CURS
DE
MATEMATICI GENERALE.

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN CLUJ.

CURS
DE
MATEMATICI GENERALE

PENTRU STUDENȚII DELA FACULTATEA DE ȘTIINȚE,
DELA ACADEMIILE DE COMERȚ ȘI AGRICULTURĂ
ȘI DELA ȘCOLILE TEHNICE SUPERIOARE

DE

GHEORGHE BRATU,
PROFESOR DE ANALIZA MATEMATICĂ LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE
DELA UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

VOLUMUL I.

MATEMATICI ELEMENTARE.

CALCUL NUMERIC. — CALCUL ALGEBRIC. — REPREZENTARE GRAFICĂ.
TRIGONOMETRIE. — OPERAȚII CU NUMERE APROPIATE.

CLUJ,
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE «ARDEALUL»
STR. MEMORANDULUI 22.
1926.

VOLUMUL I.

MATEMATICI ELEMENTARE.

PREFAȚĂ.

O mare greutate, pe care o întâmpină studenții dela Matematici — mai ales cei dela Universitățile din Cluj și Cernăuți — pentru pregătirea examenelor, e lipsa de cărți de Matematici superioare în limba română.

Pentru a înlăturà această dificultate, Ministerul Instrucțiunii a întrodus în budget un fond anual pentru publicarea manualelor didactice universitare.

Cartea de față e publicată din acest fond și e menită să servească de bază pentru învățământul Matematicilor pure și aplicate la Facultatea de Științe, la Școala Politehnică, la Academiile de Comerț și de Agricultură și la toate școlile tehnice superioare.

Constatând că o parte din Matematici se învață în liceu la o vrâstă, când mintea copilului nu poate prinde toate subtilitățile raționamentelor ce i se fac, am crezut că e absolut necesar să se facă la Universitate o revedere generală a Matematicilor elementare, înainte de a se intrà în studiul aprofundat al diferitelor ramuri din Matematicile superioare.

De aceea acest Curs de Matematici Generale *e împărțit în două:*

Volumul I, Matematici elementare, *cuprinde: Calculul numeric, calculul algebric, reprezentarea grafică, calculele cu logaritmi, trigonometria și operațiile cu numere apropiate.*

Volumul II, Matematici superioare, *va cuprinde elemente din: Algebra superioară, Geometria analitică în plan și în spațiu, calcul diferențial, calcul integral și ecuații diferențiale.*

In partea întâi sunt Conferințele de Matematici elementare, pe care le fac la Academia de Comerț și, în semestrul întâi, la Facultatea de Științe din Cluj.

Partea a doua e cursul de Matematici generale, pe care — sub formă redusă — l-am făcut la Institutul Electro-tehnic dela Universitatea din Iași și din care — de șease ani — fac o parte, în semestrul al doilea, la Facultatea de Științe din Cluj.

E evident că pentru fiecare școală specială, cu caracter practic, profesorul va alege din acest curs numai părțile, pe care le va crede necesare învățământului special din acea școală.

Cartea va puteà fi consultată şi de profesorii de Matematici dela şcolile secundare, precum şi de ingineri, arhitecţi, fizicieni, chimişti, agronomi, ofiţeri de arme speciale şi în general de orice persoană, pe care o poate interesà un curs de Matematici Generale, care începe cu operaţiile cele mai elementare din Aritmetică şi se termină cu noţiuni asupra operaţiilor superioare din Calculul diferenţial şi integral.

Terminologia românească e întrodusă conform Vocabularului Matematic publicat în biblioteca Gazetei Matematice din Bucureşti.

Acest curs, tipărit cu multe sacrificii atât din partea tipografiei „Ardealul" cât şi din partea autorului, apare numai cu scopul de a se da studenţimii o carte românească de Matematici Generale.

Ţin să exprim acì mulţumirile mele Senatului Universitar din Cluj, care a aprobat ca acest curs să fie imprimat în editura Universităţii din Cluj; d-lui Inginer R. Ostrogovich, care a desemnat figurile intercalate în text şi Institutului de Arte Grafice „Ardealul", care a primit să tipărească cu mari greutăţi tehnice — în condiţiile cele mai ieftine şi cele mai bune — o carte de Matematici Superioare.

Observările, pe care vor binevoì să mi le transmită cititorii acestui curs, vor fi primite cu mulţumire şi vor servì la îmbunătăţirea ediţiilor viitoare.

Cluj, 7 Noembre 1925.

G. Bratu.

CURS
DE
MATEMATICI GENERALE.

INTRODUCERE.

NUMERELE.

1. Numere întregi. Existența colecțiunilor de mai multe obiecte asemănătoare a născut în mintea omului noțiunile de *unitate* și de *număr întreg*, iar din necesitatea comparării colecțiunilor între ele a rezultat operația de *numărare* și diferitele *sisteme de numerație*.

Fiecare număr trebue să aibă *un nume* pentru vorbire și *un semn* pentru scriere. De aci: *numerația vorbită* și *numerația scrisă*.

Pentru a spune (sau scrie) toate numerele, de care avem nevoe, cu cât mai puține vorbe (sau semne) distincte, s'au introdus, pe lângă unitățile *simple* (de ordinul întâi), unități *de ordin superior* (de ordinul al doilea, al treilea, etc.,) cu convenția următoare: n *unități de un ordin oarecare formează o unitate de ordin imediat superior*.

Numărul n se numește *baza* sistemului de numerație.

Sistemul generalizat prin uz are baza *zece* și se numește sistemul *zecimal*. Pentru a scrie toate numerele în acest sistem, avem nevoe numai de zece semne sau *cifre*:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Ordinul unităților se arată prin *locul* pe care-l ocupă cifra în număr. Când nu avem nici o unitate de un ordin oarecare, punem la locul corespunzător cifra 0.

2. Notații. Când vrem să scriem un număr, fără să-i precizăm valoarea, îl putem reprezentă printr'o *literă*. Astfel a reprezintă *un număr* presupus cunoscut, dar oricare; b reprezintă un *alt* număr.

Uneori mai multe numere diferite se scriu prin litere cu *indici*: a_1, a_2, b_m, b_n (a unu, a doi, b em, b en); alteori prin litere cu *accente*:

c', c'', c''' (c prim, c secund, c terţ) sau prin litere greceşti simple, cu indici sau cu accente: α, β, γ, λ_1, λ_2, λ_m, ϵ', ϵ'' (1).

3. Şirul numerelor întregi. Dacă scriem toate numerele întregi unele după altele

$$(N) \qquad 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

astfel ca fiecare număr din acest şir să se capete adăugând numai *o unitate* pe lângă unităţile numărului precedent, zicem că am format *şirul natural al numerelor întregi* sau şirul N.

Operaţia cea mai elementară în Matematici este trecerea dela un număr din acest şir la numărul *consecutiv* (imediat următor). Această operaţie se scrie cu simbolul $+1$ (*plus* unu). Astfel $n+1$ însemnează numărul din şirul N, care vine imediat după n.

Numărul n se zice al n-lea din şir sau *de rang* n.

4. Compararea numerelor. Fiecare număr reprezintă o *colecţiune* de unităţi. Două numere a şi b se zic *egale*, când colecţiunile, pe care le reprezintă, au *acelaş număr* de unităţi (2); în acest caz scriem

$$a = b \quad (a \text{ egal cu } b).$$

In cazul contrariu numerele se zic *neegale* şi scriem

$$a \neq b \quad (a \text{ diferit de } b).$$

Dacă a conţine mai puţine unităţi decât b, zicem că

$$a < b \quad (a \text{ mai mic decât } b)$$

sau

$$b > a \quad (b \text{ mai mare decât } a).$$

Avem

$$1 < 2 < 3 < \ldots < n < n+1 < \ldots;$$

de aceea şirul N se zice *ordonat* în mod *crescător*. Din contra şirul

$$n+1 > n > \ldots > 3 > 2 > 1$$

este ordonat în mod *descrescător*.

A *număra* însemnează a spune şirul numerelor întregi în ordine crescătoare.

---

(1) Vezi TABLELE dela sfârşitul volumului.

(2) Adică dacă la fiecare unitate din colecţiunea întâia corespunde câte o unitate din colecţiunea a doua şi reciproc.

Observare. In şirul N nu există niciun număr mai mare decât toate. In adevăr, oricât de mare ar fi un număr n, numărul $n+1$ este *mai mare* decât n. De aceea zicem că şirul numerelor întregi creşte la *infinit*.

Pentru *infinit* se întrebuinţează semnul ∞ şi şirul numerelor întregi se poate scrie:

$$(N) \qquad 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, \infty.$$

Când nu avem nicio unitate, convenim să zicem că avem 0 (*zero*) unităţi. Prin generalizare considerăm şi pe 0 ca un număr şi-l aşezăm în şir la stânga lui 1.

Şirul astfel complectat:

$$(I) \qquad 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots \infty$$

păstrează proprietăţile şirului N şi pentru 0, fiindcă avem $0+1=1$, $0<n$ şi $n>0$, oricare ar fi n din şirul I.

5. **Corespondenţa dintre numere şi puncte.** Pe o dreaptă D, începând dela un punct O, să însemnăm nişte diviziuni la distanţe egale. In dreptul punctului O să punem numărul 0 (zero) şi în dreptul fiecărei din diviziunile următoare să scriem succesiv numerele şirului N (*fig.* 1).

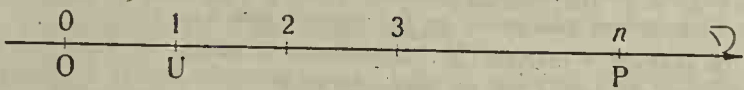


Fig. 1.

Cum dreapta este infinită, se poate scrie astfel pe ea *toate* numerele întregi. *La fiecare număr din şirul I corespunde un punct de diviziune pe dreapta* D *şi reciproc*. Dacă la numărul n corespunde punctul P, putem zice punctul n în loc de punctul P.

Punctul O este *origina* diviziunilor. Segmentul OU este *unitatea*. Fiindcă dela O până la P avem n unităţi, zicem ca segmentul OP are lungimea n.

6. **Egalitate şi neegalitate.** Dacă a şi b reprezintă două numere, $a=b$ este o *egalitate*; $a<b$ sau $a>b$ este o *neegalitate*. Numărul scris la stânga semnului $=$ (sau $<$, sau $>$) se numeşte *membrul întâi* al egalităţii (sau al neegalităţii); numărul scris la dreapta se numeşte *membrul al doilea*.

Două neegalităţi sunt *de acelaş sens*, când au aceleaşi semne de neegalitate:

$$a>b, \; c>d \quad \text{sau} \quad a<b, \; c<d.$$

Două neegalităţi sunt *de sens contrariu*, când au semnele de neegalitate diferite:

$$a > b\ ,\quad c < d.$$

Dacă b este mai mare decât a, numărul b este aşezat la dreapta numărului a în şirul I şi punctul b este aşezat la dreapta punctului a în figura 1 şi reciproc.

Din definiţia egalităţii şi neegalităţii a două numere [4] rezultă următoarele *axiome* (1)

1⁰. Avem întotdeauna $a = a$.
2⁰. Din $a = b$ rezultă $b = a$;
3⁰. Din $a = b$, $b = c$ rezultă $a = c$.
4⁰. Din $a < b$ rezultă $b > a$ şi reciproc.
5⁰. Din $a = b$, $b < c$ rezultă $a < c$.
6⁰. Din $a < b$, $b < c$ rezultă $a < c$
7⁰. Din $a = b$, $b > c$ rezultă $a > c$.
8⁰. Din $a > b$, $b > c$ rezultă $a > c$.

7. Măsură. Căutarea deosebirilor dintre obiecte ne-a dus la noţiunile de *formă* şi de *mărime* ca: lungime, suprafaţă, volum, greutate, capacitate, unghiu, temperatură, presiune, etc.

Compararea mărimilor se face prin *măsurare*.

A *măsură* o mărime M, înseamnează a căută de câte ori o altă mărime m, *de acelaş fel*, se cuprinde în M.

Astfel, pentru a măsură o lungime L, se ia o altă lungime l ca *unitate de măsură* (metrul, cotul, yardul, ...) şi dacă lungimea l se cuprinde de n ori în L, se zice că numărul n este *măsura* lungimei L cu ajutorul unităţii l.

OBSERVARE. Numărul ce rezultă din numărarea obiectelor unei aceleaşi colecţiuni e întotdeauna *acelaş*; în acest caz unitatea e naturală.

Numărul ce rezultă din măsurarea unei mărimi *depinde de unitatea de măsură aleasă*; în acest caz unitatea e convenţională.

8. Numere fracţionare. In general o unitate de măsură l nu intră de un număr exact de ori într'o lungime L.

Să presupunem că L = AB (*fig.* 2) şi că unitatea de măsură se cuprinde de n ori dela A până la C, dar mai rămâne o porţiune CB mai mică decât l Avem deci:

$$\text{de } n \text{ ori } l < AB < \text{de } n+1 \text{ ori } l.$$

---

(1) Adevăruri evidente fără demonstrare.

In acest caz, pentru a măsură și lungimea rămasă CB, împărțim unitatea l într'un număr oarecare de părți *egale* și luăm una din aceste părți ca unitate de măsură. Această nouă unitate aleasă se numește *unitate fracționară*. Vechea unitate l este *unitatea întreagă*.

Un număr de unități fracționare formează un *număr fracționar* sau o *fracție*. Avem fracții *ordinare* și fracții *zecimale*.

De exemplu, dacă împărțim unitatea l în 5 părți egale, una din aceste părți este *o cincime*. Dacă cincimea intră în CB de 3 ori, zicem că măsura lui CB este 3 *cincimi*. Cincimea este o unitate fracționară; numărul 3 cincimi sau $\frac{3}{5}$ este o *fracție ordinară*.

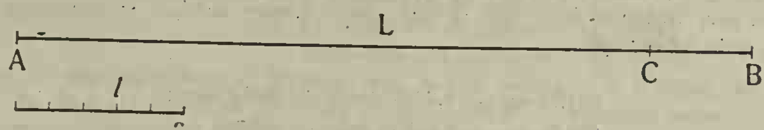


Fig. 2.

In general o *fracție ordinară* $\frac{a}{b}$ se scrie cu două numere întregi a și b, care se numesc *termenii* fracției; b arată în câte părți egale s'a împărțit unitatea întreagă; a arată câte din aceste părți sunt în fracție. a este *numărătorul*, iar b *numitorul* fracției.

In acest caz unitatea fracționară este $\frac{1}{b}$ și avem prin definiție

$$\frac{a}{b} = \text{de } a \text{ ori } \frac{1}{b}.$$

9. Numere zecimale. Când se ia ca unitate fracționară a zecea, a suta, a miia, ..., parte din unitatea întreagă, numărul fracționar, care rezultă din măsurare, se numește *număr fracționar zecimal* sau *fracție zecimală*. Numerele zecimale se formează și se scriu după aceeaș regulă ca și numerele întregi, cu singura deosebire că, numărul zecimal are două părți: *partea întreagă* formată din unități întregi și *partea zecimală* formată din unități fracționare zecimale. Aceste două părți se scriu una lângă alta și se despart printr'o *virgulă* (virgula zecimală).

Unitățile *întregi* de diferite ordine (dela virgula zecimală spre stânga) sunt: unimi, zeci, sute, mii, zeci de mii, sute de mii, milioane, etc.

Unitățile *zecimale* de diferite ordine (dela virgula zecimală spre dreapta) sunt: zecimi, sutimi, miimi, zecimi de miimi, sutimi de miimi, milionimi, etc.

Pentru măsurare se întrebuințează de obiceiu unități fracționare zecimale. Astfel, în *sistemul metric*, multiplii și submultiplii metrului, litrului, gramului, se formează după aceeaş lege ca şi unităţile de diferite ordine din sistemul zecimal.

De aceea, dacă o lungime măsurată cu metrul ne dă: 6 *hm* 3 *m* 7 *dm* şi 5 *cm*, acest număr se poate scrie imediat — cu aceleaşi cifre — sub formă de număr zecimal: 603, 75 *m*. De asemenea se poate scrie uşor măsura acestei lungimi, când luăm ca unitate de măsură un *multiplu* sau un *submultiplu* al metrului: e de ajuns să punem virgula zecimală la dreapta cifrei care reprezintă noul fel de unităţi.

De exemplu: 603, 75 *m*. = 6, 0375 *hm*. = 603750 *mm*.

Acesta e unul dintre marile avantagii practice ale sistemului metric.

Totuşi, pentru *suprafeţe* unităţile de măsură crescând din sută în sută, trebue să luăm, dela virgula zecimală spre stânga sau spre dreapta, câte 2 cifre pentru fiecare multiplu şi submultiplu de metru patrat. Pentru *volume*, unităţile crescând din mie în mie, trebue să luăm câte 3 cifre pentru fiecare multiplu şi submultiplu de metru cub. De exemplu:

$$603{,}75\ mp = 6{,}0375\ damp = 60375\ dmp;$$
$$603{,}75\ mc = 0{,}60376\ damc = 603750\ dmc.$$

Toate numerele întregi şi fracţionare, ordinare şi zecimale, se numesc *numere raţionale.*

10. Numere complexe aritmetice. La Englezi unitatea de măsură pentru lungimi e *yardul* (y) şi are ca submultipli: piciorul (p) şi degetul (d)

$$1\,y = 3\,p, \quad 1\,p = 12\,d.$$

Dacă dintr'o măsurare am găsit 5 yarzi, 2 picioare şi 8 degete, vom scrie $5\,y\ 2\,p\ 8\,d$; $5\,y$ este partea întreagă, $2\,p\ 8\,d$ este partea fracţionară. Numărul însă nu este nici întreg, nici fracţionar ordinar, nici zecimal. Un astfel de număr se numeşte *număr complex aritmetic.*

Şi la noi în sistemul vechi (cu unităţile de măsură româneşti: stânjenul, falcea, ocaua, ...) rezultatele măsurărilor trebuiau scrise cu numere complexe. Chiar şi azi anumite mărimi, ca unghiurile, arcurile şi timpul, se mai exprimă tot cu astfel de numere complicate, care îngreuie mult calculele în mod inutil.

Astfel, unghiurile şi arcurile se măsoară în grade (^{0}), minute ($'$) şi secunde ($''$): $1^{0} = 60'$, $1' = 60''$. Timpul se măsoară în ani (a), luni (l), zile (z), ore (h), minute (m) şi secunde (s): $1\,z = 24\,h$, $1\,h = 60\,m$, $1\,m = 60\,s$.

Observare. Când ni se dă un număr (de ex. 14) fără să ni se arete *felul unităţilor* din care e format, zicem că numărul e *abstract.*

Când ni se spune şi felul unităţilor (de ex. 14 metri) zicem că numărul e *concret.*

11. Numere iraţionale. Sunt cazuri când o mărime nu cuprinde de un număr *exact* de ori nici unitatea de măsură întreagă şi nici vreo unitate fracţionară a acesteia, *ori cât de mică ar fi această unitate fracţionară.*

De exemplu, se demonstrează în Geometrie că, dacă măsurăm lungimea unui *cerc* cu *diametrul lui*, nici zecimea, nici sutimea şi nicio unitate fracţionară oricât de mică din diametru, nu intră de un număr *exact* de ori în lungimea cercului. De aceea aceste două lungimi (cercul şi diametrul lui) se zic *incomensurabile* între ele.

Astfel găsim prin măsurări succesive:

$$\begin{aligned} \textit{lungimea cercului} &= 3\ \textit{diametri} + \text{un rest } r_1 \\ &= 31\ \textit{zecimi} \text{ din diametru} + \text{un rest } r_2 \\ &= 314\ \textit{sutimi} \text{ din diametru} + \text{un rest } r_3 \end{aligned}$$

şi aşà mai departe, unde $r_1 < 1$ (diametru), $r_2 < 1$ zecime, $r_3 < 1$ sutime, etc.

In acest caz zicem că numerele 3, 3,1, 3,14, ... reprezintă respectiv măsura lungimii cercului *cu aproximaţie* mai mică decât 1 unitate, 1 zecime, 1 sutime,...

Cu cât facem măsurarea cu mai mare preciziune, adică cu unităţi fracţionare mai mici, cu atât obţinem ca măsură un număr zecimal *cu mai multe cifre zecimale*. In practică, evident că imperfecţiunea instrumentelor de măsură şi limita perceperii simţurilor noastre, nu ne permit să determinăm această măsură, decât cu un număr *finit* de cifre zecimale. In teorie însă, se demonstrează că această operaţie se poate continuà la infinit.

Numărul, care ar reprezentà *exact* măsura lungimii cercului cu ajutorul diametrului lui, ar trebuì să fie exprimat printr'un număr zecimal *cu o infinitate de cifre zecimale*. Un astfel de număr se numeşte *iraţional* şi se înseamnă, de obicei, printr'o literă sau printr'un *semn convenţional*.

Astfel se scrie:

$$\textit{lungimea cercului} = \pi \times \textit{lungimea diametrului},$$

sau

$$C = \pi \times D,$$

unde numărul iraţional

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$$

se ia în practică numai cu câteva cifre zecimale.

Toate numerele raţionale şi iraţionale se numesc *numere reale*.

12. Operaţiile fundamentale. Toate calculele elementare se reduc la 7 operaţii fundamentale, care se împart în două grupe: *operaţii directe* şi *operaţii inverse*.

Operaţiile directe sunt: *adunarea*, *înmulţirea* şi *ridicarea la putere*. Ele se mai numesc şi operaţii directe *de treapta întâia*, *a doua* şi *a treia* respectiv.

Fiecare operaţie de o treaptă nu e decât un caz particular al operaţiei de treapta precedentă.

In forma cea mai simplă a unei operaţii directe, ni se dau două numere a şi b şi se cere să formăm din ele un al treilea număr c. In operaţia inversă corespunzătoare, ni se dau numărul c şi unul din numerele a sau b şi se cere să-l aflăm pe celălalt (b sau a). Totuşi avem numai patru operaţii fundamentale inverse.

Operaţiile inverse sunt: *scăderea* (operaţie de treapta întâia), *împărţirea* (operaţie de treapta a doua), *extragerea rădăcinei* şi *aflarea logaritmului* (operaţii de treapta a treia).

13. Generalizarea numerelor. Fiecare operaţie inversă introduce în calcule numere noi. Astfel scăderea introduce numerele *negative*, împărţirea introduce numerele *fracţionare*, extragerea rădăcinei şi aflarea logaritmului introduc numerele *iraţionale* şi *imaginare*.

CAPITOLUL I.

OPERAŢIILE DE TREAPTA ÎNTÂIA.

I. — ADUNAREA.

14. Adunarea este operaţia prin care din mai multe numere a, b, c, se formează un singur număr s, care conţine toate unităţile numerelor date; semnul adunării este $+$ (plus); s se numeşte *suma* numerelor a, b, c şi se scrie

$$a+b+c=s.$$

Numerele a, b, c sunt *termenii* sumei; expresia $a+b+c$ este suma *neefectuată*; s este suma *efectuată*.

Calcularea sumei $m+1$ se reduce la operaţia elementară $m+1$ [3]. Calcularea sumei $m+n$ se reduce la n operaţii elementare succesive, adică la a căută în şirul numerelor

$$(I) \qquad 0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\,,\,n\,,\,n+1\,,\,\ldots$$

care este al n-lea număr dela dreapta lui m. Avem dar

$$(1) \qquad m+n > m.$$

Primele n numere din şirul I mai mari decât m sunt:

$$m+1\,,\,m+2\,,\,m+3\,,\,\ldots\,,\,m+n.$$

Suma a mai multor numere $m+n+p+q$ se capătă adunând pe m cu n, apoi pe $m+n$ cu p, apoi pe $m+n+p$ cu q, ceeace se arată în scris astfel:

$$m+n+p+q=[(m+n)+p]+q.$$

15. Legile adunării. Din definiţia adunării rezultă următoarele *legi:*

1⁰. Adunarea este o operaţie întotdeauna *posibilă* şi *univocă* [1] în şirul numerelor întregi.

2⁰. Adunarea e *comutativă:*

$$(2) \qquad a+b=b+a, \quad 3+5=5+3.$$

Adică: într'o sumă neefectuată *se poate schimbà ordinea termenilor*, fără ca suma efectuată să se schimbe.

3⁰. Adunarea e *asociativă:*

$$(3) \qquad a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c),$$
$$2+8+5=10+5=2+13.$$

Adică: într'o sumă neefectuată *se pot înlocuì doi sau mai mulţi termeni prin suma lor efectuată*, fără ca prin aceasta suma totală efectuată să se schimbe.

4⁰. Din legea 2⁰ şi neegalitatea (1) rezultă că

$$a+b>a \quad \text{şi} \quad a+b>b.$$

Adică: o sumă de numere din şirul *I* este mai mare decât fiecare din termenii ei.

Invers, dacă $a>b$, b e o parte a lui a şi putem scrie

$$a=b+n.$$

5⁰. Dacă a, b, c, d sunt numere din şirul *I*, obţinem prin adunare:

$$\text{din } \begin{array}{r} a=b \\ c=d \\ \hline a+c=b+d \end{array} \qquad \text{din } \begin{array}{r} a>b \\ c=d \\ \hline a+c>b+d \end{array} \qquad \text{din } \begin{array}{r} a>b \\ c>d \\ \hline a+c>b+d \end{array}$$

16. Adunarea sumelor. Suma a două sau mai multe sume neefectuate este egală cu o singură sumă neefectuată, care are ca termeni *toţi* termenii sumelor date. Adică:

$$(a+b+c)+(d+e)+(f+g)=a+b+c+d+e+f+g.$$

Această operaţie rezultă din legea 3⁰. Sumele din membrul întâi se numesc *sume parţiale*; suma din membrul al doilea e *suma totală*.

---

[1] Cu rezultat *unic*.

Reciproc: suma totală a mai multor numere se poate considerà ca suma a două sau mai multe sume parţiale.

17. Rezultantă. Suma $a+b+c$ se poate calculà uşor pe o dreaptă divizată [5]. Dacă dela O până la P (*fig.* 3) avem a diviziuni, dela P la Q b diviziuni, dela Q la R c diviziuni, dela O până la R avem $a+b+c$ diviziuni. Suma $s=a+b+c$ este numărul, care corespunde punctului R.

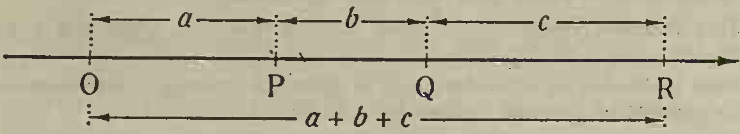


Fig. 3.

Segmentul OR se numeşte *rezultanta* segmentelor OP, PQ, QR. Insemnând cu $\overline{OP}$ numărul, care reprezintă *măsura* segmentului OP, vom scrie

$$\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{OR}. \tag{4}$$

18. Semnul Σ. Dacă a_1, a_2, a_3, ..., a_n reprezintă n numere diferite, vom zice că unul din aceste numere e de forma a_r, unde r poate fi oricare dintre numerele 1, 2, ..., n.

In acest caz, suma acestor numere

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

se poate scrie pe scurt cu simbolul

$$\sum_{r=1}^{n} a_r \quad \text{sau} \quad \sum a_r \quad (r=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

care se citeşte *sumă de a_r dela $r=1$ la $r=n$* sau *pentru* $r=1,2,\ldots,n$.

II. — SCĂDEREA.

19. Scăderea este operaţia prin care putem scoate dintr'un număr a atâtea unităţi câte sunt înt'un alt număr b.

Când scăderea e posibilă, numărul a se descompune în două părţi:

1⁰. unităţile scoase (b),

2⁰. unităţile rămase (c)

şi trebuie să avem $b+c=a$.

De aceea se mai zice că: *a scădeà pe b din a însemnează a găsì un număr c, care adunat cu b să ne dea pe a*. Scăderea este operația inversă adunării. Semnul scăderii este — (*minus*) și se scrie

$$(6)\qquad a-b=c \quad \text{dacă} \quad b+c=a.$$

Expresia $a-b$ se numește *diferență neefectuată*; a este *descăzutul*, b *scăzătorul*, c *restul* sau *diferența efectuată*.

Din definiția scăderii rezultă că, dacă $a-b=c$, avem și $a-c=b$.

Dacă însemnăm cu x numărul *care se caută* (necunoscut), următoarele două cazuri se prezintă ca probleme inverse ale adunării:

$$1^0.\quad x+b=a$$

sau care e numărul, la care trebue să adunăm b unități, ca să căpătăm pe a?

$$2^0.\quad b+x=a$$

sau la numărul b, câte unități trebue să adunăm, ca să căpătăm pe a?

Din punct de vedere al calcului practic, fiindcă adunarea este o operație *comutativă* [15], aceste două probleme se reduc una la alta.

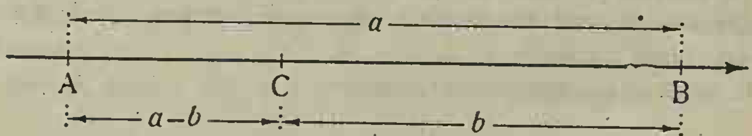


Fig. 4.

Observare. Dacă $n>m$ diferența $n-m$ se poate calculà căutând în șirul natural al numerelor întregi

$$(I)\qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots$$

care este al m-lea număr dela *stânga* lui n.

Primele m numere dela stânga lui n sunt:

$$n-1,\ n-2,\ n-3,\ \ldots,\ n-m.$$

Dacă $n<m$, nu există *în șirul I* niciun număr, care să fie al m-lea la stânga lui n, deci diferența $n-m$ nu se poate efectuà.

20. Diferența $a-b$ se poate calculà și pe o dreaptă divizată (*fig.* 4) astfel: dela un punct A, spre dreapta, luăm a diviziuni până în punctul B; din B, spre stânga, luăm b diviziuni până în punctul C; dela A la C avem $a-b$ diviziuni.

Putem dar scrie

$$\overline{AB} - \overline{CB} = \overline{AC}.$$

Segmentul AC se numeşte *diferenţa* segmentelor AB şi CB.

21. Şiruri de operaţii. Când scriem un şir de mai multe operaţii de treapta întâia

$$27 - 5 + 8 - 6 + 2,$$

convenim ca aceste operaţii să se facă în ordinea în care sunt scrise:

$$27 - 5 = 22,\ 22 + 8 = 30,\ 30 - 6 = 24,\ 24 + 2 = 26.$$

Dacă vrem ca şirul de operaţii să se efectueze în altă ordine, convenim *să punem în paranteză* operaţiile, care trebue să se facă înaintea celorlalte. Astfel:

$$27 - (5 + 8) - 6 + 2 = 27 - 13 - 6 + 2 = 10,$$

$$27 - (5 + 8 - 6 + 2) = 27 - 9 = 18,$$

fiindcă în prima operaţie $5 + 8 = 13$ şi în a doua $5 + 8 - 6 + 2 = 9$.

22. Legile scăderii. Din definiţia scăderii rezultă că:

1⁰. Avem

$$(a - b) + b = a \quad \text{şi} \quad (a + b) - b = a,$$

ceeace se mai poate scrie

$$a - b + b = a \quad \text{şi} \quad a + b - b = a. \tag{8}$$

Prin urmare, *operaţiile consecutive de adunare şi scădere ale aceluiaş număr se distrug una pe alta.*

In general avem

$$a + b + c + d - c = a + b + d + c - c = a + b + d.$$

2⁰. Ca să scădem o *sumă* dintr'un număr, scădem din număr, succesiv, *toate părţile sumei.* Adică:

$$a - (b + c + d) = a - b - c - d. \tag{9}$$

3⁰. Dacă *mărim* (sau *micşorăm*) *descăzutul* cu un număr, *restul se măreşte* (sau se *micşorează*) cu acel număr. Adică:

(10)
$$(a+m)-b=a-b+m$$
$$(a-m)-b=a-b-m.$$

4⁰. Dacă *mărim* (sau *micşorăm*) *scăzătorul* cu un număr, *restul se micşorează* (sau se *măreşte*) cu acel număr. Adică

(11)
$$a-(b+m)=a-b-m$$
$$a-(b-m)=a-b+m.$$

5⁰. Dacă *mărim* (sau *micşorăm*) *şi descăzutul şi scăzătorul* cu un acelaş număr, *restul nu se schimbă*. Adică

(12)
$$(a+m)-(b+m)=a-b,$$

(13)
$$(a-m)-(b-m)=a-b.$$

III. — NUMERE ALGEBRICE.

23. Am văzut că, dacă $a<b$, diferenţa $a-b$ nu se mai poate calculà cu numerele din şirul *I*.

La fiecare operaţie inversă vom găsì cazuri de *imposibilitate*. Aceasta provine din cauză că numerele date de colecţiuni (numerele naturale) nu sunt decât o parte din totalitatea numerelor, care rezultă din măsurarea mărimilor sau din operaţiile fundamentale.

Dar mai provine şi din altă cauză: numerele, pe lângă înţelesul lor *cantitativ*, mai au şi un înţeles *calitativ* (un *sens*), de care nu se ţine seama în şirul numerelor *I*.

Numeroase exemple din viaţa practică ne obligă să considerăm *două feluri de numere*. Astfel: când spunem că un loc A, de pe o şosea, este la 2 *km* de B, locul A nu e determinat; sunt *două* locuri pe şosea la 2 *km* de B, unul *într'un sens*, altul *în celălalt sens*.

Tot astfel: temperatura unui corp faţă de un altul poate fi mai mare sau mai mică; altitudinea unui loc faţă de nivelul mării poate fi deasupra sau dedesubtul acestui nivel; timpul se poate socotì în trecut şi în viitor dela o dată anumită; o sumă de bani poate fi cheltuită sau încasată, etc.

De aceea, şi în vorbire şi în scris, trebue să putem arătà nu numai *numărul de unităţi* dintr'o colecţie, ci şi *sensul* în care sunt socotite aceste unităţi.

Un număr, care ne exprimă şi numărul şi sensul unităţilor lui, se numeşte *număr relativ* sau *algebric*.

24. Axă. Segment dirijat. Cele două sensuri de pe o dreaptă Δ (*fig.* 5) se numesc: unul (de exemplu cel arătat de săgeata de pe axă) *sens pozitiv*; celălalt *sens negativ*.

O dreaptă, pe care s'a determinat sensul pozitiv, este o *dreaptă dirijată* sau o *axă*.

Un segment AB poate fi parcurs și el în două sensuri: dela A spre B sau dela B spre A. Când atribuim unui segment un *sens* determinat, zicem că segmentul e *dirijat*. In acest caz scriem $\overrightarrow{AB}$, ca să arătăm în scris și *mărimea* și *sensul* segmentului.

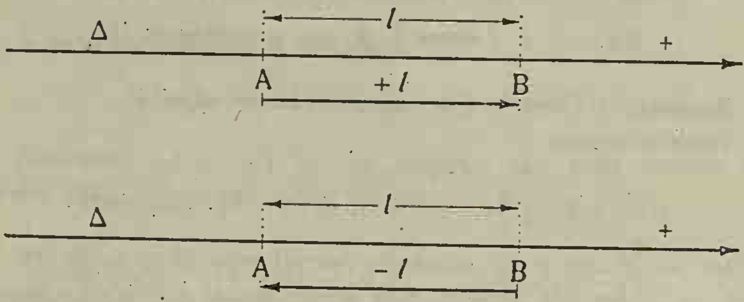


Fig. 5.

Un segment dirijat $\overrightarrow{AB}$ (*fig.* 5) are:

1⁰. o *origine*: punctul A,
2⁰. o *extremitate*: punctul B,
3⁰. o *lungime*: $l = AB$,
4⁰. un *sens*: dela A spre B.

Segmentul $\overrightarrow{BA}$ are originea în B, extremitatea în A, lungimea tot l, dar sensul dela B spre A. Segmentele $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BA}$ se zic *simetrice* sau *egale dar de sens contrariu*.

25. Valoare algebrică. Dacă segmentul $\overrightarrow{AB}$ e așezat pe o axă Δ (sau e *paralel* cu această axă), zicem că acest segment e *pozitiv*, când sensul lui coincide cu sensul pozitiv al axei; în cazul contrariu segmentul e *negativ*.

O măsură, care exprimă și *lungimea* și *sensul* unui segment pe o axă, se numește *măsură algebrică*.

Măsura *algebrică* a segmentului $\overrightarrow{AB}$ se însemnă cu $\overline{AB}$ (cu o linie deasupra); lungimea sau măsura *aritmetică* a acestui segment se însemnă cu AB (fără linie). Prin urmare:

$$AB = BA, \quad \overline{AB} \neq \overline{BA}.$$

26. Numere algebrice. Pentru a puteà exprimà măsura algebrică a unui segment cu un număr, va trebuì să introducem în calcule şi numere de două feluri: *pozitive* şi *negative*, corespunzătoare celor două sensuri de pe axă. Pentru aceasta, facem convenţia următoare:

Dacă l e un *număr aritmetic* (de exemplu lungimea segmentului AB sau BA) convenim să scriem pentru segmentul *pozitiv* $\overline{AB}$ (*fig.* 5)

$$\overline{AB}=+l=l \quad (\textit{plus } l, \textit{ de acelaş sens} \text{ cu } l \text{ sau cu axa})$$

şi pentru segmentul *negativ* $\overline{BA}$:

$$\overline{BA}=-l \quad (\textit{minus } l, \textit{ de sens contrariu cu } l).$$

Numerele $+l$ sau $-l$ se numesc *numere algebrice*.

Toate numerele

$$\begin{array}{l} +1, +2, +3, \ldots, +n, +(n+1), \ldots, +\infty, \\ \quad 0, \\ -1, -2, -3, \ldots, -n, -(n+1), \ldots, -\infty \end{array}$$

formează *mulţimea numerelor întregi algebrice* (¹). Numerele din şirul de sus se numesc *pozitive*, cele din şirul de jos *negative*.

Fiecare număr algebric, afară de 0 (zero), are

1⁰. un *semn algebric*: $+$ sau $-$,

2⁰. o *valoare absolută*: numărul *fără semn*.

Semnul algebric se scrie înaintea valorii absolute. Când înaintea unui număr nu e scris niciun semn, se subînţelege semnul $+$.

Când nu vrem să precizăm nici valoarea, nici semnul unui număr algebric, îl putem reprezentà printr'o *literă*. De exemplu n poate fi un număr algebric (pozitiv sau negativ). In acest caz valoarea lui absolută se însemnă cu $|n|$ sau N.

Observare. 1⁰. In notaţiile algebrice semnul $+$ însemnează *de acelaş sens* şi semnul $-$ *de sens contrariu*. De aceea nu trebue confundate semnele algebrice $+$ şi $-$ cu semnele de *adunare* şi *scădere*. Când această confuzie ar puteà aveà loc, se scrie numărul cu semnul lui algebric într'o paranteză: $(+3)$, (-2).

2⁰. Dacă l e un număr *aritmetic*, $+l$ e un număr algebric *pozitiv*, $-l$ e un număr algebric *negativ*.

---

(1) *Mulţime* = ensemble, aggregato, Menge.

3°. Dacă l e un număr *algebric*, $+l$ nu e întotdeauna pozitiv, nici $-l$ negativ.

Dacă L e valoarea absolută a lui l, pentru $l = +L$ avem

$$+l = +(+L) \text{ [de acelaş sens cu } +L] = +L \quad \textit{pozitiv},$$
$$-l = -(+L) \text{ [de sens contrariu cu } +L] = -L \quad \textit{negativ};$$

pentru $l = -L$ avem

$$+l = +(-L) \text{ [de acelaş sens cu } -L] = -L \quad \textit{negativ},$$
$$-l = -(-L) \text{ [de sens contrariu cu } -L] = +L \quad \textit{pozitiv}.$$

In amândouă cazurile însă putem scrie

$$|l| = |+l| = |-l| = |+L| = |-L| = L.$$

Numerele $+l$ şi $-l$ se zic *simetrice* sau *egale dar cu semne contrarii* [24].

27. Şirul numerelor întregi algebrice. Pe o axă Δ (pe care presupunem că s'a ales *sensul pozitiv* spre dreapta, punctul O ca *origine* şi lungimea OA ca *unitate*) se pot însemnà toate punctele, care sunt la distanţele $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ dela O *spre dreapta* şi dela O *spre stânga*. Obţinem astfel o dreaptă divizată până la infinit în amândouă sensurile.

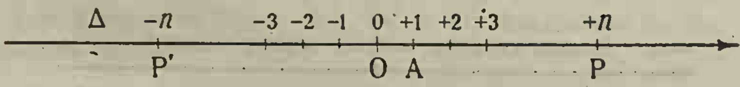


Fig. 6.

Scriind, în dreptul fiecărui punct de diviziune P, valoarea *algebrică* a segmentului $\overline{OP}$, vedem că la fiecare număr întreg algebric corespunde câte un punct de diviziune pe axa Δ şi reciproc (*fig.* 6). Numărul, care corespunde punctului P se numeşte *abscisa* acestui punct.

Dela punctul O spre dreapta avem numerele *pozitive*; dela punctul O spre stânga avem numerele *negative*.

Toate aceste numere, aşezate în ordinea în care sunt scrise pe axa Δ (*fig.* 6)

$$(I) \quad -\infty, \ldots, -(n+1), -n, \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots, +n, +(n+1), \ldots, +\infty$$

formează *şirul numerelor întregi algebrice*.

Relațiile de *mai mare* și *mai mic*, [6], se extind la șirul I în modul următor. Insemnând cu λ un număr algebric oricare, zicem că:

Orice număr așezat în șirul *I la stânga* lui λ e *mai mic* decât λ și orice număr așezat în șirul *I la dreapta* lui λ e *mai mare* decât λ.

De aci rezultă că:

1°. Dintre două numere pozitive diferite, acela este mai mare, care are valoarea absolută mai mare.

2°. Dintre două numere negative diferite, acela este mai mare, care are valoarea absolută mai mică.

3°. Orice număr negativ e mai mic decât orice număr pozitiv.

4°. Zero este mai mic decât orice număr pozitiv și mai mare decât orice număr negativ.

De aceea se scrie:

$$\lambda > 0 \quad \text{pentru} \quad \lambda \text{ pozitiv}$$

$$\text{și} \quad \lambda < 0 \quad \text{pentru} \quad \lambda \text{ negativ.}$$

Observare. In șirul I nu există niciun număr întreg *mai mare decât toate* [4]; de aceea se zice că numerele întregi algebrice cresc către $+\infty$ (plus infinit). In șirul I nu există niciun număr *mai mic decât toate*; de aceea se zice că numerele întregi algebrice descresc către $-\infty$ (minus infinit).

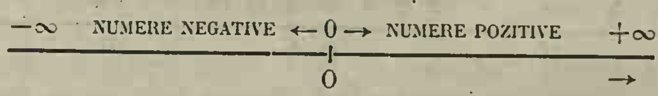


Fig. 7.

E evident că pentru a exprimà măsura oricărei mărimi, care poate fi socotită în *două sensuri*, se pot întrebuințà numere algebrice. Numerele pozitive vor exprimà mărimile socotite într'un sens, iar numerele negative mărimile de sens contrariu.

Exemple: Temperatura de $+30^0$ (de-asupra lui 0^0) și de -30^0 (sub 0^0); anul $+1924$ (după Chr.) și -1924 (înainte de Chr.); suma de $+4500$ lei (încasată) și de -4500 lei (cheltuită), etc.

28. **Suma a două segmente.** A adunà două segmente dirijate $\overrightarrow{S_1}$ și $\overrightarrow{S_2}$ (pe o aceeaș axă Δ sau paralele cu aceeaș axă) înseamnează a le așezà pe această axă unul după altul, *în sensurile lor*, așà ca originea segmentului al doilea să coincidă cu extremitatea segmentului întâi (*fig.* 8 și 9).

Segmentul $\overrightarrow{R}$, care are ca origine originea segmentului întâi și ca extremitate extremitatea segmentului al doilea, se numește *suma algebrică* sau *rezultanta* acestor două segmente și se scrie

$$\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} = \overrightarrow{R}.$$

Astfel în figura 8 avem

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

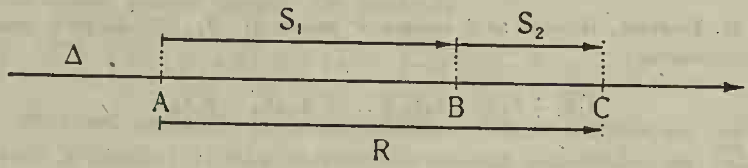


Fig. 8.

iar în figura 9

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}.$$

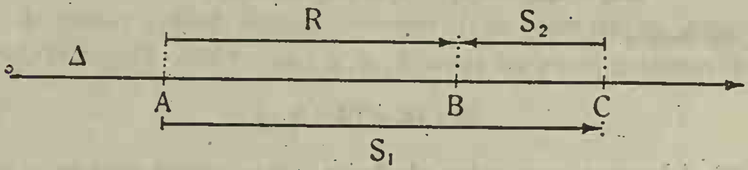


Fig. 9.

29. Teoremă. *Oricum ar fi așezate* 3 *puncte* A, B, C *pe o axă,* între cele 3 segmente dirijate $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ și $\overline{AC}$ determinate de ele, *avem întotdeauna relația*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \tag{14}$$

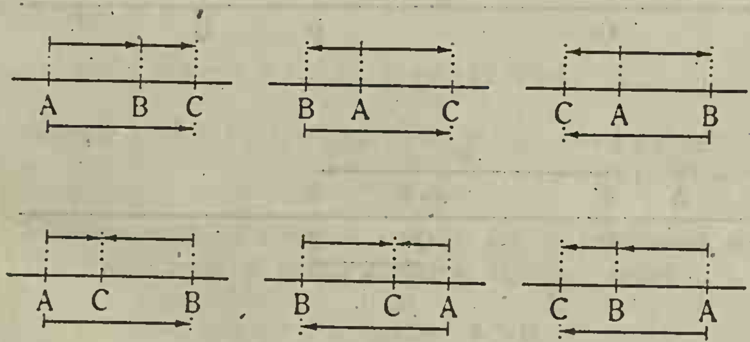


Fig. 10.

Egalitatea (14) se verifică ușor, în toate cazurile posibile, pe figura 10.

30. Suma a mai multor segmente. A adună mai multe segmente dirijate S_1, S_2, ..., S_n (aşezate pe o aceeaş axă sau paralele cu aceeaş axă) însemnează a le aşeză pe această axă unele după altele, *în sensurile lor*, aşà ca originea fiecărui segment să coincidă cu extremitatea segmentului precedent.

Segmentul R, cu originea în originea primului segment S_1 şi cu extremitatea în extremitatea ultimului segment S_n, se numeşte *suma algebrică* sau *rezultanta* segmentelor date şi se scrie

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = R.$$

Această sumă e comutativă şi asociativă [15].

31. Teoremă. Oricum ar fi aşezate n puncte A_1, A_2, ..., A_n pe o dreaptă, avem întotdeauna

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n} \tag{15}$$

sau

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = 0. \tag{16}$$

In adevăr, după 29, avem:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} = \overline{A_1A_3}, \quad \overline{A_1A_3} + \overline{A_3A_4} = \overline{A_1A_4}, \quad \ldots$$

şi aşà mai departe.

In particular, pentru trei puncte A, B, C avem

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0. \tag{17}$$

32. Adunarea numerelor algebrice. Orice număr algebric a poate fi reprezentat pe o axă printr'un *segment dirijat* S. Originea acestui segment e arbitrară; măsura lui algebrică e a [25].

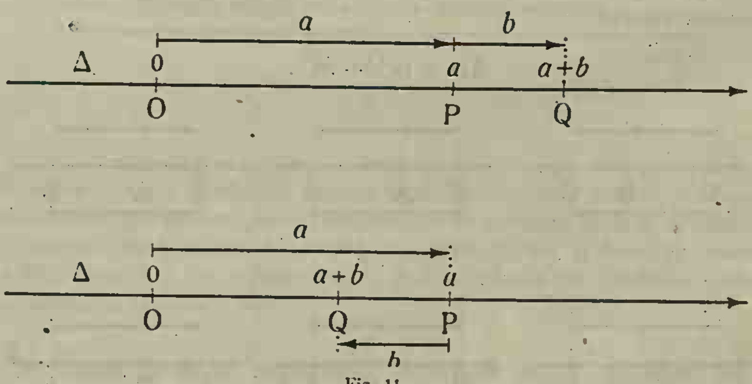


Fig. 11.

A adună două sau mai multe numere algebrice a, b, c, însemnează a căută măsura algebrică S a rezultantei *segmentelor corespunzătoare* acestor numere.

Şi în acest caz scriem

$$a+b+c=s,$$

unde $+$ este semnul adunării.

Astfel, în figura 11, dacă $OP=a$, $PQ=b$, avem $OQ=a+b$.

De aci rezultă *regula adunării* a două numere algebrice:

1⁰. Când numerele au *aceleaşi semne, adunăm valorile lor absolute şi dăm sumei semnul comun.* De exemplu

(18) $$(+5)+(+9)=+14, \quad (-5)+(-9)=-14.$$

2⁰. Când numerele au *semne diferite, scădem valorile lor absolute* (în sens aritmetic) *şi dăm rezultatului semnul numărului cu valoarea absolută cea mai mare.* De exemplu

(19) $$(-5)+(+9)=+4, \quad (+5)+(-9)=-4.$$

3⁰. Suma a două numere *simetrice* (sau *egale dar cu semne contrarii*), este *nulă.* Astfel

(20) $$(+3)+(-3)=0.$$

4⁰. Dacă unul din numere e *nul*, suma este celălalt număr. Adică

(21) $$(+3)+0=+3, \quad 0+(-5)=-5.$$

Ca să adunăm *mai multe numere* algebrice a, b, c, d, adunăm întâiul număr cu al doilea, suma obţinută cu al treilea şi aşa mai departe, eeeace se poate scrie:

$$a+b+c+d=[(a+b)+c]+d.$$

EXEMPLU: $(-5)+(+2)+(+10)+(-9)=(-3)+(+10)+(-9)$
$=(+7)+(-9)=-2.$

Adunarea algebrică e supusă aceloraşi *legi* ca şi adunarea aritmetică [15]. Numai legea 4⁰ pentru numerele algebrice devine

(22) $$a+b>a \text{ pentru } b>0$$
$$\text{şi } a+b<a \text{ pentru } b<0.$$

EXEMPLU: $(-8)+(+6)=-2>-8$; $(-8)+(-6)=-14<-8.$

33. Sumă algebrică. Intr'o sumă de numere, cu *semnele algebrice scrise*, se suprimă de obicei toate semnele de adunare ($+$) şi se scriu numai numerele unele după altele cu semnele lor algebrice.

Astfel în loc de

$$(+7)+(-5)+(+3)+(-2)+(-4)$$

se scrie numai

$$7-5+3-2-4.$$

O expresiune de această formă se numeşte o *sumă algebrică* şi se efectuează în modul următor:

1⁰. *Dacă toate numerele au aceleaşi semne, se adună valorile lor absolute şi se dă rezultatului semnul comun.* Astfel

$$+2+4+3=+9, \qquad -2-4-3=-9.$$

2⁰. *Dacă numerele au semne diferite, adunăm de o parte toate numerele pozitive, de altă parte toate numerele negative* şi reducem astfel suma dată la *suma a două numere cu semne diferite*, care se calculează după regula 32, 2. Astfel,

$$5-7+8-3-1=5+8-7-3-1$$

şi fiindcă $5+8=13$, $-7-3-1=-11$, avem

$$5-7+8-3-1=13-11=2.$$

Regula 1⁰ rezultă din 32, 1.

Regula 2⁰ rezultă din aplicarea succesivă a *legilor scăderii* 22, 3 şi 4. Astfel pentru $5-7+8-3-1$, putem scrie

$$5-7+8=(5+8)-7=13-7 \quad [\text{după } 22,\ 3],$$
$$5-7+8-3=13-7-3=13-(7+3)=13-10 \quad [\text{după } 22,\ 4],$$
$$5-7+8-3-1=13-10-1=13-(10+1)=13-11=2.$$

Dacă avem în sumă *doi termeni egali dar cu semne contrarii*, îi suprimăm. Asfel: $5-3-7+3=5-7=-2$, fiindcă $-3+3=0$.

34. Adunarea sumelor algebrice. Ca să *adunăm* două sume algebrice, *scriem, după suma întâia, toţi termenii sumei a doua cu semnele lor.* Astfel:

$$\text{(I)} \qquad (a-b+c)+(d-e+f-g)=a-b+c-d-e+f-g.$$

Exemplu. $(3-5)+(-2+6-1)=3-5-2+6-1=9-8=1.$

35. Scăderea numerelor algebrice. Dacă a și b sunt două numere algebrice, zicem că

$$(23) \qquad a-b=d \quad \text{dacă} \quad b+d=a.$$

Insemnând cu b' *simetricul* lui b, deducem din ultima egalitate

$$b+d+b'=a+b'$$

și cum $b+b'=0$, avem $d=a+b'$ sau

$$(24) \qquad a-b=a+b'.$$

Regulă: Ca să *scădem* două numere algebrice, *adunăm descăzutul cu simetricul scăzătorului.*

Exemplu. $7-(+3)=7+(-3)=7-3=4$,
$(-7)-(-3)=(-7)+(+3)=-7+3=-4$.

Observare. Cu această regulă diferența $a-b$, a două numere aritmetice, se poate calculà în toate cazurile:

dacă $a>b$, avem $a-b=+(a-b)>0$ (diferență *pozitivă*),
dacă $a=b$, avem $a-b=b-a=0$ (diferență *nulă*),
dacă $a<b$, avem $a-b=-(b-a)<0$ (diferență *negativă*).

Diferențele $a-b$ și $b-a$ se zic *opuse*; ele reprezintă două numere *simetrice* sau *egale dar cu semne contrarii*. Avem dar, pentru $a \neq b$,

$$(25) \qquad a-b \neq b-a \quad \text{și} \quad |a-b|=|b-a|.$$

Numai pentru $a=b$ avem $a-b=b-a$.

Exemplu: $7-5=2$, $5-5=0$, $2-5=-3$.

36. Diferența a două segmente. Să însemnăm cu S_1 și S_2 două segmente dirijate pe o axă și cu S'_2 *simetricul* segmentului S_2.

După definiția generală a scăderii, *diferența* S_1-S_2 *este un segment, care adunat cu* S_2 *ne dă pe* S_1.

Observăm și în acest caz, că pentru a scădeà segmentul S_2 din S_1 e deajuns să adunăm pe S_1 cu simetricul lui S_2, adică

$$(26) \qquad S_1-S_2=S_1+S'_2.$$

In adevăr, după regula adunării segmentelor dirijate [28], avem

$$S_1+S'_2+S_2=S_1.$$

Astfel, pentru segmentele $\overline{AB}=a$, $\overline{CB}=b$ (*fig.* 12) găsim

$$\overline{AB}-\overline{CB}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

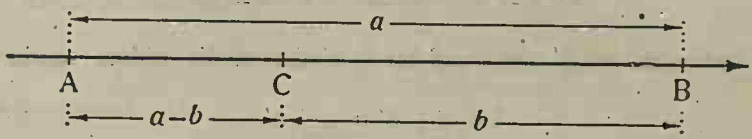


Fig. 12.

37. Valoarea unui segment. Dacă l e valoarea algebrică a unui segment $\overrightarrow{AB}$ pe o axă Δ (*fig.* 13) și dacă a și b sunt *abscisele* punctelor extreme A și B [27], avem în toate cazurile

(27) $$l=b-a.$$

REGULĂ. *Valoarea algebrică a unui segment pe o axă este egală cu diferența dintre abscisa extremității și abscisa originii lui.*

In adevăr ,oricare ar fi pozițiile punctelor O, A, B pe axa Δ, avem

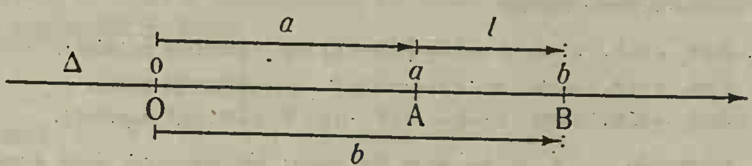


Fig. 13.

întotdeauna [29]: $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$, deci $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$ sau, cu numerele algebrice corespunzătoare, $l=b-a$.

EXEMPLU: Dacă punctele A și B au respectiv abscisele $+5$ și -11, valoarea algebrică a segmentului $\overline{AB}$ este $(-11)-(+5)=-16$.

OBSERVARE. Dintre trei puncte A, B, C așezate pe o aceeaș axă, cu abscisele a, b, c respectiv, punctele A și C se zic *simetrice* față de B, dacă punctul B e mijlocul segmentului $\overline{AC}$. In acest caz avem, în mărime și în semn,

$$\overline{AB}=\overline{BC} \quad \text{sau} \quad b-a=c-b.$$

38. Scăderea unei sume algebrice. *Ca să scădem o sumă algebrică, scriem după descăzut suma scăzătoare cu toate semnele schimbate.* Astfel:

(II) $$(a-b+c)-(-d-e+f-g)=a-b+c+d+e-f+g.$$

In adevăr, restul adunat cu scăzătorul ne dă pe descăzut.

EXEMPLU: $(3-5)-(-2+6-1)=3-5+2-6+1=6-11=-5.$

39. Sumă algebrică în paranteză. Dacă însemnăm cu S o sumă algebrică şi cu S' suma S *cu toate semnele schimbate*, din egalităţile (I) şi (II) rezultă că

1°. *Putem suprimà o paranteză*, care închide suma S, *şi semnul dinaintea parantezei*, aplicând regula următoare:

$$+(S)=S, \quad -(S)=S'.$$

De exemplu, dacă $S=5-3+7$, avem $S'=-5+3-7$ şi putem scrie

$$+(5-3+7)=5-3+7; \quad -(5-3+7)=-5+3-7.$$

2°. *Putem închide suma S într'o paranteză* punând înaintea parantezei semnul $+$ sau $-$, după regula următoare:

$$S=+(S), \quad S=-(S').$$

De exemplu, pentru $S=5-3+7$, putem scrie

$$5-3+7=+(5-3+7); \quad 5-3+7=-(-5+3-7).$$

Prin urmare avem:

$$a+(b+c)=a+b+c, \quad a+(b-c)=a+b-c,$$
$$a-(b+c)=a-b-c, \quad a-(b-c)=a-b+c.$$

40. Egalităţi şi neegalităţi algebrice. Adunarea şi scăderea lor.

1°. Dacă a şi b sunt două numere algebrice

$$(28) \qquad \begin{array}{llll} \text{din} & b>a & \text{rezultă} & b-a>0, \\ \text{„} & b=a & \text{„} & b-a=0, \\ \text{„} & b<a & \text{„} & b-a<0, \end{array}$$

şi *reciproc.*

Aceste relaţii au fost stabilite pentru a şi b pozitive [35].

Dacă a şi b au semne diferite, pentru $b>a$ trebue să avem $a=-A$ $b=+B$; deci $b-a=B+A>0$.

Dacă a şi b sunt negative, $a=-A$, $b=-B$, pentru $b>a$ trebue să avem $B<A$; deci $b-a=-B+A=A-B>0$.

In acelaş fel se stabilesc relaţiile (28) şi în celelalte cazuri.

2°. Din $a=b$ rezultă, oricare ar fi c,

$$a+c=b+c, \quad a-c=b-c, \quad c-a=c-b.$$

In general, din $a=b$, $c=d$ rezultă

$$a+c=b+d, \quad a-c=b-d.$$

3⁰. Dacă schimbăm semnele ambilor membri ai unei neegalităţi, neegalitatea îşi *schimbă sensul*. Adică

(29) $$\text{din } a > b \text{ rezultă } -a < -b.$$

In adevăr, prima neegalitate ne dă $a - b > 0$, care se mai poate scrie $(-b) - (-a) > 0$; deci după 40, 1⁰, $-b > -a$ sau $-a < -b$.

4⁰. Dacă $a > b$, avem oricare ar fi c,

$$a + c > b + c, \quad a - c > b - c \quad \text{dar} \quad c - a < c - b.$$

In adevăr, din $a > b$ deducem $a - b > 0$ şi

$$(a+c) - (b+c) = a + c - b - c = a - b > 0,$$
$$(a-c) - (b-c) = a - c - b + c = a - b > 0.$$
$$(c-a) - (c-b) = c - a - c + b = b - a < 0.$$

In general, din $a > b$, $c = d$ rezultă

$$a + c > b + d, \quad a - c > b - d \quad \text{dar} \quad c - a < d - b.$$

5⁰. Dacă $a > b$, $c > d$, avem $a + c > b + d$.

Din $a > b$ deducem $a + c > b + c$ şi din $c > d$ deducem $b + c > b + d$; prin urmare

$$a + c > b + c > b + d.$$

In general, când ni se dau mai multe neegalităţi, *toate de acelaş sens*, dacă le *adunăm* membru cu membru, căpătăm o neegalitate *de acelaş sens* cu cele date. Astfel din

$$a_1 < b_1, \quad a_2 < b_2, \quad \ldots, \quad a_n < b_n$$

rezultă

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

sau

$$\Sigma a_p < \Sigma b_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

6⁰. Din $a > b$, $c < d$ rezultă $a - c > b - d$.

In adevăr, din prima neegalitate deducem $a - c > b - c$ şi din a doua $b - c > b - d$.

De asemenea din $a < b$, $c > d$ rezultă $a - c < b - d$.

Prin urmare: dacă *scădem* membru cu membru două neegalităţi *de sens contrariu* (cea de a doua din cea dintâi), căpătăm o neegalitate *de acelaş sens cu cea dintâi.*

7°. Din

(30) $$a+b=c+d,$$

scăzând pe b sau pe c din ambii membri ai egalității, deducem

$$a+b-b=c+d-b \quad \text{sau} \quad a=c+d-b,$$

$$a+b-c=c+d-c \quad \text{sau} \quad a+b-c=d.$$

In acelaş fel, din

(31) $$a+b>c+d,$$

deducem

$$a>c+d-b \quad \text{sau} \quad a+b-c>d.$$

Prin urmare: într'o egalitate sau neegalitate algebrică *putem trece un termen dintr'un membru în celălalt, dacă schimbăm semnul acestui termen.*

Exemplu. Din $5-7<-3+8$ rezultă

$$5<-3+8+7 \quad \text{sau} \quad 5-7-8<-3.$$

In particular, dacă trecem toți termenii în membrul întâi, egalitatea (30) devine

$$a+b-c-d=0$$

şi neegalitatea (31) devine

$$a+b-c-d>0.$$

Rezumat.

Adunări:

Din $a>b$ rezultă $-a<-b$

$$\frac{\begin{array}{c}a=b\\ c=d\end{array}}{a+c=b+d} \qquad \frac{\begin{array}{c}a>b\\ c=d\end{array}}{a+c>b+d} \qquad \frac{\begin{array}{c}a>b\\ c>d\end{array}}{a+c>b+d}$$

Scăderi:

$$\frac{\begin{array}{c}a>b\\ c=d\end{array}}{a-c>b-d} \qquad \frac{\begin{array}{c}c=d\\ a>b\end{array}}{c-a<d-b} \qquad \frac{\begin{array}{c}a>b\\ c<d\end{array}}{a-c>b-d} \qquad \frac{\begin{array}{c}a<b\\ c>d\end{array}}{a-c<b-d}.$$

41. Valori absolute. 1°. Insemnând cu a şi b două numere algebrice şi cu $|a|=A$, $|b|=B$ valorile lor absolute, trebue să se observe că:

Dacă a şi b sunt amândouă *pozitive*, avem $a=A$, $b=B$ şi din $a<b$ sau $A<B$ rezultă $|a|<|b|$.

Dacă a şi b sunt amândouă *negative*, avem $a = -A$, $b = -B$ şi din $a < b$ sau $-A < -B$ rezultă $A > B$ sau $|a| > |b|$.

Dacă a şi b sunt de semne *contrarii*, şi dacă $a < b$, putem aveà sau $A < B$, sau $A > B$, sau $A = B$, deci poate rezultà

$$\text{sau} \quad |a| < |b|, \quad \text{sau} \quad |a| > |b|, \quad \text{sau} \quad |a| = |b|.$$

EXEMPLE:

Din	$+5<+7$	$-8<-3$	$-2<+7$	$-9<+3$	$-5<+5$
rezultă	$5<7$	$8>3$	$2<7$	$9>3$	$5=5$
adică	$\|+5\|<\|+7\|$	$\|-8\|>\|-3\|$	$\|-2\|<\|+7\|$	$\|-9\|>\|+3\|$	$\|-5\|=\|+5\|$.

2⁰. Dacă λ e un număr pozitiv, *din* $|a| < \lambda$ *rezultă*

$$-\lambda < a < +\lambda.$$

In adevăr, dacă a e pozitiv, avem $a = A < \lambda$ şi

$$-\lambda < a < +\lambda;$$

dacă a e negativ, avem $a = -A$ şi din $\lambda > A$ rezultă $-\lambda < -A = a$, deci

$$-\lambda < a < +\lambda.$$

Reciproc, *din* $-\lambda < a < +\lambda$ *deducem* $|a| < \lambda$.

EXEMPLU. Din $|x| < 3$ rezultă $-3 < x < +3$.

3⁰. *Din* $|x - a| < \lambda$ *rezultă*

$$a - \lambda < x < a + \lambda.$$

In adevăr, dacă $|x - a| < \lambda$ avem după 41, 2

$$-\lambda < x - a < +\lambda$$

şi adunând a la fiecare membru al acestor neegalităţi, deducem

$$a - \lambda < x < a + \lambda.$$

EXEMPLE. Dacă $|x - 100| < 6$ avem

$$100 - 6 < x < 100 + 6 \quad \text{sau} \quad 94 < x < 106.$$

Dacă $|x - 6| < 100$ avem

$$6 - 100 < x < 6 + 100 \quad \text{sau} \quad -94 < x < 106.$$

4⁰. Teoremă. *Valoarea absolută a sumei a două numere algebrice este cel mult egală cu suma (şi cel puţin egală cu diferenţa) valorilor absolute ale acestor numere.* Adică:

$$(\text{III}) \qquad |a| - |b| \leqq |a+b| \leqq |a| + |b|.$$

In adevăr, fie $|a| = A < |b| = B$. Dacă a şi b au aceleaşi semne, avem

$$|a+b| = |A+B| = |-A-B| = A+B > A-B,$$

deci

$$|a| - |b| < |a+b| = |a| + |b|.$$

Dacă a şi b au semne contrarii, avem

$$|a+b| = |A-B| = |-A+B| = A-B < A+B,$$

deci

$$|a| - |b| = |a+b| < |a| + |b|.$$

Observare. Fiindcă $a-b=a+(-b)$, dacă $|a| > |b|$, avem şi pentru *diferenţa* $a-b$ neegalităţile

$$(32) \qquad |a| - |b| \leqq |a-b| \leqq |a| + |b|.$$

5⁰. Teoremă. *Valoarea absolută a sumei mai multor numere algebrice este cel mult egală cu suma valorilor absolute ale acestor numere.* Adică:

$$(33) \qquad |a+b+c| \leqq |a| + |b| + |c|.$$

In adevăr, $a+b+c$ se poate scrie $(a+b)+c$ şi după teorema precedentă avem

$$|a+b+c| \leqq |a+b| + |c| \leqq |a| + |b| + |c|.$$

In acelaş fel se arată că, dacă teorema e adevărată pentru o sumă cu $n-1$ termeni, e adevărată şi pentru o sumă cu n termeni. Teorema e dar generală:

Dacă a_1, a_2, ..., a_n sunt n numere algebrice, avem

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

sau

$$(\text{IV}) \qquad |\Sigma a_p| \leqq \Sigma |a_p| \qquad (p=1, 2, \ldots, n).$$

EXERCIŢII.

1. Se dau trei numere a, b, c, şi se cere să se scrie alte trei numere x, y, z, astfel formate:

1°. x să fie cu p unităţi mai mare decât a, y cu q unităţi mai mic decât b, z cu r unităţi mai mare decât c.

2°. x să fie cu b unităţi mai mic decât a, y cu x unităţi mai mare decât b, z cu x unităţi mai mic decât c.

R. 1°. $x=a+p$, $y=b-q$, $z=c+r$; 2°. $x=a-b$, $y=a$, $z=c-a+b$.

2. Pe un câmp avem trei puncte aşezate în linie dreaptă şi în ordinea A, B, C. Două persoane, plecând din punctul B, fac pe dreapta AC:

1° Prima $85\,m$ spre A, $200\,m$ înapoi şi apoi iar $61\,m$ spre A; a doua $36\,m$ spre C, $196\,m$ înapoi şi apoi iar $114\,m$ spre C.

2°. Prima a metri spre A, b metri înapoi şi apoi iar c metri spre A; a doua d metri spre C, e metri înapoi şi apoi iar f metri spre C.

La ce distanţă se găsesc cele 2 persoane în fiecare caz şi câţi metri a parcurs fiecare?

R. 1°. Luând punctul B ca *origine* şi dreapta AC ca *axă* cu sensul pozitiv dela A spre C, drumurile făcute înspre C vor fi pozitive, iar cele înspre A vor fi negative.

Prima persoană vine în punctul M cu abscisa $-85+200-61=+54$; a doua persoană vine în punctul N cu abscisa $+36-196+114=-46$. Distanţa dintre ele este $NM=46+54=100\ m$. Fiecare persoană a parcurs câte $346\ m$.

2°. Prima persoană vine în punctul M cu abscisa $-a+b-c$; a doua vine în punctul N cu abscisa $d-e+f$. Valoarea algebrică a segmentului $\overrightarrow{MN}$ este

$$\overline{MN}=(d-e+f)-(-a+b-c)=d-e+f+a-b+c.$$

Distanţa dintre cele două persoane este

$$MN=|\,d-e+f+a-b+c\,|.$$

Prima persoană a parcurs în total $a+b+c$ metri; iar a doua $d+e+f$ metri.

3. Luându-se aceleaşi date pentru amândouă cazurile, se întreabă, în fiecare caz, câţi metri şi în ce sens mai trebue să meargă a doua persoană, ca să ajungă într'o poziţie *simetrică* cu cea dintâi *faţă de punctul* B.

R. Considerăm numai cazul 2°. Persoana întâia vine în punctul M cu abscisa $-a+b-c$. Simetricul punctului M faţă de B este punctul M′ cu abscisa $a-b+c$. După datele problemei persoana a doua ajunge în punctul N cu abscisa $d-e+f$. Ca să vie în M′, mai trebue să parcurgă segmentul *relativ*

$$\overline{NM'}=a-b+c-d+e-f.$$

4. Să se efectueze următoarele sume algebrice:

$$S\ =6405-3240-472+719+56-9007,$$
$$S_1=6405+3240+472+719+56+9007,$$
$$S_2=-6405-3240-472-719-56-9007;$$
$$=S+S_1,\quad b=S+S_2,\quad c=S-S_1,\quad d=S-S_2,\quad e=S_1+S_2,\quad f=S_1-S_2.$$

Generalizare. Dacă P e suma tuturor termenilor *pozitivi* şi $-N$ suma tuturor termenilor *negativi* ai unei sume algebrice S, avem $S=P-N$.

Cum se scriu în acest caz expresiunile S_1, S_2, a, b, c, d, e, f, cu ajutorul numerelor P şi N? Ce relaţii există între ultimele 6 expresiuni algebrice?

R. In cazul numeric particular avem:

$$S=7180-12719=-5539,\quad S_1=7180+12719=19899,\quad S_2=-19899,$$
$$a=+7180+7180=14360,\quad b=-12719-12719=-25438,$$
$$c=-25438,\quad d=14360,\quad e=0,\quad f=19899+19899=39798.$$

In cazul general avem:

$$S=P-N,\quad S_1=P+N,\quad S_2=-P-N,\quad a=2P,\quad b=-2N,$$
$$c=-2N,\quad d=2P,\quad e=0,\quad f=2P+2N;$$
$$a=d,\quad b=c,\quad e=a-d=b-c,\quad f=a-b=d-c.$$

5. Să se calculeze numărul x, care satisface la una din egalităţile următoare:

$1^0.\ x+315=452,\quad 2^0.\ x-28=201,\quad 3^0.\ 156-x=83,$
$4^0.\ 242+x=194,\quad 5^0.\ x-72=-151,\quad 6^0.\ 324-x=1259,$
$7^0.\ x+a=b,\quad 8^0.\ x-m=n,\quad 9^0.\ p-x=q.$

R. Pentru ultima linie găsim

$7^0.\ x=b-a,\quad 8^0.\ x=n+m,\quad 9^0.\ -x=q-p$ sau $x=p-q.$

6. Să se determine toate numerele x, care satisfac la una din neegalităţile următoare:

$1^0.\ x+315<452,\quad 2^0.\ x-28>201,\quad 3^0.\ 156-x<83,$
$4^0.\ x+a<b,\quad 5^0.\ x-m>n,\quad 6^0.\ p-x<q.$

R. $4^0.\ x<b-a,\quad 5^0.\ x>m+n,\quad 6^0.\ -x<q-p$ sau $x>p-q.$

7. Dacă $|a-\alpha|<\lambda$, $|b-\beta|<\mu$, $|c-\gamma|<\nu$ să se arete că

$$|a-b+c-\alpha+\beta-\gamma|<\lambda+\mu+\nu.$$

R. Avem

$$a-b+c-\alpha+\beta-\gamma=(a-\alpha)-(b-\beta)+(c-\gamma)$$

şi

$$|a-b+c-\alpha+\beta-\gamma|\leqq|a-\alpha|+|b-\beta|+|c-\gamma|<\lambda+\mu+\nu$$

8. Să se arete că din neegalităţile

$$|x_1-a|<\lambda,\quad |x_2-a|<\lambda$$

rezultă

$$|x_1-x_2|<2\lambda.$$

R. Avem

$$|x_1-x_2|=|x_1-a+a-x_2|\leqq|x_1-a|+|x_2-a|<2\lambda.$$

CAPITOLUL II.

OPERAŢIILE DE TREAPTA A DOUA.

I. — INMULŢIREA.

42. Inmulţirea cu un număr întreg este o adunare de numere *egale*. De exemplu în loc de suma

$$a + a + \ldots + a$$

unde a este luat de b ori, se scrie $a \times b$ sau $a \, . \, b$ sau $a\,b$ şi se citeşte de b ori a sau a înmulţit cu b.

Dacă $a \times b = p$, a este *deînmulţitul*, b *înmulţitorul*, $a \times b$ este *produsul neefectuat*, p este produsul *efectuat*. Numerele a şi b se numesc *factorii* produsului.

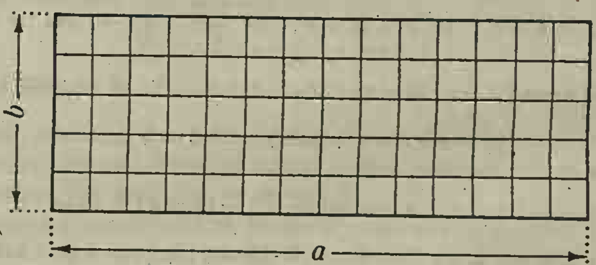


Fig. 14.

Semnul înmulţirii ($\times$ sau $.$) nu se scrie între două litere sau între un număr şi o literă. Astfel:

$$5\,a = a + a + a + a + a \quad (\text{de 5 ori}),$$
$$m\,a = a + a + \ldots + a \quad (\text{de } m \text{ ori}).$$

43. Produs grafic. Dacă un *dreptunghiu* are lungimea de a cm. şi lăţimea de b cm. (*fig.* 14), suprafaţa lui conţine ab centimetri patraţi. Putem reprezentà dar, *în mod grafic*: produsul a două numere întregi prin suprafaţa unui dreptunghiu.

De exemplu, *tabla lui* PYTHAGORA [1], care ne dă toate produsele a două numere de câte o singură cifră, se poate construi pe o hârtie cadrilată, fără niciun calcul şi fără nicio cifră, în modul următor:

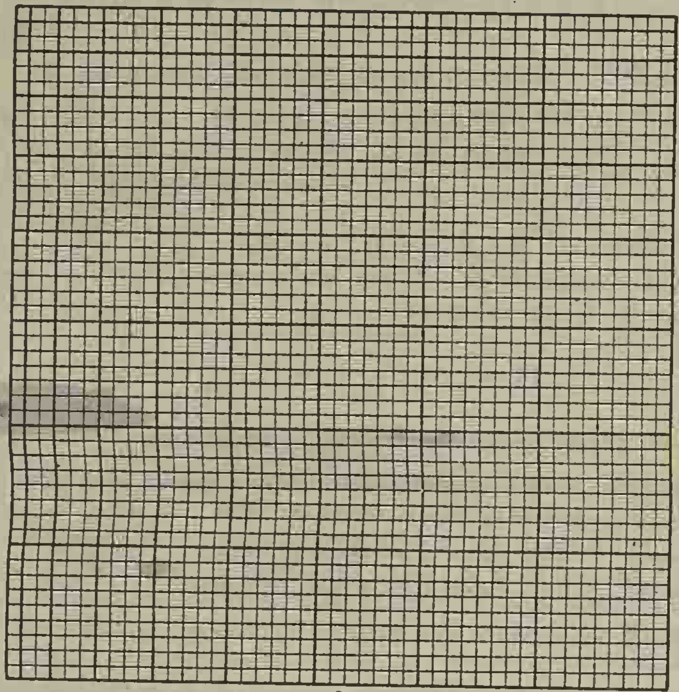


Fig. 15.

44. Multiplu. Dacă înmulţim un număr a rând pe rând cu fiecare număr întreg, formăm şirul de numere

(1) $$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ ma,\ (m+1)a,\ \ldots$$

$2a$ este *dublul* lui a; $3a$ *triplul* lui a; în general ma se numeşte un *multiplu* al lui a. Şirul (1) este *şirul multiplilor* lui a.

Multiplii lui 2 se numesc numere *părechi* sau *cu soţ*. Dacă n este un număr întreg,

$a = 2n$ însemnează a păreche,
$a = 2n + 1$ „ a nepăreche.

Primele n numere întregi părechi sunt $2, 4, 6, \ldots, 2n$; primele n numere întregi nepărechi sunt $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$.

---

[1] PYTHAGORA, filosof grec, născut la Samos în secolul al VI-lea a. Chr.

45. Inmulţirea numerelor algebrice. Când înmulţitorul e un număr întreg şi *pozitiv*, avem

$$a.n = a + a + \ldots + a \qquad (a \text{ de } n \text{ ori}).$$

Prin urmare

$$(+A).n = (+A) + (+A) + (+A) + \ldots + (+A) = +An.$$
$$(-A).n = (\underset{1}{-A}) + (\underset{2}{-A}) + (\underset{3}{-A}) + \ldots + (\underset{n}{-A}) = -An.$$

In particular: $1 \times n = n$, $0 \times n = 0$.

Când înmulţitorul e 1, 0 sau un număr *negativ* $-n$, înmulţirile se definesc în modul următor:

(2) $$a.1 = a, \quad a.0 = 0, \quad a.(-n) = -an.$$

Toate aceste operaţii se rezumă în următoarea

Regulă. *Ca să înmulţim două numere algebrice, înmulţim valorile lor absolute şi dăm produsului*
semnul + dacă factorii au aceleaşi semne,
semnul − dacă factorii au semne contrarii.

Regula semnelor la înmulţire se mai enunţă şi astfel:

+ cu + dă +	− cu + dă −
+ cu − dă −	− cu − dă +.

Exemple: $(+3).(+5) = +15$, $(-2).(+8) = -16$,
$(+4)(-6) = -24$, $(-7).(-4) = +28$.

Se verifică uşor că oricare ar fi numerele algebrice a şi b, avem

(3) $$(+a).(+b) = +ab, \quad (-a).(+b) = -ab.$$
$$(+a).(-b) = -ab, \quad (-a).(-b) = +ab.$$

In particular

$$(-1).a = a.(-1) = -a.$$

Deci: *a înmulţi un număr cu* -1 *însemnează a-i schimbà semnul* şi reciproc.

Astfel: $(-1).3 = -3$, $(-1).(-5) = +5$, $-7 = (-1).7$.

OBSERVARE. Din formulele (2) şi (3) rezultă că

$ab > 0$ însemnează a şi b cu *aceleaş semne*,

$ab < 0$ „ a şi b cu *semne contrarii*,

$ab = 0$ „ sau $a = 0$, sau $b = 0$ sau $a = b = 0$.

46. Inmulţirea unui segment cu un număr. Dacă $\overrightarrow{AB}$ e un segment paralel cu o axă Δ şi cu valoarea algebrică l, produsul $a.\overrightarrow{AB}$ este un segment paralel cu axa Δ, cu lungimea $|al|$ şi cu sensul arătat de semnul produsului al.

EXEMPLU. Să presupunem că un punct M (un *mobil*) se mişcă pe o axă Δ cu o mişcare *uniformă* de v centimetri pe secundă (*fig.* 16).

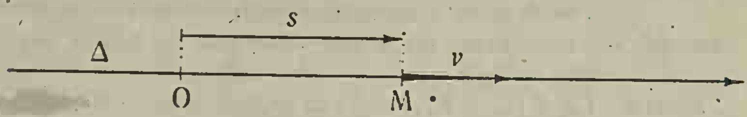


Fig. 16.

Dacă după t secunde mobilul M a parcurs distanţa $\overline{OM}$, zicem că t este *timpul*, $\overline{OM} = s$ e *spaţiul*, iar v *vitesa* sau *iuţeala* în această mişcare.

Mărimile s şi v se reprezintă prin două segmente *dirijate* pe axa Δ; s este segmentul $\overrightarrow{OM}$, iar v e un segment cu originea în M, cu lungimea $|v|$ şi cu sensul arătat de sensul mişcării. Timpul t se consideră ca număr algebric: *negativ* dacă M n'a ajuns încă în O; *nul* când M trece prin O şi *pozitiv* dupăce M a trecut prin O.

Regula înmulţirii numerelor algebrice, ne arată că avem întotdeauna

$$s = vt, \tag{4}$$

care e *legea spaţiilor* în mişcarea *uniformă*.

Egalitatea valorilor absolute $S = VT$ rezultă din însăşi definiţia mişcării uniforme [1]. Mai rămâne să arătăm că s şi vt au aceleaşi semne.

In adevăr, dacă $v > 0$, mobilul M se mişcă *spre dreapta* pe axa Δ şi pentru $t < 0$ (adică înainte ca M să fi trecut prin O) M e la stânga lui O, deci $s < 0$ (şi $vt < 0$); pentru $t > 0$ (adică dupăce M a trecut prin O) M e la dreapta lui O, deci $s > 0$ (şi $vt > 0$).

Dacă $v < 0$, mobilul M se mişcă *spre stânga* şi pentru $t < 0$ (adică înainte ca M să fi trecut prin O) M e la dreapta lui O, deci $s > 0$ (şi $vt > 0$); pentru $t > 0$ (adică după ce M a trecut prin O) M e la stânga lui O, deci $s < 0$ (şi $vt < 0$).

47. Produs de mai mulţi factori. Când scriem $a \times b \times c \times d$ sau $a\,b\,c\,d$, înţelegem deocamdată să înmulţim pe a cu b, pe produsul obţinut să-l înmulţim cu c şi pe noul produs cu d, operaţii, care se arată în scris, cu ajutorul parantezelor, în modul următor:

$$a \times b \times c \times d = [(a \times b) \times c] \times d.$$

---

[1] Dacă într'o secundă se parcurge drumul V, în T secunde se va parcurge drumul $S = VT$.

Factorii a, b, c, d pot fi pozitivi, negativi sau nuli.

Produsul a n numere algebrice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se scrie pe scurt cu simbolul

$$\prod_{r=1}^{n} a_r \quad \text{sau} \quad \Pi a_r \quad (r=1, 2, \ldots, n),$$

care se citeşte *produs de a_r dela $r=1$ la $r=n$* sau pentru $r=1, 2, \ldots, n$.

Din definiţia acestui produs rezultă următoarea

Regulă. *Ca să înmulţim mai multe numere algebrice, înmulţim valorile lor absolute şi dăm produsului*

semnul $+$ dacă avem *numai factori pozitivi* sau
dacă avem un număr *păreche* de factori *negativi*;
semnul $-$ dacă avem un număr *nepăreche* de factori *negativi*.

Exemple. $(+5).(-3).(+2) = -5.3.2 = -30$,
$(-6).(-2).(-8).(+4).(-7) = +6.2.8.4.7 = +8064$.

Observare. Egalitatea $\Pi a_r = 0$ înseamnează că cel puţin unul dintre factorii a_r e *nul*.

48. Valori absolute. Din regula precedentă rezultă că, oricare ar fi numerele algebrice $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, avem

$$|a_1 a_2 a_3 \ldots a_n| = |a_1| . |a_2| . |a_3| \ldots |a_n|$$

sau

(V) $$|\Pi a_r| = \Pi |a_r| \qquad (r=1, 2, \ldots, n).$$

Teoremă. *Valoarea absolută a produsului unor numere algebrice este egală cu produsul valorilor absolute ale acestor numere.*

49. Factori egali. Produsul a n numere egale cu a se scrie a^n şi se citeşte *a la puterea n* sau *a la n*. Expresiunea a^n este o *putere*; a este *baza*, iar n *exponentul* puterei.

Astfel:

(5) $$\begin{aligned} a.a &= a^2 \quad (a \text{ la a doua}), \\ a.a.a &= a^3 \quad (a \text{ la a treia}), \\ \underset{1}{a}.\underset{2}{a}.\underset{3}{a}. \ldots \underset{n}{a} &= a^n \quad (a \text{ la a } n\text{-a}). \end{aligned}$$

Pentru exponentul 1 se scrie $a = a^1$.

OBSERVARE. 10^n este 1 urmat de n zeruri, adică unitatea întreagă de ordin $n+1$ [1]. Astfel în sistemul zecimal avem: *zecea* $=10$, *suta* $=10^2$, *miia* $=10^3$, etc. Un număr scris cu cifrele $a\,b\,c\,d\,e\,f$ e format din f unităţi simple, e zeci, d sute, c mii, b zeci de mii şi a sute de mii. El conţine dar, în total,

$$a\,.\,10^5+b\,.\,10^4+c\,.\,10^3+d\,.\,10^2+e\,.\,10+f$$

unităţi simple.

50. Expresie algebrică întreagă. Se numeşte *expresie algebrică* un şir de numere şi de litere legate între ele prin semne de operaţii.

O expresie algebrică în care, între numerele reprezentate prin litere, nu avem de făcut alte operaţii decât *adunare*, *scădere* şi *înmulţire* se numeşte expresie algebrică *întreagă*. Astfel

$$a+7b,\quad 2a-b,\quad -5a^3,\quad 2ab^2+abc,$$
$$5ab^3c-3a^4b^2+(a^2-2b)(a^3+b)^2,$$

sunt expresii algebrice întregi.

51. Legile înmulţirii. Din definiţia înmulţirii rezultă următoarele *legi*:

1⁰. Inmulţirea e o operaţie întotdeauna *posibilă* şi *univocă* (¹)

2⁰. Inmulţirea e *comutativă*. Adică avem

(6) $$ab=ba,\qquad abcd=dacb.$$

Valoarea unui produs de mai mulţi factori nu se schimbă, dacă schimbăm ordinea factorilor.

3⁰. Inmuţirea unei *sume algebrice* cu un număr e o operaţie *distributivă*. Adică

(7) $$m(a+b+c)=ma+mb+mc.$$

In adevăr, pentru m pozitiv, avem

$$m(a+b+c)=\underset{1}{a+b+c}+\underset{2}{a+b+c}+\dots+\underset{m}{a+b+c}$$
$$=\underset{1}{a}+\underset{2}{a}+\dots+\underset{m}{a}+\underset{1}{b}+\underset{2}{b}+\dots+\underset{m}{b}+\underset{1}{c}+\underset{2}{c}+\dots+\underset{m}{c}$$
$$=ma+mb+mc.$$

Pentru m negativ, $m=-M$, avem

$$m(a+b+c)=-M(a+b+c)=-Ma-Mb-Mc$$
$$=(-M)a+(-M)b+(-M)c=ma+mb+mc.$$

(¹) Cu rezultat *unic*.

REGULĂ. *Ca să înmulţim o sumă algebrică cu un număr*, sau efectuăm suma şi o înmulţim cu numărul, sau *înmulţim numărul cu fiecare parte a sumei şi facem apoi suma algebrică a produselor obţinute.*

EXEMPLU. $(8-5+7)\times 3 = 10\times 3 = 30$

sau $(8-5+7)\times 3 = 24-15+21 = 30.$

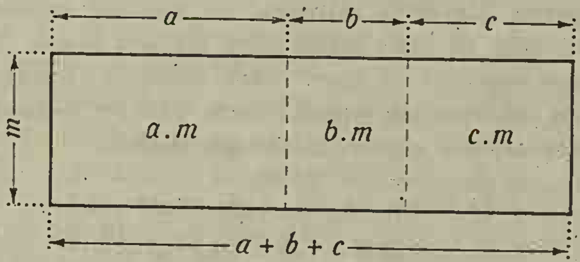


Fig. 17.

OBSERVARE. Dacă numerele a, b, c, m sunt *pozitive*, formula (7 ne dă

(8) $$(a+b+c).m = a.m + b.m + c.m$$

egalitate evidentă pe figura 17,

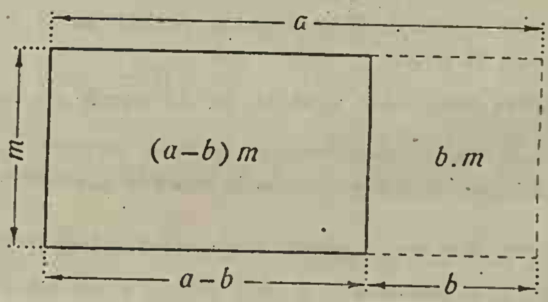


Fig. 18.

şi

(9) $$(a-b).m = a.m - b.m$$

egalitate evidentă pe figura 18.

4°. Inmulţirea e *asociativă*. Adică

(10) $$abc = (ab).c = a.(bc).$$

In adevăr, după 45, semnul acestor produse e acelaş, iar pentru valorile lor absolute putem scrie

$$(A.B).C = (\underset{1}{B} + \underset{2}{B} + \ldots + \underset{A}{B}).C$$
$$= (\underset{1}{BC} + \underset{2}{BC} + \ldots + \underset{A}{BC}) = A.(BC).$$

Exemplu:

$$(-2).(+3).(-5) = [(-2).(+3)].(-5) = (-2).[(+3).(-5)]$$

adică

$$(-2).(+3).(-5) = (-6).(-5) = (-2).(-15) = +30.$$

52. Înmulţirea produselor. Ca să înmulţim un produs neefectuat cu un număr, *înmulţim numai pe unul din factorii lui cu acel număr.*

In adevăr, din legea 4⁰ a înmulţirii rezultă că

$$(11) \qquad (abc)m = abcm = (am)bc = a(bm)c = ab(cm).$$

Inmulţirea unui *produs* cu un număr nu e o operaţie distributivă (1).

Exemplu: $[5 \times 3 \times (-7)] \times 4 = (-105) \times 4 = -420,$
sau $[5 \times 3 \times (-7)] \times 4 = 20 \times 3 \times (-7) = -420,$
$= 5 \times 12 \times (-7) = -420,$
$= 5 \times 3 \times (-28) = -420$

Ca să înmulţim două sau mai multe produse neefectuate, *formăm un singur produs din toţi factorii lor.*

Astfel:

$$(abc).(de) = abcde.$$

53. Factor comun. Egalitatea (7) se scrie, în general,

$$(VI) \qquad m(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = ma_1 + ma_2 + \ldots + ma_n,$$

oricare ar fi numerele *algebrice* $m, a_1, a_2, \ldots, a_n$, sau

$$m\,\Sigma a_p = \Sigma m a_p. \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Invers avem

$$ma_1 + ma_2 + \ldots + ma_n = m(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Numărul m, care se găseşte *ca factor* în fiecare termen din membrul întâi al ultimei egalităţi, se numeşte *factor comun.*

---

(1) Să se compare cu înmulţirea unei *sume* cu un număr, [51, 3].

Operaţia făcută în membrul al doilea se zice: *scoaterea lui m în factor comun.*

Exemple: $3\times 7+8\times 7-5\times 7=7\times(3+8-5)=7\times 6=42.$
$3a+5a-9a=(3+5-9)a=-a,\qquad 2ab-7abc=ab(2-7c).$

54. Inmulţirea sumelor algebrice. Ca să efectuăm produsul

$$(a+b).(c+d+e),$$

considerăm pe $(a+b)$ ca un singur număr, şi [după 51, 3] putem scrie

$$(a+b).(c+d+e)=(a+b)c+(a+b)d+(a+b)e.$$

Calculând apoi, după aceeaş regulă, fiecare din aceste trei produse, găsim

(VII) $$(a+b).(c+d+e)=ac+bc+ad+bd+ae+be.$$

Regulă. *Ca să înmulţim două sume algebrice* neefectuate, *înmulţim fiecare termen al sumei întâia cu fiecare termen al sumei a doua* şi facem suma algebrică a tuturor produselor obţinute.

Exemple.

$(7+5).(3-8)=12.(-5)=-60,\quad (7-5).(3-8)=2.(-5)=-10$
sau
$(7+5).(3-8)=7\times 3+5\times 3-7\times 8-5\times 8=21+15-56-40=-60,$
$(7-5).(3-8)=7\times 3-5\times 3-7\times 8+5\times 8=21-15-56+40=-10.$

Observare. Când termenii a, b, c, d, e sunt *numere pozitive*, egalitatea (VII) e evidentă pe figura următoare:

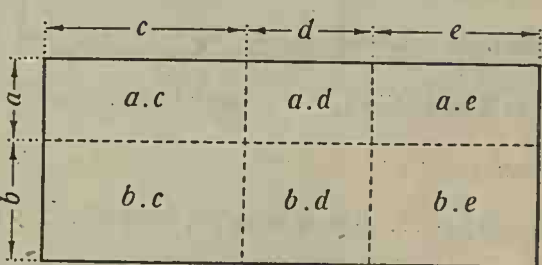


Fig. 19.

55. Sumă dublă. Produsul

(12) $$(a_1+a_2+\ldots+a_m)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

este egal cu suma celor mn produse din tabloul următor:

$$\begin{array}{llll} a_1b_1 & a_2b_1 & \ldots & a_mb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \ldots & a_mb_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \ldots & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1b_n & a_2b_n & \ldots & a_mb_n, \end{array} \tag{13}$$

egalitate care se scrie pe scurt astfel:

$$\sum_{p=1}^{m} a_p \cdot \sum_{q=1}^{n} b_q = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_p\, b_q$$

sau

$$\Sigma a_p \, \Sigma b_q = \Sigma\, \Sigma\, a_p\, b_q \quad (p=1, 2, ..., m, \quad q=1, 2, ..., n). \tag{14}$$

Suma din membrul al doilea se numeşte *sumă dublă*. Ea reprezintă suma *tutuvor produselor* de forma $a_p b_q$ *din tabloul* (13).

In particular, după această regulă, rezultă că:

$$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd. \tag{VIII}$$

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd. \tag{IX}$$

56. Inmulţirea egalităţilor şi a neegalităţilor. 1°. Din $a=b$ rezultă $ac=bc$, oricare ar fi c. Se mai poate zice că:

din $a=b$, $c=d$ rezultă $ac=bd$.

2°. Din $a>b$ rezultă

$$ac > bc \quad \text{dacă} \quad c>0,$$
$$ac < bc \quad \text{dacă} \quad c<0.$$

In adevăr dacă $a>b$, avem $a-b>0$ şi, după 45, deducem

$(a-b)c = ac - bc > 0$ deci $ac > bc$ pentru $c>0$

şi $(a-b)c = ac - bc < 0$ deci $ac < bc$ pentru $c<0$.

TEOREMĂ. *Când înmulţim ambi membri ai unei neegalităţi cu un acelaş număr, dacă numărul e pozitiv, neegalitatea rămâne de acelaş sens; dacă numărul e negativ, neegalitatea îşi schimbă sensul.*

Se mai poate zice că:

din $a>b$, $c=d>0$ rezultă $ac>bd$,

din $a>b$, $c=d<0$ rezultă $ac<bd$.

3⁰. Din $a > b$, $c > d$ rezultă prin înmulţire

$$ac > bd \quad \text{dacă} \quad a > 0, \quad d > 0;$$

$$ac < bd \quad \text{dacă} \quad a < 0, \quad d < 0.$$

In adevăr dacă $a > 0$, $d > 0$, înmulţind prima neegalitate cu d şi a doua cu a, deducem

$$ad > bd \quad \text{şi} \quad ac > ad \quad \text{deci} \quad ac > bd.$$

Dacă $a < 0$, $d < 0$, prin aceleaşi operaţii deducem

$$ad < bd \quad \text{şi} \quad ac < ad \quad \text{deci} \quad ac < bd.$$

In acelaş fel se arată că din $a > b$, $c > d$ rezultă

$$ac > bd \quad \text{dacă} \quad b > 0, \quad c > 0;$$

$$ac < bd \quad \text{dacă} \quad b < 0, \quad c < 0.$$

Scriind neegalităţile $a > b$, $c > d$ una sub alta, vom zice că a, d şi b, c sunt membri *în cruce.*

TEOREMĂ. *Când înmulţim două neegalităţi de acelaş sens, dacă doi membri în cruce sunt pozitivi, neegalitatea dintre produse e de acelaş sens; dacă doi membri în cruce sunt negativi, neegalitatea dintre produse e de sens contrariu* cu neegalităţile date.

OBSERVARE. Dacă neegalităţile date nu au doi membri în cruce *de acelaş semn*, nu putem preciză sensul neegalităţii dintre produse.

REZUMAT. Inmulţiri:

$a = b$	$a > b$	$a > b$	$a > b$	$a < b$
$c = d$	$c = d > 0$	$c = d < 0$	$c > d$	$c < d$
$ac = bd$	$ac > bd$	$ac < bd$	$ac > bd$ $a > 0, d > 0$	$ac > bd$ $c < 0, b < 0$

EXEMPLE.

Neegalităţi sigure:

$-3 > -5$	$-5 < 2$
$4 > -2$	$3 < 7$
$-12 < +10$	$-15 < 14$

Neegalităţi nesigure:

$-2 > -5$	$-2 > -5$	$-2 > -5$
$8 > 3$	$4 > 3$	$5 > 2$
$-16 < -15$	$-8 > -15$	$-10 = -10.$

II. — ÎMPĂRŢIREA.

57. Definiţii. Insemnând cu a şi b două numere date ($a > b \neq 0$) şi cu x numărul necunoscut, următoarele două cazuri se prezintă ca probleme *inverse* ale înmulţirei:

$$1^0. \; x \times b = a, \qquad 2^0. \; b \times x = a.$$

In cazul întâi se întreabă: *de câte ori* b *face* a? sau *de câte ori* b *este cuprins în* a? x e un număr *abstract* [10].

