, urmează că pentru catenoidă, razele de curbură principale sunt egale şi de semn contrar.

Pentru *tor*, raza de curbură principală corespunzătoare paralelului este lungimea normalei limitată la axă, aceea care corespunde meridianului, este raza cercului meridian.

Torul este, de altfel, un caz particular al suprafeţei ale cărei linii de curbură sunt circulare în ambele sisteme, numită *ciclida lui Dupin*. Dealungul fiecăreia din liniile de curbură care se tae într'un punct al ciclidei, sunt sfere, de unul şi celalt sistem, care sunt tangente la suprafaţă; aceste două sfere sunt deci tangente între ele în punctul considerat. Rezultă că, fiecare sferă din unul din cele două sisteme este tangentă la toate sferele celuilalt sistem. Dar, trei, oarecare din sferele sistemului al doilea pot determina ansamblul ∞^1 al tuturor celor din primul sistem. Se poate deci zice că *ciclida este înfăşurătoarea tuturor sferelor tangente la trei sfere date.*

Fie (C) o linie de curbură a suprafeţei (S) şi (D) desfăşurabila circumscrisă la (S) dealungul lui (C) [înfăşurătoarea planelor tangente la (S) dealungul lui (C)], desfăşurabilă ale cărei toate generatoarele rectilinii G, în virtutea teoremei direcţiunilor conjugate, sunt pretutindeni ortogonale lui (C) şi care, în baza teoremei lui Ioachimsthal, admite de asemenea pe (C) ca linie de curbură. Prin inversiune, dreptele G dau pe suprafaţa (D′) inversa lui (D), cercuri (G′) dealungul cărora sunt circumscrise lui (D′) sferele inverse ale planelor tangente la (D) dealungul generatoarelor (G); aceste cercuri (G) sunt (în virtutea aceleaş teoreme a lui Ioachimsthal) linii de curbură ale lui (D′) şi prin urmare, inversa (C′) a lui (C), care le este ortogonală din cauza conservării unghiurilor, este de asemenea o linie de curbură a suprafeţei (D′) şi cum suprafeţele (D′) şi (S′) se racordează dealungul lui (C′), după cum (D) şi (S) dealungul lui (C), (C′) este de asemenea o linie de curbură a lui (S′).

Rezultă de aci teorema lui *Fouché*, *inversiunea conservă liniile de curbură.*

În particular, dacă se transformă prin inversiune o suprafață, ale cărei cele două sisteme de linii de curbură sunt circulare, se obține o suprafață care se bucură de aceeaș proprietate; deci, *inversa unei ciclide a lui Dupin este o ciclidă a lui Dupin.*

Putem aranja polul de inversiune ca această inversă să fie un tor. În adevăr, fie (S_1), (S_2), (S_3) cele trei sfere fixe la care rămân tangente sferele (Σ) a căror înfășurătoare este ciclida considerată. Planul centrelor acestor trei sfere le tae după trei cercuri admițând un cerc ortogonal comun (Γ), care are ca centru centrul lor radical; cercul (Γ) este ortogonal celor trei sfere. Luând ca pol orice punct al acestui cerc, sferele (S_1), (S_2), (S_3) se transformă în sferele (S'_1), (S'_2), (S'_3) ortogonale dreptei Δ, transfo mata lui (Γ), deci având centrele pe această dreaptă Δ. Suprafața transformată a ciclidei este deci înfășurătoarea sferelor (Σ') tangente la cele trei sfere (S'_1), (S'_2), (S'_3) și se vede că aceste sfere admit ca înfășurătoare un tor de axă Δ; deci, *orice ciclidă a lui Dupin poate într'o infinitate de moduri să fie inversa unui tor.*

90. **Torsiune geodezică. Teorema lui Dupin asupra sistemelor triple ortogonale.** I. Fie M, M′ două puncte infinit vecine ale unei curbe (M) trasă pe o suprafață (S). Josef Bertrand a numit deviație dealungul elementului MM′, unghiul $d\psi$ pe care îl face normala M Z′ în M′ la suprafață cu planul determinat în M de normala MZ la suprafață și tangenta MT la curba (M).

Însemnând cu ds elementul de arc al curbei (M) în M, limita raportului $\frac{d\psi}{ds}$ se zice *torsiune geodezică* în M a curbei (M) care aparține suprafeței (S). Pentru a găsi valoarea acestei torsiuni, să observăm că într'o regiune infinit mică, considerată în jurul lui M, normalele la suprafață se confundă, afară de infiniți mici de ordinul al doilea, cu acelea ale paraboloidului (No. 85)

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2},$$

R_1 și R_2 fiind razele de curbură principale în M la suprafața (S).

Deci, din punct de vedere infinitezimal, se poate lua ca cosinusuri directoare ale normalei în M′, valorile

$$\frac{x}{R_1}, \quad \frac{y}{R_2}, \quad -1.$$

Să însemnăm cu φ unghiul format de tangenta în M cu întâia direcţie principală în M pe suprafaţă. Perpendiculara în M pe MT în planul tangent în M la suprafaţă, este normala la planul TMZ şi are ca cosinusuri directoare

$$-\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad 0.$$

Sinusul unghiului $d\psi$ format de normala M′Z′ şi planul TMZ este cosinusul unghiului normalei M′Z′ cu normala la planul TMZ şi deci

$$\sin\psi = \frac{x}{R_1}(-\sin\varphi) + \frac{y}{R_2}(\cos\varphi) + (-1)(0),$$

şi înlocuind $\sin d\psi$ prin $d\psi$, de care diferă cu un infinit mic de ordinul al treilea, avem

$$d\psi \backsim -\frac{x\sin\varphi}{R_1} + \frac{y\cos\varphi}{R_2}.$$

Dar, punctul (x,y) considerat din planul tangent fiind foarte apropiat de punctul M, luat ca origină, x şi y sunt proecţiile arcului MM′, deci

$$x \backsim ds\cos\alpha, \quad y \backsim ds\sin\alpha,$$

şi deci formula de mai sus devine la limită

$$d\psi = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\varphi\cos\varphi\, ds,$$

sau

$$\frac{d\psi}{ds} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\varphi\cos\varphi,$$

astfel că avem o expresiune a torsiunei geodezice $\frac{d\psi}{ds} = G$,

$$G = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Această expresiune arată că *în orice punct a unei linii de curbură avem $\varphi=0$, sau $\varphi=90^0$, deci $G=0$, şi reciproc.*

De asemenea, dacă două linii ce trec printr'un punct al suprafeţei se tae subt un unghi drept, avem între curburile lor geodezice, φ fiind unghiul corespunzător primei şi $\varphi' = 90 + \varphi$ unghiul corespunzător celei de a doua,

$$G' = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\varphi'\cos\varphi' = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin(\varphi+90)\cos(\varphi+90) = -G,$$

$$G + G' = 0. \tag{8}$$

Să căutăm o altă expresiune a torsiunei geodezice. Să considerăm un punct M al suprafeţei (S) (Fig. 129), normala MZ la suprafaţă şi normala principală MN la curba (M) trasă pe suprafaţă. Prin punctul M să ducem paralelele MZ'_1, MN'_1 la normalele de acelaş fel în punctul infinit vecin M' şi să le proectăm în MZ'_0, MN'_0 pe planul MZN.

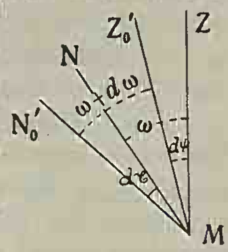

Fig. 129.

Ştim că proecţia unui unghi pe un plan care face cu planul unghiului un unghi infinit mic este un infinit mic echivalent. Deci însemnând cu ω unghiul NMZ, atunci unghiurile $N'_0MZ'_0$, Z'_0MZ, N'_0MN sunt respectiv echivalente cu $\omega+d\omega$, $d\psi$, $d\tau$ [unghiul de torsiune al curbei (M)]. Dar pe figură se vede

$$\omega+d\omega+d\psi=\omega+d\tau,$$

deci

$$d\psi=d\tau-d\omega,$$

şi divizând cu ds, avem

$$\frac{d\psi}{ds}=\frac{d\tau}{ds}-\frac{d\omega}{ds},$$

şi deci o altă expresie dată de Ossian Bonnet a curburei geodezice,

$$G=\frac{1}{T}-\frac{d\omega}{ds}, \tag{9}$$

unde T este raza de torsiune a curbei (M) şi ω fiind unghiul format de normala la suprafaţă în M cu normala principală în M la curba (M).

Pentru a doua suprafaţă (S') ce trece prin (M), avem de asemenea

$$G'=\frac{1}{T}-\frac{d\omega'}{ds}.$$

De unde

$$G-G'=\frac{d\omega'}{ds}-\frac{d\omega}{ds},$$

$$G-G'=\frac{dV}{ds}, \tag{10}$$

V fiind unghiul celor două suprafeţe în M.

De aci rezultă că, *dacă unghiul* V *este constant dealungul curbei* (M), *avem pentru orice punct al linii* (M), $G=G'$. Dacă în aceleaşi condiţii, avem $G=0$, avem de asemenea $G'=0$. Regăsim astfel teorema lui Ioachimsthal că *dacă două supra-*

fețe se tae dealungul unei linii comune (M) *subt un unghi constant, și dacă linia* (M) *este linie de curbură pentru prima suprafață, este și pentru a doua.*

II. Formulele (9) şi (10) ne permit a stabili o teoremă importantă a lui *Dupin* asupra *sistemelor triple ortogonale.*

Fie $(S_1), (S_2), (S_3)$ trei familii (formând fiecare o simplă infinitate) de suprafeţe, tăindu-se două câte două după curbele C_{12}, C_{23}, C_{31}. Dacă dealungul fiecăreia din aceste curbe C_{ij}, suprafeţele (S_i), (S_j) la care aparţin, se tae subt un unghi drept, ansamblul format de aceste trei familii de suprafeţe constitue un *sistem triplu ortogonal.* Dacă convenim a reprezenta prin G_{ij} şi G_{ji} torsiunile geodezice într'un punct al curbei C_{ij}, după cum este considerată pe suprafaţa (S_i) sau (S_j), avem, în virtutea relaţii (10),

$$(11)\qquad G_{12}-G_{21}=0,\quad G_{23}-G_{32}=0,\quad G_{31}-G_{13}=0.$$

De altă parte, se vede că în fiecare punct M comun suprafeţelor $(S_1), (S_2), (S_3)$, tangentele la curbele C_{12}, C_{23}, C_{31} formează un triedru tridreptunghic; de unde, în baza relaţii (8),

$$(12)\qquad G_{12}+G_{13}=0,\quad G_{23}+G_{21}=0,\quad G_{31}+G_{32}=0.$$

Atribuind ecuaţiilor (11) respectiv semnele $+-+$, iar celor din (12) respectiv $++-$, adunându-le, avem $2G_{12}=0$, adică $G_{ij}=0$, şi deci toate curbele C_{ij} sunt linii de curbură pentru suprafeţele (S_i), (S_j) la care aparţin. De unde urmează că *intersecțiile a două suprafețe din două familii diferite a unui sistem triplu ortogonal, sunt linii de curbură a acestor suprafețe.*

De aci urmează că se pot deduce imediat liniile de curbură ale cuadricelor. În adevăr, orice cuadrică aparţine la un sistem omofocal constituit din trei familii particulare (elipsoizi, iperboloizi cu o pânză, iperboloizi cu două pânze), astfel că, de la o familie la alta, suprafeţele se tae subt un unghi drept dealungul linii lor comune de intersecţie. Aceste trei familii formează deci un sistem triplu ortogonal, şi după teorema lui Dupin, se vede că liniile de curbură ale uneia oarecare din suprafeţele sistemului sunt date de intersecţiile sale cu toate suprafeţele celorlalte două familii la care această suprafaţă nu aparţine.

91. **Suprafețe minime.** Condiţia ca indicatoarea într'un punct oarecare al suprafeţei să fie o iperbolă echilateră, se exprimă printr'o condiţie unică, de unde urmează că pe orice

suprafață există o linie de puncte iperbolice, astfel că pentru fiecare punct al acestei linii curburile principale să fie egale și de semne contrare (opuse, $R_1 = -R_2$). Se zice *suprafață minimă* o suprafață pentru care această linie este nedeterminată și pentru care *cele două familii de linii asimptotice se tae pretutindeni subt un unghi drept.* Vom determina două din suprafețele minime.

1⁰ *Suprafață minimă de rotație.* Fie M un punct oarecare al unui meridian situat în planul figurei (Fig. 130), MN normala limitată la axa de rotație. MN este egală, după teorema lui Meusnier, cu raza de curbură normală relativă la paralelul punctului M. A doua rază de curbură principală este egală cu raza de curbură MC a meridianului. Deci, dacă suprafața este minimă, vectorii MN și MC sunt egali și de semn contrar și meridianul este o curbă chaînette. Deci, *suprafața minimă de rotație este aceea născută de chaînette care se învârtește în jurul bazei sale.* Această suprafață se zice *catenoidă* sau *aliseidă.*

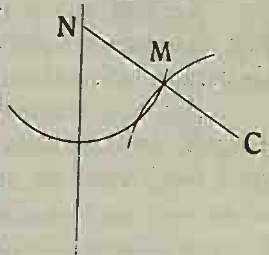

Fig. 130.

2⁰ *Suprafață minimă riglată.* Fie M un punct oarecare al unei suprafețe riglate (Fig. 131), (G) și (C) generatoarea rectilinie și curba asimptotică ce trec prin acest punct, MT tangenta la (C). Planul TMG tangent la suprafață este osculator la (C). Pentru că suprafața este riglată, și al doilea sistem de linii asimptotice este format de generatoare, ca suprafața să fie minimă, trebue ca asimptoticele să se tae subt un unghi drept; deci *G* să fie perpendiculară pe MT, adică normala principală a curbei (C). Dacă această proprietate se extinde pentru toate asimptoticele, dreptele G sunt normale principale ale unei infinități de linii. Aceste linii sunt (No. 79, 3⁰) elice. Deci, *singura suprafață minimă este elicoidul strâmb cu plan director.*

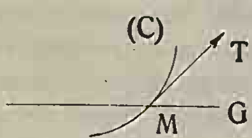

Fig. 131.

92. **Linii geodezice.** I. Să considerăm o curbă (M) trasă pe o suprafață și să o proectăm pe planul tangent în punctul M al suprafeței. Curbura proecții se zice *curbura tangențială* și are ca valoare $\frac{1}{R_1}$ dată de formula (No. 74)

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{\cos^3\varphi}{R_1},$$

R fiind raza de curbură a curbei (M), θ unghiul făcut de planul osculator al curbei (M) cu planul tangent la suprafaţă (planul de proecţie), φ unghiul făcut de planul de proecţie cu tangenta MT la curba (M). Planul de proecţie trecând prin tangenta MT, $\varphi=0$, deci curbura tangenţială are ca valoare $\frac{\cos\theta}{R}$.

Această valoare rămâne aceeaş când se înlocueşte suprafaţa cu desfăsurabila circumscrisă dealungul curbei (M) [născută de caracteristica planului tangent la suprafaţă dealungul linii (M)].

Am mai văzut (No. 75) că ea se conservă când se aplică această desfăşurabilă pe un plan. Deci, *curbura tangenţială a unei linii trasă pe o suprafaţă este egală cu aceea a linii plane după care se transformă această curbă când se aplică pe un plan desfăşurabila circumscrisă.* De aceea această curbură se zice şi *curbura de desfăşurare.* Se mai zice şi curbura geodezică.

Am văzut de asemenea că o linie geodezică pe o desfăşurabilă se bucură de proprietatea că are curbura tangenţială nulă în toate punctele sale. Această proprietate se extinde uşor pentru o suprafaţă oarecare. Să considerăm, în adevăr, o linie (M) trasă pe suprafaţă, de cea mai scurtă distanţă între două din punctele sale. Fie două puncte M şi M′ fixe şi foarte apropiate. Dacă se înlocueşte arcul curbei (M), cu extremităţile în M şi M′, prin orice alt arc de curbă, mergând pe suprafaţă de la M la M′, lungimea s a acestui arc nu se poate de cât să se mărească şi de asemenea se măreşte şi diferenţa dintre arcul s şi lungimea c a coardei fixe MM′. Dar, această diferenţă este de acelaş ordin de mărime ca şi c^3 şi cum c este infinit mic, va trece printr'un minimum în acelaş timp ca partea sa principală $\frac{c^3}{24R^2}$, R fiind raza de curbură a linii modificate Dar, dacă numim cu R_n raza de curbură normală în M, care este aceeaş pentru toate curbele ce trec prin M şi M′, α unghiul planului osculator variabil cu planul ce trece prin tangenta MT şi normala la suprafaţă în M, după teorema lui Meusnier, avem (No. 84) $R=R_n\cos\alpha$. Diferenţa $s-c$ atinge deci minimul său când $\cos\alpha$ este cel mai mare, adică $\alpha=0$, sau că planul osculator să se confunde cu planul ce trece prin normala MN, adică să fie perpendicular pe planul tangent la suprafaţa (S) în M. Deci, pentru curba (M) *geodezică, de cea mai* *scurtă distanță dintre două oarecare din punctele sale, planul osculator în orice punct este normal la suprafață* (perpendicular pe planul tangent la suprafață). Dar unghiul α este complimentar cu unghiul θ ce întră în formula curburei tangențiale, $\frac{\cos\theta}{R}$. Cum, pentru geodezică avem $\alpha=0$, urmează $\theta=90^0$, deci, *dealungul unei geodezice curbura tangențială este nulă.*

Rezultă că un fir întins între două puncte ale suprafeței, de partea convexității suprafeței, se așează după o geodezică și, în particular, orice generatoare rectilinie a unei suprafețe este o geodezică. S'ar părea că este arbitrar faptul că în cazul generatoarelor rectilinii, ele sunt și asimptotice și geodezice, căci, în cazul asimptoticelor, planul osculator este tangent și în cazul geodezicelor, planul osculator este perpendicular pe planul tangent al suprafeței. Dar, în cazul unei linii drepte (generatoarelor) planul osculator este nedeterminat.

II. *Proprietăți.* Faptul că geodezicele constitue drumul cel mai scurt între punctele sale pe o suprafață, aceste curbe joacă, în geometria pe o suprafață, acelaș rol ca linia dreaptă în geometria plană.

În cele ce urmează vom enunța propozițiile fundamentale ale teorii geodezicelor [1], adeverindu-le sumar prin câteva simple considerații geometrice.

Trebue de la început a admite (ceea ce se stabilește ușor în Analiză) că o geodezică este complect determinată de un punct și tangenta în acest punct (după cum, în plan, dreapta este definită de un punct și direcția sa). De asemenea, că nu trece, în general, de cât o geodezică prin două puncte ale suprafeței (mai clar, pentru o lungime inferioară la o limită determinată, purtată pe fiecare geodezică plecând de la punctul M, nu trece prin M și extremitatea acestei lungimi nici o geodezică de o lungime mai mică).

1^0 *Dacă pe toate geodezicele ce trec prin acelaș punct* M *se iau arce egale, locul extremităților acestor arce este o curbă normală la toate aceste geodezice.* În adevăr, fie PM și PM′ două geodezice infinit vecine (Fig. 132), pe care luăm arcele egale PM și PM′. Dacă arcul infinit mic MM′ al locului

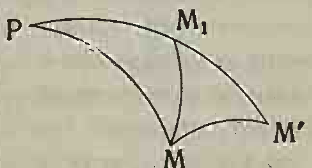

Fig. 132.

[1] Pentru studiul complect, a se vedea **Darboux**, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, cap. IV, cartea V.

lui M n'ar fi normal la PM şi PM', unul din unghiurile făcute de acest arc cu geodezicele, cel din M, ar fi obtus, celalt în M', ascuţit. Să ducem prin M arcul de geodezică MM_1 ortogonal în M la MM'. În triunghiul infinit mic MM_1M', care poate fi asimilat, afară de infiniţi mici de ordinul al treilea, cu un triunghi plan, avem $MM_1 < M_1M'$. Deci, am avea $PM_1 + M_1M < PM'$, sau de cât PM, căci $PM' = PM$, ceea ce nu se poate fiindcă PM fiind arc de geodezică este cel mai scurt drum între P şi M. Se conchide deci că MM' este ortogonal în M la PM.

2⁰ *Dacă pe fiecare din geodezicele normale la o curbă oarecare trasă pe o suprafaţă se iau arce egale, locul extremităţilor acestor arce este o curbă normală la toate aceste geodezice.* Fie PM şi P'M' două arce de geodezică infinit vecine, egale între ele, normale la curba (P) în P şi P' (Fig. 133). Să ducem geodezica MP' şi să luăm pe această curbă arcul MP_1 egal cu MP. După teorema precedentă, arcul PP_1 de curbă geodezică, ortogonal în P la MP, este tangent la (P). Deci arcul P_1P' este infinit mic de ordinul al doilea, diferenţa $P'M - P'M' = P_1P'$ este ea de ordinul al doilea, aşa că, luând ca şi pentru PM, o lungime $P'P'_1 = P'M'$, urmează că $MP'_1 = P_1P'$ este de ordinul al doilea, deci arcul P'_1M' normal în M' la P'M' este tangent arcului MM', sau că P'M' este normal în M' la curba (M) descrisă de M. Curba (M) astfel obţinută se zice *paralelă* cu (P).

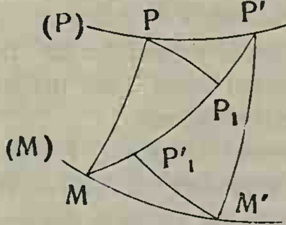

Fig. 133.

Observând că curbele (P) şi (M) sunt traectorii ortogonale ale sistemului de geodezice PM şi că printr'un punct M nu trece de cât una din aceste traectorii ortogonale, se deduce că *două traectorii ortogonale oarecare a unei simple infinităţi de geodezice pe o suprafaţă determină pe aceste geodezice arce egale.*

3⁰ Fie MP şi M'P' două poziţii infinit vecine ale unui arc geodezic (Fig. 134). Să ducem prin M' şi P' arcele de traectorie ortogonală $M'M_1$, $P'P_1$. Din cele de mai sus, $M'P' = M_1P_1$.

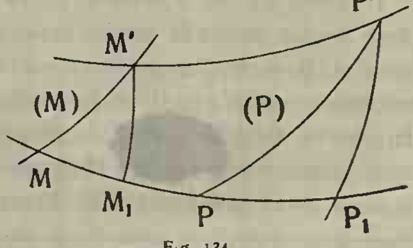

Fig 134.

Deci

$$d(\mathrm{MP}) = \mathrm{M_1P_1} - \mathrm{MP} = \mathrm{PP_1} - \mathrm{MM_1},$$

şi cum triunghiurile $\mathrm{MM'M_1}$, $\mathrm{PP'P_1}$ pot fi asimilate cu triunghiuri plane, avem

$$d(\mathrm{MP}) = d(\mathrm{P}) \cos \mathrm{P_1PP'} - d(\mathrm{M}) \cos \mathrm{M_1MM'},$$

formulă care dă *variaţia de lungime a unui arc de geodezică* pe o suprafaţă analog ca pentru variaţia de lungime a unui segment de dreaptă.

4⁰ *Dacă suma sau diferenţa distanţelor geodezice a unui punct* M *variabil pe o suprafaţă la două puncte fixe* P *şi* Q *a acestei suprafeţe este constantă, tangenta la curba* (M) *pe care o descrie acest punct este bisectoarea exterioară sau interioară a unghiului ce fac între ele arcele geodezice* PM *şi* QM. În adevăr, în cazul sumei constante, avem (Fig. 135)

$$d(\mathrm{PM}) + d(\mathrm{QM}) = 0,$$

şi după proprietatea precedentă

$$d(\mathrm{M}) \cos \mathrm{Q_1MM'} + d(\mathrm{M}) \cos \mathrm{P_1MM'} = 0,$$

adică

$$\mathrm{Q_1MM'} + \mathrm{P_1MM'} = \pi,$$

şi deci proprietatea este demonstrată.