In cazul al doilea se întreabă: de b ori *cât* face a? sau *care este a b-a parte din* a? Dacă a este un număr *concret*, x reprezintă *acelaş fel de unităţi* ca şi a. Problema se rezolvă împărţind pe a în b părţi egale (dacă e posibil); x este una din aceste părţi şi se numeşte o *parte alicotă* a lui a.

Din punct de vedere al calculului practic, fiindcă prin schimbarea ordinei factorilor produsul nu se schimbă, problemele 1⁰ şi 2⁰ se reduc una la alta. Dacă c e numărul căutat, operaţia, prin care din numerele a şi b aflăm pe c, se numeşte *împărţire*. Semnul împărţirei este : (*împărţit prin* sau *împărţit la*) şi se scrie

$$a:b=c \quad \text{dacă} \quad c\times b=a \quad \text{sau} \quad a=bc.$$

a este *deîmpărţitul*, b *împărţitorul* şi c *câtul*.

De exemplu: $12:4=3$ fiindcă $3\times 4=12$.

De aci rezultă

DEFINIŢIA I. *A împărţi pe a prin b înseamnează a găsi un număr c, care înmulţit cu b să ne dea pe a.*

Rezolvarea acestei probleme *cu numere-întregi* e, în general, imposibilă. De exemplu pentru $26:7$, nu există niciun număr întreg, care înmulţit cu 7 să dea 26.

Când această operaţie e posibilă, a se descompune în b părţi *egale*, fiecare parte având câte c unităţi, fiindcă $a=b\times c$. De aceea mai putem zice că:

A împărţi pe a la b înseamnează a face, din a unităţi, b părţi egale.

Problema împărţirei se mai pune însă şi sub altă formă:

DEFINIŢIA II. A împărţi pe a prin b $(a>b)$ înseamnează a găsi *cel mai mare număr* c, care, înmulţit cu b, să dea un produs, *care să se poate scădea din* a.

In acest caz problema se rezolvă cu ajutorul *şirului multiplilor lui* b:

$$(M) \qquad 0,\ b,\ 2b,\ 3b,\ \ldots,\ nb,\ (n+1)b,\ \ldots$$

unde, prin generalizare, considerăm tot ca multipli de b şi produsele $0.b=0$, $1.b=b$. Acest şir se formează din şirul N [pag. 3] luând numerele întregi din b în b.

Dacă a e un număr întreg,

1⁰. Sau a se găsește în șirul M, de exemplu $a = nb$; în acest caz zicem că b se cuprinde în a de n ori *exact* și scriem

$$a:b = n \quad (\text{cât exact}).$$

2⁰. Sau a nu se găsește în șirul M, dar atunci e cuprins între două numere consecutive din acest șir, de exemplu

$$nb < a < (n+1)\,b.$$

In acest caz zicem că b se cuprinde de n ori în a, dar nu se cuprinde de $n+1$ ori; n se numește *câtul prin lipsă* al împărțirei $a:b$; $n+1$ este *câtul prin adaos* sau *prin exces* al acestei împărțiri.

Diferența $a - nb = r$ este *restul* împărțirii. In cazul 1⁰ avem $r = 0$ (împărțire *exactă*); în cazul 2⁰ avem $0 < r < b$ (împărțire *neexactă*).

Observare. Impărțirea, după definiția II, este o operație întotdeauna *posibilă* în șirul N al numerelor întregi; ea ne conduce la *două* rezultate: un *cât* și un *rest*.

Impărțirea $a:b$ se poate face și prin scăderi succesive:

$$a - b = r_1, \quad r_1 - b = r_2, \quad r_2 - b = r_3, \quad \ldots$$

și așa mai departe, până ce ajungem la un rest *nul* sau *mai mic* decât b. Numărul scăderilor făcute este *câtul* împărțirii. De aceea se mai zice că împărțirea este o *scădere repetată* (operație inversă *de treapta a doua*).

Exemple. Impărțire exactă:

$$48:6 = 8, \quad 48:8 = 6 \quad \text{fiindcă} \quad 48 = 6 \times 8.$$

Impărțire neexactă:

53 : 9	dă câtul 5	și restul 8,	fiindcă	$53 = 9 \times 5 + 8$	și	$8 < 9$;
53 : 5	„ „ 10	„ „ 3,	„	$53 = 5 \times 10 + 3$	„	$3 < 5$.

Avem în particular:

$$a:a = 1 \quad \text{fiindcă} \quad a \times 1 = a,$$
$$a:1 = a \quad „ \quad 1 \times a = a,$$
$$na:a = n \quad „ \quad a \times n = na,$$
$$0:a = 0 \quad „ \quad a \times 0 = 0.$$

$0:0$ este *orice număr*, fiindcă $0 \times n = 0$. De aceea zicem că $0:0$ este o *nedeterminare*.

$a:n$ *n'are sens* pentru $a \neq 0$, fiindcă nu există niciun număr, care înmulțit cu 0 să dea pe $a \neq 0$.

58. Impărțirea numerelor întregi algebrice. Dacă a, b, c sunt numere întregi algebrice, cu valorile absolute A, B, C respectiv, zicem că

(15) $\quad a:b=c \quad$ dacă $\quad a=bc \quad$ (împărțire *exactă*).

Prin urmare, pentru împărțirea exactă, trebue să avem

$$\text{(X)}\quad \begin{array}{llll} (+A):(+B)=+C & \text{fiindcă} & +A=(+B)(+C), \\ (+A):(-B)=-C & \quad " & +A=(-B)(-C), \\ (-A):(+B)=-C & \quad " & -A=(+B)(-C), \\ (-A):(-B)=+C & \quad " & -A=(-B)(+C). \end{array}$$

Regulă. *Ca să împărțim două numere algebrice, împărțim valorile lor absolute* și *dăm câtului semnul* $+$, *dacă amândouă numerele au aceleași semne; dăm câtului semnul* $-$, *dacă numerele au semne contrarii.*

Regula semnelor la împărțire este aceeaș ca și la înmulțire [45]:

$+$ cu $+$ dă $+$, $\qquad$ $-$ cu $+$ dă $-$,

$+$ cu $-$ dă $-$, $\qquad$ $-$ cu $-$ dă $+$,

Exemple: $(+28):(+7)=+4$, $(-48):(+6)=-8$,
$(+36):(-12)=-3$, $(-55):(-11)=+5$.

In general, c este câtul și r $(\neq 0)$ restul împărțirii $a:b$, dacă avem

(16) $\quad a=bc+r \quad$ cu $\quad |r|<|b| \quad$ (împărțire *neexactă*).

Valoarea absolută C a câtului se obține împărțind $A:B$. Semnul câtului c e dat prin regula semnelor. Dacă C e câtul *prin lipsă* al împărțirii $A:B$, avem $A<BC$ și semnul restului $r=a-bc$ este semnul lui a.

Exemple: $(-35:(-9)$ dă câtul $+3$ și restul -8, fiindcă
$(-9).(+3)-8=-27-8=-35$ și $8<9$.

$(-35):(+3)$ dă câtul -11 și restul -2, fiindcă
$(+3).(-11)-2=-33-2=-35$ și $2<3$.

Observare. Egalitatea (16) e generală. Pentru $r\neq 0$ zicem că împărțirea e *neexactă*; pentru $r=0$ avem împărțirea *exactă* și egalitatea (16) devine egalitatea (15).

59. Teoreme relative la împărţirea exactă. Din definiţia împărţirii exacte rezultă că:

1°. Avem

$$(17)\qquad (a:b)\times b=a,\quad (a\times b):b=a.$$

Astfel operaţiile de *înmulţire* şi *împărţire cu un acelaş număr se distrug una pe alta.*

2°. *Ca să împărţim o sumă algebrică printr'un număr,* sau efectuăm suma şi împărţim rezultatul cu numărul dat, sau *împărţim fiecare termen al sumei cu numărul şi facem suma algebrică a câturilor obţinute.* Adică

$$(18)\qquad (a+b+c):m=(a:m)+(b:m)+(c:m),$$

dacă împărţirile se pot face exact. Operaţia este deci *distributivă.*

In adevăr, după 51,3, avem

$$[(a:m)+(b:m)+(c:m)]\times m=(a:m).m+(b:m).m+(c:m).m$$
$$=a+b+c.$$

EXEMPLU: $(27-18+15):3=24:3=8$

sau $(27-18+15):3=9-6+5=8.$

De aci rezultă că:

$$(\mathrm{XI})\qquad (a+b):c=(a:c)+(b:c),$$
$$(\mathrm{XII})\qquad (a-b):c=(a:c)-(b:c).$$

3°. *Ca să împărţim un produs printr'un număr,* sau efectuăm produsul şi-l împărţim prin număr, sau *împărţim numai pe unul din factori cu numărul dat* şi apoi facem înmulţirile rămase. Adică avem:

$$(19)\qquad \begin{aligned}(a\times b\times c):m&=(a:m)\times b\times c\\&=a\times(b:m)\times c\\&=a\times b\times(c:m).\end{aligned}$$

In adevăr, înmulţind oricare din aceste rezultate cu m şi ţinând seamă de teorema 59,1 căpătăm $a\times b\times c$.

EXEMPLU: $(6\times 9\times 15):3=810:3=270.$

sau $(6\times 9\times 15):3=2\times 9\times 15=6\times 3\times 15=6\times 9\times 5=270.$

In particular, *ca să împărțim un produs prin unul din factorii lui suprimăm acel factor.* In adevăr

(20) $$(a \times b \times c):b = a \times 1 \times c = a \times c.$$

4°. *Ca să împărțim un număr printr'un produs de mai mulți factori, putem împărțì numărul prin primul factor, câtul obținut prin al doilea factor și așà mai departe.* Adică pentru $a:(b.c.d)$, dacă

(21) $$a:b = q, \quad q:c = q', \quad q':d = q'',$$

avem

(22) $$a:(bcd) = q''.$$

In adevăr din (21) rezultă succesiv

$a = bq$, $q = cq'$ deci $a = bcq'$; $q' = dq''$ deci $a = bcdq''$.

60. Legile împărțirei. Impărțire exactă. 1°. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *deîmpărțitul cu un număr* și lăsăm împărțitorul neschimbat, *câtul se înmulțește* (sau *se împarte*) *cu acel număr.*

In adevăr, înmulțind (sau împărțind) cu m ambii membri ai egalității $a = b \times c$, deducem după 52 și 59, 3

$$am = b \times cm \quad \text{și} \quad a:m = b \times (c:m).$$

Exemplu. Din $45:5 = 9$, înmulțind deîmpărțitul 45 cu 2 deducem $90:5 = 18$ sau împărțind deîmpărțitul 45 cu 3 deducem $15:5 = 3$.

2°. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *împărțitorul cu un număr* și lăsăm deîmpărțitul neschimbat, *câtul se împarte* (sau *se înmulțește*) *cu acel număr.*

In adevăr, în loc de $a = b \times c$, putem scrie, după 59, 1

$$a = b \times (c:m) \times m \quad \text{sau} \quad a = bm \times (c:m),$$
$$a = (b:m) \times m \times c \quad \text{sau} \quad a = (b:m) \times cm.$$

Exemplu. Din $360:12 = 30$, înmulțind împărțitorul 12 cu 2 deducem $360:24 = 15$ sau împărțind împărțitorul 12 cu 3 deducem $360:4 = 90$.

3°. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *și deîmpărțitul și împărțitorul cu un acelaș număr, câtul împărțirei nu se schimbă.*

In adevăr din $a = b \times c$, înmulțind (sau împărțind) cu m ambi membri ai egalității, deducem

$$am = bm \times c \quad \text{și} \quad (a:m) = (b:m) \times c.$$

EXEMPLU. Din $24:8=3$, înmulțind (sau împărțind) și deîmpărțitul și împărțitorul cu 2, rezultă

$$48:16=3 \quad \text{și} \quad 12:4=3.$$

4⁰. ÎMPĂRȚIRE NEEXACTĂ. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *și deîmpărțitul și împărțitorul cu un acelaș număr, câtul nu se schimbă* iar *restul se înmulțește* (sau *se împarte*) *cu acel număr.*

In adevăr, din

$$a=bc+r, \qquad |r|<|b|$$

înmulțind (sau împărțind) cu m deducem

$$am=bm\times c+rm, \qquad |rm|<|bm|$$

$$\text{și} \quad a:m=(b:m)\times c+(r:m), \qquad |r:m|<|b:m|.$$

EXEMPLU. Din

$$(+27):(-6)=-4 \quad (\text{cât})$$
$$\text{rest} \quad +3$$

înmulțind și deîmpărțitul și împărțitorul cu 1000, deducem

$$(+27000):(-6000)=-4 \quad (\text{cât})$$
$$\text{rest} \quad +3000$$

sau împărțind și deîmpărțitul și împărțitorul cu -3, deducem

$$(-9):(+2)=-4 \quad (\text{cât}).$$
$$\text{rest} \quad -1$$

61. Ordinea efectuării operațiilor. Intr'un șir de operații de treapta întâia și a doua, scrise unele după altele fără nici o paranteză, trebue efectuate *întâi toate operațiile de treapta a doua* și apoi cele de *treapta întâia.*

Astfel:

$$7\times 8-4+26:2-2\times 5\times 3$$

înseamnă

$$(7\times 8-4+(26:2)-(2\times 5\times 3)=56-4+13-30=35.$$

Dacă vrem ca operațiile să se efectueze *altfel*, arătăm prin paranteze operațiile care trebue să se facă înaintea celorlalte.

De exemplu, șirul de operații

$$(7\times 8-4+26):2-2\times 5\times 3$$

înseamnă

$$(56-4+26):2-30$$

sau

$$78:2-30=39-30=9.$$

Pe când şirul de operaţii

$$7\times(8-4+26:2-2)\times5\times3$$

înseamnă

$$7\times(8-4+13-2)\times5\times3$$

sau

$$7\times15\times5\times3=1575.$$

Uneori se întrebuinţează mai multe feluri de paranteze, pentru a se arătà ordinea în care trebue să fie efectuate operaţiile. In acest caz înţelegem să se efectueze întâi operaţiile din parantezele mici şi apoi din cele mari.

EXEMPLU.

$$\big([7\times8-(4+26:2)]-2\big)\times5\times3$$

$$=\big([7\times8-17]-2\big)\times5\times3$$

$$=\big(39-2\big)\times5\times3=37\times5\times3=555.$$

62. Impărţirea egalităţilor şi a neegalităţilor. Impărţiri exacte.

1⁰. Din $a=b$ rezultă $a:c=b:c$, oricare ar fi $c\neq0$:

Din $a=b$, $c=d\neq0$ rezultă $a:c=b:d$.

OBSERVARE. In aplicarea acestei operaţii trebue să fim siguri că expresiunea prin care împărţim *nu e nulă*. Altfel ajungem la rezultate absurde.

Astfel pentru $a=0$, avem evident

$$3\times a=7\times a$$

şi, împărţind ambii membri ai egalităţii cu a, deducem $3=7$.

2⁰. Din $a>b$, rezultă

$$a:c>b:c \quad \text{dacă} \quad c>0$$

$$\text{şi} \quad a:c<b:c \quad \text{dacă} \quad c<0.$$

In adevăr din $a>b$ rezultă $a-b>0$; prin urmare câtul

$$(a-b):c=a:c-b:c$$

are semnul lui c.

3⁰. Dacă numerele a şi b sunt *pozitive*, din $a>b$ rezultă

$$c:a<c:b \quad \text{dacă} \quad c>0$$

$$\text{şi} \quad c:a>c:b \quad \text{dacă} \quad c<0.$$

Prima neegalitate e evidentă; a doua rezultă din cauza semnelor.

4⁰. Dacă numerele a, b, c, d sunt *pozitive*,

din $a > b$, $c < d$ rezultă $a:c > b:d$.

In adevăr avem succesiv $a:c > b:c$ și $b:c > b:d$.

Observare. Dacă numerele sunt *algebrice*, regulele 3⁰ și 4⁰ se pot aplică numai la valorile lor absolute.

REZUMAT. Impărțiri exacte:

din $\dfrac{\begin{array}{c} a=b \\ c=d\neq 0\end{array}}{a:c=b:d}$ din $\dfrac{\begin{array}{c} a>b \\ c=d\end{array}}{\begin{array}{c}a:c>b:d\\ a:c<b:d\end{array}}$ din $\dfrac{\begin{array}{c} c=d \\ a>b\end{array}}{\begin{array}{c}c:a<d:b \\ c:a>d:b\end{array}}$ $\begin{array}{l}\text{pentru } c=d>0,\\ \text{pentru } c=d<0,\end{array}$

și pentru a, b, c, d pozitive:

din $\dfrac{\begin{array}{c} a>b \\ c<d\end{array}}{a:c>b:d}$ din $\dfrac{\begin{array}{c} a<b \\ c>d\end{array}}{a:c<b:d}$

EXEMPLE. Impărțiri:

$\dfrac{\begin{array}{c}-12=6-18\\ 3=3\end{array}}{-4=2-6}$ $\dfrac{\begin{array}{c}20-5>-10\\ 5=5\end{array}}{4-1>-2}$ $\dfrac{\begin{array}{c}20-5>-10\\ -5=-5\end{array}}{-4+1<+2}$ $\dfrac{\begin{array}{c}30=18+12\\ 5>3\end{array}}{6<6+4}$ $\dfrac{\begin{array}{c}70>32\\ 7<8\end{array}}{10>4.}$

III. — DIVIZIBILITATEA.

63. Dacă un număr a se împarte exact printr'un alt număr b, zicem că a e *divizibil* cu b sau divizibil prin b. In acest caz a este un *multiplu* al lui b, iar b un *divizor* al lui a.

Astfel: 60 e divizibil prin 15, fiindcă $60:15=4$ sau $60=4\times 15$; 60 e un multiplu al lui 15 și 15 e un divizor al lui 60.

Dacă a este divizibil cu b (de exemplu $a:b=\alpha$), putem scrie

$$a=\alpha b \qquad (\alpha \text{ întreg}) \tag{23}$$

și *reciproc*. Când nu vrem să precizăm de câte ori se cuprinde b în a, putem scrie numai

$$a=Mb \quad (a \text{ egal } \textit{multiplu} \text{ de } b).$$

In toată teoria divizibilității vom consideră numai numere *pozitive*, deoarece împărțirea a două numere algebrice $a:b$ se reduce, afară de semn, la împărțirea valorilor lor absolute $A:B$.

64. Teoreme. 1⁰. Dacă două numere a şi b sunt divizibile cu n, *suma, diferenţa şi produsul lor sunt divizibile cu* n.

In adevăr din ipoteza: $a = \alpha n$, $b = \beta n$ rezultă

$$a + b = (\alpha + \beta)n, \quad a - b = (\alpha - \beta)n, \quad ab = (\alpha\beta n)n.$$

OBSERVARE. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată: o sumă, o diferenţă, un produs de două sau mai multe numere pot fi divizibile printr'un număr, fără ca fiecare termen sau fiecare factor să fie divizibil prin acel număr.

Un *produs* e divizibil printr'un număr, dacă *unul* din factorii lui e divizibil prin acel număr [59, 3].

EXEMPLE. Suma $5 + 9 = 14$ e divizibilă cu 2 şi 7, dar nici 5. nici 9 nu e divizibil cu 2 sau 7. Produsul $2 \times 5 \times 9$ e divizibil cu 3, fiindcă factorul 9 e divizibil cu 3.

In general, dacă mai multe numere algebrice sunt divizibile prin n, *orice expresie algebrică întreagă* [50], *formată numai cu aceste numere, este divizibilă prin* n.

2⁰. Dacă a e divizibil cu n, *orice multiplu al lui* a *este divizibil cu* n. Deoarece din $a = \alpha n$ rezultă

$$ma = m\alpha n = (m\alpha).n \quad (m\alpha \text{ întreg}).$$

EXEMPLU. Dacă 15 e divizibil cu 5, şi multiplul $7 \times 15 = 105$ e divizibil cu 5.

3⁰. Dacă două numere a şi b sunt divizibile cu n, *şi restul împărţirei* $a:b$ *este divizibil cu* n.

Fie

$$a = bc + r \quad (r < b).$$

Dacă $a = \alpha n$, $b = \beta n$, din $a > bc$ rezultă $\alpha > \beta c$ şi avem

$$r = a - bc = \alpha n - \beta nc = (\alpha - \beta c)n$$

cu $\alpha - \beta c$ întreg. Prin urmare r este divizibil cu n.

EXEMPLU. Fiindcă 240 şi 84 sunt divizibile cu 12, şi restul împărţirii $240:84$, adică 72, e divizibil cu 12.

4⁰. Dacă două numere a şi b *diferă printr'un multiplu de* n, aceste numere, împărţite prin n, *dau acelaş rest*.

In adevăr dacă

$$a - b = pn \quad \text{sau} \quad a = b + pn$$

şi dacă $b:n$ dă restul r, avem

$$b = qn + r \quad (r < n)$$

şi $a = qn + r + pn = (p + q)n + r$ cu $r < n$. Deci şi $a:n$ dă restul r [58].

EXEMPLU. Fiindcă $319 - 235 = 84$ este un multiplu de 7, numerele 319 şi 235 împărţite prin 7 dau *acelaş rest*.

65. Congruenţă. In general, dacă două numere a şi b împărţite cu n *dau acelaş rest*, zicem că a este *congrù* cu b pentru *modulul* n şi scriem

$$a \equiv b \pmod{n}. \tag{24}$$

Relaţia (24) se numeşte o *congruenţă*. Din definiţia congruenţei rezultă că, dacă

$$a \equiv b, \quad b \equiv c \pmod{n},$$

avem şi

$$a \equiv c \pmod{n}.$$

In particular $a \equiv 0 \pmod{n}$ însemnează că a este *divizibil* cu n.

EXEMPLU. Avem $22 \equiv 34 \pmod{6}$ fiindcă şi 22 şi 34 împărţite prin 6 dau acelaş rest 4.

66. Recunoaşterea divizibilităţii. Ca să ştim dacă a est divizibil prin n, trebue să căutăm *restul* împărţirei $a:n$. In unele cazuri acest rest poate fi dat de o altă împărţire mai simplă. De exemplu, dacă pentru orice număr a putem găsì un număr b, care să satisfacă condiţiile

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{şi} \quad b < a,$$

restul împărţirei $a:n$ este

sau b, dacă $b < n$,

sau *restul dat de* $b:n$, dacă $b \geqslant n$.

Alegând numărul b în mod convenabil, obţinem astfel o *regulă* pentru *divizibilitatea unui număr cu* n.

OBSERVARE. Dacă avem

$$a \equiv b \pmod{n},$$

şi dacă d este un *divizor* al lui n, avem şi

$$a \equiv b \pmod{d}.$$

Prin urmare regula de divizibilitate găsită pentru n este adevărată şi pentru *orice divizor al lui* n.

67. Regulele elementare de divizibilitate. Un număr N, scris cu cifrele a, b, c, d, e în sistemul zecimal, este

$$N = a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e \tag{25}$$

sau

$$N = 10000\,a + 1000\,b + 100\,c + 10\,d + e.$$

Dacă însemnăm cu S *suma cifrelor*: $a+b+c+d+e$ şi cu S' *suma alternată* a acestor cifre: $a-b+c-d+e$, se observă că

$$N \equiv e \quad (\text{mod. } 2, 5, 10),$$
$$N \equiv 10d+e \quad (\text{mod. } 25, 50, 100),$$
$$N \equiv S \quad (\text{mod. } 3, 9),$$
$$N \equiv S' \quad (\text{mod. } 11).$$

De aci deducem toate regulele elementare de divizibilitate.

Primele două congruenţe rezultă imediat din egalitatea (25); celelalte două rezultă din egalităţile

$$N = a(10^4-1)+b(10^3-1)+c(10^2-1)+d(10-1)+S,$$
$$N = a(10^4-1)+b(10^3+1)+c(10^2-1)+d(10+1)+S',$$

dacă se observă că 10^n-1 e divizibil prin 3 şi 9, iar $10^{2n}-1$ şi $10^{2n+1}+1$ sunt divizibile prin 11, oricare ar fi n întreg şi pozitiv.

68. Divizor comun. Dacă mai multe numere întregi a, b, c sunt divizibile prin d, zicem că d este un *divizor comun* al acestor numere.

Să se observe că:

1⁰. Numerele a, b, c au cel puţin un divizor comun: *pe* 1.

2⁰. Ele pot aveà şi alţi divizori comuni *mai mari decât* 1.

3⁰. Dacă $a > b > c$, orice divizor comun al lor este $\leqq c$.

Există dar un număr D, care este *cel mai mare divizor comun* al numerelor a, b, c, şi avem $1 \leqq D \leqq c$.

69. Cel mai mare divizor comun (c. m. m. d. c.). Fiind date două numere a şi b $(a > b)$, să însemnăm cu D pe c. m. m. d. c. al lor.

Dacă a e divizibil prin b, avem $D = b$.

Dacă a nu e divizibil prin b, avem $a = bc + r$ $(r < b)$ şi orice divizor comun al numerelor a şi b este şi un divizor al lui r [64, 3]. Prin urmare c. m. m. d. c. al numerelor a şi b este c. m. m. d. c. al numerelor b şi r.

Dacă b este divizibil prin r, avem $D = r$.

Dacă b nu e divizibil prin r, avem $b = rc_1 + r_1$ $(r_1 < r)$. Raţionând ca mai sus, rezultă că D este c. m. m. d. c. al numerelor r şi r_1. Şi aşà mai departe.

Resturile r, r_1, r_2, ... merg descrescând cel puţin cu câte o unitate. Prin urmare, după un număr *finit* de operaţii (cel mult r) trebue să ajungem la un rest $r_n = 0$. Ultimul împărţitor (adică restul r_{n-1}) este cel mai mare divizor comun căutat. Deci $D = r_{n-1}$.

Dacă numerele a şi b au ca divizor comun *numai pe* 1, aceste numere se zic *prime între ele.* In acest caz avem $D = 1$.

EXEMPLU. Să se afle c. m. m. d. c. al numerelor 10890 şi 3542. Observăm că 10890 : 3542 dă câtul 3 şi restul 264; prin urmare trebue să căutăm pe c. m. m. d. c. al numerelor 3542 şi 264.

3542 : 264 dă câtul 13 şi restul 110; 264 : 110 dă câtul 2 şi restul 44; 110 : 44 dă câtul 2 şi restul 22; 44 : 22 dă câtul 2 şi restul 0. Prin urmare 22 e c. m. m. d. c. al numerelor 10890 şi 3542.

In practică aceste împărţiri succesive se aşează în modul următor:

	3	13	2	2	2
10890	3542	264	110	44	22
10626	902	44	22	0	
264	792				
	110				

OBSERVARE. Din calcularea celui mai mare divizor comun D, a două numere, prin împărţiri succesive, rezultă următoarele proprietăţi (analoage cu ale *restului* unei împărţiri):

1⁰. Orice divizor comun al numerelor a şi b este şi un divizor al lui D [64, 3].

2⁰. Când înmulţim (sau împărţim) numerele a şi b cu un acelaş număr m, şi D se înmulţeşte (sau se împarte) cu m [60, 4].

In particular, dacă împărţim pe a şi b cu D, c. m. m. d. c. al câturilor $a : D = a'$, $b : D = b'$ este $D : D = 1$. Prin urmare câturile a' şi b' sunt *prime între ele.*

70. C. m. m. d. c. al mai multor numere: a, b, c, d. Căutăm pe c. m. m. d. c. al numerelor a şi b; fie D_1. Apoi pe c. m. m. d. c. al numerelor D_1 şi c; fie D_2. Apoi pe c. m. m. d. c. al numerelor D_2 şi d; fie D_3. *C. m. m. d. c. al numerelor* a, b, c, d *este* $D = D_3$.

In adevăr dacă D_3 divide pe d şi pe D_2, divide şi pe multiplii lui D_2, pe D_1 şi pe c; divide dar şi pe multiplii lui D_1, pe a şi b [64, 2]. Prin urmare D_3 *este un divizor comun* al numerelor a, b, c, d. Vrem să arătăm că e şi *cel mai mare.*

Dacă ar există, pentru numerele a, b, c, d, un divizor comun $D > D_3$, D ar fi divizor comun şi pentru numerele D_1 (c. m. m. d. c. al lui a şi b [69, 1]), D_2 (c. m. m. d. c. al lui D_1 şi c) şi D_3 (c. m. m. d. c. al lui D_2 şi d); prin urmare $D > D_3$ ar fi un divizor al lui D_3, rezultat evident absurd.

Dacă $D = 1$, numerele a, b, c, d se zic *prime între ele.*

Numerele se zic *prime între ele două câte două,* când *două oricare dintre aceste numere,* n'au alt divizor comun decât pe 1.

71. Multiplu comun. Dacă M este un multiplu și al lui a și al lui b, zicem că M este un *multiplu comun* al numerelor a și b. In acest caz avem [63]:

$$M = pa = qb \quad (p \text{ și } q \text{ întregi}).$$

EXEMPLU: 70 e un multiplu comun al numerelor 7 și 5 fiindcă avem

$$70 = 10 \times 7 = 14 \times 5.$$

OBSERVARE. In particular produsul ab este un multiplu comun al numerelor a și b. Astfel $35 = 7 \times 5$ este un multiplu comun al numerelor 7 și 5.

Dacă M este un multiplu comun al numerelor a și b, și produsul nM este un multiplu comun al acestor numere, oricare ar fi n întreg. Deci șirul multiplilor comuni a două numere:

$$(\mu) \qquad M,\ 2M,\ 3M,\ \ldots,\ nM,\ (n+1)M,\ \ldots$$

este *nemărginit* spre dreapta. Dar spre stânga?

72. Cel mai mic multiplu comun (c. m. m. m. c.). Dacă a e mai mare decât b, *niciun multiplu comun al numerelor a și b nu poate fi mai mic decât a*. Există deci la stânga șirului (μ) un număr $m \geq a$, care este mai mic decât toate numerele din acest șir; m este *cel mai mic multiplu comun* (*c. m. m. m. c.*) al numerelor a și b.

In acelaș fel se definește un multiplu comun al mai multor numere a, b, c și se vede că există un număr m, care este *cel mai mic multiplu comun* al acestor numere. Dacă $a > b > c$, trebue să avem $m \geqslant a$.

73. Numere prime. Orice număr N, care nu e divizibil decât prin el însuși și prin unitate, se numește *număr prim*. De exemplu: 7, 11, 23.

Dacă numărul N mai are și alți divizori, afară de N și de 1, zicem că N este *neprim*.

EXEMPLU: 15 este neprim, fiindcă are ca divizori pe 3 și 5.

Pentru a obține *numerele prime* e deajuns să tăiem din șirul

$$(N) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots$$

toate numerele din 2 în 2, începând dela $2^2 = 4$; apoi toate numerele din 3 în 3, începând dela $3^2 = 9$ și așa mai departe.

Obținem astfel *șirul numerelor prime* (¹):

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, ...

Oricât de mare ar fi un număr A, *există numere prime mai mari decât A*. De aceea se zice că șirul numerelor prime este *nemărginit* (spre dreapta).

(¹) TABLA II dela sfârșitul volumului.

74. Teoreme. 1°. *Orice număr a neprim are cel puţin un divizor prim.* In adevăr d, cel mai mic divizor $\neq 1$ al lui a, e *prim*.

Dacă d n'ar fi prim, ar admite un divizor d_1; dar atunci şi a ar admite divizorul $d_1 < d$ [64,2], ceeace e contrar cu ipoteza că d e cel mai mic divizor al lui a.

2°. Două numere a şi b *neprime între ele* au cel puţin un divizor comun *prim*.

Se arată, ca mai sus, că d, cel mai mic divizor comun $\neq 1$ al numerelor a şi b, este *prim*.

3°. *Orice număr N neprim se poate descompune într'un produs de factori primi.*

In adevăr dacă a e cel mai mic divizor $\neq 1$ al lui N, a e prim şi avem $N = aQ$. Dacă Q e prim, teorema e demonstrată. Dacă Q nu e prim, admite şi el un divizor prim b şi avem $Q = bQ_1$, deci $N = abQ_1$. Operaţia aceasta, care nu se poate prelungì la infinit, nu se poate termină decât când am ajuns la un cât Q_n *prim*. Atunci N este descompus într'un produs de *factori primi*.

Această descompunere nu se poate face decât într'un singur fel.

Raţionamentul făcut nu exclude cazul ca doi sau mai mulţi factori primi să fie *egali* între ei. De exemplu, dacă $a = b$, în loc de produsul ab avem a^2.

In general găsim pentru N un produs de forma

$$N = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda,$$

unde $a, b, \dots, l$ sunt *factori primi*, iar $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sunt numere întregi $\geqq 1$.

EXEMPLU. $3600 = 36 \times 100 = 4 \times 9 \times 4 \times 25 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$.

OBSERVARE. Dacă N conţine factorul a^α, el conţine ca factor şi pe a^n, pentru $n = 1, 2, \dots, \alpha - 1$.

Astfel $48 = 2^4 \times 3$ are ca factor şi pe 2^3 şi pe 2^2 şi pe 2, fiindcă avem

$$48 = 2^3 \times 6 = 2^2 \times 12 = 2 \times 24.$$

IV. — NUMERE RAŢIONALE.

75. Fracţii ordinare. Dacă a şi b sunt două numere *întregi* şi *pozitive* $(a > b)$ şi dacă

$$a : b = c \quad \text{(cât exact)}, \tag{26}$$

c este a b-a parte a lui a şi avem

$$a = b \times c. \tag{27}$$

Dar dacă a ($>b$) nu e divizibil prin b sau dacă a e mai mic decât b?

In aceste cazuri, în şirul numerelor întregi nu există niciun număr c, care să satisfacă la egalitatea (27). Pentru a da un sens noţiunei de *cât exact* şi în aceste cazuri, trebue să întroducem în aritmetică *numere noi.*

Să observăm că problema împărţirii exacte se poate rezolvà întotdeauna pe cale geometrică. De exemplu, pentru $5:3$ câtul exact trebue să reprezinte *a treia parte* a lui 5 [57].

Să luăm o lungime AB (*fig.* 20) egală cu 5 unităţi şi să împărţim fiecare unitate în 3 părţi *egale.* Una din aceste părţi AV este *o treime*;

Fig. 20.

lungimea AB conţine 15 treimi şi a treia parte din AB = 15 *treimi* este AC = 5 *treimi* (cât exact).

O treime este o *unitate fracţionară* şi se scrie $\frac{1}{3}$; 5 treimi este un *număr fracţionar* sau o *fracţie ordinară* [8] şi se scrie $\frac{5}{3}$.

Introducând numerele fracţionare avem dar egalitatea

$$5:3=\frac{5}{3} \quad (5 \textit{ treimi} \text{ sau } 5 \textit{ pe } 3) \tag{28}$$

şi în general

$$a:b=\frac{a}{b} \quad (a \text{ pe } b). \tag{XIII}$$

Câtul exact al împărţirii $a:b$ se mai numeşte şi *raportul* dintre a şi b. Egalitatea (XIII) ne arată că *raportul dintre numerele a şi b este fracţia ordinară $\frac{a}{b}$.*

Observare. Din definiţia fracţiilor ordinare rezultă că:

1°. Dintre două fracţii, care au *acelaş numitor, aceea este mai mare,* care are *numărătorul mai mare.*

2°. Dintre două fracţii, care au *acelaş numărător,* aceea este *mai mare,* care are *numitorul mai mic.*

76. Fracţii algebrice. Dacă a şi b sunt două numere algebrice, cu valorile absolute A şi B respectiv, vom zice că

$$\frac{a}{b} = + \frac{A}{B} \quad \text{dacă } a \text{ şi } b \text{ au } \textit{aceleaşi semne};$$

$$\frac{a}{b} = - \frac{A}{B} \quad \text{dacă } a \text{ şi } b \text{ au } \textit{semne contrarii}.$$

Avem dar două feluri de fracţii algebrice: *pozitive* şi *negative*.

Orice fracţie algebrică poate fi considerată întotdeauna *cu numitorul pozitiv*. In adevăr putem scrie

$$\text{(XIV)} \qquad \frac{-A}{-B} = \frac{+A}{+B} = \frac{A}{B}, \qquad \frac{+A}{-B} = \frac{-A}{+B}.$$

Observare. Aplicând regula semnelor dela împărţirea numerelor algebrice [58], vedem că, în general, oricare ar fi numerele *algebrice* a şi b, avem

$$\frac{+a}{+b} = + \frac{a}{b}, \quad \frac{+a}{-b} = - \frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{+b} = - \frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = + \frac{a}{b}.$$

Prin urmare *raportul* (câtul exact) dintre două numere algebrice a şi b este *fracţia ordinară* algebrică $\frac{a}{b}$.

Numerele a şi b se numesc *termenii* raportului; a e *numărătorul*, b e *numitorul* şi avem în valoare absolută şi în semn

$$(29) \qquad a:b = \frac{a}{b} \quad \text{şi} \quad b \times \frac{a}{b} = a.$$

In particular putem scrie

$$(30) \qquad a:1 = \frac{a}{1} = a.$$

Regulă. *Orice număr întreg se poate scrie sub formă de fracţie ordinară, dacă-i punem numitorul* 1.

77. Şiruri de fracţii. Din şirul I al numerelor întregi algebrice [27].

$$(I) \qquad \ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

împărţind fiecare număr cu m (întreg şi pozitiv) formăm şirul

$$(F_m) \quad \ldots, -\frac{n}{m}, \ldots, -\frac{2}{m}, -\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{n}{m}, \ldots$$

care conţine toate fracţiile cu numitorul m.

Relațiile de neegalitate se extind la fracțiile algebrice în modul următor: Dacă $\frac{a}{m}$ și $\frac{b}{m}$ sunt două numere algebrice din șirul F_m, vom zice că

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m} \quad \text{dacă} \quad a > b.$$

Astfel șirul F_m este *ordonat* în mod *crescător*.

Pentru $n = pm$, oricare ar fi p întreg, avem

$$\frac{n}{m} = \frac{pm}{m} = p.$$

Șirul F_m conține dar, din m în m, toate numerele *întregi* algebrice.

78. Corespondența dintre fracții și puncte. Pe o axă Δ, cu sensul pozitiv spre dreapta (*fig.* 21), să luăm un punct O ca *origine* și o lungime OU ca *unitate întreagă*.

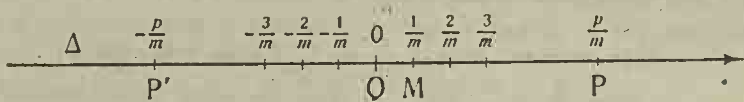


Fig. 21.

Unitatea fracționară $\frac{1}{m}$ este lungimea

$$\text{OM} = \text{a } m\text{-a parte din OU}.$$

Să presupunem axa Δ divizată cu diviziuni egale cu OM dela O *spre dreapta* și delă O *spre stânga*. Dacă P și P′ sunt punctele de diviziune, pentru care segmentele $\overline{\text{OP}}$ spre dreapta și $\overline{\text{OP}'}$ spre stânga conțin câte p diviziuni, vom zice că *abscisa punctului* P *este* $+\frac{p}{m}$ și *abscisa punctului* P′ *este* $-\frac{p}{m}$.

Scriind în dreptul fiecărui punct P abscisa lui, stabilim astfel o corespondență univocă între punctele de diviziune și între numerele fracționare din șirul F_m.

EXEMPLU. Luând diviziunile OV = OU : 5, unitatea fracționară este *o cincime* și toate numerele corespunzătoare acestor diviziuni sunt fracțiile din șirul

$$(F_5) \qquad \ldots, -\frac{n}{5}, \ldots, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{n}{5}, \ldots$$

care pot fi presupuse scrise pe axa Δ (*fig.* 22) în dreptul punctelor de diviziune corespunzătoare.

Dacă $\overline{OP} = 13$ *cincimi*, în loc de punctul P vom zice punctul $\frac{13}{5}$.

OBSERVARE. Pe figura 24 vedem că fracţiile $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ sunt *mai mici* decât unitatea întreagă $\overline{OU}$; $\frac{5}{5}$ este egală cu $\overline{OU} = 1$; $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, ... sunt *mai mari* decât $\overline{OU}$, deci *mai mari* decât 1.

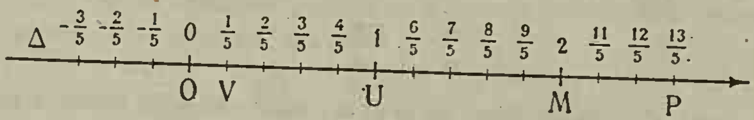


Fig. 22.

Pentru o fracţie *cu termeni pozitivi* $\frac{n}{m}$ se pot prezentà următoarele cazuri:

dacă $n < m$ avem $\frac{n}{m} < 1$ fracţie *subunitară*;

dacă $n = m$ avem $\frac{n}{m} = 1$ fracţie *echiunitară*;

dacă $n > m$ avem $\frac{n}{m} > 1$ fracţie *supraunitară*;

dacă $n = pm$ avem $\frac{n}{m} = p$ număr *întreg*.

Această regulă *nu se aplică la fracţiile algebrice*. De exemplu, din $+3 > -5$ nu rezultă $\frac{+3}{-5} > 1$ [62, 2].

O fracţie *subunitară* se mai zice şi fracţie *proprie*; toate celelalte feluri de fracţii sunt fracţii *improprii*.

79. *Orice fracţie improprie conţine întregi*, adică unităţile fracţionare din ea formează una sau mai multe *unităţi întregi*.

EXEMPLU. Să luăm fracţia $\frac{13}{5}$. Fiindcă un întreg are 5 cincimi, în 13 cincimi vor fi atâţia întregi de câte ori 5 se cuprinde în 13; dar

$$13 = 2 \times 5 + 3,$$

deci în 13 cincimi avem 2 *întregi* şi 3 *cincimi* şi scriem

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}.$$

Numărul $2 + \frac{3}{5}$, care se mai scrie şi $2\frac{3}{5}$ se numeşte *număr mixt*.

REGULĂ. *Ca să aflăm câți întregi sunt cuprinși într'o fracție improprie, împărțim numărătorul prin numitor.*

Intregii din fracția $\frac{a}{b}$ se scriu uneori cu notația $E\left(\frac{a}{b}\right)$.

O fracție *improprie*, dacă nu e egală cu un număr întreg, este suma unui număr *întreg* cu o fracție *proprie*.

In adevăr, dacă $a > b$ și dacă $a:b$ dă câtul c și restul $r < b$, avem

$$a = b \times c + r \quad \text{și} \quad \frac{a}{b} = c + \frac{r}{b},$$

unde c e un *număr întreg*, iar $\frac{r}{b}$ o *fracție proprie*.

OBSERVARE. Câtul împărțirii $13:5$ după definiția I [57] este *raportul* $\frac{13}{5}$ câtul aceleași împărțiri după definiția II [57] este *numărul întreg* $E\left(\frac{13}{5}\right)$ sau 2.

80. Legile fracțiilor ordinare. Din definițiile fracțiilor rezultă următoarele *legi* pentru *fracțiile ordinare pozitive* (1):

1⁰. Dacă *înmulțim numărătorul* (sau *împărțim numitorul*) unei fracții cu un număr n (întreg și pozitiv), *fracția se face de n ori mai mare.*

EXEMPLU. Dacă în loc de $\frac{3}{7}$ și $\frac{5}{18}$ luăm $\frac{15}{7}$ și $\frac{5}{9}$, avem

$$\frac{15}{7} > \frac{3}{7} \text{ (de 5 ori)}; \quad \frac{5}{9} > \frac{5}{18} \text{ (de 2 ori)}.$$

In adevăr, în neegalitatea întâia, fracția a doua conține 3 șeptimi, iar întâia conține 15 șeptimi, adică de 5 ori mai mult decât a doua. In neegalitatea a doua, fracția a doua conține 5 optsprezecimi, iar întâia 5 noimi și cum noimea e de 2 ori mai mare decât optsprezecimea, fracția întâia e de 2 ori mai mare decât a doua.

2⁰. Dacă *împărțim numărătorul* (sau *înmulțim numitorul*) unei fracții cu n (întreg și pozitiv) *fracția se face de n ori mai mică.*

EXEMPLU. Dacă în loc de $\frac{15}{7}$ și $\frac{5}{9}$ luăm $\frac{3}{7}$ și $\frac{5}{18}$, avem

$$\frac{3}{7} < \frac{15}{7} \text{ (de 5 ori)}; \quad \frac{5}{18} < \frac{5}{9} \text{ (de 2 ori)}.$$

3⁰. *Dacă înmulțim* (sau *împărțim*) *și numărătorul și numitorul unei fracții cu acelaș număr*, schimbăm numai termenii fracției, dar *valoarea fracției rămâne neschimbată.*

In adevăr de câte ori mărim fracția prin înmulțirea numărătorului, tot de atâtea ori o și micșorăm prin înmulțirea numitorului.

(1) Să se compare cu *legile împărțirii exacte* [60, 1, 2 și 3].

EXEMPLU: $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{210}{525}$.

In acest caz zicem că *amplificăm* (sau *simplificăm*) fracţia. Avem dar, oricare ar fi n,

(31) $$\frac{a}{b} = \frac{a.n}{b.n} \quad (\textit{amplificare cu } n).$$

şi, dacă împărţirile se pot face exact,

(32) $$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n} \quad (\textit{simplificare cu } n).$$

OBSERVAREA I. Să nu se confunde *amplificarea* cu *înmulţirea*, nici *simplificarea* cu *împărţirea* fracţiilor.

EXEMPLE: Fracţia

$\frac{6}{10}$ *înmulţită* cu $2 = \frac{6}{10} \times 2 = \frac{12}{10}$ sau $\frac{6}{5} > \frac{6}{10}$ (legea 1°).

$\frac{6}{10}$ *amplificată* cu $2 = \frac{6 \times 2}{10 \times 2} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$ (legea 3°).

$\frac{6}{10}$ *împărţită* cu $2 = \frac{6}{10} : 2 = \frac{3}{10}$ sau $\frac{6}{20} < \frac{6}{10}$ (legea 2°).

$\frac{6}{10}$ *simplificată* cu $2 = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (legea 3°).

OBSERVAREA II. Un *număr întreg* nu poate fi scris (în sistemul zecimal) decât într'un singur fel, pe când o *fracţie ordinară* poate fi scrisă într'o *infinitate* de feluri (simplificând-o, dacă e posibil, sau aplificând-o cu orice număr vrem).

EXEMPLU. Fracţia $\frac{9}{15}$ se mai poate scrie $\frac{3}{5}$ sau $\frac{3n}{5n}$ oricare ar fi n.

81. Fracţie nereductibilă. Când termenii a şi b sunt *primi între ei* [69], fracţia $\frac{a}{b}$ se zice *nereductibilă*.

Orice fracţie, dacă nu e nereductibilă, se poate reduce prin simplificare la o fracţie *egală* nereductibilă.

In adevăr, dacă p e cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b, simplificând fracţia $\frac{a}{b}$ cu p, câturile $a:p = a'$ şi $b:p = b'$ sunt *prime între ele* [69] şi găsim

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad (\text{fracţie nereductibilă}).$$

OBSERVARE. Din tot şirul infinit de fracţii *egale* cu $\frac{a}{b}$, numai o singură fracţie e *nereductibilă*: acea care e scrisă cu termenii cei mai mici.

82. Aducerea fracțiilor la acelaș numitor. Am văzut că prin amplificări sau simplificări putem scrie *aceeaș fracție ordinară* într'o infinitate de feluri. In particular putem să-i punem ca numitor *orice multiplu N al numitorului ei.*

In adevăr, în loc de fracția $\frac{a}{b}$ dacă $N = bn$, putem scrie

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{an}{N}.$$

De aci rezultă că mai multe fracții $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ pot fi scrise toate cu *acelaș numitor*, fără a le schimbà valoarea. Dacă N este un multiplu comun al numitorilor b, d, f și dacă

$$N : b = b', \quad N : d = d', \quad N : f = f';$$

sau

$$N = bb', \quad N = dd', \quad N = ff';$$

avem

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'} = \frac{ab'}{N}, \quad \frac{c}{d} = \frac{cd'}{dd'} = \frac{cd'}{N}, \quad \frac{e}{f} = \frac{ef'}{ff'} = \frac{ef'}{N}.$$

Astfel fracțiile date au fost *aduse la acelaș numitor.* N este un *numitor comun.* Se poate alege ca numitor comun *cel mai mic multiplu comun* al numitorilor fracțiilor date.

REGULĂ pentru aducerea mai multor fracții la *acelaș numitor*:

Operația I. *Alegem un multiplu comun al tuturor numitorilor* fracțiilor date ([1]).

Operația II. Pentru fiecare fracție, *împărțim multiplul comun ales prin numitorul fracției* și *amplificăm fracția cu câtul obținut.*

EXEMPLU. Să se aducă la acelaș numitor fracțiile: $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$.

Operația I. 12 fiind divizibil prin 6 și 3, 12 e un multiplu comun al numitorilor. Operația II. Pentru frac ia întâia: $12 : 6 = 2$, deci $\frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$. Pentru fracția a doua: $12 : 3 = 4$, deci $\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$. Fr cția a treia având numitorul 12 rămâne neschimbată $\frac{7}{12}$. Astfel, în loc de fracțiile date, putem scrie $\frac{10}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{7}{12}$.

83. Compararea fracțiilor. Ca să comparăm două sau mai multe fracții, care n'au acelaș numitor, *le aducem întâi la acelaș numitor* și apoi le comparăm.

([1]) Acesta poate fi sau *produsul tuturor numitorilor*, sau *cel mai mic multiplu comun* al lor, sau orice alt multiplu comun.

Astfel fracţiile $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ se pot scrie

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}; \tag{33}$$

şi comparând noii numărători, vedem că

$$\begin{array}{llll} \text{dacă} & ad > bc & \text{avem} & \frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \\ \text{dacă} & ad = bc & \text{avem} & \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \\ \text{dacă} & ad < bc & \text{avem} & \frac{a}{b} < \frac{c}{d}. \end{array}$$

De aci rezultă că orice şir de fracţii poate fi *ordonat.* E de ajuns să aducem toate fracţiile la acelaş num tor şi să le ordonăm după numărătorii lor.

EXEMPLU. Fiindcă fracţiile $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$ şi $\frac{7}{12}$ [82], sunt egale respectiv cu $\frac{10}{12}$, $\frac{8}{12}$ şi $\frac{7}{12}$ şi fiindcă $\frac{10}{12} > \frac{8}{12} > \frac{7}{12}$, avem $\frac{5}{6} > \frac{2}{3} > \frac{7}{12}$.

84. Teoreme. 1⁰. Dacă avem un şir de fracţii *egale,* fracţia, care are ca numărător *suma numărătorilor* şi ca numitor *suma numitorilor, este egală cu fiecare dintre fracţiile date.*

Să considerăm fracţiile

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} \quad \text{şi} \quad \frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}.$$

Dacă λ e valoarea comună a primelor rapoarte, avem

$$a = b\lambda, \quad a' = b'\lambda, \quad a'' = b''\lambda,$$

şi adunând aceste egalităţi membru cu membru, deducem

$$a + a' + a'' = b\lambda + b'\lambda + b''\lambda = \lambda(b + b' + b'')$$

de unde, împărţind prin $b+b'+b''$, rezultă

$$\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''} = \lambda = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}. \tag{34}$$

Mai general, fiindcă

$$\frac{a}{b} = \frac{pa}{pb}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{qa'}{qb'}, \quad \frac{a''}{b''} = \frac{ra''}{rb''},$$

rezultă că

$$\frac{pa+qa'+ra''}{pb+qb'+rb''} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

oricare ar fi numerele algebrice p, q, r.

2⁰. Dacă avem un şir de fracţii *neegale*, fracţia, care are ca numărător *suma numărătorilor* şi ca numitor *suma numitorilor*, are o valoare *medie*, adică este *mai mare decât cea mai mică* şi *mai mică decât cea mai mare* dintre fracţiile date.

Dacă

$$\frac{a}{b}=\lambda, \quad \frac{a'}{b'}=\mu, \quad \frac{a''}{b''}=\nu, \qquad \lambda<\mu<\nu,$$

avem

$$\lambda=\frac{a}{b}<\nu \quad \text{de unde} \quad b\lambda=a<b\nu$$

$$\lambda<\frac{a'}{b'}<\nu \quad \text{„} \quad \text{„} \quad b'\lambda<a'<b'\nu$$

$$\lambda<\frac{a''}{b''}=\nu \quad \text{„} \quad \text{„} \quad b''\lambda<a''=b''\nu.$$

Adunând membru cu membru ultimele trei neegalităţi, deducem

$$\lambda(b+b'+b'')<a+a'+a''<\nu(b+b'+b'')$$

şi împărţind cu $b+b'+b''$, rezultă

$$\lambda<\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}<\nu$$

adică

$$\frac{a}{b}<\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}<\frac{a''}{b''}. \tag{35}$$

3⁰. Când *adunăm acelaş număr* la ambii termeni ai unei fracţii *fracţia se măreşte dacă e mai mică decât* 1 *şi se micşorează dacă e mai mare decât* 1.

In adevăr fracţia

$$\frac{a+n}{b+n}$$

rezultă din fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{n}{n}$, dacă adunăm numărătorii între ei şi numitorii între ei şi, după teorema 2⁰, ea are o valoare cuprinsă între $\frac{a}{b}$ şi $\frac{n}{n}=1$. Deci

dacă $\frac{a}{b}<1$ avem $\frac{a}{b}<\frac{a+n}{b+n}<\frac{n}{n}$;

dacă $\frac{a}{b}>1$ avem $\frac{a}{b}>\frac{a+n}{b+n}>\frac{n}{n}$.

In amândouă cazurile *fracţia se apropie de unitate.*

4⁰. Când *scădem acelaş număr* din ambii termeni ai unei fracţii, *fracţia se micşorează, dacă e mai mică decât* 1 *şi se măreşte, dacă e mai mare decât* 1.

In adevăr, după teorema 3⁰, fracţia $\frac{a}{b}$ are o valoare cuprinsă între

$$\frac{a-n}{b-n} \quad \text{şi} \quad \frac{n}{n}=1.$$

Deci

$$\text{dacă} \quad \frac{a}{b}<1 \quad \text{avem} \quad \frac{a-n}{b-n}<\frac{a}{b}<\frac{n}{n};$$

$$\text{dacă} \quad \frac{a}{b}>1 \quad \text{avem} \quad \frac{a-n}{b-n}>\frac{a}{b}>\frac{n}{n}.$$

In amândouă cazurile *fracţia se depărtează de unitate.*

85. **Operaţiile cu numere fracţionare** se definesc astfel ca să cuprindă şi să generalizeze operaţiile cu numere întregi.

Operaţiile inverse rezultă din definiţia operaţiilor directe.

1⁰. Adunarea. *Dacă fracţiile au acelaş numitor,* suma lor este o fracţie, care are ca numărător *suma numărătorilor* fracţiilor date şi ca numitor *numitorul lor comun.*

Astfel:

$$\text{(XV)} \qquad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+b+c}{n}.$$

Dacă fracţiile n'au acelaş numitor, *trebue să le aducem întâi la acelaş numitor* [82] şi apoi să le adunăm.

2⁰. Scăderea. *Dacă fracţiile au acelaş numitor,* diferenţa lor este o fracţie, care are ca numărător *diferenţa numărătorilor* fracţiilor date şi ca numitor *numitorul lor comun.*

Astfel:

$$\text{(XVI)} \qquad \frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

In adevăr

$$\frac{a-b}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a-b+b}{n}=\frac{a}{n}.$$

Dacă fracţiile n'au acelaş numitor, *trebue să le aducem întâi la acelaş numitor* şi apoi să le scădem.

3⁰. Inmulţirea. Produsul a două sau mai multe fracţii este o fracţie, care are ca numărător *produsul numărătorilor* şi ca numitor *produsul numitorilor* fracţiilor date.

Astfel:

$$\text{(XVII)} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

OBSERVARE. Fracţia produs se poate simplificà, *înainte de a efectuà înmulţirile,* 1⁰. suprimând orice *factor,* care se găseşte şi la numărător şi la numitor;

2⁰. Impărţind prin acelaş număr *un factor dela numărător* şi *un factor dela numitor* (dacă împărţirile se pot face exact) şi scriind în locul acestor factori câturile căpătate.

EXEMPLU:

$$\frac{14\times 23\times 6\times 15}{2\times 3\times 23\times 10}=\frac{14\times 15}{10}=\frac{14\times 3}{2}=7\times 3=21.$$

4⁰. **Impărţirea.** Ca să împărţim două fracţii ordinare *înmulţim fracţia întâia cu a doua răsturnată.*

Astfel:

(XVIII) $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

In adevăr

$$\frac{ad}{bc}\times\frac{c}{d}=\frac{acd}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

EXEMPLE:

Adunare.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{21}{35}+\frac{10}{35}=\frac{31}{35}.$$

Inmulţire.

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{3\times 2}{5\times 7}=\frac{6}{35}.$$

Scădere.

$$\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}.$$

Impărţire.

$$\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}=\frac{3\times 7}{5\times 2}=\frac{21}{10}.$$

86. **Operaţiile dintre întregi şi fracţii.** Scriind orice număr întreg sub formă de fracţie ordinară (cu numitorul 1), operaţiile dintre întregi şi fracţii se reduc la operaţii între fracţii.

Astfel:

$$a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c},\qquad a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c},$$

$$a-\frac{b}{c}=\frac{a}{1}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c},\qquad a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b},$$

$$\frac{b}{c}:a=\frac{b}{c}:\frac{a}{1}=\frac{b}{c}\times\frac{1}{a}=\frac{b}{ca}.$$

EXEMPLE:

$$5+\frac{2}{3}=\frac{5}{1}+\frac{2}{3}=\frac{15}{3}+\frac{2}{3}=\frac{17}{3},\qquad 5\times\frac{2}{3}=\frac{5}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{1\times 3}=\frac{10}{3},$$

$$5-\frac{2}{3}=\frac{5}{1}-\frac{2}{3}=\frac{15}{3}-\frac{2}{3}=\frac{13}{3},\qquad 5:\frac{2}{3}=\frac{5}{1}:\frac{2}{3}=\frac{5}{1}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2},$$

$$\frac{2}{3}:5=\frac{2}{3}:\frac{5}{1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

Toate regulele operaţiilor cu fracţii ordinare, cuprind în ele regulele date pentru operaţiile cu numere întregi şi păstrează toate legile fundamentale ale acestor operaţii.

Astfel avem:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}=\frac{ac}{bd} \qquad (\textit{comutație}),$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf} \qquad (\textit{distribuție}),$$

$$a:b=\frac{a}{1}:\frac{b}{1}=\frac{a}{1}\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b} \qquad (\textit{raport}).$$

Observări pentru numerele *pozitive*:

1°. Când înmulțim un număr a cu un număr *întreg* n, produsul na este de n ori *mai mare* decât a.

2°. Când înmulțim un număr a cu o *fracție* λ, produsul λa este *mai mare* sau *mai mic* decât a, după cum fracția λ este mai mare sau mai mică decât 1.

3°. Când împărțim un număr a cu un număr *întreg* n, câtul $a:n$ este de n ori *mai mic* decât a.

4°. Când împărțim un număr a cu o *fracție* λ, câtul $a:\lambda$ este *mai mic* sau *mai mare* decât a, după cum fracția λ este mai mare sau mai mică decât 1.

EXEMPLE:

$12\times 3=36$ de 3 ori *mai mare* decât 12 (3 *întreg*).

$12\times\frac{2}{3}=\frac{12\times 2}{3}=8<12$ fiindcă *fracția* $\frac{2}{3}<1$.

$12\times\frac{4}{3}=\frac{12\times 4}{3}=16>12$ fiindcă *fracția* $\frac{4}{3}>1$,

$12:3=4$ de 3 ori *mai mic* decât 12 (3 *întreg*),

$12:\frac{2}{3}=\frac{12\times 3}{2}=18>12$ fiindcă *fracția* $\frac{2}{3}<1$,

$12:\frac{4}{3}=\frac{12\times 3}{4}=9<12$ fiindcă *fracția* $\frac{4}{3}>1$.

87. Fracție din număr. In unele cazuri simple se calculează imediat cât face o *fracție* dintr'un număr. Astfel

$\frac{1}{2}$ (jumătate) din 12 este 6 sau $\frac{1}{2}\times 12=\frac{12}{2}$,

$\frac{1}{3}$ (a treia parte) din 12 este 4 sau $\frac{1}{3}\times 12=\frac{12}{3}$.

In general avem următoarea

Regulă. *Ca să calculăm o fracție dintr'un număr, înmulțim fracția cu numărul.*

EXEMPLU: 2 treimi din 105 $=\frac{2}{3}\times 105=\frac{210}{3}=70$.

In adevăr,

$$1 \text{ treime din } 105 \text{ este } \frac{105}{3},$$

$$2 \text{ treimi din } 105 \text{ este } 2 \times \frac{105}{3} = \frac{2}{3} \times 105 = 70.$$

88. Fracţii zecimale. O fracţie ordinară, care are ca numitor o putere de-a lui 10 ([1]), se numeşte fracţie *zecimală* şi se scrie ca *număr zecimal* [9].

EXEMPLE:

$$\frac{375}{100} = 3,75\,; \quad \frac{48}{10000} = 0,0048.$$

Invers, putem trece dela un număr zecimal la fracţia ordinară corespunzătoare:

REGULĂ. *Ca să scriem un număr zecimal sub formă de fracţie ordinară* punem ca numărător *numărul zecimal fără virgula zecimală*, iar ca numitor 1 *urmat de atâtea zeruri, câte cifre zecimale are numărul zecimal.*

EXEMPLE:

$$3,75 = \frac{375}{100} = \frac{15}{4}\,; \quad 0,0048 = \frac{48}{10000} = \frac{3}{625}.$$

Orice *număr întreg* se poate scrie ca număr *zecimal*, dacă-i punem oricâte *zeruri* vrem ca cifre zecimale. Astfel: 54 = 54,000.

89. Compararea fracţiilor zecimale se face mai uşor decât a fracţiilor ordinare:

1⁰. Dintre două numere zecimale, care au *părţile întregi diferite*, acela este mai mare, care are partea întreagă mai mare.

2⁰. Pentru două numere zecimale, care au *aceeaş parte întreagă*, comparăm cifrele zecimale, care reprezintă *unităţi de acelaş ordin*, începând dela virgula zecimală spre dreapta. Dacă *primele cifre diferite*, dela aceste numere, sunt cifrele zecimale de ordin n, acel număr este mai mare, care are cifra zecimală de ordin n mai mare.

EXEMPLE: 405,03 > 404,9875 fiindcă 405 > 404; 3,7195 > 3,718954 fiindcă primele cifre zecimale diferite la aceste două numere sunt *miimile* 9 şi 8 şi cifra miimilor e mai mare la numărul întâi decât la al doilea.

90. Valori apropiate. Uneori în calcule nu putem sau nu trebue să ţinem seama de toate cifrele zecimale ale unui număr. De exemplu, dacă dintr'un calcul am căpătat ca rezultat suma 27,6341 *lei*, o scriem numai cu două cifre zecimale: 27,63 sau 27,64.

([1]) Adică 10, 100, 1000, etc.

Avem

$$27{,}63 < 27{,}6341 < 27{,}64$$

şi diferenţele dintre valoarea exactă şi valorile luate sunt

$$27{,}6341 - 27{,}63 = 0{,}0041 < 0{,}01,$$
$$27{,}64 - 27{,}6341 = 0{,}0059 < 0{,}01.$$

De aceea numerele 27,63 şi 27,64 se zic valorile *apropiate* ale sumei 27,6341 *cu aproximaţie mai mică decât* 0,01 (*o sutime*); 27,63 e apropiat *prin lipsă*, iar 27,64 e apropiat *prin exces* (sau *prin adaos*).

OBSERVARE. Dacă 3,4 e valoarea *exactă* a unui număr zecimal, putem scrie indiferent 3,4 sau 3,40 sau 3,400, ...

Nu e acelaş lucru pentru valorile *apropiate*: când scriem 3,4, cunoaştem numai prima cifră zecimală exactă (aproximaţie $< 0{,}1$); când scriem 3,400, cunoaştem primele 3 cifre zecimale ale numărului (aproximaţie $< 0{,}001$).

91. Legile numerelor zecimale.

1°. Dacă mutăm virgula zecimală după n cifre *spre dreapta*, numărul zecimal se face *de* 10^n *ori mai mare* sau *se înmulţeşte cu* 10^n.

2°. Dacă mutăm virgula zecimală după n cifre *spre stânga*, numărul zecimal se face *de* 10^n *ori mai mic* sau *se împarte cu* 10^n.

In adevăr, astfel mărim sau micşorăm de 10^n ori valoarea unităţilor reprezentate de fiecare cifră [9].

EXEMPLE: $3{,}1752 \times 100 = 317{,}52$; $317{,}52 : 10 = 31{,}752$.

OBSERVARE. Cum orice număr întreg poate fi scris ca număr zecimal [88], aceste legi sunt adevărate şi pentru numerele întregi.

EXEMPLE: $57 = 57{,}000$; $57 \times 1000 = 57000$; $57 : 1000 = 0{,}057$.

92. Operaţiile cu numere zecimale. 1°. A d u n a r e a şi s c ă d e r e a numerelor zecimale se fac ca şi la numerele întregi. In scris, virgulele zecimale vin unele sub altele. Dacă e nevoe, mai ales la scădere, se complectează cifrele zecimale cu *zeruri*, pentru ca toate numerele să aibă totatâtea cifre zecimale (1).

2°. REGULĂ pentru î n m u l ţ i r e a numerelor zecimale:

O p e r a ţ i a I. *Suprimăm toate virgulele zecimale şi înmulţim numerele întregi rămase.*

O p e r a ţ i a II. *Despărţim la produs atâtea cifre zecimale, câte au avut toate numerele date.*

EXEMPLU. $5{,}72 \times 3{,}4$.

O p e r a ţ i a I: $572 \times 34 = 19448$; o p e r a ţ i a II: 19,448 (3 zecimale).

(1) Prin aceasta aducem, de fapt, fracţiile *la acelaş numitor*.

Regula rezultă din înmulţirea fracţiilor ordinare:

$$5{,}72 \times 3{,}4 = \frac{572}{100} \times \frac{34}{10} = \frac{19448}{1000} = 19{,}448.$$

3⁰. REGULĂ pentru împărţirea unui număr zecimal printr'un număr *întreg*:

Operaţia I. Impărţim *partea întreagă* a deîmpărţitului prin împărţitor; obţinem astfel *partea întreagă a câtului* (care poate fi şi *zero*).

Operaţia II. Punem virgula zecimală la cât şi continuăm împărţirea ca la numerele întregi, scoborînd la rest *câte una* toate cifrele zecimale dela deîmpărţit. *Pentru fiecare cifră zecimală scoborîtă la rest, trebue să scriem câte o cifră zecimală de acelaş ordin la cât.*

Dacă împărţirea nu se face exact, putem calculà câtul *cu aproximaţie* (cu n cifre zecimale), deoarece putem scrie deîmpărţitul cu oricâte cifre zecimale vrem, adăogându-i *zeruri* la dreapta părţii zecimale, dacă e nevoe.

Restul împărţirii reprezintă unităţi *de ordinul ultimei cifre zecimale* scoborîte la rest *dela deîmpărţit* sau de ordinul *ultimei cifre zecimale aflate la cât.*

OBSERVARE. Aceeaş regulă se aplică pentru calcularea câtului cu aproximaţie şi când deîmpărţitul e număr *întreg*, deoarece îl putem scrie ca număr zecimal, cu oricâte cifre zecimale vrem [88].

EXEMPLU.

336,218	24	Deîmpărţitul luat: 336,218000,
96	14,009083	Restul adevărat: 0,000008.
0 218		Verificare:
200		$14{,}009083 \times 24 = 336{,}217992$
80		$+\ 0{,}000008$
8		$336{,}218000.$

In adevăr, dacă vrem să avem la cât *milionimi*, trebue să exprimăm deîmpărţitul în milionimi şi avem:

336218000 milionimi : 24 = 14009083 milionimi
rest: 8 milionimi.

4⁰. REGULĂ pentru împărţirea unui număr zecimal printr'un număr *cu p cifre zecimale*:

Operaţia I. Suprimăm virgula zecimală dela împărţitor şi mutăm virgula zecimală la deîmpărţit după p cifre zecimale spre dreapta (adică înmulţim şi deîmpărţitul şi împărţitorul cu 10^p) [91, 1].

Operaţia II. Impărţitorul devenind număr *întreg*, efectuăm împărţirea ca în cazul precedent [92, 3].

Prin operaţia I *câtul nu se schimbă*, iar restul se înmulţeşte cu 10^p; prin urmare *restul* împărţirii este restul dat de operaţia II *împărţit cu* 10^p [60, 4].

EXEMPLU. 203,7852 : 5,29.

Operaţia I: Inmulţim amândouă numerele cu 100.

Operaţia II: Efectuăm împărţirea

20378,52	529	Câtul adevărat: 38,52,
4508	38,52	Restul aflat: 1,44 [după 92, 3].
2765		Restul adevărat: 1,44 : 100 = 0,0144.
1202		Verificare: 38,52 × 5,29 = 203,7708
144		+ 0,0144
		203,7852.

93. Transformarea fracţiilor. Am văzut că orice fracţie zecimală se poate scrie sub formă de fracţie ordinară [88].

Invers: Orice *fracţie ordinară* $\frac{a}{b}$ se poate scrie ca fracţie *zecimală.*

In adevăr, fiindcă

$$\frac{a}{b} = a:b = c \qquad \text{(cât exact)},$$

problema se reduce la a calculà câtul c cu toate cifrele zecimale, care rezultă din această împărţire.

REGULĂ. *Ca să transformăm o fracţie ordinară în fracţie zecimală, împărţim numărătorul prin numitor.*

Distingem două cazuri:

1⁰. Dacă ajungem la un rest *nul*, împărţirea ne dă o fracţie zecimală *exactă.*

2⁰. Dacă niciun rest nu e nul, împărţirea poate fi continuată *la infinit.* In acest caz căpătăm o fracţie zecimală *cu o infinitate de cifre zecimale,* dar *o aceeaş grupă de cifre zecimale se reproduce la cât necontenit.* Grupa, care se repetă, se numeşte *perioadă* şi fracţia zecimală obţinută se numeşte fracţie zecimală *periodică.*

Dacă perioada sau *partea periodică* începe îndată după virgula zecimală, fracţia se zice *periodică simplă*; dacă, după virgula zecimală, vine întâi o parte care nu se repetă şi apoi începe partea periodică, fracţia se zice *periodică mixtă.*

EXEMPLE:

$$\frac{5}{8} = 5:8 = 0,625 \qquad \text{(fracţie zecimală exactă)},$$

$$\frac{9}{11} = 9:11 = 0,818181\ldots \qquad \text{(fracţie periodică simplă)},$$

$$\frac{5}{22} = 5:22 = 0,2272727\ldots \qquad \text{(fracţie periodică mixtă)}.$$

OBSERVARE. Fracţia zecimală egală cu $\frac{a}{b}$, dacă nu e exactă, *trebue să fie periodică,* pentrucă resturile succesive ale împărţirii $a:b$ fiind toate întregi şi mai mici decât b, nu pot fi decât cel mult b numere *diferite.* Dacă împărţirea continuă, trebue dar să se repete unul din resturile obţinute şi atunci şi cifrele dela cât încep să se repete.

94. Operaţiile cu fracţii algebrice. Toate regulele date în paragrafele precedente, pentru operaţiile *algebrice* cu numere întregi, se aplică şi la operaţiile algebrice cu fracţii ordinare sau zecimale. Numai pentru calculele *aritmetice* vom ţine seamă de regulele *speciale* date pentru fiecare fel de numere în parte.

EXEMPLE: $0{,}58 - 3{,}007 = -(3{,}007 - 0{,}58) = -2{,}427,$

$$(+2{,}4) \times (-1{,}05) \times (-0{,}6) = +(2{,}4 \times 1{,}05 \times 0{,}6) = 1{,}312,$$

$$\left(+\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{7} - \frac{3}{5} = \frac{10}{35} - \frac{21}{35} = -\frac{11}{35},$$

$$\left(+\frac{2}{7}\right) : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\left(\frac{2}{7} : \frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = -\frac{10}{21},$$

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{11} + \frac{7}{12} - \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{12}\right) - \left(\frac{2}{11} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{12} + \frac{7}{12}\right) - \left(\frac{12}{66} + \frac{22}{66} + \frac{55}{66}\right)$$

$$= \frac{10}{12} - \frac{89}{66} = \frac{110}{132} - \frac{178}{132} = -\frac{68}{132} = -\frac{17}{33}$$

95. Fracţii generalizate. Numim astfel o expresie scrisă *sub formă de fracţie ordinară*, dar care are ca numărător şi ca numitor orice expresie algebrică.

EXEMPLE:

$$\frac{0{,}73}{1 - \frac{5}{3}}, \quad \frac{\frac{a}{b} - 3c}{m^2 + \frac{p}{q}}, \quad \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{5x+1}{-2}}.$$

REGULĂ. *Valoarea unei fracţii generalizate* se calculează astfel:

Operaţia I. Calculăm separat valoarea *numărătorului* şi valoarea *numitorului* fracţiei, reducând aceşti termeni la numere întregi, la fracţii ordinare sau zecimale.

Operaţia II. Facem împărţirea numărătorului prin numitor.

EXEMPLE:

$\dfrac{0{,}73}{1 - \frac{5}{3}}$ Operaţia I. Numărătorul: $0{,}73$; Numitorul: $1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$.

Operaţia II. $-\dfrac{0{,}73}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{0{,}73 \times 3}{2} = -\dfrac{2{,}19}{2} = -1{,}095.$

$\dfrac{\frac{a}{b} - 3c}{m^2 + \frac{p}{q}}$; Numărătorul: $\dfrac{a - 3bc}{b}$; Numitorul: $\dfrac{m^2q + p}{q}$. Fracţia: $\dfrac{(a - 3bc)q}{(m^2q + p)b}$.

Inversul unui număr λ *este numărul* $\frac{1}{\lambda}$ şi avem

$$\lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Inversul unui număr întreg $a = \frac{a}{1}$ este fracţia $\frac{1}{a}$.

Inversa unei fracţii ordinare $\frac{a}{b}$ este fracţia răsturnată $\frac{b}{a}$.

EXEMPLE: Inversul numărului 25 este $\frac{1}{25} = 0{,}04$ [1]. Inversa fracţiei 0,04 sau $\frac{4}{100}$ este $\frac{100}{4} = 25$.

A împărţi pe a cu b însemnează a înmulţi pe a cu *inversul* lui b. In adevăr

$$a:b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

OBSERVARE. Orice *fracţie* se poate scrie sub formă de *produs* şi reciproc. Astfel, orice expresii algebrice ar fi α, β, γ, δ, avem:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \times \frac{1}{\beta}; \qquad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma}; \qquad \alpha \times \beta = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}}.$$

96. Egalităţi şi neegalităţi cu fracţii. Pentru adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea egalităţilor şi a neegalităţilor, care conţin numere fracţionare se aplică aceleaşi regule ca şi pentru egalităţile şi neegalităţile cu numere întregi.

Credem totuşi necesar să facem observările următoare:

1⁰. E g a l i t ă ţ i. Din

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \tag{36}$$

înmulţind cu b ambii membri ai egalităţii, deducem

$$b \times \frac{a}{b} = b \times \frac{c}{d}$$

sau [după 59, 1]

$$a = \frac{bc}{d}. \tag{37}$$

Tot din egalitatea (36) împărţind cu $a \neq 0$, deducem

$$\frac{1}{b} = \frac{c}{ad}.$$

REGULĂ. *Impărţitorul* sau *un factor dela numitorul unui membru al egalităţii* poate fi trecut în celălalt membru ca *înmulţitor* sau ca *factor la numărător* şi reciproc: *înmulţitorul* sau *un factor dela numărătorul unui membru al egalităţii* poate fi tecut în celălalt membru ca *împărţitor* sau ca *factor la numitor.*

---

[1] TABLA III dela sfârşitul volumului ne dă inversele numerelor întregi dela 1 la 100.

EXEMPLE: Din $\frac{7}{2} = 3{,}5$ deducem $7 = 3{,}5 \times 2$;

din $\frac{3 \times 6}{4 \times 5} = \frac{9}{10}$ deducem $\frac{3 \times 6}{5} = \frac{9 \times 4}{10}$;

din $2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$ deducem $2 = \frac{5}{3} : \frac{5}{6}$;

din $\frac{3 \times 6}{4 \times 5} = \frac{9}{10}$ deducem $\frac{3}{4 \times 5} = \frac{9}{10 \times 6}$.

2⁰. Neegalităţi. Din

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \tag{38}$$

înmulţind ambii membri ai neegalităţii cu b, deducem

$$\begin{aligned} a &> \frac{bc}{d} \quad \text{pentru} \quad b > 0, \\ a &< \frac{bc}{d} \quad \text{pentru} \quad b < 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Tot din neegalitatea (38), împărţind cu $a \neq 0$, obţinem

$$\frac{1}{b} > \frac{c}{ad} \quad \text{pentru} \quad a > 0,$$

$$\frac{1}{b} < \frac{c}{ad} \quad \text{pentru} \quad a < 0.$$

Prin urmare aplicăm şi la *neegalităţi* regula precedentă, dar trebue să fim atenţi la *sensul* neegalităţii finale: dacă factorul, care se trece dintr'un membru în celălalt, e *pozitiv*, sensul neegalităţii se *păstrează*; dacă acest factor e *negativ*, sensul neegalităţii *se schimbă*.

EXEMPLU.

Din $\frac{4}{-7} > \frac{(-2) \times 10}{28}$ deducem $\frac{1}{-7} > \frac{(-2) \times 10}{4 \times 28}$;

din $\frac{4}{-7} > \frac{(-2) \times 10}{28}$ deducem $4 < \frac{(-7) \times (-2) \times 10}{28}$.

97. Mulţimea numerelor raţionale. Există *o infinitate de şiruri* de numere fracţionare analoage cu şirul F_m [77]:

(F_1) $\quad \ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

(F_2) $\quad \ldots, -\frac{n}{2}, \ldots, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \ldots, \frac{n}{2}, \ldots$

. . . .

(F_m) $\quad \ldots, -\frac{n}{m}, \ldots, -\frac{2}{m}, -\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{n}{m}, \ldots$

. . . .

Şirurile $F_1, F_2, \ldots, F_m, \ldots$ cuprind *toate numerele întregi şi fracţionare* (ordinare şi zecimale) şi formează la un loc *mulţimea numerelor raţionale* (1).

Să presupunem că, luând o lungime ca unitate întreagă, însemnăm pe o axă Δ

1⁰. toate punctele care corespund la diviziunile 1 (şirul F_1);

2⁰. toate punctele care corespund la diviziunile $\frac{1}{2}$ (şirul F_2);

3⁰. toate punctele care corespund la diviziunile $\frac{1}{3}$ (şirul F_3);

şi aşà mai departe. Obţinem astfel *o infinitate de şiruri de puncte* $F_1, F_2, \ldots, F_m, \ldots$ situate pe axa Δ.

Două sau mai multe puncte din şiruri *diferite* pot fi distincte sau pot coincide.

La fiecare număr raţional $\frac{a}{b}$ (întreg sau fracţionar, pozitiv sau negativ) *corespunde un punct şi unul singur pe axa* Δ.

Reciproca nu e adevărată: *La un punct de pe axa* Δ *sau corespund o infinitate de numere raţionale egale* (2) [80, 3] *sau nu corespunde niciun număr raţional.*

EXEMPLE: La punctul cu abscisa 1 corespund *o infinitate* de numere raţionale egale: $1, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots, \frac{n}{n}, \ldots$.

Din contra, dacă O e originea pe axa Δ şi dacă segmentul OP este *diagonala patratului cu laturea* 1, la punctul P nu corespunde *niciun număr raţional* (3).

Toate punctele, de pe axa Δ, *la care corespund numere raţionale, formează mulţimea punctelor raţionale.*

98. **Şirul numerelor raţionale.** Dacă două numere raţionale λ şi μ sunt *egale*, ele corespund la *acelaş* punct P pe axa Δ (*fig.* 22, pag. 60) şi avem $\lambda = \mu = \overline{OP}$.

Dacă $\lambda > \mu$ şi dacă $\lambda = \overline{OP}$, $\mu = \overline{OQ}$, punctul P se găseşte *la dreapta lui* Q.

Să presupunem că am însemnat pe axa Δ mulţimea tuturor punctelor raţionale şi că am scris în dreptul fiecărui punct raţional numărul raţional corespunzător. Cum la un punct raţional corespund o infinitate de fracţii [96], toate *egale*, vom scrie în dreptul acelui punct fracţia *nereductibilă* corespunzătoare [81].

(1) *Mulţime* = ensemble, aggregato, Menge.
(2) Din şiruri F_i diferite.
(3) Se demonstrează în Geometrie că în acest caz valoarea lungimei $\overline{OP}$ nu e un număr raţional.

Astfel toate fracţiile din şirurile $F_1, F_2, \ldots, F_m, \ldots$ sunt aşezate într'un singur şir *în ordine crescătoare*. Acest şir se numeşte *şirul numerelor raţionale* sau *şirul* F (*fig.* 23).

Observare. Şirul F conţine *toate numerele întregi şi fracţionare* [1].

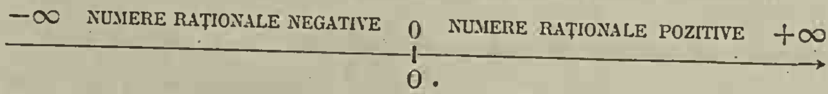


Fig. 23.

Teoremă. *Intre două numere raţionale neegale sunt cuprinse o infinitate de numere raţionale distincte.*

In adevăr fie

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{6}.$$

Fracţia

$$\frac{3+5}{7+6} = \frac{8}{13}$$

este *cuprinsă* între fracţiile date, fiindcă [după 84, 2] avem

$$\frac{3}{7} < \frac{8}{13} < \frac{5}{6}.$$

In acelaş fel găsim că fracţiile

$$\frac{3+8}{7+13} = \frac{11}{20} \quad \text{şi} \quad \frac{8+5}{13+6} = \frac{13}{19}$$

sunt *cuprinse* între fracţiile date, fiindcă avem

$$\frac{3}{7} < \frac{11}{20} < \frac{8}{13} < \frac{13}{19} < \frac{5}{6}$$

şi aşà mai departe.

De aceea zicem că *mulţimea numerelor raţionale* (adică *mulţimea* F) este *densă*.

Observare. Deşi între două puncte raţionale, oricât de apropiate ar fi ele pe axa Δ, se găsesc *o infinitate de alte puncte raţionale*, totuşi se găsesc, pe această axă, şi puncte care *nu sunt raţionale*, adică puncte care *nu fac parte din mulţimea* F.

Corolar. *Oricât de mică ar fi o fracţie cu termeni pozitivi* $\frac{a}{b}$, *există întotdeauna o altă fracţie pozitivă mai mică decât ea.*

---

(1) Dacă o fracţie $\frac{a}{b}$ este *reductibilă*, valoarea ei figurează în şirul F prin fracţia nereductibilă $\frac{a'}{b'}$ egală cu $\frac{a}{b}$. In acest sens zicem că şi fracţia $\frac{a}{b}$ se găseşte în şirul F.

Numerele 0 și $\frac{a}{b}$ fiind raționale, rezultă, după teorema precedentă, că, între ele, se găsesc o infinitate de alte numere raționale.

Demonstrația se poate face și direct.

In adevăr, dacă luăm orice număr $b' > b$, avem

$$0 < \frac{a}{b'} < \frac{a}{b}.$$

Cum există o infinitate de numere b' mai mari decât b, găsim o *infinitate* de fracții $\frac{a}{b'}$ cuprinse între 0 și $\frac{a}{b}$.

In particular putem aveà

$$\frac{a}{b'} < \frac{1}{10^n},$$

oricât de mare ar fi n. E de ajuns să luăm $a.10^n < b'$ sau $b' > a.10^n$

99. Mărimi comensurabile. Două mărimi *de acelaș fel* se pot compară între ele [7]. Ele pot fi *egale* sau *neegale*. O mărime poate fi egală cu *suma* altor mărimi.

Vom zice că o mărime A se cuprinde de n ori *exact* într'o altă mărime B de acelaș fel, dacă mărimea B este egală cu suma á n mărimi egale cu A. In acest caz B *este de* n *ori mai mare decât* A și *măsura lui* B *cu ajutorul lui* A *este* n, ceeace se scrie

(40) $$B = n \times A.$$

sau

(41) $$\text{măs. } B = n \qquad (\text{pentru } A = 1).$$

Dacă mărimea A nu se cuprinde de un număr exact de ori în B, dar dacă există o a treia mărime C, care se cuprinde de a ori în A și de b ori în B, zicem că C este o *măsură comună* pentru mărimile A și B și scriem

(42) $$A = a \times C, \quad B = b \times C$$

sau

(43) $$\text{măs. } A = a, \quad \text{măs. } B = b \qquad (\text{pentru } C = 1).$$

In acest caz mărimile A și B se zic *comensurabile.*

Definiție. *Raportul dintre două mărimi* A și B este raportul dintre *numerele*, care reprezintă *măsurile* acestor mărimi, determinate *cu aceeaș unitate de măsură.*

Raportul dintre mărimile A și B se scrie $\frac{A}{B}$.

Avem dar, pentru egalitățile (43),

(44) $$\frac{A}{B} = \frac{\text{măs. A}}{\text{măs. B}} = \frac{a}{b} \qquad (\text{pentru } C = 1).$$

Dacă în loc de C luăm o altă unitate de măsură, de exemplu $C' = \frac{C}{n}$ (de n ori mai mică), găsim

$$A = n \times a \times C', \qquad B = n \times b \times C'$$

sau

$$\text{măs. A} = n \times a, \qquad \text{măs. B} = n \times b \qquad (\text{pentru } C' = 1),$$

și raportul

(45) $$\frac{A}{B} = \frac{n \times a}{n \times b} = \frac{a}{b} \qquad (\text{pentru } C' = 1).$$

Din egalitățile (44) și (45) rezultă că *valoarea raportului a două mărimi nu depinde de unitatea cu care măsurăm aceste mărimi.*

In particular, dacă alegem pe B ca unitate de măsură, din egalitatea (44) deducem

(46) $$\frac{A}{B} = \text{măs. A} = \frac{a}{b} \qquad (\text{pentru } B = 1).$$

Prin urmare: *valoarea raportului* $\frac{A}{B}$ *este măsura lui* A *cu ajutorul lui* B.

OBSERVARE. Măsura lui B cu ajutorul lui A este $\frac{b}{a}$.

100. Mărimi incomensurabile. Dacă nu există nicio mărime C, care să se cuprindă de un număr exact de ori și în A și în B, mărimile A și B se zic *incomensurabile.*

In acest caz, pentru orice *parte alicotă* a lui B luată ca unitate de măsură, de exemplu pentru $C = \frac{B}{q}$, găsim un număr întreg p, pentru care avem

$$p \times C < A < (p+1) \times C$$

sau

$$p < \text{măs. A} < p+1$$
$$\text{măs. B} = q \qquad (\text{pentru } C = 1).$$

Prin urmare

(47) $$\frac{p}{q} < \frac{\text{măs. A}}{\text{măs. B}} = \frac{A}{B} < \frac{p+1}{q}.$$

In acest caz, *valoarea raportului* $\frac{A}{B}$ sau *măsura lui* A *cu ajutorul lui* B este un număr cuprins între fracţiile $\frac{p}{q}$ şi $\frac{p+1}{q}$. Diferenţa dintre aceste fracţii fiind $\frac{1}{q}$, zicem că fiecare din ele reprezintă măsura lui A (pentru B = 1) *cu aproximaţie mai mică decât* $\frac{1}{q}$; $\frac{p}{q}$ e o măsură apropiată *prin lipsă*, iar $\frac{p+1}{q}$ e o măsură apropiată *prin exces.*

In practică, luând pe q destul de mare, adică unitatea de măsură $\frac{B}{q}$ destul de mică, vom zice că măsura lui A cu ajutorul lui B este $\frac{p}{q}$ sau $\frac{p+1}{q}$.

EXEMPLU. Dacă A este *lungimea unei stofe* şi B *lungimea unui metru* şi dacă nici B, nici $\frac{B}{10}$, nici $\frac{B}{100}$ nu intră de un număr *exact* de ori în A, dar dacă $\frac{B}{100}$ se cuprinde de 345 ori în A şi nu se cuprinde de 346 ori, vom zice că în lungimea A avem 345 *cm.* de stofă (sau 346), fără să ne mai gândim să măsurăm şi diferenţa rămasă cu ajutorul fracţiei mai mici $\frac{B}{1000}$, adică cu *milimetrul.*

101. Unităţi practice de măsură. Pentru măsurarea mărimilor se întrebuinţează unităţi *principale* şi unităţi *secundare: multiplii* (unităţi superioare) şi *submultiplii* (unităţi inferioare) unităţilor principale. Toate aceste feluri de unităţi se deduc, de obicei, unele din altele ca şi unităţile din sistemul zecimal.

In practică avem două feluri de sisteme de măsuri: *sistemul metric* şi *sistemul C. G. S.*

1⁰. Sistemul metric. Unitatea principală pentru *lungimi* este *metrul* (1 m), care e a zecea milioana parte din sfertul meridianului pământesc [1]. Lungimea *metrului-etalon*, construit în platină, se păstrează la biuroul internaţional de greutăţi şi măsuri din Sèvres (Franţa). Avem metri *còpii-etalon* în toate capitalele ţărilor, care au adoptat sistemul metric [2].

Multiplii metrului sunt:

1 *dam* (decametru) = 10 m; 1 *hm* (hectometru) = 100 m;
1 *km* (kilometru) = 1000 m; 1 *Mm* (miriametru) = 10000 m.

Submultiplii metrului sunt:

1 *dm* (decimetru) = 0,1 m; 1 *cm* (centimetru) = 0,01 m;
1 *mm* (milimetru) = 0·001 m; 1 μ (micron) = 0,000001 m.

Multiplii şi submultiplii metrului merg *din zece în zece.*

---

(1) După măsurile a doi învăţaţi francezi: DELAMBRE şi MÉCHAIN. Sistemul metric a fost adoptat în Franţa la 3 Noembrie 1801 sub NAPOLEON I, dar a devenit obligator numai dela 1 Ianuar 1840.

(2) România a adoptat sistemul metric din anul 1884.

Cu decametrul se măsoară drumurile în *km* şi *hm*. Măsura practică e un lanţ sau o panglică lungă de 10 *m*. Aproximaţia e de 1 *dm*.

Cu metrul se măsoară stofele, dimensiunile clădirilor, ale materialelor de construcţie, etc. Aproximaţia e de 1 *cm*.

Cu decimetrul sau dubludecimetrul, divizat în jumătăţi de milimetru, se măsoară dimensiunile pieselor de maşini, ale figurilor dintr'un desemn, etc.

Micronul se întrebuinţează pentru măsurile extrem de delicate din Fizică.

Un grad din meridianul pământesc ([1]) are lungimea de

$$\frac{10000}{90}\ km. = 111{,}111\ldots\ km.$$

In marină se întrebuinţează: *mila marină*, care corespunde la a 60-a parte din grad sau la 1 minut din meridianul pământesc

$$1\ milă = \frac{111{,}111}{60}\ km = 1851{,}85\ m \text{ şi } 1\ leghe = 3\ mile.$$

Iuţeala vapoarelor se exprimă în *noduri*. Un nod însemnează 30 *m* pe minut. Un vapor cu iuţeala de n noduri parcurge $n \times 30 \times 60 = n \times 1800 = n$ mile pe oră.

In Astronomie, pentru distanţele dintre astre, se întrebuinţează ca unitate de lungime *raza medie a Pământului* = 6467 *km* sau *distanţa medie dela Pământ la Soare* = aproape 150 milioane *km*.

Pentru *suprafeţe* şi *volume* nu avem unităţi de măsură etalon. Suprafaţa unei figuri şi volumul unui corp se deduc *prin calcule*, măsurând anumite lungimi şi aplicând formulele date de Geometrie ([2]). Măsurile se exprimă pentru suprafeţe în *metri patraţi* şi pentru volume în *metri cubi* sau în multiplii şi submultiplii acestor unităţi.

1 *mp* (metru patrat) este un patrat cu laturea de 1 *m*.

1 *mc* (metru cub) este un cub cu laturea de 1 *m*.

In acelaş fel se definesc şi unităţile lor secundare. Multiplii şi submultiplii metrului patrat merg *din sută în sută*. Multiplii şi submultiplii metrului cub merg *din mie în mie*.

Pentru măsurarea câmpiilor se ia ca unitate *arul* (1 *a* = 1 *damp*) şi *hectarul* (1 *ha* = 1 *hmp*).

Pentru suprafeţele mari (judeţe, ţări, etc.) se întrebuinţează *kmp*; pentru hărţile geografice şi desemnurile de precizie *mmp*.

Pentru lemne avem *sterul* (1 *st* = 1 *mc*) şi *decasterul* (1 *dast* = 10 *mc*).

Pentru *capacităţi* unitatea de măsură este *litrul*. *Un litru este un decimetru cub*. Multiplii şi submultiplii litrului merg *din zece în zece*.

OBSERVARE. Avem: 1 *kl* = 1 *mc*, 1 *l* = 1 *dmc* şi 1 *ml* = 1 *cmc*.

Pentru *greutăţi* unitatea de măsură e *kilogramul* (1 *kg*), greutate etalon de formă cilindrică depusă la biuroul de greutăţi şi măsuri din Sèvres: *kilogramul e greutatea unui decimetru cub de apă distilată*, cântărită în vid, la temperatura de $+4^0$ C.

([1]) A 90-a parte din sfertul meridianului pământesc.
([2]) V. FORMULELE la sfârşitul volumului.

Unitatea principală este *gramul* ($1\,g$) a mia parte din kilogram. Multiplii şi submultiplii gramului merg *din zece în zece*.

Pentru greutăţile mari se întrebuinţează *quintalul* ($1\,q = 100\,kg$), *tona* ($1\,t = 1000\,kg$) şi *vagonul* ($1\,v = 10000\,kg$).

In laboratoare şi farmacii unitatea de greutate e gramul cu submultiplii lui până la miligram.

Observare. Avem pentru *apă*:

$$(48)\qquad 1\,mc = 1\,t,\quad 1\,dmc = 1\,kg,\quad 1\,cmc = 1\,g,\quad 1\,mmc = 1\,mg.$$

Aceste egalităţi nu sunt adevărate pentru toate corpurile. Totuşi convenim să zicem, în general, că unităţile din fiecare egalitate (48) sunt *unităţi corespunzătoare*.

2⁰. Sistemul C. G. S. In Fizică se întrebuinţează numai trei unităţi de măsură fundamentale: *centimetrul* pentru lungime, *gramul* pentru massă şi *secunda* pentru timp. Acest sistem, care n'are nicio unitate secundară, se numeşte *sistemul C. G. S.* după iniţialele numelor celor trei unităţi, din care e compus.

Când numerele, care rezultă din măsurări, sunt prea mari, se întrebuinţează notaţia prescurtată:

$$10^n = 1000 \ldots. 0 \text{ (1 urmat de } n \text{ zeruri)},$$
$$10^{-n} = 0{,}000 \ldots. 01 \text{ (1 precedat de } n \text{ zeruri)}.$$

Exemple. Distanţa medie dela Pământ la Soare $= 15 \times 10^{12}\,cm$; massa unei molecule de Hidrogen $= 0{,}\underset{1}{0}\underset{2}{0}0\,000 \ldots 0\underset{8}{0}1 = 10^{-24}\,g$.

102. Relaţia dintre volum şi greutate. Raportul dintre greutatea unui corp şi volumul lui, *exprimate în unităţi corespunzătoare* [**101**, 1], se numeşte *densitate*.

Se mai poate zice că *densitatea este greutatea unei unităţi de volum* exprimată în unităţi corespunzătoare.

Exemple. Dacă 25 *cmc* de aur cântăresc 481,5 *g* (centimetrul cub şi gramul fiind unităţi corespunzătoare), densitatea aurului este

$$D = \frac{481{,}5}{25} = \frac{1926}{100} = 19{,}26.$$

Prin urmare 1 *cmc* de aur cântăreşte 19,26 *grame*.

Dacă însemnăm cu V volumul, cu G greutatea şi cu D densitatea unui corp, avem formulele:

$$(\text{XIX})\qquad D = \frac{G}{V},\quad G = VD,\quad V = \frac{G}{D}.$$

Observare. In aceste formule D e un număr *abstract*; greutatea G şi volumul V trebue să fie exprimate în unităţi *corespunzătoare*.

V. — NUMERE COMPLEXE ARITMETICE.

103. Sisteme complexe. Când multiplii și submultiplii unui sistem de unități de măsură nu sunt formați după sistemul zecimal (1); sistemul de măsură este *un sistem complex*, iar numărul, care rezultă din această măsură este un *număr complex* aritmetic [10] (2).

Prin astfel de numere complexe se exprimau măsurile cu *unitățile vechi* din toate țările, înainte de introducerea *sistemului metric*. Sistemul complex se mai păstrează și azi pentru măsurile din Anglia și Rusia, precum și în Geometrie și Astronomie, pentru măsurarea unghiurilor, a arcurilor și a timpului.

1⁰. Unități vechi românești. Diferitele provincii românești fiindcă au aparținut, înainte de unire, la state diferite, au avut și unitățile vechi de măsură *diferite* (3).

Astfel pentru *lungimi* se întrebuință ca unitate principală de măsură *stânjenul*:

In *Ardeal*

$1\ st. = 1{,}90\ m = 6\ urme\ (u), \quad 1\ u = 12\ policari\ (p).$

In *Muntenia*

$1\ st. = 1{,}96\ m = 8\ palme\ (p), \quad 1\ p = 12\ degete\ (d).$

In *Moldova*

$1\ st. = 2{,}23\ m = 8\ palme\ (p), \quad 1\ p = 8\ palmace\ (pc).$

Măsura: 3 stânjeni 5 palme și 9 degete se scrie

$$3\,st\ 5\,p\ 9\,d \qquad (\textit{număr complex}).$$

Un număr complex aritmetic este, de fapt, un număr fracționar ordinar mai complicat. Astfel, fiindcă fiecare deget este *o zecime* din palmă, avem

$$5\,p\ 9\,d = 5 + \frac{9}{10}\ palme$$

și fiindcă fiecare palmă este *o optime* din stânjen, avem

$$3\,st\ 5\,p\ 9\,d = 3 + \frac{5 + \frac{9}{10}}{8}\ stânjeni.$$

2⁰. Unități engleze (4). In Anglia unitatea principală de măsură pentru lungimi este *yardul* (y):

$1\ y = 0{,}914\ m = 3\ picioare\ (f),\ 1\ f = 12\ degete\ (i)$ (5).