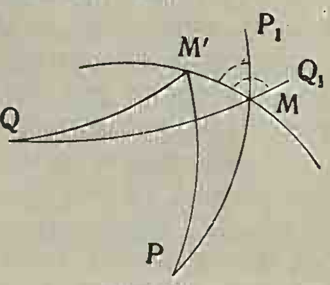

Fig. 135.

Demonstraţie analoagă pentru cazul diferenţei constante

Curbele (M), corespunzătoare la una sau alta din aceste ipoteze, au fost numite de Darboux, *elipse sau iperbole geodezice,* iar P şi Q *focare geodezice.*

III. *Determinarea geodezicelor unui elipsod.* Să ne închipuim pe un elipsoid [M] o linie (M) astfel ca tangenta în fiecare din punctele sale M să fie tangentă la o cuadrică [P] omofocală cu [M]. Această tangentă naşte o desfăşurabilă circumscrisă lui [P] dealungul linii (P) ce descrie punctul său de contact P cu această cuadrică. Planul său tangent dealungul generatoarei MP se confundă deci cu planul tangent la [P] în P; dar acest plan tangent la desfăşurabilă este planul osculator la muchia de întoarcere (M) şi cum după o teoremă cunoscută planul tangent la [P] în P este perpendicular pe planul tangent în M la [M] (căci suprafeţele sunt omofocale), se poate zice că planul osculator în M la curba (M) este normal în acest punct la elipsoidul [M].

Această proprietate având loc pentru toate punctele curbei (M), rezultă, în baza celor de mai sus, că *curba* (M) *este o geodezică a elipsoidului* [M].

Deci, *toate liniile care formează o simplă infinitate trase pe* [M], *ale căror tangente sunt tangente la cuadrica* [P] *omofocală cu* [M] *sunt geodezicele suprafeței* [M].

Cum cuadricele [P] formează ele înşi-le o simplă infinitate, se vede că se obţin astfel sistemul dublu infinit al geodezicelor elipsoidului [M].

Fiecare cuadrică [P], fiind complect determinată de valoarea parametrului λ, care întră în ecuaţia sa,

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

când o raportăm la axele principale ale elipsoidului [M], se vede că geodezicele lui [M] pot fi astfel grupate în sisteme simplu infinite caracterizate fiecare cu o valoare a lui λ. Vom numi geodezicele $g(\lambda)$ acelea care se obţin cu ajutorul cuadricei [P] corespunzătoare acestei valori ale lui λ.

Înfăşurătoarea geodezicelor ale unei aceleaş familii ale unui elipsoid. Fie $e(\lambda)$ linia de intersecţie a elipsoidului [M] cu cuadrica [P] corespunzătoare la o valoare dată lui λ. Se ştie (No. 90) că această curbă este o linie de curbură a lui [M]. Dar, fiecare tangentă la această linie $e(\lambda)$ fiind tangentă deodată la [M] şi [P], este tangentă la o geodezică $g(\lambda)$.

Reciproc, printre tangentele MP la o geodezică $g(\lambda)$, există una pentru care punctele M şi P se confundă; aceasta este atunci tangentă la $e(\lambda)$. Rezultă că *geodezicele* $g(\lambda)$ *au ca înfăşurătoare linia de curbură* $e(\lambda)$ *intersecţia lui* [M] *şi* [P].

Dacă voim a şti câte geodezice $g(\lambda)$ trec printr'un punct M dat pe [M], va fi deajuns a observa că tangentele în M la aceste geodezice, fiind în acelaş timp tangente la [P], sunt intersecţiile planului tangent în M la [M] cu conul cu vârful M circumscris la [P]; sunt deci două. Dar, cum aceste două geodezice au ca înfăşurătoare linia de curbură $e(\lambda)$, se poate zice că *prin fiecare punct* M *al elipsoidului* [M] *trec două geodezice tangente la o aceeaş linie de curbură* $e(\lambda)$ *dată.*

APLICAŢII.

93. **Cuadrică osculatoare.** Să considerăm o suprafaţă riglată (Σ) şi o generatoare (G) a sa. Putem face ca cuadrica

de racordare dealungul lui G (No. 69) să treacă prin a doua generatoare infinit vecină G′ a suprafeței (Σ). Va fi de ajuns a lua pentru directoare (D_1), (D_2), (D_3) dreptele unind punctele M_1, M_2, M_3 ale generatoarei (G) cu acelea unde planele tangente la (Σ) în aceste puncte sunt întâlnite respectiv de (G′). În particular, dacă se ia pentru (G′) generatoarea lui (Σ) infinit vecină de (G) și se trece la limită, se vede că se obține o cuadrică (Q), astfel că toate secțiunile sale și acelea ale lui (Σ) prin aceleași plane au aceeaș curbură în punctul lor comun situat pe (G). În adevăr, înainte de a ajunge la limită, aceste două secțiuni au în comun punctul M cu tangenta în M (situată în planul tangent comun în M) și punctul infinit vecin M′ pe (G′). Rezultă că cele două suprafețe au aceeaș indicatoare în fiecare punct M al lui (G); dar asimptotele acestei indicatoare sunt pentru (Q) generatoarea (G) și generatoarea de al doilea sistem trecând prin M; pentru (Σ), a doua asimptotă este tangenta în M la curba, care împreună cu (G) este intersecția suprafeței cu planul său tangent. Deci, avem teorema lui Chasles, *tangentele în punctele situate pe* (G) *la curbele de intersecție a suprafaței* (Σ) *cu planele tangente dealungul lui* G, *nasc o cuadrică care se zice osculatoare la* (Σ) *dealungul lui* (G). (Cuadrica osculatoare aci nu este identică cu aceea ce ar rezulta când s'ar extinde la suprafețe aceeaș noțiune de la curbele plane).

Aplicație la demonstrarea geometrică a proprietății asimptoticelor unei suprafețe riglate. Orice linie trasă pe o suprafață este o asimptotică a acestei suprafețe, căci orice secțiune normală dusă prin această dreaptă având raza de curbură infinită, aceasta este, în fiecare din punctele sale, asimptotă la indicatoarea corespunzătoare. Urmează de aci, că, pe o suprafață riglată generatoarele rectilinii formează un prin sistem de linii asimptotice. Se demonstrează prin Analiză că determinarea asimptoticelor de al doilea sistem depinde pe o ecuație a lui Riccati, de unde se deduce că *raportul anarmonic al punctelor de intersecție a patru asimptotice oarecare de al doilea sistem cu fiecare generatoare este constant.*

Iată o demonstrație geometrică a acestei proprietăți [1]. Dacă asimptotica (M) tae generatoarea (G) în M și generatoarea infinit vecină G′ în M′, tangenta în M la asimptotică, generatoare a cuadricei osculatoare care, afară de infiniți mici de ordinul al treilea, conține deasemenea pe G′, întâlnește această generatoare în punctul M″.

Dacă *m*′ este piciorul perpendicularei coborâte din M′ pe planul tangent în M, acest plan fiind osculator la (M), M′*m*′ este un infinit mic

[1] A se vedea M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie* (1930), p. 135, demonstrația elevului Școalei Politechnice din Paris, D-l *Jouguet*, din promoția 1926.

de ordinul al treilea. Cum, de altă parte, unghiul $M'M''m'$ (unghiul lui G' cu planul tangent în M) este infinit mic de ordinul întâi, $M'M''$ este infinit mic de ordinul al doilea.

Să considerăm acum patru puncte M_1, M_2, M_3, M_4 pe G. Punctele $M''_1, M''_2, M''_3, M''_4$, aparținând la generatoarele corespunzătoare ale cuadricei osculatoare, avem egalitatea rapoartelor anarmonice

$$(M_1\, M_2\, M_3\, M_4) = (M''_1\, M''_2\, M''_3\, M''_4).$$

Dar, din cele de mai sus, rezultă că rapoartele anarnomice $(M'_1\, M'_2\, M'_3\, M'_4)$ și $(M''_1\, M''_2\, M''_3\, M''_4)$ diferă cu un infinit mic cel puțin de ordinul al doilea, ca și rapoartele anarmonice $(M_1\, M_2\, M_3\, M_4)$ și $(M'_1\, M'_2\, M'_3\, M'_4)$. Cum aceasta are loc dealungul asimptoticelor $(M_1), (M_2), (M_3), (M_4)$, rezultă că raportul anarmonic $(M_1\, M_2\, M_3\, M_4)$ este constant.

94. **Conoidul drept cu nucleu sferic.** Pentru reprezentarea suprafeței, ne servim de metoda dublei proecțiuni, pe planul orizontal și vertical (pe care îl vom rabate peste planul orizontal).

Să luăm ca plan orizontal de proecție un plan paralel cu planul director și ca plan vertical un plan paralel cu cel ce trece prin directoarea rectilinie și centrul sferei ce formează nucleul. Fie (o,o') centrul sferei, (Δ,Δ') directoarea rectilinie perpendiculară pe planul orizontal, situată în planul de front oa al centrului sferei (Fig. 136).

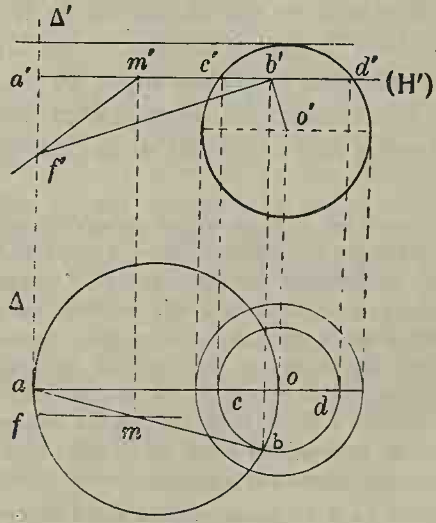

Fig. 136

Pentru a avea o generatoare a conoidului, să-l tăem cu un plan orizontal (H'). Acest plan tae axa în punctul (a,a') și sfera după cercul $(cd,c'd')$ a cărui proecție orizontală este cd. O generatoare a conoidului este situată în acest plan orizontal, trece prin (a,a') și este tangentă sferei, adică cercului $(cd,c'd')$. Proecția sa verticală este H', iar cea orizontală tangenta din a la cercul cd, adică ab, așa că o generatoare a suprafeței este $(ab,a'b)$.

Locul punctului b este cercul de diametru oa, iar al punctelor (b,b') de contact al generatoarei cu sfera este intersecția sferei cu cilindrul vertical având ca bază cercul oa, adică o bicuadratică strâmbă, simetrică în raport cu planul vertical de proecție; deci aceasta se proectează vertical după o conică.

Pentru a găsi natura acestei conice, să tăem cilindrul și sfera cu un plan orizontal oarecare; cele două cercuri de secțiune au comune punctele circulare ale acestui plan; proecția verticală are deci un punct la infinit în direcția orizontalei punctului b', oricare ar fi această orizontală. Locul punctelor b' este deci o parabolă, având axa orizontală, care este orizontala centrului o' al sferei.

Să luăm ca directoare (C_1), (C_2), (C_3) respectiv verticala punctului a, dreapta de la infinit a planului orizontal și curba de intersecție a nucleului sferic cu cilindrul vertical având ca bază cercul de diametru oa. Întrebuințând notațiile (No. 66) cunoscute, avem

$$m_1 = 1,\ m_2 = 1,\ m_3 = 4,\ \alpha_{23} = 2,\ \alpha_{31} = 2,\ \alpha_{12} = 0,$$

deci

$$\Delta = 4,\ m_2 m_3 - \alpha_{23} = 2,\ m_3 m_1 - \alpha_{31} = 2,\ m_1 m_2 - \alpha_{12} = 1,$$

ceea ce arată că acest conoid considerat este o suprafață de ordinul al patrulea, pe care generatoarea rectilinie și dreapta de la infinit a planului director sunt linii duble.

Pentru a construi planele tangente dealungul generatoarei $(ab, a'b')$, să considerăm paraboloidul de racordare, având unul din planele directoare orizontal și al doilea plan director de front.

Generatoarea de front a punctului (a, a') este verticala acestui punct; cea din punctul (b, b') este linia de front a planului tangent la sferă a cărei proecție verticală $b'f'$ este perpendiculară pe $o'b'$ (căci unghiul format în spațiu este drept și are o latură $b'f'$ paralelă cu planul vertical de proecție, deci se proectează în adevărata mărime). Dar, proecțiile verticale ale generatoarelor de front trec prin acelaș punct, proecția generatoarei din celalt sistem care este perpendiculară pe vertical, deci prin punctul f'. Generatoarea de front într'un punct oarecare (m, m') al lui $(ab, a'b')$ este prin urmare $(mf, m'f')$. Această generatoare $(mf, m'f')$, împreună cu $(ma, m'a')$, determină planul tangent în (m, m') (căci planul tangent este determinat de cele două generatoare de sisteme diferite ce trec prin acel punct).

Se vede, de altfel, că suprafața posedă patru generatoare singulare, adică acelea ce se află în planele tangente orizontale ale sferei și acelea care se găsesc în planele tangente verticale ce trec prin directoare; acestea din urmă sunt în planul ecuatorului orizontal al sferei.

Pentru a determina punctul (m,m') al suprafeţei unde planul tangent e paralel cu un plan dat, se duce ab, în proecţie orizontală, paralelă cu orizontalele acelui plan dat. Aceasta tae cercul de diametru oa în punctul b, proecţia sa verticală b', este pe proecţia verticală a cercului de rază ob. Se duce apoi perpendiculară pe ob', care tae verticala aa' în f'. Paralela cu frontalele planului dat dusă prin f' dă pe $a'b'$ proecţia verticală m' a punctului de contact căutat, de unde, cu o linie de ordine, obţinem punctul m.

95. **Conoidul lui Plücker. Cilindroidul**(¹). 1° Conoidul lui Plücker sau cilindroidul este conoidul drept având ca directoare: 1) o secţiune plană (elipsă) oarecare a unui cilindru de rotaţie; 2) o generatoare a cilindrului trecând prin unul din vârfurile axei mari a acestei secţiuni; 3) pentru plan director, un plan de secţiune dreaptă a cilindrului.

Dacă notăm cu 1, 2, 3 respectiv dreapta de la infinit a planului director, directoarea rectilinie şi directoarea eliptică, avem cu notaţiile cunoscute,

$$m_1=1,\ m_2=1,\ m_3=2;\ \alpha_{12}=0,\ \alpha_{23}=1,\ \alpha_{31}=0.$$

Deci, ordinul suprafeţei este $4-1=3$, iar generatoarea rectilinie este o linie dublă a suprafeţei.

2° Să luăm ca plan orizontal de proecţie planul secţiunei drepte trecând prin punctul comun celor două directoare şi ca plan vertical un plan paralel cu acela ce trece prin directoarea rectilinie şi axa cilindrului. Să numim cu $t'q'$ urma verticală a planului directoarei eliptice proectată orizontal după cercul de centru o şi raza oa (Fig. 137). O generatoare a suprafeţei este $(am,\ a'm')$.

Să considerăm un alt plan perpendicular pe vertical, ce trece prin tangenta la elipsa directoare în punctul ei de intersecţie cu directoarea rectilinie verticala $(t'z',t)$, cu urma verticală $t'p'$ şi fie (l,l') punctul unde tae generatoarea $(am,a'm')$. Avem

$$\frac{al}{am}=\frac{a'l'}{a'm'}=\frac{z'p'}{z'q'}=\text{const.};$$

deci locul punctului l este cercul omotetic al aceluia descris de m, în raport cu a. Deci, *toate planele duse prin tangenta la*

(¹) Studiul făcut de D-l M. d'Ocagne în *Archiv der Matematick*, 1901, p. 159.

elipsa directoare în punctul ei de întâlnire cu directoarea rectilinie, tae suprafaţa după conice proectate orizontal după cercuri tangente în a la at. Să însemnăm cu (Γ_1) aceste conice ale suprafeţei. Una din ele poate fi substituită ca a doua directoare, în locul primei elipse considerate ca directoare.

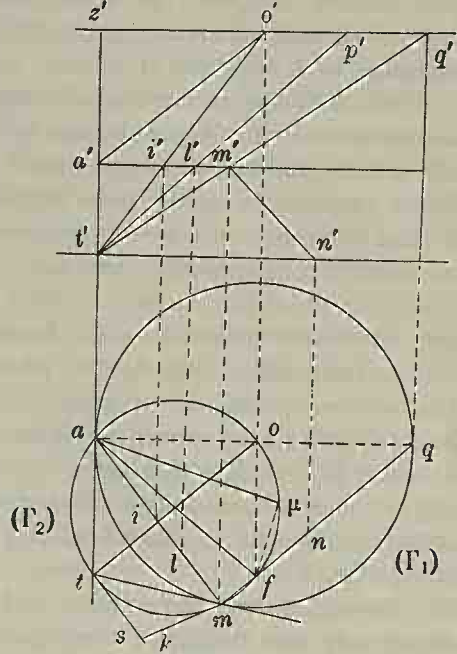

Fig 137.

3⁰ Planul tangent în (m,m') este determinat de generatoarea $(am, a'm')$ şi tangenta $(mt, m't')$ la directoarea eliptică. Urma orizontală a acestui plan este deci paralela tk la am. Linia de cea mai mare pantă a sa în t este perpendiculara din t pe am ce trece prin mijlocul i al lui am şi centrul o al cercului. Punctul i are ca proecţie verticală i' mijlocul lui $a'm'$; deci drepta $t'i'$ trece prin mijlocul o' al lui $z'q'$ şi în spaţiu, linia de cea mai mare pantă considerată trece prin punctul (o,o') independent de poziţia lui m pe cerc. Se vede deci că *planul tangent în orice punct al elipsei directoare trece prin punctul (o,o') unde axa cilindrului tae planul tangent orizontal $z'q'$ la suprafaţă.* Sau, *planele tangente dealungul elipsei directoare au ca înfăşurătoare un con având vârful pe axa cilindrului de rotaţie pe care se află elipsa considerată.*

Am văzut, însă, că se poate lua ca directoare una oarecare din elipsele (Γ_1) situate pe cilindrele de rotaţie tangente la primul dealungul generatoarei rectilinii; deci, proprietatea de mai sus subsistă pentru fiecare din aceste elipse.

Se deduce de aci un mijloc simplu de a construi prin puncte curba de umbră a suprafeţei pentru o sursă luminoasă oarecare. Se obţin punctele acestei curbe de umbră situată pe una oarecare din conicele (Γ_1), întrebuinţând conul circumscris suprafeţei dealungul acestei conice (Γ_1).

4⁰ *Secțiunile suprafeței prin planele sale tangente.* Planul tangent într'un punct oarecare (m,m') al suprafeței conținând generatoarea $(am,a'm')$ în acest punct, și suprafața fiind de ordinul al treilea, restul intersecții acestui plan tangent cu suprafața va fi o conică (Γ_2).

Să observăm că se cunosc patru puncte ale acestei conice și anume, (m,m'); punctul (a,a') pentrucă directoarea $(az,a'z')$ este o linie dublă a suprafeței; (o,o') pentrucă dreapta $(zq,z'q')$ este o generatoare a suprafeței; (t,t') pentrucă dreapta perpendiculară pe vertical în t' este o generatoare a suprafeței. Proecția orizontală a conicei căutate este deci circumscrisă patrulaterului $aomt$ inscriptibil într'un cerc. Pentru a determina această conică, să căutăm tangenta în m. Această tangentă este (No. 93) a doua asimptotă a indicatoarei, prima fiind generatoare rectilinie, și aceste două drepte sunt, având în vedere teorema lui Dupin (No. 86), conjugate armonic în raport cu tangenta $(mt,m't')$ la conica (Γ_1) trecând prin (m,m') și cu caracteristica planului tangent în acest punct care se confundă cu $(mo,m'o')$, desfășurabila circumscrisă dealungul lui (Γ_1) fiind, cum am văzut, conul cu vârful (o,o').

Dar, în proecție orizontală, dreapta am în triunghiul dreptunghic omt este înălțime; conjugata armonică a acestei înălțimi, în raport cu laturile unghiului drept, este tangenta la cercul circumscris. Deci, *proecția orizontală a conicei căutate se confundă cu cercul circumscris patrulaterului* $aomt$, care are în comun cu acest cerc patru puncte o,m,t,a și tangenta în unul din ele, m.

Se poate vedea și altfel că proecția orizontală a conicei (Γ_2) este cercul de diametru ot. În adevăr, punctele (o,o') și (t,t') sunt cel mai de sus și cel mai de jos al conicei (Γ_2); deci tangentele în o și t la proecția orizontală a acestei conice sunt paralele cu orizontalele planului tangent, adică perpendiculare pe ot, care, prin urmare, este o axă a acestei proecții. Mai mult, unghiul oat fiind drept, această conică este cercul de diametru ot.

Luând ca a doua directoare conica (Γ_2), definiția cilindroidului devine, *un conoid având generatoarele perpendiculare la generatoarele unui cilindru de rotație și admițând ca directoare rectilinii, una din generatoare, apoi o secțiune plană oarecare a cilindrului.*

5⁰ Să considerăm acum pe conica (Γ_2) punctul f diametral opus lui a şi să-l unim cu punctul de întâlnire μ al conicei (Γ_2) cu o generatoare oarecare $a\mu$ a suprafeţei. În spaţiu, unghiul proectat după unghiul drept $a\mu f$, având una din laturile sale $a\mu$ orizontală, este un unghi drept; orizontala proectată după $a\mu$ este deci perpendiculara comună la verticala proectată în a şi la dreapta planului conicei (Γ_2) proectată după $f\mu$. Deci, *cilindroidul poate fi privit ca locul perpendicularelor comune la directoarea rectilinie şi la toate dreptele planului conicei* (Γ_2) *trecând prin punctul diametral opus lui* a *în această conică.*

De oarece prin fiecare punct al suprafeţei trece o conică (Γ_2), se obţin o infinitate de moduri analoage de generare ale aceluiaş cilindroid.

6⁰ Invers, se poate vedea că *locul perpendicularelor comune la o dreaptă dată şi la toate dreptele unui plan ce trec prin acelaş punct este un cilindroid.* În adevăr, cunoscând punctele a şi f, se poate construi cercul $aoft$, deci se cunoaşte conica (Γ_2) a cărei proecţie este acest cerc şi servindu-se de a doua definiţiune, urmează că suprafaţa este un cilindroid.

7⁰ Să lăsăm dintr'un punct oarecare al verticalei punctului f o perpendiculară pe fiecare generatoare $a\mu$ a suprafeţei; piciorul acestei perpendiculare coincide cu punctul μ, pentru că unghiul drept care are o latură orizontală se proectează după un unghi drept. Conica (Γ_2) reprezintă deci locul proecţiilor ortogonale ale unui punct oarecare a verticalei lui f pe generatoarele suprafeţei şi cum punctul f poate fi ales arbitrar [conica (Γ_2) corespunzătoare fiind aceea ce are ca proecţie orizontală cercul de diametru af], urmează că *locul proecţiilor ortogonale ale unui punct oarecare al spaţiului pe generatoarele unui cilindroid este o conică* (Γ_2) *a acestei suprafeţe, această conică rămânând aceeaş pentru toate punctele situate pe o aceeaş paralelă la directoarea rectilinie a suprafeţei.*

De altfel, D-l *Appell* a demonstrat[1] că *cilindroidul este singura suprafaţă riglată având proprietatea cilindrului, că locul proecţiilor unui punct oarecare al spaţiului pe generatoarele sale să fie o curbă plană,* de unde şi numele de cilindroid. Cilindrul fiind o suprafaţă desfăşurabilă, cilindroidul este singura suprafaţă riglată (strâmbă) care se bucură de această proprietate.

[1] Appell, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, p. 261; a se vedea şi demonstraţia geometrică a D-lui Bricard, în *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, p. 18, precum şi a D-lui *Harmegnies*, elev al Şcoalei Politechnice Paris, promoţia 1919 (Nouvelles Ann. de Math., 1920 p. 178).

8° *Linii asimptotice.* Am văzut că asimptotele indicatoarei în (m, m') sunt proectate orizontal după ma şi ms, tangenta in m la cercul $omta$. Liniile asimptotice ale suprafeţei au ca prim sistem generatoarele rectilinii şi al doilea sistem curbele ale căror proecţie orizontală au ca tangentă în fiecare punct m dreapta ms definită mai sus. Dar, unghiul tms având în cercul $omta$ aceeaş măsură ca şi unghiul tam, este deci egal cu amt; deci, faţă de polul a şi axa polară at, unghiul ams a tangentei cu raza vectoare este dublul unghiului polar tam; aceasta este o proprietate caracteristică a lemniscatei lui Bernoulli, având punctul său dublu în a şi tangentele în acest punct at şi aq.

Deci, proecţiile orizontale ale liniilor asimptotice din sistemul al doilea ale cilindroidului sunt lemniscate ale lui Bernoulli, având punctul dublu in a, unde tangentele sunt at şi aq.

9° Asimptotele indicatoarei în (m, m') fiind cunoscute în proecţie orizontală, sunt complect determinate, căci ele sunt în planul $(amo, a'm'o')$.

Deci, pentru a cunoaşte indicatoarea, va fi destul de a şti raza de curbură a unei secţiuni normale oarecare ce trece prin (m, m'). Să considerăm secţiunea normală ce trece prin $(mt, m't')$. Planul acestei secţiuni normale este determinat de $(mt, m't')$ şi de normala $(mn, m'n')$ ale căror proecţii sunt respectiv perpendiculare la orizontala am şi frontala $o'a'$ a planului tangent în (m, m'). De asemenea, planul normal la cilindrul proectant al elipsei (Γ_1), dus prin $(mt, m't')$, este definit de această tangentă şi normala la acest cilindru în (m, m'), care este orizontala proectată după mo. Se pot construi unghiurile ω şi ω' pe care aceste plane normale le fac cu planul conicei (Γ_1), plan perpendicular pe vertical, care le tae pe ambele după $(mt, m't')$. Aşa fiind, dacă ρ este raza de curbură a lui (Γ_1) în (m, m'), ρ_0 şi ρ'_0 razele de curbură ale secţiunilor normale definite mai sus la cilindroid şi cilindru proectant, în acelaş punct, după teorema lui Meusnier, avem

$$\rho = \rho_0 \cos\omega = \rho'_0 \cos\omega'.$$

Dar, dacă φ este unghiul tangentei $(mt, m't')$ cu generatoarea cilindrului proectant, adică cu verticala punctului (m, m'), relaţia lui Euler, aplicată la cilindrul a cărui secţiune dreaptă este cercul de rază $Oa = r$ ($R_1 = r$, cealaltă rază de curbură R_2 a secţiunei drepte este ∞, căci curba de secţiune este generatoarea rectilinie), arată că

$$\rho'_0 = \frac{r}{\sin^2\varphi}.$$

De unde urmează

$$\rho_0 = \frac{r\cos\omega'}{\sin^2\varphi\cos\omega}.$$

Construind această expresie a razei de curbură a secţiunei normale oarecare, indicatoarea în (m, m') se poate construi, căci se cunosc asimptotele şi un punct.

95. **Mănunchi de normale. Teorema lui Sturm.** Dacă se consideră în jurul unui punct M al unei suprafeţe, o arie infinit mică trasă pe suprafaţă, ansamblul normalelor duse prin punctele conţinute în interiorul acestei arii constitue un mănunchi de normale, a cărui normală în M este normala mijlocie. Vom arăta că, *afară de infiniţi mici de ordinul al doilea, normalele acestui mănunchi întâlnesc axele de curbură ale celor două secţiuni principale trecând prin* MN.

Pentru a demonstra această proprietate a lui Sturm, vom stabili următoarele. 1° *Dacă se proectează pe unul din planele principale,* Mxz, *de ex., normalele în două puncte corespunzătoare ale suprafeţei şi paraboloidului osculator în* M,

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}$$

unghiul acestor proecţiuni este infinit mic de ordinul al doilea. În adevăr, aceste proecţiuni sunt normalele la secţiunile suprafeţelor, paralele cu Mxz, obţinute dând lui y în ecuaţiile suprafeţelor o aceeaş valoare constantă. Unghiul lor este egal cu acela al tangentelor la aceste secţiuni ale căror (pante) coeficienţi unghiulari, $\frac{dz}{dx}$, diferă cu un infinit mic de ordinul al doilea, căci diferenţa valorilor lui z corespunzătoare este de ordinul al treilea. Acest unghi este deci de ordinul al doilea.

2° *Dacă se proectează ortogonal un punct oarecare* M′ *al unui paraboloid în* m' *pe planul tangent în vàrful* M, *paralela la normala în* M′ *dusă prin* m' *întâlneşte axele de curbură* A_1 *şi* A_2 *(perpendicularele pe secţiunile principale în centrele de curbură principale) corespunzătoare punctului* M. În adevăr, să observăm că proecţiunile pe unul din planele principale, ale secţiunilor plane ale paraboloidului, paralele cu acest plan, se obţin cu o translaţie paralelă cu Mz din secţiunea principală.

Deci, în toate punctele proecţiunei, situate pe o paralelă la Mz, normalele la proecţiile acestor secţiuni plane sunt paralele între ele şi paralele cu dreapta care uneşte proecţia comună a piciorului lor pe Mx (sau My) cu punctul $z = R_1$ (sau $z = R_2$) a lui Mz, căci subnormala secţiunii principale este constantă şi egală cu parametrul R_1 (sau R_2).

Dar, normalele la suprafaţă se proectează pe planul principal Mxz (sau Myz) după normalele la aceste secţiuni plane paralele cu acest plan principal. Deci, paralelele la normalele în punctul M' oarecare al paraboloidului, duse prin proecţia lor m' pe planul tangent în vârful M, întâlnesc toate axa de curbură în punctul $z = R_1$ (sau $z = R_2$).

3⁰ Acestea fiind stabilite, prin punctul M' (Fig. 138) al suprafeţei, infinit vecin de M, să ducem normala la suprafaţă şi paralela la normala corespunzătoare a paraboloidului osculator şi fie $M'N'$, $M'N'_1$ proecţiile lor pe Mxz. În baza primei proprietăţi de mai sus, unghiul $N'M'N'_1$ este de ordinul al doilea, segmentul $N'N'_1$ este de asemenea infinit mic de ordinul al doilea. Însemnând cu C_1 centrul de curbură principal corespunzător secţiunii principale Mxz, şi cu C_1D_1 perpendiculara în C_1 în planul principal Mxz pe MC_1, adică axa de curbură a celei de a doua secţiuni principale, în virtutea proprietăţii a doua, se vede că $M'N_1$ este paralelă cu $m'C_1$, apoi $C_1N_1 = m'M'$, care este de ordinul al doilea, şi cum unghiul în N_1 este infinit mic, urmează că $C_1N'_1$ este de ordinul al treilea, deci C_1N' este de ordinul al doilea, adică, afară de infiniţi mici de ordinul al doilea, normala în M' întâlneşte axele de curbură, C_1D_1, ale celor două secţiuni principale ce trec prin MN.

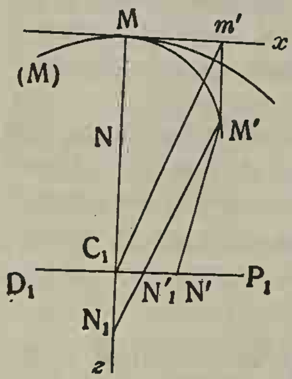

Fig 138.

Regăsim o proprietate stabilită de Mannheim (No. 88, 6⁰) că, dacă M' tinde către M, dealungul unei curbe oarecare situată pe suprafaţa dată, suprafaţa născută de normală este tăiată de planul principal după o curbă, care admite axa de curbură A_1 ca tangentă în C_1. Deci, toate elementele de suprafaţă riglată, născute de normalele în jurul lui MN, se racordează în C_1 şi de asemenea în C_2.

96. **Raze refractate sau reflectate. Teorema lui Malus şi Dupin.** Să considerăm o suprafâţă (A) pe care se refractă

razele AM normale la o suprafaţă (M)[1] (Fig. 139). Din punctul A ca centru să descriem sfera (S) cu raza AM, tangentă în M la suprafaţa (M). Punctul M fiind pe suprafaţa (M), poziţia sa depinde de doi parametrii, deci sfera variabilă (S) depinde de doi parametrii. Aşa dar, aseste sfere îşi ating înfăşurătoarea în două puncte caracteristice, punctul M şi simetricul său M_1 în raport cu planul tangent în A la suprafaţa (A). Pentru a vedea aceasta, e destul a considera sferele corespunzătoare la trei puncte infinit vecin A, A′, A″, care se tae în două puncte simetrice în raport cu planul AA′A″ al centrelor şi apoi a face ca punctele A′ şi A″ să tindă către A.

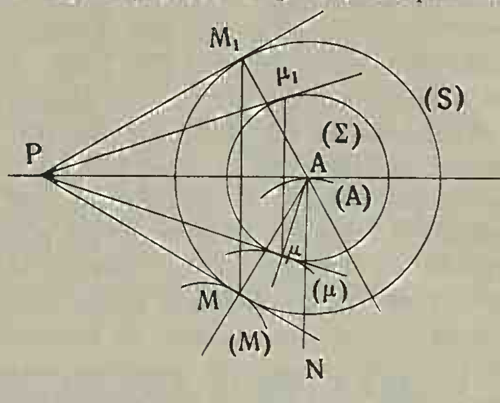

Fig. 139.

Să luăm ca plan al figurei acela determinat de raza AM şi normala AN în A la suprafaţa (A).

Să observăm că raza AM_1 se confundă cu raza reflectată a lui AM pe suprafaţa (A) şi că această rază normală în M_1 la sfera (S) este de asemenea normală la suprafaţa (S_1) care constitue a doua pânză a suprafeţei înfăşurătoare a sferei (S). Deci, *razele normale la o suprafaţă* (M) *se reflectă pe o suprafaţă oare care* (A), *astfel că razele reflectate sunt normale la altă suprafaţă.*

Să considerăm acum sfera (Σ) de centru A cu raza egală cu $\frac{AM}{n}$, n fiind indicele de refracţie. Această sferă depinde de doi parametrii şi are două puncte caracteristice, de contact cu înfăşurătoarea sa, μ şi μ_1. Pentru a determina aceste puncte, să considerăm sfera (S′) corespunzătoare la alt punct A′, infinit vecin de A, care tae sfera (S) după un cerc a cărui limită (C) trece prin M şi M_1. De asemenea, limita (Γ) a cercului după care sfera (Σ′) [dedusă din (S) ca (Σ) din (S)] tae (Σ), trece prin punctele μ şi μ_1. Dar ansamblul sferelor (S′) şi (Σ′) este omo-

---

[1] A se vedea M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie de l'Ecole Polytechnique* (1930), altă soluţie dată de D-l *Babinet*, elev al promoţii speciale 1919.

tetic cu ansamblul sferelor (S) şi (Σ). Centrul lor de omotetie este vârful comun a unui con circumscris la (S) şi (S'), şi a conului circumscris la (Σ) şi (Σ'). Limita sa este deci vârful comun al conului circumscris lui (S) dealungul lui (C) şi al conului circumscris lui (Σ) dealungul lui (Γ); este, aşa dar, polul în raport cu sfera (S) a unui plan ce trece prin M şi M_1. Dar acest pol descrie dreapta Δ conjugată cu MM_1 în raport cu sfera (S), care se proectează pe planul figurei în P. De aci rezultă că cercurile (Γ) de contact ale sferei (Σ) cu conurile având ca vârfuri diferitele poziţii ale polului pe dreapta conjugată Δ, trec prin punctele de întâlnire μ şi μ_1 ale sferei (Σ) şi a dreptei conjugate, în raport cu această sferă, a dreptei ce se proectează în P; aceste puncte se obţin pe planul figurei ducând din P tangente la conturul aparent al sferei (Σ).

Aşa fiind, dreapta $A\mu$ este normală în μ la suprafaţa (μ), înfăşurătoarea sferei (Σ), ea având în acest punct acelaş plan tangent ca şi sfera.

Dar, dreapta $A\mu$ este în planul MAN al figurei, al razei incidente MA şi normalei MN la suprafaţa refractantă. Apoi, unghiurile MAN şi μAN fiind respectiv egale cu MPA şi μPA, urmează

$$\frac{\sin MAN}{\sin \mu AN}=\frac{AM}{A\mu}=n.$$

Deci, $A\mu$ este raza refractată corespunzătoare lui AM şi deci razele normale la suprafaţă se refractă pe o altă suprafaţă, astfel că razele refractate sunt normale la o altă suprafaţă.

Rezultă de aci că razele luminoase, ce pleacă dela o sursă redusă la un punct, care, înainte de orice reflexie sau refracţie, pot fi privite ca normale la o sferă având acest punct ca centru, sunt, după un număr oarecare de reflexiuni sau refracţii, normale la aceeaş suprafaţă (μ).

Rezultatul găsit de *Malus* pentru razele ce pornesc dintr'un punct, a fost generalizat de *Dupin*, pentru razele normale la o suprafaţă oarecare.

Să considerăm acum razele luminoase pornite de la o sursă, interioare la un con a cărui deschidere foarte mică înconjură una din ele, ρ; ansamblul acestor raze vor forma după un număr oarecare de reflexiuni sau refracţii, ceea ce se zice *mănunchi luminos* împrejurul razei ce provine din ρ, care se notează de obicei cu aceeaş literă.

Aplicând teorema lui Sturm, se vede că dacă μ este punctul unde raza ρ este normală la suprafața (μ), razele mănunchiului luminos întâlnesc foarte sensibil cele două axe de curbură principale ale suprafeței corespunzătoare punctului (μ), cărora, pentru acest motiv, fizicienii i-au dat numele de *focalele lui Sturm*. Se poate vedea (ceea ce se probează și prin experiență) că, dacă se deplasează un ecran normal la raza ρ, imaginea luminoasă se reduce sensibil la o mică trăsătură rectilinie (fragment din focala lui Sturm) când ecranul va trece prin fiecare din cele două centre de curbură principale ale lui (μ) situate pe ρ.

NOȚIUNI SUMARE ASUPRA COMPLEXELOR ȘI CONGRUENȚELOR DE DREPTE (1).

97. **Coordonatele omogene ale linii drepte.** Să considerăm o dreaptă D paralelă cu direcția

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}.$$

Ecuațiile proecțiilor dreptei D pe cele trei plane de coordonate sunt

(1) $$nx-mz=p,\quad lz-nx=q,\quad mx-ly=r.$$

De unde

(2) $$lp+mq+nr=0.$$

Se vede că dreapta (D) ale cărei ecuații sunt (1), este conținută in planul

(3) $$px+qy+rz=0$$

ce trece prin origină.

Parametrii l,m,n,p,q,r, în număr de 6, legați cu relația (2), determină, afară de un factor constant, ecuațiile (1) și deci dreapta (D). Acestea se zic *coordonatele omogene* ale linii drepte (D). Aceste coordonate fiind cunoscute prin valori proporționale, și apoi verificând o relație omogenă (2), ele se reduc, în realitate, la patru distincte, cea ce de altfel trebuia, căci o dreaptă în spațiu este determinată de patru condiții.

---

(1) M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie ac l'Ecole Polytechnique* (1930), p. 153. A se vedea și expunerea geometrică asupra *Complexelor și congruențelor* de *Fouret*, în apendicele cărții, *La géométrie du mouvement*, de *Sehoenflies*, tradusă de *Speckel;* Gauthier Villars, 1893.

Însemnarea geometrică a acestor coordonate este următoarea: l,m,n sunt proecţiile pe axe, p,q,r, momentele, în raport cu axele, ale unui vector oarecare luat pe dreapta considerată.

Condiţia ca dreptele $D(l,m,n,p,q,r)$ şi D' (l',m',n',p',q',r) să se întalnească, se obţine eliminând pe x,y,z între ecuaţiile (1) şi analoagele sale pentru cealaltă dreaptă, ceea ce se poate uşor avea înmulţind ecuaţiile (1) respectiv cu l',m',n' şi ecuaţiile analoage pentru (D') respectiv cu l,m,n. Adunând, găsim

$$(4) \qquad l'p+m'q+n'r+lp'+mq'+nr'=0,$$

condiţia necesară şi suficientă ca dreptele (D) şi (D') să se întâlnească.

98. **Diferite sisteme infinite de drepte în spaţiu.** Poziţia unei drepte depinzând de patru parametrii în spaţiu, se poate, în ansamblul cuadruplu infinit al dreptelor din spaţiu, să imaginăm sistemele de drepte triplu, dublu şi simplu infinite, care satisfac respectiv, la o condiţie, două, sau trei condiţii simple, care se exprimă cu relaţii omogene între coordonatele $l, m, n. p, q,r$ ale acestor drepte.

Astfel, o singură ecuaţie omogenă între coordonate defineşte un sistem triplu infinit, sau un *complex de drepte;* două ecuaţii omogene definesc un sistem dublu infinit, sau o *congruenţă,* în fine, trei ecuaţii omogene definesc un sistem simplu infinit, sau o *serie de drepte.*

Exemplu de *complexe,* sunt dreptele tangente la o suprafaţă dată, sau care întâlnesc o linie dată, care poate fi la infinit pe un con sau pe un plan dat.

Congruenţe formează dreptele tangente la două suprafeţe date, normalele la o suprafaţă, dreptele care întâlnesc două linii date.

Serie de drepte formează generatoarele de acelaş sistem ale unei cuadrice riglate (semicuadrică), tangentele la o curbă strâmbă, etc.

99. **Clasificarea complexelor şi congruenţelor.** Am văzut că un complex este definit de o ecuaţie omogenă,

$$(5) \qquad F(l,\ m,\ n,\ p,\ q,\ r)=0,$$

între coordonatele fiecărei drepte a complexului. Dacă această ecuaţie este algebrică şi de gradul μ, complexul se zice algebric şi de gradul μ.

Să considerăm dreptele complexului ce trec prin acelaş punct din spaţiu. Exprimând că coordonatele punctului verifică ecuaţiile (1), care de fapt sunt două, se obţin două condiţii, care împreună cu cea exprimată prin (5), se vede că aceste drepte satisfac la trei condiţii simple, adică formează o serie. Dreptele acestei serii trecând prin acelaş punct, nasc un con, a cărui ecuaţie se obţine astfel. Fie (x_0, y_0, z_0) punctul fix şi (x, y, z) un punct oarecare al unei drepte a serii. Proecţiile vectorului format de aceste puncte pe axele de coordonate sunt $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$; momentele în raport cu aceleaşi axe sunt zy_0-yz_0, xz_0-zx_0, yx_0-xy_0. Cum aceste şase cantităţi sunt proporţionale cu l, m, n, p, q, r, şi verificând ecuaţia omogenă (5), avem

$$F(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0,\ zy_0-yz_0,\ xz_0-zx_0,\ yx_0-xy_0)=0,$$

care este ecuaţia conului căutat şi care se zice *conul complexului* corespunzător punctului considerat. *Ordinul acestui con este* μ, *egal cu acela al complexului.*

Să considerăm acum toate dreptele complexului situate în acelaş plan, unde ele au o înfăşurătoare oarecare. Tangentele duse dintr'un punct oarecare al planului la această curbă sunt intersecţiile acestui plan ca conul complexului având ca vârf acest punct Numărul acestor tangente este μ şi deci înfăşurătoarea dreptelor complexului situate într'un plan considerat, numită *curba complexului,* pentru acest plan, *este de o clasă egală cu ordinul* μ *al complexului.*

Se zice *complex linear* acela pentru care ecuaţia (5) este lineară. Conurile şi curbele complexului linear sunt respectiv de ordinul întâi şi clasa întâia, deci se reduc respectiv la plane şi puncte. Ecuaţia lineară (5) conţinând 5 parametrii, un complex linear C este complect determinat prin cinci condiţii simple, adică prin cunoaşterea a cinci drepte, proectiv independente, care-i aparţin.

Două ecuaţii omogene, $F(l, m, n, p, q, r)=0$, $G(l, m, n, p, q, r)=0$, algebrice şi întregi, de gradele μ şi ν, definesc o *congruenţă algebrică,* al cărei ordin este numărul de drepte care-i aparţin şi care trec printr'un punct al spaţiului şi a cărei clasă este numărul de drepte conţinute în orice plan al spaţiului.

În general, ordinul unei congruenţe este egal cu numărul de generatoare rectilinii, comune conurilor complexelor F şi G, având acelaş vârf; clasa, numărul de tangente comune la curbele complexelor conţinute în acelaş plan. Aceste numere sunt egale, în general, cu $\mu\nu$. Sunt, însă, cazuri când aceste numere nu mai sunt egale. De ex., coardele unei cubice strâmbe formează o congruenţă de ordinul întâi şi clasa treia. În adevăr, nu pot trece două coarde ale unei cubice strâmbe printr'un punct al spaţiului, căci cele patru puncte ale acestor coarde ar forma un plan, care ar tăia cubica în patru puncte, ceea ce este absurd. De altfel, în fiecare plan sunt trei coarde obţinute unind două câte două cele trei puncte unde acest plan tae cubica.

Dacă ecuaţiile $F=0$ şi $G=0$ sunt lineare, congruenţa (c) corespunzătoare este lineară.

100. **Proprietăţile speciale ale complexelor lineare.** 1⁰ *Pol şi plan polar.* În orice complex linear [C], toate dreptele ce trec printr'un punct, sunt situate în acelaş plan, numit *plan polar* (plan focal) al acestui punct. Toate dreptele situate în acelaş plan trec prin acelaş punct numit *polul* (focarul) acestui plan. Deci, toate punctele şi planele spaţiului sunt în raport cu complexul [C], asociate două câte două, fiecare punct fiind situat în planul corespunzător.

2⁰ *Dacă polul* P *al planului* Π *este în planul* Π′, *reciproc, polul* P′ *al planului* Π′ *este în planul* Π. În adevăr, să considerăm un complex linear [C] şi fie P polul planului Π. Dacă polul P este în planul Π′, cum este şi în planul Π, se află pe dreapta D de intersectie a planelor Π şi Π′. Această dreaptă trecând prin polul P al planului Π, aparţine complexului. Aparţinând complexului şi găsindu-se în planul Π′, trece prin polul P′ al acestui plan. Acest pol fiind pe dreapta D, este deci în planul Π.

3⁰ *Drepte conjugate.* Fie P polul unui plan Π care se învârteşte în jurul unei drepte D nefăcând parte din complex. Pentru a găsi locul polului P, să luăm pe dreapta D două puncte oarecare A şi B, ale căror plane polare α şi β se tae după dreapta Δ.

Pentru o poziţie oarecare a planului Π trecând prin D, planele α şi β având polurile A şi B în acest plan Π (căci sunt situate pe D conţinută în plan), planul Π are polul său P în planele α şi β şi deci pe dreapta Δ de intersecţie a acestor plane α şi β.

Aşa dar, *când planul* Π *se învârteşte în jurul lui* D, *polul său descrie dreapta* Δ. Cum punctele A şi B au fost alese arbitrar pe D, şi cum polul P al planului Π este independent de alegerea acestor puncte, rezultă că planul polar al oricărui alt punct al dreptei D trece de asemenea prin Δ. *Dreapta* D *este* *locul polurilor planelor ce trec prin* Δ. Există, deci, reciprocitate între dreptele D şi Δ, care sunt numite pentru acest motiv, *conjugate* în raport cu complexul.