(1) Adică nu merg *din zece în zece* sau *din sută în sută*, etc.

(2) Să nu se confunde aceste numere complexe din Aritmetică cu *numerele complexe* sau *imaginare* din Algebră.

(3) V. TABLA IV dela sfârșitul volumului.

(4) V. TABLA V dela sfârșitul volumului.

(5) In limba engleză *feet* (picioare) și *inches* (degete).

Pentru valori unitatea principală e *livra sterling* (*L. st.*) ([1]):

1 *L. st.* = 25.22 lei *aur* = 20 *şilingi* (*s*), 1 *s* = 12 *dinari* (*d*). ([2]).

In loc de 15 livre sterlingi 8 şilingi şi 7 dinari se scrie *L. st.* 15.8.7.

3°. Unităţi pentru arcuri, unghiuri şi timp. Pentru arcuri se întrebuinţează ca unitate principală de măsură *gradul*, care e a 360-a parte din *cerc* şi ca submultiplii: *minutul* şi *secunda*.

1 grad (1^{o}) = 60 *minute*; 1 minut ($1'$) = 60 *secunde* ($60''$).

Unghiurile la centru, corespunzătoare acestor arcuri de cerc, sunt unităţile *cu acelaş nume* pentru *unghiuri*.

Pentru *timp* unitatea de măsură este *ziua* (solară medie):
1 zi = 24 *ore*; 1 oră (1 *h*) = 60 *minute* (*m*); 1 *m* = 60 *secunde* (*s*).

EXEMPLE. Vom scrie dar

15 grade 42 minute şi 25 secunde de *arc*: 15° 42′ 25″,
15 ore 42 minute şi 25 secunde de *timp*: 15 *h* 42 *m* 25 *s*.

104. Transformările numerelor complexe. *Numărul, care ne arată câte unităţi de un ordin formează o unitate de ordin superior*, este *raportul dintre aceste două feluri de unităţi.*

Astfel raportul dintre *zile* şi *ore* este 24; raportul dintre *grade* şi *secunde* este 60 × 60 = 3600.

In toate problemele cu numere complexe intervin două feluri de operaţii: transformarea unor unităţi date în unităţi de ordin *inferior* lor sau în unităţi de ordin *superior*.

1°. Ca să transformăm nişte unităţi date în unităţi de ordin *inferior*, *înmulţim* numărul unităţilor date prin raportul dintre aceste unităţi şi unităţile inferioare cerute.

EXEMPLU: 5 zile câte ore fac? Raportul dintre *zile* şi *ore* e 24 şi 5 × 24 = 120 ore.

2°. Ca să transformăm nişte unităţi date în unităţi de ordin *superior*, *împărţim* numărul unităţilor date prin raportul dintre unităţile superioare cerute şi unităţile date.

EXEMPLU. 1 000 000 secunde câte zile fac? Raportul dintre *zile* şi *secunde* este 86400 şi 1 000 000 *s*: 86400 ne dau 11 zile şi 49600 secunde.

105. Transformarea unui număr complex în număr întreg şi viceversa. 1°. Orice număr complex conţine, în toate unităţile care-l compun, un număr *întreg* de unităţi de ordinul *cel mai mic*.

([1]) In româneşte se zice adesea 1 *liră* in loc de 1 *livră*. Nu există *lire* decât în Italia. In Anglia, în Turcia şi în Egipt unitatea pentru valori este *livra* engleză, turcească sau egipteană.

([2]) In englezeşte: 1 livră sterling = 1 *pound*; 1 şiling = 1 *shilling*; 1 dinar = 1 *penny*.

EXEMPLU. In 45 z 8 h 29 m 14 s avem $45 \times 24 + 8 = 1088$ *ore*; $1088 \times 60 + 29 = 65309$ minute; $65309 \times 60 + 14 = 3918554$ secunde.

REGULĂ. Ca să transformăm un număr *complex* în număr *întreg, transformăm*, prin *înmulţiri* şi *adunări* succesive, *unităţile de ordinul cel mai înalt în unităţi de ordin imediat inferior*; apoi *toate unităţile de acest ordin în unităţi de ordin imediat inferior lor* şi aşà mai departe până ce ajungem la unităţile de ordinul *cel mai mic*, care se găsesc în numărul complex dat.

2°. Uneori ni se dă *un număr întreg de unităţi de acelaş ordin* şi vrem să ştim *câte unităţi de ordine superioare* se găsesc în el.

E problema inversă celei precedente. In acest caz va trebuì să facem un şir de împărţiri [104, 2].

EXEMPLU. In 3 918 554 secunde găsim prin împărţiri succesive:

3918554 : 60 = 65309 *minute* şi un rest de 14 s;
în 65209 m avem 65309 : 60 = 1088 *ore* şi un rest de 29 m;
în 1088 h avem 1089 : 24 = 45 *zile* şi un rest de 8 h.

In practică aceste operaţii se aşează în modul următor:

```
3918554 s | 60
 318      |--------
  185     | 65309 m | 60
   554       530    |--------
    14 s      509   | 1088 h | 24
               29 m    128   |------
                         8 h | 45 z
```

Deci 3 918 554 secunde = 45 zile 8 ore 29 minute 14 secunde.

REGULĂ. Ca să transformăm un număr *întreg* în număr *complex* căutăm, prin *împărţiri* succesive, în unităţile date *câte unităţi avem de ordin imediat superior*; *apoi* în aceste noi unităţi, *câte unităţi avem de ordin imediat superior acestora* şi aşà mai departe până ajungem la unităţile de ordinul *cel mai înalt* ce putem aveà.

Ultimul cât şi resturile împărţirilor efectuate sunt părţile care compun numărul complex căutat.

106. Transformarea unui număr complex în număr fracţionar şi viceversa. 1°. Intâlnim această transformare, când vrem să exprimăm *toate* unităţile, care compun un număr complex, cu ajutorul *unei singure unităţi, alta decât cea de ordinul cel mai mic.*

EXEMPLU. Să exprimăm 45 z 8 h 29 m 14 s în *ore*. Numărul căutat va conţine evident o *parte întreagă* $45 \times 24 + 8 = 1088$ *ore* şi o *parte fracţionară*, 29 m 14 s, care e mai puţin decât o oră. Această parte exprimată în secunde este $29 \times 60 + 14 = 1754$ s. Secunda fiind $\frac{1}{3600}$ din oră, 1754 secunde fac $\frac{1754}{3600}$ ore. Deci

$$45\,z\;8\,h\;29\,m\;14\,s = 1088 + \frac{1754}{3600}\text{ ore} = 1088{,}4872\text{ ore}.$$

Regulă pentru transformarea unui număr *complex* în număr *fracționar*:

Operația I. *Exprimăm în unitățile întregi cerute toate unitățile de ordin superior acestora* [105, 1]. Obținem astfel *partea întreagă* a numărului fracționar.

Operația II. *Transformăm în unitățile de ordinul cel mai mic toate unitățile inferioare unității întregi cerute* și *împărțim numărul obținut prin raportul dintre unitatea cerută și unitatea de ordinul cel mai mic*. Obținem astfel *partea fracționară* a numărului căutat.

OBSERVARE. Dacă vrem ca numărul fracționar să fie *zecimal*, transformăm partea fracționară obținută în fracție zecimală, împărțind numărătorul prin numitor [93].

2⁰. Regulă pentru transformarea unui număr *fracționar* în număr *complex*:

Operația I. *Inmulțim numărul fracționar dat cu raportul dintre unitatea lui întreagă și unitatea de ordinul cel mai mic*. Numărul fracționar devine astfel un număr *întreg* sau *fracționar* exprimat în unitățile de ordinul cel mai mic.

Operația II. Transformăm *partea întreagă* a acestui număr în *număr complex* [105, 2].

EXEMPLU. In 1088,4872 ore, fiindcă unitatea de ordinul cel mai mic e secunda și fiindcă raportul dintre *ore* și *secunde* este 3600, avem $1088{,}4872 \times 3600 = 3\,918\,553{,}92$ secunde și [după 105, 2] găsim

$$1088{,}4872\,h = 45\,z\ 8\,h\ 29\,m\ 13{,}92\,s.$$

107. Operațiile cu numere complexe. Fiindcă un număr complex se poate transformà în număr *întreg* sau *fracționar*, operațiile cu numere complexe se reduc la operații cu numere întregi sau fracționare.

Totuși în unele cazuri, aceste operații se pot efectuà într'un mod mai simplu calculând direct cu numerele complexe.

Dăm acì câteva exemple, din care se deduc ușor regulele întrebuințate.

1⁰. *Adunarea.*

$$\begin{array}{r} 10^0\ 25'\ 39'' + \\ 28^0\ \ 7'\ 43'' + \\ 5^0\ 35'\ 14'' \\ \hline 43^0\ 67'\ 96'' \end{array} \qquad \text{dar} \qquad \begin{array}{lrr} 43^0 = & 43^0 & \\ 67' = & 1^0 & 7' \\ 96'' = & & 1'\ 36'' \\ \hline \text{total:} & 44^0 & 8'\ 36'' \end{array}$$

In practică se rețin în minte unitățile de ordin superior și se adună la suma următoare. Astfel vom zice: 14 cu 43 fac 54 și cu 39, 96" adică 1' și 36". Se scrie 36 sub secunde, iar 1' se adună la coloana următoare.

2°. *Scăderea.*

$$\begin{array}{l} 46^{\circ}\ 35'\ \ 7'' - \\ \underline{18^{\circ}\ 42'\ 19''} \\ \quad ? \end{array} \qquad \text{scriem} \qquad \begin{array}{r} 45^{\circ}\ 94'\ 67'' - \\ \underline{18^{\circ}\ 42'\ 19''} \\ \text{rest: } 27^{\circ}\ 52'\ 48'' \end{array}$$

adunând 1° sau 60′ (din 46°) la 35′ și 1′ sau 60″ (din 35′) la 7″.

3°. *Inmulțirea* cu un număr *întreg.*

$$\begin{array}{l} 17^{\circ}\ 42'\ 32'' \times \\ \underline{\qquad\quad 5} \\ \quad ? \end{array} \qquad \begin{array}{l} 32' \times 5 = 160'' = \quad 2'\ 40'' \\ 42' \times 5 = 210' = 3^{\circ}\ 30' \\ 17^{\circ} \times 5 = 85^{\circ} = \underline{85^{\circ}\qquad\quad} \\ \qquad\qquad \text{produs: } 88^{\circ}\ 32'\ 40''. \end{array}$$

In practică se reține în minte unitățile de ordin superior (2′ sau 3°) și se adună la produsul următor.

4°. *Impărțirea* printr'un număr *întreg.*

$$\begin{array}{l|l} 88^{\circ}\ 32'\ 40'' & 5 \\ \hline 88^{\circ} : 5 = 17^{\circ} & 17^{\circ}\ 42'\ 32''\ \text{cât.} \\ 38 & \\ \ \ 3^{\circ} \times 60 = 180' & \\ \qquad\qquad + 32 & \\ \qquad\qquad \overline{212'} : 5 = 42' & \\ \qquad\qquad 12 & \\ \qquad\qquad\ \ 2' \times 60 = 120'' & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 40 & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \overline{160''} : 5 = 32'' & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 10 & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Restul dela împărțirea gradelor se transformă în minute și restul dela împărțirea minutelor se transformă în secunde.

EXERCIȚII.

9. Ce valoare are produsul $-2x$, dacă x are una din valorile următoare:

1°. $x = 5 \times 14 - 8 - 7 \times 3 - 9$; 2°. $x = 5 \times (14 - 8) - 7 \times (3 - 9$;
3°. $x = 5 \times (14 - 8 - 7) \times (3 - 9)$; 4°. $x = 5 \times (14 - 8 - 7) \times 3 - 9$;
5°. $x = 5 \times (14 - 8 - 7 \times 3 - 9)$; 6°. $x = 5 \times [14 - 8 - (7 \times 3 - 9)]$.

R. 1°. -64; 2°. -144; 3°. -60; 4°. $+48$; 5°. $+240$; 6°. $+60$.

10. Să se pue în evidență factorul comun în una din expresiunile următoare:

1°. $3x + (x + y)(x - y) + (x - y)^2 - 3y$;
2°. $2x + 3y + (5x + y)^2 + (5x + y)(5x - y) + 3x - 2y$;
3°. $2\pi r^2 h - 0{,}24\pi^2 r^2 + \frac{10}{29}\pi r$;
4°. $2{,}7 - 0{,}27 - 0{,}027 + 27 - 2700$.

R. 1°. $(2x+3)(x-y)$; 2°. $(10x+1)(5x+y)$; 3°. $2\pi r\left(rh-0{,}12\pi r+\frac{5}{29}\right)$;
4°. $27\times(0{,}1-0{,}01-0{,}001+1-100)=-27\times 98{,}911=-2670{,}597$.

11. Să se scrie expresiunile: 15, ax, $40x^2$, $\frac{8}{5}ab$, $\frac{7axy}{15}$, $2a-8b+5c$ ca produse 1°. cu factorul 2; 2°. cu factorul -5; 3°. cu factorul $-\frac{2}{5}$.

R. $2\times 7{,}5$; $2\times\frac{ax}{2}$; $(-5)\times(-8x^2)$; $(-5)\times\frac{-8}{25}ab$; $\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{-7axy}{6}$; $\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-5a+20b-\frac{25}{2}c\right)$.

12. Să se adune fracţiile

1°. $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{9}{20}$; 2°. $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$;
3°. $\frac{\pi r^2\alpha}{90}$, $\frac{\pi r^2\beta}{60}$, $2\pi r^2$; 4°. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$;
5°. $\frac{x}{bc}$, $\frac{y}{ac}$, $\frac{z}{ab}$; 6°. $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$.

R. 1°. $\frac{228}{100}=2{,}28$; 2°. $\frac{6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{n(n^2+5)}{6}$;
3°. $\pi r^2\,\frac{2\alpha+3\beta+360}{180}$; 4°. $\frac{ab+bc+ca}{abc}$; 5°. $\frac{ax+by+cz}{abc}$; 6°. $\frac{a^2c+ab^2+bc^2}{abc}$.

13. Să se scrie fracţia, care are ca numărător suma numărătorilor şi ca numitor suma numitorilor fracţiilor din fiecare exerciţiu 12.

R. 1°. $\frac{24}{59}$; 2°. $\frac{n}{9}(n^2-2n+2)$; 3°. $\frac{\pi r^2}{150}(\alpha+\beta+2)$; 4°. $\frac{3}{a+b+c}$;
5°. $\frac{x+y+z}{bc+ac+ab}$; 6°. $\frac{a+b+c}{b+c+a}=1$.

14. Să se înmulţească fracţiile din fiecare exerciţiu 12.

R. 1°. $\frac{189}{4000}$; 2°. $\frac{n^3(n-1)^2(n-2)}{12}$; 4°. $\frac{1}{abc}$; 5°. $\frac{xyz}{a^2b^2c^2}$; 6°. $\frac{abc}{abc}=1$.

15. Să se efectueze operaţiile:

1°. $0{,}053289\times 10000$; 2°. $1{,}5729:10000$; 3°. $0{,}2\times 0{,}5\times 0{,}1$;
4°. $36{,}408\times 125000$; 5°. $0{,}007\times 0{,}02\times 0{,}009$; 6°. $1:0{,}07504$;
7°. $10:0{,}125$; 8°. $(1-0{,}72536):4$; 9°. $(-6+0{,}03289):5$.

R. 1°. $532{,}89$; 2°. $0{,}00015729$; 3°. 1; 4°. $36408000:8=4551000$;
5°. $0{,}000000126$; 6°. $\frac{6250}{469}=13{,}326$; 7°. $10:\frac{1}{8}=80$.

Câturile 8° şi 9° se pot calculà în două feluri: sau efectuăm întâi diferenţele din paranteze şi apoi facem împărţirea; sau scriem, adunând şi scăzând acelaş număr,

8°. $(4-3{,}72536):4=1-0{,}93134=0{,}06866$;
9°. $(-10+4{,}03289):5=-2+0{,}80658=-1{,}19342$.

16. Să se calculeze valoarea numărului x, pentru care avem:

1°. $5\frac{1}{8} \times x = 3\frac{5}{6}$; 2°. $0{,}546 : x = 1{,}2$; 3°. $x : 3{,}1415 = 0{,}0729$.

R. 1°. $x = \frac{92}{123}$; 2°. $x = 0{,}455$; 3°. $x = \frac{729}{31415} = 0{,}02323\ldots$

17. 1°. *De câte ori* e mai mare fracţia $\frac{15}{7}$ decât $\frac{6009}{14021}$? *Cu cât* e mai mare?

R. 1°. $\frac{6009}{14021} \times x = \frac{15}{7}$; $x = \frac{15}{7} : \frac{6009}{14021} = \frac{15}{7} : \frac{3}{7} = 5$; deci *de* 5 *ori*.

2°. $\frac{6009}{14021} + x = \frac{15}{7}$; $x = \frac{15}{7} - \frac{6009}{14021} = \frac{15}{7} - \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$; deci *cu* $\frac{12}{7}$.

18. 1°. *De câte ori* e mai mică fracţia 0,002048 decât $\frac{1376}{15625}$? *Cu cât* e mai mică?

R. 1°. $\frac{1376}{15625} : x = \frac{2048}{1000000} = \frac{32}{15625}$; $x = \frac{1376}{32} = 43$; deci *de* 43 *ori*.

2°. $\frac{1376}{15625} - x = \frac{32}{15625}$; $x = \frac{1376 - 32}{15625} = \frac{1344}{15625} = 0{,}086016$; deci *cu* 0,086016.

19. Cu cât creşte produsul $34507 \times 0{,}659$, când creştem fiecare factor cu 0,001?

R. Cu $0{,}001 \times 0{,}659 + 0{,}001 \times 34507 + 0{,}001 \times 0{,}001 = 0{,}0041107$.

20. Să se simplifice fracţiile:

1°. $\frac{1.2.3.\ldots 2n}{2.4.6.\ldots 2n}$; 2°. $\frac{1.2.3.\ldots(2n+1)}{1.3.5.\ldots(2n+1)}$; 3°. $\frac{1.3.5.\ldots(2n+1)}{2.4.6.\ldots(2n+2)}$.

R. 1°. $1.3.5.\ldots(2n-1)$; 2°. $2.4.6.\ldots 2n$; 3°. avem pentru n nepăreche $\frac{(n+2)(n+4)\ldots(2n+1)}{2^{n+1}.2.4.6.\ldots(n+1)}$; pentru n păreche $\frac{(n+3)(n+5)\ldots(2n+1)}{2^{n+1}.2.4.6.\ldots n}$.

21. Să se aşeze în ordine de mărime fracţiile

$$(\alpha) \qquad \frac{a}{b},\ \frac{a+1}{b+1},\ \frac{a+2}{b+2},\ \ldots,\ \frac{a+n}{b+n},\ \frac{a+n+1}{b+n+1},\ \ldots$$

R. Şirul (α) e crescător pentru $a < b$ şi descrescător pentru $a > b$.

22. Intr'un an sunt 365,2422 zile. Câte zile, ore, minute şi secunde sunt într'un an?

R. 365 z 5 h 48 m 46 s.

23. Pe un cadran un indicator descrie într'o oră un arc de $4^0\ 18'\ 37''$; ce arc va descrie el în 2 zile 9 ore 25 minute şi 41 secunde?

R. $4^0\ 18'\ 37'' = 15517''$; 2 z 9 h 25 m 41 s $= 57 + \frac{1541}{3600}$ *ore* $= \frac{2067{,}41}{36}$ *ore*, şi $15517 \times \frac{2067{,}41}{36} = 891139'' = 247^0\ 32'\ 19''$.

CAPITOLUL III.

OPERAŢIILE DE TREAPTA A TREIA.

I. — RIDICAREA LA PUTERE.

108. Puterea unui număr. *A ridicà pe a la puterea n* însemnează a efectuà produsul

$$\text{(XX)} \qquad a^n = a \times a \times \ldots \times a$$

format din n factori egali cu a [49].

Rezultatul acestei operaţii se numeşte *puterea a n-a* a lui a; a este *baza* iar n *exponentul* acestei puteri.

In această definiţie n este un număr *întreg* şi *pozitiv*; a poate fi orice expresie algebrică.

Adunarea este operaţia directă *de treapta întâia*; înmulţirea (adunare de numere egale) este operaţia directă *de treapta a doua*; ridicarea la putere (înmulţire de numere egale) este operaţia directă *de treapta a treia* şi avem:

$$na = a + a + \ldots + a \qquad (n \text{ termeni } a),$$
$$a^n = a \times a \times \ldots \times a \qquad (n \text{ factori } a).$$

Observare. Un patrat, cu laturea de a centimetri, are suprafaţa de a^2 centimetri *patraţi* (*fig.* 24); un cub, cu laturea de a centimetri, are volumul de a^3 centimetri *cubi.*

De aceea a^2 şi a^3 se mai zic *a la patrat* şi *a la cub.*

Exemplu. 1 metru $= 10$ decimetri (*dm*); 1 metru *patrat* $= 10^2$ *dmp* $= 100$ *dmp*; 1 metru *cub* $= 10^3$ *dmc* $= 1000$ *dmc.*

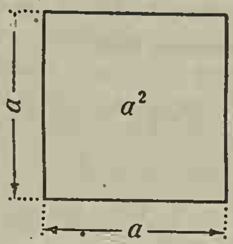
Puterea a n-a a unui număr întreg (pentru n întreg şi pozitiv) e tot un număr *întreg* şi se numeşte *putere perfectă.* In particular, patratul sau cubul unui număr întreg e un număr *întreg* şi se numeşte *patrat* sau *cub perfect.*

Pentru înlesnirea calculelor practice se pot întrebuinţă *tablele*, care dau *patratele* şi *cuburile* numerelor întregi (¹):

Numere:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...
Patrate:	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144 ...
Cuburi:	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728 ...

Din aceste table rezultă că numerele scrise cu 1 cifră au patratele lor formate din 1 sau 2 cifre şi cuburile din 1, 2 sau 3 cifre. In general, numerele întregi scrise cu n cifre au patratele lor formate din $2n$ sau $2n-1$ cifre şi cuburile formate din $3n$, $3n-1$ sau $3n-2$ cifre.

Un număr întreg terminat cu p zeruri are patratul terminat cu $2p$ zeruri şi cubul terminat cu $3p$ zeruri.



lungimea a
lăţimea a
suprafaţa a^2

Fig. 24.

Observare. Când vrem să scriem *puterea unei expresii algebrice* neefectuate (sumă, diferenţă, produs, etc.) *trebue să punem această expresie într'o paranteză* şi să scriem exponentul sus şi la dreapta acestei paranteze. Astfel:

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) \quad \text{pe când} \quad a+b^2 = a+bb;$$
$$(abc)^3 = abcabcabc \quad \text{pe când} \quad abc^3 = abccc.$$

Exemple. $(3-5)^4 = (-2)^4 = 16;\quad 3-5^4 = 3-625 = -622;$
$[(-2)(+3)(-5)]^2 = [+30]^2 = 900;$
$(-2)(+3)(-5)^2 = (-2)(+3)(+25) = -150.$

109. Puterea unui număr algebric. Din definiţia puterii unui număr [XX] şi după regula dată pentru *semnul* unui produs de numere algebrice [47] rezultă că

1⁰. dacă a e *pozitiv*, oricare ar fi n întreg şi pozitiv, a^n e *pozitiv*.

2⁰. dacă a e *negativ* şi n *păreche*, a^n e *pozitiv*;
dacă a e *negativ* şi n *nepăreche*, a^n e *negativ*.

---

¹) TABLA III dela sfârşitul volumului.

EXEMPLE. $(+3)^2 = (+3).(+3) = +3^2 = +9;$
$(+3)^3 = (+3).(+3).(+3) = +3^3 = +27;$
$(-3)^2 = (-3).(-3) = +3^2 = +9;$
$(-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = -3^3 = -27.$

In general, oricare ar fi a, avem

$$\text{(XXI)} \qquad (+a)^{2n} = +a^{2n}, \qquad (+a)^{2n+1} = +a^{2n+1},$$
$$(-a)^{2n} = +a^{2n}, \qquad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

REGULĂ pentru *semnul* puterei unui număr algebric, când exponentul e întreg şi pozitiv:

Dacă exponentul e păreche, puterea e un număr pozitiv; dacă exponentul e nepăreche, puterea are semnul bazei.

Fiindcă

$$(-1)^{2n} = +1, \quad (-1)^{2n+1} = -1,$$

putem scrie în toate cazurile

$$\text{(XXII)} \qquad (-a)^{\nu} = (-1)^{\nu}.a^{\nu}.$$

Pentru $\nu = 2n$ avem primele două formule (XXI); pentru $\nu = 2n+1$ avem pe celelalte două.

110. Puterea unei fracţii. 1°. Fracţie ordinară. *Ca să ridicăm o fracţie ordinară la o putere, ridicăm şi numărătorul şi numitorul ei la acea putere.* Astfel:

$$\text{(XXIII)} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

In adevăr

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underset{1}{\frac{a}{b}} \times \underset{2}{\frac{a}{b}} \times \dots \times \underset{n}{\frac{a}{b}} = \frac{a \times a \times \dots \times a}{\underset{1}{b} \times \underset{2}{b} \times \dots \times \underset{n}{b}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Puterea a n-a a unei fracţii ordinare nereductibile este tot o fracţie ordinară *nereductibilă.*

Astfel în $\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^n}{3^n}$ avem la numărător n factori 2 şi la numitor n factori 3; numărătorul şi numitorul *n'au niciun factor comun* şi fracţia $\frac{2^n}{3^n}$ e *nereductibilă* ca şi $\frac{2}{3}$ [81].

OBSERVARE. Puterea a n-a a unei fracţii ordinare nereductibile *nu poate fi un număr întreg.*

Când ridicăm la *acelaş putere* şi numărătorul şi numitorul unei fracţii, *valoarea fracţiei se schimbă* şi anume fracţia se face *mai mică*, dacă este subunitară şi *mai mare*, dacă este supraunitară. In amândouă cazurile fracţia *se depărtează de unitate.*

EXEMPLU.

$$\frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad \text{fiindcă} \quad \frac{1}{2} < 1 \quad \text{şi avem} \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1\,;$$

$$\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} > \frac{3}{2} \quad \text{fiindcă} \quad \frac{3}{2} > 1 \quad \text{şi avem} \quad 1 < \frac{3}{2} < \frac{9}{4}.$$

2°. Fracţie zecimală. Ca să ridicăm la puterea n un număr cu p cifre zecimale, *suprimăm virgula zecimală* şi *ridicăm la puterea n numărul întreg rămas*; *despărţim* apoi *la rezultat np cifre zecimale.*

In adevăr, dacă λ e un număr cu p cifre zecimale, produsul

$$\lambda^n = \lambda \times \lambda \times \ldots \times \lambda \qquad (n \text{ factori } \lambda)$$

are np cifre zecimale [92, 2].

111. Legile puterii. Din definiţia (XX) rezultă următoarele *legi* pentru puterile cu exponenţi *întregi* şi *pozitivi*:

1°. Ridicarea la putere este o operaţie întotdeauna *posibilă* şi *univocă*.

2°. *Dacă $m = p + q$, avem* $a^m = a^p . a^q$ şi *reciproc*.

In adevăr, înmulţirea fiind *asociativă* [51, 4], putem scrie

$$a^m = \underset{1}{a}.\underset{2}{a}.\underset{3}{a} \ldots \underset{m}{a} = \underset{1}{a}.\underset{2}{a} \ldots \underset{p}{a}.\underset{1}{a}.\underset{2}{a} \ldots \underset{q}{a} = a^p . a^q,$$

şi reciproc

$$\text{(XXIV)} \qquad a^p . a^q = a^{p+q}.$$

3°. Ridicarea la putere a unui *produs* este o operaţie *distributivă*. Adică avem

$$\text{(XXV)} \qquad (a.b.c)^m = a^m . b^m . c^m.$$

In adevăr

$$(a.b.c)^m = \underset{1}{a.b.c}.\underset{2}{a.b.c}. \ldots .\underset{m}{a.b.c}$$
$$= \underset{1}{a}.\underset{2}{a} \ldots \underset{m}{a}.\underset{1}{b}.\underset{2}{b} \ldots \underset{m}{b}.\underset{1}{c}.\underset{2}{c} \ldots \underset{m}{c} = a^m . b^m . c^m.$$

OBSERVARE. Ridicarea la putere *nu este o operaţie comutativă.*

Adică avem

(1) $$a^b \neq b^a \quad \text{dacă} \quad a \neq b.$$

EXEMPLU: $2^3=8$, $3^2=9$ deci $2^3 \neq 3^2$.

De aceea, dacă însemnăm cu a şi b două numere date şi cu x numărul care se caută, problemele inverse $a^x=b$ şi $x^a=b$ sunt două probleme cu totul diferite.

112. Operaţiile cu puteri. 1⁰. Ca să *adunăm* sau să *scădem* mai multe puteri, *trebue să efectuăm întâi fiecare putere* şi apoi să facem operaţiile de adunare sau de scădere între rezultatele obţinute.

EXEMPLU: $3^5+(-2)^3-5^4=243+(-8)-625=-390$.

Prin urmare sume algebrice ca: $a^3+b^3+c^3$, a^5-b^5, $a^2+a^5-a^4$ nu se pot efectuà, decât numai când cunoaştem valorile numerelor a, b. c.

Intr'un singur caz operaţia e posibilă: când în suma algebrică avem numai *puteri asemenea*, adică puteri cu *aceeaş bază* şi *acelaş exponent*. Astfel

$$7^3+7^3=2.7^3, \quad a^3-a^3=0, \quad 2x^2+5x^2-3x^2=(2+5-3)x^2=4x^2.$$

Intr'o sumă algebrică, orice *termen* are: 1⁰. un *semn*, care se scrie înaintea termenului; 2⁰. un *factor numeric* şi 3⁰. unul sau mai mulţi factori scrişi cu *litere* ridicate la diferite puteri.

Semnul împreună cu factorul numeric formează *coeficientul*, iar literele cu exponenţii lor formează *partea literală* a termenului.

Astfel în $-15\,a^2x^3$, -15 e coeficientul, iar a^2x^3 e partea literală.

Când un termen n'are niciun factor numeric, se subînţelege factorul 1. Astfel x^5y^2 are coeficientul 1 sau $+1$; $-x$ are coeficientul -1.

Doi sau mai mulţi termeni se zic *asemenea*, când au *aceeaş parte literală* (adică au *aceleaşi litere* şi fiecare literă are în toţi termenii *acelaş exponent*).

OBSERVARE. Când numerele sunt scrise cu *litere*, *se pot efectuà numai sumele algebrice cu termeni asemenea.*

EXEMPLU. $$2a^2x^3-\frac{1}{2}a^2x^3-\frac{5}{4}a^2x^3+\frac{1}{2}a^2x^3=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right)a^2x^3$$
$$=\left(2-\frac{5}{4}\right)a^2x^3=\frac{3}{4}a^2x^3.$$

Această operaţie se numeşte *reducerea termenilor asemenea.*

REGULĂ. *Ca să reducem mai mulţi termeni asemenea, scriem partea literală comună o singură dată şi-i punem ca coeficient suma algebrică a coeficienţilor acestor termeni.*

EXEMPLU. Din $5x^2-3x+7=2x^2-9x-6$ rezultă [40, 7]

$$5x^2-3x+7-2x^2+9x+6=0 \quad \text{sau} \quad 3x^2+6x+13=0.$$

2⁰. REGULĂ. *Ca să înmulţim mai multe puteri ale aceluiaş număr scriem numărul o singură dată şi-i punem ca exponent suma exponenţilor puterilor date.*

Această regulă rezultă din formula (XXIV). Astfel:

(2) $$a^p \cdot a^q \cdot a^r = a^{p+q} \cdot a^r = a^{p+q+r}.$$

EXEMPLU: $a^2 \cdot a^3 = a^5$, $2a^3 \times 5a^4 \times (-4a^6) = -40a^{13}$.

3⁰. REGULĂ. *Ca să împărţim două puteri ale aceluiaş număr, scriem numărul o singură dată şi-i punem ca exponent diferenţa exponenţilor* (scăzând exponentul împărţitorului din exponentul deîmpărţitului). Astfel:

(XXVI) $$a^p : a^q = a^{p-q}.$$

In adevăr avem

$$a^{p-q} \cdot a^q = a^{p-q+q} = a^p.$$

Puterea a^{p-q} are un sens numai dacă p e *mai mare* decât q.

EXEMPLU: $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

113. Exponenţi nuli şi negativi. Formula (XXVI) capătă un sens în toate cazurile, dacă definim puterile cu exponenţi *nuli* şi *negativi* în modul următor.

Pentru $p = q$ formula (XXVI) ne dă

$$a^p : a^p = a^{p-p} = a^0.$$

Pe de altă parte avem evident $a^p : a^p = 1$. Trebue dar să considerăm

(XXVII) $$a^0 = 1,$$

oricare ar fi $a \neq 0$.

EXEMPLE: $5^0 = 1$, $x^0 = 1$, $\left(-\frac{5}{7}\right)^0 = 1$, $(0,01)^0 = 1$.

Pentru $p < q$, de exemplu pentru $q = p + n$, formula (XXVI) ne dă

$$a^p : a^{p+n} = a^{p-p-n} = a^{-n}.$$

Pe de altă parte avem evident

$$a^p : a^{p+n} = \frac{a^p}{a^{p+n}} = \frac{a^p \cdot 1}{a^p \cdot a^n} = \frac{1}{a^n}.$$

Trebue dar să considerăm

(XXVIII) $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Cu aceste *definiţiuni* formulele (XXIV) şi (XXVI) sunt aplicabile pentru *orice valori întregi algebrice* ale numerelor p şi q.

In adevăr pentru p sau q *nule* găsim

$$a^0 . a^q = a^{0+q} = a^q, \quad a^p . a^0 = a^p, \quad a^0 . a^0 = a^0;$$
$$a^0 : a^q = a^{0-q} = a^{-q}, \quad a^p : a^0 = a^p, \quad a^0 : a^0 = a^0;$$

egalităţi evidente după formulele (XXVII) şi (XXVIII).

Pentru p şi q *negative*, de exemplu pentru $p = -m$, $q = -n$, formulele (XXIV) şi (XXVI) ne dau

$$a^{-m} . a^{-n} = a^{(-m)+(-n)} = a^{-m-n};$$
$$a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n} = a^{n-m};$$

egalităţi adevărate, deoarece avem [după XXIII]

$$a^{-m} . a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n};$$

şi

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{a^n}{1} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Demonstrând în acelaş fel şi pentru celelalte *cazuri*, vedem că formulele (XXIV) şi (XXVI) sunt generale.

Observare. Avem în particular

$$a^1 = a, \quad a^0 = \frac{a}{a} = 1, \quad a^{-1} = \frac{1}{a};$$
$$1^1 = 1, \quad 1^0 = \frac{1}{1} = 1, \quad 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1;$$
$$0^1 = 0, \quad 0^0 = \frac{0}{0} \text{ } n'are\ sens, \quad 0^{-1} = \frac{1}{0} \text{ } n'are\ sens \ [57, 2].$$

EXEMPLE. $2^3 = 8$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$; $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} = 0{,}36$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} = 2{,}778$; $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$.
$10^4 = 10000$; $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$; $(0{,}1)^{-2} = \frac{1}{(0{,}1)^2} = \frac{1}{0{,}01} = 100$.

114. Putere de puteri. Avem două feluri de puteri de puteri: 1°. când *baza* este o putere; 2°. când *exponentul* este o putere.

1°. **Puterea cu baza putere.** In acest caz zicem că *avem de ridicat o putere la o altă putere* şi scriem puterea bază *în paranteză.*

REGULĂ. *Ca să ridicăm puterea unui număr la o altă putere, ridicăm numărul la o putere egală cu produsul exponenţilor.* Adică:

(XXIX) $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

In adevăr avem

$$(a^m)^n = \underset{1}{a^m} \cdot \underset{2}{a^m} \cdot \ldots \cdot \underset{n}{a^m} = a^{\overset{1}{m}+\overset{2}{m}+\ldots+\overset{n}{m}} = a^{mn}.$$

EXEMPLU: $(5^3)^2 = 5^{3\times 2} = 5^6 = 15625.$

In general putem scrie:

(XXX) $$\left[(a^p)^q\right]^r = a^{pqr}.$$

2°. **Puterea cu exponentul putere.** Când nu se scrie nicio paranteză, se înţelege că *exponentul* puterii este *o putere.* Prin urmare:

(XXXI) $$a^{m^n} = a^{(m^n)}$$

adică a e ridicat la puterea m^n.

EXEMPLU: $5^{3^2} = 5^{(3^2)} = 5^9 = 1953125.$

Avem, în general,

(XXXII) $$a^{p^{q^r}} = a^{\left[p^{(q^r)}\right]}.$$

OBSERVARE. Din definiţiile şi regulele precedente rezultă că

$$(a^b)^c = (a^c)^b \quad \text{dar} \quad a^{b^c} \neq a^{c^b}.$$

EXEMPLU: $(10^{10})^{10} = 10^{100}$ este 1 urmat de 100 de zeruri,
pe când $10^{10^{10}} = 10^{10000000000}$ este 1 urmat de 10 *miliarde* de zeruri.

115. Patratul unei sume: $(a+b)^2$. Oricare ar fi numerele algebrice [54] găsim

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb$$

sau

(XXXIII) $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

EXEMPLE: $(5+3)^2 = 5^2 + 2.5.3 + 3^2 = 25 + 30 + 9 = 64$
sau $(5+3)^2 = 8^2 = 64$; $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$

REGULĂ. *Patratul unei sume algebrice*, compusă din *două părți*, este o sumă algebrică formată din *trei părți* și anume:

1°. *partea întâia la patrat,*
2°. *de 2 ori partea întâia înmulțită cu partea a doua,*
3°. *partea a doua la patrat.*

Dacă numerele a și b sunt pozitive, egalitatea (XXXIII) este evidentă pe *figura* 25, observând că patratul construit pe latura $a+b$ se compune din 2 patrate (a^2 și b^2) și din 2 dreptunghiuri ($a \cdot b$).

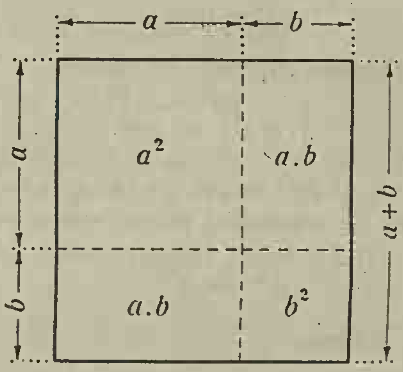


Fig. 25.

In acelaş fel găsim pentru *patratul unei diferențe*:

(XXXIV) $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

egalitate, care rezultă și din formula (XXXIII), dacă observăm că diferența $a-b$ este suma algebrică $a+(-b)$.

EXEMPLE: $(5-3)^2 = 5^2 - 2.5.3 + 3^2 = 25 - 30 + 9 = 4$
sau $(5-3)^2 = 2^2 = 4$; $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

OBSERVĂRI. 1°. Patratul unui număr format din *zeci* și *unități* se compune din *trei* părți: *patratul zecilor, de 2 ori zecile înmulțite cu unitățile* și *patratul unităților.*

EXEMPLU: $58^2 = (50+8)^2 = 50^2 + 2.50.8 + 8^2$
$= 2500 + 800 + 64 = 3364$.

2°. Deoarece

(3) $$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

vedem că: *diferența dintre patratele a două numere întregi consecutive este egală cu de 2 ori numărul cel mai mic plus* 1.

EXEMPLU: $12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23 = 2 \times 11 + 1$.

3⁰. Avem

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2 \quad \text{și} \quad (a-b)^2 \neq a^2 - b^2 \quad \text{dacă} \quad ab \neq 0.$$

116. Produsul $(a+b)(a-b)$. Găsim prin înmulțire

$$(a+b)(a-b) = aa - ab + ab - bb,$$

de unde deducem

(XXXV) $$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

REGULĂ. *Suma a două numere înmulțită cu diferența lor este egală cu diferența patratelor acestor numere.*

EXEMPLU: $(5+3) \times (5-3) = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
sau $(5+3) \times (5-3) = 8 \times 2 = 16$;
$(x+2) \times (x-2) = x^2 - 4$.

Invers: *diferența a două patrate* se poate scrie întotdeauna ca un *produs de doi factori*:

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b).$$

EXEMPLE:

$5^2 - 3^2 = (5+3) \times (5-3) = 8 \times 2$; $\quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

117. Patratul unei sume cu mai mulți termeni: $(a+b+c)^2$. Considerând suma dată ca o sumă formată numai din *două părți*:

$$a+b+c = (a+b) + c$$

și aplicând formula (XXXIII), putem scrie

$$[(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\cdot c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

Prin urmare avem:

(4) $$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

OBSERVARE. Când numerele a, b, c sunt *pozitive*, această egalitate e evidentă într'un *patrat* cu laturile egale cu $a+b+c$.

EXEMPLU:

$$(2-3+6)^2 = 2^2+(-3)^2+6^2+2.2.(-3)+2.2.6+2.(-3).6$$
$$= 4+9+36-12+24-36 = 25$$

sau pentrucă suma se poate efectuà: $(2-3+6)^2 = 5^2 = 25$.

Generalizare. In acelaş fel putem calculà *patratul unei sume algebrice cu n termeni* şi găsim [55]

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 = \sum_{p=1}^{n} a_p . \sum_{q=1}^{n} a_q = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_p\, a_q$$

sau

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 = \Sigma a_p^2 + \Sigma a_p\, a_q, \tag{5}$$

unde, în suma întâia trebue să facem $p=1, 2, \ldots, n$, iar în suma a doua $p=1, 2 \ldots, n$, $q=1, 2 \ldots, n$ cu $p \neq q$.

Cum $a_p\, a_q = a_q\, a_p$, produsele din suma a doua sunt două câte două *egale* între ele.

118. Cubul unei sume: $(a+b)^3$. Avem prin definiţie

$$(a+b)^3 = (a+b)^2.(a+b) = (a^2+2ab+b^2).(a+b).$$

Efectuând înmulţirea acestor două sume şi observând că

$$ab^2+2ab^2 = 3ab^2,$$

găsim

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \tag{XXXVI}$$

Regulă. *Cubul unei sume algebrice* compusă din *două părţi* este o sumă algebrică formată din *patru părţi* şi anume:

1⁰. *partea întâia la cub,*

2⁰. *de 3 ori partea întâia la patrat înmulţită cu partea a doua,*

3⁰. *de 3 ori partea întâia înmulţită cu partea a doua la patrat,*

4⁰. *partea a doua la cub.*

EXEMPLE:

$$(5+4)^3 = 5^3+3.5^2.4+3.5.4^2+4^3 = 125+300+240+64 = 729$$

sau $(5+4)^3 = 9^3 = 729$; $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$.

In acelaş fel găsim pentru *cubul unei diferenţe*:

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \tag{XXXVII}$$

egalitate, care rezultă şi din formula (XXXVI), dacă observăm că diferenţa $a-b$ este suma algebrică $a+(-b)$.

EXEMPLE:

$$(5-4)^3 = 5^3 - 3.5^2.4 + 3.5.4^2 + 4^3 = 125 - 300 + 240 - 64 = 1$$

sau $(5-4)^3 = 1^3 = 1$; $\quad (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

OBSERVĂRI. 1⁰. Cubul unui număr format din *zeci* şi *unităţi* se compune din următoarele 4 părţi: *cubul zecilor*; *de 3 ori patratul zecilor înmulţit cu unităţile*; *de 3 ori zecile înmulţite cu patratul unităţilor*; *cubul unităţilor.*

EXEMPLU: $58^3 = (50+8)^3 = 50^3 + 3.50^2.8 + 3.50.8^2 + 8^3$
$= 125\,000 + 60\,000 + 9600 + 512 = 195112.$

2⁰. Deoarece

$$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$

vedem că: *diferenţa dintre cuburile a două numere întregi consecutive* este egală cu *de 3 ori patratul numărului mai mic plus de 3 ori acest număr plus* 1.

EXEMPLU: $12^3 - 11^3 = 1728 - 1331 = 397 = 3.11^2 + 3.11 + 1.$

3⁰. Avem

$$(a+b)^3 \neq a^3 + b^3 \quad \text{şi} \quad (a-b)^3 \neq a^3 - b^3 \quad \text{dacă} \quad ab \neq 0.$$

Prin urmare, *ridicarea la putere a unei sume sau a unei diferenţe nu e o operaţie distributivă* [111, 3], adică

$$(a+b+c)^m \neq a^m + b^m + c^m, \quad (a-b)^m \neq a^m - b^m.$$

119. Egalităţi şi neegalităţi.

1⁰. Din $a = b$ rezultă $a^p = b^p$;
din $a = b$, $c = d$ rezultă $a^c = b^d$.

2⁰. Dacă a şi b sunt două numere *pozitive*,
din $a > b$ rezultă $a^p > b^p$ pentru $p \neq 0$.

In adevăr, din $a > b$ deducem succesiv:

$$aa > ab, \quad ab > bb \quad \text{deci} \quad a^2 > b^2,$$
$$aa^2 > ab^2, \quad ab^2 > bb^2 \quad \text{deci} \quad a^3 > b^3,$$

şi aşà mai departe.

Pentru $p = 0$ avem $a^0 = b^0 = 1$.

3°. Dacă $p > q$ şi $a > 0$, avem

$$a^p > a^q \quad \text{pentru} \quad a > 1,$$
$$a^p = a^q \quad \text{pentru} \quad a = 1,$$
$$a^p < a^q \quad \text{pentru} \quad a < 1.$$

In adevăr, din $a > 1$, înmulţind cu $a > 0$, deducem succesiv

$$a^2 > a, \quad a^3 > a^2, \ldots, \quad a^{n+1} > a^n, \ldots$$

Tot din $a > 1$, împărţind cu $a > 0$, deducem

$$1 > a^{-1}, \quad a^{-1} > a^{-2}, \ldots, \quad a^{-n+1} > a^{-n}, \ldots$$

Prin urmare avem:

(6) $$a^{n+1} > a^n \quad \text{pentru} \quad a > 1,$$

oricare ar fi exponentu n întreg (pozitiv, negativ sau nul).

Regulă. *Puterile unui număr mai mare decât* 1 *cresc, când exponentul creşte.*

Pentru $a = 1$ avem $1^p = 1$, oricare ar fi p. Deci $1^p = 1^q$.

Pentru $a < 1$, înmulţind această neegalitate cu a *pozitiv*, deducem succesiv

$$a^2 < a, \quad a^3 < a^2, \ldots, \quad a^{-n+1} < a^n, \ldots$$

Tot din $a < 1$, împărţind cu $a > 0$, deducem

$$1 < a^{-1}, \quad a^{-1} < a^{-2}, \ldots, \quad a^{-n+1} < a^{-n}, \ldots$$

Prin urmare avem:

(7) $$a^{n+1} < a^n \quad \text{pentru} \quad 0 < a < 1,$$

oricare ar fi exponentul n întreg (pozitiv, negativ sau nul).

Regulă. *Puterile unui număr pozitiv mai mic decât* 1 *descresc, când exponentul creşte.*

Pentru $a = 0$ avem $0^p = 0$, oricare ar fi $p > 0$.

Puterile 0^p pentru $p \leqq 0$, după definiţiile precedente, *n'au niciun sens.*

4°. Dacă a şi b sunt două numere *pozitive*,

din $a > b \geqq 1$ şi $p > q$ rezultă $a^p > b^q$.

In adevăr [după **119**, 3] avem

$$a^p > b^p, \quad b^p \geqq b^q \quad \text{deci} \quad a^p > b^q.$$

5^0. Puterile consecutive ale unui număr *negativ* sunt alternativ pozitive şi negative. In acest caz regulele precedente se aplică numai la *puterile valorii absolute* a acestui număr.

EXEMPLU:

$$-3)^{-2}=+\frac{1}{9},\ (-3)^{-1}=-\frac{1}{3},\ (-3)^0=+1;\ (-3)^1=-3,\ (-3)^2=+9, \text{ etc.}$$

II. — EXTRAGEREA RĂDĂCINII.

120. Insemnând cu a şi n două numere date şi cu x un număr necunoscut, următoarele *două* cazuri se prezintă ca *operaţii inverse de treapta a treia*:

$$1^0.\ x^n = a;\qquad 2^0.\ n^x = a.$$

Valoarea lui x, pentru care avem egalitatea 1^0, se numeşte *rădăcina a n-a a lui a*; valoarea lui x, pentru care avem egalitatea 2^0, se numeşte *logaritmul lui a* în baza n.

Operaţiile prin care rezolvim aceste probleme se numesc: în cazul 1^0 *extragerea rădăcinii*, iar în cazul 2^0 *aflarea logaritmului*.

EXEMPLE: Avem $x^3 = 729$ pentru $x = 9$, deci 9 este *rădăcina a 3-a* din 729; avem $3^x = 729$ pentru $x = 6$, deci 6 este *logaritmul* lui 729 *în baza* 3.

121. Extragerea rădăcinii. Definiţia I. *A extrage rădăcina a n-a dintr'un număr a, însemnează a găsì un alt număr b, care ridicat la puterea n să ne dea pe a.*

In acest caz zicem că b este *rădăcina a n-a exactă* din a şi scriem

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

Semnul $\sqrt{\ }$ se numeşte *radical*; a este *cantitatea de sub radical*; n este *indicele* radicalului.

$\sqrt[2]{\ }$ se scrie numai $\sqrt{\ }$ (fără indice) şi se citeşte *rădăcina patrată*; $\sqrt[3]{a}$ se citeşte *rădăcina cubică*.

$\sqrt[1]{a}$ este a, fiindcă $a^1 = a$.

EXEMPLE: $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[4]{0{,}0001} = 0{,}1$

fiindcă: $7^2 = 49$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, $(0{,}1)^4 = 0{,}0001$.

Avem prin definiţie

$$\text{(XXXVIII)} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{şi} \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

De aceea zicem că extragerea rădăcinii a n-a şi ridicarea la puterea n sunt operaţii inverse, care *se distrug* una pe alta.

Observare. Extragerea rădăcinii poate fi *posibilă* sau *imposibilă* cu ajutorul numerelor *raţionale*. Când această operaţie e posibilă, ne poate da *unul* sau *mai multe* rezultate.

Exemple. 1⁰. $\sqrt{3}$ nu e nici număr *întreg*, nici *fracţionar*. Nu e număr întreg, fiindcă 3 nu e patrat perfect; nu e nici fracţionar, fiindcă o fracţie ordinară (nereductibilă) ridicată la patrat nu ne poate da un număr întreg [**110**, 1].

Prin urmare extragerea rădăcinii patrate exacte din 3, cu ajutorul numerelor raţionale, este o operaţie *imposibilă*.

2⁰. $\sqrt{4}$ este $+2$ şi -2, fiindcă

$$\text{şi} \quad (+2)^2 = 4 \quad \text{şi} \quad (-2)^2 = 4.$$

3⁰. $\sqrt[3]{8}$ este $+2$ şi *nu* -2, fiindcă

$$(+2)^3 = +8 \quad \text{iar} \quad (-2)^3 = -8.$$

4⁰. $\sqrt[3]{-125}$ este -5 şi *nu* $+5$, fiindcă

$$(-5)^3 = -125 \quad \text{iar} \quad (+5)^3 = +125.$$

5⁰. $\sqrt{-9}$ nu poate fi niciun număr algebric, fiindcă patratul oricărui număr pozitiv sau negativ e un număr *pozitiv*, deci nu poate fi -9.

122. Radicali aritmetici. Dacă a e un număr *pozitiv*, nu poate exista decât un singur număr b *pozitiv* egal cu $\sqrt[n]{a}$.

In adevăr, dacă am avea pentru $\sqrt[n]{a}$ două valori pozitive b şi c *diferite*, de exemplu $b > c$, ar rezulta $b^n > c^n$ [**119**, 2], neegalitate care contrazice ipoteza $b^n = a$, $c^n = a$.

Această valoare pozitivă *unică* se numeşte *valoarea aritmetică* a rădăcinii a n-a din a.

Când în calcule considerăm, pentru fiecare radical, numai valoarea lui aritmetică, zicem că operăm cu *radicali aritmetici*.

In acest capitol vom da regulele pentru calcularea rădăcinilor aritmetice ale numerelor pozitive şi proprietăţile acestor rădăcini.

123. Rădăcină cu aproximaţie. Să considerăm două şiruri de numere: 1⁰. şirul numerelor întregi pozitive (I); 2⁰. şirul puterilor a n-a ale acestor numere (P_n):

$$(I) \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p,\ p+1,\ \ldots$$

$$(P_n) \qquad 0,\ 1,\ 2^n,\ 3^n,\ \ldots,\ p^n,\ (p+1)^n,\ \ldots$$

scrise astfel ca numărul p^n din şirul al doilea să corespundă numărului p din şirul întâi.

Toate numerele din şirul P_n se găsesc în şirul I; ele se numesc *puteri perfecte*. In general însă, numerele din şirul I nu se găsesc în şirul P_n.

De aceea, când căutăm $\sqrt[n]{a}$, pentru a pozitiv, două cazuri se pot întâmplà:

1⁰. sau a este un număr din şirul P_n, de exemplu $a = p^n$ şi atunci avem

$$\sqrt[n]{a} = p \qquad (\text{rădăcină } \textit{exactă});$$

2⁰. sau a este cuprins între două numere consecutive din şirul P_n, de exemplu

$$p^n < a < (p+1)^n$$

şi atunci zicem că p este $\sqrt[n]{a}$ *cu aproximaţie de o unitate prin lipsă*, iar $p+1$ este $\sqrt[n]{a}$ cu aproximaţie de o unitate *prin exces* sau *prin adaos* şi scriem

$$(8) \qquad p < \sqrt[n]{a} < p+1.$$

Definiţia II. *A extrage rădăcina a n-a din a înseamnează a găsì cel mai mare număr b, care ridicat la puterea n să ne dea un număr mai mic sau cel mult egal cu a.*

După această definiţie zicem că numărul p din neegalitatea (8) este $\sqrt{a}$, iar diferenţa $a - p^n = r$ este restul acestei rădăcini (¹).

124. Rădăcina patrată. Zicem că un număr întreg p este *rădăcina patrată* a lui a (cu aproximaţie de o unitate prin lipsă), dacă avem

$$(9) \qquad p^2 < a < (p+1)^2$$

(¹) Confuzia care poate rezultà, când numim *rădăcină* şi rădăcina *exactă* a unui număr şi rădăcina lui *cu aproximaţie prin lipsă*, este analoagă cu confuzia care rezultă la împărţire, când se numeşte *cât* şi câtul *exact* şi câtul *cu aproximaţie prin lipsă*.

și scriem

(10) $$p < \sqrt{a} < p+1.$$

Diferența $a-p^2=r$ este *restul* rădăcinii patrate.

Când r e *nul*, avem

$$p = \sqrt{a} \qquad \text{(rădăcină } \textit{exactă}\text{)}.$$

Neegalitățile (9) ne dau

$$r = a-p^2 < (p+1)^2 - p^2 = 2p+1$$

sau

$$r < 2p+1.$$

Prin urmare: *restul rădăcinii patrate a unui număr este cel mult egal cu dublul acestei rădăcini.*

OBSERVARE. Extragerea rădăcinii patrate exacte este o *împărțire particulară*, în care se dă numai deîmpărțitul și se cere ca *împărțitorul să fie egal cu câtul.*]

125. Aproximații fracționare. Dacă a e un număr *întreg* sau *fracționar*, putem calculà $\sqrt{a}$ întrebuințând șirurile următoare:

(F_m) $$0,\ \frac{1}{m},\ \frac{2}{m},\ \ldots,\ \frac{p}{m},\ \frac{p+1}{m},\ \ldots$$

(F_m^2) $$0,\ \frac{1}{m^2},\ \frac{4}{m^2},\ \ldots,\ \frac{p^2}{m^2},\ \frac{(p+1)^2}{m^2},\ \ldots$$

Două cazuri se pot întâmplà: 1⁰. sau a se găsește în șirul F_m^2, de exemplu $a=\frac{p^2}{m^2}$, și atunci zicem că

(11) $$\sqrt{a} = \frac{p}{m} \qquad \text{(rădăcină fracționară } \textit{exactă}\text{)};$$

2⁰. sau a este cuprins între două numere consecutive din șirul F_m^2, de exemplu

(12) $$\frac{p^2}{m^2} < a < \frac{(p+1)^2}{m^2}$$

și în acest caz zicem că $\frac{p}{m}$ este $\sqrt{a}$ *cu aproximație de* $\frac{1}{m}$ *prin lipsă* (aproximație *fracționară*) și $\frac{p+1}{m}$ este $\sqrt{a}$ cu aproximație de $\frac{1}{m}$ *prin adaos* și scriem

(13) $$\frac{p}{m} < \sqrt{a} < \frac{p+1}{m}.$$

In particular putem calculà rădăcina patrată a unui număr întreg sau fracționar cu aproximație de 0,1, 0,01, 0,001, etc., prin lipsă sau prin adaos, adică putem calculà $\sqrt{a}$ cu 1, 2, 3, ... cifre zecimale exacte.

OBSERVARE. A calculà rădăcina patrată cu aproximație de o unitate prin lipsă, însemnează a calculà numai *partea întreagă* a rădăcinii patrate.

126. Numărul cifrelor rădăcinii patrate (cu aproximație de o unitate prin lipsă). Din șirurile:

Numere:	1	1 sau 2 cifre	**100**	3 sau 4 cifre	**10 000**	5 sau 6 cifre	**1 000 000**	...
Rădăcini:	1	1 cifră	10	2 cifre	100	3 cifre	1000	...

rezultă că numerele întregi cu 1 sau 2 cifre au rădăcina patrată formată *dintr'o singură cifră*; numerele cu 3 sau 4 cifre au rădăcina patrată formată din 2 *cifre* și așà mai departe.

REGULĂ. Ca să știm *câte cifre are rădăcina patrată* (cu aproximație de o unitate prin lipsă) a unui număr întreg, despărțim numărul în grupe de câte 2 cifre ultima grupă poate aveà 1 sau 2 cifre. *Numărul acestor grupe este numărul cifrelor rădăcinii.*

EXEMPLU. Numărul 3 725 892 descompus în grupe de câte 2 cifre (dela dreapta spre stânga) ne dă 4 grupe: 3.72.58.92. Prin urmare rădăcina patrată a acestui număr are 4 cifre.

127. Calculul rădăcinii patrate. Să presupunem că rădăcina patrată (exactă sau cu aproximație de o unitate prin lipsă) a unui număr pozitiv N ar fi un număr întreg ν format din *două cifre:* a și b. Am aveà dar

$$(14) \qquad \nu^2 \leqq N < (\nu+1)^2 \quad \text{cu} \quad \nu = a.10 + b$$

sau, desvoltând patratele [115],

$$(15) \qquad a^2.100 + 2ab.10 + b^2 \leqq N < a^2.100 + 2a(b+1).10 + (b+1)^2.$$

Aceste neegalități ne arată că N conține cel puțin a^2 *sute*. Prin urmare *zecile* (a) ale rădăcinii patrate se află căutând, care este *cel mai mare patrat perfect* (a^2), care se cuprinde în *sutele* numărului N.

Scăzând a^2 *sute* din fiecare membru al neegalităților (15) și însemnând cu R diferența $N - a^2.100$, ne rămâne

$$(16) \qquad 2ab.10 + b^2 \leqq R < 2a(b+1).10 + (b+1)^2.$$

Prin urmare restul R conține cel puțin $2ab$ *zeci*. Cifra a doua (b) a rădăcinii patrate, se află dar, împărțind *zecile* ($2ab$) ale restului R prin *de 2 ori numărul aflat la rădăcină* ($2a$).

Diferenţa

$$(17) \qquad R_1 = R - (2ab.10 + b^2)$$

este *restul rădăcinii.*

Dacă $\sqrt{N}$ e un număr format din 3 sau mai multe cifre, grupa zecilor (a), oricâte cifre ar aveà, este rădăcina patrată a *sutelor* numărului N, cu aproximaţie de o unitate prin lipsă, adică rădăcina patrată din numărul, care se obţine, când ştergem 2 *cifre* dela dreapta lui N.

OBSERVARE. Scăzătorul $2ab.10 + b^2$ din diferenţa (17) se mai poate scrie $(2a.10 + b).b$. Pentru a-l formà e de ajuns, în practică, să scriem cifra b la dreapta numărului $2a$ şi să înmulţim cu b.

REGULĂ PRACTICĂ *pentru calcularea rădăcinii patrate dintr'un număr întreg:*

Operaţia I. Despărţim numărul în grupe de câte 2 *cifre* dela dreapta spre stânga: grupa întâia (dela stânga) poate aveà şi o singură cifră.

Operaţia II. *Calculăm rădăcina patrată din grupa întâia* dela stânga (cu aproximaţie de o unitate prin lipsă); aceasta e *prima cifră a rădăcinii. Scădem patratul acestei cifre din grupa întâia a numărului* şi obţinem *restul întâi.*

Operaţia III. La dreapta acestui rest scoborîm *prima cifră din grupa a doua.* Formăm astfel *deîmpărţitul întâi*, pe care-l împărţim prin *de 2 ori cifra aflată la rădăcină.* Câtul obţinut este *cifra a doua a rădăcinii* sau o cifră mai mare.

Scriem această cifră la dreapta împărţitorului şi dedesubtul lui şi înmulţind aceste două numere obţinem *produsul întâi. Scoborîm la dreapta deîmpărţitului întâi şi cifra a doua din grupa a doua* şi *scădem* din acest număr *produsul întâi.* Dacă scăderea e posibilă, cifra a doua a rădăcinii este bună; în caz contrar, micşorăm această cifră cu câte o unitate, pânăce scăderea se poate face. Obţinem astfel *restul al doilea.*

Operaţia IV. La dreapta restului al doilea scoborîm *prima cifră din grupa a treia* a numărului. Formăm astfel *deîmpărţitul al doilea, pe care-l împărţim prin de 2 ori numărul aflat la rădăcină* (format acum din 2 cifre). Câtul obţinut este *cifra a treia a rădăcinii* sau o cifră mai mare.

Scriem această cifră la dreapta împărţitorului şi dedesubtul lui şi înmulţind aceste două numere obţinem *produsul al doilea. Scoborîm a dreapta deîmpărţitului al doilea şi cifra a doua din grupa a treia* şi *scădem* din acest număr *produsul al doilea.* Dacă scăderea e posibilă, cifra a treia a rădăcinii este bună; în caz contrar micşorăm această cifră cu câte o unitate, pânăce scăderea se poate face.

Continuăm astfel, pânăce am scoborît toate grupele numărului şi am calculat toate cifrele rădăcinii.

OBSERVARE. Fiecare *rest* al rădăcinii patrate *nu poate fi mai mare decât de* 2 *ori numărul aflat la rădăcină.*

EXEMPLU:

$\sqrt{3.48.75}$	186		
1			
24 : 2	$2 \times 1 = 2$	iau cifra 8	
2 48	$29 \times$	$28 \times$	
2 24	9	8	
24 7 : 36	$261 > 248$	$224 < 248$	cifra 8 e bună.
24 75	$2 \times 18 = 36$	iau cifra 6	
21 96	$367 \times$	$366 \times$	
2 79	7	6	
	$2569 > 2475$	$2196 < 2475$	cifra 6 e bună.

Avem $279 < 2 \times 186 + 1 = 373$; deci rădăcina patrată a numărului 34 875, cu aproximaţie de o unitate prin lipsă, este **186**.

O *tablă*, care ne dă *patratele* tuturor numerelor întregi până la 10^n, ne dă deodată *primele n cifre dela stânga* ale rădăcinii patrate. Astfel, pentru $\sqrt{34875}$, TABLA III ne arată (în coloana a doua) că 348 este cuprins între $324 = 18^2$ şi $361 = 19^2$; prin urmare grupa zecilor rădăcinii căutate este 18, fiindcă 18 este rădăcina patrată din 348 cu aproximaţie de o unitate prin lipsă.

128. Calculul rădăcinii de ordin *n*. Regula dată pentru extragerea rădăcinii patrate ne conduce la următoarea

REGULĂ GENERALĂ pentru extragerea *rădăcinii de ordin n*:

Operaţia I. Despărţim numărul în grupe de câte *n* cifre dela dreapta spre stânga; prima grupă dela stânga poate aveà mai puţin ca *n* cifre. *Pentru fiecare din aceste grupe avem câte o cifră la rădăcină.*

Operaţia II. Calculăm rădăcina a *n*-a a grupei întâia dela stânga (cu aproximaţie de o unitate prin lipsă). Aceasta e *prima cifră a rădăcinii.* Scădem puterea a *n*-a a acestei cifre din grupa întâia a numărului şi obţinem *restul întâi.*

Operaţia III. La dreapta acestui rest scoborîm *prima cifră a grupei a doua* a numărului. Formăm astfel *deîmpărţitul întâi,* pe care-l împărţim prin *de n ori rădăcina aflată ridicată la puterea* $n-1$. Câtul obţinut este *cifra a doua a rădăcinii* sau o cifră mai mare. Ca să o încercăm, calculăm puterea a *n*-a a numărului (de 2 cifre) găsit la rădăcină şi dacă această putere se poate scădeà din *primele două grupe* dela stânga ale numărului de sub radical, cifra a doua este bună; în caz contrariu micşorăm această cifră cu câte o unitate, pânăce scăderea se poate facè. Obținem astfel *restul al doilea*.

Operația IV. Cu acest rest procedăm ca şi cu restul întâi, pentru a aflà *cifra a treia a rădăcinii*. Puterea a n-a a primelor 3 cifre dela rădăcină se scade din primele 3 grupe ale numărului de sub radical şi aşà mai departe.

Continuăm astfel până ce am întrebuințat toate grupele numărului dat.

129. Rădăcina cubică. Aplicând *regula generală*, găsim pentru $n = 3$:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{10.421.528} & 218 \\
8 & 2^3 = 8 \\
24 : 12 & 3 \times 2^2 = 12 \\
10\,421 & 22^3 = 484 \times 22 = 10648 > 10421, \text{ cifra 2 e prea mare.} \\
9\,261 & 21^3 = 441 \times 21 = 9261 < 10421, \text{ cifra } \mathbf{1} \text{ e bună.} \\
\hline
1\,1605 : 1323 & 3 \times 21^2 = 3 \times 441 = 1323 \\
10\,421\,528 & 218^3 = 10\,360\,232 < 10\,421\,528 \text{ cifra 8 e bună.} \\
10\,360\,232 & \\
61\,296 &
\end{array}
$$

Deci rădăcina cubică din 10 421 528, cu aproximație de o unitate prin lipsă, e 218.
Cu ajutorul unei *table*, care dă *cuburile* numerelor întregi până la 10^n, putem aveà deodată *primele n cifre dela stânga* ale rădăcinii cubice.

Astfel, pentru exemplul de mai sus, TABLA III ne arată (în coloana a treia) că

$$9261 < 10421 < 10648$$

sau

$$21^3 < 10421 < 22^3,$$

de unde deducem

$$21 < \sqrt[3]{10421} < 22.$$

Prin urmare rădăcina cubică a numărului 10 421 528 are 21 *zeci*.

130. Rădăcina dintr'o fracție. 1⁰. Fracție ordinară. Avem

$$\text{(XXXIX)} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \text{fiindcă} \qquad \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$$

REGULĂ. Ca să extragem rădăcina a n-a dintr'o *fracție ordinară*, extragem rădăcina a n-a *şi din numărător şi din numitor*.

EXEMPLU: $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$; $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$; $\sqrt[3]{\frac{a^3}{8}} = \frac{a}{2}$.

OBSERVARE. Când extragem aceeaş rădăcină şi din numărătorul şi din numitorul unei fracţii, valoarea fracţiei *se schimbă* şi anume fracţia se măreşte, dacă e subunitară şi se micşorează, dacă e supraunitară.

Astfel avem:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \quad \text{fiindcă} \quad \frac{1}{4} < 1;$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{5}{4} = \frac{80}{64} < \frac{125}{64} \quad \text{fiindcă} \quad \frac{125}{64} > 1.$$

2°. Fracţie zecimală. Observăm că

$$(18) \qquad \sqrt[n]{10^{np}} = 10^p \quad \text{fiindcă} \quad (10^p)^n = 10^{np}.$$

De aci rezultă că *rădăcina a n-a* (exactă) *dintr'o fracţie zecimală f cu np cifre zecimale este o fracţie zecimală φ cu p cifre zecimale.*

In adevăr, fracţia zecimală f se scrie ca fracţie ordinară

$$f = \frac{a}{10^{np}},$$

unde a e un număr întreg şi dacă $\sqrt[n]{a}$ se poate extrage exact, avem $a = b^n$ (b întreg) şi

$$\sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{\frac{a}{10^{np}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{10^p} = \frac{b}{10^p} = \varphi.$$

Prin urmare φ e o fracţie zecimală cu p cifre zecimale.

REGULĂ. Pentru a extrage rădăcina a n-a dintr'un număr *zecimal*, despărţim numărul în *grupe* de câte n cifre *începând dela virgula zecimală* spre stânga şi spre dreapta. Ultima grupă dela stânga poate să aibă mai puţin ca n cifre, dar *ultima grupă dela dreapta trebue să aibă totdeauna n cifre* (la nevoe o complectăm cu zeruri scrise la dreapta numărului zecimal).

Ştergem apoi virgula zecimală şi extragem rădăcina ca la numerele întregi. *Fiecare grupă de cifre dela număr ne dă câte o cifră la rădăcină.* Din partea întreagă a numărului rezultă partea întreagă a rădăcinii, iar din partea zecimală a numărului rezultă partea zecimală a rădăcinii.

Dacă rădăcina nu se poate calculà *exact*, adică dacă nici unul din resturi nu e nul, putem continuà operaţia la infinit şi *putem căpătà la rădăcină oricâte cifre zecimale vrem.*

De exemplu, pentru a aveà *primele p cifre zecimale* la rădăcina a n-a a unui număr, e de ajuns să scriem acest număr cu np cifre zecimale (complectându-le cu zeruri, dacă e nevoe) şi să calculăm rădăcina întrebuințând toate aceste p grupe de câte n cifre zecimale. In acest caz zicem că am calculat rădăcina a n-a *cu aproximație de* $\frac{1}{10^p}$.

EXEMPLU: Să se calculeze $\sqrt{2{,}283}$ cu aproximație de 0,01.
Scriem $\sqrt{2{,}28.30}$ și calculăm

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2.28.30} & 151 \\ 1\,28 & \begin{array}{r|r} 25 & 301 \\ 5 & \cdot\,1 \\ \hline 125 & 301 \end{array} \\ 33.0 & \\ 29 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{rădăcina: } 1{,}51 \\ \text{restul: } 0{,}0029. \end{array}$$

Despărțim la dreapta rădăcinii calculate 151 atâtea cifre zecimale câte *grupe de cifre zecimale* a avut numărul.

3°. Număr întreg. Orice număr *întreg* se poate scrie ca număr *zecimal*, punându-i la dreapta oricâte zeruri vrem *ca cifre zecimale*.

Prin urmare, dacă un număr întreg nu e puiere perfectă, punându-i *zeruri* ca cifre zecimale, putem calculà rădăcina a n-a a lui, prin regula precedentă, cu orice aproximație vrem.

EXEMPLU. Să se calculeze $\sqrt{5}$ cu 3 cifre zecimale.
Scriem $\sqrt{5{,}00.00.00}$ și calculăm

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5.00.00.00} & 2236 \\ 1\,0.0 & \begin{array}{r|r|r} 42 & 443 & 4466 \\ 2 & 3 & \cdot\,6 \\ \hline 84 & 1329 & 26796 \end{array} \\ 160.0 & \\ \underline{1329} & \\ 2710.0 & \\ \underline{26796} & \\ 304 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{rădăcina: } 2.236 \\ \text{restul: } 0{,}000304 \end{array}$$

131. Numere iraționale. Dacă un număr întreg a nu e o putere a n-a perfectă, $\sqrt[n]{a}$ nu poate fi un *număr întreg*; nu poate fi nici *o fracție*, fiindcă puterea unei fracții ordinare nereductibile e *o fracție ordinară nereductibilă* [110]. Prin urmare, în acest caz, operația inversă $\sqrt[n]{a}$ e *imposibilă* cu ajutorul numerelor raționale și pentru a o puteà efectuà suntem siliți să întroducem în Matematici numere noi.

In general, dacă a e un număr *pozitiv*, $\sqrt[n]{a}$

1°. sau se poate calculà exact sub formă de număr *întreg*;

2°. sau se poate calculà exact sub formă de număr *fracționar*;

3°. sau se poate calculà *cu aproximație*, cu oricâte cifre zecimale vrem. In acest caz numărul $\alpha = \sqrt[n]{a}$, se numește *număr irațional*.

EXEMPLE de numere *iraționale*:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135624\ldots, \qquad \sqrt[6]{17576} = 5{,}0990195186\ldots$$

unde prin punctele puse la sfârşit arătăm că ar trebui să scriem un număr *infinit* de cifre zecimale.

Regula, după care găsim aceste cifre zecimale, e regula extragerii rădăcinii patrate [127] în exemplul întâi şi a rădăcinii a 6-a [128] în exemplul al doilea.

In general, vom zice că o expresie numerică e *iraţională*, dacă conţine *radicali*.

EXEMPLE. Expresii numerice *iraţionale*:

$$\sqrt[5]{17},\quad \frac{5+\sqrt{2}}{3-\sqrt{7}},\quad \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}.$$

132. Legile radicalilor. 1°. *Extragerea rădăcinii dintr'un produs este o operaţie distributivă.* Adică avem:

$$\text{(XL)}\qquad \sqrt[n]{a.b.c} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.$$

In adevăr, ridicând la puterea n ambii membri ai acestei egalităţi, căpătăm rezultate *egale* [121 şi 111, 3]:

$$\left(\sqrt[n]{a.b.c}\right)^n = a.b.c \quad \text{şi} \quad \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}\right)^n = a.b.c.$$

Invers, avem

$$\text{(XLI)}\qquad \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}.$$

REGULĂ. *Ca să înmulţim mai mulţi radicali, cari au acelaş indice, înmulţim cantităţile de sub radical* şi din produsul obţinut extragem rădăcina arătată de indicele comun.

Astfel avem

$$\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2.a} = \sqrt[3]{a^3} = a,\quad \sqrt{a}.\sqrt{x^2} = \sqrt{ax^2};$$

şi invers

$$\sqrt[3]{8ab^3c^2} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b^3}.\sqrt[3]{c^2} = 2.\sqrt[3]{a}.b.\sqrt[3]{c^2}$$

sau

$$(19)\qquad \sqrt[3]{8ab^3c^2} = 2b\sqrt[3]{ac^2}.$$

OBSERVARE. Când înlocuim expresia întâia prin expresia a doua din egalitatea (19), zicem că *am scos factorul* $8b^3$ *de sub radical*; când înlocuim expresia a doua prin expresia întâia din egalitatea (19), zicem că *am întrodus factorul* $2b$ *sub radical*.

REGULĂ. *Putem scoate un factor de sub un radical, dacă extragem din acest factor rădăcina arătată de indicele radicalului.*

Putem introduce un factor sub un radical, dacă ridicăm acest factor la puterea arătată de indicele radicalului.

EXEMPLE: Scoatere de sub radical:

$$\sqrt{7a^2x} = a\sqrt{7x}, \quad \sqrt[3]{8xy} = 2\sqrt[3]{xy}, \quad \sqrt[n]{a^n b^p} = a\sqrt[n]{b^p}.$$

Introducere sub radical:

$$a\sqrt[n]{bc^2} = \sqrt[n]{a^n bc^2}, \quad 5x^2y\sqrt[3]{2y^2z} = \sqrt[3]{125x^6y^3 . 2y^2z} = \sqrt[3]{250\,x^6y^5z}.$$

2⁰. *Dacă înmulţim exponentul cantităţii de sub radical cu un număr m, ridicăm rădăcina la puterea m.* Adică

$$\text{(XLII)} \qquad \sqrt[q]{a^{pm}} = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^m.$$

In adevăr, dacă m e un număr întreg şi pozitiv, avem

$$\sqrt[q]{a^{pm}} = \sqrt[q]{\underset{1}{a^p} . \underset{2}{a^p} \ldots \underset{m}{a^p}} = \underset{1}{\sqrt[q]{a^p}} . \underset{2}{\sqrt[q]{a^p}} \ldots \underset{m}{\sqrt[q]{a^p}} = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^m.$$

3⁰. *Dacă înmulţim indicele unui radical cu un număr m, extragem rădăcina a m-a din acel radical.* Adică

$$\text{(XLIII)} \qquad \sqrt[qm]{a^p} = \sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}}.$$

In adevăr, prima expresiune ridicată la puterea qm ne dă a^p; a doua expresiune ridicată întâi la puterea m şi apoi la puterea q (adică tot la puterea qm) ne dă succesiv

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}}\right)^m = \sqrt[q]{a^p} \quad \text{şi} \quad \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q = a^p.$$

Expresiunile (XLIII) sunt *egale*, fiindcă ridicate la *aceeaş* putere (qm) ne dau rezultate *egale*.

DEFINIŢII. *A amplifică un radical* înseamnează *a înmulţi şi indicele radicalului şi exponentul cantităţii de sub radical cu un acelaş număr.*

A simplifică un radical înseamnează *a împărţi şi indicele radicalului şi exponentul cantităţii de sub radical cu un acelaş număr.*

4⁰. Dacă *amplificăm* sau *simplificăm* un radical, *valoarea radicalului nu se schimbă.*

In adevăr avem

$$\sqrt[qm]{a^{pm}} = \sqrt[q]{\sqrt[m]{a^{pm}}} \quad \text{şi} \quad \sqrt[m]{a^{pm}} = \left(\sqrt[m]{a^p}\right)^m = a^p.$$

Deci

$$\text{(XLIV)} \qquad \sqrt[qm]{a^{pm}} = \sqrt[q]{a^p}$$

şi *viceversa*.

EXEMPLE:

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}, \quad \sqrt[1]{a} = \sqrt[n]{a^n} = a; \quad \sqrt[10]{a^5} = \sqrt{a}, \quad \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[1]{x^2} = x^2.$$

133. Aducerea radicalilor la acelaş indice. Dacă avem mai mulţi radicali cu indici *diferiţi*, legea 4° ne permite să-i scriem cu *acelaş indice*, fără să schimbăm valorile rădăcinilor date.

Să luăm, de exemplu,

$$(20) \qquad \sqrt[p]{a}, \quad \sqrt[q]{b}, \quad \sqrt[r]{c}.$$

Dacă m e un *multiplu comun* al indicilor p, q, r şi dacă $m:p = p'$, $m:q = q'$, $m:r = r'$, amplificând primul radical cu p', al doilea cu q', al treilea cu r' şi observând că $pp' = m$, $qq' = m$, $rr' = m$, căpătăm radicalii cu *acelaş indice*

$$(21) \qquad \sqrt[m]{a^{p'}}, \quad \sqrt[m]{b^{q'}}, \quad \sqrt[m]{c^{r'}},$$

care au valori respectiv *egale* cu rădăcinile (20).

Această operaţie se numeşte *aducerea radicalilor la acelaş indice*.

In particular, se poate alege ca indice comun *cel mai mic multiplu comun* al indicilor radicalilor daţi.

EXEMPLU: Să se aducă la acelaş indice radicalii

$$\sqrt{x^3}, \quad \sqrt[3]{x^5}, \quad \sqrt[6]{x}.$$

Cel mai mic multiplu comun al indicilor 2, 3, 6 este 6. Amplificând dar primul radical cu $6:2 = 3$ şi al doilea radical cu $6:3 = 2$, obţinem

$$\sqrt{x^3} = \sqrt[6]{x^9}, \quad \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[6]{x^{10}} \quad \text{şi} \quad \sqrt[6]{x}.$$

134. Operaţiile cu radicali.

1°. Adunarea şi scăderea. Ca să calculăm o *sumă algebrică de mai mulţi radicali*, calculăm întâi valoarea fiecărui radical şi apoi facem suma algebrică a rezultatelor obţinute.

EXEMPLU. $\sqrt{49}-\sqrt[8]{8}+\sqrt{\frac{1}{16}}=7-2+\frac{1}{4}=5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$.

OBSERVARE. *Extragerea rădăcinii dintr'o sumă algebrică nu e o operaţie distributivă.* Adică avem, în general,

$$\sqrt[n]{a-b+c} \neq \sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}. \tag{22}$$

De exemplu

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \text{dacă} \quad ab \neq 0,$$

fiindcă, ridicând la patrat [85], membrul întâi ne dă $a+b$, iar membrul al doilea ne dă

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \neq a+b.$$

Doi sau mai mulţi radicali se zic *asemenea*, când au *acelaş indice* şi *aceeaş cantitate sub radical.*

REGULĂ. *O sumă algebrică de radicali asemenea se efectuează ca o sumă algebrică de termeni asemenea* [112].

EXEMPLU:

$$\sqrt{3}-2\sqrt{\frac{3}{25}}+\sqrt{12}=\sqrt{3}-2\frac{\sqrt{3}}{5}+\sqrt{3.4}=\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{3}+2\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3}\left(1-\frac{2}{5}+2\right)=\frac{13}{5}\sqrt{3}.$$

2⁰. Inmulţirea şi împărţirea. REGULĂ. *Ca să înmulţim (sau să împărţim) doi radicali, aducem întâi radicalii la acelaş indice; apoi înmulţim (sau împărţim) cantităţile de sub radicalii cu acelaş indice* şi din *produsul* (sau *câtul*) obţinut *extragem rădăcina arătată de indicele comun.*

EXEMPLE:

$$\sqrt{x^3}.\sqrt[3]{x^5}.\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{x^9}.\sqrt[6]{x^{10}}.\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{x^9.x^{10}.x}=\sqrt[6]{x^{20}}=\sqrt[3]{x^{10}}.$$

$$\sqrt[6]{a^5}:\sqrt[15]{a^2}=\sqrt[30]{a^{25}}:\sqrt[30]{a^4}=\sqrt[30]{a^{25}:a^4}=\sqrt[30]{a^{21}}=\sqrt[10]{a^7}.$$

3⁰. Ridicarea la putere şi extragerea rădăcinii. După *legile radicalilor* [122, 2 şi 3], rezultă următoarea

REGULĂ. *Ca să ridicăm un radical la o putere, ridicăm la această putere cantitatea de sub radical* şi apoi, din puterea obţinută, extragem rădăcina arătată de indicele radicalului.

Ca să extragem o rădăcină dintr'un radical, extragem din cantitatea de sub radical *rădăcina arătată de produsul indicilor radicalilor.* Adică:

(XLV) $$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^m = \sqrt[q]{a^{pm}}$$

și

(XLVI) $$\sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[qm]{a^p}.$$

EXEMPLE: $\left(\sqrt[3]{a^5}\right)^2 = \sqrt[3]{a^{10}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{xy^2}} = \sqrt[6]{xy^2}$.

Observare. De aci rezultă că

(23) $$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[pq]{a}.$$

Invers, dacă avem $n = p.q.r$, rădăcina a n-a dintr'un număr se poate calculà *prin 3 extrageri de rădăcină consecutive* cu indicii p, q, r respectivi. Ordinea în care facem aceste trei operații e *indiferentă.*

Adică avem:

(24) $$\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}} = \sqrt[r]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}} = \sqrt[pqr]{a}.$$

EXEMPLU: $\sqrt[6]{15625} = \sqrt{\sqrt[3]{15625}} = \sqrt{125} = 5$

sau $\sqrt[6]{15625} = \sqrt[3]{\sqrt{15625}} = \sqrt[3]{25} = 5$.

135. Exponenți fracționari. Am văzut că expresiunea $\sqrt[q]{a^p}$ nu-și schimbă valoarea prin *amplificare* sau *simplificare*; dar, prin aceste operații, nici raportul $\frac{p}{q}$ nu-și schimbă valoarea. De aceea putem zice că valoarea radicalului $\sqrt[q]{a^p}$ nu depinde de numerele p și q separat, ci numai de *raportul* lor $\frac{p}{q}$.

1°. Dacă p e *divizibil* prin q, avem

$$\frac{p}{q} = m \quad \text{sau} \quad p = qm \qquad (m \text{ întreg})$$

și putem scrie

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{pm}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m = a^{\frac{p}{q}}.$$

Așa dar un *radical* poate fi scris ca o *putere cu exponent fracționar.*

2°. Dacă p nu e divizibil prin q, expresiunea $a^{\frac{p}{q}}$ nu mai are sens Totuși, dacă *prin definiție* convenim să scriem, în toate cazurile,

(XLVII) $$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

constatăm că operațiile cu *radicali aritmetici* se reduc la operații cu *puteri*, aplicând și la puterile cu *exponenți fracționari* toate regulele date pentru puterile cu exponenți întregi.

Astfel, pentru exponenții fracționari

$$\lambda = \frac{p}{q}, \quad \mu = \frac{r}{s}$$

avem

$$a^\lambda a^\mu = a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} . \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} . \sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\lambda+\mu}.$$

Prin urmare [**111**, 2] și în acest caz putem scrie

(XXIV) $$a^\lambda a^\mu = a^{\lambda+\mu}.$$

In acelaș fel se demonstrează că și celelalte formule dela paragrafele **112**, **113**, **114** se aplică la puterile cu exponenți fracționari.

Definiție. *O putere cu exponent fracționar* este o *rădăcină*, în care *numitorul* exponentului fracționar este *indicele radicalului*, iar *numărătorul* exponentului fracționar este *exponentul cantității de sub radical.*

EXEMPLE: $3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^3 = a^{\frac{3}{1}} = \sqrt[1]{a^3}$.

OBSERVARE. Avem

$$(8x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8x} = 2\sqrt[3]{x} \quad \text{dar} \quad 8x^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{x}.$$

Din definiția precedentă rezultă imediat operațiile de amplificare și simplificare ale radicalilor:

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pm}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{pm}}.$$

136. Exponenți fracționari negativi. Generalizând formula (XXVIII) [pag. 96] vom scrie și în acest caz

(25) $$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

EXEMPLU: $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}.$

OBSERVARE. Să nu se confunde exponenţii *fracţionari* cu exponenţii *negativi*. Astfel

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} \quad \text{pe când} \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}.$$

137. Fracţii egale. Când avem un şir de fracţii *egale* şi *pozitive*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \lambda,$$

ridicându-le la puterea n, deducem [84, 1]

$$\lambda^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = \frac{e^n}{f^n} = \frac{a^n + c^n + e^n}{b^n + d^n + f^n}$$

şi extragând apoi rădăcina a n-a, găsim

$$(26) \qquad \lambda = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{\sqrt[n]{a^n + c^n + e^n}}{\sqrt[n]{b^n + d^n + f^n}},$$

unde trebue să luăm pentru radicali valorile lor *aritmetice*.

In particular, pentru $n = 2$, putem scrie

$$(\text{XLVIII}) \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + e^2}}{\sqrt{b^2 + d^2 + f^2}}.$$

138. Raţionalizare. In calcule, ca să evităm împărţirile prin radicali, amplificăm *fracţiile, care au numitori iraţionali*, cu o cantitate, care le transformă în fracţii *egale* cu numitori *raţionali*. Această transformare se numeşte *raţionalizare*.

Expresiunile $a + \sqrt{b}$ cu $a - \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ cu $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ se zic *conjugate*. Produsul lor [116] e raţional:

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b,$$
$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$$

Prin urmare, când numitorul unei fracţii are un factor *iraţional* de această formă, raţionalizarea se face amplificând fracţia cu *conjugata* acestui factor.

1°. Din

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$$

înmulțind ambii termeni cu $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, deducem [132, 1]

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}.$$

EXEMPLE:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70710\ldots;\quad \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0{,}77459\ldots$$

2°. Din

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

amplificând fracția cu conjugata numitorului, deducem

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$$

EXEMPLU: $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5} = \frac{\sqrt{20}-\sqrt{12}}{2} = 0{,}50401\ldots$

139. Compararea radicalilor. Din definiția radicalilor aritmetici, rezultă că, dacă a și b sunt două numere pozitive,

$$\text{din}\quad a > b \quad \text{rezultă} \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b},$$

rădăcinile fiind calculate exact sau cu o aproximație suficientă.

Dacă radicalii n'au acelaș indice, pentru a-i putea compară, *îi aducem întâi la acelaș indice* și apoi comparăm cantitățile de sub radicali.

Vedem astfel că, și pentru exponenți *fracționari*

$$\lambda = \frac{p}{q}, \quad \mu = \frac{r}{s},$$

dacă numerele sunt *pozitive* [119, 2 și 3], putem zice că:

1°. din $a > b$ rezultă $a^\lambda > b^\mu$;

2°. din $\lambda > \mu$ rezultă

$$\begin{aligned} a^\lambda &> a^\mu \quad \text{pentru} \quad a > 1 \\ a^\lambda &= a^\mu \quad \text{pentru} \quad a = 1 \\ a^\lambda &< a^\mu \quad \text{pentru} \quad a < 1. \end{aligned}$$

EXEMPLE: Avem $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ fiindcă $2 < 3$.

Ca să comparăm $\sqrt[3]{5}$ cu $\sqrt{3}$, vom scrie

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}, \quad \sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

şi fiindcă $25 < 27$, avem $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$ sau $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$.

140. Operaţiile cu numere apropiate. Calculele cu radicali ne arată că există numere, pe care nu le putem scrie decât prin valori apropiate. In general, în practică, nu putem sau nu avem nevoe să luăm întotdeauna datele unei probleme cu toate cifrele lor zecimale şi atunci căutăm să obţinem şi pentru rezultate *valori apropiate*, cu o aproximaţie *determinată* sau cu cea mai bună aproximaţie *posibilă*.

Dacă ν e valoarea *exactă* a unui număr şi n valoarea lui *apropiată* [90], diferenţa

$$|\nu - n| = \varepsilon$$

se numeşte *eroare*. Dacă valoarea apropiată e mai mică decât valoarea exactă a numărului, zicem că eroarea e *prin lipsă*; în caz contrariu eroarea e *prin adaos* sau *prin exces*.

Sunt cazuri însă, când nu cunoaştem nici eroarea ce o facem şi nici *sensul* acestei erori; ştim numai că eroarea e *mai mică decât un număr* α (care se numeşte *limita superioară* a erorii). In acest caz avem

$$|\nu - n| < \alpha$$

şi prin urmare [41, 3]

$$n - \alpha < \nu < n + \alpha.$$

De exemplu, când datele problemei sunt rezultatul unor *măsurări*, fie din cauza imperfecţiunei instrumentelor de măsură (balanţa, termometrul, şurubul micrometric, etc.), fie din nedeprinderea noastră de a aprecià măsura cu preciziunea dorită, numerele căpătate prin aceste măsurări sunt valori *apropiate* cu erori necunoscute nici în valoare, nici în sens. Putem doar preciză o *limită superioară* a erorilor făcute.

Când calculăm cu valorile apropiate ale unor numere *cunoscute* (cum sunt numerele cu multe cifre zecimale), trebue să ştim cu ce aproximaţie să luăm aceste valori apropiate, ca să fim siguri că obţinem rezultatul cu aproximaţia *cerută*.

In cazul unei *sume algebrice*, din teorema cu privire la valorile absolute [41, 5] rezultă că: *eroarea sumei poate fi cel mult egală cu suma erorilor termenilor ei* (1).

(1) Exerciţiul 7, pag. 31.

Prin urmare dacă avem o sumă de n termeni și dacă vrem să calculăm suma cu o eroare mai mică decât α, va fi deajuns să luăm fiecare termen cu o eroare mai mică decât $\frac{\alpha}{n}$.

EXEMPLE de calcule *cu radicali.*

1°. Să se calculeze produsul $8 \times \sqrt{45}$ cu o eroare mai mică decât 0,00001.

Observând că

$$\sqrt{45} = \sqrt{5 \times 9} = 3 \times \sqrt{5},$$

putem scrie

$$8 \times \sqrt{45} = 8 \times 3 \times \sqrt{5} = 24 \times \sqrt{5} = 24 \times 2{,}23606 = 53{,}66544,$$

calculând $\sqrt{5}$ cu o eroare mai mică decât 0,00001 prin lipsă. Dar e evident că, prin *înmulțirea* cu 24, am mărit eroarea de 24 de ori, adică produsul e obținut cu o eroare prin lipsă mai mică decât

$$24 \times 0{,}00001 = 0{,}00024 > 0{,}00001.$$

Pentru a nu mări eroarea făcută prin extragerea rădăcinii patrate, e mai bine *să introducem întâi toți factorii sub radical* [132, 1] și apoi să extragem rădăcina patrată cu aproximația cerută. Astfel găsim:

$$8 \times \sqrt{45} = \sqrt{64 \times 45} = \sqrt{2880} = 53{,}66563.$$

2°. Să se calculeze valoarea fracției

$$\frac{7}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

cu o eroare mai mică decât 0,001.

Dacă luăm $\sqrt{3} = 1{,}7320$, $\sqrt{2} = 1{,}4142$ cu 4 cifre zecimale, găsim

$$\frac{7}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{7}{1{,}7320 - 1{,}4142} = \frac{7}{0{,}3178} = 22{,}0264$$

necunoscând nici valoarea și nici sensul erorii rezultatului.

Făcând însă numitorul rațional:

$$\frac{7}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 7(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{147} + \sqrt{98}$$

și calculând fiecare termen cu o eroare mai mică decât 0,0001 prin lipsă, suma

$$\sqrt{147} + \sqrt{98} = 12{,}1243 + 9{,}8994 = 22{,}0237$$

reprezintă rezultatul căutat cu o eroare prin lipsă mai mică decât

$$0{,}0002 < 0{,}001.$$

III. — NUMERE IRAȚIONALE.

141. Șiruri de numere. Să însemnăm cu

$$(\alpha) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$$

un *șir infinit* de numere (diferite sau egale între ele). Numărul a_n se zice *termenul* al n-lea al șirului sau termenul de *rang* n.

Un şir de numere e *determinat*, când putem scrie valoarea oricărui termen al şirului, de îndată ce ni se spune *rangul* acestui termen. Astfel, şirurile

(27) $$1\,,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$

(28) $$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

(29) $$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$$

sunt determinate.

Termenul de rang n se mai numeşte *termenul general* al şirului. In exemplele luate, *toți* termenii şirului, se deduc din termenul general, dacă înlocuim pe n succesiv prin $1, 2, 3, \ldots$

Dacă avem

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$$

şirul e *crescător* şi dacă avem

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

şirul e *descrescător*. Şirurile crescătoare şi şirurile descrescătoare se zic şiruri *monotone*.

Şirul (27) e crescător; şirul (28) e descrescător. Pentru şirul (29) avem

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

deci $a_n < a_{n+1}$, oricare ar fi n. Şirul (29) e crescător.

Şirurile (27), (28), (29) sunt *monotone*. Şirul

(30) $$\left(-\tfrac{1}{3}\right),\ \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2,\ \left(-\tfrac{1}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n,\ \ldots$$

în care avem

$$-\tfrac{1}{3} < +\tfrac{1}{9} > -\tfrac{1}{27} < \cdots$$

nu e monoton. Acest şir se zice *alternat*, fiindcă termenii sunt în mod alternativ *pozitivi* şi *negativi*.

Dacă reprezentăm pe o axă Δ (*fig.* 26) punctele P_1, P_2, ..., P_n, ..., care au abscisele a_1, a_2, ..., a_n, ... respectiv, obținem *şirul de puncte* sau *mulțimea de puncte, care corespunde şirului* (α).

Dacă toţi termenii şirului sunt *mai mari* decât un număr determinat A, zicem că şirul e *mărginit la stânga*; dacă toţi termenii şirului sunt *mai mici* decât un număr determinat B, şirul e mărginit *la dreapta*.
Dacă avem un şir de numere mărginit şi la dreapta şi la stânga prin numerele A şi B (*fig.* 26), punctele de pe axa Δ, care corespund acestui şir, sunt situate *toate* (în număr *finit* sau *infinit*) pe segmentul AB.

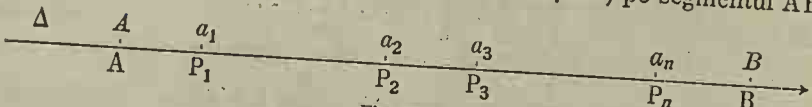


Fig. 26.

142. Cantităţi variabile. Când reprezentăm numerele prin litere, o literă oarecare a

1⁰. sau reprezintă un număr *determinat*,

2⁰. sau poate căpătà *diferite valori numerice*, de exemplu valorile unui şir de numere.

In cazul 1⁰ a e o cantitate *constantă*; în cazul 2⁰ a e o cantitate *variabilă*. A zice că *a variază*, însemnează a zice că *a trece dela o valoare numerică la alta*. Dacă a capătă succesiv valori *oricât de mari* din şirul numerelor naturale $1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$, zicem că a *creşte la infinit*.

Intr'un şir de numere, termenul general a_n e o cantitate *variabilă*, care pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, p$ capătă respectiv valorile $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$.

143. Limite. Să considerăm un şir *infinit* de numere:

$$(A) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

1⁰. Dacă termenii şirului A devin *din ce în ce mai mici*, când rangul lor e din ce în ce mai mare, sau mai precis: *dacă, oricât de mic ar fi un număr* $\varepsilon > 0$, *găsim un număr* p, *aşà ca să avem*

$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > p,$$

zicem că *şirul* A sau *termenul* a_n *tinde către zero*, când n creşte la infinit şi scriem

$$a_n \to 0 \qquad (a_n \textit{ tinde } \text{către } 0),$$

sau

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

adică *limita* lui a_n e *zero* pentru n *infinit*.

EXEMPLU: Şirul (28) *tinde către zero*, fiindcă luând $\varepsilon = \frac{1}{10^p}$, pentru $n > 10^p$ avem $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^p}$ adică $a_n < \varepsilon$.