Dacă dreapta D ar aparţine complexului, ea ar coincide cu conjugata sa Δ, căci orice plan trecând prin D ar avea polul său pe însăşi această dreaptă.

4⁰ *Orice dreaptă a complexului care întâlneşte o dreaptă* D *întâlneşte şi conjugata sa* Δ. În adevăr, dacă dreapta γ întâlneşte pe D şi aparţine complexului [C], polul planului (D, γ) se găseşte pe dreapta γ; dar acest pol se află şi pe conjugata Δ a lui D, ceea ce arată că dreptele γ şi Δ se întâlnesc.

5⁰ *Orice dreaptă care întâlneşte două drepte* D *şi* Δ *conjugate aparţine complexului*. În adevăr, planul format de această dreaptă γ şi de una din dreptele conjugate, Δ, are polul său pe cealaltă dreaptă conjugată D; dar acest pol este în planul (Δ, γ) şi deci se găseşte la intersecţia dreptei D cu acest plan care este punctul comun dreptelor D şi γ. Dar γ trecând prin polul planului (Δ, γ) care o conţine, aparţine complexului.

6⁰ *Două perechi oarecare de drepte conjugate în raport cu un complex linear* [C] *aparţin la aceeaş semicuadrică*. În adevăr, fie perechile (D, Δ), (D′, Δ'). Toate dreptele γ care întâlnesc trei din aceste drepte D, Δ, D′, de ex., nasc o semicuadrică, pentru care D, Δ, D′, generatoarele din celalt sistem, determină semicuadrica complimentară. Dar, orice dreaptă γ ce întâlneşte pe D şi Δ aparţine complexului: aparţinând complexului şi întâlnind pe D′, întâlneşte şi pe Δ'. Toate generatoarele γ ale primei semicuadrice întâlnind pe Δ', însemnează că această dreaptă aparţine la semicuadrica complimentară definită de dreptele D, Δ, D′.

7⁰ *Diametrii şi axe.* Dacă se consideră toate planele paralele cu un plan dat, ele pot fi privite ca trecând prin dreapta de la infinit a acestui plan dat. Polurile lor sunt deci pe dreapta conjugată a acestei drepte de la infinit. O astfel de dreaptă se zice un *diametru* al complexului *conjugat* direcţii planului considerat.

Dar, prin fiecare dreaptă de la infinit, trece, în particular, planul de la infinit. Toate diametrele conţin deci polul acestui plan de la infinit, cu alte cuvinte, un punct determinat al acestui plan de la infinit, adică, *toţi diametrii sunt paraleli între ei.*

La fiecare dintre ei corespunde o direcţie determinată de plane paralele. Una dintre aceste direcţii de plane este perpendiculară la direcţia comună a diametrelor. Diametrul corespunzător se xice *axa* complexului.

8⁰ Să însemnăm cu X şi δ axa complexului şi dreapta de la infinit a planelor care îi sunt perpendiculare, adică dreapta sa conjugată şi fie D şi Δ două drepte conjugate oarecare. Am văzut că dreptele X, δ, D şi Δ aparţin la o aceeaş semicuadrică, care este în acest caz un paraboloid iperbolic, căci una din generatoarele sale este aruncată la infinit. Acest paraboloid are ca direcţie a primului plan director aceea a planelor trecând prin dreapta de la infinit δ, adică planele perpendiculare pe X, direcţie care se zice *ortografică* pentru complexul [C]. Direcţia celui de al doilea plan director este dată de două din generatoarele semicuadricei considerate, D şi Δ, de ex. Această direcţie de plan fiind de asemenea paralelă cu generatoarea X a aceleaş semicuadrice, este perpendiculară pe direcţia planului ortografic. Planele duse paralel cu acest plan prin D şi Δ sunt perpendiculare pe planul ortografic, deci proecţiile dreptelor D şi Δ pe planul ortografic sunt paralele. Paraboloidul este echilater şi X este perpendiculară pe toate generatoarele sistemului al doilea (paralele cu planul ortografic); cu alte cuvinte, generatoarea X este în sistemul D şi Δ, linia de stricţiune a paraboloidului.

9⁰ Toate generatoarele paraboloidului definit de D şi Δ, care sunt paralele cu planul ortografic, sunt dreptele complexului, căci întâlnesc pe D şi Δ. Ele întâlnesc de asemenea axa X care e de acelaş sistem cu D şi Δ. Deci, proecţiile lor pe planul ortografic, trec toate prin piciorul axei X pe planul ortografic. Printre aceste proecţii este una care este perpendiculară pe proecţiile paralele ale lui D şi Δ. În spaţiu, generatoarea corespunzătoare este perpendiculara comună lui D şi Δ, căci ea este paralelă cu planul de proecţie (perpendiculară pe axa X).

Deci, *perpendiculara comună la două drepte conjugate* D *şi* Δ *în raport cu complexul* [C], *face parte din complex şi întâlneşte subt un unghi drept axa* X *a complexului.*

10⁰ *Generarea unui complex linear.* Să însemnăm cu X proecţia redusă la un punct (Fig. 140) pe planul ortografic, a axei complexului [C] şi fie a_0b_0 proecţia unei drepte oarecare a complexului, a cărei urmă pe planul ortografic este b. Perpendiculara comună la această dreptă şi la axă aparţine complexului [C], căci întâlneşte axa X şi conjugata sa, dreapta de la infinit a planului ortografic. Proecţia pe planul ortografic a acestei perpendiculare comune este Xa_0, coborâtă din X pe a_0b_0. Această perpendiculară comună, împreună cu a_0b_0 determină planul polar al punctului a_0 și urma acestui plan pe planul ortografic va fi dreapta b_0b paralelă cu Xa_0.

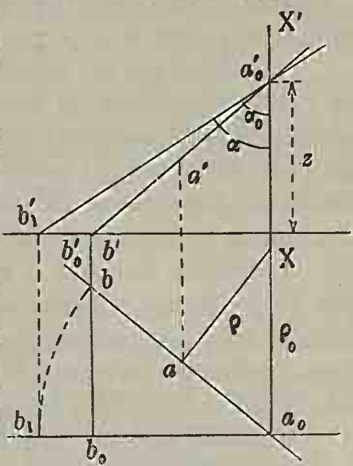

Fig. 140.

Orice altă dreaptă a_0b a complexului, trecând prin a_0 și fiind în acest plan polar, va avea urma sa ortografică b pe urma $b_0b'_0$ a planului polar. Să însemnăm cu ρ cea mai scurtă distanță, proectată după Xa, a axei și dreptei a_0b, cu α unghiul acestei drepte cu axa, ρ_0 și α_0 aceleași cantități pentru dreapta a_0b_0. Din triunghiurile asemenea Xaa_0, a_0b_0b, avem

$$Xa \,.\, a_0b = Xa_0 \,.\, a_0b_0.$$

Să însemnăm cu z cota lui a_0 în raport cu planul ortografic de proecție; avem

$$\rho \,.\, a_0b = \rho_0 \,.\, z\,\text{tg}\alpha_0. \tag{6}$$

Pentru a găsi adevàrata mărime a unghiului dreptei (a_0b, a'_0b') cu axa, să rotim această dreaptă în jurul axei până ajunge să devie frontală în poziția $(a_0b_1, a'_0b'_1)$. Unghiul α este egal cu $b'_1a'_0X$ și deci

$$a_0b = a_0b_1 = z\text{tg}\alpha.$$

Înlocuind în (6), obținem

$$\rho z\text{tg}\alpha = \rho_0 z\text{tg}\alpha_0.$$

Deci, însemnând cu h constanta $\rho_0\text{tg}\alpha_0 = h$, avem

$$\rho\text{tg}\alpha = h.$$

Așa dar, *pentru toate dreptele complexului* [C], *ce trec prin a_0, produsul ρtgα are o valoare constantă h.*

Se poate ușor arăta, că *această constantă h este aceeaș pentru toate dreptele complexului.* Pentru aceasta, va fi de ajuns a arăta că rămâne aceeaș pentru două drepte oarecare γ și γ' ale complexului și care nu se întâlnesc. Dar, se poate totdeauna găsi o dreaptă γ'' a complexului care să le intâlnească pe γ și γ', care se poate obține considerând planul polar Π a unui punct oarecare P al dreptei γ și luând punctul de întâlnire P' al acestui plan Π cu dreapta γ', astfel că dreapta PP' este una din dreptele γ'' căutate. Dar γ şi γ'' întâlnindu-se, au aceeaş constantă h, care este aceeaş şi pentru γ'' şi γ'; deci constanta este aceeaş pentru γ şi γ'.

Aşa fiind, pe un cilindru de rotaţie cu axa X şi raza ρ, să considerăm elicea cu pasul redus h. Fiecare binormală a acestei elice se confundă deci cu o dreaptă a complexului [C]. Se vede deci că *acest complex* [C] *se compune din toate binormalele la toate elicele, de acelaş pas redus h, trase pe toate cilindrele de rotaţie în jurul axei* X *a complexului.*

Cilindrele formând o simplă infinitate, elicele de acelaş pas de pe fiecare cilindru, deasemenea formează o simplă infinitate, apoi binormalele pentru fiecare elice formând iarăşi o simplă infinitate, urmează că binormalele la aceste elice formează un sistem triplu infinit.

Să observăm că planul polar în fiecare punct cum a fost a_0, este determinat de binormala a_0b_0 la elicea ce trece prin a_0 şi Xa_0 raza cilindrului în acest punct. Acest plan *polar este planul normal la elice trecând prin acest punct.* Toate dreptele acestui plan trecând prin a_0, deci toate normalele la elice, aparţin complexului. Trebue observat că, când se zice că toate normalele la toate elicele de axă X şi pas redus h, aparţin complexului, fiecare din aceste drepte este numărată în realitate de o infinitate de ori. Pentru a fi numai o singură dată numărată trebue a fi considerată ca binormală la elicea trecând prin piciorul perpendicularei comune la această dreaptă şi la axa complexului.

Să considerăm cazul particular $h=0$. Trebue exclusă ipoteza $\alpha=0$, căci ar corespunde drepte paralele cu axa X, al căror ansamblu ar forma o congruenţă şi nu un complex. În cazul acesta avem $\rho=0$ pentru toate dreptele complexului; cu alte cuvinte, se obţine complexul tuturor dreptelor care întâlnesc axa X. Un astfel de *complex* se zice *special.*

Când $h=\infty$, trebue exclusă ipoteza $\rho=\infty$, căci ar corespunde dreptele în întregime aruncate la infinit. În acest caz, avem $\alpha=\frac{\pi}{2}$, ceea ce dă toate dreptele perpendiculare pe axa X, adică formând complexul special a cărui axă este dreapta de la infinit a planelor normale la X, adică conjugata δ a axei X.

101. **Congruenţe lineare. Fascicole de complexe lineare.** 1º Să scriem ecuaţia generală a unui complex linear sub forma

(7) $$[C] \equiv \alpha l + \beta m + \gamma n + \delta p + \varepsilon q + \varphi r = 0.$$

Condiţia ca acest complex să fie special, adică pentru ca toate dreptele $(l, m, n, ...)$ ale sale să întâlnească aceeaş dreaptă D, este de forma (4), de aceeaş formă cu (7). De unde urmează că coordonatele lui D, luate în aceeaş ordine ca şi pentru dreapta $(l, m, n, ...)$, sunt $\delta, \varepsilon, \varphi, \alpha, \beta, \gamma$. Aceste cantităţi fiind coordonatele unei drepte, verifică relaţia (2) (No. 97), adică

(8) $$\alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\varphi = 0,$$

care este relaţia cerută ca acest complex să fie special.

2° Aşa fiind, fie

$$C_0 \equiv \alpha_0 l + \beta_0 m + \gamma_0 n + \delta_0 p + \varepsilon_0 q + \varphi_0 r = 0,$$
$$C_1 \equiv \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n + \delta_1 p + \varepsilon_1 q + \varphi_1 r = 0$$

ecuaţiile a două complexe lineare. Dreptele lor comune formează o congruenţă de ordinul 1 şi clasa 1, care se zice *congruenţă lineară.* Se mai zice că o congruenţă lineară c este intersecţia a două complexe C_0 şi C_1.

Dacă observăm că coordonatele oricărei drepte a congruenţei c verifică relaţia

(9) $$C_0 + \lambda C_1 = 0,$$

se vede că această congruenţă este un element comun la toate complexele, în număr simplu infinit, făcând să varieze λ în ecuaţia (9), şi al căror ansamblu formează un *fascicol de complexe.* Se zice că congruenţa c este baza acestui fascicol.

Printre complexele acestui fascicol, se găsesc două speciale, S şi S'. Scriind între coeficienţii $\alpha_0 + \lambda\alpha_1$, $\beta_0 + \lambda\beta_1, ... \varphi_0 + \lambda\varphi_1$, din (9), condiţia (8) ca să fie special, obţinem o ecuaţie de gradul al doilea în λ, ale cărei rădăcini reale, imaginare sau confundate, determină pe S şi S'. Congruenţa c poate fi privită ca intersecţia complexelor S şi S'. Deci, *toate dreptele congruenţei întâlnesc două drepte numite directoare, care sunt axele complexelor* S *şi* S'.

Reciproc, congruenţa ale cărei toate dreptele întâlnesc două drepte date, este de ordinul 1 şi clasa 1, deci o congruenţă lineară.

3° *Dreptele* D *şi* Δ *pe care le întâlnesc toate dreptele congruenţei* c *sunt conjugate în raport cu unul oarecare din complexele fascicolului* (9). În adevăr, toate dreptele ce trec prin acelaş punct M al lui D şi rezemându-se pe Δ, aparţin congruenţei şi deci, complexului considerat. Ele sunt deci situate în planul polar al acestui punct, care este planul format de M şi Δ. Deci planele polare ale tuturor punctelor de pe D conţin pe Δ, ceea ce arată că dreptele D şi Δ sunt conjugate în raport cu complexul.

4⁰ Dacă ecuaţia de gradul al doilea în λ, ce determină complexele speciale S şi S′, are o rădăcină dublă, ar părea că D şi Δ, care sunt axele complexelor S şi S′, fiind confundate, congruenţa *c* nu se distinge de complexul special având ca axă această directoare unică. Pentru a vedea că nu este aşa, să considerăm întâi directoarele D şi Δ infinit vecine şi apoi să trecem la limită. Se vede atunci că *în acest caz limită, dreptele congruenţei c sunt toate tangente la aceaş cuadrică dealungul generatoarei sale* D.

5⁰ De oarece nu există, în general, de cât două drepte care să întâlnească patru drepte date, urmează că *o congruenţă c este complect definită când se dau patru din dreptele sale*, cu condiţie ca aceste patru drepte să nu aparţină la aceeaş semicuadrică

6⁰ Dacă cele două complexe speciale ce definesc fascicolul au axele concurente, congruenţa, intersecţia complexelor, care se compune din toate dreptele ce întâlnesc aceste axe, conţine, deci, dreptele situate în planul acestor axe şi toate cele ce trec prin intersecţia lor. *Fascicolul* este atunci *special* şi se compune numai din complexe speciale.

102. **Reţele şi sisteme de complexe lineare.** 1⁰ Considerând trei complexe lineare,

$$C_0=0, \quad C_1=0, \quad C_2=0,$$

dreptele care le sunt comune, formează o simplă infinitate, o serie adică ele sunt generatoarele unei suprafeţe riglate Σ. Pe de altă parte, ele aparţin la fiecare din complexele reprezentate de ecuaţia

$$C_0+\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2=0, \tag{10}$$

care se zice că formează o *reţea de complexe,* iar suprafaţa riglată Σ comună, se zice *baza* reţelii.

2⁰ Scriind pentru complexele (10) condiţia (8) între coeficienţii

$$\alpha_0+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2, \ldots \; \varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2,$$

ai complexului (10), ca să fie special, se obţine o ecuaţie de gradul al doilea în λ_1, λ_2, cu o simplă infinitate de soluţii. Axele acestor complexe speciale formează deci o serie, a cărei fiecare dreaptă este întâlnită de fiecare din dreptele suprafeţei care e baza reţelii. De unde urmează că *seria formată din dreptele bazei şi seria formată de axele complexelor speciale să fie fiecare o semicuadrică, aceste două semicuadrice fiind complimentare (ambele să formeze o cuadrică).*

3^0 În cazul a patru complexe, avem un număr finit de drepte comune la toate complexele în număr triplu infinit, definit de ecuaţia

(11) $$C_0+\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+\lambda_3 C_3=0.$$

Condiţia (8), formată cu coeficienţii acestei ecuaţii, fiind de gradul al doilea în $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, urmează că sunt o dublă infinitate de complexe speciale, ale căror axe formează o congruenţă. Aceste axe întâlnind dreptele în număr finit comune la toate complexele sistemului (11), aceste drepte nu pot fi de cât în număr de două (căci în caz contrar axele întâlnindu-le ar forma o semicuadrică şi nu o congruenţă) şi deci, *axele complexelor speciale ale sistemului formează o congruenţă lineară având ca directoare cele două drepte comune la toate complexele sistemului.*

4^0 Considerând sistemul cuadruplu infinit (∞^4) de complexe, reprezentat de ecuaţia

(12) $$C_0+\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+\lambda_3 C_3+\lambda_4 C_4=0,$$

complexele ce-l compun nu mai au nici o dreaptă comună, şi nu mai putem face raţionament analog ca în cazul precedent. Dar, dacă unul din complexe este special, axa sa are coordonatele

$$l=\delta_0+\lambda_1\delta_1+\ldots+\lambda_4\delta_4,\quad m=\varepsilon_0+\lambda_1\varepsilon_1+\ldots+\lambda_4\varepsilon_4,$$
$$n=\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_4\varphi_4,\quad p=\alpha_0+\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_4\alpha_4,$$
$$q=\beta_0+\lambda_1\beta_1+\ldots+\lambda_4\beta_4,\quad r=\gamma_0+\lambda_1\gamma_1+\ldots+\lambda_4\gamma_4.$$

Deci, între aceste 6 cantităţi, ce depind de patru parametrii $\lambda_1,\ldots\lambda_4$, există o relaţie lineară şi omogenă. Formând expresia

$$H=Ll+Mm+Nn+Pp+Qq+Rr$$

şi ordonând-o sub forma

$$H=H_0+H_1\lambda_1+H_2\lambda_2+H_3\lambda_3+H_4\lambda_4,$$

se vede că anulând cele cinci expresii $H_0,H_1,\ldots H_4$, se obţin cinci ecuaţii lineare şi omogene în $L,M,\ldots R$, care permit a determina un sistem de valori ai acestor coeficienţi pentru care $H=0$. Această relaţie lineară şi omogenă $H=0$ în $l,m,\ldots r$, arată că *axele complexelor speciale ale sistemului formează ele înşi-le un complex.*

NOŢIUNI SUMARE DE GEOMETRIE CINEMATICĂ ÎN SPAŢIU.

GENERALITĂŢI.

103. Pentru studiul mişcărei unei figuri în spaţiu, vom raporta mişcarea la un triedru tridreptunghic fix $Oxyz$. Figura variabilă o presupunem invariabil legată de un triedru $O_1x_1y_1z_1$, care variază odată cu figura, astfel că dacă poziţia triedrului $O_1x_1y_1z_1$ este ştiută şi poziţia figurei faţă de acest triedru este cunoscută. În aceste condiţiuni, un punct M al figurei mobile descrie o traectorie în raport cu triedrul fix şi o altă traectorie faţă de triedrul mobil.

Cum poziţia unui triedru $O_1x_1y_1z_1$ depinde de 6 parametrii, urmează că poziţia unui solid în spaţiu depinde de 6 parametrii. Deci, putem să ne închipuim mişcări ale unui solid cu diferite grade de libertate. În cazul unei mişcări cu două grade de libertate, punctele figurei descriu suprafeţe traectorii. În mişcarea cu un grad de libertate, care este mişcarea propriu zisă în Mecanică, punctele figurei descriu curbe în spaţiu.

Însemnând cu M^n o mişcare cu n grade de libertate, să inpunem la o astfel de mişcare o condiţie suplimentară; se obţin, în număr infinit, mişcări M^{n-1}, cu $(n-1)$ grade de libertate, toate compatibile cu condiţiile ce au definit mişcarea M^n considerată. Se vede că mişcările M^{n-1} sunt conţinute în mişcarea M^n.

În particular, orice mişcare M^1 poate fi determinată prin condiţia ca cinci din punctele sale să descrie respectiv cinci suprafeţe date în sistemul fix. Trebue însă observat că fiecare din aceste puncte nu va putea să ocupe pe suprafaţa corespunzătoare o poziţie oarecare, şi că va descrie, din contră, o traectorie determinată de natura celorlalte patru suprafeţe care determină mişcarea.

Dacă voim ca un punct al sistemului mobil să descrie o traectorie definită în raport cu sistemul fix, aceasta însemnează că punctul trebue să se mişte pe două suprafeţe trecând prin acea traectorie; aceasta este deci o condiţie dublă. Aşa fiind, o mişcare M^1 este perfect determinată, dacă se dau traectoriile a două din punctele sale şi o suprafaţă pe care trebue să rămâe un al treilea punct al sistemului.

Pentru o mişcare M^2, se pot da suprafeţele traectorii a patru din punctele sistemului mobil. În acest caz, fiecare din ele va putea ocupa o poziţie oarecare pe suprafaţa traectorie corespunzătoare, negreşit în interiorul a anumite regiuni definite prin condiţia ca distanţa mutuală dintre diversele puncte să conserve o mărime constantă.

Pentru a preciza sensul care se cuvine noţiunei geometrice a unei mişcări M^2, trebue a observa că dacă, în mod fizic, am voi să aducem fiecare din punctele figurei mobile în toate poziţiile pe care condiţiile impuse îi permit a le ocupa, aceasta nu se va putea face de cât cu o mişcare M^1, pe o traectorie, ale cărei circonvoluţiuni, în număr infinit, ar acoperi regiunea întreagă a suprafeţei traectorii unde se poate deplasa punctul considerat din mişcarea M^2.

MIŞCAREA UNEI FIGURI CARE ARE UN PUNCT FIX.

104. **Deplasare finită.** Să considerăm o figură F care are un punct fix O. Fie $Ox_1y_1z_1$ triedrul mobil, invariabil legat de figura F (Fig. 141), astfel că poziţia F_1 a figurei F este cunoscută, dacă se ştie poziţia triedrului $Ox_1y_1z_1$ faţă de triedrul $Oxyz$.

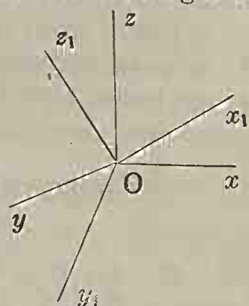

Fig. 141.

Fie F şi F_1 două poziţii ale figurei care are punctul fix O. Vom putea trece de la figura F la figura F_1, dacă vom şti să aducem triedrul $Oxyz$ peste $Ox_1y_1z_1$.

Dar, fiind date unghiurile drepte xOy, x_1Oy_1, în spaţiu, putem aduce unghiul xOy peste x_1Oy_1, cu o rotaţie, în jurul unei axe $O\Delta$, la intersecţia planelor perpendiculare pe planele x_1Ox, y_1Oy, duse respectiv prin bisectoarele unghiurilor x_1Ox, y_1Oy.

Aşa dar, triedrul $Oxyz$ se poate aduce peste triedrul $Ox_1y_1z_1$ şi deci figura F peste figura F_1 cu o rotaţie în jurul unei axe $O\Delta$ ce trece prin punctul O.

Aşa fiind, să considerăm un punct M al figurei F şi fie M_1 poziţia lui M, corespunzătoare în figura F_1. Putem aduce punctul M peste punctul M_1, adică OM peste OM_1, cu o rotaţie în jurul axei $O\Delta$ ce trece prin punctul O şi care este situată în planul perpendicular pe planul MOM_1 şi dus prin bisectoarea unghiului MOM_1. Deci, planele duse prin bisectoarele unghiurilor MOM_1, perpendiculare pe planele MOM_1, trec prin aceeaş dreaptă $O\Delta$.

105. **Deplasare infinitezimală.** Când figura F′ este infinit vecină de F, punctul M′, omologul lui M, este infinit vecin

de M. Dreapta MM′ devine tangenta la traectoria punctului M (curbe sferice trase pe sfera cu centrul O şi raza OM), planul dus prin bisectoarea unghiului MOM′, perperpendicular pe planul MOM′, devine planul normal în M la traectoria (M) a lui M, aşa că, *la un moment dat, planele normale la traectoriile descrise de punctele figurei mobile trec prin aceeaş dreaptă* $O\Delta$, numită *axa instantanee de rotaţie.*

Fiind date tangentele în două puncte M şi N la traectoriile descrise de aceste puncte ale figurei mobile, axa instantanee de rotaţie este la intersecţia planelor normale în M şi N la curbele (M) şi (N).

Considerând axele instantanee la diferite momente succesive, axa instantanee $O\Delta$ descrie în raport cu sistemul fix $Oxyz$ un con (Γ), iar în raport cu sistemul mobil conul (γ). Aceste conuri sunt tangente dealungul axei instantanee $O\Delta$, aşa că, tăind conurile (Γ) şi (γ) cu o sferă cu centrul O şi raţionând ca şi pentru cazul figurilor plane, mişcarea continuă a figurei F′ se poate obţine prin rostogolirea conului (γ) pe conul (Γ), aceste conuri fiind la orice moment tangente dealungul axei instantanee corespunzătoare momentului considerat.

MIŞCAREA UNEI FIGURI ÎN SPAŢIU. DEPLASARE FINITĂ.

106. Fie F şi F′ două poziţii oarecare ale unei figuri variabile şi A şi A′ două puncte corespunzătoare în aceste figuri. Pentru a aduce figura F peste figura F′, să facem mai întâi o rotaţie R_1 în jurul unei axe X_1, luată arbitrar într'un plan perpendicular pe mijlocul lui AA′; după această rotaţie, punctul A a ajuns în A′, iar figura F a luat poziţia F″. Figurile F′ şi F″ având acum comun punctul A′, se poate, după cum am văzut mai sus, să aducem figura F″ peste F′ cu o rotaţie R_2 în jurul unei axe X_2, trecând prin A′ şi care *nu întâlneşte pe* X_1, căci punctul lor de intersecţie ar constitui pentru F un punct fix, ceea ce ar fi contra ipotezei. Deci, *se poate trece de la figura* F *la figura* F′ *cu două rotaţii.*

Această trecere se poate face într'o infinitate de moduri, căci punctele alese A şi A′ au fost arbitrare; apoi, axa X_1 o dreaptă în planul echidistant de A şi A′. Dacă se ia ca axă X_1 dreapta de la infinit a acestui plan, rotaţia R_1 se reduce la o translaţie egală cu AA′. Se poate găsi însă o deplasare unică cu care se poate trece de la figura F la figura F′.

Pentru aceasta, să însemnăm cu R_1 și R_2 rotațiile în jurul axelor X_1 și X_2 de unghiurile φ_1 și φ_2, cu care am văzut că se poate aduce figura F peste figura F′. Pentru a găsi această deplasare unică, să facem următoarea observație. Fie OD_1 și OD_2 (Fig. 142) două drepte perpendiculare pe axa $O\delta$ și care fac între ele unghiul $D_1OD_2 = \frac{1}{2}\alpha$. M fiind un punct oarecare din spațiu, fie M″ simetricul său în raport cu OD_1 și M′ simetricul lui M″ în raport cu OD_2. Să proectăm pe planul OD_1D_2 punctele M, M″, M′ în punctele m, m'', m'. Avem $Mm = m''M'' = M'm'$. Luând pe $O\delta$ segmentul $OO' = Mm$, atunci $O'M$ este egal și paralel cu Om, $O'M'$ egal și paralel cu Om', deci unghiul $MO'M' = mOm'$. Dar unghiul

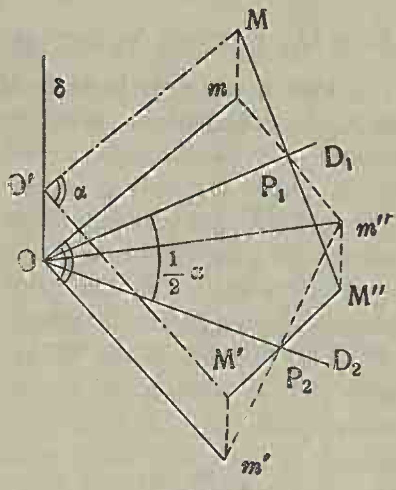

Fig. 142.

$$mOm' = mOm'' + m''Om' = 2P_1Om'' + 2m''OP_2 =$$

$$2(P_1Om'' + m''OP_2) = 2\,\frac{1}{2}\alpha = \alpha.$$

Deci $$MO'M' = \alpha,\quad MO'M' = 2\sphericalangle D_1OD_2.$$

Cum $O'M = O'M'$, și cum aceste drepte sunt perpendiculare pe $O\delta$, urmează că punctul M′ se obține din M cu o rotație în jurul axei $O\delta$ de unghiul α. Dar punctul M′ se poate obține din M luând simetricul M″ al lui M în raport cu OD_1 și apoi simetricul M′ al lui M″ în raport cu OD_2, D_1 și D_2 fiind perpendiculare pe $O\delta$ și făcând între ele unghiul $\frac{1}{2}\alpha$.

Deci, *o rotație în jurul axei* $O\delta$, *de unghiul* α, *se poate înlocui cu două simetrii succesive în jurul axelor* OD_1 *și* OD_2 *perpendiculare pe* $O\delta$ *și care fac între ele unghiul* $\frac{1}{2}\alpha$.

Acestea fiind stabilite, să considerăm rotațiile cu care trecem de la punctul M la poziția corespunzătoare M′. Însemnând cu φ_1 și φ_2 unghiurile acestor rotații, în jurul axelor X_1 și X_2 fie O_1O_2 perpendiculara comună la aceste axe (Fig. 143). Să, luăm în planul perpendicular pe X_1 în O_1 o dreaptă Y_1 care să facă cu axa $O_1O_2 \equiv Y$ unghiul $\frac{\varphi_1}{2}$; în planul perpendicular pe X_2 în O_2, o dreaptă Y_2 care să facă cu Y unghiul $\frac{\varphi_2}{2}$.

Putem trece de la M la M′ cu rotațiile în jurul axelor X_1 și X_2 de unghiurile φ_1 și φ_2. Servindu-ne de observarea de mai sus, această trecere o putem face astfel. Se ia simetricul M″ al lui M în raport cu Y_1; apoi simetricul M‴ al lui M″ în raport cu Y; aceste două simetrii înlocuesc rotația de unghiul φ_1. Să efectuăm acum rotația de unghiul φ_2 în jurul axei X_2. Pentru aceasta, se ia simetricul lui M‴ în raport cu Y, adică M″ și apoi simetricul M′ al lui M″ în raport cu Y_2. Cu alte cuvinte, putem trece de la M la M′, luând simetricul M″ al lui M în raport cu Y_1 (simetria în raport cu Y_1) și apoi simetricul M′ al lui M″ în raport cu Y_2 (simetria în raport cu Y_2).

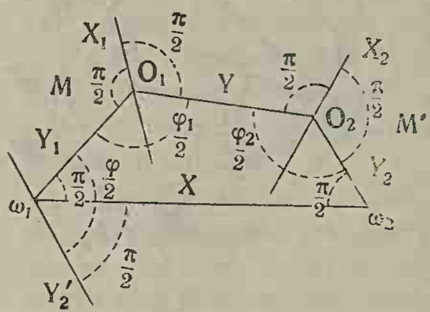

Fig. 143.

Fie $\omega_1\omega_2 \equiv X$ perpendiculara comună a axelor Y_1 și Y_2 și fie Y_2' o paralelă cu Y_2 dusă prin ω_1 și să însemnăm cu $\frac{\varphi}{2}$ unghiul axelor Y_1 și Y_2'. Putem trece dela M la M′ în modul următor. Se ia simetricul M″ al lui M în raport cu Y_1, apoi simetricul M_1 al lui M″ în raport cu Y_2'; apoi simetricul M″ al lui M_1 în raport cu Y_2' și în fine simetricul M′ al lui M″ în raport cu Y_2. Primele două simetrii în jurul axelor Y_1 și Y_2' ce fac unghiul $\frac{\varphi}{2}$, fac cât o *rotație de unghiul* φ *în jurul axei* X; apoi, simetriile, de la M_1 la M″ în jurul lui Y_2' și cea de la M″ la M′ în jurul axei Y_2 paralelă cu Y_2', ambele perpendiculare pe X, fac cât o *translație* dealungul axei X.

Deci, *se poate trece de la* M *la* M′, *sau de la figura* F *la figura* F′, *cu o rotație în jurul axei* X *și cu o translație dealungul axei* X.

Punctele M ale figurei, care se găsesc pe axa X, au ca puncte corespunzătoare tot puncte ale axei X; deci dreapta D a figurei care coincide cu X, după această deplasare este însăşi dreapta D (însă punctele transformate nu rămân aceleaşi, nu coincid cu omoloagele lor).

Să arătăm că această deplasare cu care trecem de la figura F la F′ este unică. Fie că putem trece de la figura F la figura F′ cu o rotaţie şi o translaţie dealungul axei X. Să considerăm punctele figurei F care aparţin dreptei X. Un punct M al acestei drepte, după deplasare devine un punct M′ al acestei drepte. Dacă ar fi altă deplasare de axă X′, cu care putem trece de la figura F la F′, ar trebui ca să putem trece de la M la M′ cu o rotaţie în jurul axei X′ şi cu o translaţie dealungul aceleaş axe X′. Dar, pentru a putea ajunge, în aceste condiţii, de la M la M′, trebue ca X′ să fie paralelă cu X. Fie atunci că putem trece de la poziţia F la poziţia F′ cu două deplasări analoage, de axe paralele X şi X′. Dar, în acest caz, dreptele figurei F, care ar coincide cu axele X şi X′ ar rămâne neschimbate, ceea ce nu poate avea loc de cât în cazul unei translaţii paralelă cu axele X şi X′ ele paralele, ceea ce este în contra ipotezei.

Deci, *este o singură deplasare, de axă* X, *astfel că putem trece cu o singură rotaţie în jurul axei* X *şi cu o singură translaţie dealungul axei* X.

MIŞCARE CONTINUĂ CU UN GRAD DE LIBERTATE.

107. **Deplasare infinitezimală. Mişcarea cea mai generală cu un grad de libertate.** Fie F şi F′ două poziţii infinit vecine ale figurei variabile. Se poate trece dela o poziţie la alta cu o rotaţie în jurul unei axe X şi cu o translaţie dealungul acestei axe.

Succesiunea a acestor două deplasări infinitezimale, presupuse efectuate simultan, este ceeace se numeşte *mişcare elicoidală*. Limita axei X când F′ tinde către F este *axa instantanee de rotaţie şi translaţie*, sau *axa de viraţie* a figurei F la momentul considerat.

Pentru a ne da seama de mişcarea continuă a figurei F, să considerăm suprafeţele riglate (S) şi (S_1), care reprezintă locul poziţiilor axei instantanee X în raport cu sistemul fix şi în raport cu sistemul mobil din care face parte figura F. Aceste două suprafeţe au la fiecare moment în comun o generatoare confundată cu poziţia actuală a axei X.

Numind cu t parametrul arbitrar (timpul dacă voim) de care depinde poziţia figurei F, să considerăm pe (S) şi (S_1) cele două generatoare X' şi X'_1 care vor veni să coincidă pentru valoarea $t + \Delta t$ a parametrului. Fie (C) o curbă pe suprafaţa (S) şi fie pe (S_1) curba (C_1) locul punctelor care vor veni să coincidă cu acelea ale curbei (C), (C) şi (C_1) tăindu-se neapărat în punctul I al axei X (Fig. 144).

Însemnând cu I' şi I'_1 punctele unde axele X' şi X'_1 tae curbele (C) şi (C_1), aceste puncte sunt corespunzătoare. Notând cu Y' axa mişcărei elicoidale aducând, în poziţia actuală, X'_1 peste X', Y' se confundă de asemenea la limită cu X.

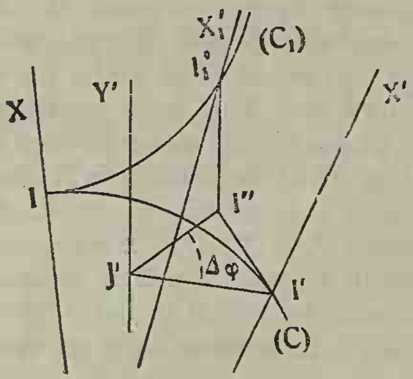

Fig. 144.

Deplasarea elementară care permite de a aduce I'_1 în I' se compune dintr'o translaţie I'_1I'' paralelă cu Y' şi dintr'o rotaţie în jurul acestei axe, în care I'' descrie un arc de cerc având centrul J' în piciorul perpendicularei coborâte din I' pe Y'. Însemnând cu $\Delta\varphi$ unghiul acestei rotaţii, avem

$$\frac{I''I'}{\Delta t} = \frac{I''I'}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\,I'J'\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = I'J'\,\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

De aci deducem

$$\lim\frac{I''I'}{\Delta t} \rightarrow 0,$$

căci $I'J' \rightarrow 0$.

Întrebuinţând notaţia vectorială, avem

$$\overrightarrow{I_1I'} = \overrightarrow{I_1I''} + \overrightarrow{I''I'}$$

şi ţinând seamă de egalitatea precedentă, găsim

$$\lim\frac{\overrightarrow{I_1I'}}{\Delta t} = \lim\frac{\overrightarrow{I_1I''}}{\Delta t}.$$

Dar, $\dfrac{\overrightarrow{I_1I''}}{\Delta t}$ are o limită finită, reprezentată cu un vector v, viteza de translaţie paralelă cu X, în caz când t reprezintă timpul.

De oarece $\lim \frac{\overrightarrow{I''I'}}{\Delta t} \rightarrow 0$, rezultă că la limită, planele $X\,I\,I'$ şi $X\,I\,I'_1$ sunt confundate, cu alte cuvinte, suprafeţele (S) şi (S_1) au acelaş plan tangent în I; cum punctul I este oarecare pe X, se vede că *suprafeţele* (S) *şi* (S_1) *se racordează dealungul axei instantanee.*

Deoarece n'avem $\lim \frac{\overrightarrow{I'_1I'}}{\Delta t} \rightarrow 0$, curbele (C) şi ($C_1$) nu sunt tangente în I şi arcele corespunzătoare ale acestor curbe nu mai au aceeaşi lungime.

Mişcarea elementară se reduce deci la rostogolirea suprafeţei (S_1) în jurul generatoarei sale de racordare X cu (S), urmată de o alunecare dealungul acestei generatoare, de unde şi numele de *viraţie* dată axei X.

Observări. 1° Suprafeţele (S) şi (S_1) se racordează dealungul generatoarelor corespunzătoare şi de aceea au acelaş parametru de distribuţie dealungul generatoarelor; punctele şi planele centrale corespunzătoare vin în coincidenţă, de unde urmează că liniile de stricţiune formează o pereche de curbe ca cele de mai sus, (C) şi (C_1).

Parametrii de distribuţie fiind egali, urmează că dacă suprafaţa (S) este desfăşurabilă, şi suprafaţa (S_1) este desfăşurabilă.

2° Dacă axa instantanee este fixă în raport cu figura mobilă, X'_1 coincide cu X şi punctul I'_1 se găseşte pe X (fără a coincide cu I); cu alte cuvinte, $\lim \frac{II'_1}{\Delta t}$ este un vector dirijat după X. Dar, din egalitatea vectorilor

$$\overrightarrow{I\,I'} = \overrightarrow{I\,I'_1} + \overrightarrow{I'_1I'},$$

ţinând seamă de $\lim \frac{\overrightarrow{I''I'}}{\Delta t} = 0$, urmează că

$$\lim \frac{\overrightarrow{I\,I'}}{\Delta t} = \lim \frac{\overrightarrow{I\,I'_1}}{\Delta t} + \lim \frac{\overrightarrow{I'_1I''}}{\Delta t}\cdot$$

adică vectorul lui $\frac{\overrightarrow{I\,I'}}{\Delta t}$ este dirijat de asemenea după X. Dar acest rezultat este independent de alegerea punctului I pe X, de unde urmează că mişcarea elementară a acestei axe este o alunecare pe ea însăşi. Deci, *dacă axa instantanee este fixă în raport cu figura mobilă, este fixă şi în spaţiu.*

3° Dacă, pentru fiecare poziţie, translaţia elementară se anulează, adică $v=0$, avem

$$\lim \frac{\overrightarrow{II'}}{\Delta t} = \lim \frac{\overrightarrow{II'_1}}{\Delta t}.$$

În acest caz, curbele (C) şi (C_1) sunt tangente în I şi se rostogolesc una pe cealaltă, şi cum formează pe (S) şi (S_1) o pereche de curbe corespunzătoare, se poate zice că *mişcarea relativă a acestor suprafeţe este ea însăşi o rostogolire.*

108. **Complexul normalelor.** În fiecare punct al unui sistem mobil există o simplă infinitate de normale la traectoria acestui punct. Aceste puncte fiind ele înşi-le în număr ∞^3 (formând o triplă infinitate), s'ar părea că toate normalele la toate traectoriile punctelor sistemului mobil să formeze la fiecare moment o cuadruplă infinitate (în număr ∞^4) ca şi ansamblul dreptelor oarecare din spaţiu. Dar aceasta nu se poate, din cauza proprietăţii stabilite (No. 46) că *orice dreaptă, intim legată de sistemul mobil (care rămâne constantă ca mărime) care e normală la traectoria unuia din punctele sale este deodată normală la toate traectoriile tuturor punctelor sale.* Orice normală la traectoria unui punct al figurei, fiind în acelaş timp normală la traectoriile tuturor punctelor figurei pe care normala le conţine, întră de o simplă infinitate de ori (∞^1) în numărul general al normalelor. *Normalele* sunt în număr de ∞^3, deci *formează un complex.*

Mai mult, toate normalele trecând prin acelaş punct, fiind, din cele ce am văzut, normale la traectoria acestui punct, sunt toate în acelaş plan, în planul normal la această traectorie, şi deci, *toate normalele la traectoriile punctelor figurei mobile în spaţiu aparţin, la fiecare moment, la un complex linear* [C_n].

De aci urmează că normalele la toate traectoriile, la fiecare moment, se confundă cu acelea ale unui ansamblu de elice toate de acelaş pas şi de aceeaş axă, ca acelea pe care le descrie diversele puncte considerate, dacă ar fi antrenate într'o mişcare elicoidală comună în jurul lui X. Regăsim astfel mişcarea de viraţie infinit mică împrejurul axei instantanee X care face ca toate punctele să descrie arce infinit mici tangente la traectoriile lor adevărate şi care, pentru acest motiv, se numeşte, uneori, *mişcarea elicoidală tangentă* la mişcarea reală pentru poziţia considerată.

Se vede, de altfel, că axa instantanee este axa complexului

$[C_n]$, că planul normal în fiecare punct este planul polar al acestui punct în raport cu complexul $[C_n]$; că, dacă numim *focar* al unui plan antrenat în mişcare, punctul acestui plan la traectoria căruia acest plan este normal, un astfel de focar se confundă cu polul planului în raport cu $[C_n]$.

Se vede, deci, din cele de mai sus, că proprietăţile obţinute pentru complexele lineare [C], sunt proprietăţile mişcărei cea mai generală cu un grad de libertate. Astfel (No. 100), *planele normale la traectoriile punctelor unui plan legat de figura mobilă, trec prin focarul acestui plan;* apoi (No. 101), *planele normale la traectoriile punctelor unei drepte* D *trec prin aceeaş dreaptă* Δ (conjugata sa în raport cu $[C_n]$) şi reciproc, *planele normale la traectoriile punctelor dreptei* Δ *trec prin dreapta* D.

De aci rezultă că normalele la suprafaţa riglată [D], născută de D, dealungul lui D, întâlnesc Δ. Cu alte cuvinte, *paraboloidul normalelor la suprafaţa* [D], *dealungul lui* D, *conţine pe* Δ. *Aceste normale,* fiind toate perpendiculare la direcţia planului perpendicular pe D, *întâlnesc diametrul conjugat direcţii planului, care aparţine prin urmare deasemenea paraboloidului.*

Să considerăm *punctul central* al lui [D] pe D, adică punctul către care tinde piciorul perpendicularei comune pe D şi a generatoarei infinit vecine. Acest punct se confundă cu vârful paraboloidului normalelor, adică cu punctul unde normala la acest paraboloid este paralelă cu intersecţia planelor directoare la suprafaţă (unul normal lui D, celait paralel de odată cu D şi Δ).

Pentru a vedea poziţia acestui punct faţă de D şi Δ, să raportăm figura la planul orizontal de proecţie perpendicular pe D, iar ca plan vertical să luăm planul paralel deodată cu D şi Δ (Fig 145). Intersecţia planelor directoare este paralelă cu linia de pământ xy. Într'un punct oarecare (m,m') al lui (D, D'), generatoarea paraboloidului normalelor este orizontala $(mn, m'n')$ ce întâlneşte pe (Δ, Δ'). Normala la paraboloid este orizontala $(mp, m'p')$,

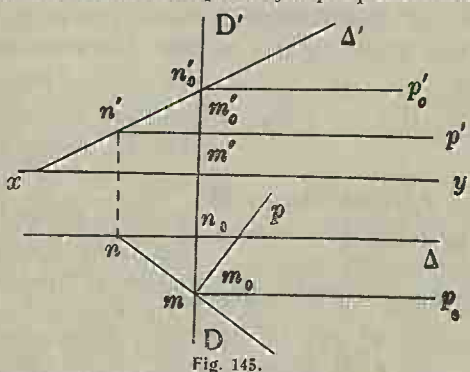

Fig. 145.

a cărei proecție orizontală mp este perpendiculară pe mn. Ea devine paralelă cu xy în $(m_0p_0, m'_0p'_0)$, când generatoarea paraboloidului normalelor se confundă cu perpendiculara comună $(m_0n_0, m'_0n'_0)$ la (D, D') și (Δ, Δ').

Deci punctul central (vârful paraboloidului) este piciorul pe (D, D') a perpendicularei comune la această dreaptă și dreapta (Δ, Δ').

Dar, se știe (No. 100, 9⁰) că această perpendiculară comună dreptelor conjugate D și Δ, este de asemenea la axa X a complexului $[C_n]$. Deci, *punctul central pe* D *este piciorul perpendicularei comune la această dreaptă și axa instantanee.*

109. **Complexul tangentelor și al caracteristicelor.** 1⁰ La fiecare din punctele sistemului mobil, în număr de ∞^3, corespunde, în fiecare poziție, tangenta la traectoria acestui punct; la fiecare din planele intim legate de sistem, de asemenea în număr de ∞^3, corespunde caracteristica sa. Atât tangentele cât și caracteristicele nasc deci câte un complex. Vom arăta că *aceste două complexe sunt identice.*

Să considerăm mai întâi o tangentă G la traectoria unui punct M al figurei mobile. Planul normal în M la această traectorie fiind planul polar al acestui punct în raport cu complexul $[C_n]$, trece prin conjugata Γ al lui G. Cum este perpendicular pe G, urmează că G este perpendiculară pe Γ. Se vede, de asemenea, că, dacă G și Γ sunt conjugate în raport cu $[C_n]$, și perpendiculare, planul dus prin fiecare din ele perpendicular pe cealaltă, este normal la traectoria punctului unde acest plan întâlnește pe cealaltă.