2⁰. In general, vom zice că *șirul* A sau *termenul* a_n *tinde către o limită* λ, *când* n *crește la infinit*, dacă valoarea termenului a_n se apropie din ce în ce mai mult de numărul λ (adică dacă diferența dintre a_n și λ devine *oricât de mică vrem*), când luăm termenul a_n de rang din ce în ce mai mare. Mai precis: *șirul* A sau *termenul* a_n *tinde către limita* λ *pentru* n *infinit, dacă oricât de mic ar fi un număr pozitiv* ε, *găsim un număr* p, *așà ca să avem*

$$|\lambda - a_n| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > p.$$

In acest caz scriem

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lambda \quad \text{sau} \quad a_n \rightarrow \lambda \quad \text{sau} \quad a_n = \lambda + \alpha$$

unde α e o cantitate (pozitivă sau negativă), care *tinde către zero*, când n crește la infinit.

EXEMPLU: Șirul (29) *tinde către* 1, deoarece, oricât de mic ar fi $\varepsilon > 0$, avem

$$1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

pentru $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, adică pentru $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

3⁰. Dacă, *oricât de mare ar fi un număr* M, termenii șirului A, pentru n destul de mare, sunt *mai mari decât* M, adică *dacă, oricât de mare ar fi* M, *găsim un număr* p, *așà ca să avem*

$$a_n > M \quad \text{pentru} \quad n > p,$$

zicem că *șirul* A *crește la infinit*.

Deși *infinitul* nu e un număr determinat, totuși prin generalizare vom zice, și în acest caz, că *șirul* A sau *termenul* a_n *tinde către limita* $+\infty$, când n crește la infinit și vom scrie

$$\lim_{n=\infty} a_n = +\infty \quad \text{sau} \quad a_n \rightarrow +\infty.$$

EXEMPLU. Șirul (27) *crește la infinit* cu n, deoarece, oricât de mare ar fi un număr M, dacă P e $\sqrt{M}$ cu aproximație de o unitate prin adaos, avem $P^2 > M$ și

$$a_n = n^2 > P^2 > M \quad \text{pentru} \quad n > P.$$

4⁰. Dacă, oricât de mic (1) ar fi un număr negativ $-M$, termenii șirului A sunt *mai mici decât* $-M$ pentru n destul de mare, zicem

(1) In sens algebric.

că *şirul* A sau *termenul* a_n *tinde către* $-\infty$, când n creşte la infinit şi scriem

$$\lim_{n=\infty} a_n = -\infty \quad \text{sau} \quad a_n \to -\infty.$$

EXEMPLU: Şirul

$$-1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$$

tinde către $-\infty$, deoarece avem $a_n = -n < -M$ pentru $n > M$.

144. Număr limită. Dacă ne propunem să căutăm numărul x, care satisface la condiţiunea

$$x^2 = 2 \quad \text{sau} \quad x = \sqrt{2},$$

găsim, prin metoda extragerii rădăcinii patrate cu aproximaţie de 0,1, 0,01, 0,001, etc., următoarele *valori apropiate*:

(A) $a_1 = 1{,}4,\ a_2 = 1{,}41,\ a_3 = 1{,}414,\ a_4 = 1{,}4142,\ a_5 = 1{,}41421, \ldots$

(B) $b_1 = 1{,}5,\ b_2 = 142,\ b_3 = 1{,}415,\ b_4 = 1{,}4143,\ b_5 = 1{,}41422, \ldots$

care ridicate la patrat, ne dau

$$(31)\qquad \begin{array}{ll} a_1^2 = 1{,}96 < 2 & b_1^2 = 2{,}25 > 2 \\ a_2^2 = 1{,}9881 < 2 & b_2^2 = 2{,}0164 > 2 \\ a_3^2 = 1{,}999396 < 2 & b_3^2 = 2{,}002225 > 2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

In general, dacă a_n şi b_n sunt valorile numărului $\sqrt{2}$ apropiate *prin lipsă* şi *prin exces* cu aproximaţie de $\frac{1}{10^n}$, avem

$$(32)\qquad a_n^2 < 2, \quad b_n^2 > 2,$$

$$(33)\qquad a_n < b_n \quad \text{şi} \quad b_n - a_n = \frac{1}{10^n}.$$

Obţinem astfel *două şiruri determinate de numere raţionale* A şi B, care au proprietăţile următoare:

1°. Când n creşte, *termenii şirului* A *cresc* (sau cel puţin *nu descresc*); *termenii şirului* B *descresc* (sau cel puţin *nu cresc*), adică avem, oricare ar fi n,

$$(34)\qquad a_n \leqq a_{n+1} \quad \text{şi} \quad b_n \geqq b_{n+1}.$$

2º. Orice număr a_p din şirul A e mai mic decât orice număr b_q din şirul B.

In adevăr, dacă $p = q$ avem $a_p < b_p$;
dacă $p > q$ avem $a_p < b_p \leqq b_q$;
dacă $p < q$ avem $a_p \leqq a_q < b_q$.

3º. *Diferenţa dintre două numere* a_n şi b_n, *de acelaş rang, poate deveni oricât de mică vrem*, dacă luăm rangul n destul de mare.

In adevăr, avem

(35) $$b_n - a_n = \frac{1}{10^n}.$$

4º. *In şirul* A *nu există niciun număr mai mare decât toate numerele din şirul* A; *în şirul* B *nu există niciun număr mai mic decât toate numerele din şirul* B.

In adevăr, dacă un număr a_p din şirul A ar fi *cel mai mare* număr din acest şir, am avea $a_n = a_p$ pentru $n > p$. Prin urmare, extrăgând rădăcina patrată din 2, am găsi la rădăcină *zeruri* pentru *toate cifrele de rang mai mare decât* p.

In acest caz $\sqrt{2}$ ar fi numărul *raţional* a_p, rezultat evident absurd.

La un rezultat analog am ajunge, dacă am presupune că, în şirul B, există un număr b_q mai mic decât *toate* numerele din acest şir.

Observare. Din neegalităţile

$$a_n \leqq a_{n+p} < b_{n+p} \leqq b_n$$

şi din egalitatea (35) rezultă neegalităţile

(36) $$| a_{n+p} - a_n | < \frac{1}{10^n} \quad \text{şi} \quad | b_{n+p} - b_n | < \frac{1}{10^n}$$

oricare ar fi numărul p întreg şi pozitiv.

Neegalităţile (3L) ne arată că niciun număr din şirurile A sau B nu îndeplineşte condiţiunea ca, ridicat la patrat, să ne dea *exact* pe 2. Totuşi, când luăm pe n din ce în ce mai mare, *numerele raţionale* a_n şi b_n *se apropie din ce în ce mai mult de această condiţiune.*

Mai precis, neegalităţile

$$a_n^2 < 2 < b_n^2,$$

$$b_n^2 - a_n^2 = (b_n + a_n)(b_n - a_n) < 2b_1(b_n - a_n)$$

şi egalitatea (35), ne arată că diferenţele

$$b_n^2 - a_n^2, \quad 2 - a_n^2 \quad \text{şi} \quad b_n^2 - 2$$

tind către zero, când n creşte la infinit. Prin urmare şirurile cu termenii a_n^2 şi b_n^2 au ca *limită comună* numărul 2.

In acest caz convenim să zicem că termenii a_n și b_n au ca *limită numărul irațional* reprezentat prin simbolul $\sqrt{2}$ și scriem

$$a_n < \sqrt{2} < b_n$$

pentru orice valoare a lui n.

Numerele raționale a_n și b_n au primele lor n cifre *comune*; acestea sunt primele n cifre *exacte* ale numărului *limită* $\sqrt{2}$. Găsim astfel:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135624 \ldots$$

număr *de formă zecimală*, dar scris cu o *infinitate de cifre zecimale*.

145. Numere definite prin șiruri. Să presupunem că avem două șiruri infinite de numere raționale:

(A) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

(B) $$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

în care termenii a_n și b_n *se pot calculà după o regulă determinată*, pentru orice valoare a lui n, și care *satisfac la condițiile următoare* (1):

(α) *Șirul* A *e crescător* (sau cel puțin *nu descrește*); *șirul* B *e descrescător* (sau cel puțin *nu crește*).

(β) *Pentru orice valoare a lui* n, *avem*

$$a_n < b_n.$$

(γ) *Oricât de mic ar fi un număr* $\varepsilon > 0$, *găsim un număr* p, astfel ca *pentru* $n > p$ *să avem*

$$| b_n - a_n | < \varepsilon,$$

adică: *diferența* $b_n - a_n$ *tinde către zero*, când n crește la infinit.

Cu aceste ipoteze: 1⁰. Dacă există un număr *rațional* λ, care să fie *cuprins* între a_n și b_n

(37) $$a_n \leqq \lambda \leqq b_n$$

pentru orice valoare a lui n, șirurile A și B *tind către limita* λ.

E de ajuns să arătăm că

$$(\lambda - a_n) \to 0 \quad \text{și} \quad (\lambda - b_n) \to 0$$

când n crește la infinit. Dar aceasta rezultă din neegalitățile (37) și din ipoteza (γ)

$$\lim_{n=\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

(1) Condițiile 1⁰, 2⁰ și 3⁰, la care satisfăceau șirurile particulare din paragraful precedent.

In acest caz zicem că şirurile A şi B *definesc numărul raţional* λ şi scriem

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \lambda.$$

2º. Dacă nu există *niciun număr raţional* λ, care să satisfacă la condiţia (37), *oricare ar fi* n, vom zice că şirurile A şi B definesc un număr *iraţional* λ, care, *prin definiţie*, rămâne cuprins între a_n şi b_n

$$a_n < \lambda < b_n$$

pentru orice valoare a lui n şi vom scrie şi în acest caz că

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \lambda \quad (\text{număr } \mathit{iraţional}).$$

Un număr *raţional* sau *iraţional* (pozitiv, nul sau negativ) se numeşte număr *real*. Toate numerele raţionale şi iraţionale formează la un loc *mulţimea numerelor reale*.

Şirurile A şi B, prin condiţiunile impuse, admit în toate cazurile *ca limită comună* un număr *real*.

OBSERVARE. Dacă, dela un rang oarecare p, termenii a_n ai unui şir A satisfac la condiţia

$$a_n = a_p \quad \text{pentru} \quad n > p,$$

zicem că limita şirului A este numărul raţional a_p [143, 2], deoarece, oricât de mic ar fi $\varepsilon > 0$, avem

$$a_p - a_n = 0 < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > p.$$

In particular şirul $m, m, \ldots, m, \ldots$ are ca limită numărul m.

146. Operaţii cu numere limită. Dacă avem un număr λ definit ca *limita comună* a două şiruri A şi B, cu termenii generali a_n şi b_n respectiv, care satisfac la condiţiile (α), (β), (γ) [145], convenim să scriem *toate aceste ipoteze* prin egalitatea

$$\lambda = (a_n, b_n). \tag{38}$$

Să considerăm două numere reale

$$\lambda = (a_n, b_n) \quad \text{şi} \quad \lambda' = (a'_n, b'_n) \tag{39}$$

A şi B, A′ şi B′ fiind şirurile, care definesc aceste numere.

Pentru orice valoare a lui n, avem [145]

$$a_n < \lambda < b_n, \quad a'_n < \lambda' < b'_n \tag{40}$$

şi oricât de mic ar fi $\varepsilon > 0$, *pentru n destul de mare*, avem

(41) $$| b_n - a_n | < \varepsilon, \quad | b'_n - a'_n | < \varepsilon.$$

Dacă numerele λ şi λ' sunt *raţionale*, din neegalităţile (40) deducem prin adunare [40, 5]:

$$a_n + a'_n < \lambda + \lambda' < b_n + b'_n$$

cu

$$| (b_n + b'_n) - (a_n + a'_n) | = | (b_n - a_n) + (b'_n - a'_n) | < 2\varepsilon.$$

Prin urmare *şirurile cu termenii generali* $a_n + a'_n$ *şi* $b_n + b'_n$ *satisfac la toate condiţiile* (α), (β), (γ) *şi definesc numărul raţional* $\lambda+\lambda'$, adică putem scrie

(42) $$\lambda + \lambda' = (a_n + a'_n;\ b_n + b'_n).$$

Această egalitate, luată ca *definiţie* a sumii a două numere *raţionale*, ne serveşte şi pentru definirea *sumii* a două numere *iraţionale*.

Definiţie. *Suma numerelor iraţionale limită definite prin şirurile cu termenii generali* a_n, b_n *şi* a'_n, b'_n *este numărul limită definit prin şirurile cu termenii generali* $a_n + a'_n$, $b_n + b'_n$.

In mod analog se definesc şi celelalte operaţii cu numerele iraţionale, observând că pentru λ şi λ' *raţionale* $(\lambda < \lambda')$, din neegalităţile (40) şi (41), deducem

pentru scădere [40, 6]:

$$a'_n - b_n < \lambda' - \lambda < b'_n - a_n;$$

pentru înmulţire [56, 3]:

$$a_n a'_n < \lambda\lambda' < b_n b'_n;$$

pentru împărţire [62, 4]:

$$\frac{a'_n}{b_n} < \frac{\lambda'}{\lambda} < \frac{b'_n}{a_n},$$

presupunând, în ultimele două operaţii, că numerele a_n, b_n, a'_n şi b'_n sunt toate *pozitive*.

Când n variază, şirurile astfel obţinute satisfac în toate cazurile la condiţiile (α), (β), (γ). Putem dar scrie, ca *definiţii* pentru *diferenţa*, *produsul* şi *câtul* a două numere reale raţionale, următoarele *numere limită*:

(43) $$\lambda' - \lambda = (a'_n - b_n,\ b'_n - a_n),$$

(44) $$\lambda\lambda' = (a_n a'_n, b_n b'_n),$$

(45) $$\frac{\lambda'}{\lambda} = \left(\frac{a'_n}{b_n}, \frac{b'_n}{a_n}\right),$$

definiţii, care se extind şi la numerele *iraţionale* şi care ne permit să calculăm, sub formă de *numere limită*, diferenţa, produsul şi câtul a două numere *reale* oricare.

Puterea λ^m şi *rădăcina* $\sqrt[m]{\lambda}$, pentru λ iraţional, se definesc tot ca numere limită.

Astfel, dacă termenii a_n şi b_n sunt pozitivi, pentru m întreg şi pozitiv, vom zice că

$$\lambda^m = (a_n^m, b_n^m), \quad \sqrt[m]{\lambda} = \left(\sqrt[m]{a_n}, \sqrt[m]{b_n}\right),$$

rădăcinile $\sqrt[m]{a_n}$ şi $\sqrt[m]{b_n}$ fiind calculate cu aproximaţie de $\frac{1}{10^n}$, prima prin lipsă şi a doua prin adaos.

OBSERVARE. Dacă $\lambda = (a_n, b_n)$, avem

$$-\lambda = (-b_n, -a_n), \qquad \lambda \times 0 = 0, \qquad \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n}\right),$$

egalităţi, care rezultă din definiţiile (43), (44), (45), dacă observăm că numerele $\lambda' = 0$ şi $\lambda' = 1$ pot fi definite, respectiv, prin şirurile cu termenii generali

$$a'_n = b'_n = 0 \quad \text{şi} \quad a'_n = b'_n = 1.$$

147. Şiruri oarecare. Să considerăm două şiruri

(A) $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

(A′) $$a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_n, \ldots$$

monotone sau *nu*, dar *care tind fiecare către o limită determinată*

(46) $$\lim a_n = \lambda, \quad \lim a'_n = \lambda'$$

pentru $n = \infty$. Putem dar scrie [143, 2]:

(47) $$a_n = \lambda + \alpha, \quad a'_n = \lambda' + \alpha',$$

unde cantităţile (pozitive sau negative) α şi α' *tind către zero*, când n creşte la infinit.

In acest caz vedem că

$$
(48)\qquad
\begin{aligned}
a_n + a'_n &= \lambda + \lambda' + [\alpha + \alpha'],\\
a_n - a'_n &= \lambda - \lambda' + [\alpha - \alpha'],\\
a_n a'_n &= \lambda\lambda' + [\alpha\lambda' + \alpha'\lambda + \alpha\alpha'],\\
\frac{a_n}{a'_n} &= \frac{\lambda}{\lambda'} + \left[\frac{\lambda+\alpha}{\lambda'+\alpha'} - \frac{\lambda}{\lambda'}\right] = \frac{\lambda}{\lambda'} + \left[\frac{\alpha\lambda' - \alpha'\lambda}{(\lambda'+\alpha')\lambda'}\right].
\end{aligned}
$$

Dacă presupunem în ultima egalitate $\lambda' \neq 0$, toate cantitățile din paranteze *tind către zero* (ca și α și α'), când n crește la infinit.

Prin urmare, egalitățile (46) și (48), pentru $n = \infty$, ne dau

$$
(49)\qquad
\begin{aligned}
&\lim\,(a_n + a'_n) = \lambda + \lambda' = \lim a_n + \lim a'_n,\\
&\lim\,(a_n - a'_n) = \lambda - \lambda' = \lim a_n - \lim a'_n,\\
&\lim\,(a_n a'_n) = \lambda\lambda' = \lim a_n \,.\, \lim a'_n,\\
&\lim \frac{a_n}{a'_n} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lim a_n}{\lim a'_n} \qquad (\text{dacă } \lambda' \neq 0).
\end{aligned}
$$

TEOREME. 1°. *Limita sumei* a două cantități variabile este egală cu *suma limitelor* acestor cantități.

2°. *Limita diferenței* a două cantități variabile este egală cu *diferența limitelor* acestor cantități.

3°. *Limita produsului* a două cantități variabile este egală cu *produsul limitelor* acestor cantități.

4°. *Limita câtului* a două cantități variabile este egală cu *câtul limitelor* acestor cantități, *dacă limita împărțitorului e diferită de zero.*

EXEMPLU. Să luăm

$$a_n = \frac{2n-3}{n}, \qquad a'_n = \frac{5n+1}{n}.$$

Putem scrie

$$a_n = 2 - \frac{3}{n} = \lambda + \alpha, \qquad a'_n = 5 + \frac{1}{n} = \lambda' + \alpha',$$

unde $\lambda = 2$, $\alpha = -\frac{3}{n}$, $\lambda' = 5$, $\alpha' = \frac{1}{n}$; α și α' tind către zero când $n \to \infty$.

Prin urmare avem

$$\lim a_n = 2, \qquad \lim a'_n = 5.$$

Către ce limită tinde produsul $a_n a'_n = \frac{(2n-3)(5n+1)}{n^2}$, când n crește la infinit?

Aplicând teorema precedentă

$$\lim (a_n a'_n) = \lim a_n \,.\, \lim a'_n$$

găsim, pentru $n=\infty$,

$$\lim \frac{(2n-3)(5n+1)}{n^2} = 2 \times 5 = 10.$$

148. Simboluri cu o infinitate de cifre zecimale. Să considerăm un număr *de formă zecimală*, dar presupus scris *cu o infinitate de cifre zecimale*. Fie a_n numărul format din partea întreagă şi primele n cifre zecimale ale numărului dat; b_n numărul care se obţine din a_n, când mărim ultima cifră zecimală a lui a_n cu o unitate.

Şirurile A şi B formate cu numerele a_n şi b_n astfel determinate, fiindcă satisfac la condiţiile (α), (β), (γ) dela paragraful **145**, definesc un număr real λ şi avem

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lambda.$$

Cu cât n este mai mare, cu atât numărul fracţionar a_n (cu n cifre zecimale) se apropie mai mult de *valoarea adevărată* a numărului real λ.

In practică operaţiile cu aceste simboluri se reduc la operaţii făcute cu valorile apropiate a_n.

Se pot prezentà următoarele cazuri:

1⁰. Dela un rang p, *toate cifrele zecimale,* ale numărului dat, *de rang mai mare decât* p sunt *zeruri.*

In acest caz avem $a_n = a_p$ pentru $n \geqq p$ şi numărul limită $\lambda = a_p$ e *întreg* sau *fracţionar zecimal* (număr *raţional*).

EXEMPLU. Pentru numărul $\lambda = 38{,}725\,000\,000 \ldots$ avem $a_1 = 38{,}7$, $a_2 = 38{,}72$, $a_3 = 38{,}725$, $a_n = a_3$ pentru $n \geqq 3$ şi $\lambda = a_3 = 38{,}725$.

2⁰. In numărul dat există cifre *diferite de zero* de rang oricât de mare, dar *o aceeaş grupă de cifre zecimale se repetă la infinit.* In acest caz avem o fracţie zecimală *periodică* simplă sau mixtă [93, 2] şi numărul limită λ este o *fracţie ordinară* (număr *raţional*).

EXEMPLE. a⁰. Fracţie periodică simplă: $\lambda = 0{,}783\,783\,783 \ldots$ Grupa 783 este *perioada* şi putem scrie

$$1000\,\lambda = 783{,}783\,783\,783 \ldots$$
$$\lambda = 0{,}783\,783\,783 \ldots$$

Scăzând aceste egalităţi, membru cu membru, găsim

$$999\,\lambda = 783{,}000\,000\,000 \ldots$$

de unde rezultă

$$\lambda = \frac{783}{999}.$$

b^0. Fracție periodică mixtă: $\lambda = 0{,}485\,37\,37\,37\ldots$ 485 este *partea neperiodică*, 37 este *perioada* și avem

$$100\,000\ \lambda = 48537{,}37\,37\,37\ldots$$
$$1\,000\ \lambda = \quad 485{,}37\,37\,37\ldots$$

Scăzând aceste egalități, membru cu membru, găsim

$$99\,000\ \lambda = 48052{,}00\,00\,00\ldots$$

de unde rezultă

$$\lambda = \frac{48\,052}{99\,000} = \frac{485\,37 - 485}{99\,000}.$$

3^0. Când numărul dat, *cu o infinitate de cifre zecimale*, nu e nici de catagoria 1^0, nici de categoria 2^0, ne găsim în cazul al doilea dela paragraful **146** și $\lim a_n = \lambda$ e un număr *irațional*, care se reprezintă printr'un *semn convențional* sau printr'o *literă* [93].

EXEMPLE de numere iraționale:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135624\ldots,\quad e = 2{,}718281828459\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159265358979323846264 3\ldots$$
$$\beta = 0{,}12345678910111213141516171819\ldots$$

Succesiunea cifrelor zecimale e dată, pentru fiecare număr irațional, prin regula specială, după care se calculează valorile apropiate ale acestui număr *limită*.

149. Corespondența între numere și puncte. Pe o axă Δ (*fig.* 27), alegând un segment OA ca unitate de măsură, să fixăm punctele O și A, care corespund la numerele 0 și 1.

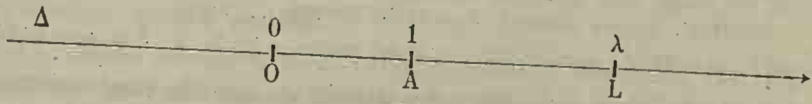


Fig. 27.

1^0. *La orice punct* L *de pe axa* Δ *corespunde un număr real* λ *și unul singur.* Acest număr e *valoarea algebrică a segmentului* $\overrightarrow{OL}$ măsurat pe axa Δ cu unitatea $\overline{OA}$. Numărul λ este *pozitiv* sau *negativ*, după cum segmentul $\overrightarrow{OL}$ are *acelaș sens* sau are *sens contrar* cu axa Δ.

Dacă lungimea OL e comensurabilă cu OA, valoarea algebrică a segmentului $\overrightarrow{OL}$ este un *număr algebric rațional*. Dacă lungimea OL e incomensurabilă cu OA, valoarea algebrică a segmentului $\overrightarrow{OL}$ este un *număr algebric irațional* [99 și **100**].

Acest număr λ e *abscisa* punctului L și se reprezintă prin $\overline{OL}$.

Convenim dar să deosebim pe axa Δ două feluri de puncte: *raționale* și *iraționale*, după cum ele corespund la numere raționale sau iraționale (1).

EXEMPLU. Dacă OL e lungimea semicercului cu raza $OA = 1$ (*fig.* 27), avem $\overline{OL} = \pi$; punctul L corespunde la numărul irațional π.

2⁰. *La orice număr real λ corespunde un punct și unul singur pe axa Δ.*

In adevăr orice număr real λ poate fi definit ca limita a două șiruri de numere raționale A și B satisfăcând la condițiile (α), (β), (γ) [145]. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$; $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ punctele de pe axa Δ, care corespund respectiv la numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ din șirurile A și B (*fig.* 28).

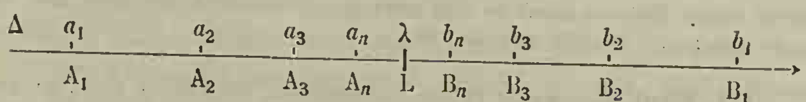


Fig. 28.

Toate punctele A_n *se găsesc la stânga tuturor punctelor* B_n.

Lungimea segmentului $\overline{A_nB_n} = b_n - a_n$ *tinde către zero,* când n crește la infinit.

Punctele A_n, mergând spre dreapta, *și punctele* B_n, mergând spre stânga, *se apropie din ce în ce mai mult de o poziție limită* L. Vom zice că L *e punctul care corespunde numărului limită* $\lambda = (a_n, b_n)$.

150. Compararea numerelor reale. Dacă la două numere reale λ și λ' corespunde *acelaș punct limită* L, zicem că numerele λ și λ' sunt *egale* și scriem $\lambda = \lambda'$.

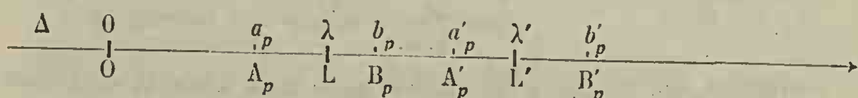


Fig. 29.

Dacă la numerele λ și λ' corespund punctele *distincte* L și L′, vom zice că λ' e *mai mare* decât λ, dacă segmentul $\overline{OL'}$ e mai mare decât segmentul $\overline{OL}$, adică dacă punctul L′ e *la dreapta* punctului L pe axa Δ (*fig.* 29).

(1) Aceste puncte sunt determinate pe axă, numai după ce s'a ales *unitatea* OA.

Dacă figurăm pe această axă punctele A_n, B_n şi A'_n, B'_n, care corespund la şirurile care definesc numerele

$$\lambda = (a_n, b_n), \quad \lambda' = (a'_n, b'_n),$$

vedem că, dacă pentru un rang p, A'_p *coincide* cu B_p sau e *la dreapta* lui B_p, punctul L' e *la dreapta* punctului L (*fig.* 29).

Prin urmare:

1⁰. Dacă, pentru un rang p, găsim $a'_p \geqq b_p$ avem $\lambda' > \lambda$.

2⁰. Dacă, pentru un rang p, găsim $b'_p \leqq a_p$ avem $\lambda' < \lambda$.

3⁰. Dacă, pentru *orice* rang n, găsim neegalităţile $a_n < b'_n$ şi $a'_n < b_n$, avem $\lambda' = \lambda$.

OBSERVARE. Când numerele λ şi λ' sunt scrise sub formă de fracţii zecimale (cu un număr *finit* sau *infinit* de cifre zecimale), compararea lor se va face după regula dată pentru fracţiile zecimale [89].

151. Şirul numerelor reale. Succesiunea numerelor reale în ordinea, în care se găsesc pe axa Δ (*fig.* 30), formează *şirul numerelor reale*. Acest şir e *crescător*.

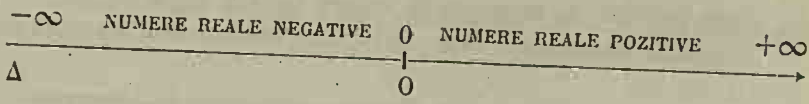


Fig. 30.

Fiindcă între două puncte de pe axa Δ există o infinitate de alte puncte, rezultă că *între două numere reale*, oricât de apropiate ar fi ele, *se găsesc cuprinse o infinitate de alte numere reale*. De aceea zicem că şirul numerelor reale este *dens*.

Fig. 31.

Punctele de pe axa Δ se succed unele după altele în mod *continuu*. Prin urmare, dacă un punct M se mişcă pe axa Δ, dela punctul L până la punctul L′ (*fig.* 31), abscisa punctului M, $x = \overline{OM}$, capătă succesiv *toate* valorile posibile cuprinse între numerele λ şi λ'. Toate aceste valori sunt numere *reale*. De aceea convenim să zicem că şirul numerelor reale este un *şir continuu*.

Mulţimea tuturor numerelor reale, cuprinse între λ şi λ', formează *intervalul* (λ, λ'). Când punctul M se mişcă între L şi L′, zicem că $x = \overline{OM}$ *variază în intervalul* (λ, λ').

OBSERVARE. La un punct A *fix* pe axa Δ, corespunde o abscisă *constantă* a; la un punct M *mobil* pe axa Δ, corespunde o abscisă *variabilă* x.

IV. — PROPORŢIONALITATEA.

152. Rapoarte. Dacă a şi b reprezintă două numere:

1°. Diferenţa $a-b$ este *raportul aritmetic* dintre a şi b;

2°. Câtul exact $a:b$ sau $\frac{a}{b}$ este *raportul geometric* dintre a şi b [75].

Numerele a şi b sunt *termenii* raportului.

EXEMPLE. Raportul *aritmetic* dintre 15 şi 5 este $15-5=10$; raportul *geometric* dintre 15 şi 5 este $15:5=3$.

Legile rapoartelor. 1°. *Un raport aritmetic nu-şi schimbă valoarea, dacă-i adunăm sau scădem la ambii termeni un acelaş număr.*

2°. *Un raport geometric nu-şi schimbă valoarea, dacă-i înmulţim sau împărţim ambii termeni cu un acelaş număr.*

Aceste proprietăţi rezultă din legile scăderii [22, 5] şi din legile împărţirii exacte [60, 3].

153. Proporţii. Egalitatea a două rapoarte *de acelaş fel* formează o *proporţie*. Proporţia e *aritmetică* sau *geometrică*, după felul rapoartelor cu care e formată.

EXEMPLE. Proporţii *aritmetice*:

$18-7=14-3$; $\quad 6{,}16-5{,}84=1{,}24-0{,}92$; $\quad \frac{29}{21}-\frac{5}{7}=\frac{22}{15}-\frac{4}{5}$.

Proporţii *geometrice*:

$$\frac{5}{8}=\frac{35}{56}; \quad \frac{8}{2{,}5}=\frac{5{,}64}{4{,}7}; \quad \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{108}}{2\sqrt{12}}.$$

In general o proporţie e de forma

(50) $$a-b=c-d \quad \text{(proporţie } \textit{aritmetică}\text{)}$$

sau

(51) $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{(proporţie } \textit{geometrică}\text{)}.$$

Orice proporţie are *patru termeni*. In proporţiile (50) şi (51) termenii sunt a, b, c, d; primul şi ultimul termen (a şi d) se numesc *externi* sau *extremi*; termenul al doilea şi al treilea (b şi c) se numesc *interni* sau *mezi*.

154. Proporţii aritmetice. 1°. In orice proporţie aritmetică *suma mezilor e egală cu suma extremilor.*

In adevăr, din

$$a - b = c - d \tag{52}$$

adunând pe $b+d$ la ambii membri, deducem

$$a + d = b + c. \tag{53}$$

Invers, din egalitatea (53) rezultă proporţia aritmetică (52).

OBSERVARE. Intr'o proporţie aritmetică se pot schimbà *mezii între ei* sau *extremii între ei* sau *amândoi mezii cu amândoi extremii*, deoarece prin oricare din aceste schimbări egalitatea (53) rămâne *aceeaş*.

2°. Când cunoaştem trei termeni a, b, c ai unei proporţii aritmetice, putem calculà *termenul al patrulea* al ei.

In adevăr, însemnând cu x termenul necunoscut, din

$$a - b = c - x$$

deducem $a + x = b + c$ şi

$$x = b + c - a. \tag{54}$$

3°. Dacă într'o proporţie aritmetică

$$a - m = m - b \quad \text{sau} \quad m - a = b - m \tag{55}$$

mezii sunt *egali* (sau *extremii* sunt *egali*), valoarea lor comună m se numeşte *media aritmetică* a celorlalte două numere a şi b.

Din egalitatea (55) deducem $2m = a + b$ şi

$$m = \frac{a+b}{2} \quad (\text{media } aritmetică). \tag{XLIX}$$

Prin urmare: *media aritmetică a două numere e semisuma lor.*

GENERALIZARE. Media aritmetică a n numere $a, b, c, \ldots, l$ este *suma acestor numere împărţită prin numărul lor*:

$$m = \frac{a + b + c + \ldots + l}{n}. \tag{L}$$

EXEMPLU. Măsurând, prin zece determinări succesive, cu ajutorul unei *mașini de divizat*, distanța dintre două diviziuni de pe un tub termometric (dela 20° până la 50°), am găsit rezultatele următoare:

	Măsurări.		*Diferențe.*	
1-a măsurare:	262,11	— 262,08 =	+0,03	
a 2-a „	261,99			—0,09
a 3-a „	262,20		+0,12	
a 4-a „	262,07			—0,01
a 5-a „	261,98			—0,10
a 6-a „	262,13		+0,05	
a 7-a „	262,00			—0,08
a 8-a „	261,96			—0,12
a 9-a „	262,15		+0,07	
a 10-a „	262,23		+0,15	
Total:	2620,82 *mm.*		+0,42	—0,40

Media aritmetică: $\frac{2620,82}{10} = 262,082$. Valoarea *medie*: 262,08 *mm.*
Pentru 30° avem 262,08 *mm.*; pentru 1° avem 262,08 : 30 = 8,736 *mm.*

155. Proporții geometrice. 1°. In orice proporție geometrică *produsul mezilor e egal cu produsul extremilor.*

In adevăr, din

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \tag{56}$$

înmulțind ambii membri cu bd, deducem

$$ad = bc. \tag{57}$$

Invers, din egalitatea (57) rezultă proporția geometrică (56).

OBSERVARE. Intr'o proporție geometrică se pot schimbà *mezii între ei* sau *extremii între ei* sau *amândoi mezii cu amândoi extremii*, deoarece prin oricare din aceste schimbări egalitatea (57) rămâne *aceeaș.*

2°. Când cunoaștem trei termeni a, b, c ai unei proporții geometrice, putem calculà *termenul al patrulea* al ei.

In adevăr, din

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

deducem $ax = bc$ și

$$x = \frac{bc}{a} \quad (a\ patra\ proporțională). \tag{58}$$

3°. Dacă într'o proporție geometrică

$$\frac{a}{\mu} = \frac{\mu}{b} \quad \text{sau} \quad \frac{\mu}{a} = \frac{b}{\mu} \tag{59}$$

mezii sunt *egali* (sau *extremii* sunt *egali*), valoarea lor comună μ se numeşte *media geometrică* a celorlalte două numere a şi b.

Din egalitatea (59) deducem $\mu^2 = ab$ şi

(LI) $$\mu = \sqrt{ab} \quad \text{(media } \textit{geometrică}\text{)}.$$

Prin urmare: *media geometrică a două numere e rădăcina patrată din produsul lor.*

GENERALIZARE. Media geometrică a n numere $a, b, c, \ldots, l$ este *rădăcina a n-a din produsul lor*:

(LII) $$\mu = \sqrt[n]{a.b.c \ldots l}.$$

OBSERVARE. Media aritmetică a două numere e *mai mare* decât media geometrică a lor. Adică avem

(60) $$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad \text{sau} \quad m > \mu.$$

In adevăr, înmulţind cu 2 şi ridicând la patrat, neegalitatea (60) devine

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0 \quad \text{sau} \quad (a-b)^2 > 0,$$

ultima neegalitate fiind evident adevărată.

4⁰. *Media armonică* a două numere a şi b este numărul ξ, care satisface la egalitatea

(LIII) $$\frac{2}{\xi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{(media } \textit{armonică}\text{)}.$$

De aci deducem

$$\frac{2}{\xi} = \frac{a+b}{ab} \quad \text{sau} \quad ab = \frac{a+b}{2} \cdot \xi$$

adică

(LIV) $$\mu^2 = m.\xi \quad \text{sau} \quad \frac{\mu}{\xi} = \frac{m}{\mu}.$$

Prin urmare: *media geometrică* a două numere (a şi b) este medie geometrică între *media aritmetică* şi *media armonică* a acestor numere. Neegalitatea (60) ne arată că rapoartele (LIV) sunt supraunitare; adică avem:

$$\xi < \mu < m.$$

OBSERVARE. Media armonică a numerelor a şi b satisface la următoarele proporţii (una aritmetică şi una geometrică):

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{\xi}=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{b}; \quad \frac{a-\xi}{\xi-b}=\frac{a}{b}.$$

Când vom zice numai *raport* sau *proporţie*, fără să specificăm *felul* lor, vom înţelege *raport geometric* şi *proporţie geometrică.*

156. **Teoreme.** 1⁰. *In orice proporţie suma (sau diferenţa) numărătorilor împărţită prin suma (sau diferenţa) numitorilor formează un raport egal cu fiecare dintre rapoartele proporţiei.* Adică avem

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}. \tag{61}$$

Pentru *sumă* demonstraţia a fost dată la paragraful 84, 1⁰; pentru *diferenţă* se înlocueşte adunarea egalităţilor prin scădere.

2⁰. *Din proporţia*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{sau} \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \tag{62}$$

putem deduce proporţiile următoare:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}; \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}; \tag{63}$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}; \quad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}; \tag{64}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}. \tag{65}$$

In adevăr, proporţiile (63) scrise sub forma

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1, \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

şi proporţiile (64) scrise

$$1+\frac{b}{a}=1+\frac{d}{c}, \quad 1-\frac{b}{a}=1-\frac{d}{c}$$

sunt evidente pentru numerele, care formează proporţiile (62); împărţind membru cu membru egalităţile (63) sau (64) deducem egalitatea (65).

157. Mărimi proporționale. Valoarea unei mărimi *depinde*, în general, *de valoarea altei mărimi*.

Astfel: *suprafața* unui patrat depinde de *lungimea* laturii lui; *costul* unei cantități de făină depinde de *greutatea* ei.

1°. Când dependența este astfel că, dacă una din mărimi devine *de n ori mai mare* și cealaltă mărime devine tot *de n ori mai mare*, aceste două mărimi se zic *direct proporționale*.

EXEMPLE. *Costul* unei stofe și *lungimea* ei; *volumul* unui corp și *greutatea* lui. [102].

Dacă două mărimi A și B sunt *direct* proporționale și dacă a_1 și $a_2 = n a_1$ sunt măsurile a două cantități din mărimea A, b_1 și $b_2 = n b_1$ măsurile cantităților corespunzătoare din mărimea B, între aceste patru numere avem proporția:

(D) $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{sau} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

2°. Când dependența dintre două mărimi este astfel că, dacă una din ele devine *de n ori mai mare*, cealaltă mărime devine *de n ori mai mică*, aceste două mărimi se zic *invers proporționale*.

EXEMPLE. *Iuțeala* unui tren cu *timpul* în care trenul parcurge un drum determinat; *volumul* unui gaz cu *presiunea* la care e supus gazul, când temperatura rămâne aceeaș.

In acest caz, între valorile a_1 și $a_2 = n a_1$ (pentru mărimea A) și valorile corespunzătoare b_1 și $b_2 = b_1 : n$ (pentru mărimea B), avem proporția:

(I) $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} \quad \text{sau} \quad a_1 b_1 = a_2 b_2.$$

Dacă se dau numai trei termeni din aceste proporții și se cere să aflăm pe al patrulea, avem de rezolvat o problemă de *regulă de trei* simplă, *directă* în cazul (D) și *inversă* în cazul (I).

158. Numere direct proporționale. Dacă ni se dau două șiruri de numere

(A) $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

(B) $$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n.$$

astfel că între două numere *de acelaș rang* a_i, b_i să avem

(66) $$b_i = \lambda a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zicem că numerele din șirul B sunt *proporționale* sau, mai corect, *direct proporționale* cu numerele din șirul A.

Egalitățile (66) se mai pot scrie:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n} = \lambda. \tag{67}$$

Numărul λ, cu care trebue să înmulțim numerele din șirul A, ca să căpătăm numerele din șirul B, se numește *coeficient de proporționalitate* sau *constanta de proporționalitate*.

EXEMPLU. Numerele

(α) 4, 11, 17, 36, 81

sunt direct proporționale cu numerele

(β) 0,8, 2,2, 3,4, 7,2, 16,2

fiindcă avem

$$\frac{4}{0,8} = \frac{11}{2,2} = \frac{17}{3,4} = \frac{36}{7,2} = \frac{81}{16,2} = 5.$$

Coeficientul de proporționalitate este 5. Invers și numerele din șirul (β) sunt proporționale cu numerele din șirul (α); în acest caz coeficientul de proporționalitate est 0,2 sau $\frac{1}{5}$.

OBSERVARE. Dacă numerele din șirurile A și B sunt direct proporționale, între două numere oricare a_p, a_q din șirul A și numerele corespunzătoare b_p, b_q din șirul B, avem proporția:

$$\frac{a_p}{b_p} = \frac{a_q}{b_q} \quad \text{sau} \quad \frac{a_p}{a_q} = \frac{b_p}{b_q}. \tag{68}$$

EXEMPLU. Dacă un *mobil* M se mișcă pe o dreaptă AB cu o mișcare *uniformă* de v cm. pe secundă [46], spațiul s, parcurs de mobil în t secunde, este dat de formula $s = vt$. In timpurile $t_1, t_2, \dots, t_n$ mobilul parcurge spațiile

$$s_1 = vt_1, \quad s_2 = vt_2, \quad \dots, \quad s_n = vt_n$$

și avem

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \dots = \frac{s_n}{t_n} = v.$$

Prin urmare: într'o mișcare *uniformă*, *spațiile* parcurse de mobil sunt *direct proporționale* cu *timpurile* întrebuințate pentru a le parcurge. Coeficientul de proporționalitate, în acest caz, este *iuțeala* mobilului.

Dacă între două numere de acelaş rang a_i, b_i din şirurile A şi B avem relaţia

$$\frac{b_i}{a_i^p} = \lambda \quad \text{sau} \quad b_i = \lambda a_i^p \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zicem că numerele b_i din şirul B sunt direct proporţionale *cu puterile p* ale numerelor a_i din şirul A.

EXEMPLE. 1°. Dacă un corp greu cade în vid şi dacă s este spaţiul parcurs prin cădere în timpul t, iar $g = 9{,}809\, m$. *intensitatea gravitaţiei*, formula din Mecanică $s = \frac{1}{2} g t^2$ ne arată că, în căderea corpurilor, *spaţiile* parcurse sunt proporţionale cu *patratele timpurilor* corespunzătoare. Coeficientul de proporţionalitate este $\frac{1}{2} g$.

2°. Volumul unei *sfere* e dat prin formula $V = \frac{8}{4} \pi r^3$. Prin urmare: *volumurile sferelor* sunt proporţionale cu *cuburile razelor* lor. Coeficientul de proporţionalitate este $\frac{3}{4} \pi$.

159. Impărţirea în părţi proporţionale. Un număr A se poate împărţi *în n părţi* într'o infinitate de feluri. Insemnând aceste părţi cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, trebue să avem în toate cazurile

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A.$$

Dacă vrem ca părţile să fie *egale*, luăm

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{A}{n}.$$

Să presupunem însă, că vrem ca părţile să fie *direct proporţionale cu n numere date* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. In acest caz trebue să avem

$$(69) \qquad \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$$

şi problema e rezolvată, dacă putem determină *coeficientul de proporţionalitate* sau *valoarea comună* a acestor rapoarte.

Fiindcă cunoaştem suma numărătorilor $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A$ şi putem calculà şi suma numitorilor $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$, avem [84, 1]:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{A}{S}.$$

Prin urmare:

$$(70) \qquad x_1 = \frac{A}{S} \cdot a_1, \quad x_2 = \frac{A}{S} \cdot a_2, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{A}{S} \cdot a_n.$$

EXEMPLU. Literele dela tipografie sunt formate dintr'un aliaj de 80 părţi *plumb* (Pb) şi 20 părţi *antimoniu* (Sb). Cât Pb şi cât Sb se găseşte în 2500 *kg.* de litere de tipografie?

Din proporţia dată $\frac{Pb}{80} = \frac{Sb}{20} = \frac{2500}{100} = 25$ deducem:

$$Pb = 80 \times 25 = 2000\,kg; \quad Sb = 20 \times 25 = 500\,kg.$$

160. Numere invers proporţionale. Dacă ni se dau două şiruri de numere

$$(A) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

$$(B) \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

astfel ca, între numerele de acelaş rang a_i, b_i să avem relaţia

$$(71) \qquad a_i b_i = \lambda \quad \text{sau} \quad b_i = \frac{\lambda}{a_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zicem că numerele din şirul B sunt *invers proporţionale* cu numerele din şirul A.

Fiindcă egalităţile (71) se mai pot scrie

$$(72) \qquad \frac{b_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{b_2}{\frac{1}{a_2}} = \cdots = \frac{b_n}{\frac{1}{a_n}} = \lambda,$$

vedem că, în acest caz, numerele din şirul B sunt *direct proporţionale* cu *inversele* numerelor din şirul A.

OBSERVARE. Dacă numerele din şirul A sunt *invers* proporţionale cu numerele din şirul B, între două numere oricare a_p, a_q din şirul A şi numerele corespunzătoare b_p, b_q din şirul B, avem relaţia

$$(73) \qquad a_p b_p = a_q b_q \quad \text{sau} \quad \frac{a_p}{a_q} = \frac{b_q}{b_p}.$$

EXEMPLU. Să se împartă numărul 620 în trei părţi *invers proporţionale* cu numerele 2, 3 şi 5.

Insemnând cu x, y, z părţile căutate, trebue să avem

$$x \times 2 = y \times 3 = z \times 5.$$

De aci deducem

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} = \frac{z+y+z}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{620}{\frac{31}{30}} = \frac{620 \times 30}{31} = 600$$

şi $x = \frac{1}{2} \times 600 = 300$, $y = \frac{1}{3} \times 600 = 200$, $z = \frac{1}{5} \times 600 = 120$.

Verificare: $300 + 200 + 120 = 620$ şi $300 \times 2 = 200 \times 3 = 120 \times 5 = 600$.

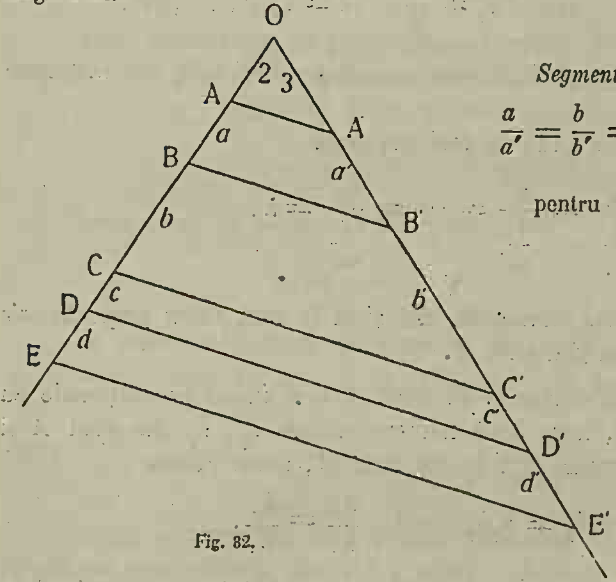
Dacă între două numere de acelaş rang a_i, b_i din şirurile A şi B avem relaţia

$$(74) \qquad b_i a_i^p = \lambda \quad \text{sau} \quad b_i = \frac{\lambda}{a_i^p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zicem că numerele din şirul B sunt invers proporţionale *cu puterile* p ale numerelor din şirul A.

161. Proporţionalitatea în Geometrie. 1⁰. O dreaptă paralelă cu una din laturile unui triunghiu, taie celelalte două laturi în segmente *proporţionale* [99].

2⁰. Dacă tăiem laturile unui unghiu prin mai multe drepte *paralele*, segmentele determinate pe una din laturile unghiului sunt *direct proporţionale* cu segmentele corespunzătoare determinate pe cealaltă lature a unghiului.



Segmente proporţionale

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{2}{3},$$

pentru coeficientul $\frac{2}{3}$.

Fig. 32.

De aci rezultă că, dacă vrem să construim nişte segmente a', b', c', d' proporţionale cu alte segmente date a, b, c, d şi *cu un cocficient de proporţionalitate dat* de exemplu 2/3, e deajuns să construim un unghiu EOE' (*fig.* 32) şi să luăm pe laturea OE segmentele OA = 2, AB = a, BC = b, CD = c, DE = d şi pe laturea OE' segmentul OA' = 3; să ducem apoi dreapta AA' şi *prin punctele* B, C, D, E *drepte paralele cu* AA'; dacă aceste drepte taie laturea OE' în punctele B', C', D', E', segmentele căutate sunt a' = A'B', b' = B'C', c' = C'D', d' = D'E'.

3⁰. Două *poligoane* cu acelaş număr de laturi, ABC...L şi A'B'C'...L' sunt *asemenea*, dacă au *unghiurile respectiv egale*:

$$A = A', \quad B = B', \quad \ldots, \quad L = L'$$

și *laturile omoloage proporționale*:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots = \frac{LA}{L'A'} = \lambda.$$

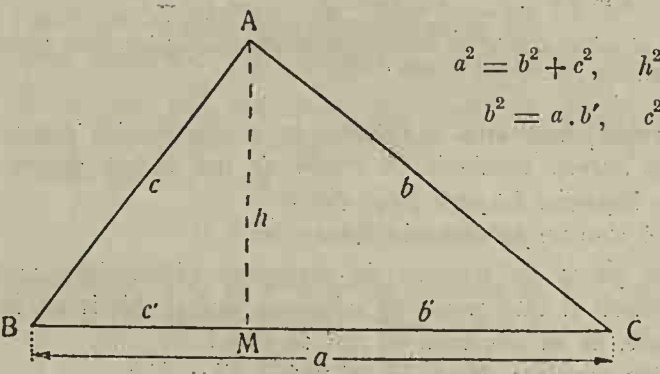
Coeficientul de proporționalitate λ se numește *raport de asemănare*.

Două triunghiuri, care au *laturile proporționale*, sunt *asemenea* (adică au și unghiurile respectiv egale).

Două triunghiuri, care au *unghiurile* respectiv *egale*, sunt *asemenea* (adică au și laturile omoloage proporționale).

4⁰. Toate *triunghiurile dreptunghice*, care au un *acelaș unghiu ascuțit*, sunt *asemenea* (fiindcă au toate unghiurile respectiv egale).

OBSERVARE. Oricât am mări un triunghiu dreptunghic, dacă unul din unghiurile lui ascuțite rămâne *acelaș*, laturile triunghiului se schimbă, dar *rapoartele dintre laturi rămân neschimbate*. Această observare este baza Trigonometriei.



$$a^2 = b^2 + c^2, \quad h^2 = c'.b'$$
$$b^2 = a.b', \quad c^2 = a.c'$$

Fig. 33.

5⁰. Triunghiu dreptunghic. Intr'un triunghiu ABC, însemnăm *unghiurile* prin literele mari dela vârfuri A, B, C; iar *lungimile laturilor* prin literele mici a, b, c corespunzătoare literelor dela unghiurile opuse, adică

$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{AC}, \quad c = \overline{AB}.$$

Intr'un triunghiu *dreptunghic* (*fig.* 33) însemnăm *unghiul drept* cu A. Prin urmare *ipotenuza* e a, iar *catetele* sunt b și c.

Perpendiculara $AM = h$, dusă din vârful unghiului drept pe ipotenuză, împarte ipotenuza în două segmente $\overline{BM} = c'$ și $\overline{MC} = b'$.

Triunghiurile dreptunghice ABC, MBA și MAC sunt *asemenea*. Din proporționalitatea laturilor lor omoloage rezultă relațiile următoare:

(LV) $\qquad h^2 = c'.b'; \quad c^2 = a.c'; \quad b^2 = a.b'.$

Teorema I. *Intr'un triunghiu dreptunghic înălțimea (h), corespunzătoare unghiului drept, este medie geometrică între segmentele (b' și c') determinate de ea pe ipotenuză* [153, 3].

Teorema II. *O catetă (b sau c) este medie geometrică între ipotenuza întreagă (a) și segmentul alăturat (b' sau c').*

Adunând ultimele două egalități (LV), obținem

$$b^2+c^2=a.b'+a.c'=a(b'+c')=a.a=a^2$$

sau

(LVI) $$a^2=b^2+c^2.$$

Teorema III. In orice triunghiu dreptunghic *patratul ipotenuzei este egal cu suma patratelor catetelor.*

Din egalitatea (LVI) rezultă următoarele trei formule:

(75) $$a=\sqrt{b^2+c^2},\quad b=\sqrt{a^2-c^2},\quad c=\sqrt{a^2-b^2},$$

care ne permit să calculăm una din laturile triunghiului dreptunghic, când cunoaștem pe celelalte două.

162. Proporționalitatea în Chimie. In combinările și descompunerile chimice intervin probleme de *regulă de trei* simplă *directă* sau *inversă* și de *împărțire în părți proporționale.*

Dăm aci câte un exemplu de fiecare caz.

1°. Câte grame de minereu de manganez (Piroluzită) cu 45% bioxid de Mangan și câte grame de soluție de acid clorhidric cu 32,5% acid, ne trebue, ca să preparăm 60 litri de Clor?

Greutățile atomice: Mn = 55, O = 16, Cl = 35,5.

Ecuația preparației Clorului este

$$\underset{(87)}{MnO_2}+\underset{(146)}{4\,HCl}=MnCl_2+2\,H_2O+\underset{(71)}{Cl_2}.$$

Se știe că

1 mol.-gram de Clor	(Cl_2)	cântărește	$2\times35{,}5=71$	grame
1 „ „	MnO_2	„	$55+2\times16=87$	„
1 „ „	HCl	„	$1+35{,}5=36{,}5$	„

Se mai știe că 1 moleculă-gram de Clor (71 g) ocupă un volum de 22,3 litri, la temperatura de 0^0 și la presiunea de 760 mm.

Pentru a determină cantitatea de bioxid de Mangan necesară pentru prepararea a 60 l Clor, avem de rezolvat o regulă de trei simplă *directă* [157, 1]:

grame MnO_2	litri Cl
x	60
87	22,3.

Scriind rapoartele aşà cum se prezintă, obţinem:

$$\frac{x}{87} = \frac{60}{22,3} \quad \text{şi} \quad x = \frac{87 \times 60}{22,3} = 234,1 \text{ grame } MnO_2.$$

Pentru a determinà cantitatea de minereu de manganez, care conţine 234,1 g de bioxid de Mangan, avem de rezolvat o regulă de trei simplă *inversă* [157, 2]:

grame minereu	bioxid %
y	45
234,1	100.

Egalăm raportul întâi cu *inversul* raportului al doilea şi obţinem:

$$\frac{y}{234,1} = \frac{100}{45} \quad \text{şi} \quad y = \frac{234,1 \times 100}{45} = 520,2 \text{ grame de minereu.}$$

Pentru acidul clorhidric, găsim în aceleş fel:

392,8 grame HCl şi 1208,6 grame soluţie de acid de 32,5%.

2°. Cât *Sulf* (S), cât *Oxigen* (O) şi câtă *apă* (H_2O) ne trebue, ca să obţinem 1 *kg* de *acid sulfuric* (SO_4H_2)?

Ecuaţia chimică finală este

$$S_2 + 3\,O_2 + 2\,H_2O = 2\,SO_4H_2.$$

Insemnând cu x, y, z cantităţile necesare de S, O şi H_2O pentru prepararea a 1000 grame SO_4H_2, trebue să avem

$$x + y + z = 1000.$$

Pe de altă parte, greutăţile atomice ale S, O şi H fiind respectiv 32, 16 şi 1, numerele x (S_2), y ($3O_2$) şi z ($2H_2O$) trebue să fie *direct proporţionale* cu 64, 96 şi 36; adică trebue să avem [159]:

$$\frac{x}{64} = \frac{y}{96} = \frac{z}{36} = \frac{1000}{196},$$

de unde deducem

$$x = \frac{64 \times 1000}{196} = 326,5\,g.; \quad y = 489,8\,g.; \quad z = 183,7\,g.$$

Verificare: $326,5 + 489,8 + 183,7 = 1000$; $\frac{326,5}{64} = \frac{489,8}{96} = \frac{183,7}{36} = 5,1$ aproximativ.

163. Probleme de amestec. Sunt două feluri de probleme de amestec: 1°. *probleme directe*, când se dau *cantităţile* şi *calităţile* substanţelor care se amestecă şi se cere *calitatea amestecului*; 2°. *probleme inverse*, când se dau *calităţile substanţelor care se amestecă* şi *calitatea* *amestecului* și se întreabă cât trebue să luăm din fiecare substanță, ca să obținem o cantitate determinată de acest amestec.

1°. Problemă directă. Se amestecă trei feluri de soluții de acid sulfuric și anume: $2\,kg$ à 78%, $1{,}5\,kg$ à 94% și $400\,g$ à 40%. Să se determine *calitatea* soluției obținute.

Problema se rezolvă astfel:

Cantități		*Calități*		SO_4H_2
2000 grame	×	0,78	=	1560 grame
1500 „	×	0,94	=	1410 „
400 „	×	0,38	=	152 „
In 3900 grame soluție		avem		3122 grame *acid sulfuric.*

Calitatea soluției $3122 : 3900 = 0{,}8005$; procentul *mediu*: 80%.

Verificare: $3900 \times 0{,}80 = 3120$; $3900 \times 0{,}8005 = 3121{,}95$.

2°. Problemă inversă. Avem două calități de vin à 40 lei și à 25 lei litrul și se întreabă: cât trebue să luăm din fiecare calitate, ca să obținem 3000 litri de vin à 32 lei litrul (fără perdere nici câștig)?

Vânzând vinul cu 32 lei litrul, la fiecare litru de calitatea 1-a perdem câte $40-32=8$ lei și la fiecare litru de calitatea a 2-a, câștigăm câte $32-25=7$ lei. Luând dar x litri de calitatea 1-a și y litri de calitatea a 2-a, trebue să avem

$$\overset{\text{câștigul}}{x \times 8} = \overset{\text{perderea}}{y \times 7}.$$

Soluția evidentă este $x = 7\lambda$, $y = 8\lambda$ (λ un număr *oricare*); prin urmare numerele x și y trebue să fie *proporționale* cu diferențele 7 și 8.

Scriind

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{8} = \frac{3000}{15} = 200,$$

deducem

$$x = 7 \times 200 = 1400; \quad y = 8 \times 200 = 1600.$$

Verificare: $1400 + 1600 = 3000$ și $\frac{1400}{7} = \frac{1600}{8} = 200$.

Regula practică. In practică problema se rezolvă astfel:

Calități		*Diferențe*		*Cantități*
40		7	proporționale cu	x
	32			
25		8		y
		15		3000

OBSERVARE. Problema e *imposibilă*, dacă prețul amestecului nu e un preț *mediu* (cuprins *între* prețurile date).

In problemele de amestec calitatea *apei* se exprimă prin prețul 0 sau prin procentul 0%.

Când avem de amestecat mai multe substanțe, problema se rezolvă în acelaş fel. Pentru calcularea *diferențelor*, se scrie: calitatea cerută *la mijloc*; *toate* calitățile inferioare *de o parte*, *toate* calitățile superioare *de cealaltă parte* şi *se repetă*, dacă e nevoe, una sau mai multe din aceste calități, aşa ca numărul calităților inferioare să fie *egal* cu numărul calităților superioare.

EXEMPLU. Avem trei soluții de acid sulfuric à 78%, à 94% şi à 40% şi se întreabă cât trebue să luăm din fiecare, ca să obținem 3900 gr. de soluție à 80%.

Formăm tabloul următor:

Calități		*Diferențe*			*Cantități*
94		40	42		x
94		2			
	80			proporționale cu	
78		14			y
40		14			z
		70			3900

Scriind

$$\frac{x}{42} = \frac{y}{14} = \frac{z}{14} = \frac{3900}{70} = \frac{390}{7}$$

deducem

$$x = \frac{42 \times 390}{7} = 2340\,g; \quad y = 780\,g; \quad z = 780\,g.$$

Verificare: $2340 + 780 + 780 = 3900$ şi

$$2340 \times 0{,}94 = 2199{,}60; \quad 780 \times 0{,}78 = 608{,}40; \quad 780 \times 0{,}40 = 312;$$

$$2199{,}60 + 608{,}40 + 312 = 3120 \quad \text{iar} \quad 3120 : 3900 = 0{,}80.$$

Putem luà de m ori calitatea 1-a, de p ori calitatea a 2-a şi de q ori calitatea a 3-a, cu condiția $m = p + q$. Avem dar o infinitate de soluții.

164. Probleme de aliaj. Se numeşte *titlul* unui aliaj, cantitatea de *metal fin*, care se găseşte în *unitatea de greutate* a aliajului.

Dacă însemnăm cu G greutatea totală a aliajului, cu T titlul lui şi cu g greutatea metalului fin *pur* din acest aliaj, trebue să avem:

$$g = G \times T \quad \text{sau} \quad T = \frac{g}{G}.$$

EXEMPLU. Cât aur *pur* se găseşte într'un *napoleon* francez?

Napoleonul are greutatea $G = 6{,}452$ grame, titlul $T = 0{,}900$. Prin urmare, greutatea aurului pur este $g = 6{,}452 \times 0{,}900 = 5{,}807$ grame.

Problemele de aliaj *directe* și *inverse* se rezolvă ca și problemele de amestec, înlocuind, în acest caz, prețurile sau procentele prin *titluri*.

EXERCIȚII.

24. Diferența dintre patratele a două numere întregi consecutive este 3851. Care sunt aceste numere?

R. $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 = 3851$. Deci $2n = 3850$ și $n = 3850 : 2$

$$n = 1925, \quad n + 1 = 1926.$$

25. Cu ce număr trebue să înmulțim pe $6\,103\,515\,625 = 5^{14}$, ca să căpătăm pe 5^{19}? 2⁰. Dar ca să căpătăm pe 5^{10}?

R. 1⁰. Cu $5^5 = 3125$. 2⁰. Cu $5^{-4} = 0{,}0016$.

26. Dacă $\frac{1}{x} = 0{,}2$, ce valoare au expresiunile: x; $0{,}001 \times x^5$; x^{-2}; $10x^{-3}$?

R. Avem $\frac{1}{x} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Deci:

$$x = 5; \quad 0{,}001 \times x^5 = 3{,}125; \quad x^{-2} = 0{,}04; \quad 10x^{-3} = 0{,}08.$$

27. Să se scrie sub formă de produse expresiunile următoare:

$$1^0.\ \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^7}; \quad 2^0.\ \frac{n^7}{(n+1)^9} - \frac{n^8}{(n+1)^{10}}; \quad 3^0.\ x^{n-1} + 2x^n + x^{n+1}.$$

R. 1⁰. $\frac{a+1}{a^7} = (a+1) \cdot a^{-7}$; 2⁰. $n^7 (n+1)^{-10}$; 3⁰. $x^{n-1}(1+x)^2$.

28. Să se calculeze: 1⁰. $[(0{,}0625)^{0,5}]^2$; 2⁰. $(0{,}0625)^{(0,5)^2}$.

R. 1⁰. $(0{,}0625)^1 = 0{,}0625$; 2⁰. $(0{,}0625)^{0,25} = (0{,}625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{0{,}0625}} = 0{,}5$.

29. Să se demonstreze că, pentru $a > b$, avem

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{a-b}{2}},$$

$$\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} - \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

R. Ridicând la patrat ambii membri ai acestor egalități obținem expresiuni egale.

30. Să se calculeze și să se compare: 1⁰. $\sqrt{9+4+36}$ cu $\sqrt{9} + \sqrt{4} + \sqrt{36}$;

2⁰. $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}}$ cu $\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{1}{16}}$; 3⁰. $\sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{16}}$ cu $\sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{16}}$.

R. 1⁰. $\sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$; $\sqrt{9} + \sqrt{4} + \sqrt{36} = 3 + 2 + 6 = 11 > 7$.

2⁰. $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16+9}{144}} = \frac{5}{12}$; $\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{5}{12}$.

3⁰. $\sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16-9}{144}} = \frac{\sqrt{7}}{12} = \frac{2{,}6\ldots}{12}$; $\sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} < \frac{\sqrt{7}}{12}$.

31. Să se efectueze sumele:

$$1^0.\ 2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{320}-2\sqrt[3]{1372};\qquad 2^0.\ \sqrt{6}-\left(\frac{27}{8}\right)^{-0,5}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{27}}.$$

R. $1^0.\ 2\sqrt[3]{5.8}+3\sqrt[3]{4.27}+\sqrt[3]{4.125}-\sqrt[3]{5.64}-2\sqrt[3]{4.343}$

$$=4\sqrt[3]{5}+9\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{5}-14\sqrt[3]{4}=0.$$

$$2^0.\ 3\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{7}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}=\left(3+\frac{7}{9}-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{28}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

32. Să se calculeze:

$$1^0.\ 100^{1,5};\quad 2^0.\ \sqrt[5]{17^2}.\left(\sqrt[5]{17}\right)^2.17^{\frac{1}{5}}-15^{\frac{5}{12}}.\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}.\sqrt[6]{\sqrt{5}}.$$

$$3^0.\ \left(5\frac{1}{16}\right)^{-1,25};\qquad 4^0.\ \sqrt{1\frac{13}{36}}:\sqrt[5]{0,00032}.$$

R. $1^0.\ 100^{1,5}=100^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{100})^3=10^3=1000.$

$$2^0.\ \sqrt[5]{17^2}.\sqrt[5]{17^2}.\sqrt[5]{17}-\sqrt[12]{15^5}.\sqrt[12]{3}.\sqrt[12]{5}=\sqrt[5]{17^5}-\sqrt[12]{15^6}=17-\sqrt{15},$$

$$3^0.\ \left(5\frac{1}{16}\right)^{-1,25}=\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{5}{4}}=\left(\sqrt[4]{\frac{16}{81}}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}.$$

$$4^0.\ \sqrt{\frac{49}{36}}:\sqrt[5]{(0,2)^5}=\frac{7}{6}:\frac{2}{10}=\frac{7}{6}\times 5=\frac{35}{6}.$$

33. Care e cel mai mare dintre numerele:

1^0. 2,34750929 şi 2,347518; 2^0. 0,545455445 ... şi 0,545545445 ...;

$$2^0.\ 203+\frac{5}{8}+\frac{6}{8^2}+\frac{7}{8^3}+\frac{2}{8^4}+\frac{1}{8^5}\quad \text{şi}\quad 203+\frac{5}{8}+\frac{6}{8^2}+\frac{2}{8^3}+\frac{7}{8^4}+\frac{3}{8^5}.$$

R. In cazurile 1^0 şi 2^0 e mai mare numărul al doilea; în cazul 3^0 e mai mare numărul întâiu.

34. Să se găsească limita către care tinde numărul

$$a_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

când n creşte la infinit.

R. Numărul dat se mai poate scrie

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

şi când $n\to\infty$, a_n tinde către 1.

35. Trei asociaţi A, B, C pun într'o întreprindere: (A) 5000 lei; (B) 8000 lei; (C) 2000 lei. Primul asociat îşi retrage capitalul după 4 luni, al doilea după 6 luni. La sfârşitul anului se constată că această întreprindere a produs un câştig total de 4600 lei. Să se calculeze câştigul fiecărui asociat.

R. Câștigurile sunt proporționale cu produsele:

$$5000 \times 4 = 20\,000, \quad 8000 \times 6 = 48\,000, \quad 2000 \times 12 = 24\,000.$$

Trebue dar să împărțim numărul 4600 în părți direct proporționale cu numerele 20 000, 48 000 și 24 000 și găsim: (A) 1000 lei; (B) 2400 lei; (C) 1200 lei.

36. Dintre două triunghiuri asemenea, unul are laturile de 6,60 *cm*, 9,02 *cm* și 11,55 *cm*; celălalt are perimetrul de 12,35 *cm*. Să se determine laturile triunghiului al doilea.

R. Însemnând cu a, b, c laturile triunghiului al doilea, trebue să avem

$$\frac{a}{6{,}60} = \frac{b}{9{,}02} = \frac{c}{11{,}55} = \frac{12{,}35}{27{,}17} = \frac{5}{11}.$$

Prin urmare: $a = \frac{6{,}60 \times 5}{11} = 3\,cm$; $b = 4{,}10\,cm$; $c = 5{,}25\,cm$.

37. Prețurile bucăților de diamant sunt direct proporționale cu patratele greutăților lor. Un diamant, care valoră 24500 lei, s'a spart în 3 bucăți. Știind că una din aceste bucăți cântărește $\frac{1}{7}$ și alta $\frac{2}{5}$ din greutatea totală a diamantului, se cere să se calculeze cu cât s'a depreciat valoarea acestui diamant prin spargere.

R. Prețurile bucății întregi și a celor trei părți obținute sunt direct proporționale cu patratele numerelor 1, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{5}$ și $\frac{16}{35}$. Cele trei părți valorează 500, 3920 și 5120 lei. Deprecierea este de $24500 - 9540 = 14\,960$ lei.

38. Câte grame de clorură de sodiu ne trebue pentru a precipită tot argintul dintr'o monedă de 5 lei, sub forma de clorură de argint?

Greutăți atomice: Ag = 108; Na = 23; Cl = 35,5.

Ecuația chimică: $Az\,O_3\,Ag + Na\,Cl = Ag\,Cl + Az\,O_3\,Na$.

R. Titlul aliajului dintr'o monedă veche de 5 lei de argint e: 0,900; greutatea monedei: 25 grame. Argintul pur: $0{,}900 \times 25 = 22{,}5\,g$.

Greutatea moleculară a clorurei de sodiu ($Na\,Cl$): $23 + 35{,}5 = 58{,}5\,g$. Ea precipită 108 g argint (Ag). Regula de trei simplă directă

Ag	Na Cl
108	58,5
22,5	x

ne dă

$$x = \frac{22{,}5 \times 58{,}5}{108} = 12{,}19\,g \quad \textit{clorură de sodiu.}$$

39. Avem două aliaje de aur: 450 g cu titlul 0,92 și 350 g cu titlul 0,84. Cât cupru trebue să mai punem, ca să obținem un aliaj cu titlul 0,860?

R. Titlul cuprului e 0. Topirea primelor două aliaje ne dă 800 g aliaj aur cu titlul 0,885. O problemă indirectă, cu titlurile date 0,885 și 0 și titlul cerut 0,860, pentru 800 g aliaj ne dă Cu = 232,5 g.

CAPITOLUL IV.

CALCULUL ALGEBRIC.

I. — OPERAŢIILE ALGEBRICE.

165. Expresii algebrice. In Algebră numerele se reprezintă prin *litere* şi operaţiile se arată prin *semne*. Intrebuinţarea literelor şi a semnelor simplifică şi *generalizează* raţionamentele şi calculele.

Un grup de numere şi de litere, legate între ele prin semne de operaţii, formează o *expresie algebrică*.

O expresie algebrică poate fi: *raţională* sau *iraţională*, *fracţionară* sau *întreagă*.

O expresie algebrică se zice *iraţională*, când conţine *litere* sub *radicali*. In caz contrariu expresia e *raţională*.

EXEMPLE. Expresii raţionale:

$$5a^2b, \quad \frac{x+y}{7xy}, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}+(bx-c)^3.$$

Expresii iraţionale:

$$\sqrt[3]{5ab}, \quad \frac{x+\sqrt{y}}{7xy}, \quad \frac{3\sqrt{a}}{2}+(bx-\sqrt{c})^3.$$

O expresie algebrică raţională e *fracţionară*, când conţine *litere* la *numitor*. In caz contrariu expresia e *întreagă*.

EXEMPLE. Expresii întregi:

$$5a^2b, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}+(bx-c)^3, \quad (a+x)\left(2a^3-\frac{5}{7}xy\right).$$

Expresii fracţionare:

$$\frac{x+y}{7xy}, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{(bx-c)^3}, \quad \frac{2a^3-5xy}{(a+x)(b-y\sqrt{2})}.$$

166. Valoare numerică. Dacă într'o expresie algebrică înlocuim literele prin nişte *numere* date şi facem toate operaţiile arătate de semne, numărul, pe care-l obținem ca rezultat final, se numește *valoarea numerică* a acestei expresii *pentru valorile date literelor.*

EXEMPLU. Valoarea numerică a expresiei $6x^2(y-3)$

pentru $x=2$, $y=4$ este $6\times 2^2\times(4-3)=24$,

pentru $x=3$, $y=1$ este $6\times 3^2\times(1-3)=-108$.

Dacă însemnăm cu u valoarea expresiei $6x^2(y-3)$, formula

$$(1) \qquad u=6x^2(y-3)$$

ne arată cum se calculează valoarea lui u, când cunoaștem valorile numerice ale literelor x și y. Valorile variabilelor x și y pot fi luate în mod arbitrar [142], pe când valoarea lui u rezultă, în fiecare caz, prin formula (1); de aceea zicem că x și y sunt *variabile independente*, iar u e variabilă *dependentă* sau *funcție* de x și y.

În general, vom zice că orice *expresie algebrică*, sau valoarea u a ei, este o *funcție* de literele (*variabile*) cu care e scrisă această expresie.

EXEMPLE. 1⁰. Volumul unei sfere cu raza r este $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

2⁰. Suprafața laterală a unui cilindru drept cu bază circulară, cu raza x și înălțimea y, este $S=2\pi xy$.

3⁰. Greutatea unui litru de gaz (exprimată în *grame*) este

$$g=\frac{1,293}{1+kt}\cdot\frac{pd}{760}, \qquad k=0,003665$$

unde p e presiunea (în *mm*), d densitatea și t temperatura gazului.

Aceste formule ne arată că: în exemplul 1⁰, V e funcție de r; în exemplul 2⁰, S e funcție de x și y; în exemplul 3⁰, g e funcție de variabilele p, d, t, iar k e un coeficient *constant.*

Pentru a arătà că o variabilă u este funcție de una sau mai multe alte variabile x, y, z, putem scrie numai

$$u=f(x) \qquad [u \text{ egal } f \text{ de } x],$$

sau $$u=f(x, y, z) \qquad [u \text{ egal } f \text{ de } x, y, z],$$

însemnând prin f toate operațiile, pe care trebue să le facem asupra valorilor variabilelor independente x sau x, y, z, ca să capătăm valoarea corespunzătoare a lui u.

Valoarea numerică a unei funcții $f(x)$ pentru $x=a$ se scrie $f(a)$.

EXEMPLU. Pentru funcția $f(x)=2x^2-5x+7$ avem

pentru $x=a$ $\quad f(a)=2a^2-5a+7$;

pentru $x=3b$ $\quad f(3b)=2.(3b)^2-5.(3b)+7=18b^2-15b+7$.

167. Egalităţi algebrice. Valorile numerice a două expresii algebrice pot fi *egale* sau *neegale* pentru nişte valori date literelor. Astfel, pentru $a=2$, $x=5$, avem

(2) $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ fiindcă $(2+5)(2-5)=4-25$;

(3) $2ax^2=4x+7a^3+24$ „ $2.2.25=4.5+7.8+24$;

(4) $8a+x \neq a\sqrt{5x}-7$ „ $8.2+5 \neq 2.5-7$.

Două expresii algebrice *egale* formează o *egalitate algebrică*.

Egalitatea se zice *identitate*, când e adevărată pentru *orice valori numerice* date literelor.

EXEMPLE. Egalitatea (2) este o *identitate*; egalitatea (3) nu e o identitate, fiindcă, de exemplu, pentru $a=0$, $x=0$, avem

$$2ax^2=0,\quad 4x+7a^3+24=24 \quad \text{şi} \quad 0 \neq 24.$$

In general o egalitate algebrică e adevărată *numai pentru nişte valori anumite* date literelor. In acest caz zicem că egalitatea e o *ecuaţie*. Valorile particulare, care puse în locul literelor fac ca membrul întâi al ecuaţiei să fie *egal* cu membrul al doilea al ei, se numesc *rădăcinile* sau *soluţiile* ecuaţiei.

EXEMPLU. Egalitatea $2x=17$ e satisfăcută numai pentru $x=8{,}5$. Această egalitate e o *ecuaţie*, care are o singură *rădăcină*: $x=8{,}5$.

168. Monom. O expresie algebrică, în care numerele şi literele nu sunt despărţite *între ele* prin semnele $+$ sau $-$, se numeşte *monom*.

EXEMPLE. $4x^2y^3$, $-\dfrac{a^2x}{5bc^3}$.

Orice monom are:

1⁰. Un *semn*: $+$ sau $-$, care e scris înaintea monomului. Când înaintea unui monom nu e scris niciun semn, se subînţelege semnul $+$.

2⁰. Un *coeficient*: factorul numeric împreună cu semnul. Când nu e scris niciun factor numeric, se subînţelege factorul 1.

3⁰. O *parte literală*: partea formată din toate literele monomului cu exponenţii lor.

Astfel monomul $4x^2y^3$ are semnul $+$, coeficientul $+4$ şi partea literală x^2y^3.

Monomul $-\dfrac{a^2x}{5bc^3}=-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{a^2x}{bc^3}$ are semnul $-$, coeficientul $-\dfrac{1}{5}$ şi partea literală $\dfrac{a^2x}{bc^3}$.

OBSERVARE. Orice monom, care nu e întreg [165], se poate scrie *sub formă întreagă*, dacă aplicăm formula (XXVIII) [pag. 96] pentru literele, care se găsesc la numitor. Astfel putem scrie

$$-\frac{a^2x}{5bc^3} = -\frac{1}{5}\cdot a^2xb^{-1}c^{-3}.$$

Gradul unui monom, scris sub formă întreagă, este *suma exponenților tuturor literelor lui.*

EXEMPLE. $4x^2y^3$ e un monom întreg de grad 5. Monomul $-\frac{1}{5}a^2xb^{-1}c^{-3}$ e de grad $2+1-1-3=-1$.

Când o literă n'are exponent, se subînțelege exponentul 1.

Când o literă lipsește într'un monom, putem zice că figurează cu exponentul 0 [113]. Astfel $-3x$ e un monom întreg în x și y de grad 1, fiindcă se poate scrie $-3x^1y^0$.

169. Polinom. O sumă algebrică de *două* monoame e un *binom*; de *trei* monoame e un *trinom*; de *mai multe* monoame e un *polinom.*

Monoamele componente se numesc *termenii* polinomului.

Gradul unui polinom e cel mai mare dintre gradele termenilor lui.

EXEMPLU. $5x^6-2xy^3+x^2-3y$ e un polinom întreg în x și y de grad 6, format din 4 termeni: $5x^6$, $-2xy^3$, $+x^2$ și $-3y$.

Un polinom se zice *omogen*, când toți termenii lui sunt de *acelaș grad.*

EXEMPLU. $5x^2y^3-3x^4y+2x^5$ e un polinom omogen de grad 5.

170. Termeni asemenea. Doi sau mai mulți termeni, care au *aceeaș parte literală*, se numesc *termeni asemenea.* Suma lor se poate *reduce* la un singur termen [112, 1].

Astfel polinomul $3xy^2-5xy^2+8xy^2$ are trei termeni asemenea și, punând partea literală în factor comun, putem scrie

$$3xy^2-5xy^2+8xy^2=(3-5+8)xy^2=6xy^2.$$

Un polinom, care n'are termeni asemenea, e un polinom *redus.*

EXEMPLU. Polinomul

$$\underline{5x^2y}-\underline{\underline{3x^3}}+2xy^2-\underline{\underline{4x^3}}-\underline{xy}+xy^2+\underline{7x^2y}+\underline{\underline{x^3}}$$

se reduce la

$$11x^2y-6x^3+3xy^2.$$

Reducerea se face astfel:

1°. Se subliniază toți termenii asemenea cu $5x^2y$; se face reducerea lor; se scrie rezultatul $11x^2y$ și se taie toți termenii reduși.

2°. Se subliniază apoi toţi termenii asemenea cu $-3x^3$; se face reducerea lor; se scrie rezultatul $-6x^3$ şi se taie şi aceşti termeni reduşi.

Se continuă astfel până ce s'au redus şi s'au tăiat toţi termenii polinomului dat.

171. Polinom ordonat. Un polinom fiind o sumă algebrică, valoarea lui nu se schimbă [166], dacă shimbăm *ordinea* termenilor.

Un polinom redus se zice *ordonat în raport cu o literă*, dacă termenii lui sunt aşezaţi astfel, ca *exponenţii* acestei litere să meargă *numai crescând* (sau *numai descrescând*) dela primul termen până la ultimul termen al polinomului.

EXEMPLE. 1°. Să se ordoneze polinomul $11x^2y-6x^3+3xy^2$ după puterile *crescătoare* ale lui x. Vom scrie; $3xy^2+11x^2y-6x^3$.

2°. Să se ordoneze polinomul

$$2x^5-7a^2+b^2x^3+b^3+5a^2x^3-3ax^5+2abx-7abx^3-3$$

după puterile *descrescătoare* ale lui x. Vom scrie:

$$(2-3a)x^5+(5a^2-7ab+b^2)x^3+2abx-7a^2+b^3-3.$$

In acest caz zicem că x e litera *ordonătoare.*

Un polinom ordonat, de grad n, e *complect*, când conţine *toate puterile literei ordonătoare* dela n până la 0 incluziv.

Astfel $2x^5-3x^4+x^3-5x^2-7x+10$ e un polinom întreg în x, de grad 5, *ordonat* şi *complect.*

Un polinom întreg de grad n în x este de forma

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Dacă un termen de un grad oarecare lipseşte, putem zice că figurează cu coeficientul 0.

Un polinom *complect* de grad n trebue să conţină termeni de grad $0, 1, 2, \ldots, n$; în total $n+1$ termeni.

EXEMPLU. $4x^3-2x+7$ e un polinom de grad 3 *necomplect.* Complectat se va scrie: $4x^3+0.x^2-2x+7$. El e de forma $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ unde $a_0=4$, $a_1=0$, $a_2=-2$, $a_3=+7$.

Un polinom întreg în x se poate reprezenta, în mod prescurtat, prin simbolul $P(x)$ sau numai P.

Operaţiile cu polinoamele sunt operaţii cu *sume algebrice.* Dacă, după efectuarea unei operaţii, polinomul *rezultat* conţine termeni asemenea, facem întotdeauna *reducerea* lor [170].

In toate calculele algebrice egalităţile dintre operaţiile neefectuate şi rezultatele acestor operaţii sunt *identităţi.*

172. Adunarea polinoamelor. REGULĂ. *Ca să adunăm mai multe monoame sau polinoame, le scriem unele după altele cu semnele lor* [34].

EXEMPLU. Să se adune polinoamele:

$$P = 3a + 5ax^2 - 3ab, \qquad Q = 7ax^2 + ab - 3a^2.$$

Scriem

$$\begin{aligned} P + Q &= 3a + 5ax^2 - 3ab + 7ax^2 + ab - 3a^2 \\ &= 3a + 12ax^2 - 2ab - 3a^2; \end{aligned}$$

sau punând termenii asemenea unii sub alții

$$\begin{array}{rrl} & P = & 3a + 5ax^2 - 3ab \\ & Q = & \phantom{3a +{}} 7ax^2 + ab - 3a^2 \\ \hline \text{Suma:} & P + Q = & 3a + 12ax^2 - 2ab - 3a^2. \end{array}$$

173. Scăderea polinoamelor. REGULĂ. *Ca să scădem două polinoame scriem, după descăzut, termenii polinomului scăzător cu toate semnele schimbate* [38].

EXEMPLU. Pentru polinoamele din exemplul precedent, avem

$$\begin{aligned} P - Q &= 3a + 5ax^2 - 3ab - 7ax^2 - ab + 3a^2 \\ &= 3a - 2ax^2 - 4ab + 3a^2; \end{aligned}$$

sau scriind termenii asemenea unii sub alții și *schimbând semnele la scăzător*, avem

$$\begin{array}{rrl} & P = & 3a + 5ax^2 - 3ab \\ & -Q = & - 7ax^2 - ab + 3a^2 \\ \hline \text{Diferența:} & P - Q = & 3a - 2ax^2 - 4ab + 3a^2. \end{array}$$

174. Inmulțirea polinoamelor.

1°. Inmulțirea monoamelor e o înmulțire de *produse algebrice* [52], la care se aplică *legea inmulțirii puterilor* [111, 2]:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}.$$

REGULĂ. *Ca să înmulțim două sau mai multe monoame:*

Inmulțim coeficienții, ținând seamă de regula semnelor [45].

Scriem literele din toți factorii unele după altele, luând fiecare literă *numai o singură dată.*

La fiecare literă punem ca exponent suma exponenților, pe care-i are această literă în toți factorii.

EXEMPLU: $3ab^2 \times (-5a^3bc) \times \left(-\frac{abc^2}{2}\right) = +\frac{15}{2}a^5b^4c^3.$

In adevăr produsul neefectuat fiind *comutativ*, îl putem scrie

$$3 \cdot (-5) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a \cdot a^3 \cdot a \cdot b^2 \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c^2.$$

Produsul efectuat are: *coeficientul*: $3 \times (-5) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2}$; *literele*: abc; *exponenții*: pentru a, $1+3+1=5$; pentru b, $2+1+1=4$; pentru c, $1+2=3$.

Gradul produsului este egal cu *suma gradelor factorilor*.

2°. Inmulțirea unui polinom cu un monom e înmulțirea unei *sume algebrice* cu un *număr* [51, 3].

REGULĂ. *Ca să înmulțim un polinom cu un monom, înmulțim fiecare termen al polinomului cu monomul și facem suma algebrică a produselor astfel obținute.*

EXEMPLU. Să se înmulțească polinomul $5ax^2 - 3a^2x + 4x^3 - 6a^3$ cu monomul $-2a^2$. Aplicând regula precedentă obținem:

$$\begin{array}{rcl}
5\,ax^2 \times (-2a^2) &=& -10\,a^3x^2 \\
-3\,a^2x \times (-2a^2) &=& +\,6\,a^4x \\
+\,4\,x^3 \times (-2a^2) &=& -\,8\,a^2x^3 \\
-\,6\,a^3 \times (-2a^2) &=& +12\,a^5 \\
\hline
\textit{Produsul total:} && -10\,a^3x^2 + 6\,a^4x - 8\,a^2x^3 + 12\,a^5.
\end{array}$$

3°. Inmulțirea polinoamelor e o înmulțire de *sume algebrice* [54].

REGULĂ. *Ca să înmulțim două polinoame, înmulțim polinomul deînmulțit cu fiecare termen al polinomului înmulțitor și facem suma algebrică a produselor astfel obținute.*

Operația fiind *comutativă* [51, 2], putem alege ca înmulțitor polinomul, care are mai puțini termeni.

Inmulțirea se simplifică, dacă *ordonăm* întâi polinoamele în raport cu aceeaș literă și scriem produsele parțiale, astfel ca termenii asemenea să vie unii sub alții.

EXEMPLU. Să se înmulțească polinoamele

$$P = 5\,ax^2 - 3\,a^2x + 4\,x^3 - 6\,a^3, \qquad Q = -\,2\,a^2 + ax - x^2.$$

Ordonându-le după puterile descrescătoare ale lui x, scriem:

$$\begin{array}{llcccccc}
\textit{Deînmulțitul} & P = & 4\,x^3 & +\,5\,ax^2 & -\,3\,a^2x & -\,6\,a^3 & & \\
\textit{Inmulțitorul} & Q = & & & -\,x^2 & +\,ax & -\,2\,a^2 & \\
\hline
\text{produsul cu } -x^2 & & -4\,x^5 & -\,5\,ax^4 & +\,3\,a^2x^3 & +\,6\,a^3x^2 & & \\
\text{produsul cu } +ax & & & +\,4\,ax^4 & +\,5\,a^2x^3 & -\,3\,a^3x^2 & -\,6\,a^4x & \\
\text{produsul cu } -2a^2 & & & & -\,8\,a^2x^3 & -\,10\,a^3x^2 & +\,6\,a^4x & +\,12\,a^5 \\
\hline
\textit{Produsul total:} & P.Q = & -\,4\,x^5 & -\,ax^4 & & -\,7\,a^3x^2 & & +\,12\,a^5
\end{array}$$

Gradul produsului este egal cu *suma* gradelor factorilor.

Observare. *Termenul de gradul cel mai mare* (sau cel mai mic) *al produsului* provine fără reducere din înmulţirea *termenilor de gradul cel mai mare* (sau cel mai mic) *dela polinoamele factori.*

Ca să înmulţim mai multe polinoame, înmulţim polinomul întâi cu al doilea, produsul obţinut cu polinomul al treilea şi aşà mai departe.

175. Puterea unui polinom. Pentru n întreg şi pozitiv avem

$$P^n = P \times P \times \ldots \times P \qquad (n \text{ factori}).$$

Patratul unui polinom este patratul unei *sume* algebrice [117]. In particular vom aplicà formulele:

(XXXIII) $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

(XXXIV) $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

(XXXV) $$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

şi în general

(LVII) $$(\Sigma a_p)^2 = \Sigma a_p^2 + 2\Sigma a_p a_q$$

$$p = 1, 2, \ldots, n; \quad q = p+1, p+2, \ldots, n.$$

EXEMPLE.

1⁰. $(ax^2 + bx + c)^2 = (ax^2)^2 + (bx)^2 + c^2 + 2(ax^2)(bx) + 2(ax^2).c + 2(bx).c$

$= a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx$

$= a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2.$

2⁰. $x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = (x-a)(x+a)(x^2 + a^2).$

3⁰. $x^4 + 4a^4 = x^4 + \underline{4a^2x^2} + 4a^4 - \underline{4a^2x^2} = (x^2 + 2a^2)^2 - 4a^2x^2$

$= (x^2 + 2a^2 - 2ax)(x^2 + 2a^2 + 2ax).$

Pentru cub aplicăm formula

(5) $$(\Sigma a_p)^3 = (\Sigma a_p)^2 \times (\Sigma a_p) \qquad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Astfel găsim:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Pentru puterea a n-a avem:

(LVIII) $$(\Sigma a_p)^n = (\Sigma a_p)^{n-1} \times (\Sigma a_p)$$

176. Identitatea lui Lagrange. Avem:

$$(\mathrm{LIX}) \qquad (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(a\alpha+b\beta)^2 = (a\beta-b\alpha)^2.$$

In adevăr, efectuând operaţiile din membrul întâi, găsim

$$\begin{array}{rcl}
(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) & = & a^2\alpha^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2+b^2\beta^2 \\
-(a\alpha+b\beta)^2 & = & -a^2\alpha^2 \qquad\qquad -b^2\beta^2-2ab\,\alpha\beta \\
\hline
(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(a\alpha+b\beta)^2 & = & b^2\alpha^2+a^2\beta^2 \qquad -2ab\,\alpha\beta.
\end{array}$$

expresie identic egală cu membrul al doilea

$$(a\beta-b\alpha)^2 = (a^2\beta^2-2ab\alpha\beta+b^2\alpha^2.$$

In acelaş fel se verifică identitatea mai generală:

$$(\mathrm{LX}) \qquad \begin{array}{l}(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2 = \\ \qquad (a\beta-b\alpha)^2+(b\gamma-c\beta)^2+(c\alpha-a\gamma)^2.\end{array}$$

Identităţile (LIX) şi (LX) se numesc *identităţile lui Lagrange.*

177. Impărţirea polinoamelor. Dacă P şi Q sunt două expresii algebrice, *câtul exact* al împărţirii lor e o a treia expresie algebrică C, care ne dă *identitatea*:

$$P \equiv Q \times C.$$

Acest cât se poate reprezentà printr'o *fracţie algebrică* [76]:

$$P:Q=\frac{P}{Q} \quad \text{şi avem} \quad \frac{P}{Q}\times Q = P.$$

1⁰. Impărţirea a două monoame. REGULĂ. *Câtul a două monoame e o fracţie, care are ca numărător monomul deîmpărţit şi ca numitor monomul împărţitor.*

Semnul câtului e dat de regula semnelor [76]. Monoamele fiind nişte produse, fracţia se simplifică suprimând orice *factor comun* dela numărător şi dela numitor [59, 3].

EXEMPLU: $(-15a^2b^3c):3ab^4d^2 = \dfrac{-15a^2b^3c}{3ab^4d^2} = -\dfrac{5ac}{bd^2},$

observând că factorii 3, a şi b^3 se găsesc şi la numărător şi la numitor.

2⁰. Impărţirea unui polinom printr'un monom e împărţirea unei sume algebrice printr'un număr [59, 2].

REGULĂ. *Ca să împărţim un polinom printr'un monom, împărţim fiecare termen al polinomului prin monom şi facem suma algebrică a câturilor obţinute.*

EXEMPLU: $(2ab^3-3a^2b^2+ab-7):3ab=\frac{2ab^3}{3ab}-\frac{3a^2b^2}{3ab}+\frac{ab}{3ab}-\frac{7}{3ab}$
$=\frac{2}{3}b^2-ab+\frac{1}{3}-\frac{7}{3ab}.$

3°. Impărțirea a două polinoame. Dacă P și Q sunt două *polinoame*, avem prin definiție

$$P:Q=\frac{P}{Q}\qquad (\textit{cât exact}).$$

Fracția $\frac{P}{Q}$ se poate simplifică prin orice număr sau expresie, care se găsește ca *factor* și la numărător și la numitor.

EXEMPLU:

$$(a^3-b^3+ab^2-a^2b):(a^4-b^4)=\frac{a^3-b^3+ab^2-a^2b}{a^4-b^4}.$$

Dar

$$a^3-b^3+ab^2-a^2b=a^3-a^2b+ab^2-b^3=a^2(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a^2+b^2)(a-b);$$
$$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2).$$

Prin urmare, câtul căutat se poate scrie

$$\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}=\frac{1}{a+b}.$$

178. Impărțirea polinoamelor ordonate.

1°. Impărțire exactă. Dacă P și Q sunt două polinoame întregi în x, gradul lui P fiind mai mare decât gradul lui Q, zicem că împărțirea $P:Q$ se face *exact*, dacă găsim un al treilea polinom C, întreg în x, care să ne deà

(6) $$P=Q\times C.$$

Ca să calculăm câtul C ordonăm întâi polinoamele date după puterile descrescătoare ale lui x.

Să luăm, de exemplu, polinoamele

$$P=10x^5-29x^4-2x^3+24x^2+7x+20,$$
$$Q=\ 5x^3-7x^2+x-4.$$

După identitatea (6), produsul (P) fiind de gradul 5 și unul din factori (Q) fiind de gradul 3, celălalt factor (C) trebue să fie de gradul $5-3=2$.

Gradul câtului este diferenţa dintre gradul deîmpărţitului şi gradul împărţitorului. Avem dar, pentru exemplul luat,

$$C = ax^2 + bx + c$$

şi trebue să determinăm coeficienţii a, b, c.

După o proprietate a înmulţirii polinoamelor ordonate [174, 3], termenul întâi al produsului ($10x^5$) provine, fără reducere, din înmulţirea primilor termeni ($5x^3$ şi ax^2) dela deînmulţit şi înmulţitor. Avem dar

$$10x^5 = 5x^3 \times ax^2 \quad \text{sau} \quad 10x^5 : 5x^3 = ax^2.$$

Operaţia I. *Impărţim primul termen al deîmpărţitului prin primul termen al împărţitorului; obţinem astfel primul termen al câtului.*

$$ax^2 = 10x^5 : 5x^3 = 2x^2.$$

Identitatea (6) ne dă

(7) $$P \equiv Q \times (2x^2 + bx + c) \equiv Q \cdot 2x^2 + Q(bx + c).$$

Să însemnăm cu R_1 diferenţa $P - Q \cdot 2x^2$. Cum

$$\begin{array}{rrl} P & = & 10x^5 - 29x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 7x + 20 \\ -Q \cdot 2x^2 & = & -10x^5 + 14x^4 - 2x^3 + 8x^2 \\ \hline \text{gasim} \quad R_1 & = & \qquad\quad -15x^4 - 4x^3 + 32x^2 + 7x + 20. \end{array}$$

Operaţia II. *Inmulţim primul termen al câtului cu polinomul împărţitor; acest produs e primul produs parţial. Scădem acest produs din deîmpărţit şi obţinem restul întâi.*

Din identitatea (7) rezultă

(8) $$R_1 \equiv P - Q \cdot 2x^2 \equiv Q(bx + c)$$

adică

$$-15x^4 - 4x^3 + 32x^2 + 7x + 20 \equiv (5x^3 - 7x^2 + x - 4)(bx + c).$$

Prin urmare $bx + c$ este *câtul* împărţirii restului întâi R_1 prin împărţitor. Termenul bx se capătă prin operaţia I.

Operaţia III. *Impărţim primul termen al restului întâi prin primul termen al împărţitorului; obţinem astfel al doilea termen al câtului.*

$$bx = -15x^4 : 5x^3 = -3x.$$

Identitatea (8) ne dă

$$(9) \qquad R_1 \equiv Q(-3x+c) \equiv Q.(-3x)+Q.c.$$

Să însemnăm cu R_2 diferența $R_1-Q.(-3x)$. Găsim

$$R_2 = -25x^3+35x^2-5x+20.$$

Operația IV. *Inmulțim al doilea termen al câtului cu polinomul împărțitor; acest produs e al doilea produs parțial. Scădem acest produs din restul întâi și obținem restul al doilea.*

Continuăm astfel împărțirea până când ajungem la un rest nul.

Din identitatea (9) rezultă

$$(10) \qquad R_2 \equiv R_1-Q.(-3x) \equiv Q.c$$

adică

$$-25x^3+35x^2-5x+20 \equiv (5x^3-7x^2+x-4).c.$$

Prin urmare, după operația I, avem

$$c = -25x^3 : 5x^3 = -5.$$

Scăzând produsul $Q.(-5)$ din restul R_2 obținem un *rest nul*. Câtul aflat este dar

$$C = 2x^2-3x-5.$$

In practică împărțirea se așează în felul următor:

$$\begin{array}{lrrrrrr|ll}
(P) & 10x^5 & -29x^4 & -2x^3 & +24x^2 & +7x & +20 & 5x^3-7x^2+x-4 & (Q) \\
\cline{8-9}
 & -10x^5 & +14x^4 & -2x^3 & +8x^2 & & & 2x^2-3x-5 & (C) \\
\cline{2-7}
(R_1) & & -15x^4 & -4x^3 & +32x^2 & +7x & +20 & & \\
 & & +15x^4 & -21x^3 & +3x^2 & -12x & & & \\
\cline{3-7}
(R_2) & & & -25x^3 & +35x^2 & -5x & +20 & & \\
 & & & +25x^3 & -35x^2 & +5x & -20 & & \\
\cline{2-7}
(R) & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Observare. Când împărțirea se face exact, ultimul termen al deîmpărțitului e egal cu produsul ultimilor termeni ai câtului și împărțitorului.

In exemplul luat avem: $+20 = (-5).(-4)$.

Când împărțirea polinoamelor $P:Q$ se face *exact*, zicem că P e *divizibil* prin Q; P e un *multiplu* al lui Q și Q e un *divizor* al lui P.