Deci, *complexul* $[C_t]$ *al tangentelor la traectorii se confundă au acela al dreptelor* G *astfel că conjugatele lor* Γ *în raport cu* $[C_n]$ *să le fie perpendiculare.*

2⁰ Să considerăm acum *complexul caracteristicilor* G a planelor P ale figurei mobile. Caracteristica G este limita dreptei G′ (Fig. 146) de intersecție a acestui plan P cupoziția sa infinit vecină P′. Fie G_1 dreapta însemnată pe planul P′ care vine să coincidă cu G când P′ se așterne peste P. Dreapta G_1 tinde către G în acelaș timp cu G′. Fie M un punct al dreptei G, M_1 punctul corespunzător al lui G_1; tangenta în M la traectoria acestui punct este limita lui

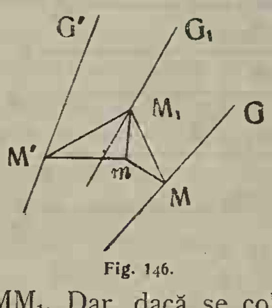

Fig. 146.

MM_1. Dar, dacă se coboară din M_1 o perpendiculară M_1m pe planul P şi din m pe G′ perpendiculara mM', se vede că unghiul $mM'M_1$. care este unghiul plan corespunzător diedrului format de planele P şi P′, este infinit mic de primul ordin. Cum distanța M_1M' de la M_1 la G′ este de ordinul întâi, se vede că mM_1 este infint mic de ordinul al doilea. Însă, în triunghiul M_1Mm, MM_1 este infinit mic de ordinul întâi, ceeace rezultă din faptul că limita raportului $\frac{MM_1}{\Delta t}$, adică viteza lui M, nu este în general nulă, afară de cazul excepțional, când punctul M trece printr'un punct de întoarcere al traectorii sale; deci, unghiul din M, care este egal cu unghiul pe care MM_1 il face cu planul P, este infinit mic și deci tangenta la traectoria punctului M, limita lui MM_1, se află în acest plan. Punctul M fiind de altfel oarecare pe G, se vede că *caracteristica planului* P *este locul punctelor al acestui plan a cărui traectorie este tangentă la planul considerat.*

Deci, planele normale la traectoriile punctelor caracteristicei G sunt perpendiculare pe planul P. Pe de altă parte, din cele ce am văzut, ele trec prin focarul p al planului. Deci, ele trec prin perpendiculara Γ a planului P, dusă prin p, de unde urmează că *caracteristica planului* P *este conjugata, în raport cu complexul* [C_n], *a perpendicularei pe planul* P *în focarul* p, adică, după chiar definiția focarului, *a tangentei la tractoria punctului* p.

Deci, este identitate între complexul tangentelor și acela al caracteristicilor planelor.

3⁰ Din cele ce am văzut, rezultă, că: dacă G și Γ sunt o pereche de drepte conjugate în raport cu [C_n], și perpendiculare, fiecare dintre ele este caracteristica planului dus prin ea perpendicular pe cealaltă şi mai este tangenta la tractoria punctului unde ea este tăiată de planul perpendicular pe ea, dus prin cealaltă.

Complexul născut de perechia G și Γ este deci și acela al tangentelor la tractoriile punctelor şi acela al caracteristicilor planelor sistemului mobil.

4⁰ *Complexul* [C_t] *al tangentelor și al caracteristicilor nu este linear, ci de ordinul al doilea.* În adevăr, am văzut că caracteristica G a planului P este locul punctelor pentru care tangenta la traectoria sa este conținută în planul P. Înfăşurătoarea tangentelor la traectoriile punctelor M ale lui G este deci (No. 99) curba complexului [C_n] conținută în P.

Dar fiecare din aceste tangente este, în planul P, perpendiculara dusă prin punctul de contact M corespunzător luat pe G, la dreapta care uneşte acest punct M cu focarul p al planului (piciorul conjugatei Γ) (Fig. 147): ele au deci ca înfăşurătoare parabola cu focarul p, G fiind tangenta la vârf. Deci, curba complexului fiind o parabolă, complexul este de ordinul

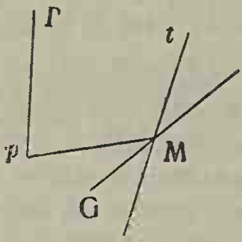

Fig. 147

al doilea, Acest complex este unul din cele mai simple din complexele de ordinul al doilea, numite *compexe tetraedrale*,, care se bucură de proprietatea că raportul anarmonic al planelor duse prin fiecare dreaptă a complexului şi vârfurile unui tetraedru oarecare este constant.

5⁰ Pentrucă tangentele la traectoriile punctelor M ale caracteristicei G a planului P sunt în acest plan, perpendicularele la acest plan duse prin aceste puncte sunt normale la traectoriile lor, ele aparţin deci complexului $[C_n]$. Cum aceste drepte sunt paralele cu orice plan perpendicular pe P, ele întâlnesc diametrii conjugaţi ai direţiilor acestor plane. Urmează că *caracteristica planului* P *poate fi obţinută ca proecţia ortogonală pe acest plan a diametrului conjugat direcţii unui plan oarecare perpendicular pe planul* P.

110. **Aplicaţie.** Să considerăm un plan P, care se rostogoleşte fără să alunece pe o desfăşurabilă cu care este la fiecare moment în contact cu o generatoare G. Orice curbă C invariabil însemnată pe acest plan, naşte ceeace se zice o *suprafaţă moulure* (ciubuc, ornament în relief pe zidării).

Deplasarea elementară reducându-se în acest caz la o rotaţie în jurul lui G, normalele la traectoriile tuturor punctelor invariabil legate de P întâlnesc pe G; ele formează în acest caz un complex special de axă G. Traectoria oricărui punct M al lui C este deci ortogonală planului P şi planul tangent în M la suplafaţa [C] născută de C, conţinând tangenta la această traectorie, este perpendicular pe P. Acest plan tăind ortogonal suprafaţa [C] dealungul lui C, rezultă că este o geodezică a suprafaţei [C] şi după teoremele lui Ioachimsthal (No. 88,7⁰), urmează următoarele proprietăţi stabilite de Monge, anume că *curba* C *este o linie de curbură a suprafeţei ciubuc pe care ea o naşte.* Cum *traectoriile punctelor* M *ale acestei curbe* sunt ortogonale la toate poziţiile curbei C, ele *constitue al doilea sistem de linii de curbură a acestei suprafeţe.*

MIȘCAREA CONTINUĂ CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE.

111. **Relațiunea dintre normelele la suprafețele traectorii.** În această mișcare M^2 fiecare din punctele M ale sistemului mobil descriu o suprafafă traectorie [M], locul tuturor traectoriilor (M) pe care le poate descrie punctul M în toate mișcările M^1 conținute în mișcarea M^2. Toate traectoriile (M) trecând printr'o poziție determinată a punctului M, admit plane normale care trec prin normala MN în M la suprafața traectorie [M]. Această normală MN este deci comună la planele normale la traectoriile (M) corespunzătoare la două mișcări M^1 particulare conținute în M^2, pe care să le notăm ca M^1_1 și M^1_2. Ansamblul tuturor normalelor MN formează deci congruența lineară C_n comună complexelor lineare $[C^1_n]$ și $[C^2_n]$ ale normalelor corespunzătoare mișcărilor M^1_1 și M^1_2. Dar, congruența C_n admite două directoare D și Δ, conjugate în raport cu unul oarecare din complexele $[C_n]$ ale fascicolului admițând această congruență ca bază. De unde urmează că *normalele la suprafețele tractorii ale tuturor punctelor figurei mobile cu două grade de libertate* (M^2) *întâlnesc toate, pentru fiecare poziție a figurei, două aceleași drepte* D *și* Δ *care depind de altfel de această poziție.*

De aci urmează că *dacă se consideră o dreaptă* G *a figurei mobile cu o mișcare* M^2, *normalele la suprafețele traectorii ale diferitelor puncte ale lui* G *aparțin, pentru fiecare poziție a acestei drepte, la o semicuadrică ale cărei directoare sunt* G, D *și* Δ.

112. **Axe instantanee conjugate de rotație.** Din faptul că pentru a obține congruența C_n, am luat două mișcări M^1 oarecare conținute în mișcarea M^2, urmează că complexul $[C_n]$ corespunzător la una din aceste mișcări, conține congruența C_n; cu alte cuvinte, complexele $[C_n]$ corespunzătoare, pentru o poziție dată, la toate mișcările infinit mici, conținute în mișcarea M^2 considerată, formează un fascicol linear a cărui bază este congruența C_n.

Dar, printre toate aceste complexe se află două complexe speciale, având ca axe respectiv directoarele D și Δ ale congruenței C_n. Mișcările M^1 corespunzătoare sunt deci astfel că normelele la toate traectoriile corespunzătoare întâlnesc, fie pe D, fie pe Δ; sunt deci rotații, ale căror axe sunt respectiv

D şi Δ. Astfel, printre toate mişcările M^1, infinit mici, conţinute în mişcarea M^2 dată, plecând de la poziţia considerată, sunt două rotaţii infinit mici de axe respectiv D şi Δ.

Dar, se poate arăta, că orice mişcare M^1 infinit mică, conţinută în mişcarea M^2 dată, poate fi obţinută prin compunerea a două oarecare mişcări M^1. În adevăr, coordonatele $(x.y,z)$ ale unui punct oarecare M al sistemului mobil se pot exprima în funcţiune de doi parametrii u şi v; deci, pentru creşteri infinit mici ale lui u şi v, avem

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,\quad dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Să însemnăm cu U şi V vectorii ale căror proecţii pe axe sunt respectiv

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Aceşti doi vectori variază de la un punct la altul, dar sunt independenţi de mişcarea elementară M^1 definită de (du, dv), plecând de la poziţia considerată. Numind cu ds, deplasarea elementară a punctului M în această mişcare M^1, avem, cu notaţia vectorială,

$$\vec{ds}=\mathrm{U}\vec{du}+\mathrm{V}\vec{dv}.$$

Dar, dacă (du_1, dv_1) şi (du_2, dv_2) sunt creşterile infinit mici corespunzătoare la două mişcări elementare particulare M_1^1, M_2^1, pentru care deplasările lui M sunt ds_1 şi ds_2, se pot totdeauna găsi doi factori λ_1 şi λ_2, astfel că

$$du=\lambda_1 du_1+\lambda_2 du_2,\quad dv=\lambda_1 dv_1+\lambda_2 dv_2,$$

şi prin urmare să avem

$$\vec{ds}=\lambda_1\vec{ds_1}+\lambda_2\vec{ds_2}.$$

Astfel, deplasarea unui punct oarecare al sistemului în mişcarea elementară M^1 se obţine prin sumarea geometrică a deplasărilor acestui punct în două mişcări elementare particulare M_1^1, M_2^1, conţinute în mişcarea M^2, aceste deplasări fiind multiplicate respectiv prin doi factori numerici λ_1 şi λ_2 independenţi de poziţia punctului M.

Sau, mai simplu, *orice mişcare elementară M^1 conţinută* *în M^2 poate fi descompusă în două mişcări particulare M^1_1, M^1_2, de asemenea conţinute în M^2.*

Dacă luăm pentru aceste mişcări particulare rotaţii de axe D şi Δ, se vede că *orice mişcare elementară M^1 a sistemului supus la mişcarea M^2, plecând de la poziţia considerată, poate fi descompusă în două rotaţii infinit mici recpectiv în jurul axelor* D *şi* Δ, *care, pentru acest motiv, se numesc axe instantanee de rotaţie cconjugate.*

2° Să găsim acum locul axelor instantanee X corespunzătoare la fiecare din aceste mişcări elementare M^1. Pentrucă dreptele D şi Δ sunt conjugate în raport cu complexul $[C_n]$ corespunzător, axa X (No. 100,9°) tae subt un unghi drept perpendiculara comună Y a dreptelor D şi Δ. Să considerăm de altă parte, într'un punct A al lui D, generatoarele de al doilea sistem pentru diferiţi paraboloizi echilateri trecând prin D şi Δ (No. 100,8°). Fiecare dintre ele întâlnesc dreapta Δ, adică este conţinută în planul (A, Δ) şi este perpendiculară la linia de stricţiune X a aceluiaş sistem ca D şi Δ, În definitiv, axele X sunt perpendicularele comune la Y şi la dreptele planului (A, Δ), trecând prin A. Deci, *locul acestor axe* X *este un cilindroid* (No. 94) *având ca generatoare dublă perpendiculara comună* Y *la dreptele* D *şi* Δ.

113. **Suprafeţele focale ale unei congruenţe.** 1° Fie G o dreaptă care aparţine unei congruenţe şi să privim această dreaptă ca suportul unei punctuale (P). Congruenţa poate fi născută cu o mişcare M^2 a dreptei G, în care fiecare punct P al punctualei descrie o suprafaţă traectorie [P].

Din cele ce am văzut (No. 111), locul normalelor la suprafeţele [P] dealungul lui G este o semicuadrică S. În două puncte particulare, P_1 şi P_2, ale lui G, generatoarele acestei semicuadrice sunt perpendiculare pe G. În adevăr, conul asimptotic al lui S este tăiat de planul dus prin vârful său perpendicular pe G după două generatoare. Generatoarele N_1 şi N_2 ale lui S, paralele cu acestea, tae pe G în punctele P_1 şi P_2 căutate, unde normalele la suprafeţele traectorii $[P_1]$ şi $[P_2]$ sunt N_1 şi N_2.

Când dreapta G variază ocupând succesiv toate poziţiile dreptelor congruenţei, punctele P_1 şi P_2 nasc suprafeţele (Σ_1) şi (Σ_2). Vom arăta că aceste suprafeţe sunt tangente în P_1 şi P_2 la suprafeţele traectorii $[P_1]$ şi $[P_2]$, cu alte cuvinte, că admit ca normale în aceste puncte, N_1 şi N_2. Dreapta G, perpendiculară pe N_1 şi N_2, va fi deci tangentă suprafeţelor (Σ_1) şi (Σ_2) în P_1 şi P_2. Aceste suprafeţe (Σ_1) şi (Σ_2) sunt deci înfăşurătoarele dreptelor congruenţei şi se numesc *suprafeţele focale ale congruenţei.*

Să demonstrăm, de ex., să suprafaţa (Σ_1) este normală în P_1 la N_1. Fie, pe o dreaptă G' a congruenţei, infinit vecină de G, P'_1 punctul analog lui P_1 (Fig. 148). Va fi deajuns a arăta că limita dreptei $P_1P'_1$ este perpendiculară pe N_1. Să luăm pe punctuala G', punctul P^0_1 corespunzător lui P_1, adică punctul însemnat pe G' care vine în P_1 când G' vine să coincidă cu G în mişcarea M^2 considerată. La limită, dreapta $P_1P^0_1$ vine în planul tangent în P_1 la suprafaţa traectorie $[P_1]$, devine deci normala la N_1. Pe de altă parte, dreapta $P^0_1P'_1$, confundată cu G', coincide la limită cu G, deasemenea normală la N_1. Planul $P_1P^0_1P'_1$ al dreptelor precedente, este deci la limită normal la N_1 şi deci la limită $P_1P'_1$ conţinută în acest plan este normală la N_1.

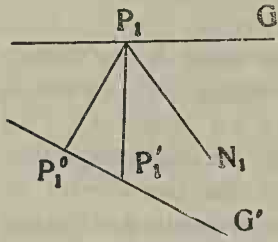

Fig. 148.

2° În particular, normalele la o suprafaţă depind de doi parametrii, formează deci o congruenţă, pentru care suprafeţele focale sunt cele două pânze ale desfăşuratei suprafeţei considerate.

Dar, din cauză că în acest ultim caz, planele tangente la suprafeţele focale, în punctele lor de contact cu dreapta congruenţei, sunt perpendiculare între ele, urmează că *dreptele unei congruenţe nu sunt în general normale la aceaş suprafaţă* şi că, *pentru a fi, trebue ca planele tangente la suprafeţele focale, în cele două puncte unde ele ating aceeaş dreaptă a congruenţei, să fie perpendiculare între ele.*

114. **Cazul singular al mişcărei cu două grade de libertate.** Să considerăm cazul în care, pentru fiecare poziţie a figurei supusă la mişcarea M^2, complexele $[C_n]$ corespunzătoare la diferitele mişcări M^1 infinit mici conţinute în M^2, să formeze un fascicol special. In acest caz dreptele D şi Δ fiind concurente, orice deplasare infinit mică a figurei echivalează cu două rotaţii în jurul acestor axe şi deci se vor putea reduce la o singură rotaţie unică în jurul unei axe trecând prin punctul de întâlnire al dreptelor D şi Δ.

Fie M un punct al figurei mobile în poziţia considerată.

Normala la suprafaţa traectorie [M] a acestui punct trece prin punctul de întâlnire I al dreptelor D şi Δ, afară de cazul când M se află în planul (II) al dreptelor D şi Δ, când orice dreaptă dusă prin M în acest plan, întâlnind pe D şi Δ, este o normală pentru acest punct care descrie, oricare ar fi deplasarea infinitezimală considerată, un element de linie normal planului (II).

Pentru fiecare poziţie a figurei, axele complexelor $[C_n]$, toate speciale, trec toate prin acelaş punct I, şi când figura ocupă toate poziţiile, în număr ∞^2, compatibile cu mişcarea M^2 considerată, punctul I descrie o suprafaţă (Σ) în raport cu spaţiul fix şi o altă suprafaţă (Σ_1) în raport cu sistemul mobil, aceste două suprafeţe corespunzându-se punct cu punct, şi punctele lor corespunzătoare venind succesiv să coincidă pentru a forma vârful I al fascicolului axelor complexelor $[C_n]$ speciale relative la o poziţie dată a figurei.

Dacă (Σ_1) şi (Σ_1') sunt două poziţii oarecare ale lui (Σ_1), având respectiv în comun punctele I şi I′ cu (Σ), se poate trece de la o poziţie la alta prin intermediarul poziţiilor ocupate continuu de punctul I dealungul unui arc de curbă dată C pe (Σ). Punctele lui (Σ_1) care vin succesiv să coincidă cu acelea ale acestui arc, sunt şi ele aşezate pe un arc de curbă C_1 pe (Σ_1). Dar, toate mişcările M^1 infinit mici conţinute în M^2 se reduc în cazul de faţă numai la rotaţii. Mişcarea relativă a suprafeţelor riglate, care naşte mişcarea M^1 dela poziţia (Σ_1) la poziţia (Σ_1') se reduc la o rostogolire (No. 107, 3⁰). În particular, curba C_1 se rostogoleşte pe curba C, şi cum C este o curbă oarecare trasă pe suprafaţa (Σ), rezultă, întâi, că suprafeţele (Σ) şi (Σ_1) sunt tangente în I; apoi, că două arce corespunzătoare oarecare ale suprafeţelor (Σ) şi (Σ_1) au aceeaş lungime, adică aceste suprafeţe sunt aplicabile una pe alta.

Rezultă deci că *această mişcare M^2 imaginată de Ribaucaur, poate fi născută prin rostogolirea, în toate modurile posibile, a suprafeţei (Σ_1) pe suprafaţa (Σ), care îi este aplicabilă.*

APLICAŢII.

ELICOIZII RIGLAŢI.

115. Definiţii. Să considerăm un sistem mobil supus la o mişcare elicoidală, adică simultan o translaţie z dealungul unei axe fixe Z şi a unei rotaţii de unghiul ω în jurul acestei axe, între mărimile z şi ω fiind un raport constant

(1) $$z = h\omega.$$

În acest caz, *fiecare punct al sistemului mobil descrie pe cilindrul de rotație, având ca rază distanța sa la axa Z, o elice de pasul redus h sau de pasul* $H = 2\pi h$. H este translația pentru rotația complectă egală cu 2π și se zice *pasul mișcărei.*

Am văzut că r fiind distanța punctului M la axa Z, unghiul α al elicei descrisă de acest punct (α este unghiul tangentei la elice cu planul perpendicular pe Z) este dată de

$$h = r \operatorname{tg} \alpha.$$

Orice suprafață născută de o linie oarecare legată de sistemul mobil se zice *elicoid.* Prin orice punct al suprafeței trece o elice cu axa Z și pasul redus h. Se zice că Z și h sunt axa și pasul redus al elicoidului.

Dacă linia considerată este o dreaptă D, *elicoidul* se zice *riglat.*

Dreapta D poate fi definită în raport cu axa Z prin cea mai scurtă distanță r la această axă și prin unghiul φ ce-l face cu un plan perpendicular pe Z. Piciorul P pe D al perpendicularei comune la această dreaptă și axa Z descrie pe cilindrul de rotație de axa Z și raza r o elice al cărei unghi e dat de formula $h = r \operatorname{tg} \alpha$.

Dacă $\alpha = \varphi$, dreapta D se confundă cu tangenta la elicea (P); *elicoidul* născut de această dreaptă este *desfășurabil* (No. 81).

Dacă $\varphi = 0$, adică dacă dreapta D este perpendiculară la axa Z, se obține *elicoidul riglat cu plan director.*

Când $r = 0$, adică când *dreapta* D *antrenată în mișcarea elicoidolă întâlnește axa* acestei mișcări, dacă φ este diferit de zero, *elicoidul* se zice *șurup triunghiular;* dacă $\varphi = 0$, *elicoidul* este *șurup pătrat.*

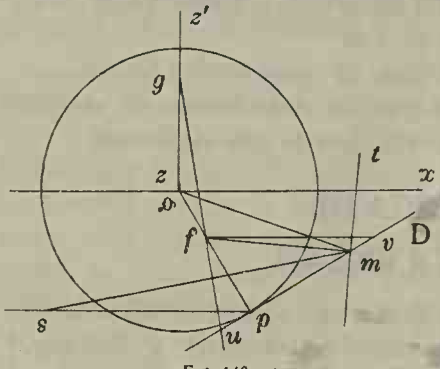

Fig. 149.

116. **Elicoidul riglat cu con director.** Să luăm axa zz' ca direcție verticală și fie (D, D') o generatoare oarecare a elicoidului (Fig. 149). Elicoidul este o suprafață riglată cu con director de rotație cu axa verticală. Fiecare punct m însemnat pe dreapta D descrie o elice

cu axa ozz' şi cu pasul redus h. Să facem o proecţie pe un plan perpendicular pe zz', plan pe care îl vom lua ca plan orizontal.

Piciorul p al perpendicularei comune la axa zz' şi la generatoarea D descrie o elice pe un cilindru circular cu raza op. Generatoarea rămâne tangentă la acest cilindru, în diferitele puncte ale elicei descrisă de p, dar făcând cu planul orizontal un unghi φ diferit de unghiul α al acestei elice, căci dacă $\varphi = \alpha$ am avea elicoidul desfăşurabil (No. 81).

Planul tangent în m se obţine căutând tangenta mt la secţiunea orizontală în acest punct. În proecţie orizontală, normala mf la această secţiune tăind în f normala po la înfăşurătoarea lui mp, aplicând formula 14, No. 18, avem

$$d(pm) = of \,.\, d\omega.$$

Dar, z fiind cota relativă a punctului p în raport cu planul secţiunei orizontale considerate, avem

$$pm = z \operatorname{cotg}\varphi,$$

de unde, ţinând seamă de (1), obţinem

$$d\,(pm) = h \operatorname{cotg} \varphi\, d\omega.$$

Deci

$$of = h \operatorname{cotg} \varphi, \tag{2}$$

adică *punctul f este fix pe op, oricare ar fi punctul m considerat pe* D. Se zice că *p este polul normalelor* dealungul lui D.