2°. Impărțire neexactă. Oricare ar fi polinoamele P și Q întregi în x, ordonate după puterile descrescătoare ale lui x, dacă gradul polinomului P e *mai mare* sau *cel puţin egal* cu gradul polinomului Q, operaţiile date pentru împărţirea $P:Q$ se pot efectuà. Cum gradele resturilor R_1, R_2, ... sunt numere întregi, pozitive şi *descrescătoare*, operaţia nu se poate continuà la infinit.

Ori ajungem la un rest *nul* şi atunci împărţirea se face *exact*.

Ori ajungem la un rest $R \neq 0$, *al cărui grad e mai mic decât gradul împărţitorului* Q. In acest caz zicem că împărţirea *nu se face exact*. Polinomul C, aflat la cât, se numeşte *câtul* împărţirii, iar polinomul R (ultimul rest) e *restul* împărţirii.

Deoarece restul R se obţine scăzând din deîmpărţit, rând pe rând, toate produsele împărţitorului cu diferiţii termeni ai câtului C, rezultă că la o *împărţire neexactă* avem:

$$P - Q.C = R$$

sau

$$P = Q.C + R. \tag{LXI}$$

EXEMPLU. Impărţire neexactă:

$$\begin{array}{rl|l}
(P) & 12x^5 - 24x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 3x + 1 & 3x^4 - x^2 + 2 \quad (Q) \\
 & -12x^5 \qquad\quad + 4x^3 \qquad\quad - 8x & \hline 4x - 8 \qquad (C) \\
\hline
 & -24x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 11x + 1 & \\
 & +24x^4 \qquad - 8x^2 \qquad + 16 & \\
\hline
(R). & -6x^3 - x^2 - 11x + 17 &
\end{array}$$

Verificarea:

$$\begin{array}{rl}
 & (3x^4 - x^2 + 2) \times (4x - 8) \\
\hline
 & 12x^5 \qquad - 4x^3 \qquad + 8x \\
 & \qquad -24x^4 \qquad + 8x^2 \qquad - 16 \\
\hline
QC = & 12x^5 - 24x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 8x - 16 \\
+R = & \qquad\qquad - 6x^3 - x^2 - 11x + 17 \\
\hline
 & 12x^5 - 24x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 3x + 1 = P.
\end{array}$$

3⁰. Cât exact. Impărţind prin Q ambii membri ai identităţii (LXI), obţinem identitatea

$$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}. \tag{LXII}$$

$\frac{P}{Q}$ este o *fracţie algebrică raţională*. Ea reprezintă *câtul exact* al împărţirii $P:Q$. Dacă gradul numărătorului e *mai mic* decât gradul numitorului, fracţia $\frac{P}{Q}$ e *proprie*. In caz contrariu fracţia e *improprie*.

Din identitatea (LXII) rezultă următoarea

REGULĂ. *Orice fracție algebrică rațională improprie* $\frac{P}{Q}$ *se poate descompune într'un polinom întreg* C *și o fracție proprie* $\frac{R}{Q}$.

C e *câtul* împărțirii $P:Q$, iar R e *restul* acestei împărțiri.

EXEMPLU. Din împărțirea

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 \qquad + 1 & x^2 - x + 1 \\
\underline{-x^5 + x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad} & \overline{x^3 + 2} \\
\qquad\qquad 2x^2 \qquad + 1 & \\
\qquad\quad \underline{-2x^2 + 2x - 2} & \\
\qquad\qquad\qquad 2x - 1 &
\end{array}$$

rezultă identitatea:

$$\frac{x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = x^3 + 2 + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}.$$

4⁰. Polinoame ordonate după puterile crescătoare. Dacă polinoamele P și Q sunt ordonate după puterile *crescătoare* ale variabilei, împărțirea $P:Q$ se face tot după regula dată la împărțirea *exactă* (177, 1, Operațiile I, II, III, IV, ...).

In acest caz însă câtul se găsește ordonat după puterile *crescătoare* ale variabilei, iar gradele resturilor R_1, R_2, ... merg *crescând*.

Dacă ajungem la un rest *nul*, împărțirea se face *exact* și *gradul câtului e diferența dintre gradul deîmpărțitului și gradul împărțitorului.*

In cazul contrariu împărțirea e *neexactă* și operația se poate continuà la infinit.

EXEMPLU. Variabila poate fi însemnată prin orice literă. Astfel avem:

$$\begin{array}{l|l}
1 \qquad + 2u^2 + u^3 - u^4 + u^5 & 1 - u + u^2 \\
\underline{-1 + u - u^2 \qquad\qquad\qquad\quad} & \overline{1 + u + 2u^2 + 2u^3 - u^4} \\
\quad + u + u^2 + u^3 - u^4 + u^5 & \\
\quad \underline{- u + u^2 - u^3 \qquad\qquad} & \\
\qquad 2u^2 \qquad - u^4 + u^5 & \\
\qquad \underline{-2u^2 + 2u^3 - 2u^4} & \\
\qquad\qquad 2u^3 - 3u^4 + u^5 & \\
\qquad\quad \underline{-2u^3 + 2u^4 - 2u^5} & \\
\qquad\qquad\qquad - u^4 - u^5 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+ u^4 - u^5 + u^6} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 2u^5 + u^6 &
\end{array}$$

Operația se poate continuà la infinit.

OBSERVARE. Când împărțirile *parțiale*, care dau termenii câtului, nu se pot face exact, se scrie la cât numai *raportul* monoamelor corespunzătoare.

EXEMPLU.

$$\begin{array}{rl|l} 6 & -5u^2+u^3 & 2-u \\ \cline{3-3} -6+3u & & 3+\frac{3}{2}u-\frac{7}{4}u^2 \\ \cline{1-2} & 3u-5u^2+u^3 & \\ & -3u+\frac{3}{2}u^2 & \\ \cline{2-2} & -\frac{7}{2}u^2+u^3 & \\ & \cdots\cdots & \end{array}$$

179. Impărțirea unui polinom prin $x-a$. Să însemnăm cu $P(x)$ un polinom întreg în x, ordonat după puterile *descrescătoare* ale lui x, Impărțind polinomul $P(x)$ prin $x-a$ (a pozitiv), obținem un cât $C(x)$ și un rest R.

Restul R (având gradul mai mic decât al împărțitorului $x-a$) trebue să fie de grad 0, adică o *constantă*.

Identitatea (LXII) ne dă, *pentru orice valoare a lui x*,

$$P(x) \equiv (x-a)\ C(x)+R.$$

In particular pentru $x=a$ găsim

$$P(a)=(a-a)\ C(a)+R$$

și, fiindcă $a-a=0$, rămâne

$$P(a)=R.$$

TEOREMĂ. *Restul împărțirii prin $x-a$ a unui polinom întreg în x, ordonat după puterile descrescătoare ale lui x, este egal cu valoarea numerică a acestui polinom pentru $x=a$.*

OBSERVARE. Dacă $P(a)=0$ împărțirea $P(x):(x-a)$ se face *exact*. Dacă $P(a)\neq 0$, împărțirea nu se face exact și restul acestei împărțiri e $P(a)$.

EXEMPLE. $(5x^3-2x+3):(x-3)$. Impărțitorul $x-3$ fiind de forma $x-a$, cu $a=3$, restul acestei împărțiri este

$$R=5\,.\,3^3-2\,.\,3+3=132.$$

Prin urmare $5x^3-2x+3$ nu e divizibil prin $x-3$.

180. Impărțirea prin $x+a$. Dacă însemnăm cu $C(x)$ și R câtul și restul împărțirii unui polinom $P(x)$ prin $x+a$ (a pozitiv), din identitatea

$$P(x)\equiv(x+a)\ C(x)+R$$

deducem, pentru $x=-a$,

$$P(-a)=(-a+a)\ C(-a)+R$$

sau

$$P(-a)=R.$$

TEOREMĂ. *Restul împărțirii prin $x+a$ a unui polinom întreg în x, ordonat după puterile descrescătoare ale lui x, este egal cu valoarea numerică a acestui polinom pentru $x=-a$.*

EXEMPLU. Polinomul $P(x)=5x^3-2x+3$ e *divizibil* prin $x+1$, fiindcă restul acestei împărțiri este $P(-1)=5.(-1)^3-2.(-1)+3=0$.

181. Aplicații. 1⁰. $(x^5-a^5):(x-a)$ dă restul $a^5-a^5=0$. Prin urmare x^5-a^5 *e divizibil prin $x-a$*. Efectuând împărțirea găsim:

$$\frac{x^5-a^5}{x-a}=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4.$$

Câtul este un polinom *omogen* în a și x de grad 4, *complect* și *fără niciun coeficient numeric* scris (adică toți coeficienții sunt egali cu $+1$). Exponenții lui a merg *crescând*, iar exponenții lui x *descrescând* cu câte o unitate, dela un termen la altul.

In acelaş fel vedem că $(x^m-a^m):(x-a)$ dă restul $a^m-a^m=0$. Prin urmare x^m-a^m *e divizibil prin $x-a$*, oricare ar fi m și avem:

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1},$$

câtul fiind un polinom omogen și complect, de grad $m-1$ în a și x.

2⁰. $(x^m+a^m):(x-a)$ dă restul $a^m+a^m=2a^m$. Prin urmare x^m+a^m *nu e divizibil prin $x-a$*.

EXEMPLU. Efectuând împărțirea găsim

$$\frac{x^5-a^5}{x-a}=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4+\frac{2a^5}{x-a}.$$

3⁰. $(x^m-a^m):(x+a)$ dă restul $(-a)^m-a^m$.

Dacă m e păreche, avem $(-a)^m=a^m$; restul împărțirii este $a^m-a^m=0$ și x^m-a^m *e divizibil prin $x-a$.*

Dacă m e nepăreche, avem $(-a)^m=-a^m$; restul împărțirii este $-a^m-a^m=-2a^m\neq 0$ și x^m-a^m *nu e divizibil prin $x+a$*.

EXEMPLU. Efectuând împărțirile găsim

$$\frac{x^4-a^4}{x+a}=x^3-ax^2+a^2x-a^3.$$

$$\frac{x^5-a^5}{x+a}=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4-\frac{2a^5}{x+a}.$$

4⁰. $(x^m+a^m):(x+a)$ dă restul $(-a)^m+a^m$.

Dacă m e păreche, avem $(-a)^m = a^m$; restul e $a^m + a^m = 2a^m \neq 0$ şi $x^m + a^m$ *nu e divizibil prin* $x+a$.

Dacă m e nepăreche, avem $(-a)^m = -a^m$; restul e $-a^m + a^m = 0$ şi $x^m + a^m$ *e divizibil prin* $x+a$.

EXEMPLE.

$$\frac{x^8+1}{x+1} = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{2}{x+1}.$$

$$\frac{x^5+32}{x+2} = \frac{x^5+2^5}{x+2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16.$$

5°. Dacă m e *păreche*, $x^m - a^m$ e divizibil şi prin $x-a$ şi prin $x+a$, adică prin $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$.

EXEMPLU. $(x^6 - a^6):(x^2 - a^2) = x^4 + a^2x^2 + a^4$.

OBSERVARE. 1°. Când împărţim pe $x^m \pm a^m$ prin $x-a$, obţinem câtul

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}. \tag{11}$$

2°. Când împărţim pe $x^m \pm a^m$ prin $x+a$, obţinem câtul

$$x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + (-1)^{m-1}a^{m-1} \tag{12}$$

cu semnele *alternate* dela un termen la altul.

Cazul 2° se cuprinde în cazul 1°, dacă observăm că $x+a = x-(-a)$ şi că polinomul (12) se poate scrie

$$x^{m-1} + (-a)x^{m-2} + (-a)^2x^{m-3} + \ldots + (-a)^{m-1}.$$

182. Descompunerea unui polinom în factori. *Dacă un polinom $P(x)$, de grad m, se anulează pentru $x=a$, acest polinom e divizibil prin $x-a$* [179] şi putem scrie

$$P(x) \equiv (x-a)\, Q(x), \tag{13}$$

unde $Q(x)$ e un polinom întreg în x de grad $m-1$.

Dacă $P(x)$ se anulează şi pentru $x = b \neq a$, identitatea (13) pentru $x=b$ ne dă

$$P(b) = 0 = (b-a)\, Q(b)$$

şi cum $b-a \neq 0$, factorul $Q(b)$ trebue să fie *nul*. Prin urmare polinomul $Q(x)$ e divizibil prin $x-b$ şi avem $Q(x) = (x-b)\, Q_1(x)$, iar

$$P(x) \equiv (x-a)(x-b)\, Q_1(x), \tag{14}$$

unde $Q_1(x)$ e un polinom întreg în x de grad $m-2$. Identitatea (14) ne arată că $P(x)$ *e divizibil prin produsul* $(x-a)(x-b)$.

In general, dacă polinomul $P(x)$ se anulează pentru p valori *diferite* $a, b, \ldots, l$ date lui x $(p \leqq m)$, $P(x)$ *e divizibil prin produsul* $(x-a)(x-b) \ldots (x-l)$ *şi putem scrie*

$$(15) \qquad P(x) \equiv (x-a)(x-b) \ldots (x-l)\; C(x),$$

câtul $C(x)$ fiind un polinom întreg în x de grad $m-p$.

Numerele $a, b, \ldots, l$, pentru care valoarea polinomului $P(x)$ e *zero*, se numesc *rădăcinile* acestui polinom.

TEOREMA I. *Dacă pentru un polinom $P(x)$, redus şi de grad m, cunoaştem m rădăcini $a, b, \ldots, l$ diferite, putem scrie*

$$(16) \qquad P(x) \equiv A(x-a)(x-b) \ldots (x-l),$$

A fiind coeficientul termenului de gradul cel mai mare din $P(x)$.

In adevăr, identitatea (15) pentru $p=m$ devine

$$(17) \qquad P(x) \equiv C(x-a)(x-b) \ldots (x-l),$$

unde C e o *constantă* şi fiindcă, la înmulţirea polinoamelor ordonate, termenul de gradul cel mai mare al produsului provine, fără reducere, din înmulţirea termenilor de gradul cel mai mare dela fiecare factor, în produsul (17) trebue să avem

$$Ax^m \equiv C.\underset{1}{x}.\underset{2}{x}.\ldots\underset{m}{x} \equiv Cx^m \quad \text{sau} \quad C=A.$$

EXEMPLU. Polinomul $3x^3-12x^2-21x+30$ se anulează pentru $x=1$, $x=5$ şi $x=-2$. Avem dar *identitatea*

$$3x^3-12x^2-21x+30 \equiv 3(x-1)(x-5)(x+2).$$

183. Polinom identic nul. Zicem că o expresie algebrică $f(x)$ e *identic nulă*, când valoarea ei numerică e *zero* pentru *orice valoare a lui x.*

TEOREMA II. *Un polinom întreg în x, de grad m şi redus, dacă are $m+1$ rădăcini, are toţi coeficienţii nuli şi polinomul e identic nul.*

In adevăr, fie

$$(18) \qquad P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m$$

un polinom întreg în x, redus şi ordonat, care se anulează pentru $m+1$ valori *diferite*: $a, b, \ldots, l, r$ date lui x.

Luând întâi numai primele m rădăcini, $a, b, \ldots, l$, putem scrie după teorema I:

$$P(x) \equiv A_0(x-a)(x-b) \ldots (x-l).$$

Dar acest polinom se anulează şi pentru $x=r$; trebue dar să avem

$$P(r)=A_0(r-a)(r-b)\ \dots\ (r-l)=0$$

şi cum r nu e egal nici cu a, nici cu b, ..., nici cu l, rezultă că A_0 trebue să fie *nul* şi polinomul dat se reduce la

$$P(x)=A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ \dots\ +A_m.$$

Acest polinom de grad $m-1$ având m rădăcini diferite, un raţionament analog ne arată că $A_1=0$ şi aşà mai departe. Găsim dar

$$A_0=A_1=A_2=\ \dots\ =A_m=0$$

şi polinomul $P(x)$ e *identic nul.*

184. Polinoame identice. Zicem că două polinoame $P(x)$ şi $P'(x)$ sunt *identice*, când sunt formate din *aceiaşi termeni.*

Corolar. *Dacă două polinoame întregi în x, reduse şi de grad cel mult egal cu m, au valorile respectiv egale pentru $m+1$ valori diferite date lui x, aceste polinoame sunt identice.*

In adevăr, dacă două polinoame, *ordonate* şi *reduse*,

$$(19)\qquad \begin{aligned} P(x)&=Ax^m+Bx^{m-1}+\ \dots\ +Ex^p+\ \dots\ +L\\ P'(x)&=A'x^p+\ \dots\ +H' \qquad\qquad (p\leqq m)\end{aligned}$$

au valorile *egale* pentru $m+1$ valori date lui x, diferenţa lor $P(x)-P'(x)$ are $m+1$ rădăcini şi, după teorema II, această diferenţă e *identic nulă*:

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ \dots\ +(E-A')x^p+\ \dots\ +L-H'\equiv 0.$$

De aci rezultă

$$A=0,\ B=0,\ \dots,\ E-A'=0,\ \dots,\ L-H'=0$$

sau

$$A=0,\ B=0,\ \dots,\ \ E=A',\ \ \dots,\ \ L=H'.$$

Prin urmare polinoamele (19) sunt de *acelaş grad* şi au termenii asemenea *identici.* Putem dar scrie, *pentru orice valoare a lui x*,

$$P(x)\equiv P'(x).$$

185. Rădăcini multiple. Dacă a e o *rădăcină* a unui polinom $P(x)$, avem $P(a)=0$ şi

$$(20)\qquad P(x)\equiv(x-a)\ Q(x).$$

Dacă polinomul $Q(x)$ nu se anulează pentru $x=a$, zicem că a e o rădăcină *simplă* a polinomului $P(x)$. Dacă $Q(a)=0$, putem scrie

$$(21)\qquad Q(x)\equiv(x-a)\,Q_1(x)\quad \text{şi}\quad P(x)\equiv(x-a)^2\,Q_1(x).$$

In acest caz zicem că a este o rădăcină *multiplă* a polinomului $P(x)$.

Dacă $Q_1(a)\neq 0$, a e o rădăcină *dublă* sau *de ordinul* 2 a lui $P(x)$. Dacă $Q_1(a)=0$, a e o rădăcină multiplă *de ordin mai mare decât* 2 a lui $P(x)$ şi putem scrie

$$(22)\qquad Q_1(x)\equiv(x-a)\,Q_2(x)\quad \text{şi}\quad P(x)\equiv(x-a)^3\,Q_2(x).$$

Dacă $Q_2(a)\neq 0$, a este o rădăcină *triplă* a lui $P(x)$.

Dacă $Q_2(a)=0$, a e o rădăcină multiplă a lui $P(x)$, *de ordin mai mare decât* 3.

In general, dacă avem

$$(23)\qquad P(x)\equiv(x-a)^p\,Q(x)\quad \text{şi}\quad Q(a)\neq 0,$$

zicem că a este o *rădăcină multiplă* a lui $P(x)$ *de ordin* p.

De aci rezultă că, dacă a, b, ..., l sunt nişte rădăcini de ordin α, β, ..., λ respectiv, ale unui polinom $P(x)$ de grad m, putem scrie

$$(24)\qquad P(x)\equiv(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda\,C(x),$$

unde câtul $C(x)$ e un polinom de grad $m-\alpha-\beta-\ldots-\lambda$.

Dacă $\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m$, $C(x)$ e o *constantă* şi, observând că termenul de gradul cel mai mare din $(x-a)^\alpha$ este x^α, un raţionament analog cu cel dela paragraful 182 ne dă pentru termenul de gradul cel mai mare al produsului (24):

$$Ax^m=C.x^\alpha.x^\beta.\ldots x^\lambda=Cx^m\quad \text{sau}\quad C=A.$$

Avem dar

$$(25)\qquad P(x)\equiv A(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda,$$

unde A e coeficientul termenului de gradul cel mai mare din $P(x)$.

EXEMPLU. Polinomul $P(x)=7x^3-21x^2+28$ se anulează pentru $x=-1$; e divizibil dar prin $x+1$ şi găsim

$$P(x)\equiv(x+1)(7x^2-28x+28)\equiv7(x+1)(x^2-4x+4)$$

sau

$$P(x)\equiv7x^3-21x^2+28\equiv7(x+1)(x-2)^2.$$

7 e coeficientul termenului de gradul cel mai mare, -1 e o rădăcină *simplă*, $+2$ e o rădăcină *dublă* a polinomului $P(x)$.

OBSERVARE. Descompunerea unui polinom întreg în factori de forma $x-a$, este analoagă cu descompunerea unui număr în factori primi [74, 3].

Numim *divizor comun* al mai multor polinoame P, Q, R, polinomul care *împarte exact* pe fiecare dintre aceste polinoame.

Numim *multiplu comun* al mai multor polinoame P, Q, R, polinomul, care *se împarte exact* prin fiecare dintre aceste polinoame.

Numim *cel mai mare divizor comun* și *cel mai mic multiplu comun* al mai multor polinoame date, divizorul comun *de gradul cel mai mare* și multiplul comun *de gradul cel mai mic* al lor.

186. Polinoame cu aceleași rădăcini.

TEOREMA III. *Dacă două polinoame, reduse, au acelaș grad și aceleași rădăcini; dacă fiecare rădăcină are acelaș ordin de multiplicitate în ambele polinoame și dacă suma acestor ordine este egală cu gradul polinoamelor, coeficienții termenilor asemenea din aceste polinoame sunt proporționali.*

In adevăr, dacă

$$(26)\qquad \begin{aligned} P(x) &= A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m \\ Q(x) &= B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m \end{aligned}$$

și dacă a, b, ..., l sunt rădăcinile *comune* ale acestor polinoame, cu ordinile de multiplicitate α, β, ..., λ respectiv și cu

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = m,$$

după identitatea (25), putem scrie

$$(27)\qquad \begin{aligned} P(x) &\equiv A_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda} \equiv A_0\,C(x), \\ Q(x) &\equiv B_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda} \equiv B_0\,C(x). \end{aligned}$$

unde

$$(28)\qquad C(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda} = x^m + C_1x^{m-1} + \dots + C_m.$$

Din identitățile (27), în care $P(x)$, $Q(x)$ și $C(x)$ sunt polinoamele (26) și (28), rezultă

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0, \quad A_1 = A_0C_1, \quad A_2 = A_0C_2, \quad \dots, \quad A_m = A_0C_m. \\ B_0 &= B_0, \quad B_1 = B_0C_1, \quad B_2 = B_0C_2, \quad \dots, \quad B_m = B_0C_m, \end{aligned}$$

și împărțind membru cu membru aceste egalități, deducem

$$(29)\qquad \frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \dots = \frac{A_m}{B_m}.$$

187. Extragerea rădăcinii. Dacă f reprezintă o expresie algebrică, $\sqrt[n]{f}$ este o altă expresie algebrică φ, care ridicată la puterea n ne dă expresia f.

Legile radicalilor [132] şi *operaţiile cu radicali* [134] se extind şi la calculele cu rădăcini din expresii algebrice. De aci rezultă că:

1⁰. Rădăcina a n-a dintr'un monom se poate calculà *extrăgând rădăcina a n-a din fiecare factor* al monomului şi înmulţind rezultatele obţinute.

EXEMPLU: $\sqrt{3x^2y^6z} = \pm\, xy^3\sqrt{3z}$.

2⁰. Rădăcina dintr'un polinom nu se poate calculà extrăgând rădăcina din fiecare termen; în acest caz se ordonă polinomul după puterile descrescătoare ale variabilei şi se aplică nişte regule analoage cu cele date pentru extragerea rădăcinii dintr'un număr format din mai multe cifre [128].

Un exemplu ne va arătà cum se găseşte fiecare termen al *rădăcinii patrate* dintr'un *polinom*, aplicând regula dată pentru extragerea *rădăcinii patrate aritmetice* dintr'un număr [127].

EXEMPLU:

$\sqrt{9x^4-6x^3+31x^2-10x+25}$	$3x^2-x+5$	*Termenul întâi:*
$-9x^4$	$6x^2-x$	$\sqrt{9x^4}=3x^2$
$-6x^3+31x^2-10x+25$	$-x$	*termenul al doilea:*
$+6x^3-x^2$	$-6x^3+x^2$	$-6x^3:2.(3x^2)=-x$
$30x^2-10x+25$	$6x^2-2x+5$	*termenul al treilea:*
$-30x^2+10x-25$	5	$30x^2:2.(3x^2)=5$
0	$30x^2-10x+25$	

Rezultă: $\sqrt{9x^4-6x^3+31x^2-10x+25} = \pm\,(3x^2-x+5)$.

II. — FRACŢII ALGEBRICE.

188. Expresii algebrice fracţionare. O expresie de forma $\dfrac{f}{\varphi}$, unde f şi φ sunt două expresii algebrice, se numeşte *expresie algebrică fracţionară* sau *fracţie algebrică*.

Dacă expresiile f şi φ sunt raţionale, zicem că $\dfrac{f}{\varphi}$ este o *fracţie raţională*. In particular, f şi φ pot fi două polinoame întregi.

Valoarea numerică a unei expresii algebrice fracţionare este câtul dintre valoarea numerică a numărătorului şi valoarea numerică a numitorului ei, dacă aceste valori sunt *finite* şi *diferite de zero*.

In Aritmetică operaţiile cu fracţiile ordinare se reduc la operaţii cu numere întregi. In Algebră operaţiile cu fracţiile raţionale se reduc la operaţii cu *polinoame întregi.*

Regulele date pentru operaţiile cu fracţii ordinare numerice se aplică şi la operaţiile cu expresii fracţionare algebrice. Astfel:

1⁰. *Dacă înmulţim* (sau *împărţim*) *şi numărătorul şi numitorul unei expresii fracţionare* $\frac{P}{Q}$ *cu o aceeaş expresie algebrică* R, *obţinem o altă expresie fracţionară identic egală cu* $\frac{P}{Q}$. In acest caz zicem că *amplificăm* sau *simplificăm* fracţia $\frac{P}{Q}$ cu R [80, 3]. Toate fracţiile, pe care le obţinem amplificând sau simplificând o aceeaş fracţie algebrică, sunt *echivalente* între ele.

EXEMPLU. Avem

$$\frac{u^2-v^2}{u^2+2uv+v^2}=\frac{(u-v)(u+v)}{(u+v)^2}=\frac{u-v}{u+v},$$

pentru orice valori am pune în locul literelor u şi v.

OBSERVARE. Se exceptează *unele valori* ale variabilelor, pentru care — fără alte convenţii — valoarea corespunzătoare a fracţiei algebrice n'are niciun sens.

Astfel, în exemplul luat, nu putem calculà nici valoarea fracţiei date, nici a fracţiei simplificate, pentru $u=-v$.

2⁰. *Mai multe fracţii algebrice pot fi aduse la acelaş numitor* [82]. Se poate luà ca *numitor comun* produsul tuturor numitorilor fracţiilor date sau orice alt multiplu comun, în particular cel mai mic multiplu comun al acestor numitori.

3⁰. *Suma* (sau *diferenţa*) *unor fracţii algebrice cu acelaş numitor, este fracţia, care are ca numărător suma* (sau *diferenţa*) *numărătorilor acestor fracţii, iar ca numitor numitorul lor comun.*

Ca să *adunăm* sau să *scădem* mai multe fracţii algebrice, care n'au acelaş numitor, *trebue să le aducem întâi la acelaş numitor.*

4⁰. *Ca să înmulţim mai multe fracţii algebrice, înmulţim numărătorii între ei şi numitorii între ei.*

5⁰. *Ca să împărţim două fracţii algebrice, înmulţim fracţia întâia cu fracţia a doua răsturnată.*

6⁰. *Ca să ridicăm la o putere o fracţie algebrică, ridicăm şi numărătorul şi numitorul ei la acea putere.*

OBSERVARE. Toate aceste operaţii făcute asupra unor fracţii raţionale ne dau ca rezultate tot fracţii raţionale.

Orice polinom întreg se poate scrie ca expresie fracţionară, punând ca numărător polinomul, iar ca numitor 1. Astfel operaţiile între polinoame şi fracţii se reduc la operaţii între fracţii.

EXEMPLE.

1°. $$\frac{x-a}{x^2+a^2}+\frac{2x}{x^2-a^2}=\frac{(x-a)(x^2-a^2)+2x(x^2+a^2)}{x^4-a^4}=\frac{3x^3-ax^2+a^2x+a^3}{x^4-a^4}.$$

2°. $$\frac{3x^3-ax^2+a^2x+a^3}{x^4-a^4}-\frac{2x}{x^2-a^2}=\frac{3x^3-ax^2+a^2x+a^3}{x^4-a^4}-\frac{2x(x^2+a^2)}{x^4-a^4}$$
$$=\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{x^4-a^4}=\frac{(x^2-a^2)(x-a)}{x^4-a^4}=\frac{x-a}{x^2+a^2}.$$

3°. $$\frac{x-a}{x^2+a^2}\times\frac{2x}{x^2-a^2}=\frac{2x(x-a)}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=\frac{2x^2-2ax}{x^4-a^4}.$$

4°. $$\frac{2x^2-2ax}{x^4-a^4}:\frac{x-a}{x^2+a^2}=\frac{2x(x-a)}{x^4-a^4}\times\frac{x^2+a^2}{x-a}=\frac{2x(x^2+a^2)}{x^4-a^4}=\frac{2x}{x^2-a^2}.$$

5°. $$x^2-ax+a^2-\frac{2a^3}{x+a}=\frac{(x^2-ax+a^2)(x+a)-2a^3}{x+a}=\frac{x^3-a^3}{x+a}.$$

Orice expresie fracţionară raţională se poate reduce la raportul a două polinoame întregi $\frac{P}{Q}$. Această *fracţie raţională* poate să fie *proprie* sau *improprie* [178, 3].

Orice fracţie raţională *improprie* $\frac{P}{Q}$ este suma unui *polinom întreg* C şi a unei fracţii *proprii* $\frac{R}{Q}$. Polinomul C este câtul împărţirii $P:Q$, iar R e restul acestei împărţiri.

EXEMPLU.

$$\frac{\frac{t-3}{t+3}+\frac{6t}{t^2-9}}{\frac{2}{t+3}-\frac{1}{t-3}}=\frac{\frac{(t-3)^2+6t}{t^2-9}}{\frac{2(t-3)-(t+3)}{(t+3)(t-3)}}=\frac{t^2+9}{t^2-9}\times\frac{t^2-9}{t-9}$$
$$=\frac{t^2+9}{t-9}=t+9+\frac{90}{t-9}.$$

189. Fracţii iraţionale. Când avem o fracţie *cu numitor iraţional*, putem, printr'o amplificare convenabilă, să o transformăm într'o fracţie *echivalentă* cu numitor *raţional*.

Intrebuințăm, în general, identitatea $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, în care expresiile $a+b$ și $a-b$ se zic *conjugate*.

Să însemnăm cu f, g, h, l niște expresii algebrice raționale.

1°. Dacă fracția e de forma $\frac{f}{\sqrt{g}}$, o amplificăm cu $\sqrt{g}$ și găsim

$$\frac{f}{\sqrt{g}}=\frac{f\sqrt{g}}{g}. \tag{30}$$

2°. Dacă fracțiile sunt de forma $\frac{f}{g\pm\sqrt{h}}$ sau $\frac{f}{\sqrt{g}\pm\sqrt{h}}$, le amplificăm cu *conjugata numitorului* $g\mp\sqrt{h}$ sau $\sqrt{g}\mp\sqrt{h}$. Găsim astfel:

$$\frac{f}{g+\sqrt{h}}=\frac{f(g-\sqrt{h})}{g^2-h}, \qquad \frac{f}{\sqrt{g}-\sqrt{h}}=\frac{f(\sqrt{g}+\sqrt{h})}{g-h}. \tag{31}$$

Dacă fracția e de forma $\frac{l}{\sqrt{f}\pm\sqrt{g}\pm\sqrt{h}}$, repetăm de câte ori e nevoe operația din cazul precedent.

Astfel pentru $\frac{l}{\sqrt{f}-\sqrt{g}+\sqrt{h}}$, amplificăm întâi cu $\sqrt{f}+\sqrt{h}+\sqrt{g}$ și găsim

$$\frac{l}{\sqrt{f}+\sqrt{h}-\sqrt{g}}=\frac{l(\sqrt{f}+\sqrt{h}+\sqrt{g})}{(\sqrt{f}+\sqrt{h})^2-g}=\frac{l(\sqrt{f}+\sqrt{h}+\sqrt{g})}{f+h-g+2\sqrt{fh}}.$$

Amplificăm apoi noua fracție cu $f+h-g-2\sqrt{fh}$.

190. Valori singulare. Când o cantitate v capătă succesiv toate valorile reale cuprinse între două numere a și b, zicem că v *variază în intervalul* (a, b), [151].

Dacă v, variind, capătă valori din ce în ce mai apropiate de a, sau, mai precis, dacă *diferența* $|v-a|$ *ajunge și rămâne mai mică decât orice număr pozitiv* ε *oricât de mic* [143, 2], zicem că v *tinde către* a și scriem: $v\to a$ sau $\lim v=a$.

O cantitate variabilă v *tinde către* $+\infty$ (plus infinit) *sau* $-\infty$ (minus infinit), *când, oricât de mare ar fi un număr* N *pozitiv, valoarea lui* v *ajunge și rămâne mai mare decât* N sau *mai mică decât* $-N$ [143, 3 și 4].

Dacă valoarea unei variabile v depinde de valoarea altei variabile x, zicem că v e o *funcție* de x și scriem $v=f(x)$ [166]. In acest caz putem vorbì despre *limita* către care tinde variabila v sau $f(x)$, când x tinde către o valoare a.

OBSERVARE. Ca să calculăm această *limită*, putem să înlocuim pe x prin $a+h$ și să căutăm ce devine valoarea $f(a+h)$, când h tinde către *zero*.

In general vom observà că avem

$$\lim_{h=0} f(a+h)=f(a) \quad (h \text{ pozitiv sau negativ}). \tag{32}$$

In acest caz zicem că funcţia $f(x)$ e *continuă* pentru $x=a$. Sunt şi cazuri, când egalitatea (32) nu e adevărată.

EXEMPLU. Trinomul $v=f(x)=x^2+2x-9$ tinde către 6, când x tinde către 3. In adevăr, pentru $x=3+h$ avem

$$f(3+h)=(3+h)^2+2(3+h)-9=9+6h+h^2+6+2h-9=6+8h+h^2$$

şi când h (pozitiv sau negativ) tinde către zero, ultimii doi termeni *tind către zero*; avem dar: $\lim f(3+h)=6=f(3)$ şi funcţia e *continuă* pentru $x=3$. Putem constată că un *polinom* $P(x)$ e o funcţie continuă pentru orice valoare a lui x.

Dacă pentru $x=a$ expresiile $f(x)$ şi $g(x)$ capătă respectiv valorile $f(a)=m$ şi $g(a)=n$, *finite* şi *diferite de zero*, expresiile

$$(33)\qquad f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x).g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)},$$

pentru $x=a$, capătă respectiv valorile $m+n$, $m-n$, $m.n$, $\frac{m}{n}$ bine determinate, *finite* şi *diferite de zero*.

Dar dacă $f(x)$ sau $g(x)$ *tind către zero* sau *către* $\pm\infty$, când x tinde către a, valorile numerice ale expresiilor (33) *pot să nu aibă sens* pentru $x=a$. In acest caz convenim să definim aceste valori *singulare* ca valori *limită*: pentru a le determină calculăm valorile expresiilor (33) pentru $x\neq a$ $(x=a+h)$ şi căutăm *ce devin aceste valori, când x tinde către a* (sau când h tinde către *zero*).

Teoremele relative la limita sumei, diferenţei, produsului şi câtului, demonstrate pentru limitele *şirurilor* [147], se aplică şi la limitele *expresiilor algebrice*.

1⁰. Dacă $f(a)=0$ şi $g(a)=m\neq 0$ şi *finit*, avem

$$f(a)+g(a)=0+m=m,\quad f(a)-g(a)=0-m=-m,$$

$$f(a).g(a)=0\times m=0,\qquad \frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{m}=0.$$

2⁰. După definiţia împărţirii, fracţia $\frac{m}{0}$ n'are sens [57]. Considerând însă fracţia $\frac{m}{v}$ şi dând lui v valori din ce în ce mai mici, fracţia $\frac{m}{v}$ devine din ce în ce *mai mare* în valoare absolută; astfel oricât de mare ar fi un număr N, pentru $|v|<\frac{|m|}{N}$ avem $\left|\frac{m}{v}\right|>N$. De aceea zicem că $\left|\frac{m}{v}\right|$ *creşte la infinit, când v tinde către zero* [143, 3] şi în acest sens scriem

$$(34)\qquad \frac{m}{0}=\infty.$$

OBSERVARE. Putem aveà $+\infty$ sau $-\infty$, după cum fracţia $\frac{m}{v}$ devine *infinită* prin valori *pozitive* sau prin valori *negative* [143, 3 şi 4].

Dacă, pentru $h=0$, avem

$$\lim f(a+h)=f(a)=m \quad \text{şi} \quad \lim g(a+h)=g(a)=0,$$

zicem că

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\lim_{h=0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{m}{0}=\pm\infty, \qquad (\text{valoare } \textit{singulară})$$

$+\infty$ sau $-\infty$ după cum raportul $\frac{f(a+h)}{g(a+h)}$ rămâne *pozitiv* sau *negativ* pentru h destul de mic.

EXEMPLU. Fracţia $\frac{x}{x-1}$ pentru $x=0$ are valoarea $\frac{0}{-1}=0$; pentru $x=1$ are valoarea $\frac{1}{0}=\infty$. Pentru $x=1\pm h$ $(h>0)$ avem $\frac{x}{x-1}=\frac{1\pm h}{\pm h}$. Când h e foarte mic, numărătorul e pozitiv şi semnul raportului e dat de numitor. Deci, când $x\to 1$ prin valori *mai mici decât* 1 (sau când $x=1-h$ şi $h\to 0$), raportul rămâne *negativ* şi tinde către $-\infty$; când $x\to 1$ prin valori *mai mari decât* 1 ($x=1+h$ şi $h\to 0$), raportul rămâne *pozitiv* şi tinde către $+\infty$.

3°. Când v creşte la *infinit*, expresiile $v+m$, $v-m$, $v.|m|$, $\frac{v}{|m|}$ devin din ce în ce mai mari şi *cresc la infinit*, diferenţa $m-v$ *descreşte spre* $-\infty$, iar fracţia $\frac{m}{v}$ *tinde către zero* [143].

Dacă $f(x)\to\infty$ când $x\to a$, convenim să scriem $f(a)=\infty$.

Dacă $f(a)=\infty$ şi $g(a)=m\neq 0$ şi *finit*, zicem că

$$f(a)+g(a)=\infty+m=\infty, \qquad f(a)-g(a)=\infty-m=\infty,$$

$$g(a)-f(a)=m-\infty=-\infty, \qquad f(a).g(a)=\infty.m=\pm\infty,$$

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{\infty}{m}=\pm\infty, \qquad \frac{g(a)}{f(a)}=\frac{m}{\infty}=0.$$

Dacă $f(a)=\infty$ şi $g(a)=0$, avem

$$f(a).g(a)=\infty.0 \qquad (\textit{formă nedeterminată}).$$

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{\infty}{0}=\infty, \qquad \frac{g(a)}{f(a)}=\frac{0}{\infty}=0.$$

4°. Dacă $f(a)=0$ şi $g(a)=0$, avem

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0} \qquad (\textit{formă nedeterminată}),$$

5°. Dacă $f(a)=\infty$ şi $g(a)=\infty$, zicem că

$$f(a)+g(a)=\infty+\infty=\infty, \qquad f(a).g(a)=\infty.\infty=\infty;$$

$$f(a)-g(a)=\infty-\infty \qquad (\textit{formă nedeterminată}),$$

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{\infty}{\infty} \qquad (\textit{formă nedeterminată}).$$

REZUMAT. *Valori singulare.*

1°. Pentru $a>0$ şi *finit* avem:

$$a+\infty=+\infty, \quad a-\infty=-\infty, \quad a.0=0, \quad a.\infty=\infty.$$

$$\frac{0}{a}=0, \quad \frac{a}{0}=\infty, \quad \frac{\infty}{a}=\infty, \quad \frac{a}{\infty}=0.$$

2°. *Cazuri particulare*:

$$0.0=0, \quad \infty.\infty=\infty, \quad \frac{0}{\infty}=0, \quad \frac{\infty}{0}=\infty.$$

3°. *Forme nedeterminate*:

$$\infty-\infty, \quad 0.\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

191. Forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Dacă $P(x)$ și $Q(x)$ sunt două polinoame întregi în x și dacă a este o *rădăcină* de ordin p pentru $P(x)$ și de ordin q pentru $Q(x)$ avem

$$(35) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a)^p P_1(x)}{(x-a)^q Q_1(x)}, \qquad \begin{array}{l} P_1(a)\neq 0, \\ Q_1(a)\neq 0. \end{array}$$

Pentru $x=a$ valoarea acestei fracții se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ (*nedeterminare*), dar pentru $x\neq a$ fracția (35) are o valoare bine determinată, oricât de apropiat ar fi x de a. Distingem trei cazuri:

1°. Dacă $p=q$, suprimând factorul $(x-a)^p$, pentru $x\neq a$, avem

$$(36) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a)^p P_1(x)}{(x-a)^p Q_1(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Când $x\to a$ (x tinde către a), valoarea acestei fracții tinde către $\frac{P_1(a)}{Q_1(a)}$. De aceea zicem că $\frac{P_1(a)}{Q_1(a)}$ e *valoarea adevărată* a fracției (36) pentru $x=a$.

2°. Dacă $p>q$, de exemplu $p=q+r$, suprimând factorul $(x-a)^q$, pentru $x\neq a$, avem

$$(37) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a)^{q+r} P_1(x)}{(x-a)^q Q_1(x)}=\frac{(x-a)^r P_1(x)}{Q_1(x)}$$

și când x tinde către a, valoarea fracției *tinde către zero.*

3°. Dacă $q>p$, de exemplu $q=p+r$, suprimând factorul $(x-a)^p$, pentru $x\neq a$, avem

$$(38) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a)^p P_1(x)}{(x-a)^{p+r} Q_1(x)}=\frac{P_1(x)}{(x-a)^r Q_1(x)}$$

și când x tinde către a, valoarea numitorului tinde către *zero*, iar valoarea absolută a fracției *crește la infinit* [190, 2].

EXEMPLE. Să se determine valorile adevărate ale fracțiilor

1°. $\dfrac{(x^2+1)(x^3-1)}{x^5-1}$ pentru $x=1$; 2°. $\dfrac{(t^2+3)t^4}{(t-5)^2-(t+5)^2}$ pentru $t=0$; 3°. $\dfrac{u^2-4}{u^3+3u^2-4}$ pentru $u=-2$.

Toate sunt *nedeterminări* de forma $\frac{0}{0}$.

1°. Impărțind x^3-1 și x^5-1 prin $x-1$, găsim pentru $x=1$

$$\left[\frac{(x^3+1)(x^2+x+1)}{x^4+x^3+x^2+x+1}\right]_1=\frac{6}{5}.$$

2°. Făcând diferența dela numitor și suprimând factorul t, găsim pentru $t=0$

$$\left[\frac{(t^2+3)t^3}{-10}\right]_0=\frac{0}{-10}=0.$$

3°. Impărțind numărătorul și numitorul prin $u+2$, găsim pentru $u=-2$

$$\left[\frac{u-2}{u^2+u-2}\right]_{-2}=\frac{-4}{0}=\infty.$$

Dacă facem $u=-2+\varepsilon$, fracția devine

$$\frac{(-2+\varepsilon)-2}{(-2+\varepsilon)^2+(-2+\varepsilon)-2}=\frac{\varepsilon-4}{\varepsilon(\varepsilon-3)}=\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon(3-\varepsilon)}.$$

Pentru $\varepsilon>0$ și mai mic decât 3, fracția e *pozitivă*; pentru $\varepsilon<0$ fracția e *negativă*. De aceea, când $\varepsilon\to 0$ prin valori pozitive, fracția tinde către $+\infty$; când $\varepsilon\to 0$ prin valori negative, fracția tinde către $-\infty$.

In mod analog putem găsi valoarea adevărată a unei expresii *iraționale* de forma $\frac{0}{0}$.

EXEMPLU. $f(x)=\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{x-a}$, pentru $x=a$, e de forma $\frac{0}{0}$.

Amplificând fracția cu conjugata numărătorului, putem scrie

$$f(x)=\frac{x^3-a^3}{(x-a)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3}\right)}$$

și fiindcă $(x^3-a^3):(x-a)=x^2+ax+a^2$, găsim pentru $x=a$

$$\left[\frac{x^2+ax+a^2}{\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3}}\right]_a=\frac{3a^2}{2\sqrt{a^3}}=\frac{3}{2}\sqrt{a}.$$

192. Valoarea unui polinom pentru $x=\pm\infty$. Un polinom întreg în x

$$P(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_{m-1}x+A_m$$

se poate scrie, pentru orice valoare *finită* a lui x,

$$x^m\left[A_0+\frac{A_1}{x}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{A_m}{x^m}\right].$$

Când x tinde către $\pm\infty$, factorul x^m devine *infinit* în valoare absolută, iar expresia din paranteză *tinde către* A_0, deoarece toţi termenii, cari conţin pe x la numitor, tind către *zero*. Avem dar

$$(39) \qquad \lim_{x=\infty} P(x) = \lim_{x=\infty} A_0 x^m = \pm\infty.$$

EXEMPLE. Polinomul $3x^2-5x+2$, pentru $x=+\infty$ sau $x=-\infty$, are aceeaş valoare ca şi $3x^2$, adică $+\infty$.

Polinomul $-2x^3+4x^2-1$, pentru x *infinit*, are aceeaş valoare ca şi $-2x^3$, adică $+\infty$ pentru $x=-\infty$ şi $-\infty$ pentru $x=+\infty$.

193. Forma nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$. Raportul a două polinoame

$$(40) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0x^p + A_1x^{p-1} + \cdots + A_p}{B_0x^q + B_1x^{q-1} + \cdots + B_q}$$

pentru $x=\infty$ se prezintă sub forma *nedeterminată* $\frac{\infty}{\infty}$. Putem însă dedetermină *valoarea adevărată* a acestei fracţii în felul următor:

1°. Dacă $p=q$, împărţind şi numărătorul şi numitorul prin x^p găsim, pentru x *finit*,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_p}{x^p}}{B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_p}{x^p}}$$

şi când $x \to \infty$, avem

$$(41) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{B_0}.$$

2°. Dacă $p>q$, de exemplu dacă $p=q+r$, împărţind ambii termeni ai fracţiei (40) prin x^q, găsim pentru x finit:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0x^r + A_1x^{r-1} + \cdots + \frac{A_p}{x^q}}{B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_q}{x^q}}$$

şi când $x \to \infty$, avem

$$(42) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{A_0x^r}{B_0} = \pm\infty.$$

3°. Dacă $q > p$, de exemplu dacă $q = p + r$, împărțind ambii termeni ai fracției (40) prin x^p, găsim pentru x finit:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_p}{x^p}}{B_0 x^r + B_1 x^{r-1} + \cdots + \frac{B_q}{x^p}}$$

și când $x \to \infty$, avem

$$(43) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{A_0}{B_0 x^r} = 0.$$

Regulă. *Valoarea adevărată a raportului a două polinoame întregi în x, pentru $x = \infty$, este:*

1°. *egală cu raportul coeficienților termenilor de gradul cel mai mare dela numărător și numitor,* dacă polinoamele sunt *de acelaș grad.*

2°. *infinită,* dacă gradul numărătorului e *mai mare* decât gradul numitorului.

3°. *nulă,* dacă gradul numărătorului e *mai mic* decât gradul numitorului.

EXEMPLE. Avem

$$\lim_{x=\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 4} = \frac{3}{2}; \quad \lim_{x=\infty} \frac{2x^4 - 1}{5x^3 + 2x - 7} = \infty; \quad \lim_{x=\infty} \frac{x^3 + 1}{x^5 - x^2 + 3} = 0.$$

OBSERVARE. Când, pentru $x = a$, valoarea raportului a două fracții raționale se prezintă sub forma $\frac{\infty}{\infty}$, îl putem reduce la forma $\frac{0}{0}$.

EXEMPLU. Pentru $x = 1$, valoarea fracției

$$\frac{x + \frac{3}{x^2 - 1}}{\frac{5x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}} \quad \text{este} \quad \frac{1 + \frac{3}{0}}{\frac{4}{0}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Dar, pentru $x \neq 1$, putem scrie

$$\frac{x^3 - x + 3}{x^2 - 1} : \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x^2 - x + 3)(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 1)(5x^3 - 1)},$$

care pentru $x = 1$ se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$. Simplificând cu $x - 1$ și făcând apoi $x = 1$, găsim pentru fracție valoarea $\frac{3}{2}$.

194. Forma $0\times\infty$. Dacă avem două expresii algebrice $f(x)$ şi $g(x)$ şi dacă $f(a)=0$ şi $g(a)=\infty$, valoarea produsului $f(x).g(x)$ pentru $x=a$ se prezintă sub *forma nedeterminată* $0\times\infty$.

Observăm însă că, pentru $x\neq a$, putem scrie

$$f(x).g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

şi această fracţie, pentru $x=a$, se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ [191].

195. Forma $\infty-\infty$. Dacă pentru două fracţii raţionale $f(x)$ şi $g(x)$ avem $f(a)=\infty$, $g(a)=\infty$, valoarea diferenţei $f(x)-g(x)$, pentru $x=a$, se prezintă sub forma $\infty-\infty$.

Efectuând scăderea, diferenţa $f(x)-g(x)$ se reduce la *raportul a două polinoame întregi în* x şi valoarea acestei expresii se determină ca în cazurile precedente.

EXEMPLU. Să se determine valoarea diferenţei

$$\frac{7-2x}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\qquad\text{pentru } x=2.$$

Pentru $x=2$ expresiunea capătă forma $\infty-\infty$. Dar observând că avem

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1),\quad (x^2-3x+2)=(x-2)(x-1)$$

şi efectuând diferenţa dată, pentru $x\neq 2$, găsim

$$\frac{7-2x}{(x-2)(x+1)}-\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{-2x^2+8x-8}{(x-2)(x^2-1)}=\frac{-2(x-2)^2}{(x-2)(x^2-1)}$$
$$=\frac{-2(x-2)}{x^2-1}$$

iar pentru $x=2$, expresiunea are valoarea 0.

196. Raport independent de x. 1°. *Pentru ca raportul*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{ax+b}{a'x+b'}\tag{44}$$

să aibă aceeaş valoare numerică pentru toate valorile lui x, *trebue şi e de ajuns să avem:*

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}.\tag{45}$$

In adevăr pentru $x=0$, valoarea raportului (44) este $\frac{b}{b'}$; pentru $x=\infty$, valoarea raportului e $\frac{a}{a'}$ [193]. *Trebue dar să avem* $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

Invers, dacă avem

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \rho,$$

putem scrie $a = \rho a'$, $b = \rho b'$ şi

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{\rho(a'x+b')}{a'x+b'} = \rho$$

oricare ar fi x. Valoarea raportului e *independentă de valoarea lui* x.

2⁰. *Pentru ca raportul a două polinoame întregi în* x *şi de acelaş grad,*

$$(46) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \cdots + kx + l}{a'x^m + b'x^{m-1} + \cdots + k'x + l'}$$

să aibă aceeaş valoare numerică pentru toate valorile lui x, *trebue şi e deajuns să avem:*

$$(47) \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \cdots = \frac{k}{k'} = \frac{l}{l'}.$$

In adevăr, pentru $x = 0$, valoarea raportului (46) este $\frac{l}{l'}$. Deci, oricare ar fi x, ar trebui să avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{l}{l'} \quad \text{de unde} \quad \frac{P(x) - l}{Q(x) - l'} = \frac{l}{l'}$$

sau, simplificând cu x,

$$\frac{ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + k}{a'x^{m-1} + b'x^{m-2} + \cdots + k'} = \frac{l}{l'}.$$

Făcând din nou $x = 0$ găsim

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{k}{k'} = \frac{l}{l'}$$

şi aşa mai departe. Condiţia e dar *necesară*.

Ea e şi *suficientă*, fiindcă, însemnând cu ρ valoarea comună a rapoartelor (47), putem scrie

$$a = \rho a', \quad b = \rho b', \quad \ldots, \quad l = \rho l'$$

şi avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\rho(a'x^m + b'x^{m-1} + \cdots + l')}{a'x^m + b'x^{m-1} + \cdots + l'} = \rho$$

pentru orice valoare a lui x.

III. — ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÂI.

197. Ecuații și rădăcini. Dacă $f(x,y,z)$ și $g(x,y,z)$ sunt două expresii algebrice, egalitatea

$$f(x,y,z)=g(x,y,z) \tag{48}$$

se numește o *ecuație* [167]. Literele x, y, z sunt *necunoscutele* ecuației.

Când înlocuim literele x, y, z cu niște numere date a, b, c, valorile numerice $f(a,b,c)$ și $g(a,b,c)$ pot fi *egale* sau *neegale*.

Dacă avem

$$f(a,b,c)=g(a,b,c) \tag{49}$$

zicem că valorile a, b, c *satisfac ecuația* (48) sau că a, b, c sunt *rădăcinile* acestei ecuații.

O ecuație poate să aibă una sau mai multe necunoscute. O ecuație cu o necunoscută poate să aibă una sau mai multe rădăcini.

A *rezolvà* o ecuație însemnează a-i calculà *rădăcinile* ei, adică a găsì numerele, care puse în locul necunoscutelor, să ne dea *valoarea membrului întâi egală cu valoarea membrului al doilea.*

EXEMPLE. Ecuația $3x^2+1=5x+3$ are o singură necunoscută x și *două* rădăcini $x=2$ și $x=-\frac{1}{3}$.

Ecuația $5(x-y)=3x+7y-4$ are *două* necunoscute x și y și are rădăcinile: $x=1$, $y=3$; $x=4$, $y=1$; $x=16$, $y=3$; $x=-14$, $y=-2$; etc.

198. Ecuații echivalente prin adunare sau scădere. Două ecuații se zic *echivalente*, dacă admit *aceleași rădăcini*, adică dacă *toate* rădăcinile ecuației întâia sunt rădăcini și ale ecuației a doua și reciproc, dacă *toate* rădăcinile ecuației a doua sunt rădăcini și ale ecuației întâia.

1°. TEOREMA I. *Dacă adunăm la ambii membri ai unei ecuații o aceeaș cantitate finită, obținem o ecuație echivalentă cu cea dintâi.*

Astfel dacă $f(x)$, $g(x)$ și $h(x)$ sunt trei expresii algebrice, ecuația

$$f(x)=g(x) \tag{50}$$

este *echivalentă* cu ecuația

$$f(x)+h(x)=g(x)+h(x), \tag{51}$$

dacă pentru orice valoare a lui x finită, valoarea expresiei $h(x)$ e *finită.*

In adevăr, dacă $x=a$ e o rădăcină a ecuației (50), din

$$f(a)=g(a) \tag{52}$$

rezultă

$$f(a)+h(a)=g(a)+h(a); \tag{53}$$

deci $x=a$ este o rădăcină și a ecuației (51).

Reciproc, dacă a este o rădăcină a ecuaţiei (51), din egalitatea (53), dacă numărul $h(a)$ e *finit*, rezultă egalitatea (52). Deci a este o rădăcină şi a ecuaţiei (50).

Se demonstrează în acelaş fel că: *Dacă scădem o aceeaş cantitate finită din ambii membri ai unei ecuaţii, obţinem o ecuaţie echivalentă cu cea dintâi.*

COROLAR. Rădăcinile unei ecuaţii nu se schimbă, dacă trecem un termen al ecuaţiei dintr'un membru în celălalt, *cu semnul schimbat.*

EXEMPLU. Din ecuaţia $2x^3+6=7x^2+8x$, scăzând din ambii membri pe $8x$, deducem o ecuaţie *echivalentă*:

$$\begin{array}{rcl} 2x^3+6 & = & 7x^2+8x \\ -8x & & -8x \\ \hline 2x^3+6-8x & = & 7x^2. \end{array}$$

OBSERVĂRI. 1⁰. Se pot schimbà semnele *la toţi termenii* unei ecuaţii. Aceasta revine la a trece toţi termenii din membrul întâi în membrul al doilea şi toţi termenii din membrul al doilea în membrul întâi.

2⁰. Se poate suprimà un termen, care se găseşte şi în membrul întâi şi în membrul al doilea *cu acelaş semn.*

3⁰. Se pot trece toţi termenii unei ecuaţii într'un singur membru.

EXEMPLU. In loc de $3x^2-5x=7x-2$ putem scrie $3x^2-5x-7x+2=0$ sau $3x^2-12x+2=0$. Reducem astfel ecuaţia la forma $f=0$.

G r a d u l u n e i e c u a ţ i i. Dacă o ecuaţie a fost redusă la forma $f=0$ şi dacă f e un *polinom întreg* şi *redus*, gradul polinomului f este *gradul ecuaţiei.*

Astfel ecuaţia $3x^2-12x+2=0$ este de grad 2 şi are o singură necunoscută x; ecuaţia $5xy^3+2x^2y-x+7=0$ este de grad 4 şi are două necunoscute x şi y.

199. Ecuaţii echivalente prin înmulţire sau împărţire.

1⁰. TEOREMA II. *Dacă înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei ecuaţii cu o aceeaş cantitate diferită de zero şi care nu conţine necunoscutele ecuaţiei, obţinem o ecuaţie echivalentă cu cea dintâi.*

In adevăr, să comparăm ecuaţia

(54) $$f(x)=g(x) \quad \text{sau} \quad f(x)-g(x)=0$$

cu ecuaţia

(55) $$f(x).h=g(x).h \quad \text{sau} \quad h.[f(x)-g(x)]=0.$$

Dacă $x=a$ e o rădăcină a ecuaţiei (54), avem $f(a)-g(a)=0$; deci şi $h[f(a)-g(a)]=0$; adică a e o rădăcină şi a ecuaţiei (55).

Reciproc, dacă $x=a$ e o rădăcină a ecuației (55) și dacă h e *diferit de zero*, din $h[f(a)-g(a)]=0$ rezultă și $f(a)-g(a)=0$.

2°. Dacă multiplicatorul h *conține necunoscuta* x, ecuația (55) *poate să nu mai fie echivalentă* cu ecuația (54).

In adevăr, orice valoare $x=a$, care anulează diferența

(56) $$f(x)-g(x)$$

anulează și produsul

(57) $$h(x)[f(x)-g(x)],$$

dacă factorul $h(a)$ e *finit*.

Dacă $h(a)=\infty$, produsul (57), pentru $x=a$, se prezintă sub forma nedeterminată $\infty.0$ [194] și adevărata lui valoare *poate fi diferită de zero*. In acest caz ecuația (54), prin înmulțirea cu $h(x)$, *perde rădăcina* $x=a$.

Reciproc, orice valoare $x=b$, care anulează produsul (57), anulează și diferența (56), dacă factorul $h(b)$ e *diferit de zero*.

Dacă $h(b)=0$, produsul (57) poate fi nul, *fără ca* celălalt factor adică *diferența* (56) *să fie nulă*. In acest caz ecuația (54), prin înmulțirea cu $h(x)$, *câștigă rădăcina* $x=b$.

Așa dar: dacă înmulțim ambii membri ai unei ecuații cu o aceeaș expresie, *care conține necunoscuta* (sau *necunoscutele*), ecuația nouă obținută poate să aibă *mai multe* sau *mai puține* rădăcini decât ecuația dată și anume: *prin înmulțire, ecuația dată poate câștigă, ca rădăcini străine, valorile care anulează multiplicatorul sau poate perde, dintre rădăcinile ei, pe acelea, care fac multiplicatorul infinit.*

EXEMPLU. Ecuația $x^2+2=x(2x+1)$ are rădăcinile 1, -1 și 2, ceeace se poate verifică ușor. Inmulțind ambii membri cu expresia x^2-9, noua ecuație

$$(x^2-9)(x^2+2)=x(x^2-9)(2x+1)$$

are pe lângă rădăcinile vechi 1, -1 și 2 și *rădăcinile noi* $+3$ și -3, care anulează multiplicatorul x^2-9.

Valorile $+3$ și -3 se zic *rădăcini străine*, introduse prin înmulțirea ecuației date cu x^2-9.

3°. Un raționament analog ne arată că orice rădăcină a ecuației

(58) $$f(x)=g(x) \quad \text{sau} \quad f(x)-g(x)=0$$

este o rădăcină și a ecuației

(59) $$\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{sau} \quad \frac{f(x)-g(x)}{h(x)}=0,$$

dacă pentru această valoare împărțitorul $h(x)$ *e diferit de zero.*

Reciproc, orice rădăcină a ecuaţiei (59) este o rădăcină şi a ecuaţiei (58), *dacă pentru această valoare împărţitorul $h(x)$ este finit.*

Prin urmare: Dacă împărţim ambii membri ai unei ecuaţii cu aceeaş expresie, *care conţine necunoscuta* (sau *necunoscutele*), ecuaţia nouă obţinută poate să nu mai fie echivalentă cu ecuaţia dată şi anume *prin împărţire, ecuaţia dată poate perde dintre rădăcini pe acelea care anulează împărţitorul* sau *poate câştigà ca rădăcini străine valorile, care fac împărţitorul infinit.*

EXEMPLU. Ecuaţia $(x-3)(x^3+2)=x(x-3)(2x+1)$ are rădăcinile 1, -1, 2 şi 3. Impărţită cu $\frac{x-3}{x+5}$, devine

$$(x+5)(x^3+2)=x(x+5)(2x+1),$$

care are rădăcinile 1, -1, 2 şi 5. Ecuaţia dată, prin împărţire, a perdut dar rădăcina $x=3$, care *anulează* împărţitorul, şi a câştigat o nouă rădăcină $x=5$, care face împărţitorul *infinit.*

200. **Alungarea numitorilor.** Când o ecuaţie conţine numitori, *putem face să dispară numitorii, dacă înmulţim ambii membri ai ecuaţiei cu un multiplu comun al tuturor numitorilor ei.* Prin această operaţie zicem că *alungăm numitorii.*

Noua ecuaţie, astfel obţinută, poate să aibă ca rădăcini *străine*, valorile care anulează multiplul comun al numitorilor, cu care am înmulţit.

EXEMPLE. 1⁰. *Numitorii nu conţin necunoscutele.* Fie ecuaţia

$$2x-\frac{5x^2}{8}=\frac{3}{7}+\frac{x}{4}-6,$$

cu numitorii 8, 7 şi 4. Fiindcă 8 e divizibil prin 4, un multiplu comun al numitorilor este $7\times8=56$. Inmulţind ambii membri ai ecuaţiei cu 56 găsim

$$56.2.x-\frac{56.5.x^2}{8}=\frac{56.3}{7}+\frac{56.x}{4}-56.6.$$

Simplificând fracţiile şi făcând operaţiile, obţinem o ecuaţie *echivalentă* cu cea dată, dar *scrisă sub formă întreagă*,

$$112x-35x^2=24+14x-336.$$

2⁰. *Numitorii conţin necunoscutele.* Să luăm ecuaţia

(60) $$\frac{5}{(x+1)(x-3)}-\frac{10}{(x-3)(x+5)}=\frac{3}{x-1}.$$

Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este

(61) $$(x+1)(x-1)(x-3)(x+5)$$

şi înmulţind cu acest produs ambii membri ai ecuaţiei date, obţinem ecuaţia *întreagă*

(62) $$5.(x-1)(x+5)-10.(x^2-1)=3.(x+1)(x-3)(x+5),$$

care e satisfăcută de *toate rădăcinile ecuației date*, dar poate să aibă ca rădăcini *străine*, valorile care anulează multiplicatorul (61), adică valorile -1, $+1$, 3 sau -5.

Verificând, vedem că, dintre aceste patru numere, numai $x=3$ satisface ecuația (62). Inlocuind în ecuația (60) pe x prin 3, găsim că membrul întâi e de forma *nedeterminată* $\infty-\infty$, iar membrul al doilea are valoarea $\frac{3}{2}$.

Ca să determinăm adevărata valoare a membrului întâi a ecuației (60) pentru $x=3$, efectuăm scăderea și obținem fracția

$$\frac{5(x+5)-10(x+1)}{(x+1)(x-3)(x+5)}=-\frac{5(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+5)}=-\frac{5}{(x+1)(x+5)}.$$

Pentru $x=3$ această fracție are valoarea $-\frac{5}{32}\neq\frac{3}{2}$. Prin urmare $x=3$ *nu satisface ecuația* (60); ea e o rădăcină *străină* introdusă prin alungarea numitorilor.

201. Operații generale pentru rezolvarea unei ecuații. Din teoremele precedente și corolarele lor rezultă că, dacă avem o ecuație

$$f(x,y,z)=g(x,y,z),$$

în care expresiile f și g sunt *raționale*, o putem reduce la forma cea mai simplă întrebuințând următoarele operații, care ne dau, în general, ecuații *echivalente*:

Operația I. *Facem să dispară parantezele.*

Operația II. *Punem ecuația sub formă întreagă*, alungând numitorii.

Operația III. *Trecem toți termenii cu necunoscutele în membrul întâi și termenii cunoscuți în membrul al doilea.*

Operația IV. *Facem reducerea termenilor asemenea.*

202. Ecuația de gradul întâi cu o necunoscută. Să presupunem că, după toate operațiile I, II, III, IV, am ajuns la o *ecuație de gradul întâi cu o singură necunoscută x.*

1°. Dacă toți coeficienții sunt *numerici*, ecuația se reduce întotdeauna la forma

$$ax=b \tag{63}$$

unde a și b sunt două numere cunoscute.

2°. Dacă coeficienții conțin și *litere*, *punem pe x în factor comun* în membrul întâi și ecuația se reduce la forma

$$ax=b, \tag{64}$$

unde a și b sunt două *expresii algebrice*, formate cu literele care reprezintă numere presupuse cunoscute.

Rezolvarea ecuaţiei. Dacă a e *diferit de zero*, împărţind prin a ambii membri ai ecuaţiei (63) sau (64), găsim

(LXIII) $$x = \frac{b}{a} \quad \textit{rădăcina ecuaţiei} \quad ax = b.$$

Observare. *O ecuaţie de gradul întâi cu o singură necunoscută are o singură rădăcină.*

EXEMPLE. 1°. Ecuaţie numerică. Să se rezolve ecuaţia

(65) $$x^2(x-1) - \frac{7x^2+6}{14} = x^3 - \frac{3}{2}\left[x^2 + \frac{2x+1}{7}\right].$$

Facem să dispară parantezele, observând că

$$x^2(x-1) = x^3 - x^2, \quad \frac{3}{2}\left[x^2 + \frac{2x+1}{7}\right] = \frac{3x^2}{2} + \frac{6x+3}{14}$$

şi ecuaţia dată se scrie

$$x^3 - x^2 - \frac{7x^2+6}{14} = x^3 - \frac{3x^2}{2} - \frac{6x+3}{14}.$$

Suprimând termenul x^3 din ambii membri; înmulţind toţi termenii cu 14 (cel mai mic multiplu comun al numitorilor) şi făcând scăderile arătate de semnele — puse înaintea fracţiilor, obţinem

$$-14x^2 - 7x^2 - 6 = -21x^2 - 6x - 3.$$

Trecem toţi termenii cu necunoscuta în membrul întâi şi termenii cunoscuţi în membrul al doilea:

$$-14x^2 - 7x^2 + 21x^2 + 6x = 6 - 3$$

şi reducând termenii asemenea, ne rămâne ecuaţia

$$6x = 3,$$

care e de gradul *întâi*. Impărţind ambii membri cu 6, obţinem pentru x valoarea

$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Observare. Când după un şir de operaţii, care ne dau ecuaţii *echivalente*, am ajuns la o ecuaţie, care are în membrul întâi numai x, iar în membrul al doilea un număr cunoscut c, zicem că *am rezolvat ecuaţia* şi că *rădăcina ecuaţiei* e $x = c$.

Verificare. Inlocuind în ecuaţia dată pe x prin rădăcina găsită şi făcând toate operaţiile arătate de semne, dacă valoarea membrului întâi e egală cu valoarea membrului al doilea, zicem că rădăcina găsită *verifică ecuaţia.*

2°. Ecuaţie literală. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{a}{b}\left(x - \frac{2}{c}\right) + 5 = 3\left(\frac{x}{a} + 2\right)$$

în care literele a, b, c reprezintă numere presupuse cunoscute.

Facem să dispară parantezele:

$$\frac{ax}{b}-\frac{2a}{bc}+5=\frac{3x}{a}+6.$$

Alungăm numitorii, înmulţind toată ecuaţia cu abc:

$$a^2cx-2a^2+5abc=3bcx+6abc.$$

Trecem termenii cu x în membrul întâi şi cei fără x în membrul al doilea

$$a^2cx-3bcx=2a^2-5abc+6abc.$$

Scoatem pe x în factor comun şi facem reducerile:

$$(a^2c-3bc)x=2a^2+abc.$$

Impărţim, în fine, cu coeficientul lui x şi obţinem *rădăcina*:

$$x=\frac{2a^2+abc}{a^2c-3bc}=\frac{a(2a+bc)}{c(a^2-3b)}.$$

203. Discuţie. La rezolvarea unei ecuaţii de gradul întâi

$$ax=b \tag{66}$$

se pot prezentà mai multe cazuri:

1°. *Cazul general* $a \neq 0$, $b \neq 0$. Impărţind ambii membri cu a găsim rădăcina

$$x=\frac{b}{a} \tag{67}$$

binedeterminată, finită şi diferită de zero.

2°. $a \neq 0$, $b=0$. Ecuaţia e de forma $ax=0$ şi are rădăcina $x=0$.

3°. $a=0$, $b=0$. Când a e *nul*, nu mai putem împărţi membrii ecuaţiei cu a. Dar dacă ecuaţia e de forma $0x=0$, ea e satisfăcută de *orice valoare a lui* x. In acest caz zicem că rădăcina ecuaţiei e *nedeterminată*.

4°. $a=0$, $b \neq 0$. Avem ecuaţia $0x=b$, care nu admite *nici o rădăcină*, fiindcă orice număr înmulţit cu 0 ne dă 0 şi valoarea membrului întâi nu poate fi egală cu membrul al doilea $b \neq 0$. In acest caz zicem că ecuaţia e *imposibilă*.

Observare. Dacă în ecuaţia $ax=b$, cu $b \neq 0$, facem coeficientul a din ce în ce *mai mic*, rădăcina $x=\frac{b}{a}$ devine din ce în ce *mai mare şi creşte la infinit, când a tinde către zero* [**143**, 1]. In acest sens zicem că ecuaţia (66), pentru $a=0$, are rădăcina *infinită*.

EXEMPLU. Ecuaţia $(m-1)x = m+3$ are rădăcina $x = \frac{m+3}{m-1}$.

1°. Dacă m nu are nici valoarea 1, nici -3, x e un număr binedeterminat, finit şi diferit de zero. 2°. Pentru $m = -3$, avem $x = 0$. 3°. Pentru $m = 1$, avem $x = \infty$.

204. Ecuaţie cu mai multe necunoscute. Orice ecuaţie de gradul întâi cu mai multe necunoscute x, y, z, cu ajutorul operaţiilor generale dela paragraful 201, se poate reduce la forma *normală*:

$$ax + by + cz = d, \tag{68}$$

unde a, b, c, d sunt *numere cunoscute* sau *expresii algebrice formate cu litere, care reprezintă numere presupuse cunoscute.*

Dacă nişte numere x_1, y_1, z_1 puse respectiv în locul literelor x, y, z, satisfac egalitatea (68), zicem că x_1, y_1, z_1 formează *un sistem de rădăcini* sau de *soluţii* al ecuaţiei (68).

Punând în locul literelor y şi z două numere *arbitrare*, ecuaţia (68) se poate rezolvà în raport cu x şi ne dă

$$x = \frac{d-by-cz}{a}. \tag{69}$$

Cum putem luà pentru y şi z o infinitate de valori arbitrare y_1, z_1; y_2, z_2; ..., formula (69) ne dă pentru x o infinitate de valori corespunzătoare x_1, x_2, ... Găsim dar pentru ecuaţia (68) o *infinitate de soluţii*: x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ... .

REGULĂ. *O ecuaţie de gradul întâi cu mai multe necunoscute admite o infinitate de sisteme de soluţii. Valorile tuturor necunoscutelor, afară de una, pot fi luate în mod arbitrar; la aceste valori corespunde o valoare şi una singură pentru necunoscuta rămasă, care se obţine rezolvind ecuaţia dată în raport cu această necunoscută.*

EXEMPLU. Ecuaţia

$$3(x-y+1)-z = 3z-2(y+2x) \tag{70}$$

se scrie sub forma normală

$$7x-y-4z = -3. \tag{71}$$

Rezolvată în raport cu x ne dă

$$x = \frac{y+4z-3}{7}. \tag{72}$$

Pentru $y=0$, $z=1$ această formulă ne dă $x = \frac{1}{7}$; pentru $y=1$, $z=3$, avem $x = \frac{10}{7}$ şi aşà mai departe. Valorile astfel obţinute

$$x_1 = \frac{1}{7}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 1; \qquad x_2 = \frac{10}{7}, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = 3; \qquad \ldots$$

sunt *sisteme de soluţii* pentru ecuaţia (71) sau pentru ecuaţia (70) echivalentă cu (71).

205. Sistem de ecuaţii. Dacă nişte numere $x_1, y_1, z_1, \ldots$ trebue să fie *soluţii comune* la mai multe ecuaţii (E), cu necunoscutele $x, y, z, \ldots$, zicem că (E) formează *un sistem de ecuaţii simultane.*

Două sisteme de ecuaţii sunt *echivalente*, dacă au *aceleaşi sisteme de soluţii.* A *rezolvà* un sistem de ecuaţii însemnează a-i aflà *soluţiile* lui.

Dacă ecuaţiile sunt de gradul întâi, le putem scrie întotdeauna sub formă *normală*:

$$\begin{array}{ll} & ax + by + cz + \ldots = l \\ (73) & a'x + b'y + c'z + \ldots = l' \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

în fiecare ecuaţie având în membrul întâi numai termeni cu necunoscutele, iar în membrul al doilea un termen cunoscut.

206. Două ecuaţii cu două necunoscute. Un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute se reduce la forma

$$(74) \qquad \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

unde a, b, c, a', b', c' sunt numere cunoscute.

Pentru a rezolvà acest sistem observăm că prima ecuaţie (74), luată separat, admite o infinitate de soluţii [203].

$$(\alpha) \qquad x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots;\ x_n, y_n;\ \ldots$$

A doua ecuaţie (74), luată separat, admite, în general, o *altă* infinitate de soluţii

$$(\beta) \qquad x'_1, y'_1;\ x'_2, y'_2;\ \ldots;\ x'_n, y'_n;\ \ldots$$

Dacă există un sistem de valori x, y, care să figureze şi în şirul (α) şi în şirul (β), aceste valori satisfac la *ambele* ecuaţii (74). Numai aceste valori sunt *soluţiile sistemului* (74).

Pentru găsirea acestor soluţii *comune*, reducem rezolvarea unui sistem de două ecuaţii cu două necunoscute la rezolvarea unei ecuaţii cu o singură necunoscută. Această ultimă ecuaţie, împreună cu una dintre ecuaţiile date, trebue să formeze un sistem de ecuaţii *echivalent* cu sistemul dat.

Când am obţinut această ecuaţie cu o singură necunoscută, zicem că *am eliminat pe cealaltă necunoscută* între ecuaţiile date.

Astfel să presupunem că, eliminând pe x între ecuaţiile (74), am obţinut ecuaţia

$$(75) \qquad my = n,$$

care împreună cu

$$(76) \qquad ax + by = c$$

formează un sistem echivalent cu (74). Ecuaţia (75) ne dă o singură rădăcină $y = \frac{n}{m}$; înlocuind această valoare a lui y în ecuaţia (76), obţinem ecuaţia de gradul întâi, cu o singură necunoscută,

$$(77) \qquad ax + b\frac{n}{m} = c,$$

care, rezolvată în raport cu x, ne dă o singură valoare pentru x.

Prin urmare *un sistem de două ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute admite*, în general, *un singur sistem de soluţii.*

207. Eliminarea prin comparare. Eliminarea necunoscutei x între ecuaţiile

$$(74) \qquad \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

se poate face astfel: Considerând pe y cunoscut, fiecare din aceste ecuaţii ne dă câte o formulă pentru calcularea valorii lui x

$$(78) \quad x = \frac{c - by}{a} \qquad \text{şi} \qquad (79) \quad x = \frac{c' - b'y}{a'}.$$

In general, pentru o *aceeaş* valoare a lui y, valorile lui x date de aceste formule sunt *diferite*. Pentru ca valorile lui x să fie şi ele *egale*, trebue să avem

$$(80) \qquad \frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}.$$

Ajungem astfel la o ecuaţie *cu o singură necunoscută.*

Fiindcă am *comparat* valorile lui x date de ecuaţiile (74) şi le-am egalat în ecuaţia (80), zicem, în acest caz, că *am eliminat necunoscuta x prin comparare.*

OBSERVARE. Sistemul (74) e evident echivalent cu sistemul (78), (79); iar acest sistem e echivalent cu sistemul format din ecuaţia (80) şi una oricare dintre ecuaţiile (78) sau (79) [204].

In adevăr dacă valorile x_0, y_0 sarisfac la ecuaţiile (78), (79), y_0 satisface la ecuaţia (80) şi reciproc, dacă x_0, y_0 satisfac la ecuaţiile (78) şi (80)

$$\text{din} \quad x_0 = \frac{c - by_0}{a} \quad \text{şi} \quad \frac{c - by_0}{a} = \frac{c' - b'y_0}{a'} \quad \text{rezultă} \quad x_0 = \frac{c' - b'y_0}{a'}$$

adică numerele x_0, y_0 sunt soluţii şi ale sistemului (78), (79).

Dacă y_0 este rădăcina ecuației (80) și dacă x_0 e valoarea lui x dată de una din formulele (78) sau (79), numerele x_0, y_0 sunt *soluțiile sistemului de ecuații* (74).

REGULĂ. Ca să eliminăm necunoscuta x prin comparare:

1°. *rezolvăm fiecare ecuație în raport cu* x, presupunând că y ar fi cunoscut;

2°. *egalăm valorile lui* x *astfel obținute.*

Ca să eliminăm pe y între ecuațiile (74), rezolvăm fiecare ecuație în raport cu y și egalăm valorile lui y astfel obținute.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$(81) \qquad \begin{aligned} 2x-5y&=11 \\ 3x+4y&=5. \end{aligned}$$

Rezolvând fiecare ecuație în raport cu x și egalând valorile lui x, obținem ecuația cu o singură necunoscută

$$(82) \qquad \frac{5y+11}{2}=\frac{-4y+5}{3},$$

care rezolvată în raport cu y ne dă $y=-1$. Valoarea lui x e valoarea comună a rapoartelor (82) pentru $y=-1$. Găsim $x=-3$.

208. Eliminarea prin substituție. Reluând sistemul

$$(74) \qquad \begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c', \end{aligned}$$

dacă scoatem valoarea lui x din ecuația întâia

$$(83) \qquad x=\frac{c-by}{a}$$

și o punem în locul lui x în ecuația a doua, obținem o ecuație *cu o singură necunoscută*

$$(84) \qquad a'\frac{c-by}{a}+b'y=c'.$$

Fiindcă, pentru a obține ecuația (84), am *substituit*, în a doua ecuație (74), pe x prin valoarea lui dată de prima ecuație, zicem, că am *eliminat* necunoscuta x *prin substituție.*

OBSERVARE. Sistemul (74) e echivalent cu sistemul (83), (84).

In adevăr, dacă x_0, y_0 sunt soluțiile comune ale ecuațiilor (74), x_0, y_0 satisfac și la ecuația (83) și fiindcă avem

$$a'x_0+b'y_0=c' \quad \text{cu} \quad x_0=\frac{c-by_0}{a},$$

rezultă că y_0 satisface la ecuația (84).

Reciproc, dacă x_0, y_0 satisfac la ecuaţiile (83) şi (84), avem

$$x_0 = \frac{c - by_0}{a} \quad \text{şi} \quad a'\frac{c - by_0}{a} + b'y_0 = c'$$

sau $ax_0 = c - by_0$ şi $a'x_0 + b'y_0 = c'$, adică x_0, y_0 satisfac şi la sistemul (74).

Dacă y_0 este rădăcina ecuaţiei (84) şi dacă x_0 e valoarea lui x dată de formula (83) pentru $y = y_0$, numerele x_0, y_0 sunt *soluţiile sistemului* (74).

REGULĂ. Ca să eliminăm necunoscuta x prin substituţie:

1°. *scoatem valoarea lui x din una din ecuaţii*, presupunând pe y cunoscut; obţinem astfel pentru x o expresie, care conţine necunoscuta y.

2°. *punem expresia găsită în locul lui x în cealaltă ecuaţie.*

Ca să eliminăm pe y între ecuaţiile (74), scoatem valoarea lui y din una din ecuaţii şi o punem în locul lui y în cealaltă ecuaţie.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$(85) \qquad \begin{aligned} 2x - 5y &= 11 \\ 3x + 4y &= 5. \end{aligned}$$

Rezolvând prima ecuaţie în raport cu x, obţinem

$$(86) \qquad x = \frac{11 + 5y}{2}$$

şi punând această expresie în locul lui x în ecuaţia a doua, obţinem ecuaţia cu o singură necunoscută

$$(87) \quad 3\frac{11 + 5y}{2} + 4y = 5 \quad \text{sau} \quad 33 + 15y + 8y = 10 \quad \text{sau} \quad 23y = -23,$$

care ne dă $y = -1$. Înlocuind în (86) pe y cu -1, găsim $x = -3$.

209. Eliminarea prin reducere. Reluând sistemul

$$(74) \qquad \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \quad \left| \begin{matrix} b' \\ -b \end{matrix} \right| \begin{matrix} -a' \\ a \end{matrix}$$

observăm că necunoscuta y se mai poate elimină şi în felul următor:

1°. Dacă avem $b = -b'$ (sau $b = b'$), termenii cu y dispar, când *adunăm* (sau *scădem*) ecuaţiile date membru cu membru.

2°. Dacă b e *diferit* de b' în valoare absolută, putem aduce sistemul (74) la forma 1° înmulţind prima ecuaţie cu b' şi a doua cu $-b$; obţinem astfel un sistem *echivalent* cu cel dat, dar în care coeficienţii lui y sunt *egali* şi *cu semne contrarii*:

$$\begin{aligned} ab'x + bb'y &= cb' \\ -ba'x - bb'y &= -bc'. \end{aligned}$$

Adunând aceste ecuaţii membru cu membru, termenii în y *dispar* şi rămâne o ecuaţie cu o singură necunoscută

$$(ab'-ba')x=cb'-bc', \tag{88}$$

care, pentru $ab'-ba'\neq 0$, ne dă rădăcina

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}. \tag{89}$$

Valoarea necunoscutei y se poate obţine pe aceeaş cale, făcând ca termenii cu x să aibă coeficienţii *egali* şi *cu semne contrarii*. Pentru aceasta înmulţim prima ecuaţie cu $-a'$ şi a doua cu a. Adunând ecuaţiile obţinute, membru cu membru, dispar termenii în x şi obţinem ecuaţia

$$(ab'-ba')y=ac'-ca', \tag{90}$$

care, pentru $ab'-ba'\neq 0$, ne dă rădăcina

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}. \tag{91}$$

Formulele (89) şi (91) ne dau *soluţiile sistemului* (74).

In acest caz zicem că am întrebuinţat *eliminarea prin reducere.*

Regulă. Ca să eliminăm necunoscuta y prin reducere:

1⁰. *Dacă coeficienţii lui y*, în ambele ecuaţii, *sunt egali şi cu semne contrarii, adunăm ecuaţiile membru cu membru.*

2⁰. *Dacă coeficienţii lui y sunt egali şi cu aceleaşi semne, scădem ecuaţiile membru cu membru.*

3⁰. *Dacă coeficienţii lui y sunt diferiţi, înmulţim ambii membri ai ecuaţiei întâia cu coeficientul lui y din ecuaţia a doua şi ambii membri ai ecuaţiei a doua cu coeficientul lui y, cu semnul schimbat, din ecuaţia întâia. Adunăm apoi ecuaţiile membru cu membru* [1].

EXEMPLE. 1⁰.

$$x+y=2$$
$$x-y=12.$$

Adunând ecuaţiile obţinem $2x=14$ şi $x=7$. Scăzând ecuaţia a doua din întâia obţinem $2y=-10$ şi $y=-5$. Soluţiile sistemului sunt $x=7$, $y=-5$.

Verificare: $7+(-5)=7-5=2$; $7-(-5)=7+5=12$.

2⁰. Să se rezolve sistemul

$$2x-5y=11$$
$$3x+4y=5.$$

---

[1] Operaţia aceasta e analoagă cu *aducerea a două fracţii la acelaş numitor* [82]. Dacă M e un *multiplu comun* al numerelor b, b' şi dacă $M:b=b_1$ şi $M:b'=b_1'$, înmulţind ecuaţia întâia cu b_1 şi ecuaţia a doua cu $-b_1'$ coeficienţii lui y devin M şi $-M$.

M poate fi cel mai mic multiplu comun al numerelor b, b'.

Ca să eliminăm pe y, înmulțim prima ecuație cu 4, a doua cu 5 și *adunând* obținem

$$\begin{array}{rcl|l} 2x-5y&=&11 & 4 \\ 3x+4y&=&5 & 5 \\ \hline 23x&=&69 & \text{de unde } x=3. \end{array}$$

Ca să eliminăm pe x, înmulțim prima ecuație cu 3, a doua cu -2 și *adunând* obținem

$$\begin{array}{rcl|l} 2x-5y&=&11 & 3 \\ 3x+4y&=&5 & -2 \\ \hline -23y&=&23 & \text{de unde } y=-1. \end{array}$$

Soluțiile sistemului sunt $x=3$, $y=-1$.

Verificare: $2.3-5.(-1)=6+5=11$; $3.3+4.(-1)=9-4=5$.

210. Discuție. 1°. Dacă diferența $ab'-ba'$ e *diferită de zero*, sistemul

$$(74)\qquad \begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & ax+by=c \\ (\mathrm{II}) & a'x+b'y=c' \end{array}$$

admite un singur sistem de soluții, finite și bine determinate, date prin formulele

$$(92)\qquad x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

2°. Dacă $ab'-ba'=0$ dar unul dintre membrii ai doilea ai ecuațiilor (88) sau (90) e *diferit de zero*, ecuațiile (74) *nu admit soluții comune* sau sunt *incompatibile.* Sistemul (74) e *imposibil.*

De exemplu dacă $cb'-bc'\neq 0$, ecuația (88) [209] e *imposibilă.* Condițiile $ab'=ba'$ dar $bc'\neq cb'$ sau $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ ne arată că, în acest caz, *coeficienții necunoscutelor sunt proporționali.*

EXEMPLU. Sistemul

$$\begin{array}{l} 6x+3y=1 \\ 2x+y=4, \end{array}$$

în care numai coeficienții lui x și y sunt proporționali, e *imposibil.* In adevăr, înmulțind a doua ecuație cu 3, obținem

$$\begin{array}{l} 6x+3y=1 \\ 6x+3y=12 \end{array}$$

și e evident că ambele ecuații nu pot fi verificate de un *acelaș* sistem de soluții.

3°. Dacă $ab'-ba'=0$ și $cb'-bc'=0$, avem

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\quad\text{și}\quad\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\quad\text{deci}\quad\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

adică *toți* coeficienții dela ecuația (74, I) sunt *proporționali* cu coeficienții dela ecuația (74, II).

Avem dar şi $ac' - ca' = 0$ şi soluţiile sistemului (74) sau (88) şi (90) sunt *nedeterminate*. Dacă unul din coeficienţii lui y, de exemplu b e *diferit de zero*, valoarea *unei* necunoscute (x) poate fi luată în mod *arbitrar*, iar valoarea corespunzătoare a celeilalte necunoscute (y) e binedeterminată prin ecuaţia $ax + by = c$. In acest caz zicem că sistemul e *nedeterminat de ordinul* 1.

4⁰. Dacă *toţi* coeficienţii necunoscutelor a, b, a', b' sunt *nuli*, sistemul (74) se reduce la

$$0 = c \quad \text{şi} \quad 0 = c'.$$

Dacă unul din coeficienţii c sau c' *e diferit de zero, sistemul e imposibil.*

Dacă $c = c' = 0$, sistemul e satisfăcut de *orice numere* puse în locul necunoscutelor x şi y. In acest caz zicem că sistemul e *nedeterminat de ordinul* 2 (¹).

211. Regula lui Cramer. Diferenţa $ab' - ba'$ are un rol important în determinarea rădăcinilor sistemului (74). Ea e formată *numai cu coeficienţii necunoscutelor* din ambele ecuaţii şi se mai reprezintă în mod convenţional prin notaţia

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

coeficienţii a, b, a', b' fiind aşezaţi în acest tablou în aceeaş ordine ca şi în sistemul (74).

Expresia D se numeşte un *determinant* de gradul *al doilea*; numerele a, b, a', b' sunt *elementele* determinantului. Acest determinant are *două linii* ($ab, a'b'$) şi (*două coloane* aa', bb'). *Valoarea* lui, prin definiţie, e dată de egalitatea:

$$\text{(LXIV)} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \quad (\textit{determinant}\ \text{gr. } 2).$$

Soluţiile sistemului (74) sunt date sub formă fracţionară prin formulele (92). Amândouă valorile (şi x şi y) au ca numitor *determinantul* D. Numărătorii din formulele (92) sunt şi ei nişte *determinanţi* şi-i vom însemnà cu D_x şi D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc', \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'.$$

Numărătorul D_x din formula (92), care dă pe x, se obţine din determinantul D dela numitor, dacă înlocuim elementele a, a' (*coeficienţii lui* x) prin c, c' (*cantităţile* corespunzătoare *din membrul al doilea*).

(¹) C. Bourlet, *Leçons d'algèbre élémentaire*, Paris, 1896, pag. 184.

In mod analog numărătorul D_y din formula (92), care dă pe y, se obţine, dacă înlocuim în D pe b, b' (*coeficienţii lui* y) prin c, c' (*cantităţile* corespunzătoare *din membrul al doilea*).

REGULĂ. *Soluţiile sistemului*

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c',$$

dacă determinantul $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ *e diferit de zero, sunt date prin formulele*

$$\text{(LXV)} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D},$$

în care fiecare fracţie are ca numitor determinantul coeficienţienţilor necunoscutelor, iar ca numărător determinantul ce se obţine din numitor, când înlocuim coeficienţii necunoscutei, pe care o căutăm, din ecuaţiile date, prin termenii corespunzători din membrii ai doilea.

Aceasta e regula lui Cramer.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$\text{(93)} \qquad 2x + y = 5$$
$$3x - 2y = -3.$$

Fiindcă determinantul coeficienţilor necunoscutelor este

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2.(-2) - 3.1 = -4 - 3 = -7 \neq 0,$$

sistemul (93) admite soluţii *binedeterminate* şi cum

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 3 = -7, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 15 = -21,$$

soluţiile *unice*, date prin *regula lui Cramer*, sunt

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-21}{-7} = 3.$$

212. Două ecuaţii cu trei necunoscute. Când ni se dă să rezolvăm un sistem de *două ecuaţii* cu *trei necunoscute*

$$\text{(94)} \qquad ax + by + cz = d$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$

dacă dunul dintre determinanţii formaţi cu coeficienţii a *două* necunoscute e diferit de *zero*, sistemul e *nedeterminat* de ordin 1.

In adevăr, dacă $ab' - ba' \neq 0$, luând pentru z o valoare *arbitrară* z_0, reducem sistemul la *două* ecuaţii cu *două* necunoscute x şi y. Rezolvând acest sistem, obținem pentru x și y două valori x_0, y_0. Valorile x_0, y_0, z_0, astfel determinate, sunt *soluțiile sistemului* (94).

Cum aceste operații se pot repetà plecând dela *orice valoare a lui* z, vedem că sistemul (94) *admite o infinitate de soluții.*

EXEMPLU. Ca să rezolvăm sistemul

$$(95)\qquad \begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 7 \\ 4x + 8y - z &= 1, \end{aligned}$$

luăm pentru z o valoare *arbitrară*, de exemplu $z = 2$ și sistemul se reduce la

$$(96)\qquad \begin{aligned} 2x - 5y + 6 &= 7 \\ 4x + 8y - 2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} 2x - 5y &= 1 \\ 4x + 8y &= 3, \end{aligned}$$

care admite soluțiile $x = \frac{23}{36}$, $y = \frac{1}{18}$. Un sistem de soluții al sistemului (95) este dar $x = \frac{23}{36}$, $y = \frac{1}{18}$, $z = 2$.

Luând o altă valoare pentru z, găsim un alt sistem de soluții pentru ecuațiile (95), și așà mai departe.

213. Trei ecuații cu trei necunoscute. Ca să rezolvăm un sistem de *trei ecuații* cu *trei necunoscute*, de gradul *întâi*, îl scriem sub formă *normală*:

$$(97)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) & ax + by + cz &= d \\ &(\mathrm{II}) & a'x + b'y + c'z &= d' \\ &(\mathrm{III}) & a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned}$$

și, *eliminând una sau două necunoscute*, căutăm să reducem problema la rezolvarea unui sistem de *două ecuații cu două necunoscute* sau a *unei ecuații cu o singură necunoscută*.

1°. Dacă $ab' - ba' \neq 0$, considerând în ecuațiile (97, I și II) pe z ca o cântitate *cunoscută*, scriem aceste două ecuații sub forma

$$(98)\qquad \begin{aligned} ax + by &= d - cz \\ a'x + b'y &= d' - c'z \end{aligned}$$

și rezolvându-le după *regula lui Cramer* obținem pentru x și y soluțiile

$$(99)\qquad x = \frac{(d - cz).b' - b.(d' - c'z)}{ab' - ba'},$$

$$(100)\qquad y = \frac{a.(d' - c'z) - (d - cz).a'}{ab' - ba'}.$$

Valoarea luată pentru z și valorile corespunzătoare ale necunoscutelor x și y date de formulele (99) și (100), trebue să satisfacă și la ecuația (97, III), adică trebue să avem

$$(101)\qquad a''\frac{(d - cz)b' - b(d' - c'z)}{ab' - ba'} + b''\frac{a(d' - c'z) - (d - cz)a'}{ab' - ba'} + c''z = d''.$$

Obţinem astfel o ecuaţie cu o singură necunoscută (z), care pusă sub formă normală, se reduce la

$$(102)\qquad (ab'c''+bc'a''+ca'b''-a''b'c-b''c'a-c''a'b)z = ab'd''+bd'a''+da'b''-a''b'd-b''d'a-d''a'b.$$

Sistemul (97) e *echivalent* cu sistemul format din ecuaţiile (99) (100) şi (102). Dacă ecuaţia (102) se poate rezolvà şi dacă z_0 este o soluţie a ei, formulele (99) şi (100), pentru $z=z_0$, ne dau câte o valoare x_0 şi y_0 pentru x şi y. Numerele x_0, y_0, z_0, astfel obţinute, sunt soluţiile sistemului (97).

2°. Sistemul (97) se mai poate rezolvà şi în modul următor: Dacă $a \neq 0$, ecuaţia (97, I) ne dă

$$(103)\qquad x = \frac{d-by-cz}{a}$$

şi înlocuind, în ecuaţiile (97, II şi III), pe x prin această expresie, obţinem un sistem de *două ecuaţii cu două necunoscute* (y şi z)

$$(104)\qquad \begin{aligned} a'\frac{d-by-cz}{a}+b'y+c'z &= d' \\ a''\frac{d-by-cz}{a}+b''y+c''z &= d'', \end{aligned}$$

care, pus sub formă întreagă şi normală, se scrie

$$(105)\qquad \begin{aligned} (ab'-ba')y+(ac'-ca')z &= ad'-da' \\ (ab''-ba'')y+(ac''-ca'')z &= ad''-da''. \end{aligned}$$

Dacă sistemul (105) se poate rezolvà şi dacă y_0 şi z_0 sunt soluţiile lui, formula (103), pentru $y=y_0$ şi $z=z_0$, ne dă o valoare x_0 pentru x. Numerele x_0, y_0, z_0, astfel obţinute, sunt soluţiile sistemului (97).

214. Determinant. Să însemnăm cu D coeficientul lui z din ecuaţia (102):

$$(106)\qquad D = ab'c''+bc'a''+ca'b''-a''b'c-b''c'a-c''a'b.$$

Această expresie, care joacă un rol analog cu expresia D dela paragraful 211, este un *determinant* de gradul *al treilea*. El e format *numai cu coeficienţii necunoscutelor* din ecuaţiile (97) şi se reprezintă în mod convenţional prin tabloul

$$(107)\qquad D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad (\textit{determinant}\ \text{gr. } 3)$$

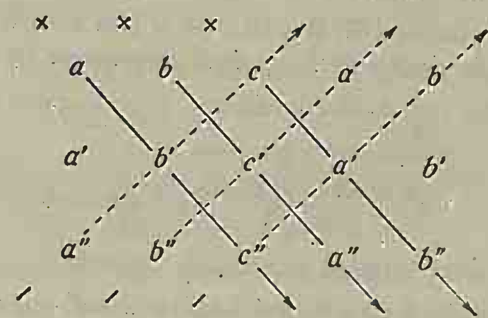
în care coeficienţii necunoscutelor sunt scrişi în ordinea, în care se găsesc în ecuaţiile (97).

Acest determinant are 9 *elemente* aşezate în 3 *linii* (abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$) şi 3 *coloane* ($aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$). *Valoarea* lui, prin definiţie, e dată de egalitatea:

$$\text{(LXVI)} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - a''b'c - b''c'a - c''a'b.$$

Suma algebrică din membrul al doilea se obţine uşor, din tabloul D, prin regula lui Sarrus:

Regulă. *Ca să calculăm valoarea unui determinant de gradul al treilea, scriem determinantul sub forma* (107) *şi la dreapta lui repetăm încăodată coloanele întâia şi a doua*; formăm astfel tabloul

(108) 

1⁰. *Luăm cu semnul* + *produsele elementelor din prima diagonală* ($ab'c''$) *şi din celelalte două linii paralele cu ea* ($bc'a''$, $ca'b''$).

2⁰. *Luăm cu semnul* — *produsele elementelor din diagonala a doua* ($a''b'c$) *şi din celelalte două linii paralele cu ea* ($b''c'a$, $c''a'b$).

3⁰. *Facem suma algebrică a tuturor produselor astfel obţinute.*

EXEMPLU. Ca să calculăm valoarea determinantului *de gradul al treilea*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{formăm tabloul} \qquad \begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

şi aplicând regula lui Sarrus obţinem

$$\Delta = 4.2.3 + 3.(-4).2 + 2.3.1 - 2.2.2 - 1.(-4).4 - 3.3.3 = -13.$$

Determinant minor. Dacă suprimăm *o linie* şi *o coloană* din determinantul (107), obţinem un determinant de gradul al doilea, [211], care se numeşte *determinantul minor* corespunzător elementului comun liniei şi coloanei suprimate.

EXEMPLU. Dacă suprimăm *linia a treia* şi *coloana a treia* din determinantul D, obţinem determinantul $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, care e *minorul* corespunzător elementului c''.

Determinant nul. Determinantul D e *nul*, dacă are *toate elementele dintr'o coloană* (sau *dintr'o linie*) *nule*.

In adevăr, dacă toate elementele unei coloane (de exemplu a, a', a'') sunt *nule* sau dacă toate elementele unei linii (de exemplu a', b', c') sunt *nule*, formula (LXVI) ne dă $D=0$.

215. Regula lui Cramer. Am văzut că, eliminând necunoscutele x şi y între ecuaţiile (97) [213], obţinem ecuaţia (102), care se mai poate scrie

$$D.z = D_z \tag{109}$$

dacă punem

$$D = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - a''b'c - b''c'a - c''a'b$$
$$D_z = ab'd'' + bd'a'' + da'b'' - a''b'd - b''d'a - d''a'b$$

sau

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \qquad D_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}. \tag{110}$$

Determinantul D_z se obţine din determinantul D, dacă înlocuim coeficienţii lui z din ecuaţiile (97) (c, c', c'') prin cantităţile corespunzătoare din membrii ai doilea (d, d' d'').

Dacă eliminăm necunoscutele y şi z sau x şi z între ecuaţiile (97), obţinem în mod analog ecuaţiile

$$D.x = D_x \quad \text{şi} \quad D.y = D_y, \tag{111}$$

în care D_x şi D_y sunt *determinanţi* analogi cu D_z,

$$D_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}. \tag{112}$$

De aci rezultă, şi în acest caz, regula lui Cramer [211]:

REGULA. *Soluţiile sistemului*

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned} \tag{97}$$

— *dacă determinantul* D, *format cu toţi coeficienţii necunoscutelor, e diferit de zero* — *sunt date prin formulele:*

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}, \tag{LXVII}$$

în care, fiecare fracție are ca numitor determinantul D, iar ca numărător determinantul ce se obține din D, când înlocuim coeficienții necunoscutei, pe care o căutăm, *prin termenii cunoscuți corespunzători din ecuațiile date.*

Observare. Pentru aplicarea acestor formule, termenul cunoscut dela fiecare ecuație trebue să fie scris *în membrul al doilea.*

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$4x+3y+2z=11$$
$$3x+2y+4z=-17$$
$$2x+y+3z=26{,}5.$$

găsim

$$D=\begin{vmatrix}4&3&2\\3&2&-4\\2&1&3\end{vmatrix}=-13\neq0;\qquad Dx=\begin{vmatrix}11&3&2\\-17&2&-4\\26{,}5&1&3\end{vmatrix}=-195,$$

$$Dy=\begin{vmatrix}4&11&2\\3&-17&-4\\2&26{,}5&3\end{vmatrix}=260,\qquad Dz=\begin{vmatrix}4&3&11\\3&2&-17\\2&1&26{,}5\end{vmatrix}=-71{,}5$$

și soluțiile sistemului dat sunt

$$x=\frac{-195}{-13}=15,\qquad y=\frac{260}{-13}=-20,\qquad z=\frac{-71{,}5}{-13}=5{,}5.$$

216. Discuție. 1°. Dacă determinantul D (110) e *diferit de zero*, ecuațiile (97) admit *un sistem de soluții și unul singur* dat prin *formulele lui Cramer* (LXVII).

2°. Dacă $D=0$, dar *dacă unul dintre determinanții lui minori de gradul al doilea e diferit de zero*, sistemul e *imposibil* sau *nedeterminat*. De exemplu dacă $ab'-ba'\neq0$, eliminând necunoscutele x și y prin metoda 1° [213], obținem pentru z ecuația

$$(109)\qquad D.z=D_z.$$

Dacă $D_z\neq0$, ecuația (109) e *imposibilă* și sistemul (97) e *imposibil*. Dacă $D_z=0$, valoarea lui z e *nedeterminată* și poate fi luată în mod *arbitrar*, iar valorile corespunzătoare ale celorlalte două necunoscute (x și y) sunt determinate prin formulele (99) și (100). Sistemul (97) e *nedeterminat de ordinul* 1.

3°. Dacă D e *nul* și *toți* determinanții lui minori *de gradul al doilea* sunt *nuli*, dar dacă *un element din D e diferit de zero*, sistemul poate iarăș fi *imposibil* sau *nedeterminat*. De exemplu, dacă $a\neq0$, întrebuințând metoda 2° [213], obținem sistemul (105).

Dacă unul din determinanţii $ad'-da'$ sau $ad''-da''$ e *diferit de zero*, sistemul (105) e *imposibil*. Deci şi sistemul (97) e *imposibil*.

Dacă $ad'-da'=ad''-da''=0$, sistemul (105) e *nedeterminat*. Valorile a *două* necunoscute (y şi z) pot fi luate în mod *arbitrar*, iar valoarea corespunzătoare a celeilalte necunoscute (x) e determinată prin formula (103). Sistemul (97) e *nedeterminat de ordinul* 2.

4°. Dacă *toţi coeficienţii necunoscutelor sunt nuli*, ecuaţiile (97) se reduc la

$$0.x+0.y+0.z=d,\quad 0.x+0.y+0.z=d',\quad 0.x+0.y+0.z=d''.$$

Dacă una dintre cantităţile d, d', d'' e *diferită de zero*, sistemul e *imposibil*. Dacă $d=d'=d''=0$, valorile tuturor necunoscutelor pot fi luate *arbitrar*. Sistemul e *nedeterminat de ordinul* 3; nedeterminarea e *complectă*.

217. Trei ecuaţii cu două necunoscute. Când avem de rezolvat un sistem de ecuaţii, *dacă ecuaţiile admit soluţii comune*, zicem că sunt *compatibile* şi sistemul e *posibil*; în cazul contrariu ecuaţiile se zic *incompatibile* şi sistemul e *imposibil*.

Am văzut, pentru sistemele formate din ecuaţii cu două sau trei necunoscute, că, dacă *numărul ecuaţiilor e egal cu numărul necunoscutelor* [206, 213], rezolvarea sistemului e, în general, *posibilă* şi ecuaţiile admit un sistem *unic* de soluţii comune.

Dacă avem *mai puţine ecuaţii decât necunoscute* [204, 212], sistemul e, în general, *nedeterminat*.

Când avem *mai multe ecuaţii decât necunoscute*, sistemul e, în general, *imposibil* şi, *pentru ca toate ecuaţiile să fie compatibile, trebue ca anumite condiţii să fie îndeplinite*.

Să considerăm sistemul de *trei* ecuaţii de gradul întâi cu *două* necunoscute:

$$(113)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) && ax+by=c\\ &(\mathrm{II}) && a'x+b'y=c'\\ &(\mathrm{III}) && a''x+b''y=c''. \end{aligned}$$

şi să presupunem că *unul* dintre determinanţii de gradul al doilea

$$(114)\qquad ab'-ba',\qquad a'b''-b'a'',\qquad a''b-b''a$$

formaţi cu *coeficienţii necunoscutelor* din *două* ecuaţii, e *diferit de zero*.

Dacă

$$(115)\qquad \delta=ab'-ba'\neq 0,$$

ecuaţiile (I) şi (II) admit soluţiile *unice*

$$(116)\qquad x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

date prin *regula lui Cramer*. Pentru ca aceste soluţii să satisfacă şi ecuaţia (III), *trebue să avem*:

$$a''\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}+b''\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}=c'',$$

egalitate, care — pusă sub formă întreagă — se poate scrie:

$$(117)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=0.$$

Prin urmare: *Pentru ca trei ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute să poată fi* c o m p a t i b i l e, *trebue ca determinantul format cu toţi coeficienţii ecuaţiilor să fie* n u l.

DISCUŢIE. 1°. Dacă determinantul Δ (117) e *diferit de zero*, sistemul (113) e *imposibil*.

2°. Dacă determinantul Δ e *nul* şi dacă *unul dintre determinanţii* (114), formaţi cu coeficienţii necunoscutelor din două ecuaţii, *e diferit de zero* [de exemplu dacă $\delta \neq 0$ (115)], ecuaţiile sunt *compatibile* şi admit *un singur sistem de soluţii*, care se obţine rezolvând cele două ecuaţii corespunzătoare determinantului δ.

3°. Dacă *toţi* determinanţii (114) sunt *nuli*, sistemul poate fi *imposibil* sau *nedeterminat*.

Astfel, dacă toţi determinanţii (114) sunt *nuli*, dar a e *diferit de zero*, rezolvând ecuaţia (113, I) în raport cu x şi punând această valoare în locul lui x în ecuaţiile (113, II şi III), vedem că sistemul e *posibil* numai dacă

$$ac'-ca'=0 \quad \text{şi} \quad ac''-ca''=0.$$

In acest caz valoarea lui y e *arbitrară*, iar valoarea corespunzătoare a lui x e determinată de ecuaţia (I).

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$(118)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) & 2x-3y&=8 \\ &(\mathrm{II}) & x+y&=-1 \\ &(\mathrm{III}) & 2x+y&=0. \end{aligned}$$

Ecuaţiile (II) şi (III) sunt cele mai simple şi fiindcă avem

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

sistemul dat e *posibil* şi admite un singur sistem de soluţii date de ecuaţiile (II) şi (III). Găsim astfel: $x=1,\ y=-2$.

OBSERVARE. Pentru ca un sistem format din mai multe ecuaţii cu două necunoscute să fie *posibil*, trebue şi e deajuns ca *două* dintre ecuaţii, împreună cu *fiecare* dintre celelalte, să fie compatibile.

218. **Ecuaţii liniare şi omogene.** O ecuaţie *de gradul întâi* se mai zice şi *liniară*. O ecuaţie e *liniară* şi *omogenă*, când are *numai termeni de gradul întâi*.

EXEMPLU. Ecuatia $2x+3y-5z=0$ e *liniară* şi *omogenă*; ecuaţia $7x-8y=5$ e liniară dar *neomogenă*; ecuaţia $2x^3+x-4=0$ e *neliniară*.

Două ecuaţii cu două necunoscute. Sistemul

$$(119)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I})\quad ax+by=0\\ &(\mathrm{II})\quad a'x+b'y=0 \end{aligned}$$

e un sistem de două ecuaţii liniare şi omogene cu două necunoscute. Pentru rezolvarea lui putem aplicà regulele date pentru sistemul (74) [206—211], observând că, în acest caz, avem $c=c'=0$.

După discuţia făcută la paragraful **210**, rezultă că:

1⁰. *Dacă determinantul*

$$(120)\qquad D=\begin{vmatrix} a & b\\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'$$

e diferit de zero, ecuaţiile (119) *admit numai soluţiile* $x=0$, $y=0$, date prin *regula lui Cramer* [211].

In adevăr, pentru $c=c'=0$, determinanţii

$$Dx=cb'-bc',\qquad Dy=ac'-ca'$$

sunt *nuli* şi formulele (LXV) ne dau soluţiile *unice*: $x=0$, $y=0$.

2⁰. *Dacă determinantul D e nul,* în toate cazurile posibile, *sistemul* (119) *e nedeterminat.*

Astfel dacă $a\neq 0$, y e *arbitrar*, iar x e determinat de ecuaţia (I). Dacă *toţi* coeficienţii necunoscutelor sunt *nuli*, amândouă valorile x şi y sunt *arbitrare*; nedeterminarea e *complectă*.

OBSERVARE. In cazul 2⁰ şi numai în acest caz, sistemul (119) admite şi soluţii *care nu sunt toate nule*.

Trei ecuaţii cu trei necunoscute. Sistemul

$$(121)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I})\quad ax+by+cz=0\\ &(\mathrm{II})\quad a'x+b'y+c'z=0\\ &(\mathrm{III})\quad a''x+b''y+c''z=0 \end{aligned}$$

e un sistem de trei ecuaţii liniare şi omogene cu trei necunoscute. Pentru rezolvarea lui aplicăm regulele date pentru sistemul (97) [213], observând că, în acest caz, avem $d=d'=d''=0$.

După discuţia făcută la paragraful **216**, rezultă că:

1⁰. *Dacă determinantul*

$$(122)\qquad D=\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

e diferit de zero, ecuațiile (121) *admit sistemul* u n i c *de soluții comune* $x=0$, $y=0$, $z=0$, dat prin regula lui Cramer [215].

In adevăr, pentru $d=d'=d''=0$, toți determinanții D_x, D_y, D_z sunt *nuli*, ca având o coloană formată din elemente *nule* [214].

2⁰. *Dacă determinantul* D *e nul*, în toate cazurile posibile [216, 2⁰, 3⁰ și 4⁰], *sistemul* (121) *e nedeterminat* (de ordinul 1, 2 sau 3).

OBSERVARE. In acest caz sistemul (121) admite și soluții, *care nu sunt toate nule.*

EXEMPLU. Să să rezolve sistemul liniar și omogen:

$$(123)\qquad \begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & x-3y+2z=0 \\ (\mathrm{II}) & 4x-12y+8z=0 \\ (\mathrm{III}) & 3x-9y+6z=0. \end{array}$$

Determinantul

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -12 & 8 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix}$$

precum și *toți determinanții lui minori* de gradul al doilea [214] fiind *nuli*, sistemul (123) e *nedeterminat* de ordinul 2. Luând valorile a două necunoscute (y și z) *arbitrare*, valoarea corespunzătoare a necunoscutei a treia (x) e dată de una dintre ecuații, de exemplu de ecuația (I): $x=3y-2z$.

Astfel pentru $y=7$, $z=-5$ găsim $x=26$; pentru $y=-3$, $z=8$ găsim $x=-25$ și așa mai departe.

Din amândouă o b s e r v ă r i l e precedente, rezultă următoarea

TEOREMĂ. *Condiția necesară și suficientă ca un sistem de două ecuații liniare și omogene cu două necunoscute* sau *de trei ecuații liniare și omogene cu trei necunoscute* să admită soluții, *care să nu fie toate nule*, este ca *determinantul format de toți coeficienții necunoscutelor să fie* n u l.

219. Permutări circulare. Dacă presupunem că n litere $a, b, c, \ldots, k, l$ sunt scrise pe un cerc (*fig.* 34), le putem citi, unele după altele, începând dela orice literă vrem. Obținem astfel n grupe (G) diferite:

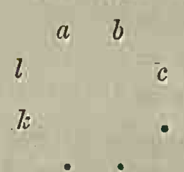


Fig. 34.

$$(G)\qquad \begin{array}{l} abc\ldots kl, \\ bc\ldots kla, \\ c\ldots klab, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ labc\ldots k. \end{array}$$

Trecem dela o grupă (G) la grupa următoare înlocuind fiecare literă prin litera care urmează pe cerc. In acest caz zicem că facem *permutări circulare.*

OBSERVARE. La permutările circulare ale literelor $abc\ldots kl$, litera care vine după l e a.

Tot astfel dacă din două şiruri de litere

$$a, b, c, \ldots, k, l \quad \text{şi} \quad a', b', c', \ldots, k', l'$$

formăm expresii ca

$$(124) \qquad ac' + b - l', \quad bd' + c - a', \quad ce' + d - b', \quad \ldots,$$

pe care le obţinem înlocuind fiecare literă dintr'un şir prin litera *următoare* din acest şir (după l şi l' urmând respectiv a şi a') zicem că deducem toate expresiile (124) *din cea dintâi* prin *permutări circulare.*

220. Două ecuaţii omogene cu trei necunoscute. Dacă avem un sistem de două ecuaţii *liniare* şi *omogene* cu trei necunoscute

$$(125) \qquad \begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \end{aligned}$$

şi *dacă determinantul* $ab' - ba'$ *e diferit de zero,* scriind ecuaţiile sub forma

$$a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} = -c$$

$$a'\frac{x}{z} + b'\frac{y}{z} = -c'$$

şi aplicând regula lui Cramer [211], obţinem pentru rapoartele $\frac{x}{z}$ şi $\frac{y}{z}$ valorile *unice*

$$\frac{x}{z} = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

De aci rezultă că

$$(126) \qquad \frac{x}{bc' - cb'} = \frac{y}{ca' - ac'} = \frac{z}{ab' - ba'}.$$

Prin urmare, în acest caz, sistemul (125) e *nedeterminat* şi valorile necunoscutelor x, y, z sunt *proporţionale* cu determinanţii de gradul al doilea, pe care-i obţinem din $ab' - ba'$ permutând *circular* coeficienţii a, b, c şi a', b', c'.

La fiecare necunoscută corespunde un determinant format cu coeficienţii celorlalte două necunoscute din sistemul (125).

EXEMPLU. Sistemul

$$\begin{aligned} x - 10y - 5z &= 0 \\ 3x + 12y - z &= 0 \end{aligned}$$

admite o *infinitate* de soluţii x, y, z *proporţionale* cu determinanţii

$$\begin{vmatrix} -10 & -5 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = 70, \qquad \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -14, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 42.$$

Avem dar $\frac{x}{70}=\frac{y}{-14}=\frac{z}{4}=\lambda$ sau $x=70\lambda$, $y=-14\lambda$, $z=4\lambda$, unde valoarea lui λ e *arbitrară*.

221. Sistem de n ecuaţii cu n necunoscute. In general, *când ni se dă să rezolvăm un sistem* (E) *de n ecuaţii cu n necunoscute* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, *eliminăm $n-1$ necunoscute între ecuaţiile date şi reducem problema la rezolvarea unei ecuaţii cu o singură necunoscută.*

Astfel, întrebuinţând metoda eliminării prin substituţie [208], dacă una dintre ecuaţiile (E) se poate rezolvà în raport cu x_1, deducem

(127) $$x_1 = f(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

şi, punând această expresie în locul lui x_1 *în toate celelalte $n-1$ ecuaţii*, obţinem un sistem (F) de $n-1$ ecuaţii cu $n-1$ necunoscute $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Sistemul (E) se înlocueşte prin *sistemul* (F) şi *formula* (127).

In acelaş fel eliminăm o a doua necunoscută x_2 între ecuaţiile (F) şi aşa mai departe, până când ajungem la o ecuaţie cu o singură necunoscută. Rezolvarea sistemului (E) se reduce la rolvarea *unei ecuaţii* (L) *cu o singură necunoscută* x_n şi la $n-1$ *formule*, analoage cu (127),

$$x_{n-1} = \chi(x_n), \ \ldots, \ x_2 = g(x_3, \ldots, x_n), \ x_1 = f(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

care, pentru fiecare rădăcină x_n a ecuaţiei (L), ne dau succesiv valorile corespunzătoare ale celorlalte necunoscute $x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$(E)\quad \begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & x+2y-z-3u+v=11 \\ (\mathrm{II}) & 6x+4z-u+2v=12 \\ (\mathrm{III}) & x-3y+z=-6 \\ (\mathrm{IV}) & y+2z-3u+5v=25 \\ (\mathrm{V}) & z+u+3v=14, \end{array}$$

format din 5 ecuaţii liniare cu 5 necunoscute x, y, z, u, v.

Necunoscuta x se găseşte numai în ecuaţiile (I), (II) şi (III). Ecuaţia (III), care e cea mai simplă, ne dă

(128) $$x = 3y - z - 6$$

şi înlocuind pe x, în toate *celelalte* ecuaţii, prin expresia $3y-z-6$, obţinem 4 ecuaţii cu 4 necunoscute

$$(F)\quad \begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & 5y-2z-3u+v=17 \\ (\mathrm{II}) & 18y-2z-u+2v=48 \\ (\mathrm{IV}) & y+2z-3u+5v=25 \\ (\mathrm{V}) & z+u+3v=14, \end{array}$$

care împreună cu ecuaţia (128), formează un sistem *echivalent* cu (E).

In acelaş fel, eliminând necunoscutele y, z şi v, găsim că

(129)	$y = -2z + 3u - 5v + 25$ (din F, IV)	ne dă	(G)	(I) (II) (V)	$z - u + 2v = 9$ $38z - 53u + 88v = 402$ $z + u + 3v = 14;$
(130)	$z = u - 2v + 9$ (din G, I)	ne dă	(H)	(II) (V)	$-5u + 4v = 20$ $2u + v = 5$
(131)	$v = 5 - 2u$ (din H, V)	ne dă	(L)	(II)	$-13u = 0.$

Ultima ecuaţie are o singură rădăcină $u = 0$ şi valorile corespunzătoare ale celorlalte necunoscute v, z, y şi x sunt date, în mod succesiv, de formulele (131), (130), (129) şi (128). Găsim astel, pentru ecuaţiile (E), sistemul *unic* de soluţii comune: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$, $u = 0$, $v = 5$.

222. Metode particulare. In unele cazuri soluţiile unui sistem de ecuaţii se pot obţine mai uşor prin *metode particulare* impuse de *forma* sistemului. Dăm aci două exemple.

EXEMPLUL 1⁰. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} x + y + z &= 15 \\ y + z + u &= 14 \\ z + u + x &= 9 \\ u + x + y &= 1. \end{aligned}$$

Adunând ecuaţiile, membru cu membru, obţinem

$$3x + 3y + 3z + 3u = 39 \quad \text{sau} \quad x + y + z + u = 13.$$

Scăzând din această ecuaţie pe *fiecare dintre ecuaţiile date*, deducem

$$\begin{array}{r} x + y + z + u = 13 \\ x + y + z \qquad = 15 \\ \hline u = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x + y + z + u = 13 \\ y + z + u = 14 \\ \hline x \qquad = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + y + z + u = 13 \\ x \qquad + z + u = 9 \\ \hline y \qquad = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x + y + z + u = 13 \\ x + y \qquad + u = 1 \\ \hline z \qquad = 12. \end{array}$$

EXEMPLUL 2⁰. Să se rezolve sistemul

$$2x - 5y = 0, \qquad 7y = 3z, \qquad x + y + z = 1400.$$

Scriem primele două ecuaţii sub formă de *proporţii*

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2}, \qquad \frac{y}{3} = \frac{z}{7}$$

şi împărţind prima ecuaţie cu 3 şi a doua cu 2, deducem [84, 1 şi 159]

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{6} = \frac{z}{14} = \frac{x + y + z}{15 + 6 + 14} = \frac{1400}{35} = 40.$$

Prin urmare: $x = 15 \times 40 = 600$, $y = 6 \times 40 = 240$, $z = 14 \times 40 = 560$.

223. Semnul binomului $ax+b$. Rădăcina ecuației $ax+b=0$ fiind $x=-\frac{b}{a}=x'$, putem scrie, pentru orice valoare a lui x,

$$ax+b\equiv a\left(x+\frac{b}{a}\right)\equiv a(x-x'),$$

De aci rezultă că:

1°. *Pentru* $x>x'$, diferența $x-x'$ fiind *pozitivă, valoarea binomului* $ax+b$ *are semnul lui* a.

2°. *Pentru* $x<x'$, diferența $x-x'$ fiind *negativă, valoarea binomului* $ax+b$ are semnul lui $-a$ (*contrar cu semnul lui* a).

EXEMPLU. Binomul $2-3x$ are rădăcina $x=\frac{2}{3}$. Pentru $x<\frac{2}{3}$ e *pozitiv*; pentru $x=\frac{2}{3}$ e *nul*; pentru $x>\frac{2}{3}$ e *negativ*. In adevăr, putem scrie

$$2-3x\equiv-3x+2\equiv-3\left(x-\tfrac{2}{3}\right),\quad [a=-3,\ b=2].$$

224. Neegalități. Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sau $f(x,y,z)$ și $g(x,y,z)$ sunt două expresii algebrice, o relație de forma

$$f>g \tag{132}$$

e o *neegalitate* algebrică. Ea are *doi membri* și una sau mai multe *necunoscute* x, y, z. Valorile, care, puse în locul necunoscutelor, satisfac neegalitatea (132) sunt *soluțiile* acestei neegalități.

Două neegalități sunt *echivalente*, când *toate* soluțiile neegalității întâi satisfac și neegalitatea a doua și reciproc.

Teoremele [198, 199], prin care se obțin ecuații echivalente, se pot aplică și la *neegalități*, dar în acest caz trebue se determinăm și *sensul* neegalității obținute.

TEOREMA I. *Dacă adunăm la ambii membri ai unei neegalități*, sau *dacă scădem din ambii membri, o aceeaș cantitate finită, obținem o neegalitate de acelaș sens* și *echivalentă cu cea dată.*

In adevăr, pentru $h(x)$ *finit*, neegalitățile

$$f(x)>g(x) \quad \text{și} \quad f(x)\pm h(x)>g(x)\pm h(x),$$

sunt *echivalente*, deoarece amândouă se reduc la $f(x)-g(x)>0$ [40, 1].

COROLAR. Intr'o neegalitate *putem trece un termen dintr'un membru în celălalt, cu semnul schimbat.*

EXEMPLU. Din $5x^3-3x^2+8>7x^2+2$ putem deduce neegalitățile *echivalente*: $5x^3-3x^2-7x^2>2-8$ sau $5x^3-10x^2>-6$ sau $5x^3-10x^2+6>0$.

Gradul unei neegalități. Putem preciză gradul unei neegalități numai dupăce am adus-o la forma $f>0$ sau $f<0$. In acest caz, dacă f e un polinom întreg în x de grad n, zicem că *neegalitatea e de grad* n.

TEOREMA II. *Dacă înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei neegalităţi cu o aceeaş cantitate h, finită şi diferită de zero, obţinem o neegalitate echivalentă cu cea dată şi de acelaş sens pentru h pozitiv (de sens contrariu pentru h negativ).*

În adevăr neegalitatea $f(x) > g(x)$ sau $f(x) - g(x) > 0$ e echivalentă cu neegalitatea

$$[f(x) - g(x)]\,h(x) > 0 \quad \text{sau} \quad fh > gh \quad \text{pentru} \quad h(x) > 0$$

şi cu neegalitatea

$$[f(x) - g(x)]\,h(x) < 0 \quad \text{sau} \quad fh < gh \quad \text{pentru} \quad h(x) < 0.$$

EXEMPLU. Când înmulţim neegalitatea

(133) $$2x^3 + 3x^2 > 5x - 4$$

cu $2x - 1$, trebue să observăm că binomul $2x - 1$ e *pozitiv* pentru $x > \frac{1}{2}$, *nul* pentru $x = \frac{1}{2}$ şi *negativ* pentru $x < \frac{1}{2}$. Prin urmare, din neegalitatea (133), deducem

$$(2x^3 + 3x^2)(2x - 1) > (5x - 4)(2x - 1) \quad \text{pentru} \quad x > \tfrac{1}{2};$$

$$(2x^3 + 3x^2)(2x - 1) = (5x - 4)(2x - 1) \quad \text{pentru} \quad x = \tfrac{1}{2};$$

$$(2x^3 + 3x^2)(2x - 1) < (5x - 4)(2x - 1) \quad \text{pentru} \quad x < \tfrac{1}{2}.$$

COROLAR. 1°. *Când avem o neegalitate între două expresii întregi* (*neegalitate întreagă*) *putem schimbà semnele la toţi termenii ei, dacă schimbăm şi sensul neegalităţii.*

Aceasta revine la a înmulţi ambii membri ai neegalităţii cu -1.

2°. Când neegalitatea conţine expresii *fracţionare* (neegalitate *fracţionară*) putem face să dispară numitorii ([1]), dacă înmulţim ambii membri ai neegalităţii cu un *multiplu comun al tuturor numitorilor* ei [200].

In acest caz însă, trebue să fim atenţi la *sensul* neegalităţii obţinute, care depinde de *semnul* pe care-l poate aveà *numitorul comun* ales.

EXEMPLU. Neegalitatea *fracţionară*

(134) $$\frac{8x}{x-2} + 6x + 1 > \frac{2x^2 - 7}{3(x-2)},$$

înmulţită cu $3(x-2)$, ne dă neegalitatea *întreagă*

$$24x + 3(6x+1)(x-2) > 2x^2 - 7,$$

care e echivalentă cu (134) *numai pentru* $x - 2 > 0$ adică pentru $x > 2$.

Dacă înmulţim însă neegalitatea (134) cu $3(x-2)^2$ (cantitate, care nu poate fi *negativă*), obţinem neegalitatea întreagă

(135) $$8x(x-2) + 3(6x+1)(x-2)^2 > (2x^2 - 7)(x - 2)$$

echivalentă cu (134) pentru *toate* valorile lui $x \neq 2$.

---

(1) *Să alungăm numitorii.*

Neegalitatea (135) se mai poate scrie, trecând toţi termenii în membrul întâi,

(136) $$(x-2)(16x^2-25x+1) > 0.$$

225. Neegalităţi de gradul întâi cu o necunoscută.

1⁰. O singură neegalitate. O neegalitate *de gradul întâi cu o necunoscută* se poate reduce la una din formele:

$$\text{(I)} \quad ax > b \qquad \text{sau} \qquad \text{(II)} \quad ax < b.$$

In cazul (I), împărţind ambii membri cu $a \neq 0$, găsim soluţiile

$x > \dfrac{b}{a}$ [de *acelaş sens* cu (I)] dacă a e *pozitiv*

şi

$x < \dfrac{b}{a}$ [de *sens contrariu* cu (I)] dacă a e *negativ*.

In mod analog rezolvăm şi neegalitatea (II).

2⁰. Mai multe neegalităţi. Pentru a rezolvà *n neegalităţi cu o singură necunoscută*, le reducem întâi la forma normală:

(137) $$a_1x > b_1, \quad a_2x < b_2, \quad \ldots, \quad a_nx > b_n.$$

Rezolvăm apoi fiecare neegalitate în parte şi luăm valorile lui x, care satisfac la *toate* aceste neegalităţi.

1⁰. Dacă toate neegalităţile (137) se reduc la forma

(138) $$x > c_1, \quad x > c_2, \quad \ldots, \quad x > c_n$$

şi dacă c e *cel mai mare* dintre numerele $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sistemul (137) e echivalent cu neegalitatea $x > c$.

2⁰. Dacă toate neegalităţile (137) se reduc la forma

(139) $$x < c_1, \quad x < c_2, \quad \ldots, \quad x < c_n$$

şi dacă d e *cel mai mic* dintre numerele $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sistemul (137) e echivalent cu neegalitatea $x < d$.

3⁰. Dacă neegalităţile (137) *nu sunt toate de acelaş sens*, de exemplu, dacă p neegalităţi sunt de forma

(140) $$x > \alpha_1, \quad x > \alpha_2, \quad \ldots, \quad x > \alpha_p$$

şi q de forma

(141) $$x < \beta_1, \quad x < \beta_2, \quad \ldots, \quad x < \beta_q \qquad (p+q=n),$$

şi dacă α e *cel mai mare* dintre numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ şi β *cel mai mic* dintre numerele $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, sistemul neegalităților date e echivalent cu

$$(142) \qquad x > \alpha, \quad x < \beta.$$

Dacă $\alpha \geqq \beta$, condițiile (142) *nu sunt compatibile* și sistemul (137) e *imposibil*. Dacă $\alpha < \beta$, sistemul (137) e *posibil* și soluțiile lui sunt toate valorile lui x, care satisfac la condiția $\alpha < x < \beta$.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul de neegalități:

$$(143) \qquad 3x+1 > \frac{5-x}{2}, \quad \frac{x-3}{x+4} < 0, \quad \frac{x}{2} - \frac{3x}{5} > x-8.$$

Rezolvăm întâi fiecare neegalitate separat. Neegalitatea întâi ne dă

$$6x+2 > 5-x \quad \text{sau} \quad 7x > 3; \quad \text{deci} \quad x > \frac{3}{7}.$$

Neegalitatea a doua (143), se descompune în

$$(\alpha) \quad x-3 > 0, \ x+4 < 0 \quad \text{sau} \quad (\beta) \quad (x-3) < 0, \ x+4 > 0.$$

Sistemul (α) $x > 3$, $x < -4$ e *imposibil*. Sistemul (β) ne dă $-4 < x < 3$.

Neegalitatea a treia (143) ne dă succesiv:

$$5x - 6x > 10x - 80, \quad -11x > -80, \quad 11x < 80; \quad \text{deci} \quad x < \frac{80}{11}.$$

Trebue dar să avem: $-4 < \frac{3}{7} < x < 3 < \frac{80}{11}$. De aci rezultă că soluțiile sistemului (143) sunt *toate valorile lui x cuprinse între* $\frac{3}{7}$ și 3.

226. Probleme. Ca să rezolvăm o problemă de algebră:

1⁰. Insemnăm cu $x, y, z, \ldots$ *necunoscutele* problemei.

2⁰. *Punem problema în ecuații*, adică scriem sub formă de *egalități* relațiile (care rezultă din enunțul problemei) între cantitățile *date* și cantitățile *necunoscute*.

3⁰. *Rezolvăm ecuațiile* obținute.

4⁰. Luând datele problemei sub forma cea mai generală, *discutăm* diferitele cazuri posibile și cercetăm, dacă soluțiile găsite au *un sens* din punct de vedere *practic*.

PROBLEMA I. *Două trenuri pleacă, în acelaș timp, unul din Cluj spre Brașov și celălalt din Brașov spre Cluj. Primul tren face 75 km. pe oră, al doilea face 45 km. pe oră. Știind că dela Cluj până la Brașov sunt 330 km. de cale ferată, se întreabă: la ce distanță de Cluj se vor întâlnì aceste trenuri?*

1⁰. Necunoscuta. Insemnăm cu x distanța în km. dela Cluj până la locul unde se întâlnesc aceste trenuri.

2⁰. Punerea problemei în ecuație. Primul tren parcurge x km. în $\frac{x}{75}$ ore; trenul al doilea parcurge $330-x$ km. în $\frac{330-x}{45}$ ore.

Aceste timpuri trebuind să fie *egale*, avem ecuaţia

$$(144)\qquad \frac{x}{75}=\frac{330-x}{45}.$$

3⁰. Rezolvarea ecuaţiei. Din (144) deducem succesiv

$$45x=75.(330-x),\quad 3x=5.(330-x),\quad 8x=1650,$$

$$x=\frac{1650}{8}=206{,}25.$$

Trenurile se întâlnesc la 206,25 km. dela Cluj.

4⁰. Generalizarea şi discuţia. Presupunând, în general, că primul tren ar plecà dela staţia A (spre B) şi ar face p km. pe oră; al doilea tren ar plecà dela staţia B (spre A) şi ar face q km. pe oră şi că dela A până la B ar fi r km., am avea ecuaţia

$$(145)\qquad \frac{x}{p}=\frac{r-x}{q},$$

care admite în toate cazurile soluţia *unică*

$$(146)\qquad x=\frac{pr}{p+q}.$$

Dacă $p<q$, avem $\frac{p}{p+q}<\frac{p}{2p}=\frac{1}{2}$ şi $x<\frac{r}{2}$; trenurile se întâlnesc într'un loc mai apropiat de staţia A decât de B. Dacă $p>q$ (cazul problemei date), avem $x<\frac{r}{2}$. Dacă $p=q$, avem $x=\frac{r}{2}$.

Problema II. *Ni se dau două aliaje şi anume:*

primul aliaj	*cu*	75 *gr. aur*	*şi* 105 *gr. cupru*	— *total*	180 *gr.*
al doilea „	„	150 „ „	„ 120 „ „	— „	270 „

şi se întreabă: câte grame trebue să luăm din fiecare aliaj, ca să formăm un alt aliaj, care să conţină 100 *gr. aur şi* 150 *gr. cupru?*

1⁰. Necunoscutele. Insemnăm cu x şi y numărul de grame, cât trebue să luăm din fiecare aliaj, ca să formăm aliajul cerut.

2⁰. Punerea problemei în ecuaţii. In primul aliaj

la 180 gr. aliaj	avem	75 gr. aur	şi	105 gr. cupru	
„ 1 „ „	„	$\frac{75}{180}$ „ „	„	$\frac{105}{180}$ „	„
„ x „ „	„	$\frac{75x}{180}$ „ „	„	$\frac{105x}{180}$ „	„

In acelaş fel vedem că din al doilea aliaj

la y gr. aliaj avem $\frac{150y}{270}$ gr. aur şi $\frac{120y}{270}$ gr. cupru.

Scriind că x gr. din aliajul întâi şi y gr. din aliajul al doilea formează aliajul cerut, avem ecuaţiile:

pentru *aur* — pentru *cupru*

$$\frac{75x}{180}+\frac{150y}{270}=100, \qquad \frac{105x}{180}+\frac{120y}{270}=150.$$

Simplificând şi punând ecuaţiile sub formă întreagă, obţinem

$$(147)\qquad \begin{aligned} 3x+4y&=720\\ 21x+16y&=5400.\end{aligned}$$

3°. R e z o l v a r e a. Aplicând regula lui Cramer, găsim

$$D=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 21 & 16\end{vmatrix}=-36, \quad D_x=\begin{vmatrix}720 & 4\\ 5400 & 16\end{vmatrix}=-10080, \quad D_y=\begin{vmatrix}3 & 720\\ 21 & 5400\end{vmatrix}=1080,$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-10080}{-36}=280; \qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{1080}{-36}=-30.$$

Observare. Deşi sistemul de ecuaţii (147) admite soluţii *bine determinate* şi *unice*, totuşi *în practică* problema dată e *imposibilă*.

In adevăr, ca să formăm aliajul cerut, ar trebui să luăm: *280* gr. din aliajul întâi, care are numai 180 gr. (*imposibilitate*); *—30* gr. din aliajul al doilea (cantitate *negativă*), în practică *fără sens*.

4°. G e n e r a l i z a r e a. Să presupunem că primul aliaj are a gr. aur şi b gr. cupru; că al doilea aliaj are a' gr. aur şi b' gr. cupru şi că se cere să formăm din ele un aliaj, care să conţină α gr. aur şi β gr. cupru.

Raţionând ca mai sus, găsim ecuaţiile

pentru *aur* — pentru *cupru*

$$(148)\qquad \frac{ax}{a+b}+\frac{a'y}{a'+b'}=\alpha, \qquad \frac{bx}{a+b}+\frac{b'y}{a'+b'}=\beta,$$

şi avem:

$$D=\frac{ab'-ba'}{(a+b)(a'+b')}, \quad D_x=\frac{\alpha b'-\beta a'}{ab'-ba'}, \quad D_y=\frac{a\beta-b\alpha}{ab'-ba'},$$

$$(149)\qquad x=\frac{\alpha b'-\beta a'}{ab'-ba'}(a+b), \qquad y=\frac{a\beta-b\alpha}{ab'-ba'}(a'+b').$$

DISCUŢIA. C a z u l I. Dacă $ab'-ba'\neq 0$, sistemul (148) admite un singur sistem de soluţii date prin formulele (149). Totuşi din punct de vedere *practic* problema e *posibilă*, numai dacă aceste soluţii sunt *amândouă pozitive*. Pentru aceasta *trebue ca diferenţele*

$$\alpha b'-\beta a', \quad a\beta-b\alpha, \quad ab'-ba'$$

să fie toate de acelaş semn, adică să avem

$$\text{sau}\quad (\mathrm{I})\quad \frac{a}{b} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{a'}{b'} \qquad \text{sau}\quad (\mathrm{II})\quad \frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{a'}{b'}.$$

Cazul II. Dacă $ab'-ba' \neq 0$, dar sau condiţia (I), sau condiţia (II) nu e realizată, cel puţin una dintre soluţiile (149) e *negativă* şi problema e *imposibilă*.

Cazul III. Dacă $ab'-ba'=0$, cum a, b, a', b' nu sunt toate nule, dacă avem

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \neq \frac{\alpha}{\beta},$$

sistemul (148) e *imposibil*; problema dată *nu admite soluţii*.

Cazul IV. Dacă avem

$$ab'-ba'=0 \quad \text{şi} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{\alpha}{\beta},$$

sistemul (148) e *nedeterminat*; problema admite *o infinitate de soluţii*. Nedeterminarea e de ordinul întâi.

EXERCIŢII.

40. Să se rezolve ecuaţiile:

1°. $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}=x-2$; 2°. $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$;

3°. $\frac{1}{7}(3x-4)+\frac{1}{3}(5x+3)=43-5x$; 4°. $\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{6}\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right)=4\frac{8}{9}$

5°. $\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-a}{a+b}=\frac{x+a}{a+b}+\frac{2(x-b)}{a-b}$; 6°. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5\left(x-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)+54$;

7°. $2\lambda x-3+x=\lambda x+2x+2$; 8°. $\left(a^{5x+1}\right)^5=\left(a^{7x-1}\right)^7\times\left(a^{x-6}\right)^9$.

R. 1°. $x=6$; 2°. $x=2$; 3°. $x=6$; 4°. $x=5$; 5°. $x=\frac{5ab-a^2+2b^2}{a+b}$;

6°. Ecuaţie *imposibilă*; 7°. Avem $(\lambda-1)x=5$; pentru $\lambda\neq 1$, găsim $x=\frac{5}{\lambda-1}$; când λ tinde către 1, x *creşte la infinit*; pentru $\lambda=1$, ecuaţia e *imposibilă*.

8°. Ecuaţia se poate scrie $a^{5(5x+1)}=a^{7(7x-1)+9(x-6)}$, de unde deducem ecuaţia liniară $5(5x+1)=7(7x-1)+9(x-6)$, care admite soluţia $x=2$.

41. Să se rezolve ecuaţiile:

1°. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-1}{x-4}=2$; 2°. $\frac{9x+10}{11x-12}-\frac{8+5x}{40}=\frac{12}{13}-\frac{x}{8}$;

3°. $b=\frac{t-a}{1+at}$; 4°. $\frac{u+2a}{2b-u}+\frac{u-2a}{2b+u}=\frac{4ab}{4b^2-u^2}$.

R. 1°. $x=22$; 2°. $x=7$; 3°. $t=\frac{a+b}{1+ab}$; 4°. $u=\frac{ab}{a+b}$.

42. Să se rezolve sistemele de două ecuaţii liniare cu două necunoscute:

1°. $x-y=1$, $\frac{2x}{5}+\frac{3y}{4}=5$; 2°. $5(x-2)=y+2$, $x+5=3(y-5)$; 3°. $a(x+y)+b(x-y)=1$, $b(x-y)+a(x+y)=1$

R. 1°. $x=5$, $y=4$; 2°. $x=4$, $y=8$; 3°. Pentru $a^2-b^2\neq 0$ găsim soluţiile $x=\frac{1}{a+b}$, $y=0$; pentru $a=b$ sistemul e nedeterminat; pentru $a=-b$, sistemul e imposil. Se pot luà ca necunoscute şi $u=x+y$, $v=x-y$.

43. Să se rezolve sistemele de trei ecuaţii cu trei necunoscute:

1°. $\begin{aligned} 4x+3y+2z&=11\\ 3x+2y-4z&=-17\\ 2x+y+3z&=26{,}5;\end{aligned}$ 2°. $\begin{aligned} 2u-3v+4w&=7\\ 3u+2v-5w&=8\\ 5u-v-w&=15;\end{aligned}$ 3°. $\begin{aligned} 10m+4n-3p&=0\\ 20n+5m-4p&=0\\ 27p-124n+20m&=0.\end{aligned}$

R. 1°. Avem $D=-13\neq 0$ şi găsim $x=15$, $y=-20$, $z=5{,}5$.

2°. Avem $D=0$ şi găsim $u=\frac{38+7w}{13}$, $v=\frac{22w-5}{13}$, w arbitrar.

3°. Avem $D=0$. Sistemul admite o infinitate de soluţii m, n, p proporţionale cu numerele

$$\begin{vmatrix} 4 & -3\\ 20 & -4\end{vmatrix}=44,\qquad \begin{vmatrix} -3 & 10\\ -4 & -5\end{vmatrix}=55,\qquad \begin{vmatrix} 10 & 4\\ -5 & 20\end{vmatrix}=220,$$

sau cu 4, 5, 20. Avem dar $m=4\lambda$, $n=5\lambda$, $p=20\lambda$ (λ arbitrar).

44. Un tată are 41 ani, fiul lui are 17 ani. După câţi ani vrâsta tatălui va fi 1°. *de 2 ori*; 2°. *de 3 ori;* 3°. *de $\frac{8}{7}$ ori* vrâsta fiului?

R. Peste x ani tatăl având $41+x$ ani, iar fiul $17+x$ ani, va trebui să avem:

1°. $41+x=2(17+x)$; $x=7$. De 2 ori, *va fi* peste 7 ani.
2°. $41+x=3(17+x)$; $x=-5$. De 3 ori, *a fost* acum 5 ani.
3°. $41+x=\frac{8}{7}(17+x)$; $x=151$. De $\frac{8}{7}$ ori, e *imposibil.*

45. Se dau două numere întregi sau fracţionare pozitive α şi β ($\alpha<\beta$) şi se cere să se găsească două numere *întregi* p şi q, care să ne dea neegalităţile

$$\alpha<\frac{2p+1}{2q+1}<\frac{2p+1}{2q}<\beta. \tag{1}$$

R. Presupunând q cunoscut, numărul p trebue să satisfacă la

$$\begin{aligned} &2p+1>(2q+1)\alpha \quad \text{sau} \quad p>\frac{(2q+1)\alpha-1}{2}=\lambda\\ &2p+1<2q\beta \quad \text{sau} \quad p<\frac{2q\beta-1}{2}=\mu \qquad \lambda<p<\mu.\end{aligned} \tag{2}$$

Ca să existe un număr *întreg* p cuprins între λ şi μ, trebue să avem $\mu-\lambda\geqq 1$ adică $\frac{2q\beta-(2q+1)\alpha}{2}=\frac{2q(\beta-\alpha)-\alpha}{2}\geqq 1$; de unde deducem

$$q\geqq\frac{2+\alpha}{2(\beta-\alpha)}. \tag{3}$$

Neegalităţile (2) şi (3) ne arată că există o infinitate de numere *întregi* p şi q, care satisfac la neegalităţile (1).

CAPITOLUL V.

ECUAŢII NELINIARE.

I. — NUMERE IMAGINARE.

227. **Rădăcina patrată din numere negative.** Am văzut că o ecuaţie de gradul întâi (*liniară*) cu o singură necunoscută

(1) $$ax = b \quad (a \neq 0)$$

admite întotdeauna o rădăcină *unică* şi *reală* $x = \frac{b}{a}$.

Nu putem spune acelaş lucru pentru o ecuaţie *de grad mai mare decât* 1 sau *neliniară*. In adevăr, pentru a rezolvà cea mai simplă ecuaţie de gradul *al doilea*

(2) $$x^2 = m,$$

trebue să extragem *rădăcina patrată* din m, operaţie care nu e întotdeauna posibilă cu ajutorul numerelor *reale*.

1°. Dacă m e un număr *pozitiv*, $\sqrt{m}$ (în sens *aritmetic*) [**122, 131**] se poate extrage şi ne dă un număr *real* α, raţional sau iraţional. In acest caz, ecuaţia (2) admite *două rădăcini reale* şi *distincte* $x' = +\alpha$ şi $x'' = -\alpha$, fiindcă avem $(+\alpha)^2 = (-\alpha)^2 = m$. De aceea zicem că, pentru $m > 0$, $\sqrt{m}$ *algebrică* are *două determinări* $\pm\alpha$, pe care le putem însemnà cu $+\sqrt{m}$ şi $-\sqrt{m}$.

EXEMPLU. $\sqrt{9}$ e ± 3 şi convenim să scriem $+\sqrt{9} = 3$ şi $-\sqrt{9} = -3$.

2°. Dacă m e un număr *negativ*, $\sqrt{m}$ nu se poate exprimà cu *niciun număr real*, fiindcă orice număr real ridicat la patrat ne dă un număr *pozitiv*, deci *diferit* de $m < 0$; prin urmare ecuaţia (2), pentru $m < 0$, *nu admite rădăcini reale.*

EXEMPLU. $\sqrt{-9}$ nu e nici $+3$, nici -3 şi *niciun număr real* α.

Pentru a face posibilă extragerea rădăcinii patrate şi din numere *negative*, trebue să introducem în algebră numere noi.

Convenim să scriem

$$(3) \qquad \sqrt{-1} = i.$$

Acest număr i e *unitatea imaginară* şi satisface, prin definiţie, la condiţia:

$$(4) \qquad i^2 = -1.$$

Un număr de forma ni (n real) conţine n unităţi imaginare şi se numeşte *număr imaginar*.

Cu această convenţie, rădăcina patrată *algebrică* dintr'un număr negativ $-m$ se va scrie

$$(5) \qquad \sqrt{-m} = \sqrt{(-1).m} = \sqrt{-1}.\sqrt{m} = i\sqrt{m} = \pm ai,$$

unde $a = \sqrt{m}$ (rădăcină *aritmetică*) e un număr *real* pozitiv.

228. Numere complexe. Un număr de forma $a+bi$, unde a şi b sunt numere reale, se numeşte *număr complex* sau *număr imaginar* de formă generală. El conţine a unităţi *reale* şi b unităţi *imaginare* şi se mai poate scrie

$$(6) \qquad a+bi = a.1 + b.i \qquad (\textit{număr complex}).$$

Numerele reale a şi b pot fi *pozitive, nule* sau *negative*; a e *partea reală*, b e *coeficientul lui* i.

Pentru $b=0$ avem numărul a (*real*); pentru $a=0$ avem numărul bi (*imaginar pur*).

OBSERVARE. *Mulţimea numerelor complexe* cuprinde în ea mulţimea tuturor numerelor *reale*.

Un număr complex se poate scrie şi cu o singură literă: $\alpha = a+bi$.

Zicem că numărul $\alpha = a+bi$ e *nul* şi scriem $\alpha = 0$, dacă avem şi $a=0$ şi $b=0$ [1].

Zicem că două numere complexe $\alpha = a+bi$ şi $\alpha' = a'+b'i$ sunt *egale* şi scriem $\alpha = \alpha'$, dacă avem $a=a'$ şi $b=b'$ [2].

Două numere complexe $a+bi$ şi $a-bi$, care au părţile reale *egale* şi coeficienţii lui i *simetrici*, se zic *imaginare conjugate*.

Două cantităţi de forma $a+bi$ şi $-a-bi$ se zic *simetrice*. Dacă avem $a+bi=\alpha$, vom scrie $-a-bi = -\alpha$.

---

(1) In acest caz numărul n'are nici unităţi reale, nici unităţi imaginare.
(2) Numerele α şi α' au acelaş număr de unităţi reale şi acelaş număr de unităţi imaginare.

Cantitatea reală $\sqrt{a^2+b^2}$ se numeşte *modulul* numărului imaginar $\alpha=a+bi$ şi se mai scrie

(7) $$|\alpha|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2} \quad (modul).$$

Două cantităţi imaginare conjugate au acelaş modul.

Dacă avem $\sqrt{a^2+b^2}=0$, avem şi $a=0, b=0$, deci $a+bi=0$ şi reciproc.

229. Operaţiile cu numere complexe. Operaţiile cu numerele complexe se definesc astfel ca, aplicate la numerele reale, să se reducă la operaţiile aritmetice sau algebrice definite pentru numerele reale.

In general, în toate operaţiile, simbolurile de forma $a+bi$, $a'+b'i$ se consideră ca *binoame algebrice* ordinare; unitatea imaginară i se consideră ca o *literă algebrică*, cu singura condiţie că, în toate rezultatele, *puterea* i^2 *se înlocueşte prin* -1.

1⁰. Adunarea. *Suma* a două numere complexe $\alpha=a+bi$ şi $\alpha'=a'+b'i$ este

(8) $$\alpha+\alpha'=a+bi+a'+b'i=(a+a')+(b+b')i=c+di=\sigma,$$

în care avem

$$c=a+a', \qquad d=b+b'.$$

EXEMPLU. $(3+5i)+(4-8i)=(3+4)+(5-8)i=7-3i.$

Suma a n numere complexe

$$\alpha_1=a_1+b_1i, \quad \alpha_2=a_2+b_2i, \quad \ldots, \quad \alpha_n=a_n+b_ni$$

este

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)i.$$

2⁰. Scăderea. *Diferenţa* numerelor complexe $\alpha=a+bi$ şi $\alpha'=a'+b'i$ este

(9) $$\alpha-\alpha'=a+bi-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i=c+di=\delta,$$

în care avem

$$c=a-a', \qquad d=b-b'.$$

OBSERVARE. Din $\alpha-\alpha'=\delta$, rezultă $\delta+\alpha'=\alpha$.
Din $\alpha=\alpha'$, rezultă $\alpha-\alpha'=0$.

EXEMPLU. $(7-3i)-(4-8i)=(7-4)+[(-3)-(-8)]i=3+5i$
sau $(7-3i)-(4-8i)=7-3i-4+8i=(7-4)+(8-3)i=3+5i.$

3⁰. Inmulţirea. Avem, prin definiţie,

$$\alpha.\alpha'=(a+bi)(a'+b'i)=aa'+a'bi+ab'i+bb'i^2,$$

sau, înlocuind pe i^2 cu -1,

(10) $$\alpha.\alpha'=(aa'-bb')+(a'b+ab')i=\beta.$$

Produsul β e, în general, un număr complex. Pentru două cantități imaginare *conjugate*, avem

(11) $$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \quad (\text{număr } real).$$

Produsul a mai multor numere complexe se definește și se calculează ca produsul a mai multor binoame de forma $a+bi$.

TEOREMĂ. *Modulul produsului a două numere complexe este egal cu produsul modulurilor acestor numere.*

In adevăr numerele $\alpha = a+bi$ și $\alpha' = a'+b'i$ au modulurile $\sqrt{a^2+b^2}$ și $\sqrt{a'^2+b'^2}$ respectiv. Produsul

$$\alpha\alpha' = (aa'-bb')+(a'b+ab')i$$

are modulul $\sqrt{(aa'-bb')^2+(a'b+ab')^2}$ și se verifică ușor că avem

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = (aa'-bb')^2+(a'b+ab')^2.$$

Putem dar scrie:

(12) $$|\alpha.\alpha'| = |\alpha|.|\alpha'|$$

și în general, pentru un produs de n numere complexe,

(13) $$|\alpha_1.\alpha_2. \dots \alpha_n| = |\alpha_1|.|\alpha_2|. \dots |\alpha_n|.$$

COROLAR. *Pentru ca produsul a mai multor cantități imaginare să fie nul, trebue și e de ajuns ca unul dintre factori să fie nul.*

In adevăr, produsul numerelor complexe $\alpha\beta\gamma$ e *nul*, dacă $|\alpha\beta\gamma| = 0$ [228] sau dacă produsul numerelor *reale* $|\alpha|.|\beta|.|\gamma| = 0$ și reciproc [47, Observare].

EXEMPLU. 1°. $(3+5i)\times(4-8i) = 12+20i-24i-40i^2$
$= 12+20i-24i+40 = 52-4i.$

2°. $(3+5i)\times(3-5i) = 3^2-5^2i^2 = 3^2+5^2 = 9+25 = 34.$

4°. Ridicarea la putere. Pentru m întreg și pozitiv avem

(14) $$\alpha^m = (a+bi)^m = \underset{1}{(a+bi)}\underset{2}{(a+bi)} \dots \underset{m}{(a+bi)}.$$

In particular, pentru unitatea imaginară i, avem

(15) $$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n, \qquad i^{2n+1} = i^{2n}.i = (-1)^n.i$$

adică

(16) $$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i^4.i = i, \text{ etc.}$$

TEOREMĂ. *Modulul puterii a m-a a unei cantități complexe este egal cu puterea a m-a a modulului acestei cantități.*

In adevăr, după formula (13), avem:

(17) $$|\alpha^m| = |\underset{1}{\alpha}.\underset{2}{\alpha} \dots \underset{m}{\alpha}| = |\underset{1}{\alpha}|.|\underset{2}{\alpha}|. \dots |\underset{m}{\alpha}| = |\alpha|^m.$$

5°. Impărţirea e operaţia inversă a înmulţirii. Vom zice dar că $x+yi$ e *câtul* cantităţilor imaginare $a+bi$ şi $a'+b'i$ şi vom scrie

$$(18) \qquad \frac{a+bi}{a'+b'i} = x+yi,$$

dacă avem

$$a+bi = (x+yi)(a'+b'i).$$

Efectuând produsul în membrul al doilea, obţinem

$$a+bi = (a'x-b'y)+(a'y+b'x)i,$$

de unde rezultă egalităţile [228]:

$$(19) \qquad \begin{aligned} a'x - b'y &= a \\ b'x + a'y &= b. \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem obţinem partea reală şi coeficientul lui i din câtul $x+yi$ (18). Cum determinantul coeficienţilor necunoscutelor e $a'^2+b'^2 \neq 0$, sistemul (19) admite un sistem *unic* de soluţii, dat prin *regula lui Cramer* [211]:

$$(20) \qquad x = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}, \qquad y = \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}.$$

Găsim dar

$$(21) \qquad \frac{a+bi}{a'+b'i} = x+yi = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\, i$$

şi zicem că numărul imaginar din membrul al doilea e *valoarea raportului* sau a *fracţiei* din membrul intâi.

OBSERVARE. Raportul (21) e *real*, dacă y e *nul*, adică dacă avem

$$a'b - ab' = 0 \qquad \text{sau} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Legile operaţiilor cu numere algebrice se extind şi la operaţiile cu numere complexe. In particular o expresie de forma

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{a+bi}{a'+b'i},$$

care e o *fracţie* cu termeni *imaginari*, se poate *amplificà* sau *simplificà* fără să-şi schimbe valoarea.

De aceea, în practică, pentru a efectuà împărţirea (18) *amplificăm fracţia cu conjugata numitorului ei*:

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{(aa'+bb')+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2} = x+yi.$$

Regăsim astfel pentru x şi y valorile (20).

EXEMPLU.

$$\frac{52-4i}{4-8i}=\frac{(52-4i)(4+8i)}{(4-8i)(4+8i)}=\frac{240+400i}{80}=3+5i.$$

230. Corespondenţa dintre numere şi puncte în plan. Să luăm două axe OX şi OY perpendiculare una pe alta şi cu sensurile pozitive dela O spre X şi dela O spre Y respectiv (*fig.* 35). Alegând şi segmentul *unitate* OU = 1, ştim că la fiecare *punct* de pe axa OX sau OY corespunde câte un *număr real* şi reciproc [149].

Să luăm un punct M în planul XOY. Ducând din M perpendiculara MP pe axa OX, obţinem *două segmente*: $\overrightarrow{OP}$ (cu originea în O) şi $\overrightarrow{PM}$ (cu originea în P). Dacă $x=\overline{OP}$ şi $y=\overline{PM}$ sunt *valorile algebrice* ale acestor segmente ($\overline{OP}$ măsurat pe axa OX, $\overline{PM}$ măsurat pe o axă paralelă şi de acelaş sens cu OY) [25], zicem că numerele x şi y sunt *coordonatele* punctului M; x e *abscisa*, iar y e *ordonata* lui M.

Prin acest procedeu *la orice punct* M *din planul* XOY *corespund două numere algebrice* x *şi* y.

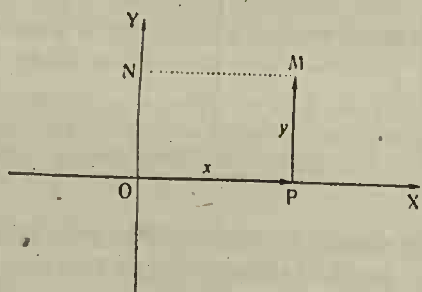


Fig. 35.

Reciproc: *la orice pereche de numere algebrice* (x, y) *corespunde un punct şi unul singur în planul* XOY.

Pentru a determinà acest punct:

1⁰. Luăm pe axa OX un segment $\overline{OP}=x$ (dela O *spre dreapta*, dacă x e *pozitiv*; dela O *spre stânga*, dacă x e *negativ*).

2⁰. Ducem în P perpendiculara pe OX.

3⁰. Luăm pe această perpendiculară un segment $\overline{PM}=y$ (*deasupra* axei OX, dacă y e *pozitiv*; *dedesubtul* axei OX, dacă y e *negativ*).

Punctul M astfel determinat are coordonatele (x, y).

Axele OX şi OY se numesc *axe de coordonate*; punctul O e *originea coordonatelor*. OX e *axă absciselor*; OY *axa ordonatelor*.

Punctele de pe axa OX au *ordonata nulă*; punctele de pe axa OY au *abscisa nulă*; originea O are *amândouă coordonatele nule*.

OBSERVARE. Cu aceste convenţii, dacă un punct M are coordonatele $x = a$, $y = b$, vom puteà zice: *punctul* M sau *punctul* (a, b).

Când reprezentăm un punct prin coordonatele lui, convenim să scriem întâi *abscisa* şi apoi *ordonata* punctului.

EXEMPLU. Punctul $(3, 0)$ e pe axa OX şi la dreapta axei OY; punctul $(0, -2)$ e pe axa OY şi dedesubtul axei OX.

Pe figura 36 avem reprezentate punctele

$$A(1,2), \quad B(-1,3), \quad C(-4,-2).$$

Acest procedeu, de a determinà poziţia *unui punct* în plan prin *două numere*, a fost imaginat de DESCARTES (1); de aceea aceste numere se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului (2).

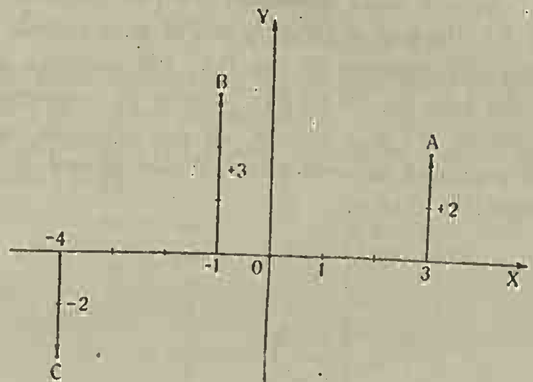


Fig. 36.

231. Numerele complexe reprezentate prin puncte. Convenim să reprezentăm în plan numărul complex $x+yi$ printr'un punct M cu coordonatele x şi y. Astfel: *la orice număr complex corespunde un singur punct în plan* şi *reciproc*.

EXEMPLE. La numărul complex $-1+3i$ corespunde *punctul* B cu coordonatele $x=-1$, $y=3$ (*fig.* 36). La punctele A $(3, 2)$ şi C $(-4, -2)$ corespund *numerele imaginare* $3+2i$ şi $-4-2i$.

Construind triunghiul dreptunghic OPM (*fig.* 35), avem

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + y^2.$$

Prin urmare *distanţa dintre punctul* M şi *origine*

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

reprezintă *modulul* numărului imaginar $x+yi$.

---

(1) DESCARTES, matematician, fizician şi filosof francez (1596—1650).

(2) Uneori coordonatele carteziene ale punctului M se definesc prin segmentele $\overline{NM}$ şi $\overline{PM}$ (*fig.* 35).

OBSERVĂRI. La un număr *real* a sau $a+0i$ corespunde un punct $(a, 0)$ *pe axa* OX; la un număr *imaginar pur* bi sau $0+bi$ corespunde un punct $(0, b)$ *pe axa* OY.

La două numere *imaginare conjugate* $a+bi$, $a-bi$ corespund două puncte (a, b), $(a, -b)$ *simetrice față de axa* OX.

La două numere *simetrice* $a+bi$ și $-a-bi$ corespund două puncte (a, b), $(-a, -b)$ *simetrice față de origine.*

II. — ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA.

232. Definiții. Orice ecuație de gradul al doilea, cu o singură necunoscută [198], se poate reduce la forma

$$(22)\qquad ax^2+bx+c=0,$$

în care x e *necunoscuta*, iar a, b, c sunt *numere cunoscute.*

Expresia ax^2+bx+c e un *trinom de gradul al doilea.* Numerele a, b, c *cu semnele lor* sunt *coeficienții* trinomului: a e coeficientul lui x^2, b e coeficientul lui x, c e termenul cunoscut.

OBSERVARE. Pentru ca ecuația (22) să fie de gradul al doilea, trebue să avem $a \neq 0$. Pentru $a=0$ ecuația se reduce la $bx+c=0$.

EXEMPLU. Ecuația $-2x=5-3x^2$ e de gradul al doilea. Ca să o scriem sub forma (22), *trecem toți termenii în membrul întâi și-i ordonăm după puterile descrescătoare ale lui* x; obținem astfel: $3x^2-2x-5=0$ și coeficienții trinomului sunt $a=3$, $b=-2$, $c=-5$.

A *rezolvà* ecuația (22) înseamnează a găsì *numerele*, care puse în locul lui x, fac ca membrul întâi să aibă valoarea *zero*. Aceste numere sunt *rădăcinile* ecuației.

233. Cazuri particulare. Vom considerà mai întâi cazurile simple, când în ecuația (22) avem $b=0$ sau $c=0$.

1⁰. $b=0$. Ecuația (22) se reduce la forma

$$(23)\qquad ax^2+c=0.$$

De acì deducem

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

și extrăgând rădăcina patrată din ambii membri, găsim, în general, *două* soluții:

$$(24)\qquad x'=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{și} \quad x''=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Discuţie. Dacă numerele a şi c sunt *de semne contrarii* $(ac < 0)$, cantitatea $-\frac{c}{a}$ e *pozitivă* şi rădăcinile date de formulele (24) sunt *reale* şi *simetrice*.

Dacă a şi c au *aceleaşi semne* $(ac > 0)$, cantitatea $-\frac{c}{a}$ e *negativă* şi rădăcinile x' şi x'' sunt *imaginare conjugate*.

Dacă c e *nul*, avem $x' = x'' = 0$.

EXEMPLE. 1⁰. Ecuaţia $9x^2 - 1 = 0$ sau $9x^2 = 1$ are rădăcinile

$$x' = \frac{1}{3},\quad x'' = -\frac{1}{3}\qquad (\textit{reale și simetrice}).$$

2⁰. Ecuaţia $x^2 + 2 = 0$ sau $x^2 = -2$ are rădăcinile

$$x' = i\sqrt{2},\quad x'' = -i\sqrt{2}\qquad (\textit{imaginare conjugate}).$$

2⁰. $c = 0$. Ecuaţia (22) e de forma

$$ax^2 + bx = 0 \quad \text{sau} \quad x(ax + b) = 0. \tag{25}$$

Pentru ca produsul din membrul întâi să fie *nul*, trebue ca *unul din factori să fie nul*. Prin urmare ecuaţia (25) se descompune în

$$x = 0 \quad \text{și} \quad ax + b = 0 \quad \text{sau} \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Obţinem asfel *două* rădăcini *reale*:

$$x' = 0 \quad \text{și} \quad x'' = -\frac{b}{a}. \tag{26}$$

EXEMPLU. Ecuaţia $2x^2 - 3x = 0$ se scrie $x(2x - 3) = 0$ şi se descompune în $x = 0$ şi $2x - 3 = 0$; prin urmare are rădăcinile $x' = 0$, $x'' = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

234. Cazul general: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Avem ecuaţia

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{22}$$

Inmulţind toţi termenii cu $4a$, obţinem ecuaţia *echivalentă*:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0. \tag{27}$$

Primii doi termeni

$$4a^2x^2 + 4abx = (2ax)^2 + 2.2ax.b$$

sunt primii doi termeni din desvălirea patratului $(2ax + b)^2$. Adunând dar b^2 la ambii membri ai ecuaţiei (27), o putem scrie

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$$

sau

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \tag{28}$$

Extrăgând rădăcina patrată din ambii membri, deducem

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

şi rezolvarea ecuaţiei (22) se reduce la rezolvarea a *două ecuaţii de gradul întâi*:

$$2ax+b=+\sqrt{b^2-4ac} \quad \text{şi} \quad 2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac},$$

care ne dau respectiv rădăcinile:

(29) $$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{şi} \quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Regulă. *Rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea*

(22) $$ax^2+bx+c=0$$

sunt numerele date de formula

(LXVIII) $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Această formulă cuprinde amândouă valorile x' şi x'' date de expresiile (29).

Discuţie. In practică putem aveà următoarele *trei* cazuri:

1°, $b^2-4ac>0$. Formula (LXVIII) ne dă pentru ecuaţia (22) *două rădăcini* x' şi x'' *reale* şi *distincte*, de forma

(30) $$x'=\alpha+\beta, \qquad x''=\alpha-\beta,$$

în care

(31) $$\alpha=-\frac{b}{2a}, \qquad \beta=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

OBSERVARE. Dacă în ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ coeficienţii a şi c sunt de semne *contrarii*, avem $b^2-4ac>0$ şi rădăcinile sunt *reale* şi *distincte*.

EXEMPLU. Pentru ecuaţia $2x^2+5x-3=0$, în care avem $a=2$, $b=5$, $c=-3$, $ac<0$, formula (LXVIII) ne dă rădăcinile reale

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.2.(-3)}}{2.2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm7}{4}$$

adică

$$x'=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5; \qquad x''=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3.$$

Verificare. Inlocuind pe x prin $\frac{1}{2}$ sau prin -3 în ecuaţia dată, vedem că primul membru capătă valoarea *zero*:

$$2.\left(\frac{1}{2}\right)^2+5.\frac{1}{2}-3=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-3=0,$$

$$2.(-3)^2+5.(-3)-3=18-15-3=0.$$

2°. $b^2-4ac=0$. Formula (LXVIII) ne dă pentru ecuaţia (22) *o singură rădăcină reală*:

(32) $$x=-\frac{b}{2a}.$$

In acest caz zicem că cele două rădăcini ale ecuației (22) se reduc la una singură sau că ecuația (22) admite *două rădăcini reale* și *egale*

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

EXEMPLU. Pentru ecuația $4x^2 - 12x + 9 = 0$, formula (LXVIII) ne dă

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4.4.9}}{2.4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Găsim dar rădăcinile *reale* și *egale*: $x' = x'' = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

3°. $b^2 - 4ac < 0$. In acest caz putem scrie:

$$b^2 - 4ac = -(4ac - b^2), \qquad 4ac - b^2 > 0$$

și $$\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}, \qquad \left[i = \sqrt{-1}\right].$$

Formula (LXVIII) ne dă pentru ecuația (22) *două rădăcini x' și x'' imaginare conjugate* [228],

$$(33) \qquad x' = \alpha + \beta i, \qquad x'' = \alpha - \beta i,$$

în care

$$(34) \qquad \alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

EXEMPLU. Pentru ecuația $5x^2 + 2x + 1 = 0$, formula (LXVIII) ne dă

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.5.1}}{2.5} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} = \frac{-2 \pm 4i}{10} = \frac{-1 \pm 2i}{5}.$$

Găsim dar două rădăcini *imaginare conjugate*:

$$x' = \frac{-1 + 2i}{5} \quad \text{și} \quad x'' = \frac{-1 - 2i}{5}.$$

OBSERVARE. Felul rădăcinilor ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ depinde de *semnul cantității de sub radical* din formula (LXVIII). Această cantitate $(b^2 - 4ac)$ se numește *discriminantul* ecuației.

REZUMAT. Pentru ecuația de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ putem avea următoarele trei cazuri:

Discriminant	*Rădăcinile x' și x''*	*Rădăcini* reale
$b^2 - 4ac > 0$	*reale și neegale*	2
$b^2 - 4ac = 0$	*reale și egale*	1
$b^2 - 4ac < 0$	*imaginare conjugate*	0

235. Forme particulare. 1°. Când coeficientul lui x e un număr *păreche*, ecuația e de forma

$$(35) \qquad ax^2 + 2b'x + c = 0, \qquad (b = 2b').$$

In acest caz formula (LXVIII), care ne dă

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a},$$

se poate simplifică prin 2 și se reduce la

(LXIX) $$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

EXEMPLU. Aplicând formula (LXIX) la ecuația $5x^2 + 2x + 1 = 0$ găsim:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-5}}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{5} \quad \text{adică} \quad x' = \frac{-1+2i}{5}, \quad x'' = \frac{-1-2i}{5}.$$

2⁰. Când coeficientul lui x^2 este 1, ecuația (22) e de forma

(36) $$x^2 + px + q = 0$$

și formula de rezolvare (LXVIII) se poate scrie:

(LXX) $$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{sau} \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

EXEMPLU. Ecuația $x^2 - 8x + 15 = 0$ fiind de forma (36), formula (LXX) ne dă

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1 \quad \text{adică} \quad x' = 5, \quad x'' = 3.$$

236. **Relații între rădăcini și coeficienți.** 1⁰. *Adunând* cele două valori ale rădăcinilor

(37) $$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{și} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

date de formula (LXVIII) [234], obținem

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

dacă observăm că radicalii dela numărători, fiind *egali* dar *cu semne contrarii*, se reduc.

2⁰. *Inmulțind* valorile rădăcinilor x' și x'' găsim

$$x' . x'' = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

dacă observăm că la numărător avem de înmulțit *suma* a două cantități $\left[-b \text{ și } \sqrt{b^2 - 4ac}\right]$ cu *diferența* lor [116].

REGULĂ. *Suma şi produsul rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea*

(38) $$ax^2 + bx + c = 0$$

sunt date de formulele:

(LXXI) $$x' + x'' = -\frac{b}{a},$$

(LXXII) $$x'x'' = \frac{c}{a}.$$

EXEMPLU. Pentru ecuaţia $2x^2 + 5x - 7 = 0$ avem $a = 2$, $b = 5$, $c = -7$ şi fără să cunoaştem rădăcinile x' şi x'', putem scrie *suma* şi *produsul* lor:

$$x' + x'' = -\frac{5}{2}, \qquad x'.x'' = -\frac{7}{2}.$$

OBSERVARE. Dacă ecuaţia de gradul al doilea e de forma

(39) $$x^2 + px + q = 0,$$

formulele (LXXI) şi (LXXII) ne dau

(40) $$x' + x'' = -p, \qquad x'.x'' = q.$$

PROBLEMĂ. Să se găsească *două numere*, ştiind că *suma* lor e S şi *produsul* lor e P.

Formăm o ecuaţie de gradul al doilea $x^2 + px + q = 0$, care să aibă ca *rădăcini* numerele căutate. Formulele (40) ne arată, că trebue să avem

$$S = -p, \quad P = q \quad \text{sau} \quad p = -S, \quad q = P$$

şi ecuaţia este

(41) $$x^2 - Sx + P = 0.$$

EXEMPLU. Să să găsească două numere m şi n, ştiind că suma lor e 7 şi produsul lor e 12. Aceste numere sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 7x + 12 = 0$. Rezolvând această ecuaţie găsim că numerele căutate sunt 4 şi 3.

237. Semnele rădăcinilor. Când rădăcinile ecuaţiei (38) sunt *reale*, formulele (LXXI) şi LXXII) ne permit, *numai după semnele coeficienţilor* a, b, c, să determinăm *semnul* fiecărei rădăcini.

Ştim că, dacă două numere x' şi x'' au *acelaş semn*, produsul lor e *pozitiv*, iar suma lor are semnul comun. Dacă x' şi x'' sunt de semne *contrarii*, produsul lor e *negativ*, iar suma lor are semnul numărului celui mai mare în valoare absolută [32].

Dacă x' şi x'' sunt rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, observăm că:

1⁰. *Dacă* $ac > 0$, formula (LXXII) ne dă $x'x'' > 0$; *rădăcinile au acelaş semn* şi *semnul lor comun* e semnul sumei $x' + x''$, adică *semnul cantităţii* $-\frac{b}{a}$ [formula (LXXI)].

2⁰. *Dacă* $ac < 0$, avem $x'x'' < 0$; *rădăcinile sunt de semne contrarii* şi *rădăcina cea mai mare* (în valoare absolută) are semnul sumei $x' + x''$, adică *semnul cantităţii* $-\frac{b}{a}$.

EXEMPLU. Ecuaţia $2x^2 + 5x - 7 = 0$, cu $b^2 - 4ac = 81 > 0$, are rădăcinile *reale* şi *neegale*. Coeficienţii 2 şi -7 (a şi c) fiind de semne contrarii, rădăcinile sunt de semne *contrarii*; raportul $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$ fiind negativ, rădăcina cea mai mare, în valoare absolută, e *negativă*.

In adevăr, rezolvând ecuaţia găsim $x' = 1$, $x'' = -\frac{7}{2} = -3{,}5$.

OBSERVARE. In practică putem considera întotdeauna $a > 0$. Dacă a e *negativ*, putem înmulţi toată ecuaţia cu -1.

REZUMAT. *Semnele rădăcinilor ecuaţiei* $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a > 0$.

b	c	$x' + x''$	$x'x''$	x'	x''	*Rădăcina cea mai mare în valoare absolută*
+	+	−	+	−	−	
−	+	+	+	+	+	
+	−	−	−	+	−	negativă
−	−	+	−	+	−	pozitivă

238. Trinomul de gradul al doilea. Dacă scriem

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{42}$$

pentru orice valoare a variabilei x, formula (42) ne dă o valoare şi una singură pentru y. De aceea zicem că y e o *funcţie* de x exprimată în mod *explicit* prin trinomul $ax^2 + bx + c$.

Reciproc: alegând o valoare arbitrară y_0, ne întrebăm dacă există valori pentru x, care să dea trinomului $ax^2 + bx + c$ valoarea y_0. Aceste valori sunt rădăcinile ecuaţiei

$$y_0 = ax^2 + bx + c \quad \text{sau} \quad ax^2 + bx + c - y_0 = 0. \tag{43}$$

Găsim dar 2, 1 sau 0 valori *reale* x, care să satisfacă la condiţia cerută [234], după cum discriminantul ecuaţiei (43) e *pozitiv*, *nul* sau *negativ*.

In particular valorile x' şi x'', pentru care y e *nul*, adică rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, se numesc *rădăcinile trinomului* $ax^2 + bx + c$.

EXEMPLU. Fie $y = x^2 - 8x + 7$. Pentru fiecare valoare a lui x, acest trinom are o valoare y bine determinată. Astfel găsim:

x	-3	-1	$-\frac{2}{3}$	0	1	1,5	2	$\sqrt{15}$	5	7	10
y	40	16	12,78	7	0	$-2{,}75$	-5	$-8{,}98$	-8	0	27

Reciproc. Trinomul x^2-8x+7 ia valoarea 50 pentru x egal cu rădăcinile ecuaţiei $x^2-8x+7=50$ sau $x^2-8x-43=0$. Aceste rădăcini sunt

$$x=4\pm\sqrt{59} \quad \text{sau} \quad x'=11{,}68, \quad x''=-3{,}68.$$

239. Trinomul ca produs. TEOREMĂ. *Orice trinom de gradul al doilea, ax^2+bx+c, se poate scrie ca un produs de trei factori:*

$$\text{(LXXIII)} \qquad ax^2+bx+c \equiv a(x-x')(x-x''),$$

în care a e coeficientul lui x^2, iar x' şi x'' sunt rădăcinile trinomului.

In adevăr, punând pe a în factor comun, avem

$$(44) \qquad ax^2+bx+c \equiv a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

şi dacă x' şi x'' sunt rădăcinile acestui trinom, formulele (LXXI) şi (LXXII) [236] ne dau

$$\frac{b}{a}=-(x'+x''), \qquad \frac{c}{a}=x'x''$$

şi trinomul (44) se poate scrie

$$a[x^2-(x'+x'')x+x'x''] \equiv a[x^2-xx'-xx''+x'x'']$$
$$\equiv a[x(x-x')-x''(x-x')] \equiv a(x-x')(x-x'').$$

EXEMPLU. Trinomul $3x^2-24x+21$, care are rădăcinile $x'=1$, $x''=7$, se poate scrie ca *produs*: $3(x-1)(x-7)$.

240. Alte forme ale trinomului ax^2+bx+c.

Vom consideră cele trei cazuri posibile [234].

1°. Dacă $b^2-4ac>0$, rădăcinile trinomului sunt *reale* şi *neegale*, de forma

$$x'=\alpha+\beta, \quad x''=\alpha-\beta \qquad \left[\alpha=-\frac{b}{2a}, \quad \beta=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

Inlocuind pe x' şi x'' prin aceste valori în produsul (LXXIII) găsim

$$a(x-\alpha-\beta)(x-\alpha+\beta)=a[(x-\alpha)^2-\beta^2]$$

şi trinomul se poate scrie sub forma

$$(45) \qquad ax^2+bx+c \equiv a[(x-\alpha)^2-\beta^2]$$

adică: a înmulţit cu *diferenţa a două patrate.*

2°. Dacă $b^2-4ac=0$, rădăcinile trinomului sunt *reale* şi *egale*:

$$x'=x''=\alpha \qquad \left[\alpha=-\frac{b}{2a}\right].$$

Produsul (LXXIII) se reduce la $a(x-\alpha)^2$ și trinomul se poate scrie sub forma

(46) $$ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)^2$$

adică: a înmulțit cu un *patrat perfect.*

3⁰. Dacă $b^2-4ac<0$, rădăcinile trinomului sunt *imaginare conjugate*

$$x'=\alpha+\beta i,\quad x''=\alpha-\beta i \qquad \left[\alpha=-\frac{b}{2a},\quad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right].$$

Produsul (LXXIII) devine

$$a(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=a[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

și trinomul se poate scrie sub forma

(47) $$ax^2+bx+c\equiv a[(x-\alpha)^2+\beta^2] \qquad (\alpha, \beta \textit{ reale})$$

adică: a înmulțit cu *suma a două patrate.*

EXEMPLE. 1⁰. Trinomul $x^2-8x+15$ are rădăcinile *reale* și *neegale* $x'=3$, $x''=5$; avem dar $x^2-8x+15\equiv(x-3)(x-5)$.

2⁰. Trinomul $-5x^2+2x-1$ are rădăcinile imaginare $x=\frac{1\pm 2i}{5}$; avem dar $-5x^2+2x-1\equiv-5\left[\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{25}\right]$.

241. Semnul trinomului de gradul al doilea. Pentru fiecare valoare reală a lui x, dela $-\infty$ până la $+\infty$, trinomul

(48) $$y=ax^2+bx+c$$

are câte o valoare *reală* bine determinată. Ne întrebăm: când această valoare e *pozitivă* și când e *negativă*?

Dacă trinomul are rădăcinile *reale* și *distincte* x' și x'' $(x'<x'')$, aceste rădăcini împart mulțimea numerelor reale în trei intervale:

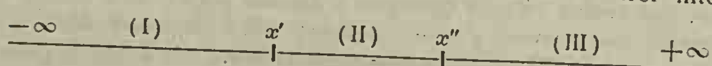


Fig. 37.

intervalul (I) dela $-\infty$ până la x'; intervalul (II) dela x' până la x''; intervalul (III) dela x'' până la $+\infty$ (*fig.* 37).

Când x e în intervalul (II) zicem că e *cuprins între rădăcini*; când x e în intervalul (I) sau (III) zicem că e *în afară de rădăcini.*

TEOREMĂ. 1⁰. *Dacă trinomul* ax^2+bx+c *are rădăcini* reale *și* neegale, *valorile trinomului au semnul lui* a *pentru* x *în afară de rădăcini și semn* contrar *cu* a *pentru* x cuprins *între rădăcini.*

2⁰. *Dacă trinomul* ax^2+bx+c *are rădăcini reale și egale sau rădăcini imaginare, valorile trinomului au totdeauna semnul lui* a.

In adevăr, dacă trinomul are rădăcinile *reale* și *neegale* x' și x'' $(x' < x'')$, avem

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x')(x-x''). \tag{49}$$

Pentru $x < x'$ (intervalul I, *fig.* 37) avem și $x < x''$; factorii $x-x'$ $x-x''$ sunt amândoi *negativi*. Pentru $x > x''$ (intervalul III) avem și $x > x'$; factorii $x-x'$ și $x-x''$ sunt amândoi *pozitivi*. Deci pentru x în afară de rădăcini produsul $(x-x')(x-x'')$ e *pozitiv* și trinomul (49) are *semnul lui* a.

Pentru $x' < x < x''$ (intervalul II) factorul $x-x'$ e *pozitiv*, factorul $x-x''$ e *negativ*. Deci pentru x cuprins între rădăcini produsul $(x-x')(x-x'')$ e *negativ* și trinomul (49) are semnul *contrar cu* a.

Dacă trinomul are rădăcinile *reale* și *egale*, avem $x' = x''$ și

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x')^2. \tag{50}$$

Dacă trinomul are rădăcini *imaginare*, putem scrie

$$ax^2+bx+c \equiv a[(x-\alpha)^2+\beta^2] \qquad (\alpha, \beta \text{ reale}). \tag{51}$$

In amândouă cazurile, pentru orice valoare reală a lui x, factorul al doilea $(x-x')^2$ sau $(x-\alpha)^2+\beta^2$ e *pozitiv* și trinomul (50) sau (51) are *semnul lui* a.

EXEMPLE. 1⁰. Trinomul $y=x^2-x+15$ are rădăcinile *reale* și *neegale* $x'=3$, $x''=5$; coeficientul $a=1$ e *pozitiv*. Prin urmare acest trinom are valori *pozitive* pentru $x<3$ și $x>5$ și valori *negative* pentru x cuprins între 3 și 5.

Astfel pentru $x=0<3$ avem $y=15$ *pozitiv*; pentru $x=10>5$ avem $y=35$ *pozitiv*; pentru $x=4$ $(3<4<5)$ avem $y=-1$ *negativ*.

2⁰. Trinomul $y=-5x^2+2x-1$ are rădăcinile *imaginare*; coeficientul $a=-5$ e *negativ*. Prin urmare valoarea trinomului e *negativă* pentru orice valoare a lui x. Astfel pentru $x=0$ avem $y=-1$ *negativ*; pentru $x=-2$ avem $y=-25$ *negativ*; pentru $x=100$ avem $y=-49801$ *negativ*.

OBSERVARE. Pentru x în valoare absolută destul de mare trinomul ax^2+bx+c are întotdeauna *semnul lui* a.

Această observare, care e un corolar al teoremei precedente, se poate stabili și în mod direct. Avem

$$ax^2+bx+c = x^2\left[a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right]$$

și pentru $|x|$ destul de mare termenii $\frac{b}{x}$ și $\frac{c}{x^2}$ sunt foarte mici; cantitatea din paranteză are semnul lui a, x^2 e pozitiv și semnul produsului e *semnul lui* a.

242. Aplicaţii. Să se studieze, după diferitele valori ale parametrului m, felul rădăcinilor trinomului

(52) $$9x^2 - 6mx + 3m + 4.$$

Coeficientul lui x fiind *păreche*, discriminantul trinomului [234 şi 235, 1] e

(53) $$b'^2 - ac = (3m)^2 - 9(3m+4) = 9(m^2 - 3m - 4).$$

Felul rădăcinilor trinomului (52) depinde de *semnul* discriminantului (53). Dar acest discriminant e şi el un *trinom de gradul al doilea* în m. Ecuaţia $m^2 - 3m - 4 = 0$ având rădăcinile -1 şi 4, trinomul (53) e *pozitiv* pentru $m < -1$ şi $m > 4$ şi *negativ* pentru m cuprins între -1 şi 4. De aci rezultă următorul tablou:

Valorile lui m.	Discriminantul $9(m^2-3m-4)$	Felul rădăcinilor trinomului $9x^2-6mx+3m+4$.
$-\infty \leqq m < -1$	pozitiv	*reale* şi *neegale*
$m = -1$	*nul*	*reale* şi *egale*
$-1 < m < 4$	negativ	*imaginare conjugate*
$m = 4$	*nul*	*reale* şi *egale*
$4 < m \leqq +\infty$	pozitiv	*reale* şi *neegale*

243. Neegalităţi de gradul al doilea. Numim astfel neegalităţile, care se pot reduce la forma

(54) $ax^2 + bx + c > 0$ sau (55) $ax^2 + bx + c < 0.$

Să considerăm neegalitatea (54). *A rezolvà această neegalitate, înseamnă a aflà toate valorile lui x, pentru care trinomul $ax^2 + bx + c$ e pozitiv.*

1⁰. Dacă rădăcinile trinomului (54) sunt *reale* şi *neegale* $x' < x''$, trinomul are semnul lui a pentru $x < x'$ şi $x > x''$ şi semn contrar cu a pentru $x' < x < x''$ [241, 1]. Prin urmare: dacă $a > 0$, neegalitatea (54) e satisfăcută pentru $x < x'$ şi $x > x''$; dacă $a < 0$, neegalitatea (54) e satisfăcută pentru $x' < x < x''$.

2⁰. Dacă rădăcinile trinomului $ax^2 + bx + c$ sunt *reale* şi *egale* sau *imaginare*, trinomul are întotdeauna semnul lui a [241, 2]. Prin urmare, dacă $a > 0$, neegalitatea (54) e satisfăcută pentru *orice valoare a lui* x (¹); dacă $a < 0$, neegalitatea (54) nu e satisfăcută de nici o valoare a lui x.

Neegalitatea (55) se rezolvă şi se discută în mod analog.

EXEMPLU. Să se rezolve neegalitatea $x^2 - 3x - 4 < 0$.

Ecuaţia $x^2 - 3x - 4 = 0$ are rădăcinile $x' = -1$, $x'' = 4$. Coeficientul lui x^2 fiind pozitiv, trinomul $x^2 - 3x - 4$ e *negativ* pentru toate valorile lui x cuprinse între -1 şi 4 şi numai pentru aceste valori.

(¹) Se excepteazǎ numai rădăcina dublă $x = x'$, pentru care trinomul e *nul*.

244. Neegalităţi raţionale. I. Neegalitate întreagă.

REGULĂ. *Ca să rezolvăm o neegalitate de forma*

(56) $$f.g.h > 0,$$

1⁰. *Rezolvăm fiecare dintre ecuaţiile*

$$f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0.$$

2⁰. Aşezăm *în ordine crescătoare* toate rădăcinile *reale* ale acestor ecuaţii: $\alpha < \beta < \gamma < \ldots < \lambda$.

3⁰. Determinăm *semnul fiecărui factor* f, g, h în intervalele

$$-\infty, \alpha; \quad \alpha, \beta; \quad \beta, \gamma; \quad \ldots; \quad \lambda, +\infty.$$

4⁰. Deducem *semnul produsului* fgh în fiecare din aceste intervale şi *soluţiile neegalităţii* (56) *sunt valorile lui* x *din intervalele în care produsul* fgh *e pozitiv.*

EXEMPLU. Să se rezolve neegalitatea

(57) $$(2x^2 - 9x + 10)(x^2 + 1)(x^2 - 2x - 3)(5x - 24) < 0.$$

Factorul $f = 2x^2 - 9x + 10$ are rădăcinile *reale* 2 şi $\frac{5}{2}$; e *negativ* între rădăcini şi *pozitiv* în afară.

Factorul $g = x^2 + 1$ are rădăcinile *imaginare* şi rămâne *pozitiv*.

Factorul $h = x^2 - 2x - 3$ are rădăcinile *reale* -1 şi 3; e *negativ* între rădăcini şi *pozitiv* în afară.

Factorul $k = 5x - 24$ are rădăcina reală $x = \frac{24}{5}$; e *negativ* pentru $x < \frac{24}{5}$ şi *pozitiv* pentru $x > \frac{24}{5}$.

Aşezând aceste cinci rădăcini în ordine crescătoare obţinem şirul:

$$-\infty, \quad -1, \quad 2, \quad \frac{5}{2}, \quad 3, \quad \frac{24}{5}, \quad +\infty,$$

care împarte şirul numerelor reale în 6 intervale. Inscriind într'un tablou *semnul fiecărui factor* f, g, h, k pentru x cuprins în fiecare din aceste intervale, deducem *semnul produsului* $fghk$ după regula semnelor [47].

x	$-\infty$		-1		2		$\frac{5}{2}$		3		$\frac{24}{5}$		$+\infty$
f		+		+	0	−	0	+		+		+	
g		+		+		+		+		+		+	
h		+	0	−		−		−	0	+		+	
k		−		−		−		−		−	0	+	
$fghk$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Neegalitatea (57) e verificată pentru $x < -1$, $2 < x < \frac{5}{2}$ şi $3 < x < \frac{24}{5}$.

II. Neegalitate fracţionară. In mod analog se rezolvă şi o neegalitate *fracţionară*. Trecând toţi termenii în membrul întâi, o reducem la forma

$$(58)\qquad \frac{f}{g} > 0 \quad \text{sau} \quad \frac{f}{g} < 0.$$

OBSERVARE. Aceste neegalităţi sunt respectiv echivalente cu neegalităţile *întregi* $fg > 0$ sau $fg < 0$.

EXEMPLU. Să se rezolve neegalitatea

$$(59)\qquad 2+\frac{x}{x-1} > \frac{2x+9}{x+1}.$$

Trecând toţi termenii în membrul întâi obţinem

$$2+\frac{x}{x-1}-\frac{2x+9}{x+1} > 0 \quad \text{sau} \quad \frac{x^2-6x+7}{x^2-1} > 0.$$

Trinomul x^2-6x+7 are rădăcinile reale $3+\sqrt{2}$ şi $3-\sqrt{2}$; binomul x^2-1 are rădăcinile reale $+1$ şi -1. Aceste patru rădăcini ne dau şirul

$$-\infty,\quad -1,\quad 1,\quad 3-\sqrt{2},\quad 3+\sqrt{2},\quad +\infty$$

şi tabloul:

x	$-\infty$		-1		1		$3-\sqrt{2}$		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-6x+7		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Raportul		$+$	∞	$-$	∞	$+$	0	$-$	0	$+$	

Neegalitatea (59) e satisfăcută pentru $x<-1$, $1<x<3-\sqrt{2}$ şi $x>3+\sqrt{2}$.

245. Ecuaţii obţinute prin ridicare la putere *Când ridicăm la o aceeaş putere ambii membri ai unei ecuaţii, obţinem o nouă ecuaţie, care are toate rădăcinile ecuaţiei vechi, dar care poate aveà şi rădăcini străine.*

Astfel dacă f şi g sunt două expresii algebrice, orice soluţii a ecuaţiei

$$(60)\qquad f=g \quad \text{sau} \quad f-g=0$$

satisfac şi la ecuaţia

$$(61)\qquad f^2=g^2 \quad \text{sau} \quad f^2-g^2=0 \quad \text{sau} \quad (f-g)(f+g)=0.$$

Reciproca însă nu e adevărată. Ecuaţia (61) se descompune în $f-g=0$ şi $f+g=0$ şi rădăcinile ecuaţiei $f+g=0$ sau $f=-g$ satisfac ecuaţia (61) dar *nu satisfac ecuaţia* (60) pentru $g\neq 0$.

EXEMPLU: $2x-3=1$. Ridicând la patrat obţinem

$$4x^2-12x+9=1 \quad \text{sau} \quad 4x^2-12x+8=0,$$

ecuaţie, care are rădăcinile $x=1$ şi $x=2$. Dintre acestea *numai* $x=2$ *satisface la ecuaţia dată*; $x=1$ e o rădăcină *străină* introdusă prin ridicare la patrat.

246. Ecuaţii iraţionale. Numim astfel o ecuaţie, care conţine necunoscuta sub *radicali*. Pentru a o rezolvà o aducem la forma *raţională*, făcând *să dispară radicalii* prin ridicări la putere convenabil efectuate.

Vom considerà câteva cazuri elementare:

Cazul I. *Ecuaţia conţine un singur radical.* In acest caz:

1°. *Izolăm radicalul*, adică lăsăm termenul cu radicalul într'un membru al ecuaţiei, iar pe toţi ceilalţi termeni îi trecem în celălalt membru.

2°. *Ridicăm ambii membri ai ecuaţiei la puterea egală cu indicele radicalului.* Astfel ecuaţia devine *raţională*.

3°. *Rezolvăm ecuaţia raţională obţinută.*

4°. Cercetăm, *care* dintre soluţiile găsite *satisfac ecuaţia iraţională* dată.

EXEMPLU: $3x+\sqrt{x-2}=6$.

Izolând radicalul avem $\sqrt{x-2}=6-3x$.

Ridicând la patrat ambii membri, deducem ecuaţia *raţională*

$$x-2=36-36x+9x^2 \quad \text{sau} \quad 9x^2-37x+38=0,$$

care are *două* rădăcini: $x=2$ şi $x=\frac{19}{9}$.

Dintre acestea, *numai* $x=2$ *satisface la ecuaţia iraţională dată*; cealaltă valoare $\frac{19}{9}$ e o rădăcină *străină* introdusă prin ridicarea la patrat.

Cazul II. *Ecuaţia conţine două rădăcini patrate.* In acest caz:

1°. *Izolăm un radical* şi ridicăm ambii membri ai ecuaţiei la puterea arătată de indicele acestui radical. Astfel radicalul izolat *dispare*.

2°. *Izolăm şi pe al doilea radical* şi printr'o operaţie analoagă *facem să dispară şi acest radical.*

EXEMPLU: $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-6}=3$.

Izolând primul radical găsim $\sqrt{x-3}=3-\sqrt{x-6}$.

Ridicând la patrat avem: $x-3=9-6\sqrt{x-6}+x-6$.

Izolând şi termenul cu al doilea radical, găsim

$$6\sqrt{x-6}=6 \quad \text{sau} \quad \sqrt{x-6}=1$$

şi ridicând la patrat, obţinem ecuaţia *raţională* $x-6=1$, care are rădăcina $x=7$. Se verifică uşor că $x=7$ satisface ecuaţia *iraţională* dată.

Cazul III. *Ecuaţia conţine mai mulţi radicali.* Problema e mult mai complicată şi ca să facem să dispară radicalii, trebue să întrebuinţăm *metode speciale* pentru fiecare caz.

EXEMPLU: $\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{u-1}+\sqrt[3]{u-3}=0$ se scrie $\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{u-1}=-\sqrt[3]{u-3}$.

Ridicând ambii membri la cub, obţinem

$$u+3\sqrt[3]{u^2(u-1)}+3\sqrt[3]{u(u-1)^2}+u-1=-u+3$$

sau

$$u+3\sqrt[3]{u(u-1)}\left[\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{u-1}\right]+u-1=-u+3$$

şi înlocuind pe $\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{u-1}$ prin cantitatea egală $-\sqrt[3]{u-3}$, ajungem la ecuaţia

$$3\sqrt[3]{u(u-1)(u-3)} = 3u-4,$$

care conţine un singur radical (cazul I).