Segmentul of are sau nu acelaş sens cu op, după cum unghiurile α şi φ, sunt sau nu amândouă ascuţite ori obtuse.

Punctul f fiind determinat, *mf reprezintă proecţia orizontală a normalei la elicoid în (m, m')*. Se vede deci că paraboloidul normalelor la elicoid dealungul lui D admite ca generatoare verticala polului f.

Aşa fiind, planul tangent în p se confundă cu planul care proectează orizontal pe D. Dar, în acest caz, conul director fiind de rotaţie cu axa verticală, planul său normal corespunzător este paralel cu acest plan proectant, care este (No. 67) prin urmare planul central pentru generatoarea D. Deci p este punctul central al acestei generatoare.

Orizontala $(mt, m't')$ a planului tangent la acest elicoid în (m, m') se obţine ducând mt perpendiculară pe fm. Deci, *pentru a avea punctul lui* (D, D') *unde planul tangent dus prin această generatoare, are o direcţie dată pentru orizontalele sale,* va fi destul de a coborî din f pe această direcţie o perpendiculară care tae pe D în punctul m căutat.

În particular, punctul (v, v') unde (D, D') atinge *conturul aparent vertical*, unde planul tangent dus prin (D, D') este perpendicular pe planul vertical, şi unde urma sa orizontală este perpendiculară pe linia de pământ, se obţine ducând din f o paralelă fv la linia de pământ.

Punctul (p, p') corespunzând planului tangent dus prin (D, D'), perpendicular pe orizontal (a cărui urmă orizontală se confundă cu D) este punctul unde (D, D') atinge *conturul aparent orizontal*. Elicoidul considerat fiind cu con director de rotaţie, curba de contur aparent orizontal coincide cu linia de stricţiune a suprafeţei. Această *linie de stricţiune este deci o elice de acelaş pas redus, trasă pe cilindrul de rază op*.

Se poate de asemenea găsi *punctele u ale curbei de umbră* pe generatoarele D, produsă pe elicoid de raze paralele cu o direcţie dată. Fără a micşora generalitatea, se poate presupune că razele sunt de front, făcând cu orizontul unghiul ψ. Astfel, raza dusă prin p (Fig. 149) are ca urmă, pe planul orizontal al lui m, punctul s astfel că

$$ps = z \operatorname{cotg} \psi.$$

Deci ms dă direcţia orizontalelor planului de umbră dus prin D. Perpendiculara dusă din f pe ms dă punctul de umbră u căutat. Însemnând cu g intersecţia dreptei fu cu perpendiculara oz' din o pe proecţia orizontală ps a razelor luminoase, se vede că triunghiurile ofg şi pms sunt asemenea ca având laturile perpendiculare. Deci

$$\frac{og}{of} = \frac{ps}{pm} = \frac{z \operatorname{cotg} \psi}{z \operatorname{cotg} \varphi},$$

şi observând (2), avem

$$og = h \operatorname{cotg} \psi. \tag{3}$$

Rezultă că punctul g este fix, oricare ar fi generatoarea D considerată.

Punctul g depinde numai de direcţia razelor luminoase, şi se zice *polul de umbră;* punctul f descrie cercul (f) cu centrul o, deci curba de umbră (u) se poate construi.

117. **Elicoidul şurup triunghiular** este un caz particular al elicoidului ordinar, când cilindrul la care generatoarele sunt tangente, se reduce la o dreaptă, axa (z,z'). Această suprafaţă poate fi definită prin mişcarea elicoidală a unei drepte ce întâlneşte axa mişcării, fără să fie perpendiculară pe axă. Sau, altfel, o suprafaţă cu două directoare, o dreaptă directoare,

axa, o elice directoare având ca axă dreapta şi cu con director de rotaţie în jurul unei drepte paralelă cu axa. În acest caz, elicea de stricţiune se reduce la axa mişcărei.

Construcţia unei generatoare. Fie $a'c'$ generatoarea paralelă cu planul vertical de proecţie. Această dreaptă, axa (z,z') a mişcărei şi perpendiculara din a' pe această axă (Fig. 150) formează un triunghi de mărime invariabilă. Când vârful a' al acestui triunghi vine în b', vârful c' se ridică pe axă până în d', astfel că $c'd' = b'p'$; generatoarea $a'c'$ vine în poziţia $b'd'$, proecţiile unei generatoare sunt $(bd, b'd')$.

Când vârful a' vine în g', generatoarea trece prin g' şi întâlneşte axa (z,z') subt un unghi care este egal cu unghiul constant pe care îl fac generatoarele cu axa z'. În această poziţie, generatoarea este întâlnită de $a'c'$; acest punct de întâlnire n', în timpul deplasărei generatoarei pe suprafaţă, descrie o elice care este o linie dublă a suprafeţei.

Ceea ce am spus de generatoarea care trece prin g', se poate zice despre toate generatoarele care pornesc din puncte situate pe linia de contur aparent a cilindrului care conţine punctul g'. Sunt deci pe $a'c'$ o infinitate de puncte care descriu elice duble ale suprafeţei şi astfel, pe elicoidul şurup triunghiular sunt o infinitate de elice duble.

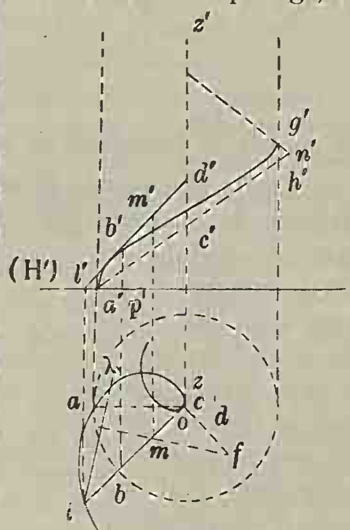

Fig. 150.

Urma pe un plan orizontal. Proecţia orizontală a generatoarei $b'd'$ este ob; urma orizontală a acestei drepe (Fig. 150) este punctul l.

Avem

$$ol = ob + bl.$$

Însemnând cu R raza cilindrului, cu φ unghiul generatoarelor elicoidului cu planul orizontal, avem

$$ol = \mathrm{R} + b'p' \operatorname{cotg}\varphi.$$

Însemnând cu ω unghiul aob, $b'p'$ este egal cu $h\omega$ şi deci

$$ol = \mathrm{R} + h\omega \operatorname{cotg}\varphi, \quad \rho = \mathrm{R} + (h \operatorname{cotg}\varphi)\omega,$$

care este ecuaţia unei spirale lui Arhimede în coordonate polare. Deci, urma pe planul orizontal a elicoidului şurup pătrat este o spirală a lui Arhimede. Această spirală trece prin o, prin a, prin punctul l, și dacă se consideră suprafața în toată întinderea sa, adică luând nu numai partea care este deasupra planului (H'), avem o spirală complectă. Punctele duble ale acestei curbe sunt urmele elicelor duble de care am vorbit.

Planul tangent. Determinarea planului tangent se face de asemenea cu ajutorul punctului f situat pe perpendiculara din o la D (care trece aici prin acest punct) (Fig. 151) și la distanța $of = h \cot g\varphi$, vectorul of fiind dus în astfel de sens ca tangenta la tractoria lui (f,f'), antrenată în mișcarea elicoidală, să fie paralelă cu (D,D'). Dacă planul tangent dus prin generatoarea $(bd, b'd')$ are urma orizontală $l\lambda$ (Fig. 150), pentru a găsi punctul de contact, luăm pe perpendiculara pe ob o lungime $of = h \cot g\varphi$; din f lăsăm o perpendiculară pe $l\lambda$ care tae pe ob în m. Acest punct m este punctul de contact al suprafeței cu planul tangent.

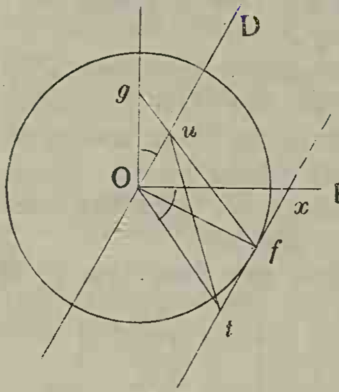

Fig. 151.

Curba de umbră, produsă de razele (R, R') (Fig. 151) înclinate de unghiul ψ pe orizont, se află determinând, ca și în cazul elicoidului general, punctul g pe perpendiculara dusă din O la direcția R și la o distanță de O dată de $Og = h \cot g\psi$. Se unește punctul g cu punctul f al cercului (f) de centru O, iar punctul de intersecție u cu D este punctul de umbră pe generatoarea D perpendiculară pe of.

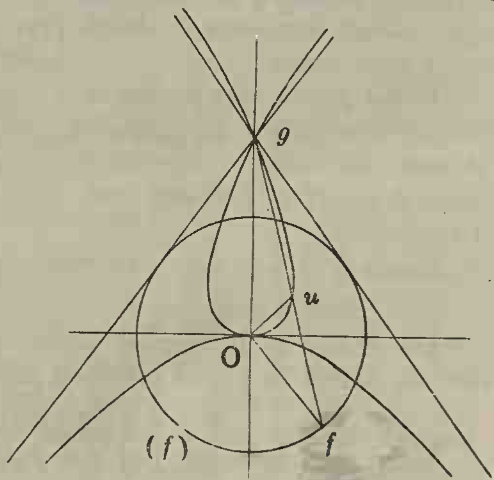

Fig. 152.

Pentru a determina tangenta ut la curba de umbră (Fig. 151), să observăm [1] că

[1] A se vedea, M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie de l'Ecole Polytechnique* (1930), p. 148.

segmentul uf fiind ortoptic pentru punctul o, şi învârtîndu-se în jurul punctului g, aplicând proprietatea de la No. 25, 2°, se vede că, dacă tangenta în f la cercul de centru O pe care îl descrie acest punct, tae în t tangenta căutată, unghiul fOt este egal cu ughiul gOu, şi prin urmare cu unghiul xOf cu laturile perpendiculare pe ale unghiului gOu. Deci punctele t şi x sunt simetrice în raport cu f.

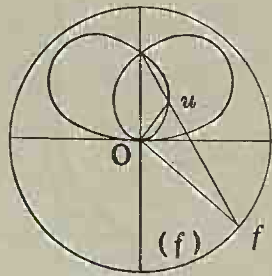

Fig. 153.

Pentru a construi curba de umbră, se uneşte punctul fix g cu un punct variabil pe cercul (f); perpendiculara în O pe Of tae pe fg în u punctul curbei de umbră. Avem mai multe cazuri de figură, după cum g este exterior cercului (f) (Fig. 152), punctul g pe cercul (f) (Fig. 154), punctul g interior cercului (f) (Fig. 153).

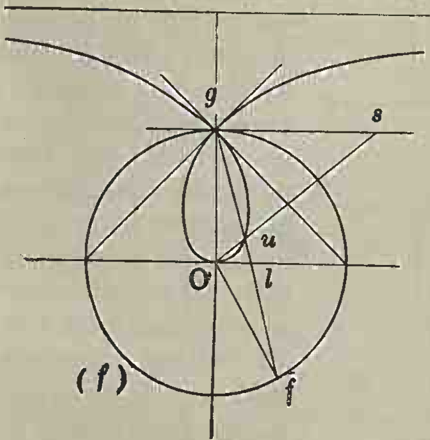

Fig. 154.

Când g este pe cercul (f), se vede că unghiul ψ al razelor paralele, cu planul orizontal, este egal cu acela φ al generatoarelor, cu planul orizontal. Avem unghiurile $Ofg = Ogf$ (Fig. 154). Deci, l fiind intersecţia perpendicularei în O la Og cu dreapta fg, triunghiurile dreptunghice Olg, Ouf sunt egale şi deci $Ou = Ol$. Însemnând cu s punctul unde Ou tae tangenta în g la cercul (f), avem $gs = su$, ceea ce probează că locul lui u, curba de umbră, este o srofoidă dreaptă cu vârful O şi punctul dublu g, după însăşi definiţia strofoidei.

Conturul aparent vertical este înfăşurătoarea proecţiilor verticale ale generatoarelor. Punctul unde o generatoare ca $b'd'$ (Fig. 155) atinge înfăşurarătoarea, este proecţia verticală a punctului unde planul care proectează $b'd'$ pe planul vertical de proecţie atinge elicoidul. Pentru a găsi punctul de contact al acestui plan cu suprafaţa, să luăm planul orizontal (H'), să ridicăm în punctul O în acest plan o perpendiculară pe Ob, proecţia generatoarei $b'd'$, pe care să luăm, în sensul convenabil, $Of = h\cot\varphi$. Cum urma planului tangent considerat este perpendiculară pe vertical, urma orizontală este perpendiculară pe linia de pământ. Deci, ducem din f o perpendiculară pe această urmă, sau o paralelă la linia de pământ, care tae pe ob în v. Punctul de contur aparent vertical pe generatoarea $(bd, b'd')$ este (v, v').

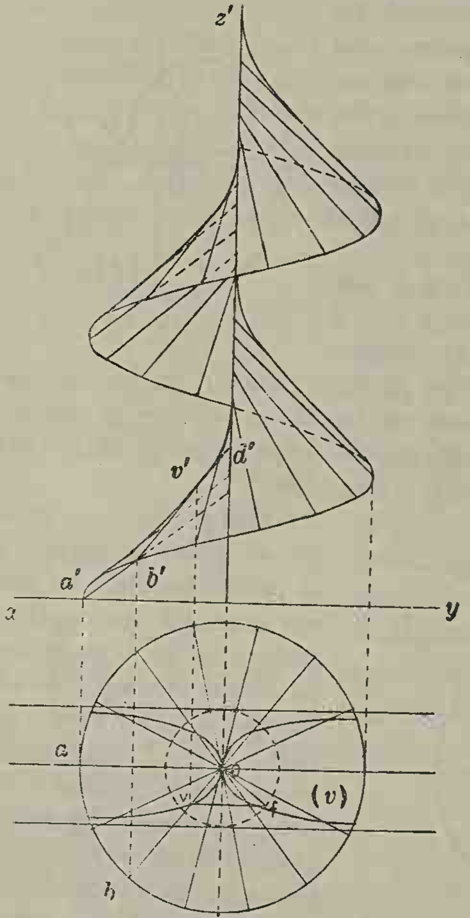

Fig. 155.

Operând la fel pentru celelalte generatoare, avem punctele curbei de contur aparent pe planul vertical de proecţie. Această curbă e tangentă la proecţia verticală a elicei directoare, căci această curbă este trasă pe elicoid. Curba de contur aparent atinge şi axa (z, z'), căci sunt generatoare ale suprafeţei care se proectează după această dreaptă. Întrebuinţând aceeaş construcţie pentru generatoarea paralelă cu planul vertical de proecţie ce trece prin a', se găseşte pe această dreaptă un punct la infinit. Această dreaptă este o asimptotă a curbei de contur aparent vertical. Curba de contur aparent este compusă dintr'o infinitate de ramuri, care se proectează orizontal după curba (v).

Aplicaţie la desenul unui şurup triunghiular. Un astfel de şurup e născut de un triunghi iscocel (Fig. 156) ABB′, al cărui plan este normal la un cilindru pe care este aplicată latura BB′, punctele B şi B′ descriind pe cilindru o aceeaş elice cu pasul egal cu BB′. Fiecare din dreptele AB şi AB′ descriu câte o suprafaţă la fel cu elicoidul descris, de unde şi numele de elicoid şurup triunghiular.

118. Elicoizii riglați cu plan director. *Plan tangent.* Construcția planelor tangente dealungul unei generatoare (D,D') cu ajutorul focarului (f,f') nu se mai poate aplica, din cauză că $\varphi=0$, iar din formula $of=h \operatorname{cotg} \varphi$, ar urma $of \to \infty$. Punctul f este la infinit pe perpendiculara op coborâtă din o pe D (Fig. 157), de unde urmează că orizontala planului tangent în fiecare punct al lui (D,D') se confundă cu această dreaptă, ceea ce de altfel știam.

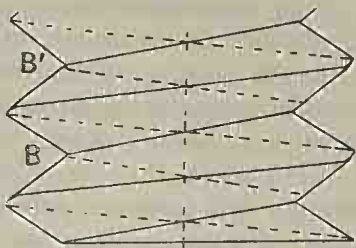

Fig. 156.

Vom întrebuința metoda următoare. Să considerăm elicea descrisă de un punct (m,m') al dreptei (D,D'). Pentru a construi tangenta la această elice in (m,m'), să luăm un plan auxiliar orizontal, așezat sub (m,m'), a cărui cotă să fie, de ex., $\frac{H}{4}$, unde H este pasul mișcării elicoidale și deci și al elicei considerate (Fig. 157).

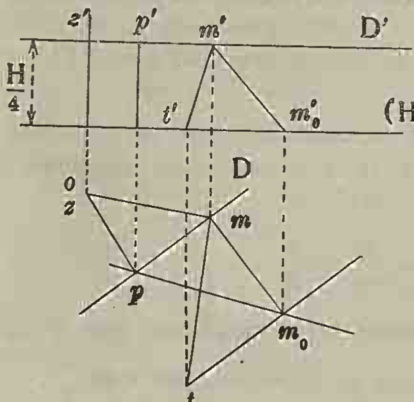

Fig. 157.

Se știe că, dacă însemnăm cu M_0, T și m (Fig. 158) punctele unde un plan al unei secțiuni drepte tae elicea în M_0, tangenta în M la elice de unghiul α și generatoarea cilindrului ce trece prin M, desfășurând cilindrul, avem $Mm = \operatorname{arc} M_0 m \operatorname{tg}\alpha$, $Mm = Tm \operatorname{tg}\alpha$, $mT = \operatorname{arc} M_0 m$.

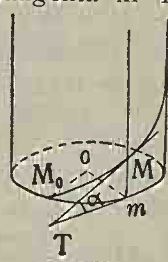

Fig. 158.

Deci, în cazul figurei 157, insemnând cu t punctul unde tangenta la elice în m tae planul secțiunei drepte (care e planul auxiliar la cota $\frac{H}{4}$), avem $mt = \operatorname{arc} M_0 m$.

Dar, unghiul la centru între razele punctelor M_0 și m (Fig. 158) corespunde la un sfert din pasul H al elicei, la $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, așa că $\operatorname{arc} M_0 m = \text{raza} \cdot \frac{\pi}{2} = om \cdot \frac{\pi}{2}$. Deci, în figura 157, avem $mt = \frac{\pi}{2} \cdot om$, astfel, că punctul t poate fi construit pe perpendiculara pe om, luând lungimea $\frac{\pi}{2} \cdot om$.

Planul tangent în (m,m') este deci determinat de dreptele (D,D') şi $(mt, m't')$.

Se poate simplifica această construcţie. Să considerăm un paraboloid de racordare al elicoidului, dealungul lui (D,D'); unul din planele directoare este orizontal ca acela al elicoidului; să alegem pe celalt perpendicular pe (D,D'). Planul tangent în (m,m') având ca urmă orizontală paralela prin t la D [căci (D,D') este orizontală în acest plan], vom lua intersecţia m_0 a acestei paralele cu perpendiculara în m pe D, astfel că $(mm_0, m'm'_0)$ este a doua generatoare a acestui paraboloid de racordare ce trece prin punctul (m,m')

În punctul central (p,p') obţinut ducând din o perpendiculara pe D, planul tangent este perpendicular pe planul director; tangenta perpendiculară la (D,D') în acest punct, se confundă cu verticala lui (p,p') şi deci generatoarea paraboloidului de racordare, situată în planul orizontal ales (H'), este dreapta pm_0.

Pentru a obţine direct această dreaptă, să considerăm (Fig. 157) triunghiurile m_0mt şi opm, care sunt asemenea ca având laturile perpendiculare; deci

$$\frac{mm_0}{mp}=\frac{mt}{mo}=\frac{\pi}{2},$$

de unde urmează că urma orizontală a paraboloidului este dreapta pm_0, al cărei coeficient unghiular în raport cu pm este $\frac{\pi}{2}$.

Aşadar, pentru a avea planul tangent în (m,m'), se ridică pe D în m o perpendiculară care întâlneşte această urmă în m_0; ridicând acest punct în m'_0, planul tangent în (m,m') este dat de (D,D') şi $(mm_0, m'm'_0)$.

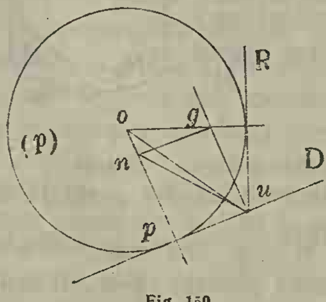

Fig 159.

Curba de umbră. Întrebuinţând aceeaş metodă ca la elicoizii cu con director, să însemnăm pe perpendiculara din o pe direcţia proecţii R (Fig. 159) a razelor luminoase, punctul g, astfel că $og = h \operatorname{cotg} \psi$, ψ fiind înclinarea razelor luminoase pe orizont. Să unim pe g cu punctul f situat la infinit pe perpendiculara dusă din o la D, adică să ducem din g perpendiculara pe D.

Punctul p descrie cercul (p) de centru o, aşa că *proecţia orizontală a curbei de umbră*, locul punctelor u, se obţine lăsând din punctul fix g perpendiculara gu pe tangenta la cercul (p), adică este un *melc al lui Pascal.*

Tangenta în u la curba de umbră, se poate construi observând că este aceea a podarei cercului în raport cu g. Dacă perpendiculara în g pe gu tae pe op în n, un este normala la podară.

119. **Elicoidul şurup pătrat** este elicoidul cu plan director, unde generatoarea (D, D′) întâlneşte axa (z, z') şi deci, în proecţie orizontală, trece prin punctul o. Linia de stricţiune este axa (z, z').

Pentru a construi o generatoare, luăm planul director ca orizontal şi să considerăm elicea directoare trasă pe cilindrul

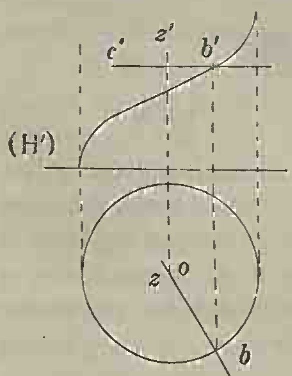

Fig. 160.

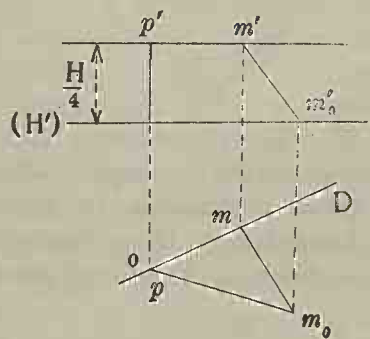

Fig. 161.

cu axa (z, z') (Fig. 160). O generatoare, în proecţie orizontală, fiind ob, b fiind pe proecţia orizontală a cilindrului, în vertical trece prin b' şi e paralelă cu linia de pământ.

Pentru planul tangent se întrebuinţează aceeaş metoadă ca şi pentru cazul elicoidului în general cu plan director. Se construeşte (Fig. 161) prin p urma pm_0 a paraboloidului de racordare cu plan director normal la (D, D′), al cărei coeficient unghiular este $\frac{\pi}{2}$. Se ridică în m o perpendiculară pe pm, care tae această urmă în m_0; luând planul orizontal la cota $\frac{H}{4}$ sub generatoare, şi ridicând punctele în proecţie verticală, planul tangent în (m, m') este determinat de (D, D′) şi $(mm_0, m'm'_0)$.

În cazul de faţă, om fiind confundată cu D, perpendiculara mt la cm, ca şi mf, se confundă cu mm_0; deci şi mu se confundă cu $m_1 m_2$. Cuadrica osculatoare se confundă cu paraboloidul echilater de racordare întrebuințat mai sus. Urmează de aci (No. 86, 9⁰) că indicatoarea în fiecare punct al elicoidului șurup pătrat este o iperbolă echilateră.

Pentru curba de umbră, să observăm că toate dreptele D trec prin punctul o, deci proecția orizontală (m) a acestei curbe

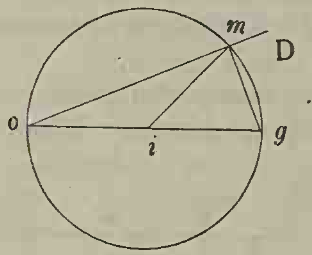

Fig. 162.

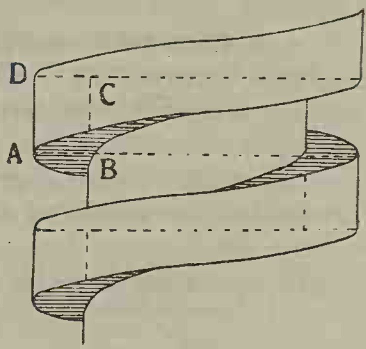

Fig. 163.

(Fig. 162) de umbră se obține lăsând din punctul fix g perpendiculare pe dreptele ce trec prin o, deci este cercul descris pe og ca diametru. Să unim punctul m cu centrul i al cercului. Când dreapta D se învârtește de unghiul ω, punctul (m, m') se ridică cu $h\omega$ și raza im se învârtește cu 2ω. Dar, putem scrie

$$z = \frac{h}{2} 2\omega,$$

și deci se vede că, pe cilindrul cu baza cercul (m), punctul (m, m') se ridică cu o cantitate proporțională cu unghiul cu care s'a învârtit proecția sa orizontală, descrie deci pe acest cilindru o elice cu pas redus $\frac{h}{2}$. Așa dar, curba de umbră, a unei suprafețe elicoid șurup pătrat, produsă de raze paralele luminoase este o elice circulară cu pasul egal cu jumătatea aceluia al suprafeței.

Ca aplicație, să desenăm un șurup pătrat, care poate fi născut de un pătrat ABCD (Fig. 163), cu planul trecând prin axa cilindrului, care se mișcă elicoidal (se ia de obicei pasul egal cu latura pătratului). Laturile AB și CD nasc câte un elicoid de felul celui studiat, de unde și numele de elicoid șurup pătrat.

SUPRAFAŢA UNDEI.

120. I. *Proprietăţi generale ale suprafeţelor apsidale.* Se numesc apsizii unei curbe plane, în raport cu un punct O din planul său, punctele acestei curbe a căror distanţă la punctul O să fie maximă sau minimă, cu alte cuvinte, picioarele normalelor duse din punctul O la curbă. Se zic *raze apsidale* ale acestei curbe faţă de punctul O, distanţele punctului O la apsizi. De exemplu, razele apsidale ale unei elipse pentru centrul său sunt jumătăţile axelor acestei elipse.

Să ducem prin punctul O un plan oarecare ce tae o suprafaţă (S) şi să luăm pe normala în O la acest plan vectorii OM_1 egali cu razele apsidale OM ale secţiunei făcute în suprafaţa (S) de acest plan. Locul punctelor M_1 este o suprafaţă (S_1), numită *suprafaţa apsidală* a suprafeţei (S) pentru punctul O.

Fie M un punct oarecare al suprafeţei (S); să ducem, în planul tangent în M la această suprafaţă, dreapta MT perpendiculară pe OM şi să tăem suprafaţa cu planul OMT. Secţiunea obţinută are pe OM ca rază apsidală a punctului O. Luând pe perpendiculara în O pe planul OMT, lungimea OM_1 egală cu OM, obţinem punctul M_1 corespunzător al suprafeţei apsidale.

Ne propunem a găsi normala în M_1 la suprafaţa (S_1), cunoscând normala în M la suprafaţa (S). Să proectăm figura pe un plan dus prin OM perpendicular pe planul secţiunii considerate (Fig. 164). Tangenta MT în M la această secţiune fiind perpendiculară pe OM, este o dreaptă perpendiculară pe planul de proecţie. Planul tangent la suprafaţa (S) ce trece prin această tangentă, este deci un plan perpendicular pe planul secţiunii, cu urma MP perpendiculară pe normala MN situată în planul de proecţie. Tot în planul de proecţie este şi vectorul OM_1 dus prin O perpendicular pe planul secţiunii considerate.

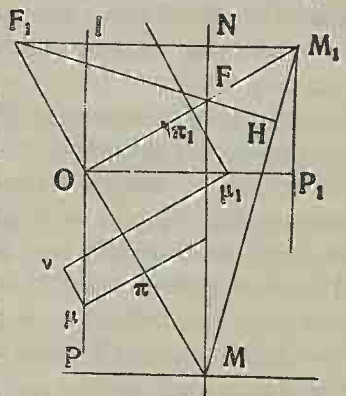

Fig. 164.

Dreapta MN este în planul OMM_1 care este luat ca plan al figurei şi tae pe OM_1 în F.

Acestea fiind stabilite, să considerăm figura de formă invariabilă, în spaţiu, formată de unghiul OMM_1 egal cu 45^0.

Dacă punctul M descrie o traectorie (M) oarecare pe suprafaţa (S), latura OM a unghiului trece necontenit prin punctul O şi latura MM_1 naşte o suprafaţă riglată (R). Planul unghiului mobil are o mişcare cu un grad de libertate. Planul normal în M la la curba (M) trece prin normala MN a suprafeţei (S), care este prin urmare urma acestui plan normal pe planul mobil. Planul normal în O la traectoria punctului însemnat pe MO care coincide cu O în poziţia iniţială, este planul perpendicular pe planul figurei dus prin OM_1, care este, prin urmare, urma acestui plan normal pe planul mobil. Rezultă (No. 108) că focarul planului unghiului mobil în această mişcare M^1, este punctul de întâlnire F al lui MN cu OM_1.

Să ducem perpendiculara FH pe MM_1. Elementul de linie descris pe suprafaţa (R), de punctul însemnat pe latura MM_1 a unghiului OMM_1, care coincide acum ca H, este normal la FH. Planul tangent în H la (R) care conţine acest element şi generatoarea MM_1 de asemenea normala la FH, este deci perpendicular pe planul figurei.

Să considerăm acum figura invariabilă formată de unghiul OM_1M egal cu 45^0. Mişcarea planului acestui unghi este deosebită de aceea a planului OMM_1, cu toate că acese plane sunt aplicate unul peste altul. Dacă, în adevăr, se consideră figurile trase pe aceste plane (unghiul OMM_1 de o parte, unghiul OM_1M de altă parte), ele sunt în mişcare unul în raport cu celalt, dar dreapta îndefinită MM_1, antrenată în una şi cealaltă mişcare, nasc aceeaş suprafaţă (R). Să numim cu (M_1) intersecţia acestei suprafeţe (R) cu suprafaţa (S_1) locul lui M_1 şi să considerăm mişcarea M^1 a unghiului OM_1M, care face ca punctul M_1 să descrie traectoria (M_1). Repetând acelaş raţionament ca mai sus, se vede că urma planului normal în M_1 la (M_1) pe planul mobil tae dreapta OM pe perpendiculara la MM_1 dusă prin punctul H al acestei drepte unde planul tangent este perpendicular pe planul OMM_1, adică pe dreapta FH.

Însemnând cu F_1 intersecţia dreptelor FH şi OM, urma planului normal la (M_1) pe planul mobil este M_1F_1. Dar, această dreaptă care depinde numai de MN, este independentă de curba (M_1) descrisă de M_1 pe (S_1), cu alte cuvinte, toate planele normale la curbele (M_1) trec prin M_1F_1. Fiind ca şi MN în planul triunghiului OMM_1, ea întâlneşte pe MN în N. Mai mult, dreptele F_1H şi OM_1 fiind înălţimile triunghiului MM_1F_1, rezultă că dreapta MN, care trece prin punctul de întâlnire al lor, este a treia înălţime a acestui triunghi. În rezumat, *normala* M_1N *la suprafaţa apsidală* (S_1) *este perpendiculara din* M_1 *pe normala* MN *la suprafaţa* (S).

Planul tangent la (S_1) este deci perpendicular pe planul figurei, de unde urmează că *suprafaţa apsidală a suprafeţei* (S_1) *în raport cu punctul* O *este suprafaţa* (S).

Să luăm acum suprafeţele polare reciproce (Σ) şi (Σ_1) ale lui (S) şi (S_1) în raport cu sfera de centru O şi raza r. Planele polare ale punctelor M şi M_1 sunt perpendiculare pe OM şi OM_1, deci perpendiculare pe planul figurei. Ele trec prin punctele π şi π_1, astfel că

$$OM.\,O\pi = OM_1.\,O\pi_1 = r^2,$$

deci

$$O\pi = O\pi_1.$$

Aceste plane ating suprafeţele (Σ) şi (Σ_1) respectiv în punctele μ şi μ_1 obţinute cu ajutorul perpendicularelor OP şi OP_1 coborâte din O pe planele tangente în M şi M_1; avem

$$O\mu.OP = O\pi.OM = r^2,\quad O\mu_1.OP_1 = O\pi_1.OM_1 = r^2.$$

Dar triunghiurile OPM şi OP_1M_1 sunt egale; deci $O\mu = O\mu_1$.

Normalele $\mu\nu$ şi $\mu_1\nu$ în μ şi μ_1 sunt perpendiculare la planul figurei cu urmele $\pi\mu$ şi $\pi_1\mu_1$; deci sunt conţinute în planul figurei. Aşa dar, între μ şi μ_1 există aceeaş relaţie ca şi între M şi M_1 şi deci suprafeţele (Σ) şi (Σ_1) sunt apsidale una faţă de cealaltă. Deci, *suprafeţele polare reciproce, în raport cu o sfera de centrul* O, *a două suprafeţe apsidale una faţă de cealaltă, sunt de asemenea apsidale una faţă de cealaltă în raport cu acelaş punct.*

II. *Suprafaţa undei.* 1° Să presupunem că punctul O este centrul unei excitaţii luminoase, în interiorul unei mase cristaline omogenă, pentru care se cunoaşte elipsoidul de elasticitate (E) al centrului O. Fresnel a arătat că *suprafaţa undei luminoase* (O), *după un timp oarecare, este omotetica în raport cu* O *a suprafeţei opsidale a elipsoidului* (E) *relativ la punctul* O.

Presupunând că suprafaţa (S) de mai sus este elipsoidul (E), se pot obţine proprietăţile corespunzătoare ala suprafeţei undei (O).

În particular, pentrucă polara reciprocă a elipsoidului (E) în raport cu o sferă concentrică este un alt elipsoid, se vede că polara reciprocă a unei suprafeţe a undei (O), în raport cu o sferă de acelaş centru, este o altă suprafaţă a undei.

Observând figura 164, se vede că planul polar al lui M_1 este planul dus prin punctul π_1, perpendicular pe OM_1, astfel că $O\pi_1.OM_1 = r^2$, r fiind raza sferei în raport cu care se iau polarele. De unde urmează următoarea definiție (în Fizică) pentru suprafața undei. *Pe perpendiculara ridicată în* O *la o secțiune plană oarecare a elipsoidului* (E), *se iau segmente invers proporționale cu jumătățile axelor acestei secțiuni; planele paralele cu planul secțiunii, duse prin extremitățile acestor segmente, au ca înfășurătoare o suprafață a undei.*

2⁰ Pentru a găsi ecuația suprafeței undei, să însemnăm cu a,b,c jumătățile acelor elipsoidului (E). Se știe că jumătățile axelor secțiunii diametrale normală la direcția ale cărei cosinusuri directoare sunt α,β,γ, sunt rădăcinile ecuației în ρ

$$\frac{a^2\alpha^2}{a^2-\rho^2}+\frac{b^2\beta^2}{b^2-\rho^2}+\frac{c^2\gamma^2}{c^2-\rho^2}=0.$$

Vectorii ρ fiind luați pe o dreaptă dusă prin origină de cosinusuri directoare α,β,γ, se vede că locul extremităților acestor vectori, care este o suprafață a undei (O), are ecuația

$$\frac{a^2x^2}{a^2-\rho^2}+\frac{b^2y^2}{b^2-\rho^2}+\frac{c^2z^2}{c^2-\rho^2}=0,$$

unde $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$. Făcând calculele, ecuația revine

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,(x^2+y^2+z^2)-[a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(c^2+a^2)y^2 \\ +c^2(a^2+b^2)z^2]+a^2b^2c^2=0.$$

Suprafața este de ordinul al patrulea, tae planul de la infinit după conicele situate respectiv pe conurile

$$x^2+y^2+z^2=0,\quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=0;$$

are, deci, în planul de la infinit, patru puncte duble care sunt punctele comune ale acestor două conice.

3⁰ Se vede, din ecuația suprafeței, că secțiunile principale prin planele de coordonate care sunt de simetrie pentru suprafața undei și pentru elipsoidul (E), se descompun într'o elipsă și un cerc. Aceasta se poate vedea geometric în modul următor. Să considerăm secțiunile diametrale ale elipsoidului trecând prin una din axele principale, OB, de ex. (Fig. 165). Distanțele apsidale sunt, în această secțiune, jumătatea axei OB și o rază a elipsei principale AC, pe care o facem să se învârtească de un unghi drept chiar în planul elipsei. Extremitățile vectorilor normali la planul acestei secțiuni diametrale (când aceasta se învârteşte în jurul lui OB) sunt, deci, în planul elipsei AC, un cerc de centru O şi de rază OB şi o elipsă ale cărei semiaxe sunt $OC_1 = OC$ după OA, şi $OA_3 = OA$ dealungul lui OC.

Deci, dacă se duc vectori egali cu fiecare din semiaxele elipsoidului pe cele două axe care îi sunt perpendiculare, notând cu indicii 1, 2, 3 punctele însemnate respectiv pe OA, OB, OC, se obţine pentru suprafaţa undei următoarele trei secţiuni principale, în planul OAB, cercul C_1C_2, elipsa A_2B_1; în planul OBC, cercul A_2A_3, elipsa B_3C_2; în planul OCA, cercul B_3B_1, elipsa C_1A_3. În fiecare din aceste grupe, cercul şi conica se tae în patru puncte, care sunt reale numai în planul OAC, dacă se presupune $a > b > c$.

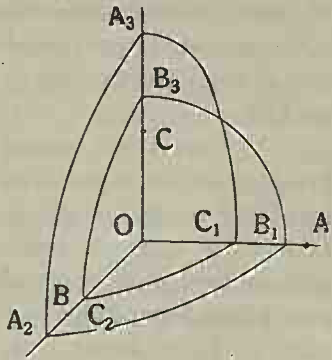

Fig. 165.

Aceste sunt puncte duble pentru suprafaţă, care împreună cu cele deja obţinute în planul de la infinit, avem în total 16 puncte duble pentru suprafaţă, numărul maxim pe care il poate avea o suprafaţă de ordinul al patrulea. Suprafaţa undei este deci un caz particular al suprafeţei lui *Kummer*, care este suprafaţa de ordinul al patrulea cea mai generală cu 16 puncte duble. În aceste puncte duble, tangentele la suprafaţă în loc de a fi în acelaş plan, formează un con de ordinul al doilea.

De oarece polara reciprocă a suprafeţei undei este o altă suprafaţă a undei, care are, din cele ce preced, 16 puncte duble, urmează că suprafaţa dată posedă ea însăşi 16 plane tangente duble, atingând-o fiecare după o conică, corelativă conului tangentelor corespunzător.

4° *Conul tangentelor într'un punct dublu.* Să presupunem că punctul M (Fig. 164) descrie o secţiune circulară diametrală (C) a nlipsoidului (E). Fiecare din punctele sale fiind o apsidă pe curba (C), dau acelaş punct M_1 al suprafeţei undei (O). Dar, fiecăruia din aceste puncte M corespunde o normală M_1N particulară care este perpendiculara coborâtă din M_1 pe MN. Locul tangentelor în M_1 este conul suplimentar al celui născut de normala MN. Deci, când punctul M parcurge cercul (C), normala MN rămâne perpendiculară pe generatoarele cilindrului circumscris lui (E) dealungul lui (C). Deci, paralela OI la MN, care tae M_1N în I, rămâne în acelaş plan dus prin O perpendicular pe direcţia acestor generatoare şi locul punctului I este cercul de intersecţie al acestui plan cu sfera descrisă pe OM_1 ca diametru. Locul normalelor M_1N în M_1 este deci conul cu vârful M_1 având acest cerc ca bază, conul fiind de ordinul al doilea, al cărui con suplimentar, care este locul tangentelor în M_1 este tot de ordinul al doilea. Să observăm că proecţiile P_1 ale punctului O pe planele tangente în M_1 descriu cercul simetric al celui parcurs de I, în raport cu centrul sferei descrise pe OM_1.

5⁰ *Conica de contact a unui plan tangent dublu* (¹). Să presupunem că punctul care descrie o secţiune circulară diametrală γ a elipsoidului polar reciproc al celui dat, este punctului μ. Se vede că punctul μ, este fix şi deci şi planul tangent în fiecare din punctele corespunzătoare M_1, plan care este polarul punctului μ_1 în raport cu sfera de centru O şi raza r. Cum avem $OM_1 \,.\, O\pi_1 = r^2$, locul lui M_1, inversul cercului în raport cu sfera considerată, *este un cerc*. Deci, *fiecare plan tangent dublu al suprafeţei o atinge după un cerc.*

Chestiunea de examen de Geometrie Superioară, la Facultatea de Ştiinţe din Paris, Iulie 1924.

Se dau trei axe perpendiculare, origina O fiind centrul foii, axa Oy coincide cu linia de pământ şi este îndreptată după axa mică a foii. Unitatea de lungime este centimetru. O suprafaţă strâmbă (Σ) *are ca directoare:* 1⁰ *dreapta* $x-y=4$, $z=6$; 2⁰ *dreapta* $x+y=4$, $z=2$; 3⁰ *cercul orizontal de rază* 2 *cu centrul în punctul* $x=4$, $y=0$, $z=4$. *Să se reprezinte proecţiile părţii suprafeţei* (Σ) *presupusă opacă, care este situată dedesubtul planului perpendicular pe vertical* $z=y+4$. *Să se figureze proecţiile linii de stricţiune a suprafeţei. Pentru fiecare din aceste curbe trase, să se indice construcţia unui punct curent şi aceea a tangentei în acel punct; să se indice punctele şi dreptele remarcabile.*

Construcţia generatoarei. Fie (D,D'), (Δ,Δ') directoarele linii drepte şi cercul cu centrul (o,o') (Fig. 166). Să însemnăm cu $(abc, a'b'c')$ o generatoare a suprafaţei; a' este mijlocul lui $b'c'$, deci a este mijlocul lui bc. Cum unghiul boc este drept, $bc = 2 \,.\, oa = 4cm$. Construcţia generatoarei revine deci a duce

(¹) Proprietăţile punctelor duble şi planelor tangente ale suprafeţei undei intervin în explicarea fenomenelor de optică cunoscute sub numele de *refracţie conică şi refracţie cilindrică.*

prin fiecare punct a al cercului o o dreaptă cu mijlocul în a, care se construeşte descriind din a ca centru un cerc cu raza $oa = 2$, care tae dreptele oD şi $o\Delta$ în b şi c; generatoarea are proecţia orizontală bc şi cea verticală $b'c'$.

Distanţa dintre (b,b') şi (c,c') se află ducând în b o perpendiculară bu pe bc egală cu diferenţa cotelor punctelor b' şi c', egală cu 4; se vede că distanţa în spaţiu între (b,b') şi (c,c') este $uc = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2} =$ const. Deci, lungimea generatoarei cuprinsă între directoarele (D,D′) şi (Δ,Δ′) este constantă.

Con director. Unghiul dreptei $(bc, b'c')$ cu planul orizontal se obţine ducând în b perpendiculara bu, pe bc egală cu diferenţa cotelor punctelor b', c' şi unghiul cu planul orizontal este $ucb = 45^0$.

Deci, paralelele din (o, o') la aceste drepte formează un con director de rotaţie cu axa venticală, cu unghiul dela vârf de 90^0.

Planul tangent într'un punct se obţine considerând paraboloidul de recordare al normalelor, în (b, b'), (c,c') (No. 70 V). Se vede că normalele în b şi c la curbele directoare sunt perpendicularele în b şi c pe D şi Δ în orizontal, care se tae în i. Unind punctul i cu un punct m al dreptei bc, im este proecţia orizontală a normalei la suprafaţă în (m, m'). Urma planului tangent este perpendiculara din urma orizontală t a dreptei $(bc, b'c')$ pe im.

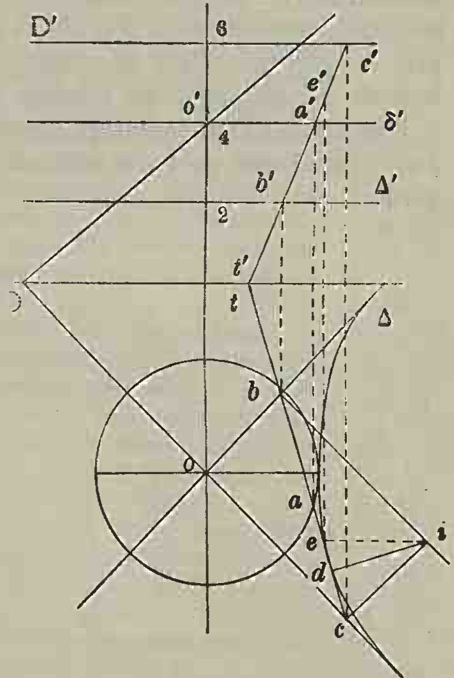

Fig. 166.

Conturul aparent orizontal este format de locul punctelor de contact ale planelor tangente la suprafaţă, perpendiculare pe planul orizontal. Întrebuinţând procedeul delaNo. 70, V, se vede că locul proecţiilor acestor puncte este curba descrisă de piciorul perpendicularei d din i pe bc. Aceasta se poate vedea şi altfel. În adevăr, proecţia conturului aparent orizontal este înfăşurătoarea proecţiilor orizontale *bc* a generatoarei. Dar *bc* are o lungime constantă şi egală cu $2.oa=4$. Deci, avem o dreaptă de mărime constantă *bc*, ce se sprijină pe două drepte perpendiculare *o*D şi *o*Δ, centrul instantaneu de rotaţie al figurei invariabile *bc*, este punctul *i* de intersecţie al normalelor la curbele *o*D şi *o*Δ descrise de *c* şi *b*; punctul de contact al lui *bc* cu înfăşurătoarea sa este piciorul *d* al perpendicularei din *i* pe *bc*.

Deci, proecţia conturului aparent orizontal este înfăşurătoarea dreptelor de lungime constantă ce se sprijină pe două drepte perpendiculare, adică o ipociclidă cu patru puncte de întoarcere.

Linia de stricţiune. Suprafaţa fiind cu con director de rotaţie vertical, linia de stricţiune este conturul aparent orizontal.

Conturul aparent vertical este locul punctelor de contact a planelor tangente perpendiculare pe vertical. Deci, acest plan tangent este planul proectant vertical al generatoarei; urma orizontală este perpendiculară pe linia de pământ. Deci, întrebuinţând metoda de la No. 70, V, urmează că trebue a duce prin *i* o perpendiculară pe urma acestui plan, sau o paralelă la linia de pământ, care tae proecţia orizontală a generatoarei în *e*. Punctul (e,e') este punctul de contur aparent vertical; locul punctelor e' este proecţia verticală a curbei de contur aparent vertical, etc.

TABLA DE MATERII.

Pagini

Noţiuni sumare asupra complexelor şi congruenţelor de drepte.

Noţiuni sumare de geometrie cinematică în spaţiu.

Aplicaţii.