III. — ECUAŢII DE GRAD SUPERIOR.

247. Ecuaţia bipatrată. Numim ecuaţie *bipatrată* o ecuaţie de gradul al patrulea de forma

$$ax^4+bx^2+c=0. \tag{62}$$

Punând $x^2=y$, obţinem o ecuaţie de gradul al doilea în y:

$$ay^2+by+c=0, \tag{63}$$

care se numeşte *rezolvanta* ecuaţiei bipatrate (62).

Regulă. Ca să rezolvăm o ecuaţie bipatrată:

1⁰. Calculăm rădăcinile y' şi y'' ale *rezolvantei.*

2⁰. Inlocuim în $x^2=y$ pe y succesiv prin y' şi y'' şi formăm ecuaţiile $x^2=y'$ şi $x^2=y''$.

3⁰. Rezolvăm aceste două ecuaţii şi rădăcinile lor

$$x_1=+\sqrt{y'},\quad x_2=-\sqrt{y'},\quad x_3=+\sqrt{y''},\quad x_4=-\sqrt{y''}$$

sunt rădăcinile ecuaţiei bipatrate.

Formulă. Rădăcinile rezolvantei (63) fiind

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

toate rădăcinile ecuaţiei bipatrate sunt cuprinse în formula:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}. \tag{LXXIV}$$

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia $x^4-2x^2-3=0$. Punând $x^2=y$, obţinem rezolvanta $y^2-2y-3=0$, care are rădăcinile $y'=3$ şi $y''=-1$.

Rezolvând apoi ecuaţiile $x^2=3$ şi $x^2=-1$, obţinem rădăcinile ecuaţiei bipatrate: $x_1=+\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=i$, $x_4=-i$.

Discuţie. Cazul I: $b^2-4ac>0$. Rădăcinile y' şi y'' ale rezolvantei sunt *reale* şi *neegale.*

1⁰. Dacă $\frac{c}{a}>0$, valorile y' şi y'' sunt *de acelaş semn* [237].

Dacă $\frac{b}{a}<0$, y' şi y'' sunt *pozitive* şi ecuaţia bipatrată are 4 *rădăcini reale* de forma $\pm\alpha$, $\pm\beta$. Dacă $\frac{b}{a}>0$, y' şi y'' sunt *negative* şi ecuaţia bipatrată are 4 rădăcini *imaginare pure* de forma $\pm\alpha i$, $\pm\beta i$.

2⁰. Dacă $\frac{c}{a} < 0$, valorile y' și y'' sunt *de semne contrarii*. Ecuația bipatrată are 2 rădăcini *reale simetrice* (de forma $\pm\alpha$) și 2 rădăcini *imaginare pure simetrice* (de forma $\pm\beta i$).

3⁰. Dacă $\frac{c}{a} = 0$, b e *diferit de zero* și *una dintre rădăcinile rezolvantei e nulă*. Dacă $\frac{b}{a} < 0$, cealaltă rădăcină a rezolvantei e *pozitivă* și ecuația bipatrată are 1 rădăcină *nulă* dublă și 2 rădăcini *reale* simetrice; dacă $\frac{b}{a} > 0$, cealaltă rădăcină a rezolvantei e *negativă* și ecuația bipatrată are 1 rădăcină *nulă* dublă și 2 rădăcini *imaginare pure* simetrice.

Cazul II: $b^2 - 4ac = 0$. Rădăcinile y' și y'' ale rezolvantei sunt *reale* și *egale* ($y' = y''$). In acest caz trebue să avem $ac > 0$ sau $\frac{c}{a} > 0$.

Dacă $\frac{b}{a} < 0$, y' e *pozitiv* și ecuația bipatrată are 2 rădăcini *reale* simetrice *duble*; dacă $\frac{b}{a} > 0$, y' e *negativ* și ecuația bipatrată are 2 rădăcini *imaginare pure* simetrice *duble*.

Dacă $\frac{b}{a} = 0$, y' e *nul* ecuația se reduce la $ax^4 = 0$ și are o singură rădăcină $x = 0$ *de ordinul* 4 de multiplicitate (*cuadruplă*).

Cazul III: $b^2 - 4ac < 0$. Rădăcinile rezolvantei sunt *imaginare*; ecuația bipatrată are 4 *rădăcini imaginare* conjugate două câte două.

248. Descompunerea trinomului bipatrat în factori.

Un polinom de forma

$$t = ax^4 + bx^2 + c \tag{64}$$

e un *trinom bipatrat*. Făcând substituția $x^2 = y$ obținem un trinom de gradul al doilea în y: $ay^2 + by + c$.

Dacă y' și y'' sunt rădăcinile ecuației $ay^2 + by + c = 0$, avem

$$ay^2 + by + c \equiv a(y - y')(y - y'')$$

și reînlocuind pe y prin x^2, găsim identitatea

$$t \equiv ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x^2 - y')(x^2 - y'') \tag{65}$$

sau

$$t \equiv a(x - \sqrt{y'})(x + \sqrt{y'})(x - \sqrt{y''})(x + \sqrt{y''}). \tag{66}$$

TEOREMĂ. *Orice trinom bipatrat se poate scrie sub formă de produs de doi factori de gradul al doilea* sau de *patru factori de gradul întâi*.

OBSERVARE. In identitățile (65) sau (66) y' și y'', $\sqrt{y'}$ și $\sqrt{y''}$ pot fi numere *reale* sau *imaginare*.

249. Factori reali. Iată cum putem să descompunem un trinom bipatrat într'un produs de factori de gradul *întâi* sau *al doilea* cu coeficienţi *reali.*

Să considerăm:

Ecuaţia bipatrată	*Substituţia*	*Trinomul bipatrat*
$ax^4 + bx^2 + c = 0$	$x^2 = y$	$ax^4 + bx^2 + c$
Ecuaţia rezolvantă	*Rădăcinile rezolvantei*	*Trinomul rezolvantei*
$ay^2 + by + c = 0$	y' şi y''	$ay^2 + by + c.$

DISCUŢIE. Cazul I: Rădăcinile y', y'' *reale* şi *neegale.* Avem

$$ay^2 + by + c = a(y - y')(y - y'').$$

1⁰. $y' > 0$, $y'' > 0$. Punând $y' = \alpha^2$, $y'' = \beta^2$ (α, β reale), trinomul bipatrat $t = ax^4 + bx^2 + c$ se poate scrie

$$t = a(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2) = a(x - \alpha)(x + \alpha)(x - \beta)(x + \beta),$$

cu toţi factorii cu coeficienţi *reali.*

2⁰. $y'y'' < 0$, de exemplu $y' > 0$, $y'' < 0$. Punând $y' = \alpha^2$, $y'' = -\beta^2$ avem

$$t = a(x^2 - \alpha^2)(x^2 + \beta^2) = a(x - \alpha)(x + \alpha)(x^2 + \beta^2).$$

3⁰. $y' < 0$, $y'' < 0$. Punând $y' = -\alpha^2$ $y'' = -\beta^2$, găsim

$$t = a(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2).$$

Cazul II: y', y'' *reale* şi *egale.* Trinomul rezolvantei se poate scrie

$$ay^2 + by + c = a(y - y')^2.$$

1⁰. Pentru $y' > 0$, $y' = \alpha^2$, avem $t = a(x^2 - \alpha^2)^2 = a(x - \alpha)^2(x + \alpha)^2$.
2⁰. Pentru $y' < 0$, $y' = -\alpha$, avem $t = a(x^2 + \alpha^2)^2$.
3⁰. Pentru $y' = 0$ avem $t = ax^4$.

Cazul III: y', y'' *imaginare.* In acest caz avem $b^2 - 4ac < 0$ şi $ac > 0$. Punând $\frac{c}{a} = \lambda^2$ (λ real) putem scrie

$$t = a\left[x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \lambda^2\right]$$

sau, adunând şi scăzând pe $2\lambda x^2$,

$$t = a\left[x^4 + \underline{2\lambda x^2} + \lambda^2 + \frac{b}{a}x^2 - \underline{2\lambda x^2}\right]$$
$$= a\left[(x^2 + \lambda)^2 - \left(2\lambda - \frac{b}{a}\right)x^2\right].$$

Pe de altă parte $b^2 < 4ac$ ne dă

$$\frac{b^2}{a^2} < 4\frac{c}{a} \quad \text{sau} \quad \frac{b^2}{a^2} < 4\lambda^2 \quad \text{de unde} \quad \frac{b}{a} < 2\lambda \quad \text{sau} \quad 2\lambda - \frac{b}{a} > 0.$$

Punând dar $2\lambda - \frac{b}{a} = \mu^2$ (μ real), găsim

$$t = a[(x^2 + \lambda)^2 - \mu^2 x^2] = a(x^2 + \lambda + \mu x)(x^2 + \lambda - \mu x)$$

şi trinomul bipatrat e încă descompus într'un produs de doi factori de gradul al doilea cu coeficienţi *reali.*

EXEMPLE. 1⁰. x^4-14x^2+45. Rezolvanta $y^2-14y+45=0$ are rădăcinile $y'=9$, $y''=5$. Deci

$$x^4-14x^2+45=(x^2-9)(x^2-5)=(x-3)(x+3)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}).$$

2⁰. $9x^4+5x^2-4$. Rădăcinile rezolvantei sunt $y'=\frac{4}{9}$, $y''=-1$. Deci

$$9x^4+5x^2-4=9\left(x^2-\frac{4}{9}\right)(x^2+1)=(3x-2)(3x+2)(x^2+1).$$

3⁰. $2x^4+7x^2+3$. Rezolvanta are rădăcinile $y'=-3$, $y''=-\frac{1}{2}$. Deci

$$2x^4+7x^2+3=2(x^2+3)\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=(x^2+3)(2x^2+1).$$

4⁰. $9x^4-30x^2+25$. Rezolvanta are o rădăcină *dublă*: $y'=\frac{5}{3}$. Deci

$$9x^4-30x^2+25=9\left(x^2-\frac{5}{3}\right)^2=(9x^2-5)^2.$$

5⁰. x^4+1. Rezolvanta $y^2+1=0$ are rădăcinile *imaginare*: $y'=i$, $y''=-i$. Scriem

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2$$

şi găsim produsul

$$x^4+1=(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2}).$$

OBSERVARE. Această descompunere reduce rezolvarea unei ecuaţii *bipatrate* la rezolvarea unor ecuaţii *de gradul întâi* sau *de gradul al doilea*.

250. Ecuaţii reciproce. O ecuaţie întreagă $f(x)=0$, în care polinomul $f(x)$ e ordonat, se zice *reciprocă* în două cazuri:

1⁰. *Dacă termenii extremi şi termenii egal depărtaţi de extremi au coeficienţii egali şi de acelaş semn.*

2⁰. *Dacă termenii extremi şi termenii egal depărtaţi de extremi au coeficienţii egali şi de semne contrare.*

OBSERVARE. In cazul al doilea, dacă polinomul $f(x)$, presupus *complect*, e de grad *păreche* (adică are un număr nepăreche de termeni), termenul dela mijloc trebue să fie *nul*.

EXEMPLE. Ecuaţiile $5x^3-7x^2-7x+5=0$ şi $x^4-8x^3+8x-1=0$ sunt ecuaţii *reciproce*; prima e de forma 1⁰ şi cealaltă e de forma 2⁰.

1⁰. Pentru a rezolvà ecuaţiile reciproce de gradul *întâi* şi *al doilea* n'avem nevoe de metode speciale.

2⁰. O ecuaţie reciprocă de gradul *al treilea* e de forma

$$ax^3+bx^2+bx+a=0 \tag{67}$$

sau

$$ax^3+bx^2-bx-a=0. \tag{68}$$

Să considerăm prima ecuaţie. Grupând, câte doi, termenii cu coeficienţi egali, obţinem

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0$$

şi fiindcă avem $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, ecuaţia se poate scrie

$$(x+1)[ax^2-(a-b)x+a]=0,$$

şi rezolvarea ei se reduce la rezolvarea ecuaţiilor

$$x+1=0 \quad \text{şi} \quad ax^2-(a-b)x+a=0.$$

Printr'o transformare analoagă ecuaţia (68) se poate scrie

$$(x-1)[ax^2+(a+b)x+a]=0$$

şi rezolvarea ei se reduce la rezolvarea ecuaţiilor

$$x-1=0 \quad \text{şi} \quad ax^2+(a+b)x+a=0.$$

EXEMPLU: $3x^3-13x^2+13x-3=0$ e o ecuaţie *reciprocă* de forma (68). Grupând termenii cu coeficienţi egali (în valoare absolută), o scriem

$$3(x^3-1)-13x(x-1)=0 \quad \text{sau} \quad (x-1)(3x^2-10x+3)=0$$

şi ecuaţia se descompune în $x-1=0$ şi $3x^2-10x+3=0$, care ne dau rădăcinile $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{3}$.

3°. O ecuaţie reciprocă de gradul *al patrulea* e de forma

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \tag{69}$$

sau

$$ax^4+bx^3-bx-a=0, \tag{70}$$

deoarece, în cazul al doilea, termenul dela mijloc trebue să lipsească.

Grupând câte doi termenii egal depărtaţi de extremi, ecuaţia (69) se scrie

$$a(x^4+1)+b(x^3+x)+cx^2=0$$

şi, împărţind ecuaţia cu x^2, deducem

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0. \tag{71}$$

Punând apoi

$$x+\frac{1}{x}=y \tag{72}$$

obţinem

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2 \quad \text{sau} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

şi ecuaţia (71) se transformă într'o ecuaţie de gradul al doilea în y

$$a(y^2-2)+by+c=0 \quad \text{sau} \quad ay^2+by+c-2a=0, \tag{73}$$

care se numeşte *rezolvanta* ecuaţiei reciproce (69).

Inlocuind în relaţia

$$x+\frac{1}{x}=y \quad \text{sau} \quad x^2-xy+1=0$$

pe y, succesiv, prin rădăcinile y' şi y'' ale ecuaţiei rezolvante (73), obţinem două ecuaţii de gradul al doilea

$$(74) \qquad x^2-xy'+1=0 \quad \text{şi} \quad x^2-xy''+1=0,$$

care, rezolvate, ne dau cele patru rădăcini ale ecuaţiei reciproce (69).

OBSERVARE. Fiindcă produsul rădăcinilor fiecărei ecuaţii (74) e egal cu 1, rădăcinile ecuaţiei reciproce sunt de forma: $x_1=\alpha$, $x_2=\frac{1}{\alpha}$; $x_3=\beta$, $x_4=\frac{1}{\beta}$.

Pentru a rezolvà ecuaţia (70), o scriem

$$a(x^4-1)+bx(x^2-1)=0$$

sau, punând x^2-1 ca factor comun, găsim

$$(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0$$

şi problema se reduce la rezolvarea a două ecuaţii de gradul al doilea:

$$x^2-1=0 \quad \text{şi} \quad ax^2+bx+a=0.$$

EXEMPLU: $x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$.

Ecuaţia e *reciprocă* de forma (69). Grupând termenii egal depărtaţi de extremi

$$x^4+1-3(x^3+1)-2x^2=0$$

şi împărţind cu x^2, ecuaţia se scrie

$$x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0.$$

Punând apoi $x+\frac{1}{x}=y$ şi $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, obţinem *rezolvanta*:

$$y^2-3y-4=0,$$

care are rădăcinile $y'=4$ şi $y''=-1$.

Inlocuind pe y prin aceste valori în $x^2-xy+1=0$, obţinem ecuaţiile

$$x^2-4x+1=0 \quad \text{şi} \quad x^2+x+1=0,$$

care ne dau rădăcinile ecuaţiei reciproce:

$$x_1=2+\sqrt{3}, \quad x_2=2-\sqrt{3}; \quad x_3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

OBSERVARE. Rădăcinile, două câte două, sunt *una inversa celeilalte*, fiindcă avem

$$x_2=2-\sqrt{3}=\frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=\frac{4-3}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{x_1},$$

$$x_4=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{2(-1+i\sqrt{3})}=\frac{2}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{1}{x_3}.$$

4°. O ecuaţie reciprocă de gradul *al cincilea* e de forma

(75) $$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$$

sau

(76) $$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0.$$

Ecuaţia (75) admiţând rădăcina $x=-1$, membrul întâi al ei e divizibil prin $x+1$; prin urmare ecuaţia se poate scrie

$$(x+1)[ax^4-(a-b)x^3+(a-b+c)x^2-(a-b)x+a]=0$$

şi se descompune în $x+1=0$ şi

$$ax^4-(a-b)x^3+(a-b+c)x^2-(a-b)x+a=0.$$

Reducem astfel rezolvarea ecuaţiei (75) la rezolvarea unei ecuaţii reciproce de gradul *al patrulea.*

In mod analog se rezolvă şi ecuaţia (76), observând că polinomul din membrul întâi se anulează pentru $x=1$, deci e divizibil prin $x-1$.

251. Ecuaţii binome. Se numeşte *ecuaţie binomă* o ecuaţie de forma

(77) $$Ax^p+Bx^q=0,$$

în care membrul întâi e un *binom* întreg în x.

Dacă $p>q$, de exemplu $p=q+m$, punând x^q în factor, ecuaţia se poate scrie

(78) $$x^q(Ax^m+B)=0$$

şi se descompune în $x^q=0$ şi

(79) $$Ax^m+B=0 \quad \text{sau} \quad x^m=-\frac{B}{A}.$$

Ecuaţia $x^q=0$ ne dă q rădăcini *nule.* Celelalte rădăcini ale ecuaţiei (77) sunt date de ecuaţia (79), care e de forma

(80) $$x^m=a \qquad \left[a=-\frac{B}{A}\right].$$

Rădăcinile ecuaţiei binome (80) sunt rădăcinile a m-a *algebrice* (¹) ale numărului a, adică valorile algebrice, care ridicate la puterea m ne dau pe a. Ecuaţia fiind de grad m, admite m rădăcini [182]:

Există dar m numere algebrice (reale sau imaginare), *care se pot reprezentà prin simbolul* $\sqrt[m]{a}$.

(¹) Aci se confundă cele două înţelesuri ale cuvântului *rădăcină*: 1°. r ă d ă c i n a sau soluţia unei ecuaţii şi 2°. r ă d ă c i n a dela extragerea rădăcinii dintr'un număr.

OBSERVARE. Dacă a e *real* şi *pozitiv*, există un număr şi numai *unul* real şi pozitiv $a=\sqrt[m]{a}$, care se numeşte rădăcina a m-a *aritmetică* a lui a [122].

Pentru rădăcinile *algebrice* ale unui număr *real* a, avem următoarea

REGULĂ. 1⁰. Dacă m e *nepăreche*, ecuaţia $x^m=a$ admite *o rădăcină reală* şi *numai una*; ea e *de acelaş semn cu* a. Celelalte $m-1$ rădăcini sunt imaginare.

2⁰. Dacă m e *păreche* şi a *pozitiv*, ecuaţia $x^m=a$ admite *două rădăcini reale* simetrice: $x_1=+\sqrt[m]{a}$ (rădăcina aritmetică) şi $x_2=-\sqrt[m]{a}$; celelalte $m-2$ rădăcini sunt imaginare.

3⁰. Dacă m e *păreche* şi a *negativ*, ecuaţia $x^m=a$ *nu admite nicio rădăcină reală*; toate rădăcinile ei sunt imaginare.

EXEMPLE. 1⁰. $x^4-9=0$ sau $x^4=9$. Rădăcina *aritmetică* e $x_1=\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$. Rădăcinile *algebrice reale* sunt $x_1=+\sqrt{3}$ şi $x_2=-\sqrt{3}$; celelalte două rădăcini sunt *imaginare*.

2⁰. $32x^5-243=0$ sau $x^5=\frac{243}{32}$. Rădăcina aritmetică adică $x_1=\sqrt[5]{\frac{243}{32}}=\frac{3}{2}$ e singura rădăcină *reală*; celelalte 4 rădăcini sunt imaginare.

3⁰. $x^5+243=0$ sau $x^5=-243$ are o singură rădăcină *reală* $x_1=\sqrt[5]{-243}=-3$; celelalte 4 rădăcini sunt imaginare.

4⁰. $3x^8+5=0$ sau $x^8=-\frac{5}{3}$ are toate rădăcinile *imaginare*.

Rezolvarea complectă. Pentru a găsi *toate* rădăcinile, reale şi imaginare, ale unei ecuaţii binome de forma

$$x^m=a, \tag{80}$$

căutăm să descompunem binomul x^m-a într'un produs de factori, cari, egalaţi cu 0, să ne dea ecuaţii pe care să le putem rezolvà.

Dacă cunoaştem o rădăcină $x=\alpha$ a ecuaţiei (80), avem $\alpha^m=a$ şi punând

$$x=\alpha y, \tag{81}$$

ecuaţia binomă devine $\alpha^m y^m=\alpha^m$ sau

$$y^m=1. \tag{82}$$

Astfel rezolvarea ecuaţiei (80) se reduce la rezolvarea ecuaţiei (82) şi la înmulţirea (81).

REGULĂ. *Dacă* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *sunt rădăcinile a m-a ale unităţii* (rădăcinile ecuaţiei $y^m=1$) *şi dacă* α *e o rădăcină a m-a a numărului a, toate rădăcinile a m-a ale numărului a* (adică *toate rădăcinile ecuaţiei binome* $x^m=a$) *sunt:*

$$x_1=\alpha y_1;\quad x_2=\alpha y_2,\quad \ldots,\quad x_m=\alpha y_m.$$

EXEMPLU. Ca să rezolvăm ecuaţia binomă $x^3+27=0$ sau $x^3=-27$, *care are rădăcina* $x_1=-3$, e deajuns să rezolvăm ecuaţia $y^3=1$ sau $y^3-1=0$, adică să calculăm *rădăcinile cubice ale unităţii.*

Fiindcă avem $y^3-1\equiv(y-1)(y^2+y+1)$, ecuaţia $y^3-1=0$ se descompune în $y-1=0$ şi $y^2+y+1=0$ şi ne dă rădăcinile

$$y_1=1, \quad y_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad y_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Inmulţind cu -3 fiecare din aceste numere, găsim

$$x_1=-3, \quad x_2=\frac{3-3i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3=\frac{3+3i\sqrt{3}}{2},$$

care sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3+27=0$.

Rădăcinile unităţii se pot calculà uşor în următoarele cazuri:

1⁰. $x^3-1=0$. Binomul x^3-1 se anulează pentru $x=1$, deci e *divizibil* prin $x-1$ şi efectuând împărţirea găsim

$$x^3-1\equiv(x-1)(x^2+x+1);$$

prin urmare ecuaţia $x^3-1=0$ are o rădăcină reală $x_1=1$ şi două rădăcini imaginare conjugate, date de ecuaţia $x^2+x+1=0$.

2⁰. $x^3+1=0$. In mod analog găsim

$$x^3+1\equiv(x+1)(x^2-x+1).$$

Ecuaţia are o rădăcină reală $x_1=-1$ şi două rădăcini imaginare conjugate, date de ecuaţia $x^2-x+1=0$.

3⁰. $x^4-1=0$. Avem $x^4-1\equiv(x^2-1)(x^2+1)$.

Ecuaţia are două rădăcini reale $+1$ şi -1 date de $x^2-1=0$ şi două rădăcini imaginare $+i$ şi $-i$ date de $x^2+1=0$.

4⁰. $x^4+1=0$. Putem scrie

$$x^4+1\equiv x^4+2x^2+1-2x^2\equiv(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2$$
$$\equiv(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

Ecuaţia are 4 rădăcini imaginare, conjugate două câte două, date de ecuaţiile

$$x^2+x\sqrt{2}+1=0 \quad \text{şi} \quad x^2-x\sqrt{2}+1=0.$$

5⁰. $x^5-1=0$. Avem $x^5-1\equiv(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Ecuaţia are 1 rădăcină reală $x_1=1$ şi 4 rădăcini imaginare, care se obţin rezolvând ecuaţia *reciprocă:* $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ [250, 3].

6⁰. $x^5+1=0$. Avem $x^5+1\equiv(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$.

Ecuaţia are 1 rădăcină reală $x_1=-1$ şi 4 rădăcini imaginare, care se obţin rezolvând ecuaţia *reciprocă:* $x^4-x^3+x^2-x+1=0$.

7⁰. In acelaş fel observând că avem identităţile:

$$x^6-1\equiv(x^3-1)(x^3+1),\quad x^8-1\equiv(x^4-1)(x^4+1),$$
$$x^{10}-1\equiv(x^5-1)(x^5+1),$$

rezolvările complecte ale ecuaţiilor binome

$$x^6-1=0,\quad x^8-1=0,\quad x^{10}-1=0$$

se reduc la rezolvările unor ecuaţii binome din cazurile precedente.

252. Ecuaţii trinome. Se numeşte ecuaţie *trinomă* o ecuaţie de forma

(83) $$ax^p+bx^q+cx^r=0,$$

în care membrul întâi e un *trinom*, pe care-l presupunem ordonat după puterile descrescătoare ale lui x.

Dacă avem $p-q=q-r=n$, deducem

$$q=r+n,\quad p=q+n=r+2n$$

şi ecuaţia trinomă (83) se poate scrie

(84) $$ax^{r+2n}+bx^{r+n}+cx^r=0$$

sau

$$x^r(ax^{2n}+bx^n+c)=0$$

şi se descompune în $x^r=0$ şi

(85) $$ax^{2n}+bx^n+c=0.$$

Prin urmare ecuaţia (84) are r rădăcini *nule* şi alte $2n$ rădăcini, care se obţin rezolvând ecuaţia (85).

Punând

(86) $$x^n=y\quad\text{deci}\quad x^{2n}=y^2$$

ecuaţia (85) devine o ecuaţie *de gradul al doilea* în y

(87) $$ay^2+by+c=0$$

şi, pentru fiecare rădăcină y' şi y'' a ecuaţiei (87), ecuaţiile binome $x^n=y'$ şi $x^n=y''$ ne dau câte n rădăcini pentru ecuaţia trinomă (85).

Regulă. *Ca să rezolvăm o ecuaţie trinomă de forma*

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

1⁰. *Punând* $x^n=y$ *formăm ecuaţia de gradul al doilea*

$$ay^2+by+c=0;$$

2°. *Căutăm soluţiile y' şi y'' ale acestei ecuaţii;*

3°. *Rezolvăm ecuaţiile binome $x^n = y'$, $x^n = y''$.*

EXEMPLU: $x^7 - 19x^4 - 216x = 0$. Punând pe x în factor comun, ecuaţia se scrie $x(x^6 - 19x^3 - 216) = 0$ şi se descompune în $x = 0$ şi $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$.

Făcând substituţia $x^3 = y$, ultima ecuaţie devine $y^2 - 19y - 216 = 0$ şi admite rădăcinile $y' = 27$, $y'' = -8$. Rămâne dar să rezolvăm ecuaţiile binome

$$(\alpha) \quad x^3 = 27, \qquad (\beta) \quad x^3 = -8.$$

Rădăcinile cubice ale *unităţii* fiind

$$(\gamma) \qquad 1, \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{şi} \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2};$$

o rădăcină a ecuaţiei (α) fiind $\sqrt[3]{27} = 3$; o rădăcină a ecuaţiei (β) fiind $\sqrt[3]{-8} = -2$; rădăcinile ecuaţiilor binome (α) şi (β) sunt numerele (γ) înmulţite respectiv cu 3 şi -2. Prin urmare rădăcinile ecuaţiei *trinome* date sunt

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3, \quad x_3 = \frac{-3+3i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3-3i\sqrt{3}}{2};$$

$$x_5 = -2, \quad x_6 = 1 - i\sqrt{3}, \quad x_7 = 1 + i\sqrt{3}.$$

IV. — SISTEME DE ECUAŢII NELINIARE.

253. O ecuaţie cu mai multe necunoscute. Să considerăm o ecuaţie de gradul al doilea cu *două* necunoscute x şi y, de forma cea mai generală

$$(88) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Membrul întâi e un *polinom* de gradul *al doilea* în x şi y. Valoarea numerică a lui depinde de valorile, pe care le dăm variabilelor x şi y. Dacă pentru $x = x_0$ şi $y = y_0$ membrul întâi al ecuaţiei (88) are valoarea *zero*, zicem că numerele x_0 şi y_0 formează *un sistem de soluţii* al acestei ecuaţii.

REGULĂ. Ca să găsim *un sistem de soluţii* pentru o ecuaţie cu *două* necunoscute, procedăm în modul următor:

1°. *Luăm pentru x o valoare arbitrară x_0.*

2°. *Inlocuim în ecuaţie, pe x prin x_0* şi obţinem o ecuaţie *cu o singură necunoscută y.*

3°. *Rezolvăm această ecuaţie.*

Dacă ecuaţia e de gradul al doilea în y, găsim, în general, *două* rădăcini y' şi y'' (reale sau imaginare). Perechile de valori x_0, y' şi x_0, y'', astfel obţinute, sunt două sisteme de soluţii pentru ecuaţia dată.

In particular, ecuaţia (88) pentru $x = x_0$ devine

$$(89) \qquad cy^2 + (bx_0 + e)y + ax_0^2 + dx_0 + f = 0$$

şi formula

$$(90) \qquad y = \frac{1}{c}\left[-(bx_0 + e) \pm \sqrt{(bx_0 + c)^2 - 4c(ax_0^2 + dx_0 + f)}\right]$$

ne dă pentru y două valori corespunzătoare y'_0 şi y''_0.

Inlocuind pe x_0 succesiv prin $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ obţinem astfel pentru ecuaţia (88) *o infinitate de sisteme de soluţii:*

$$x_0, y'_0; \quad x_0, y''_0; \quad x_1, y'_1; \quad x_1, y''_1; \quad ...; \quad x_n, y'_n; \quad x_n, y''_n; \quad ...$$

OBSERVARE. Dacă ecuaţia (80) are coeficienţii *reali* şi dacă se caută numai soluţiile *reale*, se pot întâmplà *trei cazuri.*

Pentru un număr real $x = x_0$ (*dat* sau ales *arbitrar*) cantitatea de sub radical din formula (90) poate fi: 1⁰. *pozitivă*; 2⁰. *nulă*; 3⁰. *negativă.*

In fiecare din aceste cazuri, valorile lui y sunt: 1⁰. *reale* şi *neegale* (y'_0, y''_0); 2⁰. *reale* şi *egale* (y_0); 3⁰. *imaginare*; şi ecuaţia (88), pentru $x = x_0$,

în cazul 1⁰ admite *două* sisteme de soluţii *distincte* x_0, y'_0; x_0, y''_0;

în cazul 2⁰ admite *un singur* sistem de soluţii x_0, y_0;

în cazul 3⁰ nu admite niciun sistem de soluţii *reale.*

EXEMPLU. Ecuaţia $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$, ordonată după puterile lui y se scrie $y^2 - 2y + x^2 - x + 1 = 0$ şi ne dă

$$(91) \qquad y = 1 \pm \sqrt{1 - (x^2 - x + 1)} = 1 \pm \sqrt{x(1 - x)}.$$

Pentru fiecare valoare reală a lui x *cuprinsă între* 0 *şi* 1 cantitatea de sub radical e *pozitivă* şi formula (91) ne dă pentru y *două* valori *reale* şi *distincte.* Astfel, pentru $x = \frac{1}{2}$ avem $y_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ şi $y_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Pentru $x = 0$ sau $x = 1$ cantitatea de sub radical e *nulă* şi găsim $y = 1$.

Pentru $x < 0$ şi pentru $x > 1$ cantitatea de sub radical e *negativă* şi valorile lui y sunt *imaginare.*

GENERALIZARE. Ca să rezolvăm *o ecuaţie cu mai multe necunoscute*

$$(92) \qquad f(x, y, z, ...) = 0,$$

procedăm în mod analog:

1⁰. Luăm pentru toate necunoscutele $(y, z, ...)$, *afară de una* (x), valori *arbitrare* $(y_0, z_0, ...)$.

2⁰. *Formăm ecuaţia cu o singură necunoscută* $f(x, y_0, z_0, ...) = 0$.

3⁰. *Rezolvăm această ecuaţie.*

Dacă $f(x, y, z, ...)$ e un polinom de grad n în x, rezolvând ecuaţia $f(x, y_0, z_0, ...) = 0$ găsim p rădăcini distincte $x_1, x_2, ..., x_p$

$(1 \leqq p \leqq n)$ (1), care *asociate cu* $y_0, z_0, \ldots$ ne dau p sisteme de soluţii pentru ecuaţia (92):

$$x_1, y_0, z_0, \ldots; \quad x_2, y_0, z_0, \ldots; \quad x_p, y_0, z_0, \ldots$$

La fiecare sistem de valori $y_0, z_0, \ldots$, *date* sau luate *arbitrar* pentru necunoscutele $y, z, \ldots$, corespund cel puţin *unul* şi cel mult n sisteme de soluţii pentru ecuaţia (92). Prin urmare: *o ecuaţie întreagă cu mai multe necunoscute admite o infinitate de sisteme de soluţii.*

254. Sistem de ecuaţii neliniare. Dacă avem *două* ecuaţii cu *două* necunoscute

$$(93) \qquad f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0,$$

fiecare ecuaţie, luată separat, admite câte o *infinitate* de sisteme de soluţii; dar — în general — un sistem de soluţii al uneia dintre ecuaţii *nu satisface şi pe cealaltă ecuaţie.*

Totuşi se pot găsì, ca şi la ecuaţiile liniare [208], sisteme de soluţii *comune* pentru *ambele ecuaţii*: acestea sunt *soluţiile sistemului de ecuaţii* (93). A *rezolvà* sistemul înseamnează a găsì aceste soluţii *comune.*

Vom considerà două cazuri:

I. Când sistemul dat e format dintr'o *ecuaţie de gradul al doilea* şi *o ecuaţie de gradul întâi.*

II. Când sistemul e format din *două ecuaţii de gradul al doilea.*

Cazul I. Avem

$$(94) \qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ &(\mathrm{II}) \quad mx + ny + p = 0. \end{aligned}$$

Sistemul se poate rezolvà prin metoda *substituţiei* [208]. Ecuaţia (II), *de gradul întâi,* ne dă

$$(95) \qquad y = \frac{-mx-p}{n}.$$

şi substituind această expresie în locul lui y în ecuaţia (I), obţinem o ecuaţie *cu o singură necunoscută* x, de gradul *al doilea* cel mult, adică de forma

$$(96) \qquad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

Discuţie. 1⁰. Dacă $\alpha \neq 0$ şi $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$, ecuaţia (96) este de gradul al doilea şi are *două* rădăcini x' şi x''; formula (95), pentru

(1) Dacă ecuaţia are o rădăcină *multiplă* de ordin n, avem $p = 1$; dacă toate rădăcinile sunt *simple* avem $p = n$; dacă ecuaţia are rădăcini multiple *de ordin mai mic decât n*, avem $1 < p < n$ [185].

$x = x'$ şi $x = x''$, ne dă pentru y *două* valori corespunzătoare y' şi y''. Sistemul (94) admite dar *două sisteme de soluţii*: x', y' şi x'', y''.

2°. Dacă $\alpha \neq 0$ şi $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, ecuaţia (96) e tot de gradul al doilea, dar are *o singură rădăcină* x' (dublă).

3°. Dacă $\alpha = 0$ şi $\beta \neq 0$, ecuaţia (96) e de gradul *întâi* şi are o singură rădăcină x'.

In amândouă cazurile 2° şi 3° formula (95), pentru $x = x'$, ne dă o singură valoare $y = y'$ şi sistemul (94) admite *un singur sistem de soluţii*: x', y'.

4°. Dacă $\alpha = 0$, $\beta = 0$ dar $\gamma \neq 0$, ecuaţia (96) nu admite soluţii şi sistemul (94) e *imposibil*.

5°. Dacă şi $\alpha = 0$ şi $\beta = 0$ şi $\gamma = 0$, ecuaţia (96) e o *identitate*; luând pentru x o valoare *arbitrară* x_0 şi pentru y valoarea corespunzătoare y_0 [dată de formula (95) pentru $x = x_0$], perechile de valori x_0, y_0 sunt soluţii ale sistemului (94). In acest caz sistemul (94) admite *o infinitate de sisteme de soluţii.*

EXEMPLU. Să considerăm sistemul

$$(97)\qquad \begin{aligned} &(\text{I}) && 3x^2 - 2xy - y^2 + x - 1 = 0, \\ &(\text{II}) && px - y - 6 = 0, \end{aligned}$$

în care p e un număr presupus cunoscut.

Ecuaţia (II) ne dă $y = px - 6$ şi substituind această expresie în locul lui y în ecuaţia (I), obţinem o ecuaţie de gradul al doilea în x

$$(98)\qquad -(p^2 + 2p - 3)x^2 + (12p + 13)x - 37 = 0.$$

Trinomul $p^2 + 2p - 3$ [1] se anulează pentru $p = 1$ şi $p = -3$. Prin urmare pentru p diferit de 1 şi -3 ecuaţia (96) e de gradul *al doilea*.

De exemplu, *pentru* $p = -1$, ecuaţia (98) devine $4x^2 + x - 37 = 0$ şi admite rădăcinile $x' = 2{,}92$, $x'' = -3{,}17$. Ecuaţia (97, II) devine $-x - y - 6 = 0$ şi ne dă pentru y valorile corespunzătoare $y' = -8{,}92$, $y'' = -2{,}83$. Sistemul (97) admite *două sisteme de soluţii*: $x' = 2{,}92$, $y' = -8{,}92$ şi $x'' = -3{,}17$, $y'' = -2{,}83$.

Pentru $p = 1$, ecuaţia (98) e de gradul *întâi* şi admite rădăcina $x' = 1$. Ecuaţia (97, II) devine $x - y - 6 = 0$ şi ne dă pentru y valoarea $y' = -5$. Sistemul (97) admite *un singur sistem de soluţii*: $x' = 1$, $y' = -5$.

CAZUL II. Avem

$$(99)\qquad \begin{aligned} &(\text{I}) && ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ &(\text{II}) && a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0. \end{aligned}$$

In acest caz putem formà un sistem *echivalent* cu sistemul dat, dar în care o ecuaţie să fie de gradul *întâi* în raport cu *una* dintre necunoscute.

---

[1] Care ne determină valoarea a a coeficientului lui x^2.

In adevăr, înmulţind ecuaţia (I) cu c', ecuaţia (II) cu $-c$ şi adunând, termenii în y^2 *se reduc* [209] şi obţinem o ecuaţie de forma

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0,$$

care asociată cu una dintre ecuaţiile (99), de exemplu cu ecuaţia (I), ne dă sistemul mai simplu

$$(100) \quad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ &(\mathrm{II}) \quad (\beta x + \delta) y + \alpha x^2 + \gamma x + \varepsilon = 0, \end{aligned}$$

echivalent cu sistemul (99).

Rezolvarea sistemului. 1⁰. Dacă $\beta = 0$ şi $\delta = 0$, ecuaţia (100, II) conţine numai necunoscuta x; fie x_1 şi x_2 rădăcinile ei.

Inlocuind în ecuaţia (100, I) pe x prin x_1 şi x_2 succesiv, obţinem două ecuaţii de gradul al doilea în y. Prima (pentru $x = x_1$) ne dă două rădăcini y_1', y_1''; a doua (pentru $x = x_2$) ne dă alte două rădăcini y_2', y_2''. Găsim astfel pentru sistemul (99) *patru* sisteme de soluţii:

$$x_1, y_1'; \quad x_1, y_1''; \quad x_2, y_2'; \quad x_2, y_2''.$$

OBSERVARE. Numărul sistemelor de soluţii distincte *e mai mic decât* 4, când cel puţin una dintre ecuaţiile auxiliare de gradul al doilea (numai în x sau numai în y) are rădăcinile *egale*.

2⁰. Dacă numerele β şi δ *nu sunt amândouă nule*, putem elimină necunoscuta y, între ecuaţiile (100), prin *substituţie* [208].

Ecuaţia (100, II) ne dă

$$(101) \qquad y = \frac{-\alpha x^2 - \gamma x - \varepsilon}{\beta x + \delta}.$$

şi substituind această expresie în locul lui y în ecuaţia (100, I) obţinem o ecuaţie, care, sub formă întreagă, e — în general — de gradul *al patrulea* în x.

Dacă rădăcinile ei sunt x_1, x_2, x_3, x_4, formula (101) ne dă, pentru fiecare valoare a lui x, câte o valoare pentru y: y_1, y_2, y_3, y_4 şi sistemul (100) admite sistemele de soluţii:

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3; \quad x_4, y_4.$$

EXEMPLU. Să considerăm sistemul

$$(102) \quad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad 8x^2 - 54xy - 11y^2 + 30x + 54y - 27 = 0, \\ &(\mathrm{II}) \quad -4x^2 + y^2 + 12x - 9 = 0. \end{aligned}$$

Adunând ecuaţia întâi cu a doua înmulţită cu 11, obţinem o ecuaţie de gradul *întâi* în y

$$(103) \qquad 2x^2 + 3xy - 9x - 3y + 7 = 0,$$

care se mai poate scrie

$$(x-1)(3y+2x-7)=0$$

şi care asociată cu ecuaţia (102, II), ne dă un sistem echivalent cu (102).

Noul sistem se descompune în

$$(104)\quad \begin{aligned} -4x^2+y^2+12x-9&=0 \\ x-1&=0 \end{aligned} \qquad \text{şi} \qquad (105)\quad \begin{aligned} -4x^2+y^2+12x-9&=0 \\ 3y+2x-7&=0. \end{aligned}$$

A doua ecuaţie (104) ne dă $x=1$; prima ecuaţie (104), pentru $x=1$, devine $y^2-1=0$ şi ne dă pentru y valorile 1 şi -1.

Din a doua ecuaţie (105) scoţând valoarea lui y şi substituind-o în ecuaţia întâi, deducem o ecuaţie de gradul al doilea în x

$$2x^2-5x+2=0,$$

care admite rădăcinile 2 şi $\frac{1}{2}$. Valorile lui y corespunzătoare sunt 1 şi 2.

Sistemul (102) admite dar *patru* sisteme de soluţii:

$$x_1=1,\ y_1=1;\quad x_2=1,\ y_2=-1;\quad x_3=2,\ y_3=1;\quad x_4=\frac{1}{2},\ y_4=2.$$

255. Sisteme particulare. 1°. Sistemul

$$(106)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) & x+y&=a \\ &(\mathrm{II}) & xy&=b. \end{aligned}$$

Ecuaţia (I) ne dă $x=a-y$ şi înlocuind în ecuaţia (II) pe x prin $a-y$, obţinem o ecuaţie de gradul al doilea

$$(107)\qquad y^2-ay+b=0,$$

care ne dă *două* rădăcini: y_1 şi y_2 (diferite sau egale). Valorile corespunzătoare ale lui x sunt $x_1=a-y_1$ şi $x_2=a-y_2$.

OBSERVARE. In acest caz, cunoscând suma a a soluţiilor şi produsul lor b, soluţiile x şi y sunt rădăcinile ecuaţiei $z^2-az+b=0$ [236, Problemă]. Găsim astfel următoarele două sisteme de soluţii: $x_1=z'$, $y_1=z''$ şi $x_2=z''$, $y_2=z'$.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} x+y&=-\frac{3}{2}, \\ xy&=-10. \end{aligned}$$

Valorile necunoscutelor x şi y sunt rădăcinile ecuaţiei

$$z^2+\frac{3}{2}z-10=0 \qquad \text{sau} \qquad 2z^2+3z-20=0,$$

care ne dă $z'=2{,}5$, $z''=-4$ şi soluţiile sistemului sunt:

$$x_1=2{,}5,\ y_1=-4;\quad x_2=-4,\ y_2=2{,}5.$$

2°. Sistemul

$$(108)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) & x-y&=a, \\ &(\mathrm{II}) & xy&=b, \end{aligned}$$

se poate rezolvà prin *substituţie* ca şi sistemul (106).

3°. Sistemul

$$(109) \qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad x+y=a, \\ &(\mathrm{II}) \quad x^2+y^2=b. \end{aligned}$$

Scoţând valoarea lui x din ecuaţia întâi şi substituind-o în ecuaţia a doua, obţinem

$$(110) \qquad (a-y)^2+y^2=b \quad \text{sau} \quad 2y^2-2ay+a^2-b=0.$$

Această ecuaţie ne dă pentru y *două* valori: y_1 şi y_2 (diferite sau egale). Valorile corespunzătoare ale necunoscutei x sunt $x_1=a-y_1$ şi $x_2=a-y_2$ (şi ele diferite sau egale).

Observare. Sistemul (109) se mai poate rezolvà şi în modul următor: Ridicând la patrat ambii membri ai ecuaţiei (109, I), obţinem

$$(111) \qquad x^2+2xy+y^2=a^2.$$

Fiindcă ecuaţia (109, II) ne dă $x^2+y^2=b$, ecuaţia (111) se mai poate scrie $2xy=a^2-b$ şi, împreună cu ecuaţia (I), ne dă sistemul *echivalent cu* (109):

$$x+y=a,$$
$$xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

Reducem astfel problema la cazul 1° [sistemul (106)].

EXEMPLU. Sistemul

$$(112) \qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad x+y=4, \\ &(\mathrm{II}) \quad x^2+y^2=14. \end{aligned}$$

Scoţând valoarea $y=4-x$ din ecuaţia (I) şi substituind-o în ecuaţia (II), obţinem $x^2-4x-1=0$. De aci deducem $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=2-\sqrt{3}$ şi relaţia $y=4-x$ ne dă $y_1=2-\sqrt{3}$, $y_2=2+\sqrt{3}$.

4°. Sistemul

$$(113) \qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad x^2-y^2=a, \\ &(\mathrm{II}) \quad x+y=b. \end{aligned}$$

Impărţind ecuaţia (I), $(x-y)(x+y)=a$, prin ecuaţia (II), membru cu membru, deducem

$$(\mathrm{III}) \qquad x-y=\frac{a}{b}.$$

Sistemul (II), (III), echivalent cu (I), (II), e de gradul *întâi* [209, Exemplul 1°]. Adunând şi scăzând ecuaţiile (II) şi (III) obţinem

$$2x=b+\frac{a}{b}, \quad 2y=b-\frac{a}{b} \qquad \text{sau} \qquad x=\frac{b^2+a}{2b}, \quad y=\frac{b^2-a}{2b}.$$

In mod analog se rezolvă sistemul

$$(114) \qquad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ x - y &= b. \end{aligned}$$

5°. Sistemul

$$(115) \qquad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad x^2 + y^2 = a, \\ &(\mathrm{II}) \quad xy = b. \end{aligned}$$

Ridicând la patrat ambii membri ai ecuaţiei (II), deducem

$$(\mathrm{III}) \quad x^2y^2 = b^2$$

şi sistemul (I), (III), mai general decât (I), (II), ne dă *suma* şi *produsul* cantităţilor x^2, y^2. Procedând ca în cazul 1°, dacă z' şi z'' sunt rădăcinile ecuaţiei

$$z^2 - az + b^2 = 0,$$

avem $x^2 = z'$, $y^2 = z''$ sau $x^2 = z''$, $y^2 = z'$; prin urmare

$$x = \pm\sqrt{z'}, \quad y = \pm\sqrt{z''} \qquad \text{sau} \qquad x = \pm\sqrt{z''}, \quad y = \pm\sqrt{z'}.$$

Primul grup ne dă 4 sisteme de soluţii; al doilea grup ne dă alte 4. Ecuaţiile (I), (III) admit dar în total 8 sisteme de soluţii. Dintre acestea *numai 4 sisteme de soluţii satisfac la ecuaţia* $xy = b$; celelalte 4 sunt soluţii *străine*, întroduse prin ridicarea la patrat (1).

EXEMPLU. Ca să rezolvăm sistemul

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ xy &= 12, \end{aligned}$$

luăm $x^2 + y^2 = 25$, $x^2y^2 = 144$. Ecuaţia $z^2 - 25z + 144 = 0$ are rădăcinile $z' = 9$, $z'' = 16$ şi ne dă $x^2 = 9$, $y^2 = 16$ sau $x^2 = 16$, $y^2 = 9$, adică $x = \pm 3$, $y = \pm 4$ sau $x = \pm 4$, $y = \pm 3$. Dintre acestea numai 4 sisteme de soluţii satisfac la ecuaţia $xy = 12$ şi anume:

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4;\quad x_2 = -3,\ y_2 = -4;\quad x_3 = 4,\ y_3 = 3;\quad x_4 = -4,\ y_4 = -3.$$

256. Maxime şi minime. Zicem că o cantitate variabilă trece printr'un *maxim* sau printr'un *minim*, când capătă o valoare *mai mare* sau *mai mică* decât toate valorile pe care le ia imediat înainte şi imediat după această valoare.

Astfel dacă am considerà un relief geografic, *altitudinea* solului e o cantitate *variabilă*, în general, dela un loc la altul. Vârfurile munţilor şi fundurile văilor sunt puncte unde această altitudine e *maximă* sau *minimă*.

---

(1) Sunt soluţiile sistemului $x^2 + y^2 = a$, $xy = -b$.

Teorema I. *Produsul a două numere variabile — dar cu suma constantă — e maxim când numerele sunt egale.*

In adevăr, dacă pentru două numere reale x și y avem

$$x+y=c \quad (\text{constant}), \qquad xy=v \quad (\text{variabil}),$$

x și y sunt rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$z^2-cz+v=0$$

și deducem

$$x=\frac{c+\sqrt{c^2-4v}}{2}, \qquad y=\frac{c-\sqrt{c^2-4v}}{2}.$$

Când numerele x și y sunt *reale*, avem $c^2 \geqq 4v$ sau

(116) $$v \leqq \frac{c^2}{4}.$$

Produsul v are valoarea *maximă* $\frac{c^2}{4}$ pentru $x=y=\frac{c}{2}$.

Observare. Și identitatea

$$4xy \equiv (x+y)^2-(x-y)^2$$

ne arată că, dacă $x+y=c$ (constant), avem

$$4xy=c^2-(x-y)^2<c^2 \quad \text{pentru} \quad x-y \neq 0$$

adică pentru $x \neq y$. Produsul xy are valoarea *cea mai mare* (*maximă*), când diferența $x-y$ e *nulă*, adică pentru $x=y=\frac{c}{2}$.

EXEMPLU. Dintre toate dreptunghiurile, *care au acelaș perimetru*, patratul închide aria maximă.

In adevăr, dacă însemnăm cu x lungimea, cu y lățimea și cu p perimetrul unuia dintre aceste dreptunghiuri, avem $2x+2y=p$ sau $x+y=\frac{p}{2}$ (constant) și, după teorema I, aria xy e *maximă*, când $x=y=\frac{p}{2}$ sau când dreptunghiul devine *patrat*.

Teorema II. *Suma a două numere variabile — dar cu produsul constant — e minimă când numerele sunt egale.*

In adevăr, dacă avem

$$x+y=v \quad (\text{variabil}), \qquad xy=c \quad (\text{constant}),$$

x și y sunt rădăcinile ecuației

$$z^2-vz+c=0$$

și deducem

$$x=\frac{v+\sqrt{v^2-4c}}{2}, \qquad y=\frac{v-\sqrt{v^2-4c}}{2}.$$

Pentru ca numerele x şi y să fie *reale* şi *pozitive*, trebue să avem

(117) $$v^2 \geqq 4c \quad \text{sau} \quad v \geqq 2\sqrt{c}.$$

Suma v are valoarea *minimă* $2\sqrt{c}$ pentru $x = y = \frac{v}{2} = \sqrt{c}$.

Observare. Şi identitatea

$$(x+y)^2 \equiv 4xy + (x-y)^2$$

ne arată că, dacă $xy = c$ (constant), avem

$$(x+y)^2 = 4c + (x-y)^2 > 4c \quad \text{pentru } x-y \neq 0$$

adică pentru $x \neq y$. Suma $x+y$ are valoarea *cea mai mică* (*minimă*), când diferenţa $x-y$ e *nulă*, adică pentru $x = y = 2\sqrt{c}$.

EXEMPLU. Dintre toate dreptunghiurile, *care au aceaş arie* patratul are perimetrul minim.

In adevăr, după teorema II, toate aceste dreptunghiuri având aria $xy = a$ (constantă), perimetrul $2(x+y)$ e *minim*, când $x = y = \sqrt{a}$ sau când dreptunghiul devine *patrat*.

257. Extragerea rădăcinii din numere complexe. Zicem că un număr *complex* (imaginar) $x+yi$ e *rădăcină patrată* a unui număr complex dat $a+bi$, dacă avem $(x+yi)^2 = a+bi$ sau

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi.$$

Această egalitate se descompune în [228]:

(118) $$\text{(I)} \quad x^2 - y^2 = a,$$
$$\text{(II)} \quad 2xy = b.$$

Prin urmare: *pentru a extrage rădăcina patrată din numărul complex $a+bi$ trebue să rezolvăm sistemul* (118).

1°. Dacă $a = 0$ şi $b = 0$, găsim $x = 0$, $y = 0$ şi $x+yi = 0$.

2°. Dacă $b = 0$, numărul $a+bi$ se reduce la a (real); ecuaţia (118, II) ne dă sau $x = 0$ sau $y = 0$. Dacă a e *pozitiv*, găsim în ambele cazuri 2 rădăcini patrate *reale* $x+yi = \pm\sqrt{a}$; dacă a e *negativ*, ($a = -a'$), găsim 2 rădăcini patrate *imaginare pure* $x+yi = \pm i\sqrt{a'}$.

3°. Dacă $b \neq 0$, ecuaţia (118, II) ne dă

(119) $$y = \frac{b}{2x}$$

şi substituind această expresie în locul lui y în ecuaţia (118, I), obţinem o ecuaţie bipatrată [247]

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

Punând $x^2 = z$ această ecuaţie se transformă într'o ecuaţie de gradul al doilea: $4z^2 - 4az - b^2 = 0$ şi ne dă pentru z valorile

$$z' = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}, \qquad z'' = \frac{a - \sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Cum $x = \pm\sqrt{z}$ trebue să fie un număr *real* şi cum z' e *pozitiv* dar z'' e *negativ*, găsim pentru x numai *două soluţii reale*:

$$x_1 = \sqrt{z'} \quad \text{şi} \quad x_2 = -\sqrt{z'}.$$

Formula (119) ne dă pentru y valorile corespunzătoare

$$y_1 = \frac{b}{2\sqrt{z'}} \quad \text{şi} \quad y_2 = -\frac{b}{2\sqrt{z'}}$$

şi deducem pentru $\sqrt{a+bi}$ *două* valori complexe *simetrice*:

$$x_1 + y_1 i = \sqrt{z'} + \frac{bi}{2\sqrt{z'}} \quad \text{şi} \quad x_2 + y_2 i = -\sqrt{z'} - \frac{bi}{2\sqrt{z'}}.$$

EXEMPLU. Să se calculeze $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$. Insemnând cu $x + yi$ această rădăcină, trebue să avem $(x+yi)^2 = 1 - i\sqrt{3}$ sau

(120) $$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{şi} \quad 2xy = -\sqrt{3}.$$

De aci deducem $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$; $y_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ şi găsim ca rădăcini patrate valorile complexe *simetrice*

$$x_1 + y_1 i = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4} i \quad \text{şi} \quad x_2 + y_2 i = -\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{4} i.$$

258. Probleme de gradul al doilea.

PROBLEMA I (ARITMETICĂ COMERCIALĂ). *Doi asociaţi au să-şi împartă o sumă de 90275 lei, în care se cuprind şi capitalurile şi câştigurile lor. Capitalul depus de primul asociat e de 25000 lei şi câştigul celui de-al doilea e de 18525 lei. Se întreabă care e capitalul celui de-al doilea şi câştigul celui dintâi, ştiind că beneficiile sunt mai mici decât capitalurile depuse.*

Insemnând cu x capitalul asociatului al doilea şi cu y câştigul asociatului întâi, avem

	Capital	*Câştig*
Asociatul I	25000	y
„ *II*	x	18525

Din enunţul problemei rezultă două egalităţi.

1⁰. Suma capitalurilor şi a câştigurilor e de 90275 lei:

(I) $$25000 + x + y + 18525 = 90275.$$

2°. Câştigurile sunt proporţionale cu capitalurile depuse:

$$\text{(II)} \qquad \frac{25000}{y} = \frac{x}{18525}.$$

De aci deducem sistemul de gradul al doilea

$$(121) \qquad \begin{aligned} &\text{(I)} \quad x + y = 46750 \\ &\text{(II)} \quad xy = 463\,125\,000, \end{aligned}$$

şi necunoscutele x şi y sunt rădăcinile ecuaţiei

$$z^2 - 46750z + 463\,125\,000 = 0,$$

adică $z' = 32500$, $z'' = 14250$.

Problema algebrică admite *două* sisteme de soluţii:

$$x_1 = 32500, \quad y_1 = 14250 \qquad \text{şi} \qquad x_2 = 14250, \quad y_2 = 32500.$$

Cum ni se spune însă că beneficiile sunt *mai mici* decât capitalurile respective, numai primele valori x_1, y_1 sunt soluţiile problemei date.

PROBLEMA II (FIZICĂ ŞI CHIMIE). *Intr'o eprubetă gradată, aşezată într'o cuvetă cu apă, se introduce* a e r, *care ocupă o înălţime de* 25 cm. *la temperatura apei* (15°) *şi la presiunea exterioară* (750 mm.). *Nivelul apei e acelaş în cuvetă şi în eprubetă.*

Se absoarbe apoi o x i g e n u l *cu ajutorul fosforului şi se cere să se determine înălţimea gazului rămas, dacă se presupune că temperatura şi presiunea exterioară n'au variat în timpul experienţei.*

Tensiunea maximă a vaporilor de apă la 15° este 12,6 mm.
Densitatea mercurului 13,6. Nivelul apei în cuvetă se consideră invariabil.

Dacă s e suprafaţa secţiunei eprubetei, volumul *aerului* din eprubetă este $25s$ cmc. şi conţine $0{,}79 \times 25s$ cmc. *azot* şi $0{,}21 \times 25s$ cmc. *oxigen* la presiunea $750 - 12{,}6 = 737{,}4$ mm. [1].

După ce se absoarbe oxigenul, rămâne numai *azot saturat de vapori de apă* şi mercurul se ridică în eprubetă cu x cm. Gazul rămas ocupă un volum de $(25 - x)s$ cmc., la presiunea anterioară micşorată cu presiunea reprezentată de coloana de x cm. de *apă* sau de

$$\frac{x}{13{,}6} \text{ cm.} = \frac{x}{1{,}36} \text{ mm. } \textit{mercur.}$$

Avem dar

$$V_1 = 0{,}79 \times 25s, \quad P_1 = 737{,}4; \quad V_2 = (25 - x)s, \quad P_2 = 737{,}4 - \frac{x}{1{,}36}$$

(1) In 100 cmc. de *aer* sunt 79 cmc. *azot* şi 21 cmc. *oxigen.*

şi legea lui Mariotte $V_1P_1 = V_2P_2$ ne dă egalitatea:

$$0{,}79 \times 25\,s \times 737{,}4 = (25-x)\,s\left(737{,}4 - \frac{x}{1{,}36}\right)$$

de unde deducem ecuaţia de gradul al doilea în x

$$x^2 - 1027{,}8\,x + 5766{,}5 = 0,$$

care are rădăcinile $x' = 5{,}7$ şi $x'' = 1022{,}1$.

Soluţia problemei e numai $x = 5{,}7$ cm. < 25 cm.

PROBLEMA III (GEOMETRIE). *Să se înscrie într'o sferă cu raza r un cilindru, a cărui suprafaţă totală să fie de m ori suprafaţa sferei.*

Reprezentăm pe *fig.* 38 o secţiune făcută în sferă şi cilindru printr'un plan, care trece prin axa cilindrului. Secţiunea *în sferă* e un cerc cu centrul în O şi cu raza r (centrul şi raza sferei), iar *în cilindru* e un dreptunghiu ABCD.

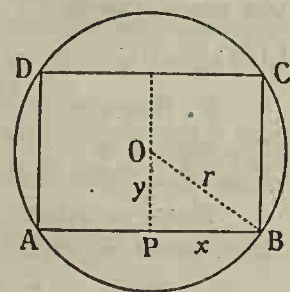


Fig. 38.

1⁰. Necunoscutele. Insemnăm: diametrul bazei cilindrului $AB = 2\,PB = 2x$; înălţimea cilindrului $AD = 2\,PO = 2y$.

2⁰. Scrierea ecuaţiilor. Triunghiul dreptunghic BOP ne dă

$$\text{(I)} \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

egalitate, care exprimă că cilindrul e *înscris* în sferă.

A doua ecuaţie e dată de relaţia dintre suprafaţa totală a cilindrului şi suprafaţa sferei:

$$2\pi x^2 + 2\pi x . 2y = m . 4\pi r^2$$

sau

$$\text{(II)} \qquad x^2 + 2xy = 2mr^2 \qquad (m \text{ pozitiv}).$$

Avem astfel, pentru a determina pe x şi y, un sistem de două ecuaţii de gradul al doilea cu două necunoscute.

3⁰. Rezolvarea. Ecuaţia (II) ne dă

$$(122) \qquad y = \frac{2mr^2 - x^2}{2x};$$

înlocuind pe y prin această expresie în ecuaţia (I) obţinem

$$(123) \qquad 5x^4 - 4r^2(m+1)x^2 + 4m^2r^4 = 0$$

sau, făcând $x^2 = z$,

$$(124) \qquad 5z^2 - 4r^2(m+1)z + 4m^2r^4 = 0,$$

Dacă z' şi z'' sunt rădăcinile ecuaţiei (124), deducem pentru x patru valori $\pm\sqrt{z'}$ şi $\pm\sqrt{z''}$ şi formula (122) ne dă pentru y alte patru valori corespunzătoare. Acestea sunt soluţiile *algebrice* ale sistemului (I), (II). Dintre acestea numai sistemele de soluţii x şi y *reale* şi *pozitive* pot aveà un sens pentru problema *geometrică* dată.

Discuţie. Rădăcinile ecuaţiei (124) sunt *reale*, dacă avem

(125) $4r^4(m+1)^2-20m^2r^4 \geqq 0$ sau $4m^2-2m-1 \leqq 0.$

Trinomul $4m^2-2m-1$, care se anulează pentru $m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$, e *negativ* pentru m cuprins între aceste rădăcini. Rămâne dar să discutăm numai valorile

(126) $$0 < m \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

1°. Pentru $m<\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ecuaţia în z (124) admite 2 rădăcini *reale* şi *pozitive*: z' şi z'' [237]. Fie $z'<z''$. Aceste rădăcini ne dau pentru x numai *două* valori *reale* şi *pozitive*: $x_1=\sqrt{z'}$ şi $x_2=\sqrt{z''}$.

Pentru ca valorile lui y, date de formula (122), să fie şi ele *pozitive*, trebue să avem

(127) $x^2 < 2mr^2$ sau (128) $z < 2mr^2$.

Inlocuind pe z prin $2mr^2$ în ecuaţia (124), obţinem pentru membrul întâi al ei valoarea

(129) $$8r^4.m(2m-1),$$

care e *negativă* pentru $0<m<\frac{1}{2}$ şi *pozitivă* pentru $m>\frac{1}{2}$.

Prin urmare, dacă $0<m<\frac{1}{2}$, avem $z'<2mr^2<z''$ [241, 1] şi numai rădăcina z' satisface la neegalitatea (128); găsim dar *un singur sistem de soluţii reale şi pozitive* pentru sistemul (I), (II).

Dacă $\frac{1}{2}<m<\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $2mr^2$ se găseşte *în afară* de rădăcinile z' şi z''. Dar nu putem aveà $2mr^2<z'<z''$, căci ar rezultà $z'z''>4m^2r^4$, pe când ecuaţia (124) ne dă $z'z''=\frac{4}{5}m^2r^4<4m^2r^4$. Avem dar $z'<z''<2mr^2$, adică neegalitatea (128) e satisfăcută şi pentru $z=z'$ şi pentru $z=z''$ şi găsim *două sisteme de soluţii* x şi y, *reale* şi *pozitive*, pentru sistemul (I), (II).

Pentru $m=\frac{1}{2}$, ecuaţia (124) devine $5z^2-6r^2z+r^4$ şi admite rădăcinile $z'=r^2$, $z''=\frac{r^2}{5}$. Valoarea $z=r^2$ ne dă $x_1=r$, $y_1=0$; e cazul limită, când înălţimea cilindrului înscris se reduce la *zero*. Valoarea $z=\frac{r^2}{5}$ ne dă $x_2=\frac{r}{\sqrt{5}}$, $y_2=\frac{2r}{\sqrt{5}}$; înălţimea cilindrului e de două ori mai mare decât diametrul bazei.

2º. Pentru $m = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, ecuaţia în z (124) are o singură rădăcină (dublă): $z = \frac{5+\sqrt{5}}{10} r^2$ şi găsim, pentru sistemul (I), (II), *un singur sistem de soluţii reale şi pozitive*:

$$x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \qquad y = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}.$$

PROBLEMA IV (ARITMETICĂ COMERCIALĂ). *O persoană a pus la o bancă, cu dobândă de 8%, suma de 662 000 lei în două rate: rata întâi la 1 Mai şi rata a doua la 2 Iulie acelaş an. După un timp constată că dispune la bancă de un capital de 683 600 lei.*

Ştiind că dobânda produsă de rata întâi e de 5 ori mai mare decât dobânda ratei a doua, se cere să se calculeze: a) valoarea fiecărei rate; b) data evaluării capitalului format la bancă (1).

1º. Necunoscutele. Insemnăm cu x şi y valorile celor două rate şi cu t (zile) timpul corespunzător ratei *întâi* (dela 1 Mai până la data evaluării).

2º. Ecuaţiile. Ştim că suma ratelor e 662 000 lei:

$$\text{(I)} \qquad x + y = 662000.$$

Ca să calculăm dobânda, trebue să ştim *timpul* şi *divizorul fix*. Timpul corespunzător ratei întâi e t. Dela 1 Mai până la 2 Iulie fiind 62 de zile, timpul corespunzător ratei a doua e $t-62$. Pentru procentul 8 divizorul fix e 4500. Scriind că dobânda ratei întâi e de 5 ori mai mare decât dobânda ratei a doua, avem

$$\frac{xt}{4500} = 5 . \frac{y(t-62)}{4500}$$

sau

$$\text{(II)} \qquad xt = 5y(t-62).$$

In fine *capitalul total* constituit la bancă fiind 672 800 lei şi *suma ratelor* depuse fiind 662 000 lei, *suma dobânzilor* produse este $672800 - 662000 = 21600$ lei. Prin urmare:

$$\frac{xt}{4500} + \frac{y(t-62)}{4500} = 21600$$

sau

$$\text{(III)} \qquad xt + y(t-62) = 97200000.$$

Avem dar un sistem de trei ecuaţii (I), (II), (III) cu trei necunoscute x, y, t.

---

(1) La calcularea numărului zilelor *între două date*, ziua iniţială nu se socoteşte, pe când ziua finală se socoteşte. Astfel dela 1 Mai până la 2 Iulie avem: din Mai 30 zile, din Iunie 30, din Iulie 2; în total 62 zile.

3°. Rezolvarea sistemului. Sistemul se poate scrie:

$$(130)\quad \begin{cases} \text{(I)} & x+y=662\,000, \\ \text{(II)} & xt-5yt=-310y, \\ \text{(III)} & xt+yt=62y+97\,200\,000. \end{cases}$$

Adunând ecuaţia (II) cu ecuaţia (III) înmulţită cu 5, obţinem

$$6xt=486\,000\,000$$

sau

$$\text{(II)}' \qquad xt=81\,000\,000.$$

Scăzând ecuaţia (II) din (III), deducem

$$6yt=372y+97\,200\,000$$

sau

$$\text{(III)}' \qquad yt=62y+16\,200\,000$$

şi sistemul (I), (II), (III) se poate înlocuì prin sistemul echivalent

$$(131)\quad \begin{cases} \text{(I)} & x+y=662\,000, \\ \text{(II)} & xt=81\,000\,000, \\ \text{(III)} & yt=62y+16\,200\,000. \end{cases}$$

Rămâne să rezolvăm acest sistem. Ecuaţia (131, I) ne dă

$$(132)\qquad y=662\,000-x;$$

ecuaţia (131, II) ne dă

$$(133)\qquad t=\frac{81\,000\,000}{x}$$

şi înlocuind pe y şi t prin aceste expresii în ecuaţia (131, III), obţinem ecuaţia cu o singură necunoscută:

$$62x^2-138\,244\,000x+53\,622\,000\,000\,000=0,$$

care admite rădăcinile

$$x'=500\,000 \quad \text{şi} \quad x''=\frac{53\,622\,000}{31}=1\,729\,741{,}94,$$

Formula (132), pentru $x=x'$ şi $x=x''$, ne dă valorile lui y:

$$y'=162\,000, \quad y''=-\frac{33\,100\,000}{31}=-1\,067\,741{,}94$$

iar formula (133) ne dă valorile lui t corespunzătoare:

$$t'=162, \quad t''=\frac{15500}{331}=46{,}8.$$

Problema algebrică admite *două* sisteme de soluţii:

$$x', y', t' \quad \text{şi} \quad x'', y'', t'',$$

dar ratele x şi y trebuind să fie amândouă *numere pozitive*, problema aritmetică dată admite *o singură soluţie*:

$$x = 500\,000, \quad y = 162\,000, \quad t = 162.$$

Data evaluării capitalului este *10 Octombrie* acelaş an.

EXERCIŢII.

46. Să se rezolve ecuaţiile:

1°. $(2x-5)^2 = (x-1)(2x+3) - 7x + 4$;

2°. $(3a^2+b^2)(x^2-x+1) = (3b^2+a^2)(x^2+x+1)$;

3°. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$; 4°. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;

5°. $5(x+3) = \sqrt{2x^2+3x-9}$; 6°. $2\sqrt{x+1} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 5$.

R. 1°. $x' = 3$, $x'' = 4$; 2°. $x' = \frac{a-b}{a+b}$, $x'' = \frac{a+b}{a-b}$;

3°. $x_1 = 3$, $x_2 = +\sqrt{\frac{5}{2}}$, $x_3 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$; 4°. $x_1 = a+b$, $x_2 = \frac{2ab}{a+b}$;

5°. Obţinem ecuaţia $23x^2 + 147x + 234 = 0$, care are rădăcinile $x' = -3$, $x'' = -\frac{78}{23}$. Dintre acestea numai $x = -3$ e rădăcina ecuaţiei iraţionale.

6°. Găsim ecuaţia $4x^2 - 9x - 9 = 0$, care are rădăcinile $x' = 3$, $x'' = -\frac{3}{4}$. Amândouă aceste valori sunt rădăcini ale ecuaţiei iraţionale.

47. Să se discute felul rădăcinilor ecuaţiei

$$(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda = 0,$$

când λ ia toate valorile reale dela $-\infty$ până la $+\infty$.

R. Găsim tabloul următor:

Valorile lui λ	*Discriminantul* $\lambda(3-2\lambda)$	$x'+x'' = \frac{2\lambda}{\lambda-1}$	$x'x'' = \frac{3\lambda}{\lambda-1}$	*Felul rădăcinilor*
$\lambda < 0$	$-$	$+$	$+$	imaginare
$\lambda = 0$	0	0	0	$x' = x'' = 0$
$0 < \lambda < 1$	$+$	$-$	$-$	reale şi de semne contrarii
$\lambda = 1$	$+$	∞	∞	ecuaţia e de gr. I: $x = \frac{3}{2}$
$1 < \lambda < \frac{3}{2}$	$+$	$+$	$+$	reale şi pozitive
$\lambda = \frac{3}{2}$	0	$+$	$+$	$x' = x'' = 3$
$\frac{3}{2} < \lambda$	$-$	$+$	$+$	imaginare.

Când λ tinde către 1, o rădăcină creşte la infinit.

48. O persoană cumpărând un obiect şi în urmă vânzându-l cu 72 lei, are o perdere *la sută* egală cu a treia parte din costul obiectului. Cât a costat obiectul?

R. Problema are două soluţii: 180 lei şi 120 lei.

49. Ecuația $3x^2+2xy-5y^2-10x-2y+7=0$ ne dă, în general, pentru fiecare valoare a lui x câte două valori pentru y și pentru fiecare valoare a lui y câte două valori pentru x. Să se precizeze: când aceste valori sunt: 1⁰. reale și neegale; 2⁰. reale și egale; 3⁰. imaginare?

R. Ecuația în x are rădăcinile *reale* și *neegale* pentru orice valoare a lui y. Ecuația în y are rădăcinile *reale* și *neegale* pentru $x<1$ și $x>2{,}25$; *reale* și *egale* pentru $x=1$ și $x=2{,}25$; *imaginare* pentru $1<x<2{,}25$.

50. Să se rezolve ecuațiile:

$$1^0.\ \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0;$$

$$2^0.\ x^6(x^6+8x^3+63)=8(x^9+8).$$

R. 1⁰. Problema se reduce la rezolvarea ecuației bipatrate $3x^4-58x^2+244=0$ și găsim: $x_1=13{,}1$; $x_2=-13{,}1$; $x_3=6{,}2$; $x_4=-6{,}2$ (cu aproximație de 0,1).

2⁰. Ecuația e trinomă: $x^{12}+63x^6-64=0$. Problema se reduce la rezolvarea ecuațiilor binome: $x^6-1=0$ și $x^6+64=0$. Prima [251, 7] are rădăcinile

$$x_1=1,\ x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ x_4=-1,\ x_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ x_6=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Ecuația a doua are ca rădăcini valorile precedente înmulțite cu $\sqrt[6]{-64}=2i$.

51. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$1^0.\ x+y=a,\ x^3+y^3=b^3;\quad 2^0.\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}=1.$$

$$3^0.\ 3x^2+4xy+3y^2-15x+9y=0,\ x^2-2xy+y^2-10x+2y=0.$$

R. 1⁰. Găsim $xy=\frac{a^3-b^3}{3a}$ și $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{4b^3-a^3}{12a}},\ y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{4b^3-a^3}{12a}}$.

$$2^0.\ x=\frac{a^2b^2m\pm a^2n\sqrt{a^2n^2+b^2m^2-a^2b^2}}{a^2n^2+b^2m^2},\quad y=\frac{a^2b^2n\mp b^2m\sqrt{a^2n^2+b^2m^2-a^2b^2}}{a^2n^2+b^2m^2}.$$

3⁰. $x_1=0,\ y_1=0;\ x_2=1,\ y_2=3;\ x_3=3,\ y_3=-3;\ x_4=6,\ y_4=-2.$

52. Să se determine laturile unui triunghiu dreptunghic, care are perimetrul $2p$ și suprafața $\frac{p^2}{6}$.

R. Trebue să rezolvăm sistemul

$$x+y+z=2p,\quad xy=\frac{p^2}{3},\quad x^2+y^2=z^2.$$

Eliminând pe z între ecuația întâia și a treia, deducem $x+y=\frac{7p}{6}$ și găsim $x=\frac{2p}{3}$, $y=\frac{p}{2}$, $z=\frac{5p}{6}$.

53. Să se determine *cifra* α și *baza* β a sistemului de numerație, în care numerele 2736 și 1 741 824 se scriu respectiv $1\alpha00$ și $\alpha0000$.

R. Trebue să rezolvăm sistemul

$$\beta^3+\alpha\beta^2=2736,\qquad \alpha\beta^5=1\,741\,800.$$

Găsim un singur sistem de soluții *reale, pozitive* și *întregi*: $\alpha=7$, $\beta=12$.

CAPITOLUL VI.

REPREZENTAREA GRAFICĂ.

I. — FUNCŢII ŞI CURBE.

259. Funcţii explicite. Dacă avem două cantităţi variabile x şi y, *care depind una de alta*, aşà că la fiecare valoare a lui x să corespundă o valoare pentru y, zicem că y e funcţie de x [166].

EXEMPLE. Formulele

(1) $$y=2x+3, \quad y=x^2-5x+7, \quad y=\sqrt{x-1}$$

definesc pe y ca funcţie de x. Primele două funcţii au valori *reale* pentru orice valoare reală a lui x; funcţia a treia $\sqrt{x-1}$ e *reală* pentru $x \geqq 1$ şi *imaginară* pentru $x < 1$.

Ca să arătăm că y e funcţie de x, scriem în general

(2) $$y=f(x),$$

unde prin simbolul f reprezentăm şirul de operaţii, pe care ar trebui să le facem asupră lui x, ca să căpătăm valoarea lui y.

Formulele (1) sau (2), care sunt ecuaţii cu *două* necunoscute x şi y, *rezolvate în raport cu* y, definesc pe y ca funcţie *explicită* de x.

Când vrem să reprezentăm în mod simbolic mai multe funcţii diferite, întrebuinţăm simboluri *diferite*. Astfel egalităţile

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

ne arată că x, y, z sunt trei funcţiuni explicite de t.

In general, formule ca

(3) $$u=x^2+2y^3, \qquad u=3x+y^2-5\sqrt{z-4}$$

sau, în mod simbolic,

(4) $$u=f(x,y), \qquad u=\varphi(x,y,z)$$

oricare ar fi șirurile de operații reprezentate prin simbolurile f sau φ, ne definesc pe u ca *funcție explicită de mai multe variabile independente*: x, y sau x, y, z [166, Exemple].

260. Funcții implicite. Am văzut că orice ecuație întreagă cu *două* sau *mai multe* necunoscute, ca

$$(5)\qquad 3x+y+6=0, \qquad x^2+2xy-y^2+4=0$$

sau, în general,

$$(6)\qquad f(x, y)=0$$

admite *o infinitate de sisteme de soluții* [204, 253].

Valoarea variabilei y *depinde de valoarea lui* x și anume *pentru fiecare valoare arbitrară* x_0 a lui x, *ecuația în* y

$$f(x_0, y)=0,$$

prin rădăcinile ei, *ne determină una sau mai multe valori pentru* y. In acest caz, zicem că ecuațiile (5) sau (6), *care nu sunt rezolvate în raport cu* y, definesc pe y ca funcție *implicită* de x.

Tot astfel e ecuația de forma

$$f(x, y, t)=0,$$

unde f e un polinom întreg în x, y, t, definește pe *una* dintre variabilele x, y sau t ca funcție implicită de celelalte două.

OBSERVARE. Ecuațiile (5) sau (6) definesc și pe x ca funcție de y. Astfel din prima ecuație (5) putem deduce în mod *explicit*:

$$\text{sau}\quad y=3x+6 \quad\text{sau}\quad x=\frac{y-6}{3}.$$

In general, dacă o ecuație de forma (6), rezolvată în raport cu y ne dă $y=\varphi(x)$ și rezolvată în raport cu x ne dă $x=\psi(y)$, zicem că ψ e *funcția inversă* a lui φ.

261. Funcții uniforme și multiforme. 1°. Dacă la fiecare valoare a lui x, dintr'un interval (a, b), ecuația $f(x, y)=0$ ne dă numai *câte o singură valoare pentru* y, zicem că y, definit de această ecuație, e o funcție *uniformă* de x în intervalul (a, b).

EXEMPLU. Ecuația $x^2-5y-4x+19=0$ rezolvată în raport cu y ne dă:

$$y=\frac{x^2-4x+19}{5} \qquad \text{(o singură determinare).}$$

Prin urmare y e funcție *uniformă* de x în orice interval.

2°. Dacă la fiecare valoare a lui x dintr'un interval (a, b), ecuația $f(x, y)=0$ ne dă (în general) *mai multe valori pentru* y, zicem că y, definit de această ecuație, e o funcție *multiformă* de x sau o funcție *cu mai multe determinări* în intervalul (a, b).

EXEMPLU. Ecuaţia $x^2-5y-4x+19=0$ rezolvată în raport cu x ne dă:

$$x=2\pm\sqrt{5(y-3)} \qquad \text{(două determinări)}.$$

Prin urmare x e funcţie *multiformă* de y. Cum avem $y-3>0$ pentru $y>3$, $y-3=0$ pentru $y=3$ şi $y-3<0$ pentru $y<3$, cele două determinări ale lui x sunt *reale* şi *neegale* pentru $y>3$; *reale* şi *egale* pentru $y=3$; *imaginare* pentru $y<3$ [227, 2].

262. Funcţie definită prin şiruri. Legătura dintre două cantităţi variabile se poate stabili şi fără existenţa unei formule matematice. Astfel măsurând *timpul* t în ore (cu ajutorul unei pendule) şi *temperatura aerului* θ în grade (cu ajutorul unui termometru) şi înscriind valorile găsite pe două şiruri corespunzătoare:

(I)	t	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	*ore*
(II)	θ	4,3	5,0	5,9	6,4	6,7	8,0	8,6	9,0	9,2	8,8	8,5	8,1	7,6	*grade*

constatăm că la fiecare valoare a lui t corespunde o valoare bine determinată pentru θ. Prin urmare *temperatura aerului e o funcţie de timp* definită prin şirurile (I) şi (II) [1].

Convenim să zicem, şi în acest caz, că între variabilele θ şi t există o relaţie de forma

$$\theta=f(t) \qquad \text{sau} \qquad F(\theta, t)=0,$$

deşi nu cunoaştem *expresia analitică* a funcţiei f, adică şirul de operaţii matematice, pe care trebue să le facem asupra valorii timpului t, ca să determinăm *a priori* [2] temperatura aerului θ.

263. Lege naturală şi expresie matematică. Studiul fenomenelor din natură (fizice, mecanice, chimice, etc.) au întrodus şi vor întroduce mereu în Matematici numeroase exemple de *funcţii*.

Se ştie că un fenomen fizic (chimic, etc.) se poate studià din două puncte de vedere: *calitativ* şi *cantitativ*. In primul caz se cercetează numai cauzele care produc fenomenul, care-i variază intensitatea sau care-l împedică să se producă; obţinem astfel *legi calitative*. In cazul al doilea, un fenomen se caracterizează printr'o *mărime măsurabilă* z.

De exemplu starea de mai cald sau mai rece a unui corp pusă în legătură cu dilatarea corpurilor la căldură, s'a putut caracterizà prin măsurarea unei *lungimi*. In particular observaţia că o coloană fină de mercur se lungeşte sensibil pentru o variaţie foarte mică de temperatură, a permis construirea *termometrului*.

Cauzele fenomenului se caracterizează şi ele prin mărimi *măsurabile*: x, y, ... Se construesc aparate speciale pentru măsurarea mări-

---

(1) In intervalul de timp în care a fost studiată.

(2) *Mai dinainte* adică înainte de a există şi de a o puteà măsurà în mod direct.

milor cauze şi a mărimii efect şi după un număr oarecare de *experienţe* şi de *măsurări*, putem înscrie pe mai multe şiruri orizontale valorile cantităţilor z şi x, y, ... corespunzătoare fiecărui caz. Obţinem astfel o tablă, care ne va da în viitor (fără altă experienţă) valoarea mărimii z pentru valorile mărimilor x, y, ... studiate. Trecând apoi dela *abstract* la *concret*, deducem starea fenomenului efect, care corespunde la stările considerate pentru fenomenele cauză.

Această legătură dintre valorile simultane ale mărimilor z şi x, y, ... constitue o *lege cantitativă*. Ea defineşte în mod *numeric* pe z ca funcţie de variabilele independente x, y, ... Astfel sunt legile gravitaţiei, legile lui Kepler, legea lui Mariotte, legea lui Joule, etc.

Pentru enunţarea acestor legi ştiinţele experimentale caută în Analiza Matematică nişte *expresii analitice* adică nişte *formule* simple, nişte *funcţii* elementare, care prin combinaţiile lor să poată exprimă — cu o cât mai bună aproximaţie — legătura reală dintre mărimile cauze şi mărimea efect, adică legea cantitativă.

OBSERVARE. Să nu se confunde *legea naturală* cu *formulele aproximative* ce se introduc în Ştiinţă pentru exprimarea legei în mod analitic. Legea adevărată poate fi exprimată în mod riguros numai prin şirurile de numere simultane date de *experienţă*. De aceea avem tot interesul ca aparatele de măsură să fie cât mai perfecţionate şi măsurările să fie făcute cu cea mai mare preciziune.

EXEMPLU. Să luăm ca exemplu legea lui Mariotte, care leagă *presiunea* cu *volumul* unui gaz, când temperatura rămâne constantă.

Se comprimă o cantitate de gaz într'un tub, cu ajutorul unui piston, şi se observă că, dacă presiunea P creşte, volumul V al gazului se micşorează. Mariotte a precizat faptul zicând că, dacă presiunea se măreşte de un număr oarecare de ori, volumul gazului se micşorează *de acelaş număr de ori*. Astfel, dacă volumul şi presiunea gazului au avut la început valorile V_0, P_0, când aplicăm asupra gazului o presiune $P=n\,P_0$, volumul lui devine $V=\frac{V_0}{n}$.

Prin urmare: *Produsul dintre presiune şi volum rămâne constant* şi avem

$$VP = V_0P_0 \quad \text{sau} \quad \frac{V_0P_0}{VP}=1.$$

Experienţele ulterioare făcute de Régnault, cu mai multă preciziune, asupra *aerului* şi *hidrogenului*, au dat următoarele rezultate:

Pentru aer

P	$\frac{V_0P_0}{VP}$
1476,25 mm.	1,001414
4209,48	1,002765
8177,48	1,003253
8404,11	1,003336
13483,48	1,004286

Pentru hidrogen

P	$\frac{V_0P_0}{VP}$
1173,17 mm.	0,998584
4431,14	0,996121
18490,47	0,992933
20879,18	0,992327

Deci pentru *aer* produsul VP, vecin de $V_0 P_0$, merge *descrescând*, pe când pentru *hidrogen* acest produs *creşte*, când presiunea P creşte.

O lege fizică (chimică, etc.) scrisă sub formă analitică, deşi e o egalitate matematică, nu e riguros exactă din punct de vedere fizic (chimic, etc.): ea e numai — dintre relaţiile simple — funcţia *cea mai apropiată* de aceea, care ar trebuì să exprime legea cantitativă adevărată a fenomenului considerat.

Pe de altă parte, în teoria matematică a diferitelor ramuri ale Ştiinţei şi „*ipoteza* joacă un rol capital, în lipsă de alte date mai solide; or, pe cât ipoteza este de preţioasă ca ajutor în cercetările noastre, pe atât ne oferă mari primejdii, mai ales când ne lăsăm duşi de ispita, ce pare firească, de a considerà o ipoteză, creată *a priori*, ca o *realitate efectivă*, deşi ea e numai *fructul imaginaţiei noastre*" (1).

264. Coordonate. Dacă luăm într'un plan două *axe de coordonate* Ox şi Oy, perpendiculare una pe alta [230] şi o lungime ca unitate de măsură, orice sistem de *două numere* reale x şi y determină *un punct* M în plan (*fig.* 39) şi invers, fiecare punct M din planul xOy, prin *coordonatele* lui $x = \overline{\mathrm{OP}}$, $y = \overline{\mathrm{PM}}$, determină *două numere algebrice* reale x şi y.

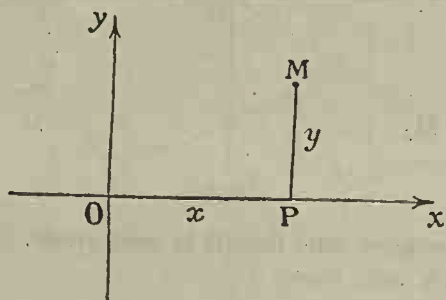
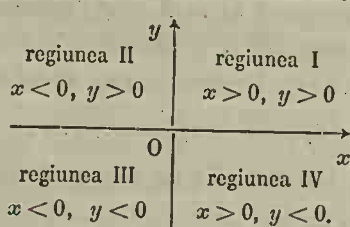


Fig. 39.

x e *abscisa*, y e *ordonata*, iar linia frântă OPM e *conturul coordonatelor* punctului M.

Vom considerà, în general, axa Ox ca *orizontală* şi cu sensul pozitiv *spre dreapta*, iar axa Oy ca *verticală* şi cu sensul pozitiv *în sus* (2).

Planul xOy e împărţit de axele de coordonate Ox, Oy în patru *regiuni*:



(1) C. A. Laisant, *La mathématique, philosophie — enseignement*, p. 22 (Georges Carré et C. Naud, Paris).

(2) De fapt axa Ox poate aveà orice direcţie, iar axa Oy e perpendiculară pe Ox.

1⁰. Punctul origine O are coordonatele $x=0$, $y=0$ (*fig.* 40).

2⁰. Toate punctele de pe axa Ox au *ordonata nulă* ($y=0$).

3⁰. Toate punctele de pe axa Oy au *abscisa nulă* ($x=0$).

4⁰. Două puncte M, M′ *simetrice față de* Ox (PM = PM′) au *abscisele egale* și *ordonatele simetrice* (1).

5⁰. Două puncte M, M″ *simetrice față de axa* Oy (QM = QM″) au *ordonatele egale* și *abscisele simetrice*.

6⁰. Două puncte M, M_1 *simetrice față de origine* ($OM = OM_1$) au și *abscisele* și *ordonatele simetrice*.

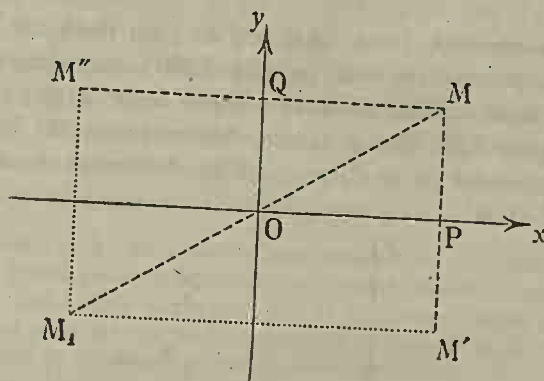


Fig. 40.

265. Reprezentarea unei funcții în mod grafic. Să însemnăm cu y valoarea variabilă a unei funcții $f(x)$

(7) $$y=f(x)$$

și să presupunem că, pentru $a \leqq x \leqq b$, la fiecare valoare reală a lui x formula (7) ne dă câte o valoare pentru y. Dacă această valoare e *reală*, putem reprezentà în planul xOy punctul M cu coordonatele

$$x=\overline{OP}, \qquad y=\overline{PM}=f(x).$$

Segmentul $\overline{PM}$ *reprezintă în mod grafic valoarea funcției* $f(x)$ *pentru* $x=\overline{OP}$ (*fig.* 43, pag. 281).

1⁰. Ș i r d e p u n c t e. Alegând pentru variabila x un șir de valori

(α) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,$$

cuprinse între a și b, formula (7) ne dă pentru y un alt șir de valori corespunzătoare:

(β) $$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n.$$

(1) Egale în valoare absolută dar cu semne contrarii.

La fiecare păreche de numere x_i, y_i corespunde în planul xOy, un punct M_i cu coordonatele (x_i, y_i). Unind punctele consecutive

$$(\gamma) \qquad M_1, \; M_2, \; M_3, \; \ldots, \; M_n$$

prin linii drepte: M_1M_2, M_2M_3, etc., obţinem o *linie frântă*, care, prin ordonatele vârfurilor ei, reprezintă în mod grafic *succesiunea valorilor funcţiei* $f(x)$ pentru valorile lui x din şirul (α) şi ne permite, prin comparare, să constatăm dacă aceste valori merg *crescând* sau *descrescând* şi în care puncte funcţia are *valoarea cea mai mare* sau *cea mai mică*.

EXEMPLU. Determinând. cu ajutorul unui termometru, temperatura unui bolnav la diferite ore (de exemplu la orele 4, 10, 16 şi 22), în mai multe zile consecutive, putem însemnà pe o axă Ot *timpul* t (în ore) şi, pe nişte perpendiculare la această axă, *temperatura* corespunzătoare θ (în grade). Obţinem astfel la fiecare înregistrare câte un *punct* M cu coordonatele (t, θ).

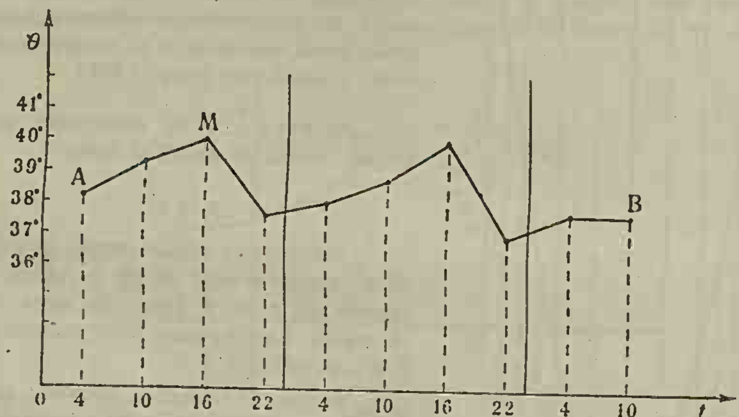


Fig. 41.

Unind aceste puncte prin linii drepte, linia frântă AMB (*fig.* 41) ne arată *mersul temperaturii bolnavului* în zilele şi orele înregistrate.

2°. Linie continuă. Să presupunem că funcţia $y = f(x)$ capătă valori *reale* pentru toate valorile lui x cuprinse între a şi b. Când abscisa $x = \overline{OP}$ variază şi ordonata $y = \overline{PM}$ *variază* (*fig.* 43, pag. 281). Când x creşte dela a la b, punctul P, se mişcă în mod continuu *pe axa* Ox dela a la b; punctul M, cu coordonatele (x, y), se mişcă *în plan* în mod continuu şi descrie *o linie curbă continuă* AMB.

Această linie e *imaginea geometrică a funcţiei* $y = f(x)$ între a şi b. Ea ne arată, prin *ordonatele* punctelor ei, modul în care se succed valorile funcţiei $f(x)$, când x creşte dela a la b; de aceea zicem că arcul AMB sau linia C e *curba*, care reprezintă în mod grafic *variaţia funcţiei* $f(x)$ în intervalul (a, b).

In practică nu putem determinà, prin măsurări succesive, *toate* punctele curbei C dela A la B. Putem reprezentà însă un număr de puncte destul de apropiate unele de altele, în cât curba *continuă*, care le uneşte, să rezulte fără ezitare. Această curbă ne permite să evaluăm, cu o aproximaţie suficientă pentru practică, valoarile funcţiei $f(x)$ şi în celelalte puncte din intervalul (a, b) (1).

OBSERVARE. E evident că oricât de apropiate ar fi două puncte A şi B ale unei curbe necunoscute C, arcul AB, cuprins între ele, poate aveà o infinitate de forme. Totuşi, când am determinat un şir de puncte, care se succed destul de apropiat unele după altele, *sentimentul continuităţii* ne indică, în general, mersul probabil al curbei prin punctele determinate.

Pentru a construì cu mai multă siguranţă imaginea geometrică a unei funcţii, va trebuì să introducem o noţiune geometrică nouă: *panta unei curbe* şi o noţiune analitică nouă: *derivata unei funcţii* [283].

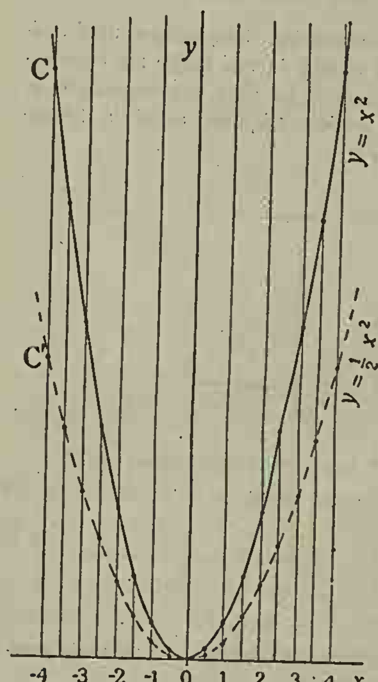


Fig. 42.

EXEMPLE. 1º. Să considerăm funcţia cea mai simplă de gradul al doilea:

$$y = x^2.$$

Pentru orice valoare reală şi finită a lui x, această funcţie capătă o valoare bine determinată, reală şi finită. De aceea zicem că *funcţia există pentru toate valorile lui x* dela $-\infty$ până la $+\infty$.

Pentru a-i construì imaginea geometrică, putem da întâi variabilei x valori *întregi*, plecând dela $x = 0$, în amândouă sensurile, (pozitiv şi negativ). Dacă luăm pentru $x > 0$ valori crescătoare, constatăm că valorile funcţiei $y = x^2$ *cresc*; pentru $x < 0$, din contra, când x creşte, valoarea absolută a lui x descreşte şi $y = x^2$ *descreşte*. Pentru $x = 0$, avem $y = 0$.

Inscriind într'un rând orizontal valorile variabilei x şi într'un alt rând orizontal valorile corespunzătoare ale funcţiei y, obţinem tabloul următor:

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

Reprezentând punctele (x, y) corespunzătoare, faţă de două axe: Ox orizontală şi Oy verticală, şi unind aceste puncte printr'o linie continuă, obţinem o curbă C (*fig.* 42), care reprezintă variaţia funcţiei $y = x^2$. Această curbă e o *parabolă*.

(1) Adică şi în punctele, care n'au fost determinate prin măsurări directe.

Dacă, între două puncte consecutive, nu suntem siguri de mersul adevărat al curbei, putem luà pentru x valori *intermediare* (în acest caz *fracționare*). Astfel între $x=-1$ și $x=+1$ găsim pentru curbă următoarele puncte:

x	...	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	...
y	...	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	...

Curba e tangentă la axa Ox în punctul O.

2⁰. Imaginea geometrică a funcției $y=\frac{1}{2}x^2$ (curba punctată C′ din *fig.* 42) se poate obține pe aceeaș cale sau se poate deduce din curba C, observând că linia C′ trece prin *mijloacele* tuturor ordonatelor curbei C.

3⁰. Curba temperaturii. Dacă pentru determinarea variației temperaturii unui bolnav, în loc să facem observațiile și înregistrările la fiecare 6 ore (*fig.* 41), le-am face *la fiecare oră* sau *la fiecare minut*, punctele M corespunzătoare ar fi mult mai apropiate unele de altele și dacă — printr'un mijloc oarecare (¹) — putem înregistrà temperatura *în mod continuu*, punctul variabil M descrie *o linie curbă continuă* C, care reprezintă în mod grafic variația temperaturii bolnavului în tot timpul înregistrării.

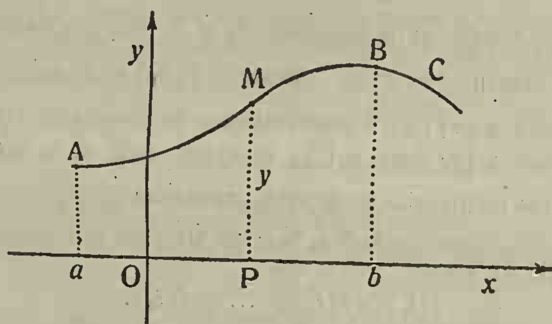


Fig. 43.

266. Funcții definite prin curbe. Putem considerà problema inversă: Să desemnăm în planul xOy o *linie curbă* C, care să fie întâlnită numai intr'un punct de orice dreaptă paralelă cu axa Oy (*fig.* 43).

La fiecare valoare a lui $x=\overline{OP}$, corespunde pe figură o ordonată $y=\overline{PM}$ și un punct M pe curbă. *Ordonata y e o funcție de x definită prin curba* C.

Dacă putem găsì o expresie analitică $f(x)$ (²), astfel ca, pentru fiecare valoare a lui $x=\overline{OP}$, formula $y=f(x)$ să ne dea pentru y tocmai valoarea algebrică a segmentului $\overline{PM}$ corespunzător, dat de curba C, zicem că $y=f(x)$ e *ecuația curbei* C.

(¹) Cu un *termometru înregistrator,* care însemnă temperatura în fiecare moment pe o bandă de hârtie

(²) De exemplu: o expresie algebrică.

Funcţia y astfel determinată, e definită în mod *grafic* prin *curba* C şi în mod *analitic* prin *expresia* $f(x)$ sau prin *ecuaţia* $y=f(x)$.

267. Funcţie crescătoare şi descrescătoare. Fie $y=f(x)$ o funcţie, care capătă valori *reale* pentru $a \leqq x \leqq b$. Dacă dăm lui x două valori diferite x_1 şi x_2, funcţia y capătă şi ea, în general, două valori diferite

$$y_1=f(x_1), \qquad y_2=f(x_2).$$

1°. Dacă, oricare ar fi numerele x_1 şi x_2, cuprinse între a şi b,

$$\text{pentru} \quad x_1<x_2 \quad \text{avem} \quad f(x_1)<f(x_2),$$

zicem că funcţia $y=f(x)$ e *crescătoare* în intervalul (a, b) şi convenim să scriem $y[y_1 \text{ cr. } y_2]$ (y creşte dela y_1 la y_2).

In acest caz pentru orice şir de valori crescătoare

$$\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_n,$$

din intervalul (a, b), avem

$$f(\xi_1)<f(\xi_2)<\ldots<f(\xi_n).$$

2°. Dacă, oricare ar fi numerele x_1 şi x_2 din intervalul (a, b),

$$\text{pentru} \quad x_1<x_2 \quad \text{avem} \quad f(x_1)>f(x_2),$$

zicem că funcţia $y=f(x)$ e *descrescătoare* în intervalul (a, b) şi convenim să scriem $y\,[y_1 \text{ desc. } y_2]$ (y descreşte dela y_1 la y_2).

In acest caz pentru orice şir de valori crescătoare

$$\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_n,$$

din intervalul (a, b), avem

$$f(\xi_1)>f(\xi_2)>\ldots>f(\xi_n).$$

3°. Dacă, oricare ar fi două numere x_1 şi x_2 din intervalul (a, b), avem

$$f(x_1)=f(x_2),$$

zicem că funcţia $f(x)$ e *constantă* în intervalul (a, b).

In oricare din aceste cazuri, când x creşte dela x_1 la x_2, funcţia $y=f(x)$ trece dela valoarea y_1 la valoarea y_2. Diferenţa $x_2-x_1=h$ se numeşte *creşterea variabilei* x, iar diferenţa $y_2-y_1=k$ se numeşte *creşterea funcţiei* y; creşterea k poate fi *pozitivă*, *negativă* sau *nulă*.

Creşterile Δx şi Δy. Uneori e mai comod să însemnăm creşterea variabilei x cu Δx şi creşterea funcţiei y cu Δy. In acest caz la valorile x şi $x+\Delta x$ ale variabilei independente corespund pentru funcţie valorile

$$y=f(x) \tag{8}$$

şi

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x). \tag{9}$$

Scăzând egalitatea (8) din (9), membru cu membru, deducem

(LXXV) $$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad (\textit{creşterea funcţiei}).$$

OBSERVARE. Să nu se confunde Δx cu $\Delta \times x$ şi Δy cu $\Delta \times y$. Simbolurile Δx şi Δy sunt nişte *semne convenţionale*: Δx, ca şi h, reprezintă cantitatea cu cât creşte x; Δy, ca şi k, reprezintă cantitatea (algebrică) cu cât creşte y.

EXEMPLE. 1⁰. Să considerăm funcţia $y = x^2$.

Pentru $x_1 = 1$ şi $x_2 = 1{,}3$ găsim $y_1 = 1$ şi $y_2 = 1{,}69$; adică pentru

$h = 1{,}3 - 1 = 0{,}3$ avem $k = 1{,}69 - 1 = 0{,}69$ *pozitiv*.

Pentru $x_1 = -4$, $x_2 = -3{,}9$ găsim $y_1 = 16$ şi $y_2 = 15{,}21$; adică

pentru $h = (-3{,}9) - (-4) = 0{,}1$

avem $k = 15{,}21 - 16 = -0{,}79$ *negativ*.

In general, pentru două valori x_1 şi x_2 găsim

$$k = y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = h(x_2 + x_1).$$

Pentru $x_1 < x_2 < 0$ avem $h = x_2 - x_1 > 0$, $x_2 + x_1 < 0$ şi $k < 0$ sau $y_1 > y_2$; deci y *descreşte*, când x creşte dela $-\infty$ până la 0. Pentru $0 < x_1 < x_2$ avem $h > 0$, $x_2 + x_1 > 0$ şi $k > 0$ sau $y_1 < y_2$; deci y *creşte*, când x creşte dela 0 până la $+\infty$.

2⁰. Să considerăm funcţia liniară

(I) $$y = 3x + 5.$$

Când dăm lui x o creştere Δx, valoarea acestei funcţii devine

(II) $$y + \Delta y = 3(x + \Delta x) + 5 = 3x + 5 + 3\,\Delta x$$

şi scăzând egalitatea (I) din (II), membru cu membru, obţinem

$$\Delta y = 3\,\Delta x.$$

Prin urmare: pentru $\Delta x > 0$ avem $\Delta y > 0$ adică funcţia $y = 3x + 5$ *creşte*, când x creşte dela $-\infty$ până la $+\infty$.

OBSERVARE. *O funcţie poate fi necontenit crescătoare, fără ca valoarea ei să crească până la* $+\infty$.

Astfel funcţia $y = \dfrac{x-1}{x}$ ne dă

$$y_1 = \frac{x_1 - 1}{x_1}, \qquad y_2 = \frac{x_2 - 1}{x_2}$$

şi pentru $0 < x_1 < x_2$ găsim

$$y_2 - y_1 = \frac{x_2 - 1}{x_2} - \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0,$$

adică y creşte, când $x > 0$ creşte. Dar când $x \to \infty$, $\dfrac{1}{x}$ tinde către *zero* şi $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ *tinde către* 1. Deci y *nu creşte la infinit*.

Tot astfel, *o funcţie poate fi necontenit descrescătoare, fără ca valoarea ei să descrească până la* $-\infty$.

Funcţia $y = x^2$ creşte şi ea, când $x > 0$ creşte; dar când $x \to +\infty$, $y = x^2$ creşte *la infinit*.

In adevăr, pentru $x > 0$ şi destul de mare, y poate deveni *oricât de mare*. Astfel pentru ca y să fie mai mare decât 1000 000 e de ajuns să luăm $x > \sqrt{1000\,000}$ adică $x > 1000$. Pentru ca y să fie mai mare decât un număr N, oricât de mare, e de ajuns să luăm $x > \sqrt{N}$.

Funcţie mărginită. Zicem că o funcţie $f(x)$ e *mărginită* într'un interval (a, b), când, pentru orice valoare a lui x din acest interval, *valoarea funcţiei $f(x)$ rămâne cuprinsă între două numere fixe* A şi B, adică dacă

$$\text{pentru} \quad a \leqq x \leqq b \quad \text{avem} \quad A \leqq f(x) \leqq B.$$

Zicem că o funcţie e *mărginită în vecinătatea unei valori* (*sau unui punct*) x_1, când e mărginită într'un interval $x_1 - \varepsilon$, $x_1 + \varepsilon$, numărul ε putând fi oricât de mic, dar *determinat*.

EXEMPLE. 1°. Funcţia $y = x^2$ pentru x cuprins între -2 şi $+3$ capătă valorile următoare:

x	-2		-1		0		1		2		3
y	4	*desc.*	1	*desc.*	0	*cr.*	1	*cr.*	4	*cr.*	9

deci pentru $-2 \leqq x \leqq 3$ avem $0 \leqq y \leqq 9$. Funcţia $y = x^2$ e *mărginită* în intervalul $(-2, 3)$.

2°. Funcţia $y = \frac{1}{x}$ pentru x cuprins între -1 şi $+1$ capătă valorile următoare:

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-\varepsilon$	0		$+\varepsilon$	$0{,}01$	$0{,}1$	1
y	-1	-10	-100	$-\frac{1}{\varepsilon}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\frac{1}{\varepsilon}$	100	10	1

Când $\varepsilon > 0$ tinde către *zero*, fracţia $\frac{1}{\varepsilon}$ creşte *la infinit*. Prin urmare: când x tinde către zero prin valori *negative* $(-\varepsilon)$, $y = \frac{1}{x}$ tinde către $-\infty$; când x tinde către zero prin valori *pozitive* $(+\varepsilon)$, y tinde către $+\infty$.

Funcţia $y = \frac{1}{x}$, devenind *infinită* în intervalul $(-1, +1)$, *nu* e *mărginită* în acest interval.

268. Pantă. Să considerăm un triunghiu dreptunghic OPM (*fig.* 44) în care o catetă OP să fie *orizontală* şi cealaltă catetă PM *verticală*.

Ipotenuza OM are o *aplecare* sau o *pantă* faţă de cateta orizontală şi convenim să măsurăm această pantă prin raportul

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OP}}$$

dintre cateta verticală şi cateta orizontală.

Mai general, dacă M e un punct oarecare cu coordonatele x şi y, faţă de două axe de coordonate Ox *orizontală* şi Oy *verticală*, convenim să numim **panta segmentului** OM *valoarea algebrică a raportului*

$$\frac{y}{x}.$$

EXEMPLU. Dacă pe figura 44 avem OP = 25 mm. şi PM = 15 mm., coordonatele punctului M sunt $x = 25$, $y = 15$ şi panta segmentului OM este

$$\frac{y}{x} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \qquad \text{(pantă } \textit{pozitivă}\text{)}.$$

Coordonatele punctului M′ (simetricul punctului M faţă de axa Ox) fiind $x = 25$, $y = -15$, panta segmentului OM′ este

$$\frac{y}{x} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5} \qquad \text{(pantă } \textit{negativă}\text{)}.$$

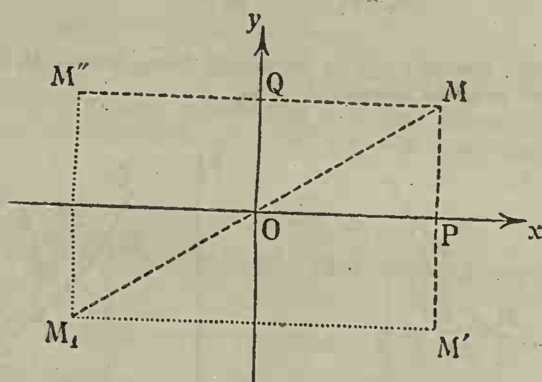


Fig. 44.

Dacă luăm punctele M″ şi M_1, simetricele punctelor M şi M′ faţă de axa Oy, constatăm că panta segmentului OM_1 e egală cu panta segmentului OM şi panta segmentului OM″ e egală cu panta segmentului OM′ (*fig.* 44).

269. Pantă mijlocie. Fie C (*fig.* 45 sau 46) *curba*, care reprezintă în mod grafic variaţia unei funcţii

$$y = f(x)$$

şi fie M şi M′ două puncte vecine, pe această curbă, cu coordonatele (x, y) şi $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ respectiv.

Dacă P e punctul unde dreapta MP, paralelă cu axa Ox, întâlneşte ordonata punctului M′, avem

$$MP = \Delta x, \quad PM' = \Delta y = (y + \Delta y) - y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Raportul acestor creşteri

$$(10) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

care e *panta segmentului* MM′ faţă de axa orizontală $\overrightarrow{MP}$, se numeşte *panta mijlocie a curbei* C între punctele M şi M′.

In general, dacă avem pe curba C două puncte

$$M_1(x_1, y_1) \quad \text{şi} \quad M_2(x_2, y_2),$$

panta mijlocie a curbei C *între* M_1 *şi* M_2 *este raportul dintre diferenţa ordonatelor şi diferenţa absciselor acestor puncte*:

$$(\text{LXXVI}) \qquad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (\textit{pantă mijlocie}).$$

OBSERVARE. Această pantă nu depinde de *forma arcului* M_1M_2; ea depinde numai de *poziţiile punctelor extreme* M_1 şi M_2.

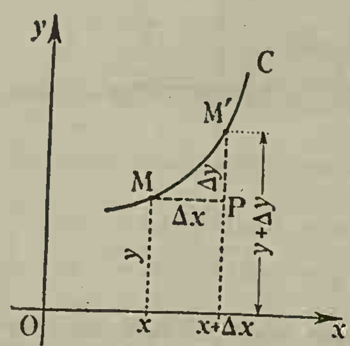


Fig. 45.

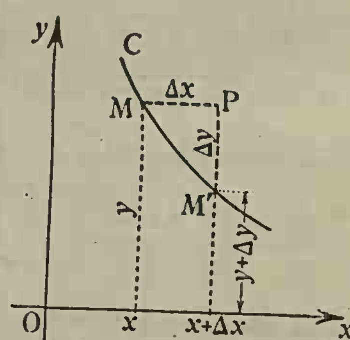


Fig. 46.

Pentru $\Delta x > 0$:

1⁰. Dacă funcţia y e *crescătoare* dela x la $x+\Delta x$, creşterea Δy e *pozitivă* (*fig.* 45); panta mijlocie a curbei între M şi M′ e *pozitivă* şi curba C e *urcătoare* dela M la M′.

2⁰. Dacă funcţia y e *descrescătoare* dela x la $x+\Delta x$, creşterea Δy e *negativă* (*fig.* 46); panta mijlocie a curbei între M şi M′ e *negativă* şi curba C e *scoborîtoare* dela M la M′.

OBSERVARE. Deşi în cazul al doilea valoarea funcţiei *se micşorează*, când trece dela y la $y+\Delta y$ (Δy negativ), convenim să zicem, şi în acest caz, că Δy e *creşterea* funcţiei y (creştere *negativă*).

270. Funcţie continuă. Creşterea funcţiunii

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

depinde de *două variabile* independente: x şi Δx. Putem lăsà pe x constant şi să facem să varieze numai Δx. In acest caz, pentru unele funcţiuni (de exemplu pentru funcţiile reprezentate în figurile 45 şi 46) vedem că, dacă luăm creşterea Δx din ce în ce mai mică, şi creşterea *Δy devine din ce în ce mai mică.*

Să considerăm, în general, o funcţie $y=f(x)$ şi să însemnăm cu x_1 o valoare *determinată* a variabilei independente x. Pentru

(11) $\qquad \Delta x = x - x_1 \quad$ avem $\quad \Delta y = f(x) - f(x_1)$.

Dacă creşterea funcţiunii (Δy) *tinde cătră zero, când creşterea variabilei* ($\Delta x = x - x_1$) *tinde cătră zero*, prin valori pozitive sau negative, *zicem că funcţia* $f(x)$ *e continuă pentru valoarea* x_1 sau *continuă în punctul* x_1.

OBSERVARE. Egalităţile (11) se mai pot scrie

(12) $\qquad x = x_1 + \Delta x \quad$ şi $\quad f(x) = f(x_1+\Delta x) = f(x_1) + \Delta y$.

Când Δx tinde cătră zero, x tinde cătră x_1 şi, dacă funcţia $f(x)$ e *continuă* în punctul x_1, Δy tinde cătră zero, adică $f(x)$ sau $f(x_1+\Delta x)$ *tinde cătră* $f(x_1)$ [190, Observare].

CONDIŢIA DE CONTINUITATE în punctul x_1:

(LXXVII) $\qquad \Delta y = f(x) - f(x_1) \to 0 \quad$ când $\quad \Delta x = x - x_1 \to 0$,

sau

(LXXVIII) $\qquad f(x) \to f(x_1) \quad$ când $\quad x \to x_1$.

Se mai poate zice că o funcţie $f(x)$ e *continuă* pentru $x=x_1$, dacă, la orice număr pozitiv ε, *oricât de mic*, putem face să corespundă un număr pozitiv η, aşà că pentru

$$|\Delta x| = |x - x_1| < \eta \quad \text{să avem} \quad |\Delta y| = |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$$

sau pentru

$$x_1 - \eta < x < x_1 + \eta \quad \text{să avem} \quad f(x_1) - \varepsilon < f(x) < f(x_1) + \varepsilon.$$

O funcţie e *continuă într'un interval* (a, b), când e continuă *pentru fiecare valoare a lui x din acest interval.*

EXEMPLE. 1°. Un binom de gradul întâi $y = ax + b$ e o funcţie *continuă* pentru orice valoare a lui x.

In adevăr, avem

$$f(x) = ax + b, \quad f(x_1) = ax_1 + b$$

şi diferenţa

$$\Delta y = f(x) - f(x_1) = a(x - x_1) = a\,\Delta x$$

tinde cătră zero, când Δx tinde cătră zero.

2°. Un trinom de gradul al doilea

$$(13) \qquad y = ax^2 + bx + c$$

e o funcție *continuă* pentru orice valoare a lui x.

In adevăr, când dăm lui x o creștere Δx, funcția capătă valoarea

$$(14) \qquad y + \Delta y = a(x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2) + b(x + \Delta x) + c.$$

Scăzând egalitatea (13) din (14), deducem

$$\Delta y = (2ax + b)\Delta x + a\Delta x^2$$

și, când Δx tinde către zero, Δy *tinde către zero*, oricare ar fi x.

3°. Se poate constată în mod analog că, dacă $P(x)$ e un polinom întreg în x, funcția $y = P(x)$ e *continuă* pentru orice valoare a lui x.

OBSERVĂRI. Orice funcție definită printr'o *curbă continuă* într'un interval (a, b) e o funcție continuă în acest interval (*fig.* 43, pag. 281).

O funcție $f(x)$ reală și continuă într'un interval (a, b), când trece dela valoarea $f(a)$ la valoarea $f(b)$, *capătă* succesiv *toate valorile reale cuprinse între* $f(a)$ *și* $f(b)$.

271. Funcție discontinuă. Dacă pentru o funcție, mărginită în vecinătatea unei valori x_1, condiția de continuitate (LXXVII) sau (LXXVIII) nu e realizată pentru $x = x_1$, zicem că funcția e *discontinuă în punctul* x_1.

De asemenea, dacă o funcție $f(x)$ *crește la infinit* $(+\infty)$ sau *descrește spre* $-\infty$, când x tinde către o valoare determinată a, zicem că funcția $f(x)$ e *discontinuă în punctul* a.

EXEMPLU. Funcția rațională [188]

$$(15) \qquad y = \frac{1}{x-a}$$

e reală pentru orice valoare reală a lui x. Pentru $x < a$, y e *negativ*; pentru $x > a$, y e *pozitiv*; pentru $x = a$, y e *infinit*.

Pentru $x = a - \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$ foarte mic) avem $y = \frac{1}{-\varepsilon}$, negativ și *foarte mare* în valoare absolută; prin urmare, când $\varepsilon \to 0$, y tinde către $-\infty$.

Pentru $x = a + \varepsilon$, avem $y = \frac{1}{\varepsilon}$, pozitiv și *foarte mare*, dacă ε e destul de mic. Prin urmare, când $\varepsilon \to 0$, y tinde către $+\infty$.

Funcția rațională (15) e *discontinuă* în punctul a. In acest caz zicem că y trece dela $-\infty$ la $+\infty$, când x trece prin valoarea a.

272. Maxim și minim. Dacă există trei numere a, b, c $(a \leqq c \leqq b)$ astfel ca funcția $y = f(x)$, reală în intervalul (a, b), să fie *crescătoare*, când x variază dela a la c și *descrescătoare*, când x variază dela c la b [1], zicem că funcția $f(x)$ *trece printr'un maxim*, *când* x *trece prin valoarea* c sau că funcția $f(x)$ e *maximă* pentru $x = c$.

[1] Intervalul (a, b) poate fi *oricât de mic*.

In acest caz valoarea $f(c)$, pe care o ia funcţia $f(x)$ în punctul c, e *mai mare* decât valoarea funcţiei în oricare alt punct din intervalul (a, b).

EXEMPLE. 1⁰. Funcţia

$$y = 1 - x^2$$

e egală cu 1 pentru $x = 0$ şi *mai mică decât* 1 pentru $x \neq 0$; y trece printr'un *maxim* $(y = 1)$ pentru $x = 0$.

Oricare ar fi un număr pozitiv ε, când x variază dela $-\varepsilon$ la 0, funcţia $y = 1 - x^2$ *creşte* dela $1 - \varepsilon^2$ până la 1 şi când x variază dela 0 la $+\varepsilon$, y *descreşte* dela 0 până la $1 - \varepsilon^2$.

2⁰. Funcţia y definită de curba C (*fig.* 47) e crescătoare dela 0 la a, descrescătoare dela a la b; prin urmare e *maximă* pentru $x = a$. Valoarea maximă a lui y în intervalul $(0, b)$ e M_1.

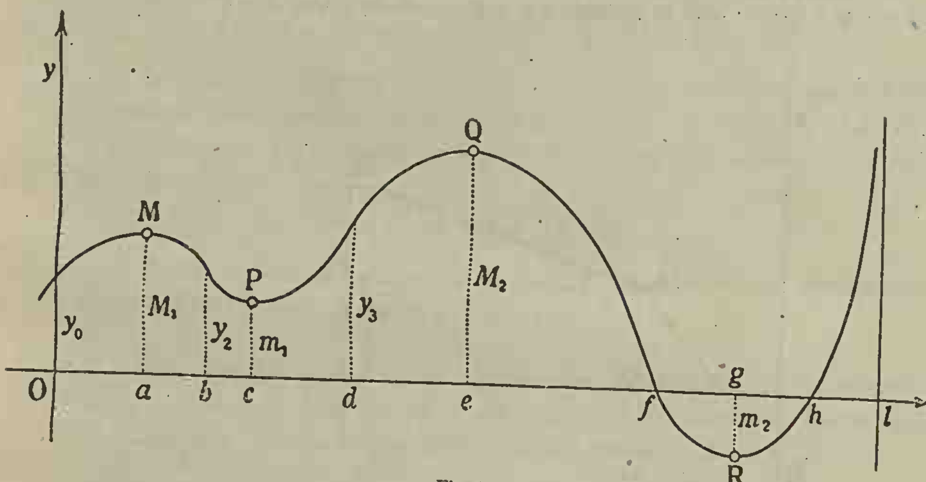


Fig. 47.

Dacă există trei numere a, b, c $(a \leqq c \leqq b)$ astfel ca funcţia $y = f(x)$ să fie *descrescătoare*, când x variază dela a la c şi *crescătoare*, când x variază dela c la b, zicem că *funcţia* $f(x)$ *trece printr'un minim, când x trece prin valoarea c* sau că funcţia $f(x)$ e *minimă* pentru $x = c$.

In acest caz valoarea $f(c)$, pe care o ia funcţia $f(x)$ în punctul c, e *mai mică* decât valoarea funcţiei în oricare alt punct din intervalul (a, b).

EXEMPLE. 1⁰. Funcţia $y = x^2 + 3$ e egală cu 3 pentru $x = 0$ şi *mai mare decât* 3 pentru $x \neq 0$. Când x variază dela -1 până la 0, y descreşte dela 4 la 3; când x variază dela 0 până la 2, y creşte dela 3 la 7. Prin urmare funcţia $y = x^2 + 3$ e *minimă* pentru $x = 0$. Valoarea minimă a funcţiei e $y = 3$.

2⁰. Funcţia y definită de curba C (*fig.* 47) e descrescătoare când x variază dela b la c şi crescătoare când x variază dela c la d; prin urmare e *minimă* pentru $x = c$. Valoarea minimă a lui y în intervalul (b, d) e m_1.

273. Variaţia unei funcţii. A studià *variaţia unei funcţii* $y = f(x)$ însemnează a determinà valorile lui x sau intervalele, în care funcţia y e: 1⁰. *reală* sau *imaginară*; 2⁰. *crescătoare*; 3⁰. *descrescătoare*; 4⁰. *maximă* sau *minimă*; 5⁰. *nulă*; 6⁰. *infinită*; în general *modul cum se succed valorile lui* y, în intervalele unde y e real, *când* x *variază dela* $-\infty$ *până la* $+\infty$.

EXEMPLU. Variaţia funcţiei y definită în mod grafic prin curba C (*fig.* 47) între $x = 0$ şi $x = l$ se poate rezumà în tabloul următor:

x	0		a		b		c		d		e		f		g		h		l
y	y_0	cr.	M_1	desc.	y_2	desc.	m_1	cr.	y_3	cr.	M_2	desc.	0	desc.	m_2	cr.	0	cr.	∞

Funcţia are două *maxime* pentru $x = a$ şi $x = e$; are două *minime* pentru $x = c$ şi $x = g$; e *nulă* în punctele f şi h şi e *infinită* pentru $x = l$.

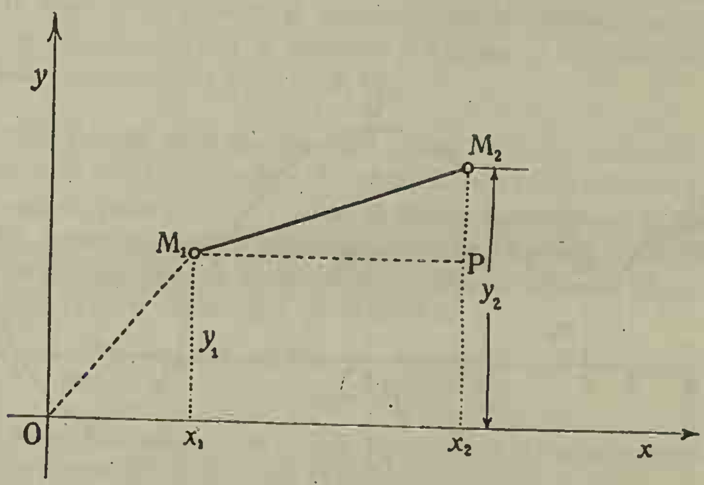


Fig. 48.

274. Distanţa dintre două puncte. Să considerăm în planul xOy două puncte: M_1 cu coordonatele x_1, y_1 şi M_2 cu coordonatele x_2, y_2 (*fig.* 48). Ducând prin M_1 o dreaptă paralelă cu Ox şi prin M_2 o dreaptă paralelă cu Oy, construim un triunghiu dreptunghic M_1PM_2 cu unghiul drept în P.

Coordonatele punctului P sunt $x = x_2$, $y = y_1$ şi avem

$$M_1P = x_2 - x_1, \qquad PM_2 = y_2 - y_1.$$

Distanţa d dintre punctele M_1 şi M_2, adică *ipotenuza* triunghiului dreptunghic M_1PM_2, se poate calculà când cunoaştem coordonatele acestor puncte. In adevăr, formula elementară

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1P}^2 + \overline{PM_2}^2$$

ne dă

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

şi, extrăgând rădăcina patrată din ambii membri, obţinem formula fundamentală:

(LXXIX) $$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \quad (\textit{distanţa dintre două puncte}).$$

OBSERVARE. In această formulă, sensul în care luăm diferenţele dintre abscise sau dintre ordonate (x_1-x_2, y_1-y_2 sau x_2-x_1, y_2-y_1) e *indiferent*, deoarece aceste diferenţe *se ridică la patrat*.

REGULĂ. *Distanţa dintre două puncte e egală cu rădăcina patrată din suma patratelor diferenţei absciselor şi a diferenţei ordonatelor acestor puncte.*

EXEMPLU. Distanţa dintre punctele A (3, —5) şi B (—2, 4) este

$$d = AB = \sqrt{[3-(-5)]^2+[(-1)-4]^2} = \sqrt{89} = 9{,}43.$$

Distanţa dintre un punct şi origine. Dacă punctul M_2 e *originea coordonatelor*, avem $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ şi formula (LXXIX) pentru *distanţa* OM_1 *dintre un punct* M_1 (x_1, y_1) *şi origine* (*fig.* 48) se reduce la

(LXXX) $$d = \sqrt{x_1^2+y_1^2}.$$

EXEMPLU. Distanţa dela punctul M (—2, 4) până la originea coordonatelor este $d = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 4{,}47$.

275. Ecuaţia cercului. Să considerăm: un punct P *fix* cu coordonatele (a, b) şi un punct M cu coordonatele (x, y) *variabile*. Insemnând cu d distanţa dintre aceste două puncte, avem

$$d^2 = (x-a)^2+(y-b)^2.$$

Toate punctele M, care se găsesc la o distanţă determinată de punctul P, $d = r$, sunt aşezate *pe un cerc* C, cu *centrul* în P şi cu *raza* r (*fig.* 49, pag. 292). Când punctul M se mişcă *pe cerc*, coordonatele lui (x, y) variază, dar între aceste coordonate avem întotdauna relaţia

(16) $$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2,$$

care ne exprimă că distanţa MP e egală cu r.

OBSERVARE. Dacă punctul M e *în afară* de cercul C, avem

$$d > r \quad \text{sau} \quad (x-a)^2+(y-b)^2 > r^2.$$

Dacă M e *în interiorul* cercului C, avem

$$d < r \quad \text{sau} \quad (x-a)^2+(y-b)^2 < r^2.$$

Dacă M e *pe cercul* C, avem

$$d = r \quad \text{sau} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Prin urmare: *dacă* M *e un punct de pe cercul* C [1], *coordonatele lui, x și y, formează un sistem de soluții al ecuației* (16) și *reciproc, dacă numerele x și y formează un sistem de soluții al ecuației* (16), *punctul* M cu coordonatele (x, y) *se găsește pe cercul* C.

De aceea zicem că ecuația

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{16}$$

reprezintă *un cerc* și anume e *ecuația cercului* C *cu centrul în punctul* (a, b) *și cu raza* r.

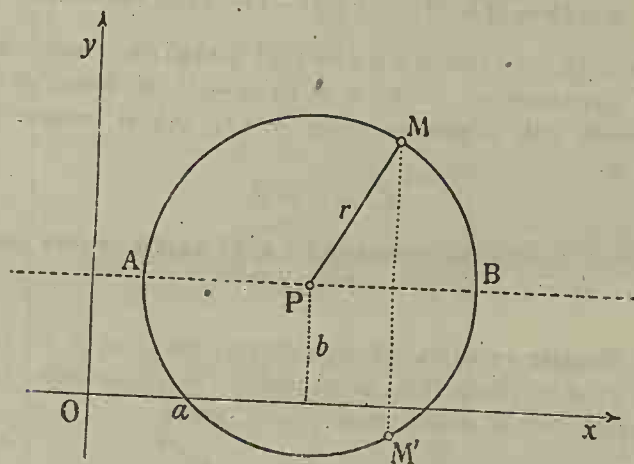


Fig. 49.

EXEMPLE. 1°. Ecuația

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 3,$$

în care avem $a = 2$, $b = -5$, $r^2 = 3$, reprezintă un cerc cu centrul în punctul $(2, -5)$ și cu raza $\sqrt{3}$.

2°. Ecuația cercului cu centrul în punctul $(1, 0)$ și cu raza 1 este

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1 \quad \text{sau} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Ecuația (16) ne definește pe y ca funcție implicită de x. Ecuația fiind de gradul al doilea, pentru fiecare valoare a lui x, ne dă în general *două* valori pentru y. Funcția e deci multiformă (cu două determinări). Variația ei e reprezentată în mod grafic prin *cercul* C.

[1] Adică de pe linia curbă C.

Dacă ducem prin centru o dreaptă AB paralelă cu axa Ox, obţinem două semicercuri, unul *superior* AMB, altul *inferior* AM'B. Aceste semicercuri corespund la cele două determinări ale funcţiei.

In adevăr ecuaţia (16) rezolvată în raport cu y ne dă

(17) $$y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$$

şi

(18) $$y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}.$$

Ecuaţia $y = b$ reprezintă *dreapta* AB [278, 1]. Expresia (17) cu $y > b$ corespunde la *semicercul superior* şi expresia (18) cu $y < b$ corespunde la *semicercul inferior*. Aceste două semicercuri sunt aşezate simetric faţă de dreapta $y = b$.

OBSERVARE. Funcţiile definite prin ecuaţiile (17) şi (18) sunt *uniforme* şi *reale* pentru $a - r \leqq x \leqq a + r$. Variaţia lor e reprezentată în mod grafic prin semicercurile AMB şi AM'B. Pentru $x = a$ funcţia (17) e *maximă* $(y = b + r)$, iar funcţia (18) e *minimă* $(y = b - r)$.

II. — FUNCŢII LINIARE.

276. Binomul $ax+b$. Cea mai simplă funcţie de x e funcţia *liniară* sau *binomul de gradul întâi*:

(19) $$y = ax + b,$$

unde x e variabila independentă, iar a şi b sunt două numere date.

1°. Pentru orice valoare reală şi finită a lui x, binomul $ax + b$ capătă o valoare *bine determinată, reală* şi *finită*.

2°. Dacă a e diferit de zero, *oricare ar fi numărul* y_0, *găsim întotdeauna o valoare şi una singură* $x = x_0$, *pentru care binomul* $ax + b$ *capătă valoarea* y_0.

Această valoare se obţine rezolvând ecuaţia

$$ax + b = y_0$$

şi găsim

$$x = \frac{y_0 - b}{a} = x_0 \qquad \text{(valoare unică)}.$$

EXEMPLU. Binomul $y = 3x - 5$ capătă valoarea -8 pentru

$$x = \frac{-8+5}{3} = \frac{-3}{3} = -1.$$

3°. Semnul binomului. Dacă $x = x'$ e rădăcina ecuaţiei

$$ax + b = 0,$$

avem $x' = -\frac{b}{a}$ şi putem scrie, pentru orice valoare a lui x,

(20) $$y = ax + b \equiv a\left(x + \frac{b}{a}\right) \equiv a(x - x').$$

Diferenţa $x - x'$ e *negativă* pentru $x < x'$, *nulă* pentru $x = x'$ şi *pozitivă* pentru $x > x'$.

Egalitatea (20) ne arată că y are *acelaş semn* sau *semn contrariu* cu $x - x'$, după cum a e *pozitiv* sau *negativ*.

EXEMPLU. Binomul $y = 3x - 5$ are rădăcina $x = \frac{5}{3}$ şi coeficientul $a = 3 > 0$. Prin urmare y e negativ pentru $x < \frac{5}{3}$, nul pentru $x = \frac{5}{3}$ şi pozitiv pentru $x > \frac{5}{3}$.

4°. Funcţia $ax + b$ e *crescătoare* dacă a e *pozitiv* şi *descrescătoare* dacă a e *negativ*.

In adevăr, dacă pentru două valori x_1 şi x_2 avem

$$y_1 = ax_1 + b, \qquad y_2 = ax_2 + b,$$

deducem

(21) $$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Prin urmare: dacă a e *pozitiv*, pentru

$$x_2 - x_1 > 0 \quad \text{avem} \quad y_2 - y_1 > 0$$

adică, pentru $x_1 < x_2$, avem

$$y_1 < y_2 \quad \text{sau} \quad ax_1 + b < ax_2 + b$$

şi funcţia $y = ax + b$ e *crescătoare* [267, 1].

Dacă a e *negativ*, egalitatea (21) pentru

$$x_2 - x_1 > 0 \quad \text{ne dă} \quad y_2 - y_1 < 0$$

adică, pentru $x_1 < x_2$ avem

$$y_1 > y_2 \quad \text{sau} \quad ax_1 + b > ax_2 + b$$

şi funcţia $y = ax + b$ e *descrescătoare* [267, 2].

Dacă a e *nul* avem $y = b$ pentru orice valoare a lui x; binomul $ax + b$ se reduce la o *constantă*.

5°. Dacă a e diferit de zero, *când x tinde către $\pm\infty$, valoarea binomului $ax + b$ tinde către $+\infty$ sau $-\infty$*, având aceeaş limită ca şi produsul ax.

In adevăr, pentru

$$|x| > \left|\frac{b}{a}\right| \quad \text{avem} \quad |ax| > |b|$$

şi semnul binomului $ax + b$ e semnul produsului ax.

Pe de altă parte, când $|x| \to \infty$, atât ax cât şi $ax+b$ *cresc la infinit* în valoare absolută.

Prin urmare, dacă a e *pozitiv*:

$$ax+b \to +\infty \quad \text{când} \quad x \to +\infty,$$
$$ax+b \to -\infty \quad \text{când} \quad x \to -\infty;$$

iar dacă a e *negativ*:

$$ax+b \to -\infty \quad \text{când} \quad x \to +\infty,$$
$$ax+b \to +\infty \quad \text{când} \quad x \to -\infty.$$

EXEMPLU. Pentru binomul $y = -4x+7$

$$y \to -\infty \quad \text{când} \quad x \to +\infty \quad \text{şi} \quad y \to +\infty \quad \text{când} \quad x \to -\infty.$$

277. Variaţia funcţiei $y = ax+b$. Presupunând $b > 0$, variaţia funcţiei $y = ax+b$ se poate rezumà în tablourile următoare:

1⁰. $y = ax+b, \quad a > 0.$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	creşte	0	creşte	b	creşte	$+\infty$

2⁰. $y = ax+b, \quad a < 0.$

x	$-\infty$		0		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	descreşte	b	descreşte	0	descreşte	$-\infty$

In mod analog se discută cazurile 1⁰ şi 2⁰ pentru $b < 0$.

3⁰. $y = b \quad (a = 0).$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	b	b	b	b	b

278. Reprezentarea grafică. Pentru a găsì *linia* prin care se reprezintă în mod grafic variaţia funcţiei

$$y = ax+b, \tag{19}$$

vom începe cu cazurile cele mai simple.

CAZUL 1⁰. $a = 0$. Ecuaţia (19) se reduce la

$$y = b, \tag{22}$$

adică, oricare ar fi x, ordonata y are mereu *aceeaş lungime* b. Astfel

pentru $x = OP_1$ avem punctul M_1 $(P_1M_1 = b)$ (*fig.* 50);
pentru $x = OP_2$ avem punctul M_2 $(P_2M_2 = b)$;
pentru $x = OP_3$ avem punctul M_3 $(P_3M_3 = b)$

şi aşà mai departe.

Obţinem dar un şir de puncte *situate toate pe o aceeaş dreaptă* D *paralelă cu axa* Ox şi la distanţa b de această axă.

Invers, orice punct de pe dreapta D (*fig.* 50) are ordonata egală cu b, adică *satisface la condiţia* $y = b$. De aceea zicem că

$y = b$ *e ecuaţia unei drepte paralele cu axa* Ox.

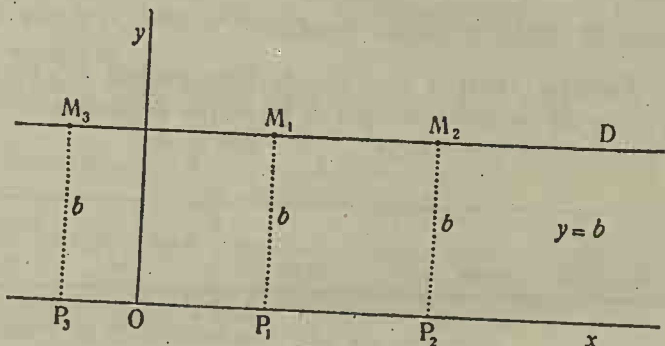


Fig. 50.

Un raţionament analog ne arată că toate punctele, care au *aceeaş abscisă* a se găsesc pe o *aceeaş dreaptă* D′ *paralelă cu axa* Oy şi la distanţa a de această axă.

Invers, toate punctele de pe dreapta D′ satisfac la condiţia $x = a$. De aceea zicem că

$x = a$ *e ecuaţia unei drepte paralele cu axa* Oy.

Cazul 2⁰. $b = 0$. Ecuaţia (19) se reduce la

(23) $$y = ax,$$

care pentru fiecare valoare a lui x ne dă câte o valoare pentru y şi câte un punct M în plan cu coordonatele (x, y).

Dacă a e *pozitiv*, pentru $x < 0$ avem $y < 0$ şi punctele M corespunzătoare se găsesc în regiunea (III) faţă de axele Ox, Oy [263]; pentru $x > 0$ avem $y > 0$ şi punctele M se găsesc în regiunea (I).

Dacă a e *negativ*, pentru $x < 0$ avem $y > 0$ şi punctele corespunzătoare se găsesc în regiunea (II); pentru $x > 0$ avem $y < 0$ şi punctele se găsesc în regiunea (IV).

TEOREMĂ. *Toate punctele* M, *ale căror coordonate satisfac la o aceeaș ecuație de forma* $y = ax$, *sunt situate pe o aceeaș dreaptă, care trece prin origine.*

Fie M_1 (*fig.* 51) un punct cu coordonatele

$$x_1 = OP_1, \qquad y_1 = P_1M_1,$$

care satisfac la condiția $y_1 = ax_1$ și fie D dreapta OM_1, care trece prin *origine* și prin punctul M_1.

Vom demonstrà că *orice alt punct* M, *ale cărui coordonate* (x, y) *satisfac la ecuația* $y = ax$, *se găsește pe dreapta* D.

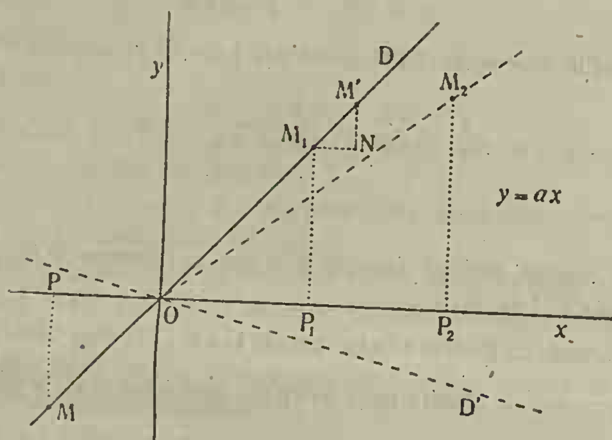


Fig. 51.

In adevăr, dacă M_2 $(x_2 = OP_2,\ y_2 = P_2M_2)$ e un punct ale cărui coordonate satisfac la ecuația (23) și care e situat în aceeaș regiune cu M_1 față de axele Ox, Oy, din egalitățile

$$y_1 = ax_1 \qquad \text{și} \qquad y_2 = ax_2$$

deducem

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \qquad \text{sau} \qquad \frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{P_2M_2}{OP_2}.$$

Prin urmare triunghiurile dreptunghice OP_1M_1 și OP_2M_2 sunt *asemenea*; unghiurile M_1OP_1 și M_2OP_2 sunt *egale* și cum ele au o latură comună (Ox), un vârf comun (O) și laturile necomune OM_1 și OM_2 așezate *de aceeaș parte* a axelor Ox și Oy, rezultă că *direcția* OM_2 *se confundă cu* OM_1 sau că *punctul* M_2 *se găsește pe dreapta* D.

Dacă punctele M_1 (x_1, y_1) și M (x, y), ale căror coordonate satisfac la condițiile

$$y_1 = ax_1 \qquad \text{și} \qquad y = ax,$$

sunt situate în regiuni *opuse*, un raţionament analog ne arată că unghiurile P_1OM_1 şi POM sunt egale şi cum laturile OP şi OP_1 sunt în prelungire, rezultă că şi laturile OM şi OM_1 sunt în prelungire şi *punctul* M *e tot pe dreapta* D.

Reciproc. Dacă D e dreapta, care trece prin origine şi prin punctul M_1 (x_1, y_1) şi dacă însemnăm cu a raportul $\frac{y_1}{x_1}$, *coordonatele* (x, y) *ale oricărui punct* M *de pe dreapta* D *satisfac la ecuaţia* $y = ax$.

In adevăr, dacă M e un punct situat pe dreapta OM_1 (D), avem

$$x = OP, \qquad y = PM$$

şi triunghiurile asemenea OPM şi OP_1M_1 (*fig.* 51), ne dau

$$\frac{y}{x} = \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{y_1}{x_1} = a$$

sau

$$y = ax.$$

Prin urmare variaţia funcţiei $y = ax$ se reprezintă în mod grafic prin *dreapta* D (*fig.* 51).

De aceea în geometria analitică (¹) vom zice că

$y = ax$ *e ecuaţia unei drepte, care trece prin origine.*

OBSERVARE. Dacă $y = f(x)$ e ecuaţia unei curbe C, ca să putem spune dacă un punct M_1 (x_1, y_1) se găseşte (sau nu) pe curba C, e deajuns să căutăm dacă coordonatele x_1, y_1 satisfac (sau nu) la ecuaţia $y = f(x)$.

Astfel *originea* se găseşte pe dreapta $y = ax$ (sau dreapta $y = ax$ *trece prin origine*), fiindcă coordonatele originei, $x = 0$, $y = 0$, satisfac la ecuaţia $y = ax$.

Panta dreptei. Să luăm pe dreapta D (*fig.* 51) două puncte M_1 (x_1, y_1) şi $M'(x', y')$. *Raportul dintre diferenţa ordonatelor*

$$y' - y_1 = \Delta y = NM'$$

şi diferenţa absciselor

$$x' - x_1 = \Delta x = M_1N$$

adică

$$p = \frac{y' - y_1}{x' - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{24}$$

este *panta mijlocie a dreptei* D *între punctele* M_1 *şi* M' [269].

(¹) In geometria analitică se înlocueşte fiecare *figură* printr'o *ecuaţie* şi se stabilesc proprietăţile figurilor din studiul ecuaţiilor corespunzătoare.

Dar, oricare ar fi punctele M_1 şi M' pe dreapta D, triunghiul dreptunghic M_1NM' e *asemenea* cu OP_1M_1 şi avem

$$\frac{NM'}{M_1N} = \frac{P_1M_1}{OP_1}$$

sau

$$p = \frac{y' - y_1}{x' - x_1} = \frac{y_1}{x_1} = a.$$

Raportul acesta constant a se numeşte *panta dreptei* D.

Ecuaţia $y = ax$ reprezintă *o dreaptă, care trece prin origine şi are panta a.*

EXEMPLU. Ecuaţia $y = 3x$ reprezintă o dreaptă care trece prin origine şi are panta 3 sau $\frac{3}{1}$.

Unghiul dreptei cu axa Ox. Panta dreptei $y = ax$ ne determină *aplecarea* ei faţă de axa Ox.

Pentru $x = 1$, avem $y = a$. Există dar, pe dreapta D cu panta a, un punct A *cu coordonatele* $(1, a)$.

Fie α unghiul $xOA \leqq 90^0$, pe care-l face direcţia OA cu Ox (*fig.* 52, pag. 300). Convenim să dăm un *sens* acestui unghiu şi anume sensul *dela* Ox *spre* OA. Ox e latura *origine* iar OA latura *extremitate*. Astfel unghiul xOA devine o mărime *dirijată* şi măsura lui se reprezintă printr'un *număr algebric*.

Pentru a preciză *sensul* unghiului α, vom zice unghiul xOA sau unghiul (Ox, OA), spunând, ca şi la segmentele dirijate, întâi originea şi apoi extremitatea [24].

Dacă sensul, în care s'ar roti o semidreaptă OΔ în jurul punctului O, ca să descrie unghiul α dela *origine* (Ox) spre *extremitate* (OA), e *contrar* cu sensul de rotaţie al acelor unui ceasornic, zicem că unghiul α e *pozitiv*; în cazul contrariu unghiul e *negativ*.

EXEMPLE. Pe figura 52 unghiul xOD sau (Ox, OD) e *pozitiv* şi egal cu $+30^0$, pe când unghiul xOD' sau (Ox, OD') e *negativ* şi egal cu -40^0.

Relaţia dintre pantă şi unghiu. Dacă a e panta unei drepte reprezentată prin ecuaţia

$$y = ax,$$

la fiecare valoare a numărului a, dela $-\infty$ până la $+\infty$, corespunde câte *un punct* A cu coordonatele $(1, a)$, *o direcţie* OA şi *un unghiu* (Ox, OA) cu valoarea α.

Pentru $a = 0$ avem $\alpha = 0$; direcţia OA se confundă cu Ox.

Pentru $a > 0$ unghiul α e *pozitiv*; semidreapta OA e deasupra axei Ox (*fig* 52). Când a crește și α crește.

Pentru $a = 1$ triunghiul OPA e isoscel; avem $OP = PA = 1$ și $\alpha = 45^0$. Direcția OA e bisectoarea unghiului xOy.

Când a tinde către $+\infty$, direcția OA tinde să se confunde cu Oy: unghiul α tinde către 90^0.

Pentru $a < 0$ unghiul α e *negativ*; semidreapta OA e dedesubtul axei Ox (direcția OD′ pe *fig*. 52). Când a crește în valoare absolută și α negativ crește în valoare absolută.

Pentru $a = -1$ avem $\alpha = -45^0$; OA e bisectoarea unghiului xOy'.

Când a tinde către $-\infty$, direcția OA tinde să se confunde cu Oy': unghiul α tinde către -90^0.

Coeficientul a, care ne determină unghiul α, pe care-l face dreapta $y = ax$ cu axa Ox, se mai numește *coeficientul unghiular* al acestei drepte.

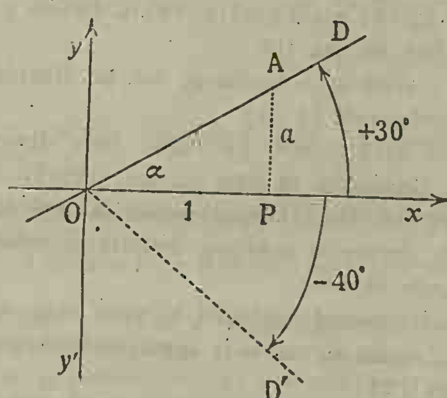


Fig. 52.

Construcția dreptei. Ca să construim dreapta

(D) $$y = ax$$

e de ajuns să determinăm *două puncte* ale ei.

Un punct e *originea* coordonatelor O ($x = 0$, $y = 0$). Ca al doilea punct poate fi luat punctul A ($x = 1$, $y = a$) sau oricare alt punct M_1 ($x = x_1$, $y = ax_1$). Unind originea O cu punctul A (sau cu M_1) avem direcția dreptei D.

Dacă panta a e *pozitivă*, dreapta D e *urcătoare* (direcția OD, *fig*. 52); dacă panta a e *negativă* dreapta D e *scoborîtoare* (direcția OD′).

Observări. Dreptele reprezentate prin ecuațiile

$$y = ax \quad \text{și} \quad y = -ax$$

sunt *simetrice* față de axa Ox.

Dreapta $y=x$, având panta 1, e bisectoarea unghiului xOy.
Dreapta $y=-x$, având panta -1, e bisectoarea unghiului xOy'.

Dacă dreapta D ($y=ax$) e construită pe o hârtie milimetrică, ea ne determină în mod grafic *produsul numărului a cu orice număr real.*

In adevăr, dacă n e un număr real, luând pe axa Ox abscisa $OP=n$ și ducând prin P o paralelă la Oy, determinăm pe dreapta D un punct M cu abscisa n. Produsul an se obține măsurând *lungimea ordonatei* PM.

279. Cazul general: $a \neq 0$, $b \neq 0$. Avem ecuația

$$y=ax+b. \tag{25}$$

Pentru $x=0$ avem $y=b$. Prin urmare linia reprezentată prin ecuația (25) trece prin punctul N $(0, b)$, adică taie axa Oy la distanța b dela origine.

Pentru orice altă valoare a lui x, ordonata y se compune din *două părți*: ax și b. Valorile produsului ax sunt date de ordonatele dreptei D' ($y=ax$). Fie D'' dreapta $y=b$ (*fig.* 53).

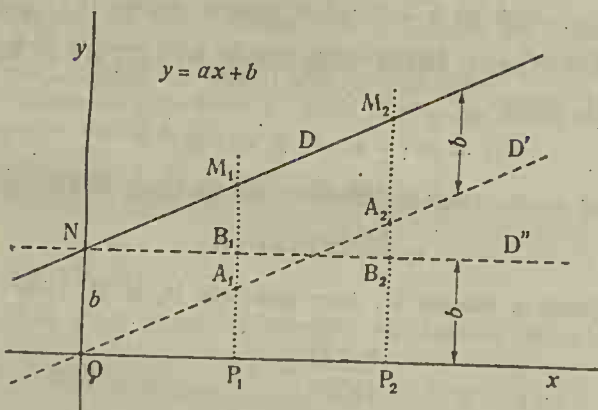


Fig. 53.

Pentru a construi ordonata y_1 a unui punct M_1 de pe linia (25), care corespunde la $x=x_1$, observăm că, în suma

$$y_1 = ax_1 + b.$$

ax_1 e ordonata punctului A_1 de pe dreapta D' și b e ordonata punctului corespunzător B_1 de pe dreapta D''; trebue dar să adunăm la segmentul $P_1A_1 = ax_1$, segmentul $A_1M_1 = P_1B_1 = b$.

De aci rezultă că segmentele ON și A_1M_1 sunt *egale* și *paralele*; patrulaterul NOA_1M_1 e un *paralelogram* și *dreapta* NM_1 *e paralelă cu* D'.

In acelaș fel se determină oricare alt punct M_2 cu coordonatele x_2, y_2, care satisfac la egalitatea $y_2 = ax_2 + b$. Dreapta NM_2 e și ea paralelă cu D' și, cum trece tot prin N, *se confundă cu dreapta* NM_1.

De aci rezultă următoarea

TEOREMĂ. *Toate punctele, ale căror coordonate satisfac la ecuația* $y = ax + b$ *sunt situate pe o aceeaş dreaptă, care taie axa* Oy *la distanța* b *dela origine şi care e paralelă cu dreapta* $y = ax$.

Reciproc. Fie D′ dreapta $y = ax$ şi D dreapta *paralelă* cu D′, dusă prin punctul N cu coordonatele $(0, b)$.

Coordonatele oricărui punct de pe dreapta D *satisfac la ecuația*

$$y = ax + b.$$

In adevăr, dacă $M_2\ (x_2, y_2)$ e un punct situat pe dreapta D şi dacă ordonata P_2M_2 e tăiată de dreapta D′ în punctul A_2, avem

$$P_2A_2 = ax_2, \qquad A_2M_2 = ON = b,$$

deci

$$y_2 = P_2M_2 = ax_2 + b.$$

De aceea zicem că $y = ax + b$ e *ecuația dreptei* D (*fig.* 53).

Panta dreptei. Luând două puncte $M_1\ (x_1, y_1)$ şi $M_2\ (x_2, y_2)$ pe dreapta D, avem

$$y_1 = ax_1 + b, \qquad y_2 = ax_2 + b.$$

Scăzând aceste egalități, membru cu membru, deducem

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

şi panta mijlocie a dreptei D, între punctele M_1 şi M_2 [269] este

$$(26) \qquad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Dacă punctele M_1 şi M_2 sunt pe o *linie curbă* C şi dacă, lăsând punctul M_1 fix, mişcăm punctul M_2 pe curba C apropiindu-l sau depărtându-l de M_1, panta mijlocie a curbei între M_1 şi M_2 *variază*, în general, *cu poziția punctului* M_2.

Dar dacă punctele M_1 şi M_2 sunt pe o *linie dreaptă* D, egalitatea (26) ne arată că *panta mijlocie a dreptei* D *păstrează aceeaş valoare* a, oricare ar fi punctele M_1 şi M_2.

De aceea zicem că

a e *panta dreptei* $y = ax + b$.

Coeficientul b, care e ordonata punctului N, unde dreapta D taie axa Oy, se numeşte *ordonata la origine* a dreptei.

Unghiul dreptei cu axa Ox. Dreapta

$$(D) \qquad y = ax + b$$

fiind paralelă cu

$$(D') \qquad y = ax$$

face cu axa Ox acelaş unghiu ca şi D'.

Ecuaţia unei alte drepte D_1 paralelă cu D', dar care taie axa Oy la distanţa b_1 dela origine, este

$$(D_1) \qquad y = ax + b_1.$$

Dreptele D_1 şi D fiind paralele cu D' sunt *paralele între ele*.

Prin urmare: *toate dreptele paralele între ele* adică *toate dreptele, care fac acelaş unghiu cu axa* Ox, *au aceeaş pantă* şi reciproc *toate dreptele, care au aceeaş pantă* a, *fac acelaş unghiu* α *cu axa* Ox.

De aceea a se mai numeşte *coeficientul unghiular* al dreptei D.

OBSERVARE. *La fiecare valoare a lui* a (pozitivă sau negativă) *corespunde un unghiu* α şi *reciproc*. Unghiul α se poate construi uşor. Determinând punctul A ($x=1$, $y=a$), unghiul α e unghiul xOA sau (Ox, OA).

Prin urmare a e o funcţie de α. Există table, care ne dau valoarea pantei a, când se cunoaşte unghiul α şi reciproc.

Construcţia dreptei. Dreapta

$$(D) \qquad y = ax + b$$

poate fi determinată:

1⁰. *Prin două puncte.* Observăm că această dreaptă trece prin punctele

$$N(x=0,\ y=b), \qquad M(x=1,\ y=a+b).$$

Dreapta D e dreapta NM.

In loc de punctele N şi M putem luà oricare alte două puncte de pe dreapta D

$$M_1(x_1,\ y_1=ax_1+b), \qquad M_2(x_2,\ y_2=ax_2+b).$$

2⁰. *Printr'un punct şi o dreaptă paralelă cu ea.* Putem luà ca *punct* punctul N(0, b) de pe axa Oy sau oricare alt punct $M_1(x_1, y_1 = ax_1 + b)$ de pe dreapta D şi ca *paralelă* dreapta D' cu ecuaţia $y = ax$.

Dreapta D e dreapta paralelă cu D' dusă prin punctul N (sau prin M_1).

OBSERVARE. Când panta a variază, dreapta D *se roteşte în jurul punctului* N.

Când b variază, dreapta D se mişcă în plan rămânând *paralelă cu ea însăşi*, fiindcă e necontenit paralelă cu D'.

EXEMPLU. Ecuaţia

(27) $$y = \frac{5}{8}(x+1)$$

reprezintă o *dreaptă*. Dacă facem pe $x=0, 1, 2, 3, \dots$ sau $x=-1, -2, \dots$ şi calculăm valorile lui y date de ecuaţia (27), obţinem coordonatele şi punctele următoare:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{15}{8}$	$2,5$	...
Punctul	...	A	B	C	D	E	F	...

Toate aceste puncte sunt aşezate în *linie dreaptă* (*fig.* 54).

Dreapta reprezentată de ecuaţia (27) e dreapta AF. Ea taie axa Ox în punctul B $(-1, 0)$ şi axa Oy în punctul C $\left(0, \frac{5}{8}\right)$.

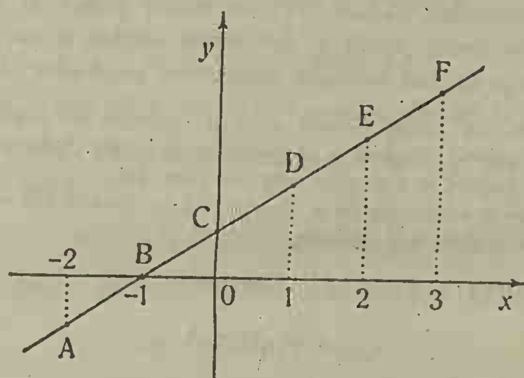


Fig. 54.

Panta ei este coeficientul lui x, adică $\frac{5}{8}$. *Unghiul* α al dreptei cu axa Ox este unghiul ascuţit B dela baza triunghiului dreptunghic BOC $\left(BO=1,\ OC=\frac{5}{8}\right)$ sau unghiul ascuţit B dela baza unui triunghiu dreptunghic BPM cu unghiul drept în P, cu cateta verticală $PM=5$ şi cu cateta orizontală $BP=8$.

Panta $\frac{5}{8}$ fiind *pozitivă*, unghiul α e *pozitiv*; dreapta e *urcătoare* şi funcţia y e *crescătoare*. y e pozitiv pentru $x>-1$, nul pentru $x=-1$ şi negativ pentru $x<-1$.

280. **Ecuaţia generală de gradul întâi.** Să considerăm ecuaţia generală de gradul întâi cu două necunoscute

(28) $$Ax+By+C=0.$$

Dacă B e *diferit de zero*, ecuaţia se poate rezolvà în rapot cu y şi ne dă funcţia explicită

(29) $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

care e de forma

$$(30) \qquad y = ax + b \quad \text{cu} \quad a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Prin urmare reprezentarea grafică a funcţiei y, definită prin ecuaţia (28), este o *dreaptă* D cu panta $-\frac{A}{B}$ şi cu ordonata la origine $-\frac{C}{B}$ [279].

Orice punct M, *ale cărui coordonate* (x, y) *satisfac la ecuaţia* (28) *se găseşte pe dreapta* D şi reciproc *coordonatele oricărui punct de pe dreapta* D *satisfac la ecuaţia* (30) şi prin urmare *şi la ecuaţia* (28).

De aceea zicem că

$$Ax + By + C = 0 \quad \textit{e ecuaţia unei drepte.}$$

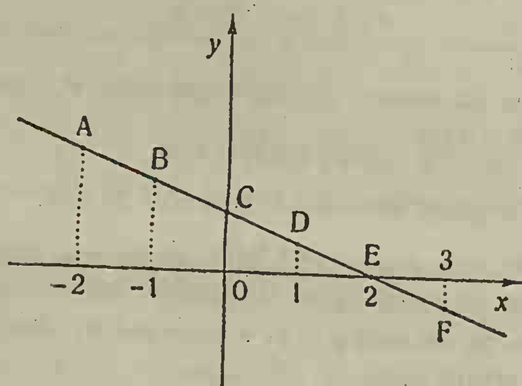


Fig. 55.

EXEMPLU. Ecuaţia

$$(31) \qquad 2x + 5y - 4 = 0$$

reprezintă o linie *dreaptă*. Inţelegem că, dacă dăm variabilei x diferite valori şi calculăm valorile corespunzătoare ale lui y, *date de ecuaţia* (31),

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	1.6	1.2	0.8	0.4	0	-0.4	...
Punctul	...	A	B	C	D	E	F	...

toate punctele A $(-2, 1.6)$, B $(-1, 1.2)$, ..., cu coordonatele astfel obţinute, sunt situate *pe o aceeaş linie dreaptă* (*fig.* 55).

Ecuaţia (31) e de forma (28), in care avem

$$A = 2, \quad B = 5, \quad C = -4.$$

Rezolvată în raport cu y ne dă funcția explicită

(32) $$y = -\frac{2x}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2}{5}(2-x),$$

care ne arată că dreapta (31) are

$$\textit{panta} \quad -\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}$$

și

$$\textit{ordonata la origine} \quad \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Unghiul α, pe care-l face această dreaptă cu axa Ox, este unghiul MOx, pe care-l obținem luând punctul M cu abscisa 5 (numitorul pantei) și cu ordonata -2 (numărătorul pantei) și unind punctul M cu O.

Panta dreptei (32) e *negativă*, unghiul α e *negativ*; dreapta e *scoborîtoare*, funcția y e *descrescătoare*.

y e pozitiv pentru $x < 2$, nul pentru $x = 2$ și negativ pentru $x > 2$.

P u n c t p e d r e a p t ă. Ca să găsim coordonatele unui punct M_1 de pe dreapta

(D) $$Ax + By + C = 0,$$

procedăm astfel:

Dacă ni se dă abscisa $x = x_1$ a punctului M_1, înlocuind pe x prin x_1 rezolvăm ecuația

$$Ax_1 + By + C = 0$$

în raport cu y și găsim că ordonata punctului M_1 este

$$y = -\frac{Ax + C}{B} = y_1.$$

Dacă ni se dă ordonata $y = y_1$ a punctului M_1, abscisa lui se obține rezolvând ecuația

$$Ax + By_1 + C = 0$$

în raport cu x.

In particular, *punctul unde dreapta taie axa* Ox se obține înlocuind în ecuația dreptei pe y prin 0 și rezolvând ecuația $Ax + C = 0$.

Găsim astfel $x = -\frac{C}{A}$, $y = 0$.

Punctul unde dreapta taie axa Oy se obține înlocuind în ecuația dreptei pe x prin 0 și rezolvând ecuația $By + C = 0$.

Găsim astfel $x = 0$, $y = -\frac{C}{B}$.

C o n s t r u c ț i a d r e p t e i. Ca să construim dreapta dată printr'o ecuație de forma

(28) $$(D) \quad Ax + By + C = 0,$$

e de ajuns să-i determinăm *două puncte* ale ei. Putem, de exemplu, să căutăm punctele unde dreapta taie axele de coordonate, adică punctele de pe dreapta D, care au sau abscisa sau ordonata *nulă*.

EXEMPLŬ. Ecuaţia

(31) $$2x+5y-4=0$$

pentru $x=0$ ne dă $y=\frac{4}{5}=0{,}8$ adică punctul C pe axa Oy (*fig.* 55);
pentru $x=1$ ne dă $y=\frac{2}{5}=0{,}4$ adică punctul D.

Dreapta reprezentată prin ecuaţia (31) este dreapta CD. Ea taie axa Ox în punctul E (2, 0) şi axa Oy în punctul C $\left(0,\ \frac{4}{5}\right)$.

OBSERVARE. Două ecuaţii liniare în x şi y cu coeficienţi *proporţionali*

(33) $$Ax+By+C=0$$

şi

(34) $$pAx+pBy+pC=0$$

reprezintă *aceeaş dreaptă.*

In adevăr, rezolvând aceste ecuaţii în raport cu y, obţinem

(35) $$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

şi

(36) $$y=-\frac{pA}{pB}x-\frac{pC}{pB}=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Aceste două drepte, având aceeaş pantă şi aceeaş ordonată la origine, *se confundă.*

281. Cazuri particulare. Pentru ca ecuaţia generală (28) să conţină cel puţin una din variabile, x sau y, trebue ca sau A sau B să fie *diferit de zero.*

1⁰. $A=0$, $B\neq 0$. Ecuaţia (28) se reduce la

(37) $$By+C=0 \quad \text{sau} \quad y=-\frac{C}{B}=y_0.$$

Dreapta e paralelă cu axa Ox [278, 1] şi la distanţa y_0 dela această axă [1]. Unghiul, pe care-l face dreapta (37) cu axa Ox, e *nul* şi panta dreptei e *nulă.*

2⁰. $B=0$, $A\neq 0$. Ecuaţia (28) se reduce la

(38) $$Ax+C=0 \quad \text{sau} \quad x=-\frac{C}{A}=x_0.$$

Dreapta e paralelă cu axa Oy [278, 1] şi la distanţa x_0 dela această axă. Unghiul, pe care-l face dreapta (37) cu axa Ox e de 90^0 şi panta dreptei e *infinită.*

---

(1) Inţelegem la distanţa $|y_0|$ dela axa Ox: *deasupra* acestei axe dacă y_0 e pozitiv şi *dedesubt* dacă y_0 e negativ.

3^0. $C = 0$, $B \neq 0$. Ecuaţia (28) se reduce la

(39) $$Ax + By = 0 \quad \text{sau} \quad y = -\frac{A}{B}x = mx.$$

Dreapta trece prin origine [278, 2] şi are panta $m = -\frac{A}{B}$.

282. **Tangenta la cerc.** Să considerăm un *cerc* cu centrul în O. Fie A şi B două puncte de pe cerc; dreapta AB sau AS, care taie cercul în punctele A şi B, e o *secantă* (*fig.* 56).

Cât timp punctele A şi B sunt *distincte*, direcţia secantei AS e perfect determinată, cel puţin teoretic.

E evident că în practică, dacă distanţa dintre punctele A şi B e foarte mică (de ex. de 1 mm. sau de 0,1 mm.) direcţia AS e cu totul nedeterminată.

In *teorie* însă, oricât de mică ar fi distanţa AB, îndată ce nu e riguros *nulă*, direcţia AB se consideră ca perfect de bine determinată.

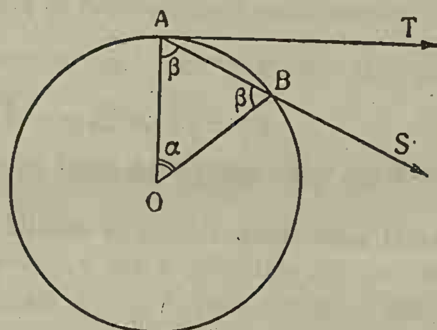


Fig. 56.

Să lăsăm punctul A fix şi să mişcăm punctul B pe cerc, *apropiindu-l de* A. In fiecare poziţie a punctului B (diferit de A) direcţia AS e bine determinată.

Când B *tinde către* A, *direcţia secantei* AS *tinde către direcţia limită* AT, care e *tangenta la cerc în punctul* A.

OBSERVARE. Când se consideră tangenta AT ca o dreaptă ce trece prin două puncte A şi B *confundate*, direcţia ei e nedeterminată. Când se consideră însă ca *limita* poziţiilor succesive ale secantei AS, când B tinde către A, poziţia tangentei în punctul A e perfect determinată.

In cazul *cercului*, dacă dreapta AB e o secantă, în triunghiul isoscel AOB (*fig.* 56) avem

$$\alpha + 2\beta = 180^0.$$

Când punctul B tinde către A, unghiul α tinde către *zero* şi unghiul OAS $= \beta$ tinde către 90^0. Prin urmare: *poziţia limită* a secantei AS adică *tangenta* AT, *e perpendiculară pe raza* OA.

283. Panta unei curbe într'un punct. Fie C o curbă reprezentată prin ecuaţia

(40) $$(C) \quad y = f(x).$$

Să luăm pe această curbă două puncte apropiate

$$M_1(x_1, y_1) \quad \text{şi} \quad M_2(x_2, y_2).$$

Dreapta M_1M_2 e o *secantă* la curba C (*fig.* 57).

Panta ei e raportul

(41) $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\textit{panta secantei})$$

dacă coordonatele punctului M_2 sunt $x_2 = x_1 + \Delta x$ şi $y_2 = y_1 + \Delta y$.

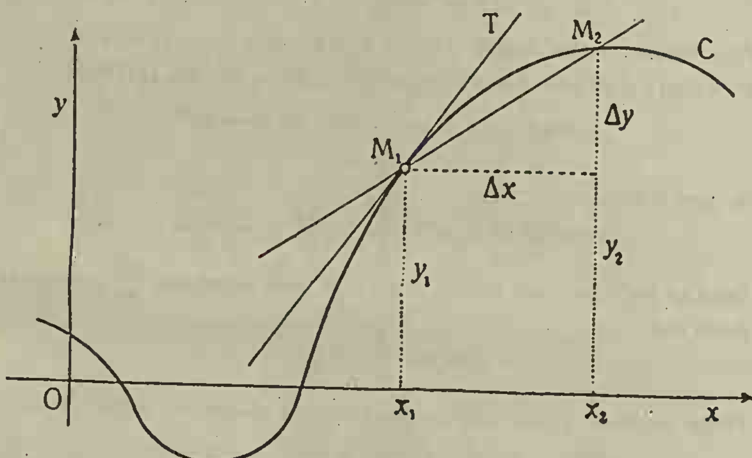


Fig. 57.

Să lăsăm punctul M_1 fix şi să mişcăm punctul M_2 pe curba C apropiindu-l de M_1.

Când M_2 *tinde către* M_1, *direcţia secantei* M_1M_2 *tinde către o poziţie limită* M_1T, care se numeşte *tangenta la curbă în punctul* M_1; diferenţele Δx şi Δy tind fiecare către *zero*, dar raportul lor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tinde către *panta tangentei* M_1T, pe care o vom însemna-o cu p.

Avem dar

(LXXXI) $$p = \textit{panta tangentei} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

când Δx tinde către *zero*.

Panta secantei M_1M_2 e *panta mijlocie* a curbei C între punctele M_1 şi M_2; ea variază, în general, când M_2 variază.

Limita acestei pante, când M_2 tinde către M_1, adică *panta tangentei* M_1T, se numeşte *panta curbei în punctul* M_1.

EXEMPLE. 1º. Panta unei drepte într'un punct al ei. Ca să determinăm panta unei drepte $y=ax+b$ într'un punct al ei $M(x, y)$, luăm pe această dreaptă un punct vecin $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$, și căutăm *limita raportului* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *când* Δx *tinde spre zero.*

Din egalitățile

$$y+\Delta y = a(x+\Delta x)+b$$
$$y = ax+b$$

deducem, prin scădere,

$$\Delta y = a\,\Delta x \quad \text{sau} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ având valoarea constantă a pentru orice valoare a creșterii Δx, rezultă că și pentru $\Delta x \to 0$ avem

(42) $$p = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Prin urmare: *panta dreptei* $y=ax+b$, în orice punct al ei, e a.

2º. Panta curbei $y=x^2$. Procedând în acelaș fel, din egalitățile

$$y+\Delta y = (x+\Delta x)^2 = x^2+2x\,\Delta x+\Delta x^2$$
$$y \qquad\qquad = x^2$$

deducem, prin scădere,

$$\Delta y = 2x\,\Delta x+\Delta x^2 \quad \text{și} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x+\Delta x.$$

Când Δx *tinde spre zero,* oricare ar fi x, *valoarea raportului* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *se reduce la* $2x$. Avem dar

(43) $$p = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x.$$

Panta parabolei $y=x^2$ într'un punct M_1, cu abscisa x_1, e $2x_1$. Astfel:

pentru	$x=0$	avem	$y=0$	și	$p=0$;	
pentru	$x=1$	avem	$y=1$	și	$p=2$,	
pentru	$x=2$	avem	$y=4$	și	$p=4$,	etc.

Derivată. Curba C (*fig.* 57) are o *ordonată* y și o *pantă* p în fiecare punct al ei. Când x variază și ordonata și panta variază, în general:

y și p sunt *funcții* de x.

Funcția y e definită prin expresia $f(x)$. Funcția p e definită prin

(LXXXI) $$p = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

când Δx *tinde spre zoro.* Această limită se numește *derivata* funcției $y=f(x)$ și se reprezintă prin simbolul y' sau $f'(x)$.

EXEMPLE. Din exemplele precedente rezultă că

derivata funcției	$y=ax+b$	e	$y'=a$;
derivata funcției	$y=x^2$	e	$y'=2x$.

Regulă. Când ni se dă ecuaţia $y = f(x)$ a unei curbe C, *ordonata* şi *panta* curbei C, într'un punct M, cu abscisa x, se calculează prin formulele următoare:

$$\textit{ordonata} \quad y = f(x),$$
$$\textit{panta tangentei} \quad p = y' = f'(x).$$

III. — FUNCŢII NELINIARE.

284. Funcţia $y = x^2$. Am văzut (pag. 272) că funcţia $y = x^2$ e reală şi finită pentru orice valoare reală a lui x dela $-\infty$ până la $+\infty$ şi că imaginea ei geometrică e o *parabolă* C (*fig.* 58).

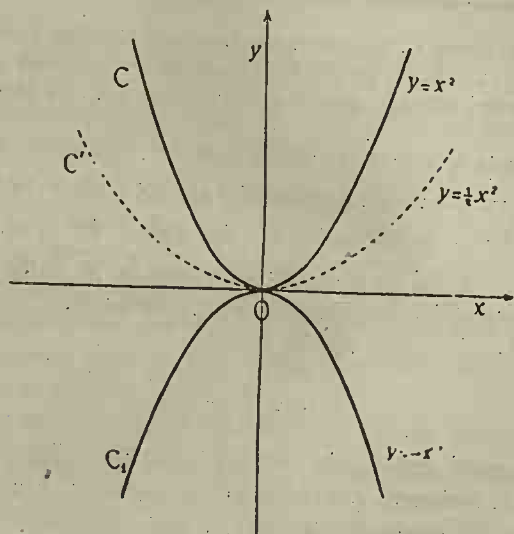


Fig. 58.

Panta acestei parabole variază cu valoarea lui x şi e dată de formula

$$p = 2x.$$

Când x variază dela $-\infty$ până la 0, funcţia $y = x^2$ *descreşte* dela $+\infty$ până la 0, panta p e *negativă* şi curba e *scoborîtoare*.

Pentru $x = 0$ avem $y = 0$ şi $p = 0$.

Când x creşte dela 0 până la $+\infty$, funcţia y *creşte* dela 0 până la $+\infty$, panta e *pozitivă* şi curba e *urcătoare*.

Funcţia $y = x^2$ are o valoare *minimă* $y = 0$ pentru $x = 0$, adică în *origine*. In acest punct parabola C e *tangentă la axa* Ox.

Pentru două valori simetrice ale variabilei x, valorile lui y sunt *egale* şi punctele corespunzătoare ale curbei sunt aşezate simetric faţă de axa Oy. De aceea zicem că Oy e o *axă de simetrie* a curbei C.

Punctul O se numeşte *vârful* parabolei. Curba C, având forma din figura 58, vom zice că *îşi întoarce concavitatea spre y pozitiv.*

Toată această discuţie se poate rezumà în tabloul următor:

$$y = x^2, \quad p = 2x.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	descreşte	0 minim	creşte	$+\infty$
p		$-$	0	$+$	

OBSERVARE. Curba C, dacă e construită cu preciziune pe o hârtie milimetrică, ne poate folosì ca tablă de patrate. In adevăr, patratul unui număr real α se poate obţine măsurând *ordonata* punctului de pe parabola C, cu abscisa α.

285. Funcţia $y = ax^2$. CAZUL $a > 0$.

Pentru $a = 1$ avem parabola C (*fig.* 58).

Pentru $a = \frac{1}{2}$ avem curba C′ din figura 42 (pag. 280). Pentru o aceeaş valoare a lui x, ordonata punctului de pe curba C′ e *jumătate* din ordnata punctului corespunzător de pe curba C.

Pentru $a = \frac{1}{3}$ avem funcţia

$$y = \frac{1}{3}x^2 \tag{44}$$

reprezentată în mod grafic prin curba C′ din figura 58. Pentru o aceeaş valoare a lui x, ordonata punctului de pe curba C′ e *a treia parte* din ordonata punctului corespunzător de pe curba C.

In general, pentru $a = \frac{1}{n}$ avem ecuaţia

$$y = \frac{1}{n}x^2$$

care reprezintă o curbă ale cărei ordonate sunt a *a n-a parte* din ordonatele punctelor corespunzătoare de pe curba C. Toate aceste curbe sunt *parabole.*

Funcţiile $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, ... şi în general

$$y = ax^2 \quad \text{cu} \quad a > 0 \tag{45}$$

sunt reprezentate tot prin *parabole* analoage cu C, în care ordonatele punctelor de pe curba C sunt dublate, triplate, ..., în general înmulţite cu a.

OBSERVARE. Prin înmulţirea cu $a<1$ toate ordonatele $(\neq 0)$ *se micşorează* şi curba corespunzătoare e aşezată între curba C şi axa Ox.

Prin înmulţirea cu $a>1$ toate ordonatele $(\neq 0)$ *se măresc* şi curba corespunzătoare e aşezată *deasupra* curbei C.

Panta curbei. Din egalităţile

$$y+\Delta y = a(x+\Delta x)^2 = ax^2 + 2ax\Delta x + \Delta x^2$$
$$y \qquad\qquad = ax^2$$

deducem, prin scădere,

$$\Delta y = 2ax\Delta x + a\Delta x^2$$

şi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x.$$

Când Δx tinde spre zero, obţinem expresia *limită*:

$$p = y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax, \tag{46}$$

care e *derivata* funcţiei $y=ax^2$ sau *panta* curbei corespunzătoare, pentru orice valoare a lui a *pozitivă* sau *negativă*.

Variaţia funcţiei. Dacă a e pozitiv, pentru $x=-\infty$ avem $y=+\infty$; pentru $x<0$ panta (46) e *negativă*, curba e *scoborîtoare*; pentru $x=0$ avem $y=0$ şi panta e *nulă*; pentru $x>0$ panta e *pozitivă*, curba e *urcătoare*; pentru $x=+\infty$ avem $y=+\infty$.

Funcţia $y=ax^2$ (cu $a>0$) *descreşte* dela $+\infty$ până la 0, când x variază dela $-\infty$ până la 0 şi *creşte* apoi dela 0 până la $+\infty$, când x variază dela 0 până la $+\infty$.

Funcţia are o valoare *minimă* $y=0$ pentru $x=0$, adică *în origine*.

Toată discuţia precedentă se poate rezumà în tabloul următor:

$$y=ax^2, \quad y'=2ax, \quad a>0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	descreşte	0 minim	creşte	$+\infty$
$y'=p$		$-$	0	$+$	

In toate cazurile, *imaginea geometrică a funcţiei*

$$y=ax^2 \qquad \text{cu} \qquad a>0$$

e o parabolă cu vârful în originea coordonatelor, cu concavitatea întoarsă spre y pozitiv (în sus), *simetrică faţă de axa* Oy *şi tangentă în origine la axa* Ox.

CAZUL $a < 0$. Pentru $a = -1$ avem funcţia

$$y = -x^2.$$

Dacă C_1 (*fig.* 58, pag. 311) e imagineaei geometrică, fiindcă pentru fiecare valoare a lui x ordonatele curbelor

$$(C) \quad y = x^2 \quad \text{şi} \quad (C_1) \quad y = -x^2$$

sunt *simetrice* (egale şi de semne contrare), curba C_1 e *o parabolă simetrică cu parabola* C *faţă de axa* Ox.

Să considerăm, în general, funcţia

$$(47) \qquad y = ax^2 \quad \text{cu} \quad a < 0.$$

Panta curbei corespunzătoare e dată de formula (46)

$$p = y' = 2ax.$$

Variaţia funcţiei. Pentru $x = -\infty$ avem $y = -\infty$; pentru $x < 0$ panta e *pozitivă*, curba e *urcătoare*; pentru $x = 0$ avem $y = 0$ şi panta e *nulă*; pentru $x > 0$ panta e *negativă*, curba e *scoborîtoare*; pentru $x = -\infty$ avem $y = -\infty$.

Funcţia $y = ax^2$ (cu $a < 0$) *creşte* dela $-\infty$ până la 0, când x variază dela $-\infty$ până la 0 şi *descreşte* apoi dela 0 până la $-\infty$, când x variază dela 0 până la $+\infty$.

Funcţia are o valoare *maximă* $y = 0$ pentru $x = 0$ adică *în origine.*

Toată discuţia precedentă se poate rezumà în tabloul următor:

$$y = ax^2, \qquad y' = 2ax, \qquad a < 0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	creşte	0 maxim	descreşte	$-\infty$
$y' = p$		$+$	0	$-$	

OBSERVARE. Pentru $a < -1$ curba $y = ax^2$ e aşezată *dedesubtul* curbei C_1; pentru $-1 < a < 0$ curba e aşezată între axa Ox şi curba C_1 (*fig.* 58).

In toate cazurile, *imaginea geometrică a funcţiei*

$$y = ax^2 \quad \text{cu} \quad a < 0$$

e o parabolă cu vârful în originea coordonatelor, cu concavitatea întoarsă spre y negativ (în jos), *simetrică faţă de axa* Oy *şi tangentă în origine la axa* Ox.

286. Funcţia $y = ax^2+bx+c$. Să considerăm acum cazul general, când avem o funcţie reprezentată printr'un *trinom de gradul al doilea*:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{48}$$

Pentru $a = 0$ trinomul se reduce la funcţia *liniară* $y = bx + c$ şi imaginea geometrică e o *linie dreaptă* [279].

Vom presupune dar coeficientul $a \neq 0$.

1⁰. Pentru orice valoare reală şi finită dată variabilei x, trinomul ax^2+bx+c capătă o valoare *bine determinată, reală* şi *finită*.

2⁰. y_0 fiind un număr dat în mod arbitrar, ne întrebăm dacă există una sau mai multe valori reale, care puse în locul lui x să deà trinomului (48) valoarea y_0.

Pentru a găsì aceste valori, e de ajuns să rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = y_0$$

sau

$$ax^2 + bx + c - y_0 = 0. \tag{49}$$

D i s c u ţ i e. Dacă $b^2 - 4a(c-y_0)$ e *pozitiv* [234], ecuaţia (49) admite *două* rădăcini reale şi neegale x_0' şi x_0'' şi pentru fiecare dintre aceste valori trinomul (48) capătă valoarea y_0.

Dacă $b^2 - 4a(c-y_0)$ e *nul*, ecuaţia (49) admite o singură rădăcină reală (dublă: $x_0' = x_0''$) şi există numai *o singură* valoare x_0' pentru care trinomul (48) capătă valoarea y_0.

Dacă $b^2 - 4a(c-y_0)$ e *negativ*, ecuaţia (49) are rădăcinile *imaginare*; prin urmare nu găsim niciun număr real x, pentru care y să capete valoarea y_0.

3⁰. Derivata funcţiei. Ca să determinăm *derivata* funcţiei

$$\text{(I)} \quad y = ax^2 + bx + c \tag{50}$$

sau *panta* curbei reprezentată prin această ecuaţie, facem următoarele operaţii:

O p e r a ţ i a I: Dăm lui x o creştere Δx şi calculăm valoarea corespunzătoare a funcţiunii

$$y + \Delta y = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c$$

sau

$$\text{(II)} \quad y + \Delta y = ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + bx + b\Delta x + c.$$

O p e r a ţ i a II. Scădem egalitatea (I) din (II) şi obţinem creşterea funcţiunii y

$$\Delta y = (2ax+b)\Delta x + a\Delta x^2,$$

Operaţia III. Impărţim ambii membri ai acestei egalităţi cu Δx şi găsim raportul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + x\Delta x.$$

Operaţia IV. *Căutăm valoarea limită a acestui raport, când Δx tinde către zero:*

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b.$$

Prin urmare, *derivata* funcţiei $y = ax^2 + bx + c$ este

(51) $$y' = 2ax + b.$$

Panta tangentei în orice punct al curbei (I) e dată prin formula

(52) $$p = y' = 2ax + b.$$

4⁰. Punctele de pe axa Ox. Punctele curbei situate pe axa Ox au *ordonata nulă*. Absciselc lor sunt valorile lui x pentru care y e *nul*, adică rădăcinile ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

5⁰. Punctele de pe axa Oy. Punctele curbei situate pe axa Oy au *abscisa nulă*. Ordonatele lor sunt valorile lui y pentru care x e *nul*. Făcând $x = 0$, găsim $y = c$. Prin urmare c e *ordonata la origine* a curbei.

6⁰. Variaţia funcţiei. Ca să studiem *variaţia* funcţiei

$$y = ax^2 + bx + c,$$

o scriem sub forma

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[(x-\alpha)^2 \mp \beta^2\right]$$

punând, pentru prescurtare,

(53) $$\frac{b}{2a} = -\alpha \qquad \text{şi} \qquad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \pm\beta^2$$

şi luând înaintea lui β^2, în egalitatea (53), semnul $+$ sau $-$ după cum $b^2 - 4ac$ e *pozitiv* sau *negativ*. Avem astfel

(54) $$y = az \qquad \text{cu} \qquad z = (x-\alpha)^2 \mp \beta^2.$$

Derivata (51) se poate scrie şi ea sub forma

(55) $$p = y' = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 2a(x-\alpha) \qquad \text{cu} \qquad \alpha = -\frac{b}{2a}.$$

In funcţia z (54) variază numai termenul $(x-\alpha)^2$.

Trinomul y are *acelaş semn* sau *semn contrar* cu z, după cum a e *pozitiv* sau *negativ*.

Pentru $x=\alpha-h$ şi $x=\alpha+h$ diferenţa $x-\alpha$ capătă respectiv valorile $-h$ şi $+h$ iar $(x-\alpha)^2$ are valoarea h^2. Prin urmare pentru două valori ale lui x *simetrice faţă de* α (adică pentru $\alpha-h$ şi $\alpha+h$) z şi y au valori *egale*: curba e *simetrică faţă de dreapta* $x=\alpha$.

Cazul $a>0$. Pentru $x=-\infty$ sau $x=+\infty$ formulele (54) ne dau $z=+\infty$ şi $y=+\infty$.

Când x variază dela $-\infty$ până la α, $(x-\alpha)^2$ descreşte dela $+\infty$ până la 0; z descreşte dela $+\infty$ până la $\mp\beta^2$ şi funcţia $y=az$ *descreşte* dela $+\infty$ până la $\mp a\beta^2$.

Când x variază dela α până la $+\infty$, $(x-\alpha)^2$ creşte dela 0 până la $+\infty$; z creşte dela $\mp\beta^2$ până la $+\infty$ şi $y=az$ *creşte* dela $\mp a\beta^2$ până la $+\infty$.

Formula (55) ne arată că pentru $x<\alpha$ panta curbei e *negativă*: curba e *scoborîtoare*; pentru $x>\alpha$ panta curbei e *pozitivă* şi curba e *urcătoare* (*fig.* 59, 60, 61; pag. 318).

Imaginea geometrică a funcţiei

$$y=ax^2+bx+c \quad \text{cu} \quad a>0$$

e o *parabolă, care îşi întoarce concavitatea spre y pozitiv* (în sus).

Funcţia are o valoare *minimă*

(56) $$y_1=\mp a\beta^2 \quad \text{pentru} \quad x_1=\alpha=-\frac{b}{2a}.$$

Punctul cu coordonatele x_1, y_1 e *vârful* parabolei. Abscisa vârfului e rădăcina ecuaţiei

$$y'=0 \quad \text{sau} \quad 2ax+b=0;$$

prin urmare: în vârf panta parabolei e *nulă* şi tangenta la curbă e *paralelă cu axa* Ox.

Toată această discuţie se poate rezumà în tabloul următor:

$$y=ax^2+bx+c, \quad a>0; \quad \alpha=-\frac{b}{2a}, \quad \mp\beta^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
y	$+\infty$	descreşte	$\mp a\beta^2$ minim	creşte	$+\infty$
$p=y'$		$-$	0	$+$	

Distingem trei cazuri: 1⁰. $b^2-4ac>0$. Rădăcinile ecuaţiei

(50) $$ax^2+bx+c=0$$

sunt *reale* şi *neegale*. In formula (53) trebue să luăm semnul — înaintea lui β^2 şi formula (56) ne dă

$$y_1 = -a\beta^2 < 0.$$

Vârful parabolei e *sub axa* Ox (*fig.* 59). Curba e tăiată de axa Ox în *două* puncte (M', M''), care au ca abscise rădăcinile ecuaţiei (50).

2°. $b^2 - 4ac = 0$. Rădăcinile ecuaţiei (50) sunt *reale* şi *egale*. Avem $\beta = 0$ şi $y_1 = 0$. Parabola e *tangentă la axa* Ox în vârful ei $A(x_1 = \alpha, y_1 = 0)$. Curba se găseşte *deasupra axei* Ox (*fig.* 60).

3°. $b^2 - 4ac < 0$. Rădăcinile ecuaţiei (50) sunt *imaginare*. In formula (53) trebue să luăm semnul — înaintea lui β^2 şi formula (56) ne dă

$$y_1 = a\beta^2 > 0.$$

Vârful parabolei (A) e *deasupra* axei Ox (*fig.* 61). Curba rămâne toată deasupra axei Ox.

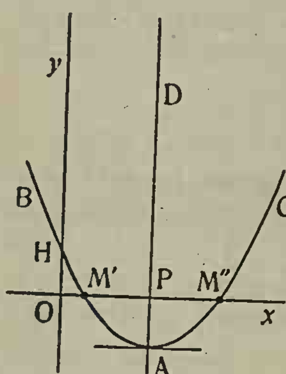


Fig. 59.

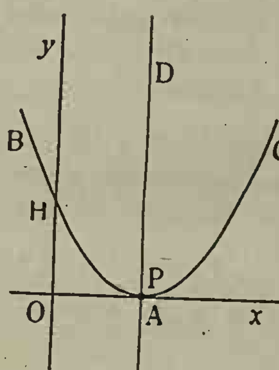


Fig. 60.

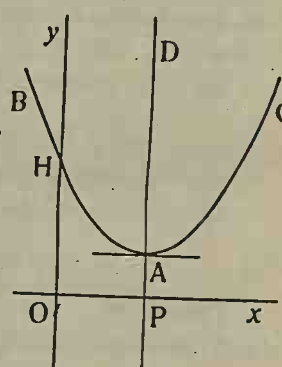


Fig. 61.

EXEMPLU. Ecuaţia $y = x^2 - 5x + 4$ cu $a = 1 > 0$ reprezintă o *parabolă* cu concavitatea întoarsă spre $y > 0$ (în sus). Avem $y' = 2x - 5$.

Rezolvând ecuaţia $y = 0$ sau $x^2 - 5x + 4 = 0$ găsim că parabola taie axa Ox în punctele $x = 1$ şi $x = 4$. Făcând $x = 0$ găsim că parabola taie axa Oy în punctul $y = 4$.

Rezolvând ecuaţia $y' = 0$ sau $2x - 5 = 0$ găsim că vârful parabolei are abscisa $x = \frac{5}{2}$ şi ordonata

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 . \left(\frac{5}{2}\right) + 4 = -\frac{9}{4}.$$

Parabola e simetrică faţă de dreapta $x = \frac{5}{2}$.

Cazul $a < 0$. Pentru $x = -\infty$ sau $x = +\infty$ formulele (54) ne dau $z = +\infty$ şi $y = -\infty$.

Când x variază dela $-\infty$ până la α, z descreşte dela $+\infty$ până la $\mp\beta^2$ şi funcţia $y = az$ *creşte* dela $-\infty$ până la $\mp a\beta^2$.

Când x variază dela α până la $+\infty$, z creşte dela $\mp\beta^2$ până la $+\infty$ şi $y=az$ *descreşte* dela $\mp a\beta^2$ până la $-\infty$.

Formula (55) ne arată că pentru $x<\alpha$ panta curbei e *pozitivă*: curba e *urcătoare*; pentru $x>\alpha$ panta e *negativă* şi curba e *scoborîtoare*.

Imaginea geometrică a funcţiei

$$y=ax^2+bx+c \qquad \text{cu} \qquad a<0$$

e o *parabolă, care îşi întoarce concavitatea spre* y *negativ* (în jos).

Funcţia are o valoare *maximă*

(57) $$y_1=\mp a\beta^2 \qquad \text{pentru} \qquad x_1=\alpha=-\frac{b}{2a}.$$

Punctul cu coordonatele x_1, y_1 e *vârful* parabolei. Abscisa vârfului e rădăcina ecuaţiei

$$y'=0 \qquad \text{sau} \qquad 2ax+b=0;$$

prin urmare: în vârf panta parabolei e *nulă* şi tangenta la curbă e *paralelă cu axa* Ox.

Toată această discuţie se poate rezumà în tabloul următor:

$$y=ax^2+bx+c, \quad a<0; \quad \alpha=-\frac{b}{2a}, \quad \mp\beta^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
y	$-\infty$	creşte	$\mp a\beta^2$ maxim	descreşte	$-\infty$
$p=y'$		$+$	0	$-$	

Distingem trei cazuri: 1⁰. $b^2-4ac>0$. Rădăcinile ecuaţiei

(50) $$ax^2+bx+c=0$$

sunt *reale* şi *neegale*. In formula (53) trebue să luăm semnul $-$ înaintea lui β^2 şi formula (57) ne dă $y_1=-a\beta^2>0$.

Vârful parabolei e *deasupra* axei Ox. Curba e tăiată de axa Ox în *două* puncte, care au ca abscise rădăcinile ecuaţiei (50).

2⁰. $b^2-4ac=0$. Rădăcinile ecuaţiei (50) sunt *reale* şi *egale*.

Avem $\beta=0$ şi $y_1=0$. Parabola e tangentă la axa Ox în vârful ei. Curba se găseşte *dedesubtul axei* Ox.

3⁰. $b^2-4ac<0$. Rădăcinile ecuaţiei (50) sunt *imaginare*. In formula (53) trebue să luăm semnul $+$ înaintea lui β^2 şi formula (57) ne dă

$$y_1=a\beta^2<0.$$

Vârful parabolei e *dedesubtul* axei Ox. Curba rămâne toată dedesubtul axei Ox.

EXEMPLU. Ecuaţia $y=3+7x-5x^2$ cu $a=-5<0$ reprezintă o *parabolă* cu concavitatea întoarsă spre $y<0$ (în jos). Avem $y'=-10x+7$.

Rezolvând ecuaţia $y=0$ sau $-5x^2+7x+3=0$ găsim rădăcinile *imaginare*; prin urmare curba nu taie axa Ox.

Făcând $x=0$ găsim că parabola taie axa Oy în punctul $y=3$.

Rezolvând ecuaţia $y'=0$ sau $-10x+7=0$ găsim că vârful parabolei are abscisa $x=\frac{7}{10}=0,7$ şi ordonata

$$y=3+7.(0,7)-5.(0,7)^2=5,45.$$

Parabola e simetrică faţă de dreapta $x=0,7$.

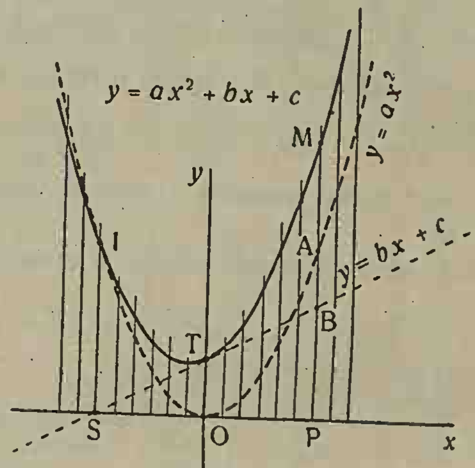


Fig. 62.

OBSERVARE. Dacă avem construită parabola

$$(P') \quad y=ax^2,$$

ca să deducem din ea parabola

$$(58) \qquad (P) \quad y=ax^2+bx+c$$

e de ajuns să construim dreapta

$$(D) \quad y=bx+c.$$

şi să observăm că, dacă M, A şi B sunt trei puncte, corespunzătoare la o aceeaş valoare a lui x, situate pe liniile (P), (P') şi (D) respectiv (*fig.* 62), egalitatea

$$y=(ax^2)+(bx+c)$$

ne dă construcţia:

$$PM=PA+PB.$$

La punctul O corespunde punctul T, unde parabola (P) e tangentă la dreapta (D). La punctul S, intersecţia dreptei (D) cu axa Ox, corespunde punctul I, intersecţia parabolelor (P) şi (P').

La dreapta ordonatei SI parabola (P) e *deasupra* parabolei (P'); la stânga ordonatei SI parabola (P) e *dedesubtul* parabolei (P').